N° d'ordre : 1301

THÈSE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

FLANDRES-ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Mohammed BELLALIJ

PROCEDES DE CONTROLES DE L'ERREUR ET ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

Thèse soutenue le 9 octobre 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	P. POUZET	Président
	C. BREZINSKI	Rapporteur
	B. GERMAIN BONNE	Examinateur

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation - Bât M3 - 1e étage
U.F.R. d'I.E.E.A.
59655 VILLENEUVE D'ASCQ - CEDEX - FRANCE
Tél. 20.43.46.71

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.E.E.A.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean (dét.)	Physique
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BOIS Pierre	Mathématiques
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	CHAMLEY Hervé	Biologie
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOCT Jacques	Chimie
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie
M.	MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	STANKIEWICZ François	S.E.S.
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis (dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël	I.P.A.
M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jean	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. NAVARRE Christian	I.P.A.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

La présidence du jury par Monsieur P. POUZET, Professeur à l'Université de Lille I, m'honore profondément.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur C. BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I, qui m'a proposé ce sujet, dont il a constamment suivi l'évolution avec intérêt. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour ses encouragements et ses conseils judicieux.

Je remercie très vivement Monsieur B. GERMAIN-BONNE d'avoir voulu s'intéresser à ce travail et de le juger.

Que soient remerciés tous ceux qui, de près comme de loin, m'ont apporté le soutien nécessaire à l'élaboration de ce travail.

Mes remerciements vont également à Madame Françoise TAILLY pour sa gentillesse ainsi qu'à Madame Colette LAVERDISSE qui a dactylographié cette thèse avec soin et diligence et à Monsieur Henri GLANC qui l'a imprimée.

A mon Père et à ma Mère,

A toute ma famille,

A Sylviane et sa famille,

A mes amis.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE III

* * *

CHAPITRE IV

* * *

CHAPITRE V

* * *

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous étudions des possibilités de contrôle d'erreur en accélération de la convergence.

• Sur le plan pratique, il est insuffisant de savoir, pour une suite (S_n) donnée, qu'une certaine transformation : $(S_n) \to (T_n)$ accélère sa convergence. Il est donc important et souhaitable d'avoir, en même temps, une estimation de l'erreur $T_n - S^*$, dont le critère d'arrêt sur le plan numérique en dépendra.

C'est pourquoi C. Brezinski [1] a proposé et a étudié une méthode pour le contrôle d'erreur. Elle consiste à construire une suite d'intervalles, admettant pour milieux les termes de la suite (T_n), lequels à partir d'un certain rang contiennent la limite.

C'est dans cette perspective que notre étude se développe pour aboutir à une autre façon de procéder pour le contrôle d'erreur : nous cherchons à appliquer à une suite deux transformations de telle sorte que les deux suites obtenues accélèrent la convergence, en fournissant un encadrement de la limite, l'une par excès et l'autre par défaut.

Nous désignons parfois donc, par "estimation de la limite" la procédure décrite précédemment.

Tout d'abord, dans le chapitre I, nous étudions le procédé de contrôled'erreur de C. Brezinski dans le cas particulier de transformation de suites : $T_n = S_{n+1}, n \geq 0$. Ce qui va nous conduire à donner deux estimations de l'erreur pour une classe de suites, en particulier pour des suites générées par la méthode de Newton.

Dans le chapitre II, afin de donner une estimation de la limite, nous proposons une famille de transformations de suites. Après avoir établi des résultats d'accélération de la convergence et d'exactitude, nous donnons un critère qui permet de déterminer les deux transformations qui encadrent la limite. Nous terminons par une généralisation de ces transformations au sens de Levin.

Dans le chapitre III, nous étudions une méthode d'encadrement de la limite pour trois classes de suites oscillantes.

Dans le chapitre IV, nous introduisons une généralisation du procédé de contrôle d'erreur de C. Brezinski. Nous complétons notre étude par celle faite par FDIL [7].

. Enfin, dans le chapitre V, nous proposons une méthode d'estimation de la limite pour la classe de suites (S_n) à convergence linéaire telles que $\Delta S_n=\lambda^n n^\theta \sum_{k\geq o} \frac{\gamma_k}{n^k}$ pour n assez grand, avec $\gamma_0\neq 0$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $-1\leq\lambda<1$ $(\lambda\neq 0)$. L'encadrement de la limite s'obtient à l'aide du procédé Δ^2 d'Aitken d'une part, et d'autre part du procédé Δ^2 d'Aitken modifié et du θ_2 - algorithme décalé. Nous étendons cette méthode au Δ^2 - itéré.

Nous notons, avant de clore cette introduction, que les essais numériques concernant les trois premiers chapitres ont été faits sur l'IRIS 80, tandis que ceux du dernier chapitre ont été réalisés sur l'AMOS.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Soient α , β deux réels distincts. Nous noterons $[\alpha \wedge \beta]$: l'intervalle $[\alpha,\beta]$ si $\alpha < \beta$ ou $[\beta,\alpha]$ si $\beta < \alpha$.

Nous désignerons toujours par (S_n) une suite de réels supposée convergente de limite S^*.

ΔS_n désignera la différence entre deux termes consécutifs de la suite (S_n) : $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$.

De manière analogue, $\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n$.

Nous noterons λ_n le rapport $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ quand $\Delta S_n \neq 0$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels de limite nulle.
On écrira :

* $v_n = O(u_n)$ si : $\exists N$ et $C>0$: $\forall n \geq o$ on a $|v_n| < C\,|u_n|$
* $v_n = o(u_n)$ si : $\forall \varepsilon > o$ $\exists N$: $\forall n \geq o$ on a $|v_n| < \varepsilon\,|u_n|$

Type de convergence :

Soit (S_n) une suite de limite S^*.

- on dira que $r \geq 1$ est l'ordre de convergence de la suite (S_n) si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|S_{n+1} - S^*|}{|S_n - S^*|^r} = C$ où $C \in]0, +\infty[$.

- on dira que (S_n) est à convergence linéaire si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \rho$ où $-1 \leq \rho < 1$ ($\rho \neq 0$), tandis qu'elle est à convergence logarithmique lorsque $\rho = 1$.

Procédés d'accélération :

- Soit (S_n) de limite S^* et considérons un procédé qui transforme (S_n) en une suite (T_n).

  Le procédé sera dit :

  * exact pour (S_n) s'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$ $T_n = S^*$,
  * régulière pour la suite (S_n) si $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = S^*$,
  * accélérant la convergence de (S_n) si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 0$.

CHAPITRE I

ESTIMATION DE L'ERREUR D'UNE SUITE CONVERGENTE PAR UN PROCEDE D'INTERVALLES EMBOITES

I. Introduction :

Dans ce chapitre, nous développons un cas particulier de la procédure proposée par C. Brezinski dans [1].

Elle consiste à estimer l'erreur sur la transformée d'une suite obtenue par une méthode d'accélération de la convergence, en construisant d'une manière simple une suite d'intervalles, lequels contiennent asymptotiquement la limite de la suite à accélérer.

Nous commençons par présenter cette procédure et par rappeler quelques résultats. Nous l'étudions ensuite pour une transformation particulière qui nous amènera à donner une estimation de l'erreur pour une suite convergente et en particulier pour une suite générée par un procédé itératif tel que $x_{n+1} = F(x_n)$. Notre approche est basée sur le comportement du rapport des différences successives des termes de la suite : Δx_n et Δx_{n+1}. Ceci nous donne des informations sur le rang N à partir duquel ces intervalles contiennent la limite.

Nous appliquons enfin notre estimation à la méthode de Newton, en comparant avec d'autres estimations proposées par Potra F.A et Ptåk V. dans [14, 1980] et Miel G. dans [12, 1980].

Nous remarquons, sur des essais numériques, que la notre est, en général, meilleure.

Nous améliorons notre estimation d'erreur en proposant une deuxième.

II. Présentation et propriétés du procédé de C. Brezinski [1]

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite convergente telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$

Soit T une transformation de suites, telles que :

$$T : (S_n)_{n\geq o} \longrightarrow (T_n)_{n\geq o}$$

On peut toujours écrire de telles suites comme :

$$T_n = S_n + D_n \qquad \forall n\geq o$$

Il est clair que $(T_n)_{n\geq o}$ converge vers S^* si et seulement si $D_n = o(1)$ et $(T_n)_{n\geq o}$ converge plus vite que $(S_n)_{n\geq o}$ vers S^* si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D_n}{S_n - S^*} = -1$. On considère une autre transformation définie à partir de T :

$$T_n(b) = S_n + (1-b)\, D_n \quad \forall n\geq o \text{ et } \forall b\in \mathbb{R}$$

Comme on peut le constater :

$$T_n = T_n(o) \quad \text{et} \quad T_n(b) + T_n(-b) = 2\, T_n$$

donc T_n est le milieu de l'intervalle fermé et borné d'extrémités $T_n(b)$ et $T_n(-b)$: $I_n(b) = [T_n(-b), T_n(b)]$.

Nous allons rappeler les premiers résultats se trouvant dans [1].

Théorème 1 :

Une condition nécessaire est suffisante pour que $\forall b \neq o$, ... $\exists N : \forall n\geq N\ S^* \in I_n(b)$ est que $\forall n\geq N\ |e_n|\leq|b|$;

où $(e_n)_{n\geq o}$ est telle que : $T_n - S^* = e_n D_n$, $n\geq o$.

On remarque, à partir de ce résultat, que si $S^*\in I_n(b)$, alors on aura une estimation de l'erreur $|T_n - S^*|$.
Donc l'appartenance de S^* à $I_n(b)$ est d'un grand intérêt puisque en pratique $I_n(b)$ sera utilisé comme estimation de S^* au lieu de T_n.
La question qui se pose maintenant est d'étudier des cas où la condition du théorème 1 est satisfaite. Une première réponse se trouvant dans [1] est donnée dans le résultat suivant :

Théorème 2 :

Si $T_n - S^* = o\,(S_n - S^*)$ alors $\forall b \neq o$, $\exists N : \forall n\geq N$ .... $S^* \in I_n(b)$.

En effet lorsqu'il y a accélération, (e_n) tend vers zéro et il existe donc toujours un rang N à partir duquel la condition du théorème 1 est vérifiée. Mais il s'avère que les intervalles $I_n(b)$ restent larges. Ceci est dû au fait que les bornes $(T_n(\pm b))_{n\geq o}$ ne convergent pas plus vite que la suite $(S_n)_{n\geq o}$.

En effet :

On a : $\dfrac{T_n(b)-S^*}{S_n-S^*} = \dfrac{T_n-S^*}{S_n-S^*} - b\,\dfrac{D_n}{S_n-S^*}$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n(b)-S^*}{S_n-S^*} = b$ car $T_n - S^* = o\,(S_n - S^*)$.

Dans ce cas, l'estimation de S^* par I_n (b) est sans intérêt. Ceci conduit à remplacer b par une suite $(b_n)_{n\geq o}$ et on a les résultats suivants :

Théorème 3 :

Une C.N.S. pour que $\exists N : \forall n\geq N\ S^* \in I_n(b_n)$ est que : $\forall n\geq N,\ |e_n| \leq |b_n|$.

$(e_n)_{n\geq o}$ est telle que : $T_n-S^*= e_n\, D_n$, $n\geq o$.

Théorème 4 :

Si $T_n-S^*=o\,(S_n-S^*)$. alors une C.N.S pour que ......
$T_n(\pm b_n) - S^* = o\,(S_n - S^*)$ est que $b_n = o(1)$.

Donc ces résultats nous assurent, dans le cas de l'accélération de la convergence, l'appartenance de S^* à I_n (b_n), par contre le problème qui se pose est que la valeur de N reste inconnue. Cet inconvénient est dû au fait que la condition des théorèmes précédents est une propriété asymptotique.

En conséquence, nous sommes ramenés à chercher d'autres conditions qui ne dépendent que des données du problème afin d'une part d'assurer l'appartenance de S^* à I_n et d'autre part de tirer des informations sur le rang N.

III. Premiers résultats :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite convergente de limite S^*.

On notera pour toute la suite de ce chapitre :

$$\lambda_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\ \forall n \text{ si } \Delta S_n \neq 0.$$

Soit T la transformation de suites particulière telle que :

$$T = (S_n)_{n\geq o} \longrightarrow (S_{n+1})_{n\geq o} \quad \text{ie} \quad T_n = S_{n+1},\ n\geq o$$

donc T_n (b) devient $S_n + (1-b)\ \Delta S_n$, $b \neq o$.

soit : $T_n(b) = S_{n+1} - b\ \Delta S_n$, car $S_{n+1} = S_n + \Delta S_n$.

Il est évident de voir que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(b) = S^*$.

Avant d'arriver à un résultat fondamental, nous proposons un résultat avec les intervalles $I_n(b)$ où b est une constante non nulle.

Proposition 1 :

On suppose que $(S_n)_{n\geq o}$ est strictement monotone.

Soit b un réel non nul.

Si $\exists N$: $\forall n\geq N$ $\lambda_n \leq \dfrac{|b|}{1+|b|}$ (H), alors $\forall n\geq N$ $I_{n+1}(b) \subseteq I_n(b)$.

Si la suite $(S_n)_n$ est monotone à partir du rang N, alors le résultat reste valable.

Preuve :

$\Delta S_n \neq o$ $\forall n\geq o$, on peut poser $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

On ne restreint pas la généralité en supposant b>o, car dans le cas où b<o, il suffit de remplacer b par -b et $T_n(b)$ par $T_n(-b)$.

Donc on suppose que b>o.

1) Si $\Delta S_n > o$ $\forall n\geq o$, alors :

$$T_n(b) - T_n(-b) = T_n - b\ \Delta S_n - T_n - b\ \Delta S_n = -2\ b\Delta S_n < o\ \forall n$$

donc $$I_n(b) = [T_n(b),\ T_n\ (-b)]\quad \forall n$$

alors $$I_{n+1}\ (b) \subseteq I_n\ (b) \Leftrightarrow \begin{cases} T_n\ (b) \leq T_{n+1}\ (b) \\ T_{n+1}\ (-b)\ \leq T_n(-b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_n - b\Delta\ S_n\ \leq T_{n+1} - b\ \Delta S_{n+1} \\ T_{n+1} + b\Delta S_{n+1}\ \leq T_n + b\ \Delta S_n \end{cases}$$

or $$\Delta T_n = \Delta S_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ b\ \Delta S_n\ \leq (1-b)\ \Delta S_{n+1} & (1) \\ (1 + b)\Delta S_{n+1}\ \leq b\Delta S_n & (2) \end{cases} \qquad (\ *)$$

<u>1er cas</u> : $o<b\leq 1$: alors $1-b\geq o$ et $\Delta S_k \geq o\ \forall k$

donc $\begin{cases} -b\ \Delta S_n < o \leq (1-b)\ \Delta S_{n+1} \Rightarrow (1) \\ \qquad\qquad (H) \qquad\qquad \Rightarrow (2) \end{cases} \Leftrightarrow (*)$

<u>2ème cas</u> : $b>1$: Alors $1-b<o$ et $\Delta S_k > o\ \forall k$

donc. $(*)$ devient $\begin{cases} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{b}{b-1} \\ \\ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{b}{1+b} \end{cases}$

Soit : $\quad \lambda_n \leq \text{Min}\left\{\dfrac{b}{1+b}, \dfrac{b}{b-1}\right\}$

or $\text{Min}\left(\dfrac{b}{1+b}, \dfrac{b}{b-1}\right) = \dfrac{b}{1+b}$, en effet :

$$\begin{cases} \dfrac{b}{1+b} < \dfrac{b}{b-1} \Leftrightarrow b^2 - b < b^2 + b \Leftrightarrow b > o \\ \\ b-1 > o \end{cases}$$

donc : $(H) \Rightarrow \lambda_n \leq \dfrac{b}{1+b} = \text{Min}\left\{\dfrac{b}{1+b}, \dfrac{b}{b-1}\right\}$.

Par conséquent : $(*)$ est vérifié $\forall n\geq N$ et par suite $I_{n+1}(b) \subseteq I_n(b)\quad \forall n\geq N$.

2) Si $\Delta S_n < o\quad \forall n$, alors $I_n(b) = [T_n(-b), T_n(b)]\ \forall n$. De la même manière :

$$I_{n+1}(b) \subseteq I_n(b) \Leftrightarrow \begin{cases} b\ \Delta S_n \leq (1+b)\ \Delta S_{n+1} & (1') \\ (1-b)\ \Delta S_{n+1} \leq -b\ \Delta S_n & (2') \end{cases} \quad (**)$$

<u>1er cas</u> : $o<b\leq 1$: $\qquad$ alors $1-b\geq o$ et $\Delta S_k < o\quad \forall k$

donc $\begin{cases} (1-b)\Delta S_{n+1} \leq o < -b\ \Delta S_n \Rightarrow (2') \\ \qquad\qquad (H) \qquad\qquad \Rightarrow (1') \end{cases} \Leftrightarrow (**)$

<u>2ème cas</u> : $b>1$. Alors $1-b<o$ et $\Delta S_k < o\ \forall k$

donc $(**)$ devient $\begin{cases} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{b}{1+b} \\ \\ \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{b}{b-1} \end{cases}$

Soit $\lambda_n \leq \text{Min}\left(\dfrac{b}{1+b}, \dfrac{b}{b-1}\right) = \dfrac{b}{1+b}$

Donc (H) => (**)

Par conséquent : (**) est vérifié $\forall n \geq N$ et par suite $I_{n+1}(b) \subseteq I_n(b)$ $\forall n \geq N$. ∎

Une conséquence immédiate de cette proposition est que si $S^* \in I_{n+1}(b)$, alors $S^* \in I_n(b)$.

Donc le fait d'avoir des intervalles emboités nous permettra d'encadrer la limite. C'est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 1 :

On suppose que $(S_n)_{n \geq o}$ est strictement monotone.
S'il existe un entier N : $\lambda_n \leq \dfrac{|b|}{1+|b|}$ $\forall n \geq N$ (H) pour un réel b non nul,
alors : $S^* \in I_n(b)$ $\forall n \geq N$.

Preuve :

Les hypothèses de la proposition 1 étant vérifiées, on a donc $I_{n+1}(b)$ $\subseteq I_n(b)$ $\forall n \geq N$.

Comme les intervalles $I_k(b)$ sont fermés et bornés, on sait alors que

$\bigcap_{k \geq N} I_k(b) \neq \emptyset$.

Or $\lim_{n \to \infty} T_n(\pm b) = S^*$ alors :

$$\left\{ S^* \right\} = \bigcap_{k \geq N} I_k(b) \subseteq \ldots \subseteq I_{n+1}(b) \subseteq I_n(b) \subseteq \ldots \subseteq I_N(b).$$

Par conséquent : $S^* \in I_n(b)$ $\forall n \geq N$. ∎

Remarquons que pour établir les résultats précédents, il est inutile de supposer que $(T_n)_n$ converge plus vite que $(S_n)_n$.

Pour un choix convenable de la constante b, on voit donc la nécessité de connaître le comportement du rapport $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ $(\Delta S_n \neq 0)$

Nous allons enchaîner par un résultat qui donne un choix de b qui dépend directement du comportement de la suite $(\lambda_n)_n$.

Corollaire 2 :

On suppose que $(S_n)_{n \geq o}$ est strictement monotone.
S'il existe un entier N : $\lambda_n \leq \lambda_N < 1$ $\forall n \geq N$, alors $S^* \in I_n\left(\dfrac{\Delta S_{N+1}}{\Delta^2 S_N}\right)$ $\forall n \geq N$.

<u>Preuve</u> : $\Delta S_n \neq 0 \quad \forall n,\ \lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ est bien défini $\forall n$.

On a : $\dfrac{\Delta S_{N+1}}{\Delta S_N} \neq 1$, donc $\Delta^2 S_N \neq 0$.

Comme $b = \dfrac{\Delta S_{N+1}}{\Delta^2 S_N} = \dfrac{\Delta S_{N+1}}{\Delta S_{N+1} - \Delta S_N} = \dfrac{\lambda_N}{\lambda_N - 1}$ et $\lambda_N < 1$, alors $b < 0$.

Donc $\dfrac{|b|}{1+|b|} = \dfrac{-\Delta S_{N+1}/\Delta^2 S_N}{1 - \Delta S_{N+1}/\Delta^2 S_N} = \dfrac{-\Delta S_{N+1}}{\Delta^2 S_N - \Delta S_{N+1}}$

Soit : $\dfrac{|b|}{1+|b|} = \dfrac{\Delta S_{N+1}}{\Delta S_N} = \lambda_N$

or $\lambda_n \leq \lambda_N = \dfrac{|b|}{1+|b|}$, donc (H) est vérifié.

Il s'ensuit, d'après le corollaire 1, que $S^* \in I_n\left(\dfrac{\Delta S_{N+1}}{\Delta^2 S_N}\right) \quad \forall n \geq N$. ∎

Pour illustrer les résultats précédents, on propose l'exemple simple suivant :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_n = \lambda^{2^n} & ; \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^* = o. \\ \lambda = 0.9 & \end{cases}$

On a $o < S_n < 1 \quad \forall n \geq o$ et $S_{n+1} = S_n^2 \quad \forall n \geq o$.

donc $\Delta S_n = S_n (S_n - 1) < o,\quad \lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = S_n(S_n+1)$

et $\Delta\lambda_n = S_n (S_n^3 - 1) < o$.

Numériquement, on obtient :

n	S_n	λ_n
0	0.9	1.71
1	0.81	1.4661001
2	0.6561	1.0865672
3	0.4304672	0.6157693
4	0.185302	0.2196387
5	0.0343368	0.035515
6	0.001179	1.1888571 E-3
7	0.0000014	1.3802412 E-6
8	1.932335 E-12	1.932335 E-12
9	3.7339185 E-24	
10	1.3942147 E-47	

Le premier terme de la suite $(\lambda_n)_{n\geq o}$ qui est inférieur strictement à 1 est λ_3 et comme $(\lambda_n)_n$ est décroissante, on a bien $\lambda_n \leq \lambda_3 < 1$ $\forall n\geq 3$. Donc le choix de $b = \left|\frac{\Delta S_4}{\Delta^2 S_3}\right| = \frac{\lambda_3}{1-\lambda_3}$, soit b = 1.6026031, nous assure l'appartenance de 0 à $I_n(b)$ $\forall n\geq 3$. On a :

n	$T_n(-b)$	$T_n(b)$
0	0.6657657	0.9542343
1	0.4094594	0.9027406
2	0.0688674	0.792067
3	-0.2076005	0.5782045
4	-0.2076005	0.2762741
5	-0.0519598	0.0543178
6	-0.0018858	0.0018872
7	-2.2436394 E-6	2.2436432 E-6

Si maintenant, on prend $b = \dfrac{\lambda_4}{1-\lambda_4} = 0.281449$, alors $0 \in I_n(b)$ $\forall n \geq 4$.

n	$T_n(-b)$	$T_n(b)$
0	0.7846696	0.8353304
1	0.612785	0.699415
2	0.366963	0.4339713
3	0.1163 005	0.2543035
4	− 0.00815	0.0768258
5	− 0.00815	0.0105112
6	− 0.00033	0.0003328
7	− 3.9402613 E-7	3.9403 E-7

On remarque plus on augmente la valeur de N dans le choix de b, meilleure est l'estimation.

Il faut remarquer aussi que la suite $(S_n)_{n\geq o}$ est d'ordre strictement supérieur à 1. (ordre 2 en fait).

En effet :

$$S_{n+1}/S_n^2 = 1 \quad \forall n.$$

Regardons maintenant ce qui se passe si l'ordre est égal à 1 :

Soit la suite $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n = \lambda^n$, $n\geq o$, $o < \lambda < 1$.

On a $S^* = o$, $(S_n)_{n\geq o}$ est strictement décroissante et $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lambda$ $\forall n\geq o$.

Soit $b \in \mathbb{R} - \{o\}$: $|b| \geq \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$, on a alors en vertu du corollaire 2 :

$$o \in I_n(b) \quad \forall n\geq o \quad \left(\lambda \leq \frac{|b|}{1+|b|}\right)$$

Le choix optimal de b est tel que : $|b| = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$.

Prenons par exemple $b = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$, on obtient :

$$T_n(-b) = o \quad \text{et} \quad T_n(b) = 2\,\lambda^{n+1}$$

Donc

$$I_n\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = \left[0,\ 2\lambda^{n+1}\right] \quad \forall n\geq o.$$

Comme on peut le voir, les intervalles $I_n\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)$ restent larges et l'appartenance de 0 à $I_n\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right)$ est donc sans intérêt.

Donc, pour ces raisons et celles citées au paragraphe précédent, il est important de passer du choix d'une constante b au choix d'une suite $(b_n)_n$ qui nous permettra d'une part de surmonter le problème cité précédemment et d'autre part d'encadrer la limite dès les premières itérations.

IV Passage du choix d'une constante au choix d'une suite $(b_n)_n$

On rappelle qu'on est toujours dans le cas où $T_n = S_{n+1}$.

1) Résultat fondamental :

En remplaçant la constante b par la suite $(b_n)_{n\geq o}$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2 :

On suppose que $(S_n)_{n\geq o}$ est une suite strictement monotone et $(b_n)_{n\geq o}$ est une suite strictement positive.

Si $\exists N$: $\lambda_n \leq \dfrac{b_n}{1+b_{n+1}}$ $\forall n\geq N$ (H'), alors :

La suite d'intervalles $(I_n\ (b_n))_{n\geq N}$ est décroissante pour l'inclusion.

Si, en outre, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\ \Delta S_n = o$, alors $S^* \in I_n\ (b_n)$ $\forall n\geq N$.

Preuve :

On ne restreint pas la généralité en supposant $\Delta S_n > o$ $\forall n\geq o$, car dans le cas où $\Delta S_n < o$ $\forall n\geq o$, il suffit de remplacer $(S_n)_n$ par $(-S_n)_n$, $(T_n(b_n))_n$ par $(-T_n(b_n))_n$ et $(T_n(-b_n))_n$ par $(-T_n(-b_n))_n$.

Donc on suppose $\Delta S_n > o$ $\forall n\geq o$.

On a : $T_n(-b_n) - T_n(b_n) = 2\ b_n\ \Delta S_n > o$ $\forall n\geq o$.

Donc $I_n(b_n) = [T_n(b_n),\ T_n(-b_n)]$ $\forall n\geq o$.

Alors :

$$I_{n+1}(b_{n+1}) \subseteq I_n(b_n) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} T_n(b_n) \leq T_{n+1}(b_{n+1}) \\ \\ T_{n+1}(-b_{n+1}) \leq T_n(-b_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b_n \Delta S_n \leq (1-b_{n+1})\ \Delta S_{n+1} & (1) \\ \\ (1+b_{n+1})\ \Delta S_n \leq b_n\ \Delta S_n & (2) \end{cases} \quad (*)$$

Deux cas se présentent :

α) $o < b_{n+1} \leq 1$, alors $1-b_{n+1} \geq o$ et $\Delta S_n > o$.

$$\text{Donc} \left\{ \begin{array}{ll} -b_n \Delta S_n < o \leq (1-b_{n+1}) \Delta S_{n+1} & \Rightarrow (1) \\ (H') & \Rightarrow (2) \end{array} \right\} (*)$$

β) $b_{n+1} > 1$, alors $1-b_{n+1} < o$ et $\Delta S_n > o$.

$$\text{donc } (*) \text{ devient } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{b_n}{b_{n+1}-1} \\[2ex] \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{b_n}{b_{n+1}+1} \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \lambda_n \leq \text{Min} \left(\frac{b_n}{b_{n+1}-1}, \frac{b_n}{b_{n+1}+1} \right)$$

$$\text{Or Min} \left(\frac{b_n}{b_{n+1}-1}, \frac{b_n}{b_{n+1}+1} \right) = \frac{b_n}{1+b_{n+1}}, \text{ en effet :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{b_n}{1+b_{n+1}} < \dfrac{b_n}{b_{n+1}-1} \Leftrightarrow b_n b_{n+1} - b_n < b_n + b_n b_{n+1} \Leftrightarrow b_n > 0 \\[2ex] b_{n+1} - 1 < o \end{array} \right.$$

$$\text{donc : } (H') \Rightarrow \lambda_n \leq \frac{b_n}{1+b_{n+1}} = \text{Min} \left(\frac{b_n}{b_{n+1}-1}, \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \right) \Rightarrow (*) .$$

Par suite, dans les deux cas, $(*)$ est vérifié $\forall n \geq N$.

Il s'ensuit que : $I_{n+1}(b_{n+1}) \subseteq I_n(b_n) \quad \forall n \geq N$.

Et comme $I_n(b_n)$ est fermé et borné $\forall n$, alors $\bigcap_{n \geq N} I_n(b_n) \neq \emptyset$.

Or $\lim_{n\to\infty} T_n (\pm b_n) = S^*$ car $\lim_{n\to\infty} b_n \Delta S_n = o$ et $T_n (\pm b_n) = S_{n+1} \pm b_n \Delta S_n$

$$\text{donc} \left\{ S^* \right\} = \bigcap_{n \geq N} I_n(b_n) \subseteq \ldots \subseteq I_{k+1} (b_{k+1}) \subseteq I_k (b_k) \subseteq \ldots \subseteq I_N(b_N).$$

Par conséquent : $S^* \in I_n(b_n) \quad \forall n \geq N$.

∎

Remarques :

i) Le résultat reste valable, si on suppose que $(b_n)_{n\geq o}$ est strictement positive seulement à partir du rang N.

ii) $S^* \in I_n(b_n) \Leftrightarrow |S_{n+1}-S^*| \leq b_n \, |\Delta S_n|$

2) Choix particulier de la suite $(b_n)_{n\geq o}$

Un choix particulier et immédiat de $(b_n)_n$ est la suite $\left(\left|\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}\right|\right)_n$.

Il nécessite bien sûr la connaissance du comportement de la suite $(\lambda_n)_n$.

Corollaire 3 :

On suppose que $(S_n)_{n\geq o}$ est strictement monotone telle que :

$\exists N$, $o < \lambda_{n+1} \leq \lambda_n < 1 \quad \forall n\geq N$. Alors :

$$S^* \in I_n\left(-\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}\right) \quad \forall n\geq N$$

Preuve : On a $\Delta S_n \neq o \quad \forall n\geq o$

soit $b>o$, on pose : $b_n = \begin{cases} -\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} & \text{si } \Delta^2 S_n \neq o \\ b & \text{sinon} \end{cases} \qquad n\geq o$

Pour $n\geq N$: $b_n = -\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}$ car $\Delta^2 S_n \neq o \quad \forall n\geq N$, cela vient du fait que $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \neq 1 \quad \forall n\geq N$.

Donc pour $n\geq N$: $b_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n - \Delta S_{n+1}} = \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}$

D'une part $b_n > o \quad \forall n\geq N$ puisque $o < \lambda_n < 1 \quad \forall n\geq N$

et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \, \Delta S_n = o$ car la suite $(b_n)_n$ est convergente.

En effet : $(\lambda_n)_{n\geq N}$ est décroissante et est minorée par hypothèse, donc elle converge et sa limite est telle que : $o \leq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n < 1$, par conséquent la suite $(b_n)_n$ est aussi convergente, $b_n = \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}$.

D'autre part $\lambda_n \leq \dfrac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n\geq N$. En effet :

$$b_n = \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \quad \forall n\geq N \iff \lambda_n = \frac{b_n}{1+b_n} \quad \forall n\geq N.$$

Donc il suffit de montrer que $\frac{b_n}{1+b_n} \leq \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n\geq N,$

c'est-à-dire $(b_n)_{n\geq N}$ est décroissante.

On a : $o< \lambda_{n+1} \leq \lambda_n \quad \forall n\geq N \Rightarrow \lambda_{n+1} - \lambda_n\lambda_{n+1} \leq \lambda_n - \lambda_n\lambda_{n+1} \quad \forall n\geq N$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{n+1}\,(1-\lambda_n) \leq \lambda_n\,(1-\lambda_{n+1}) \\ 1-\lambda_n > o \end{cases} \quad \forall n\geq N \Rightarrow \frac{\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} \leq \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \quad \forall n\geq N$$

$$\Rightarrow b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n\geq N.$$

Les hypothèses de la proposition 2 étant vérifiées, on a alors

$$S^* \in I_n \left(-\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n} \right) \quad \forall n \geq N.$$

■

On remarque, en passant, que le choix $b_n = -\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}$ donne pour $T_n(-b_n)=\varepsilon_2^{(n)}$, où $\varepsilon_2^{(\cdot)}$ est le procédé Δ^2 d'Aitken. Donc $(T_n(-b_n))_n$ converge plus vite que $(S_{n+1})_n$ (puisque $\lambda_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ admet une limite).

Par contre $(T_n(b_n))_n$ ne converge pas plus vite que $(S_{n+1})_n$.

3) <u>Application aux suites itératives.</u>

Parmi les suites convergentes, il existe la classe des suites $(x_n)_{n\geq o}$ engendrées par :

$x_{n+1} = F(x_n)$ $\forall n\geq o$ (*) dont le terme initial x_o et la fonction F remplissant des conditions qui permettent la convergence de ces suites.

L'objet du corollaire suivant n'est pas de redémonter le théorème du point fixe, mais de formuler les hypothèses du corollaire précédent sur la fonction qui engendre la suite en question.

Donc, soit la fonction $F : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$, D un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que F est deux fois dérivable sur D et qu'il existe un unique réel $x^* \in D$ qui vérifie $F(x^*) = x^*$ et $|F'(x^*)| <1$.

On sait alors qu'il existe un voisinage $V \subseteq D$ de x^* tel que $\forall x_o \in V$, la suite $(x_n)_{n\geq o}$ donnée par (*) converge vers x^*.

Pour une estimation de l'erreur, on a le résultat suivant :

corollaire 4 :

Soit $x_o \in V$. Si en plus, on suppose que :

i) F' est strictement positive sur D - $\{x^*\}$,

ii) F est concave (resp. F est convexe) sur D et $x_o < F(x_o)$

(resp. $x_o > F(x_o)$),

iii) $\exists N : F'(x_N) < 1$.

Alors : $x^* \in I_n\left(-\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta^2 x_n}\right)$ $\forall n \geq N$.

Preuve : Soit $x_o \in V$.

1er cas : F est concave et $x_o < F(x_o)$.

* $(x_n)_{n\geq o}$ est strictement croissante :

on a $\begin{cases} x_o < x_1 = F(x_o) \\ F'(x) > o \quad \forall x \in D - \{x^*\},\ D \supseteq V. \end{cases}$

=> $F(x_o) < F(x_1)$ (F est strictement croissante).

Soit $x_1 < x_2$. En appliquant F une seconde fois sur l'inégalité $x_1 < x_2$,

on obtient $x_2 < x_3$, ainsi de suite ...

On a $x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < x^*$. Donc $(x_n)_{n\geq o}$ est strictement croissante.

* $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est décroissante :

Soient x,y et $z \in D$: $x < y < z$. Alors on sait que :

$$\begin{cases} \exists \alpha \in]x,y[: F(y) - F(x) = F'(\alpha)(y-x) \\ \exists \beta \in]y,z[: F(z) - F(y) = F'(\beta)(z-y) \end{cases}$$

comme $\begin{cases} \alpha < \beta \\ F''(x) \leq o \quad \forall x \in D \end{cases}$ $\Rightarrow F'(\beta) \leq F'(\alpha)$

soit $$\frac{F(z) - F(y)}{z-y} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y-x}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $x,y,z \in D$: $x<y<z$. Donc en particulier pour $x=x_n$, $y=x_{n+1}$ et $z=x_{n+2}$ puisque on a bien $x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$.

Donc $$\frac{F(x_{n+2})-F(x_{n+1})}{x_{n+2}-x_{n+1}} \leq \frac{F(x_{n+1})-F(x_n)}{x_{n+1}-x_n}$$

Soit $\dfrac{\Delta x_{n+2}}{\Delta x_{n+1}} \leq \dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n}$, ceci étant vrai pour tout $x_n< x_{n+1}< x_{n+2}$.

donc : $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n \quad \forall n\geq o$.

* <u>$o<\lambda_n<1 \quad \forall n \geq N$.</u>

$(x_n)_{n\geq o}$ étant strictement croissante, on a alors $\lambda_n>o \quad \forall n\geq o$.

On a $x_N<x_{N+1}$, alors $\exists \gamma_N \in]x_N, x_{N+1}[$:

$$F(x_{N+1})-F(x_N) = F'(\gamma_N)(x_{N+1}-x_N).$$

Soit : $F'(\gamma_N) = \dfrac{F(x_{N+1})-F(x_N)}{x_{N+1}-x_N}$

Or $\begin{cases} \gamma_N > x_N \\ F'' \leq o \text{ sur } D \end{cases} \Rightarrow F'(\gamma_N) \leq F'(x_N) < 1.$

donc $F'(\gamma_N) = \dfrac{F(x_{N+1}) - (x_N)}{x_{N+1}-x_N} < 1$

C'est-à-dire $\lambda_N<1$ et comme $(\lambda_n)_n$ est décroissante on a alors :

$$o<\lambda_n<1 \quad \forall n\geq N.$$

<u>2ème cas</u> : F est convexe et $x_o > F(x_o)$:

* <u>$(x_n)_{n\geq o}$ est strictement décroissante :</u>

Comme $\begin{cases} x_o > x_1 \\ F'(x)>o \text{ sur } D-\{x^*\} \end{cases} \Rightarrow F(x_o) > F(x_1)$

Soit $x_1 > x_2$, ainsi de suite, on obtient $x_n>x_{n+1} \quad \forall n$.

* $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est décroissante :

Pour $x,y,z \in D$: $x<y<z$,

$$\begin{cases} \exists\alpha \in]x,y[\ : & F(y) - F(x) = F'(\alpha)\,(y-x) \\ \exists\beta \in]y,z[\ : & F(z) - F(y) = F'(\beta)\,(z-y) \end{cases}$$

comme $\begin{cases} \alpha < \beta \\ F'' \geq o \text{ sur } D \end{cases}$, alors $F'(\alpha) \leq F'(\beta)$

soit : $\dfrac{F(y) - F(x)}{y - x} \leq \dfrac{F(z) - F(y)}{z - y}$, ceci est vrai $\forall x,y,z \in D$:

$x<y<z$, en particulier pour $x=x_{n+2}$, $y=x_{n+1}$ et $z=x_n$ $\forall n$. La suite $(x_n)_{n\geq o}$ étant décroissante. Par conséquent :

$$\frac{F(x_{n+1}) - F(x_{n+2})}{x_{n+1} - x_{n+2}} \leq \frac{F(x_n) - F(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} \quad \forall n$$

soit :

$$\frac{\Delta x_{n+2}}{\Delta x_{n+1}} \leq \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} \quad \forall n$$

Donc $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est décroissante.

* $o < \lambda_n < 1 \quad \forall n \geq N$.

$\lambda_n > o$ $\forall n$ car $(x_n)_{n\geq o}$ est strictement décroissante. On a $x_{N+1} < x_N$, donc il existe un réel $\bar{\gamma}_N$:

$\bar{\gamma}_N \in]\, x_{N+1}, x_N [$ et $F(x_N) - F(x_{N+1}) = F'(\bar{\gamma}_N)\,(x_N - x_{N+1})$

or $\begin{cases} \bar{\gamma}_N < x_N \\ F'' \geq o \text{ sur } D \end{cases}$, alors $F'(\bar{\gamma}_N) \leq F'(x_N) < 1$.

Donc $F'(\bar{\gamma}_N) = \dfrac{F(x_{N+1}) - F(x_N)}{x_{N+1} - x_N} < 1$

Soit $\lambda_N<1$ et comme $(\lambda_n)_n$ est décroissante, on a alors $o<\lambda_n<1 \quad \forall n\geq N$.

En définitive, dans les deux cas, les hypothèses du corollaire 3 sont toutes vérifiées, ce qui entraîne que $x^* \in I_n \left(- \dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta^2 x_n}\right) \quad \forall n\geq N$. ∎

Remarquons que le fait que $x^* \in I_n\ (b_n)\ \forall n\geq N$, n'empêche pas que la limite puisse être dans $I_n\ (b_n)$ pour $n< N$.

Pour illustrer ce dernier résultat, on propose deux exemples :

i) Reprenons l'exemple du paragraphe précédent :

Soit $(x_n)_{n\geq o}$ $\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{avec } F(x) = x^2 \text{ et } x^* = o \\ x_o = 0.9 \end{cases}$

on prendra pour D l'intervalle $[0,1[$.

on a : $F'(x) = 2x$ et $F''(x) = 2$.

donc $F'(x) > o \quad \forall x\in D-\{0\}$, F convexe sur D et $x_1 = F(x_o) < x_o$.

Il reste à voir à partir de quel rang N, on a $F'(x_N)<1$. Or $F'(x)<1$ $\forall x < \dfrac{1}{2}$, donc pour $x_o = 0.9$, $x_1 = 0.81$, $x_2 = 0.6561$, $x_3 = 0.4304672$.

Par suite $F'(x_3)< 1$ et $N = 3$.

Les hypothèses du corollaire 4 étant satisfaites, on en déduit d'avance que $0\in I_n \left(- \dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta^2 x_n}\right) \quad \forall n\geq 3$.

n	$b_n = -\Delta x_{n+1} / \Delta^2 x_n$	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
0	−2.4084507	1.0267606	0.5932394
1	−3.1454619	1.1401866	0.1720134
2	−12.551719	3.2625467	−2.4016123
3	1.6026031	−0.2076005	0.5782045
4	0.2814577	−0.0081535	0.0768271
5	0.0368228	−0.000042	0.0024
6	1.1902721 E−3	−1.6644249 E−9	1.8016644 E−6
7	1.3802431 E−6	−2.7175 E−18	3.8646727 E−12
8	1.932335 E−12	−5.22 E−32	7.4678371 E−24

On remarque que $o \in I_n(b_n)$ $\forall n \geq 2$.

ii) Soit $(x_n)_{n \geq o}$: $\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n) \\ x_o = 0.26 \end{cases}$ avec $\begin{cases} F(x) = \sqrt{x} \\ \text{et} \\ D =]0,\infty[\end{cases}$,

On a $x^* = 1$.

Alors $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $F''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$

C'est évident de voir que $F' > o$ sur D, $F'' < o$ sur D.

On a $x_1 = 0.509902 > x_o$, donc $F(x_o) > x_o$.

D'autre part $F'(x) < 1$ si $x > 1/4$ **et** par suite $F'(x_o) < 1$ car $x_o > 1/4$.
Ceci nous permettra de prévoir, en vertu du corollaire 4, l'appartenance de

$x^* = 1$ à $I_n\left(-\dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta^2 x_n}\right)$ $\underline{\forall n \geq o.}$

n	$b_n = -\Delta x_{n+1}/\Delta^2 x_n$	$T_n(b_n)$	$T_n(-b_n)$
0	4.4647516	−0.6058484	1.6256524
1	1.7885787	0.3488962	1.0792522
2	1.3084133	0.673686	1.0163722
3	1.1389155	0.834718	1.0037912
4	1.066146	0.9166403	1.0009151
5	1.0323272	0.9581184	1.0002254
6	1.0159379	0.9790068	1.0000556
7	1.0080003	0.9894894	1.0000142
8	1.0038997	0.9947416	1.0000034
9	1.0018298	0.9973701	1.0000007
10	1.0009135	0.9986848	1.0000002
11	1.0006086	0.9993423	1.0000001

Donc comme il a été prévu, on a : $1 \in I_n(b_n)$ $\forall n \geq 0$.

4) <u>Estimation de l'erreur dans la méthode de Newton :</u>

Plusieurs méthodes qui ont été proposées pour la recherche d'une racine d'une équation $f(x) = 0$ (E) utilisent des procédés itératifs qui donnent une suite d'approximants de la racine de (E). Le problème qui s'ajoute à celui de la convergence de ces méthodes est l'estimation de l'erreur dont le critère d'arrêt des itérations, sur le plan numérique, en dépend.

Ces dernières années et en ce qui concerne la méthode de Newton qui est parmi les méthodes les plus performantes, certains mathématiciens ont contribué à l'amélioration de l'estimation de l'erreur, soit en construisant une nouvelle théorie, soit en appliquant des résultats d'autres théories tout à fait indépendantes. On peut citer l'exemple de Pták V. α Potra F.A. [Méthode d'induction mathématique non discrète], Miel G. [Suites majorantes] et d'autres comme Gragg W.B. et Tapia R.A... Parmi leurs articles, on s'est intéressé à celui de Pták V.α Potra F.A. [14, 1980] et à celui de Miel G. [12, 1980]. Leurs théorèmes démontrent la convergence et donnent des estimations de l'erreur. Par exemple, la méthode de l'induction mathématique non discrète appliquée à la méthode de Newton fournit une démonstration simple de la convergence et donne deux estimations de l'erreur que les auteurs de [14] appellent : l'estimation à priori et l'estimation à postériori.

Avant de rappeler leurs estimations données dans un espace de Banach, il faut signaler que les théorèmes cités dans [12] et [14]ont les mêmes hypothèses.

Dans le cas de $\mathbb{R}$, on a :

Soit $(x_n)_{n\geq o}$ la suite engendrée par la méthode de Newton : $x_{n+1} = F(x_n)$, $n\geq o$, où $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. La fonction f est telle que :

* $f : U = [x_o - m, x_o + m] \longrightarrow \mathbb{R}$, $m>o$, $\exists x^* \in U$ tel que :

$$f(x^*) = o$$

* f est dérivable et f' vérifie :

$$|f'(x) - f'(y)| \leq K \; |x-y| \quad \forall x, y \in U$$

* $f'(x_o) \neq o$: $|f'(x_o)| \geq d_o$ et $\left|\dfrac{f(x_o)}{f'(x_o)}\right| \leq r_o$.

Les constantes K, r_o et d_o vérifient : $2Kr_o \leq d_o$.

Alors, l'estimation à priori qui est donnée dans [12] et [14] est :

$$(1) \quad \boxed{|x_n - x^*| \leq \frac{2a\;\theta^{2^n}}{1-\theta^{2^n}}} \; ,$$

et les deux estimations à postériori sont :

$$(2) \quad \boxed{|x_n - x^*| \leq \sqrt{a^2 + |\Delta x_{n-1}|^2} - a}$$

Pták et Potra [14]

$$(3) \quad \boxed{|x_n - x^*| \leq A_n \; |\Delta x_{n-1}|^2}$$

Miel [12]

où
$$A_n = \begin{cases} \dfrac{1-\theta^{2^n}}{2a} & \text{si } 2Kr_o < d_o \\[2ex] \dfrac{2^{n-1}}{r_o} & \text{si } 2Kr_o = d_o \end{cases}$$

avec $a = \dfrac{1}{K}\sqrt{d_o^2 - 2Kr_o d_o}$, $\theta = \dfrac{d_o - K(a+r_o)}{Kr_o}$

et $m \geq \dfrac{d_o}{K} - a$.

Pour plus de détails, on peut consulter [12] et [14].

La fonction d'itération de la méthode de Newton :

$F(x) = x- \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $(f'(x) \neq o)$ rentre dans le cadre du corollaire 4 pourvu que les hypothèses soient vérifiées par F. Donc, dans ce cas et en tenant compte de la seconde remarque (p.19), on peut donner une estimation de l'erreur, soit :

$$(4) \qquad \boxed{|x_n - x^* | \leq b_{n-1} | \Delta x_{n-1} |} \quad \text{où } b_{n-1} = - \frac{\Delta x_n}{\Delta^2 x_{n-1}} .$$

On va regarder comment se traduisent les conditions du corollaire 4 sur la fonction f.

On pose $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ $\forall x$: $f'(x) \neq o$, on a alors $F(x) = x- \phi(x)$.

Donc $F' = 1- \phi'$ et $F'' = - \phi''$ avec : $\phi' = 1 - \dfrac{ff''}{f'^2}$ et $\phi'' = F'[\dfrac{f'}{f} + \dfrac{f'''}{f''} - 2\dfrac{f''}{f'}]$.

On a alors :

i) $F'>o$ sur $D-\{x^*\} \Leftrightarrow ff'' > o$ sur $D - \{x^*\}$

ii) Si $F' > o$, on a :

$$F'' \geq o \text{ (resp } F'' \leq o) \Leftrightarrow \frac{f'}{f} + \frac{f'''}{f''} \geq 2\frac{f''}{f'} \left(\text{resp.} \frac{f'}{f} + \frac{f'''}{f''} \leq 2\frac{f''}{f'} \right)$$

iii) Et enfin :

$$x_o < F(x_o) \text{ (resp. } x_o > F(x_o)) \Leftrightarrow f(x_o)\, f'(x_o) < o \left(\text{resp. } f(x_o)\, f'(x_o) > o \right)$$

Après cette remarque, on va procéder à la comparaison numérique des estimations (1), (2), (3) et (4).

i) On commence par un exemple se trouvant dans [14].
Soit f une fonction polynomiale réelle :

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3-1), \quad x^* = 1.$$

On prendra D= [1, 0[.

On a $f'(x) = x^2$, donc $F(x) = x- \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3x^2}$.

Alors la suite $(x_n)_{n\geq o}$ définie par $\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n), \ n\geq o \\ x_o = 1.3 \end{cases}$ converge vers

$x^* = 1$.

F vérifie les conditions du corollaire 4. En effet :

* $\quad F'(x) = \dfrac{2(x^3-1)}{3\,x^3} > o \quad \forall x\in D - \{1\}$,

* On a $x_1 < x_o$ car $x_1 = F\,(1.3) = 1.0639053$ et $F'\,(x_o) < 1$

  car $F'(x) < 1 \quad \forall x > o$,

* $F''(x) = \dfrac{2}{x^4} > o \quad \forall x\in D$.

Par conséquent et en vertu du corollaire 4, on a $\forall n\geq o$, $1\in I_n\,(b_n)$,

$b_n = -\dfrac{\Delta x_{n+1}}{\Delta^2 x_n}$ C'est-à-dire :

$$|\, x_{n+1} - x^* \,| \leq b_n \,|\, \Delta x_n \,| \quad \forall n\geq o.$$

Tandis que pour les autres estimations :

Pour $x_o = 1.3$, on obtient $d_o = 1.69$ et $r_o = 0.2360947$.

