

Avant propos

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à Monsieur P. MICHEAU qui a dirigé ce travail, et qui tout au long de la rédaction de cette thèse m'a fait bénéficier de ses conseils et de la rigueur qui caractérise son approche de la Mécanique.

A Monsieur J. CHAUVIN qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury et qui, initiateur du sujet, m'a de longue date apporté son soutien et ses encouragements, je tiens à exprimer ma gratitude.

J'adresse mes remerciements à Monsieur J.P. BARRAND qui m'a fait bénéficier de ses remarques judicieuses,

à Monsieur F.A.E BREUGELMANS, dont les travaux expérimentaux m'ont aidé à préciser l'approche ici développée,

à Monsieur P. LAVAL, dont les travaux sur les problèmes hyperboliques m'ont été utiles dans la phase initiale,

à Monsieur J. MATHIEU, qui me fait l'honneur de s'intéresser à mon travail,

à Monsieur R.K. ZEYTOUNIAN, qui m'a fait bénéficier de son point de vue sur l'approche asymptotique des problèmes.

J'adresse aussi mes remerciements à Madame F. RENIEZ pour sa contribution à la frappe de cette thèse, ainsi qu'au personnel de L'EUDIL qui a permis l'édition du texte.

TABLE DES MATIERES

PREAMBULE

PREMIERE PARTIE : MODELISATION DE L'ECOULEMENT STATIONNAIRE INCOMPRESSIBLE NON VISQUEUX DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE AXIALE

Chapitre I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1. Méthodes de singularités
 - 1.1 Ecoulement de base
 - 1.2 Perturbation - ligne portante
 - 1.3 Singularités de surface
 - 1.4 Autres singularités
 - 1.5 Conclusion

2. Méthodes de discrétisation locale
 - 2.1 Méthodes quasi-tridimensionnelles
 - 2.2 Méthodes paraboliques - fluide visqueux
 - 2.3 Méthodes du type (ω, ψ)
 - 2.4 Association de modèles visqueux et non visqueux
 - 2.5 Méthode instationnaire totalement tri-dimensionnelle

3. Conclusion

Chapitre II : FORMULATION - PROBLEME DE STABILITE

1. Equations locales
 - 1.1 Introduction - paramétrage
 - 1.2 Hypothèses
 - 1.3 Mise en équation
 - 1.4 Cas limite à grand nombre d'aubes
 - 1.5 Cas d'un petit nombre d'aubes

2. Stabilité - Conditions aux limites
 - 2.1 Quelques remarques sur le type d'instabilité
 - 2.2 Ecoulement dans une conduite
 - 2.2.1 Equations locales
 - 2.2.2 Conditions aux limites
 - 2.2.3 Solutions analytiques pour une conduite de longueur infinie
 - 2.2.4 Conditions aval discrétisées pour l'intégration numérique directe
 - 2.2.5 Processus itératif - Stabilité
 - 2.2.6 Intégration numérique
 - 2.2.7 Résumé et conclusion sur la nature et l'expression des conditions aux limites
 - 2.3 Condition "filtre" de sortie pour un canal interaube
 - 2.3.1 Quelques remarques sur la transposition du problème
 - 2.3.2 Hypothèses supplémentaires
 - 2.3.3 Equations locales
 - 2.3.4 Conditions aux limites

3. Conclusion

Chapitre III : CALCUL DE L'ÉCOULEMENT SUR S1, SUR S2, DE
L'HELICITE - COUPLAGE

1. Problème de grille d'aubes
 - 1.1 Introduction
 - 1.2 Processus itératif
 - 1.3 Equation pour X_0
 - 1.4 Maillage
 - 1.5 Conditions aux limites
 - 1.6 Résultats
 - 1.7 Conclusion

2. Ecoulement suivant S2 - Equilibre radial
 - 2.1 Introduction
 - 2.2 Discrétisation - Conditions aux limites
 - 2.3 Conclusion

3. Calcul de l'hélicité dans le plan de sortie
 - 3.1 Introduction
 - 3.2 Exemple d'instabilité dans le calcul de
 - 3.3 Hélicité
 - 3.4 Signification géométrique de l'hélicité

4. Couplage S1 - S2
 - 4.1 Initialisation
 - 4.2 Processus itératif
 - 4.3 Conclusion

Chapitre IV : RESULTATS NUMERIQUES

1. Introduction
2. Calcul du champ dans une machine à aubage hélicoidal
 - 2.1 Géométrie de l'aubage, régimes de fonctionnement
 - 2.2 Maillage
 - 2.3 Description de l'écoulement
 - 2.3.1 Champ des lignes de courant
 - 2.3.2 Champ de vitesse
 - 2.3.3 Effet secondaire au bord de fuite
 - 2.3.4 Quelques remarques sur les gradients de pression et de vitesse obtenus à proximité du bord d'attaque
 - 2.3.5 Conclusion sur cette première étude du champ de vitesse
 - 2.4 Description du champ moyen
 - 2.4.1 Déviation moyenne
 - 2.4.2 Rééquilibrage global de la distribution de déviation
 - 2.4.3 Vitesses axiale et radiale moyennes
 - 2.5 Vérification de la condition de sortie
 - 2.5.1 Problème de l'hélicité et des singularités de coin
 - 2.5.2 Vorticité axiale moyenne à la sortie
 - 2.5.3 Equilibre secondaire

- 2.6 Evolution de la solution - convergence
 - 2.6.1 Convergence du processus itératif
 - 2.6.2 Propagation des données imposées par la condition filtre
 - 2.6.3 Limite de stabilité
- 2.7 Conclusion sur ce premier calcul
 - 2.7.1 Vraisemblance et qualité des résultats
 - 2.7.2 Comparaison des résultats
- 3. Résultats concernant une machine existante
 - 3.1 Géométrie de la pompe
 - 3.1.1 Géométrie réelle- Hypothèses
 - 3.1.2 Géométrie d'aubage prise en compte dans le calcul
 - 3.2 Régimes de fonctionnement
 - 3.3 Techniques et résultats expérimentaux
 - 3.4 Technique et calcul numériques
 - 3.5 Comparaison des résultats expérimentaux et numériques
 - 3.5.1 Comparaison des déviations
 - 3.5.2 Comparaison des vitesses locales
 - 3.6 Stabilité
 - 3.7 Conclusion

Chapitre V : CONCLUSION

DEUXIEME PARTIE: SUR UNE MODELISATION DU DECROCHAGE TOURNANT

Chapitre 1 INTRODUCTION

1. Généralités
2. Effets dus à la géométrie
 - 2.1 Perturbation d'entrée
 - 2.1.1 Technique des compresseurs parallèles
 - 2.1.2 Technique instationnaire
 - 2.2 Effet du défilement des aubes
 - 2.2.1 Contribution du champ moyen non visqueux
 - 2.2.2 Contribution des sillages découpés et ingérés dans le canal
 - 2.3 Conclusion sur les effets du défilement
3. Instabilités de fonctionnement
 - 3.1 Pompage
 - 3.1.1 Mise en évidence
 - 3.1.2 Influence de la fréquence
 - 3.2 Décrochage tournant
 - 3.2.1 Mise en évidence
 - 3.2.2 Stabilité de l'écoulement non décroché
 - 3.2.3 Stabilité du décrochage établi
4. Etude du décrochage tournant
 - 4.1 Petit décrochage
 - 4.1.1 Description
 - 4.1.2 Modèles
 - 4.2 Grand décrochage

- 4.2.1 Caractéristique générale du grand décrochage
 - 4.2.2 Ecoulement moyen dans les espaces libres et les roues
 - 4.2.3 Champ de pression entre les roues
 - 4.2.4 Ecoulement dans l'aubage tournant
 - 4.2.5 Ecoulement dans l'aubage fixe
 - 4.2.6 Conclusion sur le champ dans les roues
- 5. Conclusion et éléments de modélisation
 - 5.1 Echelles du problème
 - 5.2 Echelles et pas du modèle

Chapitre II APPROCHE DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL INSTATIONNAIRE DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE AXIALE

- 1. Cadre et limites du problème posé
 - 1.1 Objectifs
 - 1.2 Éléments disponibles
 - 1.3 Démarche
- 2. Formulation
 - 2.1 But de la formulation
 - 2.2 Equations locales
 - 2.3 Conditions aux limites
 - 2.3.1 Conditions sur les parois
 - 2.3.2 Conditions sur les surfaces de raccordement
 - 2.3.3 Conditions sur les bords du profil
 - 2.3.4 Conditions sur les frontières amont et aval
 - 2.4 Exemple de discrétisation spatiale en volumes finis
 - 2.5 Conclusion sur la modélisation de l'écoulement de grille d'aubes

- 3. Description spatiale et temporelle des grandeurs physiques- Discrétisation
 - 3.1 Description spatiale
 - 3.2 Description temporelle
 - 3.3 Dérivées spatiale , temporelle et matérielle
 - 3.3.1 Dérivée spatiale
 - 3.3.2 Dérivée temporelle
 - 3.3.3 Dérivée matérielle
 - 3.4 Conclusion sur la description
- 4. Paramétrage
 - 4.1 Choix d'une base de fonctions
 - 4.2 Représentation des grandeurs vectorielles
 - 4.3 Paramétrage des grandeurs physiques
 - 4.4 Projection des opérateurs sur la base de fonctions
- 5. Equations
 - 5.1 Equations locales discrétisées
 - 5.2 Conditions aux limites- Substitution aux équations locales
 - 5.2.1 Position du problème
 - 5.2.2 Procédé d'élimination
 - 5.3 Discrétisation des conditions de raccordement

Chapitre III CONCLUSION SUR LA DEUXIEME PARTIE

CONCLUSION GENERALE

PREAMBULE

L'écoulement dans une turbomachine est reconnu comme étant des plus complexes et des plus difficiles à modéliser.

Selon le régime de fonctionnement, stationnaire ou instationnaire, et l'échelle du domaine observé, l'écoulement est à caractère plus ou moins interne, c'est à dire soumis à des contraintes d'adaptation globale ou de couplage local plus ou moins fortes. L'équilibre ou la dynamique des phénomènes, leur développement spatial, subissent de ce fait de nombreuses influences, dont l'importance relative évolue.

Ces effets et leurs interactions ont une structure pleinement tridimensionnelle qui ne peut être potentiellement représentée que par des modèles eux aussi tridimensionnels. Ces modèles présentent par rapport à des modèles bidimensionnels, des libertés supplémentaires modifiant la nature des problèmes rencontrés. Ces libertés rendent les couplages plus "libres", révèlent des instabilités tant physiques que numériques, et peuvent accroître considérablement la difficulté de formulation.

La modélisation est généralement rendue abordable par des hypothèses dont l'effet immédiat est de bloquer certaines de ces libertés, les forces résiduelles résultant de ces blocages sont alors minimisées par équilibre global.

Dans le cadre des modélisations tridimensionnelles numériques décrivant l'écoulement dans son volume, notre objectif est, en continuité des travaux que nous avons précédemment effectués, de reprendre dans deux cas, stationnaire et instationnaire, certaines de ces hypothèses afin de limiter les dégénérescences qu'elles provoquent.

En stationnaire, on relaxe les hypothèses, de symétrie axiale ou portant sur la géométrie des surfaces de courant, classiquement utilisées pour obtenir les solutions couplées des deux écoulements bidimensionnels dits écoulement méridien et écoulement aube à aube. On montre que moyennant un choix judicieux des conditions aux limites d'entrée et de sortie, il est possible de réaliser effectivement le couplage libre de ces deux écoulements. Des résultats de calcul sont fournis et comparés à ceux disponibles auparavant, ainsi qu'à des résultats expérimentaux.

En instationnaire, dans le but de décrire des phénomènes de type décrochage tournant, pompage, on propose :

- 1°) Une modélisation tridimensionnelle dans laquelle l'écoulement est décomposé en un écoulement moyen tridimensionnel continu obtenu par une moyenne aube à aube effectuée dans des canaux réels ou fictifs, et des perturbations à profil spatial typique ;
- 2°) Une méthode de résolution des équations dépendantes du temps qui régissent ces écoulements.

PREMIERE PARTIE

**MODELISATION DE L'ECOULEMENT
STATIONNAIRE INCOMPRESSIBLE NON
VISQUEUX DANS UNE ROUE DE
TURBOMACHINE AXIALE**

Chapitre 1

-INTRODUCTION-

GENERALITES

L'importance des effets tridimensionnels dans les turbomachines est unanimement reconnue et leur prise en compte est aujourd'hui estimée nécessaire /1/ tant pour le dessin des aubages, que pour la prédiction des performances des machines. Cependant, de nombreuses concessions au caractère tridimensionnel des écoulements sont souvent effectuées dans l'approche des problèmes, ou incluses implicitement dans leur résolution numérique.

Les effets tridimensionnels interviennent en premier lieu dans la globalité de l'écoulement et devraient se traduire en terme d'interactions lorsque, dans le souci de simplifier ou de mieux cerner les phénomènes, on a effectué une décomposition du problème selon différentes échelles. Une première dégénérescence est souvent opérée à ce niveau, à travers les raccordements par exemple .

Ils interviennent aussi aux différents niveaux de description de l'écoulement : écoulements sains ou pariétaux notamment et justifieraient pour chacun d'entre eux une formulation tridimensionnelle. En plus d'une première concession

à la globalité de l'écoulement, une remise en cause du caractère tridimensionnel de chacun de ces problèmes est souvent faite et justifiée, tant pour limiter les moyens mis en jeu que pour faire référence à des exemples à configuration plus simple, dans lesquels se dégage une préoccupation particulière telle que problème portant, influence de la dépendance radiale, effets secondaires et de défilement de paroi.

Bien que les modèles ainsi obtenus rendent de grands services, ils ne sont pas encore pleinement satisfaisants, en premier lieu parce que les effets tridimensionnels pris en compte sont spécifiques au modèle, et aussi parce qu'ils font appel à des hypothèses restrictives portant soit sur la vitesse, soit sur l'alimentation, soit encore sur le nombre de REYNOLDS.

Nous proposons une revue de quelques uns de ces modèles, typiques des très nombreux travaux regroupés en deux grandes classes :

- Méthode des singularités ;
- Méthode de discrétisation locale de l'ensemble du volume :
 - . méthode quasi-tridimensionnelle,
 - . méthode parabolique (fluide visqueux),
 - . méthodes de type (ω, ψ) ,
 - . méthode associant ces trois techniques.
 - . méthode instationnaire totalement tridimensionnelle.

Dans cette revue, on s'efforce de montrer la potentialité des différentes méthodes qui n'ont souvent été mises en oeuvre que pour traiter des problèmes particuliers tels que :

- écoulement dans son ensemble,
- "troisième problème",
- interactions entre écoulements secondaires,

et de dégager les éléments permettant de définir notre modèle, destiné à l'étude de l'écoulement sain stationnaire effectivement tridimensionnel dans un aubage axial.

1 - METHODES DES SINGULARITES-ÉCOULEMENTS IRROTATIONNELS

Cette méthode bien connue est ,à l'origine, directement issue dans sa forme et dans le détail, de la théorie de l'aile d'envergure limitée. A partir du modèle le plus simple /2/ qui consiste à perturber dans un espace annulaire, un écoulement de base hélicoïdal axisymétrique à vitesse radiale nulle, par un filament tourbillonnaire radial se substituant à l'aube, l'approche du problème général se précise par évolution progressive du champ de base et de la perturbation. Bien que les améliorations apportées à ces champs soient simultanées, il est possible d'en séparer les étapes.

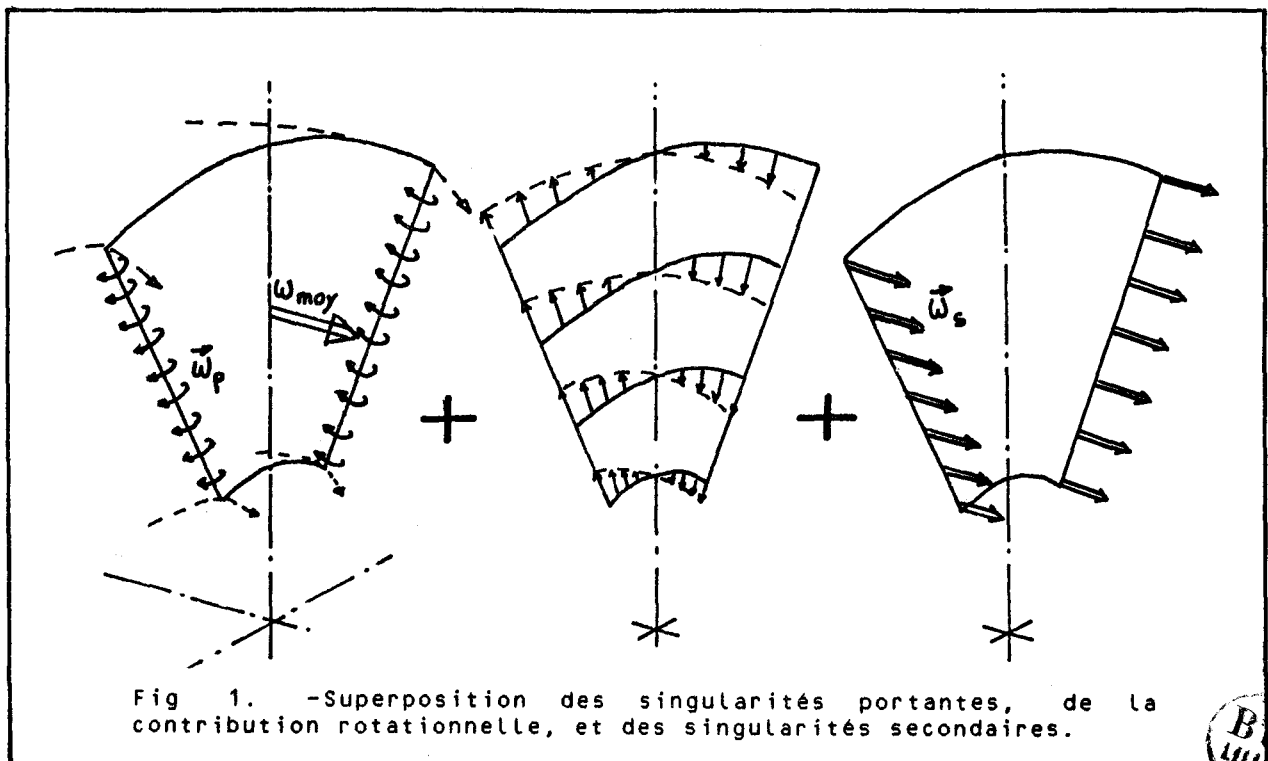
1-1. Écoulement de base

- Une première amélioration est apportée à l'écoulement de base par la condition d'équilibre radial /3/ qui établit un lien entre la circulation moyenne azimutale et le champ de vitesse dans le plan méridien. L'écoulement de base ainsi défini permet de préciser les conditions de fonctionnement des lignes portantes et de tenir compte de l'interaction indirecte déviation-vitesse débitante-incidence. Ceci est déjà un effet tridimensionnel, bien que la vitesse radiale n'intervienne pas explicitement dans le couplage écoulement de base - ligne portante. Le champ d'application de ce modèle, est du type hélice aérienne, soufflante, ou tout aubage faiblement chargé et ayant un grand allongement.
- L'hypothèse de faible déviation est ensuite abandonnée /4/, bien que la linéarisation soit conservée. La déviation est prise en compte dans l'écoulement de base qui devient

véritablement moyen suivant θ au sens habituel du terme. Le maintien de la linéarisation se justifie par le fait que dans l'hypothèse d'un écoulement incompressible non décollé, une grille d'aubes à solidité suffisante peut provoquer une forte déviation sans pour autant créer localement des perturbations plus importantes que dans le cas à faible déviation.

1-2. Perturbation-ligne portante

Avec l'écoulement de base hélicoidal, la perturbation était modélisée uniquement à partir de singularités tourbillonnaires radiales. Lorsque l'écoulement de base est moyen et rotationnel, le rotationnel du champ moyen ne peut plus rendre



compte de la vorticité locale (rotationnel nul), ni de celle due aux singularités de sillage. La modélisation est effectuée à

L'aide d'une première perturbation très simple /4/, ne respectant pas le glissement sur l'arbre et le carter, mais contre-tourbillonnaire par rapport à l'écoulement moyen. (en l'occurrence /4/, elle est à vitesse purement radiale et à débit nul ,figure 1), et d'une seconde perturbation induite par des singularités tourbillonnaires disposées sur la ligne portante et sur le sillage, qui rétablit les conditions de glissement sur l'arbre et le carter. Ces contributions s'ajoutent pour régir la discontinuité de vitesse dans le sillage qui a été supposé transporté par l'écoulement moyen.

Cette modélisation prend comme donnée la circulation autour des profils et fait donc appel à une caractéristique déviation-incidence insensible à l'effet de la vitesse radiale et à la variation de profil et d'incidence lorsque l'on passe d'un rayon à l'autre. Le souci de modéliser plus correctement l'aubage et de prendre en compte la condition de KUTTA JOUKOWSKI a amené comme dans la théorie des profils minces, à distribuer les singularités tourbillonnaires sur l'aubage /5/.

1-3. Singularités de surface

Une telle distribution de singularités, associée avec des singularités de source permet de tenir compte par l'écoulement moyen de l'interaction entre problème d'épaisseur et problème portant, de définir une cambrure non portante pour un fonctionnement donné /6/ et aussi de traiter le problème direct, à géométrie donnée /7/. Reste posé le problème de la forme des sillages. Il est résolu par une hypothèse analogue à celle utilisée dans /5/, c'est à dire que le sillage est porté par l'écoulement moyen. Quant au rotationnel moyen, il est aussi traité par une technique de perturbation contre-tourbillonnaire à vitesse portée par des surfaces de courant supposées parallèles aux aubes (surfaces S2) dont la structure est précisée au paragraphe 3.

Dans le même esprit que /5/, nous trouvons /8/ où se trouvent superposés un écoulement de base (primaire) porté par les surfaces S_2 (surfaces de courant issue d'une ligne radiale), et une perturbation à potentiel induite par des singularités d'aubage et de sillage. La première perturbation est ici associée à l'écoulement de base (primaire) dont la détermination passe par un problème de CAUCHY à données dans le plan d'alimentation. Les conditions de glissement sur l'arbre et le carter ne sont cette fois encore pas vérifiées par l'écoulement de base, et sont rétablies par la perturbation à potentiel.

Dans l'application, l'alimentation est irrotationnelle, mais il aurait été possible comme le proposent /8/ et /15/ de construire un champ de base à rotationnel calculé par transport et production sur ce champ, ou comme dans /9/, et comme nous le proposons par la suite, par transport sur le champ réel.

1-4. Autres singularités

D'autres types de singularités peuvent être utilisés, tels les doublets /10/ ou les dipôles de pression sur l'aubage /11-12/. L'utilisation des premières permet plus de souplesse dans le rapport forme de paroi-vitesse de glissement ce qui justifie leur utilisation dans /10/ où est abordé le problème de la cavitation. Les secondes, associées à des singularités de source permettent de traiter des équations régissant la pression et le potentiel et devraient, après les développements analytiques proposés dans /12/, déboucher sur une discrétisation numérique. Enfin les singularités peuvent être aussi distribuées soit par panneaux /13/, soit distribuées dans tout le domaine. Cela rend le problème tridimensionnel /14-15/, mais permet de prendre explicitement en compte la production de rotationnel. On peut espérer déboucher sur un problème de taille abordable en utilisant des fonctions de GREEN pour fonction de courant, limitées dans l'espace.

1-5. Conclusion

La technique des singularités essentiellement tourbillonnaires présente l'avantage d'être à l'heure actuelle basée sur une description tourbillonnaire satisfaisante de l'écoulement quand il est irrotationnel.

Avec la décomposition en singularités portantes associées à l'écoulement moyen et singularités d'effet secondaire, on retrouve une formulation des problèmes tridimensionnels d'aube à aube (de grille), et d'arbre à carter (de vrille), proche de celle des méthodes quasi-tridimensionnelles qui utilisent un paramétrage différent, et prennent en compte l'effet secondaire de façon annexe.

Il n'y a pas avec cette technique, de problème inhérent à la description de l'écoulement dans les coins. Ce problème de coin est pris en compte dans le calcul des singularités, où du fait de la discrétisation de type intégral, il ne crée pas de difficulté majeure.

2 - METHODES DE DISCRETISATION LOCALE

2-1. Méthode "quasi-tridimensionnelle"

Elle prend pour point de départ le problème bidimensionnel de grille d'aubes plane qui fait appel à des techniques de calcul bien connues, et pour lesquelles on dispose de nombreux résultats expérimentaux.

L'idée est de décomposer le problème (3-D) en deux problèmes (2-D) de manière à faire apparaître séparément les équations typiques qui régissent d'une part, l'écoulement de grille et sa déviation, et d'autre part, l'équilibre méridien ou normal aux parois d'arbre et de carter. Le couplage local s'effectuant en partie par les seconds membres, il devient possible, moyennant quelques simplifications ne contrariant pas trop la physique du problème, de développer une démarche d'avant-projet et de dessin des machines, avec formulation de problèmes inverses et utilisation de résultats expérimentaux.

La théorie de WU /16/ fonde et justifie cette méthode dans le cas d'un fluide parfait compressible. Elle utilise, d'une part, deux projections de l'équation d'EULER perpendiculairement aux lignes de courant, deux équations sont ainsi disponibles, et d'autre part, l'intégrale première qui correspond à la conservation de l'énergie.

Le problème est formulé à partir de deux fonctions de courant représentant des surfaces de courant S_1 et S_2 à lignes de source telles qu'elles soient respectivement sensiblement parallèles aux parois d'arbre (ou de carter) et d'aubage. Comme nous le voyons aussi dans /17/, ces surfaces de courant sont vrillées, les dépendances respectivement azimutale et normale à l'arbre (ou au carter) sont inconnues dans ce problème.

La stabilité du couplage est dans ce cas très délicate /18-31/, (voire impossible). Cette difficulté est levée par une hypothèse admise dans la plupart des travaux, qui est une contrainte cinématique appliquée au champ : l'une des familles, (S_1), est axisymétrique.

L'écoulement est alors cloisonné par des surfaces de révolution dont la forme est régie par une moyenne d'aube à aube de la condition d'équilibre normal (à S_1). On peut en conclure que l'équilibre normal local n'est pas satisfait, et que ce

cloisonnement exerce un couple sur le feuillet fluide compris entre deux surfaces S_1 , correspondant aux forces résiduelles obtenues à partir des équations locales. Ce couple correspond aussi à la rotation imposée à une portion de feuillet lors de son transport vers des zones à circulation moyenne azimutale différente.

La pression est donc sensible à cette hypothèse. Cependant, en supposant que le profil de l'aubage évolue peu, que la déviation est faible, que l'alimentation est suffisamment régulière, de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer /19-20/ ont développé ce modèle, et en ont affiné les techniques de résolution.

Problème méridien

On peut citer pour le problème méridien : /21-22-23/, pour la prise en compte de l'épaisseur des aubes et des pertes dans l'aubage, ou encore /24-25/ pour d'autres préoccupations axées sur la précision obtenue pour la vitesse axiale, lorsque la distribution de circulation moyenne et l'effet de diffuseur tendent à destabiliser le schéma, et aussi /26/ pour une modélisation avec sillage annulaire séparant un jet tournant d'un milieu extérieur au repos.

En fait, la recherche d'une grande précision à l'aval d'un aubage pour des distributions de circulation difficiles, dans le cadre d'un fluide parfait, est assez vaine. Cette modélisation en écoulement méridien ne peut guère à la limite être considérée que comme une "super condition à la limite" qui s'appliquerait à proximité des bords de fuite.

Problème de grille d'aubes

Le problème de grille d'aubes prend en compte la non adaptation au bord d'attaque, la condition de KUTTA, Les effets

de CORIOLIS et centrifuges, et permet le calcul de la déviation. Il est en général écrit sur S_1 de révolution en stationnaire /27-28/, ou pour le cas d'écoulement transsonique, en instationnaire /29/ ou pseudo-instationnaire /30/. Enfin un écoulement secondaire, vérifiant le "troisième problème" peut être superposé aux résultats obtenus précédemment /34/.

Couplage des problèmes sur S_1 et S_2

Le couplage des deux problèmes a été très certainement maintes fois tenté, témoins les conclusions prudentes /18/ où les difficultés de convergence sont imputées soit à la forme des surfaces de courant, soit aux imprécisions du schéma. Nous sommes nous même arrivés à des conclusions analogues, /31/, en remarquant que tout en divergeant, la solution passe par un état où le rotationnel est relativement correct.

Plus récemment, /32/, on trouve un algorithme dans lequel le couplage local est effectivement réalisé. Mais une contrainte cinématique est encore imposée à l'aval où l'écoulement est supposé redevenu uniforme, ce qui empêche tout développement des effets secondaires. En effet, comme on le verra par la suite, avec l'étude du comportement des perturbations tourbillonnaires, le champ secondaire ne peut disparaître à la sortie du domaine comme le montrent les résultats obtenus dans /32/. Finalement, l'hypothèse utilisée équivaut à l'hypothèse d'axisymétrie de S_1 à l'aval de la roue seulement, ce qui notamment pour un canal court, n'améliore pas de façon décisive le modèle quasi-tridimensionnel.

Troisième problème

Il y a souvent dans les turbomachines centrifuges des canaux interaubes longs, vrillés, alimentés avec une forte vorticité relative. Cela donne un effet secondaire très important, des vitesses latérales elles aussi importantes, et une

migration des lignes de courant d'un coin à l'autre pouvant pleinement se développer de l'entrée à la sortie du canal.

On trouve dans /33/ une modélisation qui consiste à ajouter à une solution de base du type quasi-tridimensionnel, une perturbation produisant la migration des lignes de courant le long des parois.

La technique, analogue à celle développée dans la méthode des singularités, est de considérer un tube de courant du champ de base, de lui appliquer une contre circulation annulant celle du champ de base (le cas est irrotationnel). La perturbation est ensuite construite sur le maintien du débit et sur l'hypothèse que le champ de vitesse qu'elle induit est linéaire dans le tube.

L'inconvénient de cette méthode est qu'au contact de deux tubes, les perturbations s'annihilent et qu'il ne reste sur les parois que la contribution d'une couche d'épaisseur équivalente à celle d'un demi tube. Cette technique ne peut donc être utilisée qu'avec un seul tube pour la totalité du canal.

On débouche en fait sur le problème du calcul pour chaque section, d'un champ bidimensionnel induit par un tourbillon donné. Le champ proposé par l'auteur, évalué sur la circulation globale autour du tube, ne peut correctement représenter la vorticité locale. L'estimation correcte de ce champ nécessite une intégration qui est effectuée dans /34/ sur la base d'un rotationnel évalué sur l'écoulement moyen (contre tourbillon).

L'écoulement secondaire obtenu est superposé à l'écoulement quasi-tridimensionnel. Cette idée de l'intégration transversale est aussi utilisée dans les méthodes dites paraboliques.

2-2. Méthodes paraboliques - fluide visqueux

Ces méthodes ou "Forward marching" sont basées sur l'hypothèse que la variation des différentes grandeurs dans la direction de l'écoulement a une contribution négligeable sur les termes visqueux. De ce fait, les équations de NAVIER-STOKES deviennent du premier ordre pour cette coordonnée et peuvent être intégrées pas à pas dans le sens de l'écoulement.

On sait qu'une telle technique pose des problèmes de stabilité lorsqu'elle est exploitée en terme de matrice de transfert pour l'ensemble des variables. Un moyen de résoudre cette difficulté est de procéder par adaptation progressive des variables à des contraintes qui tendent (ou devraient tendre) vers les équations de base : NAVIER STOKES et continuité.

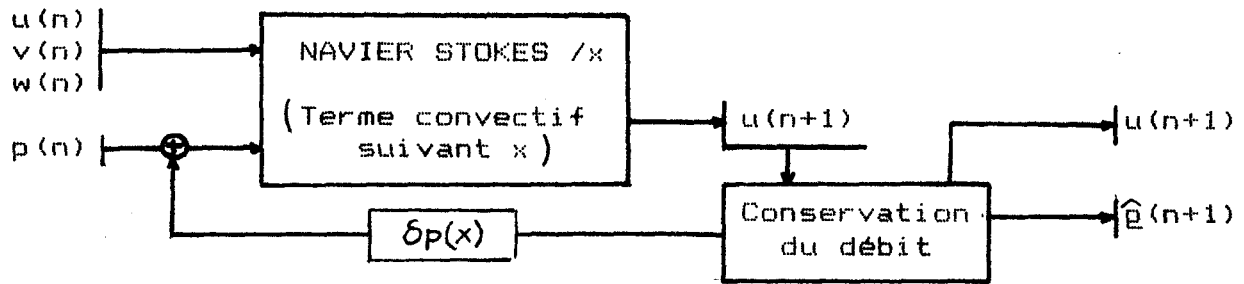
Les possibilités d'adaptation sont multipliées par le fait que les variables sont décomposées en champs de base et corrections visqueuses ou non visqueuses à dépendance axiale ou transversale limitée.

D'une façon générale, la composante principale de la vitesse est localement adaptée par le terme convectif aux tensions visqueuses et de pression de l'écoulement. C'est quasiment une équation pour l'énergie. A partir de cela, plusieurs développements sont proposés /35/.

Dans /36/ l'évolution du gradient de pression moyenne sur la section est conditionnée par la conservation du débit. La vitesse et le gradient transversaux sont régis par la composante transversale de l'équation de NAVIER-STOKES et l'équation de continuité locale.

L'algorithme peut se représenter comme suit:

Phase A-Direction principale de l'écoulement: x



Phase B

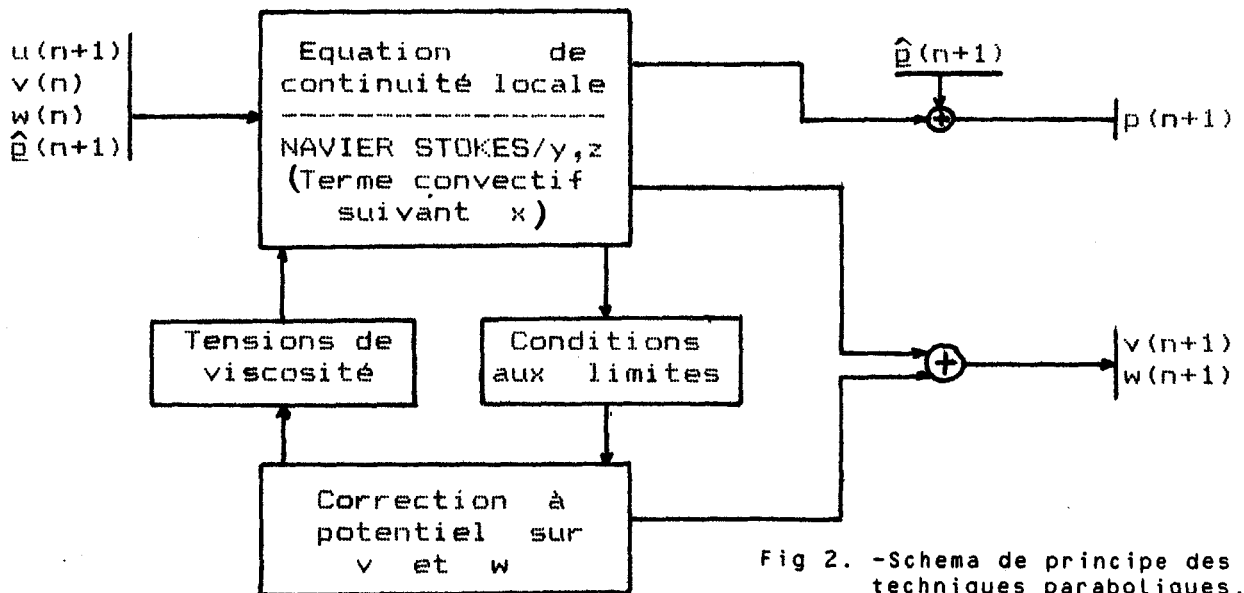


Fig 2. -Schema de principe des techniques paraboliques.

Avec ce schéma, il n'y a pas de troncature d'équation, ce qui n'est pas le cas avec /37/, qui repose sur le même principe global, mais avec des différences notoires sur les approximations et la démarche.

La phase A utilise les mêmes éléments que précédemment, dans une formulation différente, assujettissant la perte de charge à une forme globale de l'équation de NAVIER-STOKES, la contrainte de débit est prise en compte dans la distribution de vitesse débitante U.

La phase B se base sur les équations d'EULER transversales (Y,Z) tronquées aux termes convectifs et de pression , ce qui permet d'éviter les problèmes de stabilité posés par un traitement parabolique de ces équations (figure 3).

La première étape est une prédiction purement parabolique des composantes v et w à l'état n+1 à partir des composantes à l'état n. Cet état ne satisfaisant pas la continuité, une correction est effectuée sur la pression et la vitesse transversale.

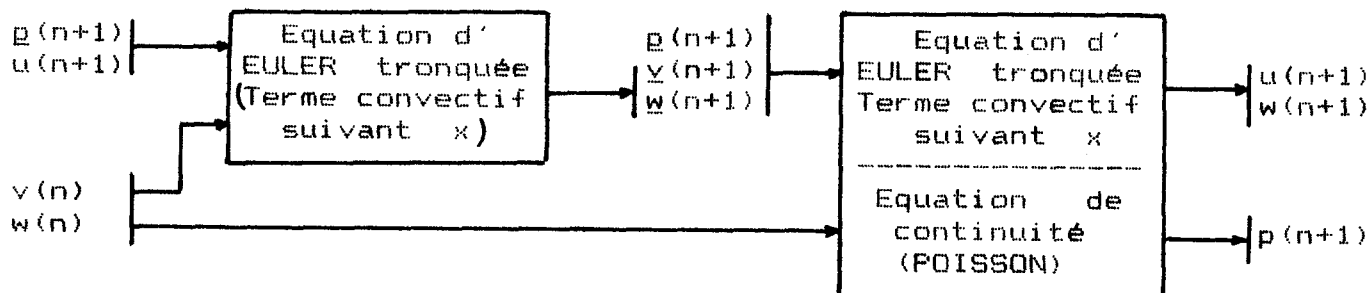


Fig 3. -Autre forme de la phase B (fig 2)

La formulation de cette correction revient à définir une pression et une correction des vitesses de l'état (n+1), de manière à ce que cet état vérifie l'équation de continuité, et qu'une rétro-prédiction nous ramène à l'état des vitesses $v(n)$, $w(n)$.

Cette technique présente l'avantage de réduire pratiquement le calcul à une seule intégration transversale, par contre, elle ne peut s'appliquer qu'aux cas où effectivement la convection et les tensions transversales de viscosité sont négligeables.

D'autres schémas sont développés, ils s'appuient sur la définition d'un écoulement de base non visqueux ou sur des corrections de champ à contribution visqueuse ou non visqueuse. D'une manière générale, la remontée des informations se fait par la pression du champ de base s'il est défini, ou par l'adaptation du gradient de pression moyen comme dans les deux cas évoqués précédemment.

Ces méthodes prennent donc en compte la viscosité d'une manière adaptée à l'étude des effets secondaires dûs aux forces centrifuges ou de CORIOLIS régnant dans les canaux courbes ou tournants /38-39/. Elles permettent notamment de prendre en compte le fait que le gradient transversal de pression appliqué aux zones pariétales, peut être équilibré par les termes visqueux dû à l'effet secondaire.

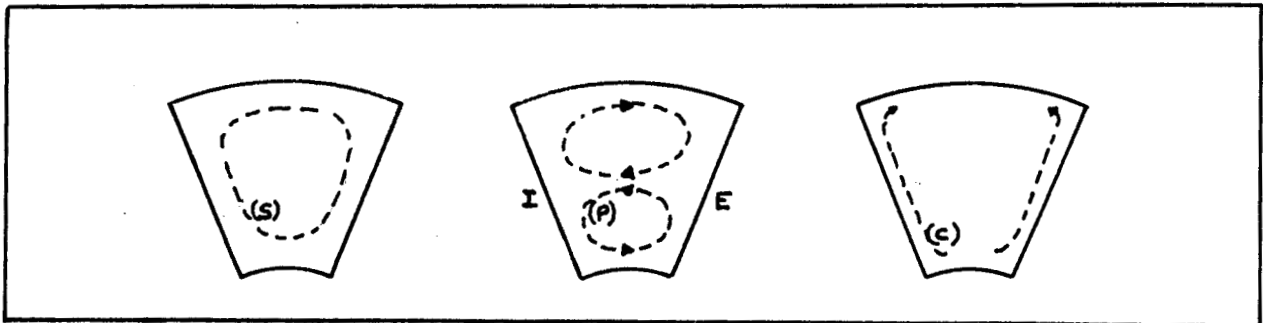
Ce type de phénomène est potentiellement à la portée de techniques n'utilisant pas l'hypothèse d'une direction privilégiée, et s'inspirant du modèle quasi-tridimensionnel déjà évoqué.

2-3. Méthodes du type (ω, ψ)

Interaction entre effets secondaires en mouvement relatif

Dans le cas de la turbomachine, les charges appliquées aux zones pariétales sont très fortes ; il y a d'une part, celle due à la déviation qui, au niveau de l'arbre, a un effet tangentiel comparable à celui observé en grille plane /40/, et d'autre part, la charge due à l'inertie d'entraînement qui, appliquée aux couches limites d'aubage, crée un écoulement secondaire radial. Ces deux effets, associés à l'effet d'entraînement du carter contribuent à accentuer ou à atténuer la vorticité secondaire relative de fluide non visqueux.

Ces couches secondaires (Figure 4) peuvent, soit se pomper réciproquement, tel que du côté intrados-arbre pour un fonctionnement en pompe, soit s'accumuler avec la couche raclée, côté intrados-carter, soit encore se transvaser ou produire une nappe enroulée, attachée à l'aubage /41/.

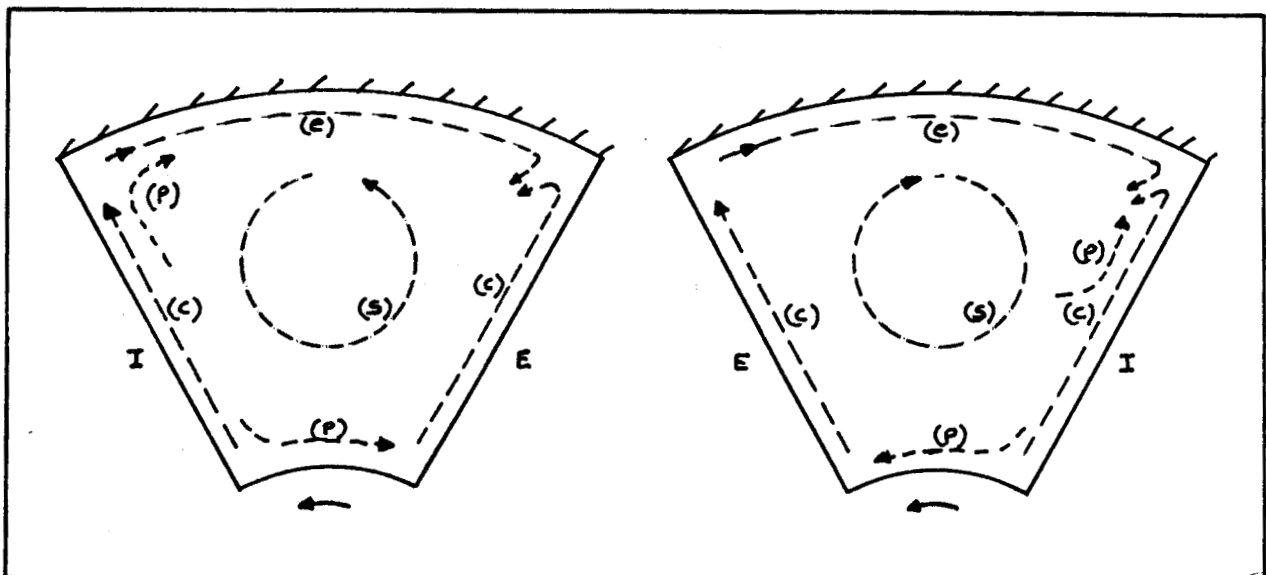


Effet dû au mouvement d'entraînement

Effet sur les couches limites d'arbre et de carter dû à la pression

Effet dû à la centrifugation

Figure 4



Turbine

Pompe

Figure 4 (suite)



Sur la figure 4 sont représentées des tendances dont l'importance relative peut considérablement varier. Elle permet d'apprécier la finesse du maillage nécessaire à la discrétisation d'un tel ensemble de phénomènes. Par contre, l'aspect tourbillonnaire, dont le rôle est important n'y est pas mis en évidence. Une description complète de l'écoulement devrait se baser à la fois sur le champ de vitesse et sur le tourbillon, c'est cette idée qui a été exploitée dans /42/.

Utilisation du potentiel vecteur

Le travail précédemment cité /42/ s'inspire manifestement du problème de l'écoulement bidimensionnel dans une chambre à paroi défilante, et vise à en faire apparaître les effets particuliers. Il se base sur une technique (ω, ψ) étendue au cas tridimensionnel.

Les auteurs s'appuient sur l'existence de pseudo fonctions de courant qui sont en fait les composantes d'un potentiel vecteur. Ceci permet de vérifier l'équation de continuité, mais par contre ne donne pas une représentation aisée de l'écoulement.

L'avantage de cette méthode est qu'elle débouche sur une formulation quasi-linéaire des équations de transport du tourbillon et des équations liant le potentiel vecteur au rotationnel.

Bien que potentiellement tridimensionnelle, cette méthode est limitée dans son utilisation par les auteurs qui s'intéressent à l'effet secondaire dû à l'entraînement par le carter. Ils singularisent la direction normale à l'arbre et ne prennent pas en compte la composante du rotationnel suivant cette direction. Les problèmes d'écoulement méridien et de couches limites d'arbre et de carter sur des surfaces "S2" ne sont pas traités. Par contre, les couches limites d'aubage sont traitées.

Cette technique utilisée sur un maillage à pas quasiment constant, donne, bien qu'elle soit à nombre de REYNOLDS de maillage limité, des profils de vitesse réalistes. Vraisemblablement, ceci est dû à la faible longueur du canal en regard de ses dimensions transversales. Pour tenir réellement compte des couches limites, il faudrait moduler la distribution de viscosité dans le canal jusqu'à traiter éventuellement la partie centrale de la veine en fluide non visqueux. Mais il semblerait que ceci pose des problèmes de stabilité.

Nous voyons donc l'intérêt qu'on peut avoir à disposer d'un modèle efficace pour le traitement de l'écoulement stationnaire d'un fluide non visqueux, susceptible d'être couplé à d'autres modèles pour les zones pariétales.

2-4. Association des modèles visqueux et non visqueux

Le rôle des forces de viscosité étant extrêmement variable d'un point à l'autre du canal, l'idée d'associer les techniques précédemment présentées, en conservant leurs avantages dans les zones où elles sont bien adaptées et en palliant par recouvrement les lacunes qu'elles ont dans d'autres zones est très intéressante.

Nous trouvons dans /43/ l'association de techniques telles que :

- Modélisation de l'écoulement bidimensionnel (sur S2) moyenné d'aube à aube, par une méthode de type "intégrale de paroi".
- Modélisation des couches limites sur S2 par une technique type méthode intégrale
- Modélisation de l'écoulement secondaire visqueux par une technique quasi (ω, ψ) telle que celle vue en /42/.

Les couplages sont établis par la prise en compte dans l'équation de continuité de l'effet de blocage dû aux couches limites, par la prise en compte des pertes et aussi par le calcul du rotationnel suivant la vitesse moyenne qui est responsable des effets secondaires. Le couplage intervient aussi localement dans le calcul d'une correction telle que celle utilisée dans les méthodes paraboliques qui est destinée à adapter la vitesse à l'équation de continuité.

Ce modèle donne correctement les effets secondaires de paroi, notamment ceux dûs à l'adhérence sur l'arbre et le carter, et ceux dûs aux champs de pression azimuthal (figure 4). Il ne vise pas l'effet secondaire non visqueux, et le problème "extérieur" se réduit ici à un calcul moyen sur S_2 .

2-5 Méthode instationnaire totalement tridimensionnelle valable en compressible

Nous trouvons par contre dans /44/ une modélisation qui a pour objectif essentiel de prendre en compte les effets secondaires non visqueux. Cette technique est comme dans /30/ et celles déjà évoquées, basée sur le fait que la compressibilité, et les vitesses caractéristiques faibles permettent d'utiliser la forme instationnaire des équations pour simuler l'installation du régime stationnaire. Bien des problèmes sont ainsi écartés.

Les conditions aux limites, notamment hors aubage, sont bien satisfaites, les résultats sont très intéressants et les effets secondaires d'arbre et de carter bien rendus. Ces résultats pourraient être utilisés à titre de comparaison.

Cependant, le temps de calcul très important qu'elle demande est un obstacle majeur à son utilisation courante. De plus, cette technique qui utilise la propagation acoustique réelle pour simuler les évolutions, est mal adaptée au cas incompressible pour lequel il serait nécessaire d'introduire une

compressibilité artificielle

3 - CONCLUSION

Au terme de cette revue, on peut constater que l'on ne dispose pas de modèle couramment utilisable, effectivement tridimensionnel, qui permette d'étudier en toutes circonstances, les écoulements stationnaires de fluide incompressible peu ou non visqueux.

On trouve par contre un modèle quasi-tridimensionnel (S1/S2), très intéressant pour ses avantages potentiels qui sont: la souplesse de discrétisation, la possibilité de prise en compte des couches limites et des données peu restrictives d'alimentation et de sortie. Ce modèle très prometteur se trouve néanmoins limité par les problèmes de stabilité que sa mise en oeuvre soulève. Les contraintes cinématiques qui sont imposées pour pallier ce problème en réduisent la portée. Pour rendre ce modèle totalement efficace, il faut se débarrasser de ces hypothèses trop restrictives et rendre le couplage des écoulements sur les deux familles S1 et S2, totalement libre. C'est à ce problème que nous nous sommes attachés.

Après avoir précisé le cadre théorique, nous proposons une étude analytique et numérique du problème tridimensionnel sur une configuration simplifiée, ce qui nous permet de définir les conditions dans lesquelles le couplage peut être stable, indépendamment de la discrétisation.

Nous nous donnons ensuite pour objectif d'appliquer cette technique sur une configuration de canal interaube, en adoptant une formulation qui nous permet de mettre en évidence l'importance de l'allongement, du nombre d'aubes sur les effets pleinement tridimensionnels.

Enfin, les résultats obtenus a partir, d'une part, des modèles quasi-tridimensionnels existants préalablement à nos travaux, et d'autre part du modèle tridimensionnel créé sont présentés et comparés. Une confrontation résultats numériques - résultats exprimentaux est ensuite proposée.

Chapitre II

FORMULATION - PROBLEME DE STABILITE

1 - EQUATIONS LOCALES

1-1. Introduction - Paramétrage

La formulation du problème à partir de deux fonctions de courant définissant deux surfaces de courant, est couramment utilisée /45-46/ car elle permet par la vérification systématique de l'équation de continuité et l'utilisation directe de l'intégrale première de l'énergie, de réduire à deux le nombre d'inconnues principales. De plus, la signification des équations, destinées à accorder sur une surface : tourbillon et champ de lignes de courant, permet un rapprochement aisé avec le cas plan.

