50376
1985
283

50376
1985
283

N° d'ordre 1304

THESE

présentée à

l'Université des Sciences et Techniques de Lille I

pour obtenir le titre de

Docteur 3e Cycle.

(Mathématiques Appliquées)

par.

Ramdane. KHELOUFI

Sur l'extension de la fiabilité des algorithmes de losange et de l'algorithme de Thiele.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE SECTION DE SCIENCES LILLE

Soutenue le 21 novembre 1985.

SCD LILLE 1
D 030 322758 9

50376
1985
283

50376
1985 1
283

Chapitre 1 : L'E-algorithme

1 - 1 Introduction
1 - 2 Rappel de l'E-algorithme
1 - 3 Règles singulières
1 - 4 Description de la programmation de l'E-algorithme avec règles singulières.

Chapitre 2 : Le f-algorithme

2 - 1 Introduction
2 - 2 Rappel du f-algorithme
2 - 3 Règles singulières
2 - 4 Description de la programmation du f-algorithme avec règles singulières.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de l'interpolation rationnelle comme dans celui de l'accélération de la convergence ont été proposés ces dernières années un certain nombre d'algorithmes reposant sur des relations récurrentes assez typiques. Ces méthodes sont liées à l'interpolation rationnelle (plus ou moins) généralisée et utilisent une règle fondamentale telle que la règle en connexion très étroite avec l'identité de WYNN [8]. Elles contiennent diverses variantes de l'interpolation rationnelle (algorithme de Thiele [5], f-algorithme [9], algorithme de Claessens [10]) mais elles sont plus directement utilisées dans les algorithmes de transformation de suites reposant sur l'interpolation rationnelle (l'ε-algorithme [11], ses généralisations [12], et le ρ-algorithme [13])

Elles consistent généralement à utiliser des relations de récurrence entre éléments dépendant de plusieurs indices pour remplir une table à deux (ou trois) indices. Nous nous limitons au cas où il n'y a que deux indices. Comme ces méthodes utilisent des relations

récurrentes entre les interpolants ou les quantités qui y sont liées [14], leur mise en œuvre (de [illegible] formule instable) suppose l'existence de tous les interpolants, or cette existence n'est nullement garantie dans le cas général [15].
En effet il existe des éléments de la table qui ne sont pas calculables. Dans le cas de la table de Padé, on sait que les valeurs non calculables sont localisées à l'intérieur de blocs carrés [16].
Pour les autres problèmes rationnels, la structure de la table est moins bien connue, mais on a pu constater l'existence de blocs de forme très irrégulière (voir exemple 8, 9).
L'existence de ces blocs interdit le plus souvent la mise en œuvre d'algorithmes reposant sur des relations de récurrence.
Nous dirons qu'une table est normale si tous les approximants qui lui sont associés existent. Si une table normale construite à partir de données est telle qu'une petite perturbation de ces données détruise la normalité de la table, cela signifie que nous sommes proches d'une situation non normale et les risques d'instabilité

numériques sont grands

La possible non normalité d'une table a donc le double effet de conduire les algorithmes récurrents à n'être ni fiables, ni stables. Dans le cas de la table de Padé, on a proposé [6] une méthode qui permet de lutter contre ces inconvénients. Cette méthode repose sur des propriétés d'invariance dans des transformations homographiques.

L'objet de ce travail est de profiter de cette propriété pour élargir le champ d'application des algorithmes de losange. Cette extension se fera dans deux directions distinctes qui seront développées dans les deux parties de cette thèse.

La première consiste à présenter une mise en oeuvre "reliable" des algorithmes de losange les plus utilisés : l'ε-algorithme et le ρ-algorithme.

La seconde consiste à relaxer les contraintes qui pénalisent la mise en oeuvre de l'algorithme de Thiele lorsque la table des différences réciproques présente des singularités.

[illegible] ... [illegible] ...
par la possibilité de programmer facilement
mettant en œuvre les algorithmes
proposés.

Chapitre 1 - Le ε-algorithme

1ère Partie

Programmation des règles singulières dans 2 algorithmes de losange : l'ε-algorithme et le ρ-algorithme

Depuis plus de 20 ans diverses formules particulières ou singulières ont été proposées pour améliorer la précision et la stabilité numérique des algorithmes de losange [17]. Ces formules permettent de traiter le cas où 2 valeurs consécutives d'un algorithme sont égales (singulières) ou voisines (particulières). Toutefois leur champ d'application paraît limité. La propriété d'invariance homographique permet pourtant d'obtenir des règles singulières ou particulières généralisées, au moins dans le cas de l'ε algorithme [4] mais aucun programme exploitant cette propriété n'a été présenté jusqu'alors. Le but de cette partie est de pallier à cette carence. Cette mise en oeuvre se caractérise par le fait qu'elle ne tient aucun compte de la structure des singularités. C'est ce qui nous permettra d'appliquer cette méthode aux algorithmes de losange vérifiant la propriété d'invariance homographique.

En fait [illegible]
[illegible] les plus [illegible] [illegible]
et [illegible]

1 INTRODUCTION

SHANKS [1] a introduit l'étude d'une transformation de suite à suite qui généralise le procédé Δ^2 d'Aitken. En ce sens que cette transformation appelée $e_k(S_n)$ est construite de sorte que $e_k(S_n) = S \quad \forall n \geq N$ pour toute suite $\{S_n\}$ telle que :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i (S_{n+i} - S) = 0 \quad \forall n \geq N$$

avec $\sum_{i=0}^{k} a_i \neq 0$

$e_k(S_n)$ s'exprime à l'aide de quotients de déterminants. Pour éviter le calcul effectif de ces déterminants, on utilise l'ε-algorithme dont les relations de liaison avec cette transformation de SHANKS sont les suivantes [2]

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = e_k(S_n)$$

$$\varepsilon_{2k+1}^{(n)} = 1 / e_k(\Delta S_n)$$

L'ε-algorithme est un algorithme récursif dû à P. WYNN [3] qui permet de transformer une suite donnée, placée dans un tableau à double entrée : le tableau ε

Mais la construction de ce tableau n'est pas toujours possible : cela

[illegible]
[illegible].
Les [illegible] [illegible] de [illegible] ([illegible]ement [illegible]).
L'algorithme de [illegible] ne [illegible] pas [illegible] les termes [illegible].
F. Cor[illegible] [4] a présenté une variante qui [illegible] les termes [illegible] aux états singuliers.
Nous présentons [illegible] une [illegible] de cet algorithme à l'aide des règles d'inversion de [illegible].

1.2 Rappel de l'ε-algorithme

L'ε-algorithme algorithme est un algorithme récursif dû à P. WYNN [2]. Les règles de cet algorithme sont les suivantes :

- Initialisation

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

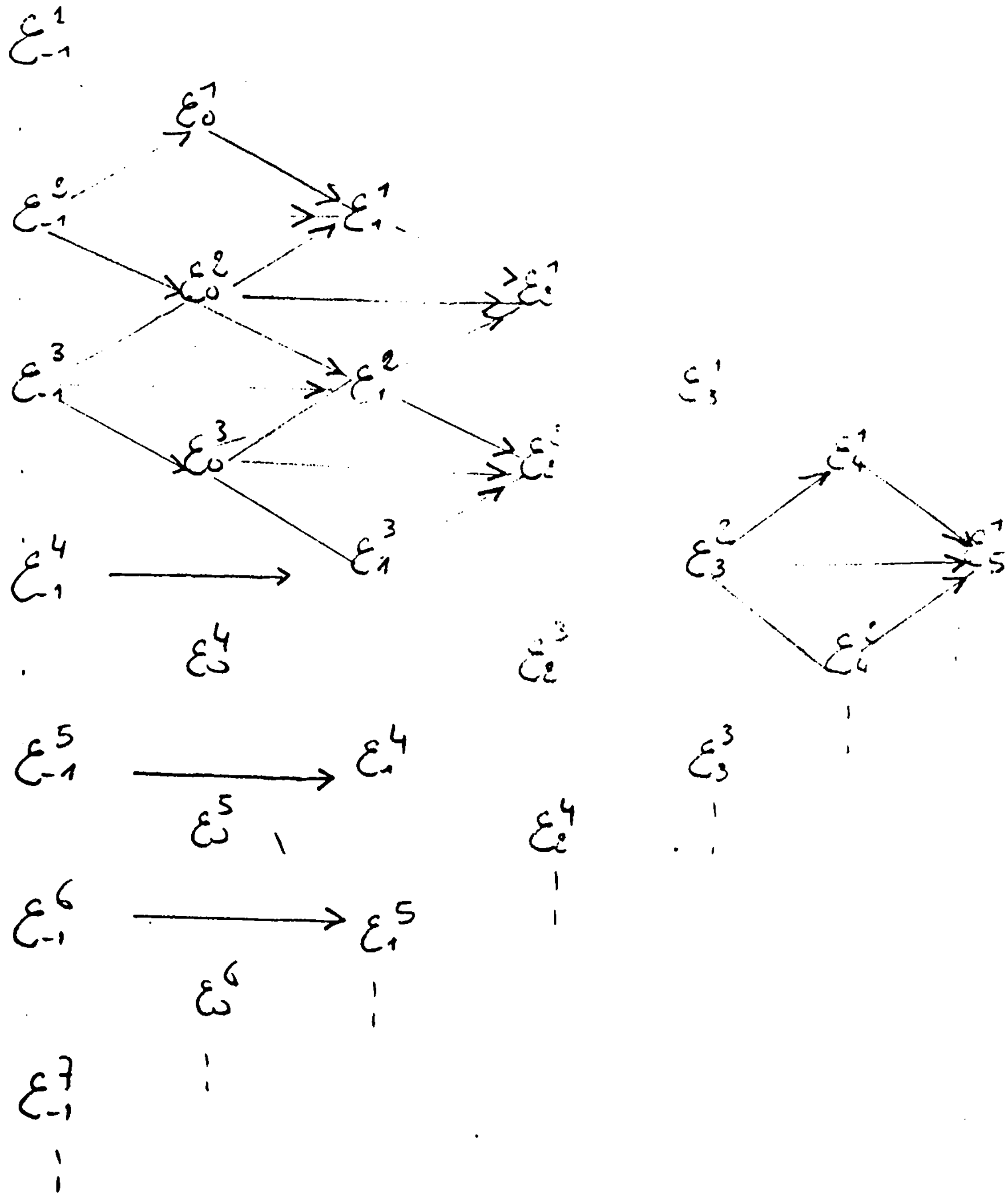
$$\varepsilon_{0}^{(n)} = S_n \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Relation de récurrence

$$\varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_{k}^{(n+1)} - \varepsilon_{k}^{(n)}} \qquad k, n = 0, 1, \ldots$$

On place les quantités dans un tableau à double entrée : le tableau ε.
L'indice inférieur k représente une colonne et l'indice supérieur n une diagonale descendante. La relation de l'ε-algorithme relie, dans le tableau, des quantités situées aux quatre sommets d'un losange. La quantité la plus à droite est calculée à partir des trois autres quantités comme l'indiquent les flèches dans le tableau suivant :

tableau de [illegible]



Règles singulières

[...]a mise en oeuvre de l'ε-algorithme conduit [...]souvent à des erreurs de calcul notables [...]ui nuisent beaucoup à son efficacité. [...]ur l'ε algorithme scalaire, Wynn [2] a [...]proposé une règle particulière permettant de [...]iminuer de façon sensible les erreurs de [...]calcul dans le cas où deux valeurs [...]consécutives d'une même colonne deviennent [...]voisines. F. Cordellier [4] a proposé une [...]ègle analogue pour l'ε-algorithme vectoriel. [...] l'introduction d'une technique de contrôle [...]s erreurs de calcul dans les calculs [...]ectoriels. Wynn [2] a également montré que, [...] deux termes consécutifs d'une même [...]lonne sont égaux, la mise en oeuvre de [...]l'ε-algorithme scalaire peut être poursuivie [...]moyennant l'introduction d'une règle [...]ngulière. Ce résultat a été étendu [...]r Cordellier [4] pour l'ε-algorithme [...]ectoriel dans le cas où n vecteurs [...]nsécutifs d'une même colonne sont égaux.

Nous allons nous intéresser à la mise en œuvre de l'ε-algorithme scalaire.
La nouvelle de F. Cordellier [4] jouit des deux propriétés suivantes :

- D'une part, elle propose un traitement numérique stable dans le cas où n termes consécutifs d'une même colonne sont "voisins" à condition qu'ils soient "encadrés" par des termes "non voisins".
- D'autre part, elle assure la compatibilité de ces règles avec les règles singulières évoquées plus haut : ces règles singulières deviennent alors les cas limites des nouvelles règles.

Bien que ces règles soient utilisables pour n quelconque, nous les présentons sur un exemple avec $n = 3$ pour faciliter la compréhension du principe.

Le lecteur suivra le déroulement de l'algorithme sur la figure n° 1.

Les entiers k et 1 [illegible] fixés, on suppose que $\varepsilon_k^{(1+3)}$, [illegible] sont [illegible] valeur notée $x \neq \infty$ [illegible] que $\varepsilon_{k-2}^{(1+2)}$, $\varepsilon_{k-2}^{(1+3)}$, $\varepsilon_{k-2}^{(1+4)}$, $\varepsilon_k^{(1)}$, $\varepsilon_k^{(1+4)}$, $\varepsilon_{k+2}^{(1+1)}$ et $\varepsilon_{k+2}^{(1+3)}$ en sont "éloignés". Alors $\varepsilon_{k+1}^{(1+1)}$ et $\varepsilon_{k+1}^{(1+2)}$ sont "voisins" de ∞ tandis que $\varepsilon_{k-1}^{(1+2)}$, $\varepsilon_{k-1}^{(1+3)}$, $\varepsilon_{k+1}^{(1)}$, $\varepsilon_{k+1}^{(1+3)}$, $\varepsilon_{k+3}^{(1-1)}$ et $\varepsilon_{k+3}^{(1+1)}$ en sont "éloignés".
De même on admet que $\varepsilon_k^{(1+2)}$ et $\varepsilon_{k+2}^{(1)}$ se calculent sans problème.
On se donne une transformation homographique A_1 appliquant ∞ en u_1 (par exemple une inversion de [illegible] u_1) et on définit un nouveau tableau ${}^1\varepsilon_\ell^{(j)}$ dont les éléments encadrés dans le schéma (p 11) seront les transformés par A_1 des éléments homologues du tableau initial : Les valeurs ${}^1\varepsilon_{k-1}^{(1+2)}$, ${}^1\varepsilon_{k-1}^{(1+3)}$, ${}^1\varepsilon_{k+1}^{(1)}$, ${}^1\varepsilon_{k+1}^{(1+3)}$, ${}^1\varepsilon_{k+3}^{(1-1)}$ et ${}^1\varepsilon_{k+3}^{(1+2)}$ seront "éloignés" de u_1 tandis que ${}^1\varepsilon_{k+1}^{(1+1)}$ et ${}^1\varepsilon_{k+1}^{(1+2)}$ en seront "voisins". Si nous posons ${}^1\varepsilon_k^{(1+1)} = \alpha_1$ (par exemple $\alpha_1 = 0$), la règle du losange nous permet de calculer ${}^1\varepsilon_k^{(1+2)}$, ${}^1\varepsilon_k^{(1+3)}$, ${}^1\varepsilon_{k+2}^{(1)}$ et ${}^1\varepsilon_{k+2}^{(1+2)}$ qui seront "éloignés" de ∞, et ${}^1\varepsilon_{k+2}^{(1+1)}$ qui en sera "voisin". On peut calculer ${}^1\varepsilon_{k+3}^{(1)}$ et ${}^1\varepsilon_{k+3}^{(1+1)}$ ("voisins" de u_1) puis ${}^1\varepsilon_{k+4}^{(1-1)}$ et ${}^1\varepsilon_{k+4}^{(1+1)}$ ("éloignés" de ∞), mais le calcul de ${}^1\varepsilon_{k+4}^{(1)}$ est à proscrire (perte de precision par cancellation).
On se donne alors une seconde transformation homographique A_2 appliquant ∞ en $u_2 \neq \infty$ (on peut prendre $A_2 = A_1$) et on définit un 3e tableau ${}^2\varepsilon_\ell^{(j)}$ dont les éléments

-[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]), sont alors transformés par [illegible] éléments homologues [illegible] $\varepsilon^{(1-1)}$. Si nous prenons $\varepsilon^{(1+1)}_{k+1}$ = [illegible] ([illegible]), on peut alors calculer $\varepsilon^{(1)}_{k+2}$ avec une bonne précision. Il suffit alors de prendre $^{1}\varepsilon^{(1)}_{k+4} = A_2^{-1}\left({}^{2}\varepsilon^{bis}_{k+2}\right)$ pour calculer $^{1}\varepsilon^{(1-1)}_{k+5}$ et $^{1}\varepsilon^{(1)}_{k+5}$ (nos "voisins" [illegible]) puis de revenir au tableau initial par :

$$\varepsilon^{(1)}_{k+3} = A_1^{-1}\left({}^{1}\varepsilon^{(1)}_{k+3}\right)$$
$$\varepsilon^{(1+1)}_{k+3} = A_1^{-1}\left({}^{1}\varepsilon^{(1-1)}_{k+3}\right)$$
$$\varepsilon^{(1-1)}_{k+5} = A_1^{-1}\left({}^{1}\varepsilon^{(1-1)}_{k+5}\right)$$
$$\varepsilon^{(1)}_{k+5} = A_1^{-1}\left({}^{1}\varepsilon^{(1)}_{k+5}\right)$$

On complètera alors le tableau initial en appliquant la règle du losange.

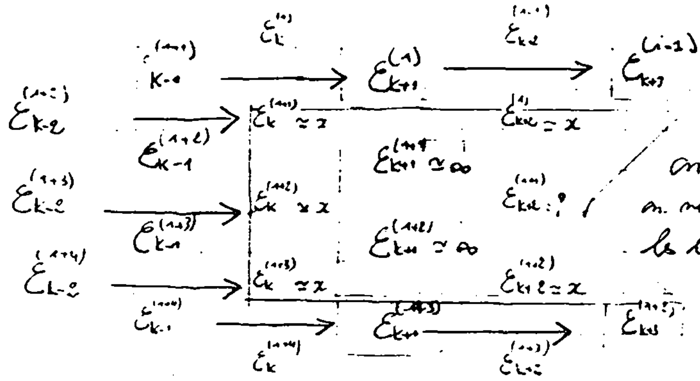
I- 10, 11

15 bis

Présentation – introduction et exemples.

Figure : n –

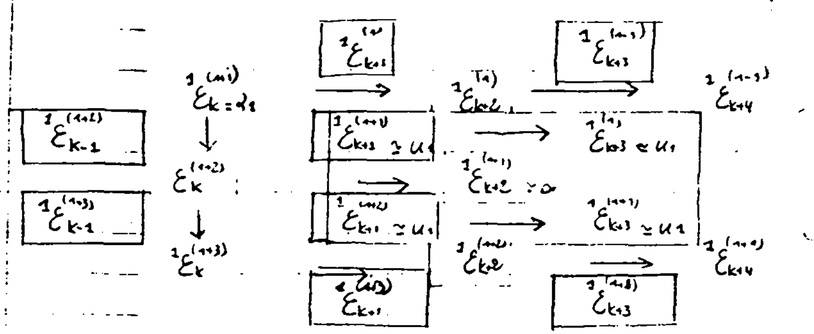
inverse

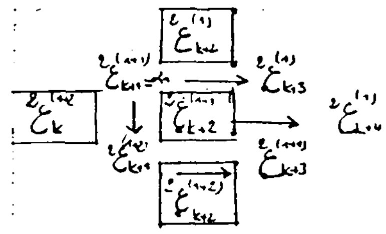


On est bloqué, on ne plus calculer les termes suivants

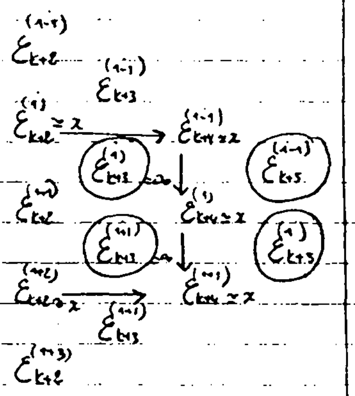
Les termes encadrés sont à inverser.

inverse



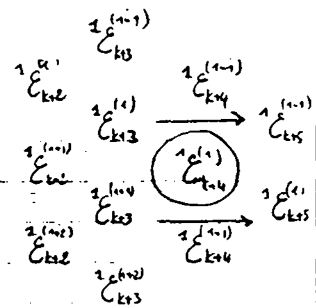


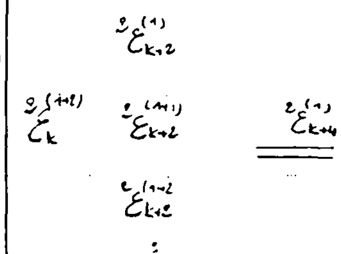
On est bloqué, on ne plus peut avancer. Il faut inverser les termes encadrés.



Les termes entourés sont calculés par inversion. Les flèches indiquent la manière dont sont appliquées les règles du losange.

inversion retour



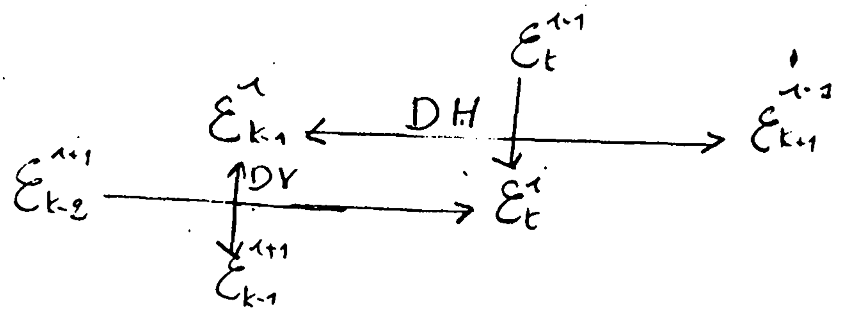


inversion retour

4 Description de la programmation de l'ε-algorithme avec règles singulières.

1) Losange horizontal et vertical.

Dans la table de l'ε-algorithme, considérons les éléments des losanges dont ε_k^i est sommet, situés au dessus de la diagonale montante contenant cet ε_k^i.



Introduisons ces différences :

$$DV = \varepsilon_{k-1}^{i+1} - \varepsilon_{k-1}^{i}$$

$$DH = \varepsilon_{k+1}^{i-1} - \varepsilon_{k-1}^{i}$$

L'élément ε_k^i peut se calculer au moyen de 2 relations distinctes

* **Relation losange horizontal.**

$$\varepsilon_k^i = \varepsilon_{k-2}^{i+1} + 1/DV$$

* **Relation losange vertical**

$$\varepsilon_k^i = \varepsilon_k^{i-1} + 1/DH$$

2) Principe de la mise en oeuvre colonne par colonne

Etant donné un tableau initial E ;
le traitement se fait colonne par colonne.
Dès qu'on rencontre une singularité dans une colonne K on arrête le traitement et on crée un tableau inverse n° 1 dans lequel la 1ère et la 3ème colonne sont les inverses des colonnes K et K-2 du tableau initial. La 2ème colonne du tableau inverse n° 1 sera calculée avec losange vertical.
Si le tableau inverse n° 1 ne contient pas de singularité ; on continue le traitement sur ce tableau avec losange horizontal jusqu'à sa dernière colonne et on retourne au tableau initial ; les colonnes de même parité que K seront calculées par inversion à partir des colonnes de même indice du tableau inverse n° 1. Les autres colonnes seront calculées avec losange vertical.
Si le tableau inverse n° 1 contient une singularité, on crée un 2ème tableau inverse n° 2 ; ainsi le tableau inverse n° 1 jouera le rôle d'un tableau initial et le tableau inverse n° 2 jouera le rôle de son tableau inverse et ainsi de suite.

Pour illustrer ce raisonnement on traitera l'exemple suivant :

(1)

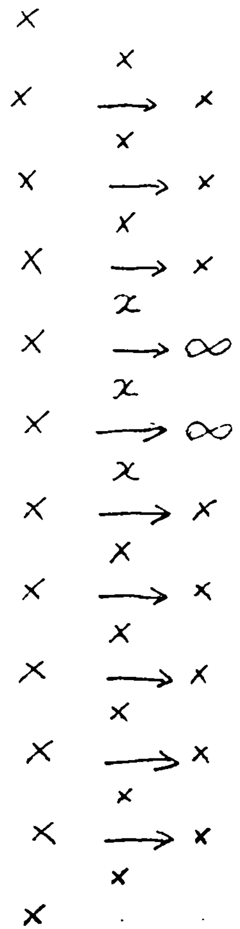
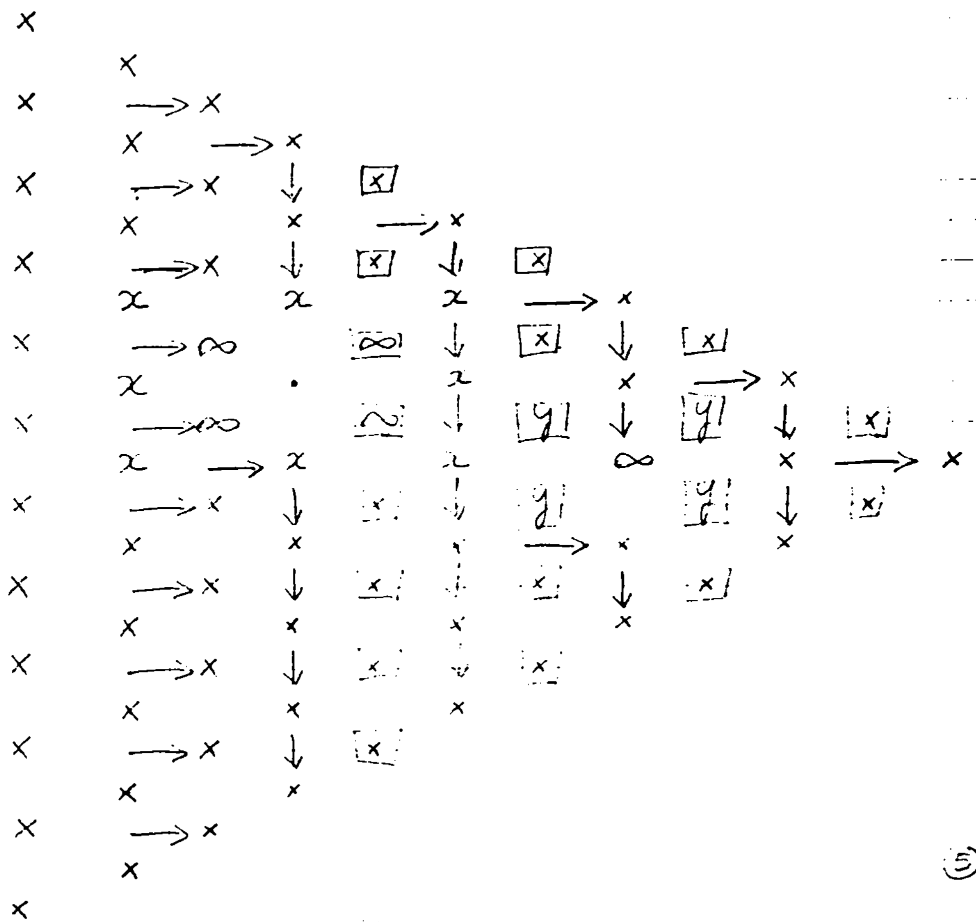


tableau initial $(n=0)$

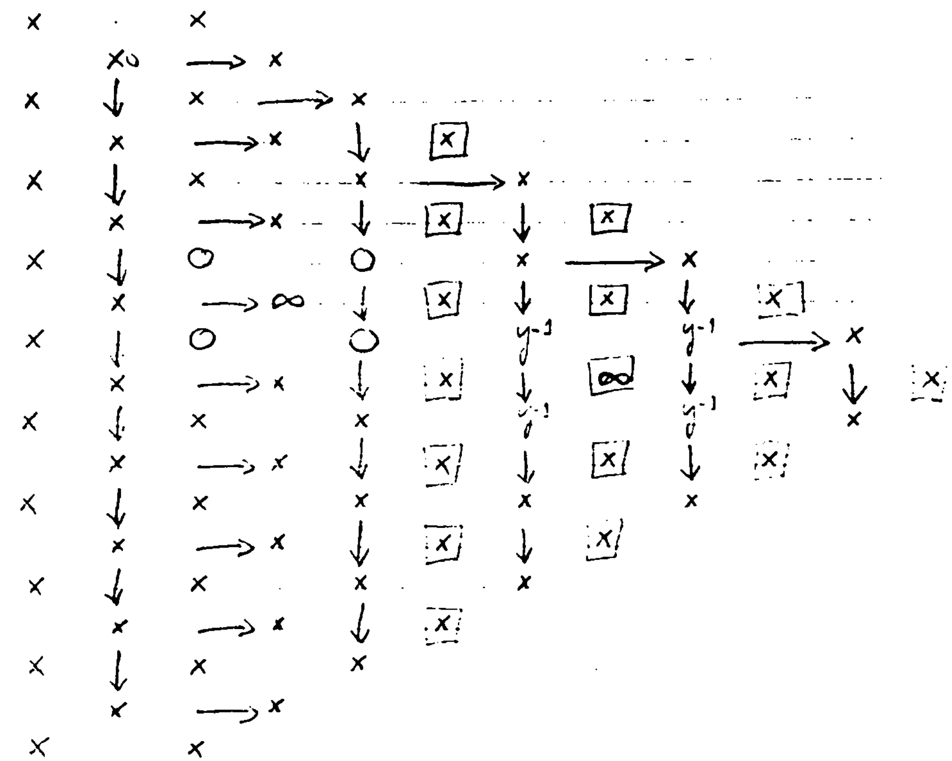
La première singularité rencontrée dans le tableau est à la colonne 3; on arrête le calcul et on inverse les colonnes 1 et 3 dans le tableau suivant $n=1$

12bis



(5)

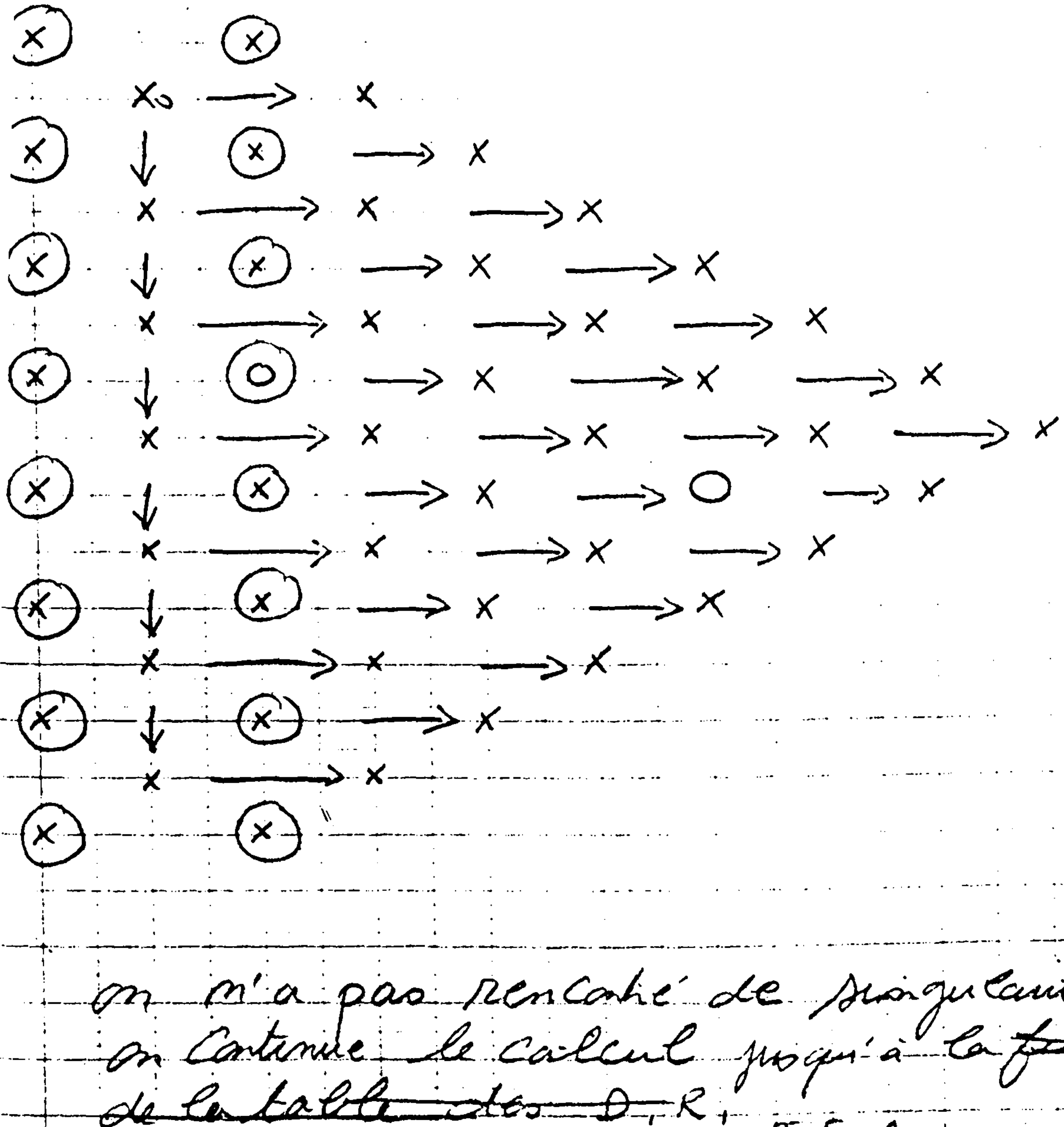
tableau initial



(4)

tableau d'indice n° 1

Dans chaque tableau les flèches indiquent la manière dont est calculé chaque E_t. Les éléments entourés sont calculés par inversion à partir du tableau d'indice juste au-dessous ; alors que les éléments encadrés sont calculés par inversion à partir du tableau d'indice juste au dessus.



on n'a pas rencontré de singularité,
on continue le calcul jusqu'à la ~~fin~~
~~de la table des D~~, R,
dernière colonne de cet tableau
tableau inverse n = 2

Remarques

1) Avantages :

* Cette mise en oeuvre de l'algorithme ne tient pas compte des formes des blocs singuliers. Elle peut être généralisée pour tous les algorithmes de losanges [5]

– Nous disons qu'une singularité est paire quand elle commence par une colonne paire et nous disons qu'elle est impaire dans le cas contraire. De même nous disons qu'une inversion est paire quand elle résoud une singularité paire et nous disons qu'elle est impaire quand elle résoud une singularité impaire.