Et pour $m = 2r_o$, on a $K = 3.5443788$, $a = 0.0469446$ et $\Theta = 0.8207386$.

On a donc :

n	(1)	(2)	(3)	(4)
1	.193771945991360D+00	.193771945991360D+00	.193771945991360D+00 $\|x_1 - x^*\| =$	.807018828562555D-01 .639053254437667D-01
2	.779912171952134D-01	.293511567015119D-01	.210451463525476D-01 $\|x_2 - x^*\| =$	.399608784381832D-02 .376172753147119D-02
3	.243430013121317D-01	.149351886893495D-03	.118790317511417D-03 $\|x_3 - x^*\| =$	.141328502951308D-04 .140799520143009D-04
4	.415626942570332D-02	.211141512433077D-08	.202190982450958D-08 $\|x_4 - x^*\| =$	.198243992483492D-09 .198241201237463D-09
5	.169023980744113D-03	-.260208521396521D-17	.417820963100119D-18 $\|x_5 - x^*\| =$	.000000000000000D+00 .000000000000000D+00

Sous forme d'intervalles, on obtient :

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.983203442587531D+00	.114460720830004D+01
2	.999765039687653D+00	.100775841537529D+01
3	.999999947101719D+00	.100002821280231D+01
4	.999999999999997D+00	.100000000039649D+01

ii) Soit la fonction f : $f(x) = e^{-x} - x$, on a :

$f(x^*) = o$ pour $x^* = 0.567143290409...$, $f'(x) = -(1 + e^{-x})$,

$f''(x) = e^{-x}$ et $f'''(x) = -e^{-x}$.

On prend $D=[o,x^*] \subseteq [0,1]$ et $x_o = 0.1$

La fonction F est telle que : $F(x) = \dfrac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x} + 1}$.

* Sur $[o,x^*[$: $e^{-x} > x \Rightarrow f(x) > o$ sur $[o,x^*[$

Donc $ff'' > o$ sur $[o,x^*[$ et par suite $F' > o$ sur $[o,x^*[$ (rqi) p. 28)

* $x_o = 0.1$, on a alors $x_1 = 0.5225229$. Donc $x_o < F(x_o)$

* $F'' \leq o$ sur D $\Leftrightarrow \dfrac{f'}{f} + \dfrac{f'''}{f''} \leq 2 \dfrac{f''}{f'}$ (Rq-ii) p.28)

En effet :

$$- \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-x} - \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \leq -2 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 + 2e^{-x}-x}{e^{-x}-x} \geq \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \qquad (e^{-x}-x > o \text{ sur } D).$$

$\Leftrightarrow$ $3e^{-x} + (1-x) + xe^{-x} \geq o$. Ceci est vrai car $x \in D \subseteq [0,1]$. Donc $F'' \leq o$ sur D.

* $F' = \dfrac{ff''}{f'^2} < 1$ sur D, en effet :

$$\frac{ff''}{f'^2} = \frac{(e^{-x}-x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} < 1 \iff xe^{-x} + 2e^{-x} + 1 > o.$$

Donc, en vertu du corollaire 4, on a $x^* \in I_n(b_n)$ $\forall n \geq o$

ie : $|x_{n+1}-x^*| \leq b_n \; |\Delta x_n| \quad \forall n \geq o.$

Pour pouvoir comparer notre estimation avec les estimations (1), (2) et (3), on doit d'abord vérifier leurs hypothèses et ensuite on donne les coefficients qui permettent le calcul de ces estimations.

Pour $x_o = 0.1$, on obtient :

$d_o = 1.9048374$, $r_o = 0.4225229$ et pour $m = 2r_o$, $K = 2.1065379$.

On a bien $2kr_o \leq d_o$.

Donc $a = 0.2313777$ et $\Theta = 0.5925115$ et on a :

$m \geq \frac{d_o}{K} - a$ $\quad \left\{ D \subseteq U \quad \text{car } U = [-0.75,\ 0.95] \right\}$

On a alors :

n	(1)	(2)	(3)	(4)
1	.250349637195797D+00	.250349637195797D+00	.250349637195797D+00 $\|x_1-x^*\|=$	.494328402193853D-01 .440703960366180D-01
2	.650522959954159D-01	.419430236805907D-02	.371068531768493D-02 $\|x_2-x^*\|=$	.368145720126790D-03 .365132623590156D-03
3	.713794324365182D-02	.286066053025227D-06	.283690345149370D-06 $\|x_3-x^*\|=$	.241266149406138D-07 .241270206452482D-07

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.571955783992551D+00	.473090003553781D+00
2	.567146303506321D+00	.566410012066067D+00
3	.567143290411378D+00	.567143242154148D+00
4	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00

iii) $f(x) = \sqrt{x} -1$, $f(x^*)=o$ pour $x^*=1$, $f'(x)= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$.

On prend $D =]0,1]$. On a : $F(x) = 2\sqrt{x}-x$.

* $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1$, $F'(x) > o \quad \forall x \in]0,1[$.

* $x_o = 0.8$, on a $x_1= 0.9888544$, donc $x_o < F(x_o)$.

* $F''(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}} < o$ sur D.

* $F'(x_o) < 1$ car $F'(x) < 1 \quad \forall x > 1/4$ et $x_o=0.8$.

Donc le corollaire 4 est appliquable et par suite :

$$\forall n \geq o \qquad x^* \in I_n(b_n).$$

D'autre part pour $x_o = 0.8$, on a $d_o = 0.559017, r_o = 0.1888544$.

Pour $m=2r_o$, $k = 0.9110075$ et on a bien $2kr_o \leq d_o$. Donc $a=0.3804788$ et $\Theta=0.234529$, et on a aussi $m \geq \dfrac{do}{K} - a$. U= [0.42, 1.18].

On obtient :

n	(1)	(2)	(3)	(4)
1	.442918380571036D-01	.442918380571036D-01	.442918380571036D-01 $\lvert x_1 - x^*\rvert =$	.116093692743547D-01 .111456180001681D-01
2	.230920730865272D-02	.162290803544902D-03	.161843288648574D-03 $\lvert x_2 - x^*\rvert =$	.315162425947830D-04 .312304455161189D-04
3	.696526316136768D-05	.126171133428689D-08	.128109962554332D-08 $\lvert x_3 - x^*\rvert$	.243841290696484D-09 .243839015106053D-09

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.1000663771279190D+01	.9770449927204770D+00
2	.1000000087757080D+01	.9999374512718870D+00
3	.1000000000000000D+01	.9999999995123190D+00
4	.1000000000000000D+01	.1000000000000000D+01

iv) Enfin, soit $f(x)=x^2-4$, $x^*=2$ et $D=[2, +\infty[$.

On a $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. Donc:

$$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} .$$

* $F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} > o$ sur D,

* Pour $x_o = 6$, on a $x_1 = 3.3\ldots$ Donc $x_o > F(x_o)$,

* $F''(x) = \frac{4}{x^3} > o$ sur D, et

* $F'(x) < 1 \quad \forall x \in D$.

Donc $2 \in I_n(b_n) \quad \forall n \geq o$.

D'autre part, toujours pour $x_o=6$, on a $d_o=12$ et $r_o=2.6666667$ et pour $m=2r_o$, $K=2$. On a : $2Kr_o \leq d_o$, donc $a=1.9999999$ et $\Theta=0.5$. L'inégalité $m \geq \frac{do}{K} - a$ est aussi vérifiée. On a $U=[0.67, 11.333]$.

Les essais numériques donnent :

n	(1)	(2)	(3)	(4)
1	.1333333333333333D+01	.1333333333333333D+01	.1333333333333333D+01 $\lvert x_1-x^*\rvert$ =	.1777777777777778D+01 .1333333333333333D+01
2	.2666666666666667D+00	.2666666666666667D+00	.2666666666666667D+00 $\lvert x_2-x^*\rvert$ =	.328205128205126D+00 .2666666666666660D+00
3	.156862745098039D-01	.156862745098036D-01	.156862745098039D-01 $\lvert x_3-x^*\rvert$ =	.166625986494182D-01 .156862745098030D-01
4	.610360875867057D-04	.610360875865634D-04	.610360875867653D-04 $\lvert x_4-x^*\rvert$ =	.612745061516704D-04 .610360875865634D-04
5	.931322574832320D-09	.931322352570874D-09	.931322574832319D-09 $\lvert x_5-x^*\rvert$ =	.931336785667034D-09 .931322352570074D-09

Comme on peut le constater, notre estimation d'erreur est meilleure que celles des autres sur les 3 premiers exemples, par contre elle est moins bonne sur le dernier exemple, alors que les 3 autres estimations sont bonnes et surtout l'estimation à postériori (2) de Pták et Potra [14]. Cela s'explique simplement par le fait que leurs estimations tiennent compte des fonctions majorantes qui dépendent d'une fonction du second degré. En effet : dans [14] , l'estimation à postériori est donnée par : $|x_{n+1}-x^*| \leq \sigma(|\Delta x_n|)$, $n\geq o$, où $\sigma(r)= r-a+\sqrt{r^2+a^2}= \sum_{n\geq 1}\omega^{(n)}(r)$, avec :

$$\omega(r) = \frac{r^2}{2(r^2+a^2)^{1/2}} \text{ et } \omega^{(k+1)}(r) = \omega^{(k)}(\omega(r)) \quad k\geq o,\ r\in\mathbb{R}^+.$$

ω est appelée par les auteurs de [14]: "Vitesse de convergence".

Si on considère la suite $(x_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} x_o>a \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$,

avec $f(x) = x^2-a^2$, la fonction ω vérifie : $\omega(-\Delta x_n)= - \Delta x_{n+1}$ $\forall n\geq o$. Par suite :

$$\sigma(|\Delta x_n|) = \sum_{k\geq 1}\omega^{(k)}(|\Delta x_n|) = \lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p}\omega^{(k)}(-\Delta x_n)$$

$= \lim_{p\to\infty}(x_{n+1} - x_{n+p})$. Soit : $\sigma(|\Delta x_n|) = |x_{n+1} - x^*|$, $\forall n\geq o$.

Ceci nous entraîne à chercher à améliorer notre estimation en faisant un autre choix de (b_n).

V - Autre choix de $(b_n)_{n\geq o}$:

Revenons au cas général.

Le choix précédent de $(b_n)_{n\geq o}$ qui est $b_n=\dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}$ $(\lambda_n\neq 1)$ était basé sur l'hypothèse (H') : $\lambda_n \leq \dfrac{b_n}{1+b_{n+1}}$, afin d'avoir des intervalles emboîtés. Donc, on obtient une estimation de l'erreur en utilisant des informations sur $(\lambda_n)_{n\geq o}$. En conséquence, il est tout à fait logique, si on dispose de plus d'informations, d'avoir une estimation de l'erreur meilleure.

Pour cela, soit l'intervalle $I =]0,\frac{\sqrt{3}}{4}]$ et soit la fonction Φ :

$$\Phi: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \longrightarrow \Phi(\lambda) = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda}$$

Φ est bien définie sur $I\subset]0,1/2[$. Elle possède des propriétés qu'on va proposer sous forme de lemmes :

Lemme 1 :

$\forall\lambda\in I$: $\Phi(\lambda) >o$, $\Phi(\lambda)\underset{\lambda\to o}{\sim}\lambda$ et $\lambda < \Phi(\lambda)<1$.

Preuve :

* $\Phi(\lambda)>o \iff \dfrac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda} > 0$. Or $\lambda>o$ et $1>\sqrt{1-4\lambda^2}$.

* On sait que : $\sqrt{1-\varepsilon} \sim 1-\dfrac{\varepsilon}{2}$ quand $\varepsilon \to 0$.

  donc $\sqrt{1-4\lambda^2} \sim 1-2\lambda^2$ quand $\lambda \to 0$ et par suite $\Phi(\lambda) \underset{\lambda\to o}{\sim} \dfrac{1-1+2\lambda^2}{2\lambda} = \lambda$.

* $\lambda< \Phi(\lambda)< 1$ vient du fait que $0<\lambda < \dfrac{1}{2}$.

  En effet : $\left\{\begin{array}{l} .\ \Phi(\lambda)< 1 \overset{\lambda>o}{\iff} 1-2\lambda < \sqrt{1-4\lambda^2} \\ .\ \lambda < \Phi(\lambda) \overset{\lambda>o}{\iff} \sqrt{1-4\lambda^2} <1-2\lambda^2 \end{array}\right.$

Or : $o< \lambda < 1/2 \Rightarrow 1-2\lambda < \sqrt{1-4\lambda^2} <1-2\lambda^2$ ∎

Lemme 2 :

$$\boxed{\forall\lambda\in I : \ \Phi(\lambda)< \frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

Preuve :

$\Phi(\lambda) < \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \iff \dfrac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda} < \dfrac{\lambda}{1-\lambda} \overset{\lambda>o}{\iff} 1-\dfrac{2\lambda^2}{1-\lambda} < \sqrt{1-4\lambda^2}$

or $\quad o< \lambda < 1/2 \Rightarrow \dfrac{1-\lambda-2\lambda^2}{1-\lambda}< \sqrt{1-4\lambda^2}$ ∎

Lemme 3 :

Φ est convexe sur I et $\forall x,y \in I : x\leq y$, on a :

$$\Phi(x) \leq \frac{x}{y}\Phi(y).$$

Preuve :

* $\Phi'(\lambda) = \dfrac{\phi(\lambda)}{\lambda\sqrt{1-4\lambda^2}}$ et $\Phi''(\lambda) = \Phi(\lambda)\dfrac{\sqrt{1-4\lambda^2}-1+8\lambda^2}{\lambda^2(1-4\lambda^2)^{3/2}}$

  Φ étant $> o$, on a donc :

  $\Phi''\geq o \iff \sqrt{1-4\lambda^2} \geq 1-8\lambda^2 \iff 12\lambda^2\geq 64\lambda^4 \iff |\lambda| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Or, on a pris la précaution de prendre $I =]o, \frac{\sqrt{3}}{4}]$,
donc $\Phi''(x) \geq o \quad \forall x \in I$. Par suite Φ est convexe sur I.

* La seconde propriété est une conséquence immédiate de la convexité de Φ .

Soient $x,y,z \in I$: $o<x<y \leq z$, on peut écrire :

$$y = \frac{z - y}{z - x} x + \frac{y - x}{z - x} z.$$

C'est évident de voir que $o \leq \frac{z - y}{z - x} < 1$ et $\frac{y - x}{z - x} = 1 - \frac{z - y}{z - x}$.

Φ étant convexe, alors :

$\Phi(y) \leq \frac{z-y}{z-x} \Phi(x) + \frac{y-x}{z-x} \Phi(z)$. Ceci est vrai $\forall x,y$ et z : $o<x<y \leq z$. En particulier pour x tendant vers o.

Or d'après le lemme 1 : $\lim\limits_{x \to o} \Phi(x) = o$, par suite :

$\Phi(y) \leq \frac{y}{z} \Phi(z) \quad \forall y,z \in I : y \leq z$. ∎

Donc, grâce au choix de la suite $(b_n)_n$ telle que :

$b_n = \Phi(\lambda_n) \ \forall n$ et aux lemmes précédents, on va pouvoir proposer un résultat qui donne une estimation de l'erreur meilleure que la précédente au moins sur une classe de suites incluse dans celle définie à partir du corollaire 3.

On a le résultat suivant :

Corollaire 5 :

Soit $(S_n)_n$ une suite strictement monotone de limite S^*.

On suppose qu'il existe N :

i) $o < \lambda_n \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \forall n \geq N$

ii) $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^2 \quad \forall n \geq N$.

Alors $S^* \in I_n(b_n) \quad \forall n \geq N$ où $b_n = \Phi(\lambda_n)$ avec $\Phi(\lambda) = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda}$ définie sur I.

En outre, on a :

$$(5)\quad |S_{n+1} - S^*| \le b_n\, |\Delta S_n| < \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}|\Delta S_n| \qquad \forall n \ge N .$$

Preuve :

* $(S_n)_n$ est strictement monotone.

* $b_n = \Phi(\lambda_n) > o$ $\forall n \ge N$, car $\lambda_n \in I$ $\forall n \ge N$ (lemme 1)

* Comme $\lambda_n \le \frac{\sqrt{3}}{4} < 1$ $\forall n \ge N$, alors $\lambda_{n+1} \le \lambda_n^2 < \lambda_n$ $\forall n \ge N$.

Donc $(\lambda_n)_{n \ge N}$ est strictement décroissante. En plus elle est minorée par 0, donc elle est convergente.

Φ étant continue sur I, alors $(b_n)_n$ est convergente et on a $\lim_{n\to\infty} b_n \Delta S_n = o$.

* Il suffit de prouver que $\lambda_n \le \frac{b_n}{1+b_{n+1}}$ $\forall n \ge N$ afin d'appliquer la proposition 2.

$b_n = \Phi(\lambda_n) = \frac{1-\sqrt{1-4\lambda_n^2}}{2\lambda_n}$, c'est-à-dire $2\lambda_n b_n = 1-\sqrt{1-4\lambda_n^2}$.

Soit $(1-2\lambda_n b_n)^2 = 1-4\lambda_n^2$, donc $4\lambda_n^2 b_n^2 - 4\lambda_n b_n = -4\lambda_n^2$ ce qui donne :

$$\lambda_n = \frac{b_n}{1+b_n^2} \quad \forall n \ge N$$

D'après le lemme 3 : $\forall x, y \in I$: $x \le y$, on a $\Phi(x) \le \frac{x}{y}\Phi(y)$.

Or par hypothèse : $0 < \lambda_{n+1} \le \lambda_n^2 < \lambda_n \le \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\forall n \ge N$, donc

$$\Phi(\lambda_{n+1}) \le \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\Phi(\lambda_n) \quad \forall n \ge N.$$

Comme $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \le \lambda_n$ $\forall n \ge N$ et $\lambda_n < \Phi(\lambda_n)$ $\forall n \ge N$ (lemme 1),

alors $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < \Phi(\lambda_n)$ $\forall n \ge N$ et par suite :

$$o < \Phi(\lambda_{n+1}) < [\Phi(\lambda_n)]^2 \quad \forall n \ge N.$$

Soit : $b_{n+1} < b_n^2$ $\forall n \ge N$, ce qui entraîne :

$$\frac{b_n}{1+b_n^2} < \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n \ge N. \text{ Or } \lambda_n = \frac{b_n}{1+b_n^2} \quad \forall n \ge N, \text{ donc } \lambda_n < \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n \ge N.$$

Par conséquent, en vertu de la proposition 2,

$$S^* \in I_n(b_n) \quad \forall n \geq N.$$

En même temps, on a : $| S_{n+1} - S^* | \leq b_n | \Delta S_n | \quad \forall n \geq N.$

Or d'après le lemme 2, $b_n = \Phi(\lambda_n) < \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n} \; \forall n \geq N$,

donc $\quad | S_{n+1} - S^* | \leq b_n | \Delta S_n | < \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n} | \Delta S_n | \quad \forall n \geq N.$

∎

Remarquons que le choix précédent de la suite $(b_n)_n$ était $\dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}$ et donc, dans ces conditions, le nouveau choix de $(b_n)_n$: $b_n = \Phi(\lambda_n)$ donne une meilleure estimation.

Malheureusement, on ne peut pas vérifier l'hypothèse $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^2$ théoriquement. Cette hypothèse, en effet, nous sert à prouver que $b_{n+1} < b_n^2$. Or il s'avère numériquement sur des exemples, qu'elle n'est pas vérifiée, cependant on a $b_{n+1} < b_n^2$ et on obtient donc une estimation avec $b_n = \Phi(\lambda_n)$. Donc, il peut y avoir une autre démonstration pour $b_{n+1} < b_n^2$ sans passer par $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^2$.

Pour illustrer tout ceci, on va reprendre les exemples précédents :

$(S_n)_{n \geq o}$ étant engendrée par la méthode de Newton. Il faut noter que le dernier exemple ne vérifie pas $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n^2$, tandis que les autres le vérifient (constatation numérique).

Commençons par le dernier exemple :

1) $f(x) = x^2 - 4$, $x^* = 2$. On obtient :

n	(2)	(3)	(4)	(5)
1	.13333333333333330+01	.13333333333333330+01	.17777777777777780D+01 $\lvert x_1 - x^* \rvert =$	.13333333333333330+01 .13333333333333330D+01
2	.26666666666666670+00	.26666666666666670+00	.32820512820512810+00 $\lvert x_2 - x^* \rvert =$	.26666666666666670+00 .26666666666666660+00
3	.15686274509803600-01	.15686274509803900-01	.16662598649418200-01 $\lvert x_3 - x^* \rvert =$	.15686274509803900-01 .15686274509803600-01
4	.61036087586563400-04	.61036087586785300-04	.61274506151676400-04 $\lvert x_4 - x^* \rvert =$	.61036087586785500-04 .61036087586563400-04
5	.93132235257087400-09	.93132257483231900-09	.93133678568703400-09	.93132257504915900-09 .93132235257087400-09

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.200000000000000D+01	.466666666666667D+01
2	.200000000000000D+01	.253333333333333D+01
3	.200000000000000D+01	.203137254901961D+01
4	.200000000000000D+01	.200012207217517D+01
5	.200000000000000D+01	.200000000186264D+01

Comme on peut le constater sur cet exemple, la transformation $((T_n(-b_n))_{n\geq o}$ est exacte. On a $T_n(-b_n)=2 \ \forall n\geq o$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^3-1)$, $x^*=1$. On a :

n	(4)	(5)
1	.807018828562555D-01 $\lvert x_1 - x^* \rvert =$	.646539102154201D-01 .639053254437867D-01
2	.399668784381832D-02 $\lvert x_2 - x^* \rvert =$	.376231283865665D-02 .376172753147119D-02
3	.141328502951308D-04 $\lvert x_3 - x^* \rvert =$	.140799525106672D-04 .140799520143009D-04
4	.198243992483492D-09 $\lvert x_4 - x^* \rvert =$	.198241242652408D-09 .198241201232463D-09

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.999251415228367D+00	.112855923565921D+01
2	.999999414692813D+00	.100752404037013D+01
3	.999999999999504D+00	.100002815990452D+01
4	.100000000000000D+01	.100000000039648D+01

3) $f(x) = e^{-x} - x$:

n	(4)	(5)
1	.494328902193853D-01 $\lvert x_1 - x^* \rvert =$	.447517230846505D-01 .446203960306180D-01
2	.368145720126790D-03 $\lvert x_2 - x^* \rvert =$	.365133350499407D-03 .365132623590156D-03
3	.241286149406138D-07 $\lvert x_3 - x^* \rvert =$	.241270209443327D-07 .241270206452482D-07

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.567274617462816D+00	.477771170083516D+00
2	.567143291136694D+00	.566413024435694D+00
3	.567143290409784D+00	.567143242155742D+00
4	.567143290409784D+00	.567143290409784D+00

4) $f(x) = \sqrt{x} - 1$

n	(4)	(5)
1	.118093892793547D-01 $\lvert x_1 - x^* \rvert =$	.111531513368320D-01 .111456180001681D-01
2	.313182425947838D-04 $\lvert x_2 - x^* \rvert =$	.312304882607451D-04 .312304855181189D-04
3	.243841296984840D-09 $\lvert x_3 - x^* \rvert =$	.243839770149942D-09 .243839615166053D-09
4	.222044807123088D-15 $\lvert x_4 - x^* \rvert$	.222044592572498D-15 .222044604925031D-15

n	$T_n(-b_n)$	$T_n(b_n)$
1	.100000753333666D+01	.977701230663000D+00
2	.100000000000274D+01	.999937539026221D+00
3	.100000000000000D+01	.999999999512321D+00
4	.100000000000000D+01	.100000000000000D+01

En conclusion, ces tests numériques confirment ainsi la nette amélioration de l'estimation de l'erreur, qui reste meilleure que celles proposées dans [12]et [14]. Le nouveau choix de $(b_n)_n=(\Phi(\lambda_n))_n$ donne une suite $(T_n(b_n))_n$ exacte pour l'exemple : $f(x)=x^2-4$. Ce phénomène est observé aussi sur d'autres exemples de type : $f(x)=ax^2+bx + c$. Malheureusement, il n'a pas été possible de prouver théoriquement cette comparaison.
Néanmoins, on voit les possibilités d'estimer l'erreur d'une suite convergente, que fournit cette méthode simple, basée sur des intervalles emboîtés. Notons que son application ne se limite pas uniquement à la classe des suites générées par la méthode de Newton. Elle peut s'appliquer aussi à d'autres suites, qu'elles soient engendrées par une fonction ou non, à condition qu'ellesvérifient les hypothèses de nos théorèmes.

CHAPITRE II

CONTROLE D'ERREUR POUR UNE CLASSE DE SUITES A CONVERGENCE LOGARITHMIQUE A L'AIDE D'UN PROCEDE D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

I. Introduction :

Dans le premier chapitre, nous avons énoncé un résultat fondamental pour estimer la limite d'une suite convergente sans tenir compte de son type de convergence.

C'est pourquoi, dans un premier temps, nous proposons d'étendre ce résultat aux suites à convergence logarithmique. Nous obtenons ainsi une estimation de la limite pour une certaine famille de ces suites, par le biais des intervalles $I_n(b_n)$, avec un choix particulier de la suite $(b_n)_n$.

Nous constatons que la borne $(T_n(b_n))_n$ ne converge pas aussi vite que l'autre : $(T_n(-b_n))_n$.

Pour y remédier, nous proposons ensuite un nouveau procédé d'accélération de la convergence en construisant des variantes de $(T_n(-b_n))_n$ à partir d'un principe de décalage.

La nouvelle méthode de contrôle d'erreur consiste donc à considérer les deux transformations successives de ce procédé qui encadrent la limite.

Nous donnons des résultats concernant l'accélération de la convergence et la détermination des noyaux de ces transformations. Nous obtenons, en particulier, des propriétés intéressantes d'exactitude sur certaines classes de suites en composant les deux premières variantes.

Enfin, nous terminons par un résultat qui met en évidence les deux transformations en question pour estimer la limite.

Des essais numériques sont exposés le long de ce chapitre, au fur et à mesure que nous donnons des résultats théoriques.

Signalons, avant de clore cette introduction, qu'une généralisation de ces transformations au sens de Levin [10] est envisagée.

II. Estimation de la limite d'une suite à convergence logarithmique avec un choix particulier de $(b_n)_n$.

Dans tout ce chapitre, il s'agira de nouveau, du cas particulier de transformation de suites $(T_n)_{n\geq o}$:

$$T_n = S_n + \Delta S_n = S_{n+1}, \quad n\geq o.$$

Nous rappelons que la suite $(\lambda_n)_n$ désigne toujours la suite $\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)_n$ avec $\Delta S_n \neq o$ et $I_n(b_n)$ est l'intervalle $[T_n(-b_n) \wedge T_n(b_n)]$ avec $T_n(-b_n) = S_{n+1} + b_n\Delta S_n$ et $T_n(b_n)= S_{n+1} - b_n\Delta S_n$.

D'après le résultat fondamental du chapitre I (cf proposition 2) on a vu que :

Si une suite $(S_n)_{n\geq o}$ strictement monotone de limite S^* vérifie :

(H) $\lambda_n \leq \dfrac{b_n}{1+b_{n+1}}$ $\forall n\geq N$, où $(b_n)_{n\geq o}$ est une suite strictement positive,

alors $S^* \in I_n(b_n)$ $\forall n\geq N$.

Mais si la suite $(S_n)_{n\geq o}$ est de telle sorte que la suite $(\lambda_n)_{n\geq o}$ converge vers 1 et si la suite $(b_n)_{n\geq o}$ est convergente, alors l'hypothèse (H) ne peut pas avoir lieu pour tout n. Sinon on aurait, en faisant tendre n vers l'infini dans (H), $1 \leq \dfrac{b}{1+b}$ où $b= \lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq o$, ce qui n'est pas possible.

Donc, il faut trouver dans ce cas une suite $(b_n)_n$ strictement positive <u>divergente</u> telle que :

$$\lim_{n\to\infty} b_n \Delta S_n = o \quad \text{et} \quad \lambda_n \leq \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n\geq N.$$

Prenons comme suite $(b_n)_n$: $b_n = \dfrac{1-\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}$ ($\Delta\lambda_n \neq o$ et $\Delta S_n \neq o$). Cette suite dépend de la suite $(S_n)_n$.

On verra dans la remarque p.58 que $(b_n)_n$ est divergente. Pour vérifier les conditions précédentes sur cette suite et avant de donner un résultat semblable à la proposition 2, on va s'intéresser à une classe particulière de suites itératives.

1) Définitions et propriétés :

Soient : D un intervalle fermé et borné, $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(C_{f_1}) \begin{cases} * \text{ f est deux fois dérivable sur D,} \\ * \text{ f est strictement croissante sur D,} \\ * \text{ f est strictement convexe sur D ou strictement concave sur D,} \\ \text{et } \exists\, S^* \in D \text{ unique tel que : } f(S^*) = S^* \text{ et } f'(S^*) = 1. \end{cases}$$

Si en plus f" est continue, on notera (C_f) au lieu de (C_{f_1}).

Soit $H \subseteq D$:

$H = \{ x \in D / \ x < f(x) < S^* \}$ si f est strictement convexe

ou

$H = \{ x \in D / \ x > f(x) > S^* \}$ si f est strictement concave.

Si on considère la suite $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_{n+1} = f(S_n) , \\ S_o \in H \end{cases}$

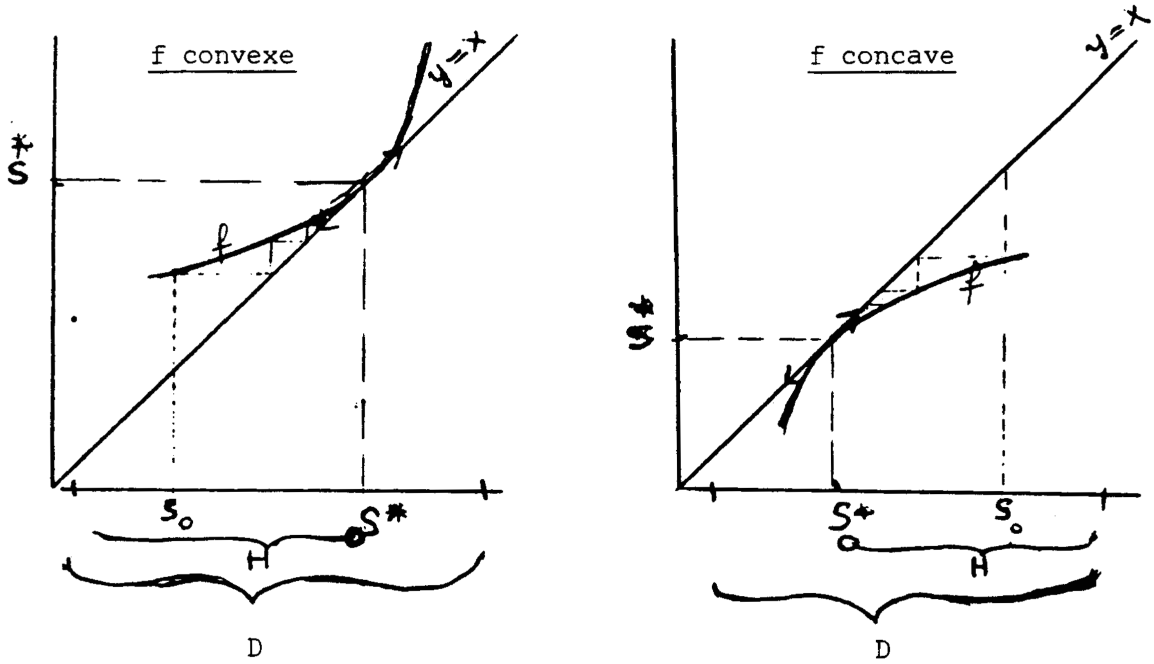
alors H est un domaine de convergence.

En effet :

Soit $S_o \in H$. Si f est strictement convexe (f est strictement concave), alors $S_o < f(S_o) < S^*$ $(S_o > f(S_o) > S^*)$.

Comme f est strictement croissante et $f(S^*) = S^*$, alors $(S_n)_{n\geq o}$ est strictement croissante et majorée (strictement décroissante et minorée). Donc elle converge vers S^*, car S^* est l'unique réel : $S^* = f(S^*)$.

On a donc les deux cas de figure suivants :



Donc, dans les deux cas, on obtient une suite strictement monotone et qui converge vers le point fixe S^*, la convergence étant logarithmique puisque $f'(S^*) = 1$.

Soit β, la fonction définie sur $D - \{S^*\}$ par :

$$\beta(x) = \frac{f(f(x)) - f(x)}{f(x) - x}$$

On va donner maintenant une suite de propriétés de la fonction β qui vont nous être utiles dans la suite.

Lemme 1 :

Si les conditions (C_{f_1}) sont satisfaites, alors :

a) $\beta(H) \subseteq \,]0,1[$,

b) $\forall x \in H : \beta(x) < \beta(f(x))$,

c) la restriction de β à H : $\beta_{//H}$ est de classe C^1,

d) β est prolongeable par continuité en S^* et $\beta(S^*) = 1$.

Preuve :

a) * $\beta(x) > 0 \quad \forall x \in H$:

f étant strictement croissante, on a alors :

$$\left.\begin{array}{l} x>f(x) \Rightarrow f(x) > f(f(x)) \\ \quad\text{ou} \\ x<f(x) \Rightarrow f(x) < f(f(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(x) > 0.$$

$*\underline{\beta(x) < 1 \quad \forall x \in H :}$

. Si f est strictement convexe (f est strictement concave), on a alors
$x < f(x) < S^* \ (x > f(x) > S^*)$.
f étant dérivable, on sait que : $\exists t \in]x, f(x)[\ \left(\exists \bar{t} \in]f(x), x[\right)$

tel que : $f(f(x)) - f(x) = f'(t)\,(f(x)-x) \ \left(f(f(x)) - f(x) = f'(\bar{t})(f(x)-x)\right)$.
Or $f(x) \neq x \quad \forall x \in H$, alors $\beta(x) = f'(t) \ (\beta(x) = f'(\bar{t}))$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x < t < f(x) < S^* \quad (x > \bar{t} > f(x) > S^*) \\ f'' > o \qquad\qquad (f'' < o) \end{cases} \quad \text{alors}$$

$$f'(x) < f'(t) < f'(S^*) = 1 \quad (f'(x) < f'(\bar{t}) < f'(S^*) = 1).$$

donc $\beta(x) < 1 \quad \forall x \in H$.

b) $\underline{\forall x \in H : \beta(x) < \beta(f(x))}$. Pour les mêmes raisons :

$\exists t, t' : x < t < f(x) < t' < f(f(x)) < S^*$ tels que :

$$\beta(x) = f'(t) \text{ et } \beta(f(x)) = f'(t') \quad \text{si } f'' > o.$$

ou $\exists \bar{t}, \bar{t}' : x > \bar{t} > f(x) > \bar{t}' > (f(f(x)) > S^*$ tels que :

$$\beta(x) = f'(\bar{t}) \text{ et } \beta(f(x)) = f'(\bar{t}') \text{ si } f'' < o.$$

$$\text{or } \begin{cases} t < t' \text{ et } f'' > o \implies f'(t) < f'(t') \\ \bar{t}' < \bar{t} \text{ et } f'' < o \implies f'(\bar{t}) < f'(\bar{t}') \end{cases}$$

Donc $\beta(x) < \beta(f(x)) \quad \forall x \in H$.

c) $\beta/\!/_H$ est de classe C^1, cela vient du fait que f l'est et le rapport a un sens ($S^* \notin H$).

$$\text{d) On a : } \begin{cases} \beta(x) = f'(t),\ x < t < f(x) < S^* \text{ si } f'' > o. \\ \text{ou} \\ \beta(x) = f'(\bar{t}),\ S^* < f(x) < \bar{t} < x \text{ si } f'' < o. \end{cases}$$

Donc, quand x tend vers S^*, t tend aussi vers S^* ($\bar{t} \to S^*$).

f' étant continue, on a alors $\lim\limits_{x \to S^*} \beta(x) = f'(S^*)=1$.

Donc on peut prolonger par continuité β en S^* et on a :

$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(f(x)) - f(x)}{f(x) - x} & \text{si } x \neq S^* \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Soit $S_o \in H$. La suite $(S_n)_{n\geq o}$, définie par $S_{n+1} = f(S_n)$ $n\geq o$, est telle que : $\Delta S_n \neq o \quad \forall n$ (strictement monotone).

Par suite : $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est bien définie.

On a : $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \dfrac{f(f(S_n)) - f(S_n)}{f(S_n) - S_n}$.

Donc $\lambda_n = \beta(S_n)$, $\forall n\geq o$ $(S_n \in H,\ \forall n \geq o)$

Si on pose $\rho_n = \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$ $(S_n \neq S^*)$, on a le :

<u>Lemme 2 :</u>

Si les conditions (C_{f_1}) sont satisfaites, alors on a :

$o < \lambda_n < \lambda_{n+1} < 1 \quad \forall n\geq o$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$; $(\rho_n)_{n\geq o}$ étant strictement croissante.

<u>Preuve :</u>

* On a $\lambda_n = \beta(S_n)$ $\forall n\geq o$, $S_n \in H$ $\forall n\geq o$.

  Donc, d'après le lemme 1, on a :

  a) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta(S_n) = \beta(S^*) = 1$ (β étant continue).

  b) $o < \beta(S_n) < \beta(f(S_n)) < 1 \qquad \forall n\geq o$

  soit $o < \lambda_n < \lambda_{n+1} < 1 \qquad \forall n\geq o$

* $\rho_n = \dfrac{f(S_n) - f(S^*)}{S_n - S^*}$ $\forall n \geq o$. f étant dérivable, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = f'(S^*) = 1$$

* $(\rho_n)_{n\geq o}$ est strictement croissante :

soit $x \in H$

Si $f'' > o$ ($f'' < o$), alors $x < f(x) < S^*$ ($x > f(x) > S^*$).

On peut écrire : $f(x) = \dfrac{S^* - f(x)}{S^* - x} \cdot x + \dfrac{f(x) - x}{S^* - x} S^*$

Si on pose $\mu = \dfrac{S^* - f(x)}{S^* - x}$, on a bien $o < \mu < 1$ et $1 - \mu = \dfrac{f(x) - x}{S^* - x}$.

Donc, f étant strictement convexe (strictement concave), on a :

$$f(f(x)) = f(\mu x + (1-\mu)S^*) < \mu f(x) + (1-\mu) f(S^*)$$

$$(\quad " \quad > \quad " \quad)$$

soit $f(f(x)) < \dfrac{S^* - f(x)}{S^* - x} f(x) + \dfrac{f(x) - x}{S^* - x} f(S^*)$

$$(\quad " \quad > \quad " \quad).$$

Or $f(S^*) = S^*$ et $S^* - x > o$ ($S^* - x < o$), on a alors dans les deux cas :

$$(S^* - x) f(f(x)) < (S^* - f(x)) f(x) + (f(x)-x)S^*$$

Soit : $(S^* - x)f(f(x)) + xS^* < (S^* - f(x)) f(x) + S^* f(x)$

En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par (-1) et en y ajoutant S^{*2}, on obtient :

$$S^{*2} - xS^* - (S^*-x)f(f(x)) > S^{*2} - S^*f(x) - (S^*-f(x))f(x)$$

soit : $S^*(S^*-x) - (S^*-x) f(f(x)) > S^*(S^*-f(x)) - (S^*- f(x)) f(x)$

soit encore : $(S^*-x)(S^*-f(f(x))) > (S^*- f(x))^2$

comme $(S^*-x).(S^*-f(x)) > o$ dans les deux cas, on a alors :

$\dfrac{S^* - f(f(x))}{S^* - f(x)} > \dfrac{S^* - f(x)}{S^* - x}$, ceci étant vrai $\forall x \in H$; en particulier pour les termes de la suite $(S_n)_n$. Donc, on a :

$$\frac{S^* - f(f(S_n))}{S^* - f(S_n)} > \frac{S^* - f(S_n)}{S^* - S_n}$$

soit $\qquad \rho_{n+1} > \rho_n \qquad \forall n$

∎

Un résultat important concernant la valeur de la dérivée de β en S^* est donné dans le lemme qui va suivre.

Lemme 3 :

Si f est de classe C^2 sur D : $f'(S^*) = 1$ et $f''(S^*) \neq o$, S^* étant le seul point fixe de f dans D, alors :

$$\beta'(S^*) \text{ existe et } \beta'(S^*) \neq o.$$

Preuve :

$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(f(x)) - f(x)}{f(x) - x} & \text{si } x \neq S^* \\ 1 & \text{sinon} \end{cases},$$

car f est de classe C^1 et $f'(S^*) = 1$ (lemme 1).

Posons $h(x) = f(x) - x$, alors $\beta(x) = \dfrac{h(f(x))}{h(x)}$ si $x \neq S^*$

β est de classe C^1 $\forall x \neq S^*$ car f l'est et $h(x) \neq o$ $\forall x \neq S^*$

Donc $\qquad \beta'(x) = \dfrac{f'(x)h(x)h'(f(x)) - h'(x)h(f(x))}{h^2(x)}$

or, au voisinage de S^*, on a :

$$h(f(x)) = h(x)f'(x) + O\,(h^2(x))\,.$$

Donc $\qquad \beta'(x) = \dfrac{f'(x)h(x)h'(f(x)) - h'(x)h(x)f'(x) + O(h^2(x))}{h^2(x)}$

Soit $\qquad \beta'(x) = \dfrac{f'(x)h'(f(x)) - h'(x)f'(x) + O(h(x))}{h(x)}$

or $\qquad h'(f(x)) - h'(x) = h''(x).\, h(x) + O\,(h^2(x))$

Donc $\qquad \beta'(x) = \dfrac{f'(x)h''(x)h(x) + O\,(h(x))}{h(x)}$

.Soit : $\beta'(x) = f'(x)\, h''(x) + O(1)$.

comme f'' est continue et $h''(x) = f''(x)$, alors en faisant tendre x vers S^*, on obtient :

$$\beta'(S^*) = f''(S^*) \qquad (f'(S^*) = 1)$$

donc $\beta'(S^*)$ existe et comme $f''(S^*) \neq o$, alors :

$$\beta'(S^*) \neq o. \qquad \blacksquare$$

Pour illustrer ce qui précède, on va donner quelques exemples :

a) soit $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n = \frac{1}{n+1}$, $n\geq o$. Cette suite peut s'écrire comme une suite itérative :

$$\begin{cases} S_{n+1} = f(S_n), n\geq o \text{ avec } f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ et } D = [-0.9,1] \\ S_o = 1 \end{cases}$$

$S^* = o$ est le point fixe de f. On a :

$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > o \ \forall x$, $f'(S^*) = 1$ et $f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < o \forall x\in D$.

Tandis que β est définie par :

$$\beta(x) = \frac{1}{1+2x}, \quad \beta(S^*) = 1. \text{ On a :}$$

$$\beta'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2} \quad \text{et} \quad \beta'(S^*) = -2 = f''(S^*).$$

b) Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_{n+1} = \frac{1}{2-S_n}, n\geq o \\ S_o = 0 \end{cases}$ Donc $f(x) = \frac{1}{2-x}$ avec $D = [0,1.9]$ et $S^* = 1$

On a : $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} > o \ \forall x$, $f'(S^*) = 1$ et $f''(x) = \frac{2}{(2-x)^3} > o$ sur D.

D'autre part : $\beta(x) = \frac{1}{3-2x}$ et $\beta'(x) = \frac{2}{(3-2x)^2}$.

On a $\beta(S^*) = 1$ et $\beta'(S^*) = 2 = f''(S^*)$.

c) Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_{n+1} = \frac{9}{6-S_n}, n\geq o \\ S_o = 2.5 \end{cases}$

On a $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$, $S^* = 3$ et on prend $D = [2, 5.9]$.

$f'(x) = \dfrac{9}{(6-x)^2} > o \quad \forall x$, $f'(S^*) = 1$ et $f''(x) = \dfrac{18}{(6-x)^3} > o$ sur D.

D'autre part : $\beta(x) = \dfrac{3}{9-2x}$ et $\beta'(x) = \dfrac{6}{(9-2x)^2}$.

On a $\beta(S^*) = 1$ et $\beta'(S^*) = \dfrac{2}{3} = f''(S^*)$.

d) Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_{n+1} = S_n \dfrac{1-S_n}{1+S_n}, & n\geq o \\ S_o = 0.4 \end{cases}$

On a $f(x) = x\,\dfrac{1-x}{1+x}$, $S^* = o$. On prend $D = [-0.9, 0.4]$.

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-2x-x^2}{(1+x)^2} > o \text{ sur D} \\ f'(S^*) = 1 \qquad \text{et } f''(x) = -\dfrac{4}{(1+x)^3} < o \text{ sur D} \end{cases}$$

On trouve : $\beta(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+2x-x^2}$ et $\beta'(x) = \dfrac{-4(1-x)}{(1+2x-x^2)^2}$

On a : $\beta(S^*) = 1$ et $\beta'(S^*) = -4 = f''(S^*)$.

e) Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_{n+1} = S_n(1-\alpha S_n), \; n\geq o, \; o < \alpha < 1 \\ S_o \in H \text{ (H est défini lorsque D sera défini)} \end{cases}$

On a $f(x) = x(1-\alpha x)$ et $S^* = o$.

Soit $\bar{\alpha}$: $o < \bar{\alpha} < \dfrac{1}{2\alpha}$. On prend $D = [-\bar{\alpha}, \bar{\alpha}]$.

On a alors :

$$\begin{cases} f'(x) = 1-2\alpha x > o \quad \forall x \in D \quad \text{et} \quad f''(x) = -2\alpha < o \quad \forall x \\ f'(S^*) = 1 \end{cases}$$

On obtient pour : $\beta(x) = (1-\alpha x)^2$ et $\beta'(x) = -2\alpha(1-\alpha x)$.

Donc $\beta(S^*) = 1$ et $\beta'(S^*) = -2\alpha = f''(S^*) = f''(x)$.

A présent, on va passer à la définition de la fonction d'itération ω, qui consiste à engendrer la suite des rapports des différences successives de la suite $(S_n)_{n\geq o}$: $(\lambda_n)_{n\geq o}$.

Donc, on suppose que :

$$(C\omega)\ \begin{cases} \exists\omega : [0,1] \to [0,1] \text{ de classe } C^1 \text{ telle que :} \\ \omega o\beta = \beta o f \text{ et vérifiant : } \omega'(x) \geq x \quad \forall x \in [\rho,1],\ o<\rho<1. \end{cases}$$

La fonction β étant définie sur $H \cup \{S^*\}$ par :

$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(f(x)) - f(x))}{f(x) - x} & \text{si } x \neq S^* \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que l'existence de la fonction ω dépend de celle de la fonction réciproque de β : β^{-1}, puisqu'on suppose ω telle que : $\omega o\beta = \beta o f$.

Il s'ensuit que, dans les conditions (C_f) si $x \in H$ alors $f(x) \in H$ et comme $o<\beta(y)<1 \quad \forall y \in H$ (lemme 1), alors $\underline{\omega(]0,1[) \subset]0,1[}$ et $\underline{\omega(1)=1}$ puisque $f(S^*) = S^*$ et $\beta(S^*)=1$.

Donc, si on considère la suite $(S_n)_{n\geq o}$ définie par :

$$\begin{cases} S_{n+1} = f(S_n) & \text{, alors on a :} \\ S_o \in H \end{cases}$$

$$\beta(S_n) = \frac{f(f(S_n)) - f(S_n)}{f(S_n) - S_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lambda_n \text{ et}$$

si $\omega o \beta = \beta o f$, alors $\lambda_{n+1} = \beta(S_{n+1}) = \beta(f(S_n)) = \omega(\beta(S_n))$.

soit : $\lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n) \quad \forall n$ avec $\lambda_o = \dfrac{\Delta S_1}{\Delta S_o}$.

Il n'a pas été possible de prouver théoriquement l'existence de ω avec la propriété $x \leq \omega'(x)$. Tout de même, sur les exemples précédents on peut déterminer cette fonction et vérifier sur certains que $x \leq \omega'(x)$:

a) Pour les suites $(S_n)_{n\geq o}$:

$$S_n = \frac{1}{n+1}, \quad S_{n+1} = \frac{1}{2-S_n} \text{ et } S_{n+1} = \frac{9}{6-S_n},$$

on obtient la même fonction ω : $\omega o\beta = \beta of$.

Soit : $\omega(x) = \dfrac{1+x}{3-x}$ et $\omega'(x) = \dfrac{4}{(3-x)^2}$

Il est facile de voir que :

- $\omega'(x) \geq x \quad \forall x \in [0,1]$.

b) La fonction ω associée à la suite $(S_n)_{n\geq o}$:

$$S_{n+1} = S_n(1-\alpha S_n),\ n\geq o,\quad o< \alpha < 1 \text{ est } \omega(x) = (1-\sqrt{x} + x)^2.$$

On remarque que le calcul de ω est indépendant de α.

On a : $\omega'(x) = 2(1-\sqrt{x} + x)\ (1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}})$

Cet exemple ne vérifie pas : $x \leq \omega'(x)$

En effet : $x \geq \omega'(x) \iff x\sqrt{x} \geq (1-\sqrt{x} + x)\ (2\sqrt{x}-1)$

$\iff \quad x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1 \leq o$.

Or : $x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^3$ et $(\sqrt{x} - 1)^3 \leq o$ sur $]0,1]$.

c) Pour la suite $(S_n)_{n\geq o}$: $S_{n+1} = S_n \dfrac{1 - S_n}{1 - S_n}$, la fonction ω est telle :

$$\omega(x) = \frac{(2-2\alpha + \alpha^2)^2}{4 - 6\alpha^2 + 4\alpha^3 - \alpha^4} \text{ avec } \alpha = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$$

et $\omega'(x) = \dfrac{\alpha^3(2 - 2\alpha + \alpha^2)\ (\alpha^3 - 6\alpha^2 + 10\alpha - 4)}{x^2\ (4 - 6\alpha^2 + 4\alpha^3 - \alpha^4)^2}$.