Sans remettre ces avantages en cause, il est possible de se référer à des surfaces voisines des surfaces de courant, présentant notamment une symétrie de révolution. C'est pourquoi la première fonction de courant $\chi(r, \theta, z)$, à valeur constante sur S_2 et à ligne de source radiale est exprimée sous la forme /31/

$$I.a \quad \chi(r, \theta, z) = \chi_0(r, z) + \theta + \sigma \zeta(r, \theta, z)$$

, où $\zeta(r, \theta, z)$ est une perturbation hors moyenne, et σ un paramètre caractérisant l'allongement de l'aube ou encore l'inverse du nombre d'aubes à solidité constante (le pas et la profondeur axiale b restent proportionnels).

Ce paramètre auquel on affecte la valeur b/r_0 , où r_0 caractérise la hauteur totale de l'aubage, n'est pas vital pour la suite, mais permet de mettre en évidence le rôle joué par le nombre d'aubes sur l'importance des dépendances radiales.

Le changement de variable azimutal :

$$\theta \rightarrow y = \frac{\chi_0 + \theta}{\sigma} \quad \text{et} \quad k = \frac{\chi_0}{\sigma},$$

ramène la surface de courant : $\theta + \chi_0 = \text{cste}$ dans le plan méridien.

Un deuxième changement de variable, plus spécialement adapté à une machine axiale: $x = z/b$ conserve la solidité de l'aubage initial. Les nouvelles coordonnées y et x sont à l'échelle de l'aubage et remplacent θ et z dans la perturbation.

La deuxième fonction de courant $\psi(r, \theta, z)$, à valeur constante sur S_1 , et à ligne de source circulaire est mise sous la forme :

$$Ib \quad \psi(r, \theta, z) = \psi_0(r, z) + \sigma \phi(r, y, x)$$

dans laquelle ϕ est une perturbation à moyenne circonférentielle nulle.

Ce paramétrage, et ces doubles coordonnées permettent d'adapter l'échelle au phénomène, qu'il concerne globalement la machine, ou plus localement l'aubage.

1-2. Hypothèses

Ce sont essentiellement des hypothèses d'allégement des équations qui ne dégénèrent pas le problème, car elles laissent subsister la nécessité de prendre en compte la totalité des conditions aux limites pour que le problème soit bien posé.

Elles sont de deux ordres, les premières sont basées sur les particularités géométriques de la machine et de l'aubage.

La machine étant axiale, on suppose (sans le négliger) que dans l'aubage le terme $\frac{\partial \psi_0}{\partial z}$ est petit devant $\frac{\partial \psi_0}{\partial r}$. D'autre part, l'aubage étant proche d'un hélicoïde à pas non uniforme, on suppose (sans négliger son gradient) que le terme $\frac{\partial \chi_0}{\partial r}$ est faible devant $\frac{\partial \chi_0}{\partial z}$.

La contribution du produit de ces deux termes est négligée, soit :

$$\left| \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \chi_0}{\partial z} \right|$$

On suppose par ailleurs que bien que la vitesse radiale puisse varier de façon non négligeable de l'entrée à la sortie de l'aubage, la fonction de courant ψ_0 est décrite dans les coordonnées (r, z) .

Viennent en second les hypothèses de linéarisation ; les termes tels que ϕ^2 , ϵ^2 , $\phi\epsilon$ et leurs dérivées sont négligés, bien qu'ils pourraient être pris en compte dans les seconds membres.

Enfin, les conditions de glissement sont linéarisées alors que là aussi une correction serait facilement envisageable.

Ces hypothèses sont justifiées par l'objectif que nous nous fixons de dégager un moyen de stabiliser le couplage S1 - S2. Elles le seront aussi par leur faible portée sur les résultats numériques.

1.3 - Mise en équations

La vitesse relative, \vec{W} mise sous la forme :

$$\text{II} \quad \vec{W} = \vec{\nabla} \psi \wedge \vec{\nabla} \chi$$

satisfait l'équation de continuité. Ses composantes sont suivant r, θ, z :

$$\text{III} \quad \begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{1}{r r_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} , \\ \frac{\Gamma r}{r} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \sigma \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) , \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial y} , \end{cases}$$

$$T_r = -r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \chi_0}{\partial z}$$

et le rotationnel absolu $\vec{\omega}_\lambda$ a pour composantes :

$$\begin{aligned}
 \text{IVa} \quad \omega_{A_r} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial z} + \frac{1}{br_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(\lambda^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \left(\frac{1}{r_0 b} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right. \\
 & + \frac{1}{r_0} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \left. \right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial y} \right) \\
 & - \frac{b}{r_0} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial y} \lambda^2 - \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial r} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial x} + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \lambda^2 = \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{IVb} \quad \omega_{A_\theta} = & -\frac{1}{r} E(\psi_0) \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial y} - \frac{1}{br} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x} - \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\
 & - \frac{1}{br r_0} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) - \frac{b}{r_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IVc} \quad \omega_{A_z} = & \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{1}{rr_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| - br \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \frac{r_0}{br^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \\
 & + \frac{1}{br^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{b}{rr_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{où } E(\psi_0) = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) ; \text{ et } \Gamma_A = -r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \chi_0}{\partial z} + \omega_0 r^2$$

avec Γ_A : circulation moyenne absolue et ω_0 vitesse de rotation de l'aubage.

L'équation d'EULER écrite pour un écoulement relatif stationnaire de fluide parfait :

$$\vec{\omega}_A \wedge \vec{W} = -\vec{\nabla} H_R$$

où H_R est la rothalpie : charge relative augmentée du potentiel centrifuge

$$H_R = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} W^2 - \frac{\omega_0^2 r^2}{2},$$

ou encore à partir de la charge absolue $H_A = p/\rho + v^2/2$

$$H_R = H_A - \omega_0 \Gamma_A$$

De V , on peut tirer la composante suivant la vitesse

$$\vec{\nabla} H_R \cdot \vec{W} = 0$$

qui s'intègre en :

$$H_R = H_R(\psi, \chi)$$

En stationnaire, cette intégrale première traduit l'absence d'échange d'énergie d'une particule à l'autre par transvasement. La rothalpie est définie par les valeurs qu'elle prend dans le domaine source supposé axisymétrique.

Nous avons donc :

$$\frac{\partial H_R}{\partial \chi} = 0,$$

et après linéarisation

$$\frac{\partial H_R}{\partial \psi} = \frac{\partial H_R}{\partial \psi_0} + \frac{\partial^2 H_R}{\partial \psi_0^2} \phi + O(\phi^2)$$

La projection de V perpendiculairement à la vitesse permet d'écrire /45/ compte tenu de la distribution de H_R

$$\text{VI.a} \quad \vec{\omega}_A \cdot \vec{\nabla} \psi = 0$$

$$\text{VI.b} \quad \vec{\omega}_A \cdot \vec{\nabla} \chi = - \frac{dH_R}{d\psi_0} - \frac{d^2 H_R}{d\psi_0^2} \phi$$

Après substitution des composantes IV.a,b,c du rotationnel et de I, il apparaît au premier membre de VIa différentes contributions. L'équation VIa s'écrit alors

$$\text{VII} \quad F_0 + A(\zeta, \frac{\partial k}{\partial x}) + B(\zeta) + c(\phi) + D(\phi),$$

où * F_0 est le terme de force moyenne due à la déviation

$$F_0 = \frac{b}{r} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial z} \right),$$

* $A(\zeta, \frac{\partial k}{\partial x})$ est l'opérateur typique de grille :

$$A(\zeta, \frac{\partial k}{\partial x}) = r_0 W_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right);$$

où W_0 est la vitesse moyenne relative.

* $B(\zeta)$ est un terme prenant en compte le fait que la traversée à rayon constant des surfaces de courant modifie la quantité de mouvement, et introduit une force complémentaire s'ajoutant à F_0 . Ce terme dépend essentiellement de la vitesse

radiale moyenne $(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z})$;

$$\begin{aligned}
B(\zeta) = & \sigma \left\{ \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) \right) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial x} + \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \dots + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \right) \right\} + \sigma^2 r_0 \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right\}
\end{aligned}$$

* $C(\phi)$ est le terme prenant en compte l'effet de torsion induit par l'autre fonction (ψ) de courant, c'est le terme principal de couplage entre les deux perturbations

$$C(\phi) = \frac{\sigma}{r_0} \lambda^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial y}$$

*Et enfin, on trouve dans $D(\phi)$ des termes complémentaires de couplage prenant diversement en compte les effets de déviation circonférentielle et radiale et aussi (souligné) la force due à l'effet de survitesse ($\frac{\partial \phi}{\partial r}$) dans la déviation ($\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}$)

$$\begin{aligned}
D(\phi) = & \frac{\sigma}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \frac{2\sigma}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
& + \sigma \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \right) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \\
& \sigma^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial k}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right\}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, nous obtenons :

$$\text{VIII} \quad \frac{b}{r} \left(-\frac{1}{r} E(\psi_0) + \frac{\partial \chi_0}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial z} \right) + P(\phi) + Q(\zeta) + R(\zeta) = - \frac{dH_R}{cl\psi_0}$$

* $P(\phi)$ est l'opérateur local d'équilibre radial:

$$P(\phi) = - \frac{1}{r^2 r_0} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma^2 \left[-r \frac{\partial \phi}{\partial r} \left(\frac{r_0^2}{r^2} - \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial k}{\partial x} \right) \right) + \lambda^2 r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right] \right\} + \sigma \phi \frac{\partial^2 H_R}{\partial \psi_0^2}$$

* $Q(\zeta)$ est le terme principal de couplage par l'effet de torsion de l'autre surface de courant χ .

$$Q(\zeta) = - \frac{\sigma}{r_0} \lambda^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial y}$$

* Enfin $R(\zeta)$ est un terme regroupant diverses contributions secondaires :

$$R(\zeta) = - \frac{\sigma}{r_0} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) - \frac{r_0}{r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial x} - \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right\} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x} + \sigma^2 \frac{\partial k}{\partial x} \left\{ \left(2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right\} - 2\sigma \omega_0 \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Pour déterminer $\chi_0(k)$, ψ_0 , ζ , ϕ , outre les équations

locales VII et VIII, il faut écrire que $\int_y \zeta dy$ et $\int_y \phi dy$ sont nulles. Ceci s'exprime directement pour VIII, qui peut être moyennée suivant y , ce qui revient à écrire l'équilibre moyen méridien soit:

$$\text{IXa} \quad E(\psi_0) = r \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial z} \right) + \frac{r^2}{b} \frac{dH_R}{d\psi_0}$$

et l'équation d'équilibre "radial" local:

$$\text{IXb} \quad P(\phi) + Q(\zeta) + R(\zeta) = 0$$

L' équation d'équilibre radial moyen peut encore s'écrire:

$$\bar{P}(\psi_0) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi_0}{\partial z} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - 2\omega_0 \frac{\partial \chi_0}{\partial z} - \frac{dH_R}{d\psi_0} \right)$$

où l'opérateur $\bar{P}(\psi_0) = -\frac{1}{r^2 r_0} (E(\psi_0) + r \frac{\partial \chi_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \chi_0}{\partial z}))$ est a

rapprocher de $P, \bar{P}(\cdot) = \frac{1}{b^2} P(\cdot)$, avec P , opérateur d'équilibre radial local .

On vérifie que les équilibres radiaux : moyen et local, sont régis par des opérateurs très voisins.

La même technique peut être utilisée pour VII hors aubage, mais du fait des discontinuités dues aux aubes, il faut dans l'aubage écrire explicitement $\int_y \delta dy = 0$ et la conserver dans son intégralité.

1.4 - Cas limite à grand nombre d'aubes

Dans le cas d'un grand nombre d'aubes de grand allongement, le paramètre σ tend vers zéro, les problèmes limites obtenus correspondant à VII et IXb sont le problème de grille quasi plane régi par :

$$X \quad F_0 + A(\zeta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0$$

et le problème parabolique pour ϕ , ou les effets d'extrémité d'aubes n'apparaissent plus

$$XI \quad \frac{1}{r^2 r_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x} = 0$$

Ces problèmes sont "faiblement" couplés par la vitesse radiale, et peuvent être découplés par substitution, en partant de la forme intégrée de XI suivant x :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -r_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + br_0 \int_0^x \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx$$

où on a supposé que l'amont n'est pas perturbé.

Le premier terme du second membre de cette relation annule la contribution de la vitesse radiale dans $A(\xi, \frac{\partial k}{\partial x})$, ce qui pour X nous ramène effectivement à un opérateur de grille plane en écoulement plan. Quant au second terme, son estimation peut se faire en supposant que dans la géométrie limite ($\sigma \rightarrow 0$), les dérivées $\frac{\partial \psi_0}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2}$ varient peu du bord d'attaque au bord de fuite et que $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ peut être tiré de IX.a dont on a retenu au second membre que le premier terme. Le terme peut être approché par sa valeur moyenne obtenue par intégration suivant y (voir la grille d'aubes) ce qui donne :

$$\frac{\lambda^2}{\bar{B}} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2}, \text{ où } \bar{B} \text{ est la distance d'aube à aube dans}$$

l'échelle y.

Globalement le terme estimé est après majoration de l'ordre de :

$$\sigma \left| \frac{r_0^2 r \lambda^2}{\bar{B}} \left(\frac{\partial \chi_0}{\partial z} \right)_{\text{maxi}} \int_0^z \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} d\xi \right|,$$

c'est à dire d'ordre 1 en σ , il peut donc être négligé.

Le problème limite est donc bien un problème de grille plane régi par :

$$r_0 (W_z^2 + W_\theta^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{r^2}{r_0} W_z^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + F_0 = 0$$

associé à un problème parabolique en ϕ (XI) donnant entre autre la discontinuité de direction de vitesse sur le sillage.

Il n'y a donc dans ce cas limite ni couplage, ni problème de stabilité.

1.5 - Cas d'un petit nombre d'aubes

C'est le cas général et c'est celui auquel nous allons nous intéresser dans toute la suite. Tous les termes sont alors à considérer, les trois dépendances (r, θ, z) apparaissent dans les équations. Les problèmes peuvent néanmoins conserver leur caractère bidimensionnel si les termes à dépendance non adaptée aux conditions aux limites propres aux problèmes sont rejetées dans les seconds membres.

Cela donne pour le problème de grille, une équation elliptique en (θ, z)

$$\text{XII} \quad A(\zeta, \frac{\partial k}{\partial x}) = -F_0 - C(\phi) - S_\zeta(\zeta, \phi) ; \quad S_\zeta(\zeta, \phi) = B(\zeta) + D(\phi)$$

et pour le problème de vrille une équation elliptique en (r, z)

$$\text{XIII} \quad P(\phi) = -Q(\zeta) - S_\phi(\zeta) ; \quad S_\phi(\zeta) = R(\zeta)$$

La résolution de chacun de ces problèmes ne pose pas de difficultés, lorsque les seconds membres sont donnés. Par contre, comme nous l'avons vu précédemment /31/, leur couplage

est instable, quelque soit l'importance et le type de modération imposée aux accroissements.

Nous nous donnons pour objectif de résoudre le problème de stabilité du couplage S1 - S2.

2. STABILITE - CONDITIONS AUX LIMITES

2.1 - Quelques remarques sur le type d'instabilité

On a pu constater /32/ qu'une grande finesse de discrétisation des équations et des conditions aux limites n'améliore pas sensiblement la stabilité. L'instabilité n'est donc pas liée à la discrétisation.

Par ailleurs, il ne semble pas d'après nos propres essais /31/ que l'on puisse imputer l'instabilité à la modélisation de la condition de KUTTA, et à l'influence sur la déviation de l'erreur de vitesse locale due au fait que l'état stable du couplage n'est pas atteint. Dans l'instabilité numérique, le bord de fuite n'apparaît pas comme une zone particulièrement instable, le mode divergent prend une allure exponentielle allant en croissant vers le plan de sortie du domaine qui peut être assez éloigné des bords de fuite. Ajoutant à cela le fait que le phénomène a approximativement pour longueur d'onde axiale la longueur du domaine, et que transversalement la solution est d'allure correcte, on est amené à mettre en cause l'influence dans le couplage des termes à dépendance axiale et plus particulièrement le rôle des conditions aux limites d'entrée et de sortie.

Ces conditions aux limites ont une grande importance dans l'appréciation du fait que le problème de l'écoulement dans

une veine est bien posé. Elles imposent les conditions dans lesquelles la veine est alimentée ou débitée, et ont pour fonction de transmettre des informations de l'extérieur vers l'intérieur en simulant au besoin le comportement du fluide hors du domaine d'intégration.

Dans ces conditions aux limites se trouvent des données globales portant sur des grandeurs telles que la contre pression, l'enthalpie génératrice ou le débit, et des contraintes locales sur le champ de vitesse, ou de pression. Ces dernières particulièrement destinées à définir le champ à l'entrée (ou à la sortie) peuvent inclure indistinctement des perturbations typiquement irrotationnelles dont l'influence s'atténue assez rapidement comme celle des fonctions de GREEN associées aux opérateurs elliptiques rencontrés, et aussi des contributions tourbillonnaires dont la portée s'étend, en l'absence de diffusion, à tout le domaine. Dans les conditions aux limites d'un problème bien posé, les contributions tourbillonnaires doivent être des données, alors que les perturbations irrotationnelles peuvent être régies par des hypothèses portant par exemple sur le champ de pression. Nous avons donc à associer un problème de stabilité globale à un problème de données et de conditions bien posées pour un écoulement interne tridimensionnel.

L'étude de la stabilité avec prise en compte des différents effets possibles, de même que l'étude de la portée des conditions aux limites nous paraissant de prime abord très difficile dans le cas de la turbomachine, nous nous sommes tout d'abord intéressés à un cas à géométrie beaucoup plus simple. C'est celui d'une conduite rectangulaire de longueur infinie dans un premier temps, avec bord de fuite dans un deuxième temps. Il est plus aisé dans une telle configuration de définir une condition de "non instabilité certaine" du couplage S1 - S2 et de discuter des conditions aux limites.

2.2 - Écoulement dans une conduite, formulation

2.2.1 - Equations locales

L'écoulement est supposé quasiment uniforme, faiblement perturbé par une distribution de rotationnel à composante axiale ω_z uniforme et donnée dans le plan d'entrée. La charge est elle aussi supposée uniforme.

Le champ de vitesse est décrit par deux fonctions de courant ψ et χ correspondant respectivement aux surfaces de courant $S1 - S2$.

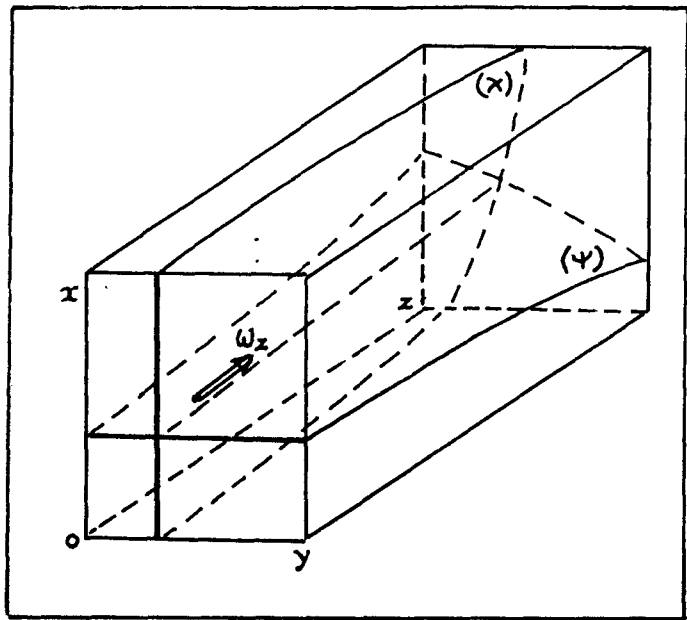


Fig 5. -Écoulement de conduite
Surfaces et fonctions de courant.

La vitesse est :

$$\vec{W} = \vec{\nabla} \psi \wedge \vec{\nabla} \chi$$

Les lignes de source de ces surfaces sont données dans le plan d'entrée par les droites (fig. 5)

$$x = \psi \quad , \quad y = \chi$$

ce qui impose une vitesse débitante W_z uniforme. Les surfaces $S1 - S2$ restant proches par hypothèse des plans $(y \text{ o } z)$ et $(x \text{ o } z)$, les fonctions de courant peuvent être posées comme :

$$\psi = x + \phi(x, y, z) \quad ; \quad \chi = y + \zeta(x, y, z)$$

où ϕ et ζ sont des perturbations supposées suffisamment petites pour permettre une linéarisation complète du problème.

La vitesse et le rotationnel ont pour composantes linéarisées :

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} -\phi'_z \\ -\zeta'_z \\ 1 + \zeta'_y + \phi'_x \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \text{rot } \vec{W} = \begin{pmatrix} \zeta''_{zz} + (\zeta'_y + \phi'_x)'_y \\ \phi''_{zz} - (\zeta'_y + \phi'_x)'_x \\ \frac{\partial}{\partial z} (\phi'_y - \zeta'_x) \end{pmatrix}$$

Les équations d'EULER prennent une forme linéarisée analogue à celle obtenue en turbomachine :

- les équations correspondant aux équations VII et VIII, régissant le rotationnel transversal:

$$\text{XIV.a} \quad \Delta_{yz} \zeta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{XIV.b} \quad \Delta_{xz} \phi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{où } \Delta_{xz} \text{ est l'opérateur } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ et } \Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- et l'intégrale première

$$H_R = H_0(\psi, \chi)$$

où ici H_0 est uniforme dans le plan de source.

On peut ainsi obtenir à partir de XIV.a et b

$$\text{XV} \quad \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} = 0 ,$$

ce qui implique que la composante axiale du rotationnel ω_z est uniforme.

$$\text{XVI} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\phi'_y - \zeta'_x) = \omega_{z_0} .$$

2.2.2 - Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont de deux types:

- les conditions de glissement sur les parois qui sont triviales
- les conditions aux limites aux extrémités amont et aval de la conduite.

En ce qui concerne les conditions amont, on choisit de se donner:

- la vitesse débitante
- la composante axiale de la vorticité
- la pression en un point
- et H_0

Dans le plan de sortie, on suppose que le gradient axial de pression est donné en tout point.

On montre que ces conditions sont suffisantes pour déterminer l'écoulement, non redondantes, et permettent de résoudre le système XIV de façon itérative.

Dans une première étape, nous étudions le comportement des solutions analytiques, ce qui est justifié par le fait que, comme nous l'avons déjà signalé, les instabilités ne sont pas dues à la discrétisation des opérateurs.

2.2.3 - Solutions analytiques pour une conduite de longueur infinie

Les conditions aux limites sont :

- XVII - a sur les parois $\phi = 0$ pour $x = 0, x = a$
 $\zeta = 0$ pour $y = 0, y = b$
- b à l'entrée $\phi = 0 ; \zeta = 0$ pour $z = 0$
- c dans un plan d'abscisse z_0 : $w_z = w_{z_0}$
- d Condition complémentaire à définir correspondant à une donnée sur le champ à l'entrée ou à la sortie et modélisant le comportement extérieur à la veine.

Nous pouvons trouver deux types de solutions satisfaisant au moins XVII.a,b, elles seront rotationnelles ou irrotationnelles.

Solutions rotationnelles

La forme de XIV nous indique des solutions analytiques immédiates respectant XVII.a, b, c :

$$\text{XVIII} \quad \phi = \sum_{n,m} \phi_{nm} z \sin \alpha_n x \cos \beta_m y$$

$$\zeta = \sum_{n,m} \zeta_{nm} z \cos \alpha_n x \sin \beta_m y$$

où $\alpha_n = \frac{\pi n}{a}$, $\beta_m = \frac{\pi m}{b}$, avec m, n impairs. Elles conduisent pour ω_z à un développement tel que :

$$\text{XIX} \quad \omega_z = \sum_{n,m} (\zeta_{nm} \alpha_n - \phi_{nm} \beta_m) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y$$

Par ailleurs, le système XIV se réduit à :

$$\text{XX} \quad \zeta_{nm} \beta_m + \phi_{nm} \alpha_n = 0,$$

ce qui, avec la donnée de ω_z (ce sera XVII.c) permet d'écrire :

$$\zeta_{nm} = \frac{16\omega_z 0}{\pi^2 nm} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$$

XXI

$$\phi_{nm} = - \frac{16\omega_z 0}{\pi^2 nm} \frac{\beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2}$$

Cette première solution est donc parfaitement déterminée par les conditions XVII.a, b, c. Les composantes transversales de $\vec{\omega}$ sont, compte tenu de XX, nulles.

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

Solutions irrotationnelles

D'autres solutions non linéaires en z peuvent être envisagées, telles que :

$$\phi^* = \sum_{n,m} \phi_{nm}^* \exp(\gamma_{nm} z) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y$$

XXII

$$\zeta^* = \sum_{n,m} \zeta_{nm}^* \exp(\gamma_{nm} z) \cos \alpha_n z \sin \beta_m y ,$$

Compte tenu de l'équation caractéristique :

$$\text{XXIII} \quad \alpha_n^2 + \beta_m^2 = \gamma_{nm}^2 ,$$

Le système XIV se réduit à :

$$\text{XXIV} \quad \alpha_n \zeta_{nm}^* - \beta_m \phi_{nm}^* = 0$$

La composante suivant z du rotationnel correspondant à cette solution:

$$\omega_z^* = \gamma_{nm} \exp(\gamma_{nm} z) (\alpha_n \zeta_{nm}^* - \beta_m \phi_{nm}^*) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y$$

est donc nulle, ainsi que les composantes transversales.

En effet :

$$\omega_x^* = \sum \{ \zeta_{nm}^* (\gamma_{nm}^2 - \beta_m^2) - \alpha_n \beta_m \phi_{nm}^* \} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y$$

soit, avec XXIII :

$$\omega_x^* = 0, \text{ de même } \omega_y^* = 0,$$

La solution XXII pouvant vérifier elle aussi la condition XVII.b, n'affecte pas l'ensemble des données et des conditions utilisées jusqu'ici et ne peut donc être déterminée.

Il nous faut donc définir une condition locale permettant de préciser l'écoulement à l'entrée (ou à la sortie). Pour cela nous nous intéressons à l'évolution suivant z de la pression au voisinage du plan de donnée, à partir de

$$\text{XXV} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial z} (\zeta'_y + \phi'_x)$$

dans laquelle la contribution des solutions du type XVIII est du fait de XX nulle.

Nous étant assuré qu'une association des deux types de solutions, telle que par exemple :

$$\phi = \sum_{n,m} (\phi_{nm} z + \{\phi_{nm}^* \exp(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} z) + \phi_{nm}^{*2} \exp(-\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} z)\} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y)$$

n'est compatible avec l'ensemble des équations XXIV et XVII.b, que si l'origine est en $z = 0$, nous obtenons pour la contribution de XXII :

$$\text{XXVI} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^* = \sum \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} (\beta_m \zeta_{nm}^* + \alpha_n \phi_{nm}^*) \text{Ch}(\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} z) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y$$

On voit qu'il est possible avec la donnée des composantes de FOURIER de $\frac{\partial p}{\partial z}$ et de XXIV, de calculer les coefficients ϕ_{nm}^* , ζ_{nm}^* . La solution est alors parfaitement identifiée, et ceci indépendamment de la position du plan de donnée de $\frac{\partial p}{\partial z}$

Il est ici important de remarquer d'après XXVI que, pour qu'une perturbation irrotationnelle ait une influence allant en décroissant à partir du plan de donnée, il est nécessaire que ce plan soit le plan de sortie ou opposé au plan de donnée des lignes de source ou plus précisément au plan de donnée de la vitesse débitante.

Résumé sur les conditions aux limites de conduite

On retient donc l'indication qu'un problème stationnaire numériquement bien posé comporte essentiellement :

- * la donnée dans le plan d'entrée (ou de sortie) de la vitesse débitante.
- * la donnée dans le plan de sortie du gradient axial du champ de pression
- * et enfin la donnée dans l'un ou l'autre plan de la composante du rotationnel suivant z . (cette grandeur est régie par une équation de transport, réduite ici à XV c'est ce qui justifie le fait que le choix du plan soit arbitraire).

Le problème est maintenant de traduire ces résultats analytiques en termes de conditions aux limites dans le cadre du processus général d'intégration des équations sur $S_1 - S_2$, en remarquant que le calcul des coefficients ϕ_{nm}^* et ζ_{nm}^* à partir de XXV et de la condition XVII.c revient à calculer dans un plan $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ connaissant $\frac{\partial P}{\partial z}$ et ω_z .

2.2.4 - Conditions aval discrétisées pour l'intégration numérique directe

Afin d'équilibrer la discrétisation des conditions amont et aval dans le problème numérique, nous associons la prise en compte du rotationnel suivant z , à la donnée du gradient axial de pression dans le plan de sortie. Cela nous permet de définir pour les grandeurs dépendant de x et y :

$$F = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=z_1} \quad Z = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_{z=z_1}$$

un problème elliptique régi par :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=z_1}$$

XXVII

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} = \omega_{z_0}$$

avec les conditions aux limites détaillées sur la figure 6.

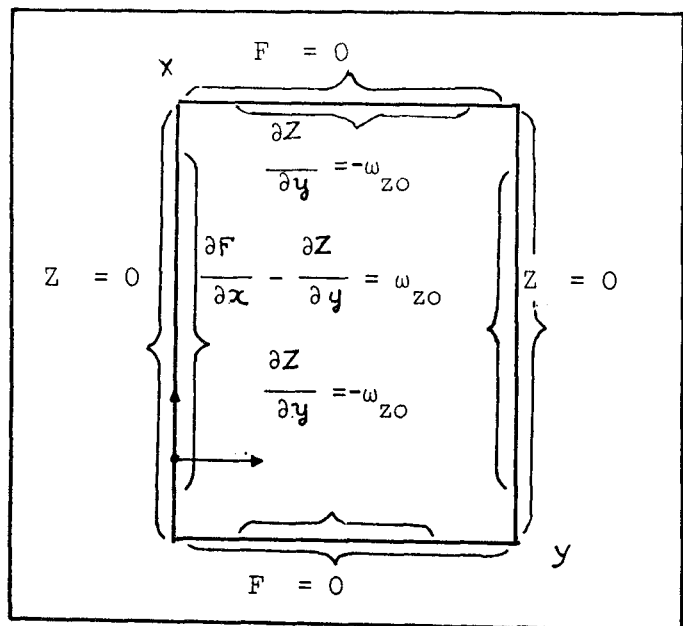


Fig 6. -Résumé des conditions aux limites pour le problème de l'écoulement de sortie.

Ce "troisième" problème, dans lequel Z et F , composantes transversales de la vitesse sont calculées comme dans le cas d'un écoulement plan à termes de source et tourbillonnaire donnés, "initialise" l'écoulement secondaire dans le plan de sortie. Sa résolution donne des conditions de NEUMANN permettant d'identifier une solution unique au problème de l'écoulement tridimensionnel dans la conduite lorsque conformément aux hypothèses, les effets non linéaires dus aux termes convectifs sont limités.

Sur le plan numérique, le calcul de la solution se fait par approximations successives des perturbations ϕ et ζ dans un processus itératif limitant la taille du problème. On peut supposer que cela ne remet pas en cause les conclusions obtenues sur l'unicité de la solution. Par contre, la stabilité du processus, et les conditions dans lesquelles les modes instables peuvent être effacés, ne sont pas acquises.

2.2.5 - Processus itératif - Stabilité

Processus

La méthode itérative a pour but de ramener le problème elliptique tridimensionnel de taille importante à une suite de problèmes bidimensionnels localement consistants et prenant en compte l'ensemble des conditions aux limites. La première idée est évidemment d'intégrer sur trois plans, et on peut voir en (§ 2.2.6) ce que cela donne, mais la forme du problème et surtout des conditions aux limites permet de se satisfaire de deux plans (xz et yz, fig. 5). Le système XIV peut être utilisé de la manière définie par :

$$\Delta_{yz} \zeta^{k+1} + \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial x \partial y} = 0$$

XXVIII

$$\Delta_{xz} \phi^{k+2} + \frac{\partial^2 \zeta^{k+1}}{\partial x \partial y} = 0 ,$$

qui admet XVII.a, b comme conditions aux limites. Elles sont complétées dans le plan de sortie (z_1) par les données précisées dans (§ 2.2.4)

$$\text{XXIX} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=z_1}^k = F(x, y) \quad ; \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_{z=z_1}^k = Z(x, y) .$$

Le calcul de F et Z se fait hors processus de manière à verrouiller par cette condition le transfert de ω_z de l'une sur l'autre des fonctions de courant.

Il se pose les problèmes de stabilité locale liée à la discrétisation des opérateurs, et de stabilité globale, liée dans le cas présent à la forme des conditions aux limites.

Stabilité locale

Nous prenons une discrétisation de type différences finies classique étalée sur 3 x 3 points. La stabilité locale au sens de NEUMANN est alors immédiate. En appelant ρ le coefficient d'amplification des composantes de FOURIER, on peut obtenir de XXVIII :

$$\rho < \cos^2 \frac{\Pi \Delta x}{2kx} \cos^2 \frac{\Pi \Delta y}{2ky}$$

où kx , ky sont les nombres d'ondes en x et y de la composante étudiée, et Δx , Δy les pas du maillage.

Il y a donc stabilité locale pour XXVIII.

Stabilité globale

L'étude de la stabilité à partir des solutions du type

$$\phi = f(z) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y$$

XXX

$$\zeta = g(z) \cos \alpha_n z \sin \beta_m y$$

est pour plusieurs raisons assez laborieuse. D'une part, les composantes de FOURIER de la solution s'amplifient avec des gains différents, alors que les conditions XVII.b et XXIX portent sur l'ensemble de la solution. D'autre part, chaque intégration en z produit des solutions d'équations sans second membre qui dans les itérations suivantes donnent des termes tels que :

$$P_K(z) \exp(\alpha_n z)$$

où $P_K(z)$ est un polynôme dont le degré croît à chaque itération.

C'est pourquoi l'étude de la stabilité est menée à partir d'une intégration numérique suivant z des équations XXVIII écrites pour des solutions XXX. Ce qui donne :

$$g_{z^2}^{n,k+1} - \beta_m^2 g^{k+1} = \alpha_n \beta_m f^k$$

XXXI

$$f_{z^2}^{n,k+2} - \alpha_n^2 f^{k+2} = \alpha_n \beta_m g^{k+1}$$

L'étude de la stabilité revient à déterminer numériquement la plus grande valeur propre de la matrice transformant le vecteur f_k en f_{k+2} , en fonction des paramètres $\alpha_n L$ et $\beta_m L$ où L est la longueur du domaine d'intégration.

Résultats

Les valeurs propres se sont avérées être inférieures à l'unité, avec une asymptote à 1 lorsque αL et βL deviennent grands. Les valeurs les plus faibles sont obtenues lorsque αL et βL sont minimums. Les conditions de sortie sont donc bien adaptées au problème de stabilité globale lorsque des modes à

petit nombre d'ondes sont impliqués. Reste à voir ce qu'elles donnent lorsque l'intégration numérique est bidimensionnelle.

2.2.6 - Intégration Numérique

Intégration numérique dans le plan de sortie d'une conduite longue

Bien que l'on puisse formuler le problème en termes de fonctions de courant, ce qui peut présenter certains avantages, nous allons par continuité avec l'étude analytique, paramétrer ce problème en termes de vitesses (ici Z et F).

Nous supposons que $(\frac{\partial p}{\partial z})_{z=z_1} = 0$, et que le rotationnel est uniforme dans le plan $z=z_0$ et par conséquent dans le plan $z=z_1$ (XV), et nous réécrivons XXVII sous la forme découplée :

$$\text{XXXII} \quad \Delta_{xy} (F) = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0 ; \Delta_{xy} Z = - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0$$

et discrétisée en différences finies, avec les conditions aux limites récapitulées sur la figure 6. Dans les coins, la discrétisation des conditions est redondante, la priorité est donnée à la condition de glissement (fig. 7). Le rotationnel est donc incontrôlé dans la zone occupée approximativement par la maille de coin. Cette erreur diffuse dans toute la section. En effet, partant de la solution de XXXII qui nous permet d'écrire (en supposant que l'opération de dérivation numérique est commutative):

$$\Delta_{xy} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \Delta_{xy} \omega_z$$

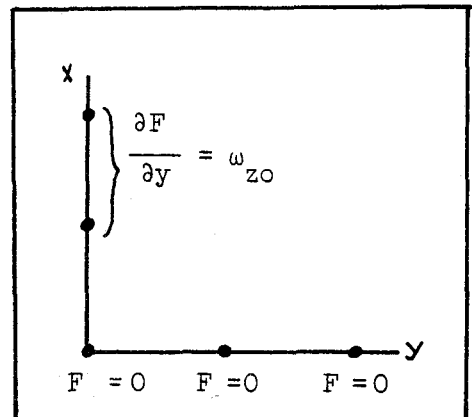


Fig 7. -Prédominance de la condition de glissement dans les coins.

Nous constatons que nous identifions bien par intégration ω_z à $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x}$ dans la mesure où ces deux grandeurs ont même conditions à la frontière. Ce qui n'est pas le cas dans les coins où

$$\omega_z = \omega_{z_0}, \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

On a donc dans la solution un tourbillon parasite solution du problème discrétisé :

$$\Delta xy \omega_z^* = 0, \quad \omega_z^* = 0 \text{ sur la frontière sauf dans les coins où}$$

$$\omega_z^* = -\omega_{z_0}$$

C'est ce qui justifie les distributions du type de celle de la figure 11.b. Ce phénomène est à l'échelle du maillage, il n'empêche pas la convergence sur l'ensemble du domaine lorsque le pas tend vers zéro et on peut donc accepter la présence de ce coin limite numérique.

Intégration dans le plan de sortie à l'aval des bords de fuite

Une partie de la paroi latérale parallèle à (xoz) est supprimée (fig. 8). Les conditions de glissement sur ces parois sont remplacées par des conditions de périodicité et de conservation à l'échelle d'un canal de la quantité de mouvement suivant la direction y qui, compte tenu des hypothèses et de la linéarisation se réduit à :

$$\text{XXXIII} \quad \frac{\partial}{\partial z} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dy = 0$$

Nous supposons aussi que la partie cloisonnée de la conduite est longue, sans bords d'attaque, et qu'il n'y a pas de déviation dans la conduite, ce qui écarte, pour l'instant, le problème de grille d'aubes. Enfin, extrapolant au cas présent, le fait que la pression était dans le cas précédent égale sur deux faces opposées (suivant y) du conduit, on admet que la quantité de mouvement transversale est nulle dans la conduite, et le reste à l'extérieur, soit :

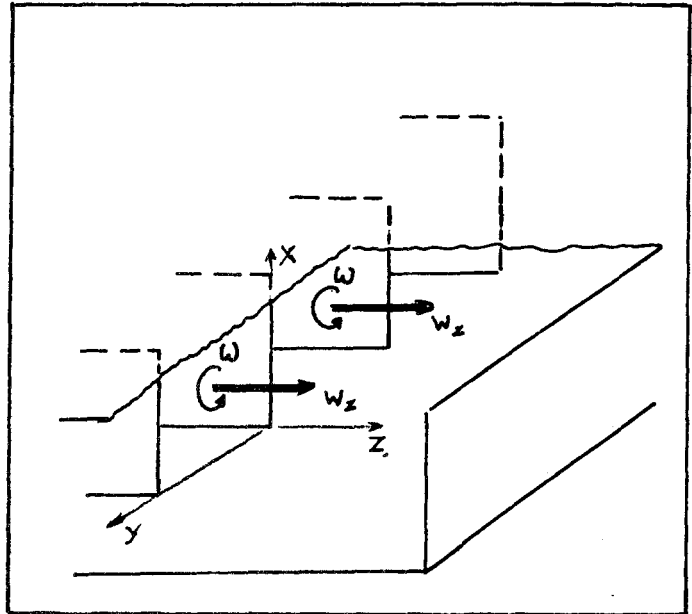


Fig 8. -Exemple traité de configuration avec sillage.

$$\text{XXXIV} \quad \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} dy = 0 \quad \left(\text{on rappelle que } \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)_{z=z_1} = z \text{ §2.2.2} \right)$$

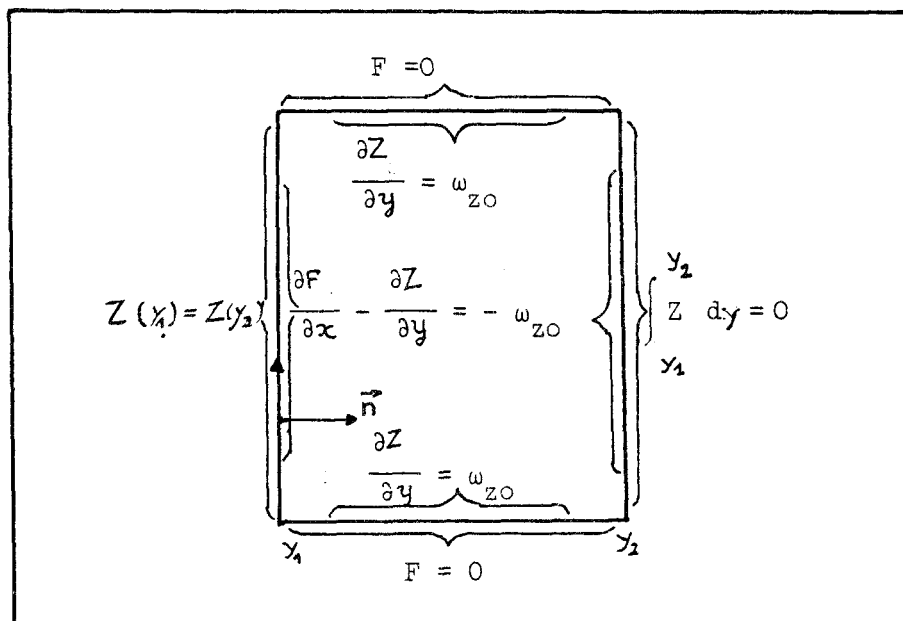


Fig 9. -Resumé des conditions aux limites pour l'écoulement de sortie de conduite avec sillage.

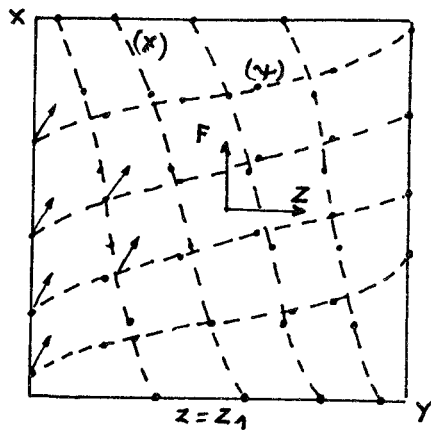


figure 10.a

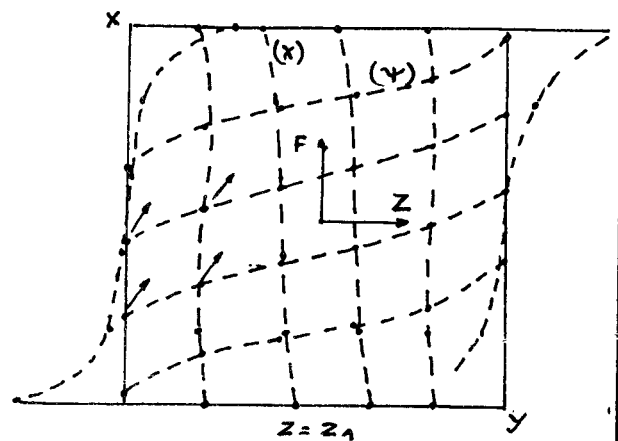


figure 10.b

Fig 10.a,b -Allure des surfaces de courant dans le plan de sortie.

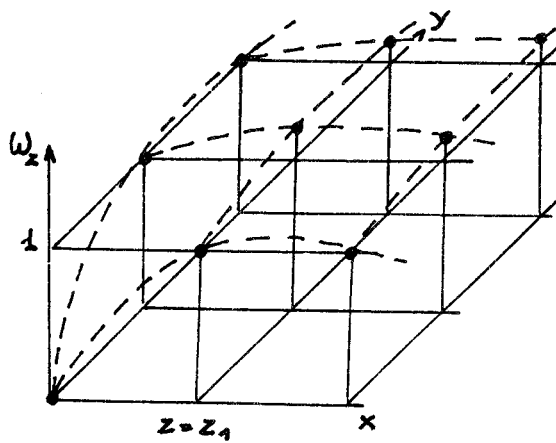


figure 11.a

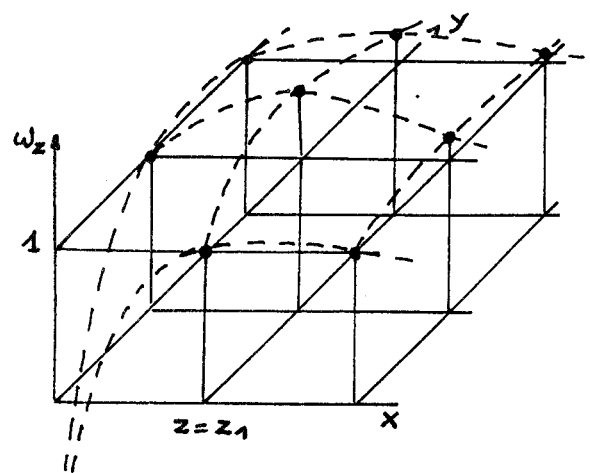


figure 11.b

Fig 11, 12 ,13 -Vorticités locales obtenues numériquement.

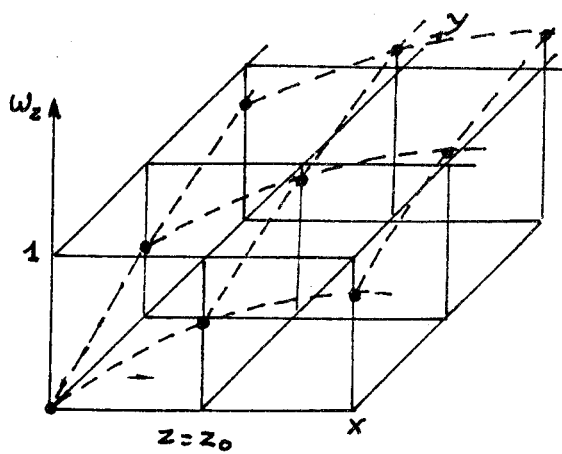


figure 12

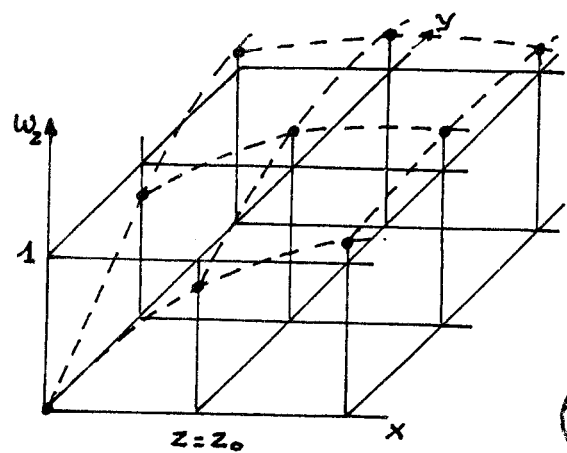


figure 13



Cette condition remplace l'habituelle condition sur la périodicité de la pression qui, ici se trouve déjà prise en compte dans les équations locales.

Finalement les conditions sont récapitulées figure 9.

Résultats dans le plan de sortie

Sur les figures 10.a et 11.a pour la conduite longue et 10.b et 11.b pour la conduite à bords de fuite sont tracées les composantes F et Z, et le rotationnel ω_z recalculé à partir de F et Z. Comme signalé au § 2.2.4, l'effet de coin numérique est bien mis en évidence sur ω_z . Il faut aussi signaler que l'étendue de ce coin diminuerait avec le pas du maillage.

Résultats obtenus dans le domaine par intégration sur S1 - S2

Connaissant F et Z dans le plan de sortie, on calcule ξ et ϕ suivant le processus itératif indiqué au début du paragraphe 2.2.3 (équations XXVIII auxquelles sont associées les conditions aux limites XVII.a et b, et XXIX).

Il faut noter en premier lieu que comme prévu à partir de l'étude analytique, la prise en compte de la condition de sortie XXIX permet d'obtenir la convergence. Le processus est globalement stable.

En second lieu, nous constatons que la linéarité de la solution en z (XVIII) n'est qu'approximativement satisfaite, et qu'entre la sortie et l'entrée, la vorticité (fig.12) recalculée à partir du champ de vitesse a subi une diffusion de l'effet de coin.

Ces deux phénomènes sont évidemment liés et s'interprètent par un transfert de rotationnel des composantes à grand nombre d'ondes, vers celles à plus petit nombre d'ondes transversal, tendant à atténuer l'effet de coin tout en maintenant le flux global de rotationnel. Cette fois encore, pour diminuer l'étendue de ces phénomènes de diffusion, il suffirait d'utiliser un maillage plus fin que celui utilisé ici (6*6*10)

Une autre possibilité que nous allons maintenant tester, serait d'intégrer sur les trois plans.

Intégration transversale à toutes les stations axiales

a) Formulation

Les deux équations :

$$\text{XXXV} \quad \Delta_{xyz} \phi = \Delta_{xyz} \zeta = 0,$$

équivalentes à XIV, XV sont adaptées à l'intégration transversale et aux conditions aux limites du type de celles utilisées pour le calcul des conditions de sortie (figures 6 et 9). En les intercalant dans XIV, nous pouvons définir le schéma :

$$\text{a) } \Delta_{xy} \tilde{\phi}^{k+1} + \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{b) } \Delta_{yz} \zeta^{k+1} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}^{k+1}}{\partial x \partial y} = 0$$

XXXVI

$$\text{c) } \Delta_{xy} \tilde{\zeta}^{k+2} + \frac{\partial^2 \zeta^{k+1}}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{d) } \Delta_{xz} \phi^{k+2} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}^{k+2}}{\partial x \partial y} = 0$$

dont la stabilité peut être étudiée à partir d'un modèle analogue à celui décrit en XXXI. Les résultats sont semblables à ceux obtenus avec deux intégrations. La prise en compte du troisième problème hors du plan de sortie et son extension à tout le domaine ne modifie pas la stabilité globale, de même pour la stabilité locale.

b) Résultats

Les résultats présentés sont ceux obtenus après les opérations XXXVI.b et d, c'est-à-dire après les intégrations sur S1 et S2. Ils diffèrent de ceux des intégrations transversales du fait des différences d'affectation des conditions aux limites aux points du maillage. Cette différence est donc liée au pas du maillage.

Sur la figure 13 est représentée la vorticité d'entrée recalculée, qui par rapport au cas précédent est pour un même maillage plus proche de celle imposée à la sortie. La diffusion du rotationnel vers le centre de la veine est plus faible et indépendante du nombre de points du maillage dans la direction z, ce qui améliore la linéarité de la solution. Par contre, le volume du calcul est au moins doublé, ce qui est très pénalisant lorsque le maillage est fin, alors que précisément le resserrement du pas diminue l'importance de l'effet de diffusion.

2.2.7 - Résumé et conclusion sur la nature et l'expression des conditions aux limites

Nous aboutissons à la conclusion que le problème de l'écoulement tridimensionnel, rotationnel, faiblement perturbé, d'un fluide non visqueux dans une conduite rectiligne avec ou sans jet de sortie est analytiquement bien posé lorsque dans l'un des deux plans opposés (d'entrée ou de sortie), sont données la

vitesse débitante ou les lignes de source, et dans l'autre la vorticité axiale et la variation axiale du champ de pression. Nous obtenons ainsi dans ce second plan les éléments nécessaires à la détermination du champ de vitesse secondaire auquel doit se conformer la solution du problème tridimensionnel, en vérifiant une condition de type NEUMANN pour les fonctions de courant. Cette condition "filtre" a été mise en évidence indépendamment de toute discrétisation. Son caractère global nous a permis d'étendre son champ d'application aux problèmes discrétisés en termes de fonctions de courant, et de montrer qu'elle permet effectivement d'identifier une solution numérique de laquelle est manifestement  cart e toute contribution arbitraire. L'extension de cette technique à une formulation en pression-vitesse est aussi envisageable, car elle accepte des données localement identiques à celles que nous avons utilisées (vorticité, évolution axiale de la pression), et aussi globalement équivalentes ( tat générateur, contre pression).