* A chaque inversion on diminue d'une unité la taille des singularités de même parité et on conserve celle des autres.

* On traverse des singularités de même parité avec les mêmes inversions quand elles sont de même taille.
(exemple : tableau n° 1)

2) Inconvénients.

* Cette mise en oeuvre prend beaucoup de place.

* Cette variante augmente notablement la complexité du calcul. Elle peut doubler le coût dans le cas où on rencontre une singularité dès la première colonne.

Dans ce cas les variantes antérieures sont certainement plus économiques.

3) [illegible] particuliers

Description des paramètres du programme.

- T, T_1, T_2, T_3 sont des tableaux à 2 dimensions
- N : [illegible] de termes de la suite.
- F : tableau à une dimension contenant la suite à transformer.
- K : indice de colonne
- So : seuil qui définit que 2 termes consécutifs d'une colonne sont voisins.
- INF : infini (1E+6)
- SING : variable logique locale relative à une colonne initialisée à faux.
- LOSV = Variable logique locale relative à un tableau, initialisée à faux.

SINGTG : Variable logique globale, initialisée à faux.

SING = prend la valeur vrai si 2 termes consécutifs d'une colonne K sont voisins (alors inverser)

LOSV = prend la valeur vrai après retour d'inversion.

SINGTG = prend la valeur vrai si le tableau initial rencontre plus de 4 inversions (singularité trop grande).

28

Description du procédé

1) Lire N, F(I) pour I = 1 à N
So et INF

2) Initialisation
T(1, I) = 0 pour I = 1 à N (ε_{-1})
T(2, I) = F(I) pour I = 1 à N ($\varepsilon_0^{(1)}$)
k = 3
SING = FAUX
LOSV = FAUX
SINGTG = FAUX

3) Traitement colonne par colonne
tant que k = N-1 faire
• pour I:= 1 à N-k+2 faire
• si (I= 1 V ¬LOSV V |DH|<So) (*)
alors si |DV| < So alors SING:= vrai
" Losange Horizontal
sinon Losange Vertical

• si k = N+1 alors Stop.
• si LOSV alors k:= k+2
sinon si ¬SING alors k:= k+1
sinon k_0:= k
Call TAB(K, N, So, INF, T, T1, SINGTG)
LOSV:= vrai
Si SINGTG alors STOP
sinon : pour k:= ko à N+1 pas 2 faire

... fin

T(,) = 1 / T ...

k := ko + 1

4). IMPRESSION

(*) – quand I vaut 1 nous calculons T(k, 1) (premier terme de la colonne k). Il ne peut être calculé que par Losange Horizontal

– LOSV reste à faux : signifie qu'on n'a pas inversé (donc on n'a pas rencontré de bloc singulier) donc on ne peut utiliser que Losange Horizontal.

– |DH| < So signifie que nous sommes dans la situation suivante qui est illustrée par le schéma ci-dessous :

T(k, I-1) = ∞

T(k-1, I) = x DH T(k+1, I-1) = x bloc singulier

T(k-2, I+1) ⟶ T(k, I)

T(k-1, I+1)

Nous sommes à la sortie d'un bloc singulier, Losange Vertical ne peut pas être utilisé (cas indéterminé) donc il faut appeler que Losange Horizontal.

Description du sous programme

TAB(K, N, T, So, INF, T1, ...)

1) Initialisation :

SING = FAUX

LOSV = FAUX

SINTG = FAUX

pour I = 1 à N-K+2 faire

$$\begin{cases} T1(K, I) = 1/T(K, I) \\ T1(K-2, I+1) = 1/T(K-2, I+1) \end{cases}$$

2) pour I = 1 à N-K-2 faire

si $\big(|T1(K,I) - T1(K,I+1)| < So \wedge |T1(K,I+1) - T1(K,I+2)| < So \wedge |T1(K,I+2) - T1(K,I+3)| \wedge |T1(K,I+3) - T1(K,I+4)| < So \big)$

alors SINGTG := vrai Return

sinon : T1 (K-1, 1) = X0

Calculer la colonne K-1 de T1 avec Losange vertical.

3) K := K+1

partie identique à la 3ᵉ partie du programme principal.

Le sous programme TAB1 est identique à TAB.

Description du programme

$TAB2(K, N, T2, So, INF, T3, ...)$

1) Initialisation

SINGULIER = FAUX

pour $I = 1$ à $N-K+2$ faire

$T3(K, I) = 1/T2(K, I)$

$T3(K-2, I+1) = 1/T2(K-2, I+1)$

2) pour $I = 1$ à $N-K$ faire

si $(|T3(K, I) - T3(K, I+1)| < So \wedge |T3(K, I+1) - T3(K, I+2)| < So)$

alors SINGULIER = vrai Return

sinon $T3(K-1, 1) = 0$

Calculer la colonne K-1 de T3 par losange vertical

3) $K = K+1$

pour $I = 1$ à $N-K+2$ faire

$DV = T3(K-1, I+1) - T3(K-1, I)$

si $|DV| < So \wedge |T3(K-2, I+1)| > INF)$ alors

CALL $TAB3(K, I, T3, S)$

$T3(K, I) = 1/S$

sinon $T3(K, I) = T3(K-2, I+1) + 1/DV$

si $K = N+1$ RETURN

sinon $K = K+1$

Description du sous programme

TAB31(K, I, Ti, S)

Ce sous programme calcule le terme $(\mathcal{E}_K^1)^{-1}$ situé au delà d'une singularité de taille 1.

$$
\begin{tikzcd}
 & O \arrow[rr, "R_1"] \arrow[d] & & S_1 & \\
R & & R_2 \simeq 0 \arrow[rr] & & S \\
 & S_2 \arrow[rr, "R_3"'] & & S_3 &
\end{tikzcd}
$$

$R_1 = 1 / T3\ (K-2, I)$

$R_2 = 1 / T3\ (K-2, I+1)$

$R_3 = 1 / T3\ (K-2, I+2)$

$R = 1 / T3\ (K-4, I+2)$

$S = R_2 + 1/(S_3 - S_1)$ représente le terme situé au delà la singularité décrite ci-dessus.

27bis

Annexe dans programme
Gorham

```
C PROGRAMME PRINCIPAL DE L'EPSILON ALGORITHME
C UTILISANT LA PROPRIETE D'INVARIANCE HOMOGRAPHIQUE
C
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),T2(30,30),T3(30,30),T4(30,30)
      DIMENSION F(30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,T2,T3,T4,DH,DV,Z1,Y,F
       REAL INF,S0
       LOGICAL SING,LOSV,SINGTG
C
C*******************************************************************
C**LECTUURE DES DONNEES ET INITIALISATION**
C*******************************************************************
      SING=.FALSE.
      LOSV=.FALSE.
      SINGTG=.FALSE.
C
      CALL LECTU(N,F,S0,INF,K,T)
C**************************************************************************
C**CALCUL DE LA COLONNE K DE LA TABLE EPSILON**
C*******************************************************************
C
 1000  CONTINUE
C**DEBUT DE LA BOUCLE**
       DO 10 I=1,N-K+2
       DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF(I.LT.2) GOTO 19
      DH=T(K+1,I-1)-T(K-1,I)
      IF((.NOT.LOSV).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 19
      IF((ABS(T(K+1,I-1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF))GOTO 11
      CALL INVE(DH,Z1)
      T(K,I)=T(K,I-1)+Z1
      GOTO 10
   19 CONTINUE
      IF((ABS(T(K-1,I+1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF))GOTO 11
       CALL INVE(DV,Z1)
      T(K,I)=T(K-2,I+1)+Z1
      IF(ABS(DV).LT.S0) GOTO 12
      GOTO 10
   12 CONTINUE
      SING=.TRUE.
      GOTO 10
   11  CONTINUE
      T(K,I)=T(K-2,I+1)
   10 CONTINUE
C**FIN DE LA BOUCLE**
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001
C
      IF(LOSV) GOTO 31
      IF(.NOT.SING) GOTO 4
      LOSV=.TRUE.
       IF(K.EQ.N) GOTO 4
      K0=K
       CALL TABL(K,N,T,S0,INF,T2,SINGTG)
      IF(SINGTG) GOTO 1005
      K=K0
 1002  CONTINUE
      DO 50 I=1,N-K
      CALL INVE(T2(K+2,I),T(K+2,I))
   50 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N-1)) GOTO 1002
      K=K0+1
      GOTO 1000
    4 CONTINUE
      K=K+1
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
       GOTO1001
C
   31 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
 1001 CONTINUE
C*******************************************************************
C**IMPRESRESSION DE LA TABLLE EPSILON**
      CALL IMPRES(N,T)
C*******************************************************************
C
      WRITE(11,37)
      WRITE(11,37)
   37 FORMAT(/)
C*******************************************************************
C*******************************************************************
      STOP
 1005  CONTINUE
      WRITE(11,500)
  500  FORMAT(1X,'ARRET PROVOQUE PAR: LE PROBLEME NECESSITE PLUS DE 4
     #INVEERSIONS')
      STOP
      END
```

```
C**TABLEAU INVERSE NUMERO 1**
      SUBROUTINE TABL(K,N,T1,SO,INF,T,SINGTG)
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),T4(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,DH,DV,Z1,T4,S
      REAL INF,SO
      LOGICAL SING, LOSV,SINGTG
      SING=.FALSE.
      LOSV=.FALSE.
      SINGTG=.FALSE.
C**INVERSION DES COLONNES K ET K-2 DU TABLEAU INITIALE**
      DO 100 I=1,N-K+2
      CALL INVE(T1(K,I),T(K,I))
        CALL INVE(T1(K-2,I+1),T(K-2,I+1))
  100 CONTINUE
C**FIN D'INVERSION DES COLONNES K ET K-2**
      DO 112 I=1,N-K-2
      IF((ABS(T(K,I)-T(K,I+1)).LT.SO).AND.(ABS(T(K,I+1)-T(K,I+2)).
     *LT.SO).AND.(ABS(T(K,I+2)-T(K,I+3)).LT.SO).AND.(ABS(T(K,I+3)-
     *T(K,I+4)).LT.SO)) GOTO 1004
 112  CONTINUE
C****************************************************************
C**CALCUL DE LA COLONNE K-1**
      T(K-1,1)=0
      DO 110 I=1,N-K+1
      DH=T(K,I)-T(K-2,I+1)
      IF((ABS(T(K,I)).GT.INF).OR.(ABS(DH).LT.SO)) GOTO 111
      CALL INVE(DH,Z1)
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)+Z1
      GOTO 113
 111  CONTINUE
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)
 113  CONTINUE
 110  CONTINUE
C**FIN DE LA CALCUL DE LA COLONNE K-1**
C****************************************************************
C**CALCUL DE LA COLONNE K**
      K=K+1
 1000  CONTINUE
C**DEBUT DE LA BOUCLE**
       DO 10 I=1,N-K+2
       DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF(I.LT.2) GOTO 19
      DH=T(K+1,I-1)-T(K-1,I)
      IF((.NOT.LOSV).OR.(ABS(DH).LT.SO)) GOTO 19
      IF((ABS(T(K+1,I-1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF))GOTO 11
      CALL INVE(DH,Z1)
      T(K,I)=T(K,I-1)+Z1
      GOTO 10
   19 CONTINUE
      IF((ABS(DV).LT.SO).AND.(ABS(T(K-2,I+1)).GT.INF)) GOTO 14
      IF((ABS(T(K-1,I+1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF))GOTO 11
       CALL INVE(DV,Z1)
      T(K,I)=T(K-2,I+1)+Z1
      IF(ABS(DV).LT.SO) GOTO 12
      GOTO 10
   12 CONTINUE
      SING=.TRUE.
      GOTO 10

   14 CONTINUE
      CALL TABL3(K,I,T,S)
      CALL INVE(S,Z1)
      T(K,I)=Z1
      GOTO 10
   11  CONTINUE
      T(K,I)=T(K-2,I+1)
 10     CONTINUE
C**FIN DE LA BOUCLE**
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001
C
      IF(LOSV) GOTO 31
      IF(.NOT.SING) GOTO 4
       LOSV=.TRUE.
       IF(K.EQ.N) GOTO 4
      K0=K
      CALLTABL1(K,N,T,SO,INF,T4,SINGTG)
       K=K0
 1002  CONTINUE
      DO 50 I=1,N-K
      CALL INVE(T4(K+2,I),T(K+2,I))
 50    CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N-1)) GOTO 1002
      K=K0+1
      GOTO 1000
  4     CONTINUE
       K=K+1
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      RETURN
   31 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      GOTO 1001
 1004 CONTINUE
      SINGTG=.TRUE.
 1001  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C**TABLEAU INVERSE NUMERO 2**
      SUBROUTINE TABL1(K,N,T1,S0,INF,T,SINGTG)
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),T3(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,T3,DH,DV,Z1,S
      REAL INF,S0
      LOGICAL SING, LOSV,SINGTG
      SING=.FALSE.
      LOSV=.FALSE.
      SINGTG=.FALSE.
      DO 100 I=1,N-K+2
      CALL INVE(T1(K,I),T(K,I))
        CALL INVE(T1(K-2,I+1),T(K-2,I+1))
  100 CONTINUE
      DO 112 I=1,N-K-1
      IF((ABS(T(K,I)-T(K,I+1)).LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+1)-T(K,I+2)).
     #LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+2)-T(K,I+3)).LT.S0)) GOTO 1004
  112 CONTINUE
      T(K-1,1)=0
      DO 110 I=1,N-K+1
      DH=T(K,I)-T(K-2,I+1)
      IF((ABS(T(K,I)).GT.INF).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 111
      CALL INVE(DH,Z1)
       T(K-1,I+1)=T(K-1,I)+Z1
      GOTO 113
  111 CONTINUE
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)
  113 CONTINUE
110   CONTINUE
      K=K+1
1000   CONTINUE
       DO 10 I=1,N-K+2
       DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF(I.LT.2) GOTO 19
      DH=T(K+1,I-1)-T(K-1,I)
      IF((.NOT.LOSV).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 19
      IF((ABS(T(K+1,I-1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF))GOTO 11
      CALL INVE(DH,Z1)
      T(K,I)=T(K,I-1)+Z1
      GOTO 10
   19 CONTINUE
      IF((ABS(DV).LT.S0).AND.(ABS(T(K-2,I+1)).GT.INF)) GOTO 14
      IF((ABS(T(K-1,I+1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF))GOTO 11
       CALL INVE(DV,Z1)
      T(K,I)=T(K-2,I+1)+Z1
      IF(ABS(DV).LT.S0) GOTO 12
      GOTO 10
   12 CONTINUE
      SING=.TRUE.
      GOTO 10
   14 CONTINUE
      CALL TABL3(K,I,T,S)
      CALL INVE(S,Z1)
      T(K,I)=Z1
      GOTO 10
  11   CONTINUE
      T(K,I)=T(K-2,I+1)
10      CONTINUE
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001




C
      IF(LOSV) GOTO 31
      IF(.NOT.SING) GOTO 4
       LOSV=.TRUE.
       IF(K.EQ.N) GOTO 4
      K0=K
      CALL TABL2(K,N,T,S0,INF,T3,SINGTG)
       K=K0
1002   CONTINUE
      DO 50 I=1,N-K
      CALL INVE(T3(K+2,I),T(K+2,I))
50     CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N-1)) GOTO 1002
      K=K0+1
      GOTO 1000
 4      CONTINUE
       K=K+1
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      RETURN
   31 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      GOTO 1001
 1004 CONTINUE
      SINGTG=.TRUE.
1001  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C**TABLEAU INVERSE NUMERO 3**
      SUBROUTINE TABL2(K,N,T1,S0,INF,T,SINGTG)
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,DH,DV,Z1,S
      REAL INF,S0
       LOGICAL SINGTG
      SINGTG=.FALSE.
      DO 100 I=1,N-K+2
      CALL INVE(T1(K,I),T(K,I))
        CALL INVE(T1(K-2,I+1),T(K-2,I+1))
  100 CONTINUE
      DO 112 I=1,N-K
      IF((ABS(T(K,I)-T(K,I+1)).LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+1)-T(K,I+2)).LT.
     #S0)) GOTO 1004
  112 CONTINUE
      T(K-1,1)=0
      DO 110 I=1,N-K+1
      DH=T(K,I)-T(K-2,I+1)
      IF((ABS(T(K,I)).GT.INF).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 111
      CALL INVE(DH,Z1)
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)+Z1
      GOTO 113
 111  CONTINUE
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)
 113  CONTINUE
110   CONTINUE
      K=K+1
1000   CONTINUE
      DO 10 I=1,N-K+2
      DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF((ABS(DV).LT.S0).AND.(ABS(T(K-2,I+1)).GT.INF)) GOTO 12
       CALL INVE(DV,Z1)
      T(K,I)=T(K-2,I+1)+Z1
      GOTO 10
12     CONTINUE
        CALL TABL3(K,I,T,S)
      CALL INVE(S,Z1)
      T(K,I)=Z1
 10    CONTINUE
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001
      K=K+1
      GOTO 1000
 1004 CONTINUE
      SINGTG=.TRUE.
 1001 CONTINUE
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE TABL3

```
C ** TABLEAU INVERSE NUMERO 4 **
        SUBROUTINE TABL3(K,I,T,S)
      DIMENSION T(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,R1,R2,R3,R,S,Z,Z1,S1,S2,S3
      CALL INVE(T(K-2,I),R1)
      CALL INVE(T(K-2,I+1),R2)
      CALL INVE(T(K-2,I+2),R3)
      CALL INVE(T(K-4,I+2),R)
      Z=R2-R1
      CALL INVE(Z,Z1)
      S1=0+Z1
      Z=R2-R
      CALL INVE(Z,Z1)
      S2=0+Z1
      Z=R3-R2
      CALL INVE(Z,Z1)
      S3=S2+Z1
      Z=S3-S1
      CALL INVE(Z,Z1)
      S=R2+Z1
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE INVE

```
      SUBROUTINE INVE(A,B)
      DOUBLE PRECISION A,B
      IF(A.NE.0) GOTO1
      B=1.7*(10.**35)
      GOTO 2
1       CONTINUE
      B=1/A
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE IMPRES(N,T)
      DIMENSION T(30,30)
      DOUBLE PRECISION T
       WRITE(11,500)
       WRITE(11,550)
  500  FORMAT(1X,'TABLE DE L EPSILON ALGORITHME')
  550  FORMAT(1X,40(1H*))
      IC=0
      K0=4
      NF=N
  212 CONTINUE
      I=2
 200  CONTINUE
      J=I/2
      IP=I-2*J
      IF((J.GE.K0).AND.(J.LE.(NF-K0)))GOTO 206
      IT=J
      GOTO 207
  206 CONTINUE
      IT=K0
 207  CONTINUE
      IF((I.GT.NF).AND.(J.GT.(NF-K0)))GOTO 201
      GOTO 204
 201  CONTINUE
      IF(IP.NE.0) GOTO 208
      IT=NF-J+1
      GOTO 209
  208 CONTINUE
      IT=NF-J
 209  CONTINUE
  204  CONTINUE
      IF(IC.GT.2) GOTO 210
      IF(IP.EQ.0) GOTO 202
      WRITE(11,620) (T(IC+2*L+1,J-L+1),L=1,IT)
      GOTO 205
  202  CONTINUE
      WRITE(11,610) J,(T(2*L,J-L+1),L=1,IT)
      GOTO 205
  210 CONTINUE
      IF(IP.NE.0) GOTO 211
      WRITE(11,720) (T(IC+2*L,J-L+1),L=1,IT)
      GOTO 205
 211   CONTINUE
      WRITE(11,620) (T(IC+2*L+1,J-L+1),L=1,IT)
  205 CONTINUE
      I=I+1
      IF(I.LE.2*NF) GOTO 200
      IC=IC+2*K0
      NF=NF-2*K0
      WRITE(11,37)
  37  FORMAT(/)
      IF(IC.LE.N) GOTO 212
 610   FORMAT(1X,I3,1H*,4(D11.5,11X))
  620 FORMAT(4X,1H*,4(11X,D11.5))
  720 FORMAT(4X,1H*,4(D11.5,11X))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE LECTU(N,F,S0,INF,K,T)
      DIMENSION T(30,30),F(30)
      DOUBLE PRECISION T,F
      REAL S0,INF
C DEBUT DE LECTUURE
      READ(10,27) N
   27 FORMAT(I3)
      READ(10,26) (F(J),J=1,N)
   26 FORMAT(3F10.6)
      READ(10,35) S0
   35 FORMAT(F10.7)
      WRITE(11,300)
      WRITE(11,305)
  300 FORMAT(1X,'SUITE A TRANSFORMER')
  305 FORMAT(1X,25(1H*))
CFIN DE LECTUURE
C
C*******INITIALISATION*******
C
      DO 251 I=1,N
      WRITE(11,252) I,F(I)
  252 FORMAT(4X,'F(',I2,')=',F10.6)
  251 CONTINUE
      WRITE(11,7) S0
    7 FORMAT(1X,3HS0=,F10.7)
        DO120 I=1,N
        T(2,I)=F(I)
      T(1,I)=0
120    CONTINUE
      WRITE(11,37)
      WRITE(11,37)
   37 FORMAT(/)
      INF=10.**6
      K=3
      RETURN
      END
```

Exemples.

Exemple 1

on applique l'ε algorithme avec règles singulières à la suite définie par :
$x_0 = x_1 = x_2 = 1$
$x_3 = 2$ et $x_n = 3 \times x_{n-4}$ $\forall\, n \geq 4$
on doit avoir $\varepsilon_8^{(n)} = 0$ $\forall\, n$.
Les résultats que nous avons obtenus sont de l'ordre de 10^{-17} ce qui représente une précision très satisfaisante.

Exemple 2.

on l'applique à la suite définie par
$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$
$x_n = x_{n-4}/2$ $\forall\, n \geq 4$
on doit avoir $\varepsilon_8^{(n)} = 0$ $\forall\, n$
Nous avons obtenus des résultats qui sont de l'ordre de 10^{-16}.

Exemple 3

C'est la suite de l'exemple 1 légèrement perturbée ; on lui applique l'ε algorithme sans règles d'inversion. Les résultats qu'on a obtenus pour $\varepsilon_3^{(n)}$ sont de l'ordre de 10^{-12}.

Exemple 4

C'est la même suite que l'exemple 3. dans cet exemple on applique l'ε algorithme avec règles d'inversions. Les résultats qu'on a obtenus pour $\varepsilon_8^{(n)}$ sont de l'ordre de 10^{-16}. on s'aperçoit qu'avec d'un gain de précision de 4 chiffres.

Exempl 1:

```
UITE A TRANSFORMER
***********************
  F( 1)=  1.000000
  F( 2)=  1.000000
  F( 3)=  1.000000
  F( 4)=  2.000000
  F( 5)=  3.000000
  F( 6)=  3.000000
  F( 7)=  3.000000
  F( 8)=  6.000000
  F( 9)=  9.000000
  F(10)=  9.000000
  F(11)=  9.000000
  F(12)= 18.000000
  F(13)= 27.000000
  F(14)= 27.000000
  F(15)= 27.000000
= 0.0000010


BLE DE L EPSILON ALGORITHME
***************************************
1*0.10000D+01
 *             0.17000D+36
2*0.10000D+01                0.10000D+01
 *             0.17000D+36                0.17000D+36
3*0.10000D+01                0.10000D+01                0.10000D+01
 *             0.10000D+01                0.10000D+01                0.20000D+01
4*0.20000D+01                0.17000D+36                0.20000D+01                0.17000D+36
 *             0.10000D+01                0.10000D+01                0.20000D+01                0.20000D+01
5*0.30000D+01                0.30000D+01                0.30000D+01                0.15000D+01
 *             0.17000D+36                0.17000D+36                0.13333D+01                0.13333D+01
6*0.30000D+01                0.30000D+01                0.30000D+01                0.46117D+19
 *             0.17000D+36                -.17000D+36                0.13333D+01                0.13333D+01
7*0.30000D+01                0.30000D+01                0.30000D+01                0.15000D+01
 *             0.33333D+00                0.33333D+00                0.66667D+00                0.66667D+00
8*0.60000D+01                0.17000D+36                0.60000D+01                0.17000D+36
 *             0.33333D+00                0.33333D+00                0.66667D+00                0.66667D+00
9*0.90000D+01                0.90000D+01                0.90000D+01                0.45000D+01
 *             0.17000D+36                0.17000D+36                0.44444D+00                0.44444D+00
0*0.90000D+01                0.90000D+01                0.90000D+01                0.17000D+36
 *             0.17000D+36                -.17000D+36                0.44444D+00                0.44444D+00
1*0.90000D+01                0.90000D+01                0.90000D+01                0.45000D+01
 *             0.11111D+00                0.11111D+00                0.22222D+00                0.22222D+00
2*0.18000D+02                0.17000D+36                0.18000D+02                0.17000D+36
 *             0.11111D+00                0.11111D+00                0.22222D+00
3*0.27000D+02                0.27000D+02                0.27000D+02
 *             0.17000D+36                0.17000D+36
4*0.27000D+02                0.27000D+02
 *             0.17000D+36
5*0.27000D+02


 *0.00000D+00
 *             -.46117D+19
 *-.21684D-18                -.21684D-18
 *             0.76861D+18                0.76861D+18
 *0.10842D-17                0.10842D-17                0.10842D-17



 *
 *0.86736D-18  -.46117D+19   0.86736D-18  -.46117D+19   0.86736D-18  -.46117D+19   0.86736D-18
 *             -.46117D+19                -.46117D+19                -.46117D+19
 *0.65052D-18                0.65052D-18                0.65052D-18
 *             0.23058D+19                0.23058D+19
 *0.10842D-17                0.10842D-17
 ,             0.23058D+19
 *0.15179D-17
```

Exemple 2

bis 38

```
UITE A TRANSFORMER
************************
  F( 1)=  1.000000
  F( 2)=  1.000000
  F( 3)=  1.000000
  F( 4)=  1.000000
  F( 5)=  0.500000
  F( 6)=  0.500000
  F( 7)=  0.500000
  F( 8)=  0.500000
  F( 9)=  0.250000
  F(10)=  0.250000
  F(11)=  0.250000
  F(12)=  0.250000
  F(13)=  0.125000
  F(14)=  0.125000
  F(15)=  0.125000
  F(16)=  0.125000
D= 0.0000010



ABLE DE L EPSILON ALGORITHME
****************************************
 1*0.10000D+01
  *          0.17000D+36
 2*0.10000D+01          0.10000D+01
  *          0.17000D+36          0.17000D+36
 3*0.10000D+01          0.10000D+01          0.10000D+01
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          -.17000D+36
 4*0.10000D+01          0.10000D+01          0.10000D+01          0.10000D+01
  *          -.20000D+01          -.40000D+01          -.60000D+01          -.80000D+01
 5*0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          0.17000D+36          -.10000D+02
 6*0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          -.17000D+36          -.12000D+02
 7*0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          0.17000D+36          -.14000D+02
 8*0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00          0.50000D+00
  *          -.40000D+01          -.80000D+01          -.12000D+02          -.16000D+02
 9*0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          -.27128D+18          -.20000D+02
10*0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          -.27128D+18          -.24000D+02
11*0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          -.27128D+18          -.28000D+02
12*0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00          0.25000D+00
  *          -.80000D+01          -.16000D+02          -.24000D+02          -.32000D+02
13*0.12500D+00          0.12500D+00          0.12500D+00          0.12500D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36          -.10851D+18
14*0.12500D+00          0.12500D+00          0.12500D+00
  *          0.17000D+36          0.17000D+36
15*0.12500D+00          0.12500D+00
  *          0.17000D+36
16*0.12500D+00


  *0.43368D-18
  *          -.85899D+17





  *-.11208D-16          -.11208D-16
  *          0.56112D+18          0.56112D+18
  *-.94258D-17          -.94258D-17          -.94258D-17
  *          0.62384D+17          0.62384D+17          0.62384D+17
  *0.66039D-17          0.66039D-17          0.66039D-17          0.66039D-17
  *          0.27389D+18          0.27389D+18          0.27389D+18          0.27389D+18
  *0.10255D-16          0.10255D-16          0.10255D-16          0.10255D-16
  *          -.48604D+18          -.48604D+18          -.48604D+18
  *0.81976D-17          0.81976D-17          0.81976D-17
  *          0.20149D+18          0.20149D+18
  *0.13161D-16          0.13161D-16
  *          0.80676D+17
  *0.25556D-16

  *0.00000D+00
```