On peut démontrer, par une technique de "dérivations successives de polynômes", qu'il existe ρ : $o < \rho < 1$ tel que :

$$\omega'(x) \geq x \quad \forall x \in [\rho,1].$$

d) Enfin, on va terminer avec un exemple de ω sans que la suite $(S_n)_{n\geq o}$ soit une suite itérative : c'est le cas des séries.

Donc, soit $(S_n)_{n\geq o}$ la suite de sommes partielles de la série de Riemman : $S_n = \sum\limits_{k=o}^{n} \dfrac{1}{(k+1)^\mu}$, $\mu>1$.

Par un calcul formel, on obtient :

$$\omega(x) = (2 - x^{1/\mu})^{-\mu}$$

on a : $\omega([0,1]) \subseteq [0,1]$.

Tandis que : $\omega'(x) = x^{\frac{1-\mu}{\mu}} (2-x^{1/\mu})^{-(1+\mu)}$

* Si $\mu=2$, alors $\omega'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^3}$.

  On a : $\underline{\omega'(x)\geq x}$: $\underline{\forall x\in]0,1]}$, en effet :

  si $o<y\leq 1$ alors $o<y(2-y) \leq 1$ (car $y^2-2y + 1\geq o$)

  Donc $y^3(2-y)^3 \leq 1$, ceci est vrai $\forall y\in]0,1]$,

  en particulier pour $y=\sqrt{x}$. Donc $x\sqrt{x}\,(2-\sqrt{x})^3 \leq 1$.

  Soit : $$x\leq \frac{1}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^3} = \omega'(x), \quad \forall x\in]0,1].$$

* Si $\mu > 2$, alors :

  On a $\omega''(x) = \dfrac{2}{\mu}\, x^{\frac{1-2\mu}{\mu}} \dfrac{(1-\mu+\mu\, x^{1/\mu})}{(2-x^{1/\mu})^{\mu+2}}$ et $\omega''(1) = \dfrac{2}{\mu}$.

  Donc $\omega''(1) < 1$ et par suite $\exists\rho\in]0,1[$:

  $\omega''(x) < 1$ sur $]\rho,1[$. (Continuité de ω'' au voisinage de 1).

Si on pose $\sigma(x) = \omega'(x) - x$, alors $\sigma'(x) = \omega''(x) - 1$ et $\sigma'(x) < o$ sur $]\rho,1[$. Donc σ est strictement décroissante sur $]\rho,1[$ et comme $\sigma(1)=o$, alors σ ne peut être que strictement positive sur $]\rho,1[$.

Par suite : $\omega'(x) \geq x$ sur $]\rho,1]$.

Une autre propriété de la fonction ω qui peut se déduire des conditions (C_f) est donnée dans le lemme suivant :

<u>Lemme 4 :</u>

On suppose qu'il existe $\omega: [0,1]\to [0,1]$ de classe C^1 telle que $\omega\, o\beta = \beta o f$.

Si f est de classe C^2 sur D, $f'(S^*) = 1$ et $f''(S^*) \neq 0$, S^* étant le seul point fixe de f dans D, alors $\omega'(1) = 1$.

Preuve :

On a : $\omega o \beta = \beta o f$. f, β et ω étant de classe C^1, on a alors, en dérivant $\omega o \beta$ et $\beta o f$:

$\omega'(\beta(x)).\ \beta'(x) = \beta'(f(x)).\ f'(x)$ et en faisant tendre x vers S^* , on obtient :

$\omega'(\beta(S^*)).\ \beta'(S^*) = \beta'(f(S^*)).\ f'(S^*)$.

Soit $\omega'(1).\quad \beta'(S^*) = \beta'(S^*)$, car $f'(S^*) = \beta(S^*)=1$.

comme $\beta'(S^*)$ existe et est non nulle (lemme 3), alors : $\omega'(1)=1$. ∎

Remarque :

Si on considère la suite $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_{n+1} = f(S_n) \\ S_o \in H \end{cases}$,

alors le lemme 4 nous garantit que :

i) $(b_n)_n$ est divergente et ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda n} = 1$ ($\Delta\lambda_n \neq o\ \forall n$ (Cf lemme 2))

En effet : on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$ et $\omega(1) = 1$

i) $b_n = \dfrac{1-\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} = \dfrac{\xi_n}{1-\xi_n}$ avec $\xi_n = \dfrac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_n}$.

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\omega(1) - \omega(\lambda n)}{1 - \lambda_n} = \omega'(1) = 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

ii) $\dfrac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} = \dfrac{\omega(\omega(\lambda n)) - \omega(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n) - \lambda_n}$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta\lambda n+1}{\Delta\lambda_n} = \omega'(1)=1.$

2) Estimation de la limite :

Récapitulons donc les conditions (C_f) et (C_ω) :

Soient $D \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné et

$f : D \to D$ telle que :

$$
(C)\quad \begin{cases}
(Cf) \begin{cases}
* \text{ f est de classe } C^2 \text{ sur D,} \\
* \text{ f est strictement croissante sur D,} \\
* \text{ f est strictement convexe sur D ou bien} \\
\qquad \text{strictement concave sur D,} \\
\\
\text{et } \exists S^* \in D \text{ unique tel que : } f(S^*) = S^* \text{ et } f'(S^*) = 1
\end{cases} \\
\text{on pose} \qquad \beta(x) = \dfrac{f(f(x)) - f(x)}{f(x) - x} \text{ si } x \neq S^* \\
(C\omega) \begin{cases}
\exists \omega : [0,1] \to [0,1] \text{ de classe } C^1 \text{ telle que :} \\
\\
\omega o \beta = \beta o f \text{ et vérifiant : } \omega'(x) \geq x,\ \forall x \in [\rho,1],\ o<\rho<1.
\end{cases}
\end{cases}
$$

Donc, grâce aux lemmes et remarques précédents, on va pouvoir énoncer le résultat suivant :

<u>Proposition 1 :</u>

Soient $D \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné et $f : D \to D$ telle que les conditions (C) soient satisfaites.

Soit $S_o \in H$, $H = \{x \in D / x < f(x) < S^*\}$ si f est strictement convexe

ou

$H = \{x \in D / x > f(x) > S^*\}$ si f est strictement concave.

Alors, la suite $(S_n)_{n \geq o}$: $S_{n+1} = f(S_n)$ converge vers S^* en étant strictement monotone et $\exists N \geq o$:

$$\forall n \geq N \qquad S^* \in I_n(b_n) \quad \text{avec } b_n = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{\Delta \lambda_n}$$

N est le plus petit entier tel que : $\lambda_N \in [\rho, 1[$.

Preuve : C'est une conséquence de la proposition 2 (Cf. CHI)

a) $(S_n)_{n\geq o}$ est strictement monotone et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S^*$ puisque $S_o \in H$ (voir remarque p.47).

b) Rappelons que $\beta(S_n)=\lambda_n$ et $\lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n)$ $\forall n$.

(i) $b_n > o$ $\forall n\geq o$:

$$b_n = \frac{1-\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}$$. D'après le lemme 2, on a :

$o < \lambda_n < \lambda_{n+1} < 1$ $\forall n\geq o$, donc $b_n > o$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \, \Delta S_n = o$:

On a $$b_n \, \Delta S_n = \frac{1-\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} \Delta S_n = (1-\lambda_{n+1}) \frac{\Delta S_n}{\Delta\lambda_n}.$$

D'une part :

$$\frac{\Delta S_n}{\Delta\lambda_n} = \frac{S_{n+1}-S_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = \left[\frac{\beta(S_{n+1})-\beta(S_n)}{S_{n+1}-S_n}\right]^{-1}$$ et comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(S_{n+1})-\beta(S_n)}{S_{n+1}-S_n} = \beta'(S^*)$$ et $\beta'(S^*) \neq o$ (lemme 3), alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta\lambda_n} = \frac{1}{\beta'(S^*)}.$$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$ (lemme 2)

Il s'ensuit que : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \, \Delta S_n = o$

c) $\exists N$: $$\lambda_n \leq \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n\geq N :$$

On a : $$\frac{b_n}{1+b_{n+1}} = \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} \quad \forall n\geq o$$

Donc, cela revient à montrer que :

$$\lambda_n \leq \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} = \frac{\omega(\omega(\lambda_n))-\omega(\lambda_n)}{\omega(\lambda_n)-\lambda_n} \quad \forall n\geq N$$

Soient x,y : $0<x<y<1$. On sait qu'il existe un réel α : $x<\alpha<y$ tel que $\omega(y) - \omega(x) = \omega'(\alpha)(y-x)$; ω étant dérivable.

$$\text{Or } y \neq x, \text{ donc } \omega'(\alpha) = \frac{\omega(y) - \omega(x)}{y - x}$$

Si, en plus, $x\in[\rho,1[$ alors $\omega'(\alpha) \geq \alpha(C_\omega)$.

Donc si $x\in[\rho,1[$, alors $x<\alpha\leq\omega'(\alpha) = \dfrac{\omega(y) - \omega(x)}{y - x}$

Soit :
$$x< \frac{\omega(y) - \omega(x)}{y - x}$$

Or $\exists N\geq 0$: $\lambda_n\in[\rho,1[$ $\forall n\geq N$ et comme $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ $\forall n$ (lemme 2), alors on a :

$$\lambda_n < \frac{\omega(\lambda_{n+1}) - \omega(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \quad \forall n\geq N$$

Soit :
$$\lambda_n < \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} \quad \forall n\geq N$$

A la limite on a :

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 1 \text{ (lemme 2) et } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} = 1 \text{ (Rq p. 57, lemme 4)}$$

$$\text{Donc, } \exists N : \lambda_n \leq \frac{b_n}{1+b_{n+1}} \quad \forall n\geq N.$$

En conclusion toutes les hypothèses de la proposition 2 (Ch I) sont satisfaites. Par conséquent :

$$S^* \in I_n(b_n) \quad \forall n\geq N$$

∎

Donc, grâce à ce résultat, on peut estimer la limite d'une suite, appartenant à la classe de suites logarithmiques définie par les conditions (C), à l'aide des intervalles emboîtés $I_n\left(\dfrac{1-\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}\right)$.

3) Essais numériques :

On teste ici les trois suites suivantes :

a) $\begin{cases} S_n^{(1)} = \dfrac{1}{n}, & n\geq 1 \\ S^* = 0 & \end{cases}$, b) $\begin{cases} S_{n+1}^{(2)} = \dfrac{9}{6-S_n^{(2)}}, & n\geq 1 \\ S_1^{(2)}=2.5, & S^*=3 \end{cases}$ et c) $\begin{cases} S_{n+1}^{(3)} = \dfrac{1}{2-S_n^{(3)}}, & n\geq 1 \\ S_1^{(3)}=0, & S^*=1 \end{cases}$

On a vu qu'elles correspondent à la même fonction :

$\omega : \omega(x) = \dfrac{1+x}{3-x}$ et $\omega'(x)\geq x$ $\forall x\in[0,1]$. Donc, on peut prévoir

que $S^*\in I_n(b_n)$ $\underline{\forall n\geq 1}$

n	$T_n(-b_n)$	$S_n^{(1)}$	$T_n(b_n)$
1	-.100000000000000D+01	.100000000000000D+01	.200000000000000D+01
2	-.333333333333333D+00	.500000000000000D+00	.100000000000000D+01
3	-.166666666666666D+00	.333333333333333D+00	.666666666666666D+00
4	-.100000000000005D+00	.250000000000000D+00	.500000000000005D+00
5	-.666666666666575D-01	.200000000000000D+00	.399999999999991D+00
6	-.476190476190520D-01	.166666666666667D+00	.333333333333338D+00
47	-.886524822569120D-03	.212765957446809D-01	.425531914892359D-01
48	-.850340136157000D-03	.208333333333334D-01	.416666666667693D-01
49	-.816326530766084D-03	.204081632653062D-01	.408163265307662D-01
50	-.784313725310608D-03	.200000000000000D-01	.399999999982050D-01
51	-.754147812919462D-03	.196078431372549D-01	.392156862744580D-01

n	$T_n(-b_n)$	$S_n^{(2)}$	$T_n(b_n)$
1	.314285714285709D+01	.250000000000000D+01	.200000000000005D+01
2	.310714285714286D+01	.257142857142857D+01	.214285714285714D+01
3	.308333333333321D+01	.262500000000000D+01	.225000000000012D+01
4	.306666666666685D+01	.266666666666667D+01	.233333333333315D+01
5	.305454545454545D+01	.270000000000000D+01	.240000000000001D+01
6	.304545454545448D+01	.272727272727273D+01	.245454545454551D+01
47	.300217706821535D+01	.294230769230769D+01	.288461538461484D+01
48	.300209643605501D+01	.294339622641509D+01	.288679245283387D+01
49	.300202020201917D+01	.294444444444444D+01	.288888888888992D+01
50	.300194805193933D+01	.294545454545454D+01	.289090909091780D+01
51	.300187969926043D+01	.294642857142857D+01	.289285714284483D+01

n	$T_n(-b_n)$	$S_n^{(3)}$	$T_n(b_n)$
1	.200000000000000D+01	.000000000000000D+00	-.100000000000000D+01
2	.133333333333333D+01	.500000000000000D+00	.513478148889135D-15
3	.116666666666665D+01	.666666666666667D+00	.333333333333345D+00
4	.110000000000003D+01	.750000000000000D+00	.499999999999967D+00
5	.106666666666664D+01	.800000000000000D+00	.600000000000025D+00
6	.104761904761906D+01	.833333333333333D+00	.666666666666658D+00
47	.100088652482892D+01	.978723404255317D+00	.957446808504413D+00
48	.100085034012471D+01	.979166666666665D+00	.958333333344678D+00
49	.100081632654623D+01	.979591836734692D+00	.959183673453769D+00
50	.100078431370758D+01	.979999999999998D+00	.960000000017902D+00
51	.100075414782557D+01	.980392156862743D+00	.960784313712890D+00

comme prévu, on obtient une estimation de la limite à l'aide de $T_n(-b_n)$ et $T_n(b_n)$. Mais, on remarque que la suite $(T_n(b_n))_n$ ne converge pas aussi vite que $(T_n(-b_n))$ vers S^*.
Donc, il est normal que ces intervalles se contractent lentement. Ceci est dû au fait que la suite à estimer (qui converge lentement) se trouve entre les deux bornes des intervalles $I_n(b_n)$, soit $S_{n+1} = \frac{T_n(-b_n) + T_n(b_n)}{2}$

Cependant, pour cette classe de suites, on peut montrer que la suite $(T_n(-b_n))_{n\geq 0}$ converge plus vite que la suite initiale et qu'on peut en déduire des propriétés intéressantes.

III. Définition du procédé V et résultats d'accélération de la convergence :

Il s'agira dans toute la suite d'une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ convergente vers S^*, définie à partir de la relation : $S_{n+1} = f(S_n)$; où f est une fonction définie sur D à valeurs dans D.

La suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ aura toujours un sens, puisque parmi nos conditions, on aura toujours $(S_n)_{n\geq 0}$ strictement monotone.

1) Convergence plus rapide de $(T_n(-b_n))_{n\geq 0}$:

On a : $T_n(-b_n) = S_{n+1} + b_n \Delta S_n \quad , \quad b_n = \dfrac{1 - \lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}, \; n\geq 0$

Soit : $T_n(-b_n) = S_{n+1} - \dfrac{\Delta^2 S_{n+1} (\Delta S_n)^2}{\Delta S_n \Delta S_{n+2} - (\Delta S_{n+1})^2} \quad , \; n\geq 0$

Donc, pour le calcul de $T_n(-b_n)$, on a besoin de :

$$S_n, \; S_{n+1}, \; S_{n+2} \text{ et } S_{n+3}.$$

Par suite, la comparaison de l'accélération de la convergence de $(T_n(-b_n))_{n\geq 0}$ se fera avec $(S_{n+3})_{n\geq 0}$.

Proposition 2 :

Si les conditions (C_f) sont vérifiées, alors $(T_n(-b_n))_{n\geq 0}$ converge plus vite que $(S_{n+3})_{n\geq 0}$ vers S^*.

<u>Preuve :</u>

i) On a déjà vu que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(-b_n) = S^*$ (voir prop.1).

ii) On a : $\dfrac{T(-b_n) - S^*}{S_{n+3} - S^*} = \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_{n+3} - S^*} + b_n \dfrac{\Delta S_n}{S_{n+3} - S^*}$

On pose : $\rho_n = \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$ (lemme 2)

Donc :

$$* \quad \frac{S_{n+1} - S^*}{S_{n+3} - S^*} = \frac{S_{n+1} - S^*}{S_{n+2} - S^*} \cdot \frac{S_{n+2} - S^*}{S_{n+3} - S^*} = \frac{1}{\rho_{n+1}\,\rho_{n+2}}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_{n+3} - S^*} = 1.$

$$* \quad b_n \frac{\Delta S_n}{S_{n+3} - S^*} = b_n \frac{\Delta S_n}{S_{n+1} - S^*} \times \frac{1}{\rho_{n+1}\,\rho_{n+2}}$$

$$\text{donc } \lim_{n\to\infty} \left(b_n \frac{\Delta S_n}{S_{n+3} - S^*}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(b_n \cdot \frac{\Delta S_n}{S_{n+1} - S^*}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \lambda_{n+1}}{S_{n+1} - S^*} \cdot \frac{\Delta S_n}{\Delta \lambda_n}\right)$$

D'une part :

$$\frac{1 - \lambda_{n+1}}{S_{n+1} - S^*} = \frac{1 - \beta(S_{n+1})}{S_{n+1} - S^*} = - \frac{\beta(S_{n+1}) - \beta(S^*)}{S_{n+1} - S^*}, \text{ car}$$

$$\lambda_n = \beta(S_n) \quad \forall n \text{ et } \beta(S^*) = 1 \quad \text{(lemme 1)}$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \lambda_{n+1}}{S_{n+1} - S^*} = - \lim_{n\to\infty} \frac{\beta(S_{n+1}) - \beta(S^*)}{S_{n+1} - S^*} = - \beta'(S^*)$$

D'autre part :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta \lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{S_{n+1} - S_n}{\beta(S_{n+1}) - \beta(S_n)}\right]$$

Or $\beta'(S^*)$ existe et $\beta'(S^*) \neq o$ (lemme 3), par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta\lambda_n} = \frac{1}{\beta'(S^*)}.$$

Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^n \, \Delta S_n}{S_{n+3} - S^*} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \lambda_{n+1}}{S_{n+1} - S^*} \cdot \frac{\Delta S_n}{\Delta\lambda_n} \right)$

$$= - \beta'(S^*) . \frac{1}{\beta'(S^*)}$$

Soit : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n \, \Delta S_n}{S_{n+3} - S^*} = - 1$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T_n(-b_n) - S^*}{S_{n+3} - S^*} = 0.$

∎

<u>Remarques</u> :

a) $(T_n(-b_n))_{n\geq o}$ n'est autre que la première colonne du procédé de Richardson avec la suite auxiliaire $(x_n)_{n\geq o}$: $x_n = 1 - \lambda_n \quad \forall n\geq o$:

$$\text{soit} \quad : \quad T_n(-b_n) = \frac{x_n S_{n+1} - x_{n+1} S_n}{x_n - x_{n+1}} \ , \ n\geq o$$

La suite auxiliaire $(x_n)_{n\geq o}$ dépend directement de la suite $(S_n)_{n\geq o}$:

$x_n = 1 - \lambda_n = - \dfrac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n}$; elle est bien définie puisque la suite $(S_n)_{n\geq o}$ est supposée strictement monotone.

Grâce aux hypothèses (C_f), $(x_n)_{n\geq o}$ est strictement positive et est strictement décroissante vers o.

La convergence de $(x_n)_{n\geq o}$ est logarithmique, si on suppose $(\lambda_n)_{n\geq o}$:

$\lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n) \quad \forall n$ et $\omega(1) = \omega'(1) = 1$, puisque

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_n} = \frac{\omega(\lambda_n) - \omega(1)}{\lambda_n - 1} .$$

b) Bien que $(T_n(-b_n))_{n\geq o}$ converge plus vite que $(S_{n+3})_n$, l'estimation de l'erreur faite à l'aide des intervalles $I_n(b_n)$ est sans intérêt, puisque $(T_n(b_n))_{n\geq o}$ ne converge pas plus vite que $(S_{n+3})_{n\geq o}$. Ceci est dû à la définition même

des intervalles $I_n(b_n)$, qui contiennent la suite $(S_n)_{n\geq o}$ qui elle, converge très lentement.
Donc, après cette constatation, on se pose la question suivante :
Peut-on trouver une autre transformation de suites qui accélère la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq o}$ et qui se situe de l'autre côté de la limite par rapport à $(T_n(-b_n))_{n\geq o}$?

La réponse est affirmative, bien sûr sous certaines conditions. Pour cela, on va proposer des variantes de $(T_n(-b_n))_n$. Une étude concernant l'accélération de la convergence et les propriétés d'exactitude de ces nouvelles transformations sera développée.

2) Définition du procédé V et propriétés :

On a : $T_n(-b_n) = S_{n+1} + b_n\Delta S_n$ où $b_n = (1 - \lambda_{n+1})/\Delta\lambda_n$.

L'idée est donc de construire d'autres transformations de suites à partir de $T_n(-b_n)$, en procédant par un décalage du couple $(S_{n+1}, \Delta S_n)$ par rapport à b_n. C'est-à-dire, on remplace successivement les termes S_{n+1} et ΔS_n par S_{n+k+1} et ΔS_{n+k} , $k = 1, 2, 3, \ldots$, en laissant fixe b_n.

Si on note $V_{n,o} = T_n(-b_n) = S_{n+1} + b_n\Delta S_n$, alors ces variantes sont :

Pour n = 0, 1, 2, ...

$$\left\{\begin{array}{l}
V_{n,1} = S_{n+2} + b_n\Delta S_{n+1} = S_{n+1} + b_n^{(1)}\Delta S_n,\ b_n^{(1)} = \lambda_n(1 + b_n) \\
V_{n,2} = S_{n+3} + b_n\Delta S_{n+2} = S_{n+1} + b_n^{(2)}\Delta S_n,\ b_n^{(2)} = \lambda_n + \lambda_n\lambda_{n+1}(1 + b_n) \\
\text{---} \\
V_{n,k} = S_{n+k+1} + b_n\Delta S_{n+k} = S_{n+1} + b_n^{(k)}\Delta S_n,\ b_n^{(k)} = \lambda_n + \lambda_n\lambda_{n+1} + \ldots \\
\qquad \ldots + (\lambda_n\lambda_{n+1}\ldots\lambda_{n+k-2}) + (\lambda_n\lambda_{n+1}\ldots\lambda_{n+k-1})(1+b_n).
\end{array}\right.$$

Rappelons que : $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ $(\Delta S_n \neq 0)$

On appelle procédé V, la famille de toutes les transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, ainsi obtenues.

On va commencer par remarquer que, sous les mêmes conditions que celles données dans la proposition précédente, $(V_{n,k})_{n\geq o}$: $k = 1, 2, \ldots$, converge plus vite que $(S_{n+k+1})_{n\geq o}$ vers S^*.

Proposition 3 :

Si les conditions (C_f) sont vérifiées, alors :

$(V_{n,k})_{n\geq o}$ converge plus vite que $(S_{n+k+1})_{n\geq o}$ vers S^* ; $k = 1, 2, 3, \ldots$

Preuve :

On pose : $\rho_n = \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$. On a : $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$ (lemme 2)

On a : $V_{n,k} = S_{n+k+1} + b_n \Delta S_{n+k}$, $n\geq o$, $k\geq 1$.

Soit $k\geq 1$ fixé :

a) On a vu que $\lim\limits_{p\to\infty} b_p \Delta S_p = 0$ (C_f proposition 1).

$$\text{Or } b_n \Delta S_{n+k} = b_n \frac{\Delta S_{n+k}}{\Delta S_{n+k-1}} \cdot \frac{\Delta S_{n+k-1}}{\Delta S_{n+k-2}} \cdots \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \Delta S_n .$$

Soit : $b_n \Delta S_{n+k} = (\lambda_n . \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{n+k-1})\, (b_n \Delta S_n)$ et comme $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_p = 1$(lemme 2), alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\, \Delta S_{n+k} = o$.

Il s'ensuit que : $\lim\limits_{n\to\infty} V_{n,k} = S^*$.

b) On a $\dfrac{V_{n,k} - S^*}{S_{n+k+1} - S^*} = 1 + b_n \dfrac{\Delta S_{n+k}}{S_{n+k+1} - S^*}$

$$\text{Or } b_n \frac{\Delta S_{n+k}}{S_{n+k+1} - S^*} = b_n \frac{\Delta S_n}{S_{n+1} - S^*} \left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \; \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \cdots \frac{\Delta S_{n+k}}{\Delta S_{n+k-1}} \right) \mathrm{X}$$

$$\left(\frac{S_{n+1} - S^*}{S_{n+2} - S^*} \cdot \frac{S_{n+2} - S^*}{S_{n+3} - S^*} \cdots \frac{S_{n+k} - S^*}{S_{n+k+1} - S^*} \right).$$

$$\text{Soit : } b_n \frac{\Delta S_{n+k}}{S_{n+k+1} - S^*} = b_n \frac{\Delta S_n}{S_{n+1} - S^*} \cdot \frac{\lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{n+k-1}}{\rho_{n+1}\, \rho_{n+2} \cdots \rho_{n+k}}$$

Comme $\lim\limits_{p\to\infty} \lambda_p = \lim\limits_{p\to\infty} \rho_p = 1$ (lemme 2) et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \dfrac{\Delta S_n}{S_{n+1} - S^*} = -1$ (C_f proposition 2), alors :

$$\lim_{n\to\infty} b_n \frac{\Delta S_{n+k}}{S_{n+k+1} - S^*} = -1.$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{V_{n,k} - S^*}{S_{n+k+1} - S^*} = 0$. Ceci étant vrai $\forall k\geq 1$. ∎

Comme on l'a fait remarquer précédemment pour $(V_{n,o})_{n\geq o}$, les transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$; k= 1,2,... peuvent s'exprimer sous forme d'un rapport de deux déterminants :

$$V_{n,k} = \begin{vmatrix} S_{n+k} & S_{n+k+1} \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}$$

$n\geq o$ et $k = 1,2,3,\ldots$

La suite auxiliaire $(x_n)_{n\geq o}$ est telle que : $x_n = 1 - \lambda_n$.
Donc $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\geq 1$, est aussi la première colonne du procédé de Richardson, mais cette fois-ci, il est appliqué à la suite $(S_{n+k})_{n\geq o}$.

Les transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\geq o$, ne sont pas linéaires. Cependant, on a la :

<u>Propriété 1</u> :

Soit $k\geq o$.

Si on note $(V_{n,k}(y_n))_{n\geq o}$ la suite obtenue en appliquant la transformation $V_{\bullet,k}$ à la suite $(y_n)_{n\geq o}$, alors on a :

$$V_{n,k}(ay_n + b) = aV_{n,k}(y_n) + b \ , \ n\geq o,$$

où a et b sont des constantes arbitraires, a étant non nul.

<u>Preuve</u> : Soit $k\geq o$.

Rappelons que la suite auxiliare $(x_n)_{n\geq o}$ dépend directement de la suite à transformer.

Donc pour $(V_{n,k}(y_n))_{n\geq o}$, la suite $(x_n)_{n\geq o}$ est telle que : $x_n \equiv x_n(y_n) = 1 - \dfrac{\Delta y_{n+1}}{\Delta y_n}$.

Donc pour $(V_{n,k}(ay_n+b))_{n\geq o}$, on a :

$$x_n \equiv x_n\ (ay_n+b) = 1 - \frac{\Delta(ay_{n+1}+b)}{\Delta(ay_n+b)}$$

Soit : $x_n(y_n) = x_n(ay_n+b) = x_n$, $\forall n\geq o$.

Par suite la suite auxiliaire $(x_n)_{\geq o}$, dans ce cas, est invariante.

donc : $$V_{n,k}(ay_n+b) = \frac{\begin{vmatrix} ay_n+b & ay_{n+1}+b \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}$$

En tenant compte de la linéarité des déterminants, on obtient :

$$V_{n,k}(ay_n+b) = \frac{\begin{vmatrix} ay_n & ay_{n+1} \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} b & b \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}$$

soit : $$V_{n,k}(ay_n+b) = \frac{a\begin{vmatrix} y_n & y_{n+1} \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}} + b$$

Par conséquent : $V_{n,k}(ay_n+b) = aV_{n,k}(y_n) + b$, $\forall n\geq o$ ∎

Cette propriété va nous servir dans le prochain paragraphe.

IV Résultats d'exactitude du procédé V :

1) Noyaux de $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\geq o$.

Dans toute la suite, la notation $(V_{n,k})_{n\geq o}$ sera attribuée à $(V_{n,k}(S_n))_{n\geq o}$; tout changement de la suite initiale sera signalé.

Comme on l'a constaté auparavant, les transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}(k\geq o)$, s'expriment sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Soit : $$V_{n,k} = \begin{vmatrix} S_{n+k} & S_{n+k+1} \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}, \ n\geq o,$$

où $(x_n)_{n\geq o}$: $x_n = 1 - \lambda_n$.

Donc, à partir de cette remarque, on va pouvoir déterminer les noyaux de $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\geq o$; c'est-à-dire déterminer la classe des suites $(S_n)_{n\geq o}$:

$$\exists N\geq o \ : \ \forall n\geq N \quad V_{n,k} = S^*$$

Propriété 2 :

Soit $k\geq o$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que : $V_{n,k} = S^*$ $\forall n\geq N$ est que la suite $(S_n)_{n\geq o}$ vérifie :

$$S_{n+k} = S^* + c\,\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} \qquad \forall n\geq N, \text{ où } c \text{ est une constante non nulle.}$$

Preuve : Soit $k\geq o$ fixé.

$$V_{n,k} = \frac{\begin{vmatrix} S_{n+k} & S_{n+k+1} \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}} = S^* \ \forall n\geq N \text{ ssi } \begin{vmatrix} S_{n+k} & S_{n+k+1} \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S^* & S^* \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix} \ \forall n\geq N$$

$$\text{ssi } \begin{vmatrix} S_{n+k} - S^* & S_{n+k+1} - S^* \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix} = o \ \forall n\geq N \text{ ssi } \exists a,b \text{ non nuls tels que :}$$

$$a(S_{n+k} - S^*) + b\,x_n = o \qquad \forall n\geq N$$

ssi $S_{n+k} - S^* = -\frac{b}{a} x_n \quad \forall n \geq N \ (a \neq o)$ ssi $S_{n+k} - S^* = C \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} \quad \forall n \geq N$

car $x_n = 1 - \lambda_n = -\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n}$.

■

On va donner quelques exemples de suites qui appartiennent au noyau de $(V_{n,2})_{n\geq o}$:

a) $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n = \frac{1}{n+1}$. On a $\Delta S_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et

$\Delta^2 S_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Donc $\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} = -{}^{2}/_{(n+3)}$.

Or $S_{n+2} = \frac{1}{(n+3)}$, alors $S_{n+2} = C \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} \quad \forall n \geq o \ (S^* = 0)$

donc : $V_{n,2}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \quad \forall n \geq o.$

b) $(S_n)_{n\geq o}$: $S_{n+1} = \frac{1}{(2 - S_n)}$; $S^* = 1$

On a $\Delta S_n = \frac{(1 - S_n)^2}{(2 - S_n)}$ et $\Delta^2 S_n = 2 \frac{(1 - S_n)^2 (S_n - 1)}{(2 - S_n)(3 - 2S_n)}$.

Donc $\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} = \frac{2(S_n - 1)}{3 - 2S_n}$. Or $S_{n+2} - 1 = \frac{S_n - 1}{3 - 2S_n}$, alors :

$$S_{n+2} - S^* = C' \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} \quad \forall n \geq o$$

Donc $V_{n,2} = 1 \quad \forall n \geq o.$

c) $(S_n)_{n\geq o}$: $S_{n+1} = \frac{9}{6 - S_n}$; $S^* = 3$.

On a : $\Delta S_n = \frac{(3 - S_n)^2}{(6 - S_n)}$ et $\Delta^2 S_n = \frac{(3 - S_n)^2}{(6 - S_n)} \cdot \frac{2(S_n - 3)}{9 - 2S_n}$.

Par suite : $\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} = \frac{2(S_n - 3)}{9 - 2S_n}$. Or $S_{n+2} - 3 = \frac{3(S_n - 3)}{9 - 2S_n}$,

alors : $S_{n+2} - S^* = C'' \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} \quad \forall n \geq o.$

Donc : $V_{n,2} = 3 \quad \forall n \geq o.$

On va donner une famille de suites, qui englobe les exemples de suites précédents, sur lesquelles $(V_{n,2})_n$ est exacte, à partir d'un certain rang.

Propriété 3 :

Si la suite $(S_n)_{n\geq o}$ est telle que : $\exists N\geq o$,

$$S_n = S^* + \alpha \prod_{i=o}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{i+\beta}\right) \quad \forall n\geq N \text{ ; où } \alpha \neq o \text{ et}$$

$i + \beta \neq 0,1$ $\forall i\geq o$, alors $V_{n,2} = S^*$ $\forall n\geq N$.

Preuve : Elle se déduit facilement de la propriété 2.

Soit $n\geq N$:

$$\text{On a : } S_n - S^* = \alpha \prod_{i=o}^{n-1} \frac{i + \beta - 1}{i + \beta} = \alpha \left[\frac{\beta - 1}{\beta} \ \frac{\beta}{\beta + 1} \cdots \frac{n + \beta - 2}{n + \beta - 1}\right]$$

$$\text{Donc : } S_n - S^* = \frac{\alpha\ (\beta - 1)}{n + \beta - 1}\ .$$

Avec $i + \beta \neq 1$ $\forall i\geq o$, la quantité $S_n - S^*$ est bien définie et est non nulle.

$$\text{On a : } \lim_{n\to\infty} S_n = S^*$$

$$\text{Donc } \Delta S_n = \Delta\left\{\frac{\alpha\ (\beta - 1)}{n + \beta - 1}\right\} = \frac{\alpha(1 - \beta)}{(n + \beta)(n + \beta - 1)} \neq o \text{ et}$$

$$\Delta S_{n+1} = \frac{\alpha\ (1 - \beta)}{(n+\beta+1)(n+\beta)}\ .\ \text{Donc } \lambda_n = \frac{n + \beta - 1}{n + \beta + 1} \quad \forall n\ ,$$

$$\text{par suite } 1 - \lambda_n = - \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} = \frac{2}{n + \beta + 1}\ .$$

$$\text{Or } S_{n+2} - S^* = \frac{\alpha\ (\beta - 1\ )}{n + \beta + 1}, \text{ alors } S_{n+2} - S^* = C\ \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta S_n} \quad \forall n\geq N.$$

Donc, d'après la propriété 2, $V_{n,2} = S^*$ $\forall n\geq N$.

∎

Remarques :

a) On peut vérifier facilement que toutes les suites $(S_n)_{n\geq o}$:

$$S_n = S^* + \alpha \prod_{i=o}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i+\beta}\right) \quad \forall n\geq N \text{ avec } \alpha \neq o \text{ et } i + \beta \neq 1$$

$\forall i\geq o$, correspondent à la même fonction ω :

$$\omega(x) = \frac{1+x}{3-x} \quad / \quad \lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n) \qquad \forall n\geq N.$$

b) Réciproquement si une suite $(S_n)_{n\geq o}$ est associée à $\omega(x) = \frac{1+x}{3-x}$ (ie $\lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n)$ $\forall n$), alors l'application de $(V_{n,2})_{n\geq o}$ à $(S_n)_{n\geq o}$ donne :

$$\Delta V_{n,2} = 0 \qquad \forall n.$$

En effet, on a : $V_{n,2} = S_{n+1} + b_n^{(2)} \Delta S_n$, $n\geq o$, avec $b_n^{(2)} = \lambda_n + \lambda_n \lambda_{n+1}(1+b_n)$

et $b_n = \dfrac{1 - \lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}$

Si on considère la fonction ω, on trouve :

$$b_n^{(2)} = \frac{2\lambda_n}{1-\lambda_n} = \lambda_n(1 + b_{n+1}^{(2)}) \quad \forall n.$$

D'autre part :

$$\Delta V_{n,2} = \Delta S_{n+1} + b_{n+1}^{(2)} \Delta S_{n+1} - b_n^{(2)} \Delta S_n . \qquad \forall n$$

soit $\quad \Delta V_{n,2} = \Delta S_n [\lambda_n (1 + b_{n+1}^{(2)}) - b_n^{(2)}] \qquad \forall n$

Il s'ensuit que :

$$\Delta V_{n,2} = o \qquad \forall n.$$

Résultats numériques :

On prend pour exemples :

$$\begin{cases} S_n^{(1)} = \dfrac{1}{n} , \\ S^* = 0, \ n\geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_{n+1}^{(2)} = \dfrac{9}{6 - S_n^{(2)}} , \ S^* = 3 , \ n\geq 1 \\ S_1^{(2)} = 2.5 \end{cases}$$

Si on note $(V^{(i)}_{n,2})_{n\geq 1}$ la suite obtenue en appliquant $V_{.,2}$ à $(S^{(i)}_n)_{n\geq 1}$, $i = 1,2$, alors on obtient :

n	$V^{(1)}_{n,2}$	$V^{(2)}_{n,2}$
1	.1665334536937773D-15	.2999999999999997D+01
2	.1387778780781445D-15	.3000000000000000D+01
3	.832667268468867D-16	.2499999999999992D+01

Il n'a pas été possible de donner des exemples de suites qui appartiennent aux noyaux des autres transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k \neq 2$. Cependant, on obtient des résultats intéressants en composant $(V_{n,o})_n$ et $(V_{n,1})_n$.

2) Propriétés d'exactitude de la transformation $(W_n)_n$:

Soit $(W_n)_{n\geq o}$, la suite obtenue en prenant pour chaque terme, la moyenne des termes de $(V_{n,o})_{n\geq o}$ et $(V_{n,1})_{n\geq o}$ à l'étape correspondante.

$$\text{soit : } \quad W_n = \frac{V_{n,o} + V_{n,1}}{2}, \quad n\geq o.$$

On va donner deux résultats concernant l'exactitude de $(W_n)_{n\geq o}$ sur deux classes de suites caractérisées par des propriétés à partir d'un certain rang.

Pour cela, on note $\varepsilon_n = S_n - S^*$: l'erreur commise à l'étape n en calculant un approximant de S^*.

Propriété 4 :

Si la suite $(S_n)_{n\geq o}$ de limite S^* est telle que :

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n(1 - \alpha\varepsilon_n)$ pour $n\geq N$, α étant non nul, alors,

$$W_n = S^* \qquad \forall n\geq N.$$

Preuve : Soit $n\geq N$

On a : $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n (1-\alpha\varepsilon_n)$, donc $\Delta\varepsilon_n = -\alpha\varepsilon_n^2$.

Par suite $\lambda_n(\varepsilon_n) = \dfrac{\Delta\varepsilon_{n+1}}{\Delta\varepsilon_n} = (1 - \alpha\varepsilon_n)^2$ et $\lambda_{n+1}(\varepsilon_n) = (1 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)^2$

Donc $\Delta\lambda_n(\varepsilon_n) = \alpha^2\varepsilon_n^2 \; (2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)$ et comme

$1 - \lambda_{n+1}(\varepsilon_n) = \alpha\varepsilon_n \; (1 - \alpha\varepsilon_n) \; (2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)$, alors ;

$$b_n(\varepsilon_n) = \frac{1 - \lambda_{n+1}(\varepsilon_n)}{\Delta\lambda_n \; (\varepsilon_n)} = \frac{\alpha\varepsilon_n(1 - \alpha\varepsilon_n) \; (2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}{\alpha^2\varepsilon_n^2 \; (2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}$$

Soit
$$\boxed{b_n(\varepsilon_n) = \frac{(1 - \alpha\varepsilon_n) \; (2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}{\alpha\varepsilon_n \; (2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}}$$

On sait que :

$$\begin{cases} V_{n,o}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} + b_n(\varepsilon_n)\, \Delta\varepsilon_n \\ \\ V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+2} + b_n(\varepsilon_n)\, \Delta\varepsilon_{n+1} \end{cases}$$

Donc, d'une part :

$$b_n(\varepsilon_n) \;\; \Delta\varepsilon_n = - \frac{\varepsilon_n(1 - \alpha\varepsilon_n) \; (2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}{2 - 2\;\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}$$

Soit : $$b_n(\varepsilon_n).\; \Delta\varepsilon_n = - \varepsilon_{n+1} \frac{2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}$$

Donc $$V_{n,o} \; (\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} \left[1 - \frac{2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2} \right]$$

Soit $$\boxed{V_{n,o}(\varepsilon_n) = - \varepsilon_{n+1} \frac{\alpha\varepsilon_n}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}} \qquad (1)$$

D'autre part :

$$\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+1} \; (1 - \alpha\varepsilon_{n+1}) \text{ et } \Delta\varepsilon_{n+1} = - \alpha \; \varepsilon_{n+1}^2.$$

on peut écrire :

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_{n+1} \cdot \varepsilon_n(1 - \alpha\varepsilon_n).$$

Donc $$b_n(\varepsilon_n)\, \Delta\varepsilon_{n+1} = - \varepsilon_{n+1} \frac{(1 - \alpha\varepsilon_n)^2 \,(2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}$$

Par suite :

$$V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1}[(1 - \alpha\varepsilon_{n+1}) - \frac{(1 - \alpha\varepsilon_n)^2(2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}]$$

Soit :

$$V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1}[\frac{(1-\alpha\varepsilon_n+\alpha^2\varepsilon_n^2)(2-2\alpha\varepsilon_n+ \alpha^2\varepsilon_n^2)-(1-2\alpha\varepsilon_n+\alpha^2\varepsilon_n^2)(2-\alpha\varepsilon_n+\alpha^2\varepsilon_n^2)}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}]$$

Donc $V_{n,1}(\varepsilon_n) \cdot (2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2) =$

$$\varepsilon_{n+1} [(1 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)\,(2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2) - \alpha\varepsilon_n\,(1 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)$$
$$- (1-\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)\,(2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2) + \alpha\varepsilon_n\,(2 - \alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2)\,]$$

Soit :

$$\boxed{V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} \frac{\alpha\varepsilon_n}{2 - 2\alpha\varepsilon_n + \alpha^2\varepsilon_n^2}} \qquad (2)$$

Par conséquent, (1) et (2) nous donnent :

$$V_{n,o}(\varepsilon_n) + V_{n,1}(\varepsilon_n) = o \qquad \forall n \geq N.$$

Comme $V_{n,k}(\varepsilon_n) = V_{n,k}(S_n - S^*) = V_{n,k}(S_n) - S^*$; $k = 0,1$ (propriété 1)

alors $$V_{n,o} + V_{n,1} = 2S^* \quad \forall n \geq N.$$

Il s'ensuit que :

$$W_n = S^* \qquad \forall n \geq N$$

∎

Propriété 5 :

Si la suite $(S_n)_{n\geq o}$ de limite S^* est telle que :

- $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n(1 - \mu_n)$, $n\geq N$ où $(\mu_n)_{n\geq o}$ est une suite qui converge vers o et telle que ses termes consécutifs vérifient :

$$\mu_{n+1} = \mu_n(1 - \mu_n) \quad \forall n \text{ avec } \mu_o \neq 0,1 \text{ alors :}$$

$$W_n = S^* \qquad \forall n\geq N.$$

Preuve : Soit $n\geq N$

On a : $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n(1 - \mu_n)$, donc $\Delta\varepsilon_n = - \mu_n \varepsilon_n$ et

$$\Delta\varepsilon_{n+1} = - \mu_{n+1}\varepsilon_{n+1} = - \mu_n(1 - \mu_n)^2\varepsilon_n$$

Donc $\lambda_n(\varepsilon_n) = \dfrac{\Delta\varepsilon_{n+1}}{\Delta\varepsilon_n} = (1 - \mu_n)^2$ et $\lambda_{n+1}(\varepsilon_n) = (1 - \mu_n + \mu_n^2)^2$

Donc, d'une part : $1 - \lambda_{n+1}(\varepsilon_n) = \mu_n(1 - \mu_n)\ (2 - \mu_n + \mu_n^2)$

et d'autre part : $\Delta\lambda_n(\varepsilon_n) = \mu_n^2\ (2 - 2\mu_n + \mu_n^2)$.

Par suite :

$$b_n(\varepsilon_n) = \frac{1 - \lambda_{n+1}(\varepsilon_n)}{\Delta\lambda_n\ (\varepsilon_n)} = \frac{\mu_n(1 - \mu_n)(2 - \mu_n + \mu_n^2)}{\mu_n^2\ (2 - 2\mu_n + \mu_n^2)}$$

Soit

$$\boxed{b_n(\varepsilon_n) = \frac{(1 - \mu_n)(2 - \mu_n + \mu_n^2)}{\mu_n(2 - 2\mu_n + \mu_n^2)}}$$

Rappelons que :

$$\begin{cases} V_{n,o}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1} + b_n(\varepsilon_n)\ \Delta\varepsilon_n \\ V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+2} + b_n(\varepsilon_n)\ \Delta\varepsilon_{n+1} \end{cases}$$

Donc, d'une part :

$$b_n(\varepsilon_n).\ \Delta\varepsilon_n = -\frac{(1-\mu_n)(2-\mu_n+\mu_n^2)\varepsilon_n}{2-2\mu_n+\mu_n^2} \quad \text{et}$$

$$V_{n,o}(\varepsilon_n) = \varepsilon_n(1-\mu_n) - \varepsilon_n\ \frac{(1-\mu_n)(2-\mu_n+\mu_n^2)}{2-2\mu_n+\mu_n^2}$$

Soit :

$$\boxed{V_{n,o}(\varepsilon_n) = -\ \varepsilon_n(1-\mu_n)\ \frac{\mu_n}{2-2\mu_n+\mu_n^2}} \qquad (3)$$

D'autre part : $\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+1}\ (1-\mu_{n+1})$.

Soit : $\varepsilon_{n+2} = \varepsilon_n(1-\mu_n)(1-\mu_n+\mu_n^2)$, donc :

$\Delta\varepsilon_{n+1} = -\ \mu_n\ \varepsilon_n\ (1-\mu_n)^2$. Par suite

$$V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_n(1-\mu_n)(1-\mu_n+\mu_n^2) - \frac{\mu_n\ \varepsilon_n(1-\mu_n)^3(2-\mu_n+\mu_n^2)}{\mu_n(2-2\mu_n+\mu_n^2)}$$

Soit : $V_{n,1}(\varepsilon_n) = \dfrac{\varepsilon_n(1-\mu_n)}{2-2\mu_n+\mu_n^2}\left[(1-\mu_n+\mu_n^2)(2-2\mu_n+\mu_n^2) - (1-2\mu_n+\mu_n^2)(2-\mu_n+\mu_n^2)\right]$

Soit encore : $V_{n,1}(\varepsilon_n) = \dfrac{\varepsilon_n(1-\mu_n)}{2-2\mu_n+\mu_n^2}\Big[(1-\mu_n+\mu_n^2)(2-\mu_n+\mu_n^2) - \mu_n(1-\mu_n+\mu_n^2)$

$-(1-\mu_n+\mu_n^2)(2-\mu_n+\mu_n^2) + \mu_n(2-\mu_n+\mu_n^2)\Big]$

Donc on obtient :

$$\boxed{V_{n,1}(\varepsilon_n) = \varepsilon_n(1-\mu_n)\ \frac{\mu_n}{2-2\mu_n+\mu_n^2}} \qquad (4)$$

Par suite, (3) et (4) impliquent : $V_{n,o}(\varepsilon_n) + V_{n,1}(\varepsilon_n) = o \quad \forall n \geq N$.

Comme $V_{n,k}(\varepsilon_n) = V_{n,k} - S^*$; $k=0,1$ (propriété 1), alors :

$$V_{n,o} + V_{n,1} = 2S^* \quad \forall n \geq N.$$

Par conséquent :

$$W_n = S^* \quad \forall n \geq N.$$

∎

Notons que ce type de suites a été introduit par C. Kowalewski dans [9] , notamment dans le cadre de l'étude des classes de suites à convergence logarithmique.

Avant d'exposer les essais numériques, nous aimerions formuler deux remarques.

a) $(W_n)_{n\geq o}$ peut-être considérée comme une transformation composite particulière avec comme coéfficients de pondération :

$$a_1 = a_2 = 1/2 \ , \quad \text{soit } W_n = a_1 V_{n,o} + a_2 V_{n,1} \quad n\geq o.$$

Sachant la difficulté à accélérer la convergence des suites appartenant aux familles précédentes, ceci montre l'efficacité des transformations composites proposées par C. Brezinski [6] , même dans ce cas particulier.

b) En ce qui concerne le contrôle d'erreur, ce qui précéde confirme qu'on peut trouver une autre transformation : $(V_{n,1})_n$, qui converge plus vite que $(S_n)_n$ vers S^* et qui se situe de l'autre côté de la limite par rapport à $(T\ (-b_n))_n = (V_{n,o})_n$. Dans les deux propriétés précédentes, on a : $S^* \in [V_{n,o} \wedge V_{n,1}]$ $\forall n\geq N$.

Essais numériques :

a) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$
$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n(1 - \alpha S_n) \\ S_1 = 1 \end{cases}$$

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = o$. Cette suite vérifie la condition de la propriété 4 pour tout $n\geq 1$. Donc, on s'attend à ce que $W_n = o$ $\forall n\geq 1$.

On donne à α 3 valeurs successives : 0.5, 0.05 et 0.005.

