N° d'ordre : 1281

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

(Mathématiques appliquées)

par

Marie BERGOUNIOUX

ANALYSE DE SENSIBILITE D'UN PROBLEME PARAMETRE, EN OPTIMISATION : ETUDE GLOBALE ET LOCALE DES VARIATIONS D'UNE SOLUTION

Thèse soutenue le mardi 25 Juin 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury		
	P. POUZET	Président
	J. DENEL	Rapporteur
	P. ANTOINE	Examinateurs
	NGUYEN VAN HIEN	

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOCT Jacques	Chimie
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie
M.	MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	STANKIEWICZ François	S.E.S.
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M.	DENEL Jacques	I.E.E.A.
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle	DESSAUX Odile	Chimie
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie
M.	DHAINAUT André	Biologie
Mme	DHAINAUT Nicole	Biologie
M.	DORMARD Serge	S.E.S.
M.	DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M.	DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M.	FAKIR Sabah	Mathématiques
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	FOUQUART Yves	Physique
M.	FRONTIER Serge	Biologie
M.	GAMBLIN André	G.A.S.
M.	GLORIEUX Pierre	Physique
M.	GOBLOT Rémi	Mathématiques
M.	GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie
M.	GREGORY Pierre	I.P.A.
M.	GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M.	GREVET Patrice	S.E.S.
M.	GUILBAULT Pierre	Biologie
M.	HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M.	HERMAN Maurice	Physique
M.	JACOB Gérard	I.E.E.A.
M.	JACOB Pierre	Mathématiques
M.	JEAN Raymond	Biologie
M.	JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël	I.P.A.
M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jean	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. NAVARRE Christian	I.P.A.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Pierre POUZET, Professeur à l'Université de Lille I, d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Que Monsieur Jacques DENEL, Professeur à l'Université de Lille I, soit assuré de ma plus vive reconnaissance pour l'attention constante portée à l'égard de ce travail, pour les remarques, conseils, qu'il m'a prodigués depuis le début de sa réalisation.

Je suis très honoré de la présence de Monsieur P. ANTOINE, Professeur à l'Université de Lille I et de Monsieur NGUYEN VAN HIEN, Professeur à l'Université de Namur.

Enfin, mes remerciements vont à Madame Françoise TAILLY et à Monsieur Henri GLANC, pour la réalisation matérielle de cette thèse.

NOTATIONS - DÉFINITIONS.

Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$ on note $P(\lambda,\mu)$ le problème d'optimisation paramétré suivant :

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Min } f(x, \lambda) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x, \lambda) \le \mu_i \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x, \lambda) = \mu_i \end{array}\right.$$

f est la fonction *objectif* de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ les fonctions h_i, $i \in \{1,\dots,m\}$ sont les *contraintes* (de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$)

$D(\lambda,\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall i \in \{1,\dots,s\}\ h_i(x,\lambda) \le \mu_i \text{ et } \forall i \in \{S+1,\dots,m\}\ h_i(x,\lambda)=\mu_i\}$ est le *domaine réalisable* de $P(\lambda,\mu)$.

$\bar{x}$ est une *solution locale* de $P(\lambda,\mu)$ si $\bar{x} \in D(\lambda,\mu)$ et si on peut trouver un voisinage V de $\bar{x}$, dans $D(\lambda,\mu)$ tel que :

$$\forall x \in V \quad f(\bar{x},\lambda) \le f(x,\lambda)$$

Sauf mention expresse du contraire quand on parlera de solution de $P(\lambda,\mu)$, il s'agira d'une solution locale.

Soit $S(\lambda,\mu)$ *l'ensemble des solutions* de $P(\lambda,\mu)$.

Dans le cas où $\mu = 0$.

$D(\lambda) = D(\lambda,0)$ est le domaine réalisable de $P(\lambda)$.

$S(\lambda)$ est l'ensemble des solutions de $P(\lambda)$.

Si $P(\lambda)$ a une solution locale unique dans un voisinage donné, on note $x(\lambda)$ cette solution et $u(\lambda)$ le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé s'il est unique.

Plus généralement.

x est un point *stationnaire* pour $P(\lambda)$ si x est dans $D(\lambda)$ et si on peut trouver u dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant les conditions de K.T du 1er ordre :

$$\left[\begin{array}{l} \nabla f(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(x,\lambda) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad u_i \geq 0 \text{ et } h_i(x,\lambda) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \qquad h_i(x,\lambda) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad u_i\, h_i(x,\lambda) = 0 \end{array}\right.$$

On note alors $K(x,\lambda)$ l'ensemble des multiplicateurs u associés à x.
On appelle fonction *marginale* ou fonction *valeur optimale* la fonction

$$f_{min} : \mathbb{R}^q \to \bar{\mathbb{R}}$$
$$\lambda \to \begin{cases} f(x(\lambda),\lambda) \text{ où } x(\lambda) \in S(\lambda) \text{ si } S(\lambda) \neq \emptyset \\ \infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $L(x,u,\lambda)$ le lagrangien du problème $P(\lambda)$

$$L(x,u,\lambda) = f(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{m} u_i\, h_i(x,\lambda)$$

ENSEMBLES D'INDICES.

Une contrainte h_i est *active* en x de $D(\lambda)$ si $hi(x,\lambda) = 0$, où hi est une contrainte en inégalité.
$E(x,\lambda)$ est l'ensemble des indices des contraintes de $P(\lambda)$ actives en x (de $D(\lambda)$) :

$$E(x,\lambda) = \{i \in \{1,\dots,s\} \,/\, hi(x,\lambda) = 0\}$$

$$E(x,0) = E(x) \text{ quand } x \in D(0).$$

Si $\bar{x} \in S(0)$ et $\bar{u}$ est un multiplicateur associé.

$$\left.\begin{array}{l} I = \{i \in \{1,\dots,s\} \,/\, h_i(\bar{x},o) = 0 \text{ et } \bar{u}_i > o\} \\ \\ K = \{i \in \{1,\dots,s\} \,/\, h_i(\bar{x},o) = 0 \text{ et } \bar{u}_i = o\} \end{array}\right] \; I \cup K = E(\bar{x})$$

$$J = \{i \in \{1,\dots,s\} \,/\, h_i(\bar{x},o) < 0\}$$

NOTATIONS DE TOPOLOGIE ET MATRICIELLES.

- Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$

  $x = (x_1,\dots,x_n)$
  (x,y) produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
  $||x||$ norme euclidienne de x sur $\mathbb{R}^n$.
  $|t|$ valeur absolue de t sur $\mathbb{R}$.
  $V(x)$ ensemble des voisinages de $\bar{x}$.
  Si $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{A}$ est l'adhérence de A.

- Si M est une matrice , M^t est sa transposée.
  Si G est carrée inversible, $M^* = (M^t\, G^{-1}\, M)^{-1}\, M^t\, G^{-1}$ (pseudo-inverse).

I_n est la matrice identité d'ordre n

$P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la $i^{\text{ème}}$ projection.
$\quad x \to x_i$

DERIVATION

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$; f et g C^1 respectivement au voisinage de $\bar{x}$ et $(\bar{x},\bar{\lambda})$
$\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^q$

$\nabla_x f(\bar{x}) = f(\bar{x})$ gradient de f en $\bar{x}$.

$\nabla_\lambda g(\bar{x},\bar{\lambda}) = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\bar{x},\bar{\lambda})$ dérivée partielle par rapport au paramètre en $(\bar{x},\bar{\lambda})$.

$\nabla^2 f(\bar{x}) = \nabla_{xx} f(\bar{x})$ Hessien de f en $\bar{x}$.

$\nabla_{x\lambda}\, g(\bar{x},\bar{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\ \nabla g(\bar{x},\bar{\lambda}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \lambda}\,(\bar{x},\bar{\lambda})$.

$f'(\bar{x};z) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x}+tz) - f(\bar{x})}{t}$ avec z dans $\mathbb{R}^n$

$f'_+(\bar{x};z) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x}+tz)-f(\bar{x})}{t}$

$f'^+(\bar{x};z) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{x}+tz)-f(\bar{x})}{t}$

INTRODUCTION

Dans tout ce travail on va considérer un problème d'optimisation paramétré par $\lambda \in \mathbb{R}^q$, $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{Min } f(x,\lambda) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x,\lambda) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x,\lambda) = 0 \end{array} \right.$$

f est la fonction objectif du problème, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sont les contraintes.

Le but de ce travail est de faire une analyse de sensibilité du problème $P(\lambda)$. L'analyse de sensibilité d'un problème d'optimisation consiste à évaluer l'incidence d'une petite variation du paramètre sur la valeur optimale du problème et sur les solutions. (Le problème a été parfaitement étudié dans le cas d'un objectif et de contraintes linéaires. On ne fera donc ici aucune hypothèse de linéarité sur l'objectif et les contraintes).

On va donc étudier ce qui se passe lorsque le paramètre λ varie dans un voisinage de λ_o ($\lambda_o = 0$ en pratique), c'est à dire plus précisément étudier le comportement de la fonction "valeur optimale" f_{min} au voisinage de $\lambda = 0$; ceci implique de s'intéresser aux variations d'une solution $x(\lambda)$ et des multiplicateurs de Kuhn et Tucker associés $u(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = 0$.

On se propose donc, moyennant un éventail d'hypothèses "classiques" d'estimer les dérivées directionnelles (quand elles existent) de $x(\lambda)$, $u(\lambda)$ et f_{min}, en 0.

Après avoir abordé le problème dans un cadre général on s'intéressera plus particulièrement à deux problèmes :

Problème $P_1(\lambda)$: On fait varier la fonction objectif de manière linéaire

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Min } f(x,\lambda) = g(x) + (a+\lambda, x) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x) = 0 \end{array}\right.$$

où a et λ sont dans $\mathbb{R}^n$.

Problème $P_2(\lambda)$: On fait varier des contraintes de borne

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Min } f(x) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x) = 0 \\ \forall j \in \{1,\dots,n\} & x_j \geq \lambda_j \end{array}\right.$$

où $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dans le chapitre I on fera le point sur les résultats généraux existant sur la question pour mettre en évidence des hypothèses "minimales" (par exemple, contrainte de qualification). On étudiera plus spécialement le cas simple où l'hypothèse de stricte complémentarité en un point solution $\bar{x}$ est assurée. Ces différents résultats seront appliqués aux deux problèmes (P_1) et (P_2). Le cas (le plus intéressant en pratique) où la stricte complémentarité n'est plus assurée sera développé dans le chapitre II. Après avoir imposé des hypothèses fortes au tout début du chapitre, on montrera par la suite qu'on peut les affaiblir et on en tirera ainsi un résultat général sous des hypothèses "raisonnables". Dans un chapitre III on étudiera en détail les problèmes (P_1) et (P_2) à la lumière des résultats précédents. Enfin un chapitre IV sera consacré à quelques méthodes de résolution de problèmes quadratiques et à l'ébauche d'une mise en oeuvre algorithmique des résultats établis précédemment.

On supposera dans tout le travail que les fonctions objectif et contraintes des différents problèmes d'optimisation envisagés sont au moins C^1 par rapport aux deux variables x et λ.

CHAPITRE I

UN APERÇU DES RÉSULTATS EXISTANTS ET DE LEURS LIMITES.

-

On va, dans un premier temps, faire le point sur l'aspect "global" du problème, c'est à dire sur la dérivabilité de la fonction valeur-optimale f_{min}.
On va pouvoir ainsi dégager des hypothèses "minimales". En effet on va voir très rapidement qu'il faut imposer une contrainte de qualification si on veut avoir des résultats significatifs, résultats bien améliorés moyennant des hypothèses classiques supplémentaires.

On envisagera ensuite l'aspect local et on se placera au voisinage d'une solution locale $\bar{x}$ du problème P(0). Les résultats obtenus porteront alors sur la solution $x(\lambda)$ de $P(\lambda)$ et le (les) multiplicateur(s) associé(s) $u(\lambda)$.
C'est cet aspect local qui sera par la suite privilégié.

A - RÉSULTATS GLOBAUX SUR LA FONCTION "VALEUR-OPTIMALE" F_{MIN}.

1 - UNE CONTRAINTE DE QUALIFICATION.

Soit (P) le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^x \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \ h_i(x) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \ h_i(x) = 0 \end{array} \right.$$

Dans tout le chapitre on considérera l'hypothèse suivante qui est la contrainte de qualification de Mangasarian-Fromovitz en un point x du domaine réalisable de (P)

$$H_o(x) \begin{cases} \text{i/} \quad \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ \qquad \forall i \in \{i \in \{1,\dots,s\}/h_i(x) = 0\} \quad (\nabla h_i(x),y) < 0 \\ \qquad \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad (h_i(x),y) = 0 \\ \text{ii/} \ (\nabla h_i(x)/i \in \{s+1,\dots,m\}) \text{ sont linéairement indépendants} \end{cases}$$

On notera $E(x) = \{i \in \{1,\dots,s\}/h_i(x) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes actives en x.

A partir du chapitre II et dans tout le reste du travail, on aura besoin d'une condition plus forte due à Hestenes :

$$H_1(x) \left\{ \quad (\nabla h_i(x) \ / \ i \in E(x) \cup \{s+1,\dots,m\}) \text{ sont linéairement indépendants} \right.$$

Cela signifie que les gradients "actifs" en x (c'est à dire correspondant aux contraintes actives en x, y compris en égalité) sont linéairement indépendants.

<u>*Proposition A.1.1.*</u> *Comparaison des contraintes de qualification* (Peterson [91])

$H_1(x) \Rightarrow H_o(x)$

2 - RESULTATS GENERAUX SUR UN PROBLEME PARAMETRE.

Soit le problème paramétré $P(\lambda,\mu)$ suivant :

$$P(\lambda,\mu)\ \left[\begin{array}{l} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x,\lambda) \le \mu_i \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ h_i(x,\lambda) = \mu_i \end{array}\right.$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^q$ et $\mu \in \mathbb{R}^m$.

On note $D(\lambda,\mu)$ le domaine réalisable de $P(\lambda,\mu)$.
Pour (λ,μ) dans $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$, on suppose que $P(\lambda,\mu)$ possède au moins une solution locale $\bar{x}(\lambda,\mu)$, qui vérifie par conséquent les conditions nécessaires du premier ordre de Kuhn et Tucker.

2.1 - Propriétés des multiplicateurs de Kuhn et Tucker.

Soit $K(\bar{x},\lambda,\mu)$ l'ensemble des multiplicateurs de Kuhn et Tucker associé à $\bar{x}$.

$$K(\bar{x},\lambda,\mu) = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \ / \quad \begin{array}{l} i/\ \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i \ge 0 \\ ii/\ \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i(h_i(\bar{x},\lambda)-\mu_i) = 0 \\ iii/\ \nabla_x f(\bar{x},\lambda) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla_x h_i(\bar{x},\lambda) = 0 \\ iv/\ \nabla_\lambda f(\bar{x},\lambda) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla_\lambda h_i(\bar{x},\lambda) = v \end{array} \right\}$$

On a alors le résultat suivant sur $K(\bar{x},\lambda,\mu)$ (Rockafellar [3])

Théorème A.2.1.1. : *Soit $\bar{x}$ une solution locale de $P(\lambda,\mu)$*
Si H_o est vérifiée en $\bar{x}$
Alors
$K(\bar{x},\lambda,\mu)$ est non vide, compact et connexe.

■ démonstration : cf [1], [3]. ■

On va particulariser ce résultat aux deux cas qui nous intéressent.

i/ Cas du problème (P_1)

$$\begin{aligned} &\text{ici } \mu = 0 \;;\; f(x,\lambda) = g(x) + (a+\lambda,x) \\ &\qquad\qquad \nabla_\lambda f(x,\lambda) = x \\ &\forall i \in \{1,\dots,m\}\ \nabla_\lambda h_i(x,\lambda) = 0 \end{aligned}$$

On note $\nabla_x f(x,\lambda) = \nabla f(x,\lambda)$.

On a alors : $K(\bar{x},\lambda,0) = K(\bar{x},\lambda) \times \{\bar{x}\}$, avec

$$K(\bar{x},\lambda) = \left\{ u \in \mathbb{R}^m / \quad \begin{array}{l} \text{i/ } \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i \geq 0 \\ \text{ii/ } \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i(h_i(\bar{x})) = 0 \\ \text{iii/ } \nabla f(\bar{x},\lambda) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \end{array} \right\}$$

On obtient alors le résultat suivant :

<u>*Proposition A.2.1.2.*</u> *Si $\bar{x}$ est une solution locale de $P_1(\lambda)$*
Si H_0 est vérifiée en $\bar{x}$
alors $K(\bar{x},\lambda)$ est non vide, compact, convexe.

ii/ Cas du problème (P_2)

On va en fait examiné le problème plus général suivant, $\pi(\lambda)$, problème étudié par Gauvin (dans [4])

$$\pi(\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x) \leq \lambda_i \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ h_i(x) = \lambda_i \end{array} \right.$$

Soit $\bar{x}$ une solution locale de $\pi(\lambda)$ et $K(\bar{x},\lambda)$ l'ensemble des multiplicateurs associés.

$$K(\bar{x},\lambda) = \left\{ u \in \mathbb{R}^m / \quad \begin{array}{l} \text{i/ } \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i \geq 0 \\ \text{ii/ } \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i(h_i(\bar{x})-\lambda_i) = 0 \\ \text{iii/ } \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \end{array} \right\}$$

Proposition A.2.1.3. *Soit $\bar{x}$ une solution locale de $\pi(\lambda)$.*
Alors $K(\bar{x},\lambda)$ est non vide, compact, convexe si et seulement si H_o est vérifiée en $\bar{x}$.

On peut donc résumer ces résultats en disant que pour les deux problèmes étudiés ici, sous l'hypothèse H_o en $\bar{x}$ les multiplicateurs correspondants sont bornés.

On va maintenant donner deux types de résultats généraux dus à Rockafellar et à Gauvin que l'on adaptera ensuite aux deux problèmes P_1 et P_2.

2.2 - Propriétés de la fonction "valeur optimale" f_{min} dans le cas d'un problème général $P(\lambda,\mu)$.

On considère le problème $P(\lambda,\mu)$ et on suppose que $D(\lambda,\mu) \subset C$ pour (λ,μ) dans $\mathbb{R}^{q+m}$.

Théorème A.2.2.1. (Rockafellar [3]).
Si $P(0,0)$ a des solutions réalisables.
Si C est compact.
Si H_o est vérifié en tout point $\bar{x}$ solution de $P(0,0)$ alors f_{min} est localement lipschitzienne sur un voisinage de $(\lambda,\mu) = (0,0)$.

□ démonstration : voir [3] □

Rockafellar donne aussi un résultat sur les dérivées directionnelles de f_{min}.
En général f_{min} n'est pas différentiable, ni même dérivable dans une direction donnée.
On introduit les notations suivantes.
Soit $z \in \mathbb{R}^p$ et f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

$$f'_+(0;z) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(tz)-f(0)}{t}$$

$$f'^+(0;z) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{f(tz)-f(0)}{t}$$

$S(\lambda,\mu)$ est l'ensemble des solutions de $P(\lambda,\mu)$. On a alors le résultat suivant (cf. [3]) :

Théorème A.2.2.2. *Si* C *est compact et si* H_o *est vérifiée en tout point solution* $\bar{x}$ *de* $P(0,0)$, *alors pour toute direction* $z = (z_1,z_2)$ *de* $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$ *on a :*

i/ $\underset{\bar{x}\in S(0,0)}{\text{Max}} \left(\underset{(u,v)\in K(\bar{x},0,0)}{\min} (u,z_1)+(v,z_2)\right) \leq f'_{\min+}[(0,0);(z_1,z_2)]$

ii/ $\underset{\bar{x}\in S(0,0)}{\text{Max}} \left(\underset{(u,v)\in K(\bar{x},0,0)}{-\max} (u,z_1)+(v,z_2)\right) \leq f'^{+}_{\min}[(0,0);(z_1,z_2)]$

Corollaire A.2.2.3. *Sous les hypothèses du théorème A.2.2.2.*
Si $S(0,0) = \{\bar{x}\}$ *et si* $K(\bar{x},0,0) = \{\bar{u},\bar{v}\}$
Alors $f_{\min}$ *est différentiable au* $(0,0)$ *et* $\nabla f_{\min}(0,0) = (\bar{u},\bar{v})$

Corollaire A.2.2.3. *Sous les hypothèse de A.2.2.1.*
Si pour toute solution $\bar{x}$ *de* $P(0,0)$ *on a*
$K(\bar{x},0,0) = \{(u(\bar{x}), v(\bar{x})\}$
(Unicité du multiplicateur)
alors
$f_{\min}$ *a une dérivée dans toute direction*
$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{q+m}$ *et*
$f'_{\min}(0;z) = \underset{\bar{x}\in S(0,0)}{-\inf} \{(u(\bar{x}),z_1) + (v(\bar{x}), z_2)\}$

Remarque. Le théorème A.2.2.1 et ses corollaires sont a fortiori vrai si H_o est remplacée par H_1.

2.3 - Résultats généraux sur $f_{\min}$ dans le cas d'un problème paramétré sur les contraintes.

$$\pi(\lambda) \quad \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x) \leq \lambda_i \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x) = \lambda_i \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^m$

$D(\lambda)$ est le domaine réalisable de $\pi(\lambda)$ les résultats suivants sont essentiellement dus à **Gauvin et Tolle.** ([1], [4]).

Quand on cherche des algorithmes de résolution d'un problème du type Min $\{f(x) \,/\, x \in D\}$, les problèmes de convergence sont liés au théorème du maximum de Berge (cf. Annexe) qui fait intervenir des propriétés de continuité d'applications multivoques : $\Delta : x \to \Delta(x) \subset P(\mathbb{R}^m)$.
$\Delta(x)$ est souvent le domaine réalisable d'un sous-problème d'optimisation dépendant de x. (Par exemple $\Delta(x)$ peut être la linéarisation de D en x).

Quand on a un problème de la forme $\pi(\lambda)$ il est donc assez naturel que l'application $\lambda \to D(\lambda)$ joue un rôle important.

Rappelons d'abord quelques définitions : (cf. Hogan [2]).

<u>Définitions</u> : Soit $\lambda \to D(\lambda)$ *une application multivoque de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $P(\mathbb{R}^n)$)

a - <u>Uniforme compacité</u> en un point
D *est uniformément compacte en* λ_o *de* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si il existe un voisinage* N *de* λ_o *tel que* $\overline{\bigcup_{\lambda \in N} D(\lambda)}$ *soit compact.*

b - Application <u>fermée</u> (ou sup-continue) en un point
D *est fermée en* λ *de* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si*

$$\left.\begin{array}{l} \forall (\lambda_n \in \mathbb{R}^m)_{\mathbb{N}} \to \lambda \\ \\ \forall (x_n \in \mathbb{R}^n)_{\mathbb{N}} \to x \text{ telle que } x_n \in D(\lambda_n),\ \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow x \in D(\lambda)$$

c - Application <u>ouverte</u> (ou inf-continue) en un point
D *est ouverte en* λ *de* $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si*

$$\left.\begin{array}{l} \forall (\lambda_n \in \mathbb{R}^m)_{\mathbb{N}} \to \lambda \\ \\ \forall x \in D(\lambda) \end{array}\right\} \exists (x_n \in \mathbb{R}^n)_{\mathbb{N}} \to x,\ \exists n_o : n \geq n_o \Rightarrow x_n \in D(\lambda_n)$$

i - On a un premier résultat portant sur la *continuité* de f_{min} (Gauvin-Tolle [1], [3]).

<u>*Théorème A.2.3.1.*</u> *Si* $D(0)$ *est non vide.*
Si $\lambda \to D(\lambda)$ *est uniformément compacte en* $\lambda = 0$.
Si H_o *est vérifiée en toute solution* $\bar{x}$ *de* $\pi(0)$.
Alors f_{min} *est localement lipschitzienne au voisinage de* $\lambda = 0$.

ii - On a également un résultat analogue au théorème A.2.2.1 portant sur la *différentiabilité* de f_{min}, mais sous des hypothèses plus faibles. (Gauvin [4]).

<u>*Théorème A.2.3.2.*</u> *Sous les hypothèses du théorème A.2.3.1 on a pour toute direction* z *de* $\mathbb{R}^m$

i - $\lambda \to K(\lambda) = \bigcup_{\bar{x}\in S(\lambda)} K(\bar{x},\lambda)$ *est fermée en* 0

ii - $\underset{\bar{x}\in S(0)}{\mathrm{Max}} \left(\underset{u\in K(\bar{x},0)}{\min} (u,z)\right) \leq f'_{min+}(0\ ;\ z)$

iii - $f'^{+}_{min}(0\ ;\ z) \leq \underset{\bar{x}\in S(0)}{\mathrm{Max}} \left(\underset{u\in K(\bar{x},0)}{\max} (u,z)\right)$

où $S(\lambda)$ *est l'ensemble des solutions de* $\pi(\lambda)$
et $K(\bar{x},\lambda)$ *l'ensemble des multiplicateurs associés à* $\bar{x} \in S(\lambda)$.

<u>*Corollaire A.2.3.3.*</u> *Sous les hypothèses du théorème A.2.3.1.*
Si pour toute solution $\bar{x}$ *de* $\pi(0)$, *l'ensemble* $K(\bar{x},0)$ *des multiplicateurs est réduit à* $\{u(\bar{x})\}$
alors
f_{min} *a une dérivée directionnelle dans toute direction* z *de* $\mathbb{R}^m$ *et* $f'_{min}(0\ ;\ z) = \underset{\bar{x}\in S(0)}{\inf} (u(\bar{x}), z)$.

Remarque. i/ Ces résultats sont a fortiori vrais si H_o est remplacée par H_1.

ii/ L'hypothèse d'uniforme compacité est plus faible que l'hypothèse de continuité de D intervenant dans le théorème du maximum de Berge. Ce théorème indique en effet que si l'application multivoque qui, au paramètre λ, associe $D(\lambda)$ est continue en λ_o, alors l'application multivoque qui à λ associe l'ensemble des solutions $S(\lambda)$, est fermée en λ_o. Sous les hypothèses de ce théorème on voit que f_{min} est alors continue au point λ_o. En effet : soit (λ_n) une suite convergeant vers λ_o. $f_{min}(\lambda_n) = f(x_n,\lambda_n)$ où x_n est dans $S(\lambda_n)$.

Si tous les $S(\lambda_n)$ sont dans un compact A (ce qui est le cas dans le théorème de Berge) on peut supposer que la suite (x_n) converge vers x_o (quitte à en extraire une sous-suite).
$f_{min}(\lambda_n) = f(x_n, \lambda_n) \to f(x_o, \lambda_o)$ car f est continue.
Or S est fermée donc $x_o \in S(\lambda_o)$ et donc $f(x_o,\lambda_o) = f_{min}(\lambda_o)$. Par conséquent pour toute suite $(\lambda_n) \to \lambda_o$ on a $\lim\limits_n f_{min}(\lambda_n) = f_{min}(\lambda_o)$. f_{min} est donc continue en λ_o.

Le théorème A.2.3.1 prouve un résultat plus fort : l'hypothèse de continuité de D est remplacée par l'hypothèse d'uniforme compacité (qui permet en outre de se passer de l'hypothèse de compacité de A).

iii/ On voit d'autre part qu'une condition suffisante (moyennant H_o) d'existence de dérivées directionnelles est l'unicité de multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à $\bar{x}$ (solution de $\pi(o)$). On va donc établir maintenant une condition suffisante qui assurera à la fois H_o et cette unicité. Cette condition interviendra par la suite dans tout le travail.

3 - UNICITE DES MULTIPLICATEURS DE KUHN ET TUCKER EN $\bar{x}$, solution de P(0).

On considère le problème

$$P(\lambda) \; : \quad \lambda \in \mathbb{R}^m \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \; h_i(x,\lambda) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x,\lambda) = 0 \end{array} \right.$$

Soît $\bar{x}$ une solution de $P(0)$.
(On appelle $D(\lambda)$ le domaine réalisable de $P(\lambda)$ et $S(\lambda)$ l'ensemble des solutions de $P(\lambda)$).

<u>*Théorème A.3.1.*</u> $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } (H_1) \textit{ est assurée en } \bar{x} \textit{ alors} \\ K(\bar{x}, 0) = \{u(\bar{x})\} \end{array} \right.$

■ démonstration

$\bar{x}$ est une solution de $P(0)$ donc $K(\bar{x},0)$ est non vide, car $\bar{x}$ vérifie les conditions nécessaires de Kuhn et Tucker du premier ordre.

Soît $u \in K(\bar{x},0)$; on a :
$\forall i \in \{1,\dots,s\}$ $u_i \geq 0$ et $u_i h_i(\bar{x},o) = 0$
et

$$(3.1)\nabla f(\bar{x},0) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(\bar{x}, 0) = 0$$

Soît $E(\bar{x})$ l'ensemble des i de $\{1,\dots,s\}$ tels que $h_i(\bar{x},0) = 0$.
On peut partitîonner $\{1,\dots,s\}$ en $E(\bar{x}) \cup J$ et u s'écrît alors $u = (\bar{u}, 0)$ où $\bar{u}$ est îndexé par $E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\}$.