Nous avons aussi constaté que la stabilité globale était acquise lorsque la conformité à un écoulement secondaire dans un plan donné (ici le plan de sortie) est exigée de tous les  tats intermédiaires pris par la solution au cours du déroulement d'un processus itératif procédant par couplage S1 - S2. La condition de NEUMANN nécessaire à l'unicité de la solution doit donc être établie et maintenue hors processus.

En marge de la démarche aboutissant à ces conclusions de principe, nous constatons d'une part, un effet parasite de coin de la taille d'une maille ayant tendance à s'atténuer lorsqu'on s'éloigne du plan de donnée, et d'autre part, une diffusion du rotationnel vers le centre de la veine. Une technique supprimant cette diffusion est proposée sous forme de "troisième problème" résolu à toutes les stations axiales du canal. Son intérêt est limité par le volume de calcul qu'elle implique. C'est pourquoi après avoir abandonné cette technique,

nous nous sommes par la suite essentiellement intéressés au problème de l'intégration sur S1 et S2.

Nous proposons maintenant une extension de la méthode au cas d'un canal inter-aubes.

2.3 - Condition filtre de sortie pour un canal interaubes

2.3.1 - Quelques remarques sur la transposition du problème

Les problèmes d'écoulement tridimensionnel en conduite et en canal d'aube à aube ne sont pas fondamentalement différents. Néanmoins, sont à introduire des modifications telles que partage des conditions d'alimentation entre plan d'entrée et plan des bords d'attaque, prise en compte d'une condition de KUTTA. Ces modifications particularisent les problèmes sur S1 et S2 en problème de grille d'aubes (vrille de S2) et de vrille de S1. Ils seront formulés et résolus au chapitre III.

Nous supposons que les propriétés de stabilité des algorithmes qui résolvent ces problèmes ne remettent pas en cause les conclusions obtenues de l'étude globale de la stabilité, et proposons la formulation d'une condition filtre de sortie basée sur les mêmes éléments que ceux utilisés dans le cas de la conduite (§2.2.4), où elle se présente comme la détermination d'un champ de composantes F et Z dont on connaît la divergence ($\frac{\partial F}{\partial z}$) et le rotationnel ω_z (équations XXVII).

Dans le cas d'un canal inter-aubes, on reprend la même démarche: calcul de F et Z dans le plan de sortie.

L'étude de la structure des équations montre qu'outre le gradient axial $\frac{\partial P}{\partial z}$, il est nécessaire de disposer de

$\vec{\omega}_A \cdot \vec{W}$, terme équivalent au ω_z de la conduite rectangulaire. Ce terme s'introduit tout naturellement dans un système de coordonnées intrinsèques.

Par ailleurs, différents essais ont montré que seule la grandeur $(\vec{\omega}_A \cdot \vec{W})/w^2$, hélicité, pouvait être aisément calculée par transport pur sur le champ de vitesse au cours du processus itératif global, à partir de sa donnée dans le plan d'entrée. Comme pour les problèmes sur S1 et S2, le calcul de l'hélicité, et la justification de son emploi sont reportés au chapitre III.

Quelques hypothèses supplémentaires dont les inconvénients sont très limités, au moins en regard de celles habituellement utilisées, sont introduites.

2.3.2. Hypothèses supplémentaires

Nous supposons tout d'abord que là où la condition de sortie est calculée, l'écoulement moyen méridien est redevenu axial et la déviation n'est plus modifiée.

Procédant comme dans le cas de la conduite, nous partons des expressions de la pression dynamique (ramenée à la masse volumique)

$$\text{XXXVII} \quad p = \left[\lambda^2 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} z \right]$$

(où r remplace la coordonnée x de la conduite qui est ici devenue coordonnée axiale) et de $\vec{\omega}_A \cdot \vec{W}$ qui nous permet d'écrire :

$$\text{XXXVIII} \quad \vec{\omega}_A \cdot \vec{W} = T_0 - \frac{1}{r r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 z) - \frac{\lambda^2}{b r_0} \frac{\partial F}{\partial y} \right) + V$$

$$\text{où } Z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} ; F = \frac{\partial \phi}{\partial x} ;$$

$$T_0 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \Gamma_r E(\psi_0) \right),$$

soit encore, compte tenu de l'équilibre radial :

$$T_0 = \frac{\lambda^2}{r_0^2} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} ;$$

$$V = 2 \left(\frac{\lambda^2}{r_0^2} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{\omega_0}{r} \right) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

et où $E(\psi_0)$ a été défini au (§ 1.3)

Il apparaît cette fois que l'on ne peut plus formuler à partir des seules données de pression ($\frac{\partial p}{\partial z}$) et d'hélicité ($\vec{\omega}_A \cdot \vec{\omega}$), un problème plan en (r, y) pour les inconnues F et Z , puisqu'à la fois les perturbations ϕ et ζ et leur dérivée axiale apparaissent dans XXXVII et XXXVIII. Le problème de la condition de sortie se présente donc sous forme tridimensionnelle et son intégration bidimensionnelle, nécessite la donnée des perturbations ϕ'_z et ζ'_z . Elles peuvent être obtenues des solutions des problèmes sur $S1$ et $S2$ mais cela rétablit la dépendance entre conditions de sortie et processus itératif ($S1-S2$), ce qui va à l'encontre des conclusions de l'étude de stabilité. Il est donc nécessaire de disposer d'hypothèses complémentaires permettant de formuler un problème plan indépendant des tranches voisines.

Nous proposons d'imposer la linéarité (en z) des perturbations ϕ et ζ , qui dans le cas de la conduite est vérifiée par la solution du problème tridimensionnel. Il est important de préciser que cette hypothèse n'est pas utilisée directement comme une contrainte cinématique appliquée à l'écoulement tridimensionnel, car cela contrarierait fortement

L'équilibre transversal. En effet, on constate sur les équations d'EULER transversales dans lesquelles on a fait apparaître la pression :

$$\text{XXXIX.a} \quad \left[\frac{1}{r_0 \lambda^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

$$\text{XXXIX.b} \quad \left[\sigma r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (pr)}{\partial r} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} p \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] - 2 \sigma \omega_0 r_0 r^2 \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$- \sigma r_0 \left(r \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} + r_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 k}{\partial r \partial x} \lambda^2 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

qu'en plus de termes entre crochets liant la pression et la courbure, figurent des termes non réductibles qui imposent une pression ou une courbure résiduelle non conformes à l'hypothèse de linéarité en z. Sur l'exemple très simple où à l'aval d'un aubage fixe quasi hélicoïdal, la perturbation de pression est supposée nulle, et pour lequel on obtient l'équation :

$$\lambda^2 \frac{d\Gamma_A}{d\psi_0} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

on constate qu'il ne peut y avoir de "lointain aval" ou la linéarité de la solution serait possible.

La portée de l'hypothèse est en fait limitée au calcul de l'écoulement secondaire de sortie dont on retient une condition de NEUMANN pour les fonctions de courant qui ne contraignent pas fortement l'écoulement et laisse libres la vitesse débitante et la courbure des lignes de courant. Il peut donc y avoir une adaptation (limitée) du tourbillon transversal à l'équilibre transversal qui, bien que détruit dans l'élaboration de la condition filtre, est restauré par les équations d'EULER discrétisées à l'amont du plan de sortie.

Cette contrainte cinématique n'est ni transmise par la condition filtre, ni appliquée directement aux écoulements sur S1 et S2.

De plus, nous supposons que non seulement $\frac{\partial p}{\partial z}$ est nul dans le plan de sortie comme dans le cas de la conduite, mais aussi que p y est nul, ce qui peut se justifier par le fait que loin de l'aubage, le champ de pression moyen rend bien compte du champ local. Cette fois encore, cette hypothèse n'est appliquée qu'à l'écoulement secondaire et non aux écoulements sur S1 et S2.

2.3.3 - Equations locales

Comme dans le cas de la conduite, nous proposons une formulation en termes de vitesse (F, Z).

En partant de XXXVII et XXXVIII et en appliquant les hypothèses, on obtient deux équations qui comme dans le cas de la conduite sont découplées des calculs sur S1 et S2. (absence de ϕ et ξ).

La première de ces équations est (XXXVII):

$$XL \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial Z}{\partial y} + \sigma \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

La seconde peut être obtenue en remplaçant dans XXXVIII le terme en $(\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial r})$ par son expression tirée de XXXVII, et en tenant compte de l'équilibre radial ; on obtient :

$$\vec{\omega}_A \cdot \vec{W} = T_0 - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(\frac{1}{r r_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{r}{r_0^2} \frac{\partial \Gamma_A}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\omega_0}{\lambda^2} \frac{\partial k}{\partial x} \right) Z$$

XLI

$$- \frac{1}{r r_0} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\lambda^2}{b r_0^2 r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y}$$

où $\vec{\omega}_A \cdot \vec{W}$ et T_0 sont connus.

Cette équation peut être écrite sous deux formes adaptées à la séparation de variables détaillée par la suite :

$$\text{XLII.a} \quad L_z \frac{\partial Z}{\partial r} + M_z Z + \frac{\partial F}{\partial y} = S_z$$

$$\text{XLII.b} \quad \frac{\partial Z}{\partial r} + M_F Z + N_F \frac{\partial F}{\partial y} = S_F$$

avec
$$S_z = (\vec{\omega}_A \cdot \vec{W} - T_0) / \frac{\lambda^2}{b r_0^2 r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} ; S_F = S_z / L_z$$

Du système XLII, nous pouvons obtenir les équations elliptiques :

$$\text{XLIII.a} \quad L_z \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \left(\frac{dL_z}{dr} + M_z \right) \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{dM_z}{dr} Z - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial S_z}{\partial r}$$

$$\text{XLIII.b} \quad \left(\sigma / \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left[\frac{d}{dr} \left(\sigma / \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) + M_F \sigma / \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right] \frac{\partial F}{\partial r} - N_F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{\partial S_F}{\partial y}$$

Ces équations sont localement découplées, mais restent globalement couplées par les conditions aux limites.

2.3.4 Conditions aux limites

Nous avons :

- sur l'arbre et le carter

a) $F = 0$

et une condition tirée de XLII.b

b)
$$\frac{\partial Z}{\partial r} + M_F Z = S_F$$

sur les surfaces de discontinuités (en fait les surfaces issues des bords d'attaque et régies par la fonction Z - voir le problème de grille d'aubes)

Périodicité de Z

c) $\Delta_1^2 Z = 0$

Conservation de la quantité de mouvement périphérique

d)
$$\int_{Y_A}^{Y_2} Z \, dy = 0$$

e) et donnée tourbillonnaire sur chaque "sillage" avec respect de l'équation XLII.b.

De même que dans le cas de la conduite, nous n'avons pu imposer la continuité de la pression comme nous le faisons en

grille d'aubes, car les conditions auraient laissé indéterminée l'amplitude de la solution axisymétrique $Z(r)$ de l'équation :

$$\frac{\partial Z^*}{\partial r} + M_F Z^* = 0$$

mais cette condition se trouve du fait de (d), finalement vérifiée par la solution numérique.

Ces conditions sont récapitulées sur la figure 16

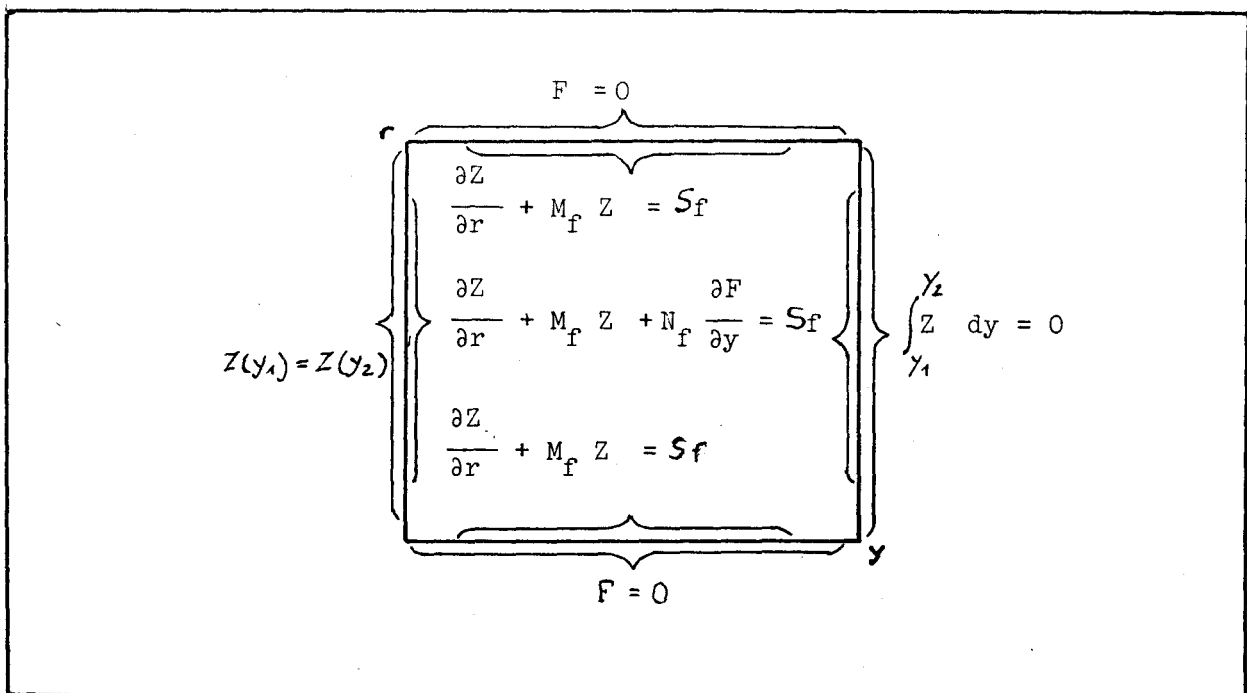


Fig 16. -Résumé des conditions aux limites pour l'écoulement de sortie à l'aval d'un canal inter-aubes.

Les résultats de l'équation sont proposés dans le chapitre (IV).



3. CONCLUSION

Après avoir formulé le problème d'une façon classique mais présentant néanmoins quelques particularités, nous avons abordé la question de la stabilité sur un exemple simplifié, à la suite de quoi on a pu définir une condition filtre applicable au canal inter-aubes d'une turbomachine.

L'élaboration de cette condition fait appel à des hypothèses supplémentaires qui pourraient apparaître comme assez fortes, mais dont la portée est limitée au calcul de l'écoulement secondaire de sortie. Ces hypothèses touchent la distribution de pression et la courbure des lignes de courant au lointain aval. Elles nous libèrent du fait qu'il n'y a pas en toute rigueur, de lointain aval où l'écoulement serait très régulier et que le problème de couplage se maintient, même dans l'élaboration de la condition filtre.

Il nous a donc été possible de reculer le niveau de simplification et de reporter dans le calcul de l'écoulement secondaire de sortie, des hypothèses telles que celle d'axisymétrie de la pression au lointain aval qui habituellement sont appliquées directement en terme de vitesses aux problèmes sur S1 et S2.

Enfin nous constatons que l'expression de cette condition passe par le calcul de la grandeur $\vec{\omega}_A \cdot \vec{w}$ dans le plan de sortie. Comme on l'a dit dans l'introduction 2.3, le calcul de $\vec{\omega}_A \cdot \vec{w}$ s'effectue à partir de l'hélicité $(\vec{\omega}_A \cdot \vec{w})/w^2$, qui se détermine par transport et production sur le champ de vitesse, à partir du plan d'entrée qui est le plan de donnée tourbillonnaire.

Finalement, pour déterminer l'écoulement tridimen-

sionnel, nous avons à traiter trois problèmes assez classiques qui consistent à déterminer l'écoulement d'aube à aube (sur S1), l'écoulement de l'arbre au carter (sur S2) et enfin l'hélicité dans le plan de sortie.

Chapitre III

CALCUL DE L'ÉCOULEMENT SUR S1, SUR S2, ET DE L'HELICITE - COUPLAGE S1_S2-

Bien que des modèles performants existent pour effectuer les calculs de l'écoulement tant sur S1 que S2, nous avons été amenés à poser à nouveau ces problèmes, pour les adapter à nos hypothèses et objectifs, à en tester éventuellement la stabilité interne, et le cas échéant, y apporter des améliorations permettant de réduire le temps de calcul.

1. - PROBLEME DE GRILLE D'AUBES

1.1 - Introduction

Ce premier problème a une grande importance car il prend en compte l'essentiel des données géométriques pour les traduire en terme de déviation, dont la précision conditionne fortement la précision d'ensemble du calcul. Ce premier aspect du problème est bien pris en compte dans maintes méthodes parmi lesquelles nous ne citons que /26, 27/, utilisant la technique des différences ou des éléments finis. La vérification de la condition de KUTTA se fait par adaptation itérative de l'angle de sortie, ce qui fait de ce problème le plus coûteux en temps de calcul.

Nous proposons dans ce paragraphe une formulation du problème de grille d'aubes intégrant la condition de KUTTA JOUKOWSKI dans le schéma, et permettant une résolution plus directe et plus systématique.

1.2 - Processus itératif

Le problème de l'écoulement d'aube à aube est quasi-bidimensionnel (θ, z) pour la fonction ζ , avec cependant un couplage radial (ou normal à la direction moyenne de l'écoulement) faible, car proportionnel à la vitesse radiale (ou normale). Nous associons les termes à dépendance radiale responsables de cet effet aux termes en ϕ pour les incrémenter hors du problème de grille, dans le couplage S1 - S2. De même pour les fonctions ψ_0 et χ_0 qui lorsqu'elles apparaissent au second membre de XII (chap II) sont remises à jour dans le problème de l'écoulement moyen.

Une autre nécessité de procéder itérativement vient du fait que dans XII (ch. II), réécrite sous la forme :

$$I \quad A\left(\zeta, \frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = S\left(\zeta, \phi, \frac{\partial k}{\partial x}, \psi_0, \omega_0\right),$$

apparaissent de façon non linéaire, les grandeurs (ζ et $\frac{\partial k}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \chi_0}{\partial z}$) calculables par intégration dans (θ, z). Cela provient en fait du transfert du caractère non linéaire de la condition de KUTTA formulée en terme de vitesse, vers une non linéarité de l'équation, plus facile à traiter.

Le processus itératif de grille porte uniquement sur cette non linéarité, nous le définissons par :

$$II \quad A\left(\zeta^{n+1}, \left(\frac{\partial k^n}{\partial x}\right)\right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial^2 k^{n+1}}{\partial x^2} = S^n$$

Il fait évoluer le système de coordonnées, et donc l'image du maillage dans le domaine réel. La forme II n'étant pas complètement linéarisée, cela revient à discrétiser l'équation sur un maillage ancien, mais à prendre le champ de force moyen et les conditions aux limites correspondant au maillage actualisé. L'essentiel des éléments influençant le comportement de grille est donc considéré de manière implicite. Reste à définir la contrainte qui, s'ajoutant à la discrétisation locale de II, permet de lier χ_o (ou $\frac{\partial k}{\partial x}$) à la direction moyenne de l'écoulement.

1.3 - Equation pour χ_o

Nous proposons dans ce paragraphe une formulation de principe basé sur une hypothèse de profil mince ($\Delta\theta_e \ll \Delta\theta$) et de fluide non visqueux. On peut trouver son équivalent lorsque les couches limites sont prises en compte.

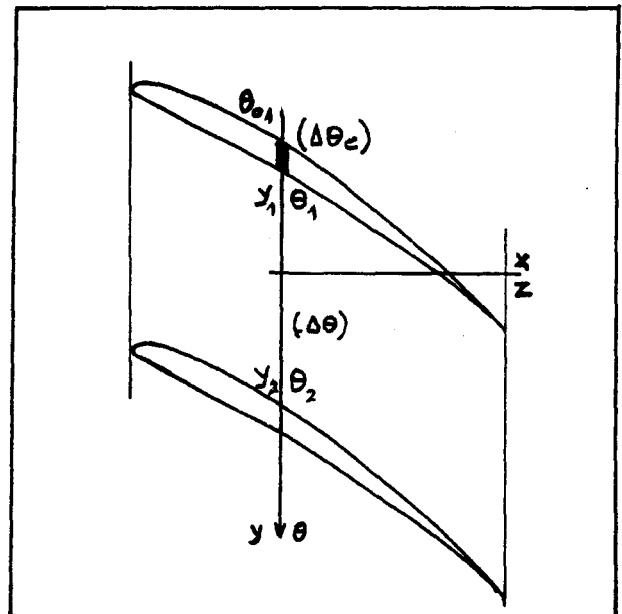


Fig 17. - Coupe radiale d'un canal inter-aubes. Coordonnées

La contrainte permettant de séparer les fonctions ζ et χ_o exprime que cette dernière représente effectivement la moyenne de l'écoulement d'aube à aube, et que le champ de force moyen responsable de la courbure des lignes de courant moyennes correspond bien à la différence de pression d'aube à aube.

Nous avons donc à écrire l'équivalence entre le débit moyen de quantité de mouvement circumférentielle et sa moyenne calculée d'aube à aube (fig. 17)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} W_z W_\theta d\theta = \Delta\theta W_{zm} W_{\theta m}$$

où w_{zm} , $w_{\theta m}$ sont les vitesses moyennes axiales et périphériques.

En faisant apparaître les perturbations δw_z et δw_θ , et tenant compte du fait que :

$$w_{\theta m} = - \frac{r}{r_0} \frac{\partial k}{\partial x} w_{zm},$$

nous obtenons, en négligeant les termes du second ordre :

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1} \delta w_\theta d\theta - \frac{r}{r_0} \frac{\partial k}{\partial x} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta w_z d\theta = 0$$

La conservation du débit impose d'autre part que :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \delta w_z d\theta = 0$$

En ajoutant maintenant le terme du second ordre $\Delta \theta_c \delta w_{\theta 01,2}$, on obtient :

$$\int_{\theta_{01}}^{\theta_2} \delta w_\theta d\theta = 0,$$

soit encore :

$$\text{III} \quad \int_{y_{01}}^{y_2} \left\{ - \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + b \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} \right\} dy = 0$$

Cette équation ne fait que lier les termes $\frac{\partial k}{\partial x}$ et $\int \frac{\partial \xi}{\partial x} dy$

, il faut de plus utiliser l'équilibre azimutal moyen.

Pour cela, nous intégrons l'équation locale d'aube à aube :

$$\begin{aligned}
 \text{IV} \quad r_o W_{oR}^2 \Delta_1^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{1}{r_o} \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right)^2 \Big|_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dy + 2 \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \Delta_1^2(\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \Delta_1^2(\zeta) + \\
 + \bar{B} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \Big|_{y_1}^{y_2} = \int_{y_1}^{y_2} S dy
 \end{aligned}$$

où $\Delta_1^2(x)$ est l'accroissement d'aube à aube de la grandeur x et où $\bar{B} = y_1 - y_2$ est le pas dans les nouvelles coordonnées.

En ajoutant comme précédemment les termes du second ordre permettant de changer la borne y_1 en y_{o1} sur les intégrales, et en dérivant III par rapport à x , on peut éliminer le terme $\int_{y_o}^{y_2} \frac{\partial S}{\partial x} dy$, et obtenir :

$$\text{V} \quad \bar{B} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial(\Delta_1^2 \zeta)}{\partial x} + P \Delta_1^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = - \frac{dS_c}{dx} - \frac{\int_{y_{o1}}^{y_2} S dy}{\frac{1}{r_o} \left(\frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right)^2}$$

$$\text{où } P = \left(\frac{r_o}{r} \right)^2 (1 + \text{tg}^2 \beta) + \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right)^2$$

$$\text{avec } \text{tg } \beta = - \frac{\partial \psi_o}{\partial z} / \frac{\partial \psi_o}{\partial r},$$

$$\text{et } S_c = \int_{y_{o1}}^{y_2} \left[\frac{\partial \psi_o}{\partial r} \right] \left\{ b \frac{\partial \psi_o}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial k}{\partial x} \right\} dy$$

Cette équation lie effectivement la courbure des lignes de courant de l'écoulement moyen d'aube à aube $\left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \right)$ à la différence de pression (ou de vitesse) extrados-intrados $\left(\Delta_1^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)$. Son caractère non linéaire est pris en compte de la même manière que pour l'équation locale, ce qui donne :

$$\text{V} \quad \bar{B} \frac{\partial^2 k^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial k^n}{\partial x} \frac{\partial(\Delta_1^2 \zeta^{n+1})}{\partial x} + P^n \Delta_1^2 \left(\frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y} \right) = - S^n$$

où S^n regroupe le second membre de IV considéré ici comme figé.

Le problème se présente sous la forme d'un système composé d'une équation elliptique II et d'une équation différentielle, que nous destinons au calcul de ζ et $\frac{\partial k}{\partial x}$.

1.4 - Maillage - Discrétisation des équations

Le problème est discrétisé sur le maillage (9*30) du domaine transformé proposé à la figure 18.

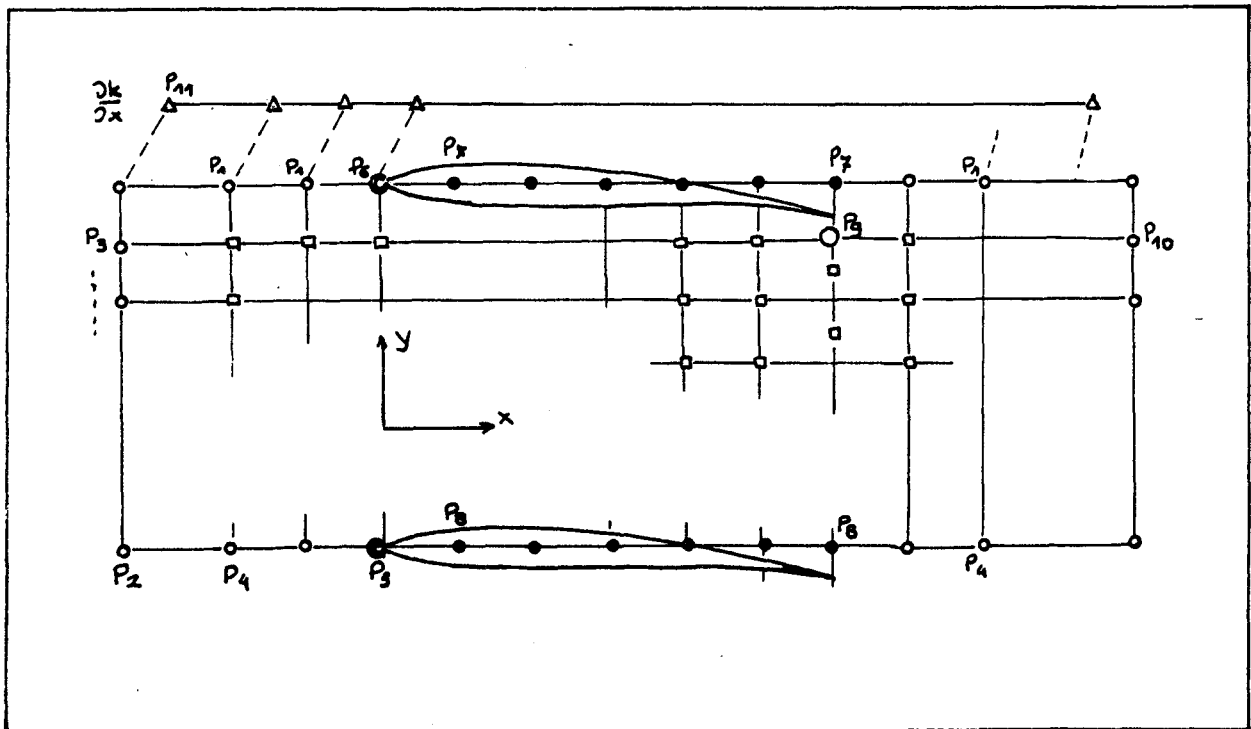


Fig 18. -Maillage transformé utilisé pour le calcul de l'écoulement de grille.

La variable ζ est discrétisée aux noeuds, tandis que pour $\frac{\partial k}{\partial x}$ est utilisé un maillage linéaire décalé d'un demi pas vers l'aval.

L'équation II est discrétisée aux noeuds selon le schéma classique à 9 points (3 x 3) (figure 19a) sauf sur la

ligne des bords de fuite où la suppression d'une équation, remplacée par la condition de KUTTA crée un décalage d'une demi maille et nous amène à une discrétisation sur douze points (figure 19.b) :

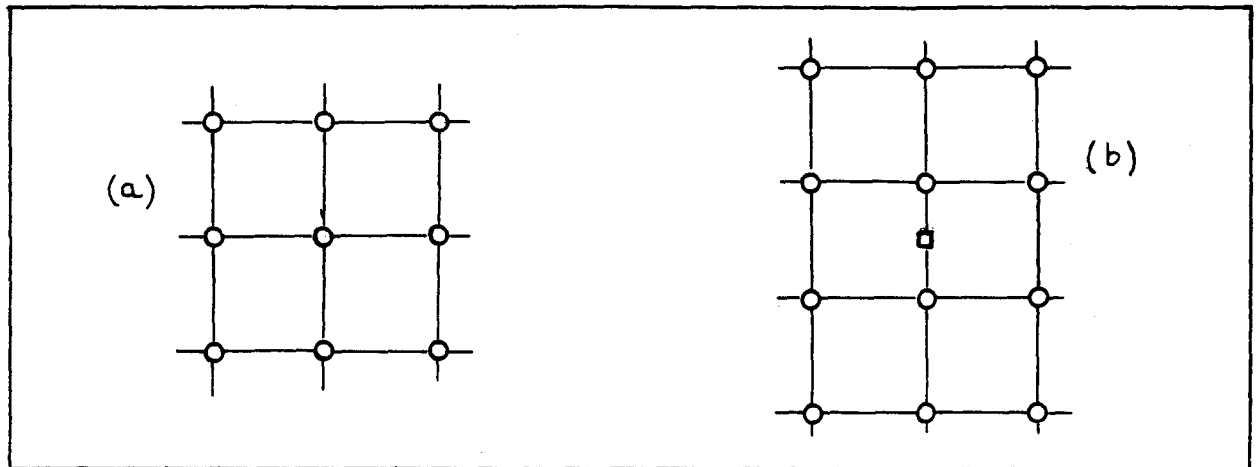


Fig 19. -Discrétisation courante (a), et dans le plan des bords de fuite (b)

L'équation IV est discrétisée à mi-segment sur le maillage linéaire, c'est-à-dire en regard des noeuds du maillage du domaine. Elle contient des intégrales ($\int S dy$) faisant intervenir un opérateur d'intégration, et des écarts ($\Delta_1^2 \zeta, \Delta_1^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$) dont la discrétisation doit être cohérente avec le fait qu'ils proviennent de la même intégration. Il y a donc un lien entre les opérateurs d'écart et d'intégration, tenant compte de la discrétisation locale des dérivées.

Une première démarche consiste à définir l'opérateur d'intégration à partir de formes d'écart les plus simples. Cela conduit à une redondance de contraintes que nous n'avons pu satisfaire qu'avec un maillage à 5 points suivant y.

On peut dans une deuxième démarche partir de l'opérateur d'intégration classique (Trapèzes, SIMPSON ...) et déterminer des opérateurs d'écarts que l'on trouve évidemment différents des précédents. Ces deux techniques ont été utilisées et donnent des résultats équivalents.

1.5 - Conditions aux Limites

Les conditions de glissement ont été linéarisées, la pente est imposée à la frontière du maillage plutôt que sur l'aubage. Cela se justifie ici par le fait qu'une correction transportant la condition jusqu'à l'aubage n'aurait guère de signification au voisinage du bord d'attaque où le maillage utilisé ne permet pas d'appréhender la courbure du profil et la position du point d'arrêt.

Les conditions aux limites, (dont l'ordre d'affectation aux noeuds joue un rôle important dans le fait que le système soit bien conditionné) sont directement écrites aux points concernés $P^1, P^2 \dots$ du maillage, soit en :

- P^1 : Condition de périodicité $\Delta_1^2 \zeta = 0$
 - P^2 : Condition sur la moyenne de la perturbation de vitesse azimutale à l'entrée
 - P^3 : Equidistance des points de source $\zeta^{I+1} = \zeta^I$
 - P^4 : Continuité de la pression $\Delta_1^2 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\cot \theta}{r^2 \lambda^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$
 - P^5, P^6 : Calage de la perturbation $\zeta = 0$
 - P^7, P^8 : Conditions de glissement $\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + r_0 \frac{\partial \Theta_s^N}{\partial z} = 0$
- où N est la position angulaire de la surface de l'aubage :
- $\Theta_s^N = \Theta_s^N \pm \frac{1}{2} \frac{e}{r_0}$ avec Θ_s^N : squelette ; e : épaisseur de l'aubage
- P^9 : Condition de KUTTA analogue à celle écrite en P^4
 - P^{10} : Condition de sortie donnée de $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$

- P¹¹ : Donnée de $\frac{\partial k}{\partial x}$ à l'entrée

L'ensemble de ces conditions (fig. 16) suffit pour déterminer une solution au problème sans qu'il soit nécessaire d'imposer un angle de sortie.

1.6 - Résultats

Cette discrétisation a été testée sur une géométrie de grille de compresseur dotée d'un profil NACA 650810, calé à angle variable. La grille de solidité (C/B) égale à 1 est attaquée sous un angle constant de 30°, et à une vitesse telle que le nombre de Reynolds soit de $R = 245000$

Dans le but d'effectuer une comparaison qui soit quelque peu valable avec les résultats expérimentaux /47/, un modèle de couche limite (MICHEL) /55-56/ a été associé à la discrétisation.

Plusieurs remarques s'imposent sur le profil représenté figure 20. D'une part, la courbure du profil dans le voisinage du bord d'attaque est mal approchée par le mode linéarisé et par le maillage. D'autre part, la courbure du squelette est assez forte sur les extrémités du profil, ce qui rend la déviation très sensible à la formulation de la condition de KUTTA.

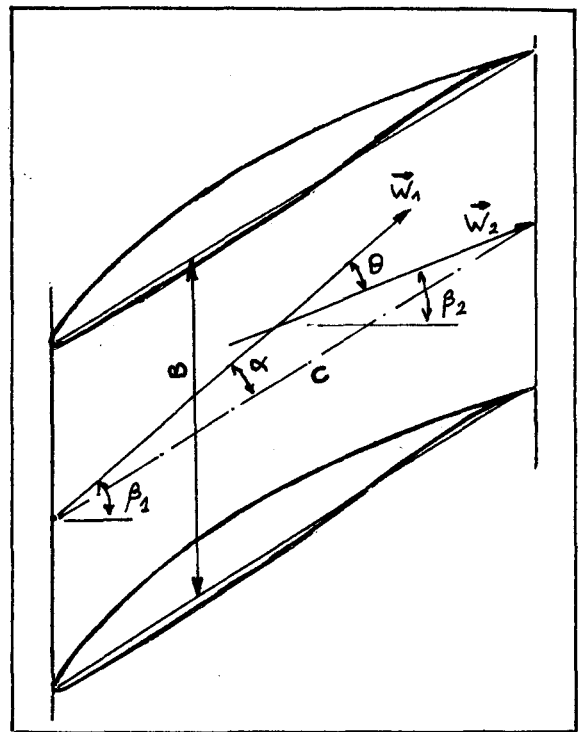
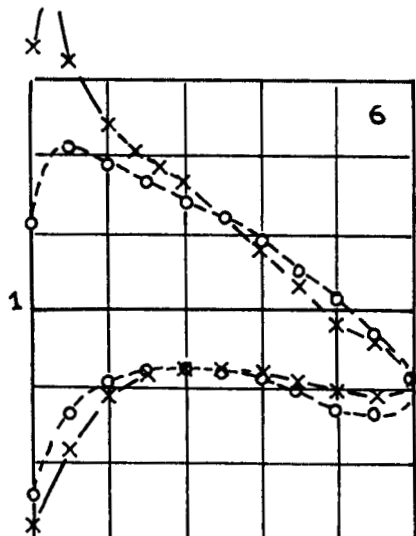
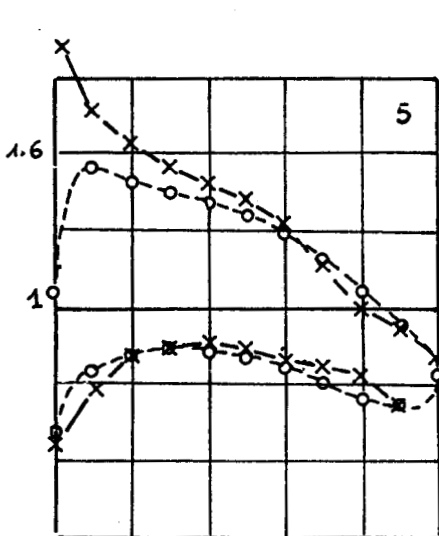
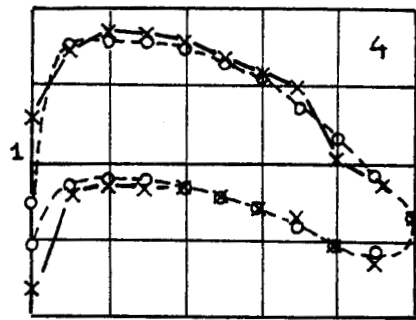
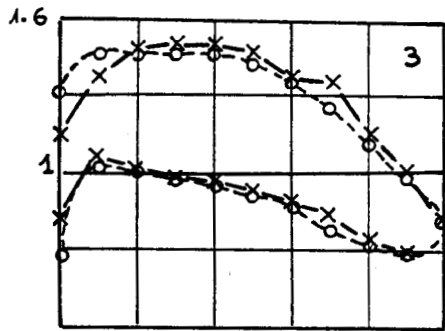
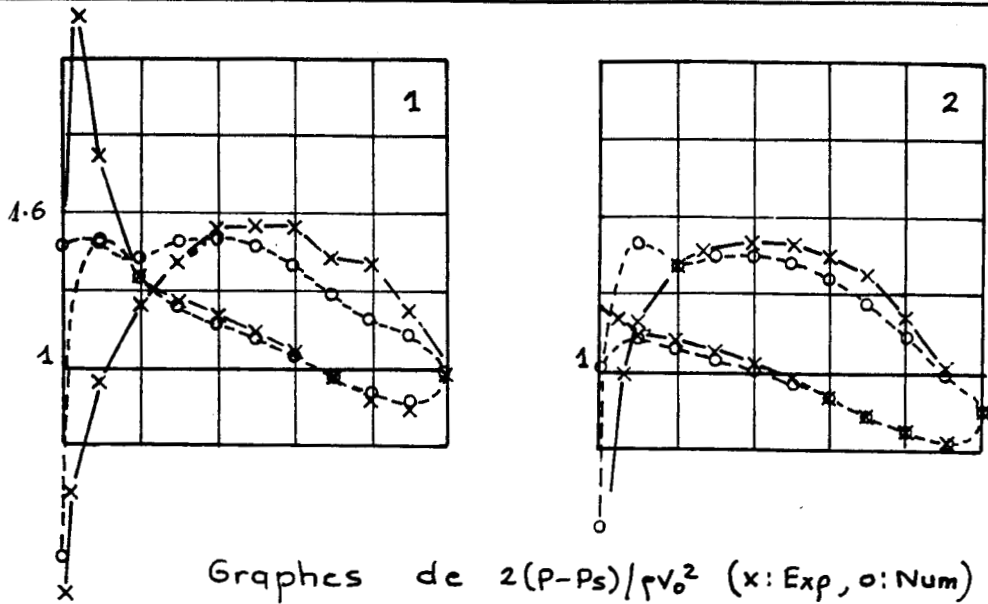


Fig 20. -Grille de profils NACA-650810. Paramètres.



	1	2	3	4	5	6
α°	-2.4	3.7	6.7	9.7	15.7	21.7
θ_{num}°	3	9.7	12.8	15.6	21.4	27.3
θ_{exp}°	3.5	9.3	12.3	15	20.5	25

NACA 65-0810

Solidité : 1

Angle $\beta_1 = 30^\circ$

REYNOLDS : 245000

Exp: d'après /47/

Figure 21



Sur la figure 21 sont comparées pour plusieurs incidences les pressions pariétales expérimentales (*) obtenues dans /47/ et numériques (o) ainsi que les déviations réalisées par l'aubage.

Globalement nous constatons un bon accord sur les distributions de pression, les résultats sont satisfaisants compte tenu des moyens mis en jeu. Plus localement quelques remarques sont à faire:

Au bord d'attaque on constate un désaccord lorsque l'incidence est éloignée des conditions d'adaptation ($- 2,4^\circ$ et $21,7^\circ$). Ceci est imputable au lissage dû à la discrétisation qui atténue le pic de pression.

Au voisinage de l'adaptation, il y a sur le profil concordance des résultats expérimentaux et numériques sauf semble-t-il au $3/4$ de la corde côté extrados où le décollement n'est pas mis en évidence par le modèle de couche limite. Il en est de même avec les fortes incidences pour lesquelles la solution numérique, du fait du non décollement, est plus déviatrice vers le bord de fuite .

Enfin, au bord de fuite, la déviation et la pression sont aussi en bon accord avec l'expérience, le léger excès de déviation pouvant être imputé au non décollement. Nous pouvons conclure que bien que le nombre de points soit faible, la modélisation est satisfaisante dans la partie saine de l'écoulement, et l'hypothèse de linéarisation acceptable pour les incidences testées.

1.7 - Conclusion

Le modèle proposé en fluide parfait nous semble, compte tenu des objectifs fixés, adapté à une utilisation en tridimensionnel. Pour un problème plan, deux à quatre itérations

en résolution directe suffisent pour atteindre la solution numérique, avec une déviation satisfaisante compte tenu des hypothèses de départ. De plus, ce modèle peut être aisément amélioré : conditions de glissement - Prise en compte des termes non linéaires au second membre - Couche limite tridimensionnelle telle que dans /48/. Enfin, la technique de prise en compte implicite de la condition de KUTTA peut être étendue à d'autres discrétisations.

2. ÉCOULEMENT SUIVANT S2 - ÉQUILIBRE RADIAL MOYEN

2.1 - Introduction

Ces problèmes ne sont pas toujours dissociés, la partie moyenne peut être ajoutée à la perturbation /32/ et être traitée localement. Séparés, ils sont régis par le même opérateur (ou proche), seuls les seconds membres et la condition à la limite aval différent, ils peuvent donc être regroupés sous le même titre. Cette partie de l'étude a déjà fait l'objet de nombreux travaux analytiques, ou numériques, utilisant des méthodes de différences et d'éléments finis, atteignant et probablement dépassant artificiellement pour certaines d'entre elles les limites de stabilité. Notre problème n'étant pas lié à la complexité de la géométrie, ni à la précision de l'écoulement méridien, nous nous contenterons d'une discrétisation simple appliquée à un domaine simple.

2.2 - Discrétisation - conditions aux limites

Supposant la machine à petit nombre d'aubes, les domaines et les maillages utilisés pour l'intégration des problèmes sur S2 et de l'équilibre radial moyen peuvent être confondus. L'arbre et le carter sont supposés cylindriques dans le voisinage de l'aubage, les bords d'attaque et de fuite sont situés dans des plans. Le maillage est donc rectangulaire à pas constant, de plus la coordonnée z s'identifie à x.

L'opérateur elliptique (XIII, ch. II) est discrétisé par un schéma à cinq points, de même que les seconds membres. La circulation hors aubage vérifiant l'équation de transport

$$F_o(\Gamma_A) = 0$$

est calculée sur un schéma implicite en r , parabolique en z à partir des plans de donnée.

Les conditions aux limites sont :

- glissement sur l'arbre et le carter :

$$\phi(r_a, y, x) = \phi(r_c, y, x) = 0$$

$$\psi_0(r_a, z) = 0 \quad ; \quad \psi_0(r_c, z) = Q$$

où Q est le débit, r_a et r_c les rayons de l'arbre et du carter

- donnée de ψ_0 et ϕ à l'entrée ($z=0$)

$$\phi(r, y, 0) = \psi_0(r, 0) = 0$$

- donnée de la pente à la sortie ($z=z_1$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(r, t, x_1) = F(r, t) \quad ; \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z}(r, z_1) = 0$$

où F est fixé par la condition de sortie précisée au chap II.

Les résultats de ces problèmes ne présentant d'intérêt qu'au niveau de l'ensemble de la solution obtenue, après convergence, ils sont reportés dans le chapitre IV.

2.3 - Conclusion

Avec la technique de discrétisation utilisée, nous n'avons pas rencontré de difficultés pour déterminer l'écoulement sur S2.

Il est peu coûteux de séparer les parties perturbation et moyenne de l'écoulement méridien, cette dernière ne correspond qu'à un noeud azimutal supplémentaire. De plus, le traitement de la partie moyenne peut présenter quelques avantages tels que : simplification au niveau des équations locales, meilleure précision du fait de la différence des ordres de grandeur de ψ_0 et ϕ , définition plus aisée des conditions d'alimentation de la grille. C'est ce qui, comme en grille d'aubes, justifie cette décomposition.

3. CALCUL DE L'HELICITE DANS LE PLAN DE SORTIE

3.1 - Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre II, la méthode proposée est une méthode itérative stationnaire dans laquelle le champ de vitesse locale est partiellement induit par la grandeur locale $\vec{\omega}_x \vec{W}$.

Pour disposer de cette grandeur, on pourrait être amené à calculer le rotationnel dans l'ensemble du canal. Pour cela, il existe plusieurs techniques de calcul, toutes issues de l'équation d'HELMHOLTZ, mais se comportant différemment dans le processus itératif liant $\vec{\omega}_x$ et \vec{W} . Elles se distinguent par l'importance qu'elles donnent aux contributions des termes correspondant aux effets (non visqueux) :

- Effet de changement de point de source
- Production par effet de ralentissement (compressible)
- Production par effet de courbure des lignes de courant.

Le premier effet donne un comportement analogue à celui que l'on trouve en bidimensionnel, il n'est pas gênant tant que la distribution du rotationnel est assez régulière.

Le deuxième effet ne nous concerne pas directement, mais, (pour une extension au cas compressible), il peut être intégré au terme de transport (VASZONY).

Enfin, l'effet de courbure des lignes de courant, qui n'apparaît qu'en tridimensionnel, est très destabilisant lorsqu'il est traité d'une manière implicite, une rapide et grossière étude de stabilité peut le montrer.

3.2 - Exemple d'instabilité dans le calcul de $\vec{\omega}_A$

Nous nous plaçons dans le cadre utilisé au chapitre II pour l'étude de la stabilité globale, c'est-à-dire impliquant les hypothèses suivantes :

- Ecoulement stationnaire quasi uniforme uniquement perturbé par un rotationnel purement axial ω_z
- A cet écoulement s'ajoute une deuxième perturbation $\delta\vec{\omega}$ modifiant la solution analytique du problème.

L'équation d'HELMHOLTZ linéarisée donne la perturbation de rotationnel. (On est parti de la forme: $\vec{w}^n \cdot \vec{\nabla} \times \vec{w}^{n+1} - \vec{w}^n \cdot \vec{\nabla} \times \vec{w}^{n+1} = S^n$, d'autres formes implicites ont été essayées et se sont aussi révélées instables).

$$\delta\vec{\omega} = \frac{\omega_s}{W_s} \delta\vec{W}$$

où W_s est ici la vitesse axiale.

On peut maintenant recalculer la vitesse $\delta \vec{\omega}^*$ induite par la perturbation de tourbillon, à partir des relations (chapitre II, § 2.2.1)

$$\delta \omega_x = \Delta y z \zeta^* + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial y}$$

$$\delta \omega_y = -\Delta x z \phi^* - \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial x \partial y}$$

$$\delta \omega_z = (\phi^*{}'_y - \zeta^*{}'_x)' z$$

où ζ^* et ϕ^* sont les perturbations de deux fonctions de courant.

Supposons la conduite de section rectangulaire, qu'à la perturbation initiale $\delta \vec{\omega}$ correspondent les fonctions

$$\zeta = g_0 e^{\gamma z} \cos \alpha' x \sin \beta' y$$

$$\phi = f_0 e^{\gamma z} \sin \alpha' x \cos \beta' y, \quad \text{où } \alpha' = \frac{\pi n}{a}, \quad \beta' = \frac{\pi m}{b}, \quad \text{avec } m, n \text{ impairs}$$

Les perturbations induites ζ^* , ϕ^* se mettent sous la forme :

$$\zeta^* = (G_0 e^{\gamma z} + G_1) \sin \beta y \cos \alpha x, \quad \text{où } \alpha = \frac{\pi p}{a}, \quad \beta = \frac{\pi q}{b},$$

$$\phi^* = (F_0 e^{\gamma z} + F_1) \sin \alpha x \cos \beta y, \quad \text{avec } p, q \text{ pairs}$$

En appelant k_{np}, H_{np} les coefficients de FOURIER des fonctions $\sin \alpha' x$ et $\cos \alpha' x$ sur les bases respectives $\cos \alpha x$ et $\sin \alpha x$, et k et k' les coefficients $k = k_{np} k_{mq}, k' = H_{np} H_{mq}$, nous obtenons à partir des équations locales:

$$(\gamma^2 - \beta^2) G_0 - \alpha\beta F_0 = -k \frac{\gamma \omega_z}{W_z} f_0$$

VII

$$(\gamma^2 - \alpha^2) F_0 - \alpha\beta G_0 = k \frac{\gamma \omega_z}{W_z} g_0$$

et dans un plan transversal d'abscisse z_0

$$\text{VIII} \quad \gamma e^{\gamma z_0} (\alpha G_0 - \beta F_0) + \alpha G_1 - \beta F_1 = \frac{-\omega_z}{W_z} k' (\alpha f_0 + \beta g_0) e^{\gamma z_0}$$

La dernière de ces équations (VIII) est associée à :

$$\alpha F_1 + \beta G_1 = 0$$

pour fixer l'amplitude de la solution de l'équation sans second membre proportionnellement à la perturbation (f, g). Elle n'est donc pas déterminante pour la stabilité. Les équations (VII) définissent l'amplification propre de la perturbation, à partir de la plus petite des valeurs propres du système

$$\lambda_1 = \gamma^2 \quad ; \quad \lambda_2 = \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Ce qui donne pour ρ le coefficient d'amplification

$$\rho = \frac{\omega_z}{W_z} k \frac{\gamma}{|\lambda_{\text{mini}}|} = k \frac{\Delta z}{P}$$

où Δz est la longueur d'onde suivant z et P le pas W_z/ω_z

On n'a en effet retenu que la première valeur propre car la seconde, apparemment plus favorable à l'instabilité lorsqu'elle est nulle, correspond alors à des perturbations irrotationnelles (XXIII, Ch II) par ailleurs contrôlées par la

condition de sortie. De plus ces solutions à petit nombre d'ondes (γ), ont toutes les chances d'être installées au début du processus, c'est-à-dire lorsque la linéarisation complète de l'équation d'HELMHOLTZ et cette étude de stabilité sont justifiées.

On peut donc conclure qu'il y a instabilité puisqu'il n'est pas certain qu'à partir d'une initialisation arbitraire proche de la solution, il y ait convergence vers cette solution.

Cette instabilité est très marquée dans les essais numériques qui ont été faits avec l'équation d'HELMHOLTZ ainsi que pour d'autres formulations lorsqu'il y a production.

Nous avons essayé deux approches basées sur la notion cinématique "d'hélicité" qui peut être diversement définie et pour laquelle des équations d'évolution ont été écrites.

3.3 - Hélicité

Le terme est utilisé dans /49/ où l'hélicité est définie par :

$$\tau = \int_D \vec{\omega} \cdot \vec{W} \, dv$$

et récemment généralisée dans /50/ pour un fluide non barotrope

$$\tau = \int_D (\vec{\omega} - \vec{\nabla} n \wedge \vec{\nabla} S) \cdot (\vec{W} - T \vec{\nabla} S) \, dv$$

où T est la température, S l'entropie et η l'intégrale sur le temps

$$\eta = \int_0^t T d\xi$$

Si nous considérons cette définition sous un aspect local plus pratique, en appelant cette fois hélicité la grandeur

$$\text{IX} \quad \tau = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{W}}{\rho},$$

nous pouvons obtenir à partir de l'équation d'EULER instationnaire écrite en mouvement relatif par rapport à l'aubage (R_W)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{R_W} + \vec{\omega}_A \wedge \vec{W} = - \vec{\nabla} H_R$$

et de l'équation d'HELMHOLTZ :

$$\frac{d\vec{\omega}_A}{dt} = \vec{\omega}_A \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) - \vec{\omega}_A \operatorname{div} \vec{W}$$

une équation pour τ

$$\rho \frac{d\tau}{dt} = \vec{\omega}_A \cdot \vec{\nabla} W^2 - 2\omega_0 \frac{\partial H_R}{\partial z} + (\vec{\omega}_A - 2\omega_0 \vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{R_W}$$

Il figure dans cette équation un terme de production faisant appel au calcul complet du rotationnel $\vec{\omega}_A$ et donc impliquant les équations d'EULER.

Le schéma parabolique suivant z , liant par les équations d'EULER et d'HELMHOLTZ, les valeurs prises par \vec{W} et $\vec{\omega}_A$ en deux stations axiales, s'avère lui aussi numériquement instable. Nous en imputons la cause au terme de production que nous cherchons à éliminer en utilisant une grandeur définie en /51/, utilisée en outre dans /52/, cette fois encore notée τ , et appelée hélicité.

$$\tau = \frac{\vec{\omega}_A \cdot \vec{W}}{\rho W^2}$$

C'est effectivement cette grandeur que nous allons calculer, et qui est à la masse volumique près, une grandeur géométrique caractérisant la torsion d'un tube de courant. Nous avons en mouvement relatif instationnaire l'équation :

$$\begin{aligned}
 \rho W^4 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_A \cdot \vec{W}}{\rho W^2} \right) &= (\vec{\nabla} H_R \wedge \vec{W}) \cdot \vec{\nabla} W^2 - 2\omega_0 W^2 \frac{\partial H_R}{\partial z} \\
 &+ \frac{\partial W}{\partial t} (\vec{\omega}_R \wedge W^2 + \vec{W} \cdot \vec{\nabla} W^2 - 2\vec{W} (\vec{\omega}_A \wedge \vec{W}))
 \end{aligned}$$

où $\vec{\omega}_R$ est le taux de rotation relatif

$$\vec{\omega}_R = \vec{\omega}_A - 2\omega_0 \vec{k}, \quad \vec{k} \text{ vecteur axial}$$

Avec cette forme d'hélicité, la production est rejetée dans le terme instationnaire. Nous n'avons donc plus à faire interpréter par les termes convectifs, comme effet de changement de point de source, des fluctuations dues aux termes de production, à caractère instationnaire et à l'allure de bouffées.

Le système constitué de \underline{X} et des équations d'EULER permet de calculer τ et accessoirement $\vec{\omega}_A$ par transport pur, et se présente d'une manière favorablement très différente du système initial. Cette notion d'hélicité peut aussi être intéressante sur le plan géométrique.

3.4 - Signification géométrique de l'hélicité

La signification géométrique de l'hélicité permet de préciser d'éventuelles conditions aux limites de paroi, car cette grandeur peut aussi être définie à partir des torsions des surfaces de courant (ψ et χ), notées τ_ψ et τ_χ par la relation :

$$\tau = \frac{\rho}{2} (\tau_{\psi} + \tau_{\chi}) = \rho \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$$

où θ positionne la bissectrice du dièdre des surfaces de courant (fig. 22).

L'une des surfaces (χ) étant une paroi donnée, la torsion de l'autre surface (ψ) soit : τ_{ψ} , peut donc être imposée. C'est une condition de NEUMANN, dont on ne peut négliger le rôle dans le "troisième" problème.

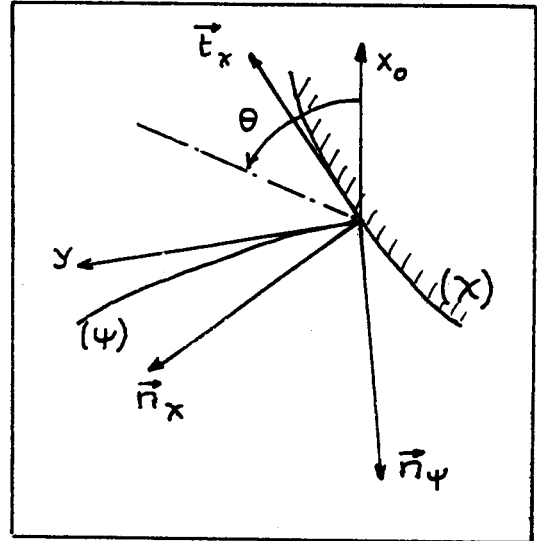


Fig 22. -Coupe normale à la vitesse.
Trace des surfaces de courants.

4. COUPLAGE $S_1 = S_2$

Nous avons maintenant résolu les quatre problèmes:

- Calcul de l'hélicité de sortie
- Elaboration de la condition de sortie
- Calcul de l'écoulement sur S_1
- Calcul de l'écoulement sur S_2

Il reste à réaliser le couplage S_1-S_2

4.1 -Initialisation

Ayant à faire à un problème non linéaire, et désirant économiser les temps de calcul, il nous faut initialiser dans un état qui, à défaut d'être proche de la solution, s'inscrive aussi régulièrement que possible dans la suite convergente vers la

solution. Pour cela, on peut s'inspirer du cas de la conduite et, en particulier pour la variable ϕ , initialiser à partir des conditions aux limites.

En supposant que l'écoulement secondaire de sortie donne une description relativement correcte de l'écoulement secondaire local y compris dans l'aubage, et se donnant par ailleurs une distribution typique de contre tourbillon, nous pouvons par intégration initialiser la perturbation à partir du bord d'attaque. Par contre, la condition de sortie ne s'appliquant pas directement à la déviation, cette technique ne peut être utilisée pour la perturbation ξ de grille d'aubes. Une intégration complète du problème de grille d'aubes est donc nécessaire.



Finalement, nous proposons comme initialisation, un calcul préalable quasi-tridimensionnel dans lequel on suppose que ϕ est nulle, dont on retient la déviation et la vitesse méridienne comme données pour effectuer un premier calcul de l'écoulement secondaire de sortie. Vient ensuite l'initialisation de ϕ comme nous l'avons indiquée, suivie d'un premier calcul d'aube à aube (voir schéma de la figure 24).

Mais à ce stade de l'initialisation, le processus itératif de couplage est déjà amorcé.

4.2 - Processus itératif

L'ordre d'intégration proposé pour l'initialisation semble convenir pour effectuer le couplage S1 - S2 (fig.23-branche A)

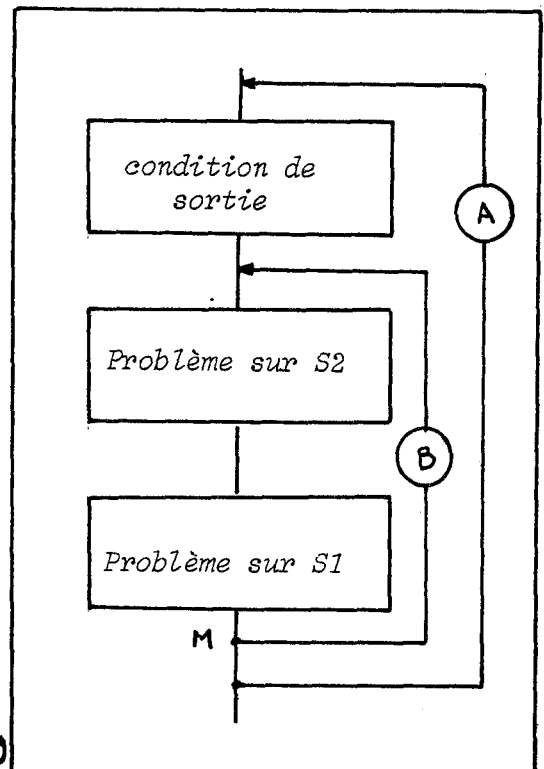


Fig 23. -Organigramme général du calcul.

Compte tenu des valeurs relatives des temps de calcul : unitaire pour les deux premières opérations et légèrement supérieur au nombre d'itérations internes dans le problème d'aube à aube, il semble plus avantageux de donner la priorité à une remise en cause de la condition de sortie à chaque passage sur S1 et S2 (branche A) plutôt que d'affiner le couplage local (branche B en priorité).

La réactualisation de l'écoulement méridien moyen a été placée à la suite du problème de grille d'aubes (Point M).

4.3 - Conclusion

Après avoir précisé les différentes phases du calcul, défini et initialisé un processus itératif, nous pouvons effectuer un calcul afin de confirmer la stabilité du couplage, de montrer le comportement des solutions de chacun des problèmes, ainsi que le type de convergence obtenue.

Chapitre IV

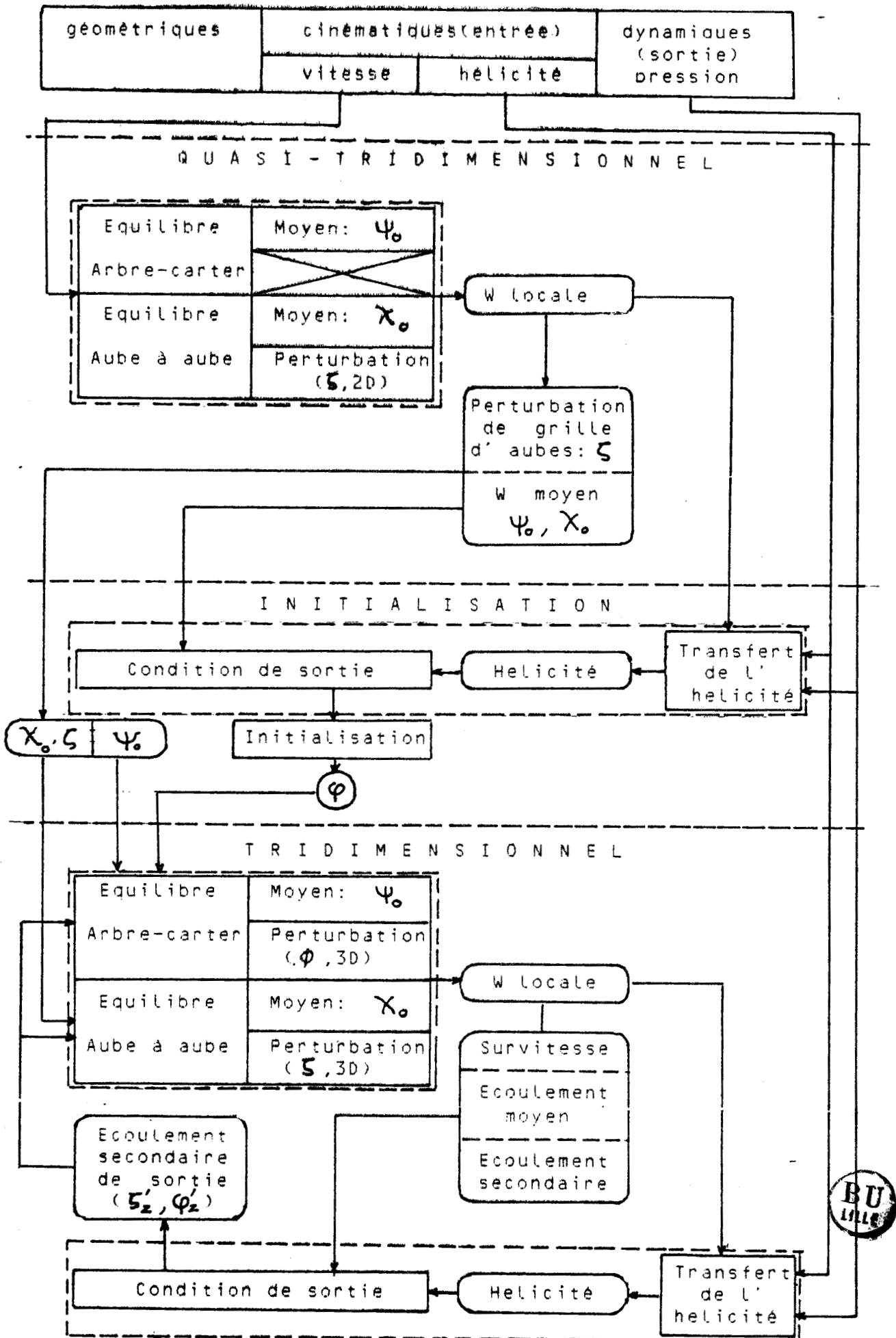
RESULTATS NUMERIQUES

1 - INTRODUCTION

Nous rappelons figure 24 le schéma de calcul de l'écoulement. Pour faciliter la comparaison avec les résultats obtenus jusqu'ici avec les autres méthodes et notamment la méthode quasi-tridimensionnelle, nous avons continué à décomposer l'écoulement en écoulements moyens (méridien, et aube à aube), et en une perturbation globale elle-même décomposée soit en deux perturbations de vrille pour S1 et S2, soit, pour les besoins de la description, en projections sur la direction de l'écoulement moyen (survitesse algébrique) et sur le plan (r, θ) (écoulement secondaire). Cependant, nous précisons que les résultats obtenus sont totalement tridimensionnels, et que la méthode utilisée peut parfaitement, être mise en oeuvre, à partir de la seule décomposition en écoulement entre arbre et carter et écoulement d'aube à aube eux-mêmes tridimensionnels.

Nous nous sommes donnés pour premier objectif d'obtenir des éléments d'appréciation qualitative sur la vraisemblance du champ calculé et sur l'influence des libertés supplémentaires accordées à l'écoulement et des effets non linéaires dus au paramétrage plus complexe que dans le cas de la conduite.

D O N N E E S



Pour cela, il était nécessaire d'éliminer les effets dus à la vrille de l'aubage qui compliquent et contrarient le champ secondaire. Nous avons donc traité l'exemple d'un aubage très simple, de forme hélicoïdale alimenté de façon uniforme.

Nous abordons ensuite sur un exemple plus réaliste pour lequel on dispose de résultats expérimentaux /44/, ce qui nous permet de discuter de la validité de la méthode.

2 - CALCUL DU CHAMP DANS UNE MACHINE A AUBAGE HELICOÏDAL

2.1- Géométrie de l'aubage - Régimes de fonctionnement

Les dimensions : rayons, pas, largeur axiale, inclinaison, ont été choisies de manière à obtenir un effet secondaire contre-rotationnel qui soit très marqué. Cela nous semble être le cas lorsque les trois dimensions du canal interaubes sont du même ordre, et que l'inclinaison de l'aubage est modérée. Nous avons donc choisi un canal interaube allant du rayon unité à 2.5, occupant 1/6 de la circonférence, de largeur axiale unité, et de forme hélicoïdale avec une torsion de 0.7 radian par unité de longueur axiale. L'épaisseur des aubes est nulle.

Plusieurs régimes de fonctionnement ont été testés, tant en pompe qu'en turbine, avec des charges nous permettant de mettre en évidence les effets de la non linéarité des équations sur la solution, sur la convergence, et sur la stabilité propre des modèles traitant des écoulements sur S1 et S2.

2.2- Maillage

Compte tenu du nombre des essais de mise au point et des temps de calcul que cette technique demande, nous avons opté pour un maillage large qui nous a permis de concilier une relative précision et un coût du calcul raisonnable. En effet, le

temps de calcul par itération est proportionnel à la puissance 5 du nombre de points ; il faut en plus tenir compte du fait que le nombre d'itérations croît avec le nombre de points. Ce choix nous a obligé à soigner tout particulièrement la discrétisation, et c'est l'une des raisons qui nous ont permis d'aboutir.

Le domaine est discrétisé en (r, θ, z) sur $8 \times 8 \times 18$ points. Nous avons axialement placé l'aubage du quatrième au dixième point.

2.3 - Description de l'écoulement

2.3.1 - Champ des lignes de courant

Une représentation globale de l'écoulement est faite figure 25 pour deux vitesses de rotation : $\omega_0 = 0,4$ et $0,8$. Cette figure donne une représentation globale satisfaisante de l'écoulement. Plus localement, pour éviter les imprécisions inhérentes à la représentation par fonctions de courant, à l'interpolation qui a été utilisée pour le dessin, nous préférons nous baser sur le champ de vitesse. Pour compléter cette figure, on peut se référer à la figure 29 qui donne les déviations moyennes et une idée de la forme des surfaces S_2 moyennes.

A l'aval de l'aubage, on peut constater que la structure de l'écoulement est assez complexe, et que les surfaces de courant ne sont plus simplement vrillées comme dans /32/, leur forme ne peut plus s'expliquer par la superposition du champ moyen classique, et d'un effet secondaire contre rotationnel tel que celui obtenu dans le cas de la conduite.

Pour un fonctionnement en turbine, le basculement des surfaces moyennes S_2 dans la partie centrale de l'écoulement, (fig 29) indique une prise en charge importante dans cette zone de l'effet secondaire par le champ moyen, ce qui n'est pas envisageable avec une simple superposition. Par contre, il en est

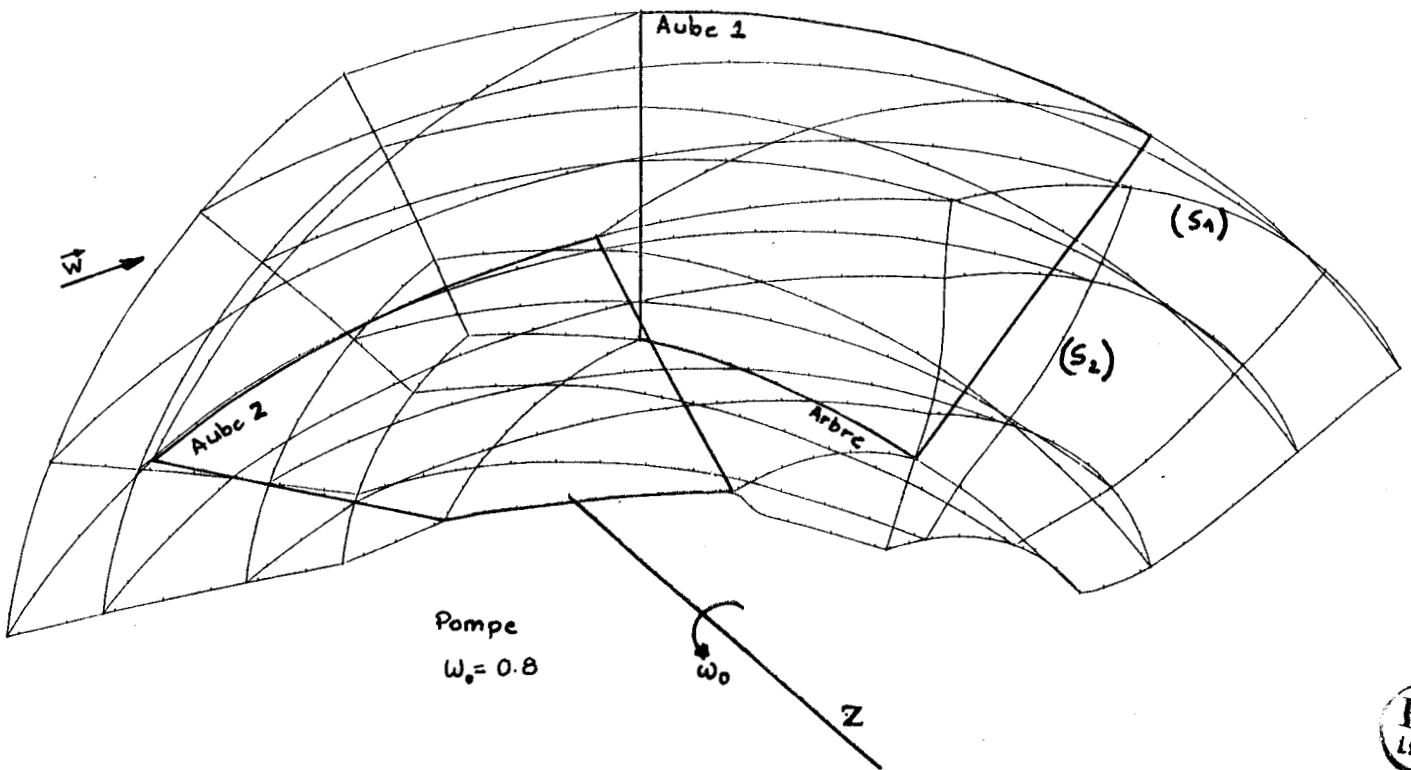
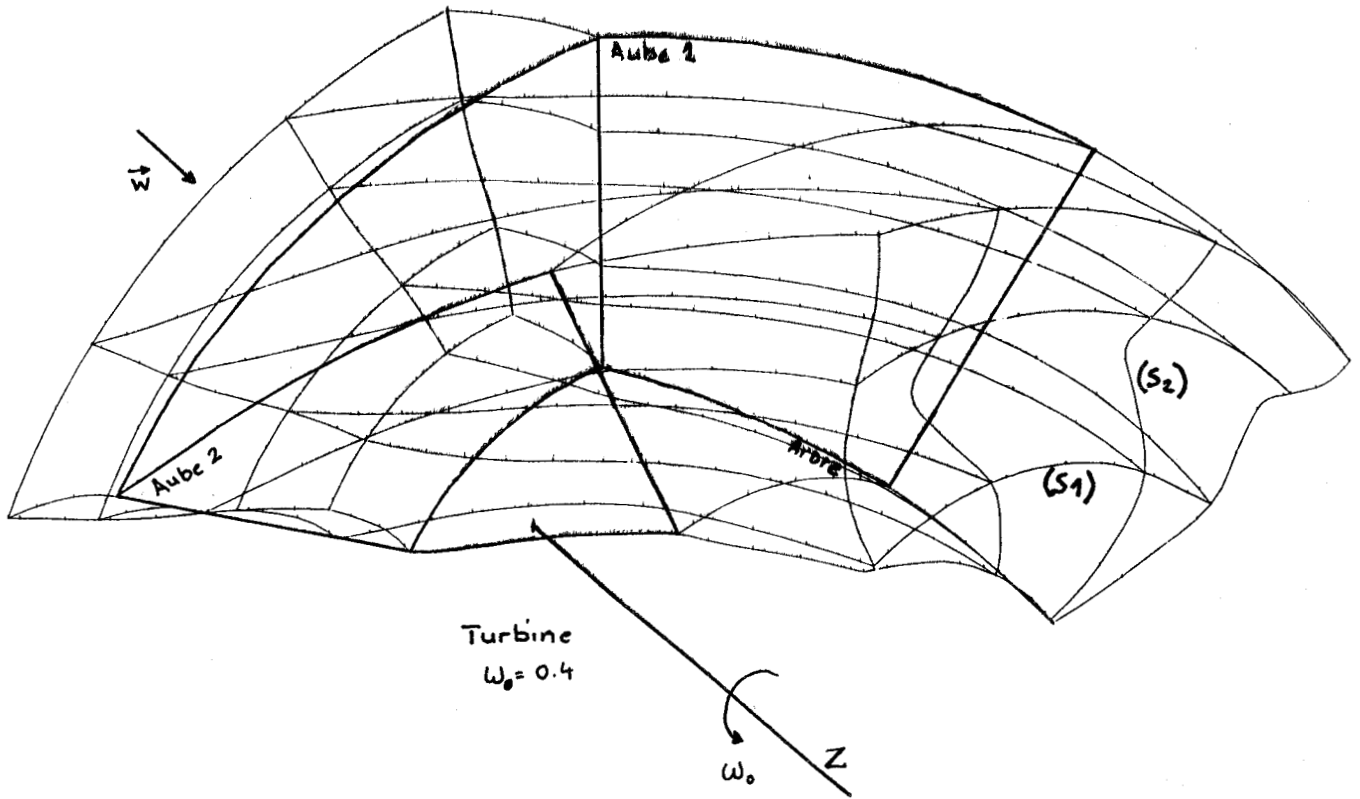


Fig 25. -Lignes et surfaces de courant pour une roue hélicoidale ($\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.7$)



tout autrement sur l'arbre et le carter où cet effet est, comme nous le verrons par la suite figure 32, pris en compte par les perturbations locales. C'est ce qui justifie la forme ondulée des surfaces de courant S2 de la figure 25.

Il en est de même à la localisation près, pour un fonctionnement en pompe. Cette fois l'effet moyen est localisé uniquement sur l'arbre où de toute évidence (fig 29), il dépasse largement ce qui devrait être dû au contre-rotationnel. Partout ailleurs, le champ secondaire, bien que peu visible sur la figure 25 compte tenu de la faible charge, peut être reconnu comme proche de ce l'on a obtenu pour une conduite.

D'après la figure 29, il apparaît évident que le champ moyen joue dans les deux cas (pompe ou turbine) un rôle non négligeable dans l'effet contre-rotationnel, mais avec une importance très variable selon la proximité des parois (arbre et carter), et le régime de fonctionnement.

Ces premiers résultats montrent bien la géométrie de l'écoulement hors aubage, ainsi que l'imbrication des contributions moyennes et locales des grandeurs. Mais les grands déplacements des surfaces de courant résultent de phénomènes plus aigus, localisés dans l'aubage, que l'on ne peut faire apparaître que sur le champ de vitesse.

2.3.2- Champ de vitesse

Sur les figures 26.a et b sont représentées la survitesse algébrique axiale et la vitesse radiale dans les plans des bords d'attaque et de fuite.

A l'entrée de l'aubage (fig 26.a)

Dans la section d'entrée de l'aubage, on relève surtout des différences de vitesse ($w_z - w_{z0}$) très importantes sur les aubes, et un rapport de vitesses extradados/intradados de 3 pour le

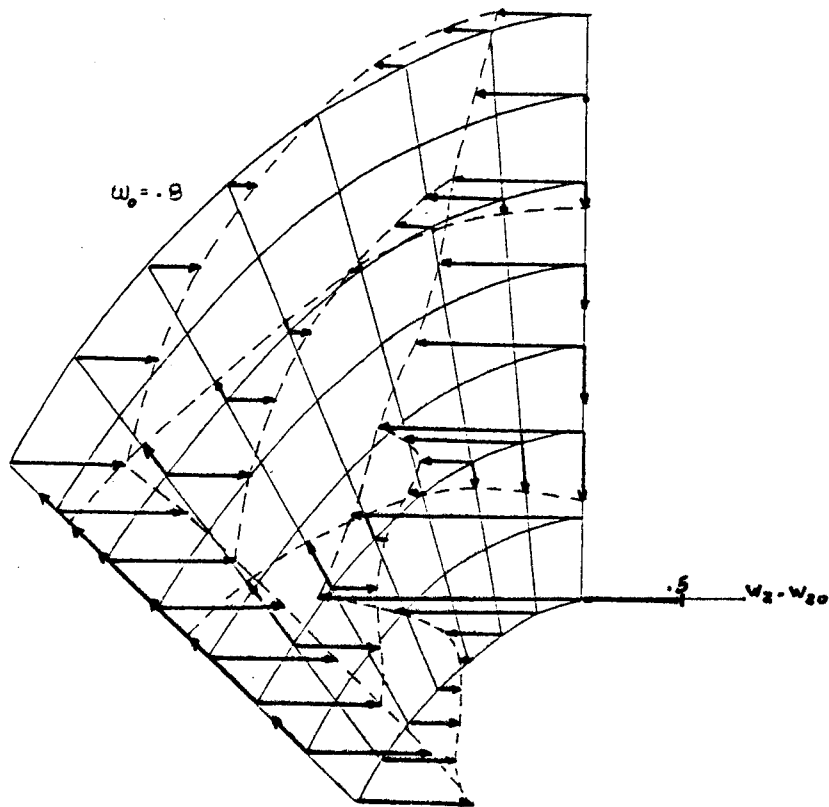
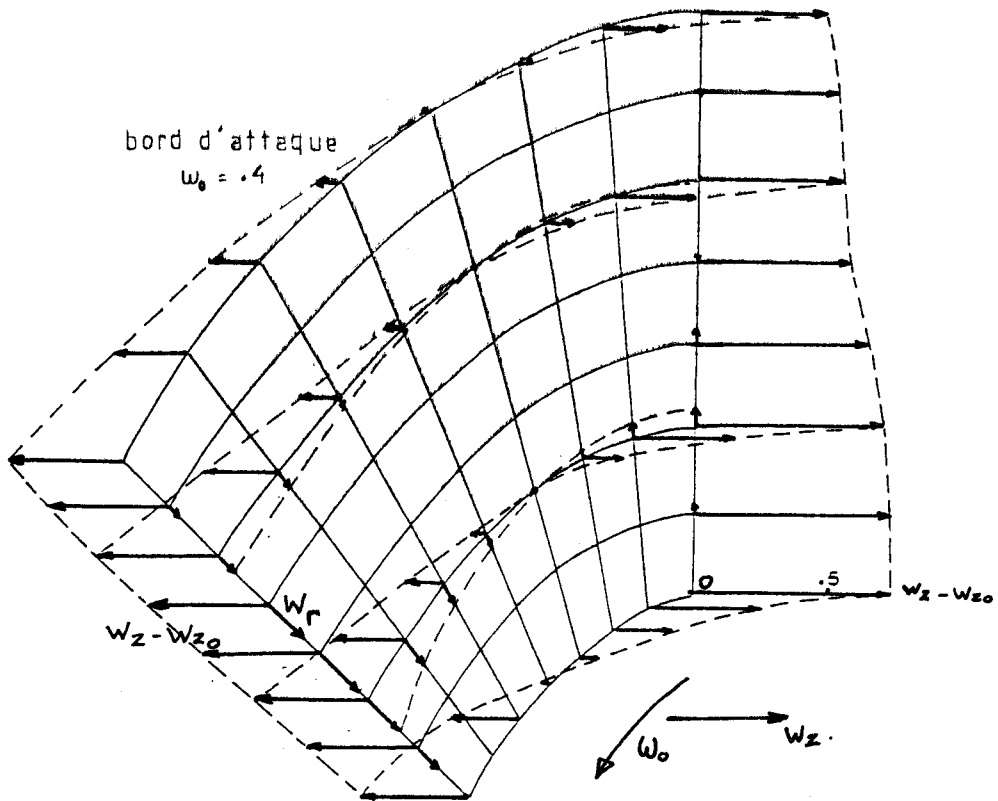


Fig 26.a,b -Ecart de vitesse méridienne locale (w_z, w_r) par rapport à la vitesse uniforme unitaire.



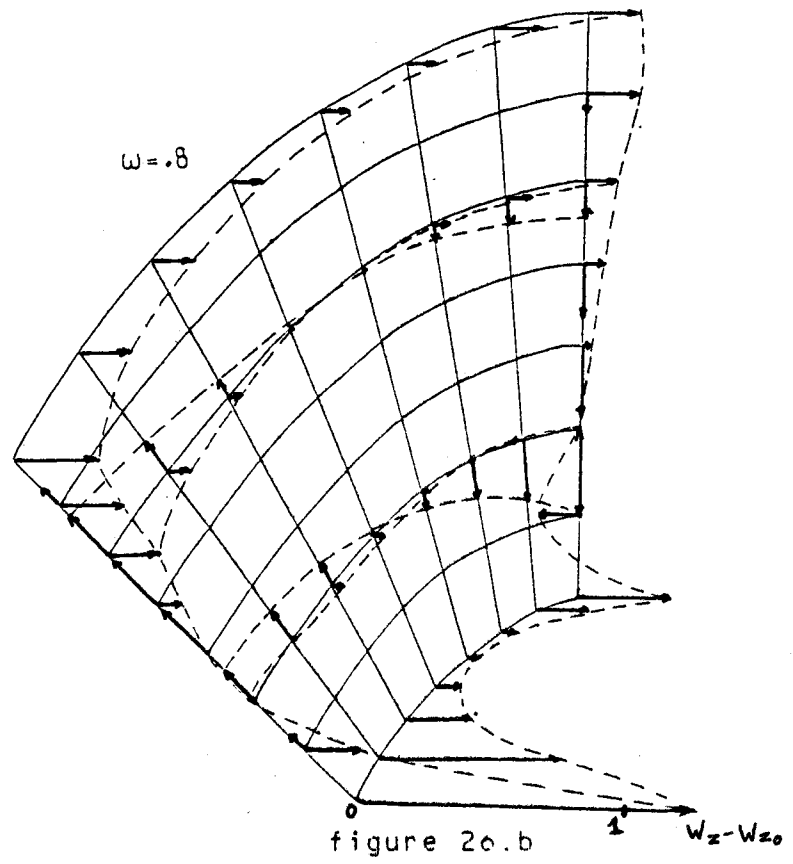
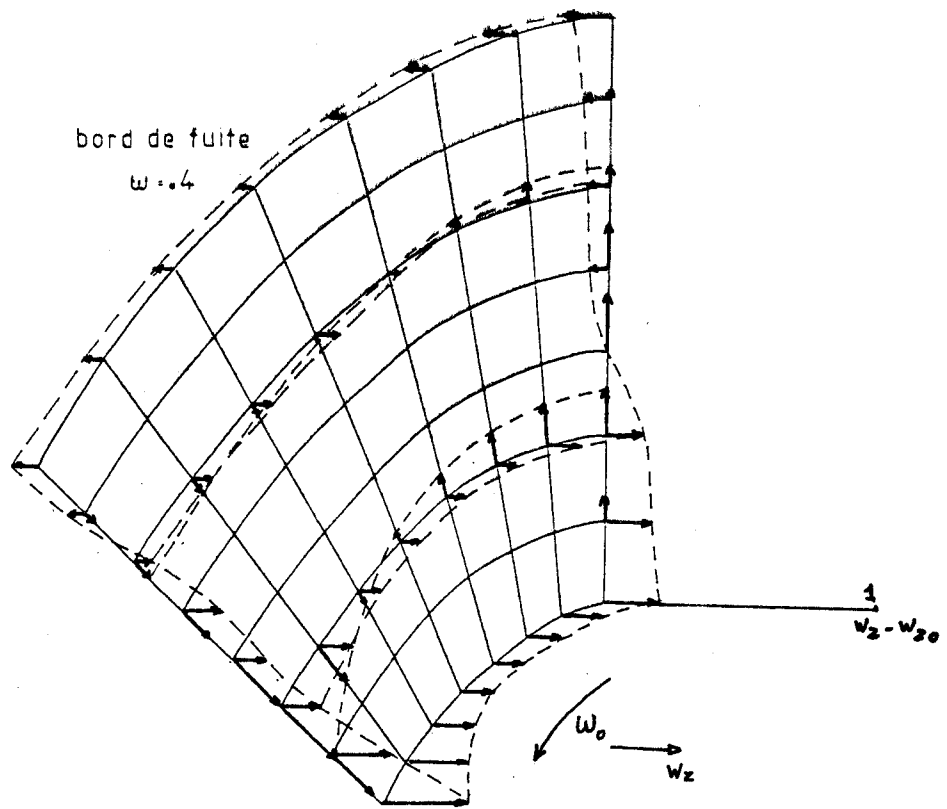


figure 20.b



fonctionnement en turbine ($\omega_0 = 0,40$). Par contre les vitesses radiales restent faibles, inférieures à 0,2 à mi-hauteur d'aubage pour le même ω_0 . On pourrait donc supposer que l'on est près du résultat purement bidimensionnel. En fait, il n'en est rien, et nous avons obtenu des écarts de vitesse ($w - w_{z0}$) locale de 100 % pour $\omega_0 = 0,40$ et de 130 % pour $\omega_0 = 0,80$ supérieures (soit respectivement 0,27 et 0,10 en vitesse absolue) sur l'arbre à ce que donne le modèle quasi-tridimensionnel.

Sur le carter ces différences sont plus faibles. Elles sont cette fois supérieures de 15 % pour $\omega_0 = 0,40$ et 2 % pour $\omega_0 = 0,80$. A mi-hauteur, elles sont aussi plus élevées, de l'ordre de 20 à 30 %. On peut donc dire que la survitesse algébrique locale et le gradient de vitesse autour du bord d'attaque sont globalement plus importants avec le modèle tridimensionnel.

Au bord de fuite, alors qu'en bidimensionnel, on obtient des vitesses axiales quasiment uniformes d'une aube à l'autre, notre modèle donne des écarts de vitesse de l'ordre de 20 % par rapport à la vitesse moyenne, et ceci suivant des distributions très variables avec le rayon. Les vitesses radiales sont importantes de 0,26 pour $\omega_0 = 0,40$ à 0,1 pour $\omega_0 = 0,80$. L'ordre de grandeur de la vitesse radiale moyenne est donc beaucoup plus faible que celui de la vitesse radiale locale. Leur rapport est respectivement de 0,08 et 0,02. On voit donc que l'équilibre local tridimensionnel induit un champ de vitesse important.

2.3.3- Effet secondaire au bord de fuite

Bien que la terminologie "effet secondaire" ne soit plus adaptée aux phénomènes rencontrés que l'on ne peut plus considérer comme mineurs, ni superposables, ni conformes à ce que

L'on trouve sous ces termes dans la littérature, nous continuerons à appeler ainsi les effets tridimensionnels transverses décrits par la suite.

L'un de ces effets que nous avons constaté en examinant le champ de vitesse lorsqu'on se place près de l'arbre, au voisinage du bord de fuite, dans le cas d'un fonctionnement en pompe (figure 27) est à ce propos très significatif. Il permet de montrer au sujet de la superposition, l'importance du fait d'appliquer la conservation du volume et la condition de KUTTA au champ complet.

Nous avons pu mettre en évidence l'effet de l'écrasement sur l'arbre du flux descendant vers l'arbre le long du bord de fuite côté intrados et inversement l'effet de succion côté extrados. Cet effet s'accompagne d'une importante diminution de la vitesse radiale dès la sortie de l'aube, ce qui correspond à une réorganisation de l'écoulement tenant compte de l'adaptation possible de la forme des "sil-lages". Cette réorganisation n'est pas purement locale, elle implique les grandeurs moyennes, à travers lesquelles elle se répercute profondément dans l'aube.

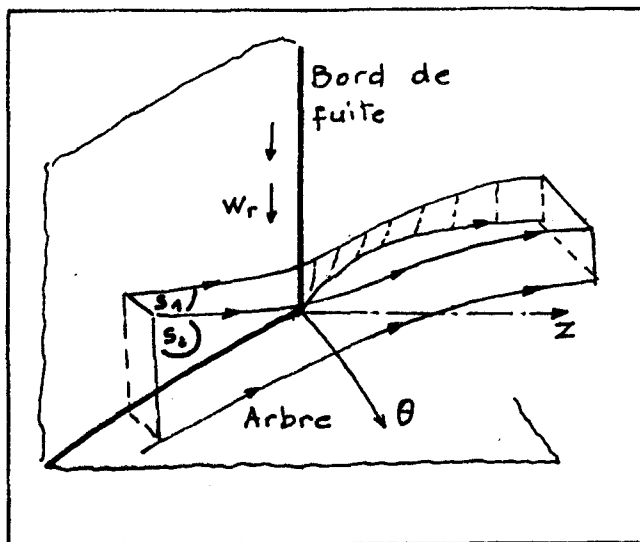


Fig 27. -Effet radial au pied de l'aube.

2.3.4- Quelques remarques sur les gradients de pression et de vitesse obtenus à proximité du bord d'attaque

Etant donné le maillage adopté au voisinage du bord d'attaque et la discrétisation développée au chapitre III, les résultats ne sont valables dans cette zone qu'à partir d'une échelle que l'on peut apprécier à travers les quelques remarques suivantes :

Tout d'abord, l'examen de la figure 25 et l'allure des lignes de courant qui y sont représentées nous montrent que le maillage et la discrétisation permettent de rendre compte, au moins qualitativement, de la présence au bord d'attaque d'une singularité de type point d'arrêt, et donc de forts gradients de vitesse et de pression. Ces gradients se condensent numériquement à la frontière et se traduisent en discontinuités. C'est pourquoi nous obtenons numériquement une discontinuité de vitesse radiale qui décroît lentement lorsque l'on s'éloigne du bord d'attaque figure 28.a .

Par contre, en ce qui concerne la pression ou le module de la vitesse, nous obtenons de meilleurs résultats . On a

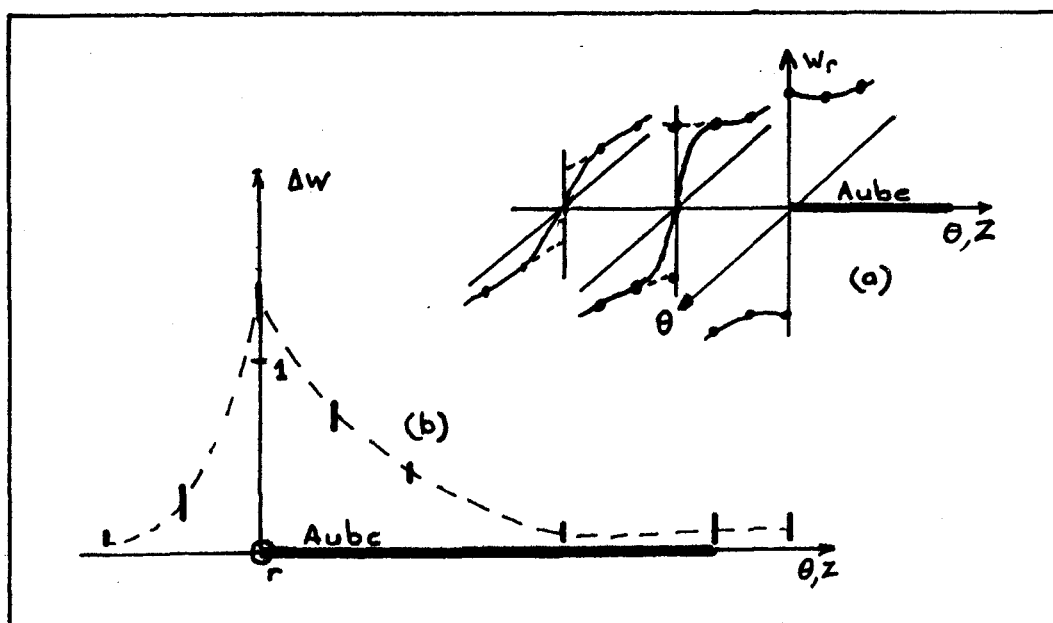


Fig 28. -Discontinuité de vitesse (ΔW), et de vitesse radiale (W_r), de canal à canal.

représenté sur la figure 28.b la distribution de discontinuité de vitesse sur les points du maillage situés sur l'aubage ainsi qu'à l'amont et à l'aval.

On constate qu'à l'amont, la discontinuité est réduite de $3/4$ chaque fois que l'on remonte d'un point sur le maillage. La continuité est donc relativement bien satisfaite dans cette zone. A l'aval, il subsiste une faible discontinuité due comme précédemment à la vitesse radiale qui intervient ici d'une façon plus importante dans le calcul de la pression. Cette erreur est imputable à la non conformité exacte de la vorticité locale.

Ces quelques remarques nous permettent de penser que ces effets numériques n'ont pas une portée importante sur le résultat et qu'ils peuvent être atténués en resserrant le maillage.

2.3.5- Conclusion sur cette première étude du champ de vitesse

Cette première analyse du champ nous montre bien que la structure de l'écoulement tridimensionnel à l'intérieur et à l'extérieur de l'aubage est complexe, et que la solution satisfait un équilibre général à travers de nombreuses interactions dont il est difficile de se faire une représentation globale. L'examen des grandeurs moyennes va nous permettre de tirer des résultats et des éléments de comparaison à caractère plus général.

2.4- Description du champ moyen

Nous nous intéressons ici à la déviation, à la vitesse débitante et à l'hélicité moyenne. La déviation et la vitesse débitante sont des éléments de comparaison simples entre les solutions quasi-tridimensionnelle et tridimensionnelle. Cette comparaison nous permet de mettre immédiatement en évidence les

différences très importantes et même fondamentales qu'il y a globalement entre ces solutions. L'examen de l'hélicité moyenne nous permet par ailleurs de montrer l'interdépendance qui existe entre champ moyen et effets secondaires.

2.4.1- Déviation moyenne

La figure 29 représente les déviations en fonction du rayon pour deux régimes de fonctionnement en turbine et deux régimes en pompe.

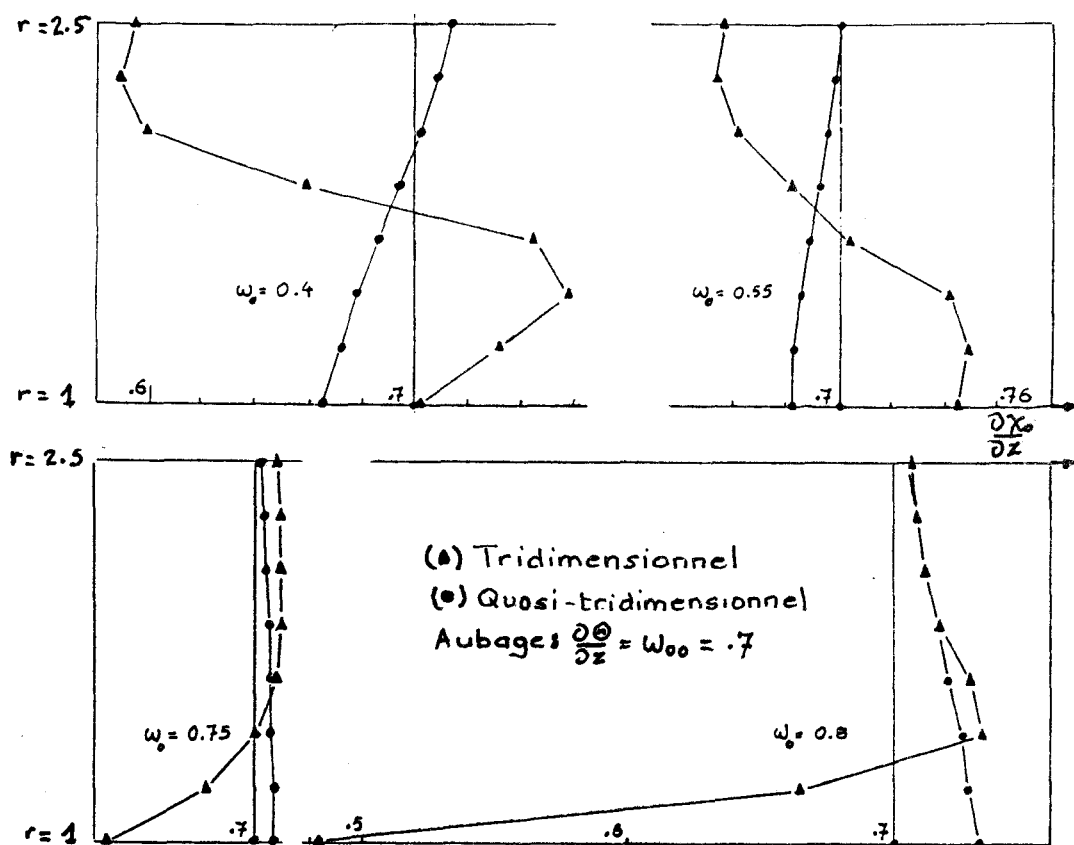


Fig 29. -Distribution radiale de déviation.

a) Phénomène de surdéviation

La première particularité et l'un des faits marquants des solutions tridimensionnelles est l'importance de la déviation que l'on peut observer au voisinage de l'arbre. Elle se justifie sur la figure 30 sur laquelle on a représenté

L'effet sur l'arbre, près du bord de fuite, des sources et puits dûs à l'écoulement secondaire contre rotationnel que l'on a évoqué figure 27. Par l'intermédiaire de la conservation du volume, ces puits et sources permettent à la direction du jet aval de dépasser la tangente au profil.

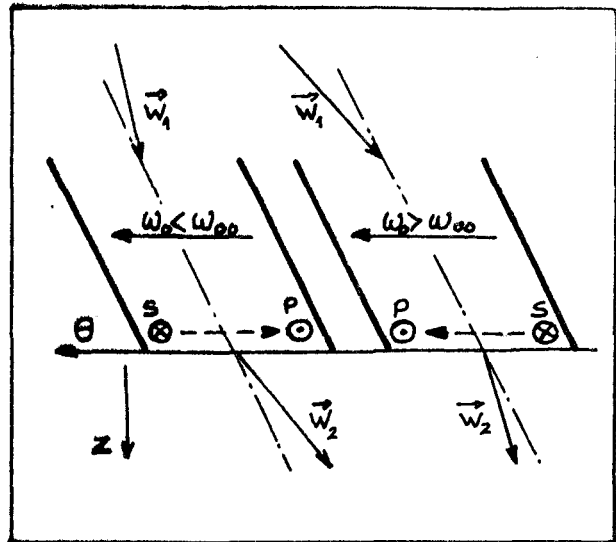


Fig 30. -Effets de source et de puits justifiant les surdéviations obtenues.

Au plan dynamique, cette surdéviation correspond aussi à la nécessité de réaliser l'équilibre radial sur les aubes ; En effet, du fait que le pas et la quantité de mouvement périphérique échangée augmentent avec le rayon sur lequel on se place, la différence de pression d'aube à aube a aussi tendance à croître avec le rayon. Une augmentation de la déviation sur l'arbre permet un rééquilibrage des gradients radiaux de pression pris sur les aubes. Une telle surdéviation n'est pas observée sur le modèle classique quasi-tridimensionnel, (celle faible parfois constatée n'est due qu'à un fort ralentissement axial). Cette particularité ne s'applique pas comme on a déjà pu le percevoir d'après le champ de lignes de courant, de la même manière dans les deux régimes de fonctionnement.

Cas d'une pompe

Dans le cas d'un fonctionnement en pompe, on remarque surtout une déviation très importante sur l'arbre, déviation qui a tendance à augmenter très fortement, avec un taux lui-même croissant avec l'incidence pour atteindre rapidement des valeurs très élevées (rapport déviation sur incidence de l'ordre de 3.5 pour $\omega_0 = 0.80$). Cet effet a déjà été mis en évidence dans /44/ où des gradients de déviation aussi importants ont été obtenus à la

fois numériquement et expérimentalement dans un cadre certes différent (turbine - aubage très cambré), mais néanmoins soumis à des hypothèses analogues.

Par contre cet effet est inexistant sur le carter, près duquel la direction prise par le fluide est très proche de celle des aubes. La différence de pression d'aube à aube y est donc plus faible, l'équilibre radial presque satisfait par l'écoulement quasi-tridimensionnel.

Cas d'une turbine

Dans le cas d'un fonctionnement en turbine, la surdéviation est moins importante sur l'arbre que dans le cas d'une pompe, et disparaît même lorsque la charge devient assez forte. Elle se concentre alors au tiers de la hauteur d'aube pour laisser place sur l'arbre à une légère sous-déviation. Par contre, une zone épaisse de sous-déviation très marquée s'installe près du carter. La partie centrale du canal devient ainsi une zone d'écoulement moyen très cisailé (voir la figure 29).

Bien que les explications que nous donnons ne puissent justifier en détail les distributions obtenues, il apparaît incontestable que ce sont là les résultats d'effets pleinement tridimensionnels non seulement dus, mais aussi contrôlés par le modèle, car ils sont incompatibles avec (entre autres) une condition de KUTTA appliquée uniquement au champ bidimensionnel.

2.4.2- Rééquilibrage global de la distribution de déviation

Une autre particularité des solutions obtenues est l'inversion des tendances globales dans les distributions de déviation par rapport aux résultats obtenus avec le modèle quasi-tridimensionnel. Ceci a pour effet de redistribuer la répartition

radiale d'énergie échangée entre fluide et aubage, et ceci malgré l'uniformisation de la vitesse débitante.

2.4.3 - Vitesses axiale et radiale moyennes

Sur les figures 31.a et 31.b, est représentée la distribution de vitesse axiale moyenne W_{z0} pour différents régimes et différentes stations axiales. On n'y constate pas de grandes différences entre le cas quasi-tridimensionnel et tridimensionnel, tant dans la distribution radiale qu'axiale. De même pour les vitesses radiales, l'écoulement méridien moyen n'est donc pas véritablement remodelé avec le modèle tridimensionnel, qui, par contre, influence fortement l'écoulement secondaire et notamment l'écoulement de sortie.

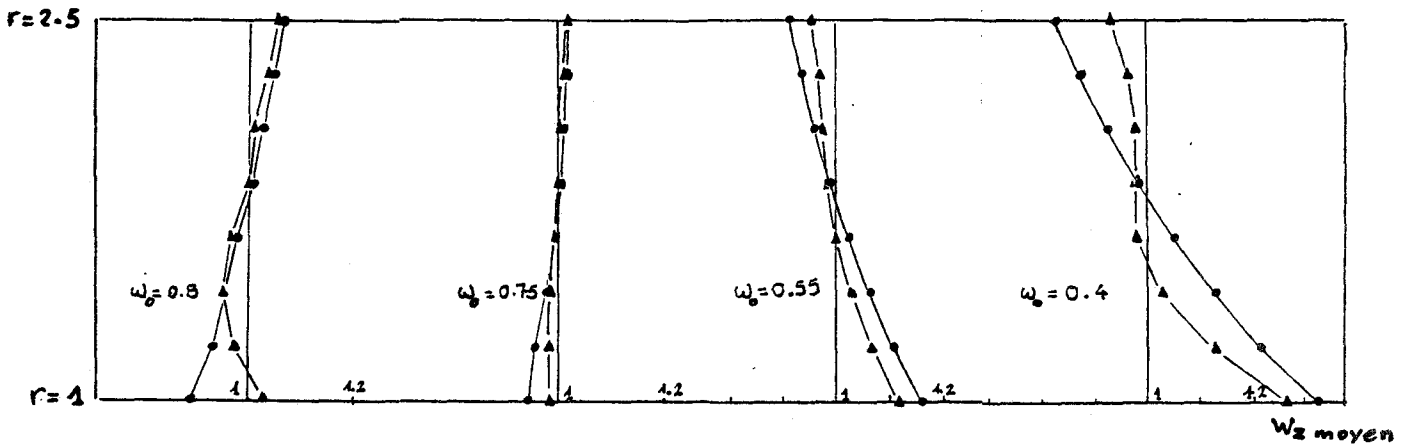


Figure 31.a

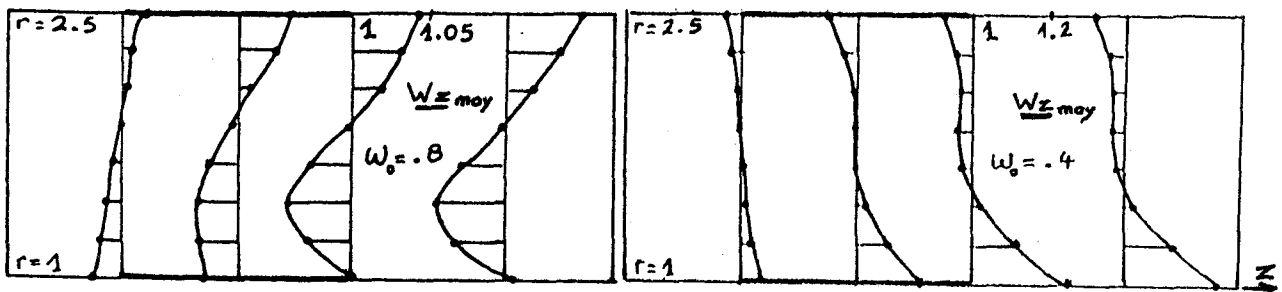


Fig 31.a,b -Distributions des vitesses axiales:à l'aval pour différentes vitesses de rotation (a),et à différentes stations axiales (b)

2.5 - Vérification de la condition de sortie

Dans l'élaboration de la condition de sortie, se posent plusieurs problèmes dont le problème des singularités de coins, et celui de l'équilibre entre vorticités moyenne et locale.

2.5.1 - Problème de l'hélicité et des singularités de coin

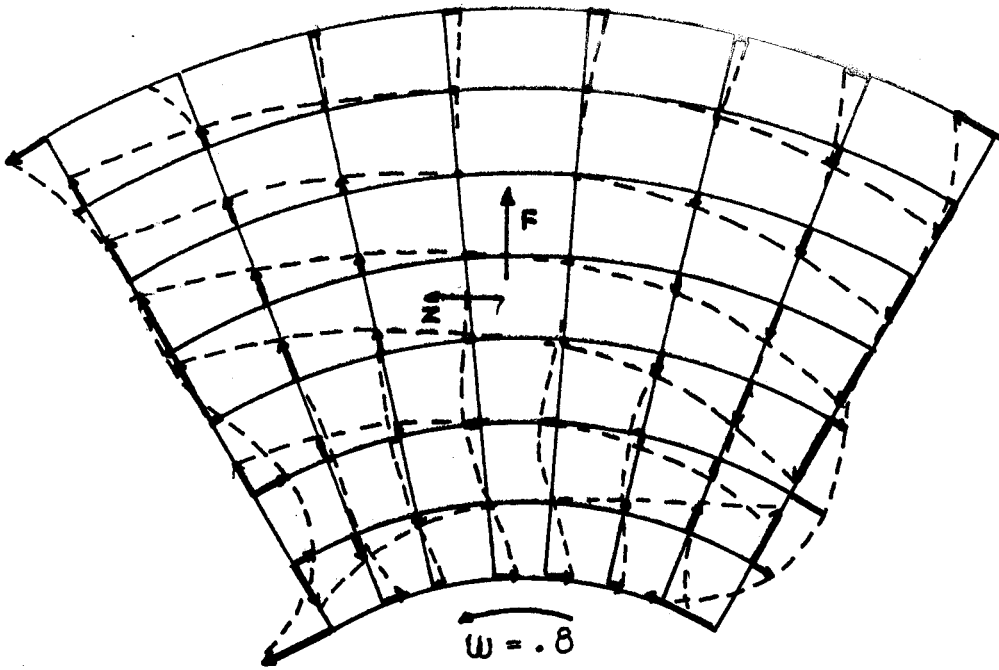
Comme nous l'avons vu au chapitre II, le calcul de l'écoulement secondaire dans le plan de sortie présente une difficulté qui est due aux singularités ou effets de coins qui, dans le cas d'un écoulement libre (hors aubage), prennent une importance toute particulière.

Une méthode du type (u, v, ω) est proposée au chapitre II, une autre technique (ψ, ω) a aussi été testée. Elles ont donné des résultats quantitativement différents, mais néanmoins très étroitement apparentés par l'allure des lignes d'émission obtenues, dont une représentation typique pour la perturbation seulement est faite figure 32.

Les vorticités, représentées figure 33, diffèrent. Mais il faut remarquer que dans le cas traité (écoulement irrotationnel à l'entrée), les vorticités parasites sont dues uniquement aux erreurs de discretisation.

Dans tous les cas leur flux reste avec le maillage utilisé, inférieur à 10 %, du flux correspondant au rotationnel d'entraînement.

Par ailleurs, on a pu vérifier que les effets de ces vorticités parasites sont rapidement atténués avec la distance. Aussi, faute de raffiner le maillage, nous avons choisi de rejeter le plan de sortie aussi loin que possible de l'aubage, ce



Allure du champ (F, z)

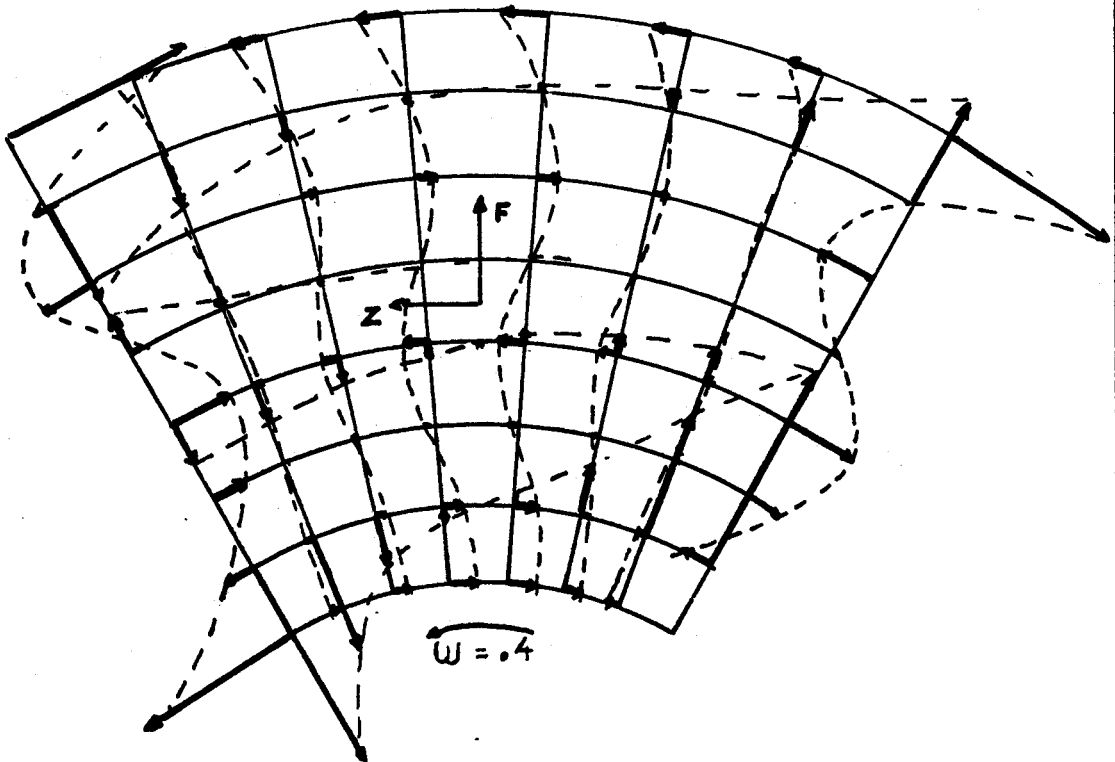


Figure 32

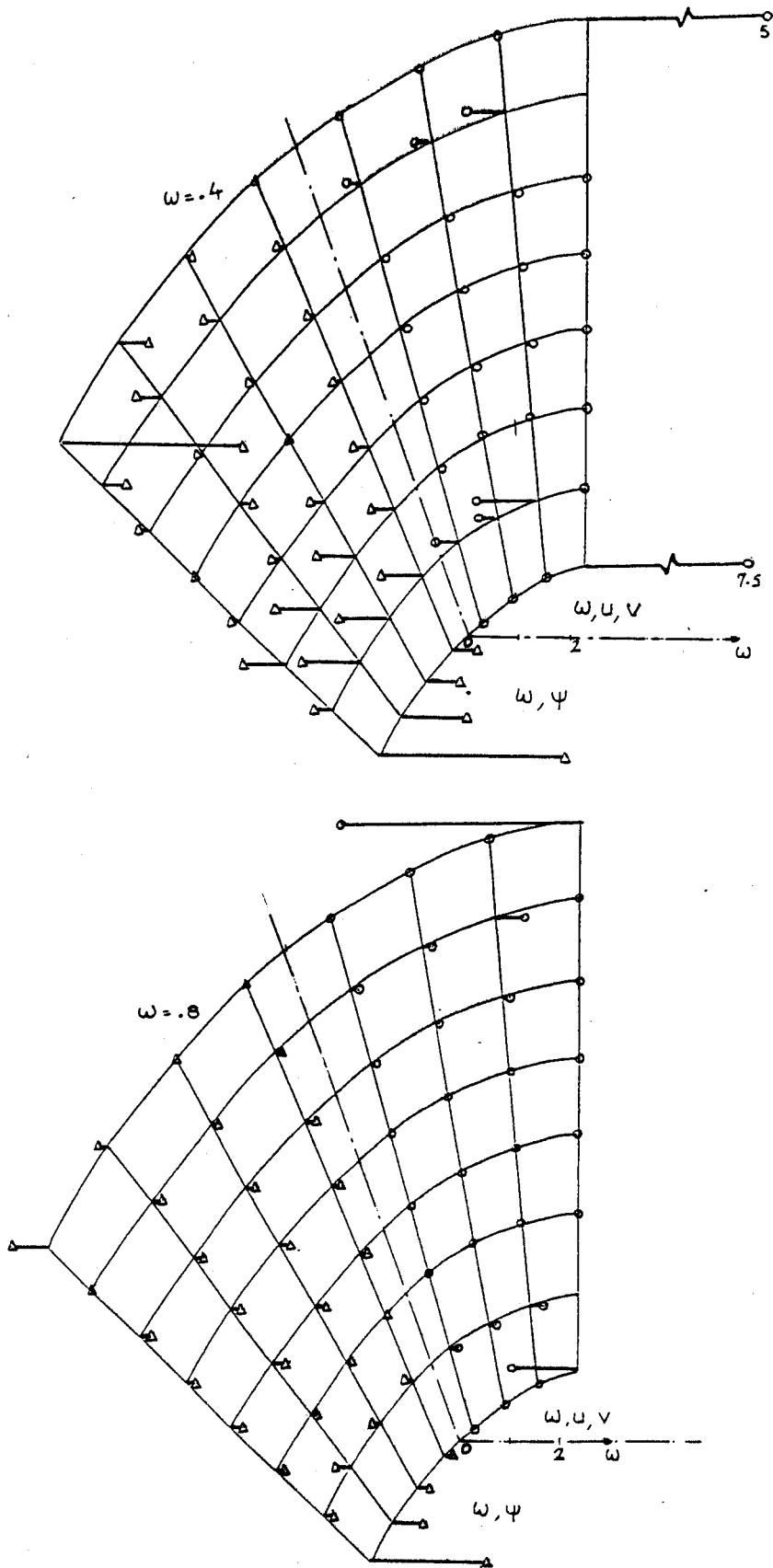


Fig 33. -Vorticités secondaires obtenues. (Elles devraient être nulles.)



qui néanmoins ne nuit pas à l'efficacité de la condition de sortie.

Il s'est avéré que cette précaution réduit considérablement l'influence de la singularité parasite sur la solution globale du problème. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre II, ce type de singularité a, à l'inverse de la vorticité naturelle, une portée très limitée axialement (de façon visible sur 2 à 3 points du maillage). Le modèle filtre en fait la vorticité induite par la condition de sortie.

2.5.2 - Vorticité axiale moyenne à la sortie

L'allure de l'écoulement secondaire moyen ainsi que les distributions de rotationnel axial absolu sont représentées figure 34. On peut constater que le rotationnel moyen (●) local présente des différences très importantes par rapport à ce que l'on aurait pu avoir avec le modèle classique (---).

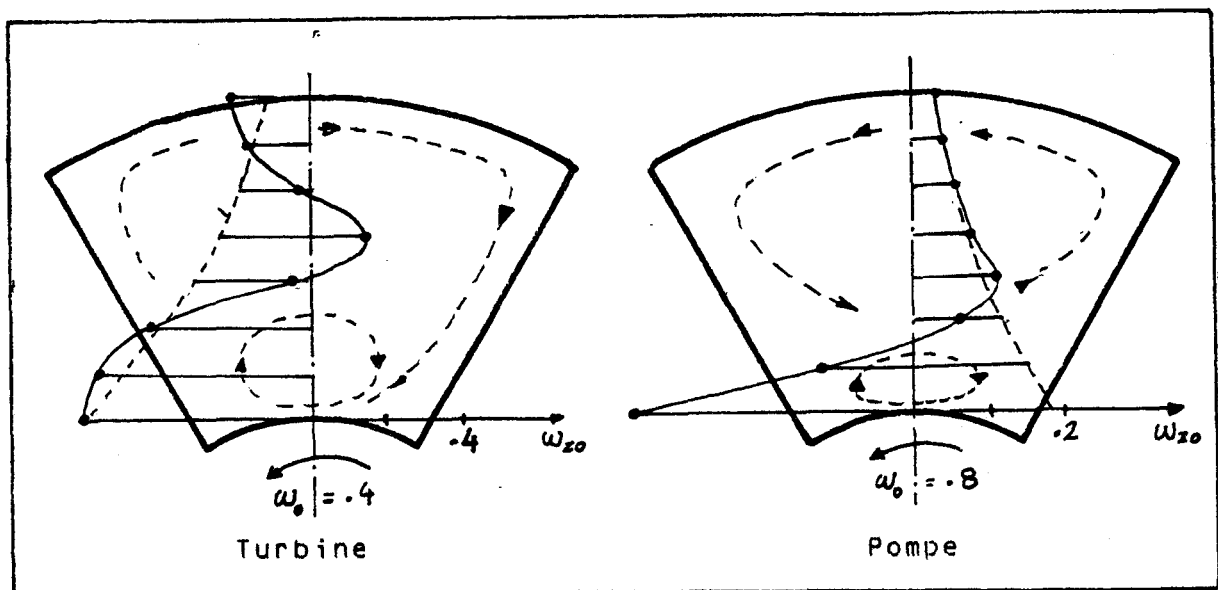


Fig 34. -Distribution radiale de vorticité moyenne.

L'écoulement moyen peut effectivement donner un rotationnel réduit ou inversé en certains endroits tels que sur l'arbre (en pompe) et au centre de la veine (en turbine), mais

peut, par ailleurs, tout aussi bien l'augmenter dans des proportions importantes. Il apparait donc ici que l'équilibre entre contributions tourbillonnaires moyennes et locales ne correspond pas comme c'est le cas en conduite, à un état où l'une des contributions corrigerait dans la limite de la vorticité d'entraînement ou d'alimentation, un rotationnel déjà bien vérifié par l'autre contribution.

C'est ce qui justifie l'intérêt que l'on porte à la décomposition des grandeurs en parties moyennes et locales, et qui nous permet de mettre en évidence le réarrangement profond de l'écoulement.

2.5.3- Equilibre secondaire

C'est un problème qui se pose non seulement dans le plan de sortie, mais aussi dans tout le volume, et qui fait intervenir d'autres facteurs. En effet, cet équilibre est non seulement régi par la condition de sortie, mais aussi par les multiples interactions que le modèle établit entre les grandeurs. Ces liens ont une "rigidité" et une prédominance relative qu'il est difficile d'apprécier. Par l'étude de la convergence, nous allons pouvoir apporter quelques précisions sur leur nature et les comparer à ceux qui existent dans les modèles classiques.

2.6 - Evolution de la solution-Convergence

2.6.1 - Convergence du processus itératif

Si nous libérons le couplage à partir d'une solution quasi-tridimensionnelle, on constate d'abord que l'état des grandeurs évolue peu au départ. Pour un fonctionnement en pompe, l'évolution de la déviation sur l'arbre est très lente et ne commence à se stabiliser qu'au terme de 60 itérations, après avoir décrit quelques fluctuations qui correspondent à une lente modification de l'organisation de l'écoulement (fig. 35).

Il en est de même pour un fonctionnement en turbine. On assiste à un large battement suivi de quelques fluctuations. Ces fluctuations se présentent souvent comme l'effet de déplacement de zones à forte (ou faible) déviation.

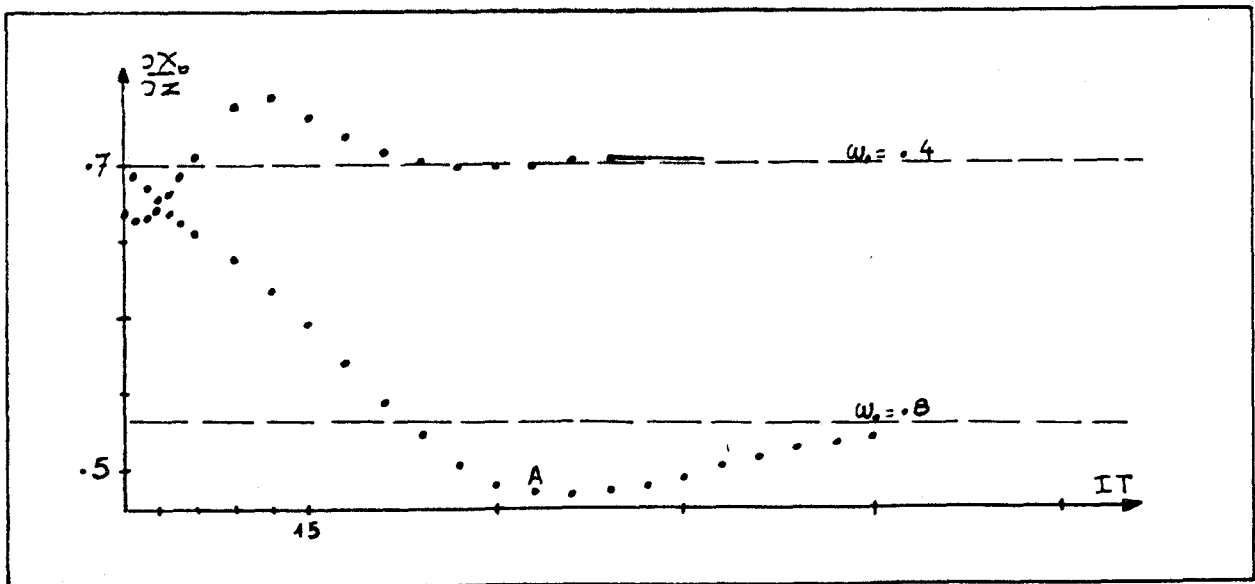


Fig 35. -Evolution de la solution au cours du calcul.

Il n'apparaît pas possible, après examen de ces évolutions, d'identifier un comportement précoce de type exponentiel qui pourrait satisfaire une condition simple ne faisant intervenir qu'une grandeur unique. Il apparaît plutôt que si loi d'évolution il y avait, elle serait plus proche de celles qui traduisent un phénomène de propagation plutôt que d'amortissement. C'est ce qui nous obligerait si nous voulions mettre en oeuvre une technique d'accélération de convergence, à nous baser sur un grand nombre d'états, ce qui compte tenu de la dimension de grandeurs est difficile.

Finalement il apparaît que le lien existant entre la partie moyenne de la vorticité et celle qui est due à la perturbation est apparemment très relâché, mais ceci peut être dû à un phénomène de propagation notamment des conditions aux limites.

2.6.2 - Propagation des données imposées par la condition filtre

Nous avons constaté d'après l'évolution des résultats, que les "informations" transmises aux perturbations par la condition de sortie remontent lentement vers l'amont pour atteindre après un certain nombre d'itérations, le bord de fuite et plus tard l'aubage. Inversement, les données moyennes utilisées dans l'élaboration de la condition filtre sont transmises instantanément. C'est, nous semble-t-il, la raison du flottement constaté précédemment, et l'apparence d'un manque de couplage fort entre les parties moyennes et locales des grandeurs, en particulier de l'hélicité. C'est aussi la raison pour laquelle, la réactualisation de la condition filtre dans le processus itératif a comme nous avons pu le constater, aussi peu d'influence immédiate sur la déviation, bien que cette condition ait à terme un rôle primordial à jouer.

Ces phénomènes, associés aux effets non linéaires que nous avons pris en compte, rendent l'étude de la convergence difficile, mais enrichissent le modèle et permettent d'aborder et de rendre compte des problèmes d'instabilité numériques et physiques.

2.6.3 - Limite de stabilité

Lorsque la déviation devient très importante, une instabilité se manifeste au niveau du calcul de l'écoulement d'aube à aube. Il est établi d'après les résultats que le couplage $S1 - S2$ n'est pas au sens linéaire, directement responsable de cette instabilité. Les perturbations et n'en subissent les effets que faiblement et à retardement.

Le déclenchement de cette instabilité survient lorsque la déviation dépasse une valeur critique, ce qui pour une charge plus forte pourrait se produire en A (figure 35). On peut en

effet affirmer que compte tenu de l'amplification (supérieure à 5 dans les exemples traités), la manifestation de l'instabilité suit de très près l'instant pour lequel les conditions en ont été satisfaites. On peut penser que cette instabilité nous indique l'existence d'un phénomène réel, soit de transition vers un autre régime instationnaire, soit de bifurcation vers un autre état d'équilibre hors de portée du modèle.

2.7 - Conclusion sur ce premier calcul

Nous pouvons tirer de cet examen un certain nombre de conclusions portant d'une part sur la vraisemblance et la qualité des résultats obtenus, et d'autre part, sur la comparaison de notre modèle avec le modèle quasi-tridimensionnel.

2.7.1 - Vraisemblance et qualité des résultats

Nous avons vu que le calcul de la solution revient à établir un équilibre général entre les parties moyennes et locales du champ à travers les nombreuses dépendances que le modèle crée entre les grandeurs. Ainsi, nous avons, par exemple, entre l'effet secondaire et la déviation une double dépendance, l'une, localisée dans l'aubage lie la déviation au flux secondaire radial par la condition de KUTTA et l'équation de continuité, l'autre, localisée dans le plan de sortie, lie le gradient de déviation au champ secondaire local.

Il résulte de ces dépendances des effets qui atteignent et dépassent en cohérence ce que les spéculations laissaient prévoir. Parmi ces effets, nous pouvons citer les vitesses radiales importantes, la surdéviation sur l'arbre et la distribution à fort gradient de déviation. Sur ce point, la distribution, obtenue sur l'arbre pour un fonctionnement en pompe qui paraît être la moins vraisemblable, a été, par ailleurs /44/, mise en évidence à la fois numériquement et expérimentalement.

2.7.2. Comparaison des résultats

La comparaison des résultats avec ceux du modèle quasi-tridimensionnel montre, que bien qu'il n'y ait pas désaccord systématique, de grandes différences apparaissent dans les distributions de déviation.

Ces différences, bien que présentant localement un caractère singulier, ont une tendance globale à uniformiser radialement l'échange d'énergie prédite par le modèle, et de ce point de vue vont dans le sens de l'amélioration de la vraisemblance des résultats.

Il nous est aussi possible d'affirmer que, compte tenu de la lenteur et du flottement qui caractérisent la convergence, les résultats obtenus après quelques itérations ne sont guère plus proches de la solution tridimensionnelle que ceux, quasi-tridimensionnels qui initialisent le processus itératif. De plus l'évolution ne va pas toujours dans le bon sens lors des premières itérations. Ainsi, il semble bien qu'une correction en retour du champ moyen par superposition d'un champ secondaire, ou qu'une correction basée sur la non vérification des équations locales ne peuvent donner dans le cas traité, une solution aussi riche que la solution tridimensionnelle.

Enfin, des problèmes de stabilité autres que ceux liés aux conditions aux limites sont apparus notamment pour un fonctionnement en pompe. Nous ne pouvons pour l'instant conclure sur la signification de ces phénomènes numériques. Une confrontation modèle-expérience s'avère nécessaire, tant pour nous aider à conclure sur cette instabilité que pour confirmer les résultats acquis sur ce premier calcul.

3-RESULTATS CONCERNANT UNE MACHINE EXISTANTE

3.1-Géométrie de la pompe

3.1.1-Géométrie réelle-Hypothèses

Sur cette machine /53/ figure 36, l'arbre et le carter sont axiaux dans le voisinage de l'aubage. L'extrémité de l'arbre, de forme ogivale est rejeté à une distance de l'ordre du rayon vers l'amont. On peut donc supposer comme on l'a vu dans /31/ qu'il ne crée pas de survitesse axiale importante au pied de l'aubage, et que pour le calcul, on peut prendre un arbre cylindrique.

Le rotor comporte quatre aubes relativement inclinées (de 60° sur l'arbre jusqu'à 78° sur le carter), qui occultent en projection frontale 80% du canal annulaire. Cet aubage à contrairement au cas précédent ses bords d'attaque à l'aval de ses bords de fuite dans l'écoulement relatif, ce qui pourrait donner des effets locaux plus importants. A l'encontre de ces effets, joue la faible hauteur des aubes (75% du rayon de l'arbre) qui a tendance à atténuer les effets tridimensionnels.

Un redresseur fait suite au rotor, à un distance suffisante pour nous permettre de supposer que son influence sur l'écoulement dans le rotor est négligeable.

Les dispositions d'alimentation sont telles que l'on peut supposer qu'il n'y a pas de précirculation à l'amont du rotor.

3.1.2-Géométrie d'aubage prise en compte dans le calcul

Quelques modifications ont été opérées pour rendre cette géométrie compatible avec le programme dans l'état où il est utilisé:

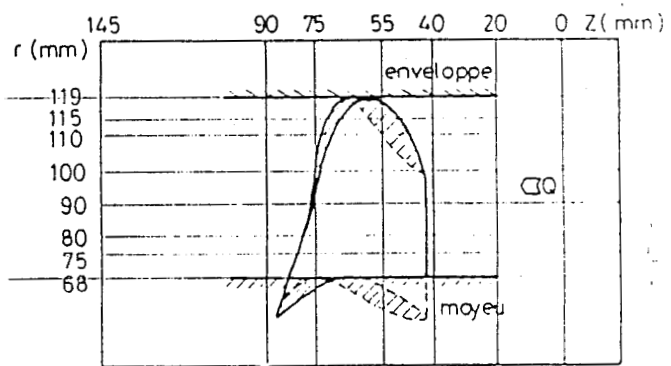
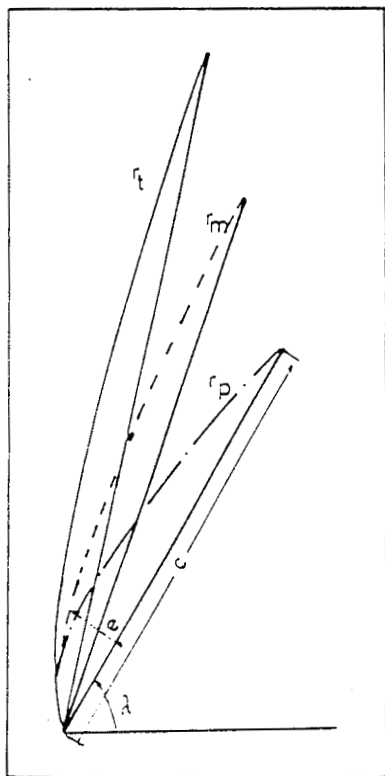
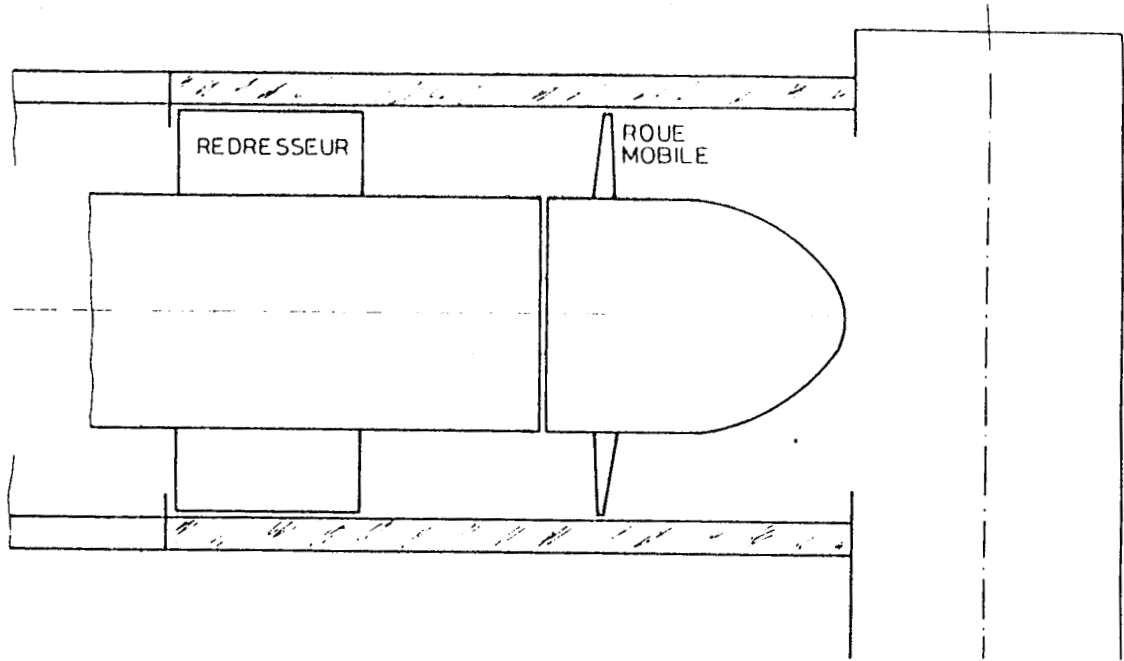
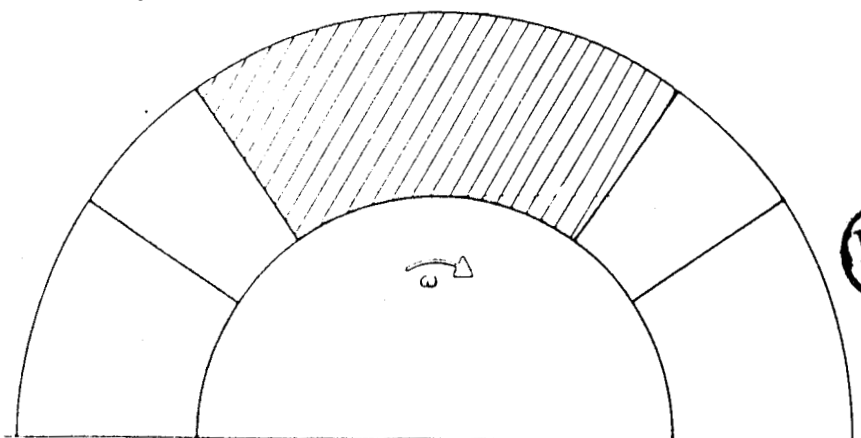


Fig 36. - Géométrie de la machine traitée
(d'après /53/).



-La largeur axiale occupée par l'aubage a été uniformisée sur l'ensemble de la hauteur de l'aube à une valeur moyenne, ce qui modifie la solidité de grille de 15% sur l'arbre et le carter.

-La forme des aubes a été légèrement modifiée de manière à éviter que des points de l'extrados soient en amont du bord d'attaque. Pour cela, on a conservé la forme hélicoïdale de l'intrados, et diminué l'épaisseur du profil de 50%. La cambrure a donc diminué et on peut s'attendre à sous estimer la déviation.

La densité du maillage est la même que celle utilisée précédemment.

3.2-Régimes de fonctionnement

Les régimes de fonctionnement ne peuvent être comparés de manière absolue avec ceux pour lesquels les résultats expérimentaux sont donnés, car nous ne disposons pas de la vitesse de rotation réelle de la pompe. Néanmoins une vitesse a pu être estimée d'après les vitesses moyennes axiales et périphériques mesurées, ce qui nous a permis de traiter les trois régimes:

$$Q=1,126 Q_n ; \quad Q=Q_n ; \quad Q=0,747Q_n$$

où Q_n est le débit nominal.

3.3-Techniques et résultats expérimentaux

Les vitesses axiales et périphériques ont été mesurées dans /53/ par deux techniques: sonde directionnelle et vélocimétrie laser. Les résultats qui nous intéressent sont la vitesse locale à différentes stations axiales, radiales et azimutales, et le champ moyen, notamment la déviation.

3.4-Techniques et calculs numériques

Nous avons vu dans un premier exemple que le fonctionnement en pompe est beaucoup plus qu'en turbine, sujet à l'instabilité dès qu'une certaine charge ($\omega_c = 0,8$ dans l'exemple précédent) est dépassée. Compte tenu des régimes traités, des dispositions ont été prises pour reculer ces limites de stabilité.

En premier lieu, pour atténuer l'influence des survitesses locales sur la déviation, les termes non linéaires qui jusqu'à présent avaient été négligés ont été pris en compte dans la condition qui définit le champ moyen de grille d'aubes (chap III).

En second lieu, une modération de l'évolution (sous relaxation) de la perturbation ϕ au cours des itérations a été appliquée de manière adaptée à la charge:

$$\phi(n+1) = (1 - \bar{\omega}) \phi(n+1) + \bar{\omega} \phi(n)$$

avec $\bar{\omega} = 0$ pour $Q/Q_n = 1,126$
 $= 0,5$ pour $Q/Q_n = 1$
et $= 0,8$ pour $Q/Q_n = 0,747$

3.5- Comparaison des résultats expérimentaux et numériques

3.5.1- Comparaison des déviations

Sur la figure 37 sont représentées les déviations mesurées et calculées pour les trois régimes de fonctionnement. On constate un bon accord entre les résultats obtenus pour les premier et second régimes, avec un écart de l'ordre du degré sur les $3/4$ de la hauteur et allant jusqu'à 2° à une distance du dixième de la hauteur près du carter. Pour le troisième régime

($Q/Q_n=0,747$), cet écart augmente et la déviation reste de 3° en dessous de la déviation réelle sauf sur l'arbre où elle est de 4° supérieure. Les écarts sont donc plus importants au voisinage des parois.

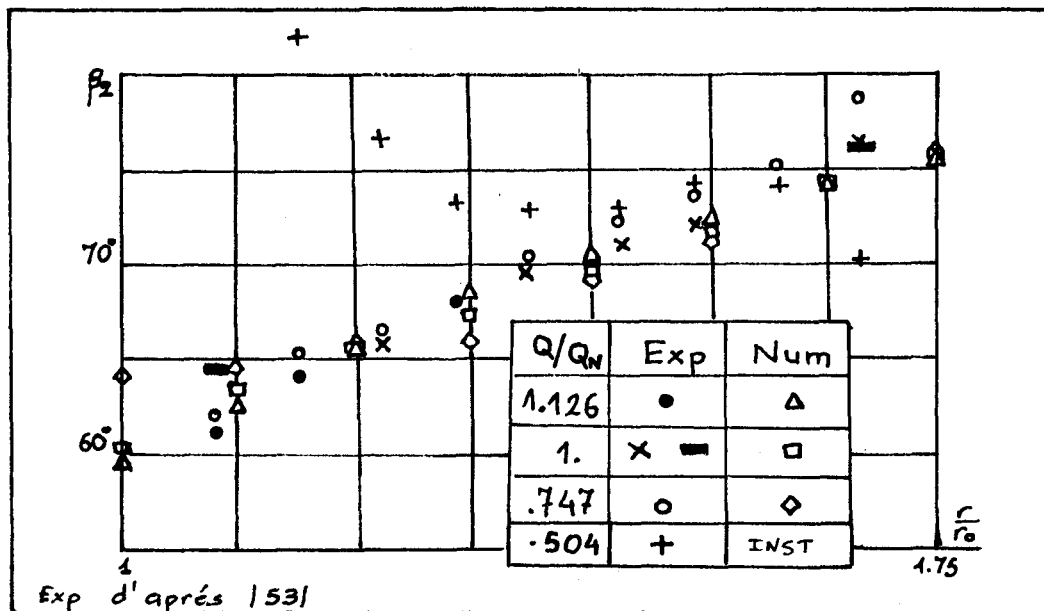


Fig 37. -Distribution radiale de déviation.

3.5.2- Comparaison de vitesses locales

Les vitesses axiales et périphériques locales sont comparées sur les figures 38.a , b , c . Les nuages de points représentent les relevés effectués par vélocimétrie laser. Les valeurs numériques (o) ont été prises aux points du maillage se rapprochant le plus du point de relevé expérimental.

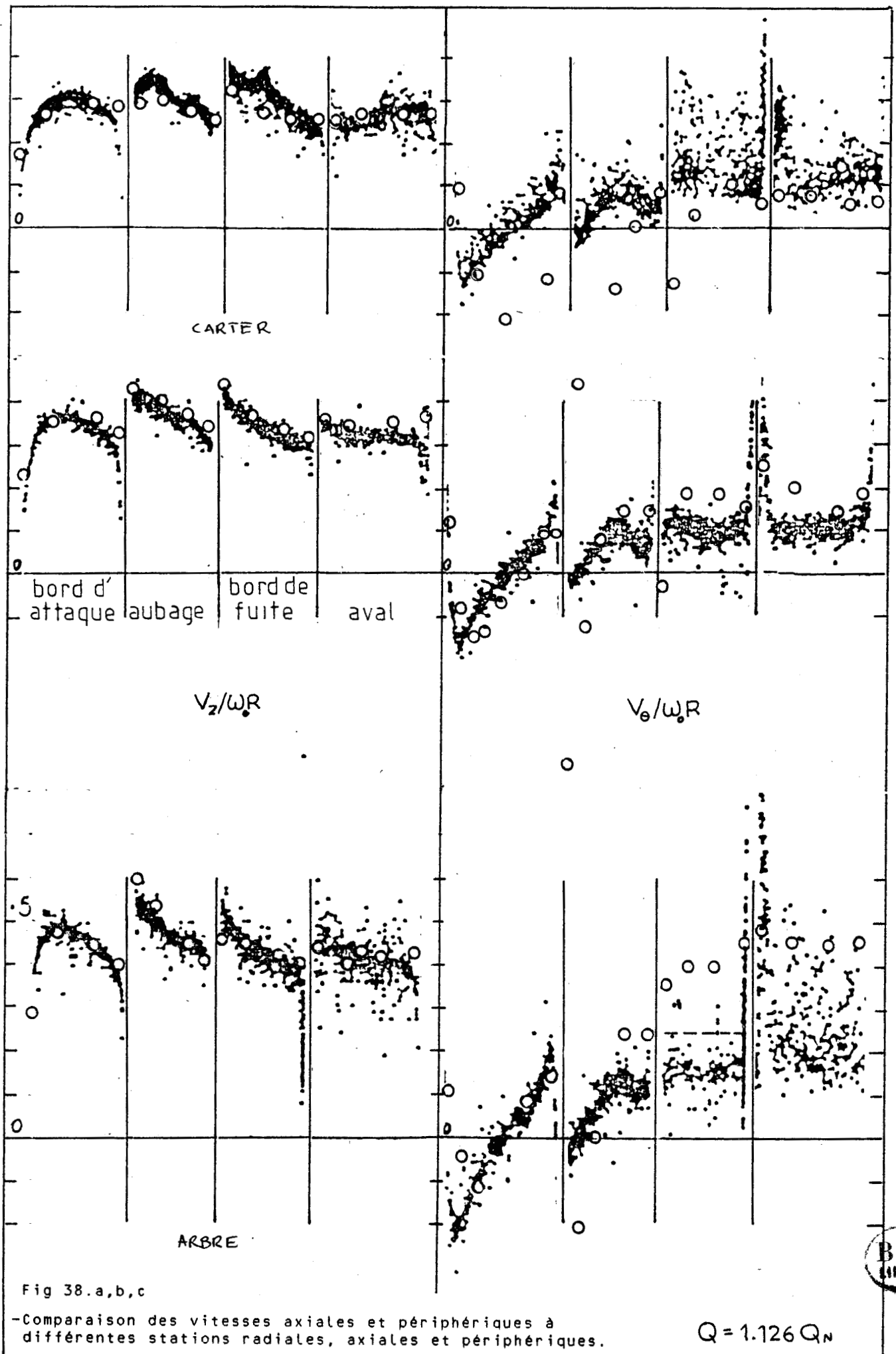
Les vitesses axiales sont en moyenne en bon accord avec les résultats expérimentaux. Les écarts sont faibles, sauf à forte charge et au voisinage du bord de fuite où les "creux" de vitesses relevés près du carter et dans la partie centrale du canal ne sont qu'amorcés par la solution numérique, tandis que près de l'arbre, la vitesse axiale fluctue au dessous de la valeur numérique.

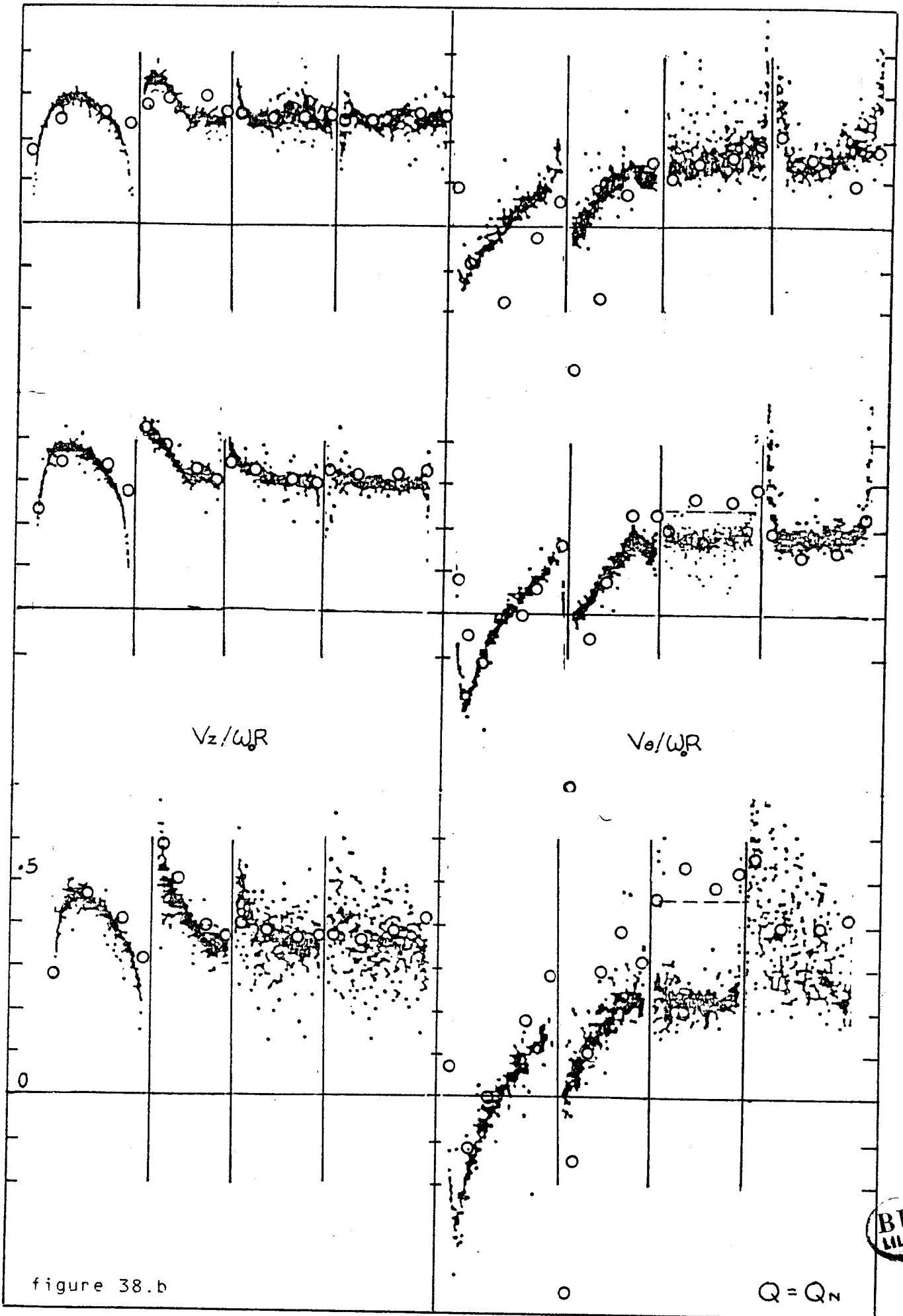
Les vitesses périphériques absolues sont aussi en accord, avec cependant des écarts localement plus importants, notamment sur l'arbre, le carter et au bord d'attaque.

Au bord d'attaque, ces différences sont principalement dues aux gradients très importants qui y siègent. On a placé quelques points ((o) pour $Q/Q_n=0,747$) correspondant à un saut d'une maille vers l'amont ou l'aval. Ils montrent la sensibilité de la vitesse à la position du point dans une zone où la discretisation et le maillage ne permettent pas d'approcher les phénomènes à petite échelle de type singularité. On peut donc dire que l'on obtient dans cette zone des résultats corrects lorsque le régime est proche de l'adaptation (deux premiers régimes). Ils sont dans l'absolu moins bons lorsque la charge devient importante (troisième régime), nous obtenons alors une vitesse plus grande que celle mesurée, ce qui écarte les hypothèses faites sur la forme de l'arbre et sur l'alimentation, des causes possibles de ces divergences. Par contre, à une station équidistante des bords d'attaque, de l'arbre et du carter, la vitesse est correcte.

Au bord de fuite et à l'aval, les vitesses locales et moyennes diffèrent notamment près de l'arbre pour les régimes les moins chargés, alors que paradoxalement, la comparaison des déviations s'avère satisfaisante. Nous avons tracé en pointillé dans les cas les plus marquants la vitesse moyenne obtenue par sonde. Il apparaît alors que les résultats numériques sont plus proches des résultats sonde, et que à l'aval, les trois résultats ont tendance (sauf pour les faibles charges) à se regrouper sur une valeur commune. Dans la partie centrale du canal, les résultats sont en meilleure conformité que sur les parois.

Enfin on peut globalement constater que par rapport à un régime neutre ($Q/Q_n=1,3$), les écarts relatifs n'augmentent pas de façon significative avec la charge et que la seule limite qui nous est imposée est celle de la stabilité.





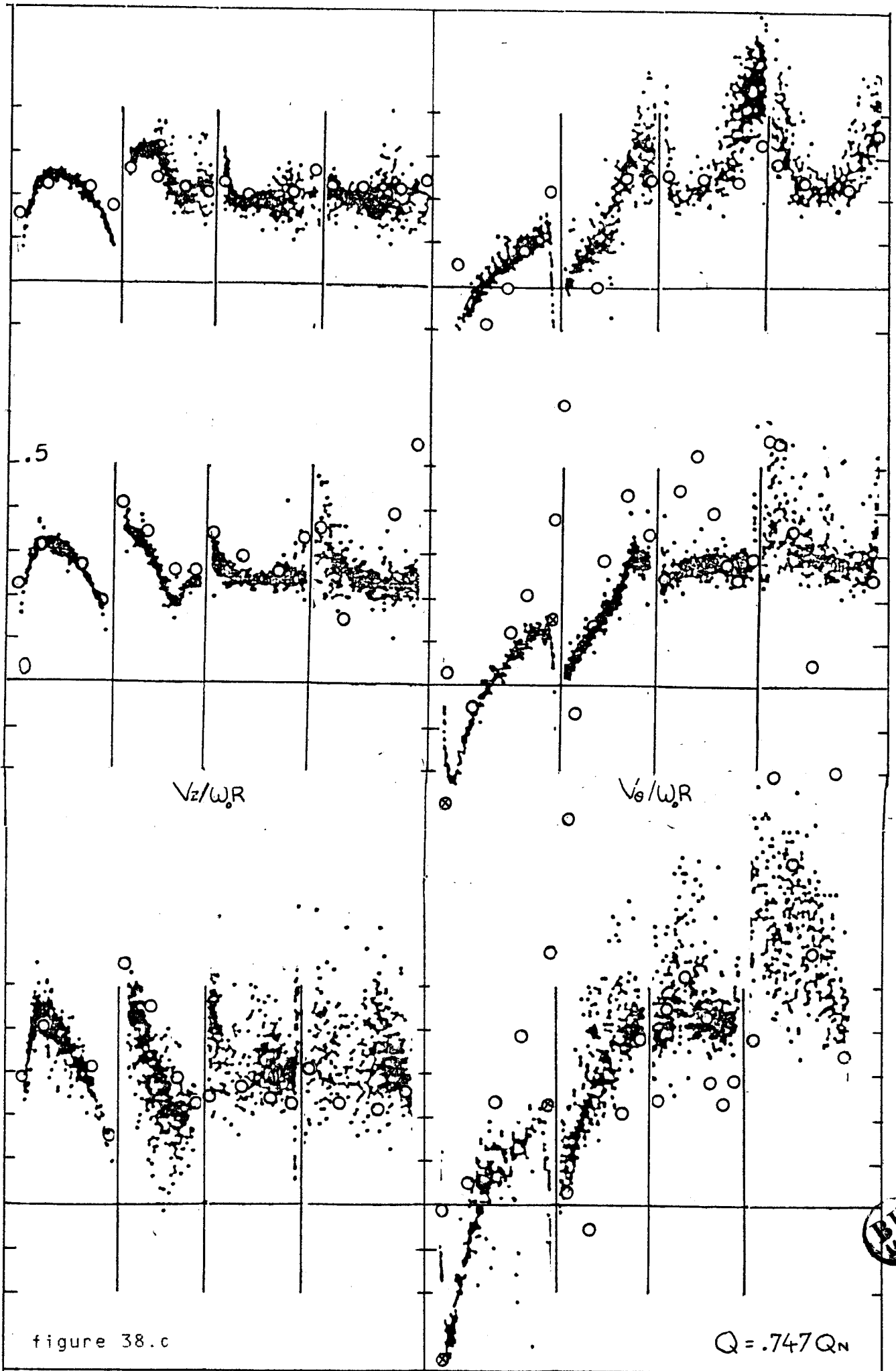


figure 38.c

$Q = .747 Q_N$

3.6-Stabilité

Sur ce point, les résultats expérimentaux indiquent bien par les fluctuations croissantes de vitesse au voisinage de l'arbre, l'existence et la proximité d'une charge critique (pour $Q/Q_n = 0,504$) au delà de laquelle un régime différent s'établit. Ceci est à mettre en rapport avec les fluctuations numériques déjà évoquées qui pour les fortes charges apparaissent brutalement (figure 35) au voisinage de l'arbre.

Nous avons été conduit à partir d'une charge minimale à sous relaxer sur la grandeur ϕ , avec un effet d'autant plus fort qu'expérimentalement, l'écoulement est fluctuant. Cet effet peut aller jusqu'à bloquer l'évolution de la grandeur pour une charge que nous qualifierons de critique. Cette charge maximale que nous avons pu aussi traiter est précisément la dernière pour laquelle l'écoulement physique est quasiment stationnaire. En d'autres termes, on peut d'après cet exemple supposer qu'il existe une relation entre le coefficient de sous relaxation et la proximité d'une transition dans l'organisation de l'écoulement (points + de la figure 37).

3.7- Conclusion

Nous pouvons conclure que compte tenu des simplifications opérées sur la géométrie de la machine, des hypothèses portant sur la forme de l'arbre, l'alimentation ainsi que les hypothèses de formulation, de la discretisation et surtout du maillage, les résultats numériques sont globalement en bonne conformité avec les résultats expérimentaux, tant en déviation qu'en vitesse locale.

De plus, le comportement numérique des solutions nous donne des indications qui pour l'exemple, concordent avec les indications expérimentales, sur des phénomènes d'instabilité

physique et de transition. Ces résultats ont donc tendance à valider notre modèle.

Enfin on peut remarquer que le temps de calcul (20 minutes sur IRIS 80) n'est pas prohibitif et qu'il est envisageable de tester toute la plage de fonctionnement d'une machine.

Chapitre V

CONCLUSION

Parmi les méthodes de calcul de l'écoulement stationnaire dans une turbomachine, les méthodes S1 - S2 apparaissent comme les plus performantes. Elles se prêtent bien au calcul des configurations géométriques réelles, acceptent diverses conditions d'alimentation tridimensionnelle et permettent un important gain de temps de calcul par rapport aux méthodes totalement tridimensionnelles du fait de la décomposition du problème en problèmes sur S1 - S2 de taille considérablement plus petite. Mais avec cette décomposition se pose la question du couplage et de la stabilité du couplage de ces problèmes.

Jusqu'à présent, le couplage "libre" n'avait pu être réalisé pour cause d'instabilité très marquée. Actuellement, étaient essentiellement utilisés, soit un modèle à écoulement méridien axisymétrique suivi éventuellement d'une correction minimisant l'erreur due à la non vérification première des équations locales, soit un modèle dégagé de l'hypothèse d'axisymétrie de S1, mais avec un couplage limité à une prise en compte "aller et retour" de l'interaction locale (une à deux itérations de relaxation /32-54/).

S'il est vraisemblable que ces techniques donnent des résultats plus proches de ce que serait la solution du problème tridimensionnel, rien n'indique que les améliorations apportées soient réellement significatives, et que la convergence, si elle était réalisable, serait assez forte pour que l'on puisse se contenter d'une itération.

Par ailleurs, des éléments de première importance tels que l'influence du couplage effectif sur la déviation dans l'aubage n'étaient pas maîtrisés et ne pouvaient être utilisés pour valider les modèles utilisés ou limiter leur champ d'application.

Nous proposons une méthode qui permet de résoudre ce problème de stabilité et par conséquent de déterminer l'écoulement tridimensionnel dans toute sa complexité.

Après avoir formulé le problème, nous avons fait une analyse de la stabilité globale sur une configuration simplifiée. Ceci a permis de mettre en évidence des modes instables non contrôlés par les conditions aux limites habituellement utilisées. Nous avons donc été amenés à définir l'ensemble des conditions aux limites rendant le problème analytiquement bien posé (à solution unique dans le cadre linéaire). Une condition de type NEUMANN pour les fonctions de courant, exprimée dans le plan de sortie du domaine s'est avérée nécessaire au filtrage des modes instables et à l'identification d'une solution unique.

Cette condition définit les contributions de chacun des écoulements sur S1 et S2 dans l'écoulement "secondaire" de sortie, et leur donne une référence absolue, bien que non définitive et réactualisée à chaque itération du calcul.

Après l'élaboration de la condition de sortie, nous nous sommes donnés les moyens d'effectuer un calcul complet pour une turbomachine. Pour cela, nous proposons :

- une résolution du problème d'aube à aube qui présente la particularité d'intégrer la condition de KUTTA et permet une prise en compte des couches limites, non seulement par leur épaisseur de déplacement, mais aussi par le frottement et l'épaisseur de quantité de mouvement. Cette prise en compte a été testée en bidimensionnel;
- une résolution du problème de l'écoulement sur la famille S2 décomposée en écoulement méridien moyen classique et perturbation tridimensionnelle ;
- un modèle de calcul de l'hélicité dans le plan de sortie par transfert à partir du plan d'entrée, qui nous a dégagé des problèmes de stabilité dus au calcul par relaxation tridimensionnelle des champs de rotationnel et de vitesse à partir des équations de définition du rotationnel et d'HELMHOLTZ
- une initialisation et un processus itératif réalisant effectivement le couplage S1 - S2.

Cette technique a été mise en oeuvre pour calculer l'écoulement tridimensionnel d'un fluide incompressible non visqueux établi dans le canal interaubes d'une machine axiale, le couplage a été réalisé. Deux exemples ont été traités, l'un avec un aubage hélicoïdal, l'autre avec un aubage vrillé.

Sur le premier exemple, nous avons pu tout d'abord constater que les solutions calculées avec le modèle que nous avons développé, paraissent relativement plus complexes que ce que la superposition d'un écoulement secondaire tel que celui obtenu dans une conduite à l'écoulement quasi-tridimensionnel, ne le laissait supposer.

Ceci est dû naturellement au fait que le modèle prend en compte de nombreuses dépendances réelles qui conduisent au développement d'effets locaux d'ampleur importante, et au réarrangement profond du champ moyen.

Ainsi, nous avons pu mettre en évidence, entre autres effets possibles, une surdéviation très marquée à proximité des parois, des vitesses radiales locales importantes, une inversion des distributions de déviation.

Ces effets ne peuvent se justifier séparément. Ils sont étroitement liés entre eux localement d'une part, à travers des dépendances dues au couplage local ne contribuant que partiellement à assurer un effet de vrille des surfaces de courant tel qu'on peut le trouver dans une conduite, et globalement d'autre part, par les conditions aux limites notamment de KUTTA JOUKOWSKI et de sortie qui contribuent fortement à structurer l'écoulement et à remettre en cause l'écoulement secondaire de conduite (troisième problème).

Un deuxième aspect de la complexité de l'écoulement est que les dépendances évoquées sont, d'une part pour la plupart d'entre elles de type non linéaire, et d'autre part s'appliquent entre des grandeurs prises en des points éloignés, tels que bord de fuite - plan de sortie.

Ceci joue dans l'organisation de la solution un rôle dont l'importance se voit bien lorsque l'on analyse la convergence du couplage. La lenteur de la convergence comparée à celle du couplage moyen du modèle quasi-tridimensionnel, le passage par des états éloignés tant de l'état initial que de l'état stabilisé confirme bien la profondeur du réarrangement de l'écoulement.

Nous pouvons conclure sur ce point que le modèle intègre bien l'ensemble des phénomènes et nous pouvons ajouter

que dans l'exemple traité, la solution ne peut de toute évidence être approchée par superposition simple d'une solution quasi-tridimensionnelle et d'un champ secondaire obtenu d'un "troisième problème", ni même par l'amorçage du couplage sur quelques itérations qui finalement donne le même type de solution (conduite) que précédemment.

Nous pouvons aussi constater que malgré l'évolution importante que subit la solution entre l'état initial quasi-tridimensionnel et final tridimensionnel, la cohérence des résultats est très satisfaisante et leur vraisemblance incontestable. Ceci est dû au fait que la modélisation est parfaitement consistante avec la formulation de départ, toutes les équations discrétisées d'équilibre local et global sont vérifiées et toutes les données sont utilisées.

La discrétisation introduit des erreurs classiques de troncature mais aussi, comme on l'a vu lors de l'élaboration de la condition de sortie, des erreurs de type singularité liées à la difficulté de modéliser les effets de coins dans le jet sortant de l'aubage. Sur ce point, le modèle s'est très bien comporté, et a limité fortement à la zone aval le domaine d'influence de ce phénomène parasite. Quant à la discrétisation des problèmes classiques, elle bénéficie des soins et améliorations qui ont été apportés lors de la mise en oeuvre dans le cadre tridimensionnel des modèles qui, par ailleurs, donnaient de bons résultats en bidimensionnel.

Une confrontation modèle-expérience est ensuite proposée dans le but d'estimer quantitativement la validité du modèle. Pour cela le champ de vitesse a été calculé pour une machine existante à aubage vrillé, et comparé dans tout le volume aux relevés expérimentaux trouvés en bibliographie.

La comparaison s'est avérée satisfaisante à plusieurs titres. En premier lieu, le champ de vitesse s'est avéré être en

aussi bonne conformité avec les résultats expérimentaux que les hypothèses, la discrétisation et surtout le maillage nous permettaient de l'espérer. Nous avons en effet obtenu de bonnes déviations, des vitesses locales correctes et vu qu'une amélioration des résultats est possible en resserrant le maillage.

En second lieu, nous avons pu établir que d'une part, la tendance à l'instabilité numérique constatée au delà d'une charge minimale, allait de pair dans une même zone du volume, avec l'augmentation des fluctuations de l'écoulement physique. D'autre part la charge critique que nous n'avons numériquement pas pu franchir correspond physiquement à une transition brutale vers une autre organisation de l'écoulement.

En ce qui concerne l'intérêt d'un tel calcul tridimensionnel, notamment par rapport à la technique quasi-tridimensionnelle, nous pouvons des deux exemples traités tirer quelques conclusions.

Lorsque l'aubage est bien dessiné (second exemple) et que la charge est faible, il n'y a pas d'effet tridimensionnel important, les modèles tridimensionnel et quasi-tridimensionnel sont tous deux en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Lorsque la charge est plus importante, ou que l'aubage est mal dessiné (premier exemple), c'est à dire lorsque les charges aérodynamiques sont dans l'absolu moins bien distribuées sur l'aubage, des effets tridimensionnels importants apparaissent. Ils sont dûs au rétablissement de l'équilibre radial local (notamment sur les aubes) qui est bien pris en compte dans le modèle tridimensionnel. Dans ces cas, les résultats diffèrent de façon très importante, ceux obtenus avec le modèle tridimensionnel sont plus satisfaisants.

Lorsque la charge devient très forte, le modèle tridimensionnel est susceptible contrairement au modèle quasi-

tridimensionnel d'annoncer une zone d'instabilités physiques.

On peut conclure sur ce point que notre modèle étend le champ d'application de la technique S1-S2 à des cas de charge plus élevée ou à des aubages présentant des défauts qui jusqu'alors étaient inaccessibles au modèle quasi-tridimensionnel.

Enfin cette confrontation nous a montré que malgré le très petit nombre de points du maillage ($8 \times 8 \times 18$, avec 6 points axialement dans l'aubage), il était possible d'obtenir des résultats sur lesquels on peut appréhender des phénomènes tridimensionnels, non seulement qualitativement mais aussi quantitativement, avec des moyens et donc un coût modiques.

Au plan des hypothèses, nous pouvons faire une réserve qui compte tenu de l'ordre de grandeur des perturbations obtenues, porte essentiellement sur la linéarisation partielle des équations locales. Rappelons toutefois que ces hypothèses ne sont pas vitales pour l'étude de la stabilité, qu'elles ont été faites dans le seul but de simplifier des équations qui, sinon, auraient comporté un plus grand nombre de termes, et qu'elles peuvent être aisément relaxées notamment par l'utilisation d'une formulation locale différente.

En effet, comme nous l'avons vu, les résultats et le succès de cette technique de couplage ne sont pas dûs au schéma local de discrétisation, et il ne fait aucun doute que cette méthode peut être mise en oeuvre sur toute autre discrétisation mieux adaptée aux géométries complexes des machines que ne l'est la nôtre, qui n'a été qu'un outil adapté aux essais des nombreuses possibilités que nous avons au départ. Nous pensons en particulier aux techniques classiques de KATSANIS, ou, plus récentes, de KRIMERMAN et ADLER à laquelle il suffit d'ajouter un module de calcul du rotationnel et de l'écoulement secondaire sur la surface de sortie.

De même, la prise en compte des couches limites sous la forme d'une épaisseur de déplacement ou comme nous l'avons proposé en bidimensionnel, avec prise en compte du frottement et de l'épaisseur de quantité de mouvement, est tout à fait compatible avec la méthode. Le problème essentiel est alors de choisir convenablement le modèle de couche limite et de sillage.

Enfin, lorsqu'une résolution directe du problème tridimensionnel est envisagée, ce qui peut être intéressant tant que le rapport des temps de calcul des méthodes directes et itératives, qui est de l'ordre du carré du nombre de points transversal rapporté au nombre d'itérations est raisonnable, nous pensons que la technique de la condition de sortie est aussi applicable mais cette fois dans l'unique but de la prise en compte de toutes les données tourbillonnaires.

II PARTIE

SUR UNE MODELISATION DU
DECROCHAGE TOURNANT DANS LES
TURBOMACHINES AXIALES

Chapitre 1

INTRODUCTION

1. - GENERALITES

L'étude de l'écoulement dans une turbomachine peut être faite à partir d'un modèle stationnaire en mouvement relatif lorsque, comme dans la première partie, la géométrie de la machine (roue unique, et axisymétrie de l'alimentation), et les conditions de fonctionnement le permettent et le justifient.

Mais ce cadre favorable est assez particulier. Pour une grande part des turbomachines et pour beaucoup de leurs applications, deux raisons principales s'opposent à ce que l'écoulement puisse être considéré comme stationnaire: l'une est la rotation relative des parties non axisymétriques de la machine, l'autre est l'instabilité de l'écoulement. Il en résulte des phénomènes qui sont à considérer sur des échelles d'espace et de temps très étendues: échelle des couches limites- échelle du circuit. Ceci présente d'un côté l'avantage de permettre dans certaines limites, de continuer à utiliser les modèles stationnaires pour la représentation des phénomènes aux échelles moyennes (par exemple pas des aubes) qui touchent le plus le dessin et les performances des machines aux régimes nominaux. Par contre cette étendue d'échelle amène une grande difficulté de modélisation lorsque, comme c'est le cas avec des fortes charges, l'instationnarité est totalement développée aux échelles moyennes qui précisément nous intéressent le plus, ainsi qu'aux échelles voisines.

Le problème devenant alors totalement instationnaire et tridimensionnel sur de larges échelles d'espace et de temps, son approche théorique nécessite pour être rendue praticable, une importante cascade d'hypothèses.

Nous proposons une revue rapide des différents phénomènes instationnaires les plus étudiés afin

- d'évoquer les hypothèses, et techniques d'approche utilisées,
- de préciser le contexte dans lequel nous nous plaçons ensuite, et les ambitions qu'il nous paraît raisonnable de nourrir sur la levée de ces hypothèses et sur la modélisation du décrochage tournant.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux effets dûs à la géométrie.

2. - EFFETS DUS A LA GEOMETRIE

Nous nous intéressons ici aux échelles qui vont de la plus grande (échelle de la machine) aux échelles moyennes (aubage).

Nous rencontrons alors les effets dûs aux perturbations d'entrée, et ceux qui ont pour origine le défilement des parties mobiles par rapport aux parties fixes non axisymétriques de la machine, auxquelles sont attachées des perturbations de vitesse, éventuellement associées à des perturbations d'énergie et d'entropie.

2.1. - Perturbations d'entrée.

Les perturbations stationnaires d'alimentation dues soit à une occlusion partielle de la veine, soit à l'ingestion de couches limites ou de sillages sont caractérisées par un nombre d'ondes périphérique généralement faible devant celui correspondant au pas de l'aubage. Elles ont aussi un temps

caractéristique (établi sur la vitesse de rotation $2\pi/\omega$, ou W/L) grand par rapport au temps de réponse de la grille d'aubes^Z (W/B). Il a donc été possible dans un premier temps (et ceci est^Z encore justifié aujourd'hui /57/) d'utiliser la caractéristique stationnaire de grille d'aubes pour étudier l'influence de ces perturbations dans le fonctionnement des machines.

Néanmoins on devait encore résoudre le problème de l'écoulement moyen, stationnaire par rapport au repère absolu, problème analogue au problème classique de l'écoulement méridien, mais qui était cette fois tridimensionnel, car non axisymétrique.

2.1.1. -La technique des compresseurs parallèles a constitué une première approche du problème. Elle est basée sur le fait que loin à l'aval des roues, on peut supposer que la pression statique est axisymétrique. Associée à un certain nombre d'autres hypothèses portant sur l'état (uniforme) du fluide dans chaque zone (saine et décrochée), sur les échanges entre ces zones, ainsi que sur les vitesses débitantes, cette technique permet de traiter algébriquement l'équilibre entre les parties saines et décrochées de l'écoulement /58/.

Une amélioration peut être apportée à ce modèle en considérant le comportement de grille sous son aspect instationnaire /60/. De nombreux travaux ont été menés pour modéliser la dynamique de grille /59-65-81-88/. Cependant, les déviations et les pertes sont encore, dans l'étude globale des machines, la plupart du temps modélisées à partir de résultats expérimentaux, par des fonctions de transfert. Ainsi est prise en compte l'instationnarité de grille dans /60/, mais cela fait réapparaître la dépendance circonférentielle, crée une diffusion entre les deux zones et exige des hypothèses supplémentaires sur les profils de vitesse (ou de pression), que l'on est alors amené à s'imposer.

2.1.2. - Technique instationnaire. Un retour à l'intégration tridimensionnelle et l'utilisation d'une technique instationnaire explicite sont proposés dans /61-62/. Cette technique présente l'avantage d'admettre des perturbations instationnaires tournantes, mais présente aussi l'inconvénient de consommer un important temps de calcul. Elle se justifie pleinement pour l'étude de l'écoulement moyen en régime de décrochage tournant comme on le trouve dans /62/.

2.2. - Effet du défilement des aubes

Plus difficile est la modélisation de l'effet du défilement relatif des aubes et de l'interaction entre les écoulements dans les roues adjacentes. Cette interaction a essentiellement deux origines: d'une part la rotation relative du champ de pression dû à la portance des aubes, et d'autre part celle du champ de vitesse, porteur des sillages d'aubage et des couches limites d'arbre et de carter.

2.2.1. - Contribution du champ de pression.

Elle est faible lorsque les roues sont assez distantes l'une de l'autre /63/ (distance supérieure à 30% de la corde des profils), et que le fonctionnement est normal (non décroché). Elle peut dans le cas contraire (roues rapprochées) être non négligeable, car le gradient de pression important au bord d'attaque perturbe la partie saine et les couches limites de l'écoulement dans la roue précédente. (Fig 1). Mais les effets

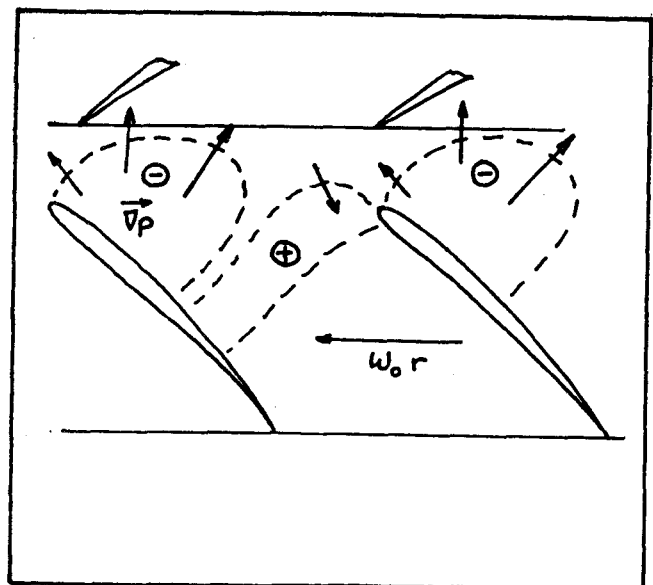


Fig 1. - Effet du défilement relatif du champ de pression.

de ce champ vont plutôt dans un sens globalement favorable pour

les couches limites. Il ne semble pas qu'il soit nécessaire de viser tout spécialement ce phénomène.

2.2.2.- Contribution des sillages découpés et ingérés dans le canal inter-aubes.

Elle est sans doute plus importante, et a fait l'objet de nombreux travaux dont /63-64/. Là aussi, parmi les trois points sensibles qui sont: les couches limites d'aubage affectées par l'instationnarité due à la présence du segment de sillage ingéré (figure 2), l'écoulement sain transportant et interagissant lui aussi avec le segment, et enfin le niveau de macro-turbulence moyenne obtenu après passage à travers plusieurs roues, les deux derniers sont à l'échelle (en espace et en temps) du décrochage tournant et nous concernent directement dans tous les cas.

En ce qui concerne l'ingestion du segment de sillage proprement dit, c'est, lorsqu'il n'y a pas de décollement, un phénomène à petite échelle (épaisseur du sillage), donc difficilement modélisable dans l'étude de l'écoulement de grille et à fortiori de l'écoulement global. Il en est de même pour les phénomènes de succion et de soufflage des couches limites dus à l'effet d'inertie de ce segment /66/. Nous considérons ces phénomènes comme extérieurs à la modélisation que nous nous proposons de faire.

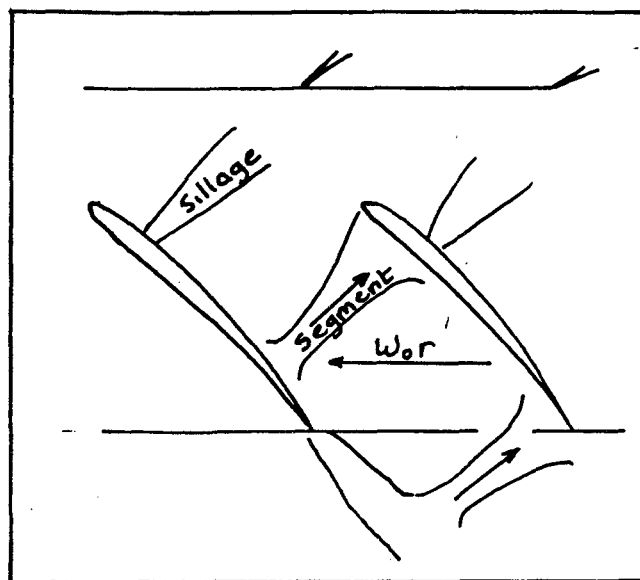


Fig 2. -Effet de l'ingestion de segments de sillage.

Par contre ce n'est plus le cas lorsqu' il y a décollement avec blocage important. L'interaction du segment avec la zone décollée, et avec le sillage propre de l'aubage /67/ (fig 2), de même que l'effet de détachement de l'extrados et d'écrasement sur l'intrados nous paraissent devoir être appréhendés dans la modélisation du décrochage tournant. D'un point de vue énergétique, la prise en compte des échanges privilégiés entre rotor et segments de sillage nous paraît alors capitale comme indiqué dans /68/.

Quant à la macro-turbulence, nous savons /69-70/, que son niveau croît avec le nombre d'étages. On peut la décrire à partir d'une longueur caractéristique liée au mélange des segments de sillage, elle est donc de l'ordre du pas de l'aubage et de ce fait trop grande, pour permettre une prise en compte par les modèles habituels de turbulence. Elle devrait comme les zones décollées, être prise en compte dans le champ de vitesse.

2.3. -Conclusion sur les effets du défilement.

De cette revue sur les effets du défilement des aubes par rapport aux perturbations d'entrée ou attachées aux roues, nous pouvons définir l'étendue d'échelle du modèle, qui va de la saisie d'un sillage décollé jusqu'à la représentation de l'écoulement moyen tridimensionnel. Il reste à voir si ces échelles, sont adaptées à une description correcte des instabilités de fonctionnement, et plus particulièrement du décrochage tournant tel qu'on le voit à travers les résultats expérimentaux.

3. - INSTABILITES DE FONCTIONNEMENT

Nous écartons d'entrée le flottement qui fait intervenir un temps caractéristique propre aux aubes, et qui peut exister indépendamment des perturbations d'entrée, des sillages ou d'autres instabilités. Nous nous intéressons plus particulièrement aux instabilités purement aérodynamiques et notamment, de la plus grande échelle (échelle du circuit) à la plus petite (aubes), au pompage et au décrochage tournant.

3.1. - Le pompage

3.1.1. - Mise en évidence

Parmi les instabilités de fonctionnement des turbomachines, le pompage est le phénomène périodique qui, impliquant toute l'installation environnant la machine, est le plus directement observable. Cette vibration est facile à mettre qualitativement en évidence sur un circuit composés d'éléments passifs, capacitifs, et d'inertie, et d'une machine à caractéristique croissante ou encore à fonction de transfert présentant un déphasage approprié entre débit et charge.

L'étude qualitative sur circuit réel est plus délicate pour des raisons en premier lieu propres au circuit: acoustique, et non linéarité des pertes qui orientent la modélisation dans le sens d'une simulation instationnaire. Mais l'essentiel des difficultés est imputable à la machine qui pendant une partie du cycle de pompage fonctionne sur un ou plusieurs modes de décrochage en constante évolution, et très dépendants de la fréquence du pompage.

3.1.2. - Influence de la fréquence

La fréquence de pompage dépend beaucoup du circuit, notamment à basse fréquence, lorsque le temps de convection à

travers la machine est petit devant la période du phénomène, et que de ce fait, l'effet d'hystérésis "temporel" est faible. On trouve dans /71-72/ un nombre qui représente le rapport de ces temps caractéristiques (convection et période fondamentale du circuit). Il apparaît bien dans ces travaux que plus ce nombre est petit (fréquence basse), plus le cycle débit-pression se rapproche de la caractéristique stationnaire. Inversement, lorsque la fréquence est élevée, le cycle est très large, l'effet d'hystérésis important.

Aux fréquences élevées, la dynamique de l'apparition, du développement, de l'évacuation des zones décrochées joue un rôle primordial dans la détermination de l'amplitude, et surtout de la fréquence du pompage, qui par la nature des phénomènes mis en cause (convection d'une zone décrochée d'étendue limitée inférieurement par l'aubage) ne peut être arbitrairement grande. La machine n'est pas susceptible de reconnaître et d'amplifier par le mode "décrochage" des fluctuations frontales de fréquence supérieure à une valeur maximale.

On voit donc que bien que les phénomènes (pompage et décrochage établi) soient différents d'un point de vue extérieur à la machine, ils sont étroitement associés puisque le pompage fonctionne sur un décrochage apparenté au décrochage tournant, et même confondu à basse fréquence.

3.2.- Décrochage tournant

3.2.1. - Mise en évidence

Il est bien connu aujourd'hui que le décrochage est un phénomène caractérisé par un décollement ou un brassage localisé dans des cellules (zones d'écoulement décroché) organisées en structures rigides tournantes, périodiques suivant la circonférence et animées d'un mouvement à vitesse intermédiaire entre celle du rotor et celle du stator. Ces structures se sont

avérées correspondre à des plages de chargement plus ou moins limitées dans lesquelles l'étendue plutôt que le niveau de blocage varie, mais entre lesquelles il y a transition brutale et réorganisation complète de l'écoulement.

Ce phénomène n'a été mis en fait en évidence que lorsqu'une bonne maîtrise du dessin des profils ainsi que des techniques de réalisation, a permis l'utilisation dans les compresseurs, d'aubages effectivement et uniformément très chargés (les méthodes de calcul, devenues suffisamment précises, permettaient d'assurer un équilibre correct des charges aérodynamiques). Il est apparu alors que des instabilités globales (à l'échelle de la roue) se manifestaient bien avant que les conditions de décrochage local de grille ne soient atteintes.

Le décrochage tournant est une instabilité de l'écoulement moyen dont le déclenchement tient pour une grande part, aux instabilités bien connues de convection dans des écoulements stratifiés. Mais son étude présente ici des difficultés supplémentaires du fait de l'apport d'énergie par les parois mobiles et l'irréversibilité des évolutions.

La maîtrise du phénomène s'est avérée être de toute première importance /86/, du fait des pertes de performances occasionnées par cette instabilité, ainsi que des surcharges endommageant les aubes, du fait aussi que le retour à un fonctionnement normal exige une large décharge de la machine.

3.2.2. -Stabilité de l'écoulement non décroché

Le premier pas allant dans le sens d'une meilleure maîtrise du phénomène a été de définir la zone de fonctionnement dans laquelle il n'y a pas de décrochage tournant possible. Pour atteindre cet objectif, une étude de stabilité de l'écoulement moyen axisymétrique basée sur l'analyse du comportement des petites perturbations suffit. On trouve de nombreux travaux /73-

74-75 part 1/ allant dans ce sens, et permettant d'identifier les solutions instables.

Dans /73/, du fait de son étendue (réponse à une perturbation, décrochage tournant...), le problème est posé en termes de réponse plutôt qu'en termes de stabilité. Dans ce travail, l'étude est basée sur la modélisation du comportement d'une perturbation à nombre d'ondes circonférentiel donné (et par superposition, d'une perturbation quelconque) à travers une roue ou un espace libre, et par association, du comportement de la machine, par une matrice de transfert. Cette technique permet une bonne prédiction du déclenchement du décrochage, et (dans les limites de validité de la linéarisation), de décrire sa structure.

3.2.3. -Stabilité du décrochage établi

Il est demandé aux machines de fonctionner au moins transitoirement très loin des conditions nominales. Il est donc nécessaire d'étudier la stabilité du phénomène établi, que l'on explique comme un état dans lequel il s'opère un contournement des zones les plus chargées et un transfert de débit vers des zones qui se trouvent donc déchargées. Ce transfert augmente dans les zones décrochées à la fois les pertes dans les roues fixes et mobiles, et l'énergie communiquée au fluide dans le rotor. Par contre ce transfert diminue l'énergie communiquée au fluide dans les zones saines. Globalement il permet d'un point de vue statique, un équilibre entre zones décrochées et saines.

Deux notions essentielles sont développées dans la littérature: celle de la stabilité d'un état à laquelle est associée dans d'autres domaines la notion de minimisation d'une grandeur physique de type énergétique, et la notion d'équilibre, en particulier d'équilibre à l'aval entre zones saines et décrochées. En fait ces deux notions sont relativement voisines, et sont toutes deux associées à de fortes hypothèses d'origine

expérimentale. Elles sont utilisées pour faire de la prédiction de fonctionnement global.

Critère de stabilité (ou d'instabilité).

La première notion est utilisée dans /76/. Compte tenu du caractère dissipatif et des effets complexes du frottement, un critère de minimisation général n'a pu être établi et l'auteur propose deux options selon le niveau de décrochage. Cette voie, très attrayante pour une mise en oeuvre locale, semble pour l'instant condamnée.

Equilibre.

La deuxième idée s'appuie sur l'hypothèse de l'équilibre aval ou d'axisymétrie de la pression statique qui se trouve bien justifiée en moyenne par l'expérience /77/. Associée à l'hypothèse d'un blocage total dans la zone décrochée, elle permet de mettre en oeuvre une technique de type "compresseurs parallèles". Avec les données supplémentaires du point de fonctionnement à débit nul, et du blocage de déclenchement et de sortie du décrochage, qui toutes deux sont d'après /77/ quasiment indépendantes de la machine, il devient possible de faire une prédiction rapide des conditions de fonctionnement d'un compresseur en régime de décrochage tournant.

En fait ces techniques ne rendent pas compte de manière totalement satisfaisante à leur niveau respectif, du phénomène et de sa stabilité. Une étude instationnaire mettant en jeu la dynamique de l'écoulement moyen et celle de l'écoulement de grille avec prise en compte des non linéarités et effets d'hystérésis locaux, est nécessaire, et a été développée dans la littérature.

Nous proposons dans cette voie une étude plus approfondie et synthétique des différents travaux de modélisation et expérimentaux portant sur les différents aspects du décrochage tournant.

4. -ETUDE DU DECROCHAGE TOURNANT

Deux types de décrochages sont habituellement distingués, auxquels correspondent des niveaux différents de décollement, de ralentissement relatif, et par conséquent des descriptions et des représentations différentes.

4.1. -Petit décrochage

4.1.1. -Description

Partant d'un fonctionnement normal, il apparaît lors de l'augmentation de la charge un éventuel premier décrochage, de faible niveau appelé petit décrochage. Ce phénomène est plus particulièrement constaté sur les machines à aubages fortement inclinés (faible rapport $W_z/\omega_r R$), alors que dans le cas d'une faible inclinaison, cet état n'est pas stable, et l'évolution se fait immédiatement vers un état nettement plus turbulent et "heurté" /78/.

On retrouve en tentant d'expliquer cette particularité d'un point de vue bidimensionnel, les raisons et arguments qui ont motivé le développement des modèles tels que dans /62-79-80/. Ces arguments se distinguent selon le point de vue auquel on se place.

Aspect cinématique.

En premier lieu, on peut, au plan cinématique, remarquer que pour un aubage fortement incliné, une diminution du débit local a moins d'influence sur l'incidence que dans le cas d'une faible inclinaison, mais que par contre, un épaissement des couches limites provoque un blocage relativement plus important. Il peut donc dans ce cas (fortement incliné) y avoir association entre faible décollement et fort ralentissement axial ou relatif, ce qui semble favorable à la stabilité du petit décrochage.

Aspect énergétique.

Par ailleurs on peut d'un point de vue énergétique avancer que l'effet de "relance" ou d'entraînement appliqué au fluide situé dans le rotor est, à perte de débit égale, plus important (par rapport au cas non décroché) avec ce type d'aubage. Du fait de l'énergie ainsi communiquée au fluide, cet effet est favorable à un équilibre statique à l'aval entre cellules (décrochées) et parties saines de l'écoulement.

Aspect dynamique.

Enfin l'effet du changement de débit dans un canal étroit (q/t) où l'écoulement est peu désorganisé par le décollement, est davantage susceptible de correspondre à un gradient axial de pression que dans le cas d'un fort décollement, dans un canal large. La perturbation dipolaire (\oplus, \ominus , Fig 3) de pression statique qui en résulte entre les roues, communique au fluide une impulsion qui augmente systématiquement l'incidence dans la cellule décrochée, et la diminue dans la zone saine.

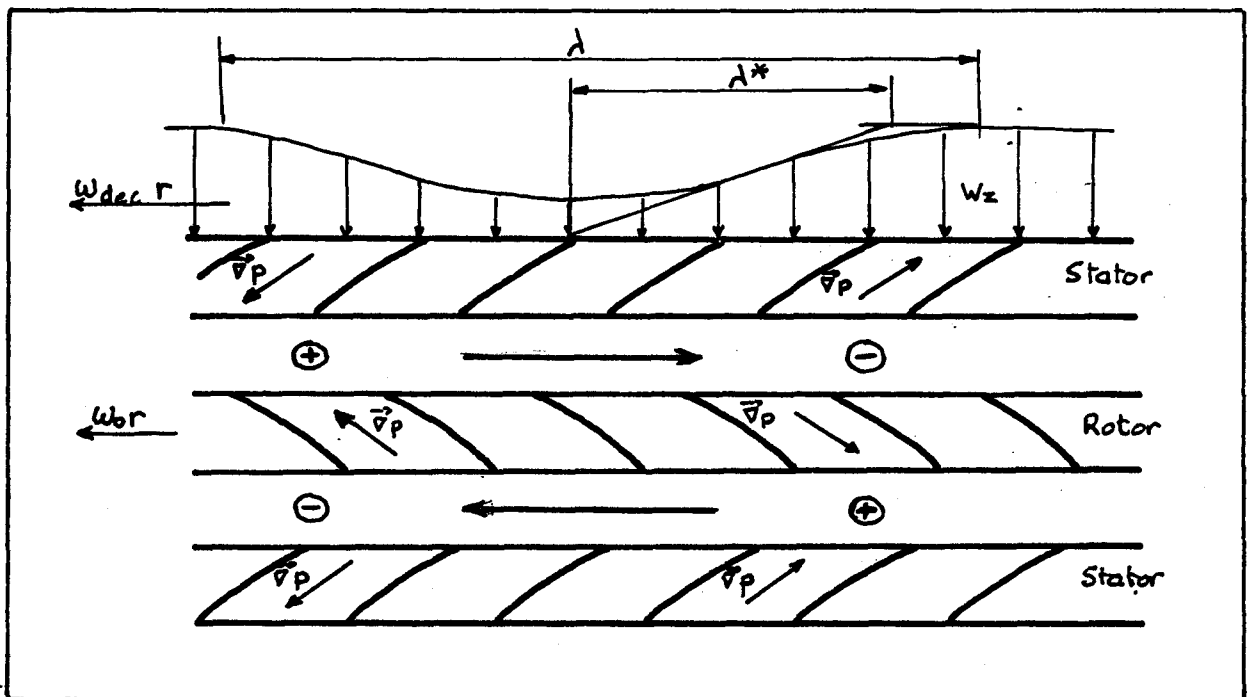


Fig 3. -Mise en évidence des pics de contre pression dans les zones inter-roues.

Cette impulsion est d'autant plus forte que λ , longueur caractéristique de la cellule, est faible. On voit donc l'importance du rôle joué par cette longueur dans l'organisation de l'écoulement entre les roues. A cela, il faut ajouter le fait que le blocage n'est pas uniforme le long du canal, et que le temps de passage dans la grille, de même que les temps de décollement et de recollement, introduisent du point de vue de l'écoulement moyen, un déphasage à la fois en temps et en espace entre les vitesses débitantes et périphériques. Ces temps limitent la vitesse de transition (sain-décollé) de l'écoulement de grille, on peut leur associer la longueur λ^* .

Ces deux longueurs (λ et λ^*) sont étroitement liées entre elles dans la configuration d'une cellule, dont l'ampleur est fixée par accord entre ces longueurs. Ceci montre l'importance qu'a la largeur des espaces laissés libres ou occupés par les roues /79/. On voit bien aussi l'interaction qu'il peut y avoir entre des cellules très proches, ce qui peut justifier leur nombre parfois très important.

Toutes ces justifications plus ou moins intuitives amènent à une conception bidimensionnelle de décrochage tournant. Elles suggèrent une modélisation bidimensionnelle non linéaire et une simulation instationnaire.

4.1.2. -Modèles

Dans les travaux /79-80/, nous trouvons une modélisation dans laquelle le comportement de grille est simulé sur une base de résultats expérimentaux. Dans /79/, à un écoulement de base stationnaire axisymétrique, est ajoutée une perturbation finie de vitesse portée par les surfaces de courant de l'écoulement de base. La technique utilisée pour le calcul de la perturbation supposée incompressible, est du type (ω, ψ) instationnaire où l'évolution de la vorticité normale aux surfaces de courant est régie par l'équation d'HELMHOLTZ, et dans

laquelle la fonction de courant de l'écoulement perturbé satisfait au problème elliptique classique la liant au tourbillon.

Le couplage radial est réalisé par l'intermédiaire de pertes supplémentaires susceptibles d'unifier les vitesses de propagation correspondant aux différentes surfaces de courant. Ce procédé de couplage, bien que moins fort que celui dû à l'équilibre radial nous semble être d'une grande importance car il prend potentiellement en compte un effet de diffusion radiale dont le rôle n'est pas moindre que celui de l'équilibre radial local.

Dans d'autres travaux postérieurs, tels que /62/, l'écoulement moyen est tridimensionnel, ce qui permet de prendre en compte l'équilibre radial local. Mais ces travaux restent dans le même cadre quasi-bidimensionnel pour le comportement de grille.

Dans une toute autre voie, nous trouvons des simulations numériques déjà évoquées de l'écoulement bidimensionnel instationnaire de grille d'aubes dont la récente /81/, basée sur la technique des singularités tourbillonnaires. Les résultats obtenus sont vraisemblables, mais la technique ne semble pas devoir s'étendre dans l'immédiat à une turbomachine.

Enfin, la comparaison de résultats numériques et expérimentaux dans /82/ et en particulier des vitesses de propagation des cellules, montre bien l'importance des effets tridimensionnels et des grandeurs caractéristiques associées (temps de centrifugation, d'amorçage de l'effet secondaire...), même en petit décrochage. A fortiori dans le grand décrochage qui, lui, est pleinement tridimensionnel comme le montrent entre autres résultats /78-82-84/.

4.2. -Le grand décrochage

On peut caractériser le grand décrochage par le fait que l'aubage ne fonctionne plus en régime décollé, mais plutôt par brassage du fluide. Les résultats expérimentaux sur lesquels nous nous sommes basés pour décrire le grand décrochage /78-82/ sont différents sur le plan des machines et des conditions de fonctionnement, néanmoins ils convergent dans leurs conclusions. Dans les premiers /78/, les différentes machines testées se différencient par le fait que faisant varier l'inclinaison d'un ou plusieurs aubages, les charges relatives supportées par les roues et l'équilibre radial sont modifiés. Pour les seconds /82/, l'inclinaison varie d'une façon plus homogène sur l'ensemble des roues

De plus ces résultats se complètent assez bien. Les premiers décrivent bien à différentes stations en r , θ , z , les composantes axiale et azimutale de la vitesse entre les roues, ce qui permet de reconstituer l'écoulement dans cette zone. Les seconds donnent des indications sur les pressions statique et totale, et permettent de se faire une idée sur les mécanismes qui communiquent l'énergie au fluide et ceux qui la dissipent.

4.2.1. -Caractéristique générale du grand décrochage

Les études expérimentales montrent que dans le grand décrochage, le brassage est relativement bien organisé dans une cellule, et permettent nous semble-t-il de relever quelques particularités tant sur ce qui se passe dans l'aubage, qu'entre les roues.

4.2.2. -Écoulement moyen dans les espaces libres et les roues sous l'aspect cinématique

Les caractéristiques de machines utilisées dans les travaux évoqués précédemment sont récapitulées et comparées dans

Le tableau de la figure 4 . Elles permettent effectivement de recouper et d'associer les résultats.

Compresseur axial	Corde	$\frac{\text{Corde}}{\text{Hauteur}}$	$\frac{\text{Rayon ext}}{\text{Rayon int}}$	$\frac{\text{Espace}}{\text{Hauteur}}$	Vitesse périphérique
DAY et CUMPSTY /78/	17.8 mm	0,5	1,25	0.4	55 m/s
BREUGELMANS 1B2/	75 mm	1	1.25	1	42.5 m/s

Figure 4

Dans /78/, l'écoulement traversant un étage est relevé au 2/3 de la hauteur de l'aube, dans l'espace inter-roues pour trois types d'aubages, de faible, moyen et fort rapport (w_z/w_{or}). En tenant compte de la structure de l'écoulement telle qu'elle est proposée dans la référence citée, on peut représenter pour les trois aubages testés, les vitesses relatives dans les zones non décrochées (ND) et décrochées (D) figure 5, où S est l'effet de résurgence radiale.

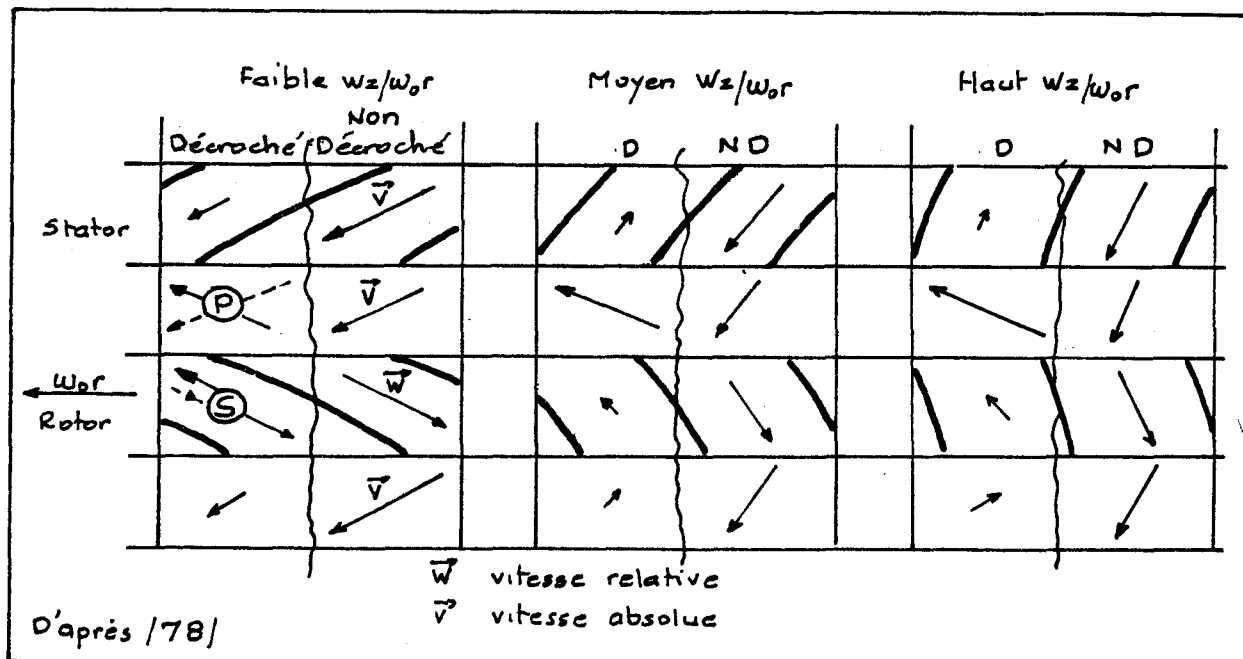


Fig 5. -Influence de l'inclinaison de l'aubage sur la structure de l'écoulement.

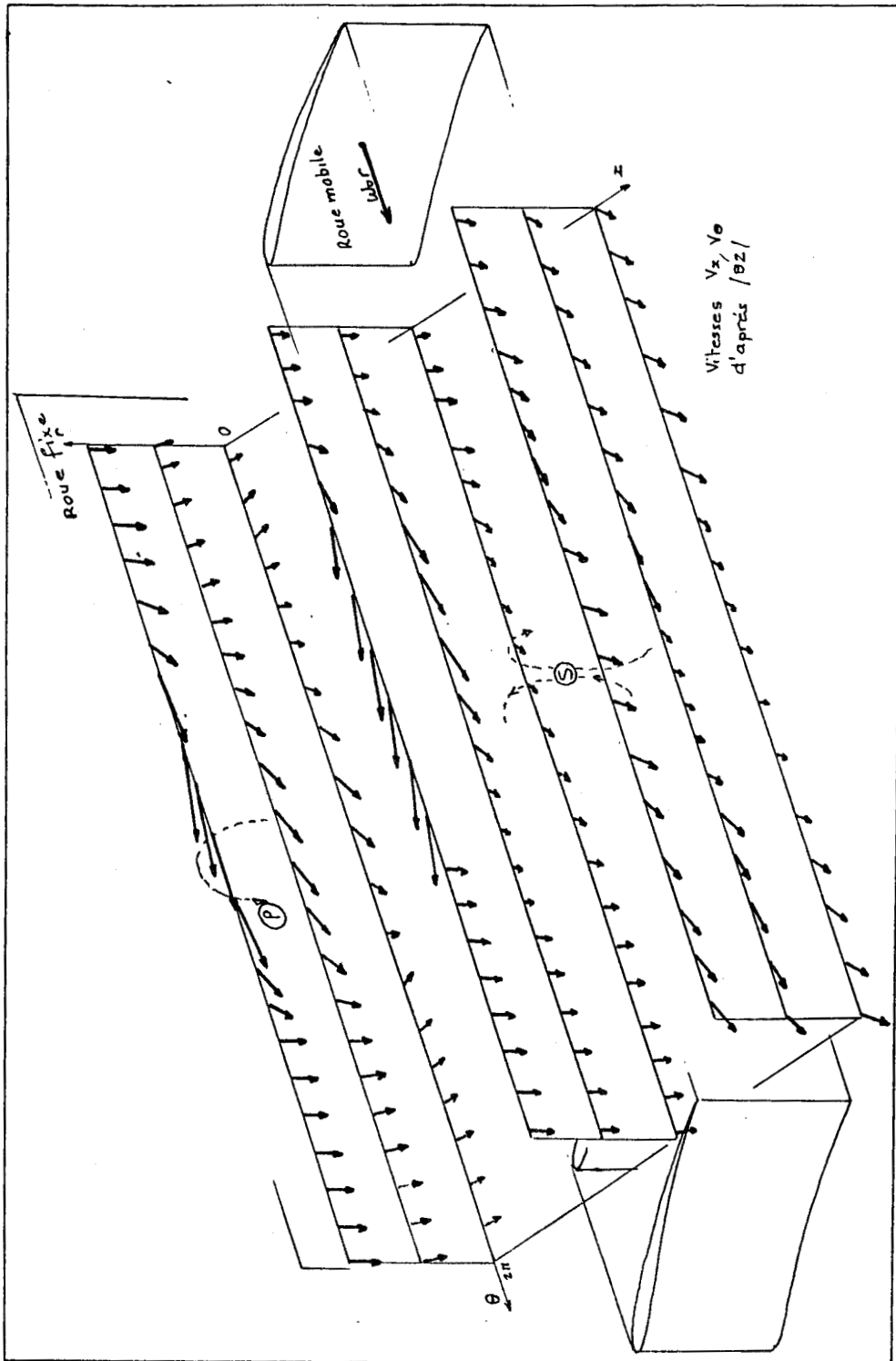


Fig 6. -Structure de l'écoulement moyen d'aube à aube, à l'entrée et à la sortie des roues (d'après /82/).

Les mesures /82/ permettent de compléter cette description et de comparer les vitesses axiales et périphériques relevées sur différents rayons (10%, 50%, 90% de la hauteur d'aube) et à différentes stations axiales: deux plans entre les roues et un plan derrière le rotor.

Sur la figure 6 qui s'inspire des résultats précédents (/82/), il est possible de voir les décalages azimuthaux déjà mentionnés sur les distributions de vitesse. Bien que les vitesses radiales ne soient pas relevées, on peut aussi, en considérant les différences de vitesse débitante entre points homologues (face à face axialement), et la stratification radiale, se faire une idée sur la structure complexe de l'écoulement dans l'espace libre.

4.2.3. -Champ de pression entre les roues

Les distributions de pression relevées dans /78/ permettent de préciser le rôle joué par cette grandeur dans l'entrée et la sortie du décrochage. Sur la figure 7, sont représentées les pressions à l'aval et à l'amont d'un rotor. Elles confirment pour l'entrée dans une zone décrochée, l'hypothèse faite sur l'aspect dipolaire du champ de pression. L'entrée en décrochage est due à un pic local de contre-pression tel qu'on peut le voir figure 7. Par contre la sortie de décrochage se fait sans différence de pression, simplement par remplissage à partir de l'apport périphérique de fluide.

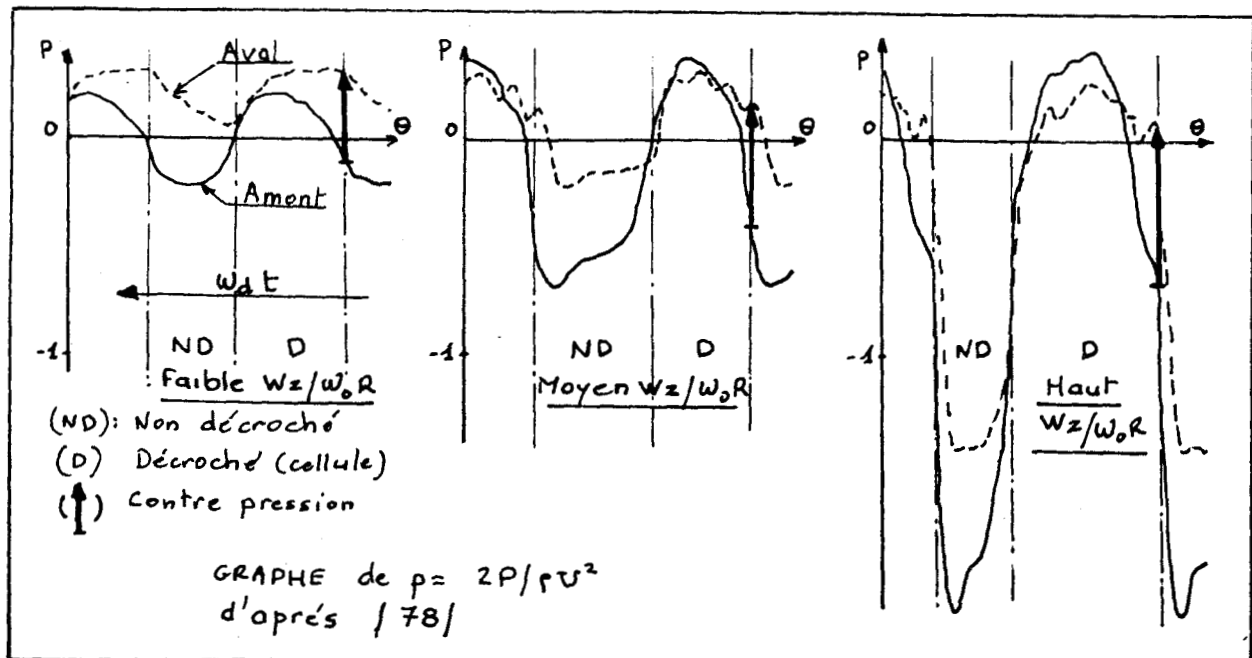


Fig 7. -Relevé des pics de contre pression entre les roues (d'après /78/).

4.2.4. -Ecoulement dans l'aubage tournant

Nous disposons de peu de résultats expérimentaux sur le champ de vitesse dans les roues /84/, on peut néanmoins s'appuyer sur les résultats expérimentaux donnés pour l'espace inter-roues, sur la connaissance du champ de force d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS et sur les conditions de raccordement pour avancer quelques idées sur la structure du champ de vitesse régnant entre les aubes et sur la modélisation de ce champ.

En premier lieu, on peut partir de l'hypothèse que l'écoulement n'est plus seulement décollé, et que le transfert de fluide à travers l'aubage se fait par prélèvement d'une couche de fluide sur la zone située entre les roues. Ce prélèvement peut s'effectuer par le bords d'attaque ou le bord de fuite (figure 8).

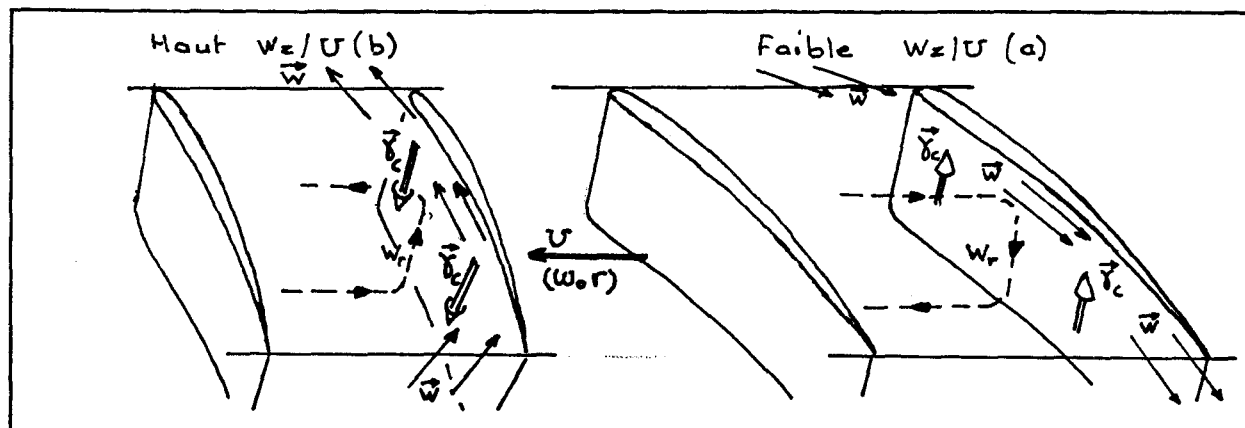


Fig 8. -Effets radiaux locaux dus aux forces de CORIOLIS.

Pour les aubages fortement inclinés (Fig 8a, faible W_z/U) ce prélèvement ne se fait que par le bord d'attaque, ce qui est tout à fait explicable par le fait qu'au bord de fuite, la vitesse relative est, à débit négatif, orientée défavorablement par rapport à la normale à l'intrados. Il ne pourrait malgré la contre pression entrer qu'une trop faible partie du jet schématisé sur la figure 9, en regard du soufflage que l'on peut

avoir pour les raisons invoquées par la suite. Par contre, dans un aubage faiblement incliné (Fig 8b grand $\frac{w_z}{U}$), l'incidence au bord de fuite peut être favorable à l'ingestion d'une partie importante du jet relatif pour donner un effet de type "Pelton"/78/. L'entrée d'une couche de fluide à grande vitesse dans le rotor, crée une forte vorticité radiale dans le canal inter-aubes. Cette couche subit une accélération de CORIOLIS radiale (δ_c) qui selon le cas s'ajoute ou se retranche à l'accélération centripète d'entrainement. Dans le cas d'une entrée par le bord d'attaque (figure 8.a), les accélérations se retranchent, la couche ingérée, qui de plus est poussée par l'effet de raclage, est déviée vers le pied de l'aube. Ceci a tendance à réduire le blocage au voisinage de l'arbre et à accentuer le décrochage près du carter. Par ailleurs, le soufflage près du carter par la centrifugation et la résurgence de la zone décollée peuvent être suffisamment forts pour renverser le sens de l'écoulement, et créer un refoulement par le bord d'attaque, comme celui représenté figure 10.

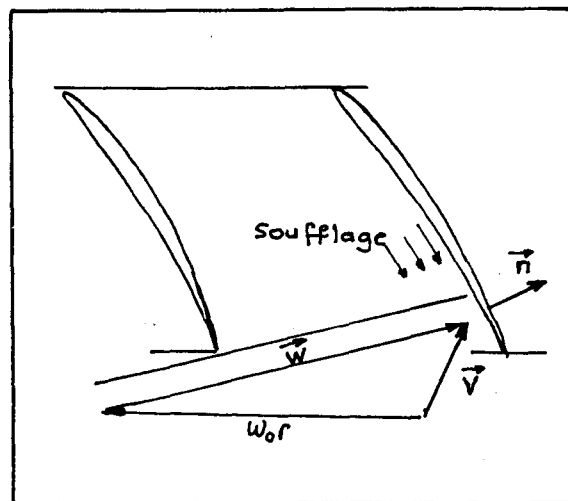


Fig 9. -Effet du soufflage.

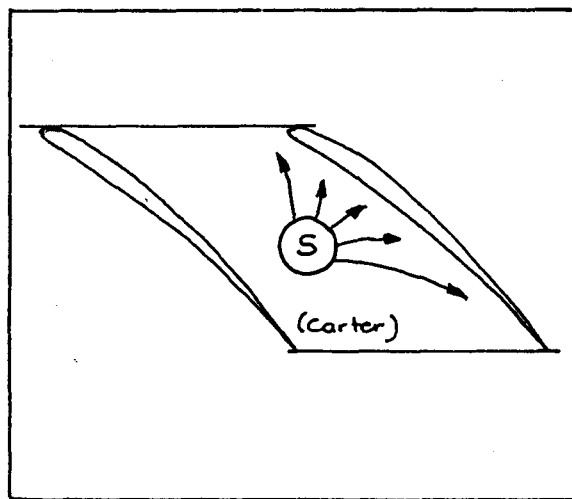


Fig 10. -Effet de résurgence radiale.

Inversement, dans le cas d'un prélèvement par le bord de fuite (figure 8.b), la couche migre vers le carter, ce qui

ici aussi renforce l'écoulement de retour au voisinage du carter, et conduit à avoir un écoulement totalement inversé dans cette zone.

4.2.5. -Dans l'aubage fixe

Dans le stator, ces forces radiales n'existent pas, l'écoulement y est donc à priori différent. Néanmoins, d'un point de vue quasi-stationnaire (au coeur d'une cellule), la différence de pression entre sortie et entrée de la roue maintient un antagonisme entre prélèvement par les bords d'attaque et de fuite. Les deux cas se présentent effectivement selon l'inclinaison du profil et la différence de pression.

4.2.6. -Conclusions sur le champ dans les roues

Ces remarques vont dans le sens des résultats expérimentaux qui mettent en évidence des effets de résurgence et de retour partiel ou total par rapport à la hauteur d'aube. Ces mêmes résultats indiquent que dans une cellule, loin d'être axisymétrique, le champ est en continuelle évolution et donc instationnaire. De plus les zones frontières des cellules, très diffuses, sont aussi déphasées d'un rayon à l'autre, de même qu'entre amont et aval d'une roue ou d'un espace libre. Ceci indique l'importance des transferts radiaux dans les roues ainsi que des échanges périphériques et radiaux dans les espaces libres.

5. -Conclusions et éléments de modélisation

A partir de la revue des modèles existants, et de résultats expérimentaux que l'on trouve dans la littérature, nous pouvons tirer quelques conclusions sur la modélisation, notamment sur la nécessité de prendre simultanément en compte plusieurs échelles, ainsi que sur les contraintes que cela impose au modèle.

5.1 Les échelles du problème

Différentes échelles ont été mises en évidence:

-Celle de la machine et de l'écoulement moyen. A cette échelle le cloisonnement dû aux aubes est effacé, ce qui permet un paramétrage azimutal plus libre, mais nécessite la donnée expérimentale du comportement de grille d'aubes.

-Celle de l'aubage et de l'écoulement d'aube à aube. Elle permet une description plus fine et un calcul de l'écoulement d'aube à aube, mais nécessite la donnée des conditions extérieures d'entrée, de sortie et de couplage de canal à canal, ainsi que la donnée de l'écoulement près des parois.

-Celle des couches limites. Elle permet la description fine des couches limites, du déclenchement du décollement, des sillages, mais comme pour l'échelle précédente nécessite la donnée du champ extérieur (écoulement dans le canal).

Pour réaliser une modélisation complète du décrochage, il serait souhaitable que ces trois échelles soient couvertes d'une manière globale par le modèle, et que les particularités propres à chaque échelle n'apparaissent qu'à travers les options de prise en compte de certains termes et les pas spatiaux et temporels du schéma numérique.

Une telle approche, s'il est envisageable de la concrétiser aujourd'hui sur des problèmes à configuration simple à deux niveaux d'échelle, n'est pas encore applicable au cas complexe du compresseur. Aussi nous nous plaçons entre cette approche qui exclut toute donnée expérimentale, et celle, telle que dans /61,79,87/, qui consiste à traiter le problème instationnaire moyen (plus grande échelle) en s'appuyant sur des données expérimentales souvent bidimensionnelles pour tenir compte du comportement de grille d'aubes. Nous prenons pour objectif d'ajouter à cette seconde approche une modélisation (à l'échelle des aubes) de l'écoulement de grille d'aubes.

Ainsi la nécessité de données expérimentales est réduite aux phénomènes à très petite échelle, ce qui présente plusieurs avantages:

- Celui d'avoir un caractère plus universel que ne l'ont les résultats expérimentaux de grilles d'aubes;

- Celui d'éviter l'utilisation de résultats obtenus dans un cadre différent (bidimensionnel, instationnarité imposée), dans un problème de stabilité totalement tridimensionnel.

- Celui de laisser extérieur au modèle des phénomènes que nous pouvons supposer, notamment en tridimensionnel, être pilotés par le décrochage, et de modéliser par contre les phénomènes réellement actifs dans le décrochage: instabilité de l'écoulement moyen et réponse de grille.

5.2 Echelles et pas spatiaux et temporels du modèle

Pas d'espace

Pour préciser l'échelle des phénomènes visés par cette modélisation, nous disons que comme l'indique l'analyse des résultats expérimentaux, les structures d'une taille de l'ordre de 20% de la largeur du canal, telles que les bouffées, sillages ou couches décollés, ou encore les effets tels que ceux vus dans la première partie (fortes déviations très localisées) doivent être pris en compte. Ceci nous fixe l'ordre de grandeur du pas du maillage inter-aubes qui sans être d'une grande finesse par rapport à la corde est quand même petit par rapport au maillage de l'espace occupé par la machine tel qu'en /79/. Déjà à ce stade, s'impose pour des raisons de taille, la nécessité de traiter différemment les deux problèmes. De plus des raisons de temps de calcul viennent s'ajouter aux premières.

Pas de temps

A l'échelle de la machine, nous pouvons prendre comme base temporelle le pas correspondant à l'application du critère de stabilité des schémas explicites (critère

C.F.L.). A l'échelle de la grille d'aubes, l'utilisation d'un schéma explicite nécessiterait un fractionnement fin du pas temporel extérieur. Elle nous amènerait à simuler (au delà des exigences premières issues de l'analyse des résultats expérimentaux qui sont: phénomènes de transport et d'interaction typiquement incompressibles), des phénomènes acoustiques à l'échelle des bouffées et des sillages, ce qui est en dehors de nos préoccupations.

Il nous apparaît donc nécessaire de distinguer les schémas utilisés dans les deux modèles et d'imposer un schéma de type incompressible pour le problème de grille d'aubes. Ceci pourrait nous permettre de calculer avec le même pas de temps à la fois l'écoulement dans les canaux, régi par transport sur une fraction de la corde et l'écoulement moyen à l'échelle de la machine, à pas de temps basé sur le critère C.F.L.

Ainsi le pas temporel ne serait pas pénalisé par la prise en compte de cette nouvelle échelle. Le problème est maintenant de voir dans quelles conditions on peut d'une part limiter la taille du problème, et d'autre part limiter le temps de calcul, alors que l'on envisage d'utiliser une technique qui fait appel à une intégration spatiale réputée coûteuse. C'est ce problème que nous abordons maintenant, qui constitue l'essentiel de notre contribution.

Chapitre II

APPROCHE DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL INSTATIONNAIRE DANS UNE ROUE DE TURBOMACHINE AXIALE

1. OBJECTIFS ET DEMARCHE

1.1. Objectifs

Dans le but de répondre aux contraintes de taille et de temps de calcul, l'objectif essentiel est de définir un modèle susceptible de se substituer aux données expérimentales de caractéristique de grille habituellement utilisées. Il est bien évident qu'en fonctionnement totalement décroché, le modèle ne peut se traduire sous la forme d'une relation simple déviation-incidence associée à un modèle de pertes. Il ne peut se présenter que sous la forme d'un ensemble de relations relativement complexes entre les grandeurs discrétisées à l'amont, à l'aval, et dans les canaux voisins. Dans ces relations est pris en compte l'état tourbillonnaire et thermodynamique du fluide ingéré antérieurement.

A cette première idée, nous associons le souhait que comme avec l'utilisation des résultats expérimentaux, le modèle ne soit pas nécessairement mis en oeuvre pour chaque canal, et qu'ainsi il puisse être utilisé plus librement dans la modélisation de l'écoulement à l'échelle de la machine.

1.2. Eléments disponibles

Pour réaliser ces objectifs, nous nous basons sur les quelques faits et idées suivants:

- On sait d'une part par des techniques du type (ω, ψ) poser le problème de l'écoulement à rotationnel et à divergence imposés, et le mettre sous forme linéaire.

- On sait d'autre part avec l'équation d'HELMHOLTZ, évaluer de manière explicite le rotationnel local, à partir des états antérieurs du champ de vitesse.

- On sait aussi, en prenant l'équation de continuité, et la divergence des équations de quantité de mouvement, lier l'état et l'évolution temporelle de la divergence de la vitesse, et de l'énergie.

On peut donc espérer en ce qui concerne la vitesse et l'énergie, mettre le problème sous la forme d'un système dont le premier membre serait fortement linéaire et à coefficients constants. Seules des conditions aux limites telles la condition de KUTTA dont le rôle est de première importance, garderaient leur forme totalement non linéaire. A ce système serait associé le calcul du rotationnel au moyen de l'équation d'HELMHOLTZ.

Après cette opération il est envisageable de réduire le système obtenu, en éliminant numériquement toutes les grandeurs inconnues strictement intérieures au domaine, et en ne conservant que les grandeurs frontalières qui nous intéressent. Cette opération numérique coûteuse en temps, n'est à effectuer une seule fois dans la mesure où les coefficients sont constants.

Ainsi nous pourrions réaliser l'objectif principal tout en limitant le temps de calcul. Pour satisfaire au souhait d'indépendance par rapport au pas de l'aubage, qui devrait encore améliorer le temps de calcul, nous envisageons d'adopter:

- d'une part une description spatiale et un choix des variables d'espace qui nous dégagent en partie des contraintes de

raccordement de canal à canal

- d'autre part un paramétrage et une discrétisation des distributions d'aube à aube mieux adaptées que ne l'est le paramétrage nodal, à la représentation des distributions typiques des grandeurs dans un écoulement de grille d'aubes.

1.3. Démarche

Il est bien évident que la synthèse complète de toutes ces contraintes et données représente un travail très important, et nous nous contentons dans ce qui suit de proposer:

- Une démarche jalonnée par:
 - . Le choix d'une formulation locale
 - . Le choix d'une description spatiale et temporelle
 - . Le choix d'un paramétrage

- Une étude de chacun de ces points a permis à l'aide de tests numériques d'en établir la faisabilité, et de conclure sur l'intérêt de poursuivre ce travail.

2. FORMULATION LOCALE DU PROBLEME-CONDITIONS AUX LIMITES

2.1. -But de la formulation

Le problème est d'obtenir un système réduit d'équations permettant de lier directement les grandeurs (vitesse, pression ou enthalpie) frontalières ou extérieures au sous domaine limité au canal inter-aubes (Figure 11). Pour cela on se propose d'utiliser la technique bien connue de la condensation, qui par une inversion partielle du système linéaire résultant de la discrétisation du problème, permet l'élimination une fois pour toutes, des variables internes au domaine et de ne conserver qu'une forme réduite du système.

Appliquée au système correspondant au problème de l'écoulement dans un canal inter-aubes, cette technique permet d'obtenir des équations qui se présentent comme des relations de compatibilité portant sur les variables frontalières et externes, dans lesquelles est pris en compte l'état tourbillonnaire et thermodynamique local du fluide dans tout le domaine.

Pour en arriver à ce stade, il faut que les équations locales ainsi que certaines des conditions aux limites aient une forme quasi linéaire et que l'opérateur (premier membre) soit à coefficients indépendants des variables locales. Ces contraintes nous amènent à proposer une formulation très spécifique qui s'inspire de celle utilisée dans /79-80/.

2.2. -Equations locales

Les variables qui nous intéressent le plus sont celles qui interviennent dans les conditions aux limites, ce sont principalement la vitesse relative \vec{w} et la pression p (ou la rothalpie R)

Pour déterminer ces grandeurs, nous disposons des équations suivantes (les forces extérieures ont été négligées):

$$I \quad \text{rot } \vec{w} = \vec{\omega}_A - 2\omega_0 \vec{k}$$

où $\vec{\omega}_A$ est le rotationnel absolu, ω_0 la vitesse de rotation de la roue, et \vec{k} le vecteur axial,

$$II \quad \text{div } \vec{w} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + 2 \vec{w} \cdot \vec{\nabla} R + \frac{1}{2} \vec{w} \cdot \vec{\nabla} (\omega_0^2 r^2 - w^2) - \vec{w} \cdot \vec{t}_v - T \frac{ds}{dt} \right)$$

$$\text{où } R = h + (w^2 - \omega_0^2 r^2) / 2 \quad ,$$

où \vec{t}_v est la tension de viscosité ($\text{div } \vec{\sigma}_v$), S l'entropie, T la température, c la vitesse du son et h l'enthalpie locale

$$\text{III} \quad \Delta R + \frac{\partial \text{div } \vec{w}}{\partial t} = \omega^2 - \vec{w} \cdot \text{rot } \vec{\omega} + \text{div} (\vec{t}_v - T \vec{\nabla} S)$$

où Δ est l'opérateur laplacien

Ces deux dernières équations sont respectivement issues de l'équation de continuité qui ici est utilisée pour déterminer la divergence à partir de l'évolution de l'état du fluide, et de l'équation obtenue en prenant la divergence de l'équation de la quantité de mouvement, équation qui lie la diffusion de la rothalpie au rotationnel et à l'évolution de la divergence.

Enfin le rotationnel est donné par l'équation d'évolution d'HELMHOLTZ :

$$\text{IV} \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{w} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \text{div } \vec{w} - \vec{\omega} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w}) + \vec{\nabla} T \wedge \vec{\nabla} S - \text{rot } \vec{t}_v = 0$$

Ainsi les équations qui régissent la quantité de mouvement, n'interviennent que par leur rotationnel et leur divergence qui permettent de déterminer un champ dont le caractère arbitraire local est levé par les conditions aux limites.

Des équations telles que:

- la loi d'état: $f(p, \rho, T) = 0$, ou encore $p = p(\rho, S)$

- Une forme de l'équation de l'énergie (en négligeant les échanges et la production thermiques):

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{w} \cdot \vec{\nabla} S \right) = \vec{E} : \vec{\sigma}_v$$

où \vec{E} est le taux de déformation, $\vec{\sigma}_v$ la contrainte de viscosité,

permettent de calculer les grandeurs T, S, ρ .

Finalement, les équations que nous avons à intégrer sont après discrétisation temporelle de la forme (pour l'état calculé):

$$V \quad \text{rot } \vec{\omega}^{n+1} = \vec{\omega}^{n+1} - 2\omega_0 \vec{k}$$

$$VI \quad \alpha \text{ div } \vec{W}^{n+1} + \beta \frac{R^{n+1}}{C_0^2 \Delta t} = S_d^n$$

$$VII \quad \alpha \Delta R^{n+1} + \beta \frac{\text{div } \vec{W}^{n+1}}{\Delta t} = S_R^n$$

- où $\vec{\omega}^{n+1}$ et S^{n+1} sont calculés à partir de IV par une formulation explicite au premier ordre: $\vec{\omega}^{n+1} = \vec{\omega}^n + \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}\right)^n \Delta t$, et de l'équation de l'énergie

- où α et β sont des coefficients dépendant de la discrétisation temporelle,

- où c_0 est la vitesse caractéristique du son,

- et où S_d et S_r sont les seconds membres faisant intervenir les états antérieurs, et l'état calculé dans les termes non linéaires (d'où la nécessité d'un processus itératif pour chaque état).

Dans ces seconds membres, les termes de viscosité sont évalués de manière totalement explicite, car conformément à ce que nous avons dit sur les échelles du problème et notamment sur les couches limites, les conditions d'adhérence ne sont pas satisfaites, les termes visqueux ne sont pas intégrés.

Globalement, cette formulation est une formulation dans laquelle la convection est essentiellement prise en compte dans IV et aussi avec l'équation écrite pour S . L'intégration spatiale: (respect des contraintes cinématiques locales et sur

Les parois) est typiquement incompressible. Le cas limite incompressible peut d'ailleurs être obtenu en faisant dans VI et VII tendre les quantités $1/\Delta t$ et $1/c^2$ vers zéro, ce qui élimine complètement l'acoustique du problème.

En discrétisant les équations V, VI, VII, nous pouvons finalement construire un opérateur matriciel de type élliptique auquel il faut adjoindre des conditions aux limites.

2.3. -Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont ici exprimées pour un canal inter-aubes, indépendamment de la description et du paramétrage. Nous n'en donnons que les grandes lignes en tenant compte du fait que notre domaine est un sous domaine à la frontière duquel il n'est pas nécessaire d'exprimer toutes les conditions qui permettraient de déterminer le champ intérieur. En effet, notre objectif n'est que de lier entre elles les grandeurs frontalières et extérieures au domaine, par des relations de compatibilité. Vue sous cet angle, la discrétisation spatiale du problème, notamment des conditions aux limites est plus aisée.

Un exemple bidimensionnel discrétisé est ensuite proposé pour préciser la démarche et montrer l'intérêt d'une symétrie amont-aval dans le décompte des équations.

2.3.1. -Conditions sur les parois

Nous avons à exprimer la condition de glissement:

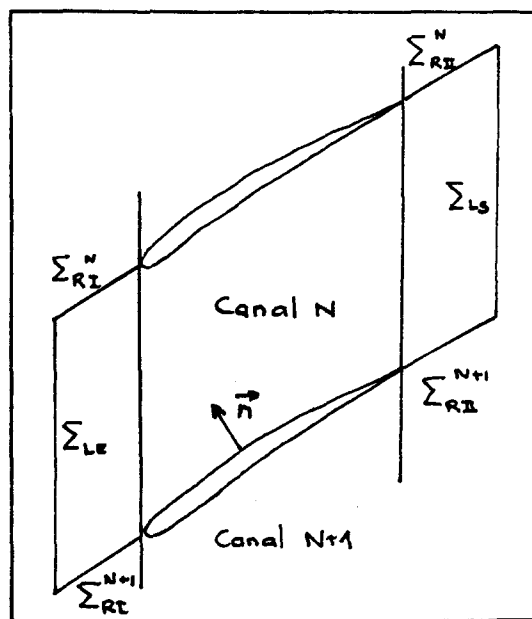


Fig 11. -Coupe radiale d'un canal inter-aubes. Frontières.

VIII $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$

et pour R, une projection de l'équation régissant la quantité de mouvement sur la normale \vec{n} :

IX
$$\frac{\partial R^{n+1}}{\partial n} = (-\vec{\omega}^{n+1} \wedge \vec{w}^{n+1}) \cdot \vec{n} + t v_n + T \frac{\partial s}{\partial n}$$

où t peut être supposé négligeable. Ces deux conditions pourront être condensées par la suite.

2.3.2. -Condition sur les surfaces de raccordement(Σ_R)

Il se présente sur ces surfaces deux circonstances possibles: le fluide peut atteindre ou quitter le profil. Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas où le fluide quitte le profil. Les conditions de continuité de la pression (KUTTA) et de glissement sont à écrire sur la surface de séparation (nappe tourbillonnaire) attachée au profil. La différence de vitesse entre les deux cotés de cette surface est régie par une équation analogue à IV pour la singularité tourbillonnaire portée par la nappe.

Afin d'éviter d'avoir à rechercher la position de la nappe et de discrétiser l'équation qui régit son évolution, nous faisons l'hypothèse que le tourbillon lâché au bord de fuite, est transporté de la même manière que le rotationnel local, c'est à dire par l'équation IV.

On admet donc que le tourbillon singulier diffuse dans le voisinage des surfaces Σ_R (Fig 11), mais ceci s'accorde bien avec les hypothèses selon lesquelles on néglige les couches limites, sillages et phénomènes à petite échelle.

Ainsi, sur les surfaces Σ_R nous avons continuité des grandeurs, mais avec un gradient important que l'on doit prendre

en compte par les équations locales. Finalement, les conditions sur Σ_R pourront selon la discrétisation prendre la forme de conditions de raccordement (continuité de \vec{W} par exemple) ou la forme des équations locales (équation I)

Lorsque le fluide atteint l'aubage, ces conditions sont encore valables et seront effectivement utilisées pour favoriser la symétrie de forme amont-aval du système d'équations.

2.3.3.-Conditions sur les bords du profil

L'un et l'autre bords (attaque et de fuite), peuvent être selon les circonstances attaqués ou quittés par le fluide. Cela correspond à des conditions différentes, il est cependant nécessaire de conserver une symétrie dans le décompte de ces conditions, de manière à substituer l'une à l'autre au cours du calcul. Ces conditions ne peuvent donc être condensées.

Sur le bord d'attaque du profil, on exprime en premier lieu que la rothalpie R (ou la charge H) est la même de part et d'autre du bord (H). On exprime ensuite, à partir d'une extrapolation du champ de vitesse, que l'équation d'EULER projetée suivant la normale au profil est vérifiée (N). Enfin, on exprime que la composante v suivant y , dépend des conditions amont (devant le), en écrivant le rotationnel sur la frontière de manière à lier les valeurs intérieures et extérieures de cette composante (Fig 12).

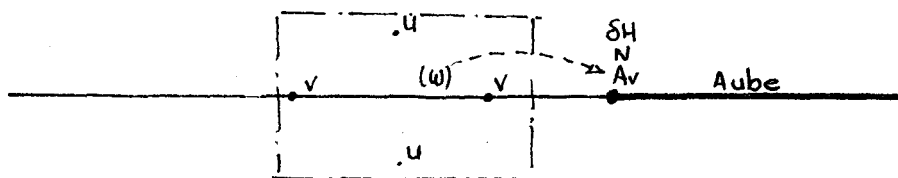


Fig 12. -Attribution des équations aux points particuliers (B d f)

A l'extrémité quittée par le fluide, on exprime d'abord que la pression est la même de part et d'autre du bord, ce qui pourrait se traduire d'une manière approchée (ici au terme d'entropie près, mais qui pourrait être intégré à la condition) par:

$$X \quad \delta \left(R - \frac{w^2}{2} \right) - T \delta S = 0$$

En ce qui concerne la vitesse, nous écrivons cette fois la condition de glissement à l'extrême bord du profil (vitesse extrapolée à partir de l'aval):

$$w.n=0$$

Nous avons donc globalement une symétrie amont-aval dans le nombre de conditions et donc (on peut le supposer) symétrie et indépendance de forme sur le système d'équations discrétisées par rapport au sens de l'écoulement.

2.3.4 - Sur les frontières Σ_L , limitant la longueur du canal, on se contente de discrétiser les équations locales en faisant intervenir les variables discrétisées extérieures au sous domaine.

2.4 - Exemple bidimensionnel de discrétisation spatiale en volumes finis

On discrétise les équations et conditions aux limites régissant l'écoulement dans un canal inter-aubes de forme simple (rectangulaire). Le fluide peut à priori entrer ou sortir par l'un ou (et) l'autre côté.

Nous ne donnons ici que l'ordre d'affectation des variables et des équations aux noeuds du domaine, avec au bord gauche du profil des conditions de type bord d'attaque, et au bord droit des conditions de type bord de fuite (Fig 13).

A l'intérieur du canal, on dispose de $n+1$ équations pour n inconnues. La $n+1$ ième traduit la compatibilité des variables prises à l'entrée et à la sortie du canal avec la conservation du débit.

Pour l'ensemble du domaine, nous avons trois équations en trop qui peuvent, selon les conditions d'entrée et de sortie du fluide, s'interpréter comme suit :

a) Dans tous les cas, conservation du débit (ou de la masse)

b-c) Dans le cas où le fluide entre par un côté et sort de l'autre, nous avons :

- l'angle de sortie est lié à l'angle d'entrée,
- l'enthalpie de sortie est liée à l'enthalpie d'entrée.

Dans le cas où le fluide entre par les deux côtés avec des caractéristiques différentes, l'équilibre à l'interface de contact permet d'écrire que :

- les deux débits sont liés entre eux,
- les pressions sont aussi liées entre elles.

Enfin, dans le cas où le fluide est sortant par les deux côtés, nous avons :

- égalité (aux pertes près) de l'enthalpie de sortie.
- les pressions sont liées entre elles

La discrétisation proposée a été testée en stationnaire dans les conditions du premier des trois cas évoqués (écoulement dans un sens) et a donné de bons résultats compte tenu du fait que notre problème est pour l'instant la faisabilité de la technique.

2.5 - Conclusion sur la modélisation de l'écoulement de grille d'aubes

Dans la mesure où les équations locales régissant l'écoulement dans un canal ainsi que certaines des conditions aux limites sont mises sous forme quasi-linéaires, (linéaire au premier membre), la condensation peut se faire une fois pour toutes et reste valable pour l'ensemble des canaux d'une roue et pour toutes les dates. Après cette opération, le système réduit ne contient plus que, d'une part, les équations non linéaires telles que la condition de KUTTA, et d'autre part, les équations écrites aux limites amont et aval du canal qui font intervenir les variables prises à l'extérieur de la grille, dans l'espace situé entre les roues.

Les termes non linéaires des équations condensées sont rejetées dans le second membre et pris en compte en même temps que les équations totalement non linéaires, dans des itérations successives que nous espérons être en très petit nombre, compte tenu du fait que les évolutions sont faibles au cours d'une itération temporelle.

Ainsi nous pouvons obtenir un système non linéaire réduit, utilisable comme caractéristique locale de la roue. Cependant, on est pour l'instant encore obligé de considérer séparément chaque canal et d'assurer au maillage d'une part un suivi de l'aubage, et d'autre part une adaptation entre roues mobiles et fixes.

Pour éviter ces problèmes, nous proposons tout d'abord une description spatiale et temporelle, et par la suite un paramétrage qui permettent de se dégager de ces contraintes.

3. - DESCRIPTION SPATIALE ET TEMPORELLE DES GRANDEURS PHYSIQUES - DISCRETISATION -

3.1- Description spatiale

Cette description porte surtout sur l'écoulement dans les roues. Les canaux inter-aubes peuvent être identifiés par la position de leur surface moyenne (Σ_S), définie d'une manière purement géométrique, par son équidistance des squelettes des aubes. Chaque canal est donc repéré par une surface à partir de laquelle, on peut positionner les points courants (fig 14). Il apparaît ainsi deux coordonnées azimuthales :

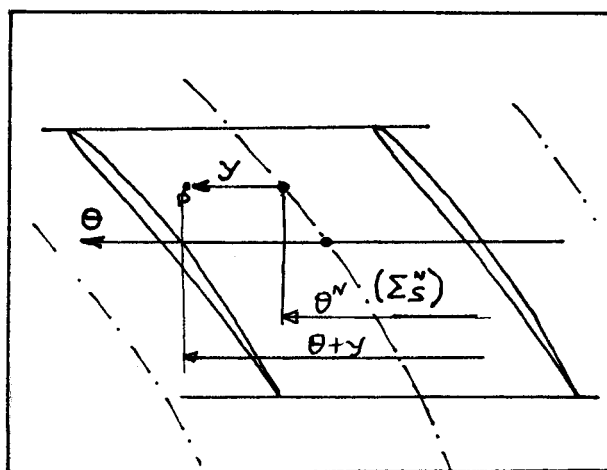


Fig 14. - Double paramétrage azimuthal:

- θ qui positionne le canal par $\theta - \Theta(r, z) - \Theta_0^N = 0$
- y qui positionne le point dans le canal.

- θ grande échelle
- y petite échelle

La coordonnée θ , ainsi que les grandeurs telles que la vitesse moyenne ou la différence de pression d'une aube à l'autre qui caractérisent l'écoulement dans le canal, ne peuvent en réalité lorsqu'on change de canal, prendre que des valeurs discrètes. Nous supposons cependant dans un premier temps que ces grandeurs sont distribuées de façon continue en θ de manière à nous permettre de formuler pour ces distributions un problème en termes d'équations aux dérivées partielles. Dans un deuxième temps, ces équations pourront être rediscrétisées sur un maillage autre que celui imposé par le pas et la forme des aubes. De même pour les conditions de raccordement de canal à canal qui pourront être traduites en équations différentielles et ensuite rediscrétisées.

Ainsi nous intercalons entre les canaux réels, des canaux fictifs portant un état "intermédiaire" des grandeurs physiques qui n'a pas de réalité instantanée, mais auquel on pourra se référer pour caractériser l'évolution temporelle de l'écoulement.

3.2 - Description temporelle

Dans le cas d'un phénomène établi, stationnaire (au défilement relatif près) dans un repère lié au décrochage, les états fictifs que nous avons définis seront effectivement atteints ultérieurement par les canaux en défilement par rapport au décrochage. L'hypothèse d'un continuum en θ est donc pleinement justifiée.

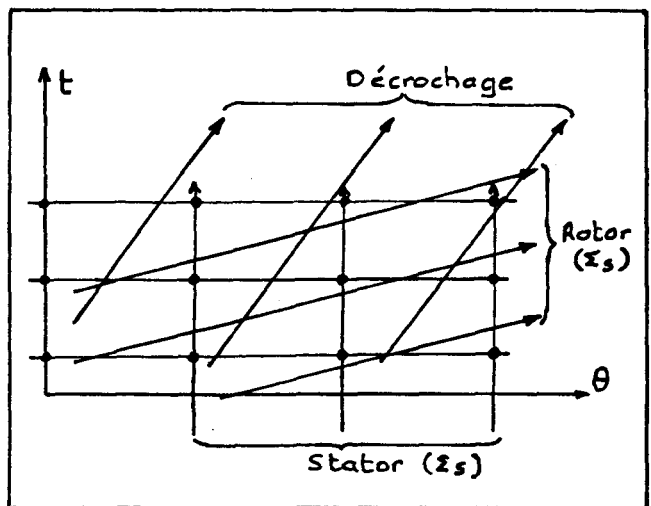


Fig 15. -Trajectoires dans (θ, t) des roues et des cellules décrochées.

Il n'en est pas de même pour un régime transitoire dans lequel les états intermédiaires ne sont pas atteints, puisqu'ils n'appartiennent pas aux trajectoires discrètes des canaux dans l'espace (θ, t) . (figure 15).

Nous supposons néanmoins que l'évolution des états intermédiaires en (θ, t) , est "parallèle" à celle des états correspondants aux canaux réels. Il est évident que cette hypothèse serait totalement mauvaise pour un canal isolé, sans interaction avec les canaux voisins. Cette interaction a été bien mise en évidence dans l'analyse des résultats expérimentaux qui nous permet de justifier cette hypothèse d'un continuum (θ, t) .

3.3 - Dérivées spatiale temporelle et matérielle

Cette description nous donne des expressions des dérivées spatiales, temporelles et matérielles, dont on pourra voir le détail des calculs en Annexe. Nous obtenons :

3.3.1 - Les dérivées spatiales

Pour l'opérateur gradient appliqué à un vecteur, nous avons :

$$\text{XI} \quad \text{grad } \vec{\chi} = \vec{\chi} \times \vec{\nabla}_{r\theta z} + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \theta} \right) \times \vec{n}_s$$

où $\vec{\nabla}_{r\theta z}$ est l'opérateur gradient dans r, θ, z ,

où \vec{n}_s le vecteur normal à Σ_s

$$\vec{n}_s = - \vec{\nabla}(\Theta_s - \theta)$$

avec $\Theta_s(r,z)$ la fonction qui définit la surface Σ_s

$$\Theta_s(r,z) - \theta + \theta_0 = 0$$

Appliqué à un scalaire ϕ , cette formule donne :

$$\text{XII} \quad \text{grad } \phi = \vec{\nabla}_{r\theta z} \phi + \vec{n}_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

Pour la divergence d'un vecteur :

$$\text{XIII} \quad \text{div } \vec{\chi} = \text{div}_{r\theta z} (\vec{\chi}) + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{n}_s$$

Pour le rotationnel d'un vecteur :

$$\text{XIV} \quad \text{rot } \vec{\chi} = \text{rot}_{\text{r}\theta\text{z}} (\vec{\chi}) + \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \theta} \right) \wedge \vec{n}_s$$

et le laplacien d'un scalaire :

$$\text{XV} \quad \Delta \phi = \Delta_{\text{r}\theta\text{z}} \phi - 2 \vec{n}_s \cdot \vec{\nabla}_{\text{r}\theta\text{z}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \vec{n}_s^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta_{\text{r}\text{z}} \ominus$$

3.3.2 - Les dérivées temporelles

En appelant $\partial / \partial t_a$ la dérivée locale dans le repère lié à l'aubage et $\partial / \partial t_o$ celle correspondant au repère absolu : on a (Voir l'annexe 1)

$$\text{XVI} \quad \frac{\partial}{\partial t_a} = \frac{\partial}{\partial t_o} + \omega \frac{\partial}{\partial y}$$

3.3.3 - Dérivée matérielle

On obtient la dérivée matérielle d'un vecteur sous la forme :

$$\text{XVII} \quad \frac{d\vec{\chi}}{dt} = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t_a} + \vec{w} \cdot (\vec{\nabla}_{\text{r}\theta\text{z}} \times \vec{\chi} + \vec{n}_s \left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \theta} \right) + \omega_o \vec{k} \wedge \vec{\chi}$$

3.4 - Conclusion sur la description

Avec cette description nous distinguons deux coordonnées azimutales qui sont à considérer à des échelles différentes, l'une permet de balayer la machine, l'autre un canal inter-aubes.

La première ne peut en réalité prendre que des valeurs discrètes, et n'apparaît pas dans l'expression des dérivées d'espace comme une coordonnée indépendante des coordonnées méridiennes. (On pourrait effectivement la faire disparaître de ces expressions, en faisant un changement de variable approprié analogue à celui effectué dans la première partie, chapitre II, § 1.1

$$\theta \rightarrow \mathcal{K} = \theta - \Theta(r, z)$$

Nous faisons l'hypothèse que les distributions qui se rapportent à cette coordonnée sont continues, et qu'elles sont représentatives de l'écoulement moyen tridimensionnel continu.

La seconde coordonnée (y) est totalement indépendante. Nous avons donc pour l'instant augmenté la dimension de l'espace physique. Nous allons profiter du fait que les distributions qui se rapportent à cette coordonnée sont typiques d'un écoulement de grille et qu'elles peuvent se modéliser simplement, pour, en contre partie de l'augmentation de la dimension de l'espace moyen, projeter l'espace aube à aube sur Σ_s et ainsi réduire la taille du problème ...

C'est ce que nous proposons dans le paramétrage des grandeurs physiques.

4. PARAMETRAGE

4.1 Choix d'une base de fonctions

Le paramétrage proposé substitue à une description ponctuelle de l'écoulement dans le canal inter-aubes, une description par projection sur une base de fonctions typiques et significatives pour ce type d'écoulement.

En effet, une grandeur physique telle que la pression a sur l'écoulement moyen une influence qui peut se décomposer, d'une part, en effet des variations axiales et radiales de pression moyenne, et d'autre part, en effet de la variation moyenne d'aube à aube. La différence de gradient d'aube à aube peut aussi avoir un rôle à jouer. Nous sommes amenés à représenter une grandeur scalaire ϕ de la manière suivante (Figure 16).

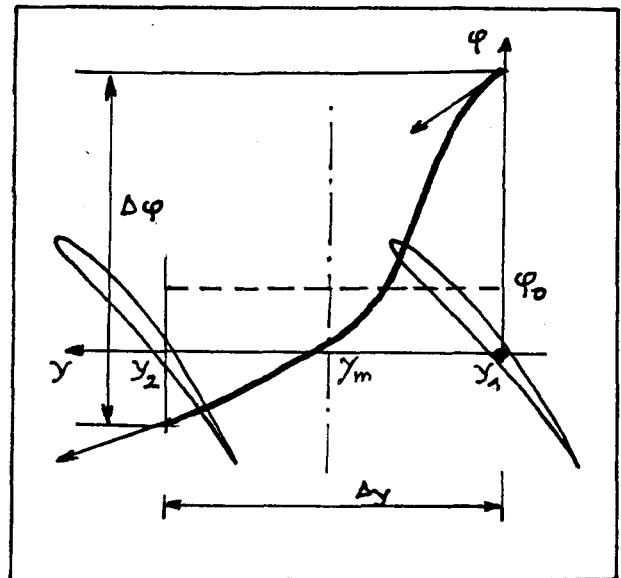


Fig 16. -Distribution typique de ϕ d'aube à aube.

$$\text{XVIII} \quad \phi = \phi_0 + \phi_1 \frac{y - y_m}{\Delta y} + \phi_2 f_2(y) + \phi^*(y)$$

où ϕ_0 est la valeur moyenne de ϕ de y_1 à y_2

ϕ_1 est la variation de ϕ d'aube à aube

ϕ_2 est la variation de pente $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_1$ d'aube à aube

$f_2(y)$, une distribution à moyenne nulle: $\int_{y_1}^{y_2} f_2(y) dy = 0$,
à variation nulle: $f_2(y_1) = f_2(y_2)$, et à variation de pente
unitaire: $f_2'(y_2) - f_2'(y_1) = 1$
et où ϕ^* , le reste, est continu et dérivable de y_1 à
 y_2 , y compris en raccordant les extrémités. Ce reste est de ce
fait développable en série de FOURIER avec une bonne
convergence (figure 17)

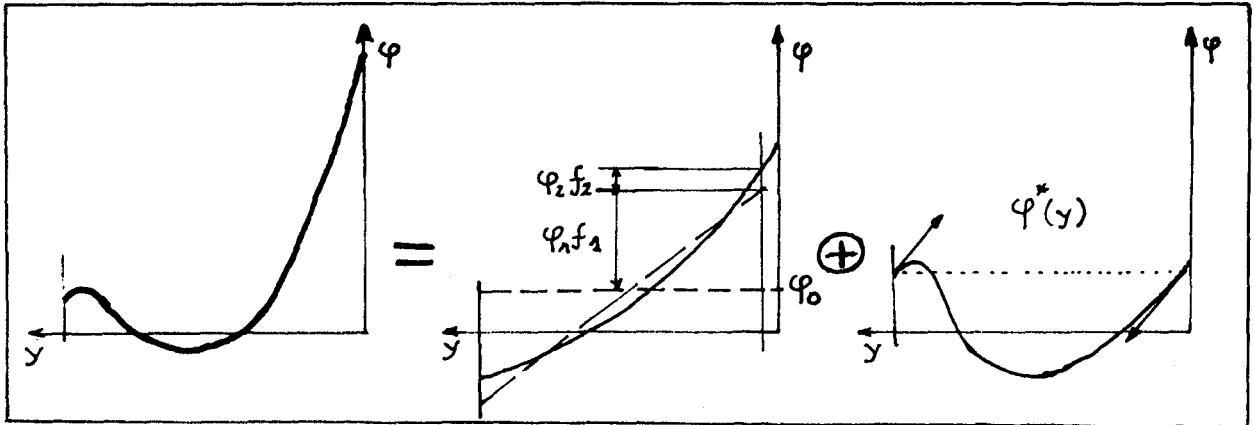


Fig 17. -Décomposition d'une distribution typique sur la base f_1, f_2, \dots

Les éléments de cette base sont:

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 1 ; & f_1 &= \frac{y - y_m}{\Delta y} ; & f_2 &= \frac{2}{\pi} - \cos \frac{\alpha}{2} (y - y_m) \text{ avec } \alpha = \frac{2\pi}{\Delta y} \\
 \text{XIX} \quad f_3 &= \sin \frac{2\pi(y - y_m)}{\Delta y} ; & f_4 &= \cos \frac{2\pi(y - y_m)}{\Delta y} \\
 f_5 &= \sin \frac{4\pi(y - y_m)}{\Delta y} ; & f_6 &= \cos \frac{4\pi(y - y_m)}{\Delta y}
 \end{aligned}$$

etc.

où y_m positionne Σ_S par rapport à l'origine. On définit la norme à partir du produit:

$$\text{XX} \quad (g, h) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} g(y) \cdot h(y) dy,$$

où y_1 et y_2 positionnent les aubes,
ce qui permet de préciser la matrice métrique $[M]$ d'éléments:

$$\text{XXI} \quad M_{ij} = (f_i, f_j) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} f_i f_j dy$$

Cette matrice est à diagonale prépondérante. Elle est inversible, ce qui permet le calcul des composantes ϕ_i d'un scalaire ϕ en résolvant le système:

$$\text{XXII} \quad [M] \{\phi\} = \{\psi\}$$

$$\text{où} \quad \psi_j = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} \phi f_j(y) dy$$

Nous avons ainsi défini une base qui présente certes l'inconvénient d'être non orthogonale, mais qui a l'avantage de bien représenter d'une part les distributions typiques de grille d'aubes, en tout cas nettement mieux que ne le ferait un développement classique (FOURIER), et de permettre d'autre part de faire apparaître explicitement les discontinuités de pression, de vitesse, etc.

4.2 - Représentation des grandeurs vectorielles

Les grandeurs vectorielles peuvent aussi intervenir par leurs valeurs et variations moyennes. On représente donc les vecteurs de la même manière que les scalaires :

$$\vec{X} = \sum \vec{X}_i(r, \theta, z) f_i(y)$$

en précisant que la projection sur la base de fonction se fait en suivant la rotation du repère local lors de l'intégration en y . La projection a donc pour composantes dans le repère local la projection des composantes.

Cette représentation nous permet de préciser la description proposée précédemment et de paramétrer effectivement le problème.

4.3 - Paramétrage des grandeurs physiques

Les composantes scalaires et vectorielles résultant de la projection des distributions d'aube à aube des grandeurs physiques sont affectées aux points de la surface Σ_s définie auparavant comme étant équidistante des aubes.

Si ξ est la coordonnée azimutale,

$$\xi = \theta + y \quad (\text{fig 14})$$

on a alors pour une grandeur \vec{X} :

$$\text{XXIII} \quad \vec{X}(r, \xi, z) = \sum \vec{X}_i(r, \theta, z) f_i(y)$$

On peut donc maintenant écrire les équations locales projetées et pour cela dans un premier temps projeter les opérateurs.

4.4 - Projection des opérateurs sur la base de fonction

Dans les équations locales interviennent des termes locaux tels $\partial \vec{X} / \partial t$, des termes de convection $(\vec{X} \times \vec{V}) \cdot \vec{W}$, de production $\phi \vec{V} \cdot \vec{X}$ ou $\phi \vec{V} \cdot \vec{X}$ et de diffusion $\Delta \phi$.

Il intervient donc dans la projection des équations, des intégrales que nous précisons :

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} f_i f_j dy \\
 P_{ij} &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} f_i \frac{\partial f_j}{\partial y} dy & Q_{ij} &= \int_{y_1}^{y_2} f_i f_j'' dy \\
 L_{ijk} &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} f_i f_j f_k dy & \text{et } E_{ijkl} &= \int_{y_1}^{y_2} f_i f_j f_k f_l dy \\
 N_{ijk} &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} f_i \frac{\partial f_j}{\partial y} f_k dy & F_{ijkl} &= \int_{y_1}^{y_2} f_i f_j f_k' f_l dy
 \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une forme diagonalisée et normalisée pour les termes instationnaires, de même que pour les termes de transport dans le champ de vitesse moyenne, il est intéressant de prémultiplier le système par l'inverse de la matrice métrique, ce qui fait apparaître les matrices :

$$\begin{aligned}
 [\bar{P}] &= [M]^{-1} [P] & \text{ou} & & \bar{P}_{ij} &= M_{in}^{-1} P_{nj} \\
 [\bar{L}] &= [M]^{-1} [L] & \text{ou} & & \bar{L}_{ijk} &= M_{in}^{-1} L_{njk} \\
 [\bar{N}] &= [M]^{-1} [N] & \text{ou} & & \bar{N}_{ijk} &= M_{in}^{-1} N_{njk}
 \end{aligned}$$

etc., qui apparaissent de la manière suivante :

$$\bar{L}_{ijk} (\vec{X}_j \times \vec{\nabla}_\Sigma) \cdot \vec{W}_k \quad , \quad \bar{N}_{ijn} \vec{X}_j \times \vec{n}_s^k \cdot \vec{W}_{ok}$$

dans les équations discrétisées.

5 - EQUATIONS

5.1 - Equations locales discrétisées

L'équation V se discrétise suivant :

$$\text{XXIV} \quad \text{rot}_{r\theta z} \{\vec{W}\}^{n+1} - \vec{n}_s \left[\left\{ \frac{\partial \vec{W}}{\partial \theta} \right\}^{n+1} - \vec{W}_1^{n+1} \{V\} \right] = \{\vec{\omega}\}^{n+1}$$

où $\{\vec{W}\}$ est composé des vecteurs $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \dots, \vec{W}_n$, composantes de \vec{W} sur la base f_i et où $\{V\}$ est le vecteur composé de la deuxième colonne de l'inverse de $[M]$.

L'équation VI se discrétise en :

$$\text{XXV} \quad \alpha \text{Div} \{\vec{W}\}^{n+1} + \frac{\beta}{C_0^2 \Delta t} \{R\}^{n+1} = \{S_d\}^n$$

$$\text{avec} \quad \text{Div} \{\vec{W}\} = \text{div}_{r\theta z} \{\vec{W}\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \{\vec{W}\} \cdot \vec{n}_s + \{V\} \vec{W}_1 \cdot \vec{n}_s$$

et dans $\{S_d\}$ des termes de la forme :

$$\left\{ \frac{1}{C_0^2} \right\} [L] \{R\} \quad ; \quad \left\{ \frac{1}{C_0^2} \right\} [E] \{\vec{W}\} \cdot \text{grad} \{U\}$$

$$\text{ou } U = 2R + (\omega_0^2 r^2 - W^2)/2$$

L'équation VII prend la forme

$$\text{XXVI} \quad \alpha D.\{R\}^{\alpha+1} + \frac{\beta}{\Delta t} \text{Div} \{\vec{W}\}^{\alpha+1} = \{S_R\}^\alpha$$

où D est l'opérateur laplacien discrétisé

$$D.\{\phi\} = \Delta_{r\theta z} \{\phi\} - 2\vec{n}_s \cdot \vec{\nabla}_{r\theta z} \frac{\partial}{\partial \theta} \{\phi\} + \vec{n}_s^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \{\phi\}$$

$$+ \Delta \Theta_s \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \{\phi\} - \{V\} \phi_1 \right) + 2\vec{n}_s \{V\} \left(\vec{\nabla}_{r\theta z} \phi_1 - \vec{n}_s \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) + \vec{n}_s^2 \{V^*\} \phi_2$$

où Θ_s définit la surface Σ_s ,

où $\{V^*\}$ est l'analogie de $\{V\}$ pour la troisième colonne de $[M]$.

Et enfin l'équation d'HELMHOLTZ se discrétise à l'état n suivant:

$$\text{XXVII} \quad \left\{ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \right\} = \{ \vec{W} \} \cdot \left[[L] (\vec{\nabla}_{r\theta z} \times \{ \vec{\omega} \} - \vec{n}_s \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \vec{\omega} \}) + [N] \vec{n}_s \{ \omega \} \right] + \dots$$

$$\{ \vec{\omega} \} \cdot \left[[L] (\vec{\nabla}_{r\theta z} \cdot \{ \vec{W} \} - \vec{n}_s \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \vec{W} \} - \vec{\nabla}_{r\theta z} \times \{ \vec{W} \} + \vec{n}_s \times \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \vec{W} \}) + \dots \right.$$

$$\left. + [N] (\vec{n}_s \cdot \{ \vec{W} \} - \vec{n}_s \times \{ \vec{W} \}) \right] + \{ \vec{\nabla} T \wedge \vec{\nabla} S - \text{rot } t \vec{v} \}$$

Dans ces trois dernières équations, et notamment dans la dernière, figurent au second membre des termes d'échange et de transfert entre les composantes (sur la base de fonction) des grandeurs physiques. L'échange de quantité de mouvement se présente donc sous forme de tensions de viscosité de macro-turbulence correspondant aux longueurs à valeur discrète, associées aux fonctions de la base.

5.2 - Conditions aux limites

5.2.1. Position du problème

Les conditions aux limites apparaîtraient comme redondantes si toutes les projections des équations locales étaient prises en compte, car nous aurions avec ces seules équations un système apparemment fermé.

En réalité, toutes ces projections ne sont pas, aux erreurs de discrétisation et à un lissage près, indépendantes. Selon l'ordre de l'opérateur différentiel, une ou plusieurs équations (lorsqu'on considère uniquement la variable y) sont, toujours aux erreurs près, vérifiées lorsque les autres le sont. Ceci peut être aisément constaté sur l'exemple simple de l'intégration sur (a, b) de l'équation $z''(y) = s(y)$ discrétisée en différences finies, avec pour conditions aux limites la donnée de $z(a)$ et $z(b)$. On peut en effet voir que l'équation locale discrétisée aux extrémités de (a, b) est vérifiée lorsque d'une part les autres équations le sont, et que d'autre part, la valeur frontalière du second membre peut résulter d'une extrapolation des valeurs voisines. Dans ce cas on peut légitimement ne pas prendre en compte les équations locales aux limites, et les remplacer par l'expression des conditions aux limites.

Dans le cas qui nous intéresse, le problème est plus difficile parce que le caractère singulier de la matrice opérateur n'apparaît pas de façon évidente, et que l'on ne peut aisément identifier la ou les équations qui seront satisfaites lorsque les autres le sont. On se trouve donc devant un problème excédentaire en équations "presque" compatibles entre elles, que l'on peut aborder de deux manières:

- Par des techniques d'optimisation d'erreur qui distribuent l'erreur sur l'ensemble des équations

- Par choix et élimination des équations locales excédentaires, qui de ce fait porteront totalement l'erreur.

En ce qui nous concerne, nous proposons d'utiliser la deuxième technique, ce qui nous permet d'obtenir directement un système linéaire fermé.

5.2.2. Procédé d'élimination

La démarche est détaillée pour le cas où une seule condition à la limite est imposée, elle peut être facilement étendue au cas de plusieurs conditions.

Le problème est de résoudre le système discrétisé suivant:

$$(\mathcal{L}((F(y) - B) \cdot f_i)) = 0, \text{ avec } F(y) = a_i f_i(y)$$

et la condition: $a_i E(f_i(y)) = 0$

dans lesquelles \mathcal{L} et E sont des opérateurs linéaires, et dans lesquelles les fonctions $f_i(y)$ constituent la base de l'espace de dimension N des fonctions évoqué précédemment.

La première opération est de construire le sous espace de fonctions dans lequel la condition à la limite est identiquement vérifiée, et en dehors duquel elle n'est pas vérifiée. Ce sous espace est rapporté aux $N-1$ fonctions g_i vérifiant la condition, et à g_N que l'on prend orthogonale au sous espace. Cette dernière fonction ne peut donc intervenir dans la solution $F(y)$.

La deuxième opération est d'appliquer l'opérateur aux fonctions de cette nouvelle base:

$$\mathcal{L}(g_i(y)) = h_i(y),$$

ce qui définit un nouvel espace de fonctions doté de la base h_i , dans laquelle le dernier élément h_N est celui sur lequel on ne

peut projeter l'équation locale, faute de pouvoir satisfaire la condition à la limite.

La troisième opération consiste à projeter à une certaine approximation près, cette fonction (h_N) dans l'ancien espace, et à construire un nouveau sous espace orthogonal à cette fonction.

Il nous reste enfin à ne prendre en compte du système initial, que les $N-1$ équations correspondant à la projection de l'équation locale sur le second sous espace, et les $N-1$ inconnues correspondant à la projection de la solution sur le premier sous espace.

En conclusion, cette technique se résume à construire deux transformations: de g à f d'une part, de f à h d'autre part, et d'utiliser ces transformations pour mettre le système linéaire d'équations locales sous une forme qui nous permette de ne pas prendre en compte la dernière équation et la dernière inconnue. La condition à la limite n'a pas à être imposée, puisqu'elle est déjà satisfaite par les nouvelles fonctions g .

5.3 - Discrétisation des conditions de raccordement (type KUITA)

Le problème est ici d'exprimer dans le continuum en θ , des conditions qui s'appliquent de canal à canal. Une condition de la forme :

$$\delta(\phi) = s'$$

où $\delta(\phi)$ est le saut d'un côté à l'autre du bord de fuite, se discrétise comme :

$$\begin{aligned} & \phi_0(\theta + \Delta\theta) - \frac{1}{2} \phi_1(\theta + \Delta\theta) + \frac{2}{\pi} \phi_2(\theta + \Delta\theta) + \Sigma \phi_{ic}(\theta + \Delta\theta) \\ & - (\phi_0(\theta) + \frac{1}{2} \phi_1(\theta) + \frac{2}{\pi} \phi_2(\theta) + \Sigma \phi_{ic}(\theta)) = S' \end{aligned}$$

où $\Delta\theta$ est le pas de l'aubage,

soit en appelant $\Phi = \phi_0 + \frac{2}{\pi} \phi_2 + \Sigma \phi_{ic}$

$$\text{et } \psi = \frac{\phi_1}{2} - \Phi$$

$$\frac{\phi_1(\theta)}{2} + \Phi(\theta) + \psi(\theta + \Delta\theta) + S' = 0$$



Si $\delta\theta$ est le pas du maillage en θ (supposé $> \Delta\theta$), il est possible, en interpolant, d'exprimer la condition précédente à partir des valeurs nodales de ψ et Φ

Si ξ est le rapport $\Delta\theta/\delta\theta$, on peut obtenir avec une interpolation cubique

$$\begin{aligned} \psi(\theta + \Delta\theta) &= A_{-1} \psi_{-1} + \dots \\ &+ A_0 \psi_0 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 \end{aligned}$$

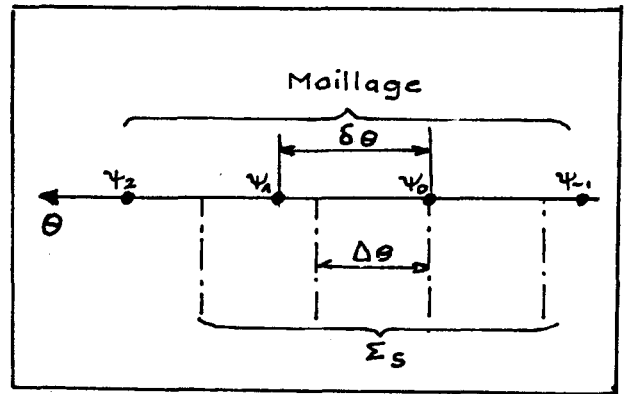


Fig 18. -Maillage azimuthal à grande échelle notamment pour la condition de KUTTA.

avec: $A_{-1} = -\frac{\xi}{2} (1 - \xi)^2$; $A_0 = (1 - \xi) (1 + \xi - \frac{3}{2} \xi^2)$

$A_1 = \xi (\frac{1}{2} + 2\xi - \frac{3}{2} \xi^2)$; $A_2 = \frac{\xi^2}{2} (1 - \xi)$

Ainsi le premier terme de la condition de KUTTA (X)

$\delta(R - \frac{W^2}{2})$, se discrétise sous la forme :

$$\frac{R}{2} + \mathcal{R} + \sum_{-1}^2 A_i (\frac{R_1}{2} - \mathcal{R})_i - \frac{1}{2} \{ \frac{Q_1}{2} + Q + \sum A_i (\frac{Q_1}{2} + Q)_i \}$$

avec $\mathcal{R} = R_0 + \frac{2}{\pi} R_2 + \sum R_{ic}$,

$Q_1 = 2 q q_1$, q module de la vitesse \vec{W} ,

$Q = (q_0 + \frac{2}{\pi} q_2 + \sum q_{ic})^2 + \frac{1}{4} q_1^2$

C'est une condition qui a une forme linéaire en R, qui peut se traiter de la manière indiquée au paragraphe précédent.

6. CONCLUSION SUR LE PARAMETRAGE ET LA DISCRETISATION

De la technique proposée, se dégagent deux points essentiels fortement liés à l'échelle considérée.

A l'échelle de la machine, l'écoulement est caractérisé par les moyennes d'aube à aube des grandeurs physiques, de leur gradient et autres dérivées d'espace. Ces grandeurs moyennes en réalité affectées à un canal inter-aubes sont considérées dans le modèle comme continues suivant θ .

A l'échelle de l'aubage, qui est l'échelle à laquelle on s'est surtout intéressé, l'écoulement d'aube à aube est caractérisé par les mêmes grandeurs que précédemment, mais on écrit pour ces grandeurs des équations locales que l'on traite de manière à ne retenir qu'une loi de comportement de grille liant essentiellement les grandeurs prises à l'extérieur de la roue. L'obtention de cette loi passe par l'utilisation sous forme explicite de l'équation d'HELMHOLTZ, et l'inversion d'un système linéaire de taille importante mais que l'on effectue qu'une seule fois.

Ainsi nous nous donnons la possibilité de traiter (entre les roues) un écoulement moyen continu en utilisant pour modéliser l'action des roues une loi de comportement qui n'est plus expérimentale comme dans d'autres modèles, mais essentiellement numérique.

Différentes questions soulevées pour la discrétisation du problème de l'écoulement dans un canal inter-aubes ont été abordées, en partie testées, et nous permettent au stade où on en est de conclure favorablement à la faisabilité de la modélisation.

Chapitre III

CONCLUSION SUR CETTE SECONDE PARTIE

Nous avons proposé une approche du problème qui nous semble-t-il synthétise les différents modèles rencontrés, les résultats expérimentaux et la mise en oeuvre de techniques jusqu'alors peu utilisées dans le domaine des turbomachines. Nous construisons un schéma d'ensemble structuré dont un certain nombre de points, parmi les plus importants sont détaillés. Ces points ont fait l'objet d'essais de faisabilité dont les résultats sont encourageants.

Un certain nombre de points sont à approfondir : poursuite des essais dans le domaine tridimensionnel, essai instationnaire sur une grille bidimensionnelle et par la suite tridimensionnelle. D'autres points sont à aborder tels la modélisation d'après des données expérimentales et l'état du champ, de la production de vorticité après décollement. Il reste donc un important travail à faire sur le sujet.

La poursuite de ce travail nous semble tout à fait justifiée tant par les perspectives d'application du modèle : décrochage tournant, pompage, distorsion d'entrée, etc. ..., que par le fait que ce modèle réduit la nécessité de données expérimentales à la prise en compte de phénomènes beaucoup plus locaux (décollement) que ne l'était la donnée de la caractéristique de grille, et qu'il est donc potentiellement plus performant que les modèles jusqu'ici développés.

CONCLUSION GENERALE

Dans les deux parties de ce travail, nous nous sommes intéressés au problème de l'écoulement tridimensionnel dans les turbomachines, et nous avons développé deux aspects de ce problème correspondant à des modes de fonctionnement bien distincts.

La première partie est consacrée à l'étude de l'écoulement stationnaire tridimensionnel dans une roue lorsque le débit est peu éloigné du débit nominal. On s'est attaché à réaliser le couplage effectif S1-S2 au moyen d'une condition de sortie du domaine fluide dont l'élaboration est basée sur la prise en compte de la structure tourbillonnaire de l'écoulement.

Deux faits essentiels nous permettent d'apprécier la validité et la portée du modèle proposé. Le premier est l'importance et la cohérence des phénomènes tridimensionnels secondaires que l'on a pu mettre en évidence: vitesse radiale, surdéviation, et leur sensibilité au dessin des aubes ainsi qu'au régime de fonctionnement. Le second est l'existence d'un débit limite fortement dépendant de la géométrie de l'aubage, en deça duquel le modèle ne fonctionne plus. Ce débit s'est avéré correspondre expérimentalement à un débit critique en dessous duquel on assiste à une réorganisation de l'écoulement qui détruit les hypothèses de départ.

L'intérêt du modèle est donc double. Il donne d'une part une description totalement tridimensionnelle de l'écoulement et prend en compte sans autres contraintes que les équations locales et les conditions aux limites, toutes les interactions possibles entre notamment les effets secondaires, la déviation, l'équilibre radial local, l'équilibre aval entre les jets... Il indique d'autre part sa propre limite de validité, en la faisant coïncider avec une modification réelle de l'écoulement. Il a donc un pouvoir prédictif sur l'imminence (par rapport au débit) de l'apparition de phénomènes nuisibles aux performances de la machine. Ce modèle, qui établit un lien entre la limite de fonctionnement normal et la géométrie de l'aubage est donc un outil précieux pour l'amélioration des machines.

Un autre point important est que la mise en oeuvre du modèle n'est pas très différente de celle de la technique quasi-tridimensionnelle habituellement utilisée, et qu'elle est potentiellement accessible aux utilisateurs de cette technique.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'écoulement instationnaire tridimensionnel dans une roue lorsque le débit est éloigné du débit nominal et que la machine fonctionne en mode décroché.

L'étude des résultats expérimentaux existants nous permet de préciser les échelles d'espace et de temps qui caractérisent les phénomènes réellement actifs dans le grand décrochage, et qu'il est indispensable de modéliser par les équations locales. Ces échelles sont celle de la machine, pour laquelle des modèles existent, et celle des canaux inter-aubes pour laquelle il n'existe pas de modèles autres que ceux, explicites, dont l'utilisation dans plusieurs roues, pendant toute la durée de l'apparition du décrochage est pour des raisons de temps de calcul, encore prohibée.

Notre objectif est de combler cette lacune en modélisant le comportement de grille d'aubes à partir des équations locales instationnaires, et d'utiliser ce modèle en substitution des caractéristiques expérimentales bidimensionnelles, dans la modélisation de l'écoulement global de la machine.

Notre contribution a été de répondre aux deux questions préalables au développement d'un tel modèle: quelles contraintes imposer au modèle (cahier des charges) et quelle démarche adopter (faisabilité).

En réponse au premier point, nous imposons des contraintes de nature fondamentale: prise en compte du caractère totalement tridimensionnel instationnaire de l'écoulement, et de l'état tourbillonnaire et thermodynamique du fluide. Nous imposons aussi des contraintes d'ordre plus pratique tel que: nécessité d'obtenir d'une manière définitive un système réduit d'équations de compatibilité liant uniquement les grandeurs frontalières du sous domaine limité au canal inter-aubes.

En réponse au deuxième point, nous proposons une approche dont l'intérêt est de synthétiser les contraintes imposées d'une part et les conclusions obtenues à partir des résultats expérimentaux d'autre part. Les différentes étapes de la démarche ont été testées, ce qui nous permet de conclure à la faisabilité d'un tel modèle

D'un point de vue global on peut dire que les deux modèles sont aujourd'hui dans des états d'achèvement différents, et qu'il n'est pas possible de conclure sur la validité du second modèle comme on l'a fait pour le premier. Cependant, on peut considérer comme favorables à une conclusion positive les quelques rapprochements que l'on peut faire entre eux.

Ces deux modèles présentent en effet la particularité de s'apparenter en plusieurs points sur l'approche physique des

problèmes, et en premier lieu par une prise en compte tourbillonnaire des phénomènes qui laisse toute liberté de coexistence et d'interaction entre les écoulements relatifs à des canaux voisins. Dans les deux cas on est amené à modéliser le transport de la vorticité et à compléter ces données tourbillonnaires par des conditions aux limites de type KUTTA, ou de raccordement entre canaux pour déterminer complètement le champ de vitesse.

Ces modèles s'apparentent aussi, mais plus accessoirement, par la prise en compte de la compressibilité (sous forme de termes de source), et des couches limites, considérées comme extérieures au problème.

Ces remarques nous permettent de mettre l'accent sur l'unité de fond qui se dégage des deux modèles et leur complémentarité. Nous pouvons ajouter que dans les deux cas, il y a concordance entre leurs possibilités et le besoin immédiat de maîtriser les phénomènes dans les turbomachines. C'est ce qui, au delà de l'intérêt même des techniques utilisées, justifie la poursuite de leur développement.

ANNEXE 1

CALCUL DES DERIVEES

1. Calcul des dérivées d'espace

1.1 Gradient d'une grandeur moyenne $\phi_0(r, \theta, z)$

Le gradient d'une grandeur moyenne indépendante de y est à composantes uniquement méridiennes. Dans le déplacement $\vec{\delta}$, seule la projection $\vec{\delta}_\Sigma$ (figure ci-contre), contribue à modifier ϕ_0 de la quantité

$$\delta\phi_0 = \phi_0(P_2) - \phi_0(P_0)$$

soit en appelant

$\vec{\nabla}$ l'opérateur gradient en r, θ, z

$\vec{\nabla}_\Sigma$ l'opérateur gradient sur Σ_s

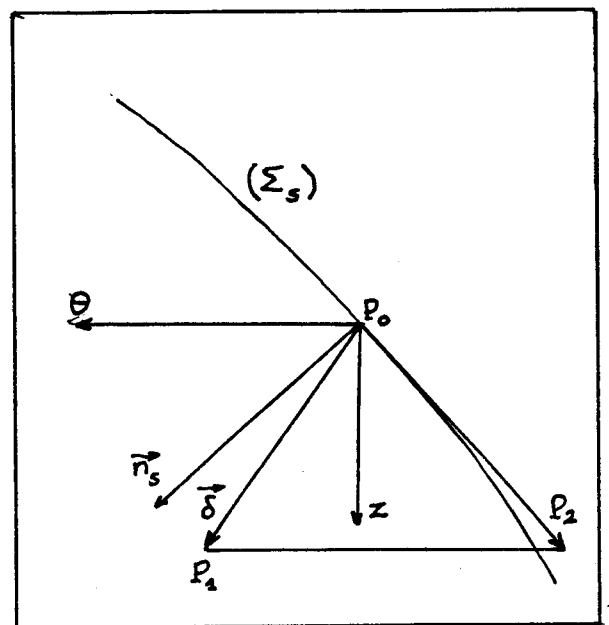


Fig 1. - Coupe radiale de la surface moyenne

$$\delta\phi_0 = \vec{\nabla}\phi_0 \cdot \vec{\delta}_\Sigma = \vec{\nabla}_{\Sigma_S} \phi_0 \cdot \vec{\delta}$$

Par ailleurs, un déplacement sur Σ_S vérifie:

$$\vec{\delta}_\Sigma \cdot \vec{\nabla} (\Theta - \theta + \theta_0) = 0$$

soit:
$$\delta_r \frac{\partial\Theta}{\partial r} + \delta z \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \delta\theta = 0$$

et en remplaçant $\delta\theta$ par sa valeur dans δ_z , on obtient le gradient à composantes méridiennes:

$$\vec{\nabla}_{\Sigma_S} \phi_0 = \vec{\nabla}\phi_0 - \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \vec{n}_S$$

avec
$$\vec{n}_S = -\vec{\nabla}(\Theta_S - \theta)$$

1.1 Gradient d'un scalaire $\phi(r, \theta, z, y)$

Chaque terme du développement de ϕ a sa propre variation de M_0 à M_1 qui peut se décomposer en deux parties (voir la deuxième figure):

-De M_0 à M_2 , la coordonnée y est constante, ce qui donne:

$$\delta_\Sigma \phi_i(r, \theta, z, y) = \vec{\nabla}_\Sigma \phi_i \cdot \vec{\delta} r_i(y)$$

-De M_2 à M_1 , le point est fixe sur Σ_S , ce qui donne:

$$\frac{\partial\phi(r, \theta, z, y)}{\partial y} \delta y$$

avec
$$\delta y = \delta\xi - \delta\theta$$

où
$$\delta\theta = \frac{\partial\Theta_S}{\partial r} \delta r + \frac{\partial\Theta_S}{\partial y} \delta y$$

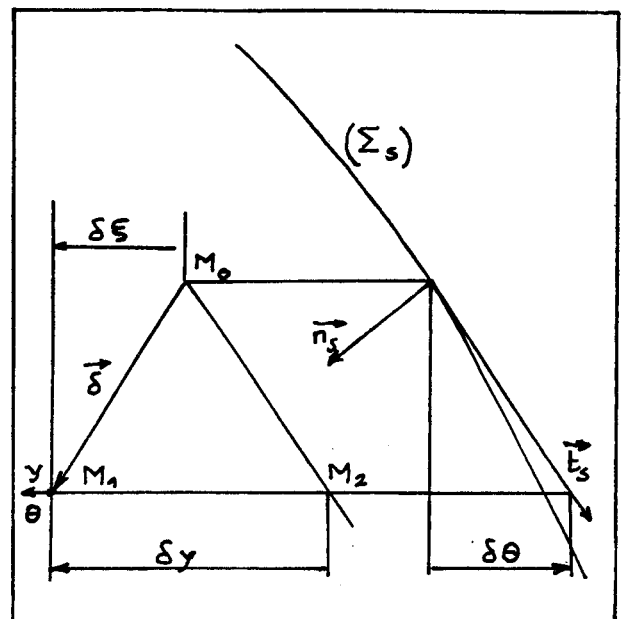


Fig 2. -Accroissement d'une fonction ϕ de M_0 à M_1 .

soit: $\delta y = - \delta \cdot \vec{\nabla} (\Theta_s - \theta)$

Finalement, le gradient de ϕ s'exprime par:

$$\vec{\text{grad}} \phi = \vec{\nabla}_{\Sigma_s} \phi + \vec{n}_s \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

1.3 Gradient d'un vecteur moyen $\vec{X}_0(r, \theta, z)$

La démarche est identique, ce qui donne lorsque l'on reste sur Σ_s :

$$(\vec{X}_0 \times \vec{\nabla})_{\Sigma_s} = \vec{X}_0 \times \vec{\nabla} - \frac{D\vec{X}_0}{D\theta} \times \vec{n}_s$$

où $\frac{D}{D\theta}$ est la dérivée covariante par rapport à θ

A cela, il faut ajouter le terme dû au balayage d'aube à aube qui pour un vecteur constant est:

$$(\vec{k} \wedge \vec{X}_0) \times \vec{n}_s$$

Finalement, il reste:

$$\vec{X}_0 \times \vec{\nabla}_{\Sigma_s} = \vec{X}_0 \times \vec{\nabla} - \frac{\partial \vec{X}_0}{\partial \theta} \times \vec{n}_s$$

1.4 Gradient d'un vecteur $\vec{X}(r, \theta, z, y)$

De même que pour le scalaire ϕ , le vecteur \vec{X} a une variation qui peut se décomposer en deux parties:

- De M_0 à M_2 : $\delta_{\Sigma_s} \vec{X} = (\vec{X} \times \vec{\nabla} - \frac{D\vec{X}}{D\theta} \times \vec{n}_s) \cdot \delta$

- De M_2 à M_1 : $\delta \vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \times \vec{n}_s \cdot \delta$

auxquelles il faut ajouter le terme de rotation: $(\vec{k} \wedge \vec{X}) \times \vec{n}_s \cdot \delta$

Finalement, il reste pour le gradient local d'un vecteur:

$$\text{grad} \cdot \vec{X} = \vec{X} \times \vec{\nabla}_{\Sigma_s} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} \times \vec{n}_s$$

1.5 Dérivée temporelle

Les grandeurs physiques peuvent être décrites dans un repère qui peut être soit fixe (R_o), soit lié à la roue (R_a), soit encore intermédiaire (R_i). Dans ces repères animés respectivement des vitesses $0, \omega_o$ et ω_i , les dérivées temporelles sont notées: $\frac{\partial}{\partial t_o}, \frac{\partial}{\partial t_a}, \frac{\partial}{\partial t_i}$

La règle de transformation d'un repère à l'autre est immédiate pour une grandeur dépendant de r, θ, z :

$$\frac{\partial}{\partial t_o} = \frac{\partial}{\partial t_i} - \omega_i \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Reste donc à préciser la dérivée temporelle dans R_a d'une grandeur décrite en r, θ, z, y , avec θ : coordonnée du centre du canal, et $\theta + y$: coordonnée réelle du point. Nous supposons θ et y déterminés.

Dans la dérivée locale absolue interviennent cette fois les deux contributions:

- dérivée locale "relative": $\partial / \partial t_a$
- effet du défilement de la distribution en y emportée par l'aubage: $-\omega_o \partial / \partial y$

Ici, la dérivée en θ n'intervient pas puisque l'on ne change pas de canal lorsqu'on calcule la dérivée temporelle. Les grandeurs moyennes sont et restent les mêmes pour deux observateurs, l'un fixe, l'autre lié à l'aubage.

On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t_a} = \frac{\partial}{\partial t_o} + \omega \frac{\partial}{\partial y}$$

1.6 Dérivée matérielle

Dans le repère absolu R_o , on a :

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{R_o} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t_o} + (\vec{X} \times \vec{V}) \cdot \vec{u}$$

soit, compte tenu des expressions des dérivées spatiales et temporelles et des relations :

$$\vec{W} = \vec{u} - \omega_o \vec{k} \wedge \vec{r}$$

avec \vec{W} vitesse relative, et

$$\vec{n}_s \cdot (\vec{k} \wedge \vec{r}) = 1$$

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{R_o} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t_a} - \omega \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} + (\vec{X} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} + (\vec{X} \times \vec{V}) \cdot \vec{W} + (\vec{X} \times \vec{V}_{r\theta z}) \omega \cdot \vec{k} \wedge \vec{r} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} - \frac{\partial \vec{X}}{\partial y}\right) \omega_o$$

et après simplification et compte tenu aussi du fait que

$$\vec{X} \times \vec{V}_{r\theta z} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta} + \vec{k} \wedge \vec{X}$$

on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{R_o} = \left(\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{R_a} + \omega_o \vec{k} \wedge \vec{X}$$

soit compte tenu des résultats précédents :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t_a} + \vec{W} \cdot \vec{V} \times \vec{X} + \omega_o \vec{k} \wedge \vec{X}$$

ANNEXE 2

Résultat de la condensation

Nous proposons des résultats obtenus dans le cadre stationnaire, bidimensionnel, incompressible, avec des profils rectilignes non inclinés, une discrétisation en volumes finis pour la vitesse, et en différences finies centrées pour l'enthalpie. La géométrie est celle indiquée figure 13 page 181, le rapport $(t/c) = 2$.

Les équations locales sont:

$$\text{rot } \vec{W} = 0$$

$$\text{div } \vec{W} = 0$$

$$\text{Lap } H = 0$$

avec les conditions aux limites indiquées figure 13. Ceci nous a permis d'obtenir un système qui comporte trois équations en plus du nombre d'inconnues intérieures au domaine, et qui fait intervenir des inconnues extérieures au domaine: u , H , et frontalières: v .

On a testé le cas avec 4 points suivant (y) , et 7 points suivant (z) , nous avons obtenu les équations de compatibilité suivantes:

Coefficients des grandeurs	Entrée						Sortie						
	H_c	u_c	v_1	v_2	v_3	v_4	v_1	v_2	v_3	v_4	H_s	u_s	
Eq en H	-1	2/3	4	5	6	//	41	44	47	50	//	51	52
Eq en v	0	-1.78813934E-07	/5				6.11111111	6.11111111	6.11111111	0	//	0	0
Eq en u	0	3/0	3.41060513E-13	-3.41060513E-13	0	//	0	0	0	0	//	0	0

Soit $V_{moyS}/V_{moyc} = 0,283$

dans lesquelles on remarque:

- la conservation de l'enthalpie (Eq en H)
- la conservation du débit (Eq en u)
- une relation entre les angles d'entrée et de sortie (Eq en v)

Ce résultat est qualitativement satisfaisant. Au plan quantitatif, il faut en juger en tenant compte du maillage, l'erreur sur la déviation est de l'ordre de 10 %, ce qui est satisfaisant.

Le choix des conditions aux limites semble bien adapté, deux variantes dans lesquelles ont été respectivement discrétisées les couples (KUTTA-rotationnel sur le sillage), et (tangence au bord de fuite-rotationnel sur le sillage), ont été testées. On donne ci-après les résultats obtenus avec la première de ces variantes, un rapport t/c de 5.25, et un maillage de 8*16 points en u,v.

Les vitesses d'entrée et de sortie sont indiquées dans le tableau suivant:

		=	
SMC 1)= .1	} Ventrée (donnée)	SMC 88)= .993332402	
SMC 2)= .1		SMC 89)= .98511579	
SMC 3)= .1		SMC 90)= .97708818	
SMC 4)= .1		SMC 91)= 3.39017316E-03	
SMC 5)= .1		SMC 92)= .0416140303	
SMC 6)= .1		SMC 93)= .0641420242	
SMC 7)= .1		SMC 94)= .0740373305	
SMC 8)= .1		SMC 95)= .0740373324	
SMC 9)= 1.07595417	} Uentrée	SMC 96)= .0641420267	
SMC 10)= 1.041767		SMC 97)= .0416140302	
SMC 11)= 1.01734116		SMC 98)= 3.39017883E-03	
SMC 12)= .999999999		SMC 99)= 1.01017054	
SMC 13)= .982658844		SMC 100)= 1.00737488	
SMC 14)= .958233		SMC 101)= 1.00336916	
SMC 15)= .924045838		SMC 102)= .999999999	
SMC 16)= .150636107		SMC 103)= .996630837	
SMC 17)= .0886042784	SMC 104)= .992625119		
SMC 18)= .0918580484	SMC 105)= .989829463		
SMC 19)= .0942196131	SMC 106)= .010170538	} Vsortie	
SMC 20)= .0942196138	SMC 107)= .0406821463		
SMC 21)= .0918580494	SMC 108)= .0628067874		
SMC 22)= .0886042803	SMC 109)= .0729142814		
SMC 23)= .150636114	SMC 110)= .0729142793		
SMC 24)= 1.09663144	SMC 111)= .0628067909		
SMC 25)= 1.04068241	SMC 112)= .0406821491	} Usortie (donnée)	
SMC 26)= 1.01655397	SMC 113)= .010170538		
SMC 27)= .999999999	SMC 114)= 1		
SMC 28)= .983446034	SMC 115)= 1		
SMC 29)= .95931759	SMC 116)= 1		
SMC 30)= .903368561	SMC 117)= 1		
SMC 31)= -1.03409548E-08	SMC 118)= 1		
SMC 32)= .0699546012	SMC 119)= 1		
SMC 33)= .0838152342	SMC 120)= 1		
		=	

La précision du résultat n'est pas meilleure (10%) malgré une plus grande finesse du maillage. La deuxième variante

est encore moins performante.

En conclusion, nous pouvons dire que globalement, ces résultats montrent :

-qu'il n'y a pas d'impossibilité au niveau de la technique,

-que les résultats sont qualitativement valables sur la conservation du débit, de l'enthalpie, et sur le rapport des angles de sortie et d'entrée

-que le couplage par la condition de KUTTA, entre l'enthalpie et la vitesse, ne modifie pas (par rapport au cas découplé, et dans le cadre stationnaire périodique) les équations de compatibilité

-et enfin que la technique adoptée pour le calcul de l'enthalpie: diffusion et équation d'EULER en condition aux frontières peut être utilisée.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ GREITZER E.M.; THOMPkins W.T.JR; MC CUNE J.E.; EPSTEIN A.;
TAN C.
Massachusetts Institut of Technologie - Cambridge
Current problems in turbomachinery fluids dynamics - Semi
annual report 1er oct. 81 - 30 avr. 82
- /2/ OKURUNMU O.; MC CUNE J.E.
Three dimensional vortex theory of axial compressor blade
rows at subsonic and transonic speeds
A.I.A.A. J - Vol. 8, p. 1275-1283 july 1970
- /3/ SIESTRUNC R. ;FABRI J.
Ecoulement tourbillonnaire dans les turbomachines axiales.
Publication ONERA n° 45 -1950
- /4/ MC CUNE J.R.; HAWTHORNE W.R.
The effects of trailing vorticity on the flow through highly
loaded cascades.
Journal of Fluid Mechanics - Vol.74, part 4, p.721-740 1976
- /5/ OKURUNMU O.; MC CUNE J.E.
Lifting surface theory of axial compresor blade rows.
Subsonic compressor.
A.I.A.A. J - Vol. 12, n° 10, oct 1974, p. 1363-1372

- /6/ ERIKSON J.C.; LORDI J.A.; RAE W.J.
On the transsonic aerodynamics of a compressor blade row
Calspan Corp Report - n° AI 3003 A - 1, 1971
- /7/ HOMICZ G.F.; LORDI J.A.
Three dimensional lifting- surface theory for an anular
blade row
ASME paper 79 GT 182, 1979
- /8/ CHANG P.T.
Application of a lifting line theory of stream surface
theory in subsonic flow
ASME paper 81 GT 166, Gas turbin conference and products
show - Houston - Mar. 9-12, 1981
- /9/ LAALI A.R.; PELLONE C.
Ecoulements tridimensionnels supercavitants - Traitement
numérique, théorie exacte -Expérimentation en tunnel
hydrodynamique, analyse critique des résultats.
Rap SHF nov 1982
- /10/ NAMBA M.
Lifting surface theories for a rotating subsonic and
transonic blade row.
Dero res. Conneil R.8 M 3740, 1972
- /11/ LORDI J.A.; HOMICZ G.F.
Linearized analysis of the three dimensional compressible
flow through a rotating anular blade row.
Journal of Fluid Mechanics, Vol 103, p. 413-442, 1981

/12/ CANTALOUBE B.; HUBERSON S.

Calculs d'écoulements tridimensionnels incompressibles
autour d'obstacles animés d'un mouvement arbitraire.

ONERA - Communication au 6ème Congrès Français de
Mécanique - Lyon 1983

/13/ RENKEN J.

Untersuchung der Dreidimensionalen Stromung in eine Kanal mit
Rechtekigem variablem Querschnitt mit Hilfe der Panel-
Verfahrens.

Deutsche Luft-und Raumfahrt Institut fur Luftstrahlantriebe
KOLN 1975

/14/ BOSCHIERO M.

Modélisation d'écoulements tourbillonnaires.

MATRA SA - Communication au 6ème Congrès Français de
Mécanique. Lyon 1983

/15/ BILLET G.

Simulation numérique d'un écoulement tridimensionnel
pariétal.

Thèse de 3ième cycle soutenue le 10.1.80 à Lille

/16/ CHUNG HUA WU

A General Theory of Three Dimensional Flow in Subsonic and
Supersonic Turbomachines of Axial, Radial, and Mixed-Flow
Types

Transaction of the ASME Nov 1952

/17/ HAWTHORNE W.R.

On the theory of shear flow
M.I.T. -G.T.L. report n° 88, 1966

/18/ LEBOEUF F.

Conception et performances des turbomachines - Modèles de calcul et équations.
Réunion d'information "TURBOMACHINES" - Ministère de la Recherche et de la Technologie

/19/ KATSANIS T.

Quasi three dimensional calculation of velocities in turbomachine blade row
ASME Paper 72 - WA/GT-7, 1972

/20/ WU WEN QUAN

Application of basic aerothermodynamic equations governing three dimensional flow in turbomachinery and identification of type of equations
ASME _ Gas Turbine Conference and product Show - Mar 9-12 1981

/21/ KATSANIS T.

Use of arbitrary quasi orthogonals for calculating flow distribution in the meridional plane of a turbomachine
NASA TN. D 2546

/22/ VEUILLOT J.P.

Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale.
La Recherche Aérospatiale n°6, p 313-321, 1971

/23/ HIRSCH

Application of Numerical Methods to Flow Calculations in
Turbomachines

VKI. Lecture series 1979.7

/24/ MESSNER J.; WACHTER J.

Anwendung der konturkonformen abbildung auf die stromung
langs einer S2- stromflache

Forschung im Ingenieur wesen- verein Deutscher Ingenieur
Dusseldorf 1983

/25/ UCHIDA S.; NAKAMURA Y.

Swirl flow studies in diffusers using the flux analysis
method with orthogonal curvilinear coordinates

Numerical Method in Engineering, Vol18 p 1385-1399, 1982

/26/ CHIN W.C.

Superpotential solution for jet engine external potential
and internal rotational flow interaction

Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, p259-264. June 1983

/27/ KATSANIS T.

Use of arbitrary quasi orthogonals for calculating flow
distribution on a blade to blade surface in a turbomachine

NASA TN. D 2809, 1965

/28/ MARTELLI F.; MANFRIDA G.

Calcul aux éléments finis de l'écoulement aube à aube dans
les pompes

Rap. SHF 17-18 Nov. 1982- Etudes et recherches en cours dans
le domaine des écoulements industriels

/29/ VAN HOVE W.

Calculation for 2D and 3D- flow in turbomachinery.

VKI Lecture serie 1982.5: Numerical methods for flows in turbomachinery bladings

/30/ BROCHET J.; VEUILLOT J.P.; BOISSEAU J.P.; ENSELME M.

Calcul de l'écoulement tridimensionnel dans une roue mobile de soufflante. Mise en oeuvre sur ordinateur parallèle.

ONRA TP n°1981, 120

/31/ BUISINE D.

Modélisation et calcul d'un écoulement de fluide incompressible dans une turbomachine axiale.

Thèse de 3^{ème} cycle soutenue en 1978. Lille

Voir aussi Journal de Mécanique Appliquée, Vol. 5, n°4, p 405-425 1981

/32/ KRIMERMAN Y.; ADLER D.

The complete three dimensional calculation of the compressible flow field in turbo impellers

Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 20, n°3,

p 149-158 1978

/33/ BOSMAN C.

Analytical theory of three dimensional flow in centrifugal compressors

Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 23, n°4, 1981

/34/ AGARWAL P.K.; VICTOROV G.V.

The third two-dimensional problem of three-dimensional blade systems for hydraulic machines

ASME- Journal of Fluids Engineering Vol. 103, p 42-51 1981

/35/ MC DONALD H.

Application of numerical methods to flow calculations in turbomachines - Computational aspects of viscous flows
VKI Lecture serie 1979.7

/36/ BRILEY W.R.

Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts
Journal of Computational Physics. Vol 14, 1974

/37/ PATANKAR S.V.; SPALDING D.B.

A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows
J. Heat and Mass Transfer. Vol 15, 1972

/38/ MOORE J.; MOORE J.G.

Numerical methods for flows in turbomachinery bladings
VKI Lecture Serie 1982.5

/39/ SPEZIALE C.G.

Numerical study of viscous flow in rotating rectangular ducts
Journal of Fluid Mechanics. Vol 122, p 251-271 1982

/40/ MITON H.

Etude théorique et expérimentale de problèmes aérodynamiques concernant les compresseurs transsoniques.
Thèse d'état soutenue le 26 juin 1978. Aix Marseille

- /41/ CHAUVIN J.
Secondary flows in turbomachinery - On note on some turbine
secondary flow aspects
VKI Lecture Serie 1975.72
- /42/ SHEORAN Y.; TABAKOFF W.
A study of viscous flow in stator and rotor passages
ASME- International Gas Turbine Conference on Exhibit
London , 1982
- /43/ LEBOEUF F.
Annulus endwall boundary layer theory
VKI Lecture Serie 1984.5
- /44/ ARTS T.
Three-dimensional rotational inviscid flow calculation
VKI Lecture Serie 1984.5
- /45/ ZEYTOUNIAN R.KH.
Notes sur les écoulements rotationnels de fluide parfait
(chap IX)
Ed Springer Verlag
- /46/ ZEYTOUNIAN R.KH.; VEUILLOT J.P.
Ecoulement tridimensionnel stationnaire d'un fluide parfait
incompressible dans une roue fixe de turbomachine.
Manuscrit non publié
- /47/ HERRING L.H.; EMERY J.C.; ERWIN J.R.
Systematic two-dimensional cascade tests of Naca 65-Series
compressor. Blades at low speed
NACA Technical Note 3916 1951

/48/ PAPAÏLOU K.D.

A contribution to the calculation of secondary flows in an axial flow compressors

Sixth International Symposium on Air Breathing Engines.
Paris, 6-10 JUN, 1983

/49/ MOFFATT H.K.

The degree of knottedness of tangled vortex lines

Journal of Fluid Mechanics Vol 35, p 117, 1969

/50/ MOBBS S.D.

Some vorticity theorems and conservation laws for non barotropic fluids

Journal of Fluid Mechanics. Vol 108, p 475,483 1981

/51/ HAWTHORNE W.R.

On the theory of shear flow

MIT. GTL 1966

/52/ HORLOCK J.H.

Secondary flow in turbomachine

VKI Lecture Serie 1975.72

/53/ SUAREZ S.

Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement dans une roue de pompe hélice

Thèse de 3 ème cycle soutenue le 27 oct 1983 à L'INSA Lyon

/54/ DUCHEMIN J.M.

Validité de l'approche quasi-tridimensionnelle

Société Metraflu. Oct 1983

- /55/ COUSTEIX J.
Progrés dans les méthodes de calcul des couches limites
turbulentes bi et tridimensionnelles.
ONERA. Note technique 1976.15
- /56/ MICHEL R.; QUEMARD C.; COUSTEIX J.
Méthode pratique de prévision des couches turbulentes bi et
tridimensionnelles.
ONERA. La Recherche Aérospatiale. n°1972.1
- /57/ GREITZER E.M.
Inlet distortion effects in axial compressors
Unsteady flow in turbomachinery. VKI Lecture serie 1979.3
- /58/ COLPIN J.
Influence des distorsions d'entrée sur les performances et
le comportement aérodynamique d'un compresseur axial.
Thèse de doctorat VKI 1977
- /59/ WHITEHEAD D.S.
Unsteady aerodynamics in turbomachinery
Agard Spec Course on Unsteady Aerodyn
Cambridge Univ 1980
- /60/ COLPIN J.; VAMBEKE P.
Steady pressure distortions
Unsteady flow in turbomachines. VKI Lecture Serie 1979.3

- /61/ BRY P.; LAVAL P.
Calcul numérique tridimensionnel instationnaire hétérogène
dans une veine annulaire de turbomachine.
ONERA NT 1982.2
- /62/ PANDOLFI M.; COLASURO G.
Numerical investigations on the generation and development
of rotating stalls.
ASME Paper 78-WA/GT-5 Winter annual meeting-
San Francisco- Dec 10-15-1978
- /63/ OKIISHI T.H.
Turbomachine wake transport and interaction
Unsteady flow in turbomachines VKI Lecture Serie 1979.3
- /64/ GALLUS H.E.
High Speed blade-wake interactions
Unsteady flow in turbomachines VKI Lecture Serie 1979.3
- /65/ ATASSI H.
Three dimensional periodic disturbances acting upon airfoil
in cascade
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Aeroelasticity of
turbomachine p 383-398
- /66/ MEYER R.X.
The effect of wakes on the transient pressure and velocity
distributions in turbomachines
ASME Transaction 80. p1544-1552. 1958

/67/ LOCKAHRT R.C.; WALKER G.J.

The influence of viscous interactions of the flow downstream
of an axial compressor stage

Proceedings of the Snd International Symposium Air Breathing
Engines 1974

/68/ ZIERKE W.C.; OKIISHI T.H.

Measurement and analysis of total pressure unsteadiness data
from an axial flow compressor stage

ASME Paper 8I-GR/GT-2 Inter symposium on application of
fluids mechanics and heat transfer to energy and
environmental problems

Patras- Greece- 1981

/69/ EVANS R.L.

Turbulence and unsteadiness measurments downstream of a
moving blade row

ASME Transaction- Journal of engineering for power Jan 1975

/70/ KIOCK R.

Turbulence downstream of stationary and rotating cascades

/71/ GREITZER E.M.

Rotating stall and surge in axial compressors

Unsteady flow in turbomachines

Lecture Serie 1979.3

/72/ GREITZER E.M.

Review- Axial compressor stall phenomena

ASME Transactions- Journal of Fluid Engineering

Vol 102 June 1980

/73/ FERRAND P.

Etude théorique des instabilités de l'écoulement dans les compresseurs axiaux

Thèse soutenue en 1980 Université d'Aix Marseille II

/74/ SEDIKO T.; SASAKI I.; TAKATA H.

Rotating stall in blade rows operating in shear flow

JSME Bulletin Vol 24 Dec 1981. p 2074-2081

/75/ MOORE F.K.

A theory of rotating stall of multistage axial compressors

ASME Journal of Engineering for Power. 83 GT 44

/76/ YERSHOV V.N

Unstable conditions of turbodynamic rotating stall

AD-731-355 - August 1971

/77/ DAY I.J.; GREITZER E.M.; CUMPSTY N.A.

Prediction of compressor performance in rotating stall

Journal of Engineering for Power

Vol 100 January 1978

/78/ DAY I.J.; CUMPSTY.N.A.

The measurement and interpretation of flow within rotating stall cells in axial compressors

CUED/A-Turbo/TR 90 1977

Whittle Laboratory Department of engineering University of Cambridge

- /79/ ORNER N.
Prediction du décrochage tournant dans les compresseurs axiaux .
Thèse soutenue en 1976 VKI-Faculté Polytechnique de Mons
- /80/ TAKATA H. NAGANO S.
Non linear analysis of rotating stall
ASME Transactions- Journal of Engineering for Power.
Oct 1972
- /81/ SPALART P.R.
Two recent extensions of the vortex method
AIAA 22nd Aerospace Science meeting
January 9-12 1984 Reno Nevada
- /82/ BREUGELMANS F.A.E.
Flow measurements in a rotating stall cell
Unsteady flow in turbomachines. VKI Lecture Serie 1979.3
- /83/ BREUGELMANS F.A.E.; MATHIOUDAKIS K.; CASALINI F.
Flow in rotating stall cells of a low speed axial flow compressor
6th International symposium of Air Breathing Engines
Paris 1983
- /84/ DAS D.K.; JIANG H.K.
Flow measurement within rotating stall cells in single and multistage axial flow compressors
6th International symposium of Air Breathing Engines
Paris 1983

- /85/ SUNDRANAYAGAM S.; BALAKRISHNAN K.
A model for axial impeller stall
Intern symposium of Air Breathing Engines 6th Paris 1983
- /86/ CHAUVIN J.; FERRAND P.; CEN M.
Décollement tournant dans les pompes et les compresseurs
- /87/ ADAMCZICK J.
Numerical aspects of unsteady flow calculations
Unsteady flow in turbomachines. VKI Lecture Serie 1984.2
- /88/ HENDERSON R.E; HORLOCK J.H.
An approximate analysis of the unsteady lift on airfoil in
cascades
ASME Transaction. Journal of Engineering for Power. Oct 1972
p 233-240