Exemple 3

```
ITE A TRANSFORMER
**********************
 F( 1)=  1.000000
 F( 2)=  1.001000
 F( 3)=  1.002010
 F( 4)=  2.000000
 F( 5)=  3.000000
 F( 6)=  3.003000
 F( 7)=  3.006030
 F( 8)=  6.000000
 F( 9)=  9.000000
 F(10)=  9.009000
 F(11)=  9.018090
 F(12)= 18.000000
 F(13)= 27.000000
 F(14)= 27.027000
 F(15)= 27.054270
= 0.0000000


BLE DE L EPSILON ALGORITHME
****************************************
1*0.10000D+01
 *              0.10000D+04
2*0.10010D+01                  0.90000D+00
 *              0.99010D+03                   0.10000D+04
3*0.10020D+01                  0.10010D+01                  0.10000D+01
 *              0.10020D+01                   0.10000D+01                  0.20000D+01
4*0.20000D+01                  -.49451D+03                  0.20000D+01                  -.24480D+03
 *              0.10000D+01                   0.10020D+01                  0.19960D+01                  0.20000D+01
5*0.30000D+01                  0.30030D+01                  0.30060D+01                  0.14954D+01
 *              0.33333D+03                   0.33003D+03                  0.13340D+01                  0.13313D+01
6*0.30030D+01                  0.27000D+01                  0.30030D+01                  -.36611D+03
 *              0.33003D+03                   0.33333D+03                  0.13313D+01                  0.13340D+01
7*0.30060D+01                  0.30030D+01                  0.30000D+01                  0.14954D+01
 *              0.33400D+00                   0.33333D+00                  0.66667D+00                  0.66532D+00
8*0.60000D+01                  -.14835D+04                  0.59009D+01                  -.73441D+03
 *              0.33333D+00                   0.33400D+00                  0.66532D+00                  0.66668D+00
9*0.90000D+01                  0.90090D+01                  0.90181D+01                  0.44861D+01
 *              0.11111D+03                   0.11001D+03                  0.44467D+00                  0.44377D+00
0*0.90090D+01                  0.81000D+01                  0.90090D+01                  -.11043D+04
 *              0.11001D+03                   0.11111D+03                  0.44377D+00                  0.44467D+00
1*0.90181D+01                  0.90090D+01                  0.90000D+01                  0.44863D+01
 *              0.11133D+00                   0.11111D+00                  0.22222D+00                  0.22177D+00
2*0.18000D+02                  -.44506D+04                  0.18000D+02                  -.22032D+04
 *              0.11111D+00                   0.11133D+00                  0.22177D+00
3*0.27000D+02                  0.27027D+02                  0.27054D+02
 *              0.37037D+02                   0.36670D+02
4*0.27027D+02                  0.24300D+02
 *              0.36670D+02
5*0.27054D+02


 *0.31856D-13
 *              -.52548D+12
 *-.18712D-11                  -.18712D-11
 *              0.54364D+12                   0.10873D+13
 *-.31707D-13                  -.31707D-13                  -.31707D-13




 *              0.51131D+13                   0.10226D+14                  0.15339D+14
 *0.16387D-12                  0.16387D-12                  0.16387D-12                  0.16387D-12
 *              -.43643D+13                   -.87287D+13                  -.13093D+14
 *-.65261D-13                  -.65261D-13                  -.65261D-13
 *              0.69662D+12                   0.13932D+13
 *0.13702D-11                  0.13702D-11
 *              -.76614D+12
 *0.64987D-13
```

Exemple 4

I-34 bis

40

```
ITE A TRANSFORMER
*************************
 F( 1)=  1.000000
 F( 2)=  1.001000
 F( 3)=  1.002010
 F( 4)=  2.000000
 F( 5)=  3.000000
 F( 6)=  3.003000
 F( 7)=  3.006030
 F( 8)=  6.000000
 F( 9)=  9.000000
 F(10)=  9.009000
 F(11)=  9.018090
 F(12)= 18.000000
 F(13)= 27.000000
 F(14)= 27.027000
 F(15)= 27.054270
= 0.0300000


BLE OF L EPSILON ALGORITHME
****************************************
1*0.10000D+01
 *
                0.10000D+04
2*0.10010D+01
                              0.90000D+00
 *              0.99010D+03
                                            0.10000D+04
3*0.10020D+01
                              0.10010D+01                 0.10000D+01
                0.10020D+01                 0.10000D+01                 0.20000D+01
4*0.20000D+01
 *                            -.49451D+03
                                                          0.20000D+01                 -.24480D+03
                0.10000D+01
                                            0.10020D+01                 0.19960D+01                 0.20000D+01
5*0.30000D+01
                              0.30030D+01                 0.30060D+01
 *                                                                                    0.14954D+01
                0.33333D+03
                                            0.33003D+03                 0.13340D+01                 0.13313D+01
6*0.30030D+01
 *                            0.27000D+01
                                                          0.30030D+01                 -.36811D+03
                0.33003D+03
                                            0.33333D+03                 0.13313D+01                 0.13340D+01
7*0.30060D+01
 *                            0.30030D+01                 0.30000D+01
                                                                                      0.14954D+01
                0.33400D+00                 0.33333D+00                 0.66667D+00                 0.66532D+00
8*0.60000D+01
 *                            -.14835D+04
                                                          0.59999D+01                 -.73441D+03
                0.33333D+00
                                            0.33400D+00                 0.66532D+00                 0.66668D+00
9*0.90000D+01
 *                            0.90090D+01                 0.90181D+01
                                                                                      0.44861D+01
                0.11111D+03
                                            0.11001D+03                 0.44467D+00                 0.44377D+00
0*0.90090D+01
 *                            0.81000D+01
                                                          0.90090D+01                 -.11043D+04
                0.11001D+03
                                            0.11111D+03                 0.44377D+00                 0.44467D+00
1*0.90181D+01
 *                            0.90090D+01                 0.90000D+01
                                                                                      0.44863D+01
                0.11133D+00
                                            0.11111D+00                 0.22222D+00                 0.22177D+00
2*0.18000D+02
 *                            -.44506D+04
                                                          0.18000D+02                 -.22032D+04
                0.11111D+00
                                            0.11133D+00                 0.22177D+00
3*0.27000D+02
 *                            0.27027D+02                 0.27054D+02
                0.37037D+02
                                            0.36670D+02
4*0.27027D+02
 *                            0.24300D+02
                0.36670D+02
5*0.27054D+02


 *-.86736D-18
 *              -.11574D+15
 *-.86412D-14
 *                            -.86412D-14
                0.11618D+15
 *-.33719D-16                               0.11618D+15
                              -.33719D-16
                                                          -.33719D-16



 *
                -.21763D+15
 *-.46287D-14                               -.21763D+15                 -.21763D+15
                              -.46287D-14
 *                                                        -.46287D-14                 -.46287D-14
                0.21874D+15
 *-.57137D-16                               0.21874D+15                 0.21874D+15
                              -.57137D-16
 *                                                        -.57137D-16
                0.21419D+15
 *0.46115D-14                               0.21419D+15
                              0.46115D-14
 *
                -.21542D+15
 *-.30466D-16
```

Chapitre 2 Le f-algorithme

INTRODUCTION

L'algorithme de THIELE [5] permet d'obtenir les fractions rationnelles d'interpolation sous la forme de convergents successifs d'une fraction continue à partir d'un tableau, le tableau des différences réciproques (D.R).
Mais la construction de ce tableau n'est pas toujours possible : cela correspond au cas où certaines D.R de ce tableau ne sont pas définies ; les différences non définies étant alors localisées à l'intérieur de certains blocs (non nécessairement carrés).
L'algorithme de THIELE [5] ne permet pas alors de calculer les D.R situées au delà d'un bloc singulier.
F. CORDELLIER [6] a présenté une variante qui repose sur les transformations homographiques, qui permet de calculer les D.R extérieures aux blocs singuliers et par suite les fractions continues d'interpolation.

Nous présentons ici une mise en oeuvre du ρ-algorithme à l'aide des règles d'inversion de F. CORDELLIER [6].

Différences réciproques

Définition

Soient $(n+1)$ couples $c_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $(i = 0, 1, .., n)$ on associe :

$$f_{-1}^{(i)} = 0$$

$$f_0^{(i)} = y_i \qquad i = 0, 1, .., n.$$

$$f_1^{(i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{f_0^{(i+1)} - f_0^{(i)}}$$

$$f_2^{(i)} = f_0^{(i+1)} + \frac{x_{i+2} - x_i}{f_1^{(i+1)} - f_1^{(i)}}$$

$$\boxed{f_k^{(i)} = f_{k-2}^{(i+1)} + \frac{x_{i+k} - x_i}{f_{k-1}^{(i+1)} - f_{k-1}^{(i)}} \qquad i, k = 0, 1, ..}$$

Tableau des différences progressives.

Les différences progressives $f_i^{(k)}$ sont rangées dans un tableau à double entrée à partir de $f_0^{(0)}$.

$$
\begin{array}{llll}
f_0^{(0)} & & & \\
 & f_1^{(0)} & & \\
f_0^{(1)} & & f_2^{(0)} & \\
 & f_1^{(1)} & & f_3^{(0)} \\
f_0^{(2)} & & f_2^{(1)} & \\
 & f_1^{(2)} & & f_3^{(1)} \\
f_0^{(3)} & & f_2^{(3)} & \\
 & f_1^{(3)} & & \\
f_0^{(4)} & & & \\
\vdots & \vdots & & \\
 & f_1^{(n-1)} & & \\
f_0^{(n)} & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
f_{n-2}^{(0)} & & \\
 & f_{n-1}^{(0)} & \\
f_{n-2}^{(1)} & & f_n^{(0)} \\
 & f_{n-1}^{(1)} & \\
f_{n-2}^{(2)} & &
\end{array}
$$

Les différences réciproques $f_k^{(i)}$ sont des fonctions symétriques des couples (x_i, y_i) ; (x_{i+1}, y_{i+1}), ..., (x_{i+k}, y_{i+k}).

Les $f_k^{(i)}$ s'expriment au moyen d'un quotient de 2 déterminants. [26]

$$
\frac{\begin{vmatrix}
1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^k & y_i & y_i x_i & \cdots & y_i x_i^k \\
1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \cdots & x_{i+1}^k & y_{i+1} & y_{i+1} x_{i+1} & \cdots & y_{i+1} x_{i+1}^k \\
 & & & & & & & & \\
1 & x_{i+2k} & x_{i+2k}^2 & \cdots & x_{i+2k}^k & y_{i+2k} & y_{i+2k} x_{i+2k} & \cdots & y_{i+2k} x_{i+2k}^k \\
0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & 0
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^k & y_i & y_i x_i & \cdots & y_i x_i^k \\
1 & x_{i+1} & x_{i+2k}^2 & \cdots & x_{i+1}^k & y_{i+1} & y_{i+1} x_{i+1} & \cdots & y_{i+1} x_{i+1}^k \\
 & & & & & & & & \\
1 & x_{i+2k} & x_{i+2k}^2 & \cdots & x_{i+2k}^k & y_{i+2k} & y_{i+2k} x_{i+2k} & & y_{i+2k} x_{i+2k}^k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1
\end{vmatrix}}
$$

$$
{}_{k+1}^{i} = \frac{\begin{vmatrix}
1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{k+1} & y_i & y_i x_i & \cdots & y_i x_i^{k-1} \\
1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \cdots & x_{i+1}^{k+1} & y_{i+1} & y_{i+1} x_{i+1} & \cdots & y_{i+1} x_{i+1}^{k-1} \\
 & & & & & & & & \\
1 & x_{i+2k+1} & x_{i+2k+1}^2 & \cdots & x_{i+2k+1}^{k+1} & y_{i+2k+1} & y_{i+2k+1} x_{i+2k+1} & \cdots & y_{i+2k+1} x_{i+2k+1}^{k-1}
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & x_i & x_i^2 & x_i^k & y_i & y_i x_i & y_i x_i^k \\
1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & x_{i+1}^k & y_{i+1} & y_{i+1} x_{i+1} & y_{i+1} x_{i+1}^k \\
 & & & & & & \\
1 & x_{2k+i+1} & x_{i+2k+1}^2 & x_{i+2k+1}^k & y_{i+2k+1} & & y_{i+2k+1} x_{i+2k+1}^k
\end{vmatrix}}
$$

$\rho_{2k}^{(i)}$ est la valeur en $x = \infty$ de la fraction rationnelle de degré $[k/k]$ qui interpole les $(2k+1)$ couples $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \ldots, (x_{i+2k}, y_{i+2k})$.

$\rho_{2k-1}^{(i)}$ est la valeur en $x = \infty$ du rapport de la fraction rationnelle

sur x, de degré $\lfloor k/k-1 \rfloor$ qui interpole les $2k-2$ couples.
(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), ..., (x_{i+2k-1}, y_{i+2k-1}).

d) Ces différences réciproques servent à calculer la fraction continue d'interpolation de Thiele (voir II,1,1)

Les règles singulières

La mise en oeuvre du ε-algorithme conduit à des erreurs de calcul notables qui nuisent beaucoup à son efficacité dès que deux ou plusieurs différences réciproques consécutives d'une même colonne deviennent voisines.
Les règles singulières de F-Cordellier [4] consistent à inverser les valeurs infinies et les valeurs qui les encadrent et de calculer à partir du tableau inverse les valeurs ~~de valeurs~~ "indéterminées" situées au delà d'un bloc singulier qu'on ne peut pas calculer en appliquant la règle du losange classique de Thiele [5]
Bien que ces règles soient utilisables pour un nombre quelconque de valeurs voisines, on les présente sur un exemple avec 3 valeurs voisines.

indéterminées" si on applique la règle classique du losange.

Les calculs [illegible] que $f_k^{(1+1)}$, $f_k^{(1+2)}$ et $f_k^{(1+\dots)}$ sont "voisins" d'une valeur isolée $\neq \infty$, alors que $f_{k-2}^{(1+2)}$, $f_{k-2}^{(1+3)}$, $f_{k-2}^{(1+4)}$, $f_k^{(1)}$, $f_k^{(1+4)}$, $f_{k+2}^{(1-1)}$ et $f_{k+2}^{(1+3)}$ en sont "éloignés".
Alors $f_{k+2}^{(1+1)}$ et $f_{k+2}^{(1+2)}$ sont voisins de [illegible] $f_{k-1}^{(1+2)}$, $f_{k-1}^{(1+3)}$, $f_{k+1}^{(1)}$, $f_{k+1}^{(1+3)}$, $f_{k+3}^{(1+1)}$ et $f_{k+3}^{(1+3)}$ en sont éloignés. De même on admet que $f_{k+2}^{(1-1)}$ et $f_{k+2}^{(1+\dots)}$ se calculent sans problème.
On se donne une transformation homographique A_1 appliquant u_1 [illegible] (par exemple la inversion de pôle u_1) [illegible] on définit un nouveau tableau ${}^1f_\ell^{(j)}$ dont les éléments encadrés dans le schéma (page 44) seront les transformés par A_1 des éléments homologues du tableau initial : Les valeurs ${}^1f_{k-1}^{(1+2)}$, ${}^1f_{k-1}^{(1+3)}$, ${}^1f_{k+1}^{(1)}$, ${}^1f_{k+1}^{(1+3)}$, ${}^1f_{k+3}^{(1-1)}$ et ${}^1f_{k+3}^{(1+2)}$ seront éloignées de u_1 tandis que ${}^1f_{k+1}^{(1+1)}$ et ${}^1f_{k+1}^{(1+2)}$ en seront "voisins". Si nous posons ${}^1f_k^{(1+1)} = \alpha_1$ (par exemple $\alpha_1 = 0$), la règle du losange nous permet de calculer ${}^1f_k^{(1+2)}$, ${}^1f_k^{(1-3)}$, ${}^1f_{k+2}^{(1)}$ et ${}^1f_{k+2}^{(1+2)}$ qui seront "éloignés" de ∞, et ${}^1f_{k+2}^{(1+1)}$ qui en sera "voisin". On peut calculer ${}^1f_{k+3}^{(1)}$ et ${}^1f_{k+3}^{(1+1)}$ ("voisins" de u_1) puis ${}^1f_{k+4}^{(1-1)}$ et ${}^1f_{k+4}^{(1+1)}$ ("éloignés" de u_1) mais le calcul de ${}^1f_{k+4}^{(1)}$ est à proscrire (perte de précision par cancellation).
On se donne alors une seconde transformation homographique A_2 appliquant ∞ en $u_2 \neq \infty$

[illegible] A_1) et on obtient le 3e tableau ${}^{2}f_k^{(1)}$ dont les éléments [illegible] dans le tableau (page 44) sont des transformés par [illegible] [illegible] de ${}^{1}f_k^{(1)}$. Si nous posons ${}^{2}f_{k+}$ [illegible] (par exemple $x = 0$), on peut alors calculer ${}^{2}f_{k+2}^{(1)}$ avec [illegible] [illegible]. Il suffit alors de [illegible] ${}^{1}f_{k+4}^{(1)} = A_2^{-1}\left({}^{2}f_{..}^{(1)}\right)$ pour [illegible] ${}^{3}f_{k+5}^{(1)}$ et ${}^{1}f_{k+5}^{(1)}$ (au voisinage de u_1) pour revenir au tableau initial par:

$$f_{k+3}^{(1)} = A_1^{-1}\left({}^{1}f_{k+3}^{(1)}\right)$$

$$f_{k+3}^{(1+1)} = A_1^{-1}\left({}^{1}f_{k+3}^{(1+1)}\right)$$

$$f_{k+3}^{(1-1)} = A_1^{-1}\left({}^{1}f_{k+5}^{(1-1)}\right)$$

$$f_{k+5}^{(1)} = A_1^{-1}\left(f_{k+5}^{(1)}\right)$$

On complètera alors le tableau initial en appliquant la règle du losange.

(on peut prendre $A_2 = A_1$) et on définit un 3ème tableau ${}^2f_l^{(i)}$ dont les éléments encadrés dans le schéma (page 44) sont des transformés par A_2 des éléments homologues de ${}^1f_l^{(i)}$. Si nous posons ${}^2f_{k+1}^{(i+1)} = \alpha_2 \neq \infty$ (par exemple $\alpha_2 = 0$), on peut alors calculer ${}^2f_{k+2}^{(i)}$ avec une bonne précision. Il suffit alors de prendre ${}^1f_{k+4}^{(i)} = A_2^{-1}\left({}^2f_{k+4}^{(i)}\right)$ pour calculer ${}^1f_{k+5}^{(i-1)}$ et ${}^1f_{k+5}^{(i)}$ (non voisins de u_1) puis de revenir au tableau initial par :

$$f_{k+3}^{(i)} = A_1^{-1}\left({}^1f_{k+3}^{(i)}\right)$$

$$f_{k+3}^{(i+1)} = A_1^{-1}\left({}^1f_{k+3}^{(i+1)}\right)$$

$$f_{k+5}^{(i-1)} = A_1^{-1}\left({}^1f_{k+5}^{(i-1)}\right)$$

$$f_{k+5}^{(i)} = A_1^{-1}\left(f_{k+5}^{(i)}\right)$$

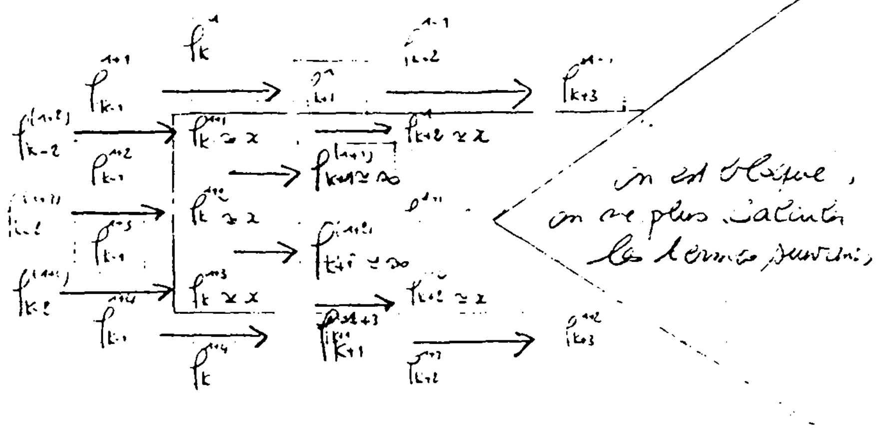
On complètera alors le tableau initial en appliquant la règle du losange.

~~I 48~~ 14
49bis

Présentation - Introduction de l'exemple.

Figure n° 5

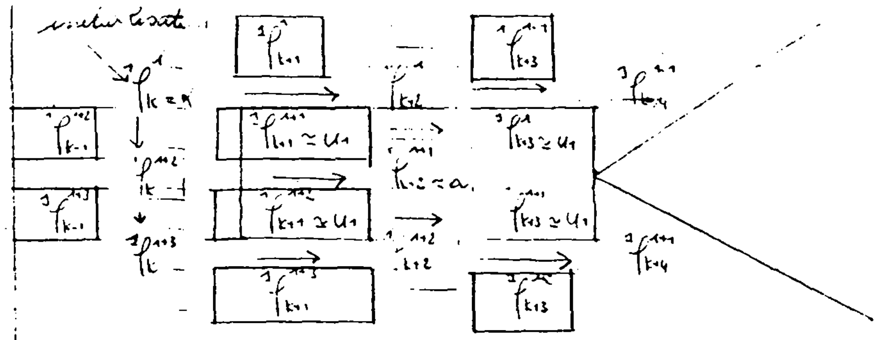
on inverse



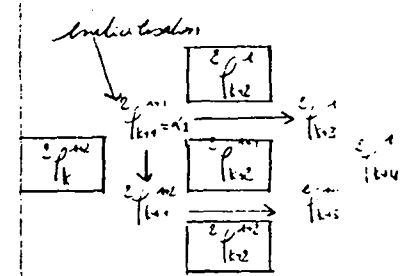
on est bloqué, on ne plus calculer les termes suivants

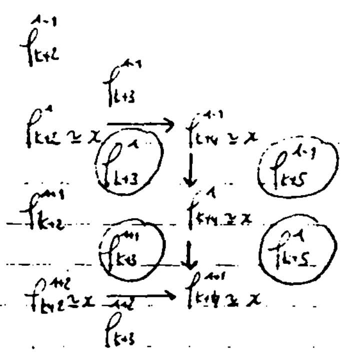
Les termes encadrés sont à inverser

on inverse

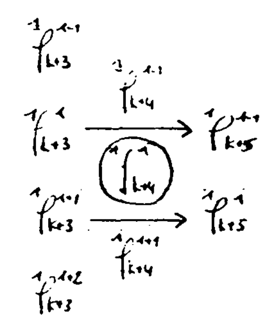


on est bloqué, on ne plus inverser. Il faut inverser les termes encadrés.

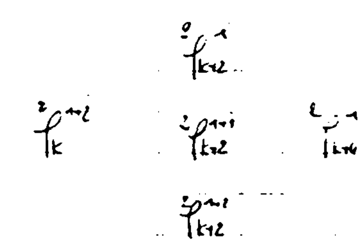




Les termes entourés sont calculés par inversion. Les flèches indiquent la manière dont sont appliquées les règles du losange.



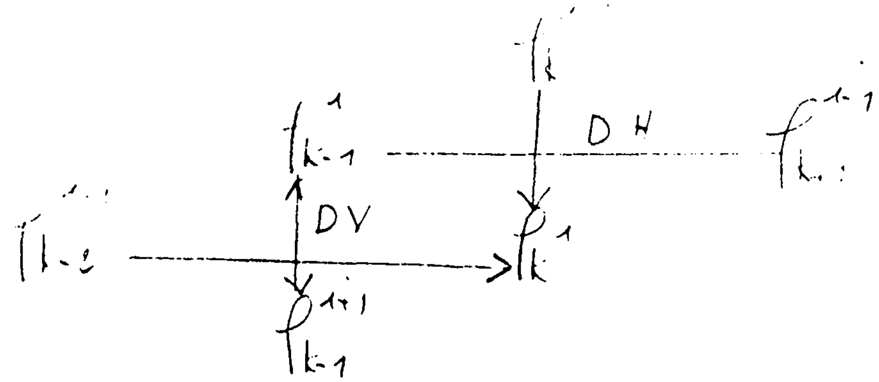
inversion retour



inversion retour

2-4 Description de la programmation du f-algorithme avec règles singulières

Nous avons signalé [illegible] la mise en œuvre que nous avons employée pour l'ε-algorithme peut être généralisée aux algorithmes de losange.
C'est cette variante que nous utilisons pour le f-algorithme qui est un algorithme de losange. Le programme utilisé pour le f algorithme est celui de l'ε-algorithme qui est décrit dans la 1ère partie, dans lequel nous avons remplacé les relations de losange de l'ε-algorithme par celles du f-algorithme.
Signalons que les formes des singularités du f-algorithme sont quelconques.
(voir exemples 5,6)
Rappelons les relations de losange du f-algorithme.
Dans la table des D.R, considérons les éléments des losanges dont f_k^1 est sommet, situés au dessus de la diagonale montante contenant cet f_k^1.



Introduisons les différences :

$$DV = f_{k-1}^{i+1} - f_{k-1}^{i}$$

$$DH = f_{k+1}^{i-1} - f_{k-1}^{i}$$

L'élément f_k^i peut se calculer au moyen de 2 relations distinctes :

* <u>Relation losange horizontale.</u>

$$f_k^i = f_{k-2}^{i+1} + (x_{i+k} - x_i) / DV$$

* <u>Relation losange verticale.</u>

$$f_k^i = f_k^{i-1} + (x_{i+k} - x_{i-1}) / DH.$$

Annexe deux programmes en fortran.

```
C PROGRAMME PRINCIPAL DE LA TABLE DES DIFFERENCES RECIPROQUES
C UTILISANT LES PROPRIETES D'INVARIANCES HOMOGRAFIQUES
C
C
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),T2(30,30),T4(30,30)
      DIMENSION T3(30,30),X(30),F(30),P(30),Q(30),FR(60)
      DIMENSION PR(30),Y(30),CP(60),TB(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,TB,P,CP,PR,T1,T2,T3,T4,DH,DV,Z1
      DOUBLE PRECISION X,Y,F,FR
      REAL INF,S0
      LOGICAL SING,LOSV,SINGTG
      SING=.FALSE.
      LOSV=.FALSE.
      SINGTG=.FALSE.
C
C*********************************************************************
C**LECTURE DES DONNEES ET INITIALISATION**
C*********************************************************************
C
      CALL LECT(N,X,F,S0,INF,X0,K,T)
C**CALCUL DE LA TABLE DES DIFFERENCES RECIPROQUES**
C*********************************************************************
C
 1000  CONTINUE
C**DEBUT DE LA BOUCLE**
       DO 10 I=1,N-K+2
       DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF(I.LT.2) GOTO 19
      DH=T(K+1,I-1)-T(K-1,I)
      IF((.NOT.LOSV).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 19
      IF((ABS(T(K+1,I-1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF)) GOTO 11
      CALL INV(DH,Z1)
      T(K,I)=T(K,I-1)+(X(I+K-2)-X(I-1))*Z1
      GOTO 10
   19 CONTINUE
      IF((ABS(T(K-1,I+1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF)) GOTO 11
       CALL INV(DV,Z1)
       T(K,I)=T(K-2,I+1)+(X(I+K-2)-X(I))*Z1
       IF(ABS(DV).LT.S0) GOTO 12
      GOTO 10
   12 CONTINUE
      SING=.TRUE.
      GOTO 10
  11   CONTINUE
      T(K,I)=T(K-2,I+1)
   10 CONTINUE
C**FIN DE LA BOUCLE**
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001
C
      IF(LOSV) GOTO 31
      IF(.NOT.SING) GOTO 4
      LOSV=.TRUE.

       IF(K.EQ.N) GOTO 4
      K0=K
      CALL TAB(K,N,X,X0,T,S0,INF,T2,SINGTG)
       K=K0
      IF(SINGTG) GOTO 1005
 1002  CONTINUE
      DO 50 I=1,N-K
      CALL INV(T2(K+2,I),T(K+2,I))
   50 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N-1)) GOTO 1002
      K=K0+1
      GOTO 1000
  4     CONTINUE
       K=K+1
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
       GOTO1001
C
   31 CONTINUE
      K=K+2
 1001 IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      CONTINUE
C********************************************************************
CIMPRESSION DE LA TABLE DES DIFFERENCES RECIPROQUES
      CALL IMP(N,X,T)
C********************************************************************
C
       WRITE(11,37)
       WRITE(11,37)
   37  FORMAT(/)
C********************************************************************
C***  CALCUL DE LA FRACTION CONTINUE   ***
      CALL FCONT(N,X,S0,INF,T,FR)
      CALL PNAT(N,X,S0,INF,T,TB,FR,CP)
C********************************************************************
      STOP
 1005  CONTINUE
      WRITE(11,500)
  500  FORMAT(1X,'ARRET PROVOQUE PAR: LE PROBLEME NECESSITE PLUS DE 5
     *INVERSIONS')
      STOP
      END
```

```
C
      SUBROUTINE TAB(K,N,X,X0,T1,S0,INF,T,SINGTG)
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),X(30),T4(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,DH,DV,Z1,T4,X,S
      REAL INF,S0
      LOGICAL SING,LOSV,SINGTG
      SING=.FALSE.
      LOSV=.FALSE.
      SINGTG=.FALSE.
C**INVERSION DES COLONNES K ET K-2 DU TABLEAU INITIAL**
      DO 100 I=1,N-K+2
      CALL INV(T1(K,I),T(K,I))
        CALL INV(T1(K-2,I+1),T(K-2,I+1))
  100 CONTINUE
C**FIN D'INVERSION DES CLONNES K ET K-2**
      DO 112 I=1,N-K-2
      IF((ABS(T(K,I)-T(K,I+1)).LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+1)-T(K,I+2)).
     &LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+2)-T(K,I+3)).LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+3)-
     &T(K,I+4)).LT.S0)) GOTO 1004
  112 CONTINUE
C*********************************************
C**CALCUL DE LA COLONNE K-1 PAR LOSANGE VERTICAL**
      T(K-1,1)=X0
      DO 110 I=1,N-K+1
      DH=T(K,I)-T(K-2,I+1)
      IF((ABS(DH).LT.S0).OR.(ABS(T(K,I)).GT.INF)) GOTO 111
      CALL INV(DH,Z1)
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)+(X(K+I-2)-X(I))*Z1
      GOTO 113
  111 CONTINUE
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)
  113 CONTINUE
  110 CONTINUE
C**FIN DE CALCUL DE LA CLONNE K-1**
C************************************************
C**CALCUL DE LA COLNNE K**
      K=K+1
 1000  CONTINUE
       DO 10 I=1,N-K+2
       DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF(I.LT.2) GOTO 19
      DH=T(K+1,I-1)-T(K-1,I)
      IF((.NOT.LOSV).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 19
      IF((ABS(T(K+1,I-1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF)) GOTO 11
      CALL INV(DH,Z1)
      T(K,I)=T(K,I-1)+(X(I+K-2)-X(I-1))*Z1
      GOTO 10
   19 CONTINUE
      IF((ABS(DV).LT.S0).AND.(ABS(T(K-2,I+1)).GT.INF)) GOTO 14
      IF((ABS(T(K-1,I+1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF)) GOTO 11
       CALL INV(DV,Z1)
       T(K,I)=T(K-2,I+1)+(X(I+K-2)-X(I))*Z1
      IF(ABS(DV).LT.S0) GOTO 12
      GOTO 10
   12 CONTINUE
      SING=.TRUE.
      GOTO 10

   14 CONTINUE
      K0=K
        CALL TAB3(K,I,X,T,S)
      K=K0
      CALL INV(S,Z1)
      T(K,I)=Z1
      GOTO 10
   11  CONTINUE
      T(K,I)=T(K-2,I+1)
   10   CONTINUE
C**FIN DE CALCUL DE LA COLONNE K**
C     IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001

      IF(LOSV) GOTO 31
      IF(.NOT.SING) GOTO 4
      LOSV=.TRUE.
       IF(K.EQ.N) GOTO 4
      K0=K
      CALLTAB1(K,N,X,X0,T,S0,INF,T4,SINGTG)
       K=K0
 1002  CONTINUE
      DO 50 I=1,N-K
   50 CALL INV(T4(K+2,I),T(K+2,I))
       CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N-1)) GOTO 1002
      K=K0+1
      GOTO 1000
    4   CONTINUE
       K=K+1
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      RETURN
   31 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      GOTO 1001
 1004 CONTINUE
      SINGTG=.TRUE.
 1001 CONTINUE
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE TAB1