En effet $\forall i \in J$, $h_i(\bar{x},0) < 0$ et donc $u_i = 0$.
Par conséquent (3-1) devient

$$(3.2) \qquad f(\bar{x}, 0) + \sum_{i \in E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\}} \bar{u}_i \nabla h_i(\bar{x},o) = 0$$

Or (H_1) en $\bar{x}$ implîque que $(\nabla h_i(\bar{x}, 0) \ / \ i \in E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\})$ sont lînéaîrement îndépendants.
Donc le système (3.1) possède une solution unique $\bar{u}_o$. Tout élément de $K(\bar{x},o)$ étant de la forme $(\bar{u},0)$ où $\bar{u}$ est solution de (3.1), est de la forme $(\bar{u}_o,0)$ donc

$$K(\bar{x},0) = \{(\bar{u}_o,0) = u_o\}$$

■

<u>Remarque</u>. Sî le problème ne comporte que des înégalîtés le résultat est le même (avec $s = m$).

En gardant les mêmes notations et en utilisant les résultats de 2, cette propriété permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème A.3.2. *Si* $D(0)$ *est non vide et compact et si* H_1 *est vérifiée en tout point* $\bar{x}$ *solution de* $P(0)$ *alors*

f_{min} *est dérivable dans toute direction* z *de* $\mathbb{R}^m$ *et*

$$f'_{min}(0;z)=\lim_{t\to 0^+} \frac{f_{min}(tz)-f_{min}(0)}{t} = \inf_{\bar{x}\in S(0)} (u(\bar{x}),z)$$

où $u(\bar{x})$ *est l'unique multiplicateur associé à* $\bar{x}$.

4 - APPLICATION AU PROBLEME $P_1(\lambda)$.

$$P_1(\lambda) : \begin{cases} \text{Min } g(x) + (a+\lambda , x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x) = 0 \end{cases}$$

Soit D le domaine réalisable de $P_1(0)$.

Théorème A.4.1. *Si* D *est compact et si* H_1 *est vérifiée en tout point* $\bar{x}$ *solution de* $P_1(0)$ *alors*

f_{min} *est localement lipschitzienne au voisinage de* 0 *et*

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \quad f'_{min}(0;z) = \inf_{\bar{x}\in S(0)} (u(\bar{x}),z)$$

où $u(\bar{x})$ *est le multiplicateur unique associé à* $\bar{x}$.

■ démonstration : c'est une application directe du théorème A.2.2.1 et de son corollaire A.2.2.3.

En effet ici $\mu = 0$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \quad D(\lambda,\mu) = D(\lambda, 0) = D$$

on prend comme compact C, l'ensemble D.

■

5 - APPLICATION AU PROBLEME $P_2(\ )$.

$$P_2(\lambda) : \atop \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } f(x),\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,n\} & x_i \ge \lambda_i \end{array} \right.$$

On note $D(\lambda)$ le domaine réalisable.
Ce sont les résultats de 2.2 qui vont être appliqués ici. On va dans un premier temps donner une condition suffisante pour que l'hypothèse d'uniforme compacité de D en 0 soit vérifiée.

5.1 - Nature de l'application D.

Lemme A.5.1.1 : D *est fermée en tout point* $\bar{\lambda}$ *de* $\mathbb{R}^n$.

■ démonstration : soit (λ_k) convergeant vers $\bar{\lambda}$ et $x_k \in D(\lambda_k)$ tel que (x_k) converge vers x. Les inégalités passant à la limite et h_i étant continue pour tout i de {1.m}, il est alors immédiat que

$$h_i(x) \le 0 \text{ pour tout i de } \{1,\dots,m\}$$

et

$$x_i \ge \bar{\lambda}_i \quad \text{pour tout i de } \{1,\dots,n\}$$

c'est à dire $x \in D(\bar{\lambda})$.

■

Remarque : ce lemme va surtout servir dans le chapitre III.

On note $\Delta_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x) \le 0\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ h_i(x) = 0\}$
et $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n\ \Delta(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad x_i \ge \lambda_i\}$

Proposition A.5.1.2 : *Si* $\exists M$ *tel que* $\forall x \in \Delta_1$

$$\sup_{i=1,\dots n} x_i \le M$$

$\lambda \to D(\lambda)$ *est uniformément compacte en* $\lambda = 0$.

Remarque : la condition suffisante de cette proposition est assurée a fortiori si Δ_1 est borné (c'est à dire si Δ_1 est compact car on sait déjà que Δ_1 est fermé).
D'ailleurs, dans ce cas, $D(\lambda) = \Delta_1 \cap \Delta(\lambda)$ est compact pour tout λ et donc l'application $\lambda \to D(\lambda)$ est uniformément compacte en tout point de $\mathbb{R}^n$.

■ démonstration : montrons qu'il existe V voisinage de $\lambda = 0$ tel que $\overline{\bigcup_{\lambda \in V} D(\ )}$ soit compact (c'est à dire borné).
Soit B la boule de centre $\lambda = 0$ et de rayon 1

$$\forall \lambda \in B \qquad ||\lambda|| \leq 1 \text{ donc } \forall i \in \{1,\dots,m\} \quad \lambda_i \geq -1$$

Soit $A = \bigcup_{\lambda \in B} D(\lambda)$

Soit $x \in A$; il existe $\lambda \in B$ tel que $x \in D(\lambda)$

donc $\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad x_i \geq \lambda_i \geq -1$

donc $\inf_{i=1,\dots,n} x_i \geq -1$

$x \in A$ donc $x \in \Delta_1$ et d'après l'hypothèse faite

$$\sup_{i=1,\dots,n} x_i \leq M$$

donc $\forall i \in \{1,\dots,n\} \; |x_i| \leq \sup(M,1)$.

Par conséquent avec $\bar{M} = \sqrt{n}\, \mathrm{Sup}(M,1)$

$$\forall x \in A \qquad ||x|| \leq \bar{M} \quad ; \quad A \text{ est donc borné}$$

Comme A est fermé, A est compact.

■

Remarque : la condition sur Δ_1 est une condition sur les fonctions h_i et peut être précisée suivant les propriétés des h_i (convexité, concavité etc...)

5.2 - Propriétés de f_{min}.

On applique à $P_2(\lambda)$ les résultats de 2.3.

Théorème A.5.2.1. (*Continuité de* f_{min})

Si $D(0) \neq \emptyset$

Si $\exists M$ *tel que* $\forall x \in \Delta_1 \sup_{i=1,\ldots,n} x_i \leq M$

Si H_o *est vérifiée en tout point* $\bar{x}$ *solution de* $P_2(0)$

alors f_{min} *est localement lipschitzienne en* $\lambda = 0$.

Théorème A.5.2.2. (*Différentiabilité de* f_{min})

Si $D(0) \neq \emptyset$

Si $\exists M$ *tel que* $\forall x \in \Delta_1 \sup_{i=1,\ldots,n} x_i \leq M$

Si H_1 *est vérifiée en tout point* $\bar{x}$ *solution de* $P_2(0)$

Alors f_{min} *admet une dérivée directionnelle dans toute direction* z *de* $\mathbb{R}^n$ *et*

$f'_{min}(0;z) = \inf_{\bar{x} \in S(0)} (u(\bar{x}),z)$ *où* $u(\bar{x})$ *est l'unique multiplicateur associé à* $\bar{x}$.

B - ETUDE LOCALE AU VOISINAGE D'UNE SOLUTION : CAS DE LA STRICTE COMPLÉMENTARITÉ.

Aprés avoir établi des résultats globaux sur f_{min}, on va affîner l'étude en s'întéressant aux variations d'une solution de P(0). Pour cela il faut se placer au voisinage d'une solution locale $\bar{x}$ de P(0).
Le problème est de savoir si l'on peut trouver une (éventuellement unique) solution de P(λ) avec λ "petit", dans un voisinage de $\bar{x}$. Pour cela le théorème des fonctions implicites appliqué aux relations de Kuhn et Tucker du 1er ordre est un outil précieux. Toutefois afin d'assurer l'inversion locale requise par ce théorème, il faut que l'on ait stricte complémentarité en $\bar{x}$' c'est à dire qu'on ne peut avoir à la fois $h_i(\bar{x})$ et $\bar{u}_i$ nuls.

C'est cet aspect du problème, sous cette hypothèse (quand même forte) de stricte complémentarité, qu'ont étudié des auteurs comme Fiacco [5], Mc Keown [7], Fletcher.

1 - UTILISATION DIRECTE DU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Précisons d'abord les notations :

On considère

$$P(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}^q \quad \left[\begin{array}{ll} \operatorname{Min} f(x,\lambda) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x,\lambda) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x,\lambda) = 0 \end{array}\right.$$

Soit $\bar{x}$ une solution locale de $P(0)$

$\bar{x}$ vérifie donc les conditions nécessaires du 1er ordre de Kuhn et Tucker.

Il existe $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ vérifiant :

$$(KT) \quad \left[\begin{array}{lll} i - & \nabla f(\bar{x},0) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \nabla h_i(\bar{x},0) = 0 & \\ ii - & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(\bar{x},0) \le 0 & \text{(Réalisabilité de } \bar{x}\text{)} \\ & \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad h_i(\bar{x},0) = 0 & \\ iii - & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad \bar{u}_i \ge 0 & \\ iv - & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad \bar{u}_i h_i(\bar{x},0) = 0 & \text{(Complémentarité)} \end{array}\right.$$

On note $E(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; h_i(\bar{x},0) = 0\}$

On dit que l'hypothèse de *stricte complémentarité* est satisfaite en $(\bar{x},\bar{u})$ si et seulement si $\forall i \in E(\bar{x})$, $\bar{u}_i > 0$.

1.1 - Cas général.

On va appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction suivante.

$$G(x,u,\lambda) = \Big(\nabla f(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(x,\lambda), \quad \underset{i=s+1,\dots,m}{h_i(x,\lambda)}, \; \underset{i=1,\dots,s}{u_i\, h_i(x,\lambda)}\Big)$$

Pour assurer les hypothèses du théorème des fonctions implicites il faut faire les hypothèses suivantes :

i - f et $h_i (i \in \{1,\dots,m\})$ sont C^2 par rapport à (x,λ) au voisinage de $(\bar{x},0)$

ii - H_1 est assurée en $\bar{x}$; i.e :

$(\nabla h_i(\bar{x},0)\ /\ i \in E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\})$ sont linéairement indépendants.

iii - On a stricte complémentarité en $(\bar{x},\bar{u})$, i.e. :

$$\forall i \in E(\bar{x})\ \bar{u}_i > 0$$

iv - La condition suffisante du 2ème ordre de Fiacco-McCormick est vérifiée en $(\bar{x},\bar{u})$ à savoir :
si $(\bar{x},\bar{u})$ vérifie (KT)

$$(CS) \begin{cases} \forall y \neq 0 \text{ tel que} \\ \text{a/ } \forall i \in \{i \in E(\bar{x})/\bar{u}_i>0\} \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),y) = 0 \\ \text{b/ } \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),y) = 0 \\ \text{on a } (y,\ \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)y) > 0 \end{cases}$$

où $L(x,u,\lambda) = f(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x,\lambda)$ (Lagrangien).

<u>*Théorème B.1.1.1.*</u> (Fiacco [5] *théorème 2.1*).

Sous les hypothèses i) à iv)

(a) $\bar{x}$ *est une solution locale isolée de* $P(0)$ *et* $\bar{u}$ *le multiplicateur associé est unique*

(b) *Il existe un voisinage* V *de* $\lambda = 0$ *et une unique fonction* C^1 *par rapport à* λ, *définie de* V *dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *qui à* λ *associe* $(x(\lambda), u(\lambda))$ *telle que* $\forall \lambda \in V$ $(x(\lambda), u(\lambda))$ *vérifie* (KT) *et* (CS) *pour* $P(\lambda)$ *et* $(x(0), u(0)) = (\bar{x},\bar{u})$
Ainsi $x(\lambda)$ *est une solution locale (unique dans* V*) de* $P(\lambda)$ *associée au multiplicateur unique* $u(\lambda)$

(c) *Enfin :* $\forall\lambda \in V$ ii/ *et* iii/ *sont assurées en* $(x(\lambda), u(\lambda))$

□ démonstration : cf Fiacco [5] □

On va toutefois expliciter un peu $x(\lambda)$ et $u(\lambda)$ pour λ dans V.
On définit les matrices suivantes :

$$\frac{dx}{d\lambda} \equiv \left[\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \right]_{(i=1,\dots,n,\ j = 1,\dots,q)}$$

$$\frac{du}{d\lambda} \equiv \left[\frac{\partial u_i}{\partial \lambda_j} \right] \ (i=1,\dots,n,\ j = 1,\dots,q)$$

On pose $y(\lambda) = [x(\lambda), u(\lambda)]^t$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\nabla_x L) \equiv \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial \lambda_j} \right]^t \quad (i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,q)$$

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_1} \equiv \left[\frac{\partial h_i}{\partial \lambda_1},\dots,\frac{\partial h_i}{\partial \lambda_q}\right]^t$$

On a (KT) en $(x(\lambda), u(\lambda))$ (et ce pour tout λ de V) donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla L(x(\lambda), u(\lambda), \lambda) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,s\}\ u_i(\lambda)\ h_i(x(\lambda), \lambda) = 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ \ h_i(x(\lambda), \lambda) = 0 \end{array} \right.$$

En différentiant par rapport à   on obtient :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 L(x(\lambda),u(\lambda),\lambda).\frac{\partial x}{\partial \lambda}(\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \nabla h_i(x(\lambda),\lambda)\ \frac{\partial u_i}{\partial \lambda}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\ \nabla L(x(\lambda),\ u(\lambda),\lambda) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,s\}\ \frac{\partial u_i}{\partial \lambda}(\lambda).h_i(x(\lambda),\lambda)+u_i(\lambda)(\nabla h_i(x(\lambda),\lambda),\ \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\lambda))+u_i(\lambda).\frac{\partial h_i}{\partial \lambda}(x(\lambda),\lambda)=0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h_i(x(\lambda),\lambda),\ \frac{\partial x}{\partial \lambda}\ (\lambda)) + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda}\ (x(\lambda),\ \lambda) = 0 \end{array} \right.$$

C'est à dire (en omettant $x(\lambda)$, $u(\lambda)$ et λ pour plus de clarté)

$$
(2')\quad \begin{cases}
\nabla^2 L \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \sum\limits_{i=1}^{m} \nabla h_i \cdot \dfrac{\partial u_i}{\partial \lambda} = - \dfrac{\partial \nabla L}{\partial \lambda} & \\
u_i(\nabla h_i , \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}) + \quad h_i \cdot \dfrac{\partial u_i}{\partial \lambda} = - u_i \dfrac{\partial h_i}{\partial \lambda} & \forall i \in \{1,\ldots,s\} \\
(\nabla h_i , \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}) \qquad\qquad = - \dfrac{\partial h_i}{\partial \lambda} & \forall i \in \{s+1,\ldots,m\}
\end{cases}
$$

Si on pose

$$
M(\lambda) = \left[\begin{array}{ccccc}
\nabla^2 L(x(\lambda), u(\lambda),\lambda) & \nabla h_1(x(\lambda),\lambda) \;\ldots\ldots & \nabla h_s(x(\lambda),\lambda) & \nabla h_{s+1}(x(\lambda),\lambda) \ldots \nabla h_n(x(\lambda),\lambda) \\
u_1(\lambda)\, \nabla h_1(x(\lambda),\lambda) & h_1(x(\lambda,\lambda) \quad 0 & 0 & \\
\vdots & 0 \;\ddots & 0 & 0 \\
u_s(\lambda)\, \nabla h_s(x(\lambda),\lambda) & 0 \;\ldots & h_s(x(\lambda),\lambda) & \\
\nabla h_{s+1}(x(\lambda),\lambda) & & & \\
\vdots & 0 & & 0 \\
\nabla h_m(x(\lambda),\lambda) & & &
\end{array}\right]
$$

En abrégé

$$
M(\lambda) = \left[\begin{array}{c:c:c}
\nabla^2 L & (\nabla h_i)^t_{\{1,\ldots,s\}} & (\nabla h_i)^t_{\{s+1,\ldots,m\}} \\
\hdashline
(u_i \nabla h_i)_{\{1,\ldots,s\}} & \begin{matrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_s \end{matrix} & 0 \\
\hdashline
(\nabla h_i)_{\{s+1,\ldots,m\}} & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

et

$$
N(\lambda) = \Big[- \frac{\partial \nabla L}{\partial \lambda} (x(\lambda), u(\lambda),\lambda), \; - u_1(\lambda) \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} (x(\lambda),\lambda), \ldots, -u_s(\lambda) \frac{\partial h_s}{\partial \lambda} (x(\lambda),\lambda),
$$
$$
- \frac{\partial h_{s+1}}{\partial \lambda} (x(\lambda),\lambda) \;\ldots\; - \frac{\partial h_m}{\partial \lambda} (x(\lambda),\lambda) \Big]^t
$$

(2') est équivalente à

(3) $$M(\lambda) \frac{dy}{d} (\lambda) = N(\lambda)$$

M est inversible sur V (d'après le théorème B.1.1.1) ; on a donc

$$\frac{dy}{d\lambda} (\lambda) = M^{-1}(\lambda)\ N(\lambda)$$

En particulier $\frac{dy}{d\lambda}(0) = M^{-1}(0)\ N(0)$.

Comme toutes les quantités dans (3) sont continues par rapport à on a aussi

$$\lim_{\lambda \to o} \frac{dy}{d\lambda} (\lambda) = \frac{dy}{d\lambda} (0).$$

En faisant donc une approximation du premier ordre en $\lambda = 0$ on obtient le :

Corollaire B.1.1.2. *Sous les hypothèses du théorème B.1.1.1 on a, dans un voisinage de* $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} x(\lambda) \\ u(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} + \bar{M}^{-1}\ \bar{N}\lambda + o(||\lambda||)$$

où $\bar{x} = x(0)$, $\bar{u} = u(0)$, $\bar{M} = M(0)$ *et* $\bar{N} = N(0)$.

Remarques : i - dans le même cadre on a alors

$$\frac{df_{min}}{d\lambda}(0) = \nabla f(\bar{x},0)\ .\ \frac{dx}{d\lambda}(0)$$

ii - En vue de l'implémentation de ces résultats, Mc Keown [7] a fait des remarques concernant la structure du système (3) On a vu (A.3) que dans un voisinage V de $\lambda = 0$ le multiplicateur $u(\lambda)$ peut s'écrire $(\bar{u}(\lambda), 0)$ où $\bar{u}(\lambda)$ est indexé par les contraintes actives en $E(\bar{x})$. Cela permet "d'évacuer" les contraintes inactives et de réduire ainsi la taille des matrices M(0) et N(o).

1.2 - Application aux problèmes $P_1(\lambda)$ et $P_2(\lambda)$.

Il s'agit de traduire le système (3) dans les termes des problèmes $P_1(\lambda)$ et $P_2(\lambda)$.

a - Cas du problème $P_1(\lambda)$.

$\bar{x} \in S(0)$; $\bar{u} \in K(\bar{x},0)$

$$L(x,u,\lambda) = g(x) + (a+\lambda,x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x)$$

$$L(x,u,\lambda) = \nabla g(x) + a + \lambda + \sum_{i=1}^{n} u_i \nabla h_i(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} (\nabla L(x,u,\lambda) = I_m \text{ (matrice unité d'ordre m)}$$

$$\forall i \in \{1,\dots,m\} \quad \frac{\partial h_i}{\partial\lambda}(x) = 0$$

$$\bar{N} = [I_m, 0]^t$$

Corollaire B.1.2.1. *Sous les hypothèses du théorème B.1.1.1 on a*

(a) $\forall i \in \{s+1,\dots,m\}$

$$(\nabla h_i(\bar{x}), x(\lambda)) = (\nabla h_i(\bar{x}), \bar{x}) + \circ(||\lambda||)$$

(b) $\forall i \in \{1,\dots,s\}$

$$\bar{u}_i(\nabla h_i(\bar{x}),x(\lambda))+h_i(\bar{x}).u_i(\lambda) = \bar{u}_i(\nabla h_i(\bar{x}),\bar{x})+\circ(||\lambda||)$$

(c) $$\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0).x(\lambda) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\lambda) \nabla h_i(\bar{x}) =$$

$$\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0).\bar{x} + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \lambda + \circ(||\lambda||)$$

b - Cas du problème $P_2(\lambda)$.

$\bar{x}$ est une solution locale de $P_2(0)$.

$\bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ le multiplicateur associé

u^1 porte sur les contraintes h_i : $u^1 \in \mathbb{R}^m$

u^2 porte sur les contraintes de borne : $u^2 \in \mathbb{R}^n$

$$L(x,u,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i^1\, h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i^2(\lambda_i - x_i)$$

$$\nabla L(x,u,\lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i^1\, \nabla h_i(x) - \sum_{i=1}^{n} u_i^2\, p_i$$

où p_i est la ième projection : $x \to x_i$.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \nabla L(x,u,\lambda) = 0$$

$$\forall i \in \{1,\dots,m\} \quad \frac{\partial h_i}{\partial\lambda}(x) = 0$$

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \frac{\partial(\lambda_i - x_i)}{\partial\lambda} = p_i$$

$$\bar M = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
\nabla^2 L(\bar x,\bar u,0) & \nabla h_1(\bar x) & \cdots & \nabla h_s(\bar x) & \nabla h_{s+1}(\bar x) & \cdots & \nabla h_m(\bar x) & p_1 & \cdots & p_n \\
\bar u_1^{-1}\nabla h_1(\bar x) & h_1(\bar x) & & 0 & & 0 & & & 0 & \\
\vdots & 0 & \ddots & & & & & & & \\
\bar u_s^{-1}\nabla h_s(\bar x) & & & h_s(\bar x) & & & & & & \\
\nabla h_{s+1}(\bar x) & & & & h_{s+1}(\bar x) & & & & & \\
\vdots & & 0 & & & \ddots & & & & \\
\nabla h_m(\bar x) & & & & & & h_m(\bar x) & & & \\
\bar u_n^{-2}\, p_1 & & & & & & & \bar x_1 & & \\
\vdots & & & 0 & & & & & \ddots & \\
\bar u_n^{-2}\, p_n & & & & & & 0 & & & \bar x_n
\end{array}\right]$$

$\bar N = [0_n, -\bar u_1^{-2}\, p_1, \dots, -\bar u_n^{-2} p_n]^t$ où 0_m est la matrice carrée nulle d'ordre m.
D'où

Corollaire B.1.2.2. *Sous les hypothèses du théorème B.1.1.1 on a*

a - $\forall i \in \{1,\dots,s\}$

$$(\bar{u}_i^1 \nabla h_i(\bar{x}),\ x(\lambda) - \bar{x}) + h_i(\bar{x})(u_i^1(\lambda) - \bar{u}_i^1) = o(||\lambda||)$$

b - $\forall i \in \{s+1,\dots,m\}$

$$(\nabla h_i(\bar{x}),\ x(\lambda)-\bar{x}) + h_i(\bar{x})(u_i^1(\lambda) - \bar{u}_i^1) = o(||\lambda||)$$

c - $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

$$\bar{u}_i^2\, x_i(\lambda) + \bar{x}_i\, u_i^2(\lambda) = 2\bar{u}_i^2\, \bar{x}_i - \bar{u}_i^2\, \lambda_i + o(||\lambda||)$$

d - $$\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)(x(\lambda)-\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} (u_i^1(\lambda)-\bar{u}_i^1)\, \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n} (u_i^2(\lambda) - \bar{u}_i^2)p_i = o(||\lambda||)$$

2 - METHODES DE PENALISATION.

L'analyse de sensibilité d'un problème paramétré peut également être faite, sous les hypothèses de 1 via des méthodes de pénalisation.

De manière générale de telles méthodes consistent à modifier la fonction objectif f du problème (P) initial en lui ajoutant des termes de pénalisation, prenant en compte les différentes contraintes. On obtient ainsi une fonction de pénalité F et le problème (P) initial d'optimisation de f sous contraintes est alors équivalent à l'optimisation sans contraintes de la fonction de pénalité F. Plusieurs types de pénalités ont été étudiés par beaucoup d'auteurs comme Fiacco, Han, Fletcher, ... On se bornera à envisager deux types de fonctions de pénalité : le lagrangien augmenté et la fonction W suivante ("barrier function") étudiée en particulier par Fiacco ([5], [7])

On garde les notations de B.1.

2.1 - Algorithme de Fiacco ([5], [7])

$$P(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}^q \quad \begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \; h_i(x,\lambda) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

Cet algorithme provient directement de la méthode exposée en B.1 et exige les mêmes hypothèses i) à iv).
On va utiliser la fonction de pénalité suivante

$$W(x,\lambda, r) \equiv f(x,\lambda) + r \sum_{i=1}^{s} \ln|h_i(x,\lambda)| + \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=s+1}^{m} (h_i(x,\lambda))^2$$

où $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

Théorème B.2.1.1. *Sous les hypothèses du théorème B.1.1.1., il existe un voisinage* $V \times N$ *de* $(\lambda,r) = (0,0)$ *et une unique fonction (vectorielle) définie et* C^2 *sur* $V \times N$, $(x(\lambda,r),\, u(\lambda,r))$ *vérifiant*

$\nabla L(x,u,\lambda) = 0$

$\forall i \in \{1,\dots,s\} \; u_i h_i(x,\lambda) = r$

$\forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x,\lambda) = u_i r$

avec $x(0,0) = \bar{x}$ *et* $u(0, 0) = \bar{u}$ *telle que*

$\forall(\lambda,r) \in V \times N$ *et* $r > 0$

$x(\lambda,r)$ *est un minimum local unique sans contraintes de* $W(x,\lambda,r)$ *avec* $h_i(x(\lambda,r),r) < 0$ *pour tout* i *de* $\{1,\dots,s\}$ *et* $\nabla^2 W(x(\lambda,r),\, \lambda,\, r)$ *définie positive.*

□ démonstration : cf [5] théorème 3.1. □

On ne va pas développer la méthode (il suffit de se référer à [5]) mais simplement indiquer le principe de l'algorithme :

on utilise la fonction de pénalité $W(x, 0, r)$ pour trouver une solution locale du problème $P(0)$.
Soit $\bar{x}(0, r_k)$ un minimum local de $W(x, 0, r_k)$.
On sait que $(\bar{x}(0, r_k))$ converge vers $\bar{x}$ quand r_k tend vers 0.

→ Pour r_k petit positif $\bar{x}(0, r_k) = x_k$ peut être considéré comme une approximation de $\bar{x}$.

On peut alors estimer $\{\nabla^2 W(x_k, 0, r_k)\}^{-1} \frac{\partial}{\partial\lambda} (\nabla W(x_k, 0, r_k)$ c'est à dire $\frac{dx}{d\lambda}(0)$ grâce au résultat suivant conséquence du théorème précédent.

<u>*Corollaire B.2.1.2.*</u> *Sous les hypothèses du théorème B.2.1.1 quand* λ *est dans* V *et converge vers* 0 *et* $r (r \in N \cap \mathbb{R}^{*+})$ *converge vers* 0, *on a :*

$\bar{x}(\lambda, r)$ *converge vers* $x(0)$

$\frac{d\bar{x}}{d\lambda}(\lambda, r)$ *converge vers* $\frac{dx}{d\lambda}(0)$, *avec* $\bar{x}(\lambda, r)$ *minimum sans contraintes de* $W(x, \lambda, r)$

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda}(\lambda, r) = -(\nabla^2 W(\bar{x}(\lambda, r), \lambda, r)^{-1} \frac{\partial}{\partial\lambda} (\nabla W(\bar{x}(\lambda, r), \lambda, r)$$

On estime ensuite le multiplicateur :

$$\bar{u} = u(o) \simeq \bar{u}(0, r_k)$$

$$\frac{du}{d\lambda}(o) \simeq \frac{d\bar{u}(o, r_k)}{d\lambda} \quad \text{où } \bar{u}(\lambda, r) \text{ et } \frac{d\bar{u}}{d\lambda}(\lambda, r)$$

sont obtenus de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, s\} & \bar{u}_i(\lambda, r) \equiv r \,/\, h_i(\bar{x}(\lambda, r), \lambda) \\ \forall i \in \{s+1, \dots, m\} & \bar{u}_i(\lambda, r) \equiv h_i(\bar{x}(\lambda, r), \lambda) \,/\, r \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall i \in \{1, \dots, s\} \\ & \quad \forall k \in \{1, \dots, q\} \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda_k}(\lambda, r) \equiv (-r/h_i^2(\bar{x}(\lambda, r), \;)) \frac{dh_i}{d\lambda_k}(\lambda, r) \\ & \qquad \equiv (-r/h_i^2)(\nabla h_i(\bar{x}(\lambda, r), \lambda) . \frac{\partial \bar{x}}{\partial \lambda_k}(\lambda, r) + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_k}(\lambda, r) \\ & \forall i \in \{s+1, \dots, m\} \\ & \quad \forall k \in \{1, \dots, q\} \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda_k}(\lambda, r) \equiv (\frac{1}{r}) \frac{dh_i}{d\lambda_k}(\lambda, r) \\ & \qquad = (1/r)(\nabla h_i(x(\lambda, r), \lambda) . \frac{\partial \bar{x}(\lambda, r)}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_k}(\lambda, r)) \end{aligned} \right.$$

On peut enfin estimer la dérivée de la fonction valeur optimale

$$\frac{df_{min}}{d\lambda}(0) = \frac{df(x(0),0)}{d\lambda} \simeq \frac{df(\bar{x}(0, r_k),0)}{d\lambda}$$

avec

$$\frac{df(\bar{x}(0,r_k),0)}{d\lambda} = (\nabla f(\bar{x}(0,r_k),0), \frac{dx}{d\lambda}(0)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\bar{x}(0, r_k), 0)$$

2.2 - Méthode du Lagrangien augmenté (cf. Buys-Gonin [6])

On se place toujours sous les mêmes hypothèses B.1 (i à iv). Soient $c > 0$ et $u \in \mathbb{R}^m$. On définit alors les ensembles suivants, I_1, I_2 et le lagrangien augmenté du problème : ϕ.

$$I_1 = I_1(x, u,\lambda, c) = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; u_i + ch_i(x,\lambda) \geq 0\} \cup \{s+1,\dots,m\}$$

$$I_2 = I_2(x, u,\lambda, c) = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; u_i + ch_i(x,\lambda) < 0\}$$

$$\phi(x, u, \lambda) = f(x, \lambda) + \sum_{i\in I_1} (u_i + \frac{1}{2} ch_i(x,\lambda))\, h_i(x,\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{i\in I_2} u_i^2$$

On suppose que c est "assez grand".
Si $\bar{u}$ est le multiplicateur associé à $\bar{x}$ on obtient :

$$\begin{cases} \nabla\phi(\bar{x},\bar{u}, 0) = 0 \\ \forall i \in I_1 \; h_i(\bar{x},0) = 0 \end{cases}$$

; I_1 correspond aux contraintes actives en $\bar{x}$ (y compris les contraintes en égalité).