Alors on obtient :

i) $\alpha = 0.5$:

n	S_n	$V_{n,o}$	$V_{n,1}$	W_n
1	.1000000000000000D+01	-.2000000000000000D+00	.2000000000000000D+00	.5551115123125780D-16
2	.5000000000000000D+00	-.6000000000000000D-01	.6000000000000000D-01	.1387778780781450D-16
3	.3750000000000000D+00	-.3441176470588230D-01	.3441176470588240D-01	.2775557561562890D-16
4	.3046875000000000D+00	-.2289518590454910D-01	.2289518590455150D-01	.2373101715136270D-14

ii) $\alpha = 0.05$:

n	S_n	$V_{n,o}$	$V_{n,1}$	W_n
1	.1000000000000000D+01	-.2496714848942690D-01	.2496714848829120D-01	-.1135730398615920D-11
2	.9500000000000000D+00	-.2253580896562040D-01	.2253580896713650D-01	.1516051173489070D-11
3	.9048750000000000D+00	-.2044804883815140D-01	.2044804883685660D-01	-.1294783724681280D-11
4	.8639350617187500D+00	-.1864141750783350D-01	.1864141750829400D-01	.4604927550388990D-12

iii) $\alpha = 0.005$:

n	S_n	$V_{n,o}$	$V_{n,1}$	W_n
1	.1000000000000000D+01	-.2499968676568310D-02	.2499968510967830D-02	-.1656004777750300D-09
2	.9950000000000000D+00	-.2475032118689880D-02	.2475031320415810D-02	-.7982740718448510D-09
3	.9900498750000000D+00	-.2450466764134560D-02	.2450466663966450D-02	-.1001681099177530D-09
4	.9851488812250630D+00	-.2426265389895600D-02	.2426267033097910D-02	.1643202310330770D-08

On peut constater qu'au fur et à mesure qu'on diminue la valeur de α, la suite $(S_n)_{n\geq o}$ converge plus lentement et la précision sur W_n diminue.

b) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$: $\begin{cases} S_{n+1} = S_n(1 - \mu_n) \\ \mu_{n+1} = \mu_n(1 - \mu_n) \end{cases}$ avec $\begin{cases} \mu_1 = 0.3 \\ S_1 = 1 \end{cases}$

La limite de cette suite est $S^* = 0$. Elle vérifie la condition de la propriété 5 à partir de la première itération. Il s'ensuit que $W_n = o \quad \forall n \geq 1$.

n	S_n	$V_{n,o}$	$V_{n,1}$	W_n
1	.1000000000000000D+01	-.1409395973154390D+00	.1409395973154350D+00	-.1915134717478400D-14
2	.7000000000000000D+00	-.7150421772058330D-01	.7150421772058410D-01	.3677613769070630D-15
3	.5530000000000000D+00	-.4512682474914360D-01	.4512682474914830D-01	.2352285033424550D-14
4	.4612573000000000D+00	-.3156302459127500D-01	.3156302459128750D-01	.6231126725706690D-14

c) On va terminer avec un exemple de suite qui ne vérifie les hypothèses de la propriété 5 qu'à partir d'un certain rang.

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$: $\begin{cases} S_{n+1} = S_n\ (1 - \mu_n)\ ;\ S^* = o \\ \\ \mu_{n+1} = \mu_n\ (1 - \alpha_n\ \mu_n),\ \text{où} \end{cases}$

$(\alpha_n)_n$: $\alpha_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$; avec $\mu_1 = 0.3$ et $S_1 = 1$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$,

alors $\exists N$: $\forall n \geq N \quad W_n = o$.

Sur le plan numérique, on obtient :

n	S_n	$V_{n,o}$	$V_{n,1}$	W_n
1	.1000000000000000D+01	.335808302396221D+00	.444286196422545D+00	.390047249409383D+00
2	.7000000000000000D+00	.201978978086939D+00	.254421004570184D+00	.228199991328561D+00
3	.5845000000000000D+00	.111720826558429D+00	.157624919498387D+00	.134672873028408D+00
4	.507948765625000D+00	.543147581884557D-01	.960629496701188D-01	.751888539292872D-01
5	.451225194963519D+00	.214443870949073D-01	.586621461116095D-01	.400532666032584D-01
6	.406814788364960D+00	.438903553056168D-02	.369481245341938D-01	.206685800323778D-01
7	.370839239625332D+00	-.364876072546474D-02	.245777639020558D-01	.104645015882955D-01
8	.340990463795042D+00	-.697759298782721D-02	.174640443351913D-01	.524322567368204D-02
9	.315770612317516D+00	-.800636921871987D-02	.132329830551013D-01	.261330691819071D-02
10	.294150100915289D+00	-.798340835156124D-02	.105822131171392D-01	.129940238278848D-02
11	.275391597080460D+00	-.752392746519687D-02	.881499643985081D-02	.645534487326974D-03
12	.258950428880916D+00	-.691864139958981D-02	.755996920834069D-02	.320663904375441D-03
13	.244414221565911D+00	-.629815548245295D-02	.661681086570176D-02	.159327691624404D-03
14	.231464379329363D+00	-.571634115657865D-02	.587473456113306D-02	.791967022772053D-04
15	.219850510986859D+00	-.519142229664600D-02	.527018957226409D-02	.393836378090456D-04
16	.209372903486545D+00	-.472580490141947D-02	.476499208037785D-02	.195935894791929D-04
17	.199870193947302D+00	-.431545041327860D-02	.433495419395527D-02	.975189033833312D-05
18	.191210505727339D+00	-.395418263323151D-02	.396389341691528D-02	.485539184188338D-05
19	.183284953383635D+00	-.363557529069035D-02	.364041182344432D-02	.241826637698700D-05
20	.176002803835817D+00	-.335370593231916D-02	.335611552216802D-02	.120479492442954D-05
21	.169287817932688D+00	-.310339411881240D-02	.310459491053144D-02	.600395859522151D-06
22	.163075447698626D+00	-.288021706057959D-02	.288081560426764D-02	.299271844028670D-06
23	.157310663331999D+00	-.268043897903003D-02	.268073739167991D-02	.149206324941142D-06
24	.151946250052024D+00	-.250091547270194D-02	.250106427721115D-02	.744022546073066D-07
25	.146941459868124D+00	-.233899878808325D-02	.233907300630208D-02	.371091094172882D-07
26	.142260934514642D+00	-.219245363638992D-02	.219249065644626D-02	.185100281699380D-07
27	.137873837729226D+00	-.205938589137776D-02	.205940436061247D-02	.923461735552467D-08
28	.133753150708983D+00	-.193818366591274D-02	.193819288189077D-02	.460798901813497D-08
29	.129875095896952D+00	-.182746909761868D-02	.182747369638526D-02	.229938329487922D-08
30	.126218662531775D+00	-.172605907679238D-02	.172606137171602D-02	.114746182000580D-08
31	.122765213518002D+00	-.163293325696236D-02	.163293440229931D-02	.572668475140592D-09
32	.119498157750853D+00	-.154720793406975D-02	.154720850746191D-02	.286696083540150D-09
33	.116402675481461D+00	-.146811465146372D-02	.146811493489669D-02	.141716485768661D-09
34	.113465486936084D+00	-.139498257783185D-02	.139498272120417D-02	.716861570104754D-10
35	.110674656419183D+00	-.132722397557299D-02	.132722404598609D-02	.352065529507506D-10
36	.108019425689898D+00	-.126432209545636D-02	.126432213187426D-02	.182089482381187D-10
37	.105490071616722D+00	-.120582111267029D-02	.120582113096870D-02	.914920916805784D-11
38	.103077784068649D+00	-.115131767108438D-02	.115131767848706D-02	.370135172511610D-11
39	.100774560754181D+00	-.110045377457395D-02	.110045378070661D-02	.306633191060612D-11
40	.985731163179829D-01	-.105291079282958D-02	.105291079355181D-02	.361113916547140D-12
41	.964668034834112D-01	-.100840434270172D-02	.100840434569827D-02	.149827372730726D-11
42	.944495444136947D-01	-.966679973609469D-03	.966679971609194D-03	-.100013747283967D-11
43	.925157707753449D-01	-.927509426775178D-03	.927509428816184D-03	.102050312644764D-11
44	.906603712398051D-01	-.890687484864344D-03	.890687482464028D-03	-.120015802851370D-11
45	.888786453653855D-01	-.856029196710406D-03	.856029198760877D-03	.102523545209010D-11
46	.871662629704553D-01	-.823367545370907D-03	.823367545871242D-03	.250167941917567D-12
47	.855192282479893D-01	-.792551371073119D-03	.792551370867839D-03	-.102640118626596D-12
48	.839338479866135D-01	-.763443604645905D-03	.763443605879072D-03	.616583173407292D-12
49	.824067033588289D-01	-.735919718092254D-03	.735919715300667D-03	-.139579320324046D-11

Maintenant, si l'on dispose d'un exemple de suite qui ne vérifie pas les conditions des propriétés 4 et 5 et qui n'appartient pas aux noyaux de $(V_{n,k})_{n\geq o}$, k = 1,2,..., alors peut-on cependant obtenir un encadrement de la limite à l'aide de $(V_{n,o})_{n\geq o}$ et $(V_{n,1})_{n\geq o}$? Le cas échéant, peut-on étendre cet encadrement à deux transformations quelconques du procédé V ? La réponse fera l'objet du paragraphe suivant.

V - Contrôle d'erreur à l'aide de deux transformations du procédé V.

Pour commencer, on va donner un exemple de suite pour lequel il existe k_o : $S^*\in[V_{n,k_o} \wedge V_{n,k_o+1}]$ $\forall n\geq N$.

Soit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$: $\begin{cases} S_{n+1} = S_n \dfrac{1 - S_n}{1 + S_n} \\ S_1 = 0.9 \end{cases}$, on a $S^* = o$.

Notons que cet exemple vérifie les hypothèses (C_f), donc l'application de $(V_{n,k})_{n\geq 1}$ à $(S_n)_{n\geq 1}$ accélère la convergence vers o.
L'essai numérique avec $(V_{n,o})_n$, $(V_{n,1})_n$ et $(V_{n,2})_n$ donne :

n	S_n	$V_{n,o}$	$V_{n,1}$	$V_{n,2}$
1	.90000000000000D+00	-.12748973684210 3D+00	.42205156043374 8D-01	.38794843956625 3D-01
2	.47368421052631 6D-01	-.51525498732020 3D-02	-.54402882242536 1D-03	.26815124206060 0D-02
3	.43083840253901 1D-01	-.42953901372199 8D-02	-.48646898493847 0D-03	.22627133066932 0D-02
4	.39524745156479 5D-01	-.36381313831575 9D-02	-.43564673633957 4D-03	.19361064426198 5D-02
5	.36519130356132 5D-01	-.31226111454036 5D-02	-.39130414379325 5D-03	.16762474013790 9D-02
6	.33945811942781 1D-01	-.27105079192442 5D-02	-.35275979276279 2D-03	.14659615660540 5D-02
7	.31716839911278 9D-01	-.23757018783171 3D-02	-.31924638792239 3D-03	.12932985151616 6D-02
8	.29766773972558 3D-01	-.20998722907366 7D-02	-.29003936504158 3D-03	.11497250252357 8D-02
9	.28045877833493 4D-01	-.18698493213736 2D-02	-.26449931236006 6D-03	.10290104942381 7D-02
10	.26515651837920 4D-01	-.16759620824445 3D-02	-.24207907638278 3D-03	.92651624979113 5D-03
11	.25145814386088 1D-01	-.15109753211434 7D-02	-.22231719061858 4D-03	.83872917197742 4D-03
12	.23912210400652 6D-01	-.13693860363981 0D-02	-.20482689205276 1D-03	.76294784451691 5D-03
13	.22795329870394 4D-01	-.12469468689622 0D-02	-.18928460883880 6D-03	.69706660249438 4D-03
14	.21779237894366 4D-01	-.11403361897167 9D-02	-.17541942758999 9D-03	.63942397157323 0D-03
15	.20850788410039 7D-01	-.10469253398365 4D-02	-.16300400958710 8D-03	.58869439450674 0D-03
16	.19999037336805 2D-01	-.96461157610450 0D-03	-.15184698356366 1D-03	.54380963311696 5D-03
17	.19214798372338 7D-01	-.89169629959953 8D-03	-.14178666922814 4D-03	.50390087937781 2D-03
18	.18490302462194 5D-01	-.82679503480440 4D-03	-.13268593871692 6D-03	.46825555041282 5D-03
19	.17818933703322 8D-01	-.76877001736778 7D-03	-.12442802107010 1D-03	.43628465142159 3D-03
20	.17195022341862 6D-01	-.71667911656155 0D-03	-.11691308116225 0D-03	.40749784313422 0D-03
21	.16613680933690 1D-01	-.66973670818792 9D-03	-.11005542295900 2D-03	.38148420188935 7D-03
22	.16070673497644 2D-01	-.62728340189406 0D-03	-.10378119993765 1D-03	.35789722928249 2D-03
23	.15562310145754 9D-01	-.58876240216442 4D-03	-.98026536618317 7D-04	.33644306803409 1D-03
24	.15085361573218 9D-01	-.55370088595957 3D-03	-.92735978899059 1D-04	.31687116504166 1D-03
25	.14636989165519 0D-01	-.52169521584466 5D-03	-.87861212935879 7D-04	.29896681492429 1D-03

On remarque, pour cet exemple, que $(V_{n,1})_{n\geq 1}$ donne des meilleurs résultats que $(V_{n,o})_{n\geq 1}$ et $(V_{n,2})_{n\geq 1}$ et que $0\in[V_{n+1,1}\ ;\ V_{n+1,2}]\subseteq[V_{n,1}\ ;\ V_{n,2}]\ \forall n\geq 2$.
Donc, dans ce cas, on a une estimation de la limite à l'aide de $(V_{n,1})_n$ et $(V_{n,2})_n$.
Tandis que, dans le cas des suites des propriétés 4 et 5, si on ne tient pas compte de la transformation $(W_n)_n$, on a $S^*\in[V_{n,o}\ \Lambda\ V_{n,1}]\ \forall n\geq N$.
Donc à partir de ces constatations, on va proposer un critère qui va nous permettre de déterminer, pour une suite donnée, le couple $((V_{n,k_o})_n, (V_{n,k_{o+1}})_n)$ qui servira d'encadrement pour la limite et qui, en même temps, va nous éviter le calcul des autres transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\neq k_o$ et $k\neq k_o+1$.
Le résultat qui va suivre donne ce critère pour une suite $(b_n)_n$ quelconque.
Donc, soit $(c_n)_n$ une suite donnée. On considère les transformations de suites suivantes :

$$Z_{n,k} = S_{n+k+1} + c_n\,\Delta S_{n+k}\ ,\quad n\geq o \text{ et } k\geq o.$$

On note : $$J_{n,k} = [Z_{n,k}\ \Lambda\ Z_{n,k+1}].$$

Proposition 4 :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite strictement monotone de limite S^*.
On suppose que $(c_n)_{n\geq o}$ est une suite strictement positive et strictement croissante.

Si pour un entier $k\geq o$, $\exists N$: $\lambda_{n+k} \leq \dfrac{c_n}{1+c_{n+1}} \leq \lambda_{n+k+1}$ (*) $\forall n\geq N$,

alors $J_{n+1,k} \subseteq J_{n,k}$ $\forall n\geq N$.

Si en plus : $\lim\limits_{n\to\infty} Z_{n,k} = \lim\limits_{n\to\infty} Z_{n,k+1} = S^*$, alors $S^*\in J_{n,k}$ $\forall n\geq N$.

Preuve :

On ne restreint pas la généralité en supposant $\Delta S_n < o$ $\forall n$, car dans le cas où $\Delta S_n > o$ $\forall n$, il suffit de remplacer $(S_n)_n$ par $(-S_n)_n$, $(Z_{n,k})_n$ par $(-Z_{n,k})_n$ et $(Z_{n,k+1})_n$ par $(-Z_{n,k+1})_n$. Donc, on suppose que $\Delta S_n < o$ $\forall n\geq o$.

On a :

$$o < c_n < c_{n+1} \Rightarrow o < 1 + c_n < 1 + c_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1+c_{n+1}} < \frac{1}{1+c_n}$$

Soit : $\dfrac{c_n}{1+c_{n+1}} < \dfrac{c_n}{1+c_n} \quad \forall n.$

Or $\forall n \geq N : \lambda_{n+k} \leq \dfrac{c_n}{1+c_{n+1}}$ (*), alors $\lambda_{n+k} < \dfrac{c_n}{1+c_n} \quad \forall n \geq N$

Donc $Z_{n,k+1} - Z_{n,k} = S_{n+k+2} + c_n \; \Delta S_{n+k+1} - S_{n+k+1} - c_n \; \Delta S_{n+k}$

Soit $Z_{n,k+1} - Z_{n,k} = \Delta S_{n+k} \; (1 + c_n) \; (\lambda_{n+k} - \dfrac{c_n}{1+c_n}) > o \quad \forall n \geq N.$

Donc : $J_{n,k} = [Z_{n,k} \, , \, Z_{n,k+1}] \quad \forall n \geq N$. Par suite : $n \geq N$

$$J_{n+1,k} \subseteq J_{n,k} \iff \begin{cases} Z_{n,k} \leq Z_{n+1,k} \\ Z_{n+1\,,\,k+1} \leq Z_{n,k+1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} S_{n+k+1} + c_n \; \Delta S_{n+k} \leq S_{n+k+2} + c_{n+1} \; \Delta S_{n+k+1} \\ S_{n+k+3} + c_{n+1} \; \Delta S_{n+k+2} \leq S_{n+k+2} + c_n \; \Delta S_{n+k+1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_n \; \Delta S_{n+k} \leq (1 + c_{n+1}) \; \Delta S_{n+k+1} \\ (1 + c_{n+1}) \; \Delta S_{n+k+2} \leq c_n \; \Delta S_{n+k+1} \end{cases}$$

$$\iff \lambda_{n+k} \leq \frac{c_n}{1 + c_{n+1}} \leq \lambda_{n+k+1} \quad , \text{ car } c_p > o, \; \Delta S_p < o \; \forall p$$

Donc : $J_{n+1,k} \subseteq J_{n,k} \quad \forall n \geq N$ et comme $\lim\limits_{n \to \infty} Z_{n,k} = \lim\limits_{n \to \infty} Z_{n,k+1} = S^*$,

alors $\{S^*\} \subseteq \ldots \subseteq J_{n+1,k} \subseteq J_{n,k} \subseteq \ldots \subseteq J_{N,k}$.

C'est-à-dire : $S^* \in J_{n,k} \quad \forall n \geq N.$ ∎

<u>Remarque</u>

La conclusion ne change pas si les autres conditions ne sont vérifiées qu'à partir du rang N.

Pour le choix $b_n = \dfrac{1-\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}$, on a : $\dfrac{b_n}{1+b_{n+1}} = \dfrac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n}$

Donc la condition ($*$) devient :

$$\lambda_{n+k} \leq \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} \leq \lambda_{n+k+1}$$

Par conséquent si $(b_n)_n$ est strictement positive et est strictement croissante et si $\exists k$: $\lambda_{n+k} \leq \dfrac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} \leq \lambda_{n+k+1}$ $\forall n\geq N$, alors $(V_{n,k})_n$ et $(V_{n,k+1})_n$ seront choisies pour estimer la limite, à partir du rang N. Avec les conditions (C_f), on a montré que :

$$o < \lambda_n < \lambda_{n+1} < 1 \quad \forall n, \text{ donc } b_n > o \quad \forall n$$

Il reste à voir dans quelles conditions $(b_n)_n$ est strictement croissante. C'est l'objet du résultat suivant :

Propriété 6 :

On suppose que la suite $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est telle que :

$$o < \lambda_n < \lambda_{n+1} < 1 \quad \forall n\geq o, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1$$

Si $\exists\omega : [0,1] \to [0,1]$ deux fois dérivable : $\omega(\lambda_n) = \lambda_{n+1}$ $\forall n\geq o$ et vérifiant $\omega'' > o$ sur $[\rho,1]$, où $\rho\in]0,1[$, alors $\exists N\geq o$: $(b_n)_{n\geq N}$ est strictement croissante.
N étant le plus petit entier tel que : $\lambda_N\in[\rho,1]$.

Preuve : On a : $\lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n)$ $\forall n\geq o$

Notons que $\omega(1)=1$, car ω est continue et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n=1$.

i) On pose $g(x) = \dfrac{1-\omega(x)}{1-x}$ pour $x \neq 1$.
g est strictement croissante sur $[\rho,1[$, en effet :
soient x,y et $z \in[\rho,1]$: $x < y < z \leq 1$. On peut écrire

$y = \dfrac{z-y}{z-x}\, x + \dfrac{y-x}{z-x}\, z$. Si on pose $\lambda = \dfrac{z-y}{z-x}$, on a bien $o < \lambda < 1$

et $1 - \lambda = \dfrac{y - x}{z - x}$.

ω étant strictement convexe sur $[\rho,1]$, alors on a :

$$\omega(y) < \frac{z - y}{z - x}\omega(x) + \frac{y - x}{z - x}\,\omega(z).$$

En particulier pour $z = 1$, on obtient :

$$\omega(y) < \frac{1-y}{1-x}\,\omega(x) + \frac{y-x}{1-x}$$, car $\omega(1) = 1$. Or $1 - x > o$, on a alors :

$$x + (1 - x)\,\omega(y) < y + (1 - y)\,\omega(x)$$

Soit : $(1 - x) - (1 - x)\,\omega(y) > (1 - y) - (1 - y)\,\omega(x)$, en ajoutant 1 aux deux membres, après les avoir multiplié par (-1).

Donc : $(1 - x)\,(1 - \omega(y)) > (1 - y)\,(1 - \omega(x))$

Soit : $\dfrac{1 - \omega(x)}{1 - x} < \dfrac{1 - \omega(y)}{1 - y}$, car $(1 - x)\,(1 - y) > o$.

Donc, $\underline{g(x) < g(y) \qquad \forall x, y \in [\rho,1[\ : x < y.}$

ii) on a $g(x) = u(x)\,(1 - \omega(x))$ avec $u(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $u'(x) = u^2(x)$

donc : $g'(x) = u'(x)\,(1 - \omega(x)) - u(x)\omega'(x) = u^2(x)(1-\omega(x)) - u(x)\omega'(x)$

soit : $g'(x) = u(x)\,(g(x) - \omega'(x))$

comme $\begin{cases} g'(x) > o \quad \forall x \in [\rho,1[\text{, alors } \underline{g(x) > \omega'(x) \quad \forall x \in [\rho,1[} \\ u(x) > o \end{cases}$

iii) Soient x, y : $\rho \le x < y < 1$, ω étant dérivable, $\exists\ \alpha \in]x, y[$:

$$\omega'(\alpha) = \frac{\omega(y) - \omega(x)}{y - x}.$$

Or, d'une part : $g(\alpha) > \omega'(\alpha)$ (ii) et d'autre part :

$g(y) > g(\alpha)$ (i) alors :

$g(y) > \omega'(\alpha) = \dfrac{\omega(y) - \omega(x)}{y - x}$, ceci étant vrai $\forall x,y$:

$\rho \le x < y < 1$, en particulier pour les termes de la suite telles que $\rho \le \lambda_n$.

Donc, soit N le plus petit entier tel que $\lambda_n \geq \rho \quad \forall n \geq N$.

Comme $\lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \forall n$, alors $g(\lambda_{n+1}) > \dfrac{\omega(\lambda_{n+1}) - \omega(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \quad \forall n \geq N$.

Soit : $\dfrac{1 - \lambda_{n+2}}{1 - \lambda_{n+1}} > \dfrac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta\lambda_n} \quad \forall n \geq N$, car :

- $g(\lambda_k) = \dfrac{1 - \lambda_{k+1}}{1 - \lambda_k} \quad \forall k$ et $\omega(\lambda_k) = \lambda_{k+1} \quad \forall k$.

Comme $o < \lambda_k < \lambda_{k+1} < 1 \quad \forall k$, alors $\dfrac{1 - \lambda_{n+2}}{\Delta \lambda_{n+1}} > \dfrac{1 - \lambda_{n+1}}{\Delta \lambda_n} \quad \forall n \geq N$.

Par conséquent : $(b_n)_{n \geq N}$ est strictement croissante. ∎

On remarque dans cette propriété, qu'on peut se passer des conditions (C_f), si on peut vérifier par un autre moyen l'hypothèse : $o < \lambda_n < \lambda_{n+1} < 1$ $\forall n$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 1$ (c'est le cas, par exemple, des suites totalement monotones à convergence logarithmique [5]).

Mais, il faut noter que les conditions (C_f) nous servent à démontrer l'accélération de la convergence des transformations $(V_{n,k})_{n \geq o}$, k=0,1,2,...

Cependant, on a fait des essais numériques sur des suites qui ne sont pas des suites de point fixe, en se basant uniquement sur le critère (*).

C'est le cas notamment des deux séries suivantes :

$$\sum_{k \geq o} \frac{1}{(k+1)^2} \qquad \text{et} \sum_{k \geq o} \left[\frac{1}{k+1} + \log \frac{k+1}{k+2}\right]$$

On constatera que pour ces deux exemples, ce sont les transformations $(V_{n,2})_{n \geq o}$ et $(V_{n,3})_{n \geq o}$ qui sont choisies pour l'encadrement de la limite.

On verra, en même temps, qu'elles accélèrent la convergence de ces deux séries, bien que $(V_{n,2})_n$ converge mieux que $(V_{n,3})_n$ vers la limite.

<u>Essais numériques :</u>

Donc on considère les suites de sommes partielles suivantes :

a) $\begin{cases} (S_n)_{n \geq o} : \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=o}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \\ S^* = 1.64493406684 \end{cases}$ et b) $\begin{cases} (S'_n)_{n \geq o} : \quad S'_n = \displaystyle\sum_{k=o}^{n} \left[\frac{1}{k+1} + \log \frac{k+1}{k+2}\right] \\ S^* = 0.5772156649 \end{cases}$

Si on note $(V_{n,k})_n$ (resp. $(V'_{n,k})_n$) la suite obtenue en appliquant la transformation $V_{.,k}$ (resp. $V'_{.,k}$) à la suite $(S_n)_n$ (resp $(S'_n)_n$), k=2,3, alors on obtient :

$V_{n,2}$	$V_{n,3}$	$V'_{n,2}$	$V'_{n,3}$
.1655228758169930D+01	.1611846405228750D+01	.5762158350454750D+00	.5996883432877550D+00
.1649417562724020D+01	.1620421146953410D+01	.5765985590544510D+00	.5924264445396650D+00
.1647284580498850D+01	.1626332602310620D+01	.5766061736385181D+00	.5882398156921390D+00
.1646318466353700D+01	.163041500990069D+01	.5769991334225010D+00	.5855754093294680D+00
.1645817670710850D+01	.1633314866509320D+01	.5770746680172450D+00	.5837723825943350D+00
.1645532288374750D+01	.1635437022505190D+01	.5771190915767580D+00	.5824953829419230D+00
.1645357793278320D+01	.1637032245308510D+01	.5771467427748920D+00	.5815580033493070D+00
.1645245118101090D+01	.163825972049785[illegible]+01	.5771648093664730D+00	.5808496954754850D+00
.1645169123437120D+01	.163922346955898D+01	.5771770931090130D+00	.5803014914138800D+00
.1645116011243360D+01	.1639993563520030D+01	.5771857277550350D+00	.5798685499201700D+00
.1645077774445030D+01	.1640618324987740D+01	.5771919706389610D+00	.5795206933789190D+00
.1645049547440810D+01	.1641132019378620D+01	.5771965942403580D+00	.5792370089166990D+00
.1645028256718380D+01	.1641559409424180D+01	.5772000905244300D+00	.5790026339654180D+00
.1645011895480900D+01	.1641918746083310D+01	.5772027827261890D+00	.5788067714564460D+00
.1644999115407300D+01	.1642223712658660D+01	.5772048890836770D+00	.5786414250355220D+00
.1644988987703220D+01	.1642484727683670D+01	.5772065605197750D+00	.5785005705643670D+00
.1644980858338050D+01	.164270983296066D+01	.5772079036467130D+00	.5783796000331550D+00
.1644974257680220D+01	.1642905315690440D+01	.5772089952174120D+00	.5782749401392090D+00
.1644968842580670D+01	.1643076147085200D+01	.5772098914356290D+00	.5781837855382920D+00
.1644964358338340D+01	.1643226299145030D+01	.5772106340951270D+00	.5781039090019370D+00
.1644960613197970D+01	.1643358975964780D+01	.5772112547078640D+00	.5780335241446790D+00
.1644957460932060D+01	.1643476785008950D+01	.5772117773392570D+00	.5779711847274240D+00
.1644954788698920D+01	.1643581865456320D+01	.5772122205782670D+00	.5779157097998180D+00
.1644952508482780D+01	.1643675985515790D+01	.5772125989410630D+00	.5778661273858840D+00
.1644950550950990D+01	.1643760618954730D+01	.5772129238708090D+00	.5778216316299290D+00
.1644948860973900D+01	.1643836992735550D+01	.5772132044749130D+00	.5777815498626650D+00
.1644947394351930D+01	.164390615201918D+01	.5772134480580890D+00	.5777453170313480D+00
.1644946115379980D+01	.164396697558674[illegible]+01	.5772136605290700D+00	.5777124556667670D+00
.1644944994964890D+01	.1644026213891510D+01	.5772138466978100D+00	.5776825601733660D+00
.1644944009290120D+01	.1644078509566050D+01	.5772140105129840D+00	.5776552840606030D+00
.1644943138673000D+01	.1644126415431810D+01	.5772141552286320D+00	.5776303300546860D+00
.1644942366833320D+01	.1644170409204660D+01	.5772142835500130D+00	.5776074418741500D+00
.1644941680110620D+01	.1644210905311970D+01	.5772143977327350D+00	.5775863976378520D+00
.1644941067127250D+01	.1644246264819850D+01	.5772144996722530D+00	.5775670044739550D+00
.1644940518217450D+01	.1644282803332310D+01	.5772145909666570D+00	.5775490940825180D+00
.1644940025230150D+01	.1644314797782680D+01	.5772146729673810D+00	.5775325190704400D+00
.1644939581226050D+01	.1644344491948390D+01	.5772147468313150D+00	.5775171499192700D+00
.1644939180258050D+01	.1644372101085690D+01	.5772148135386930D+00	.5775028724321630D+00
.1644938817257160D+01	.1644397815886610D+01	.5772148739393270D+00	.5774895856246180D+00
.1644938487805780D+01	.1644421805697810D+01	.5772149287586070D+00	.5774771999182490D+00
.1644938188128410D+01	.1644444221390460D+01	.5772149786270210D+00	.5774656356378140D+00
.1644937914948280D+01	.1644465197705770D+01	.5772150240926700D+00	.5774548217242250D+00
.1644937665385980D+01	.1644484855247320D+01	.5772150656296910D+00	.5774446946364350D+00
.1644937436938740D+01	.1644503302259420D+01	.5772151036516710D+00	.5774351974188650D+00
.1644937227423530D+01	.164452063611463D+01	.5772151365268970D+00	.5774262789052360D+00
.1644937034948830D+01	.1644536944016280D+01	.5772151705603910D+00	.5774178930113480D+00
.1644936857746420D+01	.1644552306982630D+01	.5772152000636350D+00	.5774099981615690D+00
.1644936694426370D+01	.1644566795086070D+01	.5772152272604000D+00	.5774025567530000D+00
.1644936543572900D+01	.1644580473941310D+01	.5772152523697260D+00	.5773955347072630D+00
.1644936404040550D+01	.1644593402717690D+01	.5772152756034850D+00	.5773889011107210D+00

Pour ces deux exemples, l'encadrement est réalisé dès la première itération.

On voit donc que l'utilisation du critère (*), sur le plan pratique, fournit les deux transformations successives du procédé V qui encadrent la limite.

Il n'a pas été possible d'étudier, sur le plan théorique, l'existence de k dans le critère (*). Cependant, cela n'empêche pas d'utiliser ce critère comme un test sur le plan numérique puisqu'on prendra la précaution de fixer à l'avance un entier $\bar{k}$ afin d'arrêter les calculs si le test (*) ne se vérifie pas pour $k = o\ ;\ \bar{k}$.

En ce qui concerne l'accélération de la convergence, les deux exemples précédents montrent que le domaine d'application du procédé V ne se limite pas uniquement aux suites itératives qui vérifient les conditions (C_f).

Dans le but de montrer qu'on peut améliorer l'accélération de la convergence des transformations $(V_{n,k})_{n,k}$, on propose de les génélariser.

VI - Généralisation des transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\geq o$, au sens de Levin [10]

Comme on l'a fait remarquer dans le paragraphe III, les transformations $(V_{n,k})_{n\geq o}$, $k\geq o$, peuvent s'exprimer sous forme d'un rapport de deux déterminants.

Soit : $$V_{n,k} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{S_{n+k}}{x_n} & \dfrac{S_{n+k+1}}{x_{n+1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_n & x_{n+1} \end{vmatrix}},\quad n\geq o \text{ et } k\geq o, \text{ avec } x_n = 1 - \lambda_n$$

Par suite, on peut essayer de généraliser ces transformations, en augmentant l'ordre des déterminants.

Plusieurs façons de procéder ainsi sont possibles, mais on a choisi de procéder comme Levin [10].

Pour cela, il faut d'abord rappeler la forme générale des transformations de Levin. Elles sont toutes de la forme :

$$T_{pn} = D^{(p)}(S_n)/D^{(p)}(1) \text{ où}$$

$$D^{(p)}(S_n) = \begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \cdots\cdots & S_{n+p} \\ R_n & R_{n+1} & \cdots\cdots & R_{n+p} \\ \dfrac{R_n}{n} & \dfrac{R_{n+1}}{n+1} & \cdots\cdots & \dfrac{R_{n+p}}{n+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{R_n}{n^{p-1}} & \dfrac{R_{n+1}}{(n+1)^{p-1}} & \cdots\cdots & \dfrac{R_{n+p}}{(n+p)^{p-1}} \end{vmatrix},\quad n\geq 1 \text{ et } p\geq 1.$$

Pour obtenir $D^{(p)}(1)$, il suffit de remplacer S_n, $S_{n+1}, \ldots, S_{n+p}$ par 1 dans le déterminant précédent.
Trois choix de la suite $(R_n)_n$ définissent les transformations de Levin : t, u et v [10].

Par conséquent, notre généralisation sera de la forme,

$$V_{n,k}^{(p)} = D_k^{(p)}(S_n) \;/\; D_k^{(p)}(1) \; ; \quad \left(V_{n,k}^{(1)} = V_{n,k} \right)$$

où

$$D_k^{(p)}(S_n) = \begin{vmatrix} S_{n+k} & S_{n+k+1} & \cdots\cdots & S_{n+k+p} \\ x_n & x_{n+1} & \cdots\cdots & x_{n+p} \\ \dfrac{x_n}{n+k} & \dfrac{x_{n+1}}{n+k+1} & \cdots\cdots & \dfrac{x_{n+p}}{n+k+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_n}{(n+k)^{p-1}} & \dfrac{x_{n+1}}{(n+k+1)^{p-1}} & \cdots\cdots & \dfrac{x_{n+p}}{(n+k+p)^{p-1}} \end{vmatrix} \qquad p\geq 1 \text{ et } \begin{cases} n\geq 1 \text{ si } k=o \\ n\geq o \text{ si } k \neq o \\ \text{avec } x_n=1-\lambda_n . \end{cases},$$

On constate dans notre généralisation la présence d'un troisisème paramètre, en l'occurence l'entier k. Mais, en posant $x_n = R_{n+k} = 1 - \lambda_n$, on se ramène aux notations de Levin, puisqu'on a :

$$V_{n,k}^{(p)} = T_{p,n+k} .$$

Donc, comme l'a fait observé Levin, les déterminants précédents peuvent se calculer explicitement.

Par suite, on obtient :

$$V_{n,k}^{(p)} = S_k^{(p)}(S_n) \;/\; S_k^{(p)}(1)$$

où $$S_k^{(p)}(S_n) = \sum_{j=o}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} (j+n+k)^{p-1} \frac{S_{j+n+k}}{x_{n+j}} \qquad (S)$$

avec $x_\ell = 1 - \lambda_\ell \quad \forall \ell$.

On va donner une propriété d'exactitude de $(V_{n,k}^{(p)})$ analogue à celle de $(T_{p,n})$ proposée dans [16].

Propriété 7 :

Soit $k \geq o$ fixé.

Si $\exists N$: $x_n = c(S^* - S_{n+k}) \quad \forall n \geq N$, alors $V_{n,k}^{(p)} = S^* \ \forall n \geq N, \ \forall p$.

Preuve : Soit $n \geq N$

La constante c pouvant être simplifiée dans le rapport des deux déterminants de $V_{n,k}^{(p)}$, on peut supposer $x_n = S^* - S_{n+k}$. Par suite, en additionnant la seconde ligne de $D_k^{(p)}(S_n)$ à la première, on obtient :

$$D_k^{(p)}(S_n) = D_k^{(p)}(S^*) = S^* \, D_k^{(p)}(1).$$

∎

Pour terminer ce paragraphe, on va proposer des résultats numériques concernant cette généralisation.

Nous allons étudier l'application de $(V_{n,2}^{(p)})$ aux deux séries précédentes :

$$(S_n)_{n \geq o} \ / \ S_n = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{et} \quad (S'_n)_{n \geq o} \ / \ S'_n = \sum_{k=o}^{n} \left[\frac{1}{k+1} + \log \frac{k+1}{k+2} \right].$$

Essais numériques :

Si on note $(V_{n,2}^{(p)})_{n,p}$ $\left[\text{resp. } (V_{n,2}'^{(p)})_{n,p}\right]$ la suite obtenue en appliquant $V_{\cdot,2}^{(p)}$ à $(S_n)_n$ (Resp. $(S'_n)_n$), alors on obtient :

p	$V_{0,2}^{(p)}$
1	.165522875016993D+01
2	.164375442321304D+01
3	.164438189633043D+01
4	.164482425825644D+01
5	.164491914821983D+01
6	.164493264120500D+01
7	.164493398673176D+01
8	.164493406755052D+01
9	.164493406747310D+01
10	.1644934066813941D+01

p	$V_{0,2}'^{(p)}$
1	.576215835045474D+00
2	.576980860537267D+00
3	.577437772060937D+00
4	.577217852881841D+00
5	.577219217816092D+00
6	.577215516129153D+00
7	.577215685951105D+00
8	.5772156601983880D+00
9	.577215664961385D+00

On constate qu'on a atteint 10 chiffres significatifs en calculant $V_{0,2}^{(10)}$ pour le premier exemple et $V_{0,2}^{(9)}$ pour le second.

Donc, en tenant compte de (S), le nombre de termes de la suite à utiliser pour le premier exemple est 13 et 12 pour le second, avec $S_{12} = 1.56$ et $S'_{11} = 0.62$.

Pour p > 10, on observe une perte de précision due à l'instabilité numérique. Cela tient à ce que, dans l'algorithme, on a besoin de calculer à chaque fois les termes de la suite $(\lambda_n)_n$ en faisant le rapport de deux différences successives : $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$.

Mais, si la fonction ω associée à la suite existe et si on l'utilise pour calculer λ_n :

$$\begin{cases} \lambda_o = \dfrac{\Delta S_1}{\Delta S_o} \\ \lambda_{n+1} = \omega(\lambda_n) \end{cases},$$

alors on a un chiffre significatif de plus. C'est le cas du premier exemple pour lequel on a :

$$\omega(x) = \frac{1}{(2 - \sqrt{x})^2} \text{ . On obtient donc :}$$

p	$V_{0,2}^{(p)}$
1	.1655228758169936+01
2	.1640976617440225+01
3	.1645215470233522+01
4	.1644921109964096+01
5	.1644935871602686+01
6	.1644933938074396+01
7	.1644934066317476+01
8	.1644934066608566+01
9	.1644934066952780+01
10	.1644934066821650+01

<u>Conclusion et remarques</u> :

Les résultats numériques que nous avons présentés le long de ce chapitre montrent que l'application du procédé V, ici proposé, sur une classe de suites à convergence logarithmique, offre une possibilité de contrôler l'erreur d'une part et d'autre part peut aboutir à des résultats très intéressants en accélération de la convergence, surtout lorsqu'il s'agit de sa généralisation au sens de Levin.

Nous notons que le procédé V est conçu uniquement pour les suites à convergence logarithmique, néanmoins dans le cas où la suite (S_n) est telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = -1$, nous pouvons l'appliquer aux sous-suites d'indices pair et impair.

Parmi les résultats numériques, certains montrent que l'application de ce procédé peut s'étendre à des suites non itératives. De ce fait, deux questions importantes se posent :

Peut-on étendre la propriété 15 de B. Germain-Bonne [8, p.29] concernant la caractérisation des suites de $\mathcal{S}_k$ au cas où $f'(S^*) = 1$? Précisemment, dans quelle situation peut-on trouver une fonction β de C^1 : $\lambda_n = \beta(S_n)$ $\forall n \geq n_o$ avec $\beta(S^*) = 1$ et $\beta'(S^*) \neq o$?

CHAPITRE III

UNE METHODE DE CONTROLE D'ERREUR POUR CERTAINES CLASSES DE SUITES OSCILLANTES : METHODE BASEE SUR LES INTERVALLES EMBOITES.

I - Introduction :

Dans ce chapitre, il s'agira d'une méthode d'estimation de la limite de certaines suites oscillantes convergentes, à l'aide d'une suite d'intervalles emboîtés et ceci à partir de la première itération.

. En effet, ce procédé consiste à transformer séparément les deux sous-suites d'indices pair et impair (qu'on suppose monotones), la transformation en question étant choisie de telle sorte que les deux suites obtenues restent monotones, en sens contraire. Ceci nous permettra de considérer la suite d'intervalles qui ont pour bornes respectives les termes des suites croissantes et décroissantes ainsi obtenues. On a ainsi un encadrement de la limite, puisque ces deux suites doivent converger vers cette même limite.

Cette méthode exige donc une étude de la monotonie de ces transformations appliquées à des suites monotones. Un travail dans ce sens a été fait par Opfer [13].

Dans le prochain paragraphe, on va donner un résultat fondamental semblable à celui de Opfer, mais qui comportera une hypothèse en moins pour la même conclusion.

On trouvera, dans la suite, une étude détaillée faite avec le procédé Δ^2 d'Aitken. C'est pourquoi la méthode de l'estimation de la limite sera appliquée uniquement avec ce procédé.

II - Etude de la variation d'une suite obtenue à l'aide d'une transformation T :

Soit $(u_n)_{n\geq o}$ une suite réelle strictement monotone, de limite u^*.

Soit T la transformation de suites définie par :

$$T = (u_n)_{n\geq o} \longrightarrow (T_n)_{n\geq o} \quad : \quad \begin{cases} T_n = u_{n+1} + b_n \Delta u_n, \\ n\geq o \end{cases}$$

où $(b_n)_{n\geq o}$ est une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \Delta u_n = o$. Cette condition assure la convergence de la suite $(T_n)_{n\geq o}$ vers u^*.

Une question qu'on peut se poser est : Dans quelle(s) condition (s), la suite $(T_n)_{n\geq o}$ est-elle monotone ?

En effet, on a : $\Delta T_n = \Delta u_n \, (1 + b_{n+1}) \, (\lambda_n - \dfrac{b_n}{1 + b_{n+1}})$ où $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est telle que $\lambda_n = \dfrac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n}$ (on gardera toujours cette notation lorsqu'il s'agira du rapport des différences des termes successifs de la suite initiale) ; Δu_n est non nul, car $(u_n)_{n\geq o}$ est strictement monotone.

Donc, si $(1 + b_n) > o \; \forall n$, alors, en tenant compte de :

$$\Delta T_n . \, \Delta u_n = (\Delta u_n)^2 \, (1 + b_{n+1}) \, (\lambda_n - \frac{b_n}{1 + b_{n+1}}) ,$$

On peut en déduire que :

$$(1) \begin{cases} * \;\; \exists N : (T_n)_{n\geq N} \text{ est monotone (avec inversion de la monotonie)} \\ \iff \Delta T_n . \, \Delta u_n \leq o \quad \forall n\geq N \iff \lambda_n \leq \dfrac{b_n}{1 + b_{n+1}} \quad \forall n\geq N \\ * \;\; \exists N : (T_n)_{n\geq N} \text{ est monotone (avec conservation de la monotonie)} \\ \iff \Delta T_n . \Delta u_n \geq o \quad \forall n\geq N \iff \lambda_n \geq \dfrac{b_n}{1 + b_{n+1}} \quad \forall n\geq N \end{cases}$$

Une étude sur la monotonie, dans le cas des procédés linéaires et non linéaires, a été abordée par Opfer [13]. Dans le cas des procédés non linéaires, ses deux théorèmes se résument dans (1), mais ils contiennent une hypothèse inutile en plus .

En effet : il considère la transformation suivante :

$$T_n = \frac{u_{n+1} - r_n u_n}{1 - r_n} \quad \text{avec } r_n \neq 1 \quad \forall n.$$

Il est facile d'établir une liaison entre les deux écritures de T_n. On a $b_n = \dfrac{r_n}{1 - r_n}$ .Il impose à la suite $(r_n)_{n\geq o}$ d'être monotone dans le même sens que la suite $(u_n)_{n\geq o}$, alors que nous, nous n'avons pas eu besoin que la suite $\left(\dfrac{b_n}{1 + b_n}\right)_{n\geq o}$ soit monotone $\left(r_n = \dfrac{b_n}{1 + b_n}\right)$.

Nous donnerons un contre exemple dans le paragraphe suivant, en étudiant le cas où T est le procédé Δ^2 d'Aitken.

III - Etude de la monotonie du procédé Δ^2 d'Aitken

Afin d'illustrer la condition (1), on va s'intéresser au cas où T est le Δ^2 d'Aitken : $\varepsilon_2^{(.)}$. On a : $\varepsilon_2^{(n)} = u_{n+1} - \dfrac{\Delta u_{n+1} \cdot \Delta u_n}{\Delta^2 u_n}$, $n \geq o$, $\Delta^2 u_n \neq o$.

Soit : $\varepsilon_2^{(n)} = u_{n+1} + b_n \, \Delta u_n$ avec $b_n = \dfrac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}$.

Il s'ensuit que : $1 + b_n = \dfrac{1}{1 - \lambda_n}$ et $\dfrac{b_n}{1 + b_{n+1}} = \lambda_n \dfrac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_n}$ $\forall n$.

Donc, si $\forall n \geq o$ $\lambda_n < 1$, alors la suite $(b_n)_{n\geq o}$ est bien définie ($\lambda_n \neq 1$) et $1 + b_n$ est strictement positif pour tout $n \geq o$.

Par conséquent la condition (1) devient : $\exists N$ tel que $(\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq N}$ est monotone si et seulement si :

$$(1')\begin{cases} * \;\; \lambda_n \leq \dfrac{b_n}{1 + b_{n+1}} \;\; \forall n \geq N \iff \lambda_n \leq \lambda_n \dfrac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_n} \;\; \forall n \geq N \iff (\lambda_n)_{n\geq N} \text{ est décroissante.} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ * \;\; \lambda_n \geq \dfrac{b_n}{1 + b_{n+1}} \;\; \forall n \geq N \iff \lambda_n \geq \lambda_n \dfrac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_n} \;\; \forall n \geq N \iff (\lambda_n)_{n\geq N} \text{ est croissante} \end{cases}$$

Il faut rappeler que $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est strictement positive, car $(u_n)_{n\geq o}$ est strictement monotone.

On peut alors résumer ce qui précède dans le :

Lemme 1 :

Soit $(u_n)_{n\geq o}$ une suite réelle strictement monotone de limite u^*.

On suppose que $\lambda_n < 1$ $\forall n \geq o$.

Si $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est monotone, alors $(\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq o}$ est monotone.

Remarques :

1- Supposer $\lambda_n \neq 1$ $\forall n \geq o$ assure que le calcul de $\varepsilon_2^{(.)}$ est possible $\forall n \geq o$.

2- Si parmi les hypothèses, il y en a qui ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang N, alors la conclusion reste valable pour $n \geq N$.

3- La suite $(u_n)_{n\geq o}$ étant convergente, il est facile de voir que si $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$ existe, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \rho \in [0,1]$.

On peut donc faire la constatation suivante : si $\rho \neq 1$, alors on peut toujours trouver un entier n_o : $\lambda_n < 1 \ \forall n \geq n_o$.

4- D'après (1) et (1') :

Si $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est croissante, alors $(\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq o}$ est monotone dans le même sens que $(u_n)_{n\geq o}$.

Si $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est décroissante, alors $(\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq o}$ est monotone dans le sens contraire de $(u_n)_{n\geq o}$.

5- Revenons au résultat de Opfer dans le cas $r_n = \lambda_n \ \forall n$. ie T est le Δ^2 d'Aitken.

En tenant compte de la 4ème remarque, on va voir sur deux exemples (l'un pour la conservation, l'autre pour l'inversion de la monotonie) que l'hypothèse, $(r_n)_{n\geq o}$ c'est-à-dire $(\lambda_n)_{n\geq o}$ monotone dans le même sens que $(u_n)_{n\geq o}$, est inutile.

D'une part, si $(u_n)_{n\geq o}$ est une suite totalement monotone, alors on sait que $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est croissante et $(\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq o}$ est décroissante [2] (on trouvera un rappel dans la suite). Donc $(u_n)_{n\geq o}$ et $(\lambda_n)_{n\geq o}$ sont monotones en sens contraire.

D'autre part, considérons la suite de sommes partielles :

$$u_n = \sum_{k=o}^{n} \lambda^k (k+1) \text{ avec } o < \lambda < 1.$$

On a : $\Delta u_n = \lambda^{n+1}(n+2) > o \ \forall n \geq o$, donc $(u_n)_{n\geq o}$ est strictement croissante et $\lambda_n = \dfrac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} = \lambda \dfrac{n+3}{n+2} \ \forall n$

donc $(\lambda_n)_{n\geq o}$ est décroissante,

En outre, il existe toujours un entier $n_o \geq o$ tel que : $\lambda_n < 1 \ \forall n \geq n_o$, en particulier $n_o=o$ si $\lambda \leq \frac{2}{3}$. Par suite, d'après le lemme 1 et la 4ème remarque, $(\varepsilon_2^{(n)})_{n\geq n_o}$ est décroissante. Tandis que $(u_n)_{n\geq o}$ et $(\lambda_n)_{n\geq o}$ sont monotones en sens contraire.

IV - Estimation de la limite d'une suite oscillante convergente par le procédé des intervalles emboîtés.

1- Notations et propriétés

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite oscillante convergente de limite S^*, avec $S_n \neq S^*$ $\forall n$.

On a alors $\Delta S_n \neq o$ $\forall n$ (Sinon $\exists n_o$: $S_{n_o+1} = S_{n_o} \Rightarrow S_{n_o} = S^* = S_{n_o+1}$, puisque n_o et n_o+1 sont de parité différente, ceci est contraire à $S_n \neq S^*$ $\forall n$).

Donc, on peut poser :

$$\lambda_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \quad \text{et} \quad \rho_n = \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$$

Il est évident de constater que $\lambda_n<o$ $\forall n$ et si $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n$ existe alors $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$ existe et on a : $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\rho$ avec $\rho\in[-1,0]$, puisque $\lambda_n=\rho_n\dfrac{1-\rho_{n+1}}{1-\rho_n}$ et $\rho_n < o<1$ $\forall n \geq o$.

D'autre part, on considère les deux sous-suites d'indices pair et impair de $(S_n)_{n\geq o}$:

$$(x_n^{(1)})_{n\geq o} = (S_{2n})_{n\geq o} \text{ ie } x_o^{(1)}= S_o,\ x_1^{(1)}= S_2,\ x_2^{(1)}= S_4,\ \ldots$$

$$\text{et} \quad (x_n^{(2)})_{n\geq o} = (S_{2n+1})_{n\geq o} \text{ ie } x_o^{(2)} = S_1,\ x_1^{(2)}= S_3,\ x_2^{(2)}= S_5,\ \ldots$$

Pour le moment, on suppose que $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont monotones (on donnera dans la suite des résultats qui assurent leur monotonie).

On a donc : $\Delta x_n^{(1)} . \Delta x_n^{(2)} \leq o$ $\forall n\geq o$ $\left(x_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} S^*,\ i=1, 2\right)$

et si $\underline{\lambda_n \neq -1}$ $\forall n \geq o$, alors leur monotonie est stricte (car si $\exists k$: $S_k = S_{k+2}$, alors $\Delta S_k = - \Delta S_{k+1}$ c'est-à-dire $\lambda_k = -1$).

Donc si $\lambda_n \neq -1$ $\forall n \geq o$, on peut alors poser :

$$\lambda_n^{(i)} = \frac{\Delta x_{n+1}^{(i)}}{\Delta x_n^{(i)}} \quad i = 1,2 \text{ et } n = 0,1,2, \ldots$$

On a : $\lambda_n^{(i)} > o$ $\forall n \geq o$ $i = 1,2$ et si on pose $(\mu_k)_{n \geq o}$:

$$\mu_k = \lambda_k \lambda_{k+1} \frac{1+\lambda_{k+2}}{1+\lambda_k} \quad (\lambda_k \neq -1), \text{ alors on a :}$$

<u>Lemme 2 :</u>

$$\mu_{2n} = \lambda_n^{(1)} \text{ et } \mu_{2n+1} = \lambda_n^{(2)} \qquad \forall n \geq o$$

<u>Preuve :</u>

$$* \ \lambda_n^{(1)} = \frac{\Delta x_{n+1}^{(1)}}{\Delta x_n^{(1)}} = \frac{x_{n+2}^{(1)} - x_{n+1}^{(1)}}{x_{n+1}^{(1)} - x_n^{(1)}} = \frac{S_{2n+4} - S_{2n+2}}{S_{2n+2} - S_{2n}}$$

on pose $k = 2n$, on a :

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{S_{k+4} - S_{k+2}}{S_{k+2} - S_k} = \frac{\Delta S_{k+3} + \Delta S_{k+2}}{\Delta S_{k+1} + \Delta S_k} = \frac{\Delta S_{k+2}}{\Delta S_k} \; \frac{1 + \frac{\Delta S_{k+3}}{\Delta S_{k+2}}}{1 + \frac{\Delta S_{k+1}}{\Delta S_k}}$$

soit : $$\lambda_n^{(1)} = \lambda_k \lambda_{k+1} \frac{1 + \lambda_{k+2}}{1 + \lambda_k} = \mu_k = \mu_{2n}$$

$$* \ \lambda_n^{(2)} = \frac{\Delta x_{n+1}^{(2)}}{\Delta x_n^{(2)}} = \frac{x_{n+2}^{(2)} - x_{n+1}^{(2)}}{x_{n+1}^{(2)} - x_n^{(2)}} = \frac{S_{2n+5} - S_{2n+3}}{S_{2n+3} - S_{2n+1}}$$

On pose : $k = 2n$, on a :

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{S_{k+5} - S_{k+3}}{S_{k+3} - S_{k+1}} = \frac{\Delta S_{k+4} + \Delta S_{k+3}}{\Delta S_{k+2} + \Delta S_{k+1}} = \frac{\Delta S_{k+3}}{\Delta S_{k+1}} \; \frac{1 + \frac{\Delta S_{k+4}}{\Delta S_{k+3}}}{1 + \frac{\Delta S_{k+2}}{\Delta S_{k+1}}}$$

soit : $$\lambda_n^{(2)} = \lambda_{k+1} \lambda_{k+2} \frac{1 + \lambda_{k+3}}{1 + \lambda_{k+1}} = \mu_{k+1} = \mu_{2n+1}$$

∎

2 - Méthode de contrôle d'erreur :

. Avant de s'intéresser au procédé Δ^2 d'Aitken, on va présenter cette méthode pour une transformation de suites T quelconque telle que :

$$(u_n)_{n\geq o} \longrightarrow (T_n)_{n\geq o} : T_n = u_{n+1} + b_n \Delta u_n, \; n\geq o$$

. On applique T à $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ les deux sous-suites d'indices pair et impair de la suite oscillante $(S_n)_{n\geq o}$, $(x_n^{(i)})_{n\geq o}$ étant supposée monotone, i =1,2. On obtient respectivement $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(T_n^{(2)})_{n\geq o}$.

$$\text{Soient : } T_n^{(i)} = x_{n+1}^{(i)} + b_n^{(i)} \Delta x_n^{(i)} \quad ; \quad i = 1,2.$$

$\left[(b_n^{(i)})_{n\geq o}\right.$, dépendra de $(x_n^{(i)})_{n\geq o}$ si $(b_n)_{n\geq o}$ dépend de $\left.(S_n)_{n\geq o}\right]$.

Ensuite, on considère la suite d'intervalles $(J_n)_{n\geq o}$ telle que :

$$J_n = \left[T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)} \right] .$$

Enfin, si les suites $(T_n^{(i)})_{n\geq N}$ sont monotones telles que :

$$\Delta T_n^{(1)} . \Delta T_n^{(2)} \leq 0 \; \forall n\geq N \quad \text{et si } \lim_{n\to\infty} T_n^{(i)} = S^*, \; i = 1,2, \text{ alors :}$$

$$T_N^{(1)} \leq T_{N+1}^{(1)} \leq \ldots . \leq T_n^{(1)} \leq T_{n+1}^{(1)} \leq \ldots . \leq S^* \leq \ldots . \leq T_{n+1}^{(2)} \leq T_n^{(2)} \leq \ldots \leq T_{N+1}^{(2)} \leq T_N^{(2)}$$

si $(T_n^{(1)})_{n\geq N}$ est croissante.

$$T_N^{(2)} \leq T_{N+1}^{(2)} \leq \ldots . \leq T_n^{(2)} \leq T_{n+1}^{(2)} \leq \ldots \leq S^* \leq \ldots \leq T_{n+1}^{(1)} \leq T_n^{(1)} \leq \ldots \leq T_{N+1}^{(1)} \leq T_N^{(1)}$$

si $(T_n^{(1)})_{n\geq N}$ est décroissante.

C'est-à-dire $J_{n+1} \subseteq J_n \quad \forall n\geq N$ et $S^* \in J_n \quad \forall n\geq N$.

Par suite, on obtient un encadrement de la limite à l'aide de $(T_n^{(1)})_n$ et $(T_n^{(2)})_n$.

Donc, si T est le procédé Δ^2 d'Aitken, alors on a :

$$T_n^{(i)} = \varepsilon_2^{(n)}(x_n^{(i)}) = x_{n+1}^{(i)} + b_n^{(i)}\, \Delta x_n^{(i)},$$

avec $b_n^{(i)} = \dfrac{\lambda_n^{(i)}}{1-\lambda_n^{(i)}}$ $(\lambda_n^{(i)} \neq 1)$, $i = 1,2$ et $n = 0,1,2,\ldots$

Rappelons que si $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}^{(i)} - S^*}{x_n^{(i)} - S^*} = \rho^2$ $i = 1,2$, et si $\rho = -1$, alors la convergence de $(x_n^{(i)})_{n\geq 0}$ vers S^* sera logarithmique et l'application de $\varepsilon_2^{(\cdot)}$ à $(x_n^{(i)})_{n\geq 0}$ sera sans intérêt. Si $\rho = 0$, l'application de $\varepsilon_2^{(\cdot)}$ n'offre non plus aucun intérêt.

Donc, on va supposer que $\rho \in]-1,0[$.

Si on pose $J_n = [T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}]$, on peut alors donner le résultat suivant :

<u>Proposition 1</u> :

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite oscillante convergente de limite S^* telle que : $S_n \neq S^*$, $\lambda_n \neq -1$ et $\lambda_n^{(i)} < 1$, $i = 1,2$, $\forall n \geq 0$ et telle que les sous-suites d'indices pair et impair soient monotones.

Si les suites $(\lambda_n^{(1)})_{n\geq 0}$ et $(\lambda_n^{(2)})_{n\geq 0}$ sont monotones de même sens, alors : $S^* \in J_n$ $\forall n \geq 0$.

En outre, si $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq 0}$ sont croissantes $(i = 1,2)$, alors :

$$J_n \subseteq \left[x_{n+2}^{(1)} \wedge x_{n+2}^{(2)}\right] \qquad \forall n \geq 0.$$

Si $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq 0}$ sont décroissantes $(i = 1,2)$, alors il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geq N \qquad J_n \subseteq \left[x_{n+2}^{(1)} \wedge x_{n+2}^{(2)}\right].$$

<u>Preuve</u> : Elle repose sur le lemme 1 et les remarques précédentes.

1 - Soit $i = 1,2$

* $(x_n^{(i)})_{n\geq o}$ est <u>strictement</u> monotone, car $\lambda_n \neq -1$ $\forall n\geq o$. (Rq p. 100)

* $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq o}$ étant monotone et $\lambda_n^{(i)} < 1$ $\forall n\geq o$, alors $(T_n^{(i)})_{n\geq o}$ est monotone (lemme 1).

2 - On a : $\Delta T_n^{(1)} . \Delta T_n^{(2)} \leq o$ $\forall n\geq o$.

En effet : d'après la 4ème remarque (p. 98) et comme $(\lambda_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(\lambda_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont monotones de même sens (hypothèse), on a :

Si $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq o}$ est croissante, alors $\Delta T_n^{(i)}$ $\Delta x_n^{(i)} \geq o$ $\forall n\geq o$, $i=1,2$.

Si $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq o}$ est décroissante, alors $\Delta T_n^{(i)} . \Delta x_n^{(i)} \leq o$ $\forall n\geq o$, $i=1,2$.

Donc, dans les deux cas, on a :

$$\left[\Delta T_n^{(1)} . \Delta x_n^{(1)}\right] . \left[\Delta T_n^{(2)} . \Delta x_n^{(2)}\right] \geq o \qquad \forall n\geq o$$

Or $\Delta x_n^{(1)} . \Delta x_n^{(2)} < o$ $\forall n\geq o$, alors :

$$\Delta T_n^{(1)} . \Delta T_n^{(2)} \leq o \qquad \forall n\geq o.$$

D'autre part : puisque $\rho \neq -1$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \mu_k = \rho^2 \neq 1.$$

Donc $$\lim_{n\to\infty} T_n^{(i)} = S^* \quad , i=1,2$$

Il s'ensuit que :

$$T_o^{(1)} \leq T_1^{(1)} \leq \ldots \leq T_n^{(1)} \leq T_{n+1}^{(1)} \leq \ldots \leq S^* \leq \ldots \leq T_{n+1}^{(2)} \leq T_n^{(2)} \leq \ldots \leq T_1^{(2)} \leq T_o^{(2)}$$

si $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ est croissante

ou

$$T_o^{(2)} \leq T_1^{(2)} \leq \ldots \leq T_n^{(2)} \leq T_{n+1}^{(2)} \leq \ldots \leq S^* \leq \ldots \leq T_{n+1}^{(1)} \leq T_n^{(1)} \leq \ldots \leq T_1^{(1)} \leq T_o^{(1)}$$

si $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ est décroissante.

Par conséquent :

$$J_{n+1} \subseteq J_n \quad \text{et} \quad S^* \in J_n \quad \forall n\geq o$$

3 - On a : $T_n^{(i)} = x_{n+1}^{(i)} + b_n^{(i)} \Delta x_n^{(i)}$, avec $b_n^{(i)} = \dfrac{\lambda_n^{(i)}}{1 - \lambda_n^{(i)}}$

$i = 1,2$ et $n = 0,1,2,\ldots$

donc : $x_{n+2}^{(i)} - T_n^{(i)} = \Delta x_{n+1}^{(i)} - b_n^{(i)} \Delta x_n^{(i)}$

soit : $x_{n+2}^{(i)} - T_n^{(i)} = \Delta x_n^{(i)} [\lambda_n^{(i)} - b_n^{(i)}]$, en remplaçant $b_n^{(i)}$ par

$\dfrac{\lambda_n^{(i)}}{1 - \lambda_n^{(i)}}$, on obtient :

$$x_{n+2}^{(i)} - T_n^{(i)} = - \frac{[\lambda_n^{(i)}]^2 \Delta x_n^{(i)}}{1 - \lambda_n^{(i)}} \qquad \forall n \geq o$$

<u>Supposons que $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ est croissante et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ est décroissante :</u>

On a donc : $x_{n+2}^{(1)} - T_n^{(1)} = - \dfrac{[\lambda_n^{(1)}]^2 \Delta x_n^{(1)}}{1 - \lambda_n^{(1)}} < 0 \qquad \forall n \geq o$

soit $x_{n+2}^{(1)} < T_n^{(1)} \qquad \forall n \geq o$

et : $x_{n+2}^{(2)} - T_n^{(2)} = - \dfrac{[\lambda_n^{(2)}]^2 \Delta x_n^{(2)}}{1 - \lambda_n^{(2)}} > o \qquad \forall n \geq o$

soit $x_{n+2}^{(2)} > T_n^{(2)} \qquad \forall n \geq o$

a) <u>Si $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq o}$ sont croissantes, i=1,2 :</u>

Alors $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ est croissante et $(T_n^{(2)})_{n\geq o}$ est décroissante.

ie $T_n^{(1)} \leq T_{n+1}^{(1)} \leq \ldots \leq S^* \leq \ldots\ldots \leq T_{n+1}^{(2)} \leq T_n^{(2)}$

soit $T_n^{(1)} \leq T_n^{(2)} \qquad \forall n \geq o$

Par conséquent : $x_{n+2}^{(1)} < T_n^{(1)} \leq T_n^{(2)} < x_{n+2}^{(2)} \qquad \forall n \geq o$

donc $J_n \subseteq \left[x_{n+2}^{(1)}, x_{n+2}^{(2)} \right] \qquad \forall n \geq o$

b) <u>Si $(\lambda_n^{(i)})_{n\geq o}$ sont décroissantes, i=1,2 :</u>

alors $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ est décroissante et $(T_n^{(2)})_{n\geq o}$ est croissante :

ie $\quad T_n^{(2)} \leq T_n^{(1)} \quad \forall n \geq o$, mais $T_n^{(2)} < x_{n+2}^{(2)}$ et $x_{n+2}^{(1)} < T_n^{(1)}$.

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(1)} - S^*} = o$, $i=1,2$, car $\rho^2 \neq 0,1$.

• En effet : $\dfrac{T_n^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(i)} - S^*} = \dfrac{x_{n+1}^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(i)} - S^*} + b_n^{(i)} \dfrac{\Delta x_n^{(i)}}{x_{n+2}^{(i)} - S^*}$

D'une part : $\dfrac{x_{n+1}^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(i)} - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\rho^2}$

D'autre part : $\dfrac{\Delta x_n^{(i)}}{x_{n+2}^{(i)} - S^*} = \dfrac{\Delta x_n^{(i)}}{x_n^{(i)} - S^*} \cdot \dfrac{x_n^{(i)} - S^*}{x_{n+1}^{(i)} - S^*} \cdot \dfrac{x_{n+1}^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(i)} - S^*}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^4} \quad \text{et} \quad b_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\rho^2}{1-\rho^2} .$$

Donc

$$\frac{T_n^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(i)} - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{\rho^2 - 1}{\rho^4} = 0$$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(j)} - S^*} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{T_n^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(i)} - S^*} \quad \dfrac{x_{n+2}^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(j)} - S^*} \right]$

$i \neq j$ et $i,j = 1,2$.

Comme : $\dfrac{x_k^{(i)} - S^*}{x_k^{(j)} - S^*} = \begin{cases} \dfrac{x_k^{(1)} - S^*}{x_k^{(2)} - S^*} = \dfrac{S_{2k} - S^*}{S_{2k+1} - S^*} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{1}{\rho} \\ \text{ou} \\ \dfrac{x_k^{(2)} - S^*}{x_k^{(1)} - S^*} = \dfrac{S_{2k+1} - S^*}{S_{2k} - S^*} \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho \end{cases}$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(i)} - S^*}{x_{n+2}^{(j)} - S^*} = o \quad , \quad i \neq j \quad \text{et } i,j = 1,2$$

Par suite : $\exists N,\ \forall n \geq N$: $\quad \left|T_n^{(i)} - S^*\right| < \left|x_{n+2}^{(j)} - S^*\right|,\ i \neq j$

ie $\quad \exists N,\ \forall n \geq N \quad \begin{cases} \left|T_n^{(1)} - S^*\right| < \left|x_{n+2}^{(2)} - S^*\right| \\ \qquad \text{et} \\ \left|T_n^{(2)} - S^*\right| < \left|x_{n+2}^{(1)} - S^*\right| \end{cases}$

comme : $T_n^{(2)} \leq S^* \leq T_n^{(1)}$ et $x_n^{(1)} \leq S^* \leq x_n^{(2)}$ $\forall n$,

alors $\begin{cases} T_n^{(1)} - S^* < x_{n+2}^{(2)} - S^* \\ \text{et} \\ S^* - T_n^{(2)} < S^* - x_{n+2}^{(1)} \end{cases}$, soit $\begin{cases} T_n^{(1)} < x_{n+2}^{(2)} \\ \text{et} \\ x_{n+2}^{(1)} < T_n^{(2)} \end{cases}$

Donc : $x_{n+2}^{(1)} < T_n^{(2)} \leq T_n^{(1)} < x_{n+2}^{(2)} \qquad \forall n \geq N$

Par conséquent $\quad J_n \subseteq \left[x_{n+2}^{(1)},\ x_{n+2}^{(2)}\right] \qquad \forall n \geq N$.

(Si $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ est décroissante et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ est croissante, on se ramène au cas précédent, en remplaçant $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ par $(-x_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ par $(-x_n^{(2)})_{n\geq o}$).

■

Pour pouvoir appliquer la prcposition 1, on va distinguer 3 classes de suites oscillantes convergentes.

V - Estimation de la limite à l'aide des deux transformations de suites $(T_n^{(1)})_n$ et $(T_n^{(2)})_n$ pour 3 classes de suites.

Avant de passer à la définition des 3 classes en question, on va rappeler quelques résultats concernant les suites totalement monotones et les suites totalement oscillantes.

L'ouvrage de base est le livre de Widder [17].

On trouvera plusieurs propriétés de ces suites dans le livre de Brezinski [2] et ses articles [3] , [4] et [5].

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\geq o}$ est dite totalement monotone

(on écrira $(u_n)_{n\geq o} \in TM$), si $(-1)^k \Delta^k u_n \geq o \quad \forall n, \forall k$ où l'opérateur

Δ^k est défini par :

$$\begin{cases} \Delta^o u_n = u_n \\ \Delta u_n = u_{n+1} - u_n \\ \text{et} \quad \Delta^k u_n = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n \text{ , } k \geq 1 \text{ et } n\geq o \end{cases}$$

Une suite totalement monotone converge toujours. Une des plus importantes caractéristiques des suites totalement monotones est d'être reliées à la théorie des moments.

Lemme 3 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(u_n)_n \in TM$ est que $u_n = \int_o^1 t^n \, d\alpha(t)$, $n\geq o$ où α est bornée non décroissante dans $[0,1]$.

Parmi les propriétés des suites totalement monotones, on a :

Lemme 4 :

Soit $(u_n)_{n\geq o} \in TM$

1 - Si $\exists n_o : u_{n_o + 1} = u_{n_o}$ alors $\forall n\geq 1 \quad u_n = u$

avec $u_o \geq u \geq o$

2 - Si $u_1 \neq o$ alors $\forall n$, $u_n \neq o$ et on a :

$$o < \frac{u_1}{u_o} \leq \frac{u_2}{u_1} \leq \ldots\ldots \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ldots \;\ldots \leq 1$$

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\geq o}$ est dite totalement oscillante (on écrira $(u_n)_{n\geq o} \in TO$), si la suite $(v_n)_{n\geq o} \in TM$ où $v_n = (-1)^n u_n \quad \forall n\geq o$.

Toute suite totalement oscillante converge vers o.

De plus

Si $(u_n)_{n\geq o} \in TO$ et $u_n \neq o \quad \forall n$, alors :

$$-1 \leq \ldots\ldots \leq \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ldots\ldots \leq \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{u_1}{u_o} < o.$$

Remarques :

Soit $(u_n)_{n\geq o} \in TM$, de limite u^*.

1 - Si $u_n \neq u^* \quad \forall n$, alors $\Delta u_1 \neq o$ (lemme 4-1-)

2 - Si $u_n \neq u^* \quad \forall n$, alors $\lambda_n = \dfrac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \neq 1, \quad \forall n\geq o$.

La suite $(-\Delta u_n)_{n\geq o}$ étant totalement monotone et $\Delta u_1 \neq o$, alors :

$$o < \frac{\Delta u_1}{\Delta u_o} \leq \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} \leq \ldots\ldots \leq \frac{\Delta u_{n+1}}{\Delta u_n} \leq \frac{\Delta u_{n+2}}{\Delta u_{n+1}} \leq \ldots\ldots \leq 1$$

(lemme 4)

Donc s'il existe n_o : $\lambda_{n_o} = 1$, alors $\lambda_n = 1 \quad \forall n\geq n_o$, soit $\Delta u_{n+1} = \Delta u_n$ $\forall n\geq n_o$, donc $\Delta u_n = o \quad \forall n\geq 1$ (lemme 4), ce qui est impossible.

1 - Application de la proposition 1 à une suite $(S_n)_{n\geq o}$ telle que $(d_n)_{n\geq o} = (S_n - S^*)_{n\geq o} \in TO$

Tout d'abord, on va donner un résultat concernant la nature des sous-suites $(u_{2n})_{n\geq o}$ et $(-u_{2n+1})_{n\geq o}$, lorsque $(u_n)_{n\geq o}$ est une suite totalemant oscillante. On pose $(v_n)_{n\geq o} = (u_{2n})_{n\geq o}$ et $(w_n)_{n\geq o} = (-u_{2n+1})_{n\geq o}$

Lemme 5 :

Si $(u_n)_{n\geq o} \in TO$, alors $(v_n)_{n\geq o}$ et $(w_n)_{n\geq o} \in TM$

Preuve :

$(u_n)_{n\geq o} \in TO \Rightarrow \left((-1)^n u_n\right)_{n\geq o} \in TM$

Donc, d'après le lemme 3, il existe α bornée non décroissante dans [0,1] telle que :

$$(-1)^n u_n = \int_o^1 t^n \, d\alpha(t) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Donc $v_n = u_{2n} = \int_o^1 t^{2n} \, d\alpha\,(t)$ et $w_n = -u_{2n+1} = \int_o^1 t^{2n+1} \, d\alpha(t)$

1) $v_n = \int_o^1 t^{2n} d\alpha(t)$, en faisant le changement de variables suivant : $s = t^2$, on obtient :

$$v_n = \int_o^1 s^n \, d\alpha\,(\sqrt{s}) = \int_o^1 s^n \, d\beta(s)$$

avec $\beta(s) = \alpha(\sqrt{s})$.

La fonction $u \longrightarrow \sqrt{u}$ est bornée et croissante dans [0,1].
Donc β est bornée non décroissante dans [0,1].
Par conséquent : $(v_n)_{n\geq o} \in TM$.

2) $w_n = \int_o^1 t^{2n+1} \, d\alpha(t) = \int_o^1 t^{2n} \, t d\alpha(t)$, avec le même changement de variables, on obtient :

$$w_n = \int_o^1 s^n \sqrt{s} \, d\alpha\,(\sqrt{s}) = \int_o^1 s^n \, d\gamma(s)$$

$d\gamma(s) = \sqrt{s}\, d\alpha(\sqrt{s}) \quad \geq o$ car $d\alpha\,(\xi) \geq o$ sur [0,1].

Donc <u>γ est non décroissante dans [0,1].</u>

D'autre part :

$$o \leq \gamma\,(x) - \gamma(o) = \int_o^x d\gamma(s) = \int_o^x \sqrt{s}\, d\alpha(\sqrt{s})$$

or $\left\{\begin{array}{l} d\alpha(\sqrt{s}) \geq o \\ \text{et} \\ o \leq \sqrt{s} \leq \sqrt{x} \leq 1 \quad \text{si } s \in [0,x] \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\int_o^x \sqrt{s}\, d\alpha(\sqrt{s}) \leq \int_o^x d\alpha(\sqrt{s}) = \int_o^{\sqrt{x}} d\alpha\ (t)$$

donc $o \leq \gamma\ (x) - \gamma\ (o) \leq \int_o^{\sqrt{x}} d\alpha\ (t) = \alpha\ (\sqrt{x}) - \alpha(o) < +\infty$

donc γ est bornée dans $[0,1]$. Il s'ensuit que : $(w_n)_{n\geq o} \in TM$

.

∎

Remarque :

Soit $(u_n)_{n\geq o}$ une suite totalement oscillante convergente. Si $u_n \neq o$ $\forall n\geq o$, alors $\lambda_n \neq -1 \quad \forall n\geq o$.

En effet : s'il existe n_o : $\lambda_{n_o} = -1$, alors $u_{n_o} = u_{n_o+2}$; n_o peut être pair ou impair, donc :

Si $n_o = 2n_1$, alors $u_{2n_1} = u_{2n_1+2}$ ie $v_{n_1} = v_{n_1+1}$.

Si $n_o = 2n_1+1$, alors $u_{2n_1+1} = u_{2n_1+3}$ ie $-u_{2n_1+1} = -u_{2n_1+3}$

ie $w_{n_1} = w_{n_1+1}$.

Or, $(v_n)_{n\geq o}$ et $(w_n)_{n\geq o} \in TM$ et d'après le lemme 4, on aurait $v_n = o$ ou $w_n = o$ $\forall n\geq 1$. Ceci est contradictoire avec le fait que $u_n \neq o$ $\forall n$.

Donc, grâce aux lemmes et aux remarques précédents, on va pouvoir donner un corollaire de la proposition 1 :

Proposition 2 :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite convergente de limite S^*. ($S_n \neq S^*$ $\forall n\geq o$) telle que $(d_n)_{n\geq o} = (S_n - S^*)_{n\geq o} \in TO$ avec $\rho \in]-1,0[$. Alors :

$$S^* \in J_n = [T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}] \subseteq [x_{n+2}^{(1)} \wedge x_{n+2}^{(2)}] \quad \forall n\geq o.$$

$(T_n^{(i)})_{n\geq o}$ est le procédé Δ^2 d'Aitken appliqué à $(x_n^{(i)})_{n\geq o}$ où $(x_n^{(1)})_{n\geq o}=(S_{2n})_{n\geq o}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq o} = (S_{2n+1})_{n\geq o}$.

<u>Preuve :</u>

On a : $d_n \neq o \quad \forall n\geq o$ et $(d_n)_{n\geq o} \in TO$.

On pose : $d_n^{(i)} = x_n^{(i)} - S^*$ $\quad i = 1,2.$

* $\Delta d_n = \Delta S_n \neq o \quad \forall n\geq o$ car $S_n \neq S^* \quad \forall n\geq o$.

Donc on peut poser $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \dfrac{\Delta d_{n+1}}{\Delta d_n}$

D'après la remarque p. 110, on a <u>$\lambda_n \neq -1 \quad \forall n\geq o$</u> .

Par suite $\Delta d_n^{(i)} \neq o \quad \forall n\geq o$ et $i=1,2$ (Rq p. 100)

Donc $\lambda_n^{(i)} = \dfrac{\Delta d_{n+1}^{(i)}}{\Delta d_n^{(i)}} = \dfrac{\Delta x_{n+1}^{(i)}}{\Delta x_n^{(i)}}$ est bien défini.

* $(d_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(-d_n^{(2)})_{n\geq o} \in TM$ (lemme 5)

Or $\dfrac{\Delta(-d_{n+1}^{(2)})}{\Delta(-d_n^{(2)})} = \dfrac{\Delta d_{n+1}^{(2)}}{\Delta d_n^{(2)}} = \lambda_n^{(2)}$.

Donc <u>$(\lambda_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(\lambda_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont croissantes</u>

et sont majorées par 1 (lemme 4). Comme $\lambda_n^{(i)} \neq 1 \quad \forall n$ (Rq 2 p. 108), alors <u>$\lambda_n^{(i)} < 1$</u> $\forall n\geq o$, $i = 1,2$.

La monotonie de $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ vient du fait que $(d_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(-d_n^{(2)})_{n\geq o} \in TM$ et $d_n^{(i)} = x_n^{(i)} - S^*$ $\forall n$ et $i=1,2$.

* Enfin : $\lim\limits_{n\to\infty} T_n^{(i)} = S^*$, $i = 1,2$, $\qquad (\rho^2 \neq 1)$.

Toutes les hypothèses de la proposition 1 sont donc satisfaites :
Il s'ensuit que :

$$S^* \in J_n \subseteq [x^{(1)}_{n+2} \wedge x^{(2)}_{n+2}] \quad \forall n\geq o.$$

2 - <u>Application de la proposition 1 au cas des suites $(S_n)_{n\geq o}$ définies par $S_n = \alpha + \sum_{k=o}^{n} (-1)^k a_k x^k$ avec $o< x< 1$ et $(a_k)_{k\geq o} \in TM$</u>

Soit la suite $(S_n)_{n\geq o}$ définie par :

$$S_n = \alpha + \sum_{k=o}^{n} (-1)^k a_k x^k \text{ avec } \begin{cases} o < x < 1, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ (a_k)_{k\geq o} \in TM \end{cases}$$

Cette suite est la somme partielle d'une série alternée, qui est convergente puisque le terme général $(c_k)_{k\geq o}$: $c_o = \alpha + a_o$ et $c_k = (-1)^k a_k x^k$ est tel que $(|c_k|)_{k\geq o}$ est une suite décroissante vers o. Soit S^* sa limite.

<u>Lemme 6 :</u>

Soit $(b_p)_{p\geq o}$: $b_p = a_p - x\, a_{p+1}$, $\forall p\geq o$ avec $o \leq x \leq 1$.

Si $(a_p)_{p\geq o} \in TM$ tel que $\Delta^k a_1 \neq o \quad \forall k$, alors :

$$(b_p)_{p\geq o} \in TM$$

<u>Preuve</u> : *** Si $x = o$ ou $x = 1$, il est évident de voir que $(b_p)_{p\geq o} \in TM$**

*** Si $o < x < 1$, alors on a :**

$$(a_p)_{p\geq o} \in TM \iff (-1)^k \Delta^k a_p > o \quad \forall k, \forall p$$

$$\Delta^k a_1 \neq o \quad \forall k \implies \frac{\Delta^k a_{p+1}}{\Delta^k a_p} \leq 1 \quad \forall k, \forall p \quad \text{(lemme 4)}$$

$$\text{Soit : } \frac{\Delta^k a_{p+1}}{\Delta^k a_p} < \frac{1}{x} \quad \text{car} \quad o < x < 1.$$

$$\text{Soit encore : } \frac{(-1)^k \Delta^k a_{p+1}}{(-1)^k \Delta^k a_p} < \frac{1}{x} \quad \forall k, \ \forall p.$$

$$\text{Or} \quad \begin{cases} (-1)^k \, \Delta^k \, a_p > o & , \text{ donc } (-1)^k.x.\Delta^k \, a_{p+1} < (-1)^k \Delta^k \, a_p \\ x > o & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad o < (-1)^k \, \Delta^k a_p - (-1)^k.x. \, \Delta^k \, a_{p+1} = (-1)^k \, \Delta^k \, [a_p - x a_{p+1}]$$

donc $\quad o < (-1)^k \, \Delta^k b_p \quad \forall k, \forall p$. Par conséquent :

$$(b_p)_{p \geq o} \in TM$$

■

Donc, grâce à ce lemme, on va énoncer le résultat suivant :

<u>Proposition 3</u> :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite convergente de limite S^* définie par :

$S_n = \alpha + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, a_k x^k$ avec α réel, $o < x < 1$ et $(a_k)_{k\geq o} \in TM$,

vérifiant $\Delta^k a_1 \neq o \quad \forall k \geq o$. Alors

$$S^* \in J_n = [T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}] \subseteq [x_{n+2}^{(1)} \wedge x_{n+2}^{(2)}] \quad \forall n \geq o.$$

<u>Preuve</u> :

1/ $\Delta S_n = (-1)^{n+1} \, a_{n+1} \, x^{n+1} \qquad \forall n \geq o.$

On a $\Delta S_n \neq o \quad \forall n \geq o$, car sinon on aurait $a_{n_o+1} = 0$ et donc $\forall n \geq 1 \; a_n = 0$ (lemme 4), ceci ne peut pas avoir lieu car $a_1 \neq o$. Donc $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -x \, \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

$\forall n \geq o$. Comme $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1 < \dfrac{1}{x}$, alors <u>$\lambda_n \neq -1 \quad \forall n \geq o$</u>

2/ $\Delta x_n^{(1)} = x_{n+1}^{(1)} - x_n^{(1)} = S_{2n+2} - S_{2n} = \Delta S_{2n+1} + \Delta S_{2n}$

Or $\Delta S_{2n} = -a_{2n+1} \, x^{2n+1}$ et $\Delta S_{2n+1} = a_{2n+2} \, x^{2n+2}$

donc $\Delta x_n^{(1)} = - x^{2n+1} \, (a_{2n+1} - x a_{2n+2})$

Soit : $\Delta x_n^{(1)} = - x^{2n+1} \, b_{2n+1}$,

et $\Delta x_n^{(2)} = x_{n+1}^{(2)} - x_n^{(2)} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \Delta S_{2n+1} + \Delta S_{2n+2}$

Or $\quad \Delta S_{2n+2} = - a_{2n+3}\, x^{2n+3}$

Donc $\quad \Delta x_n^{(2)} = x^{2n+2}\,(a_{2n+2} - x\, a_{2n+3})$

Soit $\quad \Delta x_n^{(2)} = x^{2n+2}\, b_{2n+2}$,

avec $\quad b_k = a_k - x\, a_{k+1} \neq 0, \quad \forall k \geq o$.

Comme $(b_k)_{k\geq o} \in TM$ (lemme 6), en particulier $b_k > o \quad \forall k$.

C'est-à-dire : $\Delta x_n^{(1)} < o$ et $\Delta x_n^{(2)} > o \quad \forall n \geq o$.

Par suite $(x_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(x_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont strictement monotones.

Ceci nous garantit que $S_n \neq S^* \quad \forall n \geq o$.

3/ Comme $\lambda_k \neq -1 \quad \forall k \geq o$, $\mu_k = \lambda_k\, \lambda_{k+1}\, \dfrac{1 + \lambda_{k+2}}{1 + \lambda_k}$ est bien défini $\quad \forall k \geq o$.

On a : $\mu_k = x^2 . \dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} . \dfrac{a_{k+3}}{a_{k+2}} . \dfrac{1 - x\,\dfrac{a_{k+4}}{a_{k+3}}}{1 - x\,\dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}}}$

Soit : $\mu_k = x^2\, \dfrac{a_{k+3} - xa_{k+4}}{a_{k+1} - xa_{k+2}} = x^2\, \dfrac{b_{k+3}}{b_{k+1}}$

Si on pose $c_k = \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$ (b_k étant non nul), alors $\mu_k = x^2 c_{k+1}\, c_{k+2}$.

$(b_k)_{k\geq o}$ étant totalement monotone (lemme 6), alors $(c_k)_{k\geq o}$ est une suite positive, croissante et majorée par 1 (lemme 4).

Donc $(c_k c_{k+1})_{k\geq o}$ est aussi croissante, majorée par 1. Par conséquent la suite $(\mu_k)_{k\geq o}$ est croissante et majorée par x^2.

Or $\mu_{2n} = \lambda_n^{(1)}$ et $\mu_{2n+1} = \lambda_n^{(2)}$ (lemme 2), alors $(\lambda_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(\lambda_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont croissantes et sont majorées par $x^2 < 1$. Donc $\lambda_n^{(i)} < 1 \quad i=1,2 \quad \forall n$.

Enfin, la convergence de $(T_n^{(i)})_{n\geq o}$ i=1,2 vers S^* est assurée car $x \neq 1$.

Il s'ensuit que :

$$S^* \in J_n = [T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}] \subseteq [x_{n+2}^{(2)}, x_{n+2}^{(1)}] \quad \forall n\geq o$$

∎

3 - Application au cas des suites oscillantes convergentes de $\Omega\rho^{(2)}$

On va s'intéresser à une classe de suites caractérisée par certaines propriétés de la fonction (s'il en existe une) qui lie les rapports des différences successives des termes de la suite.

Définition 3 :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite convergente de limite S^* telle que $\Delta S_n \neq 0$ $\forall n\geq o$.

On dit que $(S_n)_{n\geq o}$ vérifie la propriété $P_\omega^{(2)}$ si :

1) La suite $(\lambda_n)_{n\geq o} = \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right)_{n\geq o}$ est telle que :

$$|\lambda_n| \leq |\rho| \quad \forall n\geq o \quad \text{où } \rho = \lim_{n\to\infty} \lambda_n, \; o < |\rho| < 1.$$

On pose $\tilde{\rho} = |\rho|$ et $\tilde{\lambda}_n = |\lambda_n|$ $\forall n\geq o$

2) $\exists\omega : [o,\tilde{\rho}] \longrightarrow [o,\tilde{\rho}]$ deux fois dérivable , convexe, vérifiant $\omega'(x) < 1$ $\forall x\in]o,\tilde{\rho}[$ telle que :

$$\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega(\tilde{\lambda}_n) \quad \forall n\geq o \quad \text{et} \quad \omega(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}$$

Définition 4 :

On dit qu'une suite $(S_n)_{n\geq o}$ appartient à $\Omega_\rho^{(2)}$, si elle vérifie la propriété $P_\omega^{(2)}$.

Il a été question de cette classe de suites, dans le chapitre II, mais uniquement pour les suites monotones à convergence logarithmique.

Parmi les suites à convergence linéaire, on a les exemples suivants :

1) Soit la suite $(S_n^{(1)})_{n\geq o}$: $S_n^{(1)} = \sum_{k=o}^{n} \frac{\lambda^k}{k+1}$, $o < |\lambda| < 1$.

$$\text{On a} \; : \Delta S_n^{(1)} = \frac{\lambda^{n+1}}{n+2} \neq o \qquad \forall n\geq o$$

Suivant que λ est positif ou négatif, $(S_n^{(1)})_{n\geq o}$ est monotone ou alterné.

$$\text{On a} \; : \lambda_n = \frac{\Delta S_{n+1}^{(1)}}{\Delta S_n^{(1)}} = \lambda \, \frac{n+2}{n+3} \quad \forall n$$

Comme $\frac{n+2}{n+3} < 1$ $\forall n\geq o$, alors $|\lambda_n|<|\lambda|$ $\forall n\geq o$.

Si on pose $\tilde{\lambda} = |\lambda|$ et $\tilde{\lambda}_n = |\lambda_n|$, on a alors :

$$\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda} \, \frac{n+2}{n+3} \quad \forall n,$$

et on obtient ω, $\omega(x) = \frac{\tilde{\lambda}^2}{2\tilde{\lambda} - x}$, $\forall x \in [o,\tilde{\lambda}]$.

Il est facile de vérifier que, d'une part :

$\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega(\tilde{\lambda}_n)$ $\forall n\geq o$ et $\omega(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}$, d'autre part :

$\omega'(x) < 1$ $\forall x\in[o,\tilde{\lambda}[$, car $\omega'(x) = \frac{\tilde{\lambda}^2}{(2\tilde{\lambda} - x)^2}$ et $\tilde{\lambda} < 2\tilde{\lambda} - x$, $\forall x\in[o,\tilde{\lambda}[$.

Enfin, $\omega''(x) = \frac{2\tilde{\lambda}^2}{(2\tilde{\lambda} - x)^3} > 0$, donc ω convexe sur $[o,\tilde{\lambda}]$.

Par conséquent : $(S_n^{(1)})_{n\geq o} \in \Omega_{\lambda}^{(2)}$.

2) On a : $\sum_{n\geq o} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{Arctg } x$ pour $|x|<1$.

On considère donc la suite de sommes partielles $(S_n^{(2)})_{n\geq o}$:

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} , \quad \forall n.$$

On a : $\Delta S_n^{(2)} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ et $\lambda_n = -x^2 \frac{2n+3}{2n+5}$ $\forall n$

comme $\frac{2n+3}{2n+5} < 1$ $\forall n\geq o$, alors $|\lambda_n| < x^2$ $\forall n\geq o$.

Si on pose $\tilde{\lambda}_n = x^2 \frac{2n+3}{2n+5}$ $\forall n$, on obtient la fonction $\omega : t \longrightarrow \omega(t) = \frac{x^4}{2x^2 - t}$,

$t\in[o,x^2]$, telle que :

$$\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega(\tilde{\lambda}_n) \quad \forall n \quad \text{et} \quad \omega(x^2) = x^2.$$

On voit que la fonction ω se déduit facilement de celle associée à la suite $(S_n^{(1)})_{n\geq o}$: $S_n^{(1)} = \sum_{k=o}^{n} \frac{\lambda^k}{k+1}$, en remplaçant $\tilde{\lambda}$ par x^2.

Par conséquent $(S_n^{(2)})_{n\geq o} \in \Omega^{(2)}_{-x^2}$.

3) Soit $(S_n^{(3)})_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_o^{(3)} = 0 \\ S_{n+1}^{(3)} = \dfrac{3}{4 - S_n^{(3)}}, \ n\geq 1. \end{cases}$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(3)} = 1 \text{ et } \Delta S_n^{(3)} = \frac{(1 - S_n^{(3)})(3 - S_n^{(3)})}{(4 - S_n^{(3)})} \quad \forall n.$$

Donc :

$$\lambda_n = \frac{3}{13 - 4S_n^{(3)}} \quad \forall n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 1/3.$$

Comme $S_n^{(3)} \in[o,1[\ \forall n\geq o$ alors $|\lambda_n| = \lambda_n < 1 \ \forall n\geq o$ (puisque $13-4S_n^{(3)} > 3$).

On obtient $\omega : x \longrightarrow \omega(x) = \frac{3(1+x)}{13-3x}$ telle que $\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega(\tilde{\lambda}_n) \ \forall n\geq o$

$(\tilde{\lambda}_n = \lambda_n)$ et $\omega(1/3) = 1/3$. On a :

$$\omega'(x) = \frac{48}{(13-3x)^2} < 1 \qquad \forall x\in[o,1/3], \text{ car } \frac{48}{(13-3x)^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{13 - 4\sqrt{3}}{3}$$

Or $x \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} < \frac{13 - 4\sqrt{3}}{3}$, et $\omega''(x) = \frac{288}{(13 - 3x)^3} > 0$ car $13-3x > 0$,

donc ω est convexe sur $[o,1/3]$.

Par suite : $(S_n^{(3)})_{n\geq o} \in\Omega^{(2)}_{1/3}$.

4) Soit $(S_n^{(4)})_{n\geq o}$: $S_n^{(4)} = \frac{1 + \alpha^n}{1 - \alpha^n}$ avec $o < \alpha < 1$.

On a :

$$\Delta S_n^{(4)} = \frac{2\alpha^n(\alpha - 1)}{(1-\alpha^n)(1-\alpha^{n+1})} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \alpha \, \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+2}} \quad \forall n \geq o$$

Comme : $\dfrac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha^{n+2}} < 1 \quad \forall n \geq o$ alors $\tilde{\lambda}_n = |\lambda_n| = \lambda_n < \alpha \quad \forall n \geq o$

On obtient $\omega : x \longrightarrow \omega(x) = \dfrac{\alpha(1 + x)}{\alpha^2 + \alpha + 1 - \alpha x}$, $x \in [o,\alpha]$, qui vérifie

$$\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega\,(\tilde{\lambda}_n) \quad \forall n \geq o \quad \text{et} \quad \omega(\alpha) = \alpha.$$

Il faut noter que $\alpha^2 + \alpha + 1 - \alpha\, x \neq o \quad \forall x \in [o,\alpha]$, car $\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} \notin [0,\alpha]$

D'une part :

$$\omega'(x) = \frac{\alpha\,(1 + \alpha)^2}{(\alpha^2 + \alpha + 1 - \alpha x)^2} \quad \text{et} \quad \omega' < 1 \quad \text{sur } [0,\alpha]$$

En effet :

$$\omega' < 1 \iff 1 + \alpha + \alpha^2 - \alpha x > \sqrt{\alpha}\,(1 + \alpha)$$

$$\iff \frac{1 + \alpha + \alpha^2 - \sqrt{\alpha}\,(1 + \alpha)}{\alpha} > x$$

Or : $x < \alpha$ et $\alpha < \dfrac{1 + \alpha + \alpha^2 - \sqrt{\alpha}\,(1 + \alpha)}{\alpha}$

D'autre part :

$$\omega''(x) = \frac{2\alpha^2(1 + \alpha)^2}{(1+\alpha+\alpha^2 - \alpha x)^3} > 0$$ sur $[0,\alpha]$, par suite ω est convexe sur $[0,\alpha]$.

Donc $(S_n^{(4)})_{n\geq o} \in \Omega_\alpha^{(2)}$.

On peut alors affirmer que $\Omega_\rho^{(2)}$ n'est pas vide, $0 < |\rho| < 1$.

5) On va terminer avec un exemple de suites dont la fonction ω correspondante n'est pas convexe.

Il s'agit de la suite de Fibonacci $(S_n)_{n\geq o}$:

$$\begin{cases} S_o = 1 \\ S_{n+1} = 1 + 1/S_n \quad , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

On a : $\Delta S_n = \dfrac{1 + S_n - S_n^2}{S_n}$ et $\lambda_n = -\dfrac{1}{1 + S_n}$ $\forall n \geq o$

Si on pose $\tilde{\lambda}_n = |\lambda_n| = \dfrac{1}{1 + S_n}$, on obtient alors $\omega : x \longrightarrow \omega(x) = \dfrac{1 - x}{2 - x}$

telle que $\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega\,(\tilde{\lambda}_n)$ $\forall n \geq o$ et $\omega\,(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}$ avec $\tilde{\lambda} = \dfrac{2}{3 + \sqrt{5}}$.

On a :

$$\omega'(x) = -\frac{1}{(2 - x)^2} \quad \text{et} \quad \omega''(x) = -\frac{2}{(2 - x)^3} < 0$$

Donc $\quad (S_n)_{n \geq o} \notin \Omega^{(2)}_{-\tilde{\lambda}}$.

On va donner maintenant quelques propriétés de la fonction ω quand $|\rho| \neq 1$.

Donc, soit la fonction $\omega : [0,\tilde{\rho}] \longrightarrow [0,\tilde{\rho}]$ deux fois dérivable. ($\tilde{\rho} = |\rho|$).

<u>Lemme 7 :</u>

Si $\omega'(x) < 1$ $\forall x \in]0,\tilde{\rho}[$ et $\omega\,(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}$, alors :

$$x < \omega\,(x) \quad \forall x \in]0,\tilde{\rho}[.$$

<u>Preuve :</u>

Soit $\sigma(x) = x - \omega(x)$, $\sigma'(x) = 1 - \omega'(x) > 0$ sur $]0,\tilde{\rho}[$.

Donc σ est strictement croissante sur $]0,\tilde{\rho}[$. Or $\sigma\,(\tilde{\rho}) = 0$, alors $\sigma(x) < 0$ $\forall x \in]0,\tilde{\rho}[$.

Par suite : $x < \omega\,(x)$ $\quad \forall x \in]0,\tilde{\rho}[$

∎

On définit la fonction $g : x \longrightarrow g(x) = \dfrac{1 - \omega(x)}{1 - x}$ sur $[0,\tilde{\rho}]$.

Notons : si $\omega\,(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}$, alors $g(\tilde{\rho}) = 1$.

<u>Lemme 8 :</u>

Si ω est convexe sur $]0,\tilde{\rho}[$ telle que $\omega' < 1$ sur $]0,\tilde{\rho}[$ et $\omega\,(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}$, alors g est strictement croissante sur $]0,\tilde{\rho}[$.

Preuve :

On pose $g_{\tilde\rho}(x) = \dfrac{\tilde\rho - \omega(x)}{\tilde\rho - x}$, $x \neq \tilde\rho$.

* $g_{\tilde\rho}$ est croissante :

Soient x,y : $0 < x < y < \tilde\rho$

On peut écrire : $y = \dfrac{\tilde\rho - y}{\tilde\rho - x} \cdot x + \dfrac{y - x}{\tilde\rho - x} \cdot \tilde\rho$

ω étant convexe, alors :

$$\omega(y) \leq \frac{\tilde\rho - y}{\tilde\rho - x} \cdot \omega(x) + \frac{y - x}{\tilde\rho - x} \cdot \omega(\tilde\rho)$$

On a : $\tilde\rho > x$ et $\omega(\tilde\rho) = \tilde\rho$, donc : $\omega(y)(\tilde\rho-x) \leq (\tilde\rho-y)\omega(x)+(y-x)\tilde\rho$

Soit : $\omega(y)(\tilde\rho-x) + x\tilde\rho \leq \omega(x)\ (\tilde\rho-y) + y\tilde\rho$.

En retranchant $\tilde\rho^2$ des deux membres, on obtient :

$$(\tilde\rho-x)(\omega(y)-\tilde\rho) \leq (\tilde\rho-y)(\omega(x)-\tilde\rho)$$

soit : $\dfrac{\omega(y) - \tilde\rho}{\tilde\rho - y} \leq \dfrac{\omega(x) - \tilde\rho}{\tilde\rho - x}$

donc : $g_{\tilde\rho}(x) \leq g_{\tilde\rho}(y)$.

* $g_{\tilde\rho}(x) < 1$ (resp. $g(x) < 1$) sur $]0,\tilde\rho[$

On a : $x < \omega\ (x)$ $\forall x \in]0,\tilde\rho[\subseteq]0,1[$ (lemme 7)

Donc : $\tilde\rho - x > \tilde\rho - \omega(x)$ (resp. $1 - x > 1 - \omega(x)$) $\forall x \in]0,\tilde\rho[$

* Pour $x \in]0,\tilde\rho[$, on a :

$$g_{\tilde\rho}(x) = \frac{\tilde\rho - \omega(x)}{\tilde\rho - x} = \frac{\tilde\rho - 1 + 1 - \omega(x)}{\tilde\rho - 1 + 1 - x}$$

Soit : $g_{\tilde\rho}(x) = \dfrac{\dfrac{1 - \omega(x)}{1 - x} - \dfrac{1 - \tilde\rho}{1 - x}}{1 - \dfrac{1 - \tilde\rho}{1 - x}}$

On pose $u_{\tilde\rho}(x) = \dfrac{1 - \tilde\rho}{1 - x}$. On a : $o < u_{\tilde\rho}(x) < 1$ $\forall x \in]0,\tilde\rho[$.

Donc $$g_{\tilde{\rho}}(x) = \frac{g(x) - u_{\tilde{\rho}}(x)}{1 - u_{\tilde{\rho}}(x)}$$

=> $$g(x) = (1 - u_{\tilde{\rho}}(x))\, g_{\tilde{\rho}}(x) + u_{\tilde{\rho}}(x).$$

Si on dérive la fonction g, on obtient :

$$g'(x) = (1-u_{\tilde{\rho}}(x))g'_{\tilde{\rho}}(x) + u'_{\tilde{\rho}}(x) - u'_{\tilde{\rho}}(x)\, g_{\tilde{\rho}}(x)$$

soit : $$g'(x) = (1-u_{\tilde{\rho}}(x))g'_{\tilde{\rho}}(x) + (1-g_{\tilde{\rho}}(x))\, u'_{\tilde{\rho}}(x)$$

Comme $1-g_{\tilde{\rho}}(x) > 0$, $1-u_{\tilde{\rho}}(x) > 0$, $g'_{\tilde{\rho}}(x) \geq 0$

et $u'_{\tilde{\rho}}(x) = \dfrac{1-\tilde{\rho}}{(1-x)^2} > 0$ sur $]0,\tilde{\rho}[$, alors :

$$g'(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in]0,\tilde{\rho}[$$

Par conséquent, g est strictement croissante sur $]0,\tilde{\rho}[$.

∎

Grâce à ces deux lemmes, on va donner un corollaire de la proposition 1 pour cette classe de suites :

Proposition 4 :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite oscillante convergente de limite S^* telle que : $(S_n)_{n\geq o} \in \Omega_\rho^{(2)}$ $(S_n \neq S^*\ \forall n\geq o)$.

Alors, $S^* \in J_n = [T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}] \subseteq [x_{n+2}^{(1)} \wedge x_{n+2}^{(2)}]$ $\forall n\geq o$.

Preuve : On a $S_n \neq S^*$ $\forall n\geq o$, donc :

$(S_n)_{n\geq o}$ étant oscillante, on a $\forall n\geq o$ $\lambda_n < 0$.

Donc : $\tilde{\lambda}_n = -\lambda_n$ $\forall n\geq o$ et $\tilde{\rho} = -\rho$, $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$.

Comme : $(S_n)_{n\geq o} \in \Omega_\rho^{(2)}$, alors $\exists \omega : [0,\tilde{\rho}] \longrightarrow [0,\tilde{\rho}]$ deux fois dérivable, convexe avec $\omega' < 1$ sur $]0,\tilde{\rho}[$ et $\omega(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}$ telle que $\tilde{\lambda}_{n+1} = \omega(\tilde{\lambda}_n)$ $\forall n\geq o$.

1) $(\tilde{\lambda}_n)_{n\geq o}$ est strictement croissante vers $\tilde{\rho}$, car $x < \omega(x)$ $\forall x \in]0,\tilde{\rho}[$ (lemme 7).

On a : $\begin{cases} \tilde{\lambda}_n < \tilde{\rho} < 1, \text{ par suite } \underline{\lambda_n \neq -1 \quad \forall n\geq o.} \\ \forall n\geq o \end{cases}$

2) Si $\mu_k = \lambda_k \lambda_{k+1} \dfrac{1+\lambda_{k+2}}{1+\lambda_k}$, alors $\mu_k = \tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_{k+1} \dfrac{1-\tilde{\lambda}_{k+2}}{1-\tilde{\lambda}_k}$

Soit : $\mu_k = \tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_{k+1} \dfrac{1-\tilde{\lambda}_{k+2}}{1-\tilde{\lambda}_{k+1}} \cdot \dfrac{1-\tilde{\lambda}_{k+1}}{1-\tilde{\lambda}_k}$

Soit encore : $\mu_k = \tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_{k+1} \dfrac{1-\omega(\tilde{\lambda}_{k+1})}{1-\tilde{\lambda}_{k+1}} \cdot \dfrac{1-\omega(\tilde{\lambda}_k)}{1-\tilde{\lambda}_k}$

Donc : $\mu_k = \tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_{k+1} \; g(\tilde{\lambda}_k) . \; g(\tilde{\lambda}_{k+1}) \quad \forall k$

On a : $\lambda_n^{(1)} = \mu_{2n}$ et $\lambda_n^{(2)} = \mu_{2n+1}$ $\forall n\geq o$ (lemme 2)

et comme $\begin{cases} 0 < \tilde{\lambda}_k < \tilde{\rho} \\ 0 < g(\tilde{\lambda}_k) < 1 \end{cases}$ $\forall k$ alors $\mu_k < \rho^2 < 1 \; \forall k$

Il s'ensuit que $\underline{\lambda_n^{(i)} < 1 \quad \forall n\geq o}$ $i=1,2$

3) $\mu_k > 0$ $\forall k$ donc $\lambda_n^{(i)} > 0$ $\forall n$.

C'est-à-dire $\lambda_n^{(i)} = \dfrac{\Delta x_{n+1}^{(i)}}{\Delta x_n^{(i)}} > 0$ $\forall n$, donc $(\Delta x_n^{(i)})_{n\geq o}$ a un signe constant et par suite $\underline{(x_n^{(i)})_{n\geq o} \text{ est monotone}}$; $i=1,2$.

4) $\begin{cases} (\tilde{\lambda}_k)_{k\geq o} & \text{étant strictement croissante} \\ g & \text{étant strictement croissante} \quad \text{(lemme 8)} \end{cases} \Rightarrow$

$(g(\tilde{\lambda}_k))_{k\geq o}$ est aussi strictement croissante.

Donc $(\mu_k)_{k\geq o}$ est strictement croissante ($\tilde{\lambda}_k$ et $g(\tilde{\lambda}_k)$ étant positifs $\forall k$).

C'est-à-dire : $\mu_{2n} < \mu_{2n+1} < \mu_{2n+2} < \mu_{2n+3} \quad \forall n\geq o$

Soit : $\lambda_n^{(1)} < \lambda_n^{(2)} < \lambda_{n+1}^{(1)} < \lambda_{n+1}^{(2)} \quad \forall n\geq o$

Donc : $(\lambda_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(\lambda_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont strictement croissantes.

Enfin, $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(T_n^{(2)})_{n\geq o}$ convergent vers S^*, puisque $\tilde{\rho}\neq 1$.
Il faut rappeler que $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(T_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont les suites obtenues par l'application du procédé Δ^2 d'Aitken aux sous-suites d'indices pair et impair de $(S_n)_{n\geq o}$.
Donc, toutes les hypothèses de la proposition 1 sont vérifiées. Par conséquent :

$$S^* \in J_n = [T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}] \subseteq [x_{n+2}^{(1)} \wedge x_{n+2}^{(2)}] \quad \forall n\geq o$$

■

VI - Résultats numériques :

. Nous avons testé cette méthode sur des suites oscillantes convergentes appartenant à l'une des 3 classes citées auparavant.

Notons que $(T_n^{(i)})_{n\geq o}$, cette fois-ci, est la suite obtenue en appliquant le procédé Δ^2 d'Aitken à $(y_n^{(i)})_{n\geq o}$:

. $$y_n^{(1)} = S_{2n+1} \quad \text{et} \quad y_n^{(2)} = S_{2n+2} \quad \forall n\geq o.$$

1 - Estimation de log(1 + x) , 0 < x < 1

On a : $$\log(1+x) = \sum_{k\geq o} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Donc, soit la suite $(S_n)_{n\geq o} = (S_n(x))_{n\geq o}$ de sommes partielles :

$$S_n(x) = \sum_{k=o}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \quad \text{avec } 0 < x < 1.$$

Cette suite est de la forme $\sum_{k=o}^{n} (-1)^k a_k x^k$ avec $a_k = \dfrac{x}{k+1}$

et on a : $(a_k)_{k\geq o} \in TM$.

Pour x=0.5, on a : log 1.5= 0.405465108108164 et on obtient l'encadrement suivant :

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
1	.406103286384977D+00	.405231007751936D+00
2	.405522778742133D+00	.405445676274266D+00
3	.405471930451926D+00	.405462067750986D+00
4	.405466021514836D+00	.405464757441760D+00
5	.405465245621535D+00	.405465055196790D+00
6	.405465130380167D+00	.405465098951021D+00
7	.405465111916346D+00	.405465106505945D+00
8	.405465108786292D+00	.405465107817005D+00
9	.405465108233762D+00	.405465108053007D+00
10	.405465108132011D+00	.405465108097681D+00
11	.405465108112798D+00	.405465108106107D+00
12	.405465108109962D+00	.405465108107753D+00
13	.405465108108349D+00	.405465108108091D+00
14	.405465108108262D+00	.405465108108147D+00
15	.405465108108177D+00	.405465108108161D+00
16	.405465108108166D+00	.405465108108164D+00
17	.405465108108165D+00	.405465108108164D+00
18	.405465108108164D+00	.405465108108164D+00
19	.405465108108164D+00	.405465108108164D+00

On voit que $(T_n^{(1)})_{n\geq o}$ décroit vers log 1.5, tandis que $(T_n^{(2)})_{n\geq o}$ croît vers log 1.5.

On a donc : $\log 1.5 \in [T_n^{(2)}, T_n^{(1)}] \quad \forall n\geq o$.

2 - Estimation de la limite de $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n = (-1)^n \operatorname{tg} (0.5)^n$

On a : $$\lim_{n\to\infty} S_n = S^* = 0$$

$(S_n)_{n\geq o}$ est une suite totalement oscillante, car $((0.5)^n)_{n\geq o} \in TM$ et par suite $(\operatorname{tg} (0.5)^n)_{n\geq o} \in TM$ [2]. Donc $(d_n)_{n\geq o} = (S_n-S^*)_{n\geq o}=(S_n)_{n\geq o} \in TO$ et on a :

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
1	.290861532529229 8D-01	-.394877994690607D-02
2	.504763594035409D-03	-.634567262353912D-04
3	.794348046103799D-05	-.993291771560385D-06
4	.124172624913260D-06	-.155219267079809D-07
5	.194025173244540D-08	-.242531507083304D-09
6	.303164865715806D-10	-.378956115348449D-11
7	.473695159432155D-12	-.592119059404476D-13
8	.740148690995899D-14	-.925185509923902D-15
9	.115649931695129D-15	-.144567346772628D-16
10	.180735655126386D-17	-.225866029341289D-18
11	.282300199450097D-19	-.357342024622908D-20
12	.449986253220847D-21	-.595570041038190D-22
13	.107533479631844D-22	-.530972245021211D-23
14	.827180612553062D-24	-.516987862845642D-25
15	.516987862645662D-25	-.516987862845642D-25
16	.516987862845642D-25	-.323117426778526D-26
17	.323117426778526D-26	-.323117426778526D-26
18	.323117426776526D-26	-.201948391736679D-27

On a bien : $T_n^{(2)} \leq o \leq T_n^{(1)} \quad \forall n\geq o$

3 - Estimation de la limite de $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n=(-1)^{n+1}\log(1-(0.5)^n)$.

$(S_n)_{n\geq o}$ converge vers 0.

Comme $((0.5)^n)_{n\geq o} \in TM$, alors $(-\log(1-0.5^n))_{n\geq o} \in TM$ [2]. Donc $(S_n)_{n\geq o} \in TO$.

Donc, on obtient :

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
1	.645385211375712D-01	-.912098309426974D-02
2	.209510563338107D-02	-.595033279409491D-03
3	.124108758920939D-03	-.307690909348242D-04
4	.766063494985980D-05	-.191124136090555D-05
5	.477322983972875D-06	-.119260970099963D-06
6	.298099048017191D-07	-.745152817291909D-08
7	.186270635946430D-08	-.465676091019799D-09
8	.116417172248335D-09	-.291040617575029D-10
9	.727598652744132D-11	-.181899301825896D-11
10	.454747802778541D-12	-.113686894380179D-12
11	.284217165772445D-13	-.710542624433862D-14
12	.177635697174915D-14	-.4440892206393675D-15
13	.111022307425599D-15	-.277555780971708D-16
14	.693889473108784D-17	-.173472357937438D-17
15	.433680920692990D-18	-.108420268947339D-18
16	.271051060109259D-19	-.677627004039294D-20
17	.169406912568287D-20	-.423519704801418D-21
18	.105082349591055D-21	-.264701834968604D-22

On a : $0 \in [T_n^{(2)}, T_n^{(1)}]$ $\forall n \geq o$.

4 - Estimation de la limite de $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n = (-1)^n \text{Arcsin}\left(\frac{0.5^n}{n+1}\right)$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ et $(S_n)_{n\geq o} \in TO$ car $(u_n)_{n\geq o} = \left(\frac{0.5^n}{n+1}\right)_{n\geq o} \in TM$

et $(\text{Arcsin } u_n)_{n\geq o} \in TM$ [2]. On a donc :

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
1	.894643240986057D-02	-.173595611226393D-02
2	.494050562642390D-03	-.155653475041853D-03
3	.523040537130977D-04	-.184268303540929D-04
4	.673573645174279D-05	-.255653467837977D-05
5	.978949496054792D-06	-.385668266321565D-06
6	.154647855622614D-06	-.629552934256273D-07
7	.259689536723051D-07	-.106377208148741D-07
8	.456920924575167D-08	-.194429014506309D-08
9	.834160977375946D-09	-.366557397508069D-09
10	.156901101510941D-09	-.686986252094153D-10
11	.302492071596979D-10	-.135862649899602D-10
12	.595395234210504D-11	-.265949671127059D-11
13	.119280261306271D-11	-.537017485723306D-12
14	.242631654606398D-12	-.109967903704234D-12
15	.500137986844609D-13	-.226086445585729D-13
16	.104303413642639D-13	-.476209504711462D-14
17	.219783751676719D-14	-.101248800865297D-14
18	.467496046913170D-15	-.216231020659902D-15

Comme prévu, on a $T_n^{(2)} \leq 0 \leq T_n^{(1)} \quad \forall n\geq o$.

5- Estimation de la limite de $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n=(-1)^n \operatorname{sh}\left(\frac{0.5^n}{n+1}\right)$, $n\geq o$.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=o$ et $(S_n)_{n\geq o} \in TO$ car $\left(\operatorname{sh}\left(\frac{0.5^n}{n+1}\right)\right)_{n\geq o} \in TM$ [2].

On obtient :

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
1	.757204730332047D-02	-.173474084502768D-02
2	.494042858472109D-03	-.155653400346132D-03
3	.523040527980039D-04	-.184268303410276D-04
4	.673573645113409D-05	-.253653467837617D-05
5	.978949496054751D-06	-.385668268321565D-06
6	.154647855826610D-06	-.629552934256271D-07
7	.259689536723063D-07	-.108372081487414D-07
8	.456926924525172D-08	-.194429014506311D-08
9	.834166877375083D-09	-.360557397508069D-09
10	.156901101716804D-09	-.686986252994096D-10
11	.302492071590870D-10	-.133882849890802D-10
12	.595395254210504D-11	-.265949691127064D-11
13	.119280201306271D-11	-.537017485723256D-12
14	.242631634608401D-12	-.109987903704234D-12
15	.500137986844669D-13	-.226086445585680D-13
16	.104303413042636D-13	-.478209504711462D-14
17	.219783731870699D-14	-.101244806865390D-14
18	.467408460131784D-15	-.216231020659902D-15

Donc $0 \in [T_n^{(2)}, T_n^{(1)}] \quad \forall n\geq o$.

6 - Estimation de la série $\sum\limits_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $0 < x < 1$.

On a : $\operatorname{Arctg} x = \sum\limits_{k\geq o} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $0 < x < 1$.

Si on considère la suite $(S_n)_{n\geq o}$: $S_n = \sum\limits_{k=o}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, alors $(S_n)_{n\geq o} \in \Omega^{(2)}_{x^2}$ (voir p. 116).

Pour x= 0.5, on a Arctg 0.5= 0.463647609000806 et on obtient l'estimation suivante :

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$
1	.463060858671220D+00	.463645892929842D+00
2	.463647858951220D+00	.463647569474853D+00
3	.463647615641772D+00	.463647607831944D+00
4	.463647609214237D+00	.463647608960656D+00
5	.463647609006547D+00	.463647608999282D+00
6	.463647609001111D+00	.463647609000744D+00
7	.463647609000819D+00	.463647609000803D+00
8	.463647609000807D+00	.463647609000806D+00
9	.463647609000806D+00	.463647609000806D+00
10	.463647609000806D+00	.463647609000806D+00
11	.463647609000806D+00	.463647609000806D+00

Donc $\operatorname{Arctg} 0.5 \in [T_n^{(2)}, T_n^{(1)}] \quad \forall n\geq o$.

En conclusion, pour ces trois classes de suites, nous pouvons estimer la limite à l'aide d'un encadrement obtenu par l'application du procédé Δ^2 d'Aitken aux sous-suites d'indices pair et impair. Nous notons que cette estimation de la limite est garantie dès la première itération puisque, pour ces trois classes de suites, $(\lambda_n^{(1)})_{n\geq o}$ et $(\lambda_n^{(2)})_{n\geq o}$ sont croissantes (Cf. proposition 1).

CHAPITRE IV

GENERALISATION DU PROCEDE DE CONTROLE D'ERREUR DE C. BREZINSKI.

I - Introduction et position du problème :

Jusqu'à présent nous avions contrôlé l'erreur en considérant $T_n(b_n)$ et $T_n(-b_n)$. Nous allons maintenant effectuer ce contrôle à l'aide de deux transformations : $T_n(b_n)$ et $T_n(c_n)$.

Donc, au lieu de faire un seul choix de suites, on est amené à faire un double choix. C'est une nouvelle vue qui vise à la fois l'accélération de la convergence et l'estimation de l'erreur.

En effet, dans l'étude faite sur le procédé de contrôle d'erreur [1] avec la transformation particulière $(T_n)_{n\geq o} = (S_{n+1})_{n\geq o}$, on se rend compte, $T_n(b_n)$ et $T_n(-b_n)$ étant symétriques par rapport à S_{n+1}, que si $(S_n)_n$ converge très lentement, alors l'une au moins des deux transformations n'accélère pas la convergence et l'estimation de la limite à l'aide des intervalles $I_n(b_n)$ est sans intérêt.

Afin d'illustrer ce qui précède, on va donner l'exemple suivant :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\qquad S_n = \dfrac{1}{n+1} \quad ; \quad S^* = 0$

On a : $\qquad \Delta S_n = - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \quad ; \quad \lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \dfrac{n+1}{n+3}$

et : $\qquad e_n = \dfrac{S_{n+1} - S^*}{\Delta S_n} = -(n+1).$

On rappelle que : $T_n(a_n) = T_n - a_n D_n$, si :

$$T_n = S_n + D_n.$$

Ici, $(T_n)_n$ sera la transformation particulière :

$$T_n = S_{n+1} \quad , \quad \text{donc} \quad D_n = \Delta S_n$$

Soient $(I_n(b_n))_n$ et $(I_n(c_n))_n$ deux suites d'intervalles :

$*$ $I_n(b_n) = [T_n(-b_n) \wedge T_n(b_n)]$, avec $b_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} = \dfrac{n+1}{2}$, $\forall n$

$(T_n(b_n))_{n\geq 0}$ est le procédé Δ^2 d'Aitken.

* $I_n(c_n) = [T_n(-c_n) \wedge T_n(c_n)]$, avec $c_n = n + 2$, $\forall n$.

Donc, d'après le théorème 3 [1] :

D'une part : $S^* \notin I_n(b_n)$ $\forall n\geq 0$, car $|e_n| > b_n$, $\forall n\geq 0$

D'autre part $S^* \in I_n(c_n)$ $\forall n\geq 0$, car $|e_n| < c_n$, $\forall n\geq 0$

Par suite, d'après [1], la suite d'intervalles $(I_n(c_n))_{n\geq 0}$ servira pour l'estimation de S^*.

$$\text{Mais, } T_n(-b_n) = S_{n+1} + b_n\, \Delta S_n = \frac{3}{2(n+2)}$$

$$T_n(b_n) = S_{n+1} - b_n\, \Delta S_n = \frac{1}{2(n+2)}$$

$$T_n(-c_n) = S_{n+1} + c_n \Delta S_n = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{et} \quad T_n(c_n) = S_{n+1} - c_n\, \Delta S_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Soit la disposition suivante :

$T_n(c_n)$	S^*	$T_n(b_n)$	S_{n+1}	$T_n(-b_n)$	$T_n(-c_n)$
$-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	0	$\frac{1}{2(n+2)}$	$\frac{1}{n+2}$	$\frac{3}{2(n+2)}$	$\frac{(2n+3)}{(n+1)(n+2)}$

On voit donc qu'il est judicieux de prendre l'intervalle $[T_n(c_n), T_n(b_n)]$ pour estimer S^* au lieu de $I_n(c_n)$.

Donc, en faisant un nombre fini de choix de suites $(b_n^{(k)})_n$ et en disposant d'un nombre fini d'intervalles $I_n(b_n^{(k)})$, comment faut-il procéder pour avoir un nouvel intervalle à partir des intervalles $I_n(b_n^{(k)})$, de telle sorte qu'à la fois sa longueur soit minimale et S^* y appartienne ?

Tout d'abord, on va proposer quelques résultats concernant le choix qui donne comme intervalle, à l'étape n, l'intersection des intervalles $I_n(b_n^{(k)})$.

Pour cela, soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite réelle de limite S^*. Soient $(b_n^{(k)})_{n\geq o}$: $k = 1, \ldots, p$. On suppose que $(S_n)_{n\geq o}$ est strictement monotone et que les suites $(b_n^{(k)})_{n\geq o}$ sont strictement positives.

On considère la transformation particulière $(T_n)_{n\geq o}$:

$$T_n = S_{n+1} \quad \forall n\geq o$$

On pose :
$$e_n = \frac{S_{n+1} - S^*}{\Delta S_n} \quad \forall n\geq o,$$

$$I_n(b_n^{(k)}) = [T_n(b_n^{(k)}) \wedge T_n(-b_n^{(k)})] \quad \forall n \text{ et } \forall k.$$

$$T_n(a_n) = S_{n+1} - a_n \, \Delta S_n \quad \forall n.$$

Propriété 1 :

On a : $I_n = \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) \neq \emptyset \qquad \forall n\geq o,$

et si $\lim_{n\to\infty} b_n^{(k)} \Delta S_n = 0, \ \forall k \in \{1, \ldots, p\}$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \{S^*\}.$$

Preuve :

Quitte à remplacer $(S_n)_n$ par $(-S_n)_n$, on va supposer que $(S_n)_n$ est strictement décroissante.

$$b_n^{(k)} > 0 \quad \forall n, \forall k \quad \Rightarrow \quad I_n(b_n^{(k)}) = [T_n(-b_n^{(k)}), T_n(b_n^{(k)})] \quad \forall n, \forall k$$

soient $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $i \neq j$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : soit $b_n^{(i)} \leq b_n^{(j)}$, soit $b_n^{(i)} > b_n^{(j)}$.

* Si $b_n^{(i)} \leq b_n^{(j)}$, alors :

  . $S_{n+1} + b_n^{(i)} \Delta S_n \geq S_{n+1} + b_n^{(j)} \Delta S_n$

  soit $T_n(-b_n^{(i)}) \geq T_n(-b_n^{(j)})$

  . $S_{n+1} - b_n^{(i)} \Delta S_n \leq S_{n+1} - b_n^{(j)} \Delta S_n$

Soit $T_n(b_n^{(i)}) \leq T_n(b_n^{(j)})$

donc $I_n(b_n^{(i)}) \cap I_n(b_n^{(j)}) = I_n(b_n^{(i)})$

* Si $b_n^{(i)} > b_n^{(j)}$, alors :

. $S_{n+1} + b_n^{(i)} \Delta S_n < S_{n+1} + b_n^{(j)} \Delta S_n$

Soit $T(-b_n^{(i)}) < T_n(-b_n^{(j)})$

. $S_{n+1} - b_n^{(i)} \Delta S_n > S_{n+1} - b_n^{(j)} \Delta S_n$

Soit $T_n(b_n^{(i)}) > T_n(b_n^{(j)})$

donc $I_n(b_n^{(i)}) \cap I_n(b_n^{(j)}) = I_n(b_n^{(j)})$

Ceci étant vrai $\forall i, j \in \{1,\ldots,p\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, donc :

$$I_n = \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) = I_n(b_n^{(1)}) \cap I_n(b_n^{(2)}) \cap \ldots \cap I_n(b_n^{(p)})$$

Soit $I_n = I_n(a_n)$ où $a_n = \underset{1\leq k\leq p}{\mathrm{Min}} \{b_n^{(k)}\}$, $\forall n$.

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \neq \emptyset$.

D'autre part : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{(k)} \Delta S_n = 0 \qquad \forall k \in \{1,..,p\}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} T_n(b_n^{(k)}) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(-b_n^{(k)}) = S^*, \quad \forall k \in \{1,\ldots,p\}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} I_n(b_n^{(k)}) = \{S^*\}, \quad \forall k \in \{1,\ldots,p\}$

Donc $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) = \{S^*\}$

■

Ce résultat ne nous garantit pas toujours l'appartenance, à partir d'un certain rang, de S^* à $\bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)})$.

L'exemple précédent montre que :

$$I_n(b_n) \cap I_n(c_n) = I_n(b_n) \quad \forall n \geq 0 \quad \text{et } S^* \notin I_n(b_n) \quad \forall n \geq 0,$$

bien que $\lim_{n\to\infty} I_n(b_n) \cap I_n(c_n) = \{S^*\}$.

D'où le résultat suivant :

Propriété 2 :

Une C.N.S pour que $\exists N : \forall n \geq N \quad S^* \in \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)})$ est que :

$$|e_n| \leq \min_{1\leq k\leq p} \{b_n^{(k)}\} \quad \forall n\geq N \quad (*).$$

Preuve :

On a d'après la propriété précédente :

$$\forall n\geq o : \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) = I_n(a_n),\ a_n = \min_{1\leq k\leq n} b_n^{(k)} > 0$$

Donc, d'après le théorème 3 [1] : $\exists N$:

$$S^* \in I_n(a_n) \quad \forall n\geq N \quad \Longleftrightarrow \quad |e_n| \leq a_n \quad \forall n\geq N$$

Soit : $S^* \in \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) \quad \forall n\geq N \quad \Longleftrightarrow \quad |e_n| \leq \min_{k=1,..,p} \{b_n^{(k)}\} \quad \forall n\geq N.$

∎

On voit donc, qu'à chaque étape, parmi les termes des suites $(b_n^{(k)})_n$ mis en compétition et qui vérifient (*), le choix se porte sur le plus petit d'entre eux. Mais le test (*) dépend de la suite $(e_n)_n$ qui, à priori, n'est pas connue.

C'est pourquoi, on va donner un résultat semblable au précédent, en remplaçant la condition (*) par une autre qui ne dépend que des données.

Propriété 3 :

On suppose que $\lim_{n\to\infty} b_n^{(k)} \Delta S_n = 0,\ k \in \{1,\dots,p\}$.

Si $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \min_{k=1,..,p} \left\{ \dfrac{b_n^{(k)}}{1+b_{n+1}^{(k)}} \right\}$ (* *) $\forall n\geq N$, alors

$S^* \in \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) \quad \forall n\geq N.$

Preuve :

Soit $k \in \{1,\ldots,p\}$ fixé.

On a $\lambda_n \leq \dfrac{b_n^{(k)}}{1 + b_{n+1}^{(k)}}$ $\forall n \geq N$, donc $S^* \in I_n(b_n^{(k)})$ $\forall n \geq N$. (Cf proposition 2, Ch. I).

Ceci étant vrai $\forall k \in \{1,\ldots,p\}$, donc :

$$S^* \in \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) \quad \forall n \geq N$$

■

Donc, jusqu'ici l'estimation de l'erreur est faite à l'aide des deux transformations $T_n(-a_n)$ et $T_n(a_n)$, puisque :

$$I_n = \bigcap_{k=1}^{p} I_n(b_n^{(k)}) = [T_n(-a_n) \wedge T_n(a_n)].$$

Mais, si parmi les suites $(b_n^{(k)})_{n \geq 0}$, il y en a qui ne satisfont ni à la condition (*), ni à (**), alors on peut penser à les écarter de la compétition.

Cependant, l'exemple précédent montre qu'on peut les utiliser.
Ce sera donc l'objet des paragraphes qui vont suivre. L'étude sera limitée à deux suites (b_n) et (c_n).

II - Contrôle de l'erreur à l'aide de deux transformations

1 - Premiers résultats :

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente de limite S^*. On considère la transformation de suites :

$$T : (S_n)_{n \geq 0} \longrightarrow (T_n)_{n \geq 0} \text{ telle que :}$$

$$T_n = S_n + D_n \quad \text{avec} \lim_{n \to \infty} D_n = 0$$

Dans toute la suite, on suppose que $D_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Soient b, c deux réels non nuls : $b < c$.

On pose : $T_n(b) = T_n - bD_n$, $T_n(c) = T_n - cD_n$,

$$I_n(b,c) = [T_n(b) \wedge T_n(c)] \text{ et } e_n = \frac{T_n - S^*}{D_n} (\text{si } D_n \neq 0)$$

Les premiers résultats dans [1] se généralisent facilement :

Théorème 1 :

Une C.N.S pour que $\exists N : \forall n \geq N \quad S^* \in I_n(b,c)$ est que :

$$e_n \in [b,c] \quad \forall n \geq N$$

Preuve : Soit $n \geq N$

$S^* \in I_n(b,c) \iff (T_n(b) - S^*)(T_n(c) - S^*) \leq 0$

$\iff (T_n - S^* - bD_n)(T_n - S^* - c\,D_n) \leq 0 \iff D_n^2 (e_n - b)(e_n - c) \leq 0$

$\iff e_n \in [b,c].$

∎

Théorème 2 :

i) Si $T_n - S^* = o\,(S_n - S^*)$, alors $\forall b, c \in \mathbb{R} : bc < 0$

$\exists N : \forall n \geq N : S^* \in I_n(b,c)$

ii) Si $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \neq 0,1$, alors $\forall b, c \in \mathbb{R}^*$ tels que :

$\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \in [b,c]$, $\exists N, \forall n \geq N : S^* \in I_n(b,c).$

Preuve :

i) $T_n - S = o\,(S_n - S^*) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n - S^*}{D_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$

ii) $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \longrightarrow \lambda \neq 0,1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$

∎

Remarques :

On a : $\dfrac{T_n(a) - S^*}{S_n - S^*} = \dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} - a \dfrac{D_n}{S_n - S^*}$; $a = b,c$

1 - Si $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \longrightarrow 0$, alors $\dfrac{D_n}{S_n - S^*} \longrightarrow -1$

$$\text{Donc } \lim_{n\to\infty} \frac{T_n(a) - S^*}{S_n - S^*} = a$$

2 - Si $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \longrightarrow \lambda \neq 0,1$, alors $\dfrac{D_n}{S_n - S^*} \longrightarrow (\lambda - 1)$

$$\text{donc : } \lim_{n\to\infty} \frac{T_n(a) - S^*}{S_n - S^*} = \lambda - a(\lambda - 1)$$

Dans les deux cas, $(T_n(b))_n$ et $(T_n(c))_n$ n'accélèrent pas la convergence de $(S_n)_n$. Ce qui fait penser à remplacer b et c par les suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$, telles que :

$$\begin{cases} * \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0, \text{ dans le 1er cas.} \\ * \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}, \text{ dans le 2ème cas} \end{cases}$$

Donc, en remplaçant b (resp.c) par $(b_n)_n$ (resp.$(c_n)_n$) on obtient les résultats suivants :

Théorème 3 :

i) Une C.N.S pour que $\exists N$: $\forall n \geq N$, $S^* \in I_n(b_n, c_n)$ est que :

$$e_n \in [b_n \wedge c_n] \quad \forall n \geq N$$

ii) Si *) $T_n - S^* = o\,(S_n - S^*)$

**) $b_n \longrightarrow b$, $c_n \longrightarrow c$, $bc < 0$, alors

$$\exists N, \ \forall n \geq N \ : \ S^* \in I_n(b_n, c_n).$$

Soit $(a_n)_n = (b_n)_n$ ou $(c_n)_n$.

iii) Si $T_n - S^* = o\,(S_n - S^*)$, alors

$$T_n(a_n) - S^* = o\,(S_n - S^*) \iff a_n \longrightarrow 0$$

iv) Si $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \longrightarrow \lambda \neq 0,1$, alors

*) $T_n(a_n) - S^* = o\,(S_n - S^*) \iff a_n \longrightarrow \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$

**) $T_n(a_n) - S^* = o\,(T_n - S^*) \iff a_n \longrightarrow \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$

v) Dans tous les cas :

$$T_n(a_n) - S^* = o\,(T_n - S^*) \iff \frac{a_n}{e_n} \longrightarrow 1$$

Preuve :

. $\dfrac{T_n(a_n) - S^*}{T_n - S^*} = 1 - a_n \dfrac{D_n}{T_n - S^*} = 1 - \dfrac{a_n}{e_n} \Rightarrow$ v)

. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = \lambda \neq 0,1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \Rightarrow$ iv **)

∎

Pour les mêmes raisons citées auparavant, on va donner un résultat semblable au théorème 3i) dans le cas où $(T_n)_n$ est la transformation particulière : $T_n = S_{n+1}$ $\forall n$

Proposition 1 :

On suppose que $(S_n)_n$ est strictement monotone et $c_n < b_n < 0$ $\forall n$.

Si $\exists N : \forall n \geq N$ $\dfrac{b_n}{b_{n+1} - 1} \leq \lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq \dfrac{c_n}{c_{n+1} - 1}$, alors

$$I_{n+1}(b_{n+1}, c_{n+1}) \subseteq I_n(b_n, c_n) \qquad \forall n \geq N.$$

Si, en outre, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \Delta S_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \Delta S_n = 0$, alors

$$S^* \in I_n(b_n, c_n) \qquad \forall n \geq N.$$

<u>Preuve :</u>

On a : $T_n = S_n + \Delta S_n = S_{n+1}$, donc :

$$T_n(b_n) = S_{n+1} - b_n \Delta S_n,\ T_n(c_n) = S_{n+1} - c_n \Delta S_n \text{ et}$$

$$T_n(b_n) - T_n(c_n) = (c_n - b_n)\, \Delta S_n$$

* $\underline{\Delta S_n < 0 \quad \forall n}$ $\Rightarrow (c_n - b_n)\Delta S_n > 0 \quad \forall n$

soit $I_n(b_n,c_n) = [T_n(c_n),\ T_n(b_n)] \quad \forall n$

$$I_{n+1}(b_{n+1},c_{n+1}) \subseteq I_n(b_n,c_n) \iff \begin{cases} T_n(c_n) \leq T_{n+1}(c_{n+1}) \\ T_{n+1}(b_{n+1}) \leq T_n(b_n) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} - c_n \Delta S_n \leq (1 - c_{n+1})\, \Delta S_{n+1} \\ (1 - b_{n+1})\Delta S_{n+1} \leq - b_n\, \Delta S_n \end{cases}$$

$$\iff - \frac{b_n}{1 - b_{n+1}} \leq \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq - \frac{c_n}{1 - c_{n+1}} \text{ ; car } \Delta S_k < 0 \quad \forall k \text{ et}$$

$$\begin{cases} 1 - b_k > 0 \\ 1 - c_k > 0 \end{cases} \quad \forall k$$

* $\underline{\Delta S_n > 0 \quad \forall n}$ $\Rightarrow (c_n - b_n)\, \Delta S_n < 0 \quad \forall n$

soit $I_n(b_n,c_n) = [T_n(b_n),\ T_n(c_n)]$

$$I_{n+1}(b_{n+1},c_{n+1}) \subseteq I_n(b_n,c_n) \iff \begin{cases} T_n(b_n) \leq T_{n+1}(b_{n+1}) \\ T_{n+1}(c_{n+1}) \leq T_n(c_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} - b_n\ \Delta S_n \leq (1 - b_{n+1})\ \Delta S_{n+1} \\ (1 - c_{n+1})\ \Delta S_{n+1} \leq - c_n\ \Delta S_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad - \frac{b_n}{1 - b_{n+1}} \leq \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq - \frac{c_n}{1 - c_{n+1}} \quad ; \text{ car } \Delta S_k > 0 \text{ et } \begin{cases} 1 - b_k > 0 \\ 1 - c_k > 0 \end{cases} \forall k$$

Donc, dans les deux cas :

si $\exists N : \forall n \geq N \quad - \frac{b_n}{1 - b_{n+1}} \leq \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \leq - \frac{c_n}{1 - c_{n+1}}$, alors

$$I_{n+1}(b_{n+1}, c_{n+1}) \subseteq I_n(b_n, c_n) \qquad \forall n \geq N.$$

En plus, si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\ \Delta S_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n\ \Delta S_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} T_n(b_n) = T_n(c_n) = S^*$$

Or : $[T_N(b_N) \wedge T_N(c_N)] \supseteq [T_{N+1}(b_{N+1}) \wedge T_{N+1}(c_{N+1})] \supseteq \ldots\ldots\ldots \supseteq$

$$[T_n(b_n) \wedge T_n(c_n)] \supseteq [T_{n+1}(b_{n+1}) \wedge T_{n+1}(c_{n+1})] \supseteq \ldots\ldots \supseteq \{S^*\}$$

Donc : $\forall n \geq N \ : \ S^* \in I_n(b_n, c_n)$.

■

2 - Un choix particulier des suites (b_n) et (c_n) [7]

On a $T_n(e_n) = S^*$ $\forall n \geq o$, donc l'idée est de prendre pour $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ des valeurs approximatives de $(e_n)_n$.

Un choix, qui est basé sur la remarque précédente, a été proposée par FDIL [7] :

Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq o}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

On pose :

$$b_n = \begin{cases} \frac{\Delta T_n}{\Delta D_n} - \varepsilon_n & \text{si } \Delta D_n \neq 0 \\ \varepsilon_o & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } c_n = \begin{cases} \frac{\Delta T_n}{\Delta D_n} + \varepsilon_n & \text{si } \Delta D_n \neq 0 \\ \varepsilon_o & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 2 [7] :

Si i) $\dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} \longrightarrow \lambda \notin \{0,1\}$

ii) $\exists\alpha , \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha < 1 < \beta, \exists N, \quad \forall n \geq N$:

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \notin [\alpha , \beta] \text{ , alors}$$

$$T_n(b_n) - S^* = o\,(T_n - S^*) \text{ et } T_n(c_n) - S^* = o\,(T_n - S^*)$$

Donc, ce choix garantit bien l'accélération de la convergence des bornes des intervalles $I_n(b_n,c_n)$, mais pas nécessairement le contrôle de l'erreur, puisqu' on ne sait pas si $e_n \in [b_n \wedge c_n]$, bien que :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} e_n = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Donc, l'appartenance de S^* à $I_n(b_n,c_n)$ dépendra cette fois-ci du choix de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq o}$.

III - Connexion entre le procédé généralisé et le procédé de C. Brezinski[1] et des choix particuliers de (b_n) et (c_n) :

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose que le choix des suites (b_n) et (c_n) est effectué de telle sorte que : $c_n \neq - b_n$ $(\forall n)$.

1 - Connexion :

On pose $\alpha_n = \dfrac{b_n + c_n}{2}$ et $\beta_n = \dfrac{b_n - c_n}{2}$ $\forall n$,

donc $b_n = \alpha_n + \beta_n$ et $c_n = \alpha_n - \beta_n$ $\forall n$, $\alpha_n \neq 0$ $\forall n$.

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} T_n(b_n) = T_n - b_n D_n = [T_n - \alpha_n D_n] - \beta_n D_n \\ T_n(c_n) = T_n - c_n D_n = [T_n - \alpha_n D_n] + \beta_n D_n \end{array}\right. \quad \forall n$$

Si on pose : $V_n = T_n + D'_n$, $D'_n = -\alpha_n D_n$, $\alpha_n \neq 0$ $\forall n$,

$$\text{alors} \begin{cases} T_n(b_n) = V_n - \beta_n D_n = V_n + \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}(-\alpha_n D_n) \\ T_n(c_n) = V_n + \beta_n D_n = V_n - \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}(-\alpha_n D_n) \end{cases} \quad \forall n$$

soit encore :

$$\begin{cases} T_n(b_n) = V_n + \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} D'_n = V_n\left(-\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \\ T_n(c_n) = V_n - \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} D'_n = V_n\left(\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \end{cases} \quad \forall n$$

Si on pose $\gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ $\forall n$, alors

$$\begin{cases} T_n(b_n) = V_n(-\gamma_n) \\ T_n(c_n) = V_n(\gamma_n) \end{cases}, \quad \text{avec } V_n = \frac{T_n(b_n) + T_n(c_n)}{2}, \quad \forall n$$

On se retrouve donc, dans le cas de C. Brezinski, en considérant $(V_n)_{n\geq o}$ comme la transformation de suites à contrôler.

Donc l'intervalle $I_n(b_n,c_n)$ devient :

$$I_n(b_n,c_n) = I_n(\gamma_n) = [V_n(-\gamma_n) \wedge V_n(\gamma_n)]$$

$$\text{avec } \gamma_n = \frac{b_n - c_n}{b_n + c_n} \quad \forall n.$$

Ceci montre l'avantage de ce nouveau procédé qui, quand $T_n - S^* \neq o\,(S_n - S^*)$, consiste à faire un double choix de suites au lieu d'un seul, dans le but d'avoir en même temps, l'accélération de la convergence : $(V_n)_n$ et le contrôle de l'erreur : $V_n(\pm\gamma_n)$.

Si on pose $e'_n = \dfrac{V_n - S^*}{D'_n}$ ($D'_n = -\alpha_n D_n$ étant non nul à partir d'un certain rang), alors le théorème 3 [1] donne :

$\exists N : [\ |e'_n| \leq |\gamma_n| \quad \forall n \geq N \iff S^* \in I_n(\gamma_n) = I_n(b_n, c_n) \ \forall n \geq N\ ]$

Or $\quad e'_n = \dfrac{V_n - S^*}{D'_n} = \dfrac{T_n - S^* + D'_n}{D'_n} = 1 - \dfrac{T_n - S^*}{\alpha_n \ D_n}$

soit : $e'_n = 1 - \dfrac{e_n}{\alpha_n} = \dfrac{\alpha_n - e_n}{\alpha_n}$.

Donc $|e'_n| \leq |\gamma_n| \quad \forall n \geq N \quad \iff |\alpha_n - e_n| \leq |\alpha_n| \ |\gamma_n| = |\beta_n| \ \forall n \geq N$

$$\iff \alpha_n - |\beta_n| \leq e_n \leq \alpha_n + |\beta_n| \quad \forall n \geq N$$

Par suite, si $\beta_n > 0$ (resp. $\beta_n < 0$) ie $b_n > c_n$ (resp. $b_n < c_n$), alors $|\beta_n| = \beta_n$ (resp. $|\beta_n| = -\beta_n$).

Donc $|e'_n| \leq |\gamma_n| \ \forall n \geq N \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n - \beta_n \leq e_n \leq \alpha_n + \beta_n \\ \qquad \text{ou} \\ \alpha_n + \beta_n \leq e_n \leq \alpha_n - \beta_n \end{array} \right. \quad \forall n \geq N$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} c_n \leq e_n \leq b_n \\ \qquad \text{ou} \\ b_n \leq e_n \leq c_n \end{array} \right. \quad \forall n \geq N$$

Par conséquent :

$$|e'_n| \leq |\gamma_n| \ \forall n \geq N \iff |\alpha_n - e_n| \leq |\beta_n| \quad \forall n \geq N \iff e_n \in [b_n \wedge c_n] \forall n \geq N$$

On retrouve le 1er résultat du théorème 3.
Donc, grâce à cette connexion, on va proposer un choix de suites (b_n) et (c_n).

2 - Choix particulier de (b_n) et (c_n)

De la même façon que dans [1], l'idée du choix de (γ_n) est basée sur le fait que :

$$V_n(e'_n) = S^* \qquad \forall n$$

Comme la connaissance de e'_n nécessite celle de S^*, on va remplacer e'_n par une valeur approximative.

On a : $e'_n = \dfrac{V_n - S^*}{D'_n}$, donc on prend :

$$\gamma_n = \frac{\Delta V_n}{\Delta D'_n} \quad (\text{si } \Delta D'_n \neq 0)$$

Or $V_n = T_n + D'_n = T_n - \alpha_n D_n$, alors :

$$\gamma_n = 1 - \frac{\Delta T_n}{\Delta(\alpha_n D_n)} \quad (\text{si } \Delta(\alpha_n D_n) \neq 0)$$

Donc $$\boxed{\beta_n = \alpha_n \left(1 - \frac{\Delta T_n}{\Delta(\alpha_n D_n)}\right) \quad \text{si } \Delta(\alpha_n D_n) \neq 0} \qquad (1),$$

puisque $\gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ $\forall n$.

On voit donc que (β_n) est déterminé par (1), une fois le choix de la suite (α_n) réalisé. Avant de proposer un choix de suites (b_n) et (c_n), on va rappeler deux résultats donnés dans [1].

On considère la transformation U :

$$U_n = S_n + d_n, \text{ avec } \lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

$$U_n(\pm\delta_n) = U_n \mp \delta_n d_n \text{ et } I_n(\delta_n) = [U_n(-\delta_n) \wedge U_n(\delta_n)]$$

Théorème 4 [1] :

On pose $\delta_n = \dfrac{\Delta U_n}{\Delta d_n}$ avec $\Delta d_n \neq 0$.

i) Si $U_n - S^* = o(S_n - S^*)$ et si $\exists \mu < 1 < \theta$, $\exists N$:

$\forall n \geq N$ $\quad \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \notin [\mu, \theta]$ alors $\delta_n = o(1)$.

ii) Une C.N.S pour que $\exists N : \forall n \geq N \quad S^* \epsilon\ I_n(\delta_n)$ est que :

$$\forall n \geq N$$

$$\frac{\dfrac{U_{n+1} - S^*}{U_n - S^*} - \dfrac{d_{n+1}}{d_n}}{\dfrac{d_{n+1}}{d_n} - 1} \notin [-2,0]$$

Si on choisit $\alpha_n = \dfrac{\Delta T_n}{\Delta D_n}$ (si $\Delta D_n \neq 0$), alors :

$$b_n = \begin{cases} \alpha_n \left(1 + \dfrac{D_{n+1}\ \Delta\alpha_n}{\Delta(\alpha_n D_n)}\right) & \begin{cases}\text{si } \Delta(\alpha_n D_n) \neq 0, \\ \Delta D_n \neq 0,\ \Delta T_n \neq 0\end{cases} \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad c_n = \begin{cases} \alpha_n^2 \dfrac{\Delta D_n}{\Delta(\alpha_n D_n)} & \begin{cases}\text{si } \Delta(\alpha_n D_n) \neq 0, \\ \Delta D_n \neq 0 \text{ et } \Delta T_n \neq 0\end{cases} \\ c & \text{sinon} \end{cases}$$

b et c étant deux réels non nuls.

En effet, ce choix vient du fait que :

$$\begin{cases} b_n = \alpha_n + \beta_n \\ \\ c_n = \alpha_n - \beta_n \end{cases} \quad \text{et}$$

si ΔD_n, ΔT_n, $\Delta\ (\alpha_n D_n)$ sont non nuls, alors :

$$\beta_n = \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha_n \Delta D_n}{\Delta\ (\alpha_n D_n)}\right) = \alpha_n \quad \frac{D_{n+1}\Delta\alpha_n}{\Delta(\alpha_n D_n)}$$

puisque $\Delta T_n = \alpha_n \Delta D_n$ et $\Delta(\alpha_n D_n) = \alpha_n \Delta D_n + D_{n+1}\ \Delta\alpha_n$.

Tandis que si : $\Delta T_n = 0$ ou $\Delta D_n = 0$ ou $\Delta(\alpha_n D_n) = 0$

on pose alors : $b_n = b$ et $c_n = c$.

Avec ce choix de (b_n) et (c_n), on obtient les résultats suivants :

Proposition 3 :

Si i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = \lambda \notin \{0,1\}$

ii) $\exists\mu < 1 < \Theta$, $\exists N$: $\forall n \geq N$ $\dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \notin [\mu , \theta]$,

alors $T_n(b_n) - S^* = o\ (T_n - S^*)$ et $T_n(c_n) - S^* = o\ (T_n - S^*)$

Preuve :

C'est une application immédiate du théorème [4 -i] et du théorème [3 - iv], en tenant compte de la connexion.

On a : $T_n = S_n + D_n$, $V_n = T_n + D'_n = T_n - \alpha_n D_n$

$$\text{et} \quad \frac{V_n - S^*}{T_n - S^*} = 1 - \alpha_n \frac{D_n}{T_n - S^*} = 1 - \frac{\alpha_n}{e_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta T_n}{\Delta D_n} = \lim_{n\to\infty} e_n = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \neq 0,$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{V_n - S^*}{T_n - S^*} = 0$, d'autre part :

$$\frac{T_{n+1} - S^*}{T_n - S^*} = \frac{(S_{n+1} - S^*) + D_{n+1}}{(S_n - S^*) + D_n} = \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} \cdot \frac{1 + \dfrac{D_{n+1}}{S_{n+1} - S^*}}{1 + \dfrac{D_n}{S_n - S^*}}$$

or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D_n}{S_n - S^*} = (\lambda - 1)$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_{n+1} - S^*}{T_n - S^*} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*}$

Donc $\exists\ \mu < 1 < \theta, \exists N$: $\forall n \geq N$ $\dfrac{T_{n+1} - S^*}{T_n - S^*} \notin [\mu , \theta]$.

Par suite, d'après le théorème(4-i) :

$$\gamma_n = \frac{\Delta V_n}{\Delta D'_n} = o(1)\ , \quad \text{soit } \beta_n = o(1)$$

soit encore : $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D_{n+1}\,\Delta\alpha_n}{\Delta(\alpha_n D_n)} = 0,$

car $\gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ et $\alpha_n = \dfrac{\Delta T_n}{\Delta D_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n(b_n) - S^*}{T_n - S^*} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_n(c_n) - S^*}{T_n - S^*} = 0$$

(théorème 3-iv)

∎

<u>Proposition 4</u> :

Une C.N.S pour que $\exists N : \forall n \geq N \quad S^* \in I_n\,(b_n, c_n)$

est que : $\forall n \geq N$,

$$\frac{\dfrac{T_{n+1} - S^* - \alpha_{n+1} D_{n+1}}{T_n - S^* - \alpha_n\ D_n} - \dfrac{\alpha_{n+1}\ D_{n+1}}{\alpha_n\ D_n}}{\dfrac{\alpha_{n+1}\ D_{n+1}}{\alpha_n\ D_n} - 1} \notin [-2, 0\,]$$

avec $\quad \alpha_n = \dfrac{\Delta T_n}{\Delta D_n}$

Preuve :

On pose : $V_n = T_n + D'_n$ et $\gamma_n = \dfrac{\Delta V_n}{\Delta D'_n}$

On a : $I_n(\gamma_n) = [V_n(-\gamma_n) \wedge V_n(\gamma_n)] = I_n(b_n, c_n)$

D'après le théorème 4-ii) on a :

$$\exists N : \left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq N \; : S^* \in I_n\,(\gamma_n) \;\; <=> \;\; \forall n \geq N : \\ \\ \qquad \dfrac{\dfrac{V_{n+1} - S^*}{V_n - S^*} - \dfrac{D'_{n+1}}{D'_n}}{\dfrac{D'_{n+1}}{D'_n} - 1} \notin [-2,0\,] \end{array} \right\}$$

Comme $V_n = T_n + D'_n$ et $D'_n = - \alpha_n D_n$, on obtient alors le rapport de la proposition 4.

∎

En pratique, il n'est pas facile de vérifier cette condition. Elle nécessite la connaissance du comportement de $(S_n)_n$.

Par exemple : si $(T_n)_n$ est la transformation particulière :

$$T_n = S_{n+1} \quad (D_n = \Delta S_n), \text{ alors}$$

$$\alpha_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_n}$$

soit $\alpha_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n - 1}$, $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$,

et $\beta_n = \dfrac{(\Delta S_{n+1})^2}{\Delta^2 S_n} \times \dfrac{\Delta(\Delta S_{n+1} / \Delta^2 S_n)}{\Delta(\Delta S_n \cdot \Delta S_{n+1}/\Delta^2 S_n)}$

$$\text{soit} \quad \beta_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \qquad \frac{\Delta S_{n+1} \ \Delta\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1}\right)}{\Delta\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\lambda_n - 1}\right)}$$

Donc, comme on peut le constater $(V_n)_n$ est le procédé Δ^2 d'Aitken et $(T_n(b_n))_n$ et $(T_n(c_n))_n$ sont deux transformations de suites telles que :

$$\frac{T_n(b_n) + T_n(c_n)}{2} = \varepsilon_2^{(n)} \quad \forall n,$$

$$\text{avec} \qquad \begin{cases} b_n = \alpha_n + \beta_n \\ c_n = \alpha_n - \beta_n \end{cases}$$

$$\text{soit :} \qquad \begin{cases} b_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \left(1 + \dfrac{\Delta S_{n+1} \ \Delta\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1}\right)}{\Delta\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\lambda_n - 1}\right)} \right) \\[2ex] c_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \left(1 - \dfrac{\Delta S_{n+1} \ \Delta\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1}\right)}{\Delta\left(\frac{\Delta S_{n+1}}{\lambda_n - 1}\right)} \right) \end{cases}$$

$$\text{soit encore :} \qquad \begin{cases} b_n = \dfrac{\lambda_n}{1 - \lambda_n} \quad \dfrac{2\lambda_{n+1}(1 - \lambda_n) - (1 + \lambda_n)(1 - \lambda_{n+1})}{(1 - \lambda_{n+1}) - \lambda_{n+1}(1 - \lambda_n)} \\[3ex] c_n = \dfrac{\lambda_n(1 - \lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}(1 - \lambda_n) - (1 - \lambda_{n+1})} \end{cases}$$

$T_n(c_n) = S_{n+1} - c_n \, \Delta S_n$ n'est autre que la deuxième colonne du Θ-algorithme :

$$T_n(c_n) = \Theta_2^{(n)} \ , \quad n \geq 0$$

Donc, si $(S_n)_n$ est telle que :

$$S_{n+1} - S^* = [a + (a' + o(1))\ (S_n - S^*)]\ (S_n - S^*),$$

avec $- 1 \leq a < 1$, alors il peut être prouvé [1]que le rapport dans la proposition 4 tend vers a.
Par suite la condition du théorème 3 i) ne peut-être vérifiée que si $a > 0$.
Par conséquent, lorsque $0 < a < 1$, on obtient une estimation de l'erreur à l'aide de $T_n(b_n)$ et $T_n(c_n)$ qui en même temps, en vertu de la proposition 3, accélèrent la convergence de $(S_{n+1})_n$.

Si $- 1 \leq a \leq 0$, un autre choix de suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ s'impose.
Il y a plusieurs possibilités de procéder ainsi :

Soit, au lieu de $\left(\dfrac{\Delta T_n}{\Delta D_n}\right)_n$, on choisit une autre suite pour $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ se déduit de la relation (1). Soit, on modifie la relation (1), en remplaçant $\gamma_n = \dfrac{\Delta V_n}{\Delta D'_n}$, égalité d'origine, par une autre.

On ne va pas continuer dans cette voie. Cependant une solution du problème précédent sera donnée dans le chapitre qui suivra à l'aide de choix simples et connus.

On va terminer ce chapitre par l'étude de quelques choix proposés par FDIL [7].

IV - Contrôle des erreurs à l'aide de deux transformations obtenues à partir de $T_n^{(1)}$ et $T_n^{(2)}$ [7].

1) Premiers résultats :

Soient $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ deux transformations de suites telles que :

$$T^{(1)} : (S_n)_n \longrightarrow (T_n^{(1)})_n$$

$$T^{(2)} : (S_n)_n \longrightarrow (T_n^{(2)})_n$$

avec $\lim_{n\to\infty} T_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} T_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = S^*$

On pose : $D_n = T_n^{(1)} - T_n^{(2)}$

$T_n(b) = T_n^{(1)} - bD_n$

$T_n(c) = T_n^{(2)} - cD_n$

$I_n(b,c) = [T_n(b) \wedge T_n(c)]$

On suppose que $D_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On pose :

$$e_n = \frac{T_n^{(1)} - S^*}{D_n} \quad (\text{si } D_n \neq 0)$$

Dans toute cette section, on suppose que :

$$\frac{T_n^{(1)} - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow \ell \neq 1$$

Théorème 5 :

$\forall b,c \in \mathbb{R} \quad : \quad b < \dfrac{\ell}{\ell - 1} < c \quad , \quad \exists N \quad \forall n \geq N : S^* \in I_n(b,c)$

Théorème 6 :

i) si $T_n^{(1)} - S^* = o\ (S_n - S^*)$ et si $\ell \neq 0$, alors

$$T_n(b) - S^* = o(S_n - S^*) \text{ et } T_n(c) - S^* = o\ (S_n - S^*)$$

ii) si $T_n^{(1)} - S^* = o\ (S_n - S^*)$ et si $T_n^{(2)} - S^* = o\ (S_n - S^*)$,

alors $T_n(b) - S^* = o\ (S_n - S^*)$ et $T_n(c) - S^* = o\ (S_n - S^*)$.

Soient (b_n) et (c_n) deux suites telles que $b_n < c_n \quad \forall n$.

En remplaçant le paramètre b (resp. c) par la suite (b_n) (resp. (c_n)),

nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 7 :

1 - $\exists N_o\ ,\ \forall n \geq N_o\ :\ S^* \in I_n(b_n,c_n) \iff \exists N_1\ :\ \forall n \geq N_1 \quad e_n \in [b_n,c_n]$

2 - Si : i) $T_n^{(1)} - S^* = o\ (S_n - S^*)$

ii) $\dfrac{T_n^{(2)} - S^*}{S_n - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell' \neq 0,$

alors a) $T_n(b_n) - S^* = o\ (S_n - S^*) \iff b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) $T_n(c_n) - S^* = o\ (S_n - S^*) \iff c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3 - Si $T_n^{(1)} - S^* = o\ (T_n^{(2)} - S^*)$, alors

c) $T_n(b_n) - S^* = o\ (T_n^{(2)} - S^*) \iff b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

d) $T_n(c_n) - S^* = o\ (T_n^{(2)} - S^*) \iff c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Choix particuliers des suites (b_n) et (c_n)

Le meilleur choix de (b_n) et (c_n) consiste à prendre $b_n=c_n=e_n$ car $T_n(e_n) = S^*$, mais ce choix est impossible en pratique, puisqu'on ne connaît pas (e_n).

Dans toute la suite, on suppose :

$$\exists\alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha < 1 < \beta\ ,\quad \exists N_o\ ,\ \forall n\geq N_o\ :\ \frac{\Delta T_{n+1}^{(2)}}{\Delta T_n^{(2)}} \notin [\alpha, \beta]$$

a) Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$

Pour tout $n\in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta D_n} & \text{si } \Delta D_n \neq 0 \\ b & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad c_n = \begin{cases} \dfrac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta T_n^{(2)}} & \text{si } \Delta T_n^{(2)} \neq 0 \\ c & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 5 :

1 - $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell - 1}$

2 - Si $\ell \neq 0$, alors

i) $T_n(b_n) - S^* = o\ (T_n^{(1)} - S^*)$

ii) $\dfrac{T_n(c_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - \ell$

3 - $T_n(b_n) - S^* = o\ (T_n^{(2)} - S^*)$

4- $\dfrac{T_n(c_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell(2 - \ell)$

Remarques :

1 - Si on prend $T_n^{(2)} = T_{n-1}^{(1)}$, on a :

$$T_n(b_n) = T_n^{(1)} - \frac{\Delta T_n^{(1)} \; \Delta T_{n-1}^{(1)}}{\Delta^2 T_{n-1}^{(1)}}$$ qui n'est autre que le Δ^2 d'Aitken

appliqué à $(T_{n-1}^{(1)})$

2 - $(T_n(b_n))_n$ et $(T_n(c_n))_n$ sont des transformations composites de $(T_n^{(1)})_n$ et $(T_n^{(2)})_n$.

Soit $(a_n) = (b_n)$ ou (c_n)

$$T_n(a_n) = T_n^{(1)} - a_n D_n = T_n^{(1)} - a_n \, (T_n^{(1)} - T_n^{(2)})$$

soit $T_n(a_n) = (1 - a_n) \, T_n^{(1)} + a_n \, T_n^{(2)}$.

$$\text{avec} \quad b_n = \frac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta D_n} = \frac{\Delta T_n^{(1)} / \Delta T_n^{(2)}}{\Delta T_n^{(1)} / \Delta T_n^{(2)} - 1} = \frac{c_n}{c_n - 1}$$

b) Soient $b, c \in \mathbb{R}$, $b < c$, $\alpha \in \,]\, 0,1 [$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \begin{cases} \alpha \dfrac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta T_n^{(2)}} + (1 - \alpha) \dfrac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta D_n} & \text{si } \Delta T_n^{(2)} \neq 0 \text{ et } \Delta D_n \neq 0 \\[2ex] b & \text{sinon} \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} -\alpha \dfrac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta T_n^{(2)}} + (1 + \alpha) \dfrac{\Delta T_n^{(1)}}{\Delta D_n} & \text{si } \Delta T_n^{(2)} \neq 0 \text{ et } \Delta D_n \neq 0 \\[2ex] c & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 8 :

Si
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & \dfrac{T_{n+1}^{(2)} - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow \ell' \ , \ \ell' \neq 1 \\ \text{ii)} & \dfrac{e_{n+1}}{e_n} \longrightarrow a \ , \end{array}\right.$$
alors

$$* \ \frac{b_n}{e_n} \longrightarrow (1 + (a-1)\frac{\ell'}{\ell'-1})\ (\alpha\ (\ell - 1) + (1-\alpha))$$

$$* \ \frac{c_n}{e_n} \longrightarrow (1 + (a-1)\frac{\ell'}{\ell'-1})\ (-\ \alpha(\ell - 1) + (1+\alpha))$$

Remarques :

1) si $\ell \neq 0$ alors $\dfrac{b_n}{e_n} \longrightarrow (1-\alpha) + \alpha(\ell - 1)$ et

$\dfrac{c_n}{e_n} \longrightarrow (1+\alpha) - \alpha(\ell - 1)$ sans supposer que

$$\frac{T_{n+1}^{(2)} - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow \ell' \neq 1$$

2) Si $(a = 1$ ou $\ell' = 0)$ alors $\dfrac{b_n}{e_n} \longrightarrow (1-\alpha) + \alpha\ (\ell - 1)$

et $\dfrac{c_n}{e_n} \longrightarrow (1+\alpha) - \alpha\ (\ell - 1)$ et donc plus α est voisin de zéro plus que b_n, c_n sont de bonnes approximations de e_n.

Proposition 6 :

1) Si $(\ell \neq 0$ et $\ell \neq 2)$ alors $\exists N, \forall n \geq N \ : S^* \in I_n(b_n, c_n)$

2) Si $(\ell \neq 0$ et $T_n^{(1)} - S^* = o\ (S_n - S^*))$ alors

$$T_n(b_n) - S^* = o\ (S_n - S^*) \text{ et } T_n(c_n) - S^* = o\ (S_n - S^*)$$

3) si $(\ell \neq 0$ ou $a=1$ ou $\ell'=0)$ alors,

i) $\dfrac{T_n(b_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*} \longrightarrow \alpha\,(2 - \ell)$ et $\dfrac{T_n(c_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*} \longrightarrow \alpha\,(\ell - 2)$

ii) $\dfrac{T_n(b_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow \alpha\,\ell\,(2 - \ell)$ et $\dfrac{T_n(c_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow \alpha\,\ell\,(\ell - 2)$

Remarque :

La partie 3) de la proposition 6, montre que : plus α est voisin de 0, plus les rapports :

$$\frac{T_n(b_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*},\ \frac{T_n(c_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*},\ \frac{T_n(b_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \text{ et } \frac{T_n(c_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*}$$

sont voisins de zéro.

Soit $(\alpha_n)_n$ telle que : $0 < \alpha_n < 1$ $\forall n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

En remplaçant α par (α_n), on obtient le résultat suivant :

Proposition 7 :

1) $b_n \longrightarrow \dfrac{\ell}{\ell - 1}$, $c_n \longrightarrow \dfrac{\ell}{\ell - 1}$

2) si $\ell \neq 0$, alors $T_n(b_n) - S^* = o\,(T_n^{(1)} - S^*)$ et

$T_n(c_n) - S^* = o\,(T_n^{(1)} - S^*)$.

On n'a pas nécessairement $e_n \in [b_n \wedge c_n]$ à partir d'un certain rang, ce qui ne nous garantit pas l'appartenance de S^* à $I_n\,(b_n, c_n)$. Soit $\varepsilon > 0$, remplaçons b_n (resp. c_n) par $b'_n = b_n(1 + \varepsilon)$ (resp. $c'_n = c_n(1 - \varepsilon)$).

Si $\ell \neq 0$, alors $\dfrac{b'_n}{e_n} \longrightarrow 1 + \varepsilon$, $\dfrac{c'_n}{e_n} \longrightarrow 1 - \varepsilon$,

ce qui montre que, plus ε est petit, plus que (b'_n) et (c'_n) sont de bonnes approximations de (e_n).

Théorème 9 :

Si $\ell \neq 0$, alors :

1) $\exists N, \forall n \geq N \quad S^* \in I_n(b'_n, c'_n)$

2) $$\frac{T_n(b'_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*} \longrightarrow -\varepsilon \quad , \quad \frac{T_n(c'_n) - S^*}{T_n^{(1)} - S^*} \longrightarrow \varepsilon$$

$$\frac{T_n(b'_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow -\ell\,\varepsilon \quad , \quad \frac{T_n(c'_n) - S^*}{T_n^{(2)} - S^*} \longrightarrow \ell\,\varepsilon$$

En conclusion :

Cette généralisation peut s'interpréter, en tenant compte de la connexion établie auparavant, comme un procédé à deux étapes : d'abord accélérer la convergence de la transformation, puis faire le contrôle d'erreur classique.

Les possibilités de choix des suites (b_n) et (c_n) sont nombreuses. Les résultats qui en découlent et qui restent théoriques, sont intéressants.

Donc, dans le but d'aboutir à des résultats concrets et pratiques, on va, dans le chapitre suivant, étudier cette généralisation avec des transformations connues et des choix simples de (b_n) et (c_n).

CHAPITRE V

UNE METHODE DE CONTROLE D'ERREUR A L'AIDE DE DEUX TRANSFORMATIONS

I - Introduction

L'idée de cette méthode est inspirée de celle de Stirling et Andoyer [15]. Cette dernière consiste à transformer une suite donnée (S_n) convergente en deux autres : $(T_n(b_n^{(1)}))$ et $(T_n(b_n^{(2)}))$, de telle sorte qu'elles donnent de bonnes approximations de la limite de (S_n), l'une par excès et l'autre par défaut. Les deux suites $(b_n^{(i)})$ sont déterminées à l'avance sous certaines conditions et ceci pour chaque suite (S_n).

Le principe de ma méthode est de trouver, étant donné un procédé d'accélération de la convergence, une autre transformation qui converge plus vite que la suite $(S_n)_n$ et qui se situe de l'autre côté de la limite par rapport à la transformation initiale. Donc, cette méthode rentre dans le cadre de la généralisation traitée dans le chapitre précédent.

Il s'agira d'une part du procédé Δ^2 d'Aitken comme transformation de base et d'autre part, successivement du Θ_2-algorithme [2], du Δ^2 d'Aitken modifié et du Θ_2-algorithme décalé, tous appliqués à des suites à convergence linéaire. Cette méthode sera également étendue au Δ^2- itéré.

II - Présentation de la méthode de Stirling et Andoyer [15]

A une série de terme général $(u_n)_{n\geq 1}$, on fait correspondre deux autres séries de terme général $(u_n^{(i)})_{n\geq 1}$, i=1,2, tels que :

$$\begin{cases} u_1^{(i)} = u_1 + t_2^{(i)} u_2 \\ u_2^{(i)} = u_2 - t_2^{(i)} u_2 + t_3^{(i)} u_3 \\ \text{-----------------------------------} \\ u_n^{(i)} = u_n - t_n^{(i)} u_n + t_{n+1}^{(i)} u_{n+1} \\ \end{cases}$$

Donc, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $S_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} u_k^{(i)}$, alors :

$$S_n^{(i)} = S_n + t_{n+1}^{(i)} u_{n+1}$$

La suite $(t_n^{(i)})_{n\geq 2}$ sera déterminée de telle sorte que :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(i)} = S^*$, c'est-à-dire $t_n^{(i)} u_n = o(1)$

où $S^* = \sum_{k\geq 1} u_k$ (régularité)

2) $(u_n^{(i)})_{n\geq 1}$ soit comparable à $\left(\frac{u_n}{n^p}\right)_{n\geq 1}$ où p est un entier arbitraire

c'est-à-dire $u_n^{(i)} = O\left(\frac{u_n}{n^p}\right)$.

La formule qui donne $u_n^{(i)}$ s'écrit :

$$\boxed{u_n^{(i)} = u_n \; v_n^{(i)}} \quad \text{où} \quad \boxed{v_n^{(i)} = (1-t_n^{(i)}) + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}^{(i)}}$$

Donc le 2ème critère pour la détermination de $(t_n^{(i)})_{n\geq 2}$ devient :

$$(*) \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n^k \, v_n^{(i)} = 0 \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots, p-1 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^p v_n^{(i)} = L^{(i)} \quad ; \quad L^{(i)} \text{ est un paramètre donné à l'avance.} \end{cases}$$

Pour pouvoir procéder à un choix de $(t_n^{(i)})_{n\geq 2}$ qui réponde aux critères précédents, on distingue deux cas :

<u>1er cas</u> : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \neq 1$

On pose alors : $t_{n+1}^{(i)} = a_o^{(i)} + \frac{a_1^{(i)}}{n} + \dots + \frac{a_p^{(i)}}{n^p}$ où $a_j^{(i)}$ sont des constantes déterminées par (*) .

On remarque alors :

a) $(t_n^{(i)})_{n\geq 2}$ converge vers $a_o^{(i)}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(i)} \; u_n = o$ => Régularité de $(S_n^{(i)})$

b) (*) entraîne l'accélérabilité de $(S_n^{(i)})$ au sens de :

$$n^k \frac{u_n^{(i)}}{u_n} = o(1) \; ; \; k = 0,1,\dots, p-1.$$

<u>2ème cas :</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$

Pour assurer la convergence de $\sum\limits_{k\geq 1} u_k$ dans ce cas, il faut que $n\,u_n = o(1)$, sinon la série donnée serait divergente en même temps que la série harmonique.

On pose alors : $t_{n+1}^{(i)} = a_o^{(i)}\, n + a_1^{(i)} + \dfrac{a_2^{(i)}}{n} + \dfrac{a_3^{(i)}}{n^2} + \ldots + \dfrac{a_{p+1}^{(i)}}{n^p}$,

les coefficients $a_j^{(i)}$, $o \leq j \leq p+1$, sont déterminés par (*).

On a bien $t_n^{(i)}\, u_n = o(1)$, puisque :

$$\begin{cases} t_n^{(i)}\, u_n = \left[\dfrac{t_n^{(i)}}{n} \right] \times [n\, u_n] \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n^{(i)}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\, u_n = 0\,. \end{cases}$$

Donc, dans les deux cas, on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^p\, v_n^{(i)} = L^{(i)},$$

et $a_\ell^{(1)} = a_\ell^{(2)}$ pour tout ℓ, sauf pour les coefficients qui correspondent à n^{-p} dans la développement de $t_{n+1}^{(i)}$. Ils sont calculés à partir des constantes $L^{(i)}$.

L'entier p, en pratique, est fixé à 3. La remarque qui va suivre est fondamentale [15]. Elle consiste à prouver que le signe de $(S^* - S_n^{(1)}).(S^* - S_n^{(2)})$ est négatif, ce qui signifie que $S_n^{(1)}$ et $S_n^{(2)}$ sont des approximations de S^* par excès et par défaut. Pour cela, soit $R_n^{(i)}$ le reste d'ordre n de la série $\sum\limits_{k\geq o} u_k^{(i)}$: $R_n^{(i)} = S^* - S_n^{(i)}$. Soit n suffisamment grand ($n \geq N$).

D'une part : (P) $R_n^{(i)}$ et $u_{n+1}^{(i)}$ ont le même signe. (Cette propriété sera examinée dans la suite). D'autre part :

$$v_{n+1}^{(i)} = \frac{u_{n+1}^{(i)}}{u_{n+1}} \sim \frac{L^{(i)}}{(n+1)^p} \quad (n\to\infty) \quad (*\ *)$$

Donc, si les paramètres $L^{(1)}$ et $L^{(2)}$ sont choisis, tels que : $L^{(1)}.\ L^{(2)} < 0$, (par exemple : $L^{(1)} > 0$ et $L^{(2)} < 0$)

alors, pour $n \geq N$, on a :

. Si $u_{n+1} > 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} \begin{cases} u^{(1)}_{n+1} > 0 \\ u^{(2)}_{n+1} < 0 \end{cases}$

$$\overset{(P)}{\Longrightarrow} \begin{cases} R^{(1)}_{n+1} > 0 \\ R^{(2)}_{n+1} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{R^{(1)}_n . R^{(2)}_n < 0}$$

. Si $u_{n+1} < 0 \overset{(**)}{\Longrightarrow} \begin{cases} u^{(1)}_{n+1} < 0 \\ u^{(2)}_{n+1} > 0 \end{cases}$

$$\overset{(P)}{\Longrightarrow} \begin{cases} R^{(1)}_{n+1} < 0 \\ R^{(2)}_{n+1} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \underline{R^{(1)}_n . R^{(2)}_n < 0}$$

On voit donc que le choix des constantes $L^{(i)}$ telles que $L^{(1)}. L^{(2)} < 0$, donne deux suites $(S^{(i)}_n)_{n\geq 1}$ telles que : $(S^* - S^{(1)}_n). (S^* - S^{(2)}_n) < 0$ pour n assez grand, soit $S^{(i)}_n \leq S^* \leq S^{(j)}_n$ avec $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$.

Mais on note au passage que la propriété (P), donnée dans [15] sans être démontrée, en général, n'est pas vraie. En effet, l'exemple suivant le confirme.

$$\text{Soit } (S_n)_{n\geq 0} : \begin{cases} S_{2n} = \dfrac{1}{n+2} \\ S_{2n+1} = \dfrac{1}{n+1} \end{cases} , \quad (S_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

On a : $u_{2n+1} = \Delta S_{2n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $R_{2n} = S^* - S_{2n} = - \dfrac{1}{n+2}$

$\Longrightarrow u_{2n+1} . R_{2n} < 0 \ \forall n$. Donc, dans ce cas, u_{2n+1} et R_{2n} ont des signes contraires. Cependant, la propriété (P) sera prouvée, pour la famille de suites qu'on va utiliser dans la suite. En admettant que (P) est vraie, cette méthode est aussi valable pour les suites. Si on a une suite $(S_n)_{n\geq o}$ de limite S^*, alors elle peut être considérée comme la somme partielle de la série $\sum_{k\geq o} u_k$:

$$\begin{cases} u_o = S_o \\ u_k = \Delta S_{k-1} \ ; \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Donc les deux transformations $(S_n^{(i)})_n$ s'écrivent :

$$\begin{cases} S_n^{(i)} = S_{n+1} - b_n^{(i)} \Delta S_n = T_n \, (b_n^{(i)}) \ , \ i = 1,2 \\ \text{et } v_{n+1}^{(i)} = \dfrac{\Delta T_n \, (b_n^{(i)})}{\Delta S_n} = \lambda_n \, (1 - b_{n+1}^{(i)}) + b_n^{(i)} \end{cases}$$

$$\text{où } \lambda_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \qquad \text{et} \qquad b_n^{(i)} = 1 - t_{n+1}^{(i)} .$$

On remarque que c'est la méthode de contrôle d'erreur généralisée avec $T_n = S_{n+1}$. Le problème qui se présente avec la méthode de Stirling et Andoyer est que, d'une part, pour chaque suite à accélérer et à contrôler, on est obligé de déterminer la suite $(b_n^{(i)})_n$ qui lui correspond, c'est-à-dire déterminer les coefficients $a_j^{(i)}$ en utilisant les conditions (*), et d'autre part, le choix des constantes $L^{(i)}$ et l'entier p qui donne de bonnes approximations reste difficile en pratique.

Le principe de notre méthode est donc, étant donnés la suite $(S_n)_{n\geq o}$ et un procédé d'accélération de la convergence connu qu'on lui applique :

$$T_n(b_n) = S_{n+1} - b_n \Delta S_n,$$

de trouver un autre procédé connu $(T_n(c_n))$, ou bien de le construire de telle sorte qu'il forme un encadrement de la limite avec le premier. Dans ce chapitre, la transformation de base $(T_n(b_n))$ sera le procédé Δ^2 d'Aitken.

III - Propriétés - Encadrement de la limite par le Δ^2 d'Aitken et le Θ_2 - algorithme.

Dans toute la suite de ce chapitre, on va s'intéresser à la famille F de suites $(S_n)_n$ convergentes telles que pour n suffisamment grand :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\Theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_o \neq 0 \\ \Theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et $-1 \leq \lambda < 1$, $\lambda \neq 0$.

1 - Propriétés :

Lemme 1 :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ telle que, pour n suffisamment grand, $\Delta S_n = \lambda^n n^\Theta \times \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right)$ avec $\begin{cases} \gamma_o \neq 0 \\ \lambda \neq 0,1 \end{cases}$

Alors : 1) $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \alpha_o + \dfrac{\alpha_1}{n} + \dfrac{\alpha_2}{n^2} + \ldots\ldots\ldots$

avec $\alpha_o = \lambda$; n étant assez grand.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1} \Delta\lambda_n = -k\alpha_k$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+2} \Delta^2\lambda_n = k(k+1)\alpha_k$

où k est le plus petit entier > 0 : $\alpha_k \neq 0$ (Lubkin)

Preuve : Soit n suffisamment grand :

1) $\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \dfrac{\gamma_1}{n} + \dfrac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right)$

et $\Delta S_{n+1} = \lambda^{n+1}(n+1)^\theta \left(\gamma_o + \dfrac{\gamma_1}{n+1} + \dfrac{\gamma_2}{(n+1)^2} + \ldots\right)$

Or : $(n+1)^{\theta} = n^{\theta}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\theta} = n^{\theta}\left(1+\frac{\theta}{n}+\frac{\theta(\theta-1)}{2n^2}+\ldots\right)$

et $\frac{1}{(n+1)^k} = (1+n)^{-k} = n^{-k}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-k} = n^{-k}\left(1-\frac{k}{n}+\frac{k(k+1)}{2n^2}\ldots\right)$

$\forall k = 1,2,3, \ldots$

Donc $\Delta S_{n+1} = \lambda^{n+1} n^{\theta}\left(1+\frac{\theta}{n}+\frac{\theta(\theta-1)}{2n^2}+\ldots\right) \times$

$$\left(\gamma_o+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{n^2}+\frac{\gamma_3-2\gamma_2+\gamma_1}{n^3}+\ldots\right)$$

Soit $\Delta S_{n+1} = \lambda^{n+1} n^{\theta}\left(\gamma_o+\frac{\gamma'_1}{n}+\frac{\gamma'_2}{n^2}+\ldots\right)$

Donc $\lambda_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lambda \frac{\gamma_o+\frac{\gamma'_1}{n}+\frac{\gamma'_2}{n^2}+\ldots}{\gamma_o+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n^2}+\ldots}$, $\gamma_o \neq 0$,

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{\gamma_o}\left(\gamma_o+\frac{\gamma'_1}{n}+\frac{\gamma'_2}{n^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{\gamma_1}{\gamma_o n}+\frac{\gamma_2}{\gamma_o n^2}+\ldots\right)^{-1}$$

n étant suffisamment grand, on a :

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{\gamma_o}\left(\gamma_o+\frac{\gamma'_1}{n}+\frac{\gamma'_2}{n^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_o n}-\frac{\gamma_2}{\gamma_o n^2}+\frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2 n^2}+\frac{2\gamma_1\gamma_2}{\gamma_o^2 n^3}+\ldots\right)$$

soit : $\lambda_n = \frac{\lambda}{\gamma_o}\left(\gamma_o+\frac{\gamma'_1-\gamma_1}{n}+\ldots\right)$

soit encore : $\lambda_n = \alpha_o+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\ldots$, avec $\alpha_o = \lambda$, pour n suffisamment grand.

2) La preuve se trouve dans l'article de Lubkin [11], qui n'est qu'une étape d'une démonstration.

∎

A partir de ce lemme, on peut formuler deux remarques :

1 - On a : $\dfrac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \dfrac{\lambda_n \Delta\lambda_n}{(1-\lambda_n)(1-\lambda_{n+1})}$ $\forall n$, $(\varepsilon_2^{(n)})$ étant **le** procédé de Δ^2

d'Aitken. Soit :

$$\varepsilon_2^{(n)} = S_{n+1} - b_n \ \Delta S_n \quad ; \quad b_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \quad \forall n$$

Donc $$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^{k+1} \frac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = -k \frac{\alpha_o \alpha_k}{(1-\alpha_o)^2}} \quad ; \alpha_o = \lambda$$

puisque : $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1} \Delta\lambda_n = -k\alpha_k$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda = \alpha_o$.

Soit $$\frac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n / n^k} = o(1).$$

Donc si $\alpha_1 \neq 0$ dans le développement asymptotique de λ_n, ce qui est le cas de plusieurs suites, alors :

$$\frac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n / n} = o(1).$$

2 - On a : $$\frac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda_n \lambda_{n+1}[(1-\lambda_n)\Delta\lambda_{n+1} - (1-\lambda_{n+2})\Delta\lambda_n]}{[\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)-(1-\lambda_{n+1})][\lambda_{n+2}(1-\lambda_{n+1})-(1-\lambda_{n+2})]}$$

$(\Theta_2^{(n)})_n$ étant la deuxième colonne du Θ-algorithme [2]

soit $$\Theta_2^{(n)} = S_{n+1} - c_n \ \Delta S_n$$

$$c_n = \frac{\lambda_n(1 - \lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}(1-\lambda_n) - (1-\lambda_{n+1})}$$

Si on pose : $\phi_n = (1-\lambda_n)\ \Delta\lambda_{n+1} - (1 - \lambda_{n+2})\ \Delta\lambda_n$

et $D_n = \lambda_{n+1}\ (1 - \lambda_n) - (1 - \lambda_{n+1})$, alors on a :

$$\frac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda_n \lambda_{n+1} \phi_n}{D_n\ D_{n+1}}$$

Il est facile de voir que :

$$\phi_n = (1 - \lambda_n)\ \Delta^2\lambda_n + \Delta\lambda_n \,.\, \Delta\lambda_{n+1} + (\Delta\lambda_n)^2$$

comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda = \alpha_o$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+2}\ \Delta^2\lambda_n = k(k+1)\alpha_k$

et $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1}\ \Delta\lambda_n = - k\alpha_k$, alors :

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+2}\ \Delta\lambda_n\ \Delta\lambda_{n+1} = 0$ et par suite :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n^{k+2}\ \phi_n = k(k+1)\ \alpha_k\ (1 - \alpha_o) \\ \lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_{n+1} = (1 - \lambda)^2 = (1 - \alpha_o)^2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+2} \frac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{k(k+1)\ \alpha_o^2\ \alpha_k}{(1 - \alpha_o)^3}}$; $\alpha_o = \lambda$

Soit $\dfrac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n/n^{k+1}} = o\ (1)$ et si $\alpha_1 \neq 0$ alors $\dfrac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n/n^2} = o(1)$

Cette remarque et les deux propriétés qui vont suivre, vont nous conduire à un résultat d'encadrement de la limite de $(S_n)_n$ par $(\varepsilon_n^{(2)})_{n\geq o}$ et $(\Theta_n^{(2)})_{n\geq o}$.

<u>Lemme 2</u> : WIMP [18]

Si une suite $(x_n)_{n\geq o}$ de limite x^* est telle que :

$$\Delta x_{n-1} = \lambda^n n^\theta (A_o + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \dots)$$

pour n suffisamment grand, $A_o \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, alors :

$$x^* - x_n = \frac{\lambda^{n+1} n^\theta}{1-\lambda} (A_o + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \dots) \text{ pour n}$$

suffisamment grand.

Lemme 3 :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ telle que : pour n assez grand ,

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta (\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots) \text{ avec } \gamma_o \neq 0$$

et $\begin{cases} -1 \leq \lambda < 1 \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$, alors :

i) ΔS_n et $S^* - S_n$ ont le même signe pour n suffisamment grand.

ii) $\begin{cases} * \ \Delta\varepsilon_2^{(n)} \text{ et } S^* - \varepsilon_2^{(n)} \text{ ont le même signe.} \\ * \ \Delta\Theta_2^{(n)} \text{ et } S^* - \Theta_2^{(n)} \text{ ont le même signe.} \end{cases}$

n étant suffisamment grand.

Preuve :

Soit n suffisamment grand :

i) On a : $\boxed{\Delta S_n = \lambda^n n^\theta (\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots)}$ (1)

$$\Rightarrow \quad \Delta S_{n+1} = \lambda^{n+1} (n+1)^\theta (\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n+1} + \frac{\gamma_2}{(n+1)^2} + \dots)$$

Donc $\boxed{\Delta S_{n+1} = \lambda^{n+1} n^\theta (\gamma_o + \frac{\gamma'_1}{n} + \frac{\gamma'_2}{n^2} + \dots)}$ (voir p. 165)

D'autre part, (1), $\gamma_o \neq o$ et $\lambda \neq 1$ =>

$$S^* - S_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1} n^{\Theta}}{1 - \lambda} \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1''}{n} + \frac{\gamma_2''}{n^2} + \ldots .\right),$$

d'après le lemme 2. Donc pour n assez grand :

$$\Delta S_{n+1} \sim \lambda^{n+1}\, n^{\Theta} \gamma_o \quad \text{et} \quad S^* - S_{n+1} \sim \frac{\lambda^{n+1} n^{\Theta} \gamma_o}{1 - \lambda}$$

Or $1 - \lambda > 0$ car $- 1 \leq \lambda < 1$, alors :

ΔS_{n+1} et $S^* - S_{n+1}$ ont même signe pour n assez large.

ii) D'après les remarques (p. 166) on a :

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1} \frac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} = L \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} n^{k+2} \frac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n} = M$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \frac{L}{n^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \frac{M}{n^{k+2}} \quad \text{pour n assez grand } (n \geq n_o),$$

k étant le plus petit entier ≥ 1 tel que : $\alpha_k \neq 0$.

$$\text{Soit :} \begin{cases} \Delta\varepsilon_2^{(n)} = \dfrac{L}{n^{k+1}} \Delta S_n = \lambda^n\, n^{\Theta-k-1}\, L\left(\gamma_o + \dfrac{\gamma_1}{n} + \dfrac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \\ \\ \Delta\Theta_2^{(n)} = \dfrac{M}{n^{k+2}} \Delta S_n = \lambda^n\, n^{\Theta-k-2} M\left(\gamma_o + \dfrac{\gamma_1}{n} + \dfrac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \end{cases} \quad (n \geq n_o).$$

Par conséquent, en vertu de i), on a :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_2^{(n)} \cdot (S^* - \varepsilon_2^{(n)}) > 0 \\ \Delta\Theta_2^{(n)} \cdot (S^* - \Theta_2^{(n)}) > 0 \end{cases} \quad (n \geq n_o),$$

puisque dans les développements asymptotiques de $\Delta\varepsilon_2^{(n)}$ et $\Delta\Theta_2^{(n)}$, on a :

$$\begin{cases} -1 \leq \lambda < 1 \\ \lambda \neq 0 \end{cases}, \; L\gamma_o \neq 0 \quad \text{et} \quad M\gamma_o \neq 0.$$

■

Donc grâce à la remarque (p. 166) et aux lemmes précédents, on a le résultat suivant :

<u>Proposition 1 :</u>

Si pour n suffisamment grand, on a :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta (\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots)$$

avec $\gamma_o \neq o$ et $\underline{\underline{o < \lambda < 1}}$, alors

$\exists N$, $\forall n \geq N$ $\quad S^* \in [\varepsilon_2^{(n)} \wedge \Theta_2^{(n)}]$.

<u>Preuve :</u> Soit n suffisamment grand :

On a : $\dfrac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \dfrac{L}{n^{k+1}}$ et $\dfrac{\Delta\Theta_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \dfrac{M}{n^{k+2}}$

avec $L = -\dfrac{k\alpha_o\,\alpha_k}{(1-\alpha_o)^2}$ et $M = \dfrac{k(k+1)\alpha_o^2\,\alpha_k}{(1-\alpha_o)^3}$, $\alpha_o = \lambda$

Donc $\dfrac{M}{L} = -\dfrac{(k+1)\,\lambda}{1-\lambda} < 0$, car $0 < \lambda < 1$

$\Rightarrow \quad \Delta\varepsilon_2^{(n)} . \; \Delta\Theta_2^{(n)} < 0$ et d'après le lemme 3 :

$(S^* - \varepsilon_2^{(n)}) \; . \; (S^* - \Theta_2^{(n)}) < 0$ pour n assez grand.

Par conséquent : $\exists N \; \forall n \geq N$: $S^* \in [\varepsilon_2^{(n)} \wedge \Theta_2^{(n)}]$.

■

Remarque :

Ce résultat vient confirmer, sous un autre angle, ce qui était dit au sujet de l'exemple donné dans le chapitre IV(p. 150). Donc, l'encadrement de la limite de $(S_n)_n$ à l'aide de $(\varepsilon_2^{(n)})_n$ et $(\Theta_2^{(n)})_n$ se limite aux suites telles que : $0 < \lambda < 1$ où $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$.

IV - Extension de l'encadrement de la limite à des suites telles que : $-1 \le \lambda < 1$.

1 - Δ^2 d'Aitken modifié :

Le procédé Δ^2 d'Aitken s'écrit : $\varepsilon_2^{(n)} = S_{n+1} - b_n \Delta S_n$ avec

$b_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_n - 1}$ où $\lambda_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ (si $\Delta S_n \neq 0$). On obtient le Δ^2

d'Aitken modifié $(\tilde{\varepsilon}_2^{(n)})$, en remplaçant la suite $(b_n)_n$ par $(b'_n)_n$ telle que :

$$b'_n = \frac{-\lambda_n}{1 - 2\lambda_{n+1} + \lambda_n}$$

On pose : $\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} = T_n(b'_n) = S_{n+1} - b'_n \Delta S_n$.

Proposition 2 :

Soit $(x_n)_{n\geq o}$ une suite de limite x^* telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lambda \text{ ; } -1 \le \lambda < 1. \text{ Alors :}$$

i) $\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} - x^* = o\ (x_{n+1} - x^*)$

ii) Si $x_n = x^* + \alpha\, \lambda^n$ $\forall n\geq N$, α étant une constante, alors $\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} = x^*$ $\forall n\geq N$.

<u>Preuve :</u> Il est facile de voir que $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\varepsilon}_2^{(n)} = x^*$

i) $$\frac{\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} - x^*}{x_{n+1} - x^*} = 1 - b'_n \frac{\Delta x_n}{x_{n+1} - x^*}$$

$$\text{or } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta x_n}{x_{n+1} - x^*} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b'_n = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

$$\text{car } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = \lambda$$

$$\text{donc } \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} - x^*}{x_{n+1} - x^*} = 0$$

ii) Si $x_n = x^* + \alpha\lambda^n$, alors $\Delta x_n = \alpha\,(\lambda - 1)\lambda^n$

$$\text{soit} \quad \lambda_n = \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n} = \lambda$$

$$\text{Donc : } b'_n = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon}_2^{(n)} = (x^* + \alpha\,\lambda^{n+1}) - \frac{\lambda}{\lambda - 1}\,(\alpha(\lambda - 1)\lambda^n)$$

Par suite $\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} = x^*$

∎

Maintenant, on va donner un résultat concernant le contrôle de l'erreur à l'aide de $(\varepsilon_2^{(n)})$ et $(\tilde{\varepsilon}_2^{(n)})$

<u>Proposition 3 :</u>

Si pour n suffisamment grand :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots\right) \text{ avec}$$

$$\gamma_o \neq o \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} -1 \leq \lambda < 1/2 \\ \hline \lambda \neq o \end{array} \right. \text{, alors :}$$

$$\exists N \;:\; \forall n \geq N \qquad S^* \in [\varepsilon_2^{(n)} \,\Lambda\, \tilde{\varepsilon}_2^{(n)}].$$

<u>Preuve :</u>

On a $\quad \Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} = \Delta S_{n+1}\,(1 - b'_{n+1}) + b'_n\,\Delta S_n.$

$$b'_n = -\frac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_{n+1}+\lambda_n} \quad \text{et} \quad 1 - b'_{n+1} = \frac{1 - 2\lambda_{n+2}+ 2\lambda_{n+1}}{1 - 2\lambda_{n+2}+ \lambda_{n+1}}$$

Donc $\quad \dfrac{\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \lambda_n \dfrac{1 - 2\lambda_{n+2}+2\lambda_{n+1}}{1 - 2\lambda_{n+2}+\lambda_{n+1}} - \dfrac{\lambda_n}{1 - 2\lambda_{n+1}+\lambda_n}$

Soit $\quad \dfrac{\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \lambda_n \dfrac{4\lambda_{n+1}\Delta\lambda_{n+1} - 2\lambda_n\Delta\lambda_{n+1} - \Delta\lambda_n}{(1 - 2\lambda_{n+2}+\lambda_{n+1})\,(1 - 2\lambda_{n+1}+\lambda_n)}$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \quad , \quad \lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1}\,\Delta\lambda_n = -\,k\alpha_k$ (lemme 1),

Donc $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1} \dfrac{\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \dfrac{\lambda}{(1 - \lambda)^2}\,[-4k\lambda\alpha_k + 2k\lambda\alpha_k + k\alpha_k]$

Soit $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1} \dfrac{\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \dfrac{-k\alpha_k\lambda(2\lambda-1)}{(1 - \lambda)^2} = L'.$

Ceci entraîne :

a) $\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}$, pour n assez grand, admet un développement asymptotique de la forme :

$$\lambda^n\, n^\mu\,(\delta_o + \frac{\delta_1}{n} + \dots\,) \text{ avec } \begin{cases} \mu=\Theta-k-1 \\ \quad \text{et} \\ \delta_o = L'\gamma_o \neq o \end{cases}$$

Donc, d'après le lemme 2, $\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}$ et $S^* - \tilde{\varepsilon}_2^{(n)}$ ont le même signe.

b) $\dfrac{\Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \dfrac{L'}{n^{k+1}}$ et $\dfrac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \dfrac{L}{n^{k+1}}$ (n assez grand)

avec $L = - \dfrac{k\alpha_k \lambda}{(1-\lambda)^2}$ et $L' = \dfrac{-k\alpha_k \lambda(2\lambda - 1)}{(1-\lambda)^2}$

Donc $L' = L(2\lambda - 1)$, soit $LL' = L^2(2\lambda - 1)$

Or $\lambda < \dfrac{1}{2}$, alors $LL' < 0$.

Par conséquent : $\Delta\varepsilon_2^{(n)} . \Delta\tilde{\varepsilon}_2^{(n)} < 0$ et par suite $(S^* - \varepsilon_2^{(n)}) \times$ $(S^* - \tilde{\varepsilon}_2^{(n)}) < 0$ pour n suffisamment grand et $-1 \leq \lambda < \dfrac{1}{2}$.

Donc $\exists N, \forall n \geq N$: $S^* \in [\varepsilon_2^{(n)} \wedge \tilde{\varepsilon}_2^{(n)}]$

∎

Comme on peut le constater, cette nouvelle transformation donne une suite qui converge plus vite et qui en même temps, fournit avec le Δ^2 d'Aitken un encadrement de la limite, pour la famille des suites $(S_n)_n$ à convergence linéaire telles que :

$$\begin{cases} \Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \dfrac{\gamma_1}{n} + \dfrac{\gamma_2}{n^2} + \dots\right) \text{ pour n assez grand} \\ \text{avec } \gamma_o \neq o \text{ et } -1 \leq \lambda < 1/2 \ (\lambda \neq 0) \end{cases}$$

La question qui se pose maintenant est peut-on faire une autre modification sur le procédé Δ^2 d'Aitken qui aboutit à une transformation agissant sur une famille plus grande que la précédente, c'est-à-dire pour $\lambda > \dfrac{1}{2}$?