```
C TABLEAU INVERSE NUMERO 2
C
      SUBROUTINE TAB1(K,N,X,X0,T1,S0,INF,T,SINGTG)
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),X(30),T3(30,30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,T3,DH,DV,Z1,X,S
      REAL INF,S0
       LOGICAL SING,LOSV,SINGTG
      SING=.FALSE.
      LOSV=.FALSE.
      SINGTG=.FALSE.
      DO 100 I=1,N-K+2
      CALL INV(T1(K,I),T(K,I))
        CALL INV(T1(K-2,I+1),T(K-2,I+1))
  100 CONTINUE
      DO 112 I=1,N-K-1
      IF((ABS(T(K,I)-T(K,I+1)).LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+1)-T(K,I+2)).
     &LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+2)-T(K,I+3)).LT.S0)) GOTO 1004
  112 CONTINUE
      T(K-1,1)=X0
      DO 110 I=1,N-K+1
      DH=T(K,I)-T(K-2,I+1)
      IF((ABS(DH).LT.S0).OR.(ABS(T(K,I)).GT.INF)) GOTO 111
      CALL INV(DH,Z1)
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)+(X(K+I-2)-X(I))*Z1
      GOTO 113
  111 CONTINUE
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)
  113 CONTINUE
  110 CONTINUE
      K=K+1
 1000  CONTINUE
       DO 10 I=1,N-K+2
       DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF(I.LT.2) GOTO 19
      DH=T(K+1,I-1)-T(K-1,I)
      IF((.NOT.LOSV).OR.(ABS(DH).LT.S0)) GOTO 19
      IF((ABS(T(K+1,I-1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF)) GOTO 11
      CALL INV(DH,Z1)
      T(K,I)=T(K,I-1)+(X(I+K-2)-X(I-1))*Z1
      GOTO 10
   19 CONTINUE
      IF((ABS(DV).LT.S0).AND.(ABS(T(K-2,I+1)).GT.INF)) GOTO 14
      IF((ABS(T(K-1,I+1)).GT.INF).AND.(ABS(T(K-1,I)).GT.INF)) GOTO 11
       CALL INV(DV,Z1)
       T(K,I)=T(K-2,I+1)+(X(I+K-2)-X(I))*Z1
      IF(ABS(DV).LT.S0) GOTO 12
      GOTO 10
   12 CONTINUE
      SING=.TRUE.
      GOTO 10
   14 CONTINUE
      K0=K
        CALL TAB3(K,I,X,T,S)
      K=K0
      CALL INV(S,Z1)
      T(K,I)=Z1
      GOTO 10
   11  CONTINUE

      T(K,I)=T(K-2,I+1)
   10   CONTINUE
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001
C
      IF(LOSV) GOTO 31
      IF(.NOT.SING) GOTO 4
      LOSV=.TRUE.
       IF(K.EQ.N) GOTO 4
      K0=K
      CALL TAB2(K,N,X,X0,T,S0,INF,T3,SINGTG)
       K=K0
 1002  CONTINUE
      DO 50 I=1,N-K
      CALL INV(T3(K+2,I),T(K+2,I))
   50  CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N-1)) GOTO 1002
      K=K0+1
      GOTO 1000
    4   CONTINUE
       K=K+1
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      RETURN
   31 CONTINUE
      K=K+2
      IF(K.LE.(N+1)) GOTO 1000
      GOTO 1001
 1004 CONTINUE
      SINGTG=.TRUE.
 1001 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C TABLEAU INVERSE NUMERO 3
C
      SUBROUTINE TAB2(K,N,X,X0,T1,S0,INF,T,SINGTG)
      DIMENSION T(30,30),T1(30,30),X(30)
      DOUBLE PRECISION T,T1,DH,DV,Z1,X,S
      REAL INF,S0
      LOGICAL SINGTG
      SINGTG=.FALSE.
      DO 100 I=1,N-K+2
      CALL INV(T1(K,I),T(K,I))
        CALL INV(T1(K-2,I+1),T(K-2,I+1))
  100 CONTINUE
      DO 112 I=1,N-K
      IF((ABS(T(K,I)-T(K,I+1)).LT.S0).AND.(ABS(T(K,I+1)-T(K,I+2)).LT
     #.S0)) GOTO 1004
  112 CONTINUE
      T(K-1,1)=X0
      DO 110 I=1,N-K+1
      DH=T(K,I)-T(K-2,I+1)
      IF((ABS(DH).LT.S0).OR.(ABS(T(K,I)).GT.INF)) GOTO 111
      CALL INV(DH,Z1)
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)+(X(K+I-2)-X(I))*Z1
      GOTO 113
  111 CONTINUE
      T(K-1,I+1)=T(K-1,I)
  113 CONTINUE
110   CONTINUE
      K=K+1
1000   CONTINUE
      DO 10 I=1,N-K+2
      DV=T(K-1,I+1)-T(K-1,I)
      IF((ABS(DV).LT.S0).AND.(ABS(T(K-2,I+1)).GT.INF)) GOTO 12
       CALL INV(DV,Z1)
      T(K,I)=T(K-2,I+1)+(X(I+K-2)-X(I))*Z1
      GOTO 10
12     CONTINUE
      K0=K
        CALL TAB3(K,I,X,T,S)
      K=K0
      CALL INV(S,Z1)
      T(K,I)=Z1
 10    CONTINUE
      IF(K.GE.(N+1)) GOTO 1001
      K=K+1
      GOTO 1000
 1004 CONTINUE
      SINGTG=.TRUE.
 1001 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C TABLEAU INVERSE NUMERO 4
C
        SUBROUTINE TAB3(K,I,X,T,S)
      DOUBLE PRECISION T,R1,R2,R3,R,S,Z,Z1,X,S1,S2,S3
      DIMENSION T(30,30),X(30)
      CALL INV(T(K-2,I),R1)
      CALL INV(T(K-2,I+1),R2)
      CALL INV(T(K-2,I+2),R3)
      CALL INV(T(K-4,I+2),R)
      Z=R2-R1
      CALL INV(Z,Z1)
      S1=0+(X(I+K-3)-X(I))*Z1
      Z=R2-R
      CALL INV(Z,Z1)
      S2=0+(X(I+K-3)-X(I+1))*Z1
      Z=R3-R2
      CALL INV(Z,Z1)
      S3=S2+(X(I+K-2)-X(I+1))*Z1
      Z=S3-S1
      CALL INV(Z,Z1)
      S=R2+(X(I+K-2)-X(I))*Z1
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE LECT

```
      SUBROUTINE LECT(N,Y,F,SO,INF,X0,K,T)
      DIMENSION T(30,30),F(30),X(30)
      DOUBLE PRECISION T,X,F
      REAL INF,SO
C DEBUT DE LECTURE
      READ(10,27) N
   27 FORMAT(I3)
      READ(10,25) (X(I),I=1,N)
   25 FORMAT(3F10.6)
      READ(10,26) (F(J),J=1,N)
   26 FORMAT(3F10.6)
      READ(10,35) SO
  35   FORMAT(F10.7)
CFIN DE LECTURE
C
C*******INITIALISATION*******
C

      DO 251 I=1,N
      WRITE(11,252) I,X(I),I,F(I)
  252 FORMAT(1X,'X(',I2,')=',D23.16,5X,'F(',I2,')=',D23.16)
  251 CONTINUE
      WRITE(11,7) SO
    7 FORMAT(1X,3HSO=,F10.7)
        DO120 I=1,N
        T(2,I)=F(I)
120   T(1,I)=0
       CONTINUE
      WRITE(11,37)
      WRITE(11,37)
   37 FORMAT(/)
      INF=10.**6
        K=3
       X0=0
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE INV