On a $\bar{u} = (\bar{v}, 0)$ où $\bar{v}$ est indexé par I_1.

Comme en B.1 par application du théorème des fonctions implicites on en déduit l'existence de fonctions C^1 $x(\lambda)$ et $v(\lambda)$ sur un voisinage de $\lambda = 0$, avec $x(0) = \bar{x}$ et $v(0) = \bar{v}$ et

$$(4)\quad \begin{cases} \nabla\phi(x(\lambda),\ u(\lambda),\ \lambda) = 0 \\ \forall i \in I_1 \quad h_i(x(\lambda),\ 0) = 0 \end{cases}$$

avec $u(\lambda) = (v(\lambda),\ 0)$

En différentiant (4) on obtient

$$(5)\quad \left[\begin{array}{c:c} \nabla^2\phi(\bar{x},\ \bar{u},\ 0) & (\nabla h(\bar{x},\ \bar{u},\ 0))_{I_1} \\ \hdashline (\nabla h(\bar{x},\ \bar{u},\ 0)^t_{I_1} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\lambda}(0) \\ \frac{dv}{d\lambda}(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\lambda} \nabla\phi(\bar{x},\ \bar{u},\ 0) \\ (\frac{dh}{d\lambda}(\bar{x},o))^t_{I_1} \end{bmatrix}$$

(On note $(h)_I$ la matrice $(h_i)_{i\in I}$) ce qui donne, une fois (5) résolu.

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{dv}{d\lambda}(0) = \{(\frac{d\bar{h}}{d\lambda})_{I_1} - \frac{\partial}{\partial\lambda} \nabla\bar{\phi}.(\nabla^2\bar{\phi})^{-1}(\nabla\bar{h})_{I_1}\} \{(\nabla\bar{h})^t_{I_1}(\nabla^2\bar{\phi})^{-1}(\nabla\bar{h})_{I_1}\}^{-1} \\ \frac{dx}{d\lambda}(0) = - \{\frac{dv}{d\lambda}(0).(\nabla\bar{h})^t_{I_1} - \frac{\partial}{\partial\lambda}(\nabla\bar{\phi})\}\{\nabla^2\bar{\phi}\}^{-1} \end{cases}$$

où $\bar{h} = h(\bar{x},0)$ $\nabla\bar{\phi} = \nabla\phi(\bar{x},0)$.

La dérivée de la fonction f_{min} est alors :

$$\frac{df_{min}}{d\lambda}(0) = \frac{df}{d\lambda}(x(0),0) = \frac{d\phi}{d\lambda}(x(0),\ u(0),\ 0)$$

En conclusion, on peut exploiter le théorème des fonctions implicites et obtenir des résultats, voire des algorithmes, sous réserve de l'hypothèse de stricte complémentarité.
C'est malheureusement une hypothèse bien restrictive dont on aimerait se passer. C'est ce qu'on va tenter de faire dans le chapitre II.

- ANNEXE -

On a mentionné plusieurs fois dans le chapitre I, quelques théorèmes dits classiques. Rappelons toutefois leurs énoncés.

Théorème du maximum de Berge.

> *Soient* A *un compact de* $\mathbb{R}^n$
>
> $D : A \to P(A)$
>
> $\lambda \to D(\lambda)$ *une application multivoque*
>
> $f : A \times A \to \mathbb{R}$
>
> $(x,\lambda) \to f(x,\lambda)$ *continue du couple*
>
> $S : \lambda \to P(A)$
>
> $\lambda \to S(\lambda) = \text{solution de } P(\lambda) \begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in D(\lambda) \end{cases}$
>
> *Si* D *est continue (c'est à dire ouverte et fermée) au point* λ_o, *alors* S *est fermée au point* λ_o

Théorème des fonctions implicites.

> *Soient* E *un espace topologique et* F *et* G *deux espaces de Banach*
>
> $f : \Omega \to G$ *où* Ω *est un ouvert de* $E \times F$
>
> $(a,b) \in \Omega$ *tel que* $f(a,b) = 0$
>
> *On suppose que :*
> - f *est continue*
> - $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existe et est continue sur* Ω
> - $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ *est bijective et* $(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b))^{-1}$ *continue*
>
> *Alors il existe un voisinage* A *de* a *et* B *de* b, *tels que la restriction à* $A \times B$ *de la relation* $f(x,y) = 0$ *soit équivalente à une relation* $y = g(x)$, g *étant une application continue de* A *dans* B.

CHAPITRE II

ABANDON DE LA STRICTE COMPLÉMENTARITÉ.

ETUDE LOCALE DES VARIATIONS D'UNE SOLUTION ET DES MULTIPLICATEURS DE KUHN ET TUCKER.

-

On va dans ce chapitre établir des résultats de continuité et de différentiabilité de la représentation d'une solution $x(\lambda)$ de $P(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = 0$ et de $\bar{x}$ solution locale isolée de $P(0)$.

1 - INTRODUCTION.

C'est à partir d'un article de **Bigelow et Shapiro** [8] que ce problème a pu être abordé sans l'hypothèse de stricte complémentarité en un point solution $\bar{x}$. Sous des hypothèses, d'abord fortes, d'existence, d'unicité et de continuité d'une représentation $x(\lambda)$ de la solution de $P(\lambda)$ (pour λ petit) au voisinage de $\bar{x}$ on va pouvoir énoncer des résultats sur la différentiabilité d'une telle représentation.

Pour cela il faut avoir l'unicité de la solution d'un système d'équations $S(\lambda)$, rattaché à un problème quadratique dépendant de $P(\lambda)$: $Q(\lambda)$. On va donc montrer que cette unicité est assurée par une condition suffisante du second ordre : la condition de Fiacco-Mc Cornick déjà évoquée au chapitre I. On va en outre prouver que cette condition permet d'assurer l'existence et l'unicité de la représentation continue $x(\lambda)$ au voisinage de $\bar{x}$. Ce résultat va être entièrement démontré. On s'inspirera pour cela de résultats portant sur les équations généralisées dûs à Robinson [17]. Les résultats généraux ainsi établis seront appliqués aux problèmes $P_1(\lambda)$ et $P_2(\lambda)$ dans le chapitre III. Il est cependant indispensable d'avertir le lecteur que des résultats analogues ont été établis par Jittorntrum ([30]) dans un article paru en Mai 84.

Ce travail et les recherches de Jittorntrum ont été menés de manière disjointe et la démarche s'inspirant des mêmes sources (Robinson/Bigelow-Shapiro) n'est pas la même. Alors qu'on s'est attaché à prouver l'unicité de la solution de $S(\lambda)$ pour en déduire la dérivabilité partielle de $x(\lambda)$ en $\lambda = 0$, Jittorntrum a d'abord montré cette dérivabilité pour conclure à l'unicité de la solution de $S(\lambda)$. Les résultats qu'il a établis le sont pour un problème paramétré quelconque et sous une hypothèse du second ordre (H) différente de l'hypothèse H_2 faite ici. On prouvera en annexe de ce chapitre l'équivalence de ces deux hypothèses et on y donnera un aperçu plus détaillé des travaux de Jittorntrum.

2 - RESULTAT GENERAL D'ANALYSE DE SENSIBILITE POUR UN PROBLEME PARAMETRE $P(\lambda)$.

2.1 - Position du problème et justification des hypothèses.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^q$ et $P(\lambda)$: $\begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x,\lambda) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$

On suppose que $P(0)$ possède au moins une solution locale isolée $\bar{x}$. On suppose que f et les fonctions h_i $(i = 1,\dots,m)$ sont C^2 par rapport à (x,λ) dans un voisinage de $(\bar{x},o)$.

$D(\lambda)$ est le domaine réalisable de $P(\lambda)$.

On va étudier le comportement d'une solution de $P(\lambda)$ quand λ varie. Pour cela on doit faire l'hypothèse d'existence (et d'unicité dans un voisinage de $\bar{x}$) de telles solutions quand λ est petit. Plus précisément, dans un premier temps, il va falloir supposer qu'il existe une solution de $P(\lambda)$ dans un voisinage de $\lambda = 0$ (sinon on n'a pas d'objet de travail). De plus cette solution doit être unique, pour éviter toute ambiguité. Enfin si on veut espérer trouver une dérivée directionnelle de cette solution $x(\lambda)$ en 0 il faut au moins supposer que cette représentation de la solution est continue en 0. Ce sont là des hypothèses minimales que l'on ne peut pas éviter. Néanmoins elles vont être assurées moyennant une hypothèse du second ordre du type Fiacco-MC Cormick : on va le prouver dans la deuxième partie de ce chapitre II. En conséquence si $\bar{x}$ est une solution (locale) *isolée* de P(0) on fait désormais l'hypothèse (H) suivante :

(H)	Il existe un voisinage V de $\bar{x}$ et un voisinage N de $\lambda = 0$, tels que : $\forall\lambda \in N \quad \exists!\ x(\lambda)$ solution (locale) de $P(\lambda)$ dans V De plus la représentation de la solution ainsi bornée $N \to V$ $x : \lambda \to x(\lambda)$ est supposée continue en $\lambda = 0$ avec $x(0) = x$

Le problème qui se pose alors est d'estimer (si elles existent) les dérivées directionnelles de x en 0.

On a vu d'autre part, au chapitre I, l'importance des multiplicateurs de Kuhn et Tucker sur la dérivabilité ou non de la fonction valeur-optimale. Il est donc intéressant d'estimer les variations (en fonction de λ) d'un multiplicateur $u(\lambda)$ associé à $x(\lambda)$. De la même façon que pour $x(\lambda)$, pour éviter toute ambiguité sur le choix des multiplicateurs il faut en assurer l'unicité.

On va donc être amené à faire une hypothèse supplémentaire, afin d'établir cette propriété des multiplicateurs.

Rappelons d'abord les conditions de Kuhn et Tucker nécessaires du premier ordre en $x(\lambda)$ quand λ est dans N et $x(\lambda)$ est la solution de $P(\lambda)$ dans V.

Il existe $u(\lambda) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$(1)\quad \left[\begin{array}{lll} \text{i/} & \nabla f(x(\lambda), \lambda) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i(\lambda)\ \nabla h_i(x(\lambda),\lambda) = 0 & \\ \text{ii/} & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad u_i(\lambda) \geq 0 & \\ & \left.\begin{array}{l} h_i(x(\lambda), \lambda) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad h_i(x(\lambda), \lambda) = 0 \end{array}\right\} & \text{Réalisabilité} \\ \text{iii/} & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad u_i(\lambda)\ h_i(x(\lambda), \lambda) = 0 \ \} & \text{complémentarité} \end{array}\right.$$

Pour assurer l'unicité du multiplicateur $u(\lambda)$ pour λ donné dans N, il faut faire en $\bar{x}$ l'hypothèse H_1 déjà évoquée au chapitre I, à savoir :

H_1	$(\nabla h_i(\bar{x}, \bar{0}),\ i \in E(\bar{x}, 0) \cup \{s+1,\dots,m\})$ sont linéairement indépendants où $E(\bar{x},0) = \ i \in \{\{1,\dots,s\}\ /\ h_i(\bar{x},0) = 0\}$

2.2 - Unicité des multiplicateurs de Kuhn et Tucker.

On est donc en mesure de montrer le résultat suivant :

Théorème II.2.2.1. *Soit* $P(\lambda)$: $\begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x,\lambda) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$

Soit $\bar{x}$ *une solution locale isolée de* $P(0)$ f *et* h_i $(i = 1,\dots,m)$ *sont supposées* C^1 *par rapport à* (x,λ) *au voisinage de* $(\bar{x},0)$. *Sous les hypothèses* (H) *et* H_1 *en* $\bar{x}$, $\forall\lambda \in N$ *la solution* $x(\lambda)$ *de* $P(\lambda)$ *possède un multiplicateur associé unique* $u(\lambda)$. *De plus* $u(\lambda) = (\tilde{u}(\lambda),0)$ *où* $\tilde{u}(\lambda)$ *est indexé par* $E(\bar{x},0) \cup \{s+1,\dots,m\}$.

□ démonstration :

Soit $\lambda \in N$ (voisinage déterminé par (H)).
$P(\lambda)$ a alors une solution unique dans V : $x(\lambda)$.
(1) est donc vérifiée avec $u(\lambda) \in \mathbb{R}^m$.

Soit $E(\bar{x}, 0) = \{i \in \{1,\dots,s\}\ /\ h_i(\bar{x},0) = 0\}$

$E(x(\lambda), \lambda) = \{i \in \{1,\dots,s\}\ /\ h_i(x(\lambda), \lambda) = 0\}$

Lemme 1 : $\forall\lambda \in N \qquad E(x(\lambda), \lambda) \subset E(\bar{x},0)$

* . Soit $i \in \{1,\dots,s\} - E(\bar{x},0)$ on a $h_i(\bar{x},0) \neq 0$
or h_i est continue par rapport à (x,λ) donc $\exists\, W_i$ voisinage de $\bar{x}$ et $\exists\, N_i$ voisinage de $\lambda = 0$ tels que $\forall (x,\lambda) \in W_i \times N_i \quad h_i(x,\lambda) < 0$

$$\text{Soit } W = \bigcap_{i \in \{1,\dots,s\} - E(\bar{x},0)} W_i$$

$$N_o = \bigcap_{i \in \{1,\dots,s\} - E(\bar{x},0)} N_i$$

Quitte à prendre $W \cap V$ et $N \cap N_o$ comme nouveaux voisinages de $\bar{x}$ et $\lambda = 0$, on peut supposer que $V \cap W = V$ et $N \cap N_o = N$
donc $\forall\lambda \in N$, $\forall i \in \{1,\dots,s\} - E(\bar{x},0)$, $\forall x \in V \quad h_i(x,\lambda) < 0$.

En particulier pour $x(\lambda)$

$$\forall i \in \{1,\dots,s\} - E(\bar{x},0) \qquad h_i(x(\lambda), \lambda) < 0$$

ce qui signifie :

$$\forall \lambda \in N \quad \{1,\dots,s\} - E(\bar{x},0) \subset \{1,\dots,s\} - E(x(\lambda),\lambda)$$

on a le résultat voulu en passant aux complémentaires.

*

* . Soit λ dans N et $i \in \{1,\dots,s\} - E(x(\lambda), \lambda)$
on a $h_i(x(\lambda), \lambda) < 0$ et donc par complémentarité : $u_i(\lambda) = 0$

On peut alors partitionner $\{1,\dots,m\}$ en $I \cup J$ où

$I = \{s+1,\dots,m\} \cup E(\bar{x},0)$ (contraintes en égalité en $\bar{x}$)
$J = \{1,\dots,m\} - I$
$u(\lambda) = (u_I(\lambda), u_J(\lambda))$ où $u_I(\lambda)$ est indexé par I et $u_J(\lambda)$ par J.

Si $i \in J$, $i \notin E(\bar{x},o) \cup \{s+1,\dots,m\}$, donc d'après le lemme, $i \notin E(x(\lambda), \lambda) \cup \{s+1,\dots,m\}$ et par conséquent $u_i(\lambda) = 0$.
d'où $u_J(\lambda) = 0$
on obtient le

> *Lemme 2* : *Tout multiplicateur* $u(\lambda)$ *s'écrit* $(\tilde{u}(\lambda), 0)$ *où* $\tilde{u}(\lambda)$ *est indexé par* $I = E(\bar{x},0) \cup \{s+1,\dots,m\}$

*

Les relations (1) sont alors équivalentes à : $\forall \lambda \in N$

$$(3)\quad \begin{cases} a - \nabla f(x(\lambda), \lambda) + \sum_{i \in E(\bar{x},0)} \tilde{u}_i(\lambda)\, \nabla h_i(x(\lambda), \lambda) + \sum_{i=s+1}^{m} \tilde{u}_i(\lambda)\, \nabla h_i(x(\lambda),\lambda) = 0 \\ b - \forall i \in E(\bar{x},0) \quad \tilde{u}_i(\lambda) \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad h_i(x(\lambda), \lambda) \leq 0 \\ c - \forall i \in E(\bar{x},0) \quad \tilde{u}_i(\lambda)\, h_i(x(\lambda), \lambda) = 0 \end{cases}$$

On va terminer en montrant l'unicité de $\tilde{u}(\lambda)$

Soit $M(x, \lambda)$ la matrice $(\nabla h_i(x,\lambda) \mid i \in E(\bar{x},0) \cup \{s+1,\dots,m\})$

$M(\bar{x},0)$ est une matrice de rang maximum d'après (H_1).

On peut donc extraire une matrice carrée d'ordre $k = \mathrm{card}(E(\bar{x},o) \cup \{s+1,\dots,m\})$ inversible : $A(\bar{x},0)$. Soit $A(x,\lambda)$ la matrice carrée d'ordre k correspondante.
$\forall i \in \{1,\dots,m\}$ ∇h_i est continue du couple ; donc det A est continu en $(\bar{x},o)$.
De plus det(A) est non nul en $(\bar{x},o)$
Par conséquent il existe un voisinage V_o de $\bar{x}$ et un voisinage N_o de $\lambda = 0$, tels que : $\forall (x,\lambda) \in V_o \times N_o$ det $A(x,\lambda) \neq 0$ donc $M(x,\lambda)$ est de rang maximum.

Quitte à prendre $V = V \cap V_o$ et $N = N \cap N_o$, on a en particulier pour $x = x(\lambda)$, $\forall\lambda \in N$ $M(x(\lambda), \lambda)$ est de rang max. C'est à dire :

Lemme 3 : $\forall\lambda \in N$ $\{\nabla h_i(x(\lambda), \lambda) \ / \ i \in E(\bar{x},0) \cup \{s+1,\ldots,m\})$ *indépendants*

*

Il est alors immédiat que le système (3 -a) a une solution unique. Donc l'ensemble des équations (3) (qui possède au moins une solution) a une solution unique $\tilde{u}(\lambda)$, pour tout λ de N.

□

Corollaire II.2.2.2. *Sous les hypothèses du théorème II.2.1.1. la fonction* u *définie sur* N *est continue au point* $\lambda = 0$ (avec $u(o) = \bar{u}$).

□ démonstration : soit λ dans N

$\tilde{u}(\lambda)$ s'obtient en résolvant :

$$\tilde{\nabla} f(x(\lambda), \lambda) + A(x(\lambda), \lambda)\, \tilde{u}(\lambda)^t = 0$$

où $\tilde{\nabla} f(x(\lambda), \lambda)$ est le sous-vecteur de $\nabla f(x(\lambda), \lambda)$ indexé par $E(\bar{x}, 0) \cup \{s+1,\ldots,m\}$ d'où

$$\tilde{u}(\lambda) = A(x(\lambda), \lambda)^{-1}\, \tilde{\nabla} f(x(\lambda), \lambda)$$

$\lambda \to x(\lambda)$ est continue en 0 (d'après H) et $x(0) = \bar{x}$

$(x,\lambda) \to A(x,\lambda)^{-1}$ est continue en $(\bar{x},0)$

$(x,\lambda) \to \tilde{\nabla} f(x,\lambda)$ est continue en $(\bar{x},0)$.

Par composition $\lambda \to \tilde{u}(\lambda)$ est continue en 0.

Donc $\lambda \to u(\lambda)$ aussi.

□

2.3 - Dérivabilité de la représentation d'une solution (Bigelow-Shapiro [8]).

Sous les hypothèses précédentes on va établir un critère d'existence de dérivées directionnelles de $x(\lambda)$ et $u(\lambda)$. Ce critère va fournir également un moyen d'estimer ces dérivées.

Le résultat suivant est la généralisation à un problème comportant des contraintes en égalité d'un résultat dû à bigelow et Shapiro [8].

En outre, on s'est efforcé de la situer dans un cadre plus rigoureux, notamment en faisant des hypothèses précises. Dans cet esprit la démonstration qui fait l'objet du paragraphe suivant, a été précisée et clarifiée et étendue au cas d'un problème comportant des contraintes en égalité.

Précisons d'abord les notations :

Comme on recherche des dérivées directionnelles on ne restreint pas le problème en se limitant à des problèmes P(t) de la forme :

$$P(t) : \begin{cases} \min f(x, t) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x, t) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x, t) = 0 \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$ (Il suffit de prendre $\lambda = t\mu$ et de fixer μ).

D(t) est le domaine réalisable de P(t).

Soit $\bar{x}$ une solution locale isolée de P(0) associée au multiplicateur $\bar{u}$.
On supposera que f et h_i ($i \in \{1,\dots,m\}$) sont C^2 du couple dans un voisinage de $(\bar{x},0)$.

On fait les hypothèses (H) et H_1 en $\bar{x}$.
Par conséquent pour t dans N voisinage de 0, P(t) possède une solution unique x(t) dans un voisinage V de $\bar{x}$, associée au multiplicateur unique u(t).

Les conditions de Kuhn et Tucker du 1er ordre en $(x(t), u(t))$ pour $t \in N$ s'écrivent :

$$(4)\quad \begin{cases} a - & \nabla f(x(t), t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, \nabla h_i(x(t), t) = 0 \\ b - & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad u_i(t) \geq 0 \\ & \qquad\qquad\qquad h_i(x(t), t) \leq 0 \\ & \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad h_i(x(t), t) = 0 \\ c - & \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad u_i(t)\, h_i(x(t), t) = 0 \end{cases}$$

Soient $I = I(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; h_i(\bar{x},0) = 0 \text{ et } \bar{u}_i > 0\}$

$K = K(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; \bar{u}_i = h_i(\bar{x},o) = 0\}$.

<u>Remarques</u> - $I \cup K = E(\bar{x}, 0)$

- Si $K = \emptyset$ on a stricte complémentarité

$J = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; h_i(\bar{x},0) < 0\}$ (contraintes inactives en $\bar{x}$)

On a alors le résultat suivant :

<u>*Théorème II.2.3.1.*</u> *On suppose que* f *et* h_i $(i=1,\dots,m)$ *sont* C^2 *au voisinage de* $(\bar{x}, 0)$ *où* $\bar{x}$ *est une solution locale isolée de* $P(0)$
On suppose que les hypothèses (H) *et* H_1 *en* $\bar{x}$ *sont vérifiées ; alors*
Si le système (S) *suivant admet une solution unique* $(\dot{x},\dot{u})$ *alors* $t \to x(t)$ *et* $t \to u(t)$ *sont dérivables à droite en* 0 *et*

$$x'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \dot{x}$$

$$u'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(t) - u(0)}{t} = \dot{u}$$

avec $x(0) = \bar{x}$ et $u(0) = \bar{u}$.

et (S) :

$$a - \quad (\nabla^2 L(\bar{x},0),\ \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \dot{u}_i\ \nabla h_i(\bar{x},0) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla L(\bar{x},0)$$

$$b - \quad \forall i \in K \qquad \dot{u}_i \geq 0$$

$$(\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) \leq -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)$$

$$\forall i \in J \qquad \dot{u}_i = 0$$

$$\forall i \in I \cup \{s+1,\ldots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)$$

$$c - \quad \forall i \in K \quad \dot{u}_i\ [(\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) + \frac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0)] = 0$$

où $L(x,t) = f(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i(t)\ h_i(x,t).$

<u>Remarque</u> : le système (S) représente le système des conditions de Kuhn et Tucker du premier ordre du problème quadratique suivant :

$$(Q)\quad \begin{cases} \displaystyle\min_{\dot{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(\dot{x},\ \nabla^2 L(\bar{x},0)\ \dot{x}) + (\dot{x},\ \frac{\partial}{\partial t}\nabla L(\bar{x},0)) \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\ldots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) - \dfrac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0) \\ \forall i \in K\ \ (\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) \leq -\dfrac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0) \end{cases}$$

($\dot{u}$ étant le multiplicateur associé à $\dot{x}$ solution de (Q)).

<u>*Corollaire II.2.3.2.*</u> *Sous les mêmes hypothèses (th. I.2.3.1)*
Si le système (S') suivant admet une solution unique x' *et* u' *alors* $t \to x(t)$ *et* $u \to u(t)$ *sont dérivables à gauche en 0 et*

$$x'(0^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{x(t) - \bar{x}}{t} = x'$$

$$u'(0^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{u(t) - \bar{u}}{t} = u'$$

avec (S') :

$$\begin{cases} a - (\nabla^2 L(\bar{x},0),x') + \sum_{i=1}^{m} u_i' \nabla h_i(\bar{x},0) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla L(\bar{x},0) \\ b - \forall i \in K \quad u_i' \le 0 \\ \qquad\qquad (\nabla h_i(\bar{x},0),x') \ge -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \quad \forall i \in J \quad u_i' \le 0 \\ \quad \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),x') = -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ c - \forall i \in K \quad u_i' \left[(\nabla h_i(\bar{x},0),x') + \frac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0)\right] = 0 \end{cases}$$

Remarque : le problème quadratique associé est le même que (Q) mais avec $-h_i$ au lieu de h_i.

Corollaire II.2.3.3. *Sous les hypothèses précédentes*
Si $\dot{x} = x'$ *et* $\dot{u} = u'$
$x(t)$ *et* $u(t)$ *sont dérivables en* 0
et $x'(0) = \dot{x} = x'$
$u'(0) = \dot{u} = u'$

Remarque : c'est en particulier le cas si $K = \emptyset$: on retrouve le cas de la stricte complémentarité.

2.4 - Preuve du théorème II.2.3.1.

L'ensemble K est l'ensemble des indices de $\{1,\dots,s\}$ violant l'hypothèse de stricte complémentarité. On va donc dans un premier temps travailler sur des partitions de K puis généraliser les résultats obtenus.
Soit p le cardinal de K. On peut faire 3^p partitions différentes de K en trois sous-ensembles S_1, S_2, S_3.

* *Soit (S_1, S_2, S_3) une telle partition de K ;*

On pose $T_{S_1S_2S_3} = \{t \in N^+,\ \forall i \in S_1 \quad u_i(t) > 0$

$\forall_i \in S_2 \quad h_i(x(t),t) < 0$

$\forall_i \in S_3 \quad u_i(t) = h_i(x(t), t) = 0\}$

où N est le voisinage trouvé dans (H) (N =]-S, +S[par exemple) et $N^+ = N \cap \mathbb{R}^+$

Lemme 1 : $\bigcup_P t_{S_1S_2S_3} = N^+$ *(où P est l'ensemble des partitions de* K *en 3 sous-ensembles).*

□ Soit $(S_1, S_2, S_3) \in P$ $\quad T_{S_1S_2S_3} \subset N^+$

donc $\bigcup_P T_{S_1S_2S_3} \subset N^+$

Réciproquement.

Soit t dans N^+ Soit $S_1 = \{i \in K \ /\ u_i(t) > 0\}$

$S_2 = \{i \in K \ /\ h_i(x(t), t) < 0\}$

$S_3 = K - (S_1 \cup S_2)$

- $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = K$

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ si $i \in S_1 \cap S_2$ alors $u_i(t) > 0$ et $h_i(x(t),t) < 0$ ce qui est en contradiction avec la complémentarité.

donc $(S_1, S_2, S_3) \in P$

Montrons que $t \in T_{S_1S_2S_3}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall i \in S_1 \quad u_i(t) > 0 \\ \bullet\ \forall i \in S_2 \quad h_i(x(t), t) < 0 \end{array}\right\} \text{par définition de } S_1 \text{ et } S_2$$

- $\forall i \in S_3 \quad i \notin S_1$ donc $u_i(t) \leq 0$

or $i \in S_3 \subset K \subset \{1,\ldots s\} \Rightarrow u_i(t) \geq 0$ d'après (4-b)

$$i \notin S_2 \quad \text{donc } h_i(x(t),t) \le 0$$
$$\text{or } i \in S_3 \subset \{1,\dots,s\} \Rightarrow h_i(x(t),t) \ge 0 \text{ (4-b)}$$
$$\text{donc } h_i(x(t),t) = 0$$

Par conséquent $t \in T_{S_1S_2S_3}$ et $N^+ \subset \bigcup_P T_{S_1S_2S_3}$

□

Ecrivons maintenant (4) en tenant compte de la partition de K en S_1, S_2 S_3.