La réponse est affirmative :

Soit la suite $(b'_{n,p})_{n \geq o}$ définie par :

$$b'_{n,p} = - \frac{\lambda_n}{1 - (p+1)\lambda_{n+1} + p\lambda_n}, \quad n \geq o \text{ et } p \geq 1$$

On considère la famille des transformations : $(\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,p})_n$ telles que :

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,p} = T_n(b'_{n,p}) = S_{n+1} - b'_{n,p}\,\Delta S_n.$$

Donc, pour p = 1, on obtient la transformation précédente :

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,1} = \tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2} = S_{n+1} - b'_n\,\Delta S_n.$$

Proposition 4 :

Si, pour n suffisamment grand, on a :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \text{ avec}$$

$$\gamma_o \neq o \text{ et } \begin{cases} -1 \leq \lambda < \dfrac{p}{1+p} \\ \lambda \neq o \end{cases}, \text{ alors :}$$

$$\exists N,\ \forall n \geq N :\ S^* \in [\varepsilon^{(n)}_2 \wedge \tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,p}].$$

Preuve :

Elle est analogue à la précédente :

$$\frac{\Delta\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,p}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda_n\,[-p\Delta\lambda_n + (p+1)^2\lambda_{n+1}\Delta\lambda_{n+1} - p(p+1)\lambda_n\Delta\lambda_{n+1}]}{[1-(p+1)\lambda_{n+2} + p\lambda_{n+1}][1-(p+1)\lambda_{n+1}+p\lambda_n]}$$

Donc $\displaystyle \lim_{n\to\infty} n^{k+1}\frac{\Delta\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,p}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\,[pk\alpha_k - (p+1)^2\lambda k\alpha_k + p(p+1)k\lambda\alpha_k]$

Soit $\displaystyle \lim_{n\to\infty} n^{k+1}\frac{\Delta\tilde{\varepsilon}^{(n)}_{2,p}}{\Delta S_n} = \frac{-k\alpha_k\lambda[(p+1)\lambda-p]}{(1-\lambda)^2} = L'_p$

On a $\displaystyle L'_p = L[(p+1)\lambda-p]$ où $\displaystyle L = \lim_{n\to\infty} n^{k+1}\frac{\Delta\varepsilon^{(n)}_2}{\Delta S_n}$

Donc $L'_p\,.L<0 \iff \lambda < \dfrac{p}{p+1}$

∎

Pour illustrer ce dernier résultat, on considère l'exemple suivant :

Soit $(S_n)_{n\geq o}$: $\begin{cases} S_n = \sum\limits_{k=o}^{n} (0.8)^k\ (k+1) \\ S^* = 25 \end{cases}$

On a : $\Delta S_n = (0.8)^{n+1}\ (n+2) = (0.8)^n\ n\ [0.8 + \dfrac{2 \times 0.8}{n}]\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $(S_n)_{n\geq o}$ appartient à la famille de suites concernée et $\lambda=0.8=\gamma_o$,

$\theta=1$, $\gamma_1=1.6$ et $\gamma_i=0\ \ \forall i>1$. Si on prend $p=5$, alors : $\lambda < \dfrac{p}{1+p} = \dfrac{5}{6} = 0.833...$

Par conséquent, l'encadrement de la limite de $(S_n)_n$ se fera à l'aide de $(\varepsilon_2^{(n)})_n$ et $(\tilde{\varepsilon}_{2,5}^{(n)})_n$.

Donc, pour contrôler l'erreur des suites $(S_n)_n$ à convergence linéaire telles que :

$\Delta S_n = \lambda^n\ n^\theta\ (\gamma_o + \dfrac{\gamma_1}{n} + \dfrac{\gamma_2}{n^2} + \ldots)$ pour n assez grand, avec $\gamma_o \neq o$

et $-1 \leq \lambda < 1$ $(\lambda \neq 0)$, on doit disposer d'une part, du procédé Δ^2 d'Aitken (transformation de base) et d'autre part, d'une autre transformation qui est déterminée suivant le paramètre λ :

$$(\theta_2^{(n)})_n \quad \text{ou} \quad (\tilde{\varepsilon}_{2,p}^{(n)})_n \quad , \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

L'inconvénient est que, à priori, λ n'est pas connu. Ceci nous conduit à trouver une autre transformation valable pour tout λ :

$$-1 \leq \lambda < 1 \quad (\lambda \neq 0).$$

2 - Le Θ_2 -algorithme décalé : $(\tilde{\Theta}_2^{(n)})_{n\geq 1}$

Le procédé $(\tilde{\Theta}_2^{(n)})_{n\geq 1}$ ne diffère du Θ_2 - algorithme que par un décalage d'indices puisque :

$$\tilde{\Theta}_2^{(n)} = \Theta_2^{(n-1)} \qquad \forall n\geq 1$$

Donc $\tilde{\Theta}_2^{(n)} = S_{n+1} - d_n\, \Delta S_n$, $d_n = \dfrac{\lambda_n(1-\lambda_{n-1})}{\lambda_n(1-\lambda_{n-1})-(1-\lambda_n)}$ $n\geq 1$

Lemme 4 :

Si la suite $(S_n)_{n\geq o}$ est telle que :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\Theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right), \text{ n suffisamment grand,}$$

avec $\gamma_o \neq o$ et $\lambda \neq 0,1$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+2} \frac{\Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{k(k+1)\alpha_o\alpha_k}{(1-\alpha_o)^3} \;;\; \alpha_o = \lambda,$$

où $(\alpha_\ell)_\ell$: $\lambda_n = \alpha_o + \dfrac{\alpha_1}{n} + \dfrac{\alpha_2}{n^2} + \ldots$ et k est le plus petit entier > O :

$\alpha_i \neq 0$.

Preuve :

Elle est immédiate, puisque :

$$\frac{\Delta O_2^{(n-1)}}{\Delta S_{n-1}} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_n[(1-\lambda_{n-1})\Delta\lambda_n - (1-\lambda_{n+1})\Delta\lambda_{n-1}]}{[\lambda_n(1-\lambda_{n-1})-(1-\lambda_n)][\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)-(1-\lambda_{n+1})]} \quad \text{(p. 166)}$$

$$\text{Or}\quad \frac{\Delta\Theta_2^{(n-1)}}{\Delta S_n} = \frac{\Delta\Theta_2^{(n-1)}}{\Delta S_{n-1}} \times \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_n} = \frac{1}{\lambda_{n-1}} \quad \frac{\Delta\Theta_2^{(n-1)}}{\Delta S_{n-1}}$$

$$\text{Donc}\quad \frac{\Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda_n[(1-\lambda_{n-1})\Delta\lambda_n-(1-\lambda_{n+1})\Delta\lambda_{n-1}]}{[\lambda_n(1-\lambda_{n-1})-(1-\lambda_n)][\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)-(1-\lambda_{n+1})]}$$

Avec la remarque (p. 166) et les notations ϕ_n et D_n on obtient :

$$\frac{\Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{\lambda_n\phi_{n-1}}{D_n D_{n-1}}, \quad \forall n\geq 1,$$

$$\text{et } \lim_{n\to\infty} n^{k+2} \frac{\Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)}}{\Delta S_n} = \frac{k(k+1)\alpha_o\alpha_k}{(1-\alpha_o)^3} \;;\; \alpha_o = \lambda$$

∎

Pour l'estimation de la limite, on a le résultat suivant :

Proposition 5 :

Si, pour n assez grand, on a :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \text{ avec } \gamma_o \neq 0$$

et $\begin{cases} \underline{-1 \leq \lambda < 1} \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$, alors $\exists N \geq 1$, $\forall n \geq N$:

$$S^* \in [\varepsilon_2^{(n)} \wedge \tilde{\Theta}_2^{(n)}].$$

Preuve :

Soit n suffisamment grand :

on a : $\dfrac{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \dfrac{L}{n^{k+1}}$ et $\dfrac{\Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)}}{\Delta S_n} \sim \dfrac{P}{n^{k+2}}$, avec :

$$L = \frac{-k\lambda\alpha_k}{(1-\lambda)^2} \quad \text{et} \quad P = \frac{k(k+1)\lambda\alpha_k}{(1-\lambda)^3} \quad \text{(voir p. 166 et Lemme 1)}$$

Donc $P/L = \dfrac{-(k+1)}{1-\lambda} < 0$ puisque $-1 \leq \lambda < 1$

$$\Rightarrow \Delta\varepsilon_2^{(n)} . \Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)} < o \text{ (pour n assez grand)}$$

On a déjà vu au lemme 3 que : $\Delta\varepsilon_2^{(n)}$ et $S^* - \varepsilon_2^{(n)}$ ont le même signe à partir d'un certain rang. Il en est de même pour $\Delta\tilde{\Theta}_2^{(n)}$ et $S^* - \tilde{\Theta}_2^{(n)}$ puisque : $\tilde{\Theta}_2^{(n)} = \Theta_2^{(n-1)}$ $(n \geq 1)$.

Par conséquent : $(S^* - \varepsilon_2^{(n)}).(S^* - \tilde{\Theta}_2^{(n)}) < 0$ pour n assez grand et donc $\exists N$, $\forall n \geq N$:

$$S^* \in [\varepsilon_2^{(n)} \wedge \tilde{\Theta}_2^{(n)}] \text{ et ceci pour tout } \lambda : -1 \leq \lambda < 1.$$

∎

Il s'ensuit que le contrôle d'erreur à l'aide du procédé Δ^2 d'Aitken et du Θ_2-algorithme décalé couvre toute la famille F de suites à <u>convergence linéaire</u> telles que :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \text{ pour n assez grand, avec}$$

$$\gamma_o \neq 0 \quad \text{et} \quad -1 \leq \lambda < 1 \quad (\lambda \neq 0).$$

V - Application au procédé Δ^2-itéré.

On sait que le Δ^2-itéré fournit une bonne approximation de la limite d'une suite donnée. Donc, il sera intéressant de voir si on peut appliquer notre méthode au Δ^2-itéré.

Soit $(S_n)_{n\geq o}$ une suite convergente à laquelle on lui applique le procédé Δ^2 d'Aitken. Soit $({}_1\varepsilon_2^{(n)})$ la suite obtenue. On applique de nouveau le Δ^2 d'Aitken à $({}_1\varepsilon_2^{(n)})$ pour obtenir $({}_2\varepsilon_2^{(n)})$ à laquelle on applique le Δ^2 d'Aitken et ainsi de suite ...

On obtient ainsi un tableau à double indice (n,k) où k varie en diagonale :

$$\begin{array}{llllll}
{}_o\varepsilon_2^{(o)} = S_o & & & & & \\
{}_o\varepsilon_2^{(1)} = S_1 & {}_1\varepsilon_2^{(o)} & & & & \\
{}_o\varepsilon_2^{(2)} = S_2 & {}_1\varepsilon_2^{(1)} & {}_2\varepsilon_2^{(o)} & & & \\
{}_o\varepsilon_2^{(3)} = S_3 & {}_1\varepsilon_2^{(2)} & {}_2\varepsilon_2^{(1)} & {}_3\varepsilon_2^{(o)} & & \\
{}_o\varepsilon_2^{(4)} = S_4 & {}_1\varepsilon_2^{(3)} & {}_2\varepsilon_2^{(2)} & {}_3\varepsilon_2^{(1)} & {}_4\varepsilon_2^{(o)} & \\
{}_o\varepsilon_2^{(5)} = S_5 & {}_1\varepsilon_2^{(4)} & {}_2\varepsilon_2^{(3)} & {}_3\varepsilon_2^{(2)} & {}_4\varepsilon_2^{(1)} & {}_5\varepsilon_2^{(o)} \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Les suites $({}_k\varepsilon_2^{(n)})_{n,k}$ se calculent d'une manière récursive :

$$\begin{cases} {}_{k+1}\varepsilon_2^{(n)} = {}_k\varepsilon_2^{(n)} - \dfrac{(\Delta_k\varepsilon_2^{(n)})^2}{\Delta^2{}_k\varepsilon_2^{(n)}} & n\geq o \text{ et } k\geq o. \\ {}_o\varepsilon_2^{(n)} = S_n \end{cases}$$

L'opérateur Δ est appliqué aux indices supérieurs.

Pour pouvoir appliquer notre méthode au Δ^2-itéré, il suffit de voir, si la famille de suites $\mathcal{F}$ est stable par l'application du procédé Δ^2 d'Aitken c'est-à-dire que les propriétés des suites de $\mathcal{F}$ sont conservées après l'application du Δ^2 d'Aitken.

En effet : si $(S_n)_n$ est telle que, pour n assez grand,

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots\right),\ \gamma_o \neq 0 \text{ et } \begin{cases} -1 \leq \lambda < 1 \\ \lambda \neq 0 \end{cases},$$

on a vu alors (p. 169) que :

$$\Delta\varepsilon_2^{(n)} = \Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \lambda^n n^{\theta-k-1}\ L\left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots\right)$$

soit $\Delta_1\varepsilon_2^{(n)} = \lambda^n n^{\Theta_1} \left(\gamma_o^{(1)} + \dfrac{\gamma_1^{(1)}}{n} + \dfrac{\gamma_2^{(1)}}{n^2} + \dots\right)$,

pour n suffisamment grand, avec :

$$\begin{cases} \gamma_o^{(1)} = \gamma_o L \neq o \quad \text{et} \quad \Theta_1 = \Theta-k-1 \\ -1 \leq \lambda < 1, \quad \lambda \neq o, \end{cases}$$

et d'autre part, d'après le lemme 1, on a :

$$\frac{\Delta_1\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_1\varepsilon_2^{(n)}} = \alpha_o^{(1)} + \frac{\alpha_1^{(1)}}{n} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{n^2} + \dots,\quad \alpha_o^{(1)} = \lambda$$ n étant suffisamment grand.

On retrouve le résultat donné par Lubkin [11] dans le théorème 11 p. 233.

On voit donc que le procédé Δ^2 d'Aitken conserve les propriétés de cette famille de suites.

Par conséquent, en vertu de la proposition 5, on peut appliquer la méthode de contrôle d'erreur à $({}_1\varepsilon_2^{(n)})$, c'est-à-dire on applique à $({}_1\varepsilon_2^{(n)})$ le Δ^2 d'Aitken et le Θ_2-algorithme décalé, pour obtenir les deux suites : $({}_2\varepsilon_2^{(n)})$ et $({}_2\tilde{\Theta}_2^{(n)})_n$, qui serviront à estimer la limite de (S_n).

Pour les mêmes raisons, $({}_2\varepsilon_2^{(n)})$ est telle que :

$$\Delta_2\varepsilon_2^{(n)} = \lambda^n\, n^{\Theta_2}\, \left(\gamma_o^{(2)} + \frac{\gamma_1^{(2)}}{n} + \frac{\gamma_2^{(2)}}{n^2} + \dots\right), \gamma_o^{(2)} \neq 0,$$

n étant suffisamment grand.

De nouveau, à $({}_2\varepsilon_2^{(n)})$ on applique le Δ^2 d'Aitken et le Θ_2-algorithme décalé, on obtient : $({}_3\varepsilon_2^{(n)})$ et $({}_3\tilde{\Theta}_2^{(n)})$ et ainsi de suite...

On obtient donc, une suite d'intervalles :

$$(J_{m,n})_{m,n} = ([{}_m\varepsilon_2^{(n)} \wedge {}_m\tilde{\Theta}_2^{(n)}])_{m,n} \text{ et on a :}$$

D'une part :

$$\begin{cases} \Delta_m\varepsilon_2^{(n)} = \lambda^n\, n^{\Theta_m}\, \left(\gamma_o^{(m)} + \dfrac{\gamma_1^{(m)}}{n} + \dfrac{\gamma_2^{(m)}}{n^2} + \dots\right), \gamma_o^{(m)} \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\Delta_m\varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta_m\varepsilon_2^{(n)}} = \alpha_o^{(m)} + \dfrac{\alpha_1^{(m)}}{n} + \dfrac{\alpha_2^{(m)}}{n^2} + \dots \qquad , \alpha_o^{(m)} = \lambda \end{cases}$$

pour n assez grand,

et d'autre part :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n^{k_m+1} \dfrac{\Delta_{m+1}\varepsilon_2^{(n)}}{\Delta_m \varepsilon_2^{(n)}} = - k_m \dfrac{\lambda\alpha^{(m)}_{k_m}}{(1-\lambda)^2} \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^{k_m+2} \dfrac{\Delta_{m+1}\overset{\gamma}{\Theta}{}_2^{(n)}}{\Delta_m \varepsilon_2^{(n)}} = \dfrac{k_m(k_m+1)\lambda\ \alpha^{(m)}_{k_m}}{(1-\lambda)^3} \end{cases}$$

où k_m est le plus petit entier > 0 tel que : $\alpha^{(m)}_{k_m} \neq 0$. Ce qui va nous permettre d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 6 :

Soit m un entier fixé. Si, pour n suffisamment grand :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right) \text{ avec } \gamma_o \neq 0 \text{ et } -1 \leq \lambda < 1 \ (\lambda \neq o),$$

alors :

$$\exists N_m, \ \forall n \geq N_m \ : \ S^* \in J_{m,n} = [{}_m\varepsilon_2^{(n)} \ \Lambda m \ \overset{\gamma}{\Theta}{}_2^{(n)}].$$

Preuve :

Elle est analogue à celle pour m=1 ∎

Remarquons que $({}_m\overset{\gamma}{\Theta}{}_2^{(n)})_n$ est la notation de la suite obtenue par application du Θ_2-algorithme décalé à $({}_{m-1}\varepsilon_2^{(n)})_n$.

VI - Résultats numériques :

Nous allons étudier d'une façon pratique la méthode de contrôle d'erreur ainsi proposée dans ce chapitre. Les tests numériques concerneront certaines suites de la famille $\mathcal{F}$, en l'occurence, les suites convergentes $(S_n)_n$ telles que :

$$\Delta S_n = \lambda^n n^\theta \left(\gamma_o + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots\dots \right), \qquad \begin{cases} \gamma_o \neq 0 \\ -1 \leq \lambda < 1,\ \lambda \neq 0, \end{cases}$$

n étant suffisamment grand.

Signalons que plusieurs exemples de suites à convergence linéaire donnés dans la littérature vérifient cette propriété.

Nous allons commencer par les résultats numériques obtenus à l'aide du Δ^2 d'Aitken et du Δ^2 d'Aitken modifié.

Nous savons que la méthode de l'estimation de la limite utilisant la première modification du Δ^2 d'Aitken s'applique aux suites de $\mathcal{F}$ telles que :

$$\begin{cases} -1 \leq \lambda < 1/2 \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Nous allons proposer deux exemples dans ce sens.

Exemple 1 : $S_n = \sum_{k=o}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, $n \geq o$, $S^* = \log 2$.

Cette série rentre dans le cadre des séries de la forme :

$$\sum_{k\geq o} a_k \lambda^k \text{ avec } \begin{cases} -1 \leq \lambda < 1 \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \quad \text{et } a_k = f(1/k)$$

pour k assez grand, avec f une fonction développable en série entière au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k\geq o} \alpha_k x^k \text{ pour x assez petit.}$$

Elles appartiennent à la famille F.

En effet : si l'on pose $x_n = \sum_{k=o}^{n} a_k \lambda^k$, alors on a :

$$\Delta x_{n-1} = \lambda^n a_n \text{. Or } a_n = f\ (1/n) = \alpha_o + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots.$$

pour n assez grand. Il s'ensuit, par un calcul élémentaire, que :

$$\Delta x_n = \lambda^n \left(\alpha'_o + \frac{\alpha'_1}{n} + \frac{\alpha'_2}{n^2} + \ldots\right) \text{ pour n assez grand.}$$

Dans notre exemple, on a $\lambda = -1$ et $a_n = f(1/n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$,

qui admet un développement en série entière au voisinage de 0, donc

$(S_n)_n \in$ F.

Rappelons que les essais numériques ont été effectués sur l'AMOS.

On obtient :

n	$S^* - {}_1\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_1\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
~~1~~	~~-0.68528194370000D-02~~	~~-0.11328998746000D-01~~
~~2~~	~~0.26709900867000D-02~~	~~-0.50510176352000D-02~~
~~3~~	~~-0.12972638806000D-02~~	~~0.26709950086700D-02~~
4	0.72293813810000D-03	-0.15785578344000D-02
5	-0.44256302681000D-03	0.10088157833000D-02
~~6~~	~~0.29003770578100D-03~~	~~-0.68319830370400D-03~~
~~7~~	~~-0.20015837163000D-03~~	~~-0.48383615645000D-03~~
~~8~~	~~0.14383887537400D-03~~	~~-0.35503865001300D-03~~
~~9~~	~~-0.10678769013000D-03~~	~~0.26816544050200D-03~~
10	0.81429888269000D-04	-0.20746221071000D-03
11	-0.63497646806300D-04	0.16377508018100D-03
~~12~~	~~0.50462465879000D-04~~	~~-0.13153771579000D-03~~
~~13~~	~~-0.40761762648000D-04~~	~~0.10723290961300D-03~~
~~14~~	~~0.33394707316000D-04~~	~~-0.88563949248000D-04~~
~~15~~	~~-0.27700111787000D-04~~	~~-0.73587905673000D-04~~
16	0.23229350518000D-04	-0.62442099988400D-04
17	-0.19670692382000D-04	0.53178437156000D-04

On constate que $(\varepsilon_2^{(n)})_n$ et $(\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)})_n$ encadrent la limite : $S^* = \log 2$,

puisque $S^* - \varepsilon_2^{(n)}$ et $S^* - \tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$ possèdent des signes différents. $\varepsilon_2^{(17)}$ et $\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(17)}$ n'ont que 4 chiffres significatifs exacts.

On peut espérer augmenter ce nombre, puisqu'on peut appliquer notre méthode au Δ^2-itéré.

Si on note $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ et $({}_k\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)})$ les suites obtenues en appliquant respectivement le Δ^2 d'Aitken et le Δ^2 d'Aitken modifié à $({}_{k-1}\varepsilon_2^{(n)})$ on a alors :

n	$S^* - {}_2\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_2\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
~~1~~	~~-0.130130360960000D-03~~	~~0.193177769690000D-03~~
~~2~~	~~0.414242040280000D-04~~	~~-0.669947974024000D-04~~
~~3~~	~~-0.161601610670000D-04~~	~~-0.292781905960000D-04~~
4	0.727952738090000D-05	-0.140573138200000D-04
5	-0.364804964192000D-05	0.740475752540000D-05
~~6~~	~~0.198434008780000D-05~~	~~-0.419192201661000D-05~~
7	-0.115169950731000D-05	0.251380515692000D-05
8	0.704515514372000D-06	-0.158012699103000D-05
~~9~~	~~-0.450074367110000D-06~~	~~0.103293405120000D-05~~
10	0.298205122820000D-06	-0.697958057571000D-06
11	-0.203794115810000D-06	0.465182681590000D-06
~~12~~	~~0.143050783663000D-06~~	~~-0.345542547472000D-06~~
~~13~~	~~-0.102762896860000D-06~~	~~0.251582605420000D-06~~
~~14~~	~~0.755507265472000D-07~~	~~-0.186604665941000D-06~~

n	$S^* - {}_3\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_3\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
1	-0.168876977113000D-05	0.247471416514000D-05
2	0.498590452480000D-06	-0.793400431580000D-06
~~3~~	~~-0.173465195990000D-05~~	~~0.295524841931000D-06~~
~~4~~	~~0.686468411004000D-07~~	~~-0.123719473780000D-06~~
~~5~~	~~-0.300906322081000D-07~~	~~0.568525138080000D-07~~
~~6~~	~~0.143390934681000D-07~~	~~-0.281706888930000D-07~~
7	-0.730960891814000D-08	0.148666003951000D-07
8	0.395357346860000D-08	-0.826094037620000D-08
~~9~~	~~-0.223644747170000D-03~~	~~0.480758893360000D-08~~
~~10~~	~~0.132695276990000D-08~~	~~-0.289946910930000D-08~~
~~11~~	~~-0.807631295174000D-09~~	~~0.181626091944000D-08~~

n	$S^* - {}_4\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_4\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
1	-0.155096131493000D-07	0.230575096793000D-07
2	0.452473614132000D-08	-0.710861058910000D-08
~~3~~	~~-0.148793333210000D-08~~	~~0.247564457822000D-08~~
~~4~~	~~0.550244294572000D-09~~	~~-0.947693479250000D-09~~
~~5~~	~~-0.216459739021000D-09~~	~~0.401996658183000D-09~~
~~6~~	~~-0.982254277914000D-10~~	~~-0.176441572143000D-09~~
7	-0.409272615800000D-10	0.891304807740000D-10
8	0.245563569480000D-10	-0.409272615800000D-10

n	$S^* - {}_5\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_5\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
~~1~~	~~-0.991349224932000D-10~~	~~0.160980562213000D-09~~
~~2~~	~~0.336513039660000D-10~~	~~-0.463842297904000D-10~~
~~3~~	~~-0.636646291241000D-11~~	~~0.200088834390000D-10~~
4	0.636646291241000D-11	-0.363797880710000D-11

On voit donc qu'à chaque fois qu'on **itère**, la limite reste encadrée par les deux transformations $({}_k\varepsilon_2^{(n)})$ et $({}_k\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)})$, $2 \leq k \leq 5$, avec un gain de chiffres significatifs exacts très intéressant.

La précision machine est atteinte au 5ème itéré du Δ^2 d'Aitken.

Exemple 2 :

$$\begin{cases} S_n = 1 + \dfrac{\lambda^n}{n+1} \qquad n \geq o \quad , \quad S^* = 1. \\ \lambda = 0.49 \end{cases}$$

On a : $\Delta S_n = \lambda^n \left[\dfrac{\lambda(n+1) - (n+2)}{(n+1) \, . \, (n+2)} \right]$

Soit : $\Delta S_n = \lambda^n \, n^{-1} \, [(\lambda - 1) + \dfrac{1 - 2\lambda}{n} + \dfrac{4\lambda - 1}{n^2} + \ldots]$, pour n assez grand.

Donc $(S_n)_n \in \mathcal{F}$.

On obtient les résultats numériques suivants :

n	$\varepsilon_2^{(n)}$	$\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
1	0.103391050994000D 01	0.972231354091000D 00
2	0.100700216530000D 01	0.995710788140000D 00
3	0.100176159970000D 01	0.999119426924000D 00
4	0.100050075372000D 01	0.999786424750000D 00
5	0.100015479302000D 01	0.999942104410000D 00
5	0.100005087584000D 01	0.999982996530000D 00
7	0.100001752380000D 01	0.999994693570000D 00
8	0.100000626350000D 01	0.999998263042000D 00
9	0.100000230690000D 01	0.999999409083000D 00
10	0.100000087093000D 01	0.999999792480000D 00
11	0.100000033573000D 01	0.999999925133000D 00
12	0.100000013173000D 01	0.999999972374000D 00
13	0.100000005250000D 01	0.999999989610000D 00
14	0.100000002120000D 01	0.999999996011000D 00
15	0.100000000870000D 01	0.999999998460000D 00
16	0.100000000360000D 01	0.999999999391000D 00
17	0.100000000150000D 01	0.999999999760000D 00

Comme prévu, on obtient un encadrement de 1 à l'aide de $(\varepsilon_2^{(n)})$ et $(\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)})$ et nous avons $\varepsilon_2^{(17)}$ et $\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(17)}$ avec 9 chiffres significatifs exacts.

L'application du Δ^2 d'Aitken itéré donne :

n	${}_2\varepsilon_2^{(n)}$	${}_2\tilde{\varepsilon}_{2,1}^{(n)}$
1	0.100049411733000D 01	0.999658006062000D 00
2	0.100010129530000D 01	0.999939088551000D 00
3	0.100002396920000D 01	0.999987186250000D 00
4	0.100000626080000D 01	0.999996978271000D 00
5	0.100000176020000D 01	0.999999224144000D 00
6	0.100000052410000D 01	0.999999787190000D 00
7	0.100000016344000D 01	0.999999938370000D 00
8	0.100000005294000D 01	0.999999981390000D 00
9	0.100000001772000D 01	0.999999994110000D 00
10	0.100000000610000D 01	0.999999998124000D 00
11	0.100000000220000D 01	0.999999999374000D 00
12	0.100000000080000D 01	0.999999999752000D 00
13	0.100000000030000D 01	0.999999999960000D 00
14	0.100000000011000D 01	0.999999999963000D 00

On se contente d'une seule itération, puisqu'on atteint la précision machine.

Maintenant, nous allons passer à la méthode de contrôle d'erreur utilisant le Δ^2 d'Aitken et le Θ_2-algorithme décalé. Elle s'applique à toutes les suites de la famille F.

Exemple 3 : $S_n = \sum_{k=o}^{n} \frac{(0.8)^k}{k+1}$, $n \geq o$, $S^* = 1.25 \log 5$.

C'est le même type d'exemples cité au début de ce paragraphe. On obtient :

n	$S^* - {}_1\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_1\tilde{\Theta}_2^{(n)}$
1	0.154654642883000D 00	-0.321535611560000D 00
2	0.784641923273000D-01	-0.126663857650000D 00
3	0.429088521871000D-01	-0.586785832892000D-01
4	0.247042172670000D-01	-0.299090758962000D-01
5	0.147745263280000D-01	-0.162557513250000D-01
6	0.910041767930000D-02	-0.925698896390000D-02
7	0.573959971734000D-02	-0.546312447113000D-02
8	0.369110131214000D-02	-0.331691813340000D-02
9	0.241283839570000D-02	-0.206108087150000D-02
10	0.159939841980000D-02	-0.130574377910000D-02
11	0.107305493660000D-02	-0.840920874910000D-03
12	0.727657715440000D-03	-0.549279822740000D-03
13	0.497918936162000D-03	-0.363225939510000D-03
14	0.343601754140000D-03	-0.242803675064000D-03
15	0.238888485021000D-03	-0.163864307980000D-03
16	0.167209753271000D-03	-0.111633383460000D-03
17	0.117763142043000D-03	-0.764906908443000D-04
18	0.834108759590000D-04	-0.528141536051000D-04
19	0.593916774960000D-04	-0.366850617870000D-04
20	0.424990612373000D-04	-0.256159146374000D-04
21	0.305548564940000D-04	-0.179690250661000D-04
22	0.220676993154000D-04	-0.126521081260000D-04

n	$S^* - {}_2\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_2\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	0.117975602300000D-01	-0.183335792462000D-01
2	0.560448577743000D-02	-0.733584522823000D-02
3	0.285889940641000D-02	-0.330259941620000D-02
4	0.153494091500000D-02	-0.160946089090000D-02
5	0.856902770470000D-03	-0.830733628390000D-03
6	0.493445913890000D-03	-0.448019163741000D-03
7	0.291466287310000D-03	-0.250160614090000D-03
8	0.175878762092000D-03	-0.143687193490000D-03
9	0.108092044683000D-03	-0.844869282450000D-04
10	0.675035444150000D-04	-0.506681062690000D-04
11	0.427603154093000D-04	-0.308880565736000D-04
12	0.274402082141000D-04	-0.191038161574000D-04
13	0.178206646523000D-04	-0.119425[illegible]D-04
14	0.117078998300000D-04	-0.75411[illegible]D-05
15	0.777870445750000D-05	-0.47772[illegible]D-05
16	0.523072594661000D-05	-0.3054[illegible]D-05
17	0.355909287464000D-05	-0.193[illegible]D-05
18	0.245736009674000D-05	-0.1215[illegible]D-05
19	0.172459112950000D-05	-0.7567[illegible]D-06

n	$S^* - {}_3\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_3\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	0.672308957291000D-03	-0.106244847850000D-02
2	0.301941683574000D-03	-0.410378095693000D-03
3	0.145143802850000D-03	-0.175402914464000D-03
4	0.735198373150000D-04	-0.807051146693000D-04
5	0.388252847190000D-04	-0.393244067011100D-04
6	0.212294871744000D-04	-0.199261703530000D-04
7	0.119631476991000D-04	-0.104426944720000D-04
8	0.693243055140000D-05	-0.563382855040000D-05
9	0.412245572080000D-05	-0.301585532730000D-05
10	0.253278631140000D-05	-0.173750231624000D-05
11	0.156795226344000D-05	-0.838579580859000D-06
12	0.105256913230000D-05	-0.521944457432000D-06
13	0.708369043423000D-06	-0.103558704722000D-06
14	0.530384568264000D-06	-0.218220520764000D-06

<u>Exemple 4</u> : $S_n = \dfrac{(0.9)^n}{n+1}$, $n \geq o$, $S^* = 0$.

De la même façon que pour l'exemple 2, on montre que $(S_n)_n \in F$.

n	${}_1\varepsilon_2^{(n)}$	${}_1\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	-0.182432418070000D 00	0.527401462720000D 00
2	-0.987804749760000D-01	0.175487052010000D 00
3	-0.603032979933000D-01	0.855953757572000D-01
4	-0.393659910314000D-01	0.488858734600000D-01
5	-0.268404471770000D-01	0.303816063062000D-01
6	-0.188751676030000D-01	0.198993717030000D-01
7	-0.135879751713000D-01	0.135129555360000D-01
8	-0.996451470310000D-02	0.942456574190000D-02
9	-0.741868689450000D-02	0.671150436990000D-02
10	-0.559376903820000D-02	0.486089695370000D-02
11	-0.426372867773000D-02	0.357059813794000D-02
12	-0.328067164620000D-02	0.265459421240000D-02
13	-0.254525797480000D-02	0.199434837520000D-02
14	-0.198928502923000D-02	0.151219245091000D-02
15	-0.156504977790000D-02	0.115605211971000D-02
16	-0.123864897900000D-02	0.890328138470000D-03
17	-0.985648302474000D-03	0.690274200493000D-03

n	${}_2\varepsilon_2^{(n)}$	${}_2\theta_2^{\gamma(n)}$
~~1~~	~~-0.275307287880000D-01~~	~~0.5296526[illegible]~~
2	-0.143731705430000D-01	0.2100617569[illegible]
3	-0.818927418970000D-02	0.9[illegible]
~~4~~	~~-0.496244790190000D-02~~	0.517[illegible]
~~5~~	~~-0.314977718930000D-02~~	~~[illegible]~~
~~6~~	~~-0.207293958430000D-02~~	~~0.17288061[illegible]~~
~~7~~	~~-0.140435615960000D-02~~	~~0.[illegible]~~
8	-0.974155760800000D-03	0.6901759[illegible]
9	-0,689091775164000D-03	0.4571[illegible]
~~10~~	~~-0.495520180060000D-03~~	~~0.3103628567[illegible]~~
11	-0.361338051323000D-03	[illegible]
12	-0.266677662931000D-03	0.151877972670000D-03
~~13~~	~~-0.198883855000000D-03~~	~~0.108871804300000D-03~~
14	-0.149692289260000D-03	0.790994786470000D-04
15	-0.113587872730000D-03	0.581478676231000D-04
~~16~~	~~-0.868201783514000D-04~~	~~0.431904438453000D-04~~
~~17~~	~~-0.667959580600000D-04~~	~~0.323768852860000D-04~~
~~18~~	~~-0.516955300950000D-04~~	~~0.244696482420000D-04~~
~~19~~	~~-0.402255802570000D-04~~	~~0.186306735410000D-04~~

n	${}_3\varepsilon_2^{(n)}$	${}_3\theta_2^{\gamma(n)}$
1	-0.270570261652000D-02	0.367506910632000D-02
~~2~~	~~-0.144125710800000D-02~~	~~0.160359788730000D-02~~
~~3~~	~~-0.826288055600000D-03~~	~~0.807774911394000D-03~~
~~4~~	~~-0.497066991050000D-03~~	~~0.445141696570000D-03~~
~~5~~	~~-0.309440743141000D-03~~	~~0.259973061560000D-03~~
6	-0.197790151860000D-03	0.157921440452000D-03
7	-0.129194543633000D-03	0.986663496510000D-04
~~8~~	~~-0.859783349520000D-04~~	~~0.630064344324000D-04~~
~~9~~	~~-0.581724434640000D-04~~	~~0.409599775210000D-04~~
~~10~~	~~-0.399520923380000D-04~~	~~0.270422727344000D-04~~
~~11~~	~~-0.278162938630000D-04~~	~~0.181116247810000D-04~~
12	-0.196106510814000D-04	0.122985226633000D-04
13	-0.139841413690000D-04	0.843947001910000D-05
~~14~~	~~-0.100791711700000D-04~~	~~0.586475574094000D-05~~
~~15~~	~~-0.733559782210000D-05~~	~~0.413101939280000D-05~~
~~16~~	~~-0.538510317350000D-05~~	~~0.291750742690000D-05~~

n	${}_4\varepsilon_2^{(n)}$	${}_4\theta_2^{\gamma(n)}$
1	-0.243992990490000D-03	0.391835308050000D-03
2	-0.117758950510000D-03	0.159015970343000D-03
~~3~~	~~-0.608185849420000D-04~~	~~0.684378166084000D-04~~
~~4~~	~~-0.337131950183000D-04~~	~~0.316656944461000D-04~~
~~5~~	~~-0.199073686220000D-04~~	~~0.157304442260000D-04~~
~~6~~	~~-0.123894902150000D-04~~	~~0.856871948840000D-05~~
7	-0.800036772042000D-05	0.493624329790000D-05
8	-0.531855237860000D-05	0.302160801402000D-05
~~9~~	~~-0.361112824170000D-05~~	~~0.200599321510000D-05~~
~~10~~	~~-0.247835946650000D-05~~	~~0.139520687500000D-05~~
~~11~~	~~-0.170962481410000D-05~~	~~0.770273297370000D-06~~
~~12~~	~~-0.122152245701000D-05~~	~~0.686480145900000D-06~~
13	-0.854441354724000D-06	0.557417398020000D-06

L'estimation de la limite est obtenue sans problème à chaque fois qu'on itère. Par contre, pour avoir une approximation de 6 chiffres significatifs exacts, il fallait itérer deux fois l'exemple 3 et trois fois pour l'exemple 4.

Pour terminer, on va présenter les résultats numériques obtenus sur des suites de F telles que $\lambda = -1$. Le contrôle d'erreur et l'accélération de la convergence se passent de tout commentaire.

<u>Exemple 5 :</u> $S_n = \sum_{k=o}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geq o$, $S^* = \text{Arctg } 1$.

On a : $\Delta S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} (1 + \frac{3}{2n})^{-1}$.

Pour n suffisamment grand, on a :

$$(1 + \frac{3}{2n})^{-1} = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{9}{4n^2} + \ldots$$

Donc : $\Delta S_n = (-1)^n n^{-1} (- \frac{1}{2} + \frac{3}{4n} - \frac{9}{8n^2} + \ldots)$ pour n assez grand.

On obtient :

n	$S^* - {}_1\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_1\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	-0.62685032708000D-02	0.93564967292000D-02
2	0.20648300615000D-02	-0.36822963757000D-02
3	-0.91136041374000D-03	0.18060308912000D-02
4	0.47752847422000D-03	-0.10150088392000D-02
5	-0.28004728210300D-03	0.62574981985000D-03
6	0.17782817486000D-03	-0.41249059723000D-03
7	-0.11979087135400D-03	0.28605328316100D-03
8	0.84457493358000D-04	-0.20640929051200D-03
9	-0.61741337049100D-04	0.15377590444000D-03
10	0.46483770348000D-04	-0.11761206133000D-03
11	-0.35861419747000D-04	0.91950440947000D-04
12	0.28241143809200D-04	-0.73240488746000D-04
13	-0.22633907065000D-04	0.59279592278400D-04
14	0.18416995772000D-04	-0.48652085752100D-04
15	-0.15185153643000D-04	0.40419828110300D-04
16	0.12666894690400D-04	-0.33944459574000D-04
17	-0.10675775229100D-04	0.28781296351000D-04

n	$S^* - {}_2\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_2\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	-0.12815239370000D-03	0.17661253969000D-03
2	0.35609282349400D-04	-0.56260912061000D-04
3	-0.12667603187000D-04	0.22073019863400D-04
4	0.53408448366100D-05	-0.10010557162000D-04
5	-0.25470044420200D-05	0.50499011195000D-05
6	0.13331582522300D-05	-0.27635160222400D-05
7	-0.75041316480000D-06	0.16126214177300D-05
8	0.44771695684100D-06	-0.99120552477000D-06
9	-0.28016438591200D-06	0.63592233346000D-06
10	0.18240916688200D-06	-0.42292867874400D-06
11	-0.12282180251000D-06	0.29000511859000D-06
12	0.85103238234200D-07	-0.20417337510000D-06
13	-0.60460479290000D-07	0.14707075024400D-06

n	$S^* - {}_3\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_3\overset{\gamma}{\Theta}{}_2^{(n)}$
1	-0.167593407241000D-05	0.234352864546000D-05
2	0.448296304970000D-06	-0.685873601470000D-06
3	-0.144415025720000D-06	0.238164830080000D-06
4	0.537856976734000D-07	-0.943791746980000D-07
5	-0.224681571130000D-07	-0.414566052630000D-07
6	0.102863850770000D-07	-0.198433554032000D-07
7	-0.508225639350000D-08	0.101572368224000D-07
8	0.266663846560000D-08	-0.551062839804000D-08
9	-0.148065737450000D-08	0.313139025820000D-08
10	0.854015524964000D-09	-0.186173565452000D-08
11	-0.518411980010000D-09	0.114050635602000D-08

n	$S^* - {}_4\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_4\overset{\gamma}{\Theta}{}_2^{(n)}$
1	-0.151121639650000D-07	0.218151399170000D-07
2	-0.411637302022000D-08	-0.630279828330000D-08
3	-0.128147803480000D-08	-0.206637196742000D-08
4	0.443883841447000D-09	0.760337570682000D-09
5	-0.173713488040000D-09	0.301952240990000D-09
6	0.591215973350000D-10	-0.135514710564000D-09
7	-0.345607986673000D-10	0.600266303170000D-10
8	0.127328258250000D-10	-0.336513039660000D-10

n	$S^* - {}_5\varepsilon_2^{(n)}$	$S^* - {}_5\overset{\gamma}{\Theta}{}_2^{(n)}$
1	-0.982254277914000D-10	0.143700182880000D-09
2	0.254658516500000D-10	-0.463842297904000D-10
3	0.109139364212000D-10	0.118234311230000D-10
4	0.000000000000000D 00	-0.818545231600000D-11
5	-0.272848410531000D-11	0.000000000000000D 00

<u>Exemple 6</u> : $S_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $n \geq o$, $S^* = 1$.

On a : $\Delta S_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2} - \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

Soit : $\Delta S_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \left[\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{-1} + \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \right]$

Or, pour n assez grand, on a :

$$\begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} - \cdots \\ \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2} - \cdots \end{cases}$$

Donc : $\Delta S_n = (-1)^n n^{-1} \left[-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{5}{n^2} + \ldots \right]$, pour n assez grand.

On obtient alors :

n	${}_1\varepsilon_2^{(n)}$	${}_1\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	0.812500000000000D 00	0.163636363640000D 01
2	0.990196078432000D 00	0.101679586563000D 01
3	~~0.100403225810000D 01~~	~~0.992169703872000D 00~~
4	~~0.997959183674000D 00~~	~~0.100428754813000D 01~~
5	~~0.100117370891000D 01~~	~~0.997396522012000D 00~~
6	~~0.999263622980000D 00~~	~~0.100169978660000D 01~~
7	0.100049212600000D 01	0.998828839120000D 00
8	0.999654934440000D 00	0.100084123110000D 01
9	~~0.100025125630000D 01~~	~~0.999375370630000D 00~~
10	~~0.999811391530000D 00~~	~~0.100047655100000D 01~~
11	~~0.100014518002000D 01~~	~~0.999628167583000D 00~~
12	~~0.999885670610000D 00~~	~~0.100029571783000D 01~~
13	0.100009134090000D 01	0.999760945931000D 00
14	0.999925760951000D 00	0.100019600002000D 01
15	~~0.100006115460000D 01~~	~~0.999837299423000D 00~~
16	~~0.999949026404000D 00~~	~~0.100013654090000D 01~~
17	~~0.100004293320000D 01~~	~~0.999884295420000D 00~~
n	${}_2\varepsilon_2^{(n)}$	${}_2\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	0.100520057240000D 01	0.997270807992000D 00
2	0.999811700730000D 00	0.100028272540000D 01
3	~~0.100006113161000D 01~~	~~0.999896693230000D 00~~
4	~~0.999975565440000D 00~~	~~0.100004490192000D 01~~
5	~~0.100001126670000D 01~~	~~0.999977960481000D 00~~
6	~~0.999994234210000D 00~~	~~0.100001183820000D 01~~
7	0.100000319460000D 01	0.999993182910000D 00
8	0.999998115752000D 00	0.100000414944000D 01
9	~~0.100000116900000D 01~~	~~0.999997357453000D 00~~
10	~~0.999999243890000D 00~~	~~0.100000174740000D 01~~
11	~~0.100000050650000D 01~~	~~0.999998807194000D 00~~
12	~~0.999999650490000D 00~~	~~0.100000083670000D 01~~
13	0.100000024750000D 01	0.999999399080000D 00
14	0.999999820840000D 00	0.100000044060000D 01
n	${}_3\varepsilon_2^{(n)}$	${}_3\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	~~0.100005009712000D 01~~	~~0.999963610820000D 00~~
2	~~0.999997421070000D 00~~	~~0.100000375954000D 01~~
3	~~0.100000075620000D 01~~	~~0.999998794351000D 00~~
4	0.999999735540000D 00	0.100000045290000D 01
5	0.100000010572000D 01	0.999999808170000D 00
6	~~0.999999953080000D 00~~	~~0.100000008930000D 01~~
7	~~0.100000002263000D 01~~	~~0.999999955210000D 00~~
8	~~0.999999988313000D 00~~	~~0.100000002391000D 01~~
9	~~0.100000000640000D 01~~	~~0.999999986560000D 00~~
10	0.999999996340000D 00	0.100000000790000D 01
11	0.100000000220000D 01	0.999999995184000D 00
n	${}_4\varepsilon_2^{(n)}$	${}_4\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	~~0.100000005576100D 01~~	~~0.999999574500000D 00~~
2	~~0.999999974704000D 00~~	~~0.100000003710000D 01~~
3	~~0.100000000720000D 01~~	~~0.999999988744000D 00~~
4	~~0.999999997650000D 00~~	~~0.100000000390000D 01~~
5	~~0.100000000090000D 01~~	~~0.999999998501000D 00~~
6	~~0.999999999652000D 00~~	~~0.100000000062000D 01~~
7	0.100000000014000D 01	0.999999999713000D 00
8	0.999999999930000D 00	0.100000000013000D 01
n	${}_5\varepsilon_2^{(n)}$	${}_5\overset{\gamma}{\theta}{}_2^{(n)}$
1	~~0.100000000055000D 01~~	~~0.999999995912000D 00~~
2	0.999999999820000D 00	0.100000000030000D 01
3	~~0.100000000010000D 01~~	~~0.999999999920000D 00~~
4	~~0.999999999983000D 00~~	~~0.100000000002000D 01~~
5	~~0.100000000000000D 01~~	~~0.999999999990000D 00~~

CONCLUSION :

Les expériences numériques confirment ainsi les résultats théoriques concernant l'estimation de la limite de telles suites.

L'application de notre méthode au Δ^2 itéré donne des résultats intéressants et montre son efficacité, puisqu'on obtient une très nette amélioration de l'estimation de la limite.

On signale que l'encadrement de la limite à l'aide de ces deux transformations, même en itérant plusieurs fois, se fait dès la première étape. On a pu voir également (p.169) que le Θ_2-algorithme conserve les propriétés des suites de la famille F. Il s'ensuit que toutes les suites obtenues par l'application du Θ_2-itéré appartiennent aussi à F.

Par conséquent, on peut penser appliquer notre méthode, en inversant les rôles du Δ^2 d'Aitken et du Θ_2-algorithme décalé.

Enfin, il n'a pas été possible de traiter des exemples de suites de point fixe. Toute la difficulté est de prouver qu'elles appartiennent ou non à la famille F.

REFERENCES

[1] C. BRESINSKI : "Error Control in Convergence Acceleration Processes". IMA J. Numer. Anal., 3 (1983) 65-80

[2] C. BRESINSKI : "Accélération de la Convergence en Analyse Numérique". Lecture Notes in Mathematics n° 584. Springer-Verlag (1977).

[3] C. BREZINSKI : "Convergence Acceleration of Some Sequences by the ε-algorithm". Numer. Math. 29, p. 173-177 (1978).

[4] C. BREZINSKI : "Matrices Semi-Définies positives et Suites de Moments". non publié

[5] C. BREZINSKI : "inequalities for Some moment Sequences". non publié

[6] C. BREZINSKI : "Composite Sequence Transformations". Numér. Math., 46 (1985) 311-321

[7] A. FDIL : "Choix Automatique entre transformations de suites" Thèse de 3ème cycle, Lille I, (1984).

[8] B. GERMAIN-BONNE : "Estimation de la Limite de Suites et Formalisation de Procédés d'Accélération de la Convergence". Thèse d'Etat, Lille I, (1978).

[9] C. KOWALEWSKI : "Possibilités d'Accélération de la Convergence logarithmique". Thèse 3ème cycle, Lille I, (1981).

[10] D. LEVIN : "Development of Non-Linear Transformations for Improving Convergence of Sequences". Intern. J. Comp. Math., B3, p. 371-388 (1973).

[11] S. LUBKIN : "A Method ôf Summing Infinite Series". J. of Research of the N.B.S., Vol. 48 n° 3, p. 226-254, March (1952).

[12] G. MIEL : "Majorizing Sequences and Error Bounds for Iterative Methods". Math. of computation, Vol. 34, n°149, p. 185-202 (1980).

[13] G. OPFER : "On Monotonicity Preserving Linear Extrapolation Sequences". Computing 5, p. 259-266, (1970).

[14] F.A. POTRA α V. PTÁK : "Sharp Error Bounds for Newton's Process". Numer. Math. 34, p.63-72 (1980).

[15] H. VOGT : "Élément de mathématiques supérieurs" 12ème Edition p. 54 (1925).

[16] D.A. SMITH α W.F. FORD : "Acceleration of Linear and logarithmic Convergence". Siam J. Numer. Anal. Vol. 16, N° 2, p. 223-239 (1979).

[17] D. WIDDER : "The Laplace-Transform" Princeton-University-Press (1946).

[18] J. WIMP : "Sequence Transformation and Their Applications". Academic Press, (1981).