```
      SUBROUTINE INV(A,B)
      DOUBLE PRECISION A,B
      IF(A.NE.0) GOTO1
      B=1.7*(10.**35)
1     GOTO 2
        CONTINUE
      B=1/A
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE IMP(N,X,T)
      DOUBLE PRECISION T,X
      DIMENSION X(30),T(30,30)
      IC=0
      KO=5
      NF=N
  212 CONTINUE
      I=2
 200  CONTINUE
      J=I/2
      IP=I-2*J
      IF((J.GE.KO).AND.(J.LE.(NF-KO)))GOTO 206
      IT=J
      GOTO 207
  206 CONTINUE
      IT=KO
 207  CONTINUE
      IF((I.GT.NF).AND.(J.GT.(NF-KO)))GOTO 201
      GOTO 204
 201  CONTINUE
      IF(IP.NE.0) GOTO 208
      IT=NF-J+1
      GOTO 209
  208 CONTINUE
      IT=NF-J
 209  CONTINUE
  204  CONTINUE
      IF(IC.GT.2) GOTO 210
      IF(IP.EQ.0) GOTO 202
      WRITE(11,620) (T(IC+2*L+1,J-L+1),L=1,IT)
      GOTO 205
  202  CONTINUE
      WRITE(11,610) J,X(J),(T(2*L,J-L+1),L=1,IT)
      GOTO 205
  210 CONTINUE
      IF(IP.NE.0) GOTO 211
      WRITE(11,720) (T(IC+2*L,J-L+1),L=1,IT)
      GOTO 205
 211   CONTINUE
      WRITE(11,620) (T(IC+2*L+1,J-L+1),L=1,IT)
  205 CONTINUE
      I=I+1
      IF(I.LE.2*NF) GOTO 200
      IC=IC+10
      NF=NF-10
      WRITE(11,37)
  37  FORMAT(/)
      IF(IC.LE.N) GOTO 212
 610   FORMAT(1X,I3,1H*,D11.5,5X,5(D11.5,11X))
  620 FORMAT(4X,1H*,16X,5(11X,D11.5))
  720 FORMAT(4X,1H*,16X,5(D11.5,11X))
      RETURN
      END
```

Conclusion :

La mise en oeuvre que nous proposons à l'[illegible] algorithme [illegible] algorithme ne tient pas compte des formes des blocs singuliers. Elle peut être généralisée pour tous les algorithmes de [illegible].

Cette variante fournit une stabilité numérique assez acceptable.

Mais elle prend beaucoup de place et augmente notablement la complexité du calcul.

[illegible] partie : [illegible]

la fraction continue de Thiele

en [illegible]

INTRODUCTION

L'algorithme de Thiele [5] permet d'obtenir les fractions rationnelles d'interpolation sous la forme de convergents successifs d'une fraction continue à partir d'un tableau, le tableau des différences réciproques.

Mais la construction de ce tableau n'est pas toujours possible : cela correspond au cas où certaines différences réciproques de ce tableau ne sont pas définies, (les différences non définies étant alors localisées à l'intérieur de certains blocs non nécessairement carrés). L'algorithme de Thiele ne permet pas alors de calculer les différences réciproques situées au delà d'un bloc singulier.

Pour améliorer la fiabilité de cet algorithme Werner [7] a proposé un nouvel algorithme qui repose essentiellement sur une renumérotation des points d'interpolation tandisque F. Cordellier [3] a présenté une variante qui permet de calculer les différences réciproques extérieures aux blocs singuliers et par suite les fractions continues en contournant les blocs singuliers (ce ~~chose~~ qu'on ne sait pas faire en général).

Le travail qui est présenté représente une nouvelle étape dans l'amélioration des conditions de mise en oeuvre de cet algorithme : le tableau des différences réciproques étant calculées au moyen de la variante ci-dessus, on construit la fraction continue d'interpolation qui traverse directement les blocs singuliers en respectant l'ordre naturel des données.

Chapitre : II-1 :

L'[illegible] [illegible] T[illegible]-[illegible]

II-1-1 Rappel de l'algorithme de Thiele II.3

On se donne $(n+1)$ couples de points $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, 1, \dots, n$.

L'algorithme de Thiele consiste à calculer une fraction rationnelle d'interpolation dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degrés respectifs $(n - [n/2])$ et $[n/2]$. Comment ?

1°) Calculer le tableau des différences réciproques, notées $\rho_k^{(i)}$.

2°) Construire une fraction continue avec les $\rho_k^{(i)}$.

Remarque :

Puisque $\rho_{2k}^{(i)}$ est la valeur en $x = \infty$ de la fraction rationnelle $R_{k/k}$ qui interpole f en $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+2k}$, on montre facilement que les valeurs $\rho_{2k}^{(i)}$ construites avec l'inversion $x_i = \frac{1}{t_i}$

représentent la valeur en α de la fraction rationnelle de degré k/k qui interpole f en $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+2k}$.

Principe de l'algorithme de Thiele

Supposons qu'on ait calculé le tableau $f_k^{(i)}$ des différences réciproques ...)

La fraction continue associée à ce tableau est :

$$R(x) = f_0^{(0)} + \frac{x-x_0 |}{| f_1^{(0)}} + \frac{x-x_1 |}{| f_2^{(0)} - f_0^{(0)}} + \dots$$

$$\frac{x-x_{k-1} |}{| f_k^{(0)} - f_{k-2}^{(0)}} + \frac{x-x_k |}{| f_{k+1}^{(0)} - f_{k-1}^{(0)}} + \dots + \frac{x-x_{n-1} |}{| f_n^{(0)} - f_{n-2}^{(0)}}$$

Liaison des convergents successifs.

Notons.

- P_k^j le numérateur de la fraction rationnelle de degré $(k-[k/2], [k/2])$ interpolant les couples $(x_{j+i}, f(x_{j+i}))$ pour $i = 0, 1, \dots, k$.

- Q_k^j le dénominateur de la fraction rationnelle de degré $(k-[k/2], [k/2])$ interpolant les couples $(x_{j+i}, f(x_{j+i}))$ pour $i = 0, 1, \dots, k$.

Relations de récurrence

Initialisation : $\begin{cases} P_0^{(0)} = f_0^{(0)} \\ P_{-1}^{(0)} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} Q_0^{(0)} = 1 \\ Q_{-1}^{(0)} = 0 \end{cases}$

Formule générale

$$\boxed{\begin{aligned} P_k^0 &= (f_k^0 - f_{k-2}^0)\, P_{k-1}^0 + (x - x_{k-1})\, P_{k-2}^0 \\ Q_k^0 &= (f_k^0 - f_{k-2}^0)\, Q_{k-1}^0 + (x - x_{k-1})\, Q_{k-2}^0 \end{aligned}}$$

pour $k \geq 1$

La Non réalisabilité de l'algorithme de Thiele

a) Notion de réalisabilité

Nous disons qu'un algorithme (travaillant avec une arithmétique exacte) est réalisable s'il fournit la solution de tout problème soluble et s'il permet de detecter ceux qui ne le sont pas.
Telle notion ne s'identifie pas avec la stabilité numérique qui concerne le contrôle des erreurs numériques ni avec la robustesse d'un programme qui assure à l'utilisateur la maîtrise du déroulement d'un programme quelles que soit les difficultés rencontrées.

b) Non solubilité de l'interpolation rationnelle

Le problème d'interpolation rationnelle n'a pas toujours une solution vérifiant les conditions imposées. En effet celle ci peut se présenter pour certains des points donnés sous la forme $\frac{0}{0}$ (ces points sont dits non atteignables [15])

Exemple :
Soit à déterminer la fraction rationnelle $R(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ qui interpole les points suivants :

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	1	2	2

Un calcul simple donne : $b_0 = 0$ et $a = 2c$ [illegible]

$$R(x) = 2x/x.$$

On vérifie que la fraction R interpole effectivement les points $(1,2)$ et $(2,2)$. Par contre, $R(0)$ est de la forme $0/0$ donc indéfini. Notons que la fraction simplifiée $R_1(x) = 2/1$ ne vérifie pas non plus $R(0) = 1$.
Le problème posé n'a donc pas de solution.

Cas général.
Pour résoudre le problème d'interpolation rationnelle initial.

$$(P/Q)(x_i) = f(x_i) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n$$

On résoud le problème modifié :

$$P(x_i) = (f \times Q)(x_i) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Ce problème modifié a toujours au moins une solution. Ceci ne veut pas dire que le système initial possède une solution : En effet s'il existe $x_{i0} \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tel que :

$$P(x_{i0}) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x_{i0}) = 0 \text{, alors}$$

$(P/\varphi)(x_{i0})$ se reduit a $\dfrac{0}{0}$.

La contrainte initiale $(P/\varphi)(x_{i0}) = f(x_{i0})$ n'est pas satisfaite alors que l'est la contrainte modifiée :

$$P(x_{i0}) = (f \times \varphi)(x_{i0}) = 0$$

Un tel point x_{i0} est dit non atteignable. Un problème peut évidemment comporter plusieurs points non atteignables.

c) La non réalisabilité de l'algorithme de Theil

[illegible] l'utilisation [illegible]

Les D R peuvent ne pas se calculer. Ces dernières sont localisées dans les blocs non nécessairement carrés. Pour les calculer nous utilisons la variante de F-Cordellier qui permet d'obtenir toute la table des D R calculables. Par contre, pour déterminer la F.C.I. il faut contourner les blocs singuliers, ce qu'on ne sait pas faire en général !

Les relations qui suivront sont destinées à résoudre ce problème.

Chapitre II – :

Nouvelles récoltes.

Rappelons la définition des différentes réciproques suivantes sous forme de produits de déterminants

$f_{2p}^{\smile}$, $f_{m}^{\smile}$, $f_{2}^{\smile}$, $f_{1}^{\smile}$ et $f_{3}^{\smile}$

$$\rho_{2p}^{0} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^p & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^p \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^p & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2p} & x_{2p}^2 & & x_{2p}^p & y_{2p} & y_{2p}x_{2p} & \cdots & y_{2p}x_{2p}^p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^p & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^p \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^p & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^p \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2p} & x_{2p}^2 & & x_{2p}^p & y_{2p} & y_{2p}x_{2p} & & y_{2p}x_{2p}^p \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\rho_{2}^{0} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & y_0x_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & y_1x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & y_2x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\rho_{2p+1}^{0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{p+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{p+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p+1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2p+1} & x_{2p+1}^2 & & x_{2p+1}^{p+1} & y_{2p+1} & y_{2p+1}x_{2p+1} & \cdots & y_{2p+1}x_{2p+1}^{p+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^p & y_0 & y_0x_0 & & y_0x_0^p \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^p & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^p \\ & & & & & & & & \\ 1 & x_{2p+1} & x_{2p+1}^2 & & x_{2p+1}^p & y_{2p+1} & y_{2p+1}x_{2p+1} & & y_{2p+1}x_{2p+1}^p \end{vmatrix}}$$

$$\rho_{1}^{0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix}}, \quad \rho_{3}^{0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \end{vmatrix}}$$

Introduisons maintenant les polynômes suivants :

P_{2p}^{0} , Q_{2p}^{0} , P_{2p+1}^{0} , Q_{2p+1}^{0}

P_{2}^{0} , Q_{2}^{0} , P_{1}^{0} , Q_{1}^{0} .

On note :

- $R_{2k}^{n} = \dfrac{P_{2k}^{n}}{Q_{2k}^{n}}$ la fraction rationnelle interpolant les points $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+2k}$ dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré $\leq k$

- $R_{2k+1}^{n} = \dfrac{P_{2k+1}^{n}}{Q_{2k+1}^{n}}$ la fraction rationnelle interpolant les points $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+2k+1}$ dont le numérateur est un polynôme de degré $\leq k+1$ et le dénominateur un polynôme de degré $\leq k$.

$$P_{2p}^{0} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{p} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{p} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{p} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2p} & \cdots & x_{2p}^{p} & y_{2p} & y_{2p}x_{2p} & \cdots & y_{2p}x_{2p}^{p} \\ 1 & x & \cdots & x^{p} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{p} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{p} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{p} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 1 & x_{2p} & & x_{2p}^{p} & y_{2p} & y_{2p}x_{2p} & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$Q_{2p}^{0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{p} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{p} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{p} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 1 & x_{2p} & \cdots & x_{2p} & y_{2p} & y_{2p}x_{2p} & \cdots & y_{2p}x_{2p}^{p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x & \cdots & x^{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{p} & y_0 & y_0x_0 & & y_0x_0^{p} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{p} & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_{2p} & \cdots & x_{2p}^{p} & y_{2p} & y_{2p}x_{2p} & & y_{2p}x_{2p}^{p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$P_2^{0} = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & y_0x_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & y_1x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & y_2x_2 \\ 1 & x & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & y_0x_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & y_1x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & y_2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = P_2^{0} x + \cdots$$

$$Q_{2p}^{0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & y_0x_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & y_1x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & y_2x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & y_0x_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & y_1x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & y_2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = x + \cdots$$

$$
P^0_{2p+1} = \frac{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{p+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^p \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^{p+1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^p \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2p+1} & \cdots & x_{2p+1}^{p} & y_{2p+1} & y_{2p+1}x_{2p+1} & \cdots & y_{2p+1}x_{2p+1}^p \\
1 & x & \cdots & x^{p+1} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{p+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^p \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^{p+1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^p \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\
1 & x_{2p+1} & \cdots & x_{2p+1}^{p} & y_{2p+1} & y_{2p+1}x_{2p+1} & \cdots & y_{2p+1}x_{2p+1}^p \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}}
$$

$$
P_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = x + \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{y_1 - y_0}
$$

$$
Q^0_{2p+1} = -\frac{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{p+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^p \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^{p+1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^p \\
 & & & & & & & \\
1 & x_{2p+1} & \cdots & x_{2p+1}^{p+1} & y_{2p+1} & y_{2p+1}x_{2p+1} & \cdots & y_{2p+1}x_{2p+1}^p \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x & \cdots & x^p
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{p+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^p \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^{p+1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^p \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2p+1} & & x_{2p+1}^{p+1} & y_{2p+1} & y_{2p+1}x_{2p+1} & \cdots & y_{2p+1}x_{2p+1}^p \\
0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}}
$$

$$
Q_1^0 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = P_1^0 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}
$$

Pour simplifier l'établissement des relations que nous avons en vue, il est commode d'introduire les déterminants de taille $(2k+1)$:
A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D, E_1, E_2.

et les déterminants de taille $2k$:
X_0^0, X_0^k, X_0^p avec $1 \leq p \leq k-1$.
Y_0^0, Y_0^k, Y_0^p avec $1 \leq p \leq k-1$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix} ; \quad A_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & x_1y_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ x_{2k+1} & x_{2k+1}^2 & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \end{vmatrix}$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} ; \quad B_2 = \begin{vmatrix} x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^k \\ x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & & & \\ \vdots & & & & & & \\ x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \end{vmatrix}$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} ; \quad C_2 = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & & & \\ \vdots & & & & & & \\ x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ x & \cdots & x^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad E_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^{k-1} \\ & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$E_2 = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\ & & & & & & \\ x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_0^0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ x_2 & & & x_2^k & y_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ x_{2k} & & & x_{2k}^k & y_{2k} & & & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$Y_0^0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{1 \leq p \leq k-1}{X_0^p} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{p-1} & x_1^{p+1} & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^{p-1} & x_{2k}^{p+1} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{1 \leq p \leq k-1}{Y_0^p} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{p-1} & y_1 x_1^{p+1} & y_1 x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^k & y_2 & & y_2 x_2^{p-1} & y_2 x_2^{p+1} & y_2 x_2^{k-1} \\ & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & - & y_{2k} x_{2k}^{p-1} & y_{2k} x_{2k}^{p+1} & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$X_0^k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{k-1} & y_1 & y_1 x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{k-1} & y_2 & \\ & & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & x_{2k}^{k-1} y_{2k} \end{vmatrix}$$

$$Y_0^k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & & y_1 x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^k & y_2 & y_2 x_1 & & y_2 x_2^{k-1} \\ & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \cdot & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}$$

Identité de Sylvester.

Etant donné : $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0\,k-1} & a_{0k} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & a_{1k} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2\,k-1} & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-1\,0} & a_{k-1\,1} & \cdots & a_{k-1\,k-1} & a_{k-1\,k} \\ a_{k0} & a_{k1} & \cdots & a_{k\,k-1} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

On a l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0\,k-1} & a_{0k} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-1\,0} & a_{k-1\,1} & \cdots & a_{k-1\,k-1} & a_{k-1\,k} \\ a_{k0} & a_{k1} & \cdots & a_{k\,k-1} & a_{kk} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & \cdots & a_{k-1\,k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0\,k-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,0} & a_{k-1\,1} & \cdots & a_{k-1\,k-1} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1\,k-1} \\ a_{20} & \cdots & a_{2\,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k0} & \cdots & a_{k\,k-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & & & a_{k-1\,k} \end{vmatrix}$$

II.2.8. Nouvelles relations

Proposition 1

Lorsqu'elles sont formées, les différences réciproques dépendant des couples $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ vérifient les relations suivantes :

Relation I :

$$P_k^{i+1} - P_k^{i} = P_{k-1}^{i+1} \times \left(\rho_k^{i+1} - \rho_k^{i} \right)$$

Relation II

$$P_{k+1}^{i} \times \left(\rho_k^{i+1} - \rho_k^{i} \right) = P_k^{i+1} \times (x - x_i) - P_k^{i} \times (x - x_{k+i+1})$$

Relation III

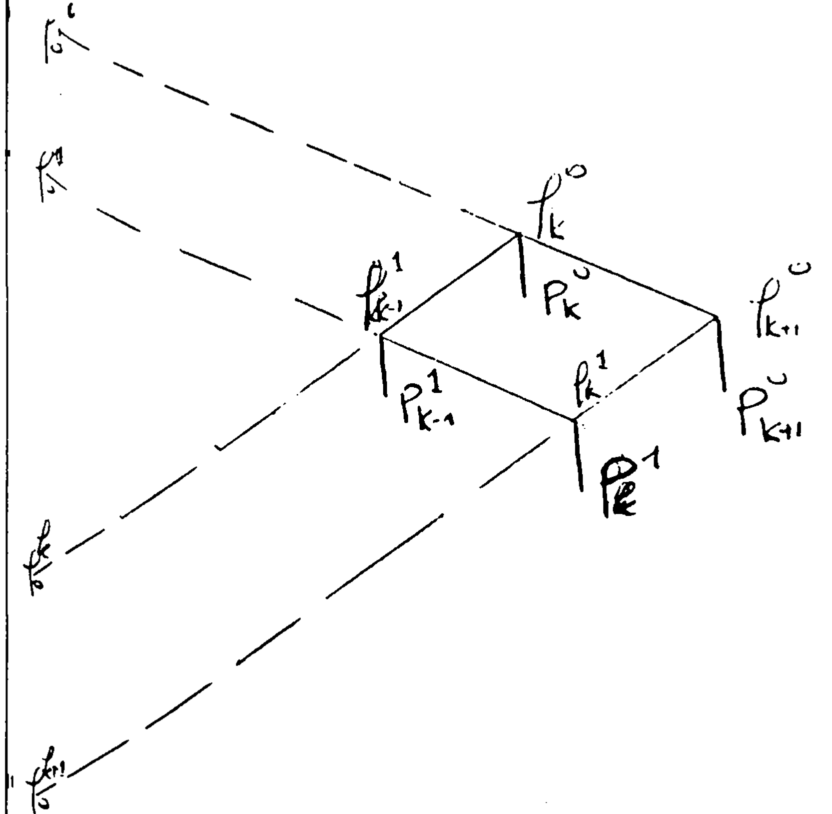
$$P_{k+1}^{i} = P_{k-1}^{i+1} \times (x - x_{k+i+1}) + P_k^{i+1} \times \left(\rho_{k+1}^{i} - \rho_{k-1}^{i+1} \right)$$

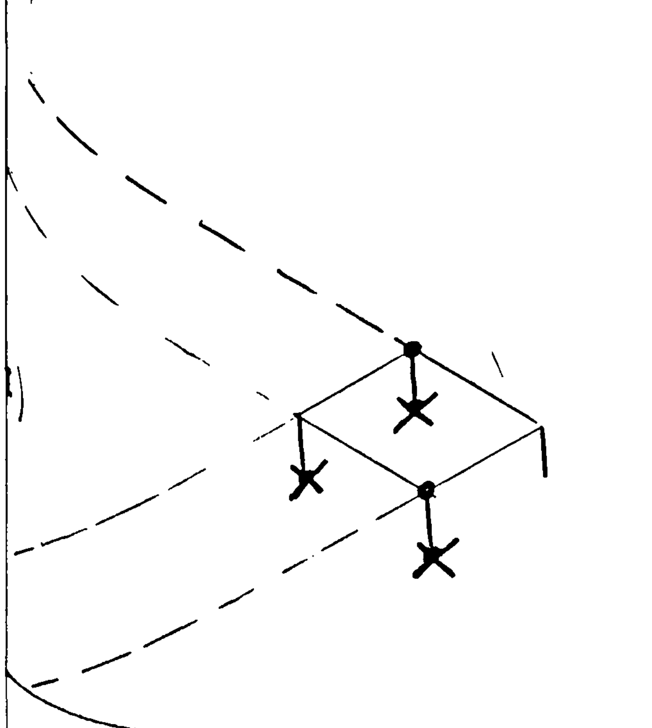
Relation IV

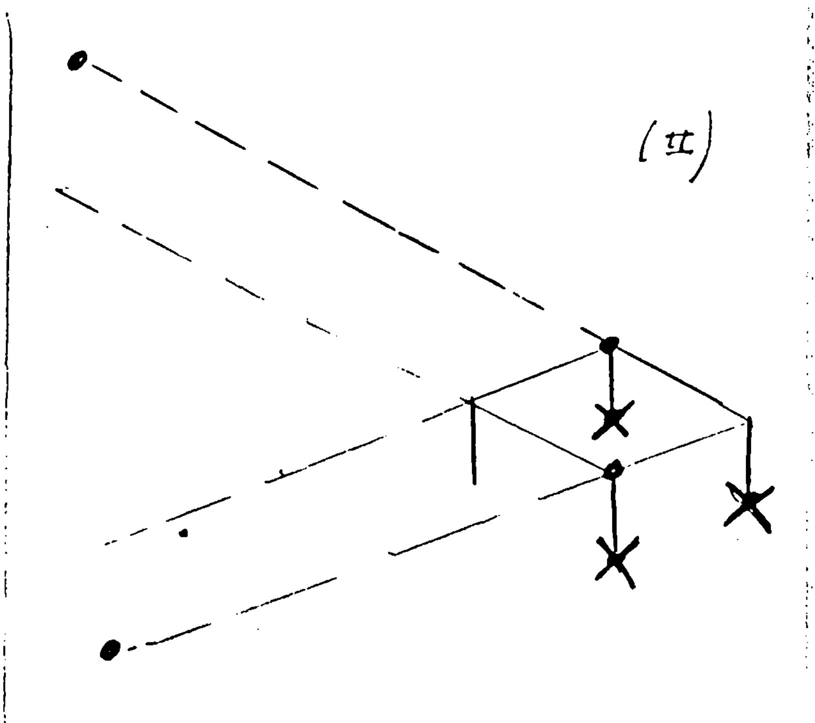
$$P_{k+1}^{i} = P_{k-1}^{i+1} \times (x - x_i) + P_k^{i} \times \left(\rho_{k+1}^{i} - \rho_{k-1}^{i+1} \right)$$

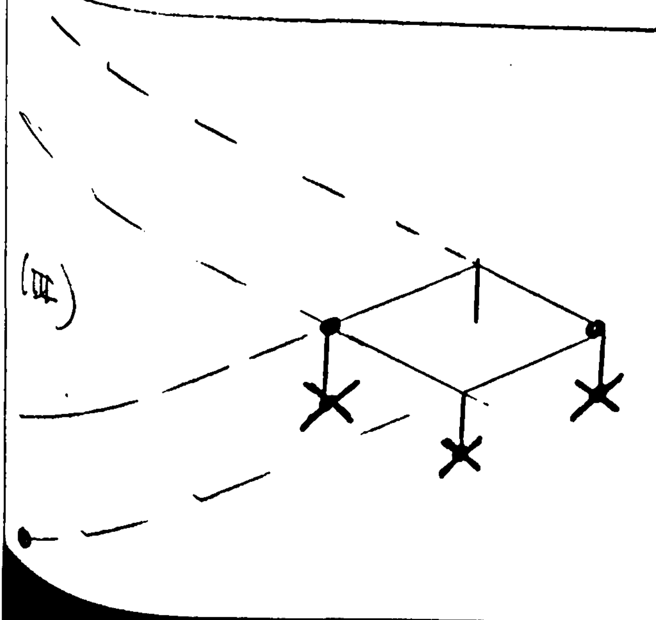
Visualisation de ces relations

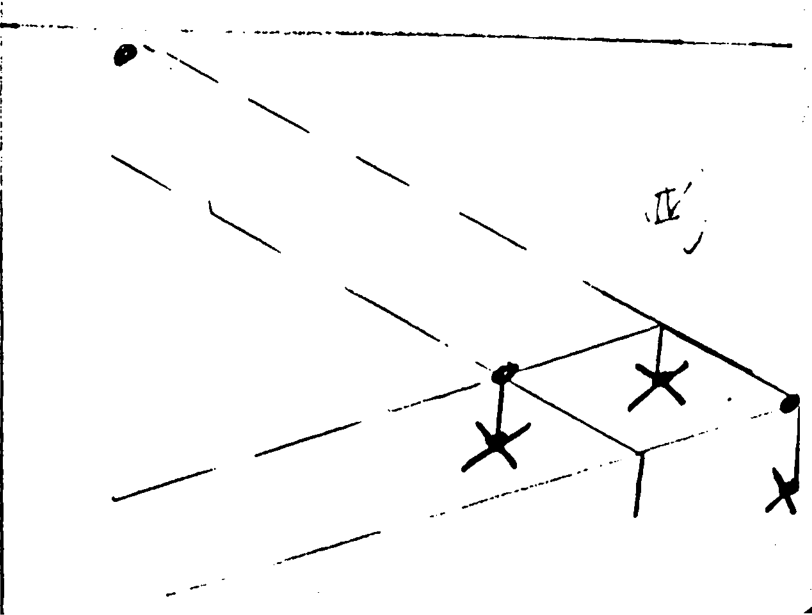
Si nous convenons de représenter les D.R ou les abscisses par des points (•) et les polynômes par des croix (X) ; ces relations peut être visualisées au moyen des graphes suivants : (ici $i=0$)


p_0^0
p_0^1
p_k^0
p_{k-1}^1
P_k^0
p_{k+1}^0
P_{k-1}^1
p_k^1
P_{k+1}^0
P_k^1
p_0^k
p_0^{k+1}




(II)


(III)


(IV)

Explicitons [illegible] (… [illegible] …)

$$P_{2k}^1 - P_{2k}^0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^k \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^k \\ 1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2 x_2 & & y_2 x_2^k \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^k \\ 1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & & x_0^k & y_0 & y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\ 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & & y_1 x_1^k \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1} x_{2k-1} & & y_{2k-1} x_{2k-1}^k \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^k \\ 1 & x & & x^k & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & & x_0^k & y_0 & y_0 x_0 & & y_0 x_0^k \\ 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & & y_1 x_1^k \\ & & & & & & & \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^k \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

Multiplions les numérateurs et dénominateurs de P_{2k}^1 et de P_{2k}^0 par :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}$$

Appliquons l'identité de Sylvester pour les nouveaux numérateurs et dénominateurs de P_{2k}^1 et P_{2k}^0.

La différence $P_{2k}^1 - P_{2k}^0$ devient :

83

page 83 et 83 bis font une seule page

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^k \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\ x_{2k+1} & x_{2k+1}^2 & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x & & x^k & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^k \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\ x & x^2 & & x^k & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1} \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} \\ 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} \\ 1 & x & & x^k & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^k \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\ x_{2k+1} & x_{2k+1}^2 & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 \\ 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1} \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1^l & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2^l & & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^k \\ \vdots \\ x_{2k}^l & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\ x_{2k+1}^l & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & y_0x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1}^{k-1} \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & y_0x_0^k \\ x_1 & x_1^2 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^k \\ \vdots \\ x_{2k-1} & x_{2k-1}^2 & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1}^k \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & y_{2k}x_{2k}^k \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1^l & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^k \\ x_2^l & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & y_2x_2^k \\ \vdots \\ x_{2k}^l & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & y_{2k}x_{2k}^k \\ x^l & x^k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x & x^k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\ \vdots \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ x & x^2 & \cdots & x^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$+$

$$\begin{vmatrix} x_1^l & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^k \\ x_2^l & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & y_2x_2^k \\ \vdots \\ x_{2k}^l & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & y_{2k}x_{2k}^k \\ x_{2k+1}^l & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots \\ 1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & & y_{2k-1}x_{2k-1}^{k-1} \\ 1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^k \\ x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ \vdots \\ x_{2k-1} & x_{2k-1}^2 & \cdots & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & \cdots & y_{2k-1}x_{2k-1}^k \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1^l & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^k \\ x_2^l & y_2 & y_2x_2 & y_2x_2^k \\ \vdots \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\ \vdots \end{vmatrix}$$

Avec les notations introduites précédemment on obtient :

$$P_{2k}^{1} - P_{2k}^{0} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}}{A_1 \times D} + \frac{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}}{B_1 \times D} = -\frac{1}{D}\left(\frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \times B_1 - A_1 \times \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}}{A_1 \times B_1} \right)$$

$$= -\frac{1}{D \times A_1 \times B_1}\left(- C_1 \times A_2 \times B_1 + A_1 \times C_1 \times B_2 \right) = \frac{C_1}{D \times A_1 \times B_1}\left(A_2 \times B_1 - A_1 \times B_2 \right)$$

$$P_{2k}^{1} - P_{2k}^{0} = \frac{C_1}{D \times A_1 \times B_1} \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

D'autre part :

$$P_{2k-1}^{1} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \dots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \dots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x & & x^k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}} = \frac{C_1}{E_1}$$

$$P_{2k}^1 - P_{2k}^0 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^k & y_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^k \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k-1} & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^k \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{k-1} & x_0^k & y_0 & y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}}$$

Multiplions les numérateurs et dénominateurs de P_{2k}^1 et de P_{2k}^0 par :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Appliquons l'identité de Sylvester pour les nouveaux numérateurs et dénominateurs de P_{2k}^1 et P_{2k}^0 :

La différence $P_{2k}^1 - P_{2k}^0$ s'écrit alors :

font une seule page

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
1 & x_2 & \cdots & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}\\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k}\\
x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k}\\
x_{2k+1} & x_{2k+1}^2 & \cdots & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k}\\
x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
-\;
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
1 & x_2 & \cdots & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}\\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k}\\
x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k}\\
x_{2k+1} & x_{2k+1}^2 & \cdots & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
1 & x_2 & \cdots & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}\\
0 & 0 & & 0 & & & & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k}\\
x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k}\\
0 & 0 & & 0 & & & & 1
\end{vmatrix}
\;+
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\
x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\
x_{2k+1}^2 & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\
x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & y_1x_1^k \\
x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & y_2x_2^k \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & y_{2k}x_{2k}^k \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
1 & x_{2k-1} & \cdots & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & \cdots & y_{2k-1}x_{2k-1}^{k-1} \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\
1 & x_1 & x_1^{k-1} & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\
1 & x_2 & x_2^{k-1} & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
1 & x_{2k} & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^k & y_{2k} & & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^k \\
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
x_{2k-1} & x_{2k-1}^2 & \cdots & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & \cdots & y_{2k-1}x_{2k-1}^k \\
x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\
x_1 & x_1^2 & x_1^{k-1} & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^k \\
x_2 & x_2^2 & x_2^{k-1} & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & & y_2x_2^k \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
x_{2k} & x_{2k}^2 & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
+
$$

$$
\begin{vmatrix}
x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\
x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\
x_{2k+1}^2 & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\
x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^k \\
x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\
 & & & & & & 1
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & & y_0x_0^{k-1} \\
1 & x_1 & & x_1^k & y_1 & & & y_1x_1^{k-1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & \cdots & y_{2k-1}x_{2k-1}^{k-1} \\
1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\
1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & & & y_2x_2^{k-1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
1 & x_{2k} & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \\
 & & & & & & & 0
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
x_0 & x_0^2 & & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & & y_0x_0^k \\
x_1 & x_1^2 & & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & & y_1x_1^k \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{2k-1} & x_{2k-1}^2 & & x_{2k-1}^k & y_{2k-1} & y_{2k-1}x_{2k-1} & & y_{2k-1}x_{2k-1}^k \\
x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\
x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{2k} & x_{2k}^2 & & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & & y_{2k}x_{2k}^k \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 1
\end{vmatrix}
$$

Avec [illegible]

$$P_{2k}^{1} - P_{2k}^{0} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ E_1 & E_2 \end{vmatrix}}{A_1 \times D} + \frac{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ E_1 & E_2 \end{vmatrix}}{\;}$$

$$= \frac{1}{D \times A_1 \times B_1} (A_2 \times E_1 \times B_1 - A_1 \times E_1 \times B_2)$$

$$= \frac{E_1}{D \times A_1 \times B_1} \times \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

En multipliant $P_{2k-1}^{1} = C_1 / E_1$, on obtient :

$$P_{2k-1}^{1} \times \left(P_{2k}^{1} - P_{2k}^{0} \right) = \frac{C_1}{D \times A_1 \times B_1} \times \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

Ce qui est précisément l'expression de la différence $P_{2k}^{1} - P_{2k}^{0}$

C. q. f. d.

Preuve de la relation II.

$$P^{0}_{2k+1}\, x\,(p^{1}_{2k}-p^{0}_{2k}) = P^{1}_{2k}\,(x-x_0) - P^{0}_{2k}\,(x-x_{2k+1})$$

$$
\hat{f}_{2k} - f^{0}_{2k} = - \frac{\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k} \\
1 & x_2 & \dots & x_2^{k-1} & x_2^{k} & y_2 & y_2 x_2 & \dots & y_2 x_2^{k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k+1} & \dots & x_{2k+1}^{k-1} & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & \dots & y_{2k+1} x_{2k+1}^{k} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & x_1 & & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k} \\
1 & x_2 & & x_2^{k-1} & x_2^{k} & y_2 & y_2 x_2 & \dots & y_2 x_2^{k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^{k-1} & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & \dots & y_{2k+1} x_{2k+1}^{k} \\
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1
\end{vmatrix}}
+ \frac{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \dots & x_0^{k-1} & x_0^{k} & y_0 & y_0 x_0 & \dots & y_0 x_0^{k} \\
1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & & y_1 x_1^{k} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k} & \dots & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^{k} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \dots & x_0^{k-1} & x_0^{k} & y_0 & y_0 x_0 & \dots & y_0 x_0^{k} \\
1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k} & \dots & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \dots & y_{2k} x_{2k}^{k} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{vmatrix}}
$$

Réduisons au même dénominateur, le numérateur de $\hat{f}_{2k} - f^{0}_{2k}$ s'écrit alors :

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & & y_1 x_1^{k} \\
1 & x_2 & & x_2^{k-1} & x_2^{k} & y_2 & y_2 x_2 & & y_2 x_2^{k} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
1 & x_{2k+1} & & x_{2k+1}^{k-1} & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & & y_{2k+1} x_{2k+1}^{k} \\
0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \dots & x_0^{k} & y_0 & y_0 x_0 & \dots & y_0 x_0^{k-1} \\
1 & x_1 & \dots & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
1 & x_{2k-1} & & x_{2k-1}^{k} & y_{2k-1} & y_{2k-1} x_{2k-1} & \dots & y_{2k-1} x_{2k-1}^{k-1} \\
1 & x_{2k} & & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \dots & y_{2k} x_{2k}^{k-1}
\end{vmatrix}
+
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & & x_0^{k-1} & x_0^{k} & y_0 & y_0 x_0 & & y_0 x_0^{k} \\
1 & x_1 & & x_1^{k-1} & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & & y_1 x_1^{k} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
1 & x_{2k} & & x_{2k}^{k-1} & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^{k} \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \dots & x_1^{k} & y_1 & y_1 x_1 & \dots & y_1 x_1^{k-1} \\
1 & x_2 & \dots & x_2^{k} & y_2 & y_2 x_2 & \dots & y_2 x_2^{k-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k} & \dots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \\
 & & & x^{k} & & & & x^{k-1}
\end{vmatrix}