On obtient pour $t \in T_{S_1S_2S_3}$, les relations (5).

$$(5)\ \begin{cases} \text{-a- } \nabla f(x(t),t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, \nabla h_i(x(t),t) = 0 \\[2mm] \left.\begin{array}{l} \text{-b- } \left.\begin{array}{ll} \forall i \in S_2 \cup S_3 & u_i(t) = 0 \\ \forall i \in S_1 & u_i(t) > 0 \end{array}\right\} \\[2mm] \quad\ \ \left.\begin{array}{ll} \forall i \in S_1 \cup S_3 \cup \{s+1,\dots,m\} & h_i(x(t),t) = 0 \\ \forall i \in S_2 & h_i(x(t),t) < 0 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \begin{array}{c} i \in K \\ \cup \\ \{s+1,\dots,m\} \end{array} \\[2mm] \text{-c- } \forall i \in I \cup J \quad \begin{array}{l} u_i(t) \ge 0 \\ h_i(x(t),t) \le 0 \\ u_i(t)\, h_i(x(t),t) = 0 \end{array} \end{cases}$$

pour $t \in T_{S_1S_2S_3}$ (5) $\Longleftrightarrow$ (4)

On va différentier ces relations formellement. (5-a) et (5-c) ne dépendent pas de la partition de K choisie, on obtient.

$$\text{(6-a)} \left[\ (\nabla^2 f(\bar{x},o) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i\, \nabla h_i^2(\bar{x},o), \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \dot{u}_i\, \nabla h_i(\bar{x},0) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla f(\bar{x},0) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \nabla h(\bar{x},0)) \right.$$

* $\forall i \in J$ $h_i(\bar{x},o) < 0$, donc il existe un voisinage N_i de $t = 0$ tel que $\forall t \in N_i \cap N^+$ $h_i(x(t),t) < 0$ (car h_i est continue (x,t)) par conséquent $u_i(t) = 0$ sur $N_i \cap N$ et par différentiation.

$$\text{(6-b)} \ [\ \forall i \in J \quad \dot{u}_i = 0$$

* $\forall i \in I \quad \bar{u}_i > 0$, donc il existe N_i' voisinage de $t = 0$ tel que
$\forall t \in N_i' \cap N^+ \quad u_i(t) > 0$ (car $u(t)$ est continue en 0 d'après le corollaire II.2.2.2.).

Par conséquent $\forall t \in N_i' \cap N^+ \quad h_i(x(t),t) = 0$ par complémentarité.
Par différentiation on obtient :

(6-c) $\left[\quad \forall i \in I \; (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial t} (h_i(\bar{x},0) = 0 \right.$

On obtient donc les relations (6) suivantes avec $L(x,t) = f(x,t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\, h_i(x,$
lagrangien.

$$
(6) \begin{cases}
a - \nabla^2 L(\bar{x},0).\dot{x} + \sum\limits_{i=1}^{m} \dot{u}_i \; \nabla h_i(\bar{x},0) = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla L(\bar{x},0)) \\
b - \forall i \in J \quad \dot{u}_i = 0 \\
c - \forall i \in I \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) = - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)
\end{cases}
$$

Différentions à présent (5-b) pour la partition (S_1, S_2, S_3) donnée

* $\forall i \in S_2 \cup S_3 \quad u_i(t) = 0$ donc

(7-a) $\left[\quad \forall i \in S_2 \cup S_3 \quad \dot{u}_i = 0 \right.$

* $\forall i \in K \quad h_i(\bar{x},0)$ et $h_i(x(t),t) \leq 0$ donc

(7-b) $\left[\quad \forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \right.$

* $\forall i \in S_1 \cup S_3 \cup \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x(t),t) = 0$ donc

(7-c) $\left[\quad \forall i \in S_1 \cup S_3 \cup \{s+1,\dots,m\} \; (\nabla h_i(\bar{x},0),\, \dot{x}) = - \frac{\partial h_i}{\partial t} (\bar{x},0) \right.$

Enfin $\forall i \in S_1 \quad u_i(t) > 0$
$u_i(0) = \bar{u}_i = 0$ d'où

(7-d) $\left[\quad \forall i \in S_1 \quad \dot{u}_i \geq 0 \right.$

On obtient donc le système d'équations suivant (8) ((7) + (6)). Ce système a été obtenu par différentiation formelle et on ne s'est pas encore préoccupé de la validité de cette différentiation. Ce sont les lemmes suivants qui vont permettre de conclure rigoureusement.

$$
(8)\quad
\begin{cases}
(8\text{-a}) & \begin{cases}
(\nabla^2 L(\bar{x},0),\ \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \dot{u}_i\ \nabla h_i(\bar{x},0) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla L(\bar{x},0) \\
\forall i \in J \quad \dot{u}_i = 0 \\
\forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) = -\dfrac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0)
\end{cases} \\[2em]
(8\text{-b}) & \begin{cases}
\forall i \in S_2 \cup S_3 \quad \dot{u}_i = 0 \\
\forall i \in S_1 \qquad \dot{u}_i \geq 0 \\
\forall i \in S_2 \qquad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq -\dfrac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},\ 0) \\
\forall i \in S_1 \in S_3 \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) = -\dfrac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},\ 0)
\end{cases}
\end{cases}
$$

On a besoin maintenant du lemme suivant (cf : [8], [11]).

<u>*Lemme 2*</u> :

Soit $F = (f_1,\dots,f_r) : U \times V \to \mathbb{R}^r$
où U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *et,* V *un ouvert de* $\mathbb{R}$

$\forall i \in \{1,\dots,r\}$ f_i *est* C^1 *sur* $U \times V$

Soit (t^k) *une suite de* C *(convexe de* $\mathbb{R}$*) convergente vers* $t^\circ \in V$ *telle que*

$$\dot{t} = \lim_{k\to+\infty} \frac{t^k - t^\circ}{|t^k - t^\circ|}$$

Soit (y^k) *une suite de* U *convergeant vers* y° *de* U *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}$ $F(y^k,\ t^k) \geq 0$

Soit $\Lambda = \{i \in \{1,\dots,r\} \mid f_i(y^\circ,t^\circ) = 0\}$

Soit F_Λ *le vecteur obtenu en ne gardant que les composantes indexées par* Λ

Alors

i) *Si* $\dot{y} = \lim_{k\to+\infty} \dfrac{y^k - y^\circ}{|t^k - t^\circ|}$ *existe, il vérifie*

$$\nabla F_\Lambda(y^\circ,t^\circ).\dot{y} + \frac{\partial}{\partial t} F_\Lambda(y^\circ,t^\circ).\dot{t} \geq 0 \qquad (\alpha)$$

ii) Réciproquement si (α) *possède exactement une solution* $\dot{y}$*, alors*

$\lim_{k \to +} \frac{y^k-y^\circ}{|t^k-t^\circ|}$ *existe et c'est* $\dot{y}$

□ <u>démonstration</u> : cf Dantzig-Folkman-Shapiro [11] □

On applique ce résultat aux équations (8).
Soit $y = (x,u)$.

$$\text{Soit } F : \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$$
$$(y, t) \to F(y,t)$$

avec

$$F(y,t) = \Big(\nabla L(x,u,t), -\nabla L(x,u,t), \underset{i\in S_2\cup S_3\cup J}{u_i}, \underset{i\in S_1}{-u_i}, -u_i, \underset{i\in I\cup\{s+1,\dots,m\}K}{h_i(x,t)} \quad \underset{\substack{i\in I\cup\{s+1,\dots,m\}\\ \cup S_1\cup S_3}}{-h_i(x,t)}\Big)$$

<u>*On fait l'hypothèse suivante*</u> : $0 \in \bar{T}_{S_1S_2S_3}$

Soit alors t^k une suite de $T_{S_1S_2S_3}$ convergeant vers 0
$\dot{t} = 1$
Soit $y^k = (x(t^k), u(t^k))$ grâce à la continuité de x et u $\lim_{x\to+\infty} y^k = (\bar{x}, \bar{u})$.
Pour k assez grand $F(y^k, t^k) \geq 0$, les hypothèse du lemme 2 sont vérifiées et $F_\Lambda = F$.
(α) devient :

$$\begin{cases}
\cdot \quad \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{u}, 0)\, \dot{x} + \sum_{i=1}^{m} \dot{u}_i\, \nabla h_i(\bar{x},0) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla L(\bar{x}, \bar{u}, 0) \leq 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geq 0 \\
\cdot \quad \forall i \in S_2 \cup S_3 \cup J \qquad \dot{u}_i = 0 \\
\cdot \quad \forall i \in S_1 \qquad \dot{u}_i \geq 0 \\
\cdot \quad \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \quad \nabla h_i(\bar{x},0).\dot{x} + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) = 0 \\
\quad\;\; \forall i \in S_2 \qquad \nabla h_i(\bar{x},0).\dot{x} + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \leq 0
\end{cases}$$

(α) est exactement le système (8)

On a alors le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 3 : *Si (8) possède une solution unique et si $0 \in \bar{T}_{S_1S_2S_3}$ alors*

$$\lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t\in T_{S_1S_2S_3}}} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \dot{x}$$

et

$$\lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t\in T_{S_1S_2S_3}}} \frac{u(t) - u(o)}{t} = \dot{u}$$

En définitive pour une partition donnée de K, si (8) possède une solution unique et si $0 \in \bar{T}_{S_1S_2S_3}$ on a un premier résultat. Il reste à prouver l'existence d'une solution de (8). C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 4 : *Si $0 \in \bar{T}_{S_1S_2S_3}$ alors (8) possède au moins une solution* $(\dot{x}, \dot{u})$

□ démonstration : Bijelow-Shapiro (8) □

Il reste maintenant à généraliser ces résultats à toutes les partitions de K afin d'obtenir un système d'équations et d'inéquations ne dépendant plus de S_1, S_2, S_3.

* Introduisons donc les conditions suivantes :

$$(9) \begin{cases} a - \dot{u}_i \geq 0 \qquad \forall i \in K \\ b - (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) \leq - \dfrac{\partial h_i}{\partial t} (\bar{x},0) \\ c - \dot{u}_i[(\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) + \dfrac{\partial h_i}{\partial t} (\bar{x},0)] = 0 \end{cases}$$

<u>*Lemme 5*</u> : *Pour toute partition de* K, (S_1, S_2, S_3), *toute solution* $(\dot{x},\dot{u})$ *de (8) est aussi solution de (8-a) et (9)*

□ Soit $(S_1, S_2, S_3) \in P$

Soit $(\dot{x}, \dot{u})$ solution de (8)

. (8-a) est vérifié

. $\left.\begin{array}{lll} \forall i \in S_2 \cup S_3 & \dot{u}_i = 0 \\ \forall i \in S_1 & \dot{u}_i \geq 0 \end{array}\right\} \quad \forall i \in K \quad \dot{u}_i \geq 0$ (9-a)

. $\forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x}, 0) \leq 0$ (9-b)

. $\forall i \in S_2 \cup S_3 \quad \dot{u}_i = 0$ donc

$$\dot{u}_i[(\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)] = 0$$

$$\forall i \in S_1 \cup S_3 \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) = 0$$

d'où (9-c)

$(\dot{x}, \dot{u})$ vérifie (9) □

<u>Remarque</u> : le système (8-a) + (9) est le système (S) intervenant dans l'énoncé du théorème II.2.3.1.

On peut maintenant conclure.

* <u>*Supposons que (S) possède une solution* $(\dot{x}, \dot{u})$ *unique.*</u>

Il existe au moins une partition (S_1, S_2, S_3) de K telle que $(\dot{x},\dot{u})$ soit solution de (8).
Soit P_o l'ensemble de telles partitions.

$\forall (S_1,S_2,S_3) \in P_o \quad (\dot{x},\dot{u})$ est solution de (8), donc
$(\dot{x},\dot{u})$ est solution de (S)

$(\dot{x},\dot{u})$ est donc une solution unique de (8).

D'autre part : si $(S_1, S_2, S_3) \notin (P_o)$ alors $0 \notin \overline{T_{S_1S_2S_3}}$.

Sinon (8) possède au moins une solution (x',u') qui est aussi solution de (S) ; alors on a $(x',u') = (\dot{x},\dot{u})$ et donc $(S_1,S_2,S_3) \in (P_o)$ d'où contradiction.

Donc $T_{S_1S_2S_3}$ a une borne inférieure $t_{S_1S_2S_3} > 0$.

Soit $t_o = \inf_{(S_1S_2S_3)\notin P_o} t_{S_1S_2S_3}$; l'ensemble des (S_1,S_2,S_3) n'appartenant pas à P_o est fini. Donc t_o existe et $t_o > 0$.

De plus $[0, t_o[\subset \bigcup_{(S_1,S_2,S_3)\in P_o} T_{S_1S_2S_3}$

Par conséquent, il existe $(S_1, S_2, S_3) \in P_o$ tel que $0 \in \overline{T_{S_1S_2S_3}}$ d'après le lemme 4 on a :

$$\lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t\in T_{S_1S_2S_3}}} \frac{x(t)-x(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{x(t)-x(0)}{t} = \dot{x}$$

et même chose pour $u(t)$. D'où le théorème.

$\square$

$\square$ Le corollaire II.2.3.2 est obtenue grâce à un changement de variable.

$$\tau = -t \in N \quad \text{(voisinage de l'hypothèse (H))}$$

Soit $y(\tau) = x(-\tau)$ la solution unique dans V de $P(-\tau)$.

Sous les hypothèses de II.2.3.1, si (S_o) admet une solution unique $(\dot{y},\dot{v})$ alors $\tau \to y(\tau)$ et $\tau \to v(\tau)$ sont dérivables à droite en 0 et

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{y(\tau) - y(o)}{\tau} = \dot{y} \text{ et } \lim_{\tau\to 0^+} \frac{v(\tau)-v(0)}{\tau} = \dot{v}$$

Avec : (S_o)

a - $(\nabla^2\tilde{L}(x,o),\dot{y}) + \sum_{i=1}^{m} \dot{v}_i \nabla\tilde{h}_i(\bar{x},0) = - \frac{\partial}{\partial\tau} \nabla\tilde{L}(\bar{x},0)$

b - $\forall i \in K \ \ \dot{v}_i \geq 0$

$$\forall i \in K \qquad (\nabla\tilde{h}_i(\bar{x},0),\dot{y}) \leq -\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{h}_i(\bar{x},0)$$

$$\forall i \in J \quad \dot{v}_i = 0$$

$$\forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla\tilde{h}_i(\bar{x},0),\dot{y}) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{h}_i(\bar{x},0)$$

$$c - \forall i \in K \quad \dot{v}_i[(\nabla\tilde{h}_i(\bar{x},0),\dot{y}) + \frac{\partial\tilde{h}_i}{\partial\tau}(\bar{x},0)] = 0$$

avec $\tilde{h}_i(y,\tau) = h_i(x,-\tau)$

et en particulier $\frac{\partial}{\partial\tau} h_i(\bar{x},0) = -\frac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0)$

de même

$$\tilde{L}(y,\tau) = f(x,-\tau) + \sum_{i=1}^{m} v_i h_i(x,-\tau)$$

et

$$\nabla^2\tilde{L}(\bar{x},0) = \nabla^2 L(\bar{x},0)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla\tilde{L}(\bar{x},0) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla L(\bar{x},0)$$

Or si $(\dot{y},\dot{v})$ est solution unique de (S_o), $(-\dot{y}, -\dot{v})$ est solution unique du système (S') annoncé dans le corollaire II.2.3.2 d'autre part

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{y(\tau) - y(0)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0^+} \frac{x(-\tau) - x(0)}{\tau} = -\lim_{t\to 0^-} \frac{x(t) - x(0)}{t}$$

Par conséquent x est dérivable à gauche en 0 et $x'(0^-) = -\dot{y}$.

De même pour $u'(0^-)$; on a donc le résultat annoncé.

□

3 - EXISTENCE ET UNICITE D'UNE REPRESENTATION CONTINUE DE LA SOLUTION x(t).

3.1 - Condition suffisante d'unicité de la solution d'un système d'équation du type Kuhn et Tucker du premier ordre.

D'après ce qui précède on voit qu'il faut assurer l'unicité de la solution d'un système du type relations de Kuhn et Tucker du premier ordre, c'est à dire a fortiori unicité de la solution du problème d'optimisation associé. Il est donc naturel de penser à la condition suffisante du second ordre de Fiacco-Mc Cormick : cf [10]

Soit $\bar{x}$ une solution locale d'un problème (P)

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \; h_i(x) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x) = 0 \end{cases}$$

et $\bar{u}$ un multiplicateur associé.

On dit que H_2 est vérifiée en $(\bar{x},\bar{u})$ si et seulement si

$$H_2 \quad \left[\begin{array}{l} \forall y \neq 0 \text{ tel que i/ } \forall i \in \{\{1,\dots,s\}/h_i(\bar{x}) = 0 \text{ et } \bar{u}_i > 0\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\nabla h_i(\bar{x}),y) = 0 \\ \qquad\qquad \text{ii/ } \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; (\nabla h_i(\bar{x}),y) = 0 \\ \text{alors } (y, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u}) > 0 \\ \text{où } L(\bar{x},\bar{u}) \text{ est le lagrangien du problème en } (\bar{x},\bar{u}). \end{array} \right.$$

Pour avoir unicité d'une représentation $x(\lambda)$ au voisinage de $\bar{x}$ solution de P(0) on a été obligé de supposer que $\bar{x}$ était une solution locale isolée. Cette hypothèse est automatiquement assurée sous H_2 en $\bar{x}$ d'après le lemme suivant (théorème de Fiacco-Mc Cormick cf [10]).

<u>*Lemme II.3.1.1.*</u> *Soit $(\bar{x},\bar{u})$ un couple de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vérifiant les conditions nécessaires du premier ordre de Kuhn et Tucker pour le problème (P).*
Si les fonctions objectif et contraintes sont C^2 au voisinage de $\bar{x}$ et si H_2 est vérifiée en $(\bar{x},\bar{u})$ alors est une solution locale stricte (donc isolée) de (P).

Ce lemme assure donc le caractère strict de la solution $\bar{x}$ mais permet également de conclure que si $(\bar{x},\bar{u})$ est une solution du système du permier ordre de Kuhn et Tucker, $\bar{x}$ est également, moyennant H_2, une solution du problème d'optimisation (P).

C'est le premier intérêt de la condition H_2. D'autre part si H_2 est vérifiée en $(\bar{x},\bar{u})$ et si on a H_1 en $\bar{x}$ on est en mesure de prouver (H), c'est à dire l'existence et l'unicité d'une représentation continue de la solution de $\Sigma(\lambda)$ au voisinage de $\bar{x}$, ($\Sigma(\lambda)$ étant le système du premier ordre de Kuhn et Tucker associé $P(\lambda)$). On va donc le montrer, grâce notamment à des résultats de Robinson sur les équations généralisées (cf. [17]), en prouvant en plus que l'hypothèse H_2 est alors assurée en $(x(\lambda), u(\lambda))$ solution de $P(\lambda)$ ainsi exhibée.

3.2 - Existence et unicité d'une représentation continue de la solution de $P(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = 0$.

Soit

$$\begin{array}{l} P(\lambda) : \\ \lambda \in \mathbb{R}^q \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } f(x,\lambda) & \\ x \in \mathbb{R} & \\ \forall i \in \{1,\ldots,s\} & h_i(x,\lambda) \leq 0 \\ \forall j \in \{1,\ldots,p\} & g_j(x,\lambda) = 0 \end{array} \right.$$

(On modifie ponctuellement les notations pour plus de clarté dans les démonstrations ultérieures).

Soit $m = s+p$.

<u>*Théorème II.3.2.1.*</u>

Soit $\bar{x}$ une solution locale de $P(o)$

Si f, h_i $(i = 1,\ldots,s)$, g_j $(j = 1,\ldots,p)$ *sont* C^2 *du couple dans un voisinage de* $(\bar{x}, 0)$.

Si H_1 *est assurée en* $(\bar{x})$

Si H_2 *est assurée en* $(\bar{x},\bar{u})$ *(où* $\bar{u}$ *est un multiplicateur de Kuhn et Tucker associé à* $\bar{x}$*)*

Alors

a/ $\bar{x}$ *est une solution stricte donc isolée de* $P(0)$ *et* $\bar{u}$ *est unique.*

b/ Il existe un voisinage N *de* $\lambda = 0$, *dans* $\mathbb{R}^q$, *voisinage* λ *de* $(x(\lambda), u(\lambda))$ *telle que*

i/ $\forall \lambda \in N$, $x(\lambda)$ *est l'unique solution de* $P(\lambda)$ *dans* V

ii/ $\forall\lambda \in N$, $u(\lambda)$ *est l'unique multiplicateur associé à* $x(\lambda)$ *et* $(x(\lambda), u(\lambda))$ *est l'unique solution du système des équations de Kuhn et Tucker de* $P(\lambda)$.

iii/ x *et* u *sont continues en* $\lambda = 0$ *(avec* $x(0) = \bar{x}$ *et* $u(0) = \bar{u}$

<u>*Corollaire II.3.2.2.*</u> : *Sous les hypothèses précédentes ; il existe un voisinage* N_o *de* $\lambda = 0$ *tel que* $\forall\lambda \in N \cap N_o$
H_1 *et* H_2 *sont assurées en* $(x(\lambda), u(\lambda))$.

3.3 - Preuve du théorème II.3.2.1.

a - Notations.

On garde les notations de 2. pour les ensembles I, J, K. Si u est le multiplicateur associé à x

$$u = (v, w) \in \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^p$$

où $v = (v_1,\dots,v_S)$ correspond aux contraintes en inégalités (h_i)
$w = (w_1,\dots,w_p)$ correspond aux contraintes en égalités (g_j)

On va beaucoup travailler en notation matricielle.
Soient

$$H^+ = (\nabla h_i(\bar{x},0) \ / \ i \in I) \qquad \text{(matrice card } I \times n)$$

$$H^- = (\nabla h_i(\bar{x},0) \ / \ i \in J)$$

$$H^o = (\nabla h_i(\bar{x},0) \ / \ i \in K)$$

$$G = (\nabla g_j(\bar{x}, 0) \ / \ j \in \{1,\dots,p\}$$

Soit $\Sigma(\lambda)$ le système des équations de Kuhn et Tucker du premier ordre en (x, u) (avec $u = (v,w)$)

$$\Sigma(\lambda)\quad \begin{cases} \nabla L(x,u,\lambda) = \nabla f(x,\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{s} v_i\, \nabla h_i(x,\lambda) + \sum\limits_{j=1}^{p} \omega_j \nabla g_j(x,\lambda) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad v_i \geq 0 \text{ et } h_i(x,\lambda) \leq 0 \\ \forall j \in \{1,\dots,p\} \quad g_j(x,\lambda) = 0 \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad v_i\, h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

On a besoin d'un lemme préliminaire sur des propriétés matricielles. (cf. Cottle, sur le complément de Shur [18]).

Lemme 1 : *(cf [17] [18])*

Soient r et s deux entiers

Soit $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$ *une matrice où* A_{11} *est* $r \times r$

Soit T l'application multivoque définie ainsi :

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to P(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s)$$

$$x = (x_1, x_2) \to T(x) = \{y \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \;/\; \exists z = (0,z_2) \in \mathbb{R}^{r+s} \quad y = Ax + z\}$$

Une CNS pour que T^{-1} *soit une fonction lipschitzienne définie sur* $\mathbb{R}^{r+s}$ *est*

i - A_{11} *est inversible*

ii - $A/A_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ *(complément de Schur) est symétrique, définie positive.*

□ démonstration : voir Robinson [17] □

Remarque. Si $y \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$

$$T^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \mid \exists z \in (\mathbb{R}^-)^s \text{ tel que } y = Ax + (0,z)\}$$

Le théorème II.3.2.1 est un résultat du type fonction implicite. La démonstration fait donc intervenir le même principe : on va exhiber une fonction contractante qui va ainsi posséder un point fixe unique.

Pour plus de clarté on notera :

$$\begin{aligned}
h(x,\lambda) &= (h_i(x,\lambda),\dots,h_s(x,\lambda)) \\
h^+(x,\lambda) &= (h_i(x,\lambda) \;/\; i \in I) \\
h^\circ(x,\lambda) &= (h_i(x,\lambda) \;/\; i \in K) \\
h^-(x,\lambda) &= (h_i(x,\lambda) \;/\; i \in J) \\
g(x,\lambda) &= (g_1(x,\lambda),\dots,g_p(x,\lambda)) \\
v^+ &= (v_i/i \in I) \;;\; v^- = (v_i \;/\; i \in J) \;;\; v^\circ = (v_i \;/\; i \in K)
\end{aligned}$$

On va maintenant prouver la partie (b) du théorème.
En effet (a) provient directement du lemme II.3.1.1 et du théorème II.2.2.1.

b - Définissons la fonction ϕ suivante :

$$\forall (x,u,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q,\ \phi(x,u,\lambda) = (\nabla L(x,u,\lambda),\ g(x,\lambda),\ h(x,\lambda),-v)$$

On note

$$y = (x,w,v)^t = (x,w,v^+,v^\circ,v^-)^t$$

où $u = (v,w)$ et $\varepsilon = (v^\circ,v^-) \in \mathbb{R}^\ell$.
Soit $\alpha = (0,\ \alpha_o,\ \alpha_-) \geq 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}^{\mathrm{card} I} \times \mathbb{R}^{\mathrm{card} K} \times \mathbb{R}^{\mathrm{card} I}$) et $\beta \in \mathbb{R}^s$ tel que $\forall i \in \{1,\dots,s\}\ \ \beta_i \geq 0$.

Remarque. $\phi(x,u,\lambda) = (0,0,-\alpha,-\beta) \iff$ y est solution de $\Sigma(\lambda)$.
On va définir des applications L et T dont on va montrer qu'elles sont lipschitziennes (en utilisant le lemme 1).

Soit L définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{s+p}$ par

$$L(y) = \{\phi(\bar{y},0) + (\nabla\phi(\bar{y},0),y-\bar{y}) + (0,\alpha,\beta) \text{ avec } \alpha \in (\mathbb{R}^+)^\ell \quad \beta \in (\mathbb{R}^+)^s\}$$

Lemme 2 : § L^{-1} *est lipschitzienne sur* $\mathbb{R}^{n+s+p}$

□ démonstration : $z \in L(y) \Longleftrightarrow \exists\alpha \in (\mathbb{R}^+)^{\ell},\ \exists\beta \in (\mathbb{R}^+)^s$ tels que

$$z = \phi(\bar{y},o) + (\nabla\phi(\bar{y},0),\ (y-\bar{y})) + (0,\alpha,\beta)$$

$$\nabla\phi(\bar{y},0).(y-\bar{y}) = \begin{bmatrix} \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0) & G^t & H^t \\ G & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\bar{x} \\ w-\bar{w} \\ v-\bar{v} \\ \end{bmatrix}$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0) & G^t & H^{+t} & H^{\circ t} \\ G & 0 & 0 & 0 \\ H^+ & 0 & 0 & 0 \\ H^{\circ} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors

$$(\bar{y},0).(y-\bar{y}) = \left(\left[\begin{array}{c:c} A & H^{-t} \\ \hdashline H^- & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_1 - \bar{y}_1 \\ v^- - \bar{v}^- \end{bmatrix},\ -(v-\bar{v}) \right)$$

où $y_1 = (x,\ w,\ v^+,\ v^\circ)^t$ et $\bar{y}_1 = (\bar{x},\ \bar{w},\ \bar{v}^+,\ \bar{v}^\circ)^t$

$z \in L(y) \iff \exists(\alpha_o, \alpha_-) \in (\mathbb{R}^+) \quad \exists\beta \in (\mathbb{R}^+)^s$ tels que

$$z = \phi(\bar{y},0) + (A.(y_1-\bar{y}_1) + H^{-t}.(v^- - \bar{v}^-), -(v-\bar{v})) + (0, \alpha, \beta).$$

Pour les contraintes inactives (H^-) $v-$ et $\bar{v}-$ sont nuls, donc

$$z = (\nabla L(\bar{x}, \bar{u}, 0), g(\bar{x},0), h(\bar{x},0), -\bar{v}) + (A.y_1 - \bar{y}_1) -(v-\bar{v}))+(0,\alpha,\beta)$$

C'est à dire en posant $\bar{X} = (\nabla\bar{L}, 0, h(\bar{x},0)) - A\bar{y}_1$

$z \in L(y) \iff \alpha = (\alpha_o) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathrm{card}K}$, $\exists\beta \in (\mathbb{R}^+)^s$ tels que

$$z = (\bar{X} + Ay_1 + (0,\alpha), -v + \beta)$$

Définissons alors T sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{s+p-(\mathrm{card}I)}$ par

$$T(y_1) = \{A.y_1 + z \ / \ z = (0, z_o) \text{ avec } z^o \in (\mathbb{R}^+)^{\mathrm{card}K}\}$$

où $y_1 = (x, w, v^+, v^o)$.

Alors $z \in L(y) \iff z = (z_1, -v+\beta)$ avec $\beta \in (\mathbb{R}^+)^s$ et $z_1 = \bar{X} + A.y_1 + (0,\alpha)$
donc $z_1 - \bar{X} = Ay_1 + (0,\alpha)$ $\alpha \in (\mathbb{R}^+)^{\mathrm{card}K}$ i.e. $z_1 - \bar{X} \in T(y_1)$.

Par conséquent si T^{-1} est lipschitzienne, L^{-1} l'est aussi.
Pour achever la démonstration montrons donc le □

<u>Lemme 3</u> : § T^{-1} *est lipschitzienne*

□ démonstration : pour cela on va appliquer le lemme 1.

Il suffit de vérifier qu'en partitionnant A de la façon suivante :

$$A = \left[\begin{array}{c:c} M & H^{ot} \\ \hdashline H^o & 0 \end{array}\right] \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0) & G^t & H^{+t} \\ G & 0 & 0 \\ H^+ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a i - M inversible

ii - A/M = N est symétrique et définie positive.