$$

Le numérateur de $(p^1_{2k} - p^0_{2k})$ s'écrit donc sous la forme suivante.

$$(-1)^{k+1}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{k-1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k-1} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Appliquons l'identité de Sylvester au numérateur de $(p^1_{2k} - p^0_{2k})$.

$(p^1_{2k} - p^0_{2k})$ s'écrit alors :

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & x_0^{k+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^k \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & x_1^{k+1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^k & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix}}$$

$$
P^{0}_{2k+1}(x)\left(P^{1}_{2k}-P^{0}_{2k}\right)=
\frac{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k}\\
1 & x_1 & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k}\\
1 & x & \cdots & x^{k+1} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}}
{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k}\\
1 & x_1 & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k}\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}}
\times
\frac{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k}\\
1 & x_1 & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k}\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}
\end{vmatrix}}
{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k} & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1}\\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1}
\end{vmatrix}}
$$

d'où :

$$
P^{0}_{2k+1}(x)\left(P^{1}_{2k}-P^{0}_{2k}\right)=
\frac{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^{k}\\
\vdots & & & & & & & \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k}\\
1 & x & \cdots & x^{k+1} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}
\end{vmatrix}}
{\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k} & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1}\\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k} & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1}
\end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k} & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1}\\
\vdots & & & & & & \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1}
\end{vmatrix}}
,
$$

Explication du 1er membre:

$$P_{2k}^{1}(x-x_0)-P_{2k}^{1}(x-x_{2k+1}) = (x-x_0)\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} + (x-x_{2k+1})\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0x_0^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0x_0^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(x-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\ 1 & x & \cdots & x^{k} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} + (x-x_{2k+1})\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0x_0^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k} & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix}}$$

On remarque que $P_{2k+1}^0 \times (P_{2k}^1 - P_{2k}^0)$ et $P_{2k}^1 \times (x - x_0) - P_{2k}^0 \times (x - x_{2k+1})$ ont même dénominateur.

Donc pour ~~montrer~~ établir que $P_{2k+1}^0 \, (P_{2k}^1 - P_{2k}^0) = P_{2k}^1 \, (x - x_0) - P_{2k}^0 \, (x - x_{2k+1})$
il suffit de montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{k-1} & y_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k-1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\ 1 & x & \cdots & x^{k-1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} =$$

$$- (x - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0 x_0^{k-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} + (x - x_{2k+1}) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^k \\ 1 & x & \cdots & x^k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

Ce qui se traduit par l'identité des numérateurs de $P_{2k+1}^0 \times (P_{2k}^1 - P_{2k}^0)$ et de
$P_{2k}^1 (x - x_0) - P_{2k}^0 (x - x_{2k+1})$.

Le 2ème membre peut s'écrire :

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^k & (-1)^k (x-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & y_0 & y_0x_0 & \cdots & y_0x_0^k \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k & 0 & y_1 & y_1x_1 & \cdots & y_1x_1^k \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k & 0 & y_2 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_2^k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k} & x_{2k}^2 & \cdots & x_{2k}^k & 0 & y_{2k} & y_{2k}x_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^k \\
1 & x_{2k+1} & x_{2k+1}^2 & \cdots & x_{2k+1}^k & (-1)^{k+3}(x-x_{2k+1})\begin{vmatrix} 1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^{k-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1x_1^{k-1} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k}x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & y_{2k+1} & y_{2k+1}x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1}x_{2k+1}^k \\
1 & x & x^2 & \cdots & x^k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

remplaçons les 0 de la colonne $k+2$, par des déterminants nuls (puisque ayant 2 colonnes identiques)

2ème membre =

$$
\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^l & \cdots & x_0^k & (-1)^k (x-x_0)\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^k & y_0 & \cdots & y_0 x_0^{k-1} \\ 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & y_0 & y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\
1 & x_1 & x_1^l & \cdots & x_1^k & (x-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k} \end{vmatrix} & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\
1 & x_1 & x_2^l & \cdots & x_2^k & (x-x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^k & y_2 & \cdots & y_2 x_2^{k-1} \\ 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & y_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_2 x_2^k \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
1 & x_{2k} & x_{2k}^l & \cdots & x_{2k}^k & (x-x_{2k})\begin{vmatrix} 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \\ 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k} \end{vmatrix} & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^k \\
1 & x_{2k+1} & x_{2k+1}^l & \cdots & x_{2k+1}^k & (-1)^{k+1}(x-x_{2k+1})\begin{vmatrix} 1 & x_{2k+1} & x_{2k+1}^k & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^{k-1} \\ 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\
1 & x & x^l & \cdots & x^l & (x-x)\begin{vmatrix} 1 & x & x^l & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^k & y_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\ & & & & & \\ 1 & x_{2k} & x_{2k}^k & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1} \end{vmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

2ème membre =

$$\begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^k & (-1)^{k+1}(x-x_0)\left[X_0^0 - x_0 X_0^1 + x_0^2 X_0^2 + \cdots + (-1)^k x_0^k X_0^k + (-1)^{k+1} Y_0^k + \cdots + (-1)^{2k+1} y_0 x_0^{k-1} Y_0^k\right] & y_0 & y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^k & (-1)^{k+1}(x-x_1)\left[X_0^0 - x_1 X_0^1 + x_1^2 X_0^2 + \cdots + (-1)^k x_1^k X_0^k + (-1)^{k+1} Y_0^k + \cdots + (-1)^{2k+1} y_1 x_1^{k-1} Y_0^k\right] & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^k & (-1)^{k+1}(x-x_{2k})\left[X_0^0 - x_{2k} X_0^1 + x_{2k}^2 X_0^2 + \cdots + (-1)^k x_{2k}^k X_0^k + (-1)^{k+1} Y_0^k + \cdots + (-1)^{2k+1} y_{2k} x_{2k}^{k-1} Y_0^k\right] & y_{2k} & y_{2k} x_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^k \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^k & (-1)^{k+1}(x-x_{2k+1})\left[X_0^0 - x_{2k+1} X_0^1 + x_{2k+1}^2 X_0^2 + \cdots + (-1)^k x_{2k+1}^k X_0^k + (-1)^{k+1} Y_0^k + \cdots + (-1)^{2k+1} y_{2k+1} x_{2k+1}^{k-1} Y_0^k\right] & y_{2k+1} & y_{2k+1} x_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\
1 & x & \cdots & x^k & (-1)^{k+1}(x-x)\left[X_0^0 - x X_0^1 + x^2 X_0^2 + \cdots + (-1)^k x^k X_0^k + (-1)^{k+1} 0\, Y_0^k + \cdots + (-1)^{2k+1} 0 \cdot Y_0^k\right] & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la $(k+2)^{\text{ème}}$ ~~ligne~~ colonne, on obtient la somme de $4k+1$ déterminants nuls ~~on obtient $2\times(2k+1)$ déterminants dans lesquels on trouve~~ (2 colonnes identiques) et d'un déterminant non nul qui est : ~~2 colonnes identiques (donc nuls) sauf un, qui est~~ :

$$X_0^k \times \begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1} \\
1 & x & \cdots & x^{k+1} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & y_1 & \cdots & y_1 x_1^{k-1} \\
1 & x_2 & & & & & \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
1 & x_{2k} & \cdots & x_{2k}^{k-1} & y_{2k} & \cdots & y_{2k} x_{2k}^{k-1}
\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{k+1} & y_0 & y_0 x_0 & \cdots & y_0 x_0^k \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{2k+1} & \cdots & x_{2k+1}^{k+1} & y_{2k+1} & & \cdots & y_{2k+1} x_{2k+1}^k \\
1 & x & \cdots & x^{k+1} & 0 & & \cdots & 0
\end{vmatrix}$$

ce n'est autre le numérateur de $P_{2k+1}^0 \times \left(P_{2k}^1 - P_{2k}^0\right)$

C. q. f. d.

Démonstration des relations III et IV

On ne restreint pas la généralité de la démonstration en se limitant à $i = 0$.
Multiplions la relation (I) par $(x - x_{k+1})$; on obtient :

$$(x - x_{k+1}) \times (P_k^1 - P_k^0) = P_{k-1}^1 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) \times (x - x_{k+1})$$

$$P_{k+1}^0 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) = P_k^1 \times (x - x_0) - P_k^0 \times (x - x_{k+1}) \qquad (II)$$

Additionnons membre à membre les égalités ci-dessous ; on obtient :

$$P_k^1 \times (x - x_{k+1}) - P_k^0 \times (x - x_{k+1}) + P_{k+1}^0 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) =$$
$$P_{k-1}^1 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) \times (x - x_{k+1}) + P_k^1 \times (x - x_0) - P_k^0 \times (x - x_{k+1})$$

d'où :

$$P_{k+1}^0 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) = P_{k-1}^1 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) \times (x - x_{k+1}) + P_k^1 \times (x_{k+1} - x_0)$$

$$P_{k+1}^0 \times (\rho_k^1 - \rho_k^0) = (\rho_k^1 - \rho_k^0) \times \left[P_{k-1}^1 \times (x - x_{k+1}) + P_k^1 \times (\rho_{k+1}^0 - \rho_{k-1}^1) \right]$$

pourvu que les 4 D.R : ρ_k^1, ρ_k^0, ρ_{k+1}^0 et ρ_{k-1}^1 soient finies, c'est à dire :

$$(x_{k+1} - x_0) = (\rho_k^1 - \rho_k^0) \times (\rho_{k+1}^0 - \rho_{k-1}^1) \neq 0$$

on a alors

$$\boxed{P_{k+1}^0 = P_{k-1}^1 \times (x - x_{k+1}) + P_k^1 \times (\rho_{k+1}^0 - \rho_{k-1}^1)}$$

d'où la relation III.

Multiplions (I) par $(x-x_0)$; on obtient

$$(x-x_0)\times(\rho_k^1-\rho_k^0) = P_{k-1}^1\times(\rho_k^1-\rho_k^0)\times(x-x_0)$$

Additionnant les relations $(I)\times(x-x_0)$ et II membre à membre ; on a alors :

$$(x-x_0)\times(P_k^1-P_k^0) + P_{k+1}^1\times(\rho_k^1-\rho_k^0) =$$

$$P_{k-1}^1\times(\rho_k^1-\rho_k^0)\times(x-x_0) + P_k^1\times(x-x_0) - P_k^0\times(x-x_{k+1})$$

d'où :

$$P_{k+1}^1\times(\rho_k^1-\rho_k^0) = (\rho_k^1-\rho_k^0)\times\left[P_{k-1}^1\times(x-x_0)+P_k^0\times(x_{k+1}-x_0)\right]$$

Pourvu que les 4 D. R : ρ_k^1, ρ_k^0, ρ_{k+1}^0 et ρ_{k-1}^1 soient finies, c'est à dire :

$$(x_{k+1}-x_0) = (\rho_{k+1}^0-\rho_{k-1}^1)\times(\rho_k^1-\rho_k^0) \neq 0$$

on a alors :

$$\boxed{P_{k+1}^1 = P_{k-1}^1\times(x-x_0) + P_k^0\times(\rho_{k+1}^0-\rho_{k-1}^1)}$$

d'où la relation IV

Remarque

on obtient ainsi 4 formules qui nous permettent de nous deplacer dans tous les sens de la tables des differences réciproques

Par exemple pour calculer P^{0}_{k+1} on peut le calculer à partir de :

* P^{0}_{k-1} et P^{0}_{k}
* P^{1}_{k-1} et P^{0}_{k}
* P^{1}_{k-1} et P^{1}_{k}
* P^{1}_{k} et P^{0}_{k}
* P^{2}_{k-1} et P^{1}_{k}

De même pour calculer les polynômes Q, les formules restent identiques il suffit de remplacer P par Q.

$$
\begin{tikzcd}
P^{0}_{k-1} \arrow[dr] & & \\
& P^{0}_{k} \arrow[dr] & \\
P^{1}_{k-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & P^{0}_{k+1} \\
& P^{1}_{k} \arrow[ur, dashed] & \\
P^{2}_{k-1} \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}
$$

Chapitre II

[illegible]

relations

II-3-1 Interpolation [illegible]

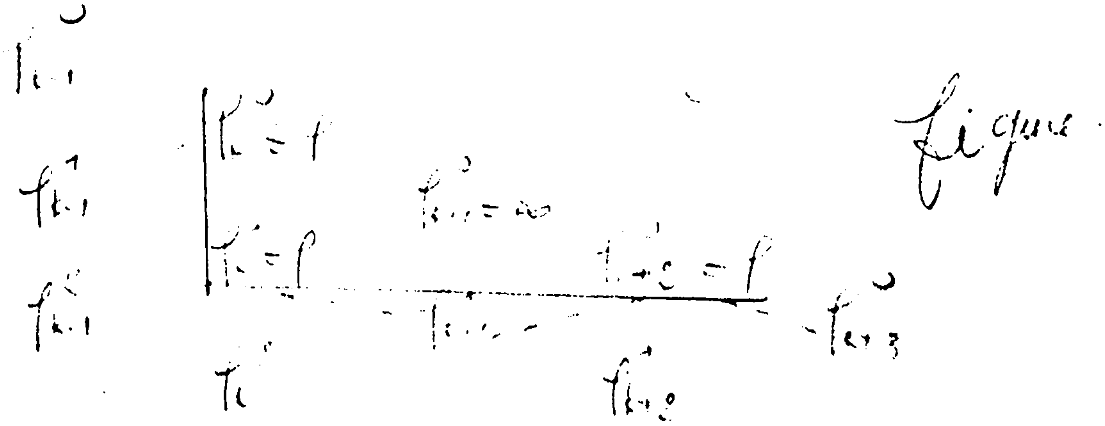
BU LILLE

La table des différences réciproques d'un cal[illegible] ou [illegible] des règles [illegible] [illegible] illustrer l'utilisation de ces nouvelles relations. Nous présentons une application [illegible] 4 situations [illegible] distinctes [illegible] singularités) : 2 blocs carrés et 2 blocs non carrés. Nous déterminons la fraction [illegible] d'interpolation de Thiele en empruntant à chaque fois la [illegible] diagonale descendante de la table du f. a [illegible].

c) [illegible]

Considérons la droite [illegible] avec [illegible]

Exprimons [illegible] et [illegible] en fonction de $P^0(x)$.



D'après la relation II on a :

$$P^1_{k-1} \times (x - x_0) = P^0_{k-1} \times (x - x_k) + (f^1_{k-1} - f^0_{k-1}) \times P^0_k$$

$$P^1_k = P^0_k \quad \text{(d'après la relation I)}$$

$$P^1_{k+1} = (f^1_{k-1} - f^1_{k-1}) P^1_k + (x - x_{k+1}) P^1_{k-1} \quad \text{(d'après la relation de Thillé)}$$

$$P^0_{k+2} = (f^0_{k+2} - f^1_k) P^1_{k+1} + (x - x_{k+2}) P^1_k \quad \text{(d'après la relation IV)}$$

$$P^0_{k+2} = (x - x_{k+2}) P^1_k$$

or

$$\boxed{P^0_{k+2} = (x - x_{k+2}) P^0_k}$$

$$P^0_{k+3} = (f^0_{k+3} - f^1_{k+1}) P^0_{k+2} + (x - x_0) P^1_{k+1} \quad \text{(d'après la relation III)}$$

Remplaçons P^0_{k+2} et P^1_{k+1} par leurs valeurs.

$$= (f_{k+3} - f_{k+1}) (x - x_{k+2}) P_k + (x - x_0)(f_{k+1}^1 - f_{k+1}^1) P_k^1 + (x - x_0)(x - x_{k+1}) P_{k-1}^1$$

$$P_{k+3}^0 = \left[(f_{k+3}^1 - f_{k+1}^1)(x - x_{k+2}) + (x - x_0)(f_{k+1}^1 - f_{k+1}^1) \right]$$

$$+ (x - x_{k+1}) \left[P_{k-1}^1 (x - x_k) + (f_{k-1}^1 - f_{k-1}^0) P_k^1 \right]$$

$$P_{k+3}^0 = [f_{k+3} \times (x - x_{k+2}) + f_{k+1} \times (x_{k+2} - x_0)$$

$$- f_{k-1}^1 \times (x_{k+1} - x_0) - f_{k-1} \times (x - x_{k+1})] \times P_k^0$$

$$+ (x - x_k) \times (x - x_{k+1}) \times P_{k-1}^1$$

---

on remarque que f_{k+3}^0, f_{k+1}^1, f_{k-1}^1 et f_{k-1}^0 appartiennent à l'ensemble des valeurs qu'il faut inverser pour traverser la singularité en utilisant la variante de T Cordellier

Proposition 2

Pourvu que:

1) $f_k^0 = f_k^1 = f_{k+2}^0 = f \neq \infty$

2) f_{k-1}^0, f_{k-1}^1, f_{k+1}^1 et f_{k+3}^0 soient finies on a :

$$P_{k+2}^0(x) = (x - x_{k+2}) \times P_k^0(x)$$

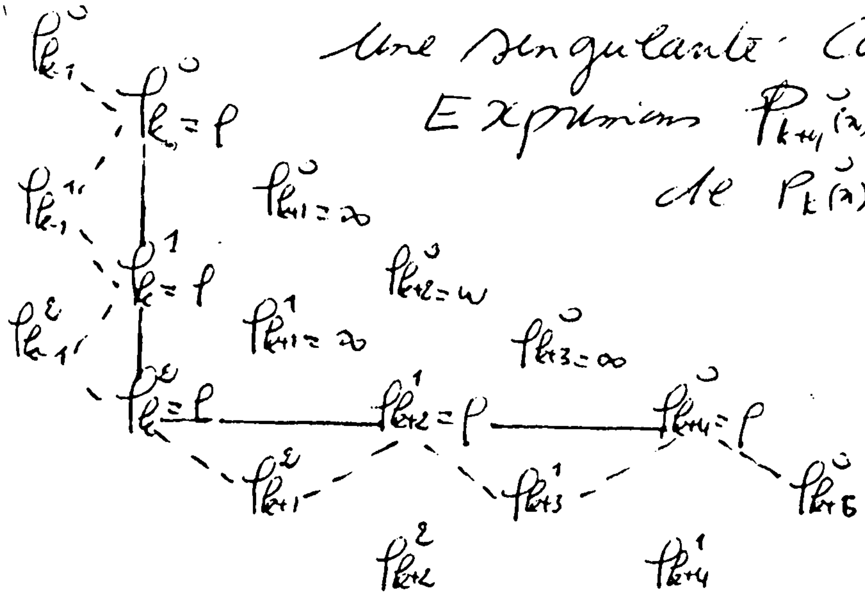
$$P_{k+3}^0(x) = [f_{k+3} \times (x - x_{k+2}) + f_{k+1}^1 (x_{k+2} - x_0)$$

$$- f_{k-1}^1 (x_{k+1} - x_0) - f_{k-1}^0 (x - x_{k+1})] \times P_k^0(x)$$

$$+ (x - x_k)(x - x_{k+1}) \times P_{k-1}^1(x).$$

…LISATION DE CES RELATIONS

Considérons la table des D.R avec une singularité carré de taille 3.
Exprimons $P_{k+4}^0(x)$ et $P_{k+5}^0(x)$ en fonction de $P_k^0(x)$ et $P_{k-1}^0(x)$



…près la relation II on a :

$\ldots(x-x_0) = P_{k-1}^0 \times (x-x_k) + (\rho_{k-1}^1 - \rho_{k-1}^0) \times P_k^0$

…près la relation I on a :

$= P_k^0$.

…près la relation II on a

$\ldots(x-x_1) = P_{k-1}^1 \times (x-x_{k+1}) + (\rho_{k-1}^2 - \rho_{k-1}^1) \times P_k^1$

$= P_k^1 = P_k^0$ (d'après la relation I)

$= (\rho_{k+1}^2 - \rho_{k-1}^2) P_k^2 + (x - x_{k+2}) P_{k-1}^2$ (d'après la relation de Thiele)

$= (\underbrace{\cancel{\rho_{k+2}^0 - \rho_k^2}}_{=0}) P_{k+1}^2 + (x - x_{k+3}) P_k^2 = (x - x_{k+3}) P_k^0$ (d'après la relation IV)

$= (\rho_{k+3}^1 - \rho_{k+1}^2) P_{k+2}^1 + (x - x_1) P_{k+1}^2$ (d'après la relation III)

$= (\underbrace{\cancel{\rho_{k+4}^0 - \rho_{k+2}^1}}_{=0}) P_{k+3}^1 + (x - x_{k+4}) P_{k+2}^1 = \boxed{(x-x_{k+4}) \times (x-x_{k+3}) P_k^0}$

(d'après la relation III)

$= (\rho_{k+5}^0 - \rho_{k+3}^1) P_{k+4}^0 + (x - x_0) P_{k+3}^1$ (d'après la relation IV)

$$= \left(f_{k+5}^{0} - f_{k+3}^{1}\right) \times (x - x_{k+4}) \times (x - x_{k+3}) P_k^{0} + (x - x_0) P_{k+3}^{1}$$

$$= f_{k+5}^{0} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0} + (x - x_0)\left[\left(f_{k+3}^{1} - f_{k+2}^{0}\right) P_{k+2}^{1}\right.$$

$$\left. + (x - x_1) P_{k+1}^{2}\right] - f_{k+3}^{1} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0}$$

$$f_{k+5}^{0} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0} + (x - x_0)\left[\left(f_{k+3}^{1} - f_{k+1}^{2}\right)(x - x_{k+3}) P_k^{0}\right.$$

$$\left. + (x - x_1) P_{k+1}^{2}\right] - f_{k+3}^{1} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0}$$

$$f_{k+5}^{0} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0} + f_{k+3}^{1} (x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0) P_k^{0}$$

$$(x - x_0)(x - x_1) P_{k+1}^{2} - (x - x_0)(x - x_{k+3}) f_{k+1}^{2} P_k^{0}$$

$$f_{k+5}^{0} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0} + f_{k+3}^{1} (x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0) P_k^{0}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)\left[\left(f_{k+1}^{2} - f_{k-1}^{2}\right) P_k^{2} + (x - x_{k+2}) P_{k-1}^{2}\right]$$

$$(x - x_0)(x - x_{k+3}) f_{k+1}^{2} P_k^{0}$$

$$f_{k+5}^{0} (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) P_k^{0} + f_{k+3}^{1} (x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0) P_k^{0}$$

$$(x - x_0) f_{k+1}^{2} (x_{k+3} - x_1) P_k^{0} - (x - x_0)(x - x_1) f_{k-1}^{2} P_k^{0}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{k+2}) P_{k-1}^{2}$$

$$P^0_{k+5} = \Big\{ P^0_{k+5}(x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) + P^1_{k+3}(x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0)$$

$$+ P^2_{k+1}(x - x_0)(x_{k+3} - x_1)\Big\} \times P^0_k$$

$$- (x - x_0)(x - x_1) P^2_{k-1} P^0_k + (x - x_0)(x - x_{k+2}) \times \Big[P^2_{k-1} \times (x - x_{k+2})$$

$$+ (P^2_{k-1} - P^1_{k-1}) \times P^1_k \Big] \; ; \; \left(P^1_k = P^0_k \ldots \text{relation I} \right)$$

$$= \Big\{ P^0_{k+5} \times (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) + P^1_{k+3}(x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0) +$$

$$P^2_{k+1}(x - x_0)(x_{k+3} - x_1) - (x - x_0)(x_{k+2} - x_1) P^1_{k-2} \Big\} P^0_k$$

$$+ (x - x_0)(x - x_{k+2})(x - x_{k+1}) P^1_{k-1} - (x - x_0)(x - x_{k+2}) P^1_{k-1} P^0_k$$

$$= \Big\{ P^0_{k+5}(x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) + P^1_{k+3}(x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0) +$$

$$P^2_{k+1}(x - x_0)(x_{k+3} - x_1) - P^1_{k-2}(x - x_0)(x_{k+2} - x_1) \Big\} P^0_k$$

$$+ (x - x_{k+2})(x - x_{k+1}) \Big[P^0_{k-1} \times (x - x_k) + (P^1_{k-1} - P^0_{k-1}) \times P^0_k \Big]$$

$$- (x - x_0)(x - x_{k+2}) P^1_{k-1} P^0_k$$

$$= \Big\{ P^0_{k+5}(x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) + P^1_{k+3}(x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0)$$

$$+ P^2_{k+1}(x - x_0)(x_{k+3} - x_1) - P^1_{k-2}(x - x_0)(x_{k+2} - x_1)$$

$$- P^1_{k-1}(x - x_{k+2})(x_{k+1} - x_0) - P^0_{k-1}(x - x_{k+2})(x - x_{k+1}) \Big\} P^0_k$$

$$+ (x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) P^0_{k-1}$$

On a ainsi exprimé $P_{k+5}^{\sim}$ et $P_{k+4}^{\sim}$ en fonction de P_{k-1}^{0} et P_k^{0}

$$\boxed{P_{k+4}^{\sim} = (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) \times P_k^{0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{k+5}^{\sim} &= (x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+2}) \times P_{k-1}^{0} + \\ &\Big\{ P_{k+5}^{0}(x-x_{k+4})(x-x_{k+3}) + P_{k+3}^{1}(x-x_{k+3})(x_{k+4}-x_0) \\ &+ P_{k+1}^{2}(x-x_0)(x_{k+3}-x_1) - P_{k-1}^{2}(x-x_0)(x_{k+2}-x_1) \\ &- P_{k-1}^{1}(x-x_{k+2})(x_{k+1}-x_0) - P_{k-1}^{0}(x-x_{k+2})(x-x_{k+1})\Big\} \times P_k^{0} \end{aligned}}$$

On remarque que : P_{k+3}^{1}, P_{k+1}^{2}, P_{k-1}^{2} et P_{k-1}^{1} ~~font~~ appartiennent à l'ensemble ~~partie~~ des valeurs qu'il faut inverser pour traverser la singularité en utilisant la variante de F. Cordellier.

Proposition :

Prouver que.

1) $f_k^0 = f_k^1 = f_k^2 = f_{k+2} = f_{k+4} = f \ldots$

2) $f_{k-1}^0, f_{k-1}^1, f_{k}^2, f_{k+1}^2, f_{k+5}^1$ et f_{k+5}^0 [illegible]

[illegible]

$$P_{k+4}^0(x) = (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) \times P_k^0(x)$$

$$P_{k+5}^0(x) = \Big[f_{k+5}^0 (x - x_{k+4})(x - x_{k+3}) + f_{k+3}^1 (x - x_{k+3})(x_{k+4} - x_0)$$

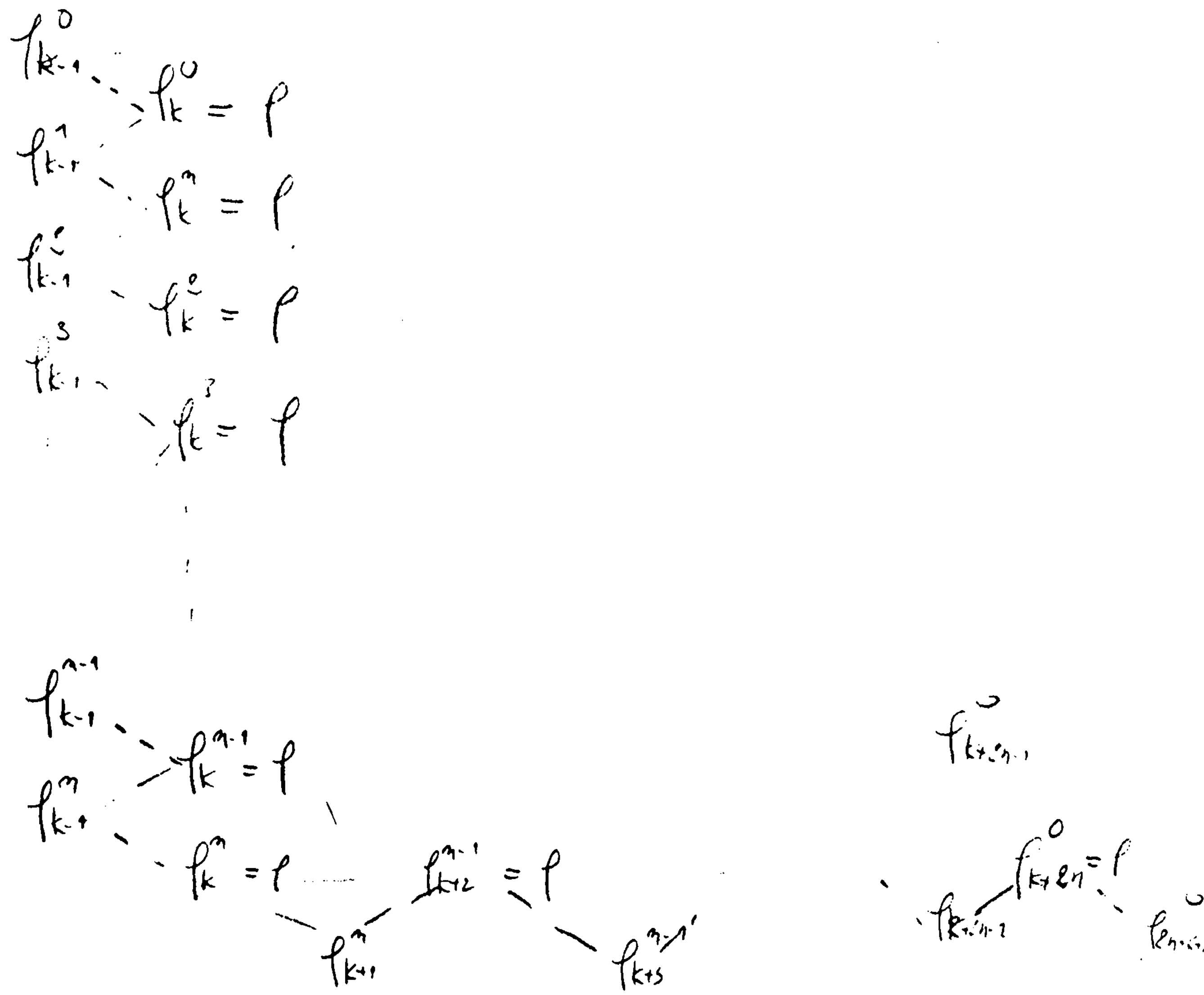
$$+ f_{k+1}^2 (x - x_0)(x_{k+3} - x_1) - f_{k-1}^2 (x - x_0)(x_{k+2} - x_1)$$

$$- f_{k-1}^1 (x - x_{k+2})(x_{k+1} - x_0) - f_{k-1}^0 (x - x_{k+2})(x - x_{k+1})\Big] \times P_k^0(x)$$

$$+ (x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \times P_{k-1}^0(x).$$

singularité de cote n

Considérons une singularité de cote n (voir figure 4)



On peut tenter d'étendre à une telle situation les résultats établis pour $n=2$ et $n=3$. Malheureusement la technique utilisée permet d'établir un résultat tangible pour une valeur fixée de n et non pour n quelconque. C'est ainsi que nous avons pu vérifier que le résultat suivant était vrai pour $n = 2, 3, 4$ et 5. Bien qu'il ne soit qu'une conjecture pour n quelconque.

Conjecture

$f_k^{i} \neq \infty$ pour $i = 0, \ldots, n$

$f_{k+i+2i}^{n-i} \neq \infty$ pour $i = 0, \ldots, n-1$

Alors

1) $P_{k}^{\ldots} = \ldots (x - x_{k+2n-1})(x - x_{k+2n-2}) \ldots \times$

$\ldots \times (x - x_{k+n+2})(x - x_{k+n+1}) P_k^0$

2) $P^0_{k+2n+1}(x) = \Big[f_{k+2n+1} (x - x_{k+2n})(x - x_{k+2n-1}) \ldots \quad (x - x_{k+n+1})$

$+ f^1_{k+2n-1} (x_{k+2n} - x_0)(x - x_{k+2n-1}) \ldots \quad (x - x_{k+n+1})$

$+ f^2_{k+2n-3} (x - x_0)(x_{k+2n-1} - x_1)(-x_{k+2n-2} + x) \ldots \quad (x - x_{k+n+1})$

$\vdots$

$+ f^n_{k+1} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots \quad \ldots (x_{k+n+1} - x_{n-1})$

$+ f^0_{k-1} (x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \ldots \quad \ldots (x - x_{k+n})$

$+ f^1_{k-1} (x_{k+1} - x_0)(x - x_{k+2}) \ldots \quad (x - x_{k+n})$

$+ f^2_{k-1} (x - x_0)(x_{k+2} - x_1)(x - x_{k+3}) \ldots \quad (x - x_{k+n})$

$+ f^3_{k-1} (x - x_0)(x - x_1)(x_{k+3} - x_2)(x - x_{k+4}) \ldots \quad (x - x_{k+n})$

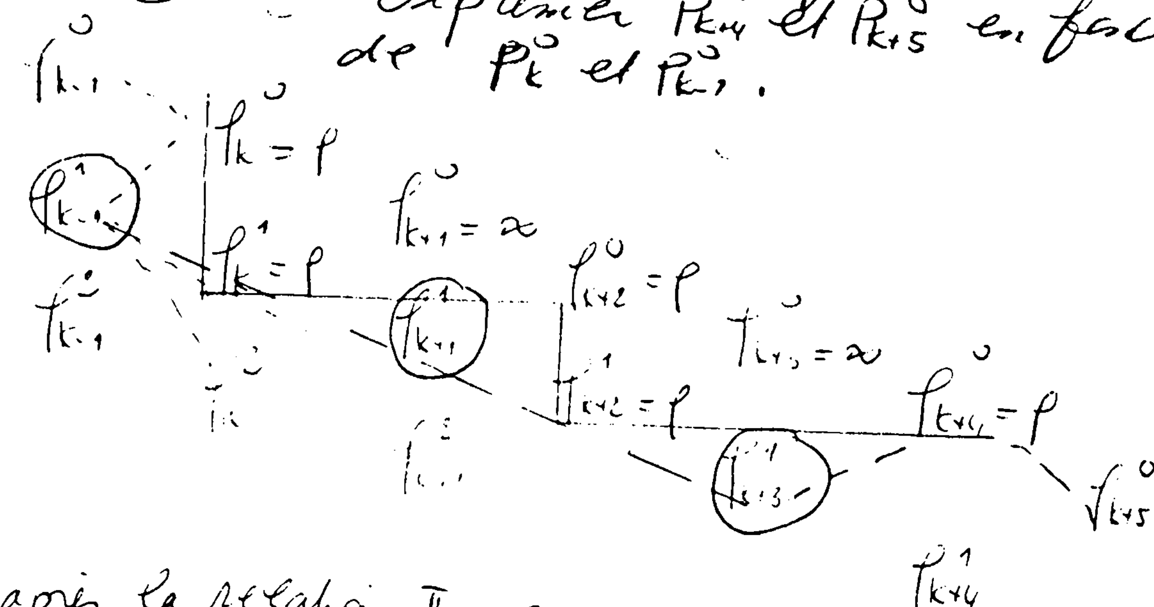
$\vdots$

$+ f^n_{k-1} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots \quad (x_{k+n} - x_{n-1}) \Big] \times P_k^0$

$\times (x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \ldots \quad (x - x_{k+n}) P^0_{k-1}$.

7 Simulation $m = 4$

Considérons la table des D.R ci dessous avec une singularité de taille 3 (bloc non carré) et calculons les formules qui permettent de sauter au dessus de cette singularité. c.a.d exprimer P_{k+4}^0 et P_{k+5}^0 en fonction de P_k^0 et P_{k-1}^0.



d'après la relation II on a.

$$P_{k-1}^1 \times (x - x_0) = P_{k-1}^0 \times (x - x_k) + P_k^0 (\rho_{k-1}^1 - \rho_{k-1}^0)$$

$$P_k^1 = P_k^0 \quad \text{(d'après la relation I)}$$

$$P_{k+1}^1 = (\rho_{k+1}^1 - \rho_{k-1}^1) \times P_k^1 + (x - x_{k+1}) \times P_{k-1}^1 \quad \text{(d'après la relation de Thiele)}$$

$$P_{k+2}^1 = \underbrace{\cancel{(\rho_{k+2}^1 - \rho_k^1)}}_{=0} \times P_{k+1}^1 + (x - x_{k+2}) P_k^1 = (x - x_{k+2}) \times P_k^0 \quad \text{(d'après la relation de Thiele)}$$

$$P_{k+3}^1 = (\rho_{k+3}^1 - \rho_{k+1}^1) \times P_{k+2}^1 + (x - x_{k+3}) P_{k+1}^1 \quad \text{(d'après la relation de Thiele)}$$

$$P_{k+4}^0 = \underbrace{\cancel{(\rho_{k+4}^0 - \rho_{k+2}^1)}}_{=0} \times P_{k+3}^1 + (x - x_{k+4}) P_{k+2}^1 \quad \text{(d'après la relation IV)}$$

$$= \boxed{(x - x_{k+4})(x - x_{k+2}) \times P_k^0}$$

$$P_{k+5}^0 = (\rho_{k+5}^0 - \rho_{k+3}^1) \times P_{k+4}^0 + (x - x_0) P_{k+3}^1$$

(d'après la relation III)

$$P^0_{k+5} = (f^0_{k+5} - f^{-1}_{k+3}) \left[(x-x_{k+4})(x-x_{k+2}) P^0_k \right]$$
$$+ \quad (x-x_0)\left[(f^1_{k+3} - f^1_{k+1}) P^1_{k+2} + (x-x_{k+3}) P^1_{k+1} \right]$$
$$= (f^0_{k+5} - f^1_{k+3}) \left[(x-x_{k+4})(x-x_{k+2}) P^0_k \right] +$$
$$(x-x_0)(x-x_{k+2})(f^1_{k+3} - f^1_{k+1}) P^0_k +$$
$$(x-x_0)(x-x_{k+3})\left[(f^1_{k+1} - f^1_{k-1}) P^0_k + (x-x_{k+1}) P^1_{k-1} \right]$$
$$= (f^0_{k+5} - f^1_{k+3})(x-x_{k+4})(x-x_{k+2}) P^0_k +$$
$$(x-x_0)(x-x_{k+2})(f^1_{k+3} - f^1_{k+1}) P^0_k +$$
$$(x-x_0)(x-x_{k+3})(f^1_{k+1} - f^1_{k-1}) P^0_k +$$
$$(x-x_{k+3})(x-x_{k+1})\left[P^0_{k-1}(x-x_k) + (f^1_{k-1} - f^0_{k-1}) P^0_k \right]$$

$$= \Big\{ f^0_{k+5}(x-x_{k+4})(x-x_{k+2}) + f^1_{k+3}(x-x_{k+2})(x_{k+4}-x_0)$$
$$- f^1_{k+1}(x-x_0)(x_{k+3}-x_{k+2}) - f^1_{k-1}(x-x_{k+3})(x_{k+1}-x_0)$$
$$- f^0_{k-1}(x-x_{k+3})(x-x_{k+1}) \Big\} P^0_k +$$
$$(x-x_k)(x-x_{k+1})(x-x_{k+3}) P^0_{k-1}$$

Même remarque que dans les cas précédents : f^1_{k+3}, f^1_{k+1} et f^1_{k-1} appartiennent à l'ensemble des valeurs à livrer pour calculer les Q.R situées au-delà du bloc singulier.

Remarque 4

Si on a :

$f_k^0 = f_k^1 = f_{k+2}^0 = f_{k+2}^1 = f_{k+4}^0 = f_{k+4}^1 = \mp\infty$

f_{k-1}^0, f_{k-1}^1, f_{k+1}^0, f_{k+3}^1 et f_{k+5}^0 finies.

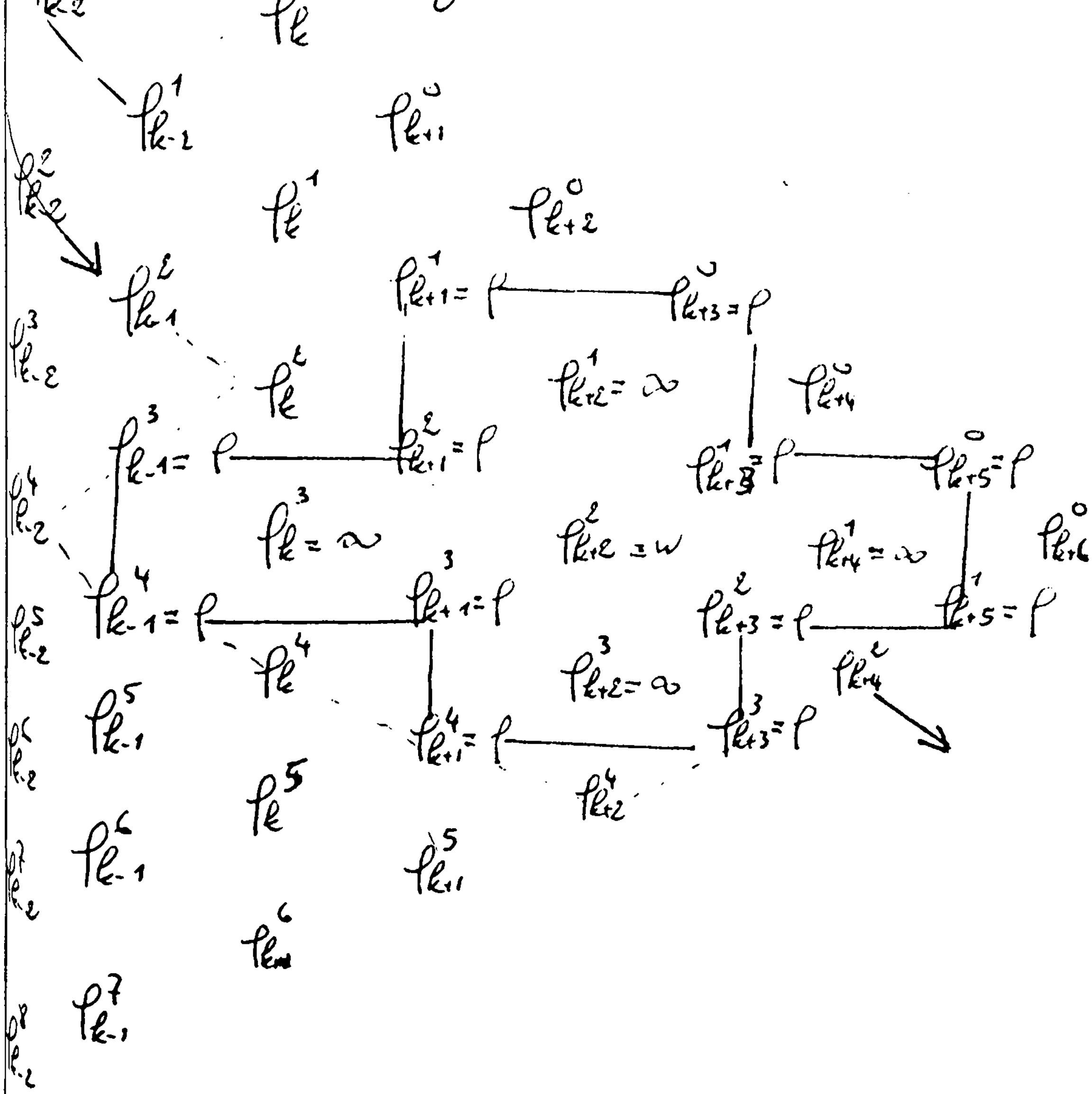
Alors on a :

* $P_{k+4}^0(x) = (x - x_{k+4})(x - x_{k+2}) \times P_k^0(x)$

* $P_{k+5}^0(x) = \Big[f_{k+5}^0 (x - x_{k+4})(x - x_{k+2}) + f_{k+3}^1 (x - x_{k+2})(x_{k+4} - x_0)$
$- f_{k+1}^1 (x - x_0)(x_{k+3} - x_{k+2}) - f_{k-1}^1 (x - x_{k+3})(x_{k+1} - x_0)$
$- f_{k-1}^0 (x - x_{k+3})(x - x_{k+1}) \Big] \times P_k^0(x) +$
$(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+3}) \times P_{k-1}^0(x)$

[illegible]

Considérons la table des D. R avec une singularité de forme ci-dessous.
Exprimons $\rho^2_{k+3}(x)$ et $\rho^2_{k+4}(x)$ en fonction de $\rho^2_{k+1}(x)$ et $\rho^2_k(x)$.



113

$$P^4_{k-2} = P^3_{k-1}$$ (d'après la relation I)

$$P^4_{k} = (\ell_k^4 - \ell_{k-2}^4)\, P^4_{k-1} + (x - x_{k+3})\, P^4_{k-2}$$ (relation de Thiele)

$$P^4_{k+1} = 0 \times P^4_k + (x - x_{k+4})\, P^4_{k-1} = (x - x_{k+4})\, P^3_{k-1}$$

(d'après la relation de Thiele)

$$P^4_{k+2} = (\ell_{k+2}^4 - \ell_k^4)\, P^4_{k+1} + (x - x_{k+5})\, P^4_k$$ (d'après la relation de Thiele)

$$P^3_{k+3} = 0 \times P^4_{k+2} + (x - x_{k+6})\, P^4_{k+1}$$ (d'après la relation ...)

$$\boxed{P^3_{k+3} = (x - x_{k+6})(x - x_{k+4})\, P^3_{k-1}}$$

$$P^2_{k+4} = (\ell_{k+4}^2 - \ell_{k+2}^4)\, P^3_{k+3} + (x - x_3)\, P^4_{k+2}$$ (relation de Thiele)

$$P^2_{k+4} = (\ell_{k+4}^2 - \ell_{k+2}^4)(x - x_{k+6})(x - x_{k+4})\, P^3_{k-1}$$

$$+ (x - x_3)(\ell_{k+2}^4 - \ell_k^4)\, P^4_{k+1} + (x - x_3)(x - x_{k+5})\, P^4_k$$

$$= (\ell_{k+4}^2 - \ell_{k+2}^4)(x - x_{k+6})(x - x_{k+4})\, P^3_{k-1}$$

$$+ (\ell_{k+2}^4 - \ell_k^4)(x - x_3)(x - x_{k+4})\, P^3_{k-1}$$

$$+ (x - x_{k+5})(x - x_3)(\ell_k^4 - \ell_{k-2}^4)\, P^3_{k-1}$$

$$+ (x - x_{k+5})(x - x_3)(x - x_{k+3})\, P^4_{k-2}$$

$$(x - x_3)\, P^4_{k-2} = P^2_k + (\ell_{k-2}^4 - \ell_k^2)\, P^3_{k-1}$$

d'où :

$$P^2_{k+4} = (f^2_{k+4} - f^4_{k+2})(x - x_{k+6})(x - x_{k+4})\, P_{k-1}$$ 114 II-5

$$+ \quad (f^4_{k+2} - f^4_{k})\quad (x - x_{k+4})(x - x_3)\quad P^3_{k-1}$$

$$+ \quad (f^4_{k} - f^4_{k-2})\,(x - x_{k+5})(x - x_3)\quad P^3_{k-1}$$

$$+ \quad (f^4_{k-4} - f^2_{k})\,(x - x_{k+5})(x - x_{k+3})\, P^3_{k-1}$$

$$+ \quad (x - x_{k+5})(x - x_{k+3})\, P^2_{k}$$

mais $(x - x_2)\, P^3_{k-1} = P^2_{k+1}$

$$P^2_{k+4}(x - x_2) = \Big\{ f^2_{k+4}\,(x - x_{k+6})(x - x_{k+4}) +$$

$$f^4_{k+2}\,(x - x_{k+4})(x_{k+6} - x_3)$$

$$- f^4_{k}\,(x - x_3)(x_{k+5} - x_{k+4})$$

$$- f^4_{k-2}\,(x - x_{k+5})(x_{k+3} - x_3)$$

$$- f^2_{k}\,(x - x_{k+3})(x - x_{k+5}) \Big\}\, P^2_{k+1}$$

$$+ \quad (x - x_{k+5})(x - x_{k+3})(x - x_2)\, P^2_{k}$$

$$P^3_{k+3}(x - x_2) = P^2_{k+3}(x - x_{k+6})$$

$$(x - x_{k+6})(x - x_{k+4})(x - x_2)\, P^3_{k-1} = P^2_{k+3}(x - x_{k+6})$$

$$\boxed{P^2_{k+3} = (x - x_{k+4})\, P^2_{k+1}}$$

A5

On a aussi exprimé la fraction rationnelle $R^2_{k+4}(x)$ en fonction de $P^2_{k+1}(x)$, $P^2_k(x)$, $Q^2_{k+1}(x)$ et $Q^2_k(x)$: Convergents successifs de la 2e diagonale descendante de la table des D. R.

Proposition 5

Pourvu que :

1) $$\rho^3_{k-1} = \rho^4_{k-1} = \rho^1_{k+1} = \rho^2_{k+1} = \rho^3_{k+1} = \rho^4_{k+1} = \rho^0_{k+3} = \rho^1_{k+3} = \rho^2_{k+3}$$
$$= \rho^3_{k+3} = \rho^0_{k+5} = \rho^1_{k+5} = \rho \neq \infty$$

2) ρ^4_{k-2}, ρ^4_k, ρ^2_k, ρ^4_{k+2}, ρ^2_{k+4} sont finies

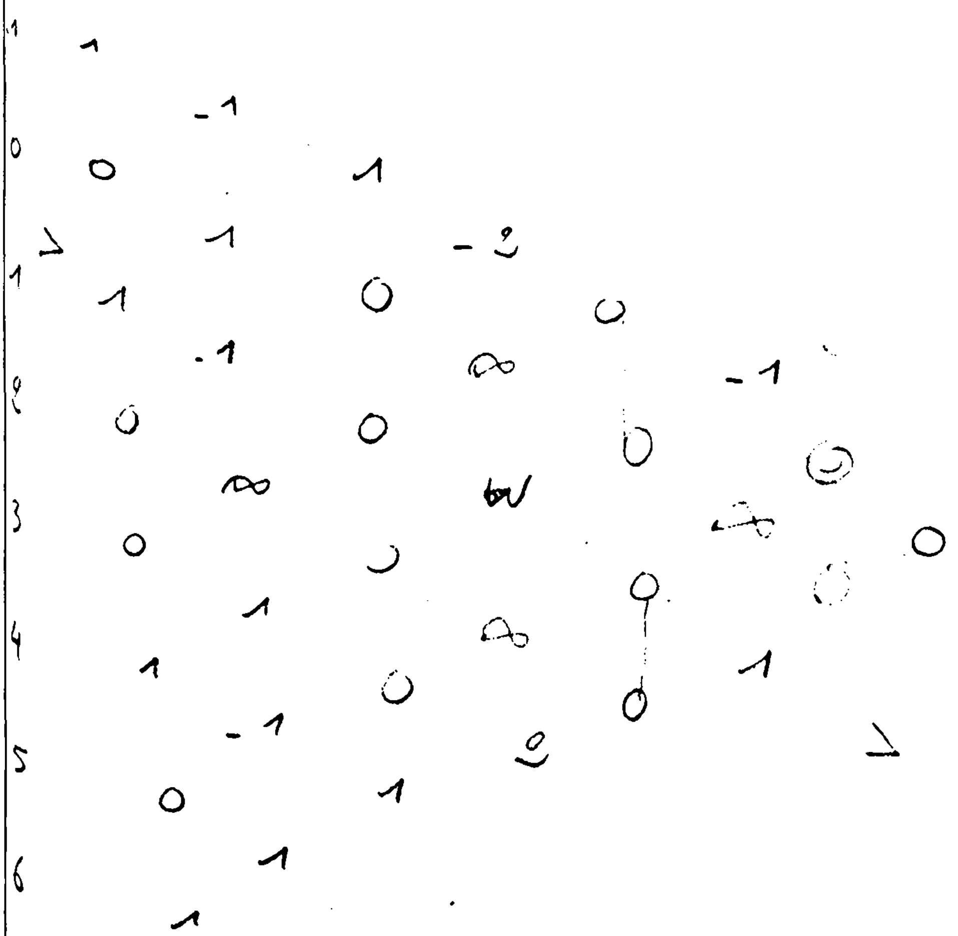
on a :

* $$P^2_{k+3}(x) = (x - x_{k+4})\, P^2_{k+1}(x)$$

* $$P^2_{k+4}\,(x - x_2) = \Big[\rho^2_{k+4}(x - x_{k+6})(x - x_{k+4}) + \rho^4_{k+2}(x - x_{k+4})(x_{k+6} - x_3) - \rho^4_k (x - x_3)(x_{k+5} - x_{k+4})$$
$$- \rho^4_{k-2}(x - x_{k+5})(x_{k+3} - x_3) - \rho^2_k (x - x_{k+3})(x - x_{k+5})\Big] \times P^2_{k+1}$$
$$+ (x - x_{k+5})(x - x_{k+3})(x - x_2)\, P^2_k.$$

Exemple :

On considère la [illegible] suivante



Dans cet exemple on empruntera la troisième diagonale descendante pour calculer $P_5^2(x)$ et $P_4^2(x)$ en fonction de $P_2^2(x)$ et $P_1^2(x)$.

* $Q_5^2(x)$ et $Q_4^2(x)$ en fonction de

$Q_2^2(x)$ et $Q_1^2(x)$.

dans cet exemple $k = 2$

$P_2^2(x) = 0$

$P_1^2(x) = x - 2$

$\varphi_2^2(x) = x - 1$

$\varphi_1^2(x) = -1$

$$P_5^2(x)(x - x_2) = \Big[f_5^2 (x - x_7)(x - x_5) + f_3^4 (x - x_5)(x_7 - x_3) - f_1^4 (x - x_3)(x_6 - x_5) - f_{-1}^4 (x - x_6)(x_4 - x_3) - f_1^2 (x - x_4)(x - x_6) \Big] \times P_2^2(x) + (x - x_6)(x - x_4)(x - x_2) P_1^2(x).$$

$$\varphi_5^2(x)(x - x_2) = \Big[f_5^2 (x - x_7)(x - x_5) + f_3^4 (x - x_5)(x_7 - x_3) - f_1^4 (x - x_3)(x_6 - x_5) - f_{-1}^4 (x - x_6)(x_4 - x_3) - f_1^2 (x - x_4)(x - x_6) \Big] \times \varphi_2^2(x) + (x - x_6)(x - x_4)(x - x_2) \varphi_1^2(x).$$

$$R_5^2(x) = \frac{P_5^2(x)}{\varphi_5^2(x)}$$

$$P_5^2(x)\,(x-1) = (x-5)(x-3)(x-1)(x-2)$$

$$P_5^2(x) = (x-5)(x-3)(x-2)$$

$$\varphi_5^2(x)\,(x-1) = \Big[(x-6)(x-4) + 2(x-4)(6-2)$$
$$- (x-5) \ldots - 0\times(x-5)(3-2) + (x-3)(x-5)\Big]\times(x-1)$$
$$+ (x-5)(x-3)(x-1)\times(-1)$$

$$= \Big[(x-6)(x-4) + 8(x-4) - (x-2) + (x-3)(x-5)\Big](x-1)$$
$$- (x-5)(x-3)(x-1)$$

d'où :

$$\varphi_5^2(x) = \Big[(x-4)(x+2) - (x-2) + (x-3)(x-5)\Big] - (x-5)(x-3)$$
$$= x^2 - 2x - 8 - x + 2 = x^2 - 3x - 6$$

d'où

$$R_5^2(x) = \frac{(x-5)(x-3)(x-2)}{x^2 - 3x - 6}$$

Vérification

$$R_5^2(5) = R_5^2(3) = R_5^2(2) = 0$$

$$R_5^2(1) = \frac{(-4)\times(-2)(-1)}{1-3-6} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$R_5^2(4) = \frac{(-1)\times(1)\times(2)}{16-12-6} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$R_5^2(6) = \frac{1\times(3)\times(4)}{36-18-6} = \frac{12}{12} = 1$$

* On voit aussi que R_5 [illegible]
[illegible]

* $P_4^0(\lambda) = (\lambda - \lambda_5)\, P_5^0(\lambda)$

$Q_4^0 = (\lambda - \lambda_5)\, Q_5^0(\lambda)$

d'où

$$R_4^0(\lambda) = \frac{[illegible]}{(\lambda-4)(\lambda-1)} = \frac{0}{(\lambda-4)(\lambda-1)}$$

Notons qu'avec Meinguet [15] que le problème d'interpolation rationnelle est dégénéré dès que la fonction interpolante s'annule en plus de la moitié des points. En effet pour que la fraction rationnelle Ψ/Φ de degré n/n s'annule en $n+1$ points, il faudrait que son numérateur soit identiquement nul ; elle ne peut donc prendre de valeurs distinctes de 0 aux n autres points qui sont donc non atteignables.

Chapitre 1 Propri[illegible]

[illegible]

Description du programme de Thiele avec les nouvelles relations

La table des D.R étant calculée à l'aide du programme du ρ-algorithme (voir Chap I-2) on note:

Formule 1: formule classique de Thiele

Formule 2: " relation qui permet de traverser une singularité carrée de taille 2"

Formule 3': " relation qui permet de traverser une singularité non carrée (en escalier) de taille 3"

Formule 3: " relation qui permet de traverser une singularité carrée de taille 3.

Formule 4: " relation qui permet de traverser une singularité carrée de taille 4.

Nous prenons systématiquement la première diagonale descendante de la table des D.R pour déterminer la fraction continue d'interpolation de Thiele.

Le sous programme suivant prend en compte les formules précédentes à l'exclusion de toute autre. En particulier, la formule de la proposition 5 n'est pas intégrée dans ce sous programme.

Des... (N, X, INF, T, P, φ)

Initialisation :

$P_1 := 1$; $P_2 := T'_2$; $Q_1 := 0$; $Q_2 := 1$; $k := 3$;

boucle

tant que $k \leq n+1$ faire

si $T'_{k+1} \neq \infty$

alors formule 1 ; $k := k+1$

sinon si $T^2_{k-1} \neq \infty$

alors si $T'_{k+3} \neq \infty$

alors formule 2 ; $k := k+3$

sinon si $T^2_{k+1} \neq \infty$

alors formule 3' ; $k := k+5$

sinon si $T^3_{k-1} \neq \infty$

alors si $T'_{k+5} \neq \infty$

alors formule 3 ; $k := k+5$

sinon si $T^4_{k-1} \neq \infty \wedge T'_{k+7} \neq \infty \wedge T^4_{k+1} \neq \infty$

alors formule 4 ; $k := k+7$

sinon stop

sinon stop

sinon stop

3 Élimination des points non atteignables à l'aide de la méthode de perturbation
[illegible] [17]

Nous savons (cf. [illegible]) qu'un point x_0 qui est non atteignable pour la fraction rationnelle $R(x) = P(x)/\varphi(x)$ vérifie :

$$P(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x_0) = 0$$

Il est important pour ne pas dire essentiel de savoir reconnaître si un point est atteignable ou non pour une fraction rationnelle.
Ceci revient à tester la nullité simultanée de $P(x_i)$ et $\varphi(x_i)$ pour chaque x_i.

Tester la nullité d'un nombre n'est pas un problème trivial. Pour le résoudre nous utiliserons une technique dérivée de la méthode P.P de J. VIGNES [18].

Exemple.

3	0					
		1/2				
2	2		2/3			
		-1		8		$R_{3/2}(x)$.
1	1		1		1	
		∞		∞		31/5 $R_{3/3}(x)$.
0	1		.		1	
		∞		∞		
-1	1		1			
		-1/3				
-2	-2					

F.C.I donnée par la table des O.R ci-dessus est : $R(x) = 0 + \frac{x+3|}{|1/2} + \frac{x+2|}{|2/3} + \frac{x+1|}{|15/2} + \frac{x|}{|1/3} + \frac{x-1|}{|-9/5}$

Calculons les convergents successifs

(x) :	1	0	$x+3$	$\frac{9}{3}(x+3)$	$(x+3)(x+6)$
(x) :	0	1	$1/2$	$x+7/3$	$8x+18$

$(x+3)(x+2)$	$\frac{1}{5}(x+3)[5x^2+16x-18]$
$(x+3)(x+2)$	$\frac{1}{5}[31x^2+5x-144]$

On remarque que l'interpolant $R_{3/2}(x) = \dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)}$ admet 2 points non atteignables $\left(R_{3/2}(-2)=\frac{0}{0}\ ;\ R_{3/2}(-3)=\frac{0}{0}\right)$ alors que l'interpolant qui vient juste après c'est à dire $R_{3/3}(x) = \dfrac{1/5\ (x+3)\ [5x^2+16x-48]}{1/5\ [31x^2+5x-144]}$ interpole tous les points $(x_i\ ,\ i=0,1,..,5)$

Maintenant traitons l'exemple précédent sur machine et examinons les valeurs de la fraction continue d'interpolation $Fc(x_i)$ $i=9\ 1,\ 4$

<u>Exemple 1</u> (Dans la méthode de Vignes)

```
EFS
******

)= -3.000000      F( 1)=  0.000000
)= -2.000000      F( 2)=  2.000000
)= -1.000000      F( 3)=  1.000000
)=  0.000000      F( 4)=  1.000000
    1.000000      F( 5)=  1.000000
.0000010


 DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
**********************************

.30000D+01       0.00000D+00
                             0.50000D+00
.20000D+01       0.20000D+01              0.66667D+00
                             -.10000D+01              0.80000D+01
.10000D+01       0.10000D+01              0.10000D+01              0.10000D+01
                             0.17000D+36              0.92234D+19
.00000D+00       0.10000D+01              0.10000D+01
                             0.17000D+36
.10000D+01       0.10000D+01


TATS:
*******
```

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)
-3.00	0.00000D+00	-0.72642D-17	0.0000000000000000D+00	0.00
-2.00	0.52042D-17	0.27105D-17	0.1920000000000000D+01	2.00
-1.00	0.20000D+01	0.20000D+01	0.1000000000000000D+01	1.00
0.00	0.60000D+01	0.60000D+01	0.1000000000000000D+01	1.00
1.00	0.12000D+02	0.12000D+02	0.1000000000000000D+01	1.00

On remarque que $Fc(-3) = R_{3/2}(-3) = f(-3) = 0$ alors que $x = -3$ est un point non atteignable, comme l'a montré le calcul fait à la main.

$= 1,92$

$x = -2$ est aussi pour un point non

adéquable

Il s'en suit que la connaissance de la valeur de la fraction rationnelle d'interpolation $R(x) = P(x) / Q(x)$ ne permet pas toujours de s'apercevoir de la non adéquation d'un point d'interpolation x_0. Il est donc confronté au problème suivant : Quand peut-on dire que $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$?

La solution nous sera donnée par la méthode de perturbation de J. VIGNES [12]. La F.C.I étant calculée au moyen de l'algorithme de Thiele et des nouvelles relations, nous appliquons la méthode de perturbation de J. VIGNES qui nous donne le nombre de chiffres significatifs exacts pour chaque polynôme $P(x)$ et $Q(x)$ et en tout point d'interpolation. Etant donné les erreurs engendrées par le calcul sur machine ; nous dirons qu'un point x_0 est non adéquable pour la fraction rationnelle $P(x) / Q(x)$ quand nous

avons : $|P(x_0)| \leq 10^{-C_P}$ et $|Q(x_0)| \leq 10^{-C_Q}$

où C_P et C_Q représentent les nombres de chiffres significatifs exacts respectifs pour $P(x_0)$ et $Q(x_0)$.

Exemple 2 (sans la méthode de signes)

EFS
****

```
 1)= -3.000000     F( 1)=  0.000000
 2)= -2.000000     F( 2)=  2.000000
 3)= -1.000000     F( 3)=  1.000000
 4)=  0.000000     F( 4)=  1.000000
 5)=  1.000000     F( 5)=  1.000000
 6)=  2.000000     F( 6)= -2.000000
 0.0000010
```

E DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
****

```
.30000D+01    0.00000D+00
                          0.50000D+00
.20000D+01    0.20000D+01              0.66667D+00
                          -.10000D+01               0.80000D+01
.10000D+01    0.10000D+01              0.10000D+01               0.10000D+01
                          0.17000D+36               0.92234D+19               0.62000D+01
0.00000D+00   0.10000D+01              0.10000D+01               0.10000D+01
                          0.17000D+36               0.92234D+19
0.10000D+01   0.10000D+01              0.10000D+01
                          -.33333D+00
0.20000D+01   -.20000D+01
```

LTATS:
****

I	X(T)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)
1	-3.00	0.00000D+00	0.24000D+02	0.0000000000000000D+00	0.00
2	-2.00	-0.12000D+02	-0.60000D+01	0.2000000000000000D+01	2.00
3	-1.00	-0.23600D+02	-0.23600D+02	0.1000000000000000D+01	1.00
4	0.00	-0.28800D+02	-0.28800D+02	0.1000000000000000D+01	1.00
5	1.00	-0.21600D+02	-0.21600D+02	0.1000000000000000D+01	1.00
6	2.00	0.40000D+01	-0.20000D+01	-0.2000000000000000D+01	-2.00

Exemples

* Exemple 1 a été traité d'abord sans la méthode de Vignes ensuite avec la méthode Vignes ; Contient 2 points non alleignables visible et invisible.

* Exemple 2 ; C'est l'exemple 1 avec 1 point de plus, a été traité sans ~~et~~ sans la méthode de Vignes ; Tous points sont alleignables.

* Exemple 3 Sur cet exemple figure à la 1ère diagonale un bloc singulier carré de taille 2, Contient 3 points non alleignables et non visibles

* Exemple 4 Sur cet exemple figurent 3 blocs singuliers dont 1 n'est pas carré. Contrairement à [6], la fraction rationnelle a été calculée en suivant la première diagonale descendante. Ici tous les points sont alleignables.

* Exemple 5 et 6 : Sur ces exemples, on calcule la fraction continue d'interpolation en suivant la première diagonale descendante bien que celle-ci comporte deux blocs singuliers consécutifs carrés (2 - 2 pour l'exemple 5 et 3 - 2 pour l'exemple 6)

* Exemple 7. Sur cet exemple, on calcule la fraction continue d'interpolation en suivant la première diagonale descendante bien que celle-ci comporte un bloc singulier carré de taille 4.

* Exemple 8. Pour exemple avec 21 points dont 11 nuls. Ici il y a 10 points non alignables.

* Exemple 9. C'est l'exemple 8 avec un point de plus non nul c'est-à 22 points dont 11 nuls. Ici tous les points sont alignables.

Exemple 1 (avec la méthode de Vignes)

```
FS
******

)= -3.000000        F( 1)=  0.000000
)= -2.000000        F( 2)=  2.000000
)= -1.000000        F( 3)=  1.000000
)=  0.000000        F( 4)=  1.000000
)=  1.000000        F( 5)=  1.000000
.0000010


 DES DIFFERENCES RECIPROQUFS :
***********************************

.30000D+01      0.00000D+00
                            0.50000D+00
.20000D+01      0.20000D+01              0.66667D+00
                            -.10000D+01              0.80000D+01
.10000D+01      0.10000D+01              0.10000D+01              0.10000D+01
                            0.17000D+36              0.92234D+19
.00000D+00      0.10000D+01              0.10000D+01
                            0.17000D+36
.10000D+01      0.10000D+01


TATS:
******
```

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
-3.00	0.00000D+00	-0.72642D-17	0.0000000000000000D+00	0.00	NON
-2.00	0.52042D-17	0.27105D-17	0.1920000000000000D+01	2.00	NON
-1.00	0.20000D+01	0.20000D+01	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
0.00	0.60000D+01	0.60000D+01	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
1.00	0.12000D+02	0.12000D+02	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI

Exemple 2 (avec la méthode de lignes)

```
EFS
******

)= -3.000000      F( 1)=  0.000000
)= -2.000000      F( 2)=  2.000000
)= -1.000000      F( 3)=  1.000000
)=  0.000000      F( 4)=  1.000000
)=  1.000000      F( 5)=  1.000000
)=  2.000000      F( 6)= -2.000000
0.0000010
```

```
 DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
*********************************

.30000D+01     0.00000D+00
                          0.50000D+00
.20000D+01     0.20000D+01             0.66667D+00
                          -.10000D+01             0.80000D+01
.10000D+01     0.10000D+01             0.10000D+01             0.10000D+01
                          0.17000D+36             0.92234D+19             0.62000D+01
.00000D+00     0.10000D+01             0.10000D+01             0.10000D+01
                          0.17000D+36             0.92234D+19
.10000D+01     0.10000D+01             0.10000D+01
                          -.33333D+00
.20000D+01     -.20000D+01
```

TATS:
****

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
-3.00	0.00000D+00	0.24000D+02	0.0000000000000000D+00	0.00	OUI
-2.00	-0.12000D+02	-0.60000D+01	0.2000000000000000D+01	2.00	OUI
-1.00	-0.23600D+02	-0.23600D+02	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
0.00	-0.28800D+02	-0.28800D+02	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
1.00	-0.21600D+02	-0.21600D+02	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
2.00	0.40000D+01	-0.20000D+01	-0.2000000000000000D+01	-2.00	OUI

Exemple 3


```
*****

 0.000000      F( 1)= -2.000000
 1.000000      F( 2)= -1.000000
 2.000000      F( 3)=  0.000000
 3.000000      F( 4)=  0.000000
 4.000000      F( 5)=  0.000000
 5.000000      F( 6)=  1.000000
 6.000000      F( 7)=  0.000000
.0000010
```

```
DFS DIFFEPENCFS RECIPRODUFS :
**********************************

.00000D+00    -.20000D+01
                          0.10000D+01
.10000D+01    -.10000D+01              0.34000D+36
                          0.10000D+01               0.10000D+01
.20000D+01    0.00000D+00              0.11765D-34               -.86736D-18
                          0.17000D+36               -.46117D+19               0.12000D+01
.30000D+01    0.00000D+00              0.00000D+00               0.21684D-18               -.75894D-18
                          0.17000D+36               -.46117D+19               -.61489D+19
.40000D+01    0.00000D+00              0.00000D+00               0.00000D+00
                          0.10000D+01               -.46117D+19
.50000D+01    0.10000D+01              -.65052D-18
                          -.10000D+01
.60000D+01    0.00000D+00
```

```
ATS:
*******
```

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
0.00	-0.19949D-16	0.99747D-17	-0.2000000000000000D+01	-2.00	NON
1.00	0.62884D-17	-0.62884D-17	-0.1000000000000000D+01	-1.00	NON
2.00	0.26021D-16	-0.60000D+01	-0.4336808689942018D-17	0.00	OUI
3.00	0.34694D-16	-0.12000D+02	-0.2891205793294678D-17	0.00	OUI
4.00	0.26888D-16	-0.12000D+02	-0.2240684489803376D-17	0.00	OUI
5.00	0.65052D-18	0.65052D-18	0.1000000000000000D+01	1.00	NON
6.00	-0.47705D-16	0.30000D+02	-0.1590163186312073D-17	0.00	OUI

On remarque que :

$Fc(0) = f(0) = -2$

$Fc(-1) = f(-1) = -1$

$Fc(5) = f(5) = 1$

alors que le critère utilisé ne reconnait pas ces 3 abscisses comme atteignables. On peut noter que les valeurs $P(0)$, $Q(0)$, $P(-1)$, $Q(-1)$, $P(5)$ et $Q(5)$ sont de de l'ordre de 10^{-16} alors que les coefficients et les abscisses sont de l'ordre de l'unité, ce qui signifie que ces valeurs sont non significatives. Le fait que $Fc(i)$ soit confondu avec $f(i)$ pour $i = 0, -1$ et 5 peut être attribué au fait qu'il existe une corrélation entre les erreurs de calcul dans $P(x)$ et $Q(x)$.

Exemple 4

```
FS
******

 0.000000     F( 1)= -2.000000
 1.000000     F( 2)= -1.000000
 2.000000     F( 3)=  0.000000
 3.000000     F( 4)=  0.000000
 4.000000     F( 5)=  0.000000
 5.000000     F( 6)=  1.000000
 6.000000     F( 7)=  0.000000
 7.000000     F( 8)= -1.000000
 8.000000     F( 9)= -2.000000
.0000001
```

```
DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
***********************************

0.000000D+00   -.20000D+01
                            0.10000D+01
0.100000D+01   -.10000D+01               0.34000D+36
                            0.10000D+01               0.10000D+01
0.200000D+01   0.000000D+00              0.11765D-34               -.86736D-18
                            0.17000D+36               -.46117D+19               0.12000D+01
0.300000D+01   0.00000D+00               0.00000D+00               0.21684D-18               -.75894D-18
                            0.17000D+36               -.46117D+19               -.61489D+19               0.24286D+00
0.400000D+01   0.00000D+00               0.00000D+00               0.00000D+00               0.37947D-18
                            0.10000D+01               -.46117D+19               -.61489D+19               -.78571D+00
0.500000D+01   0.10000D+01               -.65052D-18               -.65052D-18               0.15179D-17
                            -.10000D+01               -.10000D+01               -.10000D+01
0.600000D+01   0.00000D+00               0.34000D+36               0.34000D+36
                            -.10000D+01               -.10000D+01
0.700000D+01   -.10000D+01               0.34000D+36
                            -.10000D+01
0.800000D+01   -.20000D+01

               -.77778D+01
```

TATS:
****

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
0.00	-0.11200D+04	0.56000D+03	-0.2000000000000000D+01	-2.00	OUI
1.00	-0.23333D+03	0.23333D+03	-0.1000000000000000D+01	-1.00	OUI
2.00	-0.26021D-15	0.60000D+02	-0.4336808689942018D-17	0.00	OUI
3.00	0.38549D-16	-0.13333D+02	-0.2891205793294678D-17	0.00	OUI
4.00	0.35851D-16	-0.16000D+02	-0.2240684489803376D-17	0.00	OUI
5.00	0.46667D+02	0.46667D+02	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
6.00	-0.30743D-15	0.19333D+03	-0.1590163186312073D-17	0.00	OUI
7.00	-0.46667D+03	0.46667D+03	-0.1000000000000000D+01	-1.00	OUI
8.00	-0.18667D+04	0.93333D+03	-0.2000000000000000D+01	-2.00	OUI

Nous avons indiqué le chemin suivi dans [6] d'un double trait

ÉFS
****


```
(1)=  0.000000      F( 1)= -2.000000
(2)=  1.000000      F( 2)= -1.000000
(3)=  2.000000      F( 3)=  0.000000
(4)=  3.000000      F( 4)=  0.000000
(5)=  4.000000      F( 5)= -1.000000
(6)=  5.000000      F( 6)= -2.000000
(7)=  6.000000      F( 7)=  0.000000
(8)=  7.000000      F( 8)=  0.000000
(9)=  8.000000      F( 9)=  1.000000
  0.0000010
```

LE DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
****

```
0.00000D+00   -.20000D+01
                          0.10000D+01
0.10000D+01   -.10000D+01              0.34000D+36
                          0.10000D+01               0.10000D+01
0.20000D+01   0.00000D+00              0.11765D-34               .40000D+01
                          0.17000D+36               0.19608D-35               0.85000D+36
0.30000D+01   0.00000D+00              -.58824D-35               .40000D+01              -.40000D+01
                          -.10000D+01               -.10000D+01               0.25000D+00             0.20000D+01
0.40000D+01   -.10000D+01              0.34000D+36               .21684D-18              -.27756D-16
                          -.10000D+01               -.10000D+01               -.23058D+18             0.92857D+00
0.50000D+01   -.20000D+01              -.66667D+00               .21901D-16              0.26021D-17
                          0.50000D+00               0.50000D+01               -.52042D-18
0.60000D+01   0.00000D+00              0.73184D-17               -.10000D+01
                          0.17000D+36               0.10000D+01
0.70000D+01   0.00000D+00              0.73184D-17
                          0.10000D+01
0.80000D+01   0.10000D+01

              -.74667D+01
```

TATS:
****

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
0.00	0.18816D+04	0.94080D+03	-0.2000000000000000D+01	-2.00	OUI
1.00	-0.44800D+03	0.44800D+03	-0.1000000000000000D+01	-1.00	OUI
2.00	-0.92630D-15	0.21360D+03	-0.4336808689942018D-17	0.00	OUI
3.00	-0.35851D-15	0.12400D+03	-0.2891205793294678D-17	0.00	OUI
4.00	-0.89600D+02	0.89600D+02	-0.1000000000000000D+01	-1.00	OUI
5.00	-0.89600D+02	0.44800D+02	-0.2000000000000000D+01	-2.00	OUI
6.00	0.26460D-15	-0.52000D+02	-0.5088522196198634D-17	0.00	OUI
7.00	0.45945D-14	-0.21840D+03	-0.2103696405787747D-16	0.00	OUI
8.00	-0.44800D+03	-0.44800D+03	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI

Exemple 6

```
1.000000      F( 1)=  1.000000
2.000000      F( 2)=  1.000000
3.000000      F( 3)=  1.000000
4.000000      F( 4)=  2.000000
5.000000      F( 5)=  3.000000
6.000000      F( 6)=  3.000000
7.000000      F( 7)=  3.000000
8.000000      F( 8)=  6.000000
9.000000      F( 9)=  9.000000
10.000000     F(10)=  9.000000
11.000000     F(11)=  9.000000
12.000000     F(12)= 18.000000
13.000000     F(13)= 27.000000
14.000000     F(14)= 27.000000
15.000000     F(15)= 27.000000
60010
```

```
DIFFEPENCES RECIPPOQUES :
*******************************

000D+01         0.10000D+01
                              0.17000D+36
000D+01         0.10000D+01                 0.10000D+01
                              0.17000D+36                 -.34000D+36
000D+01         0.10000D+01                 0.10000D+01                 0.10000D+01
                              0.10000D+01                 0.10000D+01                 0.60000D+01
000D+01         0.20000D+01                 0.34000D+36                 0.20000D+01                 0.10200D+37
                              0.10000D+01                 0.10000D+01                 0.60000D+01                 0.60000D+01
000D+01         0.30000D+01                 0.30000D+01                 0.30000D+01                 0.18000D+01
                              0.17000D+36                 0.17000D+36                 0.10000D+01                 0.49275D+00
000D+01         0.30000D+01                 0.30000D+01                 0.30000D+01                 -.12000D+02
                              0.17000D+36                 -.85000D+35                 0.60000D+00                 0.96296D+00
000D+01         0.30000D+01                 0.30000D+01                 0.30000D+01                 0.72857D+01
                              0.33333D+00                 0.33333D+00                 0.20000D+01                 0.20000D+01
000D+01         0.60000D+01                 0.34000D+36                 0.60000D+01                 0.10200D+37
                              0.33333D+00                 0.33333D+00                 0.20000D+01                 0.20000D+01
000D+01         0.90000D+01                 0.90000D+01                 0.90000D+01                 0.54000D+01
                              0.17000D+36                 0.17000D+36                 0.33333D+00                 0.16425D+00
000D+02         0.90000D+01                 0.90000D+01                 0.90000D+01                 -.36000D+02
                              0.17000D+36                 -.85000D+35                 0.20000D+00                 0.32099D+00
000D+02         0.90000D+01                 0.90000D+01                 0.90000D+01                 0.21857D+02
                              0.11111D+00                 0.11111D+00                 0.66667D+00                 0.66667D+00
000D+02         0.18000D+02                 0.34000D+36                 0.18000D+02                 0.10200D+37
                              0.11111D+00                 0.11111D+00                 0.66667D+00
000D+02         0.27000D+02                 0.27000D+02                 0.27000D+02
                              0.17000D+36                 0.17000D+36
000D+02         0.27000D+02                 0.27000D+02
                              0.17000D+36
000D+02         0.27000D+02

                0.34337D+00
```



```
                              0.24215D+01
                0.50137D+01                 -.12931D+02
                              0.18642D+01                 0.25021D+01
                0.15000D+02                 0.43120D+01                 -.99161D+00
                              0.92857D+00                 0.23951D+00                 0.10383D+01
                0.66000D+01                 -.11652D+02                 0.15283D+02                 -.18731D+02
                              0.38068D+00                 0.68504D+00                 0.62671D+00
                0.10421D+01                 0.24490D+02                 -.20761D+03
                              0.80715D+00                 0.63333D+00
                0.15041D+02                 -.38793D+02
                              0.62140D+00
                0.45000D+02
```

```
X(I)      P(XI)          Q(XI)              FC(XI)              F(XI)        ATTEIGNABLE
*******************************************************************************************
```

ULTATS:
****

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
1.00	-0.19411D+07	-0.19411D+07	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
2.00	-0.61186D+06	-0.61186D+06	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
3.00	-0.17461D+06	-0.17461D+06	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
4.00	-0.14826D+06	-0.74132D+05	0.2000000000000000D+01	2.00	OUI
5.00	-0.17315D+06	-0.57717D+05	0.3000000000000000D+01	3.00	OUI
6.00	-0.12900D+06	-0.43001D+05	0.3000000000000000D+01	3.00	OUI
7.00	-0.75335D+05	-0.25112D+05	0.3000000000000000D+01	3.00	OUI
8.00	-0.10858D+06	-0.18097D+05	0.6000000000000000D+01	6.00	OUI
9.00	-0.23047D+06	-0.25608D+05	0.9000000000000000D+01	9.00	OUI
10.00	-0.32193D+06	-0.35770D+05	0.9000000000000000D+01	9.00	OUI
11.00	-0.31703D+06	-0.35226D+05	0.9000000000000000D+01	9.00	OUI
12.00	-0.67133D+06	-0.37296D+05	0.1800000000000000D+02	18.00	OUI
13.00	-0.32190D+07	-0.11922D+06	0.2700000000000000D+02	27.00	OUI
14.00	-0.12513D+08	-0.46344D+06	0.2700000000000000D+02	27.00	OUI
15.00	-0.37743D+08	-0.13979D+07	0.2700000000000000D+02	27.00	OUI

I73

1374

Exemple 7

```
TS
*****

)=  1.000000      F( 1)=  1.000000
)=  2.000000      F( 2)=  1.000000
)=  3.000000      F( 3)=  1.000000
)=  4.000000      F( 4)=  1.000000
)=  5.000000      F( 5)=  0.500000
)=  6.000000      F( 6)=  0.500000
)=  7.000000      F( 7)=  0.500000
)=  8.000000      F( 8)=  0.500000
)=  9.000000      F( 9)=  0.125000
)= 10.000000      F(10)=  0.125000
)= 11.000000      F(11)=  0.125000
)= 12.000000      F(12)=  0.125000
.0000010


 DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
*************************************

.10000D+01    0.10000D+01
                          0.17000D+36
.20000D+01    0.10000D+01               0.10000D+01
                          0.17000D+36               0.17000D+36
.30000D+01    0.10000D+01               0.10000D+01               0.10000D+01
                          0.17000D+36               0.17000D+36               0.32903D+35
.40000D+01    0.10000D+01               0.10000D+01               0.10000D+01               0.10000D+01
                          -.20000D+01               -.80000D+01               -.18000D+02               -.32000D+02
.50000D+01    0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00
                          0.17000D+36               0.17000D+36               0.36893D+20               -.16533D+02
.60000D+01    0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00
                          0.17000D+36               0.17000D+36               0.45407D+20               -.96000D+01
.70000D+01    0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00
                          0.17000D+36               0.17000D+36               0.59030D+20               -.21867D+02
.80000D+01    0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00               0.50000D+00
                          -.26667D+01               -.10667D+02               -.24000D+02               -.42667D+02
.90000D+01    0.12500D+00               0.12500D+00               0.12500D+00               0.12500D+00
                          0.17000D+36               0.17000D+36               -.60296D+18
.10000D+02    0.12500D+00               0.12500D+00               0.12500D+00
                          0.17000D+36               0.17000D+36
.11000D+02    0.12500D+00               0.12500D+00
                          0.17000D+36
.12000D+02    0.12500D+00