C'est l'objet du lemme 4. □

<u>Lemme 4</u> : *Sous les hypothèses* (H_1) *en* $\bar{x}$ *et* (H_2) *en* $(\bar{x},\bar{u})$ *la matrice* M *est inversible et* $N = [H°, 0, 0]\, M^{-1}\, [H°, 0, 0]^t$ *est symétrique et définie positive.*

□ démonstration :

* <u>M inversible</u> ; M est une matrice carrée.

Soient (a,b,c) tels que $M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0.$

On a

$$\begin{aligned} &\text{i - } \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0).a + G^t b + H^{+t} c = 0 \\ &\text{ii - } Ga = 0 \\ &\text{iii - } H^+ a = 0 \end{aligned}$$

Si a est non nul, ii) et iii) entraînent que $a^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)a > 0$ d'après la C.S. de Mc Cormick (H_2).

De plus i) donne $a^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0).a + (Ga)^t b + (H^+ a)c = 0$.

Or $Ga = H^+ a = 0$ donc $a^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)a = 0$ d'où contradiction.

Par conséquent a = 0 et i) devient $G^t b + H^{+t} c = 0$

D'après (H_1) (Indépendance des gradients G et H^+) on a :

$$b = c = 0$$

donc M est inversible *

* <u>N est symétrique</u> :

Soit (x,w,v) tels que $\begin{pmatrix} x \\ w \\ v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} H°^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $M \begin{pmatrix} x \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H°^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i.e. $$\begin{aligned} &1 \text{ - } (\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0),x) + G^t w + H^{+t} v = H°^t \\ &2 \text{ - } Gx = 0 \\ &3 \text{ - } H^+ x = 0 \end{aligned}$$

et $N = [H^o, 0, 0] \begin{bmatrix} x \\ w \\ v \end{bmatrix} = H^o x.$

En multipliant (1) par x^t on obtient

$$x^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},o)\, x + (Gx)^t w + (H^+x)^t v = (H^o x)^t$$

i.e. $x^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)x = N^t$.

$\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)$ est symétrique, donc N l'est.

* N est définie positive.

Soit z tel que $z^t N z \leq 0$.
Posons $y = xz$.
On a :

$$y^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)y = z^t(x^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},o)x)z = z^t N z \leq 0$$

Or d'après (2) et (3) multipliées par z on a :

$$Gy = 0 \text{ et } H^+ y = 0$$

donc d'après (H_2) si y est non nul, on a $y^t \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)y > 0$ d'où contradiction.
Par conséquent

$$y = 0 = xz$$

(1) multiplié par z donne alors

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0).xz} + G^+ wz + H^{+t} vz - H^{o\,t} z = 0$$

D'après (H_1) (indépendance des gradients) $z = 0$

$\square$

c - Définissons à présent l'application ϕ_λ dont on va montrer qu'elle a un unique point fixe.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^q$ et $y = (x, w, v)$

$$r(y,\lambda) = \phi(\bar{y},o) + (\nabla\phi(\bar{y},o), y-\bar{y}) - \phi(y,\lambda)$$

$$\phi_\lambda(y) = L^{-1}(r(y,\lambda)).$$

Lemme 5 : *$y = \phi_\lambda(y) \Longleftrightarrow y$ est solution de $\Sigma(\lambda)$.*

□ démonstration : $y = \phi_\lambda(y) \Longleftrightarrow y = L^{-1}(r(y,\lambda))$

$$\Longleftrightarrow r(y,\lambda) \in L(y)$$

$y = \phi_\lambda(y) \Longleftrightarrow \exists\alpha \in (\mathbb{R}^+)^\ell,\ \exists\beta \in (\mathbb{R}^+)^s$ tels que

$$r(y,\lambda) = \phi(\bar{y},0) + (\nabla\phi(\bar{y},0),y-\bar{y}) + (0,\alpha,\beta)$$

$\Longleftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^+)^{\ell+s}$ tels que

$$\phi(y,\lambda) = (0, -\alpha, -\beta)$$

$\Longleftrightarrow$ y solution de $\Sigma(\lambda)$ d'après une remarque faite au début de b.

□

Lemme 6 : *Il existe un voisinage N de $\lambda = 0$, tel que ϕ_λ admet un unique point fixe $(x(\lambda), u(\lambda))$, pour tout λ de N.*

□ démonstration

ϕ est $C^2/(y,\lambda)$; soit $\varepsilon > 0$

On appelle k la constante de Lipschitz de L^{-1} $(k > 0)$.

Soit $\delta < \dfrac{\varepsilon}{k(k+\varepsilon)}$.

Il existe un voisinage N de $\lambda = 0$ et B_ε une boule centrée en $\bar{y} = (\bar{x},\bar{u})$ et de rayon ρ tels que :

$$\forall\lambda \in N,\ \forall y \in B_\varepsilon$$

$$||\nabla\phi(y,\lambda) - \nabla\phi(\bar{y},0)|| \leq \delta$$

et

$$||\phi(\bar{y},\lambda) - \phi(\bar{y},0)|| \leq \frac{1-k\delta}{k}.\rho$$

Soit λ dans N et y_1 et y_2 quelconques dans B_ε

$$\begin{aligned}||\phi_\lambda(y_1) - \phi_\lambda(y_2)|| &= ||L^{-1}(r(y_1,\lambda)) - L^{-1}(r(y_2,\lambda)|| \\ &\leq k\ ||r(y_1,\lambda) - r(y_2,\lambda)|| \\ &\leq k\ ||y_1-y_2||\ \text{Sup}\ \{||r'_y(1-\mu)y_1+ y_2,\lambda)||, \\ &\qquad 0 \leq \mu \leq 1\}\end{aligned}$$

Or $||r'_y(y,\lambda)|| = ||\nabla\phi(\bar{y},0) - \nabla\phi(y,\lambda)|| \leq \delta$ si $y \in B_\varepsilon$
$\forall\mu \in [0,1]\ (1-\mu)y_1 + \mu y_2 \in B_\varepsilon$
donc

$$\sup_{0\leq\mu\leq1} \{||r'_y(|1-\mu)y_1 + \mu y_2)||\} \leq \delta$$

Par conséquent

$$||\phi_\lambda(y_1) - \phi_\lambda(y_2)|| \leq k\delta\ ||y_1-y_2||$$

avec $\quad k\delta = \frac{\varepsilon}{k+\varepsilon} < 1$

donc $\forall\lambda \in N$ ϕ_λ est *strictement contractante sur* B_ε.

* ϕ_λ est une application de B_ε sur B_ε.

Pour cela montrons que si y est un élément quelconque de B on a $\phi_\lambda(y) \in B_\varepsilon$ c'est à dire

$$||\phi_\lambda(y) - \bar{y}|| \leq \rho$$

$$||\phi_\lambda(y) - \bar{y}|| \leq ||\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(\bar{y})|| + ||\phi_\lambda(\bar{y}) - \bar{y}||$$

or $\bar{y} = L^{-1}(0)$

$$\phi_\lambda(\bar{y}) = L^{-1}(r(\bar{y},\lambda))$$

donc

$$||\phi_\lambda (\bar{y}) - \bar{y}|| \leq k \, ||r(\bar{y};\lambda)|| \text{ car } L^{-1} \text{ est lipschitzienne}$$

$$\leq k \, ||\phi(\bar{y},o) - \phi(\bar{y},\lambda)||$$

$$\leq k \times \frac{1-k\delta}{K} . \rho$$

$$||\phi_\lambda(\bar{y}) - \bar{y}|| \leq (1-k\delta)\rho$$

de plus

$$||\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(\bar{y})|| \leq \frac{\varepsilon}{k+\varepsilon} \, ||y-\bar{y}|| \leq \frac{\rho\varepsilon}{k+\varepsilon}$$

On a donc

$$||\phi_\lambda(y) - \bar{y}|| \leq (1-k\delta + \frac{\varepsilon}{k+\varepsilon}) \, \rho$$

Or

$$k\delta = \frac{\varepsilon}{k+\varepsilon}$$

donc

$$||\, \phi_\lambda (y) - \bar{y}|| \leq \rho$$
$$\phi_\lambda(y) \in B_\varepsilon$$

En conclusion pour tout λ de N, ϕ_λ admet un unique point fixe $y(\lambda) = (x(\lambda), u(\lambda))$ dans B_ε.

$\square$

On a donc prouvé l'existence et l'unicité d'une solution $(x(\lambda), u(\lambda))$ de $\Sigma(\lambda)$ dans B_ε voisinage de $(\bar{x},\bar{u})$, ceci pour tout λ de N.

d - Montrons à présent la continuité de $y(\lambda)$ en 0.

Soit y dans B_ε et λ dans N

$$\|y(\lambda) - y\| = \|\phi_\lambda(y(\lambda)) - y\|$$

$$\leq \|\phi_\lambda(y(\lambda)) - \phi_\lambda(y)\| + \|\phi_\lambda(y) - y\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{k+\varepsilon} \|y(\lambda) - y\| + \|\phi_\lambda(y) - y\|$$

Par conséquent :

$$\frac{k}{k+\varepsilon} \times \|y(\lambda) - y\| \leq \|\phi_\lambda(y) - y\|$$

$$\|y(\lambda) - y\| \leq \frac{k+\varepsilon}{k} \|\phi_\lambda(y) - y\| = k_\varepsilon \|\phi_\lambda(y) - y\|$$

Soit μ dans N et $y = y(\mu) \in B_\varepsilon$, on a donc $\|y(\lambda) - y(\mu)\| \leq k_\varepsilon \|\phi_\lambda(y(\mu)) - y(\mu)\|$
or $y(\mu) = \phi_\mu(y(\mu))$
d'où $\|y(\lambda) - y(\mu)\| \leq k_\varepsilon \|\phi_\lambda(y(\mu)) - \phi_\mu(y(\mu))\|$

$$\leq k_\varepsilon \|L^{-1}(r(y(\mu),\lambda)) - L^{-1}(r(y(\mu),\mu)\|$$

$$\leq (k+\varepsilon)\|r(y(\mu), \lambda) - r(y(\mu),\mu)\|$$

$$\leq (k+\varepsilon) \|\phi(y(\mu), \lambda) - \phi(y(\mu), \mu)\|$$

ϕ est $C^2/(y,\lambda)$ donc uniformément lipschitzienne sur B_ε. Par conséquent
$\forall\lambda \in N$, $\forall\mu \in N$

$$\|y(\lambda) - y(\mu)\| \leq (k+\varepsilon)k_o \|\lambda-\mu\| = K\|\lambda-\mu\|$$

d'où la continuité en 0.

e - Pour terminer il faut montrer que la solution $y(\lambda)$ de $\Sigma(\lambda)$ est telle que $x(\lambda)$ est solution unique de $P(\lambda)$ dans V voisinage de $\bar{x}$, pour λ petit

Pour cela il suffit de montrer que la C.S du 2ème ordre de Mc Cormick (H_2) est encore assurée en $(x(\lambda), u(\lambda))$ pour λ petit c'est à dire

$\exists N_o$ voisinage de $\lambda = 0$, tel que $\forall \lambda \in N \cap N_o$

$$\begin{cases} \forall x \neq 0 \text{ tel que } \forall i \in I(\lambda) \quad (\nabla h_i(x(\lambda),\lambda), x) = 0 \\ \qquad \forall j \in \{1,\dots,p\} \; (\nabla g_j(x(\lambda), \lambda), x) = 0 \\ \Longrightarrow \quad (x, \nabla^2 L(x(\lambda), u(\lambda), \lambda)\, x) > 0 \end{cases}$$

où $I(\lambda) = \{i \in \{1,\dots,s\} \;/\; h_i(x(\lambda), \lambda) = 0 \text{ et } v_i(\lambda) > 0\}$

<u>Remarque</u>. Soit $i \in I$, alors $\bar{v}_i > 0$ et par continuité $v_i(\lambda) > 0$ pour λ petit.
Donc $\exists N_1$ voisinage de $\lambda = 0$ sur lequel $I \subset I(\lambda)$.
On va raisonner par l'absurde :

si c'est faux, on peut trouver une suite (λ_n) convergeant vers 0 et x_n vérifiant

$$x_n \neq 0 \qquad \begin{cases} \forall i \in I(\lambda_n) \; (\nabla h_i(x(\lambda_n), \lambda_n), x_n) = 0 \\ \forall_j \in \{1,\dots,p\} \; (\nabla g_j(x(\lambda_n), \lambda_n), x_n) = 0 \end{cases}$$

et

$$q_n = (x_n, \nabla^2 L(x(\lambda_n), u(\lambda_n), \lambda_n)\, x_n) \leq 0$$

Quitte à prendre $\frac{x_n}{||x_n||}$ (ce qui ne change rien pour les égalités et le signe de q_n) on peut supposer $||x_n|| = 1$ et quitte à extraire une sous-suite convergeante de (x_n) qui est bornée, on peut supposer que (x_n) converge vers x

- x est non nul car $||x|| = \lim\limits_n ||x_n|| = 1$

$\lambda_n \to 0$ donc $\exists n_o$ tel que $\forall n \geq n_o \; \lambda_n \in N_1$ et donc

$$I(\lambda_n) \supset I$$

donc $\forall n \geq n_o$ on a $\forall i \in I$ $(\nabla h_i(x(\lambda_n), \lambda_n), x_n) = 0$.

Par continuité des ∇h_i et de $\lambda \to x(\lambda)$ on obtient en passant à la limite quand $n \to +\infty$

$$\forall i \in I \ (\nabla h_i(x(o), 0), x) = 0$$

c'est à dire $\forall i \in I$ $(\nabla h_i(\bar{x},0),x) = 0$.

De la même façon $\forall j \in \{1,\ldots,p\}$ $(\nabla g_j(\bar{x}, 0), x) = 0$.
On a donc un élément x non nul vérifiant à la fois

$$\begin{cases} \forall i \in I \ \ (\nabla h_i(\bar{x},0), x) = 0 \\ \forall j \in \{1,\ldots,p\} \ (\nabla g_j(\bar{x},0),x) = 0 \end{cases}$$

D'après (H_2) en $(\bar{x}, \bar{u})$ on a donc $(x, \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{u}, 0)\, x) > 0$. D'autre part.

$$q_n = (x_n, \nabla^2 L(x(\lambda_n), u(\lambda_n), \lambda_n)\, x_n) \leq 0.$$

$\nabla^2 L$ est continue en $(\bar{x}, 0)$, $\lambda \to x(\lambda)$ et $\lambda \to u(\lambda)$ sont continues en 0 donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on a

$$(x, \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{u}, 0)\, x) \leq 0$$

d'où une contradiction.

La preuve du théorème II.3.2.1 est terminée.
On a montré une partie du corollaire II.3.2.2. puisqu'on a vu que (H_2) est assurée en $(x(\lambda), u(\lambda))$ pour $\lambda \in N_o \cap N$. D'autre part on a montré auparavant que (H_1) est assurée en $(x(\lambda), u(\lambda))$ pour λ dans $N_o \cap N$ (cf. lemme 3 du 2.2).

On est à présent en mesure d'énoncer un résultat général sous les hypothèses H_1 et H_2.

4 - RESULTAT GENERAL D'ANALYSE DE SENSIBILITE D'UN PROBLEME PARAMETRE.

Théorème II.4.1. *Soit* P (t) *le problème paramétré suivant :*

$$\left[\begin{array}{l} \text{Min } f(x,\lambda t) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\}\ h_i(x, \lambda t) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ h_i(x, \lambda t) = 0 \end{array}\right.$$

où $t \in \mathbb{R}$. *On fixe* λ *(quelconque) dans* $\mathbb{R}^q$: $P_\lambda(t) = P(t)$.

Soit $\bar{x}$ *une solution locale de* P(0) *et* $\bar{u}$ *un multiplicateur associé.*
On fait les hypothèses suivantes :

i/ f *et* h_i $(i = 1,\dots,m)$ *sont* C^2 *par rapport à* (x,λ) *dans un voisinage de* $(\bar{x},0)$

ii/ H_1 *est vérifiée en* $\bar{x}$, *à savoir :*
$(\nabla h_i(\bar{x},0),\ i \in E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\})$ *sont linéairement indépendants*

iii/ H_2 *est vérifiée en* $(\bar{x},\bar{u})$, *à savoir :*
$\forall y \neq 0$ *tel que* $\forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\}$ $(\nabla h_i(\bar{x},0), y) = 0$
on a $(y, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)y > 0$

Alors :

i/ $\bar{x}$ *est une solution locale stricte donc isolée de* P(0) *et* $\bar{u}$ *est unique*

ii/ Il existe un voisinage N *de* $t = 0$ *et un voisinage* $V \times W$ *de* $(\bar{x},\bar{u})$, *il existe une fonction* (x,u)

$$(x,u) \quad : N \to V \times W$$
$$t \to (x(t), u(t))$$

telle que

x(t) *est l'unique solution de* P(t) *dans* V

u(t) *est l'unique multiplicateur associé à* x(t)

*iii/*x *et* u *sont continues en* 0 *avec* $x(o) = \bar{x}$ *et* $u(o) = \bar{u}$

iv/H_1 *et* H_2 *sont vérifiées en* x(t) *pour tout* t *de* N

De plus : Si le système (S) *suivant possède une solution unique* $(\dot{x}, \dot{u})$ *alors* x *et* u *sont dérivables à droite en et*

$$x'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \dot{x}$$

$$u'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(t) - u(0)}{t} = \dot{u}$$

avec :

$$(S)\left[\begin{array}{ll}
a/\ \nabla^2(\bar{x}, \bar{u}, 0)\dot{x} + \sum_{i=1}^{m} \dot{u}_i \nabla h_i(\bar{x},0) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla L(\bar{x},\bar{u},0)) & \\
b/\ \forall i \in J = \{i \in \{1,\dots,s\}/h_i(\bar{x},0) < 0\} & \dot{u}_i = 0 \\
\quad \forall i \in K = \{i \in \{1,\dots,s\}/h_i(\bar{x},0) = \bar{u}_i = 0\} & \dot{u}_i \geq 0 \\
\quad \left.\begin{array}{l} \forall i \in I = \{i \in \{1,\dots,s\} / \bar{u}_i > 0\} \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \end{array}\right] & (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}h_i(\bar{x},0) \\
\quad \forall i \in K & (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq -\frac{\partial}{\partial t}h_i(\bar{x},0) \\
c/\ \forall i \in K\ \ \dot{u}_i[(\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) + \frac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0)] = 0 &
\end{array}\right.$$

qui est le système des équations de Kuhn et Tucker du premier ordre du problème quadratique suivant :

$$
(Q)\begin{cases}
\text{Min } \frac{1}{2}(\dot{x}, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\dot{x}) + (\dot{x}, \frac{\partial}{\partial t}(\nabla L(\bar{x}, \bar{u}, 0)) \\
\dot{x} \in \mathbb{R}^n \\
\forall i \in I \cup \{s+1,\ldots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) = -\frac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x},0) \\
\forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) \le -\frac{\partial h_i}{\partial t}(\bar{x}, 0)
\end{cases}
$$

ANNEXE

-

Dans [30] Jittorntrum a sous une hypothèse différente montré un résultat général.

Dans ce chapitre II on a montré l'existence, l'unicité et la continuité d'une représentation de la solution sous les hypothèses H_1 et H_2 de Fiacco-McCormick. On montrera la dérivabilité directionnelle de cette représentation sous H_2 (et H_1) dans les deux cas particuliers de P_1 et P_2 puis dans le cas général dans le chapitre III.

Jittorntrum a d'emblée montré la dérivabilité directionnelle de cette représentation pour une problème paramétré quelconque, mais en remplaçant H_2 par l'hypothèse suivante :

Pour $$(\lambda)\begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\}\ h_i(x,\lambda) \le 0 \\ \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\}\ h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$H \begin{cases} \exists a > 0 \\ \forall y \neq 0 \text{ tel que, } \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\},\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\ x) = 0 \\ \\ \text{on a } (y,\ \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)y) \ge a\ ||y||^2 \end{cases}$$

Il faut également remarquer qu'il affirme avoir démontré l'existence et l'unicité de la représentation continue de la solution sous l'hypothèse H.

1 - LE RESULTAT PRINCIPAL EST LE SUIVANT :

<u>*Théorème.*</u> *Quelle que soit la direction λ non nulle de $\mathbb{R}^q$ on considère les problèmes $P(t\lambda)$ pour t dans $\mathbb{R}$. Soit $\bar{x}$ une solution locale isolée de $P(0)$.*
H_1 et H sont supposées vérifiées en $\bar{x}$ (f et h_i étant C^2 au voisinage de $(\bar{x},0)$) et $\bar{u}$ est le multiplicateur associé à $\bar{x}$.
Alors il existe N voisinage de $t = 0$ dans $\mathbb{R}$ et V voisinage de $(\bar{x}, \bar{u})$, il existe une unique fonction continue $(x, u) : N \to V$

telle que
pour tout t *de* N, x(t) *est solution de* P(λt)

u(t) *est le multiplicateur associé et*

$x(0) = \bar{x}$, $u(0) = \bar{u}$.
De plus la dérivée à droite de (x,u) *en* 0 *existe et*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t} = \dot{x}$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{u(t) - u(0)}{t} = \dot{u}$$

Par conséquent le système (S) *évoqué dans le chapitre II, admet une solution unique qui est* $(\dot{x}, \dot{u})$

On n'a malheureusement pas eu la possibilité de consulter la thèse de Jittortrum (faite en Australie) pour y trouver la démonstration de l'existence et de l'unicité de la représentation continue.

Le principe de la démonstration des résultats de dérivabilité est le suivant :

□ On garde les notations du chapitre II.

Soit R un ensemble d'indices tels que $I \subseteq R \subseteq I \cup K$
Soit

$$P(R,\lambda) \begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in R & h_i(x,\lambda) = 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

On remarque d'abord que si $\bar{x}$ est une solution de P(0) vérifiant H_1 et H alors $\bar{x}$ est une solution de P(R,λ) vérifiant H_1 et H (quelque soit R compris entre I et I ∪ K).

On cherche ensuite un intervalle $[0, \delta_1]$ sur lequel $h_j(x(t),t) = 0$ (pour certains j de $\{1,\dots,s\}$) et on note

$$R_1 = \{j \in \{1,\dots,s\} \ / \ h_j(x(t),t) = 0, \ \forall t \in [0, \delta_1]\}$$

On a $I \subset R_1 \subset I \cup K$.

De la même façon on cherche $[0, \delta_3]$ sur lequel $h_j(x(t),t) > 0$ et on appelle $R_3 = \{j \in \{1,\dots,s\} \;/\; h_j(x(t),t) > 0 \quad \forall t \in [0, \delta_3]\}$
$R_1 \cap R_3 = \emptyset$ et $R_1 \cup R_3 = \{1,\dots,s\}$.

On considère alors $P(R_1, t\lambda)$: soit x une solution de ce problème (associée à u).

Les hypothèses du théorème de Fiacco (cf. chapitre I ; théorème B.1.1.1) sont assurées car il n'y a que des contraintes en égalité (pas de problème de stricte complémentarité donc) et on en déduit l'existence et l'unicité d'une fonction (x_1, u_1) définie sur un voisinage de t, telle que $x_1(t)$ soit la solution de $P(R_1, t)$ dans un voisinage de x et $u_1(t)$ le multiplicateur associé.
De plus x_1 (et u_1) sont dérivables à droite en 0.

a) Si $R_1 \cup R_3 = \{1,\dots,s\}$ $\quad x_1(t) = x(t) \quad \forall t \in [0, \delta_1]$

$$\frac{dx_1}{dt}(0^+) = \frac{dx}{dt}(0^+) \text{ c'est terminé.}$$

b) Sinon soit $R_2 = \{1,\dots,s\} - (R_1 \cup R_3)$.

On va alors ajouter une par une les contraintes de R_2.
Si $j \in R_2$, cela signifie que $h_j(x(t),t)$ est alternativement nul ou positif une infinité de fois.
Si $R_2 = \{j\}$: en appliquant le théorème de Fiacco à $P(R_1, t\lambda)$ et à $P(R_1 \cup \{j\}, t\lambda)$ on en déduit que x_{R_1} et $x_{R_1 \cup \{j\}}$ (leurs solutions) sont dérivables en 0 ; pour t petit $x(t) = x_{R_1}(t)$ ou $x_{R_1 \cup \{j\}}(t)$ comme $x(t)$ est continue en 0 cela signifie que $x_{R_1}(0) = x_{R_1 \cup \{j\}}(0)$ et donc leurs dérivées en 0 sont égales. Comme x est tantôt égale à x_{R_1} tantôt à $x_{R_1 \cup \{j\}}$ on a

$$\frac{dx}{dt}(0^+) = \frac{dx_{R_1}}{dt}(0) = \frac{dx_{R_1 \cup \{j\}}}{dt}(0)$$

On étend sans problème à R_2 quelconque en rajoutant les contraintes une à une.

Pour u la démonstration est similaire.

□

2 - ON VA A PRESENT COMPARER LES DEUX HYPOTHESES DU SECOND ORDRE H et H_2

Sous les notations précédentes on appelle V l'ensemble suivant :

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\},\ (\nabla h_i(\bar{x},0),y) = 0\}$$

V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et en particulier $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \lambda.V \subset V$;
on notera $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0) = Q$

Les hypothèses H et H_2 sont :

$$H \begin{cases} \exists a > 0,\ \forall y \in V \\ \qquad (y.Qy) \geq a\ ||y||^2 \end{cases}$$

$$H_2 \{\ \forall y \in V,\ y \neq 0,\ (y,\ Qy) > 0$$

i - On a évidemment $H \Rightarrow H_2$

ii - Montrons que $H_2 \Rightarrow H$.

Supposons H_2 satisfaite.

Si H ne l'est pas : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver y_n dans V tel que
$(y_n,\ Qy_n) < \frac{1}{n}\ ||y_n||^2$ (1)

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ y_n \neq 0$ car sinon on n'a pas (1).

Soit $x_n = \dfrac{y_n}{||y_n||}$ x_n est dans $V \subset \mathbb{R}^n$ et $||x_n|| = 1$.

donc quitte à extraire une sous-suite de (x_n) on peut supposer que (x_n) converge vers x ; de plus $||x|| = \lim_n ||x_n|| = 1$.

Donc $x \neq 0$.

(1) donne $(x_n, Qx_n) < \frac{1}{n}$ et en passant à la limite on obtient $(x, Qx) \leq 0$

On a donc trouvé x non nul dans V, tel que $(x, Qx) \leq 0$. On a donc une contradiction avec H_2.
Donc H est satisfaite.

$\square$

En définition $H \iff H_2$.

CHAPITRE III

ETUDE DE DEUX CAS PARTICULIERS ET EXTENSION AU CAS GÉNÉRAL.

-

On va exploiter les résultats précédents pour conclure précisément sur sur la différentiabilité d'une solution dans le cas des problèmes $P_1(\lambda)$ et $P_2(\lambda)$. Il s'agit à chaque fois de traduire les hypothèses H_1 et H_2 et surtout de montrer que l'hypothèse H_2 entraîne l'unicité de la solution du système (S) exhibé dans le chapitre II. L'étude de ces deux cas particuliers débouche sur le cas d'un problème paramétré quelconque $P(\lambda)$ et permet d'établir ainsi un résultat général.

1 - APPLICATION AU PROBLEME $P_1(\lambda)$.

$$P_1(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } f(x,\lambda) = g(x) + (a+\lambda,x) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x) = 0 \end{array} \right.$$

On suppose que $P_1(0)$ possède une solution locale $\bar{x}$, associée au multiplicateur $\bar{u}$ (unique sous H_1) on suppose que f et h_i, $i = 1,\dots,m$ sont C^2 au voisinage de $\bar{x}$.

<u>Rappelons les notations</u>.

$$E(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,s\} \ / \ h_i(\bar{x}) = 0\}$$

$$I = \{i \in \{1,\ldots,s\} \ / \ \bar{u}_i > 0\} \qquad (\subset E(\bar{x}))$$

$$K = \{i \in \{1,\ldots,s\} \ / \ h_i(\bar{x}) = \bar{u}_i = 0\} \qquad (\subset E(\bar{x}))$$

On note $\Lambda = I \cup K \cup \{s+1,\ldots,m\}$ (contraintes en égalité en $\bar{x}$)

1.1 - Existence d'une solution de $P_1(\lambda)$, pour λ petit.

Théorème III.1.1.1. *On suppose que sont vérifiées en* $\bar{x}$ *solution de* $P_1(0)$ *(à laquelle est associée le multiplicateur)*

H_1 $(\nabla h_i(\bar{x}),\ i \in E(\bar{x}) \cup \{s+1,\ldots,m\})$ *sont linéairement indépendants*

H_2 $\forall y \neq 0$ *tel que* $\forall i \in I \cup \{s+1,\ldots,m\}$ $(\nabla h_i(\bar{x}),y) = 0$ *on a* $(y, \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{u}, 0)y) > 0$

Alors

i/ $\bar{x}$ *est une solution locale stricte donc isolée de* $P_1(0)$ *et* $\bar{u}$ *est unique.*

ii/ *Il existe* N *voisinage de* $\lambda = 0$, V *voisinage de* $\bar{x}$ *et* W *voisinage de* $\bar{u}$ *; il existe une fonction* $(x,u) : N \to V \times W$ *telle que* $x(\lambda)$ *soit l'unique solution de* $P(\lambda)$ *dans* V *et* $u(\lambda)$ *l'unique multiplicateur associé. De plus* x *et* u *sont continues en* $\lambda = 0$ *(avec* $x(0) = \bar{x}$, $u(o) = \bar{u}$)

C'est une application directe du théorème II.3.2.1.

Pour montrer la différentiabilité de la représentation exhibée on va appliquer le théorème II.4.1.

Pour cela on va particulariser λ en $t\lambda$ pour étudier la dérivabilité le long de la direction λ et considérer le problème $P_1(t\lambda)$ pour λ *fixé dans* $\mathbb{R}^n$ $(\lambda \neq 0)$.

1.2 - Mise en place de (S_λ) et (Q_λ).

Le théorème II.4.1 fait intervenir un problème quadratique $Q_1(\lambda)$ et le système de Kuhn et Tucker associé.
Il convient donc de les décrire dans le cas du problème P_1.

Le lagrangien du problème $P_1(t\lambda)$ est :

$$L(x,u,\ t) = g(x) + (a+\lambda t,\ x) + \sum_{i=1}^{m} u_i\ h_i(x)$$

$$\nabla L(x,u,\lambda t) = \nabla g(x) + a + \lambda t + \sum_{i=1}^{m} u_i\ \nabla h_i(x)$$

Comme on fixe λ dans $\mathbb{R}^n$, on ommettra λ dans les notations $\frac{\partial \nabla L}{\partial t}(x,u,t) = \lambda$.
On voit que a n'intervient pas dans $\nabla^2 L(x,u,t)$.
On note donc

$$L_o(x,u) = g(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x)$$

Le problème quadratique $Q(\lambda)$ est alors le suivant :

$$Q_1(\lambda)\quad \begin{cases} \mathrm{Min}\ \frac{1}{2}(\dot{x},\ \nabla^2 L_o(\bar{x},\ \bar{u})\dot{x}) + (\dot{x},\lambda) & \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} & (\nabla h_i(\bar{x}),\ \dot{x}) = 0 \\ \forall i \in K & (\nabla h_i(\bar{x}),\ \dot{x}) \leq 0 \end{cases}$$

Le système des équations de Kuhn et Tucker du 1er ordre associé au problème $Q_1(\lambda)$ est alors :

$$S_1(\lambda)\quad \begin{cases} \text{a -} & (\nabla^2 L_o(\bar{x},\bar{u}),\dot{x}) + \sum_{i\in\Lambda} \dot{u}_i\ \nabla h_i(\bar{x}) = -\lambda \\ \text{b -} & \forall i \in K \quad \dot{u}_i \geq 0\ ; \\ & \forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x}),\ \dot{x}) \leq 0 \\ & \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x}),\ \dot{x}) = 0 \\ \text{c -} & \forall i \in K \quad \dot{u}_i(\nabla h_i(\bar{x}),\ \dot{x}) = 0 \end{cases}$$

On va maintenant montrer l'unicité de la solution de $S_1(\lambda)$.

1.3 - Existence et unicité d'une solution de $S_1(\lambda)$.

Théorème III.1.3.1. *Soit* λ *fixé dans* $\mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$
On suppose que H_1 *et* H_2 *sont vérifiées en* $\bar{x}$ *solution de* $P_1(0)$
alors

i/ $Q_1(\lambda)$ *admet une solution unique* $\dot{x}(\lambda)$

ii/ $S_1(\lambda)$ *admet une solution unique* $(\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda))$

□ démonstration

i/ $Q_1(\lambda)$ est un problème quadratique :

Soit $\Delta_1(\lambda)$ le domaine réalisable de $Q_1(\lambda)$.
H_2 en $\bar{x}$ revient à dire que la forme quadratique $\nabla^2 L_o(\bar{x},\bar{u})$ est définie positive sur $\Delta_1(\lambda)$.
Donc d'après le lemme 2 suivant $Q_1(\lambda)$ possède une solution unique $\dot{x}(\lambda)$.

Lemme 2 : (Huard [15])

Soit (Q) *le problème quadratique suivant*

$$(Q) \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2}(x, qx) + \langle a,x \rangle \\ x \in C \end{cases}$$

où C *est un convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^n$
si q *est définie positive sur* C *alors* (Q) *admet une solution unique*

ii/ $\dot{x}(\lambda)$ vérifie alors les conditions nécessaires du premier ordre de K.T avec $\dot{u}(\lambda)$ comme multiplicateur.

Donc $S_1(\lambda)$ possède au moins une solution.
L'indépendance des gradients actifs H_1 assurent l'unicité de $\dot{u}(\lambda)$ pour $\dot{x}(\lambda)$ donné.
Il reste à montrer que $S_1(\lambda)$ a une solution unique.
Pour cela on va montrer que toute solution (y, v) de $S_1(\lambda)$ vérifie H_2, i.e. la CS du 2e ordre pour le pb $Q_1(\lambda)$.
Ainsi d'après le lemme 1, on pourra affirmer que y est solution de $Q_1(\lambda)$.
Or $Q_1(\lambda)$ a une solution unique $\dot{x}(\lambda)$ donc $y = \dot{x}(\lambda)$ et (d'après H_1) $v = \dot{u}(\lambda)$.
Ecrivons donc la condition du second ordre (H_2) en (y,v) pour $Q_1(\ )$; le lagrangien de $Q_1(\lambda)$ est en (y,v) :

$$l(y,v) = \frac{1}{2}\,(y,\nabla^2 L_o(\bar{x},\bar{u})\,y) + (y,\lambda) + \sum_{i\in\Lambda} v_i\,\nabla h_i(\bar{x})$$

$$\nabla^2 l(y,v) = \nabla^2 L_o(\bar{x},\bar{u})$$

Soit $z \neq 0$ tel que $\forall i \in K$ tel que $v_i > 0$ $(\nabla h_i(\bar{x}), z) = 0$ (a)
$\forall i \in I$ $\{s+1,\dots,m\}$ $(\nabla h_i(\bar{x}), z) = 0$ (b)

En particulier z vérifie (b)
Par conséquent H_2 en $\bar{x}$ entraîne $(z, \nabla^2 L_o(\bar{x},\bar{u})z) > 0$ c'est à dire $(z, \nabla^2 l(y,v)z)>0$ donc H_2 est vérifiée en (y,v) pour $Q_1(\lambda)$.

□

On peut alors conclure :

1.4 - Dérivabilité de la représentation d'une solution de $P_1(\lambda)$.

Théorème III.1.4.1. *Soit $\bar{x}$ une solution locale de $P_1(0)$ et $\bar{u}$ un multiplicateur associé.*
f et h_i sont C^2 dans un voisinage de $\bar{x}$ on suppose H_1 et H_2 vérifiées en $(\bar{x}, \bar{u})$
Alors

i/ $\bar{x}$ est une solution locale stricte (donc isolée) de $P_1(0)$ et $\bar{u}$ est unique.

ii/ Il existe N *voisinage de* $\lambda = 0$ *et* $V \times W$ *voisinage de* $(\bar{x},\bar{u})$, *il existe une fonction* (x,u) *définie de* $N \to V \times W$ *telle que,* $\forall \lambda \in N$ $x(\lambda)$ *est l'unique solution de* $P_1(\lambda)$ *dans* V *et* $u(\lambda)$ *l'unique multiplicateur associé.*

iii/ (x,u) *est continue en* 0 *avec* $x(0) = \bar{x}$ $u(0) = \bar{u}$

iv/ $\forall \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ x *et* u *sont dérivables en* 0 *dans la direction* λ *et*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{x(t\lambda)-x(0)}{t} = x'(0;\lambda) = \dot{x}(\lambda)$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{u(t\lambda)-u(0)}{t} = u'(0;\lambda) = \dot{u}(\lambda)$$

où $\dot{x}(\lambda)$ *est l'unique solution du problème quadratique suivant et* $\dot{u}(\lambda)$ *l'unique multiplicateur associé*

$$Q(\lambda) \begin{cases} \underset{\dot{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} \ \frac{1}{2} (\dot{x}, \nabla^2 L_0(\bar{x},\bar{u})\dot{x}) + (\dot{x},\lambda) \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\ldots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) = 0 \\ \forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) \leq 0 \end{cases}$$

<u>*Corollaire III.1.4.2.*</u> *Sous les hypothèses du théorème III.1.4.1, la fonction "valeur optimale"* f_{min} *est dérivable en dans toute direction (non nulle)* λ *de* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$f'_{min}(0;\lambda) = (\nabla f(\bar{x}), \dot{x}(\lambda)) = (\nabla g(\bar{x}), \dot{x}(\lambda)) + (a,\dot{x}(\lambda))$$

où $\dot{x}(\lambda)$ *est déterminé par le théorème III.1.4.1.*

<u>Remarque.</u> Ce théorème assure l'existence de dérivées directionnelles de la solution en 0, mais donne également le moyen de les calculer (par résolution d'un problème quadratique). On abordera cet aspect de la question dans le chapitre IV.

2 - APPLICATION AU PROBLEME $P_2(\lambda)$.

Ici le paramètre est sur les contraintes donc le domaine réalisable de $P_2(\lambda)$ n'est pas constant comme dans le cas 1.

De ce fait l'unicité des solutions de (S) sera un peu plus délicate à montrer, la condition H_2 portant (indirectement) sur le domaine réalisable en $\lambda = 0$.

$$\begin{array}{c} P_2(\lambda) \\ \lambda \in \mathbb{R}^n \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Min } f(x) & \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} & h_i(x) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} & h_i(x) = 0 \\ \forall j \in \{1,\dots,n\} & x_j \geq \lambda_j \end{array} \right.$$

On appelle $D(\lambda)$ le domaine réalisable de $P_2(\lambda)$. On suppose que $P_2(0)$ possède une solution locale $\bar{x}$ et que f et h_i $(i = 1,\dots,m)$ sont C^2 au voisinage de $\bar{x}$. comme en 1. on a un premier résultat sur l'existence et l'unicité d'une solution de $P_2(\lambda)$, pour λ petit.

2.1 - Existence et unicité d'une représentation continue d'une solution de $P_2(\lambda)$.

Précisons d'abord les notations :

On note $\quad E_1(\bar{x}) = \{i \in \{1,\dots,s\} \ / \ h_i(\bar{x}) = 0\}$

$$E_2(\bar{x}) = \{j \in \{1,\dots,n\} \ / \ x_j = \lambda_j\}$$

$\forall i \in \{1,\dots,n\}$ p_i est l'opérateur de projection de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$p_i : x \to x_i \quad (\text{où } x = (x_1,\dots,x_n))$$

$\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\nabla p_i(\bar{x}) = p_i$.

Soit $\bar{W}$ le multiplicateur (unique d'après H_1) associé à $\bar{x}$.
Plus précisément : $\bar{x}$ vérifie les conditions de Kuhn et Tucker du premier ordre ; il existe $\bar{w} = (\bar{u},\bar{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ (unique si H_1 est vérifiée en $\bar{x}$) tel que :

$$
(KT) \quad \begin{cases}
a - \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j \, p_j = 0 \\
b - \quad \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad \bar{u}_i \geq 0 \\
\qquad \forall j \in \{1,\dots,n\} \quad \bar{v}_j \geq 0 \\
\qquad \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(\bar{x}) \leq 0 \\
\qquad \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad h_i(\bar{x}) = 0 \\
\qquad \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \bar{x}_j \geq \lambda_j \\
c - \quad \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad \bar{u}_i . h_i(\bar{x}) = 0 \\
\qquad \forall j \in \{1,\dots,n\} \quad \bar{v}_j(\bar{x}_j - \lambda_j) = 0
\end{cases}
$$

On note alors

$$I_1 = \{i \in \{1,\dots,s\} \ / \ \bar{u}_i > 0\}$$

$$I_2 = \{j \in \{1,\dots,n\} \ / \ \bar{v}_j > 0\}$$

$$I = I_1 \cup I_2$$

$$K_1 = \{i \in \{1,\dots,s\} \ / \ h_i(\bar{x}) = \bar{u}_i = 0\}$$

$$K_2 = \{j \in \{1,\dots,n\} \ / \ \bar{x}_j - \lambda_j = \bar{v}_j = 0\}$$

$$K = K_1 \cup K_2$$

$$\Lambda_1 = I_1 \cup K_1 \cup \{s+1,\dots,m\}$$

$$\Lambda_2 = I_2 \cup K_2$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$$

On peut alors énoncer :

Théorème III.2.1.1. *Soit* $\bar{x}$ *une solution locale de* $P_2(0)$ *et* $\bar{w}$ *un multiplicateur associé.*
On suppose vérifiées en $(\bar{x},\bar{w})$:

H_1 $\left[\begin{array}{l}(\nabla h_i(\bar{x}),\ i \in E_1(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\},\\ p_j,\ j \in E_2(\bar{x}))\ \textit{sont linéairement indépendants}\end{array}\right.$

H_2 $\left[\begin{array}{l}\forall y \in \mathbb{R}^n,\ y \neq 0\ \textit{tel que :}\\ \left\{\begin{array}{ll}\bullet\ \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,m\} & (\nabla h_i(\bar{x}),y) = 0\\ \bullet\ \forall j \in I_2 & y_j = 0\end{array}\right.\\ \textit{on a}\ \ (y,\ \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})y) > 0\end{array}\right.$

i/ $\bar{x}$ *est une solution locale stricte de* $P_2(0)$ *et* $\bar{w}$ *est unique.*

ii/ Il existe N *voisinage de* $\lambda = 0$ *dans* $\mathbb{R}^n$
$V \times W$ *voisinage de* $(\bar{x},\bar{w})$ *dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+m}$
une fonction $(x,w) : N \to V \times W$ *telle que*
$\lambda \to (x(\lambda),\omega(\lambda))$
$\forall\lambda \in N$ $x(\lambda)$ *est l'unique solution de* $P_2(\lambda)$ *dans* V
et $w(\lambda)$ *est l'unique multiplicateur associé.*

iii/ De plus x *et* w *sont continues en* $\lambda = 0$ *avec* $x(0) = \bar{x}$ *et* $w(0) = \bar{w}$.

C'est une application immédiate du théorème II.3.2.1.

Remarque. C'est à dessein qu'on a noté $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})$.
En effet le lagrangien du problème est :

$$L(x,u,v,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i h_i(x) - \sum_{i=1}^{n} v_j \, (x_j - \lambda_j)$$

et donc

$$\nabla^2 L(x,u,v,\lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \, \nabla^2 h_i(x)$$

ne dépend plus ni de v, ni de λ

Pour établir les dérivabilités de la représentation trouvée il faut assurer l'unicité de la solution du problème $Q_2(\lambda)$.

2.2 - Existence et unicité d'une solution de $S_2(\lambda)$.

Comme on s'intéresse aux dérivées dans une direction donnée on va maintenant fixer $\lambda \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et considérer le problème $P_2(\lambda t)$ avec t dans $\mathbb{R}$.

Le problème quadratique $Q_2(\lambda)$ associé à $P_2(\lambda t)$ est alors le suivant :

$$Q_2(\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \frac{1}{2} \, (\dot{x}, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})\dot{x}) \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n \\ \left\{ \begin{array}{ll} \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,m\} & (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) = 0 \\ \forall j \in I_2 & \dot{x}_j = \lambda_j \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{ll} \forall j \in K_1 & (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) \leq 0 \\ \forall j \in K_2 & \dot{x}_j \geq \lambda_j \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On appelle $\Delta(\lambda)$ le domaine réalisable de $Q_2(\lambda)$; le système des équations de Kuhn et Tucker du premier ordre en $(\dot{x},\dot{w})$ pour $Q_2(\lambda)$ est alors le suivant :

$$S_2(\lambda)\quad\begin{cases} a - (\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u}),\dot{x}) + \sum_{i\in\Lambda_1} \dot{u}_i \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{j\in\Lambda_2} \dot{v}_j p_j = 0 \\ \\ b - \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) = 0 \\ \quad\ \forall j \in I_2 \qquad\qquad\qquad \dot{x}_j = \lambda_j \\ \\ \quad\ \forall i \in K_1 \quad \dot{u}_i \geq 0 \text{ et } (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) \leq 0 \\ \quad\ \forall j \in K_2 \quad \dot{v}_j \geq 0 \text{ et } \dot{x}_j \geq \lambda_j \\ \\ c - \forall i \in K_1 \quad \dot{u}_i \ (\nabla h_i(\bar{x}), \dot{x}) = 0 \\ \quad\ \forall j \in K_2 \quad \dot{v}_j(\dot{x}_j - \lambda_j) = 0 \end{cases}$$

<u>*Théorème III.2.2.1.*</u> *Si H_1 et H_2 sont vérifiées en $\bar{x}$ solution locale (isolée d'après H_2) de $P_2(0)$*
Alors pour tout λ non nul de $\mathbb{R}^n$,
$Q_2(\lambda)$ possède une solution unique $\dot{x}(\lambda)$ et
$S_2(\lambda)$ possède une solution unique $(\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$

□ démonstration :

On va d'abord montrer le

<u>*Lemme 1*</u> : *sous les hypothèses du théorème III.2.2.1, il existe un voisinage N_1 de $\lambda=0$ tel que, $\forall\lambda \in N_1$ $Q_2(\lambda)$ possède une solution unique $\dot{x}(\lambda)$ associée à un multiplicateur unique $\dot{w}(\lambda)$.*
De plus $\lambda \to (\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$ est continue en 0 avec $(\dot{x}(0), \dot{w}(0)) = (\dot{x},\dot{w})$

* <u>Ecrivons l'hypothèse H_2 en $\bar{x}$:</u>

Tout d'abord on note $C(\bar{x})$ l'ensemble :

$$C(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n,\ y \neq 0 \ /\ \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x}), y) = 0$$
$$\forall j \in I_2 \qquad y_j = 0\}$$

H_2 en $\bar{x}$ signifie que $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})$ est définie positive sur $C(\bar{x})$ or on remarque que le domaine réalisable de $Q_2(0)$, $\Delta(0)$ est inclus dans $C(\bar{x})$. Donc $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})$ est définie positive sur $\Delta(0)$. *Par conséquent* $Q_2(0)$ *a une solution unique* $\dot{x}$.

Pour prouver le lemme 1, on va appliquer le théorème II.3.2.1 au (nouveau) problème paramétré $Q_2(\lambda)$, au voisinage de $\lambda = 0$ et de la solution $\dot{x}$.

Il faut donc en vérifier les hypothèses, à savoir :

i - H_1 est vérifiée en $\dot{x}$

ii - H_2 est vérifiée en $(\dot{x},\dot{w})$ (où $\dot{w}$ est le multiplicateur associé à $\dot{x}$).

i - Montrons que H_1 est vérifiée en $\dot{x}$ ($\lambda = 0$)

$$E(\dot{x}) \subset I \cup \{s+1,\dots,m\} \cup K \subset E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\}$$

donc comme $(\nabla h_i(\bar{x}),\ i \in E_1(\bar{x}),\ p_j\ \ i \in E_2(\bar{x}))$ sont indépendants d'après H_1 en $\bar{x}$, les gradients "actifs" en $\dot{x}$ le sont aussi car indexés par un sous-ensemble.

ii - Montrons que H_2 est vérifiée pour $Q(0)$ en $(\dot{x},\dot{w})$.

Ecrivons cette condition.

Soit y dans $\mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,m\} & (\nabla h_i(\bar{x}), y) = 0 \\ \forall j \in I_2 & y_j = 0 \end{array}\right\} & (\alpha) \\ \\ \left.\begin{array}{ll} \forall i \in K_1 \text{ tel que } \dot{u}_i > 0 & (\nabla h_i(\bar{x}), y) = 0 \\ \forall j \in K_2 \text{ tel que } \dot{v}_j > 0 & y_j = 0 \end{array}\right\} & (\beta) \end{cases}$$

Montrons qu'alors $(y, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})\ y) > 0$.

On note que y est en particulier dans $C(\bar{x})$ d'après (α).

Or H_2 en $\bar{x}$ signifie que $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})$ est définie positive sur $C(\bar{x})$ donc $(y, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})y) > 0$.

Par conséquent on peut affirmer qu'il existe un voisinage N_1 de $\lambda = 0$ et un voisinage $V_1 \times W_1$ de $(\dot{x},\dot{w})$, et qu'il existe une fonction

$(\dot{x},\dot{w}) : N_1 \to V_1 \times W_1$

$\lambda \to (\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$ continue en $\lambda = 0$ avec
$\dot{x}(0) = \dot{x}$, $\dot{w}(0) = \dot{w}$, telle que

$\dot{x}(\lambda)$ soit l'unique solution de $Q_2(\lambda)$ dans V_1 et
$\dot{u}(\lambda)$ l'unique multiplicateur associé.

*

On vient donc de montrer que $Q_2(\lambda)$ admet une solution locale unique dans un voisinage de $\dot{x}$ (et ce pour λ dans N_1).
Il faut maintenant "relier" les solutions de $S_2(\lambda)$ et $Q_2(\lambda)$. L'hypothèse H_2 va y contribuer.

Lemme 2. *$\forall\lambda \in N_1$, $S_2(\lambda)$ possède une solution unique $(\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$ dans $V_1 \times W_1$*

□ démonstration :

$\dot{x}(\lambda)$ est solution de $Q_2(\lambda)$ dans V_1 donc $(x(\lambda), w(\lambda))$ est solution de $S_2(\lambda)$ (dans $V_1 \times W_1$).

Montrons donc l'unicité.

Soit (x,w) une solution de $S_2(\lambda)$ (pour λ dans N_1) dans $V_1 \times W_1$.
H_1 est évidemment vérifiée en x car les gradients des contraintes actives en x sont les $(\nabla h_i(\bar{x}))$ indexés par un sous-ensemble de $E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\}$, et donc sont indépendants d'après H_1 en $\bar{x}$.

H_2 en (x,w) s'écrit de la façon suivante (avec $w = (u,v)$)

$\forall y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,m\} \cup \{K_1/u_i > 0\} \quad (\nabla h_i(\bar{x}),y) = 0 \\ \forall j \in I_2 \cup \{K_2/v_j > 0\} \quad y_j = 0 \\ \Longrightarrow (y, \bar{\nabla}^2 L(\bar{x},\bar{u})y) > 0 \end{array}\right.$$

On voit en fait que les contraintes et le lagrangien étant indépendants de x et u, c'est la condition H_2 en $(\bar{x},\bar{w})$ qui suffit à assurer la condition H_2 en $(x.w)$.
Par conséquent d'après le lemme II.3.1.1 x est une solution locale (stricte) de $Q_2(\lambda)$ dans V_1. Comme $Q_2(\lambda)$ a une solution unique dans V_1 $x = \dot{x}(\lambda)$ d'autre part H_1 entraîne l'unicité de w pour x donné donc $w = w(\lambda)$.

*

On a donc montré que pour tout λ de N_1, $Q_2(\lambda)$ et $S_2(\lambda)$ ont une solution <u>locale</u> unique au voisinage de $\dot{x}$ (respectivement $(\dot{x},\dot{w})$).

Montrons à présent l'unicité <u>globale</u> :

<u>*Lemme 3.*</u> *∃ voisinage N_2 de $\lambda = 0$ tel que $\forall\lambda \in N_1 \cap N_2$, $Q_2(\lambda)$ a une solution <u>globale</u> unique, $\dot{x}(\lambda)$ et $S_2(\lambda)$ a une solution unique $(\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$*

* Soit λ dans N_1.

Le lemme 2 assure que $S_2(\lambda)$ possède une solution $(\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$ unique dans $V_1 \times W_1$ voisinage de $(\dot{x},\dot{w})$.

On va montrer qu'on peut trouver un voisinage N_2 de $\lambda = 0$, tel que toute solution de $S_2(\lambda)$ soit dans $V_1 \times W_1$. Alors pour λ dans $N_1 \cap N_2$, toute solution de $S_2(\lambda)$ sera nécessairement $(\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$. Par conséquent $S_2(\lambda)$ aura une solution unique.
Si on ne peut pas trouver un tel voisinage, alors on peut trouver une suite (λ^n) convergeant vers 0 et une solution (x^n, w^n) de $S(\lambda)$ qui n'est pas dans $V_1 \times W_1$.

• **Si (x^n, w^n) est bornée** : quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que (x^n, w^n) converge vers (x_o, w_o) or (x^n, w^n) est solution de $S(\lambda_n)$, c'est à dire :

$$\left[\begin{array}{ll} a - & (\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u}) + \sum_{i\in\Lambda_1} u_i^n \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{j\in\Lambda_2} v_j^n p_j = 0 \\ b - & \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\ldots,m\} \quad (\nabla h_i(\bar{x}), x^n) = 0 \\ & \forall i \in I_2 \qquad x_j^n = \lambda_j^n \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll} - & \forall i \in K_1 \quad u_i^n \geq 0 \text{ et } (\nabla h_i(\bar{x}), x^n) \leq 0 \\ & \forall j \in K_2 \quad v_j^n \geq 0 \quad x_j^n \geq \lambda_j^n \\ c- & \forall i \in K_1 \quad u_i^n (\nabla h_i(\bar{x}).x^n) = 0 \\ & \forall j \in K_2 \quad v_j^j (x_j^n - \lambda_j^n) = 0 \end{array}$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, il est immédiat que (x_o, w_o) est une solution de $S_2(0)$.

Or $S_2(0)$ a une solution unique $(\dot{x},\dot{w})$ donc

$$(x_o, w_o) = (\dot{x},\dot{w})$$

Par conséquent $\exists n_o$ tel que $\forall n \geq n_o$ $(x_n, w_n) \in V_1 \times W_1$ on a donc une contradiction.

- Si (x_n,w_n) est non bornée.

Soit $\alpha_n = \sup(||x_n||, ||w_n||)$

$$\alpha_n \to +\infty$$

donc α_n est non nul à partir d'un certain rang.
On applique alors le

Lemme 4. $\left\{\begin{array}{l} \forall\alpha \neq 0, \forall\lambda \neq 0 \\ (\in\mathbb{R}) \\ (x,w) \textit{ solution de } S(\lambda) \Longleftrightarrow (\alpha x, \alpha w) \textit{ solution de } S(\alpha\lambda) \end{array}\right.$

(cela provient de "l'homogénéité" de $S(\lambda)$).

Par conséquent $(\frac{x_n}{\alpha_n}, \frac{w_n}{\alpha_n})$ est solution de S_2 $(\frac{\lambda_n}{\alpha_n})$. Or $\frac{\lambda_n}{\alpha_n} \to 0$ (car $\lambda_n \to 0$ et $\frac{1}{\alpha_n} \to 0$).

De plus $(\frac{x_n}{\alpha_n}, \frac{w_n}{\alpha_n})$ est borné. On est donc ramené au cas précédent.

On a donc montré l'unicité de la solution de $S_2(\lambda)$ pour λ dans un voisinage de 0 : $N_1 \cap N_2 = N_o$.

Il reste à montrer que $Q_2(\lambda)$ possède une solution globale unique pour λ dans N_o.

C'est évident car si $\tilde{x}$ est solution de $Q_2(\lambda)$, alors x est solution de $S_2(\lambda)$ (avec son multiplicateur $\tilde{u}$) et donc $\tilde{x} = \dot{x}(\lambda)$.

*

Terminons en montrant que le résultat est vrai pour λ quelconque dans $\mathbb{R}^n$. Cela provient de "l'homogénéité" de $S_2(\lambda)$.

Soit λ quelconque non nul dans $\mathbb{R}^n$.

Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\alpha\lambda$ soit dans N.
Or $S_2(\alpha\lambda)$ a une solution unique.
On utilise alors le lemme 4 qui permet une bijection entre les solutions de $S_2(\alpha\lambda)$ et celles de $S_2(\lambda)$.

Par conséquent $S_2(\lambda)$ a une solution unique $(\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$ et $Q_2(\lambda)$ a une solution unique $\dot{x}(\lambda)$.

$\square$

2.3 - Dérivabilité de $x(\lambda)$ et $w(\lambda)$.

Ces résultats permettent alors d'énoncer le théorème général suivant :

Théorème III.2.3.1.

Soit $\bar{x}$ *une solution locale de* $P_2(0)$
f *et* h_i *sont* C^2 *au voisinage de* $\bar{x}$.
Soit $\bar{w}$ *un multiplicateur associé à* $\bar{x}$.
On suppose alors que H_1 *et* H_2 *sont vérifiées en* $(\bar{x},\bar{w})$

Alors

i - $\bar{x}$ *est une solution locale stricte (donc isolée) de* $P_2(0)$ *et* $\bar{w}$ *est unique.*

ii - *Il existe un voisinage* N *de* $\lambda = 0$ *(dans* $\mathbb{R}^n$*) et un voisinage* $V \times W$ *de* $(\bar{x}, \bar{w})$
Il existe une fonction $(x,w) : N \to V \times W$ *telle que* $x(\lambda)$ *soit l'unique solution de* $P_2(\lambda)$ *dans* V
$w(\lambda)$ *l'unique multiplicateur associé.*

iii - x *et* w *sont continues en* 0 *avec* $x(0) = \bar{x}$
$w(0) = \bar{w}$

iv - x *et* w *admettent une dérivée en* 0*, dans toute direction* λ *de* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x(t\lambda) - x(0)}{t} = x'(0;\lambda) = \dot{x}(\lambda)$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{w(t\lambda) - w(0)}{t} = w'(0;\lambda) = \dot{w}(\lambda)$$

où $\dot{x}(\lambda)$ *est l'unique solution du problème quadratique* $Q_2(\lambda)$ *suivant et* $\dot{w}(\lambda)$ *l'unique multiplicateur associé.*

$$Q_2(\lambda) \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2}(\dot{x}, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u})\dot{x}) & \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n & \\ \forall i \in I_1 \cup \{s+1,\dots,n\} & (\nabla h_i(\bar{x}),\dot{x}) = 0 \\ \forall j \in I_2 & \dot{x}_j = \lambda_j \\ \forall i \in K_1 & (\nabla h_i(\bar{x}),\dot{x}) \le 0 \\ \forall j \in K_2 & \dot{x}_j \ge \lambda_j \end{cases}$$

Corollaire III.2.3.2. *Sous les hypothèses qui précèdent la fonction $\lambda \to (\dot{x}(\lambda), \dot{w}(\lambda))$ définie sur $\mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

□ démonstration : On va utiliser le théorème II.3.2.1 appliqué au problème paramétré suivant :

Soit λ dans $\mathbb{R}^n$ et $\bar{Q}(\mu) = Q(\lambda + \mu)$. $\bar{Q}(0)$ possède une solution unique $\dot{x}(\lambda)$ De plus H_1 est vérifiée en $\dot{x}(\lambda)$ car elle est vérifiée en $\dot{x}(0)$ et une translation n'influe pas sur les gradients des contraintes.

H_2 est vérifiée en $\dot{x}(\lambda)$, $\dot{w}(\lambda)$: la démonstration est la même que celle faite pour le théorème III.2.2.1 (ii/) pour vérifier H_2 en $\dot{x}(0)$, $\dot{w}(0)$ (On fait une simple translation sur les bornes).

Donc d'après le théorème II.3.2.1 il existe une fonction $(\tilde{x},\tilde{w})$ définie sur un voisinage de telle que $\tilde{x}(\mu)$ soit l'unique solution de $\bar{Q}(\mu) = Q(\lambda+\mu)$ donc $\tilde{x}(\mu) = \dot{x}(\lambda + \mu)$. De même $\tilde{w}(\mu) = \dot{w}(\lambda + \mu)$.
De plus $(\tilde{x},\tilde{w})$ est continue en 0, donc $\dot{x}$ et $\dot{w}$ sont continues en λ.

□

3 - EXTENSION AU CAS GENERAL P(λ).

Soit

$$P(\lambda) \begin{cases} \text{Min } f(x,\lambda) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x,\lambda) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad h_i(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^q$.

On suppose que f et h_i ($i \in \{1,\dots,m\}$) sont C^2 par rapport au couple (x,λ) au voisinage de $(\bar{x},0)$.

3.1 - Résultat général de dérivabilité directionnelle.

Théorème III.3.1. *Soit $\bar{x}$ une solution locale de* P(0) *et* $\bar{u}$ *un multiplicateur associé.*
On suppose que (H_1) *est vérifiée en* $\bar{x}$ *et* (H_2) *est vérifiée en*
Alors :

* *On a les résultats du théorème II.3.2.1.*

* *De plus, pour tout élément* λ *de* $\mathbb{R}^q$*,* x *et* u *(définies par le théorème II.3.2.1) sont dérivables en* 0 *dans la direction* λ *et*

$$x'(0;\lambda) = \dot{x}$$
$$u'(0;\lambda) = \dot{u}$$

où $\dot{x}$ *et* $\dot{u}$ *sont respectivement l'unique solution de* $Q(\lambda)$ *et l'unique multiplicateur associé*

On rappelle (cf. chapitre II) que

$$Q(\lambda) \text{ est : } \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2} (\dot{x}, \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{u}, 0)\, \dot{x}) + (\dot{x}, \frac{\partial}{\partial t} \nabla L(\bar{x},\bar{u},0)) \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h\ (\bar{x},0),\ \dot{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \forall i \in K\ \ (\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) \leq -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \end{cases}$$

et le système des relations de Kuhn et Tucker associé est :

$$S(\lambda) \begin{cases} a/\ \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\dot{x} + \sum\limits_{I \cup K \cup \{s+1,\dots,m\}} \dot{u}_i\ \nabla h_i(\bar{x},0) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla L(\bar{x},\bar{u},0) \\ \\ b/\ \forall i \in K\ \dot{u}_i \geq 0 \\ \quad \forall i \in K\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \quad \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \\ c/\ \forall i \in K\ \ \dot{u}_i\ [(\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)] = 0 \end{cases}$$

3.1 - Résultat général de dérivabilité directionnelle.

Théorème III.3.1. *Soit $\bar{x}$ une solution locale de $P(0)$ et $\bar{u}$ un multiplicateur associé.*
On suppose que (H_1) est vérifiée en $\bar{x}$ et (H_2) est vérifiée en
Alors :

* *On a les résultats du théorème II.3.2.1.*

* *De plus, pour tout élément λ de $\mathbb{R}^q$, x et u (définies par le théorème II.3.2.1) sont dérivables en 0 dans la direction λ et*

$$x'(0;\lambda) = \dot{x}$$
$$u'(0;\lambda) = \dot{u}$$

où $\dot{x}$ et $\dot{u}$ sont respectivement l'unique solution de $Q(\lambda)$ et l'unique multiplicateur associé

On rappelle (cf. chapitre II) que

$$Q(\lambda) \text{ est : } \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2} (\dot{x}, \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{u}, 0)\, \dot{x}) + (\dot{x}, \frac{\partial}{\partial t} \nabla L(\bar{x},\bar{u},0)) \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \; (\nabla h\, (\bar{x},0), \dot{x}) = - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) \leq - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \end{cases}$$

et le système des relations de Kuhn et Tucker associé est :

$$S(\lambda) \begin{cases} a/ \; \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\dot{x} + \sum_{I \cup K \cup \{s+1,\dots,m\}} \dot{u}_i \nabla h_i(\bar{x},0) = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla L(\bar{x},\bar{u},0) \\ \\ b/ \; \forall i \in K \; \dot{u}_i \geq 0 \\ \quad \forall i \in K \; (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \quad \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \; (\nabla h_i(\bar{x},0), \dot{x}) - \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \\ c/ \; \forall i \in K \quad \dot{u}_i \, [(\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)] = 0 \end{cases}$$

3.2 - Preuve du théorème III.3.1.

Il suffit, d'après le chapitre II, de montrer que les hypothèses H_1 et H_2 entraînent l'unicité de la solution de $S(\lambda)$.

Pour cela on va, dans un premier temps, considérer le problème paramétré par λ : $Q(\lambda)$ et faire varier λ dans un voisinage de 0. On lui appliquera le théorème II.3.2.1 et on obtiendra ainsi un premier résultat portant sur des directions "petites". Ce résultat sera étendu ensuite sans difficulté au cas d'une direction quelconque.

a) - Précisons d'abord les notations.

Soit λ fixé ; on note $\frac{\partial}{\partial t}\ \nabla L(\bar{x},\bar{u},0) = \ell(\lambda)$ et $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ $\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0)=b_i(\lambda)$.

<u>Remarque</u>. Dans le cas du problème $P_2(\lambda)$ par exemple certaines fonctions h_i correspondent aux contraintes de bornes :

$$h_i(x,\lambda) = \lambda_i - x_i.$$

Pour ces contraintes là on obtient $b_i(\lambda) = \lambda_i$: b_i est le $i^{\text{ème}}$ projecteur de $\mathbb{R}^n$.

Le système $S(\lambda)$ devient :

$$S(\lambda)\quad \begin{cases} \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\dot{x} + \sum\limits_{I\cup K\cup\{s+1,\dots,m\}} \dot{u}_i\ \nabla h_i(\bar{x},0) = -\ \ell(\lambda) \\ \forall i \in K \quad \dot{u}_i \geq 0 \\ \forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq -b_i(\lambda) \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) = -\ b_i(\lambda) \\ \forall i \in K \quad \dot{u}_i\ [(\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) + b_i(\lambda)] = 0 \end{cases}$$

et

$$Q(\lambda)\quad \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2}\,(\dot{x},\ \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\dot{x}) + (\dot{x},\ \ell(\lambda)) \\ \dot{x} \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0),\ \dot{x}) = -\ b_i(\lambda) \\ \forall i \in K \qquad\qquad (\nabla h\ (x,0),\ x) \leq -\ b_i(\lambda) \end{cases}$$

On note $\Delta(\lambda)$ le domaine réalisable de $Q(\lambda)$. Enfin il sera commode de noter $T(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^n \ / \ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \ (y, \nabla h_i(\bar{x},0)y) = 0\}$

b) - Etudions d'abord $Q(0)$.

<u>*Lemme 1*</u> : *(<u>homogénéité de ℓ et des b_i</u>, $i \in \{1,\dots,m\}$)*

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^q$, $\forall k \in \mathbb{R}^*$, $\forall i \in \{1,\dots,m\}$

$\ell(k\lambda) = k\ell(\lambda)$

$b_i(k\lambda) = k\, b_i(\lambda)$

De plus $\ell(0) = 0$ *et* $\forall i \in \{1,\dots,m\}$ $b_i(0) = 0$.

□ Soit i dans $\{1,\dots,m\}$ et k un réel non nul.

Soit λ quelconque dans $\mathbb{R}^q$

$$\dot{b}_i(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) = \lim_{t\to 0} \frac{h_i(\bar{x}, t) - h_i(\bar{x},0)}{t}$$

$$b_i(k\lambda) = \lim_{t\to 0} \frac{h_i(\bar{x}, k\lambda(t) - h_i(\bar{x},0)}{t}$$

$$= k \lim_{kt\to 0} \frac{h_i(\bar{x}, \lambda kt) - h_i(\bar{x},0)}{kt}$$

$$= k\, b_i(\lambda)$$

La démonstration est la même pour ℓ.

D'autre part :

$$\dot{b}_i(0) = \lim_{t\to 0} \frac{h_i(\bar{x},0t) - h_i(\bar{x},0)}{t} = 0$$

Il en est de même pour ℓ.

□

Lemme 2 : *Si* H_2 *est vérifiée en* $(\bar{x},\bar{u})$ *alors* $Q(0)$ *a une solution unique* $\dot{x}$ *associée à un multiplicateur unique* $\dot{u}$.

□ Le domaine $\Delta(0)$ de $Q(0)$ est inclus dans $T(\bar{x})$.

D'après H_2, $\nabla^2 L(x,u,(0)$ est définie positive sur $T(\bar{x})$ donc sur $\Delta(0)$. Le lemme en résulte immédiatement.

□

c) - *On applique le théorème II.3.2.1. à* $Q(\lambda)$.

Lemme 3 : *Si* H_1 *et* H_2 *sont vérifiées en* $\bar{x}$ *et* $(\bar{x},\bar{u})$, *alors* H_1 *est vérifiée en* $\dot{x}$ *et* H_2 *est vérifiée en* $(\dot{x},\dot{u})$

Par conséquent.

i/ $\dot{u}$ *est unique et* $S(0)$ *a une solution unique* $(\dot{x},\dot{u})$.

ii/ il existe un voisinage N' *de* $\lambda = 0$, *un voisinage* $V' \times W'$ *de* $(\dot{x},\dot{u})$ *tels que pour tout* λ *de* N', $Q(\lambda)$ *possède une solution* $x(\lambda)$ *unique dans* V' *associée au multiplicateur unique* $\dot{u}(\lambda)$.
D'autre part, pour tout λ *dans* N', $(\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda))$ *est l'unique solution de* $S(\lambda)$ *dans* $V' \times W'$.
Enfin l'application $\lambda \rightarrow (\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda))$ *est continue en* $\lambda = 0$ *avec* $\dot{x}(0) = \dot{x}$ *et* $\dot{u}(0) = \dot{u}$.

□ *a)* - $Q(\lambda)$ est un problème quadratique à contraintes affines. Donc les fonctions objectif et de contraintes sont C^2.

L'ensemble des indices des contraintes actives en $\dot{x}$ est $E(\dot{x})$ et on a :

$$E(\dot{x}) \cup \{s+1,\dots,m\} \subset I \cup K \cup \{s+1,\dots,m\} \subset E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\}$$

Par conséquent, d'après H_1 en $\bar{x}$, l'ensemble des gradients "actifs" (y compris en égalité) en $\dot{x}$:

$$\{\nabla h_i(\bar{x},0),\ i \in E(\dot{x})\} \cup \{s+1,\dots,m\}$$

est linéairement indépendant.
H_1 est bien vérifiée en $\dot{x}$.

c) - Montrons enfin que H_2 est vérifiée en $(\dot{x},\dot{u})$. Soit y non nul dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \cup \{i \in K \ /\ \dot{u}_i > 0\}\ (\nabla h_i(\bar{x},0),y) = 0.$$

y est en particulier un élément de $T(\bar{x})$.
D'après H_2 en $\bar{x}$ on a donc $(y,\ \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)y) > 0$; c'est exactement la condition H_2 en $(\dot{x},\dot{u})$.

ii/ découle directement du théorème II.3.2.1. H_1 en $\bar{x}$ entraîne l'unicité de $\dot{u}$. D'autre part, toute solution de S(0) vérifie H_2 (d'après ce qui précède) dont est de la forme $(\dot{x},u)$ puisque Q(0) a une solution unique.
L'unicité du multiplicateur associé à $\dot{x}$ entraîne $u = \dot{u}$ d'où i/.

□

d) - On peut alors conclure la preuve :

<u>*Lemme 4*</u> : *Il existe un voisinage N" de $\lambda = 0$ tel que, pour tout λ de N", $Q(\lambda)$ a une solution (<u>globale</u>) unique $\dot{x}(\lambda)$ et $S(\lambda)$ a une solution unique :*

$$(\dot{x}(\lambda),\ \dot{u}(\lambda))$$

□ Soit λ dans N'. $S(\lambda)$ possède une solution unique dans $V' \times W'$:

$$(\dot{x}(\lambda),\ \dot{u}(\lambda))$$

On va montrer que l'on peut trouver un voisinage N" de $\lambda = 0$ (inclus dans N') tel que toute solution de $S(\lambda)$ (pour λ dans N") soit dans $V' \times W'$. Ainsi toute solution de $S(\lambda)$ est égale à $(\dot{x}(\lambda),\ \dot{u}(\lambda))$ et on a l'unicité.

Supposons qu'on ne puisse pas trouver un tel voisinage N". On peut donc trouver une suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et une solution (x^n, u^n) de $S(\lambda^n)$ qui n'est pas dans $V' \times W'$.

Deux cas se présentent :

i) - Si la suite $(x^n, u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut supposer (quitte à en extraire une sous-suite) qu'elle converge vers $(\tilde{x}, \tilde{u})$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ (x^n, u^n) est solution de $S(\lambda^n)$ et vérifie donc le système suivant :

$$
(1) \left\{
\begin{array}{l}
\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)x^n + \displaystyle\sum_{I\cup K\cup\{s+1,\dots,m\}} u_i^n \, \nabla h_i(\bar{x},0) = -\,\ell(\lambda^n) \\
\forall i \in K \quad u_i^n \geq 0 \\
\forall i \in K \quad (\nabla h_i(\bar{x},0),\, x^n) \leq -\, b_i(\lambda^n) \\
\forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \; (\nabla h_i(\bar{x},0),\, x^n) = -\, b_i(\lambda^n) \\
\forall i \in K \quad u_i^n \,[(\nabla h_i(\bar{x},0),\, x^n) + b_i(\lambda^n)] = 0
\end{array}
\right.
$$

f et h_i $(i \in \{1,\dots,m\})$ sont C^2 par rapport à (x,λ), donc ℓ et b_i $(i \in \{1,\dots,m\})$ sont continues en 0.
Par conséquent on peut passer à la limite dans (1) quand n tend vers $+\infty$ et on obtient (grâce au lemme 1) :

$$
(2) \left\{
\begin{array}{ll}
\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\, \tilde{x} + \displaystyle\sum_{I\cup K\cup\{s+1,\dots,m\}} \tilde{u}_i \, \nabla h_i(\bar{x},0) = 0 & \\
\forall i \in K & u_i \geq 0 \\
\forall i \in K & (\nabla h_i(\bar{x},0),\, \tilde{x}) \leq 0 \\
\forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} & (\nabla h_i(\bar{x},0),\, \tilde{x}) = 0 \\
\forall i \in K & \tilde{u}_i(\nabla h_i(\bar{x},0),\, \tilde{x}) = 0
\end{array}
\right.
$$

$(\tilde{x},\tilde{u})$ est donc solution de S(0) et d'après le lemme 2 on a donc :

$$\tilde{x} = \dot{x} \text{ et } \tilde{u} = \dot{u}.$$

Par conséquent il existe un entier n_o tel que :

$$\forall n \geq n_o \ (x^n, u^n) \in V' \times W'.$$

On a donc contradiction.

ii/ Le deuxième cas se règle par application du lemme suivant :

<u>*Lemme 5.*</u> $\begin{cases} \forall \lambda \neq 0, \forall k > 0 \ \ (k \textit{ réel}) \\ (x,u) \textit{ solution de } S(\lambda) \Longleftrightarrow (kx, ku) \textit{ solution de } S(k\lambda). \end{cases}$

□ C'est évident d'après le lemme 1. Il suffit de diviser chaque membre des inégalités et égalités de $S(k\lambda)$ par k pour avoir le résultat voulu car et b_i ($i \in \{1,\ldots,m\}$) sont homogènes.

□

Si la suite (x^n, u^n) n'est pas bornée, alors la suite réelle à termes positifs $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha^n = \sup(||x^n||\,||u^n||)$ ($||\ \ ||$ désignant successivement les normes euclidiennes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$) tend vers $+\infty$.

Il existe donc n_1 entier tel que :

$$\forall n \geq n_1 \qquad \alpha^n > 0$$

Donc la suite $(\mu^n)_{n\geq n_1}$ (où $\mu^n = \frac{\lambda^n}{\alpha^n}$) converge vers 0.

Soit $y^n = \frac{x^n}{\alpha^n}$ et $v^n = \frac{u^n}{\alpha^n}$ pour $n \geq n_1$. La suite $(y^n, v^n)_{n\ n_1}$ est (par construction) bornée. D'autre part : $\forall n \geq n_1$ (y^n, v^n) est solution de $S(\mu^n)$ où (μ^n) est convergente vers 0. On est donc ramené au cas précédent.

□

On a donc montré que sous les hypothèses H_1 et H_2 en $\bar{x}$ et $(\bar{x},\bar{u})$ on peut trouver un voisinage N de $\lambda = 0$ tel que, pour tout λ de N, $S(\lambda)$ a une solution unique $(\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda))$ (et par voie de conséquence $Q(\lambda)$ a une solution unique $\dot{x}(\lambda)$.
Il reste à montrer que c'est aussi vrai pour un élément λ quelconque de $\mathbb{R}^q$.

On applique pour cela le lemme 5 : soit λ quelconque non nul de $\mathbb{R}^q$.
$\exists k > 0$ tel que $k\lambda \in N$. Soit (x,u) une solution de $S(\lambda)$. Alors (kx, ku) est la solution de $S(k\lambda)$; soit (x',u') une autre solution de $S(\lambda)$. De la même manière $kx' = kx$ et $ku' = ku$. Donc $x' = x$ et $u' = u$.
$S(\lambda)$ a une solution unique.

3.3 - Corollaires du théorème III.3.1.

<u>*Corollaire III.3.3.1.*</u> *Sous les hypothèses du théorème III.3.1 l'application définie sur $\mathbb{R}^q$ par :*

$\lambda \to (\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda))$ *est homogène au sens suivant :*

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}^+ ,\ \forall\lambda \neq 0,\ (\dot{x}(\alpha\lambda), \dot{u}(\alpha\lambda)) = \alpha(\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda)).$$

Elle est donc continue en $\lambda = 0$.

□ C'est une conséquence directe des lemmes 3 et 5

□

<u>*Corollaire III.3.3.2.*</u> *Sous les mêmes hypothèses, l'application :*
$\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
$\lambda \to (\dot{x}(\lambda), \dot{u}(\lambda))$
est continue sur $\mathbb{R}^q$.

□ Il suffit de reprendre la démonstration précédent en effectuant le changmeent de variable $\lambda = \lambda_o + \mu$ et en travaillant sur le problème $\bar{Q}(\mu) = Q(\lambda_o + \mu)$ pour obtenir la continuité en tout λ_o de $\mathbb{R}^q$.
En effet une translation du paramètre n'influe pas sur la propriété d'homogénéité des b_i et de ℓ (on dérive une fois par rapport à λ).

□

On a donc sous les hypothèses H_1 et H_2 en $\bar{x}$, montré l'existence de dérivées directionnelles d'une représentation de la solution. Les théorèmes énoncés fournissent en outre un moyen de calcul de telles dérivées (résolution d'un problème quadratique). C'est cet aspect qu'on va tenter de développer dans le chapitre IV.

CHAPITRE IV

APPLICATION ALGORITHMIQUE.

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, on obtient des résultats d'existence et d'unicité de dérivées directionnelles mais aussi un moyen de calcul par résolution d'un problème quadratique. On va donc essayer d'expliciter une méthode qui permettrait de calculer en même temps $\bar{x}$ et $\dot{x} \approx x'(0;\lambda)$. On va dans un premier temps présenter l'algorithme de Han qui fait intervenir des problèmes quadratiques, puis parler de quelques méthodes de résolution d'un problème quadratique et terminer par un essai d'enchaînement de ces différentes méthodes.

1 - ALGORITHME DE HAN ([16])

On vient de voir que la dérivée directionnelle d'une représentation $x(\lambda)$ d'une solution de $P(\lambda)$ s'obtient par résolution d'un problème quadratique $Q(\lambda)$. Ce problème fait intervenir le hessien du Lagrangien de $P(0)$ en $\bar{x}$: $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)$.

Si l'on veut espérer pouvoir calculer en même temps une solution $\bar{x}$ et ses dérivées directionnelles $\dot{x}(\lambda)$ il est donc naturel de penser, pour la recherche de $\bar{x}$, à un algorithme faisant intervenir des problèmes quadratiques liés également au hessien du Lagrangien. Outre l'avantage d'une convergence rapide on pourrait ainsi "dans la foulée" calculer $\dot{x}(\lambda)$ à partir d'une estimation de $\bar{x}$ et surtout de $\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)$.

Un "bon algorithme" s'impose à cet égard : c'est l'algorithme de Han.

Soit (P) le problème suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x) = 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et h_i $(i = 1,\dots,m)$ sont C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On considère alors le problème quadratique suivant :

$$Q(x,H) : \begin{cases} \text{Min } (\nabla f(x), \sigma) + \frac{1}{2} (\sigma, H\sigma) \\ \sigma \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x) + (\nabla h_i(x),\sigma) \le 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla h_i(x),\sigma) = 0 \end{cases}$$

__*Définition IV.1.1.*__ *Un vecteur* $z = (x+\sigma, u)$ *de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *est une z-solution de* $Q(x,H)$ *si* (σ,u) *est une paire de Kuhn et Tucker de* $Q(x,H)$ *(i.e. si* (σ,u) *vérifie les conditions de Kuhn et Tucker du 1er ordre pour* $Q(x,H)$*).*

Rappelons les conditions de Kuhn et Tucker du premier ordre pour $Q(x,H)$ en (σ,u) :

$$\begin{cases} .\ \nabla f(x) + H\sigma + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(x) = 0 \\ .\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \; u_i \ge 0 \text{ et } h_i(x) + (\nabla h_i(x), \sigma) \le 0 \\ .\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \quad (\nabla h_i(x), \sigma) = 0 \\ .\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \; u_i \, [h_i(x) + (\nabla h_i(x),\sigma)] = 0 \end{cases}$$

On peut alors proposer l'algorithme suivant :

1. Estimation de $z^o = (x^o, u^o)$ paire de Kuhn et Tucker de (P)
   Estimation de $H^o = \nabla^2 L(x^o,u^o)$ hessien du Lagrangien en (x^o,u^o)

2. $k = 0$

3. Trouver une z-solution de $Q(x^k, H^k)$: z^{k+1}

$$z^{k+1} = (x^{k+1}, u^{k+1}) \text{ avec } x^{k+1} = x^k + s^k.$$

S'il y en a plusieurs on prend la plus proche de z^k.

4. Si z^{k+1} vérifie un critère de convergence : STOP
Sinon on va à 5.

5. Calcul de H^{k+1} (estimation de $\nabla^2 L(x^{k+1}, u^{k+1})$
$k = k+1$.
Retour à 3.

<u>Remarque</u> : H^k est une estimation de $\nabla^2 L(x^k, u^k)$ qui peut être calculée par plusieurs méthodes récursives.

<u>Exemple</u>. Si on note $H^{k+1} = \bar{H}$, $H^k = H$

$$x^{k+1} = \bar{x},\ x^k = x$$

$$u^{k+1} = \bar{u},\ u^k = u$$

$$s^k = x^{k+1} - x^k = s$$

$$y = \nabla L(\bar{x}, \bar{u}) - \nabla L(x, \bar{u})$$

Soit c tel que $c^t s \neq 0$

$$\bar{H} = H + \frac{(y - Hs)c^t + c(y-Hs)^t}{c^t s} - \frac{s^t(y - Hs)cc^t}{(c^t s)^2}$$

Suivant le choix de c ($c=s$, $c=y$ ou $c=D_o s$ où D_o est une matrice fixée définie positive) on obtient des méthodes classiques (Powell-Fletcher, etc...) on a le théorème de convergence suivant :

<u>*Théorème IV.1.2.*</u> *Soit $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{u})$ une paire de Kuhn et Tucker de (P) (a fortiori on peut prendre une solution $\bar{x}$ de (P) et un multiplicateur associé) vérifiant les hypothèses suivantes :*

i - H_1 *en* $\bar{x}$: $(\nabla h_i(\bar{x}),\ i \in E(\bar{x}) \cup \{s+1,\dots,m\})$ *sont linéairement indépendants.*

ii - H_2 *en* $\bar{x}$ *(condition du 2ème ordre)*

iii - *Stricte complémentarité* : $K = \emptyset$
$(h_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{u}_i > 0$, *pour* $i \in \{1,\dots,s\}$

Soit (j_k) *une suite croissante d'entiers telle que* $\forall k \in \mathbb{N},\ j_k \le k$.

Si z^o *est assez voisin de* $\bar{z}$ *et si* (α_k) *est une suite de réels positifs bornée supérieurement par* α *"petit".*
Si $\|H^k - \nabla^2 L(z^{j_k})\| \le \alpha_k$ *alors*
la suite (z^k) *converge* Q-*linéairement vers* $\bar{z}$.

En d'autres termes : si H^k est une "bonne approximation" de $\nabla^2 L(z^k)$ alors la suite (z^k) converge vers $\bar{z}$.

Dans le cas qui nous intéresse 2) et ii) sont vérifiées mais en général par iii). En pratique, cependant, les hypothèses H_1 et H_2 qui ont permis de se passer de iii) sur le plan théorique, permettent d'appliquer cet algorithme aux problèmes P_1 et P_2.

On se trouve donc ramené à la résolution de problèmes quadratiques (faisant intervenir ici le hessien du lagragien).

On va donc également exposer quelques méthodes de résolution de tels problèmes.

2 - APERCU DE QUELQUES METHODES DE RESOLUTION DE PROBLEMES QUADRATIQUES.

2.1 - Introduction.

Soit le problème quadratique suivant :

$$(Q)\quad \begin{cases} \text{Min } f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t G x \\ x \in \mathbb{R}^n \\ A^t x \geq b \end{cases}$$

où G est une matrice $n \times n$ symétrique, positive, définie $A = (a_1,\ldots,a_m)^t$ est $n \times m$.
On appelle Δ le domaine réalisable de (Q).

Il y a, en fait, deux grands types de méthodes :

a - les méthodes du type *simplexe modifié*, sur des matrices obtenues à partir des relations de Kuhn et Tucker.

b - Les méthodes de *projection du gradient* de la fonction objectif sur la variété des contraintes actives.

Ces dernières sont les plus efficaces car nécessitant moins de stockage. En réalité la plupart des méthodes combinent les deux aspects et opèrent le plus souvent en deux étapes :

a - obtention d'un point réalisable,
b - optimisation en conservant la réalisabilité.

Il existe beaucoup de méthodes de résolution de problèmes quadratiques (primales, duales, primales-duales, paramétriques, etc...).
On va se limiter à la présentation des plus performantes, du moins dans le cas qui nous intéresse. (Pour les autres on peut se référer à [25], [26], [27], [28], [29]).

2.2 - Méthodes primales (cf, Rosen [19], Goldfarb [20], Fletcher [21] ...)

Ces méthodes sont des extensions de la méthode de Newton ; le principe est le suivant :

a) - en x on cherche les contraintes actives N(x), et la variété active V(x), intersection des hyperplans inactifs en x.

b) - On projette f(x) sur V(x) et on calcule les multiplicateurs correspondants $\alpha(x)$. Soit π l'opérateur de projection

i) si $\pi(\nabla f(x)) = 0$ et $\alpha(x) \geq 0$ alors x est solution optimale

ii) si $\pi(\nabla f(x)) = 0$ et $\exists q\ \alpha_q(x) < 0$: on retire la contrainte n_q correspondante et on recommence à a).

iii) si $\pi(\nabla f(x)) > 0$: on calcule la distance θ de x à la contrainte inactive la plus proche puis $\tau = \min(1,\theta)$; $x' = x - \tau\pi(\nabla f(x))$.

. si $\gamma = 1$: détermination de $\alpha(x)$: si $\alpha(x) \geq 0$ STOP
sinon on retire une contrainte et on recommence à a).

. si $\gamma = \theta$: on ajoute la contrainte réalisant θ et on recommence à a).

Remarque : $\pi(\nabla f(x)) = 0 \iff \nabla f(x) = N(x).\alpha$
C'est la première condition de Kuhn et Tucker, si la projection de $\nabla f(x)$ sur la variété inactive est nulle cela signifie que $\nabla f(x)$ est dans la variété active. Les multiplicateurs ne sont alors pas autre chose que les composantes de $\nabla f(x)$ dans cette variété.

On va donner deux exemples d'algorithmes issus de méthodes primales.

a) - Algorithmes de Goldfarb [20] et Fletcher [21].

On cite les deux ensembles car c'est en fait le même : seul l'ordre des opérations change.
L'algorithme (1) (Goldfarb) commence par annuler la projection du gradient puis rend positifs les multiplicateurs.
L'algorithme (2) (Fletcher) fait le contraire.

ALGORITHME (1) ([20])

-

0- *initialisation*

Choix de x_o dans Δ ; calcul de $g_o = \nabla f(x_o) = Gx_o + c$

$N_q = (n_1,\dots,n_q)$ contraintes actives en x_o

$N_q^* = (N_q^t\, G^{-1}\, N_q)^{-1}\, N_q^t\, G^{-1}$ (pseudo-inverse)

$$P_q = I - G^{-1}\, N_q\, (N_q^t\, G^{-1}\, N_q)^{-1}\, N_q$$

$$= G^{-1}\,(I - N_q\, N_q^*)\, G$$

($P_q G^{-1}$ est l'opérateur de projection)

$i = 0$

1- *calcul de la projection du gradient*

Calcul de $S_i = P_q G^{-1} g_i$

. Si $S_i = 0$ on va à 3-

. Sinon on va à 2-

2-

Cas où $P_q\, G^{-1}\, g_i \neq 0$

calcul du pas τ

Calcul de $x_{i+1} = x_i - \tau s_i$

$$g_{i+1} = \nabla f(x_{i+1}) = Gx_{i+1} + c$$

avec $\tau = \min\,(1, \hat{\tau})$ où

$$\hat{\tau} = \min_{\substack{x_j^t s_i > 0 \\ q+1 \leq j \leq m}} \left(\frac{x_j^t\, x_i - b_j}{x_j^t\, s_i}\right)$$

on ajoute à la variété active la contrainte n_{q+1} réalisant τ.

. si $\tau < 1$ on calcule $P_{q+1}\, G^{-1}$ et N_{q+1}^* grâce à la formule (I) en supposant que le minimum dans $\hat{\tau}$ est atteint pour $j = q+1$

$i = i+1$; $q = q+1$ et on va à 1-

. si $\tau = 1$ $i = i+1$ et on va à 3-

Test sur les multiplicateurs.

3- Calcul des multiplicateurs $\alpha^q = N_q^* \, g_i$

$\alpha_r^q = \underset{1 \le j \le q}{\mathrm{Min}} \; \alpha_j^q$; on peut supposer $r = q$.

. Si $\alpha_q^q \ge 0$: tous les multiplicateurs sont positifs donc x_i est le minimum global de f sur Δ ;

<u>STOP</u>

. Si $\alpha_q^q < 0$: on enlève la contrainte n_q. Calcul de P_{q-1} et N_{q-1}^* avec la formule (II) $q = q-1$ et on va à 1-

(I) <u>Ajout d'une contrainte</u>.

$$P_{q+1} \, G^{-1} = P_q \, G^{-1} - \frac{P_q \, G^{-1} \, n_{q+1} \, (P_q \, G^{-1} \, n_{q+1})^t}{n_{q+1}^t \, P_q \, G^{-1} \, n_{q+1}}$$

$$N_{q+1} = \begin{pmatrix} N_q^* \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N_q^* \, n_{q+1} \\ \\ 1 \end{pmatrix} \frac{(P_q \, G^{-1} \, n_{q+1})^t}{n_{q+1}^t \, P_q \, G^{-1} \, n_{q+1}}$$

(II) <u>Retrait d'une constante.</u>

$$P_{q-1} \, G^{-1} = P_q \, G^{-1} + \frac{n^* \, n^{*t}}{n^{*t} G n^*}$$

$$\begin{pmatrix} N_{q-1}^* \\ \\ 0 \end{pmatrix} = N_q^* - \frac{N_q^* \, G \, n^* \, n^{*t}}{x^{*t} G n^*} \quad \text{où } n^* = n_q.$$

ALGORITHME (2)

-

0 - Même initialisation qu'en (1)

1 - *Calcul des multiplicateurs* : $\alpha^q = N_q^* g_i$

$p = 0 \; ; \; \alpha_r^q = \underset{1 \leq j \leq q}{\mathrm{Min}} \; \alpha_j^q$

. Si $\alpha_r^q \geq 0$: on va à 3-

. Si $\alpha_r^q < 0$: on va enlever assez de contraintes actives pour que les α_j^q deviennent tous positifs

on va à 2-

2 - *Retrait des contraintes actives*

$$P_{q-p} \; G^{-1} = P_{q-p+1} \; G^{-1} + \frac{n^* \; n^{*t}}{n^{*t} G n^*}$$

retrait de la contrainte n_r

$$\begin{pmatrix} N_{q-p}^* \\ 0 \end{pmatrix} = N_{q-p+1}^* - \frac{N_{q-p+1}^* \; G n^* \; n^{*t}}{n^{*t} \; G \; n^*}$$

où $n^* = n_r$ la contrainte enlevée

$p = p+1 \; ; \; \alpha^{q-p} = N_{q-p}^* \; g_i$

$J = \{ j / \alpha_j^{q-p} < 0, \; \alpha_j^i \leq \alpha_j^{i+1} \quad i = q-p, \ldots, q-1 \}$

test sur les nouveaux multiplicateurs

. Si $J = \emptyset$ on va à 3-

. Sinon $\alpha_r^{q-p} = \underset{j}{\mathrm{Min}} \; \alpha_j^{q-p}$ et on va à 2-

3 - *Calcul de la projection du gradient.*

$S_i = P_q\, G^{-1}\, g_i$

. Si $S_i = 0$ alors x_i est le minimum global de f sur Δ : STOP

. Si $S_i \neq 0$

$x_{i+1} = x_i - \tau S_i$

$g_{i+1} = \nabla f(x_{i+1})$

où $\tau = \min(1, \bar{\tau})$ calculé comme dans (1) et où q est remplacé par q+p

$i = i+1$; $q = q+p+1$

on va à 1-

Théorème IV.2.2.1. *Sous l'hypothèse H_1 d'indépendance des gradients actifs.*
Sous réserve de la règle d'anti-zigzag de Zoutendijk *pour l'algorithme (2) i.e.*

> *Si une contrainte précédemment retirée doit être reprise (en 3-) elle est gardée dans la base des contraintes actives jusqu'à ce qu'une solution optimale soit obrenue pour le problème quadratique ainsi obtenu ("revised").*

Alors les algorithmes (1) et (2) convergent en un nombre fini d'étapes.

b - *Exemple de méthode numériquement stable* : Gill *et* Murray [22]

On se bornera au cas où G est définie positive, car c'est toujours le cas dans les problèmes qu'on a envisagés (à cause de l'hypothèse H_2).

Le cas où G n'est pas définie positive est également exposé dans [22].

Principe.

Soit $\hat{x}$ un point stationnaire ($\hat{A}^t \hat{x} = \hat{b}$).
On veut déterminer s'il existe une "direction" de recherche "réalisable" p, changeant l'ensemble des contraintes actives, telle que f décroit le long de p. On cherche donc p telle que $(\nabla f(\hat{x}), p) < 0$.

Supposons avoir choisi p tel que le point $\hat{x} + p$ vérifie les mêmes contraintes actives que $\hat{x}$ sauf la n° S

$$\forall j \neq s \quad a_j^t\, \hat{x} = b_j \Rightarrow a_j^t p = 0$$

$$a_s^t(\hat{x} + p) = a_s^t \hat{x} + a_s^t p = b_s + a_s^t p$$

Si on veut $\hat{x} + p$ réalisable il faut $a_s^t p > 0$.

Par conséquent tout p tel que : $\forall j \neq s \ a_j^t p \neq 0$ et ($a_s^t p > 0$ et $(\nabla f(\hat{x})^t, p) < 0$) est une direction de descente réalisable.

$\hat{x}$ stationnaire donc $\hat{A}\alpha = \nabla f(\hat{x}) = G\hat{x} + c$ d'où $(\nabla f(\hat{x}), p) = (G\hat{x} + c)^t p = \alpha^t \hat{A}^t p$

$\hat{A}^t p$ est $a_s^t p\ e_s$ où e_s est la $s^{\text{ième}}$ colonne de la matrice identité donc
$(\nabla f(\hat{x}), p) = \alpha^t (a_s^t p)\ e_s = (a_s^t p)\alpha_s$.

ALGORITHME

-

initialisation

0 - x^o tel que $\nabla f(x^o) = 0$ (x^o stationnaire ou sommet)

t^o nombre des contraintes actives en x^o

N^o matrice des contraintes actives en x^o

$g^o = \nabla f(x^o) = Gx^o + c$

$Q^o N^o = \begin{bmatrix} R^o \\ 0 \end{bmatrix} G_A^o = Z^{o^t} G Z \; (= L^o D L^{o^t})$

où Z^o et les $n-t^o$ dernières lignes de Q^o (factorisation Q-R)

$k = 0$

1 - Soit $g_A^k = Z^{kt} g^k$

où $g^k = \nabla f(x^k)$ et Z^k telle que $N_k^t Z^k = 0$

Soit ε donné ; $\varepsilon > 0$

. Si $||g_A^k|| > \varepsilon$ on va à 2-

. Si $||g_A^k|| \leq \varepsilon$

On calcule les éventuels multiplicateurs

$R^k \alpha = Q_1^k g^k$ où Q_1^k est fermée des t_k premières lignes de Q^k

i) - si $\alpha > 0$: on a trouvé la solution $\boxed{\text{STOP}}$

ii) - sinon : soit $\alpha_3 < 0$ (par exemple le minimum des α_i) on <u>enlève</u> la contrainte s de la base des contraintes actives.

2 - <u>Résoudre</u> $G_A^k p_A^k = - g_A^k$ (avec factorisation LDL^t de G_A^k)

3 - <u>Former la direction de recherche</u> $p^k = Z^k \; p_A^k$

4 - *Calcul de τ distance de x^k à la contrainte inactive la plus proche*

$$\hat{\tau} = \min_j \left\{ \frac{a_j^t x_k - b_j}{a_j^t p^k} \;/\; a_j^t p^k < 0 \right\}$$

p^k *peut intersecter plusieurs contraintes de la frontière de* Δ.
Soit a_r *l'une d'entre elles :* $a_r^t x^k = b_r$
(en fait r *réalise le* min *de* $\hat{\tau}$*)*
$\tau = \min (1,\hat{\tau})$
$x^{k+1} = x^k + \tau p^k$; $g^{k+1} = \nabla f(x^{k+1})$

5 - *Si* $\tau = \hat{\tau}$. *On* <u>*ajoute*</u> *la contrainte* r *et on forme* N^{k+1}

6 - *On modifie les "Q.R" facteurs de la base et les "LDL^t" facteurs de* G_A^k *pour obtenir* G_A^{k+1}.
$k = k+1$; *et on va à 1-.*

2.3 - Méthodes duales.

Ce sont des méthodes qui résolvent le problème dual du problème quadratique primal. On trouve donc les multiplicateurs d'abord et on conclut grâce aux théorèmes d'équivalence des solutions des problèmes primal et dual.

On va donner en exemple d'algorithme de Goldfarb et Idnani [24] qui est le plus récent (83). (On peut voir aussi Van de Panne et Whinston [23])

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{Min } f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t G_x \\ x \in \mathbb{R}^n \\ A^t x \geq b \end{cases}$$

G est symétrique définie positive ; $A = (a_1,\ldots,a_m)^t$. On note Q(J) le problème quadratique suivant :

$$(Q(J)) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in J \ (a_i, x) \geq b_i \end{cases}$$

où $J \subset \{1,\ldots,m\}$

<u>*Définition IV.2.3.1.*</u> *Si* x *est solution de* $Q(J)$ *et si* I *est l'ensemble des indices des contraintes actives en* x, (x,I) *est appelé* <u>*S-paire*</u>.

Soit N la matrice des contraintes actives en x

$N^* = (N^t \, G^{-1} \, N)^{-1} \, N^t \, G^{-1}$ (pseudo inverse de N)

$H = G^{-1}(I-NN^*)$ opérateur de projection.

card $I = q$; N est supposée de rang maximum (H_1 en x).

Le principe de base est le suivant :

i) On a une paire (x,I) où I est l'ensemble des indices des contraintes actives en x et x solution du problème "actif".

ii) On choisit, si c'est possible, une contrainte inactive en x : n^+.

iii) On projette n^+ sur la variété active (par matrice de projection H). La projection obtenue sera la <u>direction</u> z du pas à ajouter à x.

On calcule ensuite la longueur de ce pas.

. dans l'espace dual : on cherche le multiplicateur "le plus près" de τ (où $N_\tau = n^+$ et N la matrice des contraintes actives). Ce multiplicateur est réalisé pour l'indice

$$t_1 = \frac{u^+_\ell(x)}{r_\ell} \qquad (r_\ell > 0)$$

. dans l'espace primal : on calcule la distance de x à la contrainte inactive n^+ ($= a_p$)

$$t_2 = \frac{a_p^t x - b_p}{z^t n^+} \quad \text{si } ||z|| \neq 0 \text{ et } t_2 = \infty \text{ sinon}$$

le pas t sera la plus petite de ces distances.

v) On détermine ensuite une nouvelle paire (x,I).

- si $t = \infty$ STOP : c'est fini
- si $t = t_1$ (dual) on enlève la contrainte a_ℓ
- si $t = t_2$ (primal) on ajoute la contrainte a_p

ALGORITHME

0 - *Initialisation* (minimisation sans contraintes)

$x = - G^{-1} c$; $f = \frac{1}{2} c^t x = f(x)$

$H = G^{-1}$; $I = \emptyset$; $q = 0$

1 - *calcul de* $a_j^t x - b_j$ pourtant j n'appartenant pas à I

$V = \{j \in \{1,\dots,m\} - I \ / \ a_j^t x - b_j < 0\}$

Choix d'une contrainte inactive si c'est possible

. si $V = \emptyset$: STOP : x est réalisable et solution de QP

. sinon : on choisit p dans V

$n^+ = a_p$; $u = N^* \nabla f(x)$ (multiplicateur)

$u^+ = (u, 0)^t$

(si $q = 0$; $u = 0$; $I = \emptyset$; $I^+ = I \cup \{p\}$)

2 - *Recherche de réalisabilité et détermination d'une nouvelle S-paire.*

a) - Choix d'une direction

$z = Hn^+$ et si $q > 0$, $r = N^* n^+$

b) - Choix du pas

i/ - longueur "partielle" t_1 (dans le dual)

. si $r \leq 0$ ou si $q = 0$: $t_1 = \infty$

. sinon : $t_1 = \min\limits_{\substack{r_j > 0 \\ j=1,\dots,q}} \dfrac{u_j^+(x)}{r_j} = \dfrac{u_\ell^+(x)}{r_\ell}$

le numéro ℓ, élément de I correspond à l'indice k de $\{1,\dots,m\}$

ii/ - longueur "totale" t_2 (dans le primal)

. si $|z| = 0$: $t_2 = \infty$

. sinon : $t_2 = \dfrac{a^t px - b_p}{z^t\ n^+}$

iii/ - longueur du pas : $t = \min (t_1\ t_2)$

c) - *Détermination d'une nouvelle S-paire.*

i/ - si $t = \infty$ STOP
$Q(I^+)$ et (Q) sont irréalisables

le pas est réalisé dans le dual. On modifie le multiplicateur et on enlève la contrainte active réalisant t_1

ii/ - si $t_2 = \infty$; $(t_1 < \infty)$; $t = t_1$

$$u^+ = u^+ + t \begin{bmatrix} -r \\ 1 \end{bmatrix}$$

$I = I - \{k\}$; $q = q-1$

Calcul de H et N^* ; on va à 2-a-.

iii/ - sinon :

on modifie x et u

$x = x + tz$

$f = f + tz^t \left(\frac{1}{2}t + u^+_{q+1}\right)$

$$u^+ = u^+ + t \begin{bmatrix} -r \\ 1 \end{bmatrix}$$

pas "primal" on ajoute une contrainte (a_p)

* si $t = t_2$: $u = u^+$

$I = I \cup \{p\}$

$q = q+1$

calcul de H, N^* et on va à 1-

pas "dual" on enlève la contrainte réalisant t_1

* si $t = t_1$: $I = I - \{k\}$

$q = q-1$

calcul de H, N^* et on va à 2-a-.

Cet algorithme résoud (Q) on indique qu'il n'y a pas de solution en un nombre fini d'étapes.

L'implémentation est basée sur la factorisation de Cholesky.

3 - APPROCHE ALGORITHMIQUE DU PROBLEME INITIAL.

Il s'agit d'essayer de résoudre à la fois le problème

$$P(0) \quad \begin{cases} \text{Min } f(x,0) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x,0) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,s\} \quad h_i(x,0) = 0 \end{cases}$$

et le problème quadratique $Q(\lambda)$ exhibé au chapitre II, qui permet d'estimer la dérivée de $\bar{x}$ et de $\bar{u}$ dans une direction quelconque λ de R^n

$$Q(\bar{x},\lambda) \quad \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2}(\dot{x}, \nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0)\dot{x}) + (\dot{x}, \frac{\partial}{\partial t}\nabla L(\bar{x},\bar{u},0)) \\ \dot{x} \in R^n \\ \forall i \in I \cup \{s+1,\dots,m\} \qquad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) = -\frac{\partial}{\partial t} h_i(\bar{x},0) \\ \forall i \in K \qquad (\nabla h_i(\bar{x},0),\dot{x}) \leq -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{x},0) \end{cases}$$

où $\bar{x}$ est une solution locale de P(0) et $\bar{u}$ le multiplicateur associé.

$$I = \{i \in \{1,\dots,s\} \ / \ \bar{u}_i > 0\}$$

$$K = \{i \in \{1,\dots,s \ / \ h_i(\bar{x},0) = \bar{u}_i = 0\}$$

Les hypothèses (H_1) et (H_2) sont supposées vérifiées en $(\bar{x},\bar{u})$.

L'avantage de l'algorithme de Han pour la résolution de P(0) est qu'il implique les résolutions successives de problèmes quadratiques faisant intervenir $\nabla^2 L(x,u,0)$ (outre bien sûr le caractère supra-linéaire de la convergence).

On peut donc imaginer de chercher une bonne approximation de $(\bar{x},\bar{u})$ par cet algorithme et de résoudre "dans la foulée" le problème $Q(\bar{x},\lambda)$ puisqu'on aura déjà une bonne approximation du hessien du lagrangien.

On peut donc proposer le schéma général suivant :

1°) - Résolution de $P(0)$ par l'algorithme de Han, chaque sous-problème quadratique étant résolu par une méthode de type Goldfarb-Idnani (ou équivalente). On engendre ainsi une suite (x^k, u^k) et on s'arrête quand x^k vérifie un critère d'arrêt (par exemple $||x^k-x^{k-1}|| \leq \varepsilon$ pour ε donné).

On obtient ainsi une approximation $(\tilde{x}, \tilde{u})$ d'une solution locale $(\bar{x},\bar{u})$
En fait $\tilde{x} = x^k$ (obtenu à l'itération k)
(H_1 et H_2 étant supposées vérifiées en $(\bar{x},\bar{u})$ elles le sont en $(\tilde{x}, \tilde{u})$ par continuité).
On obtient également une "bonne" approximation de

$$\nabla^2 L(\bar{x},\bar{u},0) \simeq \nabla^2 L(\tilde{x},\tilde{u},0) = \tilde{H} \; (=H^k).$$

2°) - Détermination de $\tilde{I}$ et $\tilde{K}$

__Lemme 3.1.__ *Si $(\tilde{x},\tilde{u})$ est assez voisin de $(\bar{x},\bar{u})$ on a $I = \tilde{I}$ et $K = \tilde{K}$*

3°) - Résolution de $Q(\tilde{x},\lambda)$ (par la méthode de Goldfarb-Idnani par exemple) en prenant un point de départ judicieux (par exemple $s^k = x^k - x^{k-1}$ solution du dernier problème $Q(x^k, H^k)$ de 1°)).
On obtient alors une valeur approchée de $(\dot{x},\dot{u})$.

Remarques et commentaires.

Pour résoudre $Q(\tilde{x}, \lambda)$ on peut choisir la méthode de Goldfarb-Idnani. Dans cette méthode on peut, a priori, choisir n'importe quel point comme point de départ. Toutefois si on choisit comme point de départ s^k la dernière différence (x^k-x^{k-1}) on peut accélérer la résolution de $Q(\tilde{x},\lambda)$.
Prenons, à titre d'exemple, le cas du problème (P_1).

L'algorithme de Han génère des problèmes :

$$Q(x^k, H^k) \quad \begin{cases} \text{Min } (\nabla f(x^k),\sigma) + (1/2)\, \sigma H^k \sigma \\ \sigma \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \{1,\dots,s\} \quad h_i(x^k) + (\nabla h_i(x^k), \sigma) \leq 0 \\ \forall i \in \{s+1,\dots,m\} \; h_i(x^k) + (\nabla h_i(x^k), \sigma) = 0 \end{cases}$$

et le problème $Q(\tilde{x}, \lambda)$ est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } (\lambda,\sigma) + (1/2)\, \sigma \tilde{H} \sigma \\ \sigma \in \mathbb{R}^n \\ \forall i \in \tilde{I} \quad h_i(\tilde{x}) + (\nabla h_i(\tilde{x}), \sigma) = 0 \\ \forall i \in \tilde{K} \quad h_i(\tilde{x}) + (\nabla h_i(\tilde{x}), \sigma) \leq 0 \end{cases}$$

(en effet pour tout i de $I \cup K$ $h_i(\tilde{x}) = 0$)

On constate alors que le domaine réalisable de $Q(\hat{x},\lambda)$, $D(\lambda)$ est inclus dans D^k le domaine réalisable de $Q(x^k, H^k)$, si on choisit $\tilde{x} = x^k$.

De plus les fonctions objectifs ne diffèrent que d'une partie linéaire :

$$(\nabla f(x^k) - \lambda, \sigma) \; (= (\nabla f(\tilde{x}) - \lambda, \sigma)).$$

On constate donc que les deux problèmes sont très liés et que partir de s^k solution de $Q(x^k, H^k)$ pour la résolution de $Q(\tilde{x}, \lambda)$ peut être un très bon choix.

En conclusion, ceci n'est qu'une très vague approche de la manière dont on peut résoudre le problème du point de vue algorithmique.

Il faudrait s'interroger de manière plus rigoureuse sur les moyens d'enchaîner les différentes résolutions de problèmes quadratiques aussi bien dans l'algorithme de Han que pour la résolution successive de $Q(x^k, H^k)$ et $Q(x^k,\lambda)$. Ceci supposerait éventuellement de modifier partiellement les méthodes de résolution de problèmes quadratiques évoquées précédemment.

Il faudrait également pouvoir estimer plus précisément l'incidence du choix du point de départ dans la résolution du dernier problème, en estimant en particulier le gain (en calculs, vitesse de convergence) dû au choix très particulier de s^k. On pourrait également trouver d'autres points de départ, plus performants, adaptés aux problèmes (P_1) et (P_2) par exemple.

Enfin, et surtout, il faut estimer les erreurs commises, d'abord quand on choisit x^k comme valeur approchée de $\bar{x}$, et ensuite quelle en est l'incidence sur les approximations de $\dot{x}$ et $\dot{u}$. Tout ceci constitue un sujet bien trop vaste pour qu'on puisse le traiter de manière satisfaisante ici.
Aussi a-t-on pris le partie d'indiquer seulement les principes généraux et des directions de recherche possibles.

*

*   *

BIBLIOGRAPHIE

\-

1 GAUVIN - TOLLE

Differential stability in non linear programming.
Siam Journal on Control and Optimization, vol 15, 2, (1977), p. 294.

2 HOGAN W.W.

Point-to-set maps in mathematical programming.
Siam Review, Vol. 15, 3, (1973), p. 591.

3 ROCKAFELLAR R.T.

Lagrange multipliers and subderivatives of optimal value functions in non linear programming.
Mathematical Programming Study 17, (1982), pp. 28-66.

4 GAUVIN J.

The generalized gradient of a marginal function in mathematical programming.
Mathematics of Operation Research, Vol. 4, (1979), p. 459.

5 FIACCO A.V.

Sensitivity analysis for non linear programming using penalty methods.
Mathematical Programming, Vol. 10, 3, (1976).

6 BUYS - GONIN

The use of augmented lagrangian function for sensitivity analysis in non linear programming.
Mathematical Programming, 12, (1977), pp. 281-284.

7 MC KEOWN

Parametric sensitivity analysis of non linear programming problems.
N.O.C. Hatfield Polytechnic.

8 BIGELOW - SHAPIRO

Implicit function theorems for mathematical programming and systems of inequalities.
Mathematical Programming 6, (1974), pp. 141-156.

9 PETERSON

A review of constraint qualification in finite dimensional spaces.
Siam Review, Vol. 15, 3, july 1973.

10 MC CORMICK

Second order condition for constrained minima.
Siam Journal of Applied Mathematics Vol. 15, 3, mai 1973.

11 DANTZIG - FOLKMAN - SHAPIRO

On the continuity of the minimal set of a continuous function.
Journal of Mathematical Analysis, Vol. 17, (1967), pp. 519-548.

12 FIACCO A.V.

Second order sufficient condition for weak and strict constrained minima.
Siam Journal of Applied Mathematics, Vol. 16, 1, (1968).

13 RITTER

Stationary points of quadratic maximum problems.
Z. Wahrscheinlichkreits theorie und Verw. Gebeite 4, (1965), pp. 149-158.

14 LAURENT P.J.

Approximation et optimisation.
Herman 1972.

15 HUART P.

Optimisation dans R^n. *Première partie.*
Lille 1972.

16 HAN S.P.

Superlinearly convergent variable metric algorithms for general non linear programming
Mathematical Programming 11, (1976), pp. 263-282.

17 ROBINSON S.

Strongly regular generalized equations.
Mathematics of Operation Research, Vol. 5, (1980), pp. 43-42.

18 COTTLE

Manifestations of the Schur complement.
Linear Algebra and its applications, Vol. 8, (1974), pp. 189-213.

19 ROSEN

The gradient projection method for non linear programming.
Part I : linear constraints.
Siam Journal of Applied Mathematics, 8, pp. 181-217.

20 GOLDFARB

Extensions of Newton's method and simplex methods for solving quadratic programs.
F.A. Lootsma "Numerical methods for non linear programming optimization", 17, pp. 239-254. (Academic Press 1972).

21 FLETCHER

A general quadratic programming algorithm.
Journal of Institute of Mathematical applications, Vol. 7, (1971), pp. 76-91.

22 GILL - MURRAY

Numerically stable methods for quadratic programming.
Mathematical Programming 14, (1978), pp. 349-372.

23 VAN DE PANNE - WHINSTON

The simplex and the dual method for quadratic programming.
Operations Research Quaterly 15, (1964), pp. 355-389.

24 GOLDFARB - IDNANI

A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs.
Mathematical Programming 27, (1983), pp. 1-33.

25 GONCALVES

A primal-dual method for quadratic programming with bounded variables.
F. Lootsma "Numerical methods for NLP Optimisation" (Academic Press 1972), 18, p. 259.

26 GRIGORIADIS - RITTER

A parametric metho (for semi-definite quadratic programs.
SIAM Journal on Control, vol. 7, 4, (1969).

27 PANG J.S.

An equivalence between two algorithms for quadratic programming.
Mathematical Programming 20, (1981), p. 152-165.

28 VAN DE PANNE - WHINSTON
The symetric formulation of the simplex method for quadratic programming.
Econometrica 37, (1969), pp. 507-527.

29 HAN - MANGASARIAN
Exact penalty functions in non linear programming.
Mathematical Programming 17, (1979), pp. 251-269.

30 JITTORNTRUM
Solution point differentiability without strict complementarity in non linear programming.
Mathematical Programming 21, (1984), pp. 127-138.

RESUME

Le but de ce travail est de faire une analyse de sensibilité d'un problème d'optimisation paramétré : $P(v)$,au voisinage de $v = 0$,c'est à dire d'évaluer l'incidence d'une petite variation du paramètre sur la valeur optimale du problème $f_{min}(v)$ et sur les éventuelles solutions . On évoquera d'abord l'aspect global de cette question (dérivabilité de f_{min}) , avant de se placer au voisinage d'une solution locale $\bar{x}$ de $P(0)$. C'est le cas où l'hypothèse de stricte complémentarité en $\bar{x}$ n'est pas assurée que l'on développera . On montrera , sous des hypothèses classiques , l'existence et l'unicité dans un voisinage V de $\bar{x}$, d'une représentation de la solution $x(v)$ de $P(v)$ et du multiplicateur associé $u(v)$, continue en $v = 0$. On donnera aussi des conditions assurant la dérivabilité directionnelle en 0 de $x(v)$ et $u(v)$. A titre d'exemple on developpera le cas de deux problèmes particuliers P_1 (variation linéaire de l'objectif) et P_2 (variations des contraintes de borne) .
On conclura en ébauchant une mise en oeuvre algorithmique de la résolution de ce problème , afin d'établir un procédé de calcul conjoint de $\bar{x}$ et $\bar{x}'(0;d)$ (sa dérivée dans la direction d quand elle existe)