              0.10172D+01
                          -.23958D+01
              0.16538D+01               0.83333D+00
                          -.14583D+02               -.32733D+02
              -.15217D+00               0.22727D+00
                          0.11771D+02
              0.11538D+00
```

LTATS:

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
1.000	0.18295D+06	0.18295D+06	0.1000000000000000D+01	1.000	OUI
2.000	0.69912D+05	0.69912D+05	0.1000000000000000D+01	1.000	OUI
3.000	0.20952D+05	0.20952D+05	0.1000000000000000D+01	1.000	OUI
4.000	0.38160D+04	0.38160D+04	0.1000000000000000D+01	1.000	OUI
5.000	-0.98000D+02	-0.19600D+03	0.5000000000000000D+00	0.500	OUI
6.000	-0.78000D+02	-0.15600D+03	0.5000000000000000D+00	0.500	OUI
7.000	0.28200D+03	0.56400D+03	0.5000000000000000D+00	0.500	OUI
8.000	0.18200D+03	0.36400D+03	0.5000000000000000D+00	0.500	OUI
9.000	-0.56400D+03	-0.45120D+04	0.1250000000000000D+00	0.125	OUI
10.000	-0.29880D+04	-0.23904D+05	0.1250000000000000D+00	0.125	OUI
11.000	-0.97080D+04	-0.77664D+05	0.1250000000000000D+00	0.125	OUI
12.000	-0.24948D+05	-0.19958D+06	0.1250000000000000D+00	0.125	OUI

Exemple 8

ES
*****

-4.000000	F(1)= 0.000000
-3.000000	F(2)= -1.000000
-2.000000	F(3)= 1.000000
-1.000000	F(4)= 1.000000
0.000000	F(5)= 0.000000
1.000000	F(6)= 1.000000
2.000000	F(7)= 0.000000
3.000000	F(8)= 0.000000
4.000000	F(9)= 0.000000
5.000000	F(10)= 1.000000
6.000000	F(11)= 0.000000
7.000000	F(12)= 1.000000
8.000000	F(13)= 0.000000
9.000000	F(14)= 1.000000
10.000000	F(15)= 0.000000
11.000000	F(16)= 0.000000
12.000000	F(17)= 1.000000
13.000000	F(18)= 0.000000
14.000000	F(19)= 1.000000
15.000000	F(20)= 2.000000
16.000000	F(21)= 0.000000

0000010

E DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
****

139

```
-.40000D+01   0.00000D+00
                           -.10000D+01
-.30000D+01   -.10000D+01                0.33333D+00
                           0.50000D+00                0.50000D+01
-.20000D+01   0.10000D+01                0.10000D+01                0.25000D+00
                           0.17000D+36                -.33333D+00                0.63333D+01
-.10000D+01   0.10000D+01                0.10000D+01                0.10000D+01                0.21053D+00
                           -.10000D+01                -.23058D+19                -.12667D+01                -.28500D+02
0.00000D+00   0.00000D+00                0.10000D+01                0.10000D+01                -.46512D-01
                           0.10000D+01                -.20000D+01                -.70000D+01                0.14350D+03
0.10000D+01   0.10000D+01                0.17347D-17                0.14745D-16                0.71390D-16
                           -.10000D+01                0.21450D+18                0.12766D+18                -.60000D+01
0.20000D+01   0.00000D+00                0.15721D-16                0.15721D-16                0.16556D-16
                           0.17000D+36                0.10437D+18                0.22026D+19                0.83093D+17
0.30000D+01   0.00000D+00                0.00000D+00                0.00000D+00                0.00000D+00
                           0.17000D+36                0.10437D+18                0.16217D+18                0.22634D+18
0.40000D+01   0.00000D+00                0.00000D+00                0.00000D+00                0.00000D+00
                           0.10000D+01                0.68639D+17                -.76069D+18                0.73787D+17
0.50000D+01   0.10000D+01                0.43707D-16                0.43707D-16                0.43707D-16
                           -.10000D+01                0.20000D+01                0.23499D+18                0.16325D+18
0.60000D+01   0.00000D+00                0.10000D+01                0.64984D-16                0.64984D-16
                           0.10000D+01                -.20000D+01                0.30000D+01                0.71430D+17
0.70000D+01   0.10000D+01                0.93458D-16                0.10000D+01                0.16298D-15
                           -.10000D+01                0.20000D+01                -.30000D+01                0.50975D+17
0.80000D+01   0.00000D+00                0.10000D+01                0.58438D-16                0.30030D-15
                           0.10000D+01                -.20000D+01                0.96454D+17                -.20000D+01


0.90000D+01   0.10000D+01                0.15374D-15                0.11028D-15                0.22773D-15
                           -.10000D+01                0.37493D+17                -.10000D+01                0.57288D+17
0.10000D+02   0.00000D+00                0.23375D-15                -.23080D-16                0.34992D-15
                           0.17000D+36                0.19608D-35                0.83469D+17                -.24782D-18
0.11000D+02   0.00000D+00                0.23375D-15                0.36822D-16                0.26606D-15
                           0.10000D+01                0.18447D+20                0.10000D+01                0.22222D+00
0.12000D+02   0.10000D+01                0.23392D-15                0.36551D-16                -.90000D+01
                           -.10000D+01                0.20000D+01                0.33333D+00                0.11111D+01
0.13000D+02   0.00000D+00                0.10000D+01                -.30000D+01                -.16046D-16
                           0.10000D+01                0.10000D+01                0.23333D+01
0.14000D+02   0.10000D+01                0.34000D+36                0.75000D+00
                           0.10000D+01                0.10000D+01
0.15000D+02   0.20000D+01                0.66667D+00
                           -.50000D+00
0.16000D+02   0.00000D+00


              0.64205D-16
                           -.24688D+02
              -.53512D-01                0.85401D-16
                           0.16219D+03                -.21719D+02
              0.94127D-16                -.59813D-01                0.97639D-16
                           -.50000D+01                0.17891D+03                -.19242D+02
              -.14184D-16                0.10670D-15                -.65607D-01                0.11032D-15
                           0.55479D+18                -.40000D+01                0.19415D+03                0.11157D+18
              0.00000D+00                0.86872D-16                0.11959D-15                0.24477D-15
                           -.10400D+18                0.10066D+18                0.11184D+18                0.18107D+03
              0.43707D-16                0.43707D-16                0.43707D-16                0.11065D-15
                           -.19507D+18                -.19507D+18                0.91735D+17                0.30171D+18
              0.64984D-16                0.64984D-16                0.64984D-16                0.64984D-16
                           0.71430D+17                0.71430D+17                0.71430D+17                0.76876D+17
              0.16298D-15                0.16298D-15                0.16298D-15                0.16298D-15
                           0.50975D+17                0.50975D+17                0.50975D+17                0.20781D+18
              0.14337D-15                0.14337D-15                0.14337D-15                0.14337D-15
                           0.44677D+17                0.44677D+17                0.37612D+17                0.63333D+17
              0.34481D-15                0.12098D-15                0.12098D-15                0.12098D-15
                           -.10000D+01                0.37500D+00                0.52869D+17
              0.18771D-15                0.80000D+01                0.36687D-15
                           0.25000D+00                -.11250D+01
              0.36000D+02                -.60325D-15
                           -.27778D-01
              0.20903D-15


              0.10136D-15
                           0.27278D+18
              0.16368D-15                0.97690D-16
                           0.17048D+03                -.12548D+02
              0.10733D-15                -.10381D+00                0.95162D-16
                           -.29145D+01                0.18011D+03
              -.11380D-15                0.10420D-15
                           0.84040D+17
              0.14337D-15
```

D78

II 77

140

****

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
-4.00	0.00000D+00	0.21127D+09	0.0000000000000000D+00	0.00	OUI
-3.00	-0.34111D-07	0.34111D-07	-0.1000000000000000D+01	-1.00	NON
-2.00	-0.17398D-07	-0.17397D-07	0.1000065784683848D+01	1.00	NON
-1.00	-0.41698D-08	-0.41698D-08	0.1000000000000000D+01	1.00	NON
0.00	0.34426D-11	-0.47628D+07	-0.7228014483236696D-18	0.00	OUI
1.00	0.23599D-09	0.23565D-09	0.1001414795173538D+01	1.00	NON
2.00	0.50839D-10	0.98280D+07	0.5172849031836396D-17	0.00	OUI
3.00	0.14028D-09	0.13686D+08	0.1025008538085945D-16	0.00	OUI
4.00	0.14183D-09	0.83160D+07	0.1705536065111166D-16	0.00	OUI
5.00	-0.43150D-10	-0.43150D-10	0.1000000000000000D+01	1.00	NON
6.00	-0.12990D-09	-0.32659D+07	0.3977404274542221D-16	0.00	OUI
7.00	0.47224D-10	0.47224D-10	0.1000000000000000D+01	1.00	NON
8.00	0.20942D-09	0.34927D+07	0.5995765077342985D-16	0.00	OUI
9.00	-0.82628D-10	-0.82628D-10	0.1000000000000000D+01	1.00	NON
10.00	-0.76802D-09	-0.92664D+07	0.8288196284358719D-16	0.00	OUI
11.00	-0.10007D-08	-0.12580D+08	0.7954531563363876D-16	0.00	OUI
12.00	0.16772D-10	0.16772D-10	0.9999999999998251D+00	1.00	NON
13.00	0.12543D-08	0.15483D+08	0.8101332897310710D-16	0.00	OUI
14.00	-0.48429D-09	-0.48429D-09	0.9999999999999461D+00	1.00	NON
15.00	-0.31151D-08	-0.15575D-08	0.1999999999999881D+01	2.00	NON
16.00	0.28256D-07	0.48349D+09	0.5844058693053358D-16	0.00	OUI

Exemple 9

I 78
79
80

141

```
ES
******

)= -4.000000      F( 1)=  0.000000
)= -3.000000      F( 2)= -1.000000
)= -2.000000      F( 3)=  1.000000
)= -1.000000      F( 4)=  1.000000
)=  0.000000      F( 5)=  0.000000
)=  1.000000      F( 6)=  1.000000
)=  2.000000      F( 7)=  0.000000
)=  3.000000      F( 8)=  0.000000
)=  4.000000      F( 9)=  0.000000
)=  5.000000      F(10)=  1.000000
)=  6.000000      F(11)=  0.000000
)=  7.000000      F(12)=  1.000000
)=  8.000000      F(13)=  0.000000
)=  9.000000      F(14)=  1.000000
)= 10.000000      F(15)=  0.000000
)= 11.000000      F(16)=  0.000000
)= 12.000000      F(17)=  1.000000
)= 13.000000      F(18)=  0.000000
)= 14.000000      F(19)=  1.000000
)= 15.000000      F(20)=  2.000000
)= 16.000000      F(21)=  0.000000
)= 17.000000      F(22)=  1.000000
.0000010


E DES DIFFERENCES RECIPROQUES :
***********************************

.40000D+01     0.00000D+00
                              -.10000D+01
.30000D+01     -.10000D+01                   0.33333D+00
                              0.50000D+00                   0.50000D+01
.20000D+01     0.10000D+01                   0.10000D+01                   0.25000D+00
                              0.17000D+36                   -.33333D+00                   0.63333D+01
.10000D+01     0.10000D+01                   0.10000D+01                   0.10000D+01                   0.21053D+00
                              -.10000D+01                   -.23058D+19                   -.12667D+01                   -.28500D+02
.00000D+00     0.00000D+00                   0.10000D+01                   0.10000D+01                   -.46512D-01
                              0.10000D+01                   -.20000D+01                   -.70000D+01                   0.14350D+03
.10000D+01     0.10000D+01                   0.17347D-17                   0.14745D-16                   0.71390D-16
                              -.10000D+01                   0.21450D+18                   0.12766D+18                   -.60000D+01
.20000D+01     0.00000D+00                   0.15721D-16                   0.15721D-16                   0.16556D-16
                              0.17000D+36                   0.10437D+18                   0.22026D+19                   0.83093D+17
.30000D+01     0.00000D+00                   0.00000D+00                   0.00000D+00                   0.00000D+00
                              0.17000D+36                   0.10437D+18                   0.16217D+18                   0.22634D+18
.40000D+01     0.00000D+00                   0.00000D+00                   0.00000D+00                   0.00000D+00
                              0.10000D+01                   0.68639D+17                   -.76069D+18                   0.73787D+17
.50000D+01     0.10000D+01                   0.43707D-16                   0.43707D-16                   0.43707D-16
                              -.10000D+01                   0.20000D+01                   0.23499D+18                   0.16325D+18
.60000D+01     0.00000D+00                   0.10000D+01                   0.64984D-16                   0.64984D-16
                              0.10000D+01                   -.20000D+01                   0.30000D+01                   0.71430D+17
.70000D+01     0.10000D+01                   0.93458D-16                   0.10000D+01                   0.16298D-15
                              -.10000D+01                   0.20000D+01                   -.30000D+01                   0.50975D+17
.80000D+01     0.00000D+00                   0.10000D+01                   0.58438D-16                   0.30030D-15
```

142

```
                0.10000D+01           -.20000D+01                          0.96454D+17            -.20000D+01
.90000D+01   0.10000D+01           0.15374D-15            0.11028D-15                        0.22773D-15
                -.10000D+01           0.37493D+17                          -.10000D+01            0.57288D+17
.10000D+02   0.00000D+00           0.23375D-15            -.23080D-16                        0.34992D-15
                0.17000D+36           0.19608D-35                          0.83469D+17            -.24782D-18
.11000D+02   0.00000D+00           0.23375D-15            0.36822D-16                        0.26606D-15
                0.10000D+01           0.18447D+20                          0.10000D+01            0.22222D+00
.12000D+02   0.10000D+01           0.23392D-15            0.36551D-16                        -.90000D+01
                -.10000D+01           0.20000D+01                          0.33333D+00            0.11111D+01
.13000D+02   0.00000D+00           0.10000D+01            -.30000D+01                        -.16046D-16
                0.10000D+01           0.10000D+01                          0.23333D+01            0.46667D+01
.14000D+02   0.10000D+01           0.34000D+36            0.75000D+00                        0.30000D+01
                0.10000D+01           0.10000D+01                          0.50000D+01
.15000D+02   0.20000D+01           0.66667D+00            0.20000D+01
                -.50000D+00           0.40000D+01
.16000D+02   0.00000D+00           0.13333D+01
                0.10000D+01
.17000D+02   0.10000D+01


0.64205D-16
             -.24688D+02
-.53512D-01               0.85401D-16
             0.16219D+03               -.21719D+02
0.94127D-16               -.59813D-01               0.97639D-16
             -.50000D+01               0.17891D+03               -.19242D+02
-.14184D-16               0.10670D-15               -.65607D-01               0.11032D-15
             0.55479D+18               -.40000D+01               0.19415D+03               0.11157D+18
0.00000D+00               0.86872D-16               0.11959D-15               0.24477D-15
             -.10400D+18               0.10066D+18               0.11184D+18               0.18107D+03
0.43707D-16               0.43707D-16               0.43707D-16               0.11065D-15
             -.19507D+18               -.19507D+18               0.91735D+17               0.30171D+18
0.64984D-16               0.64984D-16               0.64984D-16               0.64984D-16
             0.71430D+17               0.71430D+17               0.71430D+17               0.76876D+17
0.16298D-15               0.16298D-15               0.16298D-15               0.16298D-15
             0.50975D+17               0.50975D+17               0.50975D+17               0.20781D+18
0.14337D-15               0.14337D-15               0.14337D-15               0.14337D-15
             0.44677D+17               0.44677D+17               0.37612D+17               0.63333D+17
0.34481D-15               0.12098D-15               0.12098D-15               0.12098D-15
             -.10000D+01               0.37500D+00               0.52869D+17               0.40720D+17
0.18771D-15               0.80000D+01               0.36687D-15               0.36687D-15
             0.25000D+00               -.11250D+01               0.61875D+01
0.36000D+02               -.60325D-15               0.17778D+01
             -.27778D-01               0.56250D+01
0.20903D-15               0.19459D+01
             0.51111D+01
0.22500D+01


0.10136D-15
             0.27278D+18
0.16368D-15               0.97690D-16
             0.17048D+03               -.12548D+02
0.10733D-15               -.10381D+00               0.95162D-16
             -.29145D+01               0.18011D+03               -.79107D+01
-.11380D-15               0.10420D-15               -.11169D+00
             0.84040D+17               0.10427D+01
0.14337D-15               -.12188D-15
             -.22192D+19
0.12098D-15
```

5 78

TATS:

X(I)	P(XI)	Q(XI)	FC(XI)	F(XI)	ATTEIGNABLE
-4.00	0.00000D+00	-0.39724D+11	0.0000000000000000D+00	0.00	OUI
-3.00	0.34508D+10	-0.34508D+10	-0.1000000000000000D+01	-1.00	OUI
-2.00	0.16174D+10	0.16174D+10	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
-1.00	0.35626D+09	0.35626D+09	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
0.00	0.23731D-09	-0.32832D+09	-0.7228014483236696D-18	0.00	OUI
1.00	-0.17010D+08	-0.17010D+08	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
2.00	0.20725D-08	0.40065D+09	0.5172849031836396D-17	0.00	OUI
3.00	0.46573D-08	0.45436D+09	0.1025008538085945D-16	0.00	OUI
4.00	0.38991D-08	0.22861D+09	0.1705536065111166D-16	0.00	OUI
5.00	0.21384D+07	0.21384D+07	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
6.00	-0.24875D-08	-0.62540D+08	0.3977404274542221D-16	0.00	OUI
7.00	-0.29938D+07	-0.29938D+07	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
8.00	0.27216D-08	0.45391D+08	0.5995785077342985D-16	0.00	OUI
9.00	0.41278D+07	0.41278D+07	0.1000000000000000D+01	1.00	OUI
10.00	-0.60681D-08	-0.73213D+08	0.8288196284358719D-16	0.00	OUI
11.00	-0.55167D-08	-0.69353D+08	0.7954531563363876D-16	0.00	OUI
12.00	0.26542D+08	0.26542D+08	0.9999999999998251D+00	1.00	OUI
13.00	0.25612D-09	0.31615D+07	0.8101332897314710D-16	0.00	OUI
14.00	-0.38320D+09	-0.38320D+09	0.9999999999999461D+00	1.00	OUI
15.00	-0.12324D+10	-0.61622D+09	0.1999999999999881D+01	2.00	OUI
16.00	0.13101D-06	0.22418D+10	0.5844058693053358D-16	0.00	OUI
17.00	0.16210D+11	0.16210D+11	0.9999999999999865D+00	1.00	OUI

Conclusion.

Pourvu que les blocs qui figurent dans la table des D.R respectent les conditions spécifiées. Le programme proposé permet de calculer les interpolants rationels au moyen d'une variante de l'algorithme de Thiele sans modifications de l'ordre des abscisses.
La fiabilité de cet algorithme n'est pas totale en raison de la restriction sur la structure des blocs, mais elle est notablement plus grande que les versions antérieures qui respectent l'ordre des abscisses.
D'autre part la stabilité numérique de cet algorithme est acceptable. on peut toutefois noter que les formules ont été établies dans le cas totalement singulier. Leur utilisation dans des situations voisines de la singularité est susceptible d'engendrer une certaine instabilité numérique
(cf exemple 8)

144 bis

Annexe. Dans pro-gramme en Jordan

SUBROUTINE FCONT

```
C SOUPROGRAMME CALCULANT LA FRACTION CONTINUE D'INTERPOLATION
C AVEC L'INTRODUCTION DE NOUVELLES RELATIONS
C
      SUBROUTINE FCONT(N,X,INF,T,F)
      DIMENSION T(30,30),X(30),Y(30),P(30),Q(30),F(60)
      DOUBLE PRECISION T,F,P,Q,FC,X,Y,Z,C1,C2
      REAL INF
      DO 925 I=1,N
      Y(I+1)=X(I)
  925 CONTINUE
      DO 920 I=2,N+1
      Z=Y(I)
      T(1,1)=0
      P(1)=1
      P(2)=T(2,1)
      Q(1)=0
      Q(2)=1
      DO 900 K=3,N+1
      IF(K.GE.N) GOTO 916
      IF(ABS(T(K,1)).GT.INF) GOTO 912
  916 CONTINUE
C ** FORMULE NUMERO 1 **
      P(K)=(T(K,1)-T(K-2,1))*P(K-1)+(Z-Y(K-1))*P(K-2)
      Q(K)=(T(K,1)-T(K-2,1))*Q(K-1)+(Z-Y(K-1))*Q(K-2)
      IF(K.GE.N) GOTO 900
      IF(ABS(T(K+1,1)).GT.INF) GOTO 902
      GOTO 900
  912 CONTINUE
      K=K-1
  902 CONTINUE
      IF(ABS(T(K-1,2)).GT.INF) GOTO 951
      IF(ABS(T(K+3,1)).LT.INF) GOTO 903
      IF(ABS(T(K+1,2)).LT.INF) GOTO 913
      IF(ABS(T(K-1,3)).GT.INF) GOTO 951
      IF(ABS(T(K+5,1)).GT.INF) GOTO 911
      GOTO 901
  903 CONTINUE
C ** FORMULE NUMERO 2 **
      P(K+2)=(Z-Y(K+2))*P(K)
      P(K+3)=(T(K+3,1)*(Z-Y(K+2))-T(K-1,1)*(Z-Y(K+1))+T(K+1,2)*(Y(K+2)-
     #Y(2))-T(K-1,2)*(Y(K+1)-Y(2)))*P(K)+(Z-Y(K+1))*(Z-Y(K))*P(K-1)
      Q(K+2)=(Z-Y(K+2))*Q(K)
      Q(K+3)=(T(K+3,1)*(Z-Y(K+2))-T(K-1,1)*(Z-Y(K+1))+T(K+1,2)*(Y(K+2)-
     #Y(2))-T(K-1,2)*(Y(K+1)-Y(2)))*Q(K)+(Z-Y(K+1))*(Z-Y(K))*Q(K-1)
      K=K+3
      GOTO 900
  913 CONTINUE
C ** FORMULE NUMERO 3' **
      P(K+4)=(Z-Y(K+2))*(Z-Y(K+4))*P(K)
      Q(K+4)=(Z-Y(K+2))*(Z-Y(K+4))*Q(K)
            C1=(T(K+5,1)*(Z-Y(K+4))*(Z-Y(K+2))+T(K+3,2)*(Z-Y(K+2))*(Y(K+4)
     #-Y(2))-T(K+1,2)*(Z-Y(2))*(Y(K+3)-Y(K+2))-T(K-1,2)*(Z-Y(K+3))
     #*(Y(K+1)-Y(2))-T(K-1,1)*(Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+1)))
         C2=(Z-Y(K))*(Z-Y(K+1))*(Z-Y(K+3))
      P(K+5)=C1*P(K)+C2*P(K-1)
      Q(K+5)=C1*Q(K)+C2*Q(K-1)
      K=K+5
      GOTO 900
```

```
  901 CONTINUE
C ** FORMULE NUMERO 3 **
      P(K+4)=(Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+4))*P(K)
      Q(K+4)=(Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+4))*Q(K)
        C1=((Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+4))*T(K+5,1)+(Z-Y(K+3))*(Y(K+4)-Y(2))*
     #T(K+3,2)+T(K+1,3)*(Z-Y(2))*(Y(K+3)-Y(3))-(Z-Y(K+2))*(Z-Y(K+1))
     #T(K-1,1)-(Z-Y(K+2))*(Y(K+1)-Y(2))*T(K-1,2)-(Z-Y(2))*(Y(K+2)-Y(
     #*T(K-1,3))
          C2=((Z-Y(K+2))*(Z-Y(K+1))*(Z-Y(K)))
      P(K+5)=C1*P(K)+C2*P(K-1)
      Q(K+5)=C1*Q(K)+C2*Q(K-1)
      K=K+5
      GOTO 900
  911 CONTINUE
      IF(ABS(T(K-1,4)).GT.INF) GOTO 951
      IF((ABS(T(K+7,1)).GT.INF).OR.(ABS(T(K+1,4)).GT.INF)) GOTO 951
C ** FORMULE NUMERO 4 **
      Q(K+6)=(Z-Y(K+6))*(Z-Y(K+5))*(Z-Y(K+4))*Q(K)
      P(K+6)=(Z-Y(K+6))*(Z-Y(K+5))*(Z-Y(K+4))*P(K)
        C1=(T(K+7,1)*(Z-Y(K+6))*(Z-Y(K+5))*(Z-Y(K+4))+
     #T(K+5,2)*(Z-Y(K+5))*(Z-Y(K+4))*(Y(K+6)-Y(2))
     #+T(K+3,3)*(Z-Y(2))*(Z-Y(K+4))*(Y(K+5)-Y(3))
     #+T(K+1,4)*(Z-Y(2))*(Z-Y(3))*(Y(K+4)-Y(4))
     #-T(K-1,1)*(Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+2))*(Z-Y(K+1))
     #-T(K-1,2)*(Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+2))*(Y(K+1)-Y(2))
     #-T(K-1,3)*(Z-Y(K+3))*(Z-Y(2))*(Y(K+2)-Y(3))
     #-T(K-1,4)*(Z-Y(2))*(Z-Y(3))*(Y(K+3)-Y(4)))
          C2=(Z-Y(K+3))*(Z-Y(K+2))*(Z-Y(K+1))*(Z-Y(K))
      P(K+7)=C1*P(K)+C2*P(K-1)
      Q(K+7)=C1*Q(K)+C2*Q(K-1)
       K=K+7
  900 CONTINUE
      F(I-1)=P(N+1)
      F(I+N-1)=Q(N+1)
  920 CONTINUE
      RETURN
  951 CONTINUE
      WRITE(11,952)
  952 FORMAT(1X,'ARRET PROVOQUE PAR:FORMULE NON PREVUE (SINGULARITE N
     #CARREE) OU SINGULARITE DEPASSANT DIMENSION 4')
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE VIGNE

```
C SOUPROGRAMME CALCULANT LES POINTS NON ATTEIGNABLES
C A L'AIDE DE LA METHODE DE PERTURBATIO DE VIGNES
C
      SUBROUTINE VIGNE(N,X,F,INF,T,TB,P,CP)
      DOUBLE PRECISION T,X,TB,P,CP,PR,F,FC
      REAL INF
      DIMENSION T(30,30),TB(30,30),CP(60),CPR(60),PR(60,60),P(60)
      DIMENSION X(30),F(60)
      WRITE(11,200)
      WRITE(11,305)
      WRITE(11,205)
 305  FORMAT(1X,12(1H*))
  205 FORMAT(/)
  200 FORMAT(1X,'RESULTATS:')
      KI=1
      KMAX=5
      N1=2*N
      CMAX=0.30103*FLOAT(27)
      DO 1 I=1,N1
    1 CP(I)=0
      CALL FCONT(N,X,INF,T,P)
      DO 216 I=1,N1
      PR(I,1)=P(I)
  216 CONTINUE
C
      KI=2
    5 CONTINUE
       CALL PERTU(N,T,TB)
      CALL FCONT(N,X,INF,TB,P)
      DO 217 I=1,N1
      PR(I,KI)=P(I)
  217 CONTINUE
      DO 209 I=1,N1
      PM=0.
      DO 207 L=1,KI
  207 PM=PM+PR(I,L)
      PM=PM/FLOAT(KI)
      VARP=0.
      DO 208 L=1,KI
      VARP=VARP+(PR(I,L)-PM)**2
 208  CONTINUE
      VARP=VARP/FLOAT(KI-1)
      EPS=SQRT((P(I)-PM)**2+VARP)
      CP(I)=CMAX
      IF(EPS.EQ.0) GOTO209
      CP(I)=0
      IF(P(I).NE.0) CP(I)=ALOG10(ABS(P(I)/EPS))
  209 CONTINUE
C CONTROLE DE STATIONNARITE
      IF(KI.EQ.2) GOTO 211
      DO 210 I=1,N1
      IF(ABS(CP(I)-CPR(I)).GT.0.5) GOTO 211
  210 CONTINUE
      GOTO 223
  211 CONTINUE
      KI=KI+1
      IF(KI.GT.KMAX) GOTO 223
      DO 212 I=1,N1
```

```
  212 CPR(I)=CP(I)
      GOTO 5
  223 CONTINUE
      WRITE(11,600)
      WRITE(11,700)
      WRITE(11,450)
 700  FORMAT(1X,130(1H*))
  600  FORMAT(4X,'I',7X,'X(I)',8X,'P(XI)',13X,'Q(XI)',16X,'FC(XI)',15X
     &,'F(XI)',7X,'ATTEIGNABLE')
      DO 220 I=1,N
      IF(P(I+N).EQ.0) GOTO 320
      FC=P(I)/P(I+N)
      GOTO 310
 320  CONTINUE
      CALL INV(P(I+N),FC)
 310  CONTINUE
      C1=10.**(-IDINT(CP(I)))
      C2=10.**(-IDINT(CP(I+N)))
      IF((ABS(P(I)).LT.C1).AND.(ABS(P(I+N)).LT.C2)) GOTO 240
      GOTO 245
 240  CONTINUE
      WRITE(11,400) I,X(I),P(I),P(I+N),FC,F(I)
 400  FORMAT(1X,I4,5X,F7.3,5X,D12.5,5X,D12.5,5X,D23.16,5X,F7.3,9X,3HNO
      WRITE(11,450)
 450  FORMAT(/)
      GOTO 220
 245  CONTINUE
       WRITE(11,500) I,X(I),P(I),P(I+N),FC,F(I)
      WRITE(11,450)
 500  FORMAT(1X,I4,5X,F7.3,5X,D12.5,5X,D12.5,5X,D23.16,5X,F7.3,9X,3HOU
  220 CONTINUE
      RETURN
      END
```

FUNCTION HASARD

```
      FUNCTION HASARD(DEBUT,FIN)
      EQUIVALENCE (X,I)
      COMMON/HAS0017N,X,XP(3),C,CP(3)
      N=0
      X=1001.
      XP(1)=1001.
      XP(2)=1001.
      XP(3)=1001.
      C=0.
      CP(1)=0.
      CP(2)=0.
      CP(3)=0.
     C=C+1
     V=MOD(I,10000000)
     W=MOD(I,10000001)
     V=V+(W-5.E6)/(1.E7+0.5)
     X=C/(V+1.)
     HASARD=(DEBUT*(1.E7-V)+FIN*V)/1.E7
     RETURN
     END
```

SUBROUTINE PERTU

```
C PERTURBATION
      SUBROUTINE PERTU(N,T,TB)
      DOUBLE PRECISION T,TB,ERR
      DIMENSION T(30,30),TB(30,30)
       ERR=10.**-18
       DO 19 I=2,N+1
       DO 18 J=1,N-I+2
      TB(I,J)=T(I,J)*(1.+SIGN(ERR,HASARD(-1.,+1.)))
  18   CONTINUE
  19   CONTINUE
       END
```

References

[1] SHANKS. D : Non linear transformations of divergent and slowly convergent series J. Maths Phys. 34 (1955), pp 1-42

[2] BREZINSKI C : Accélération de la convergence en analyse numérique. Lecture notes in mathematics 584. Springer-Verlag, Heidelberg (1977)

[3] WYNN P. Acceleration technique for iterated vector and matrix problems Maths Comp 16 (1962) 301-322

[4] CORDELLIER. F : Colloque Analyse numérique 1976 Port-Bail (Résumés)

[5] THIELE TN : Interpolation Rechnung Leipzig (1909)

[6] CORDELLIER F : Utilisation de l'invariance homographique dans les algorithmes de losange dans Padé Approximants et Applications - Bad Honnef Lecture notes in Maths. . .

[7] WERNER H : A reliable methode for rational interpolation. Padé Approximation and its applications. L N in maths 765 Ed L Wuytack, Springer Verlag (1979) 257-271.

[8] BAKER JR G.A and GAVES-MORRIS PR; Padé Approximants, Volume 1. Addison Wesley. (1981)

[9] BREZINSKI. C; "généralisation des extrapolations polynomiales et rationnelles. RAIRO, R1 (1972), pp. 61-66

[10] CLASSENS. G : "A useful identity for the rational Hermite interpolation table" Numer. Math. 29 (1978), pp. 227-231.

[11] WYNN. P : " on a device for Computing the $e_m(S_n)$ transformation". MTAC 10 (1956), pp. 91-96

[12] BREZINSKI. C : "Conditions d'application et de Convergence de procédés d'accélération" Numer Math. 20 (1972), pp 64-69

[13] WYNN. P : " on a procrustean technique for the numerical transformation of slowly Convergent Séquence and series" Proc. Camb. Phil. Soc. 52 (1956), pp. 663-671

[14]. WARNER OD: "Hermite interpolation with rational functions" Univ. of California thesis (1974)

[15] J. Meinguet "On the solubility of Cauchy interpolation problem"
Approximation Theory, Ed. A. Talbot. Academic press, London (1970), pp 137-163

[16] P. Wynn, "Upon systems of recursions which obtain among the quotients of the padé table"
Numer. Maths. 8 (1966), 264-269

[17] : J. Vignes et M. La Porte „Algorithmes numériques Analyse et mise en oeuvre,
tome 1, Technip ed, Paris, 1974.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE