N° d'ordre 1260

50376
1985
35

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Hamid KADRI

RESULTATS D'UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE CAUCHY NON CARACTERISTIQUE C^∞ POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS MATRICIELS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE LILLE

Membres du Jury : VAILLANT J., Président
GOURDIN D., Rapporteur
BERZIN R., DE PARIS J.C., Examinateurs

Soutenue le 7 mars 1985

A mes parents,

A ma femme Sanae,

A la mémoire de mes grands-parents,

A mes frères et soeurs,

R E M E R C I E M E N T S

Monsieur Daniel GOURDIN m'a confié ce sujet de recherche. Il a guidé mon travail sans discontinuer ; ses conseils et ses remarques sont à la base de ce mémoire. Qu'il accepte tous mes remerciements.

Je remercie vivement Monsieur le professeur Jean VAILLANT qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Messieurs les professeurs Robert BERZIN et Jean-Claude DE PARIS ont consenti à juger mon travail et à participer au jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Enfin, mes remerciements vont à Mesdames Raymonde BERAT et Claudine EVRARD ainsi qu'au personnel de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de LILLE I pour le soin, la rapidité et la qualité apportés à la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I - OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET FONCTIONS D'OPERATEURS. 1

§ 1 - *Classes d'opérateurs pseudo-différentiels.* 1

§ 2 - *Fonctions d'opérateurs linéaires.* 7

CHAPITRE II - UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY NON CARACTERISTIQUE C^{∞}. 14

§ 1 - *Unicité du problème de Cauchy pour certains opérateurs avec caractéristiques simples.* 14

§ 2 - *Résultats de Zeman dans le cas scalaire avec caractéristiques multiples.* 25

§ 3 - *Hypothèses et résultats obtenus dans le cas matriciel avec caractéristiques multiples.* 29

CHAPITRE III - REDUCTION DE L'OPERATEUR h. 36

CHAPITRE IV - ESTIMATION DE $|||\tilde{b}u_1|||$ ET FORMULES D'INVERSION DE LAGRANGE POUR DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES. 61

§ 1 - *Estimation de* $|||\tilde{b}u_1|||$. 61

§ 2 - *Formules d'inversion de Lagrange : le problème local.* 65

.../..

.../...

CHAPITRE V - DECOMPOSITION DE $\tilde{b}$ EN UN PRODUIT DE COMPOSITION D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS MATRICIELS D'ORDRE 1 MODULO DES TERMES D'ORDRE $\leqslant \tau - 1 - \frac{1}{q}$ LORSQUE $t = 1$, $\sigma = 1$ ET $H_1(x;\xi) = \left[\xi_o - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\xi_j\right]$. 73

CHAPITRE VI - ESTIMATION DE $|||\tilde{b}u|||$ DANS LE CAS (b) ET FIN DE LA DEMONSTRATION DES THEOREMES. 105

§ 1 - *Lemmes et propositions de base qui conduisent à l'estimation de $|||\tilde{b}u|||$ dans le cas (b).* 105

§ 2 - *Estimation de $|||\tilde{b}u|||$ dans le cas (b) et fin de la démonstration des théorèmes.* 135

BIBLIOGRAPHIE. 140

INTRODUCTION

L'unicité pour le problème de Cauchy C^∞ a fait l'objet de nombreux travaux jusqu'à présent.

Citons ceux de :

S. Alinbac [26], S. Alinhac et C. Zuily [27], A.P. Calderon [28], [29], L. Hörmander [8], S. Mizohata [30], R.B. Pederson [31], P.M. Goorjian [4], W. Matsumoto [10], M. Sussman [32], K. Watanabe [33], K. Watanabe et C. Zuily [17], C. Zuily [19] et M. Zeman [18], [34], [35].

Parmi ceux qui nous ont été les plus utiles, un article de M. Zeman [18] étudie l'unicité locale du problème de Cauchy C^∞ non caractéristique, pour les équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques non réelles ont une multiplicité constante supérieure à 2.

M. Zeman démontre l'unicité locale pour le problème de Cauchy C^∞ avec racines caractéristiques de multiplicité constante supérieure ou égale à deux en supposant que le symbole sous caractéristique de l'opérateur ne s'annule pas sur l'ensemble caractéristique. Notre travail consiste à généraliser le résultat de Zeman à des systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques de multiplicité constante lorsque ce système est du type $(\nu,0,\dots,0)$ suivant la classification à l'aide des facteurs invariants du déterminant caractéristique de J. Vaillant [16] et lorsque le polynôme sous caractéristique du système matriciel ne s'annule pas sur l'ensemble caractéristique. Cette extension au cas matriciel présente des difficultés non négligeables ; en particulier, elle a nécessité l'utilisation des fonctions de matrices d'opérateurs pseudo-différentiels [3], [23], [24] en vue d'effectuer des réductions non évidentes de l'opérateur différentiel matriciel utilisé. (Diagnonalisation de la partie principale et mise en facteurs dans une algèbre de composition d'opérateurs pseudo-différentiels matriciels modulo des termes d'ordre inférieur fractionnaire).

.../...

.../...

La deuxième partie de ce travail (à partir de la page 29) doit faire l'objet d'une proposition de Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([6], [7]).

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I

OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS ET FONCTIONS D'OPERATEURS

----

§ 1 - *Classes d'opérateurs pseudodifférentiels.*

a) *Notations. Définition.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par (x,ξ) le point générique du fibré cotangent $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ avec :

$$x = (x_o, x_1, \ldots, x_n) = (x_o, x')$$

$$\xi = (\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_o, \xi')$$

On utilisera les notations usuelles :

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \forall\ j = 0,1,\ldots,n.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\alpha_o} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\alpha_o} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$\forall\ \alpha = (\alpha_o,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \quad \text{et} \quad |\alpha| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j.$$

On désigne par :

$|| \quad ||$ la norme de $[L^2(\mathbb{R}^n)]^m$ par rapport à la variable x', $m \geq 2$.

$|| \quad ||_s$ la norme de l'espace de Sobolev $[H_s(\mathbb{R}^n)]^m$.

Sur $\left[C_0^\infty[0,T]\times\mathbb{R}^n\right]^m$, on définit les normes suivantes :

$$|||u|||^2 = \int_0^T ||u||^2 \exp\left[k(x_o-T)^2\right] dx_o$$

$$|||u|||_s^2 = \sum_{i=0}^{[s]} \int_0^T ||D_o^i u||_{s-i}^2 \exp\left[k(x_o-T)^2\right] dx_o$$

$[s]$ désigne le plus petit entier plus grand ou égal à s.

b) Introduisons les classes d'opérateurs pseudodifférentiels utilisées dans ce travail [12], [38], [39], [40], [41], [48].

Définition I.1.1.

On dit que $p(x',\xi')$ est un symbole d'ordre γ sur $\mathbb{R}^n$ et on note $p \in S^\gamma$ $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ si $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ vérifie :

i) $\forall$ $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha$ et β dans $\mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}(K)$ telle que :

$$|D_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta p(x',\xi')| \leq C_{\alpha,\beta}(K)(1+|\xi'|)^{\gamma-|\beta|}$$

$\forall$ $x' \in K$, $\xi' \in (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

ii) Il existe une suite $\{p_{\gamma-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ homogènes d'ordre $(\gamma-j)$ en ξ' telles que $\forall$ $N \in \mathbb{N}$

$$|D_{x'}^\beta\{P - \sum_{j=0}^N p_{\gamma-j}\}(x',\xi')| = O(|\xi'|^{\gamma-N-1}) \quad \text{quand}$$

$|\xi'| \to +\infty$ uniformément par rapport à x' sur chaque compact $K \subset\subset \mathbb{R}^n$.

On écrira alors :

$$P(x',\xi') \sim \sum_{j=0}^\infty P_{\gamma-j}(x',\xi')$$

$P_\gamma(x',\xi')$ est dit symbole principal de P.

Soit $u \in D(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{u}$ la transformé de Fourier de u définie par :

$$\hat{u}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x',\xi'>} u(x') đx'$$

avec $$đx' = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} dx'.$$

Définition I.1.2.

On appelle opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre γ et de symbole $P(x',\xi') \in S^\gamma = S^\gamma(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ l'opérateur $P(x',D_{x'})$ défini par :

$$P(x',D_{x'})u(x') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x',\xi'>} p(x',\xi')\hat{u}(\xi') đx'$$

pour tout $u \in D(\mathbb{R}^n)$.

Propriétés I.1.1.

Soit $P(x',D_{x'})$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre γ sur $\mathbb{R}^n$ et de symbole $p \in S^\gamma$, alors :

1) $P(x',D_{x'})$ est un opérateur continu de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$;

2) $\forall s \in \mathbb{R}$, on peut prolonger d'une façon unique $P(x',D_{x'})$ en un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

3) Caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels.

Soient $P(x',\xi') \in S^\gamma$ et $u \in E'(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$P(x',D_{x'})u \text{ est de classe } C^\infty \text{ dans } \Omega.$$

4) Soit $P(x',\xi') \in S^\gamma$, alors $P(x',D_{x'})$ s'étend en un opérateur continu de $S'(\mathbb{R}^n)$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$.

5) L'adjoint formel $P^*(x',D_{x'})$ de $P(x',D_{x'})$ défini par

$$<P^*(x',D_{x'})u,v>_{L^2} = <u,P(x',D_{x'})v>_{L^2} \qquad \forall\, u,\, v \in D(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre γ, dont le symbole $P^*(x',\xi')$ vérifie :

$$P^*(x',\xi') \sim \sum_{\alpha\in N^n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_{x'} \partial^\alpha_{\xi'} \overline{P(x',\xi')}.$$

6) Formule de composition des opérateurs pseudo-différentiels.

Soit $Q(x',D_{x'})$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre γ' de symbole $q(x',\xi') \in S^{\gamma'}$ alors l'opérateur composé :

$$R(x',D_{x'}) = Q(x',D_{x'}) \circ P(x',D_{x'})$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $(\gamma+\gamma')$ de symbole $r(x',\xi')$ vérifiant :

$$r(x',\xi') \sim \sum_{\alpha\in N^n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_{\xi'} q(x',\xi').D^\alpha_{x'} p(x',\xi').$$

7) Généralisation de la formule de composition (cf. Thèse de 3ème cycle de M. Mechab, 1983).

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\partial^\alpha = D^\alpha_{x'}$$

$$\partial_\alpha = \partial^\alpha_{\xi'}$$

$$\partial^\beta_\alpha = D^\beta_{x'} \partial^\alpha_{\xi'}$$

$\forall\, \alpha$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$.

On convient de considérer les termes indexés sur un ensemble vide comme des éléments neutres vis à vis de la loi considérée (par exemple $(\sum_{j=1}^{0} x_j) \times y = (\sum_{j=1}^{0} x_j) + y = y$).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_k = I = \{1,\dots,(k-1)\}$$

et pour $i \in I_k = I$, on pose

$$I_{k,i} = J_i = \{1,\dots,(k-i-1)\}.$$

Lemme I.1.1.

Soient f_j $(j = 1,\dots,k)$ k fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $f = \prod_{j=1}^{k} f_j$ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\partial^\alpha f(x') = \sum_{\substack{j=1,\dots,(k-1) \\ \alpha_1 \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_j \leqslant \alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i}} \cdot \frac{\alpha!}{\prod_{j=1}^{k-1} \alpha_j!(\alpha - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j)!} \prod_{j=1}^{k-1} \partial^{\alpha_j} f_j(x') \partial^{\alpha - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j} f_k(x').$$

La preuve de ce lemme qui est une généralisation de la formule de Leibnitz de dérivation d'un produit se fait par récurrence sur le nombre k.

Proposition I.1.1.

Soient $P_j(x',D_{x'})$ $(j = 1,\dots,k)$ k opérateurs pseudo-différentiels. Respectivement d'ordre γ_j et de symbole $P_j(x',\xi')$ alors :

$P(x',D_{x'}) = P_1(x',D_{x'}) \circ \dots \circ P_k(x',D_{x'})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\gamma = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j$ et de symbole $p(x',\xi')$ vérifiant :

$$P(x',\xi') \sim \sum_{\substack{i\in I, j\in J_i \\ \alpha_i\in\mathbb{N}^n, \alpha_i^{n'}\in\mathbb{N}^n \\ \alpha_i^j \leqslant \alpha_i - \sum_{n'=1}^{(j-1)} \alpha_i^{n'}}} \frac{1}{\prod_{i\in I}\left(\prod_{j\in J_i} \alpha_i^j!\right)\left(\alpha_i - \sum_{j\in J_i} \alpha_i^j\right)!} \prod_{i\in I} \partial_{\alpha_i}^{\sum_{j=1}^{(i-1)} \alpha_j^{i-j}} P_i(x',\xi') \times$$

$$\times\ \partial^{\sum_{i\in I}\left(\alpha_i - \sum_{j\in J_i} \alpha_i^j\right)} P_k(x',\xi').$$

La preuve de cette proposition se fait par récurrence sur le nombre k d'opérateurs intervenant dans la composition et en utilisant le lemme précédent.

Dans toute la suite, on désigne par :

$L^{\gamma}_{x'}$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels admettant un symbole homogène d'ordre γ par rapport à la variable ξ' et $S^{\gamma}_{x'}$ l'espace des symboles correspondants.

L^{γ}_{x} est la classe des opérateurs différentiels en x_o et pseudo-différentiels en x' d'ordre $\gamma = \alpha + \beta$ en $x = (x_o,x')$ où α est l'ordre de l'opérateur en x_o et $\beta \geqslant 0$ l'ordre de l'opérateur en x'.

S^{γ}_{x} est l'espace des symboles correspondants.

$L^{\gamma,r}_{x'}$ est la classe des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre γ en x' dont l'espace des symboles correspondants est $S^{\gamma,r}_{x'}$ tels que ses symboles $a(x_o,x';\xi')$ admettent un développement de la forme :

$$a(x_o,x';\xi') \sim a_o(x_o,x';\xi')|\xi'|^{\gamma} + a_1(x_o,x';\xi')|\xi'|^{\gamma-\frac{1}{r}} + a_2(x_o,x';\xi')|\xi'|^{\gamma-\frac{2}{r}} + \dots$$

où $a_j(x_o,x';\xi') \in S^o_{x'}$.

$L^\gamma_{cl,x'}$ est la classe des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre γ par rapport à la variable x'.

$S^\gamma_{cl,x'}$ l'espace des symboles correspondants.

Rappelons que $p(x',\xi') \in S^\gamma_{cl,x'}$ $\Longleftrightarrow$ il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$ une fonction $p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ homogène de degré $\gamma - j$ telle que

$$(p - \sum_{j=0}^{k-1} p_j) \in S^{\gamma-k} \quad \text{pour tout entier } k \geqslant 0.$$

§ 2 - *Fonctions d'opérateurs linéaires* [3], [23], [24], [36].

Tout le long de ce sous-chapitre X désignera un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension fini, et T un opérateur linéaire dans X.

Nous allons étudier une classe de fonctions de l'opérateur T.

Le symbole I désigne l'opérateur identité de X.

Nous interprétons T^o comme I.

Définition 1.2.1.

Si $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i$ est un polynôme en λ à coefficients complexes.

On définit $P(T)$ par :

$$P(T) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T^i$$

$$= \alpha_n T^n + \dots + \alpha_1 T + \alpha_o I.$$

Nous allons commencer par voir quand deux polynômes déterminent la même fonction de T.

Définition 1.2.2.

Le spectre $\sigma(T)$ de l'opérateur T dans un espace de dimension finie est l'ensemble des nombres complexes λ tels que : $(\lambda I-T)$ ne soit pas inversible $[(\lambda I-T)$ singulière$]$.

L'indice $\nu(\lambda)$ du nombre complexe λ est le plus petit entier positif ν tel que :

$(\lambda I-T)^{\nu}x = 0$ pour tout vecteur x vérifiant $(\lambda I-T)^{\nu+1}x = 0$.

Il découle de cette définition que si $\lambda_o \in \sigma(T)$, alors il existe un vecteur $x_o \neq 0$ tel que $(T-\lambda_o I)x_o = 0$.

Le nombre λ_o est souvent appelé valeur propre de T et tout vecteur correspondant x_o, vecteur propre de λ_o.

Pour chaque entier positif n et chaque nombre complexe λ, on définit la variété linéaire

$$M_\lambda^n = \{x/(T-\lambda I)^n x = 0\} \;;$$

à partir de cette définition, on voit alors que l'indice $\nu(\lambda)$ est le plus petit entier ν tel que : $M_\lambda^{\nu+1} = M_\lambda^{\nu}$.

Remarquons que $M_\lambda^n = M_\lambda^{\nu(\lambda)}$ pour $n \geqslant \nu(\lambda)$; puisque X est de dimension finie, il existe une inclusion propre pour, au plus, un nombre fini de termes dans la suite $M_\lambda^o \subseteq M^1 \subseteq M^2 \subseteq \ldots$

Donc $\nu(\lambda) \leqslant \dim X$ pour chaque λ.

Notons que $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si $\nu(\lambda) > 0$.

Par exemple, l'opérateur T définit sur un espace de dimension 2, donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie $\sigma(T) = \{0\}$

et $\nu(0) = 2$.

Théorème I.2.1.

Si p et Q sont des polynômes, alors $p(T) = Q(T)$ si et seulement si $p-Q$ a un zéro d'ordre $\nu(\lambda)$ en chaque point λ de $\sigma(T)$.

Corollaire I.2.1.

Le spectre d'un opérateur dans un espace de dimension finie est un ensemble non vide, fini de points.

Le théorème I.2.1 nous permet de définir l'opérateur $f(T)$ pour f dans une classe de fonctions plus grande que celle des polynômes.

Soit $\mathcal{F}(T)$ la classe des fonctions de la variable complexe λ, analytiques dans un ouvert contenant $\sigma(T)$. L'ouvert en question peut ne pas être connexe et peut dépendre de la fonction f de $\mathcal{F}(T)$.

Si $f \in \mathcal{F}(T)$, soit P un polynôme tel que :

$f^{(m)}(\lambda) = P^{(m)}(\lambda)$ pour $m \leq \nu(\lambda) - 1$ et

λ un élément de $\sigma(T)$.

On définit alors $f(T) = p(T)$.

D'après le théorème I.2.1, la définition de $f(T)$ est indépendante de P.

Nous avons le théorème suivant qui découle directement des résultats correspondant aux fonctions de polynômes.

Théorème I.2.2.

Si f et g sont dans $\mathcal{F}(T)$ et si α et β sont deux nombres complexes alors :

a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}(T)$ et $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$;

b) $fg \in \mathcal{F}(T)$ et $(f.g)(T) = f(T).g(T)$;

c) si $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \lambda^n$ alors $f(T) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n T^n$;

d) $f(T) = 0$ si et seulement si $f^{(m)}(\lambda) = 0$, pour $\lambda \in \sigma(T)$, $0 \leqslant m \leqslant \nu(\lambda) - 1$.

Notons que b) implique que $f(T).g(T) = g(T).f(T)$ pour f,g éléments de $\mathcal{F}(T)$.

Si λ_o est un nombre complexe ; soit $e_{\lambda_o}(\lambda)$ identiquement égal à 1 dans un voisinage de λ_o et identiquement égal à 0 dans un voisinage de chaque point de $\sigma(T) \cap \{\lambda_o\}^c$; posons $E(\lambda_o) = e_{\lambda_o}(T)$ (puisque $e_{\lambda_o} \in \mathcal{F}(T)$) ; le théorème suivant est une conséquence directe du thérème précédent.

Théorème I.2.3.

a) $E(\lambda_o) \neq 0$ si et seulement si $\lambda_o \in \sigma(T)$.

b) $E(\lambda_o)^2 = E(\lambda_o)$ et $E(\lambda_o).E(\lambda_1) = 0$ pour $\lambda_o \neq \lambda_1$.

c) $I = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda)$.

Soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ une indexation de $\sigma(T)$ et soit $X_i = E(\lambda_i)X$. Il découle de b) et c) du théorème précédent que :

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$$

En outre, puisque $TE(\lambda_i) = E(\lambda_i)T$, il découle que $TX_i \subseteq X_i$ pour $i = 1,\dots,k$. Ainsi la décomposition du spectre $\sigma(T)$ de T en k points, nous mène à une décomposition en somme directe de X en k sous-espaces, chacun de ces sous-espaces est appliqué en lui-même par l'opérateur T. Ainsi l'étude de l'action de T sur l'espace X peut être réduite à l'étude de l'action de T sur chacun des sous-espaces X_i.

Le théorème suivant clarifie la relation entre l'indice $\nu(\lambda)$ d'un point de $\sigma(T)$ et la projection correspondante $E(\lambda)$.

Théorème I.2.4.

Si λ est un élément de $\sigma(T)$ alors :

$$E(\lambda)X = M_\lambda^{\nu(\lambda)} = \{x/(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}x = 0\}.$$

Les projections $E(\lambda)$ définissent une décomposition pratique en somme directe de X, et elles nous permettent de donner une expression analytique simple pour les fonctions de T.

Théorème I.2.5.

Si f est dans $F(T)$ alors :

$$f(T) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(T-\lambda I)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda)E(\lambda).$$

Cette formule découle immédiatement du théorème I.2.2. puisque f et la fonction g de $F(T)$ définie par

$$g(\mu) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(\mu-\lambda)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda)e_\lambda(\mu)$$

satisfont les relations :

$$f^{(m)}(\lambda) = g^{(m)}(\lambda) \quad \text{avec } \lambda \in \sigma(T), \quad m \leqslant \nu(\lambda) - 1.$$

Ce théorème donne une méthode puissante pour expliciter le calcul des fonctions de T, et il a un nombre intéressant d'applications théoriques :

Théorème I.2.6.

Soit $f_n \in F(T)$, alors la suite $\{f_n(T)\}$ converge si et seulement si les suites $\{f_n^{(m)}(\lambda)\}$, $0 \leqslant m \leqslant \nu(\lambda) - 1$ convergent pour $\lambda \in \sigma(T)$.

Si $f \in F(T)$ alors

$f_n(T) \to f(T)$ si et seulement si $f_n^{(m)}(\lambda) \to f^m(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(T)$ et $0 \leqslant m \leqslant \nu(\lambda) - 1$.

Théorème I.2.7.

Soit $f \in F(T)$ une fonction analytique dans un domaine contenant la fermeture d'un ouvert U contenant $\sigma(T)$ et supposons que la frontière B de U est constituée en un nombre fini d'arcs de Jordan fermés rectifiables orientés dans le sens positif alors $f(T)$ peut être exprimée comme une intégrale de Riemann sur B à l'aide de la formule :

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_B f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda.$$

Cette formule est dite formule de Poincaré.

Preuve :

Soit $\lambda \notin \sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ et posons $r(\xi) = (\lambda - \xi)^{-1}$, alors par les théorèmes I.2.2 et I.2.5

$$(\lambda I - T)^{-1} = \Omega(T) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=0}^{\nu(\lambda_j)-1} \frac{(T - \lambda_j I)^\nu}{(\lambda - \lambda_j)^{\nu+1}} E(\lambda_j)$$

ainsi si $f \in F(T)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\nu(\lambda_j)-1}(T - \lambda_j I)^{\nu}\ \frac{f^{(\nu)}(\lambda_j)}{\nu!}\ E(\lambda_j)$$

$$= f(T).$$

CHAPITRE II

UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY NON CARACTERISTIQUE C^{∞}. RESULTATS

----

§ 1 - *Unicité du problème de Cauchy pour certains opérateurs avec caractéristiques simples.*

a) *Cas des opérateurs différentiels scalaires* (*d'après F. Trèves* [38]).

Dans ce paragraphe, on considère un opérateur différentiel $P(x,D_x)$ d'ordre t dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nous supposons que Ω est subdivisé en deux parties par une hypersurface C^{∞}, S ; ceci signifie que $\Omega = \Omega^{+} \cup S \cup \Omega^{-}$ avec Ω^{+} et Ω^{-} deux sous-ensembles connexes, disjoints et ils sont aussi disjoints de l'hypersurface S.

Notre but est d'obtenir des conditions sur P et sur S suffisantes pour assurer que toute u (dotée de propriétés de régularité convenables) qui satisfait :

$$\begin{cases} (2.1) \qquad P(x,D_x)u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ (2.2) \qquad \qquad \quad u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^{-} \end{cases}$$

est nécessairement nulle dans un voisinage de S.

Ceci est une version de ce qu'on appelle unicité du problème de Cauchy.

On désigne par $P(x,\xi)$ le symbole principal de $p(x,D_x)$. Soient $x \in S$, un élément arbitraire de S, $\xi^o(x)$ un vecteur cotangent en x appartenant à $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à l'espace tangent en S.

(i.e. conormal à S : on doit avoir $P(x,\xi^o(x)) \neq 0$).

On fait l'hypothèse suivante :

(2.3) étant donné un point x de S, un couple de vecteurs ξ,ξ^o appartenant à $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ tq :

ξ^o est conormal à S en x et ξ ne l'est pas, alors le polynôme en la variable complexe Z, $P(x,\xi+Z\xi^o)$ a t racines simples.

Remarque II.1.1.

Quand $t = 1$, (2.3) est équivalente à la propriété que S est non caractéristique pour P.

Quand $t > 1$, (2.3) est une hypothèse forte comme le montre l'exemple suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$P = (D_{x_1} + \sqrt{-1}\, D_{x_2})^2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2/x_2 = 0\}$$

$$P(x\xi) = (\xi_o + \sqrt{-1}\, \xi_1)^2$$

$$P(x,\xi + Z\xi^o) = [\xi_o + Z\xi_o^o + \sqrt{-1}(\xi_1 + Z\xi_1^o)]^2$$

$$= [\xi_o + \sqrt{-1}\xi_1 + Z(\xi_o^o + \sqrt{-1}\xi_1^o)]^2.$$

D'où une racine double en Z.

Remarque II.1.2.

Soit x^o un point de S, ξ^o un covecteur conormal non nul à S en x^o ; supposons que :

(2.4) pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ non conormal à S, $P(x^o, \xi + Z\xi^o)$ a t racines distinctes.

Alors il est facile de voir que pour tout point x dans un voisinage de x^o dans Ω et tout ξ non colinéaire à ξ^o, $P(x,\xi + Z\xi^o)$ a aussi t racines distinctes. Ceci donne un caractère local à la condition (2.3).

Il découle de cette observation que si S' est une autre hypersurface C^∞ passant par x^o et tangente à S en ce point alors la propriété (2.3) est satisfaite dans certains voisinages de x^o pour S' à la place de S.

Nous allons raisonner dans un voisinage d'un point de S que nous supposons être l'origine de R^{n+1}.

On choisit des coordonnées dans R^{n+1} de manière que S soit définie par la nullité de la première coordonnée, que nous notons x_o. Les autres coordonnées sont notées $x_1,\dots,x_n$.

Nous supposons que Ω^- est défini par $x_o < 0$.

Le symbole principal P sera désigné par $P(x_o,x';\xi_o,\xi')$.

Les coordonnées duales de x_j seront désignées par ξ_j.

Les vecteurs conormaux à S sont de la forme $(\xi_o,0)$.

La remarque II.1.2 indique que l'hypothèse (2.3) est équivalente au voisinage de l'origine à la propriété suivante :

pour tout (x_o,x') dans un voisinage Ω_o de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

(2.5) $P(x_o,x';Z_o,\xi') = 0 \implies P'_Z(x_o,x';Z_o,\xi') \neq 0$

(comme usuellement P'_Z désigne la dérivée partielle de P par par rapport à Z).

De ce qui précède, on peut représenter les racines de $P(x_o,x';\xi_o,\xi')$ par une fonction C^∞ à valeurs complexes $Z_j(x_o,x';\xi')$ dans $\Omega_o \times \mathbb{R}^n - \{0\}$ homogène de degré 1 par rapport à ξ' $(j = 1,\dots,t)$.

Dans la suite, on suppose que $\Omega_o =]-T,T[\times X$ où X est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et T un nombre > 0.

Lemme II.1.1. [38]

Supposons que (2.5) est satisfaite, alors il y a t opérateurs pseudo-différentiels classiques dans X $Z_j(x_o)$, dépendant C^∞ de $x_o \in]-T,T[$ de symbole principal $Z_j(x_o,x';\xi')$ $j = 1,\dots,t$ tel que

$$P = (D_{x_o} - Z_t)\dots\dots\dots(D_{x_o} - Z_1) + R$$

avec $R = R(x_o)$ un opérateur régularisant dans X dont le noyau est une fonction C^∞ dans $]-T,T[\times X \times X$.

L'exploitation de ce lemme se fait en transformant l'équation (2.1) en un système diagonal (dans le sens que nous allons voir) d'ordre 1 différentiel en x_o et pseudo-différentiel en x'.

Nous posons :

$u = u^1$

(2.6) $\quad (D_{x_o} - Z_j)u^j = u^{j+1}$

(2.7) $\quad (D_{x_o} - Z_t)u^t = -Ru^1 \quad , \quad j = 1,\dots,t-1.$

On définit alors une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 dans X (dépendant C^∞ de x_o).

$$A(x_o) = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Z_t \end{pmatrix}$$

On note par N la matrice standard nilpotente d'ordre $t \times t$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et par $R(x_o)$ la matrice $t \times t$ suivante.

$$R(x_o) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ R(x_o) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Nous désignons par U le t-vecteur colonne de composantes : $u^1,\dots,u^t$; alors (2.6) et (2.7) peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x_o} - A(x_o).U - \sqrt{-1}(N - R(x_o))U = 0. \tag{2.8}$$

Maintenant nous faisons certaines conditions de régularité sur la fonction u qui vont se transporter sur U.

Une condition naturelle est la suivante :

Pour chaque $j = 0,1,\dots,t$, u est une fonction de classe C^j en x_o à valeurs dans $H_c^{t-j}(X)$.

Revenons à (2.8), on voit que u^k est une fonction C^j en x_o à valeurs dans $H_c^{t-k+1-j}(X)$ pour $j = 1,\dots,t-k+1$ et $k = 1,\dots,t$.

On conclut que :

pour $j = 0,1$, U est une fonction de classe C^j à valeurs dans $H_c^{1-j}(X) \otimes C^t$.

On va montrer que sous des hypothèses convenables sur les racines caractéristiques $Z_j(x_o,x';\xi')$, U sera nulle dans un voisinage de l'origine.

La preuve est basée sur une exploitation d'une inégalité du type de Carleman :

$$\rho \iint e^{\rho(T-x_o)^2} |V(x_o,x')|^2 dx_o dx' \leq \text{const} \iint e^{\rho(T-x_o)^2} |LV(x_o,x')|^2 dx_o dx' \tag{2.9}$$

où ρ est un nombre positif assez grand,

$$L = I_t \frac{\partial}{\partial x_o} - A(x_o) - \sqrt{-1}\left[N - R(x_o)\right]$$

et

$V(x_o,x') = X(x_o) \times U(x_o,x')$ avec $X \in C^\infty(R)$ et

$X(x_o) = 1$ pour $x_o < \frac{8T}{10}$

$X(x_o) = 0$ pour $x_o > \frac{9T}{10}$

Lemme II.1.2. [38]

Si (2.9) est satisfaite, alors U est nulle pour $x_o < \frac{T}{2}$.

Définition II.1.1. [38]

L'opérateur p est dit strictement hyperbolique sur la surface S si chaque point x^o de S a un voisinage ouvert $\mathcal{O}_o$ tel que : pour tout x dans $\mathcal{O}_o$ et tout couple de vecteurs ξ^o,ξ de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ où ξ^o est conormal à S en x^o et ξ ne l'est pas, le polynôme en Z, $P(x,\xi + Z\xi^o)$ a t racines simples réelles.

Nous dirons alors aussi que le symbole principal de P est strictement hyperbolique sur S.

Définition II.1.2 [38]

Soit $P \in L^\gamma(\Omega)$ de symbole $P(x,\xi) \in S^\gamma(\Omega \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$.
P est dit elliptique si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée

i) $\left.\begin{array}{l} \exists\ q(x,\xi) \in S^{-\gamma} \\ \exists\ r(x,\xi) \in S^{-1} \end{array}\right\}$ tel que $P(x,\xi).q(x,\xi) = 1+r(x,\xi)$.

ii) $\exists\ Q \in L^{-\gamma}(\Omega)$ propre tel que $P \circ Q \sim Q \circ P \sim I$

(Q est une paramétrix de P).

Rappelons qu'un opérateur pseudo-différentiel $Q : D(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega)$ est propre si

1) $\forall K$ compact, $K \subset \Omega$; $\exists K'$ compact, $K' \subset \Omega$ tel que

$u|_{K'} = 0 \implies Qu|_K = 0$.

2) $\forall K$ compact, $K \subset \Omega$; $\exists K'$ compact, $K' \subset \Omega$ tel que

Supp $u \subset K \implies$ Sup $Qu \subset K'$.

Théorème II.1.1. [38]

Supposons que le symbole principal $P(x,\xi)$ de P dans $\Omega \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ satisfait (2.3) et égal à $P_1(x,\xi).P_2(x,\xi)$ avec P_1 strictement hyperbolique sur la surface S et P_2 elliptique. Alors toute fonction u de classe C^t dans Ω qui satisfait (2.1) et (2.2) est identiquement nulle dans un voisinage de S.

b) *Application du résultat de Trèves aux systèmes matriciels.*

Soit X une variété C^{∞}, réelle de dimension $n+1$.

Soit S une hypersurface C^{∞} de X et x^o un point de S.

On note dans une carte locale en x^o, $x = (x_o,x')$, on choisira des coordonnées locales telles que le point ait des coordonnées nulles.

$$x_\alpha = 0 \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant n$$

et que l'hypersurface ait pour équation

$$\pi(x) = x_o = 0.$$

Soit h un opérateur différentiel matriciel linéaire d'ordre t $(t \geqslant 1)$, C^{∞} au voisinage de x^o.

$h = \left[h^A_B(x_o,x';\partial)\right]_{1\leqslant A,B\leqslant m}$.

On suppose que l'hypersurface S est non caractéristique à l'origine pour h.

$$\text{i.e.} \quad \det H(x^o;1,0,\dots,0) \neq 0 \qquad x^o = (0,\dots,0),$$

$$\text{où} \quad H = (H^A_B)_{1\leqslant A,B\leqslant m}$$

est la matrice caractéristique de h.

On a :

$$h^A_B(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) = H^A_B(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) + H^{A^*}_B(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) + \dots$$

Donc comme on vient de le rappeler $H = \left[H^A_B(x_o,x';\xi_o,\xi')\right]_{1\leqslant A,B\leqslant m}$ est la matrice caractéristique du système et que $\left[H^{*A}_B(x_o,x';\xi_o,\xi')\right]_{1\leqslant A,B\leqslant m}$ est formé de polynômes homogènes de degré $(t-1)$, où (ξ_o,ξ') désigne un covecteur en (x_o,x').

On fait les hypothèses suivantes [16].

$\det(H^A_B(x_o,x';\xi_o,\xi'))_{1\leqslant A,B\leqslant m}$ n'est jamais le polynôme nul et en le décomposant en facteurs irréductibles on a :

$$\det H(x_o,x';\xi_o,\xi') = \prod_{i=1}^{\sigma} H_s^{\nu_s}(x_o,x';\xi_o,\xi').$$

Soit ϕ_s l'anneau localisé de celui des polynômes par rapport à l'idéal engendre par H_s.

On suppose que :

$$H \underset{\phi_s}{\sim} \begin{pmatrix} H_s & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & H_s & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} H_s \\ \ddots \\ H_s \end{matrix}}\right\} \nu_s \\ \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}} \end{matrix}$$

On note par A la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de H.

On a :

$$AH(x_o,x';\xi_o,\xi') = HA(x_o,x';\xi_o,\xi') = \det H(x_o,x';\xi_o,\xi').I$$

Rappelons que A est divisible par $\prod_{s=0}^{\sigma} H_s^{\nu_s - 1}$ [16]

$$A = \prod_{s=0}^{\sigma} (H_s)^{\nu_s - 1}.B$$

où $B(x_o,x';\xi_o,\xi')$ est C^∞ en (x_o,x'), polynomial en $\xi = (\xi_o,\xi')$,

$$HB(x_o,x';\xi_o,\xi') = BH(x_o,x';\xi_o,\xi') = \prod_{s=0}^{\sigma} H_s(x_o,x';\xi_o,\xi').I$$

Associons à B un opérateur b de symbole principal B et à chaque H_s, un opérateur h_s de symbole H_s.

On fait l'hypothèse suivante :

Le radical caractéristique R vérifie la condition suivante :

$$R(x_o,x';\xi_o,\xi') = \prod_{s=0}^{\sigma} H_s(x_o,x';\xi_o,\xi')$$

$$= R_1(x_o,x';\xi_o,\xi').R_2(x_o,x';\xi_o,\xi')$$

avec

* $R_1(x_o,x';\ \xi_o,\xi')$ strictement hyperbolique sur la surface S.

* $R_2(x_o,x';\ \xi_o,\xi')$ elliptique.

$$b(x_o,x';D_x) = B(x_o,x';D_x) + B^*(x_o,x';D_x) + \dots$$
$$h(x_o,x';D_x) = H(x_o,x';D_x) + H^*(x_o,x';D_x) + \dots$$
$$b \circ h(x_o,x';D_x) = BH(x_o,x';D_x) + \left[B^*H + \partial^\alpha B \partial_\alpha H + BH^*\right](x_o,x';D_x) + \dots$$

Nous utilisons la notation de sommation d'Einstein.

Supposons qu'on a

$$\begin{cases} hu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \Omega^- \end{cases}$$

avec les mêmes notations que dans le cas scalaire.

Ω un voisinage ouvert de l'origine dans X

$$\Omega = \Omega^+ \cup S \cup \Omega^-$$

alors

$$\begin{cases} b \circ h\, u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \Omega^- . \end{cases}$$

D'où, on a $\prod_{s=0}^{\sigma} h_s u_j + \ldots = 0$ dans Ω

$u_j = 0$ dans Ω^-

pour $j = 1,\ldots,m$

A partir de là, on peut appliquer le résultat de Trèves dans le cas scalaire.

On peut poser comme dans le cas scalaire :

$$\begin{aligned} u &= u^1 \\ (D_{x_o} - Z_i)u^i &= u^{i+1} \\ &\vdots \\ (D_{x_o} - Z_t)u^{t'} &= -R\, u^1 \end{aligned} \qquad i = 1,\ldots,t'-1$$

(t' est le degré du radical caractéristique)

et donc on peut conclure comme dans le cas scalaire que

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix}$$

est nulle dans un voisinage de l'origine par une inégalité analogue à (2.9).

D'où $u^l \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine pour $j = 1,\dots,m$.

Soit Ω ce voisinage de l'origine.

On a alors :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{aligned} b \circ h\, u &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ dans } \Omega^- \end{aligned}$$

est identiquement nulle dans le voisinage Ω de l'origine.

D'où l'unicité locale du problème de Cauchy pour l'opérateur h.

§ 2 - *Résultats de Zeman* [18], *dans le cas scalaire avec caractéristiques multiples.*

En premier lieu, rappelons le problème :

soit $P(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) = P_t(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) + P_{t-1}(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) + \dots$

un opérateur aux dérivées partielles d'ordre t et P_i la partie homogène d'ordre i en $x' = (x_1,\dots,x_n)$ et $x_o \in \mathbb{R}$.

Soit $P_t(x_o,x';\xi_o,\xi')$ le symbole principal de P où $\xi' \in \mathbb{R}^n$ et $\xi_o \in \mathbb{R}$.

Supposons que l'hyperplan $x_o = 0$ est non caractéristique à l'origine pour l'opérateur P.

i.e. $\quad P_t(0,0;1,0) \neq 0.$

Le problème de Cauchy est de trouver une solution v de $Pv = f$ dans un voisinage de l'origine avec les données de Cauchy sur l'hyperplan $x_o = 0$

$$\partial^j_{x_o} v\big|_{x_o=0} = 0 \qquad j = 0,\dots,t-1 \quad ;$$

puisque $x_o = 0$ est non caractéristique à l'origine pour P, nous pouvons supposer que le coefficient de $D^t_{x_o}$ dans P_t est 1.

On considère le type suivant d'opérateurs :

$$P(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) = P_t(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) + P_{t-1}(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'}) + R_{t-2}(x_o,x';\partial_{x_o},\partial_{x'})$$

où nous supposons que les coefficients de P_t et P_{t-1} sont C^∞ et pour simplifier réels.

Tandis que P_t et P_{t-1} sont homogènes en x_o et x', R_{t-2} n'a pas de raison pour l'être.

L'hypothèse essentielle dans l'étude de Zeman est :

La constance des multiplicités de racines caractéristiques, si λ_1 et λ_2 sont des zéros distincts de $P_t\ (x_o,x';\lambda,\xi') = 0$ sur $|\xi'| = 1$, alors $|\lambda_1 - \lambda_2| \geqslant \varepsilon$ où ε est un nombre positif fixe indépendant de x_o, x' et ξ'.

Donc on aura des opérateurs dont le symbole principal $P_t(x_o,x';\xi_o,\xi')$ peut être écrit sous la forme :

$$P_t(x_o,x';\xi_o,\xi') = \prod_{i=1}^{P} (\xi_o - \lambda_i(x_o,x';\xi'))^{r_i}$$

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = t$$

où $\lambda_i(x_o,x';\xi')$ $(1 \leqslant i \leqslant P)$ sont les racines caractéristiques de P.

Comme P_t est à coefficients réels, les racines caractéristiques sont ou bien réelles, ou bien non réelles conjuguées.

i.e. ou bien $\mathrm{Im}\ \lambda_i(x_o,x';\xi') \equiv 0$

ou bien $|\mathrm{Im}\ \lambda_i(x_o,x';\xi')| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$

pour $(x_o,x';\xi') \in \Omega \times S^{n-1}_{\xi'}$ où

$$\Omega = \{(x_o,x') \text{ tq } |x'| \leqslant \tilde{r} \text{ et } 0 \leqslant x_o \leqslant T\}$$

pour certains $\tilde{r}$ et T, et

$$S^{n-1}_{\xi'} = \{\xi' \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |\xi'| = 1\}.$$

Nous faisons l'hypothèse suivante sur les termes d'ordre inférieur :

(A) $$P'_{t-1}(0,0;\xi_o,\xi')\Big|_{\xi_o=\lambda_j(0,0;\xi')} \neq 0$$

pour tout $\xi' \in S^{n-1}_{\xi'}$ si $r_j \geqslant 2$.

où $P'_{t-1}(x_o,x';\xi_o,\xi')$ désigne le polynôme sous-caractéristique de l'opérateur P défini par :

$$P'_{t-1}(x_o,x';\xi_o,\xi') = P_{t-1}(x_o,x';\xi_o,\xi') + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} P_t(x_o,x';\xi_o,\xi').$$

Théorème II.2.1.

Supposons que $x_o = 0$ est non caractéristique à l'origine pour P.

Supposons aussi que la condition (A) est satisfaite.

Alors il existe une constante C indépendante de u telle que pour $\tilde{r}$, T et K^{-1} suffisamment petits, on a l'estimation suivante :

$$k|||u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{r}} \leqslant C|||Pu|||^2$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ où $\Omega = \{(x_o,x') \text{ tel que } |x'| \leqslant \tilde{r} \text{ et } 0 \leqslant x_o \leqslant T\}$

et $r = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} r_i$ ($|||\ \ |||$ et $|||\ \ |||_s$ sont définies p. 2).

Théorème II.2.2.

Supposons que les conditions du théorème II.2.1 sont satisfaites alors, il y a un voisinage Ω' de l'origine contenant Ω tel que :

si $u \in H^{Loc}_{(t)}(\Omega')$ satisfait :

$Pu = 0$ et

$u = 0$ dans $\{(x_o,x') : (x_o,x') \in \Omega' \text{ et } x_o < 0\}$

alors $u \equiv 0$ dans Ω.

Rappelons que :

$H^{Loc}_{(t)}(\Omega')$ est l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$ telles que $\psi u \in H_{(t)}$ pour toute $\psi \in C_o^\infty(\Omega')$

On munit $H^{Loc}_{(t)}(\Omega')$ de la topologie définie par la famille de semi-normes :

$u \longrightarrow ||\psi u||_t$ $\qquad \psi$ parcourant $C_o^\infty(\Omega')$

avec $||v||^2_t = \int |1 + |\xi'|^2)^t |\hat{v}(\xi')|^2 d\xi'$.

Remarque II.2.1.

P. Cohen a présenté l'exemple suivant (voir L. Hörmander [42], section 8.9.2) qui montre que certaines conditions sur les coefficients de $P_t + P_{t-1}$ sont nécessaires pour avoir l'unicité du problème de Cauchy.

Il n'y a pas unicité pour le problème de Cauchy associé à l'opérateur :

$$Pu = \partial_{x_o}^r u + a(x_o,x_1)\partial_{x_1} u \qquad (\, r \;\text{ entier } \geqslant 1\,)$$

pour un certain $a(x_o,x_1) \in C^\infty(R^2)$.

DEUXIEME PARTIE

§ 3 - *Hypothèses et résultats obtenus dans le cas matriciel avec caractéristiques multiples.*

Les notations sont celles de [5] et [16].

Soit l'opérateur différentiel matriciel réel de dimension $m \times m$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et d'ordre t.

$$h = \sum_{j=0}^{t} i^{t-j}\, h_{t-j}(x,D_x)$$

où $h_{t-j} = h_{t-j}(x,\xi)$ est une matrice de dimension $m \times m$ formée de fonctions $(h_{t-j})^\alpha_\beta$ polynômiales homogènes de degré $t-j$ en ξ et de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ en x $(0 \leqslant j \leqslant t)$ tel que la matrice caractéristique

$$H = h_t$$

vérifie les hypothèses suivantes :

(A)

Hypothèse 1.

Le déterminant caractéristique det H possède une décomposition en facteurs H_s $(s = 1,\dots,\sigma)$ notée :

$$\det H = (H_1)^{\nu_1} \dots (H_s)^{\nu_s} \dots (H_\sigma)^{\nu_\sigma} \quad ;$$

$H_s = H_s(x,\xi)$ est une fonction polynomiale en ξ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ en x telle que :

$$0 < \inf\{|H_s(x,I_x)| \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}\} \qquad (s = 1,\dots,\sigma)$$

où $(I_x)_{x\in\mathbb{R}^{n+1}}$ est le champ de covecteur de coordonnée $\xi = (1,0,\dots,0)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

La décomposition est une décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[\xi]$; chaque multiplicité ν_s est constante.

Hypothèse 2.

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et chaque $s = 1,\dots,\sigma$ dans l'anneau principal ϕ_s, localisé de $\mathbb{R}[\xi]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s, dont les éléments sont des fractions à dénominateurs non divisibles par H_s dans $\mathbb{R}[\xi]$,

On a la forme réduite suivante de la matrice H à l'aide de ses facteurs invariants H_s ([16], [5], [43])

$$H \underset{\phi_s}{\sim} \begin{pmatrix} (H_s)^{q_1(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (H_s)^{q_m(s)} \end{pmatrix}$$

avec $q_1(s) \geqslant \ldots \geqslant q_m(s)$ et $\nu_s = q_1(s) + \ldots + q_m(s)$.

On suppose que les multiplicités $q_i(s)$ sont constantes dans Ω quel que soit $s = 1,\ldots,\sigma$ et $i = 1,\ldots,m$.

Dans ce travail, seule la constance de $q_1(s) = q^s$ $(s = 1,\ldots,\sigma)$ dans Ω sera utilisée.

Hypothèse 3.

Le radical caractéristique :

$$R = R(x,\xi) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(x,\xi)$$
$$= R(x,I_x) \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} (\xi_o - \lambda_j(x,\xi'))$$

a ses racines $\lambda_j(x,\xi')$ distinctes deux à deux et en posant

$$H_1(x,\xi) = H_1(x,I_x) \prod_{i=1}^{\tau_1} (\xi_o - \lambda_i(x,\xi'))$$

$$\vdots$$

$$H_s(x,\xi) = H_s(x,I_x) \prod_{i=\tau_{s-1}+1}^{\tau_s} (\xi_o - \lambda_i(x,\xi'))$$

$$\vdots$$

$$H_\sigma(x,\xi) = H_\sigma(x,I_x) \prod_{i=\tau_{\sigma-1}+1}^{\tau_\sigma} (\xi_o - \lambda_i(x,\xi'))$$

on a

$$0 = \tau_o < \tau_1 \ldots < \tau_s < \ldots < \tau_\sigma \quad , \quad d^o H_s = \tau_s - \tau_{s-1}$$

et les inégalités :

$$0 < \inf \{|\lambda^i(x,\xi') - \lambda^j(x,\xi')| \quad ; \quad i \neq j, \quad x \in \Omega, \quad |\xi'| = 1\}$$

$$0 < \inf \{|H_s(x,I_x)| \; ; \; x \in \Omega \quad , \quad 1 \leqslant s \leqslant \sigma\}.$$

On note

A'^k_i le cofacteur de H^i_k ,

$A'^{k\ell}_{ij}$ le cofacteur de $H^i_k H^j_\ell$ dans le développement de det H.

D'après les hypothèses 1), 2), 3) il s'ensuit que :

Les facteurs H_s sont uniques à un facteur multiplicatif près appartenant à $B^\infty(\Omega)$ et borné inférieurement en valeur absolue. Les multiplicités ν_s sont indépendantes de H_s vérifiant les hypothèses et il en est de même des multiplicites $q_1(s),\ldots,q_m(s)$ pour tout $s = 1,\ldots,\sigma$, car l'hypothèse 2) signifie que dans la matrice caractéristique H, quel que soit $r = 1,\ldots,m-1$, les mineurs d'ordre r sont tous divisibles par $(H_s)^{q_{r+1}(s)+\ldots+q_m(s)}$ et un au moins n'est pas divisible par $(H_s)^{q_{r+1}(s)+\ldots+q_m(s)+1}$ pour tout $s = 1,\ldots,\sigma$.

On pose :

$$A'^i_j = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_2(s)+\ldots+q_m(s)} . A^i_j$$

$$= \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\nu_s - q_1(s)} . A^i_j$$

$$A'^{k\ell}_{ij} = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_3(s)+\ldots+q_m(s)} A^{k\ell}_{ij}$$

$$= \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\nu_s - q_1(s) - q_2(s)} A^{k\ell}_{ij}$$

Avec la convention de sommation d'Einstein, on a donc :

$$\Theta \begin{cases} H^i_k \, A'^k_\ell = A'^i_k \, H^k_\ell & = \det H . \delta^i_\ell \\ A'^k_i A'^\ell_j - A'^k_j A'^\ell_i & = (\det H) A'^{k\ell}_{ij} \\ H^i_k A^k_\ell \quad = A^i_k H^k_\ell & = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_1(s)} \delta^i_\ell \\ & = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s} \delta^i_\ell \\ A^k_i A^\ell_j \quad - \quad A^k_j A^\ell_i & = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_1(s)-q_2(s)} A^{k\ell}_{ij} \end{cases}$$

On pose τ = degré de $\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s} = \sum_{s=1}^{\sigma} (\tau_s - \tau_{s-1}) q^s$ et r_i = multiplicité du zéro $\lambda_i(x,\xi')$ du polynôme $\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s}$ en ξ_o. On suppose que :

$\boxed{\text{(B)}}$

Il existe m mineurs de rang $(m-1)$ non nuls quels que soient $\xi_o = \lambda_i(x,\xi')$ $(i = 1,\dots,\tau_\sigma)$.

Quitte à former, un changement dans l'ordre des équations et des inconnues, on peut supposer :

$A^1_1(x,\lambda_i) \neq 0$	$\forall\, \xi'$,	$x = (0,0)$ et	$i = 1,\dots,\tau_\sigma$	tq $r_i > 1$
$A^2_2(x,\lambda_i) \neq 0$	"	"	"	"
$\vdots$				
$A^m_m(x,\lambda_i) \neq 0$	"	"	"	"

C

$$K_1^1(0,0;\xi_o = \lambda_i(0,0;\xi'),\xi') \neq 0, \qquad \forall\, \xi' \in S^{n-1}_{\xi'}$$

et $i = 1,\dots,\tau_\sigma/r_i > 1$.

où K_1^1 est le polynôme sous caractéristique du système

$$K_1^1 = \left[H_j^{*i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial \xi_\lambda} H_j^i\right] A_i^1 A_1^j + \frac{1}{2} H_j^i \left[\frac{\partial A_1^j}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_i^1}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_i^1}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_1^j}{\partial x_\lambda}\right].$$

D

- Si $q_1(s) > 1$ alors $q_2(s) = \dots = q_m(s) = 0$.

Nous allons montrer les théorèmes suivants :

* *Théorème II.3.1* ([6], [7]).

Sous les hypothèses (A), (B), (C) et (D) et lorsque $\sigma = 1$, $t = 1$ et $H_1(x;\xi) = \left[\xi_o - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\xi_j\right]$, il existe une constante $C > 0$, indépendante de u telle que pour $\tilde{r}$, T, k^{-1} suffisamment petits, on ait l'estimation suivante :

$$k|||u|||^2_{t-2+\frac{1}{q}} \leqslant C|||hu|||^2$$

pour tout $u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$ où

$$\Omega = \{x = (x_o,x') \in R^{n+1}/||x'||<\tilde{r},\quad 0 \leqslant x_o \leqslant T\}$$

$$q = \max_{s=1,\dots,\sigma} q^s = q^1 \quad \text{(on peut supposer } q^1 \geqslant q^2 \geqslant \dots \geqslant q^\sigma)$$

où $|||\ |||$ et $|||\ |||_s$ sont définies à la page 2.

* *Théorème II.3.2* [6], [7]

Supposons les hypothèses du théorème II.3.1 satisfaites, alors il existe un voisinage Ω' de l'origine contenant $\bar{\Omega}$ tel que si $u \in (H^{Loc}_{(t)}(\Omega'))^m$ satisfait $hu = 0$ et $u = 0$ dans $\{(x_o, x') \in \Omega' \ ; \ x_o < 0\}$ alors $u \equiv 0$ dans Ω.

* *Remarque* :

On conjecture que le résultat est vrai pour σ quelconque dans N.

(Cf. Touadera : Thèse de 3ème cycle, en préparation [37]).

CHAPITRE III

REDUCTION DE L'OPERATEUR h

On décompose le symbole $h(x;\xi)$ de h en symboles homogènes d'ordre $t, t-1, t-2, \dots, 0$

(3.1) $$h(x,\xi) = i^t H(x,\xi) + i^{t-1} H^*(x,\xi) + i^{t-2} H^{**}(x,\xi) + \dots$$
avec $d^o H = t$, $d^o H^* = t-1$, $d^o H^{**} = t-2 \dots\dots\dots\dots$

Soit a un opérateur matriciel $m \times m$ dont les éléments $a^i_j \in L^{\tau-t}_x$ sont de la forme

(3.2) $$a^i_j = \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s}(x;I_x)} \left[i^{\tau-t} A^i_j + i^{\tau-t-1} A^{*i}_j \right]$$

où $A^i_j \in L^{\tau-t}_x$ a pour symbole $A^i_j(x;\xi)$ défini antérieurement à partir de la matrice des cofacteurs de H et $A^{*i}_j \in L^{\tau-t-1}_x$ a un symbole $A^{*i}_j(x,\xi) \in S^{\tau-t-1}_x$ que l'on déterminera par la suite.

On pose :

(3.3) $$b = ah$$

(3.4) $$\partial_i = D_{x_o} - \lambda_i(x, D_{x'}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma$$

(3.5) $$\pi_\tau = \partial_1^{r_1} \partial_2^{r_2} \dots \partial^{r_{\tau_\sigma}}$$ avec

$$
\begin{aligned}
r_1 = r_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad &= r_{\tau_1} = q^1 \\
r_{\tau_1+1} = r_{\tau_1+2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad &= r_{\tau_2} = q^2 \\
&\vdots \\
r_{\tau_{\sigma-1}+1} = r_{\tau_{\sigma-1}+2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad &= r_{\tau_\sigma} = q^\sigma
\end{aligned}
$$

donc $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{\tau_\sigma}$ puisque $q^1 \geqslant q^2 \geqslant \ldots \geqslant q^\sigma$, on décompose alors le symbole $b(x;\xi)$ de b en symboles homogènes d'ordre τ, $\tau-1$, $\tau-2, \ldots$

$$b(x;\xi) = B(x,\xi) + B^*(x,\xi) + B^{**}(x,\xi) + \ldots$$

D'après (3.1), (3.3) et Θ, on a :

(3.6) $$B(x,\xi) = \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} (\xi_o - \lambda_j(x,\xi'))^{r_j} . I_m$$

où I_m est la matrice identité d'ordre $m \times m$.

On définit $\pi_{\tau-1}$ par :

(3.7) $$i^{\tau-1}\pi_{\tau-1} = i^\tau \left[B(x;D_x) - \pi_\tau I_m\right] + i^{\tau-1} B_{\tau-1}$$

en liaison avec λ_j et ∂_j, on définit $\tilde{\lambda}_j$ et Δ_j ; $0 \leqslant j \leqslant \tau_\sigma$ comme suit :

Soit $\tilde{\tau}_o = 0$

$\tilde{\tau}_1 = r_{\tau_\sigma} = q^\sigma$

$$\tilde{\tau}_2 = r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma - 1}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\tau}_j = r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma - 1} + \dots\dots\dots + r_{\tau_\sigma - j + 1}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{\tau_\sigma} &= r_{\tau_\sigma} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + r_1 \\ &= q^\sigma(\tau_\sigma - \tau_{\sigma-1}) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + q^1(\tau_1 - \tau_o) = \tau. \end{aligned}$$

On pose :

$$\Delta_o = \partial_o$$

et pour $0 \leqslant k \leqslant \tau_\sigma - 1$; $\tilde{\tau}_k + 1 \leqslant j \leqslant \tilde{\tau}_{k+1}$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_j(x, D_{x'}) &= \lambda_{\tau_\sigma - k}(x; D_{x'}) \quad \text{et} \\ \Delta_j(x, D_x) &= D_{x_o} - \tilde{\lambda}_j(x, D_{x'}) \\ &= \partial_{\tau_\sigma - k} \end{aligned}$$

i.e.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \Delta_{r_{\tau_\sigma}} = \partial_{\tau_\sigma}$$

$$\Delta_{r_{\tau_\sigma}+1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \Delta_{r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma - 1}} = \partial_{\tau_\sigma - 1}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{r_{\tau_\sigma} + \dots + r_2 + 1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \Delta_{\tau - 1} = \Delta_\tau = \partial_1 \quad .$$

Les ∂_j et les Δ_j sont des dérivées directionnelles et peuvent être utilisées comme des dérivées, comme l'expliquent les lemmes suivants.

Lemme III.1.1 [18]

(a) pour tout $j \geq 0$, il existe $a_i(x,D_{x'}) \in L^i_{x'}$ tels que

$$\Delta_j\Delta_{j-1} \dots \Delta_o = \sum_{i=0}^{j} a_i(x,D_{x'})D_{x_o}^{j-i} + T_1$$ où T_1 représente les termes

d'ordre inférieurs i.e :

$$T_1 = \sum_{i=0}^{j-1} C_i(x,D_{x'})D_{x_o}^{j-i-1} \qquad \text{ordre de } C_i \leq i .$$

(b) Réciproquement, il existe $b_i(x,D_{x'}) \in L^i_{x'}$ tels que

$$D^j_{x_o} = \sum_{i=0}^{j} b_i(x;D_{x'})\Delta_{j-i}\Delta_{j-i-1} \dots \Delta_o + T_2 \qquad \text{où}$$

$$T_2 = \sum_{i=0}^{j-1} d_i(x;D_{x'})\Delta_{j-i-1}\Delta_{j-i-2} \dots \Delta_o \qquad \text{ordre de } d_i \leq i.$$

On utilise la convention que $\Delta_k \equiv I$ pour $k \leq 0$.

Preuve :

On effectue une récurrence sur j ; il suffit d'exprimer la base $(1,\xi_o,\xi_o^2,\dots,\xi_o^{\tau-1})$ de l'espace vectoriel des polynômes en ξ_o de degré $\leq \tau-1$ dans la seconde base formée par les symboles principaux des $\{\Delta_j,\Delta_{j-1},\dots,\Delta_o\}$, $j = 0,\dots,\tau-1$ et réciproquement (cf. [18], [46], [47]).

Corollaire III.1. [18]

Tout opérateur de L^k_x (k entier non négatif) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=0}^{k} C_i(x,D_{x'})\Delta_{k-i}\cdot\Delta_{k-i-1} \dots \Delta_o + T$$

où $C_i \in L^i_{x'}$ et $T \in L^{k-1}_x$.

Preuve :

C'est une simple application de la partie (b) du lemme précédent.

Corollaire III.1.2 [18]

(3.8)

Il existe $C_{\tau-i} \in (L_{x'}^{\tau-i})_{m\times m}$ tels que :

$$\pi_{\tau-1} = C_{\tau-1}(x,D_{x'}) + C_{\tau-2}(x,D_{x'}).\Delta_1 + \dots +$$

$$+ C_{\tau-i}(x,D_{x'})\Delta_{i-1} \dots \Delta_o + C_o \, \Delta_{\tau-1} \dots \Delta_o + T$$

avec $T \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$ où

$(L_{x'}^{\tau-i})_{m\times m}$ (resp. $(L_x^{\tau-2})_{m\times m}$) désigne l'espace des matrices $m \times m$ dont les éléments appartiennent à $L_{x'}^{\tau-i}$ (resp. $L_x^{\tau-2}$).

Preuve :

Posons $\pi_{\tau-1} = ({}^i_j\pi_{\tau-1})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$

avec ${}^i_j\pi_{\tau-1} \in L_x^{\tau-1}$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant m$.

Donc d'après le corollaire III.1.1

$${}^i_j\pi_{\tau-1} = {}^i_jC_{\tau-1}(x;D_{x'}) + {}^i_jC_{\tau-2}(x;D_{x'})\Delta_1 + \dots$$

$$+ {}^i_jC_{\tau-k}(x;D_{x'})\Delta_{k-1} \dots \Delta_o + {}^i_jC_o\Delta_{\tau-1} \dots \Delta_o + {}^i_jT$$

avec ${}^i_jT \in L_x^{\tau-2}$.

D'où le résultat énoncé avec :

$$C_{\tau-k} = ({}^i_jC_{\tau-k})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

$$T = ({}^i_jT)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

Définition III.1.1

$$(3.9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\text{Pour } 1 \leqslant j \leqslant \tau_\sigma \text{ , on pose}\\
&L_j(x_o,x';\xi') = \pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')\\
&\text{où } \pi^o_{\tau-1}(x;\xi) \text{ est le symbole principal de } \pi_{\tau-1}(x,D_x).\\
&\text{Remarquons que :}\\
&L_j(x_o,x';\xi') = \pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')\\
&\qquad = C_{\tau-1}(x;\xi') + C_{\tau-2}(x;\xi')(\lambda_j(x;\xi') - \tilde{\lambda}_1(x;\xi'))\\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\\
&\qquad + C_{\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(\lambda_j(x;\xi')-\lambda_{\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(x;\xi'))\ldots(\lambda_j(x;\xi')-\tilde{\lambda}_1(x;\xi')).
\end{aligned}\right.$$

En effet, rappelons qu'on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_o &= 0\\
\tilde{\tau}_1 &= r_{\tau_\sigma} = q^\sigma\\
\tilde{\tau}_2 &= r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma-1}\\
\tilde{\tau}_3 &= r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma-1} + r_{\tau_\sigma-2}\\
&\vdots\\
\tilde{\tau}_{j-1} &= r_{\tau_\sigma} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_{\tau_\sigma-j+1+1}\\
&= r_{\tau_\sigma} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_{\tau_\sigma-j+2}\\
\tilde{\tau}_j &= r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_{\tau_\sigma-j+1}\\
&\vdots\\
\tilde{\tau}_{\tau_\sigma} &= r_{\tau_\sigma} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_1\\
&= q^\sigma(\tau_\sigma - \tau_{\sigma-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q^1(\tau_1-\tau_o) = \tau.
\end{aligned}$$

pour $0 \leqslant k \leqslant \tau_\sigma - 1$ et $\tilde{\tau}_k + 1 \leqslant i \leqslant \tilde{\tau}_{k+1}$.

On a défini :

$$\tilde{\lambda}_i(x;D_{x'}) = \lambda_{\tau_\sigma - i}(x;D_{x'}) \quad \text{et}$$

$$\Delta_i(x;D_{x'}) = D_{x_o} - \tilde{\lambda}_i(x;D_{x'}) = \partial_{\tau_\sigma - i}$$

on a donc

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad = \Delta_{r_{\tau_\sigma}} = \partial_{\tau_\sigma}$$

$$\Delta_{r_{\tau_\sigma}+1} = \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad = \Delta_{r_{\tau_\sigma}+r_{\tau_\sigma - 1}} = \partial_{\tau_\sigma - 1}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{r_{\tau_\sigma}+\ldots+r_{\tau_\sigma-(\tau_\sigma-j-2)}+1} = \cdots\cdots = \Delta_{r_{\tau_\sigma}+r_{\tau_\sigma-1}+\ldots+r_{\tau_\sigma-(\tau_{\sigma-j-1})}} = \partial_{j+1}$$

$$\Delta_{r_{\tau_\sigma}+r_{\tau_\sigma-1}+\ldots+r_{\tau_\sigma-(\tau_{\sigma-j-1})}+1} = \cdots\cdots = \Delta_{r_{\tau_\sigma}+r_{\tau_\sigma-1}+\ldots+r_{\tau_\sigma-(\tau_\sigma-j)}}$$

$$= \partial_j = \partial_{\tau_\sigma-(\tau_\sigma-j)}$$

$$\Delta_{r_{\tau_\sigma}+\ldots+r_2+1} = \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad = \Delta_{\tau-1} = \Delta_\tau = \partial_1 .$$

D'après le corollaire III.1.1, on a

$$L_j(x_o,x';\xi') = \pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$$= \sum_{i=0}^{\tau-1} C_i(x;\xi')\Delta_{\tau-1-i} \cdots \Delta_o(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$$= \sum_{i=\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma - j}}^{\tau-1} C_i(x;\xi')\Delta_{\tau-1-i}\cdots\Delta_o(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$$+ \sum_{i=0}^{\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}-1} C_i(x;\xi')\Delta_{\tau-1-i}\cdots\Delta_o(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$$\underbrace{\begin{aligned}
&= C_{\tau-1}(x;\xi') + C_{\tau-2}(x;\xi')\left[\lambda_j(x;\xi') - \tilde{\lambda}_1(x;\xi')\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ C_{\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(x,\xi')\left[\lambda_j(x;\xi') - \tilde{\lambda}_{\tau_{\tau_\sigma-j}}(x;\xi')\right]\ldots\left[\lambda_j(x;\xi') - \tilde{\lambda}_1(x;\xi')\right] \\
&+ \sum_{i=0}^{\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}-1} C_i(x;\xi')\Delta_{\tau-1-i}\ \ldots\ \Delta_o(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')
\end{aligned}}_{S_1}$$

dans chaque terme de S_1, on a

$$\Delta_{\tau-1-(\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}-1)}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') \quad \text{en facteur}$$

donc on a

$$\Delta_{\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}+1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') \quad \text{en facteur}$$

or

$$\Delta_{\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}+1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') = \left[\lambda_j(x;\xi') - \lambda_j(x\ ;\xi')\right] \equiv 0$$

d'où

$$\begin{aligned}
L_j(x_o,x';\xi') &= \pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') \\
&= C_{\tau-1}(x;\xi') + C_{\tau-2}(x;\xi')\left[\lambda_j(x;\xi') - \tilde{\lambda}_1(x;\xi')\right] + \ldots \\
&+ C_{\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(x;\xi')\left[\lambda_j(x;\xi') - \lambda_{\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(x;\xi')\right]\ldots\left[\lambda_j(x;\xi') - \tilde{\lambda}_1(x;\xi')\right]
\end{aligned}$$

On obtient le lemme suivant :

Lemme III.1.2 [46], [47]

$L_j(x;\xi')$ admet $\dfrac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') \times \dfrac{1}{\prod\limits_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}}$

comme valeur propre et pour vecteur propre associé

$$\left[A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^m\right]^t (x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$\forall\ \lambda_j$ racine en ξ_o de H_s tel que $q_1(s)-q_2(s) > 0$ et $q_1(s) > 1$.

Preuve :

En effet, d'après [46] et [47], on a :

$$i^{\tau-1}\left[\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}\right] L_j(x;\xi')$$

$$= \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}\ \sigma_{\tau-1}(b-i^\tau \pi_\tau I_m)(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

où $\sigma_{\tau-1}$ désigne le symbole principal de $(b-i^\tau \pi_\tau I_m)$

$$i^{\tau-1}\left(\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}\right) L_j(x;\xi')$$

$$= \left[B^* - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_j \partial x_j} B\right](x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;\xi_x))^{q^s}$$

or $\displaystyle\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s} B^* = A^*H + AH^* + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j}$

et $B = AH$.

D'où

(3.10) $$M_j(x;\xi') = \left(\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}\right) L_j(x;\xi')$$

$$= \left[A^*H + AH^* + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 (AH)}{\partial \xi_j \partial x_j}\right](x;\xi_o = \lambda_j;\xi')$$

en multipliant la matrice $M_j(x;\xi')$ par la première colonne $A_1(x;\xi_o = \lambda_j,\xi') = [A_1^1,\dots,A_1^m]^t(x;\xi_o = \lambda_j,\xi')$ de la matrice A calculée au point $(x;\xi_o = \lambda_j,\xi')$, on obtient

$$(3.11) \qquad M_j(x;\xi').A_1(x;\xi_o = \lambda_j,\xi')$$

$$= \frac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o = \lambda_j,\xi').A_1(x;\xi_o = \lambda_j,\xi')$$

en effet, on a pour $\xi_o = \lambda_j$ avec $q_1(s) > 1$.

$$\left.\begin{aligned} &A^*HA_1\ (x;\xi_o = \lambda_j,\xi') \equiv 0 \\ &\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j}.A_1(x;\xi_o = \lambda_j,\xi') \equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{ d'après } \Theta$$

$$AH^*A_1 = [\Sigma A_j^{\ell} H_k^{*j} A_1^k]_{\ell=1,\dots,m}$$

$$(3.12) \qquad = \frac{\Sigma A_j^1 H_k^{*j} A_1^k}{A_1^1} . A_1$$

car $A_j^{\ell}A_1^1 = A_j^1 A_1^{\ell}$ en $\xi_o = \lambda_j$ d'après Θ et le fait que $q_1(s) - q_2(s) > 0$.

D'autre part :

$$\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_j\partial x_j} = \frac{A\partial^2 H}{\partial\xi_j\partial x_j} + \frac{\partial^2 A}{\partial\xi_j\partial x_j}.H + \frac{\partial A}{\partial\xi_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial A}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial\xi_j}$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial\xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_j\partial x_j}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\{-\frac{1}{2}\frac{A\partial^2 H}{\partial\xi_j\partial x_j} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial A}{\partial\xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial\xi_j}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial\xi_j\partial x_j}H\}$$

On a alors pour $\xi_o = \lambda_j$

$$-\frac{1}{2}A\Big(\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_j\partial x_j}\Big)A_l = \frac{-\frac{1}{2}\sum_{i,k} A_l^l\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 H_k^i}{\partial\xi_j\partial x_j}\right].A_l^k}{A_l^l}\;.\;A_l$$

d'après Θ.

D'autre part :

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial\xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial\xi_j}\right] = \frac{-\frac{1}{2}\sum_{i,k} H_k^i\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial A_i^l}{\partial\xi_j}\frac{\partial A_l^k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i^l}{\partial x_j}\frac{\partial A_l^k}{\partial\xi_j}\right]}{A_l^l}\;.\;A_l$$

car

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_j}\;.\;A_l &= H\frac{\partial A_l}{\partial x_j}\\ \frac{\partial H}{\partial\xi_j}\;.\;A_l &= -H\frac{\partial A_l}{\partial\xi_j}\end{aligned}\right\}\quad \text{car}\quad q^s > 1 \qquad (r_j \geqslant 2).$$

D'où

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial\xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial\xi_j}\right].A_l = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial A}{\partial x_j}H\frac{\partial A_l}{\partial\xi_j} - \frac{\partial A}{\partial\xi_j}H\frac{\partial A_l}{\partial x_j}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[-A\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial A_l}{\partial\xi_j} + A\frac{\partial H}{\partial\xi_j}\frac{\partial A_l}{\partial x_j}\right]$$

car $AH = \det HI_m$ et $q_l(s) > 1$

Or $$A = \frac{A.A_1^1}{A_1^1} = \frac{A_1 . A^1}{A_1^1} \qquad \text{modulo } \xi_o - \lambda_j$$

D'où $$A \frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{A_1}{A_1^1} A^1 \frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad \text{modulo } \xi_o - \lambda_j$$

$$= - \frac{A_1}{A_1^1} \frac{\partial A^1}{\partial x_j} . H \qquad \text{modulo } \xi_o - \lambda_j$$

Donc :

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial A}{\partial \xi_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} - \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \right] .A_1 = \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{\partial A^1}{\partial x_j} \; H \; \frac{\partial A_1}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A^1}{\partial \xi_j} \; H \; \frac{\partial A_1}{\partial x_j} \right]}{A_1^1} . A_1$$

$$\text{modulo } \xi_o - \lambda_j$$

en appelant A_1 la première colonne de la matrice A et A^1 la première ligne de cette matrice

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial x_j} H.A_1 = 0 \qquad \text{modulo } \xi_o - \lambda_j \qquad \text{d'après } \Theta.$$

Donc en regardant les trois parties, on a bien

$$M_j(x;\xi').A_1(x;\xi_o = \lambda_j,\xi') = \frac{K_1^1(x,\xi_o = \lambda_j,\xi')}{A_1^1} A_1(x;\xi_o = \lambda_j,\xi').$$

D'où le lemme.

<u>*Remarque*</u> *III.1.1*

En appelant plus généralement (pour $\ell = 1,\dots,m$)

$$K_\ell^\ell = \left[H_j^{*i} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial \xi_\lambda} H_j^i \right] A_i^\ell A_\ell^j + \frac{1}{2} H_j^i \left[\frac{\partial A_\ell^j}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial A_i^\ell}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_i^\ell}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial A_\ell^j}{\partial x_\lambda} \right]$$

On a

$$(3.13) \qquad A_1^1 K_\ell^\ell \equiv A_\ell^\ell K_1^1 \qquad \text{modulo } \xi_o - \lambda_j ,$$

pour tout λ_j racine en ξ_o de H_s tel que $q^s \geq 2$ et $q_1(s) - q_2(s) > 0$ (cf. [43], [47], p. I, 35, et plus généralement

$$A_j^i K_k^\ell \equiv A_k^\ell K_j^i .$$

Proposition III.1.1 ([7])

Sous les hypothèses (A), (B), (C) et (D) il existe un opérateur

$$(\alpha) \qquad a = \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}} \left[A + A^*\right]$$

tel que la matrice L_j définie par (3.9) vérifie :

pour tout j avec $\lambda_j(x;\xi')$ racine de H_s vérifiant $q^s \geq 2$ et $q_1(s) - q_2(s) > 0$, on a :

$$\left[L_j(x;\xi')\right]_k^\ell \equiv 0 \qquad \forall x \in \Omega, \ \forall \xi' \text{ et } \ell \neq k$$

$$\left[L_j(x;\xi')\right]_\ell^\ell = \frac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') . \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s}}$$

et par suite

$$\left|\left[L_j(x;\xi')\right]_\ell^\ell\right| \geq \sigma_o |\xi'|^{\tau-1} \qquad \forall \ell = 1,\dots,m$$

avec $\sigma_o > 0$ et $(x;\xi') \in U \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ où U est un voisinage de l'origine.

Preuve :

Il suffit de résoudre les équations

$$(3.14)\quad \begin{cases} [L_j(x;\xi')]^{\ell}_{k} = 0 & \ell \neq k \\ \text{pour } j \text{ tq } \lambda_j \text{ est racine de } H_s \text{ avec } q^s \geqslant 2. \end{cases}$$

(posons J l'ensemble des j vérifiant cette propriété).

Par rapport aux inconnus $A^{*}(x;\lambda_j(x;\xi'),\xi')$ avec

$$A^{*}(x;\lambda_j(x;\xi'),\xi') = [(A^{*}(x;\lambda_j(x;\xi'),\xi'))^{\ell}_{k}], \quad 1 \leqslant \ell \leqslant m \;, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

A l'aide de l'égalité (3.10), on choisit

$$A^{*1}_{1} = A^{*2}_{2} \quad \dots \quad = A^{*m}_{m} = 0$$

$$\forall\, \xi_o = \lambda_j(x;\xi') \qquad \text{pour } j \in J.$$

Résolvons (3.14) en séparant les inconnues $A^{*\ell}_{k}$ en lignes en fixant ℓ parmi $1,\dots,m$

$$\left\{ \sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{m} A^{*\ell}_{k} H^{k}_{i} + \sum_{k=1}^{m} A^{\ell}_{k} H^{*k}_{i} + \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} A^{\ell}_{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} H^{k}_{i}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\alpha \partial x_\alpha}\left[\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)q^s\right]\delta^{\ell}_{i} \right\}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi') = 0$$

$i = 1,\dots,m$ et $i \neq \ell$.

D'après Θ et (3.10), on a un système de (m-1)-équations ($i = 1,\dots,m$ avec $i \neq \ell$) à (m-1)-inconnues $A^{*\ell}_{k}$ ($k = 1,\dots,m$ avec $k \neq \ell$) de Cramer par hypothèse car :

$$\det(H_i^k)_{\substack{k\neq\ell \\ i\neq\ell}}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$$= A_\ell^\ell(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$$\neq 0.$$

Donc $A_k^{*\ell}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$ sont déterminées pour

$\ell = 1,\dots,m$

$k = 1,\dots,m$

et $j \in J$.

Donc les $[L_j(x;\xi')]_\ell^\ell$ sont déterminées pour $\ell = 1,\dots,m$ et $j \in J$.

Calculons ces quantités en utilisant le lemme III.1.2, on a pour i fixé dans $1,\dots,m$

$$\sum_{\ell=1}^{m} (L_j)_\ell^i A_i^\ell = (L_j)_i^i A_i^i$$

$$= \frac{K_1^1 \qquad A_i^i}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s} . A_1^1} \qquad \text{en } \xi_o = \lambda_j .$$

D'où $(L_j)_i^i(x;\xi') = \dfrac{K_1^1}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s} . A_1^1} \quad (x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi').$

D'où

$$[L_j(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')]_\ell^\ell = \frac{K_1^1}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x;I_x))^{q^s} . A_1^1} \quad (x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

pour le reste de la proposition, rappelons l'expression de K_1^1 et la définition de A_j^i

$$K_1^1 = \left[H_j^{*i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial \xi_\lambda} H_j^i\right] A_i^1 A_1^j + \frac{1}{2} H_j^i \left[\frac{\partial A_1^j}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_i^1}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_i^1}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_1^j}{\partial x_\lambda}\right] .$$

$$A_j^i = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q_2(s) \ldots + q_m(s)} . A_j^i$$

$$= \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{\nu_s - q_1(s)} . A_j^i .$$

Donc on a :

$(m-1).t = mt - \tau + \text{degré } A_j^i \implies \text{degré } A_j^i = \tau - t$

degré de $K_1^1 = t - 1 + 2(\tau - t)$

$= 2\tau - t - 1.$

Donc degré de $(L_j)_\ell^\ell = 2\tau - t - 1 - (\tau - t)$

$= \tau - 1.$

D'après les hypothèses (B) et (C) et le fait que le degré de (L_j) est $\tau-1$.

$\exists \sigma_o > 0$ tq $|(L_j(x;\xi'))_\ell^\ell| \geq \sigma_o |\xi'|^{\tau-1}$

$\forall \ell = 1,\ldots,m$

$\forall (x;\xi') \in U \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ où U est un voisinage de l'origine

(ce type de minoration est valable dans tout voisinage compact de l'origine).

Proposition III.1.2 [6], [7]

Supposons $t = 1$, $\sigma = 1$ et $H_1(x;\xi) = [\xi_o - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\xi_j]$ et posons $q = q_1(s)$, alors sous les hypothèses (A), (B), (C) et (D), il existe un opérateur matriciel

$$A^{*} = (A_j^{*i})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

avec $A_j^{*i} \in L_x^{\tau-t-1}$ ayant un symbole $A_j^{*i}(x;\xi)$ appartenant à $S_x^{\tau-t-1}$, tel que à l'opérateur propre

$$a = \frac{1}{(H_1)^q(x;I_x)} \left[A + A^{*}\right]$$

on ait un opérateur :

$$b = a.h = i^{\tau}B_{\tau}(x\,;D_x) + i^{\tau-1}B_{\tau-1}(x;D_x) + i^{\tau-2}R_{\tau-2}(x;D_x)$$

où $B_i(x;\xi)$ est la partie homogène de degré i en ξ du symbole de l'opérateur b, $B_i(x;D_x)$ est l'opérateur de symbole $B_i(x;\xi)$ et $R_{\tau-2}(x;D_x)$ est le reste d'ordre τ-2, vérifiant en posant :

$$E = \sigma_{\tau-1}\left[b - i^q\partial_1^q I_m\right] \quad :$$

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i E\right]_k^{\ell}(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = 0$$

pour $\ell \neq k$; $x \in \Omega$; $\xi' \neq 0$ et $0 \leqslant i \leqslant q-2$

et

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i E\right]_{\ell}^{\ell}(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i \frac{K_{\ell}^{\ell}}{A_{\ell}^{\ell}}\right](x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

$$= \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i \frac{K_1^1}{A_1^1}\right](x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

pour $\ell = 1,\ldots,m$; $x \in \Omega$; $\xi' \neq 0$ et $0 \leqslant i \leqslant q-2$.

Preuve :

Pour simplifier les calculs, on suppose que $H_1(x;I_x) = 1$ (on peut toujours se ramener à ce cas).

Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur i allant de 0 à $q-2$.

Pour $i = 0$, le résultat est déjà démontré par le lemme et la proposition précédents.

D'un autre côté, on a les relations suivantes :

$$B = AH = \det H\, I_m = (H_1)^q I_m$$

$$B^* = AH^* + A^*H + \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_\gamma} \frac{\partial H}{\partial x_\gamma}$$

$$\sigma_{q-1}\left[b - i^q \partial_1^q I_m\right](x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = i^{q-1} B^*(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_o}\sigma_{q-1}\left[b - i^q \partial_1^q I_m\right](x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = i^{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o} B^*\right)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^j \sigma_{q-1}\left[b - i^q \partial_1^q I_m\right]\right)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = i^{q-1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^j B^*\right)\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{q-3} \sigma_{q-1}\left[b - i^q \partial_1^q I_m\right]\right)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = i^{q-1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{q-3} B^*\right)\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right]$$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{q-2} \sigma_{q-1}\left[b - i^q \partial_1^q I_m\right]\right)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') =$$

$$= i^{q-1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{q-2}\left[B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_\gamma \partial x_\gamma} B\right]\right)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi').$$

D'où, pour $j = 0,\dots,q-2$, on a :

$$((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j\sigma_{q-1}\left[b-i^q\partial_1^q I_m\right])(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j E)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

$$= i^{q-1}((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j\left[B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}B\right])(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

puisque $((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}B)(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = 0$ si $0 \leqslant j \leqslant q-3$.

D'autre part, en appelant A_ℓ la $\ell^{\text{ième}}$ colonne de A, on a

$$A_\ell^\ell(B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}B)A_\ell =$$

$$= (\sum_{j,k} A_j^\ell H_k^{*j}A_\ell^k + \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} H_k^j(\frac{\partial A_j^\ell}{\partial x_\gamma}\frac{\partial A_\ell^k}{\partial\xi_\gamma} - \frac{\partial A_j^\ell}{\partial\xi_\gamma}\frac{\partial A^k}{\partial x_\gamma}))A_\ell + (H_1)^{q-1}P_\ell$$

$$(\ell = 1,\dots,m)$$

avec P_ℓ une matrice $m \times m$.

Supposons que l'on ait calculé $B^*(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$

$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})B^*\right](x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'),\dots\dots$

$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-1}B^*\right](x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$ tels que :

$$E_k^\ell(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = (\frac{\partial}{\partial\xi_o}E)_k^\ell(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

$$= \dots$$

$$= ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-1}E)_k^\ell(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$$

$$= 0 \qquad \text{pour } \ell \neq k$$

et

$$E_\ell^\ell(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right]$$

$$\vdots$$

$$((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-1}E)_\ell^\ell(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi') = ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-1}\frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell})\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right]$$

pour $\ell = 1,\ldots,m.$

Nous allons calculer $((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j B^*)\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right]$ de telle sorte que :

$$\begin{cases} ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j E)_k^\ell\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right] = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \neq k \\ ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j E)_\ell^\ell\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right] = ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}) \left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right] \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \ell = 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Posons $N = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j E\right]\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right].$

On résout d'abord les équations

$$N_k^\ell = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell \neq k.$$

Ces équations s'écrivent :

$$((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j\left[A^*H + HA^* + \sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial A}{\partial\xi_\gamma}\frac{\partial H}{\partial x_\gamma} - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}(AH)\right])_k^\ell\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right] = 0$$

elles sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^{m}\left[((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_i^{*\ell})H_k^i\right]\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right] = C_k^\ell\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right]$$

avec C_k^ℓ second membre connu puisque :

$$A^*[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'], \dots\dots\dots$$

$$((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-1}A^*)[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] \quad \text{sont déjà déterminés.}$$

Choisissons :

$$((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_1^{*1})[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] =$$

$$= ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_m^{*m})[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] = 0.$$

On résout alors les équations matricielles en séparant les inconnues $((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_i^{*\ell})[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$ en lignes en fixant ℓ dans $1,\dots,m$.

L'élément de la matrice N se trouvant à la $\ell^{\text{ième}}$ ligne et à la $k^{\text{ième}}$ colonne s'écrit :

$$(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\ell}}^{m} (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_i^{*\ell} H_k^i)[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] = C_k^\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$$

$$k = 1,\dots,m \quad \text{et} \quad k \neq \ell.$$

On a un système de $m-1$ équations $(k = 1,\dots,m$ et $k \neq \ell)$ à $m-1$ inconnues $(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_i^{*\ell}[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$ $(i = 1,\dots,m$ et $i \neq \ell)$ de Cramer par hypothèse car :

$$\det(H_k^i)_{\substack{i\neq\ell\\ k\neq\ell}}[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] = A_\ell^\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] \neq 0$$

Par suite, les $(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j A_i^{*\ell}[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$ sont déterminés pour $\ell = 1,\dots,m$ et pour $i = 1,\dots,m$.

Donc les N_ℓ^ℓ sont déterminés pour $\ell = 1,\dots,m$.

Calculons ces quantités.

Nous avons :

$$(B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma} B)A_\ell = \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} A_\ell + (H_1)^{q-1}P_\ell \quad .$$

D'où en dérivant j fois par rapport à ξ_o, on obtient :

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j (B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma} B)\right] A_\ell =$$

$$= - \sum_{i=1}^{j} C_j^i (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-i} (B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma} B)(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i A_\ell$$

$$+ \sum_{i=0}^{j} C_j^i (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-i} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i A_\ell + (H_1)^{q-1-j} P_{\ell,j} \; .$$

En prenant cette inégalité en $[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$ on a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j (B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma} B)\right] A_\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] =$$

$$= - \sum_{i=1}^{j} C_j^i (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-i} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i A_\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$$

$$+ \sum_{i=0}^{j} C_j^i (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j-i} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^i A_\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$$

$$= (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} A_\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] .$$

Il reste à démontre que :

$$((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell})[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] =$$

$$= ((\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_1^1}{A_1^1})[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'].$$

Pour $\ell = 1,\ldots,m$ et $j = 0,\ldots,q-2$.

Ce qui est vrai car : [46]

$$K_\ell^\ell A_1^1 = K_1^1 A_\ell^\ell + (H_1)^{q-1} Q_\ell.$$

D'où $\dfrac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} = \dfrac{K_1^1}{A_1^1} + (H_1)^{q-1} \dfrac{Q_\ell}{A_1^1 A_\ell^\ell}$

et en dérivant j fois avec $0 \leqslant j \leqslant q-2$, on a

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j (\frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}) = (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j (\frac{K_1^1}{A_1^1}) + (H_1)^{q-1-j}.R.$$

D'où

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right]\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right] = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_1^1}{A_1^1}\right]\left[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'\right].$$

La proposition est démontrée car en composant N par A_ℓ à droite on a :

$$N_k^\ell A_\ell^k[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] = N_\ell^\ell A_\ell^\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi']$$

$$= \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right] A_\ell^\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'].$$

D'où $N_\ell^\ell[x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'] = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right][x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi'].$

De plus, $A^*(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi');\ldots;(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{q-2}A^*(x;\xi_o = \lambda_1(x;\xi'),\xi')$ étant déterminées, il existe un polynôme $A^*(x;\xi_o,\xi')$ en ξ_o de degré

$mt-t-1 = q-t-1$ dont les dérivées d'ordre $0,\ldots,q-2$ par rapport à ξ_o prennent les valeurs précédentes car $d^oA^* = mt-t-1 \geqslant q-2 = mt-2$ puisque $t = 1$.

Pour la suite de la démonstration des théorèmes II.3.1 et II.3.2, on suit un plan de démonstration analogue à celui de M. Zeman dans le cas scalaire, excepté le chapitre V, ci-après, qui fait appel à de nouvelles considérations originales.

Soit Ω' un voisinage ouvert de Ω ; tout opérateur pseudo-différentiel étant équivalent à un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté : on peut choisir a proprement supporté, ainsi que $b = ah$

$$a : \mathcal{D}(\Omega') \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega')$$
$$b = a \circ h : \mathcal{D}(\Omega') \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega')$$

Choisissons maintenant $\mathcal{O}_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que :

$$0 \leqslant \mathcal{O}_1(s) \leqslant 1$$

$\mathcal{O}_1(s) = 0$ pour $s \geqslant R+1$ et

$\mathcal{O}_1(s) = 1$ pour $s \leqslant R$

Soit $\mathcal{O}_2(s) = 1 - \mathcal{O}_1(s)$.

Choisissons une autre fonction $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive égale à 1 dans un voisinage de $\{x';|x'| \leqslant \tilde{r}\}$.

Formons les fonctions :

$$\Psi_1(x';\xi') = \psi(x')\mathcal{O}_1(|\xi'|)$$
$$\Psi_2(x';\xi') = \psi(x')\mathcal{O}_2(|\xi'|).$$

Les opérateurs $\Psi_1(x';D_{x'})$ et $\Psi_2(x';D_{x'})$ sont proprement supportés, appartiennent à $L^o_{x'}$ et pour $x = (x_o,x')$ dans Ω, on a :

$$u(x) = \Psi_1(x';D_{x'})u(x) + \Psi_2(x';D_{x'})u(x).$$

Soit

$$\tilde{b}(x;D_x) = i^\tau B_\tau(x;D_x) + i^{\tau-1} B_{\tau-1}(x;D_x) \tag{3.15}$$

où $B_i(x;\xi)$ est la partie homogène de degré i en ξ du symbole de l'opérateur b et $B_i(x;D_x)$ est l'opérateur de symbole $B_i(x;\xi)$.

Nous allons calculer les estimations de $|||\tilde{b}u|||$ dans les deux cas suivants :

(a) pour $u_1 = \Psi_1(x';D_{x'})u$ où Supp $\Psi_1(x;\xi') \subset \{\xi' \mid |\xi'| \leqslant R+1\}$;

(b) pour $u_2 = \Psi_2(x';D_{x'})u$ où Supp $\Psi_2(x';\xi') \subset \{\xi' \mid |\xi'| \geqslant R\}$.

CHAPITRE IV

ESTIMATION DE $|||\tilde{b}u_1|||$ ET FORMULES D'INVERSION DE LAGRANGE POUR DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES.

§ 1 - *Estimation de* $|||\tilde{b}u_1|||$.

On a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme IV.1.1 [18]

Soient s et s' deux nombres réels tels que $s' < s$ et $-\frac{n}{2} \leqslant s$ alors pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir T et $\tilde{r}$ tels que $|||u|||_{s'} \leqslant \varepsilon |||u|||_s$ pour $u = {}^t(u_1,\dots,u_m)$ avec $u_i \in H_s(\Omega)$ où $\Omega = \{x = (x_o,x') ; |x'| \leqslant \tilde{r}$ et $0 \leqslant x_o \leqslant T\}$.
Cf. F. Trèves [25] (Théorème 0.41).

Lemme IV.1.2 [18]

Soient $R \in (L_x^{\gamma})_{m\times m}$ $\gamma \leqslant \tau - 2 + \frac{1}{q}$ et $S \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$ alors si l'estimation du théorème II.3.1 est vraie pour b :

$$d|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leqslant C|||bu|||$$

elle sera aussi vraie pour $b + R + S$.

Preuve :

$|||bu||| = |||(b+R+S)u - (R+S)u|||$ d'où

$$|||bu||| \leqslant |||(b+R+S)u||| + |||Ru||| + |||Su|||$$

$$\leqslant |||(b+R+S)u||| + C_1|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} + C_2|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant |||(b+R+S)u||| + C_3|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

donc $$d|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leqslant C|||(b+R+S)u||| + CC_3|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

et pour d suffisamment grand $(d > CC_3)$, on a

$$(d - CC_3)|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leqslant C|||(b+R+S)u|||$$

d'où le lemme.

Proposition IV.1.1 [18]

Soit Ψ_1 l'opérateur pseudo-différentiel défini ci-dessus.

Soit $\tilde{b}(x;D_x) = B_\tau(x;D_x) + B_{\tau-1}(x;D_x)$.

Supposons que $x_o = 0$ soit non caractéristique à l'origine relativement à $\tilde{b}$. Alors il existe une constante C indépendante de u telle que pour $\tilde{r}$, T et d^{-1} suffisamment petits,

$$d|||\Psi_1 u|||^2_{\tau-1} \leqslant C|||\tilde{b}\Psi_1 u|||^2$$

pour tout $u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$ où

$$\Omega = \{x; |x'| \leqslant \tilde{r} \text{ et } 0 \leqslant x_o \leqslant T\}.$$

<u>*Preuve*</u> :

Puisque $\Psi_1(|\xi'|)$ a un support compact dans $\{\xi' ; |\xi'| < R+1\}$, on a :

$$||d_j(x;D_{x'})\Psi_1(D')u|| \leqslant C(R+2)^j ||\Psi_1 u||$$

$$\forall\, x \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall\, d_j(x;D_{x'}) \in L^j_{x'},$$

$$\text{et} \quad \Psi_1 \in L^\infty_{x'}, \quad \text{de symbole} \quad \Psi_1(|\xi'|) \qquad [18].$$

Cela nous permet de perturber les coefficients de $\tilde{b}$.

En notant (cf. [18]) :

$$B_\tau(x;D_x) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^\tau + \sum_{j=1}^{\tau} \psi b'_{\tau,j}(x,D_{x'}) \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\tau-j} \right] I_m$$

alors

$$(4.1) \qquad B_\tau = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^\tau + \sum_{j=1}^{\tau} \psi \tilde{b}'_{\tau,j}(x;D_{x'}) \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\tau-j} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\tau} \psi (b'_{\tau,j} - \tilde{b}_{\tau,j})(x;D_{x'}) \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\tau-j} \right] I_m .$$

D'où

$$B_\tau = \hat{B}_\tau(x,D_x) + \left[\sum_{j=1}^{\tau} \psi d'_j(x;D_{x'}) \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\tau-j} \right] I_m$$

où

$$\hat{B}_\tau(x,D_x) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^\tau + \sum_{j=1}^{\tau} \psi \tilde{b}'_{\tau,j}(x,D_{x'}) \left(\frac{\partial}{\partial x_o}\right)^{\tau-j} \right] I_m$$

et

$$d'_j = b'_{\tau,j} - \tilde{b}'_{\tau,j} .$$

On choisit les $\tilde{b}'_{\tau,j}$ réels d'ordre j tels que $\hat{B}_\tau(x;D_x)$ ait des caractéristiques simples (cf. C.R.A.S. t. 282, Série A, p. 1199-1201, Note de M. Shiota).

On applique alors le résultat suivant dû à Calderon [28] relatif aux opérateurs à caractéristiques simples.

$$(4.2) \qquad C|||\hat{B}_\tau u_1|||^2 \leqslant k|||u_1|||^2_{\tau-1} \quad \text{où}$$

$$u_1 = \Psi_1 u \in \mathcal{D}([0,T],\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

alors (4.1) implique que :

$$|||B_\tau u_1|||^2 \geqslant |||\hat{B}_\tau u_1|||^2 - C \sum_{j=1}^{\tau} (R+2)^j ||| D_{x_0}^{\tau-j} u_1|||^2.$$

D'où d'après (4.2), on obtient :

$$(4.3) \qquad C_1|||B_\tau u_1|||^2 \geqslant d|||u_1|||^2_{\tau-1} - C_2 \sum_{j=1}^{\tau} ||| D_{x_0}^{\tau-j} u_1|||^2.$$

En choisissant d assez grand pour que $d > C_2$ et en appliquant le lemme IV.1.2, on absorbe le 2ème terme du membre de droite de (4.3) dans le premier et on obtient :

$$(4.4) \qquad C|||B_\tau u_1|||^2 \geqslant d|||u_1|||^2_{\tau-1} .$$

Par une légère modification du lemme IV. 1.2, on peut remplacer $B_\tau(x;D_x)$ dans (4.4) par $B_\tau(x;D_x) + B_{\tau-1}(x;D_x)$ sans changer l'estimation. D'où :

$$C|||bu_1|||^2 \geqslant d|||u_1|||^2_{\tau-1} .$$

§ 2 - *Formules d'inversion de Lagrange : le problème local.*

Lemme IV.2.1 [1]

Considérons les deux équations suivantes :

e_1 : $x - sf(x,y) = 0$

e_2 : $y - tg(x,y) = 0$

où f et g sont analytiques à valeurs complexes définies dans un voisinage du polydisque fermé $P \subset \mathbb{C}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayons a,b.

Soit M (resp. N) la borne supérieure de $|f(x,y)|$ (resp. $|g(x,y)|$) pour $|x| = a$ et $|y| \leq b$ (resp. $|x| \leq a$ et $|y| = b$) alors il existe deux fonctions déterminées de façon unique $u(s,t)$ et $v(s,t)$ analytiques pour $|s| < a/M$ et $|t| < b/N$ telles que $(u(s,t),v(s,t)) \in P$: pour (s,t) dans le polydisque Q défini par les inégalités précédentes et telles que :

$$u(s,t) - sf(u(s,t),v(s,t)) = 0$$

$$v(s,t) - tg(u(s,t),v(s,t)) = 0 \quad \text{dans } Q$$

De plus soit :

$$\Delta(x,y,s,t) = \begin{vmatrix} 1 - s\dfrac{\partial f}{\partial x} & -s\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] -t\dfrac{\partial g}{\partial x} & 1 - t\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

et soit $h(x,y,s,t)$ une fonction analytique arbitraire dans $P \times Q$ alors on a :

$$\frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\Delta(u(s,t),v(s,t),s,t)} = \sum_{m\geq 0,n\geq 0} C_{m,n}\, s^m t^n$$

pour $(s,t) \in Q$, où $C_{m,n}$ est la valeur pour $x = y = 0$ de la fonction :

$$\frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[h(x,y,s,t)(f(x,y))^m (g(x,y))^n\right]$$

et où la série qui figure dans le membre de droite est convergente dans Q.

Notons que $C_{m,n}$ dépend de s et de t, lorsqu'il en est ainsi de h.

Démonstration :

$P = B(0,a) \times B(0,b)$

Si $|s| < a/M$, on a sur le cercle $|x| = a$ la majoration

$$\left|\frac{sf(x,y)}{x}\right| < 1.$$

Donc, en vertu, du théorème de Rouché, l'équation e_1 a une racine simple et une seule $\omega(s,y)$ analytique telle que

e_1' : $\omega(s,y) - sf(\omega(s,y),y) = 0$

Soit maintenant l'équation :

e_2' : $y - tg(\omega(s,y),y) = 0$

Si $|t| < \frac{b}{N}$, on a sur le cercle $|y| = b$ la majoration

$$\left|\frac{tg(\omega(s,y),y)}{y}\right| < 1$$

donc en vertu du théorème de Rouché, l'équation e_2' a une racine simple et une seule

$$Y = v(s,t).$$

D'où

$$u(s,t) = w(s,v(s,t))$$

$$v(s,t) \ .$$

Soit γ et δ les circuits $\theta \longrightarrow a\, e^{i\theta}$

$\theta \longrightarrow b\, e^{i\theta}$

dans $\mathbb{C}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_\delta dy \int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)}{(x-sf(x,y))(y-tg(x,y))}\, dx$$

Soit :

$$J = \int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)}{(x-sf(x,y))(y-tg(x,y))} \, .dx$$

d'après le théorème des résidus, on a :

$$J = 2i\pi \lim_{x \to w(s,y)} \frac{h(x,y,s,t)(x-w(s,y))}{[x-sf(x,y)][y-tg(x,y)]}$$

$$= 2i\pi h(w(s,y),y,s,t) \lim_{x \to w(s,y)} \frac{[x-w(s,y)]}{[x-sf(x,y)]} \cdot \frac{1}{[y-tg(x,y)]}$$

$$= 2i\pi \frac{h(w(s,y),y,s,t)}{[y-tg(w(s,y),y)]} \cdot \frac{1}{\left[1-s\frac{\partial f}{\partial x}(w(s,y),y)\right]} \, .$$

D'où

$$I = \int_\delta 2i\pi \, . \, \frac{h(w(s,y),y,s,t)}{[y-tg(w(s,y),y)]} \cdot \frac{1}{\left[1-s\frac{\partial f}{\partial x}(w(s,y),y)\right]}\, dy$$

$$= (2i\pi)^2 \lim_{y \to v(s,t)} \frac{h(w(s,y),y,s,t)(y-v(s,t))}{\left[1-s\frac{\partial f}{\partial x}(w(s,y),y)\right][y-tg(w(s,y),y)]}$$

D'où

$$I = (2i\pi)^2 \; \frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\left[1-s\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(u(s,t),v(s,t))\right]} \cdot \lim_{y\to v(s,t)} \frac{y-v(s,t)}{y-tg(w(s,y),y)}$$

$$= (2i\pi)^2 \; \frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\left[1-s\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(u(s,t),v(s,t))\right]} \cdot \frac{}{\left[1-t\,\frac{\partial g}{\partial y}\,(u(s,t),v(s,t))-t\,\frac{\partial g}{\partial x}\,(u(s,t),v(s,t))\,\frac{\partial w}{\partial y}(s,v(s,t))\right]}$$

$$= (2i\pi)^2 \; \frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\left\{\left[(1-s\,\frac{\partial f}{\partial x})(1-t\,\frac{\partial g}{\partial y})-ts\,\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right](u(s,t),v(s,t)) - ts\,\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(u(s,t),v(s,t))\,\frac{\partial w}{\partial y}\,(s,v(s,t))+st\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial x}\,(u(s,t),v(s,t))\,\frac{\partial w}{\partial y}(s,v(s,t))\right\}}$$

$$= (2i\pi)^2 \; \frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\left[(1-s\,\frac{\partial f}{x})(1-t\,\frac{\partial g}{\partial y})-ts\,\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right](u(s,t),v(s,t))}$$

$$= (2i\pi)^2 \cdot \frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\Delta(u(s,t),v(s,t),s,t)} .$$

Donc

$$\frac{h(u(s,t),v(s,t),s,t)}{\Delta(u(s,t),v(s,t),s,t)} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_\delta dy \int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)}{(x-sf(x,y))(y-tg(x,y))}\,dx \quad .$$

En outre, on peut écrire pour :

$|x| = a$

$$\frac{1}{x-sf(x,y)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m f^m(x,y)}{x^{m+1}}$$

et pour $|y| = b$

$$\frac{1}{y-tg(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n g^n(x,y)}{y^{n+1}}$$

Ces séries sont normalement convergentes puisque :

$$\left|\frac{sf(x,y)}{x}\right| \leqslant \frac{M|s|}{a} < 1$$

$$\left|\frac{tg(x,y)}{y}\right| \leqslant \frac{N|t|}{b} < 1 \quad .$$

D'où

$$\frac{I}{(2i\pi)^2} = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\delta dy \int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)}{[x-sf(x,y)]\,[y-tg(x,y)]}\,dx$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\delta dy \int_\gamma h(x,y,s,t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n g^n(x,y)}{y^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m f^m(x,y)}{x^{m+1}}\,dx$$

$$= \sum_{m\geqslant 0,\, n\geqslant 0} s^m t^n C_{m,n}$$

avec $$C_{m,n} = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\delta dy \int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)f^m(x,y)g^n(x,y)}{y^{n+1}.x^{m+1}}\,.\,dx$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{dy}{y^{n+1}} \cdot \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)f^m(x,y).g^n(x,y)}{x^{m+1}}\,.dx \quad .$$

On sait d'après le théorème de Cauchy que :

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left[h(x,y,s,t)f^m(x,y)g^n(x,y)\right](0,y,s,t) =$$

$$= \frac{m!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(x,y,s,t)f^m(x,y)g^n(x,y)}{x^{m+1}}\,.dx \; .$$

D'où

$$C_{m,n} = \frac{1}{m!}\ \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} \frac{\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}\left[h(x,y,s,t) f^m(x,y) g^n(x,y)\right](0,y,s,t)}{y^{n+1}} \,.\, dy$$

en appliquant une 2ème fois le théorème de Cauchy, on a :

$$C_{m,n} = \frac{1}{m!}\ \frac{1}{n!}\ \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m . \partial y^n}\left[h(x,y,s,t) f^m(x,y) . g^n(x,y)\right](0,0,s,t).$$

D'où

$$\frac{h\left[u(s,t),v(s,t),s,t\right]}{\Delta\left[u(s,t),v(s,t),s,t\right]} = \sum_{m\geqslant 0,n\geqslant 0} C_{m,n}\, s^m t^n$$

avec

$$C_{m,n} = \frac{1}{m!n!}\ \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left[h(x,y,s,t) f^m(x,y) g^n(x,y)\right](0,0,s,t).$$

Ce résultat se généralise à un nombre $p = n^2$ de variables de la manière suivante :

Lemme IV.2.2 [2], [21], [22].

Considérons les n^2 équations :

$$e_i : x_i - w_i f_i(x_1,\ldots,x_{n^2}) = 0 \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant i \leqslant n^2$$

où f_i pour $1 \leqslant i \leqslant n^2$ sont analytiques, à valeurs complexes définies dans un voisinage fermé de

$$P = \prod_{i=1}^{n^2} B(0,a_i) \subset \mathbb{C}^{n^2} .$$

Soit M_i la borne supérieure de $|f_i(x_1,\dots,x_{n^2})|$ pour $|x_i| = a_i$ et $|x_j| \leqslant a_j$ pour $i \neq j$

alors il existe n^2 fonctions déterminées de façon unique

$\alpha_i(w_1,\dots,w_{n^2})$ analytique pour :

$$|w_i| < \frac{a_i}{M_i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n^2$$

telles que $\left[\alpha_1(w_1,\dots,w_{n^2}),\alpha_2(w_1,\dots,w_{n^2}),\dots,\alpha_{n^2}(w_1,\dots,w_{n^2})\right] \in P$

pour $(w_1,\dots,w_{n^2}) \in Q = \prod_{i=1}^{n^2} B(0, \frac{a_i}{M_1})$

et

$$\alpha_i(w_1,\dots,w_{n^2}) - w_i f_i(x_1,\dots,x_{n^2}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n^2.$$

De plus soit

$$\Delta(x_1,x_2,\dots,x_{n^2},w_1,w_2,\dots,w_{n^2}) = \begin{vmatrix} 1 - w_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & - w_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & - w_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{n^2}} \\ - w_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 1 - w_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & - w_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{n^2}} \\ & \vdots & & \vdots \\ - w_{n^2} \frac{\partial f_{n^2}}{\partial x_1} & - w_{n^2} \frac{\partial f_{n^2}}{\partial x_2} & & 1 - w_{n^2} \frac{\partial f_{n^2}}{\partial x_{n^2}} \end{vmatrix}$$

et soit $h(x_1,\dots,x_{n^2},w_1,\dots,w_{n^2})$ une fonction analytique arbitraire dans $P \times Q$ alors, on a :

$$\frac{h(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^2},w_1,\ldots,w_{n^2})}{\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^2},w_1,\ldots,w_{n^2})} = \sum_{p_1\geq 0,\ldots,p_{n^2}\geq 0} C_{p_1,\ldots,p_{n^2}} \prod_{i=1}^{n^2} w_i^{p_i}$$

pour $(w_1,\ldots,w_{n^2}) \in Q$ où $C_{p_1,\ldots,p_{n^2}}$ est égale à

$$\prod_{i=1}^{n^2} \frac{1}{p_i!} \frac{\partial^{p_1+\ldots+p_{n^2}}}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_{n^2}^{p_{n^2}}} \left[h(x_1,\ldots,x_{n^2},w_1,\ldots,w_{n^2}) \prod_{i=1}^{n^2} f_i^{p_i}(x_1,\ldots,x_{n^2})\right](0,\ldots,0,w_1,\ldots,w_{n^2}).$$

CHAPITRE V

DECOMPOSITION DE $\tilde{b}$ EN UN PRODUIT DE COMPOSITION D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS MATRICIELS D'ORDRE 1 MODULO DES TERMES D'ORDRE $\leq \tau-1-\frac{1}{q}$ LORSQUE $t = 1$, $\sigma = 1$ ET $H_1(x\ ;\ \xi) = [\xi_o - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\xi_j]$.

Ce chapitre consiste à remplacer $\tilde{b}(x\ ;\ D_x) = i^\tau B_\tau(x\ ;\ D_x) + i^{\tau-1}\ B_{\tau-1}(x\ ;\ D_x)$ par un produit de facteurs matriciels différentiels en x_o, et pseudo-différentiels en x' du 1er ordre, à parties principales scalaires modulo des termes d'ordre $\leq \tau - 1 - \frac{1}{q}$.

On utilise une méthode analogue à celle présentée par S. Mizohata et Y. Ohya [11], pour l'étude du problème de Cauchy à caractéristiques multiples et généralisée aux systèmes dans [46] et la réduction du chapitre III.

Avant de remplacer $\tilde{b}$ par un produit de facteurs du premier ordre modulo un opérateur de $(L_x^{\tau-1-1/q})_{m\times m}$, on introduit d'abord le module V sur l'anneau A des opérateurs de la forme $C = C'\ I_m + C''$ avec $C' \in L^o_{x'}$, et $C'' \in (L^{-1}_{x'})_{m\times m}$ associé à l'opérateur

$$\pi_\tau = \partial_1^{r_1} \ldots . \partial_{\tau_\sigma}^{r_{\tau_\sigma}} .$$

V est engendré par les opérateurs monomes formés de la manière suivante.
On décrit d'abord les opérateurs qui engendrent $V^{(1)}$. Ce sont les opérateurs $a_{ij} \frac{\pi_\tau}{\partial_i \partial_j}$ (*) où a_{ij} est un opérateur proprement supporté arbitraire de $(L_{x'}^{1-1/r_{ij}, r_{ij}})_{m\times m}$ avec $r_{ij} = \min(r_i, r_j)$, i pouvant être égal à j avec $1 \leq i,j \leq \tau_\sigma$; on note cet ensemble d'opérateurs générateurs $V'^{(1)}$.
$V^{(2)}$ est formé un peu différemment par rapport à $V^{(1)}$. Un opérateur $v_2 \in V'^{(2)}$ (ensemble d'opérateurs engendrant le module $V^{(2)}$) est de la forme :

$$v_2 = b_{i,2}\frac{v_1}{\partial_i} \qquad (**)$$

où $v_1 \in V'^{(1)}$ et $b_{i,2} \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$ est proprement supporté $(1 \leq i \leq \tau_\sigma)$. $V^{(3)}$ est formé de la même manière que $V^{(2)}$. $v_3 \in V'^{(3)}$ est de la forme : $v_3 = b_{i,3}\frac{v_2}{\partial_i}$ (***) où $v_2 \in V'^{(2)}$ et $b_{i,3} \in (L_{x'}^{1-1/r_i,1/r_i})_{m\times m}$ est proprement supporté $(1 \leq i \leq \tau_\sigma)$. On forme ainsi $V'^{(4)}, V'^{(5)}, \ldots, V'^{(\tau-1)}$.

(*) a_{ij} est de la forme $C = C'I_m + C''$ avec $C' \in L_{x'}^{1-1/r_{ij},r_{ij}}$ et $C'' \in (L_{x'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$.

(**),(***) $b_{i,2}, b_{i,3}\ldots$ sont de la forme $c = c'I_m + c''$ avec $c' \in L_{x'}^{1-1/r_i,r_i}$ et $c'' \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$. Finalement soit : $V' = \bigcup_{k=1}^{\tau-1} V'^{(k)}$

V est le module engendré par les opérateurs de V' sur l'anneau A modulo ; des termes appartenant à $(L_x^{\tau-1-1/q})_{m\times m}$, on va remplacer $\tilde{b} = i^\tau B_\tau(x\ ;\ D_x) + i^{\tau-1} B_{\tau-1}(x\ ;\ D_x)$ par un produit de facteurs du premier ordre.

Remarque 1. Ceci fera l'objet de la proposition suivante, dont une partie sera démontrée sous une hypothèse de commutativité qu'on précisera, cette commutativité sera démontrée dans le cas $\sigma = 1$, $t = 1$ et $H_1(x\ ;\ \xi) = [\xi_o - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(x)}\xi_j]$.

Proposition V.1.1 [7]. Soit $u_2 = \psi_2(x'\ ;\ D_{x'})u$ où $\text{supp}\ \psi_2(x'\ ;\ \xi') \subset \{\xi'\ ;\ |\xi'| \geq R\}$ et $u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$ alors sous les hypothèses (A), (B), (C) et (D) :

$$\tilde{b}\, u_2 = \tilde{\pi}\, u_2 + T\, u_2 + R\, u_2$$

où $T \in (L_x^{\tau-1-1/q})_{m\times m}$ est un élément du module V, $R \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$

$$\tilde{\pi} = \partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)}\ldots\partial_1^{(r_1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\partial_{\tau_\sigma}^{(r_{\tau_\sigma})}$$

avec

$$\partial_i^{(j)} = i[D_{x_o} I_m - \lambda_i^j(x_o, x' ; D_{x'})] \qquad 1 \leq i \leq \tau_\sigma \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq r_i$$

(5.1) $$\lambda_i^j(x ; \xi') = \lambda_i(x ; \xi').I_m + \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}^j(x ; \xi')|\xi'|^{1-\frac{k}{r_i}}$$

où $V_{i,k}^j \in (S_{x'}^o)_{m\times m}$ et en plus :

(5.2) $$\begin{cases} \left[V_{i,1}^j(x ; \xi') = \mu_{i,1}^j(x ; \xi').I_m \quad \text{avec} \quad \mu_{i,1}^j \in S_{x'}^o \quad \text{lorsque} \quad r_i > 1. \right. \\ \left[\begin{array}{l} \mu_{i,1}^j(x ; \xi') - \mu_{i,1}^k(x ; \xi') \neq 0 \\ \forall (x ; \xi') \in \Omega\times S_{\xi'}^{n-1} \quad \text{lorsque} \quad r_i > 1 \quad \text{et} \quad j \neq k \end{array} \right. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> :

On a d'après (3.7), (3.8) et (3.15)

$$\tilde{b}(x ; D_x) = i^\tau \pi_\tau I_m + i^{\tau-1} \pi_{\tau-1}$$

$$= i^\tau \partial_1^{r_1} \partial_2^{r_2} \ldots \partial_{\tau_\sigma}^{r_{\tau_\sigma}}.I_m + i^{\tau-1}[C_{\tau-1}(x;D_{x'}) + C_{\tau-2}(x;D_{x'})\Delta_1 + \ldots].$$

on utilise la proposition III.1.1. et la définition III.1.1. et on construit a vérifiant ⓐ telle que :

* $[L_j(x ; \xi')]_k^\ell \equiv 0$

$\forall x \in \Omega, \forall \xi'$, $\forall \ell \neq k$ et $\forall j = 1,\ldots,\tau_\sigma$ avec $r_j \geq 2$

** $|[L_j(x ; \xi')]_\ell^\ell| \geq \sigma_o |\xi'|^{\tau-1}$

$\forall x \in \Omega, \forall \xi'$, $\forall \ell = 1,\ldots,m$ $\forall j = 1,\ldots,\tau_\sigma$ avec $r_j \geq 2$

On a :

$$[L_j(x\ ;\ \xi')]^{\ell}_{\ell} = [\pi^{o}_{\tau-1}(x\ ;\ \xi_o = \lambda_j(x\ ;\ \xi'),\xi')]$$

$$= \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma}[H_s(x_i, I_x)]^{q^s}} \ \frac{K_1^1}{A_1^1}(x\ ;\ \xi_o = \lambda_j(x\ ;\ \xi'),\xi')$$

pour tout $j \in J$, $(r_j \geq 2)$ on pose :

$$\pi^{o}_{\tau-1}(x\ ;\ \xi_o = \lambda_j(x\ ;\ \xi'),\xi') = E(x\ ;\ \xi_o = \lambda_j(x\ ;\ \xi'),\xi').I_m$$

et plus généralement :

$$\pi^{o}_{\tau-1}(x\ ;\ \xi) = E(x,\ \xi)$$

$$E(x\ ;\ \xi) = e_{\tau-1}(x\ ;\ \xi') + e_{\tau-2}(x\ ;\ \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_1) +$$

$$+ e_o(x\ ;\ \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_{\tau-1})\ldots(\xi_o - \tilde{\lambda}_1)$$

avec $e_{\tau-j}(x\ ;\ \xi') \in (S^{\tau-j}_{x'})_{m\times m}$ $\quad (j = 1,\ldots,\tau)$.

1ère étape.

Factorisation de

$$(5.3)\qquad M(x\ ;\ \xi_o,\ \xi') = i^{\tau}\prod_{j=1}^{\sigma}(\xi_o - \lambda_j)^{r_j}\ I_m +$$

$$+ i^{\tau-1}\sum_{j=1}^{\tau} e_{\tau-j}(x\ ;\ \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_{j-1})\ldots(\xi_o - \tilde{\lambda}_o)$$

en posant $\xi_o - \tilde{\lambda}_o(x\ ;\ \xi') \equiv 1$. On cherche les "racines" en ξ_o de M.

Puisque $e_{\tau-j}(x\ ;\ \xi')$ est homogène d'ordre $\tau-j$:

$$e_{\tau-j}(x\ ;\ \xi') = e_{\tau-j}(x\ ;\ \frac{\xi'}{|\xi'|}\ .\ |\xi'|) = e_{\tau-j}(x\ ;\ \frac{\xi'}{|\xi'|})\ .\ |\xi'|^{\tau-j}$$

posons :

$$e_{\tau-j}(x\ ;\ \frac{\xi'}{|\xi'|}) = e'_{\tau-j}(x\ ;\ \xi').$$

D'où $M(x\ ;\ \xi_o,\xi') = 0 \iff$

$$(5.4)\qquad i^{\tau}\prod_{j=1}^{\tau_\sigma}[\xi_o-\lambda_j(x\ ;\ \xi')]^{r_j}\ I_m\ +$$

$$+\ i^{\tau-1}\sum_{j=1}^{\tau} e'_{\tau-j}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{\tau-j}(\xi_o-\tilde{\lambda}_{j-1})\ldots(\xi_o-\tilde{\lambda}_o) = 0$$

posons $\xi_o = \lambda_i\ I_m + V$ avec V une matrice $m\times m$ et résolvons (5.4) en V.

On a alors :

$$(5.5)\quad \left\{\begin{aligned} M(x\ ;\ \xi_o,\ \xi') &= i^{\tau}\prod_{j=1}^{\tau_\sigma}[\xi_o-\lambda_j(x\ ;\ \xi')]^{r_j}\ I_m \\ &\quad + i^{\tau-1}\sum_{j=1}^{\tau} e'_{\tau-j}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{\tau-j}(\xi_o-\tilde{\lambda}_{j-1})\ldots(\xi_o-\tilde{\lambda}_o) \\ &= i^{\tau}\Bigg\{\prod_{k=1}^{i-1}[(\lambda_i-\lambda_k)I_m+V]^{r_k}\ V^{r_i}\prod_{k=i+1}^{\tau_\sigma}[(\lambda_i-\lambda_k)I_m+V]^{r_k} \\ &\quad - i^{\tau-1}\sum_{j=1}^{\tau} e'_{\tau-j}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{\tau-j}[(\lambda_i-\tilde{\lambda}_{j-1})I_m+V]\ldots \\ &\quad \ldots[(\lambda_i-\tilde{\lambda}_o)I_m+V]\Bigg\} \end{aligned}\right.$$

<u>*Remarque* 2</u>. Si on prenait $\xi_o \in \mathbb{C}\ I_m$, (5.5) n'aurait pas de solutions, on va donc se placer dans un "sur anneau" de matrices dans lequel il y aura des solutions.

Développons maintenant le deuxième membre de (5.5).

p.p = première partie du 2ème membre.

d.p = deuxième partie du 2ème membre.

Comme $\lambda_i - \lambda_k$ est scalaire, on a :

$$p.p = V^{r_i} \Big[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda_i - \lambda_k)^{r_k} I_m + f_{\tau - r_i - 1}(x \; ; \xi') V$$

$$+ f_{\tau - r_i - 2}(x \; ; \xi') V^2 + \ldots\ldots + V^{\tau - r_i} \Big]$$

avec V une matrice $m \times m$ et $f_{\tau - r_i} (x \; ; \xi'), \ldots, f_1(x \; ; \xi'), f_o(x \; ; \xi') = 1$

sont scalaires.

$$d.p = -\sqrt{-1} \Big\{ E(x \; ; \xi_o = \lambda_i(x \; ; \xi'), \xi') I_m + g_{\tau-2} (x \; ; \xi') V + \ldots$$

$$\ldots\ldots + g_o(x \; ; \xi') V^{\tau - 1} \Big\}.$$

avec $g_{\tau-2}, g_{\tau-3}, \ldots, g_o$ matrice $m \times m$. De plus $f_j \in (S^j_{x'})$ et $g_j \in (S^j_{x'})_{m \times m}$.

Soit $V' = \dfrac{V}{|\xi'|}$ et $\xi'' = \dfrac{\xi'}{|\xi'|}$ alors

$$p.p = |\xi'|^\tau (V')^{r_i} \Big\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\tau_\sigma} [\lambda_i(x \; ; \xi'') - \lambda_k(x \; ; \xi'')]^{r_k} I_m + \ldots\ldots$$

$$+ f_{\tau - r_i - 1}(x \; ; \xi'') V' + \ldots + (V')^{\tau - r_i} \Big\}$$

$$d.p = -\sqrt{-1} |\xi'|^{\tau - 1} \Big\{ E(x \; ; \xi_o = \lambda_i(x \; ; \xi'), \xi').I_m + g_{\tau-2}(x \; ; \xi'') V' + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + g_o(x \; ; \xi'')(V')^{\tau - 1} \Big\}.$$

D'où :

$$p.p = |\xi'|^{\tau}(V')^{r_i}\left\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}[\lambda_i'(x\ ;\ \xi') - \lambda_k'(x\ ;\ \xi')]^{r_k}\ I_m + \right.$$

$$\left. + f'_{\tau-r_i-1}(x\ ;\ \xi').V' + \dots + (V')^{\tau-r_i}\right\}$$

et

$$d.p = -\sqrt{-1}\,|\xi'|^{\tau-1}\left\{E_i'(x\ ;\ \xi')I_m + g'_{\tau-2}(x\ ;\ \xi').V' + \dots\right.$$

$$\left.\dots + g_o'(x\ ;\ \xi')(V')^{\tau-1}\right\}$$

avec

$$\lambda_i'(x\ ;\ \xi') = \lambda_i(x\ ;\ \xi'')$$

$$f'(x\ ;\ \xi') = f(x\ ;\ \xi'')$$

$$g'(x\ ;\ \xi') = g(x\ ;\ \xi'')$$

$$E_i'(x\ ;\ \xi') = E(x\ ;\ \xi_o = \lambda_i(x\ ;\ \xi''),\xi'')$$

Lemme V.1.1. [7].

Considérons la matrice $m \times m$:

$$\psi_i(V'\ ;\ x,\xi'') = \left\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}[\lambda_i'(x\ ;\ \xi')-\lambda_k'(x\ ;\ \xi')]^{r_k}\ I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\right\}^{-1} \times$$

$$\times\left\{\sqrt{-1}\,[E_1'\ I_m + \sum_{j=1}^{\tau-1} g'_{\tau-j-1}(V')^j]\right\}$$

alors $[\psi_i(V'\ ;\ x,\xi'')]^{1/r_i}$ est de classe $C^\infty\ (B(0,\varepsilon)\times\Omega\times S^{n-1})$.

Démonstration :

Montrons que ψ_i est bien définie. Plaçons-nous dans l'algèbre normée des matrices carrées $m\times m$. Si $r_i \geq 2$ et si les conditions (A), (B), (C) et (D) sont vérifiées alors pour $||V'|| \leq \varepsilon_o$ avec ε_o assez petit, le déterminant du "numérateur" est borné inférieurement puisque c'est un polynôme à m^2 indéterminées $\{V'^i_j\}_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}} = V'$ dont le terme constant est

$|(\sqrt{-1})^m(E_i')^m| \geq \sigma_o$ dans Ω et de degré total $(\tau-1)\times m$ en V'.

De même pour $||V'|| \leq \varepsilon_1$, avec ε_1 assez petit le déterminant du "dénominateur" peut être borné inférieurement puisque c'est un polynôme à m^2 indéterminées $\{V'^i_j\}_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}} = V'$ dont le terme constant est

$$\left|\left(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{\tau_\sigma} [\lambda_i'(x\ ;\ \xi')-\lambda_k'(x\ ;\ \xi')]^{r_k}\right)^m\right| \neq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1}\times S^{n-1}_{\xi'} .$$

Il est aussi borné supérieurement.

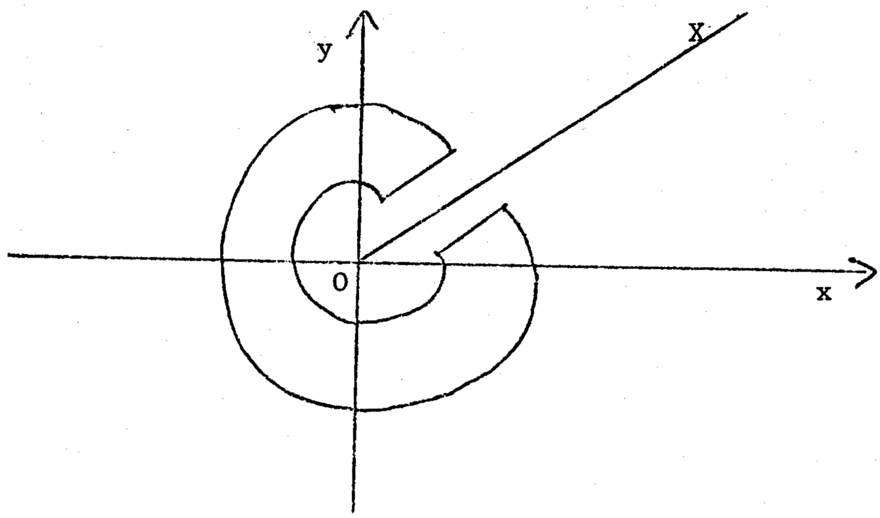
Donc le spectre σ de la matrice $m\times m$, $\psi_i(V'\ ;\ x,\xi'')$ est contenu dans $\mathbb{C}^*$.

On peut trouver une demi-droite d'origine 0 et notée OX telle que $\sigma\ (\psi_i(V'\ ;\ x,\ \xi'')) \subset \mathbb{C}\setminus OX = \mathcal{O}$. Soit z^{1/r_i} une des r_i déterminations analytiques dans $\mathcal{O}$.

Alors $z^{1/r_i} \in \mathcal{F}\ (\psi_i(V'\ ;\ x,\xi''))$ d'après la définition de $\mathcal{F}(T)$ au §.2 chapitre I et donc on peut définir $[\psi_i(V'\ ;\ x,\ \xi'')]^{1/r_i}$ d'après le théorème I.2.7. par la formule :

$$* \quad [\psi_i(V'\ ;\ x,\xi'')]^{1/r_i} = \frac{1}{2i\pi}\int_B z^{1/r_i}[zI_m-\psi_i(V'\ ;\ x,\xi'')]^{-1}dz$$

où B est le contour formé par un nombre fini d'arcs de Jordan rectifiables suivant :



B étant la frontière d'un ouvert contenant $\sigma(\psi_i(V' \; ; x,\xi''))$ (B dépend de $(V' \; ; x,\xi'')$). Montrons que :

$$** \qquad [\psi_i(V' \; ; x,\xi'')]^{1/r_i} \in C^{\infty}(V_{\varepsilon} \times \Omega \times S^{n-1})$$

avec

$$V_{\varepsilon} = \{V' \ \text{tq} \ ||V'|| \leqslant \varepsilon = \min(\varepsilon_o,\varepsilon_1)\}$$

en effet : on utilise l'expression * et on se place au voisinage d'un point $(V'^o \; ; x^o,\xi''^o)$, alors on peut trouver un voisinage $\mathcal{V}_o$ de $(V'^o \; ; x^o,\xi''^o)$ et un contour B_o tel que l'on ait :

$$[\psi_i(V' \; ; x,\xi'')]^{1/r_i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_o} z^{1/r_i} \, [zI_m-\psi_i]^{-1} \, dz$$

$\forall (V' \; ; x,\xi'') \in \mathcal{V}_o$ et B_o étant la frontière d'un ouvert contenant

$$\bigcup_{(V' \; ; x,\xi'')\in \mathcal{V}_o} \sigma(\psi_i(V' \; ; x,\xi'')).$$

(En utilisant le théorème de Rouché et le théorème des fonctions implicites, on peut montrer que :

$$\overline{\bigcup_{(V' \; ; x',\xi'')\in \mathcal{V}_o} \sigma(\psi_i(V' \; ; x,\xi''))} \quad \text{est compact}).$$

D'autre part, comme $[zI_m-\psi_i]^{-1} = \dfrac{\text{Matrice des cofacteurs de } zI_m-\psi_i}{\det[zI-\psi_i]}$ et

$\operatorname{Inf}\{|\det(zI-\psi_i)| \ ; \ z \in B_o \text{ et } (V' \ ; x,\xi'') \in \mathcal{V}_o\} > 0$ on a :

$$\left|\left|\left|\left(\frac{\partial}{\partial V'}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi''}\right)^{\gamma} z^{1/r_i} (zI_m-\psi_i)^{-1}\right|\right|\right| \leq C^{te}$$

pour la norme de la convergence uniforme des matrices $m\times m$ dépendant de $(z,V',x,\xi'') \in B_o\times\mathcal{V}_o$. D'où $[\psi_i(V' \ ; x,\xi'')]^{1/r_i} \in C^\infty(V_\varepsilon,\Omega,S^{n-1})$ d'après le théorème de dérivation de Lebesgue sous le signe intégral. D'où le lemme.

D'autre part ψ_i est une matrice de fonctions analytiques en V' ($||V'|| < \varepsilon$).

D'après le même type de raisonnement que précedemment [2],[3] $(\psi_i)^{1/r_i}$ est aussi analytique en V'. ($||V'|| < \varepsilon$; fonctions analytiques à m^2 variables). Donc le deuxième membre de (5.5) est donné par :

$$\begin{aligned}
pp+dp &= |\xi'|^{\tau} (V')^{r_i} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} [\lambda'_i(x;\xi')-\lambda'_k(x;\xi')]^{r_k} I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j \\
&\quad - \sqrt{-1}\ |\xi'|^{\tau-1} \left\{E'_i\ I_m + \sum_{j=1}^{\tau-1} g'_{\tau-j-1} (V')^j\right\} \\
&= |\xi'|^{\tau}\left\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} [\lambda'_i(x;\xi')-\lambda'_k(x;\xi')]^{r_k} I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\right\} \times \\
&\quad \times \left\{(V')^{r_i} - \frac{\sqrt{-1}}{|\xi'|} [E'_i\ I_m + \sum_{j=1}^{\tau-1} g'_{\tau-j-1} (V')^j] \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} [\lambda'_i(x;\xi')-\lambda'_k(x;\xi')]^{r_k} I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\right]^{-1}\right\} \\
&= |\xi'|^{\tau} \left\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} [\lambda'_i(x;\xi')-\lambda'_k(x;\xi')]^{r_k} I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\right\} \times \\
&\quad \times \left\{(V')^{r_i} - \frac{1}{|\xi'|} [\psi_i(V' \ ; x,\xi'')]\right\}.
\end{aligned}$$

Lemme V.1.2. ([7], [18]).

Le deuxième membre de l'équation (5.5) d'inconnue V' se réduit à l'équation matricielle en V' ; $V' \in B(0,\varepsilon)$:

$$V' = \omega^j \frac{1}{|\xi'|^{1/r_i}} \left[\psi_i(V' \; ; x,\xi'')\right]^{1/r_i}$$

$(1 \leq j \leq r_i)$ où ω^j est une racine $r_i^{\text{ème}}$ de l'unité , dont la solution est de la forme :

$$V'(x \; ; \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} V^j_{i,k}(x \; ; \xi') \, |\xi'|^{-\frac{k}{r_i}}$$

avec $V^j_{i,k}$ vérifiant (5.2) pour $1 \leq i \leq \tau_\sigma$, $1 \leq J \leq r_i$, $r_i > 1$ et $k = 1$.

Démonstration :

Nous allons appliquer les résultats du lemme IV. 2.2. Dans le lemme IV. 2.2, si on prend : $\omega_i = \omega$ pour $1 \leq i \leq n^2$ on a :

$$\frac{h(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^2},\omega)}{\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^2},\omega)} = \sum_{K=0}^{\infty} \Big[\sum_{p_1+p_2\ldots+p_{n^2}=K} C_{p_1,p_2\ldots,p_{n^2}}\Big]\omega^K \quad .$$

Soit $h_{i'}(x_1,\ldots,x_{n^2},\omega) = x_{i'}$ pour $1 \leq i' \leq n^2$. Déterminons pour ces fonctions les coefficients de ω^0 et de ω^1

$$K = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 = \ldots\ldots\ldots = p_{n^2} = 0$$

$$C_{0,0,\ldots,0} = h_{i'}(0,\ldots,0,\omega) = 0 \quad .$$

$K = 1 \Rightarrow$ l'un des p_j est égal à un, les autres sont tous nuls :

$$C_{0,\dots 0,p_j=1,0..0} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[h_{i'}(x_1,\dots,x_{n^2},\omega) f_j(x_1,\dots,x_{n^2})\right]\right\}(0,\dots,0,\omega)$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[x_{i'} f_j(x_1,x_2,\dots,x_{n^2})\right]\right\}(0,\dots,0,\omega)$$

$$= \left\{\delta_j^{i'} f_j(x_1,\dots,x_{n^2}) + x_{i'}\frac{\partial}{\partial x_j} f_j(x_1,\dots,x_{n^2})\right. (0,\dots 0,\omega)$$

$$= \delta_j^{i'} f_j(0,\dots,0) \quad ;$$

i' étant fixe avec $1 \leqslant i' \leqslant n^2$, on a donc

$$\sum_{p_1+\dots+p_{n^2} = 1} C_{p_1,\dots,p_{n^2}} = f_{i'}(0,\dots,0)$$

D'où :

$$\frac{\alpha_{i'}}{\Delta} = f_{i'}(0,\dots,0)\omega + \dots\dots \qquad \text{(a)}$$

Revenons à notre équation :

$$V' = \frac{\omega^{j'}}{|\xi'|^{1/r_i}}\left[\psi_i(V' \; ; \; x,\xi'')\right]^{1/r_i} \quad ;$$

posons $\omega = \dfrac{\omega^j}{|\xi'|^{1/r_i}}$; alors :

$$V' = \omega\left[\psi_i(V' \; ; \; x,\xi'')\right]^{1/r_i} .$$

La solution sera notée :

$$V' = \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(x \; ; \; \xi'')\omega^k = \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(x \; ; \; \xi'')(\omega^j|\xi'|^{-1/r_i})^k$$

Déterminons $V_{i,1}$; notons

$$\alpha_{i'} = \sum_{K=1}^{\infty} a_K \, \omega^K \ ;$$

$$\Delta = 1 - \sum_{K=1}^{\infty} \lambda_K \, \omega^K \ ,$$

$$\frac{\alpha_{i'}}{\Delta} = f_{i'}(0,\ldots,0)\omega + \ldots. \quad ;$$

comme il y a égalité des développements, on a à droite et à gauche de l'égalité le même coefficient en ω. D'où $a_1 = f_{i'}(0,0,\ldots,0)$ et donc avec nos notations, on a :

$$V_{i,1}(x \ ; \ \xi'') = [\psi_i(0 \ ; \ x,\xi'')]^{1/r_i} = \left[\frac{\sqrt{-1} \ E'_i}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda'_i - \lambda'_k)^{r_k}} \right]^{1/r_i} \cdot I_m$$

pour $r_i \geq 2$. D'où :

$$V = |\xi'| \cdot V' = |\xi'| \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(x \ ; \ \xi'')(\omega^j |\xi'|^{-1/r_i})^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k} \, \omega^{jk} \, |\xi'|^{1-k/r_i}$$

On pose : $V^j_{i,k} = V_{i,k} \, \omega^{jk}$ on a alors

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} V^j_{i,k} \, |\xi'|^{1-k/r_i}$$

et on pose :

$$\lambda^j_i = \lambda_i \, I_m + \sum_{k=1}^{\infty} V^j_{i,k} \, |\xi'|^{1-k/r_i} \qquad 1 \leq j \leq r_i .$$

D'autre part si $r_i > 1$ et $k = 1$

$$V^j_{i,1} = V_{i,1}\,\omega^j \neq V_{i,1}\,\omega^\ell = V^\ell_{i,1} \qquad \text{pour } j \neq \ell.$$

Lemme V.1.3. [7].

Si les $\lambda_i^{(j)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma$ et $1 \leqslant j \leqslant r_i$ commutent entre elles deux à deux alors :

$$M(x\,;\,\xi_o,\xi') = i^\tau\,\pi^o_\tau(x\,;\,\xi_o,\xi') + i^{\tau-1}\,\pi^o_{\tau-1}(x\,;\,\xi_o,\xi')$$

$$= i^\tau \prod_{i=1}^{\tau_\sigma}\prod_{j=1}^{r_i} \mathcal{D}_i^{(j)}(x\,;\,\xi_o,\xi')$$

en posant $\mathcal{D}_i^{(j)}(x\,;\,\xi_o,\xi') = \xi_o - \lambda_i^{(j)}(x\,;\,\xi')$ pour tout ξ_o appartenant à l'anneau A des matrices engendrée par les $\lambda_i^{(j)}(x\,;\,\xi')$ et les matrices "scalaires" $a(x\,;\,\xi')\cdot I_m$.

Démonstration :

Rappelons le théorème suivant sur les polynômes à une variable (relations entre les coefficients et les racines).

Soit $P(X) = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots. + \alpha_o$ un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de P, chaque racine étant écrite un nombre de fois égal à sa multiplicité. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les fonctions suivantes définies à partir des racines

$$\sigma_1 = \sum_i r_i = r_1 + r_2 + \ldots.. + r_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j} r_i r_j = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots\ldots. + r_{n-1} r_n$$

$$\sigma_3 = \sum_{i<j<k} r_i r_j r_k = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots\ldots.. + r_{n-2} r_{n-1} r_n$$

....

....

$$\sigma_n = r_1 r_2 \ldots\ldots r_n$$

On a $\sigma_1 = - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$

$$\sigma_2 = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$$

$$\sigma_n = (-1)^n \frac{\alpha_o}{\alpha_n}$$

Définissons les polynômes suivants en ξ_o :

$$P_{\tau+1}(\xi_o) = \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} (\xi_o - \lambda_j I_m)^{r_j}$$

$$P_1(\xi_o) = e_{\tau-1}(x ; \xi')$$

$$P_2(\xi_o) = e_{\tau-2}(x ; \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m)$$

$$P_3(\xi_o) = e_{\tau-3}(x ; \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m)(\xi_o - \tilde{\lambda}_2 I_m)$$

$\vdots$

$$P_j(\xi_o) = e_{\tau-j}(x ; \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m)(\xi_o - \tilde{\lambda}_2 I_m)\ldots(\xi_o - \tilde{\lambda}_{j-1} I_m)$$

$\vdots$

$$P_\tau(\xi_o) = e_o(x ; \xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m)(\xi_o - \tilde{\lambda}_2 I_m) \ldots\ldots (\xi_o - \tilde{\lambda}_{\tau-1} I_m)$$

$$P'_2(\xi_o) = (\xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m)$$

$$P'_3(\xi_o) = (\xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m)(\xi_o - \tilde{\lambda}_2 I_m)$$

$$= \xi_o^2 - \xi_o \tilde{\lambda}_2 I_m - \tilde{\lambda}_1 I_m \xi_o + \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 I_m$$

$$= \xi_o^2 - \tilde{\lambda}_2 I_m \xi_o - \tilde{\lambda}_1 I_m \xi_o + \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 I_m$$

car $\tilde{\lambda}_1$ est scalaire et donc on a :

$$\xi_o \tilde{\lambda}_2 I_m = \xi_o \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_2 \xi_o = \tilde{\lambda}_2 I_m \xi_o \quad .$$

D'où

$$P'_3(\xi_o) = \xi_o^2 - [\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_1]\xi_o + \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\ I_m = \xi_o^2 - \sigma_1^3\ \xi_o + \sigma_2^3\ .$$

avec

$$\sigma_1^3 = (\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_1)\cdot I_m$$

$$\sigma_2^3 = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\cdot I_m$$

$$P'_4(\xi_o) = (\xi_o-\tilde{\lambda}_1\ I_m)(\xi_o-\tilde{\lambda}_2\ I_m)(\xi_o-\tilde{\lambda}_3\ I_m)$$

$$= \xi_o^3 - \sigma_1^4\ \xi_o^2 + \sigma_2^4\ \xi_o - \sigma_3^4$$

avec

$$\sigma_1^4 = (\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_3)\ I_m$$

$$\sigma_2^4 = (\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_3+\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3)\cdot I_m$$

$$\sigma_3^4 = \tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3\cdot I_m$$

$$\vdots$$

$$P'_j(\xi_o) = (\xi_o-\tilde{\lambda}_1\ I_m)(\xi_o-\tilde{\lambda}_2\ I_m)\cdots\cdots(\xi_o-\tilde{\lambda}_{j-1}\ I_m)$$

$$= \xi_o^{j-1} - \sigma_1^j\ \xi_o^{j-2} + \cdots\cdots + (-1)^p\ \sigma_p^j\ \xi_o^{j-1-p} + \cdots + (-1)^{j-1}\ \sigma_{j-1}^j$$

$$\vdots$$

$$P'(\xi_o) = (\xi_o-\tilde{\lambda}_1\ I_m)(\xi_o-\tilde{\lambda}_2\ I_m)\cdots\cdots\cdots(\xi_o-\tilde{\lambda}_{\tau-1}\ I_m)$$

$$= \xi_o^{\tau-1} - \sigma_1^\tau\ \xi_o^{\tau-2} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^p\ \sigma_p^\tau\xi_o^{\tau-1-p} + \cdots + (-1)^{\tau-1}\ \sigma_{\tau-1}^\tau\ .$$

$$P_{\tau+1}(\xi_o) = \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} (\xi_o - \lambda_j\, I_m)^{r_j} = \prod_{j=1}^{\tau} (\xi_o - \lambda_j\, I_m)$$

où chaque racine $\lambda_j\, I_m$ étant comptée avec sa multiplicité r_j

$$P_{\tau+1}(\xi_o) = \prod_{j=1}^{\tau} (\xi_o - \lambda_j\, I_m)$$

$$= \xi_o^{\tau} - \sigma_1^{\tau+1}\, \xi_o^{\tau-1} + \ldots. + (-1)^p\, \sigma_p^{\tau+1}\, \xi_o^{\tau-p} + \ldots + (-1)^{\tau}\sigma_{\tau}^{\tau+1}.$$

Posons $M(x\,;\,\xi_o,\xi') = i^{\tau}\, M_1(x\,;\,\xi_o,\xi')$. Donc :

$$M_1(x\,;\,\xi_o,\xi') = \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} (\xi_o - \lambda_j\, I_m)^{r_j}$$

$$- i \sum_{j=1}^{\tau} e_{\tau-j}(x\,;\,\xi')(\xi_o - \tilde{\lambda}_{j-1} I_m)\ldots(\xi_o - \tilde{\lambda}_o I_m)$$

$$= P_{\tau+1}(\xi_o) - i \sum_{j=1}^{\tau} e_{\tau-j}(x\,;\,\xi')\, P_j'(\xi_o)$$

avec $P_1'(\xi_o) = I_m$ et $P_j'(\xi_o)$ est de degré $(j-1)$ par rapport à ξ_o. D'où :

$$M_1(x\,;\,\xi_o,\xi') = \xi_o^{\tau} - \left[\sigma_1^{\tau+1} + ie_o\right]\xi_o^{\tau-1}$$

$$+ \left[\sigma_2^{\tau+1} + ie_o\sigma_1^{\tau} - ie_1\right]\xi_o^{\tau-2}$$

$$- \left[\sigma_3^{\tau+1} + ie_o\sigma_2^{\tau} + ie_1\sigma_1^{\tau-1} + ie_2\right]\xi_o^{\tau-3}$$

$$\vdots$$

$$(+)\ \Big[(-1)^{\tau-p}\sigma_{\tau-p}^{\tau+1} - i\big[\underbrace{e_o(-1)^{\tau-1-p}\sigma_{\tau-1-p}^{\tau} + \ldots.. + e_{\tau-j}(-1)^{j-1-p}\,\sigma_{j-1-p}^{j} + \ldots. + e_{\tau-p-1}}_{\tau-p \text{ termes} \quad p+1 \leq j \leq \tau.}\big]\Big]\xi_o^p$$

$$\vdots$$

$$+ \left[(-1)^{\tau} \sigma_{\tau}^{\tau+1} - i\left[e_o(-1)^{\tau-1} \sigma_{\tau-1}^{\tau} + e_1(-1)^{\tau-2} \sigma_{\tau-2}^{\tau-1} + \dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots e_{\tau-j}(-1)^{j-1} \sigma_{j-1}^{j} + \dots + e_{\tau-1}\right]\right]$$

Donc on peut écrire :

$$M_1(x\ ;\ \xi_o,\xi') = \xi_o^{\tau} + \alpha_{\tau-1}\, \xi_o^{\tau-1} + \alpha_{\tau-2}\, \xi_o^{\tau-2} + \dots + \alpha_1\xi_o + \alpha_o$$

avec :

$$\alpha_{\tau-1} = -\left[\sigma_1^{\tau+1} + ie_o\right]$$

$$\alpha_{\tau-2} = \left[\sigma_2^{\tau+1} + ie_o\sigma_1^{\tau} - ie_1\right]$$

$$\alpha_{\tau-3} = -\left[\sigma_3^{\tau+1} + ie_o\, \sigma_2^{\tau} + ie_1\sigma_1^{\tau-1} + ie_2\right]$$

$$\vdots$$

$$\alpha_p = \left[(-1)^{\tau-p}\sigma_{\tau-p}^{\tau+1} - i\left[e_o(-1)^{\tau-1-p}\sigma_{\tau-1-p}^{\tau} + \dots\dots\dots\right.\right.$$

$$\underbrace{\left.\left.\dots + e_{\tau-j}(-1)^{j-1-p}\, \sigma_{j-1-p}^{j} + \dots + e_{\tau-p-1}\right]\right]}_{p+1 \leq j \leq \tau.}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_o = \left[(-1)^{\tau}\sigma_{\tau}^{\tau+1} - i\left[e_o(-1)^{\tau-1}\, \sigma_{\tau-1}^{\tau} + e_1(-1)^{\tau-2}\, \sigma_{\tau-2}^{\tau-1} + \dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots + e_{\tau-j}\ (-1)^{j-1}\, \sigma_{j-1}^{j} + \dots + e_{\tau-1}\right]\right].$$

Pour la factorisation de $M_1(x\ ;\ \xi_o,\xi')$, on définit la famille suivante :

$$F = \{\lambda_j^i \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq \tau_\sigma \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq r_i\} = \{\mu_p \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq \tau\}$$

Nous allons surtout expliciter la première étape de la factorisation et expliquer pourquoi le lemme est satisfait.

$$\xi_o^{\tau} + \alpha_{\tau-1}\,\xi_o^{\tau-1} + \alpha_{\tau-2}\,\xi_o^{\tau-2} + \alpha_{\tau-3}\,\xi_o^{\tau-3} \,\ldots\ldots\, + \alpha_{\tau-p}\,\xi_o^{p} \,\ldots\, + \alpha_1\,\xi_o \,\ldots\, + \alpha_o \quad \Big| \quad \xi_o - \mu_1$$

$$+ \mu_1\,\xi_o^{\tau-1}$$

D'après l'hypothèse de commutativité $+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1\,\xi_o^{\tau-2}$

" $+[\alpha_{\tau-2}+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]\mu_1\,\xi_o^{\tau-3}$

" $+[\alpha_{\tau-p+1}+[\alpha_{\tau-p+2}+\ldots[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]\underbrace{\ldots\ldots}_{\tau-p-1}]\mu_1\,\xi_o^{p}$

" $[\alpha_2+[\alpha_3+\ldots+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1\underbrace{\ldots}_{\tau-2}]\mu_1\,\xi_o$

" $[\alpha_1+[\alpha_2+\ldots+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1\underbrace{\ldots}_{\tau-1}]\mu_1$

$$\xi_o^{\tau-1}$$

$$+ [\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\,\xi_o^{\tau-2}$$

$$+ [\alpha_{\tau-2}+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]\,\xi_o^{\tau-3}$$

$$+ [\alpha_{\tau-3}+[\alpha_{\tau-2}+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]\mu_1]\,\xi_o^{\tau-4}$$

$$+$$

$$+ [\alpha_{\tau-p}+[\alpha_{\tau-p+1}+\ldots[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]\underbrace{..}_{\tau-p}]\,\xi_o^{p-1}$$

$$+ [\alpha_1+[\alpha_2+\mu_1]\mu_1\underbrace{\ldots}_{\tau-1}]\mu_1]$$

Posons :

$$Q_1(x,\xi_o\,;\,\xi') = \xi_o^{\tau-1} + [\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\,\xi_o^{\tau-2}$$

$$+ [\alpha_{\tau-2}+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]\,\xi_o^{\tau-3} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ [\alpha_{\tau-p}+[\alpha_{\tau-p+1}\ldots + [\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\underbrace{\mu_1\ldots}_{\tau-p}]\,\mu_1]\,\xi_o^{p-1}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ [\alpha_1+[\alpha_2\ldots\ldots+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\underbrace{\mu_1\ldots}_{\tau-1}]\mu_1]$$

$$R_1(x,\xi_o\ ;\ \xi') = \mu_1[\alpha_1+\mu_1[\alpha_2\ \ldots\ldots + \mu_1[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\underbrace{\ldots]}_{\tau-1}$$

On a :

$$M_1(x,\xi_o\ ;\ \xi') = Q_1(\xi_o-\mu_1) + R_1$$

R_1 étant indépendant de ξ_o (de degré 0 par rapport à ξ_o). Par hypothèse $M_1(x\ ;\ \mu_1,\xi') = 0$. D'où $R_1 \equiv 0$.

Donc on vient de voir que

$$M_1(x,\xi_o\ ;\ \xi') = Q_1(x\ ;\ \xi_o,\xi')(\xi_o-\mu_1)$$

Faisons la deuxième étape .

$$M_1(x,\mu_2\ ;\ \xi') = Q_1(x;\mu_2,\xi')(\mu_2-\mu_1)$$

Or $(\mu_p-\mu_{p'})$ pour $p \neq p'$ est inversible. Donc $Q_1(x,\mu_2\ ;\ \xi') = 0$ et d'après le même procédé, si on pose

$$\alpha^1_{\tau-1} = 1$$

$$\alpha^1_{\tau-2} = [\alpha_{\tau-1}+\mu_1]$$

$$\alpha^1_{\tau-3} = [\alpha_{\tau-2}+[\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\mu_1]$$

$$\vdots$$

$$\alpha^1_{\tau-1-p} = [\alpha_{\tau-1-p}+\ [\ldots\ldots\ldots + [\alpha_{\tau-1}+\mu_1]\underbrace{\mu_1\ \ldots]\mu_1}_{p}]$$

$$\vdots$$

$$\alpha^1_o = [\alpha_1+[\alpha_2\ldots\ldots\ldots + [\alpha_{\tau-1}+\mu_1]]\underbrace{]\mu_1\ldots]\mu_1}_{\tau-1}]$$

on a :

$$Q_1(x,\xi_o,\xi') = \xi_o^{\tau-1} + \alpha^1_{\tau-2}\xi_o^{\tau-2} + \alpha^1_{\tau-3}\xi_o^{\tau-3} + \ldots\ldots + \alpha^1_{\tau-1-p}\xi_o^{p} +$$

$$\ldots + \alpha^1_1\xi_o + \alpha^1_o \quad ;$$

et donc, d'après ce qui précède, on a :

$$Q_1(x,\xi_o \ ; \ \xi') = Q_2(x \ ; \ \xi_o,\xi')(\xi_o-\mu_2) + R_2$$

et comme $Q_1(x,\mu_2 \ ; \ \xi') = 0$, R_2 étant de degré 0 par rapport à ξ_o et donc constant par rapport à ξ_o, on a :

$$R_2 \equiv 0 \quad .$$

Ceci nous donne $Q_1(x,\xi_o,\xi') = Q_2(x \ ; \ \xi_o,\xi')(\xi_o-\mu_2)$

$$Q_2(x,\xi_o \ ; \ \xi') = \xi_o^{\tau-2} + \alpha^2_{\tau-3}\xi_o^{\tau-3} + \alpha^2_{\tau-4}\xi_o^{\tau-4} + \ldots\ldots$$

$$+ \alpha^2_1\xi_o + \alpha^2_o \ .$$

Les α^2_i ont une expression en fonction des α^1_j et μ_2 analogue décalée d'un rang à celle qui donne les α^1_j en fonction de α_p et μ_1 et donc on voit que ce procédé marche bien grâce au fait que $\mu_p-\mu_{p'}$ est inversible pour $p \neq p'$.

D'où en répétant le procédé $\tau-1$ fois, on a le lemme énoncé.

$$M_1(x, \ \xi_o \ ; \ \xi') = \prod_{p=1}^{\tau} (\xi_o-\mu_p) = \prod_{i=1}^{\tau_\sigma} \prod_{j=1}^{r_i} (\xi_o-\lambda^j_i).$$

Lemme V.1.4. [7].

Lorsque $\sigma = 1$, $t = 1$ et $H_1(x \ ; \ \xi) = [\xi_o - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\xi_j]$, alors les matrices $\lambda_1^{(j)}$ $(j = 1,\ldots,q)$ commutent deux à deux. De plus le développement (5.8) de $\lambda_1^{(j)}$ possède la propriété (5.8)' [cf. la démonstration ci-après].

Preuve :

Rappelons que d'après la proposition III.1.2 les matrices

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^k \left[A^*H+AH^* + \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_\gamma} \frac{\partial H}{\partial x_\gamma}\right] \left[x \; ; \; \xi_o = \lambda_1(x \; ; \; \xi'),\xi'\right] \quad (k = 0,1,\ldots,q-2)$$

commutent entre elles.

D'après les chapitre I, II et III, on a :

$$b = ah = i^\tau \, B_\tau(x \; ; \; D_x) + i^{\tau-1} \, B_{\tau-1}(x \; ; \; D_x) + \ldots + B_o(x \; ; \; D_x)$$

$$\tilde{b} = i^\tau \, B_\tau(x \; ; \; D_x) + i^{\tau-1} \, B_{\tau-1}(x \; ; \; D_x)$$

$$= i^\tau \, \pi_\tau(x \; ; \; D_x) + i^{\tau-1} \, \pi_{\tau-1}(x \; ; \; D_x)$$

avec

$$\pi_\tau(x \; ; \; D_x) = (\partial_1)^q \, I_m$$

On note $\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_1^{(q)}$ les matrices calculées dans la proposition V.1.1 annulant le polynôme

$$M(x \; ; \; \xi_o,\xi') = i^\tau \, \pi_\tau^o(x \; ; \; \xi_o,\xi') + i^{\tau-1} \, \pi_{\tau-1}^o(x \; ; \; \xi_o,\xi')$$

où $\pi_\tau^o(x \; ; \; \xi_o,\xi')$ et $\pi_{\tau-1}^o(x \; ; \; \xi_o,\xi')$ désignent respectivement les symboles principaux de $\pi_\tau(x \; ; \; D_x)$ et $\pi_{\tau-1}(x \; ; \; D_x)$. On a :

$$M(x \; ; \; \xi_o,\xi') = i^\tau(\xi_o-\lambda_1)^q \, I_m + i^{\tau-1}(e_o(x \; ; \; \xi')(\xi_o-\lambda_1)^{q-1} + \ldots\ldots$$
$$+ e_{q-1}(x \; ; \; \xi')).$$

Les matrices $e_1,\ldots,e_{q-1}$ sont diagonales d'apèrs la proposition III.1.2 donc $e_o,e_1,\ldots,e_{q-1}$ commutent entre elles deux à deux. On a :

$$e_j(x \; ; \; \xi') \in (S_j(\Omega\times S'))_{m\times m} \; .$$

Les matrices $\lambda_1^{(j)}$ sont solutions uniques des équations respectives

$$(5.6)_j : \quad (\xi_o - \lambda_1 I_m) = \omega^j \left[i^{q-1} e_o(x ; \xi')(\xi_o - \lambda_1)^{q-1} + \ldots + i^{q-1} e_{q-1}(x ; \xi') \right]^{1/q}$$

$1 \leqslant j \leqslant q$ avec

$$e_{q-1}(x ; \xi') = \left(\frac{K_1^1}{A_1^1} \right) \left[x ; \xi_o = \lambda_1(x ; \xi'), \xi' \right] I_m$$

$$\vdots$$

$$e_1(x ; \xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o} \right)^{q-2} \left(\frac{K_1^1}{A_1^1} \right) \right] \left[x ; \xi_o = \lambda_1(x ; \xi'), \xi' \right] \cdot I_m$$

On pose :

$$\begin{cases} \xi_o = \lambda_1 I_m + V \\ V = |\xi'| V' \\ e'_j(x ; \xi') = i^{q-1} e_j\left(x ; \dfrac{\xi'}{|\xi'|}\right) \end{cases}$$

L'équation $(5.6)_j$ s'écrit :

$$(5.7)_j \qquad V' = \frac{\omega^j}{|\xi'|^{1/q}} \left[e'_o(x ; \xi') V'^{q-1} + \ldots + e'_{q-1}(x ; \xi') \right]^{1/q}$$

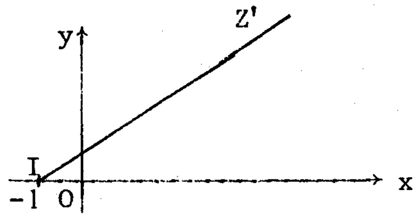
c'est-à-dire :

$$V' = \omega^j \frac{\left[e'_{q-1}(x ; \xi') \right]^{1/q}}{|\xi'|^{1/q}} \left[I_m + \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V' + \ldots + \frac{e'_1}{e'_{q-1}} V'^{q-2} + \frac{e'_o}{e'_{q-1}} V'^{q-1} \right]^{1/q}$$

pour $(x ; \xi')$ fixé dans un voisinage $U \times W$ d'un point $(x^o ; \xi'^o)$ avec $|\xi'^o|$ assez grand, le spectre de la matrice

$$T = \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V' + \ldots\ldots + \frac{e'_o}{e'_{q-1}} V'^{q-1}$$

est dans le voisinage de 0. Soit une détermination de $f(z) = (1+z)^{1/q}$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$ privé d'une demi droite IZ'



$f(T) = (I_m+T)^{1/q}$ est alors donné par (cf. [3])

$$f(T) = \sum_{\lambda\in S_pT} \sum_{i=0}^{V(\lambda)-1} \frac{(T-\lambda I_m)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda)\, E(\lambda) \quad \text{(cf. Th.I.2.5)} \ ;$$

S_pT désigne le spectre de T, $V(\lambda)$ l'ordre de λ.

$$f(T) = \sum_{\lambda\in S_pT} \sum_{i=0}^{V(\lambda)-1} \frac{(T-\lambda I_m)^i}{i!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)\dots(\frac{1}{q}-n+1)}{n!} z^n\right]^{(i)}_{z=\lambda} E(\lambda)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)\dots(\frac{1}{q}-n+1)}{n!} \underbrace{\left[\sum_{\lambda\in S_pT} \sum_{i=0}^{V(\lambda)-1} \frac{(T-\lambda I_m)^i}{i!} (z^n)^{(i)}_{z=\lambda} E(\lambda)\right]}_{T^n}$$

D'où $(5.6)_j$ s'écrit

$$(5.7)'_j \qquad V' = \omega^j \frac{[e'_{q-1}(x\ ;\ \xi')]^{1/q}}{|\xi'|^{1/q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q}-1)\dots(\frac{1}{q}-n+1)}{n!} \left[\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V' + \dots + \frac{e'_o}{e'_{q-1}} V'^{q-1}\right]^n ;$$

en supposant que V' commute avec $e'_o(x\ ;\ \xi')$, on a d'après le lemme V.1.2 le développement suivant de V'

$$(5.8) \qquad V' = \sum_{k=1}^{\infty} V'_k(x\ ;\ \xi')\,|\xi'|^{-\frac{k}{q}} .$$

On identifie alors membre à membre les coefficients de chaque $|\xi'|^{-k/q}$.

(k = 1,....,).

$\boxed{k = 1}$ coefficient de $|\xi'|^{-1/q}$

$$V'_1 = \omega^j (e'_{q-1})^{1/q}$$

$\boxed{k = 2}$ coefficient de $|\xi'|^{-2/q}$

$$V'_2 = \omega^j (e'_{q-1})^{1/q} \; \frac{1}{q} \; \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \; V'_1 = \frac{1}{q} \left[\omega^j (e'_{q-1})^{1/q}\right]^2 \; \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}}$$

$\boxed{k = 3}$ coefficient de $|\xi'|^{-3/q}$

$$V'_3 = \omega^j (e'_{q-1})^{1/q} \left\{ \frac{1}{q} \left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V'_2 + \frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}} (V'_1)^2 \right) + \frac{\frac{1}{q}(\frac{1}{q} - 1)}{2} \left[\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \right]^2 (V'_1)^2 \right\}$$

$\boxed{k = 4}$ coefficient de $|\xi'|^{-4/q}$

$$V'_4 = \omega^j (e'_{q-1})^{1/q} \left\{ \frac{1}{q} \left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V'_3 + \frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}} \; 2V'_1 V'_2 + \frac{e'_{q-4}}{e'_{q-1}} (V'_1)^3 \right) \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{q}(\frac{1}{q} - 1)\left(\left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \right)^2 2V'_1 V'_2 + 2 \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \times \frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}} (V'_1)^3 \right)$$

$$\left. + \frac{1}{6} \frac{1}{q}(\frac{1}{q} - 1)(\frac{1}{q} - 2) \left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \right)^3 (V'_1)^3 \right\}$$

$\boxed{\text{k quelconque}}$ coefficient de $|\xi'|^{-k/q}$

$$V'_k = \omega^j (e'_{q-1})^{1/q} \left\{ \frac{1}{q} \left[\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V'_{k-1} + \frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}} \sum_{m+n=k-1} V'_m V'_n \right.\right.$$

$$+ \frac{e'_{q-4}}{e'_{q-1}} \sum_{i_1+i_2+i_3=k-1} V'_{i_1} V'_{i_2} V'_{i_3} + \ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{e'_o}{e'_{q-1}} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{q-1}=k-1} V'_{i_1} V'_{i_2} \ldots\ldots V'_{i_{q-1}} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right) \left[\left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \right)^2 \sum_{m+n=k-1} V'_m V'_n + \right.$$

$$+ \left(\frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}} \right)^2 \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=k-1} V'_{i_1} V'_{i_2} V'_{i_3} V'_{i_4} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{e'_o}{e'_{q-1}} \right)^2 \sum_{i_1+\ldots+i_{2q-2}=k-1} V'_{i_1} \ldots\ldots\ldots V'_{i_{2q-2}}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{r=2\\ s=2\\ r\neq s}}^{q} \frac{e'_{q-r} e'_{q-s}}{(e'_{q-1})^2} \sum_{i_1+..i_{r-1}+j_1+..j_{s-1}=k-1} V'_{i_1} \ldots V'_{i_{r-1}} V'_{j_1} \ldots V'_{j_{s-1}}$$

$$+ \sum_{n=3}^{k-1} \frac{1}{n!} \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{q} - n+1\right) \sum_{\substack{r_1=2\\ r_2=2\\ \vdots\\ r_s=2}}^{q} \frac{e'_{q-r_1} e'_{q-r_2} \ldots e'_{q-r_s}}{(e'_{q-1})^{r_s}} \times$$

$$\left. \times \sum_{i_1^1+..+i_{r_1}^1+\ldots+i_1^s+\ldots+i_{r_s}^s=k-1} V'_{i_1^1} \ldots V'_{i_{r_1}^1} \ldots V'_{i_1^s} \ldots V'_{i_{r_s}^s} \right\}$$

Le développement (5.8) est donc entièrement déterminé par récurrence sur k.

Donc $\lambda_1^{(j)} = \lambda_1 I_m + V^j$.

Remarque 3.

(5.8)' $V'_1,\dots,V'_{q-1}$ sont des matrices diagonales ; V'_i $(i \geq q)$ peuvent ne pas l'être car $e'_1,\dots,e'_{q-1}$ sont diagonales et e'_o peut ne pas l'être : cf. Proposition III.1.2.

Montrons que ces développements convergent.

On utilise la méthode des séries majorantes ([44],[45]), dans les algèbres de Banach.

L'équation (5.8) s'écrit :

$$V' = x\, f(V')$$

avec

$$x = \left(\frac{1}{|\xi'|}\right)^{1/q} \qquad \text{et}$$

$$f(V') = \omega^j \left[e'_{q-1}(x\ ;\ \xi')\right]^{1/q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{q}-n+1\right)\left[\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}}V' + \dots + \frac{e'_o}{e'_{q-1}}V'^{q-1}\right]^n$$

$$= \omega^j (e'_{q-1})^{1/q} \Bigg\{ I_m + \frac{1}{q}\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V' +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)\left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}}\right)^2 + \frac{1}{q}\frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}}\right]V'^2$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \left[\frac{1}{n!}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{q}-n+1\right)\left(\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}}\right)^n + \right.$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\left. \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \right] V'^n$$

$$+ \dots\dots\dots \Bigg\}.$$

$f(V')$ est une composition de 2 séries. La série résultante converge pour

$$\left|\left| \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V' + \dots\dots\dots + \frac{e'_o}{e'_{q-1}} V'^{q-1} \right|\right| < 1$$

Donc elle converge en particulier pour

$$\left|\left|\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} V'\right|\right| < \frac{1}{q-1}$$

$$\vdots$$

$$\left|\left|\frac{e'_o}{e'_{q-1}} V'^{q-1}\right|\right| < \frac{1}{q-1}$$

Donc la série converge en particulier pour :

$$||V'|| < \mathrm{Min}\left(\frac{1}{q-1}\left(\sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\xi'|=1}} \left|\frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}}\right|\right)^{-1}, \frac{1}{q-1}\left(\sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\xi'|=1}} \left|\frac{e'_{q-3}}{e'_{q-1}}\right|\right)^{-1/2}, \dots\dots, \right.$$

$$\left. \frac{1}{q-1}\left(\sup_{\substack{x\in\Omega \\ |\xi'|=1}} \left|\frac{e'_o}{e'_{q-1}}\right|\right)^{-1/q-1} \right) = r$$

(le minimum est pris sur tous les Sup $\neq 0$).

$f(V')$ est une série dont le terme général $c_p V'^p$ est majoré en norme par le terme général $C'_p ||V'||^p$ de la série :

$$F'(||V'||) = \left(\sup_{\substack{x\in\bar{\Omega} \\ |\xi'|=1}} |e'_{q-1}| \right)^{1/q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{1}{q}(\frac{1}{q} - 1) \ldots (\frac{1}{q} - n+1) \right| \times$$

$$\times \left(\sup_{\substack{x\in\bar{\Omega} \\ |\xi'|=1}} \left| \frac{e'_{q-2}}{e'_{q-1}} \right| ||V'|| + \ldots + \sup_{\substack{x\in\bar{\Omega} \\ |\xi'|=1}} \left| \frac{e'_{o}}{e'_{q-1}} \right| ||V'||^{q-1} \right)^n .$$

$F'(||V'||)$ est une série entière de rayon de convergence R avec $R \geq r > 0$.

Soit $0 < r' < r$ et $M = \sup_{||V'||\leq r'} F'(||V'||)$ alors $0 < C'_p \leq \frac{M}{r'^p}$. Posons

$$C_p = \frac{M}{r'^p}$$

Les C_p sont les coefficients d'une série entière $F(||V'||)$ qui est une série majorante de $f(V')$. On calcule immédiatement la somme de la série F :

$$F(||V'||) = \frac{M}{1 - \frac{||V'||}{r'}} \qquad \text{pour } ||V'|| < r' .$$

L'équation :

$$(5.9) \qquad ||V'|| = x\, F(||V'||)$$

s'écrit

$$||V'|| = x \frac{M}{1 - \frac{||V'||}{r'}} \quad , \quad \left(x = \frac{1}{|\xi'|^{1/q}} \leq \inf(1, \frac{r'}{4M}) \right)$$

ce qui nous donne

$$||V'||^2 - r'||V'|| + r'M\, x = 0$$

D'où

$$\Delta = r'^2 - 4r'Mx = r'(r'-4Mx).$$

D'après l'équation (5.9), la solution $||V'||$ doit satisfaire $||V'||(0) = 0$. Donc la solution qui satisfait cette condition est donné par :

$$||V'|| = \frac{r' - \sqrt{r'^2-4r'Mx}}{2}$$

Cette solution est analytique au voisinage de $x = 0$ et son rayon de convergence est $\frac{r'}{4M}$. On pose :

$$||V'|| = \sum_{k=1}^{\infty} \mu'_k \, x^k$$

Sa série représentative est une série majorante de la solution

$$V' = \sum_{k=1}^{\infty} V'_k \, |\xi'|^{-k/q}$$

car si les V'_k sont donnés par des formules de récurrence du type :

$$V'_k = Q_k(c_p) \qquad (Q_k \text{ polynôme de degré } k),$$

les μ'_k sont donnés par les formules :

$$\mu'_k = Q_k(c_p).$$

[*Remarque 4.*

On a en particulier

$$Q_1(c_p) = c_o\,,$$

$$Q_2(c_p) = c_o c_1, \ldots\ldots \,]$$

D'où la convergence des séries pour $|\xi'|$ assez grand. D'après l'expression de ces séries : les termes généraux sont des combinaisons linéaires finies de puissance de e'_o à coefficients scalaires. On en déduit que les $\lambda_1^{(j)}$ $(j = 1,\ldots,q)$ sont des matrices commutant entre elles deux à deux, d'où le lemme.

Remarque 5.

Pour la fin de la démonstration de la proposition V.1.1 et pour les démonstrations des lemmes et des propositions du Chapitre VI qui vont nous servir à établir l'estimation de $|||\tilde{b}\, u|||$ dans le cas (b) et la fin de la démonstration des théorèmes II.3.1 et II.3.2, nous ferons les calculs sans le mentionner à chaque fois sous les conditions suivantes :

. Cas général : $1 \leq i \leq \tau_\sigma$ et $1 \leq j \leq r_i$. En plus des hypothèses (A),(B),(C) et (D) les démonstrations seront effectuées sous l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\partial_i^{(j)} = D_{x_o} I_m - \lambda_i^j(x\ ;\ D_{x'})$$

$$\lambda_i^j(x\ ;\ \xi') = \lambda_i(x\ ;\ \xi') I_m + \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}^j(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-\frac{k}{r_i}}$$

$$V_{i,k}^j \in (S_{x'}^o)_{m\times m}$$

On suppose :

$$H \left\{ \begin{array}{l} * \quad V_{i,k}^j(x\ ;\ \xi') = V'^j_{i,k}(x\ ;\ \xi')\, I_m \quad \text{pour} \quad k = 1,\ldots,r_i-1 \quad \text{avec} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad V'^j_{i,k} \in S_{x'}^o \\ ** \quad \text{les} \quad V_{i,k}^j(x\ ;\ \xi') \quad \text{commutent entre eux deux à deux pour} \\ \qquad i = 1,\ldots,\tau_\sigma\ , \quad j = 1,\ldots,r_i \quad \text{et} \quad k = 1,\ldots,\infty. \end{array} \right.$$

. Cas $\sigma = 1$, $t = 1$ et $H_1(x\ ;\ \xi) = \left[\xi_o - \sum_{\gamma=1}^{n} \alpha_\gamma(x)\cdot\xi_\gamma\right]$. Les calculs dans ce cas là sont faits sous les hypothèse (A), (B), (C) et (D). H est toujours satisfaite dans ce cas d'après les chapitres précédents.

Remarque 6.

Dans le cas général, $1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma$ et $1 \leqslant j \leqslant r_i$ et sous les hypothèses (A),(B),(C),(D) et H , nous avons aussi les résultats énoncés par les théorèmes II.3.1 et II.3.2

2ème étape.

Décomposition de $\tilde{b}$.

Lemme V.1.5.

$\tilde{b} = \tilde{\pi} + T + R$ avec

$$\tilde{\pi} = \partial_1^{(1)} \partial_1^{(2)} \ldots\ldots \partial_1^{(r_1)} \ldots\ldots \partial_{\tau_\sigma}^{(r_{\tau_\sigma})}$$

$$\partial_i^{(j)} = i\left[D_{x_o} I_m - \lambda_i^j(x\ ;\ D_{x'})\right] \qquad \text{(matrice } m\times m)$$

$T \in (L_x^{\tau-1-1/q})_{m\times m}$ et appartient au module V

$R \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$

C'est une conséquence directe du lemme V.1.5 et de la proposition I.1.1.

CHAPITRE VI

ESTIMATION DE $|||\tilde{b}\, u|||$ DANS LE CAS (b) ET FIN DE LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES

§ 1 - *Lemmes et propositions de base qui conduisent à l'estimation de* $|||\tilde{b}\, u|||$ *dans le cas* (b).

Dans les paragraphes §.1 et §.2 du chapitre VI on va supposer que u est de la forme $u_2 = \psi_2(x\ ;\ D_{x'})u$ où

$$\operatorname{supp} \psi_2(x\ ;\ \xi') \subset \{\xi'\ ;\ |\xi'| \geq R\} \qquad \text{(cf. p.59 et 60)}$$

Pour simplifier les notations, on écrira u au lieu de u_2.

Avant d'aborder la démonstration de l'estimation, on va présenter quelques lemmes techniques dont nous avons besoin pour la manipulation des facteurs du premier ordre composant $\tilde{\pi}$. C et k désigneront des constantes qui peuvent varier au cours d'une démonstration mais qui seront toujours notées C,k.

Lemme VI.1.1 ([18],[7])

Soit $\partial_i^{(j)}$ l'opérateur de symbole :

$$i[\xi_o-\lambda_i^j(x\ ;\ \xi')] = i[\xi_o-\lambda_i(x\ ;\ \xi')I_m - \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}^j(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-\frac{k}{r_i}}]$$

où $\lambda_i(x\ ;\ \xi') \in S^1_{x'}$ et $V^j_{i,k}(x\ ;\ \xi') \in (S^o_{x'})_{m\times m}$. Alors :

(a) pour tout $a(x\ ;\ D_{x'}) \in (L_{x'}^{-1/r_i,r_i})_{m\times m}$, $b(x\ ;D_{x'}) \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$, il existe $C(x\ ;\ D_{x'})$, $d(x\ ;\ D_{x'})$ éléments de $(L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ tels que :

(6.1) $\quad C(x\,;\,D_{x'})\partial_i^{(k)}u + d(x\,;\,D_{x'})\partial_i^{(\ell)}u =$

$$= a(x\,;\,D_{x'})D_{x_o}u + b(x\,;\,D_{x'})u + M(x\,;\,D_{x'})u$$

où $M \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$ (classe des opérateurs d'ordre $-\infty$) et $k \neq \ell$.

(b) Pour tout $a' \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ et $b' \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$ il existe c',d' éléments de $(L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ tels que :

$$c'(x\,;\,D_{x'})\partial_i^{(k)}u + d'(x\,;\,D_{x'})\partial_i^{(\ell)}u =$$

$$= a'(x\,;\,D_{x'})\partial_i u + b'(x\,;\,D_{x'})u + M'(x\,;\,D_{x'})u$$

où $M' \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$ et $k \neq \ell$.

(c) Pour tout $\tilde{a} \in (L_{x'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$, $\tilde{b} \in (L_{x'}^{1,r_{ij}})_{m\times m}$, il existe $\tilde{C},\tilde{d} \in (L_{x'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$ où r_{ij} = plus petit multiple commun de r_i et r_j tels que :

(6.2) $\quad \tilde{C}(x\,;\,D_{x'})\partial_i^{(k)}u + \tilde{d}(x\,;\,D_{x'})\partial_j^{(\ell)}u =$

$$= \tilde{a}(x\,;\,D_{x'})D_{x_o}u + \tilde{b}(x\,;\,D_{x'})u + \tilde{M}(x\,;\,D_{x'})u$$

où $\tilde{M} \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$ et $i \neq j$. Tous ces opérateurs sont choisis proprement supportés.

Démonstration :

Preuve de (a). Pour résoudre l'équation (6.1) on doit trouver $C(x\,;\,D_{x'})$ et $d(x\,;\,D_{x'})$ tels que :

$$\begin{cases} C(x\,;\,D_{x'}) + d(x\,;\,D_{x'}) = a(x\,;\,D_{x'}) \text{ et} \\ C(x\,;\,D_{x'})\lambda_i^k(x\,;\,D_{x'}) + d(x\,;\,D_{x'})\lambda_i^{\ell}(x\,;\,D_{x'}) = -b(x\,;\,D_{x'}) + M(x\,;\,D_{x'}). \end{cases}$$

D'où

$$C(x\ ;\ D_{x'}) = a(x\ ;\ D_{x'}) - d(x\ ;\ D_{x'})$$

avec $d(x\ ;\ D_{x'})$ satisfaisant l'équation

$$(6.3)\qquad d(x\ ;\ D_{x'})[\lambda_i^{\ell}(x\ ;\ D_{x'}) - \lambda_i^k(x\ ;\ D_{x'})] = -b(x\ ;\ D_{x'}) -$$

$$- a(x\ ;\ D_{x'})\lambda_i^k(x\ ;\ D_{x'}) + M(x\ ;\ D_{x'}) = h(x\ ;\ D_{x'}) + M(x\ ;\ D_{x'})$$

avec $h(x\ ;\ D_{x'}) = -b(x\ ;\ D_{x'}) - a(x\ ;\ D_{x'})\lambda_i^k(x\ ;\ D_{x'}) \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$ connu. Le symbole du 1er membre de (6.3) est :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_{\xi'}^{\alpha}\, d(x\ ;\ \xi')[D_{x'}^{\alpha}[\lambda_i^{\ell}(x\ ;\ \xi') - \lambda_i^k(x\ ;\ \xi')]]$$

Donc la résolution de (6.3) consiste à chercher $d(x\ ;\ \xi')$ tel que :

$$(6.4)\qquad \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_{\xi'}^{\alpha}\, d(x\ ;\ \xi')[D_{x'}^{\alpha}[\lambda_i^{\ell}(x\ ;\ \xi') - \lambda_i^k(x\ ;\ \xi')]] \sim h(x\ ;\ \xi')$$

où $\sim$ désigne l'égalité modulo $(S_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$.

Le calcul de $d(x\ ;\ \xi')$ est rendu possible car $V_{i,1}^{\ell} - V_{i,1}^k$ est une matrice diagonale inversible pour $(x\ ;\ \xi') \in \Omega\times S_{\xi'}^{n-1}$ si $r_i > 1$ et $\ell \neq k$.

Ce calcul se fait de façon standard (cf. cours sur les opérateurs pseudo-différentiels [41]). En notant :

$$d\,(x\ ;\ \xi') \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{-k/r_i}$$

$$h(x\ ;\ \xi') \sim \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-k/r_i}$$

d_k et $h_k \in (S_{x'}^{o})_{m\times m}$; puisque $\lambda_i^{\ell}-\lambda_i^k = \sum_{j=1}^{+\infty} [V_{i,j}^{\ell}-V_{i,j}^k]|\xi'|^{1-j/r_i}$,

$$d_o(x\ ;\ \xi') = h_1(x\ ;\ \xi')[V_{i,1}^{\ell}(x\ ;\ \xi')-V_{i,1}^k(x\ ;\ \xi')]^{-1}$$

et on détermine les autres termes par récurrence sur k. Ils sont de la forme

$$d_k(x\ ;\ \xi') = h_{k+1}(x\ ;\ \xi')[V^{\ell}_{i,1}(x\ ;\ \xi')-V^{k}_{i,1}(x\ ;\ \xi')]^{-1}$$

$$+ \text{ combinaison linéaire de dérivées de } d_o, d_1, \ldots, d_{k-1}.$$

Preuve de (b). La preuve de (b) est analogue à celle de (a).

Preuve de (c). La preuve de (c) est analogue à celle de (a), mais ici :

$$\lambda^k_i(x\ ;\ \xi') = \lambda_i(x\ ;\ \xi')I_m + \sum_{p=1}^{\infty} V^k_{i,p}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-p/r_i} ,$$

$$\lambda^{\ell}_j(x\ ;\ \xi') = \lambda_j(x\ ;\ \xi')I_m + \sum_{q=1}^{\infty} V^{\ell}_{j,q}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-q/r_j} ;$$

soit r_{ij} le plus petit multiple commun de r_i et r_j :

$$r_{ij} = p_{ij}\, r_i \qquad \text{et} \qquad r_{ij} = q_{ij}\, r_j \qquad ;$$

d'où

$$\lambda^k_i(x\ ;\ \xi') = \lambda_i(x\ ;\ \xi')I_m + \sum_{p=1}^{\infty} V^k_{i,p}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-\frac{pp_{ij}}{r_{ij}}} ,$$

$$\lambda^{\ell}_j(x\ ;\ \xi') = \lambda_j(x\ ;\ \xi')I_m + \sum_{q=1}^{\infty} V^{\ell}_{j,q}(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-\frac{qq_{ij}}{r_{ij}}} .$$

Le résultat obtenu dans (C) est plus fort parce que $\partial^{(k)}_i$ diffère de $\partial^{(\ell)}_j$ par un terme du premier ordre puisque :

$$\lambda_i(x\ ;\ \xi') - \lambda_j(x\ ;\ \xi') \neq 0 \qquad \text{pour} \quad (x\ ;\ \xi') \in \Omega\times\mathbb{R}^n-\{0\}$$

alors que dans (a) $\partial^{(k)}_i$ diffère de $\partial^{(\ell)}_i$ par un terme d'ordre $1 - \frac{1}{r_i}$.

Corollaire VI.1.1. ([18],[7])

(a) $$[\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}] = a(x\,;D_{x'})\partial_i^{(k)} + b(x\,;D_{x'})\partial_i^{(\ell)} + M_1(x\,;D_{x'})$$

avec $a,b \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ et $M_1 \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$.

De plus $b = b'I_m + b''$ et $a = -b$ avec

$$b' \in L_{x'}^{o,r_i} \quad \text{et} \quad b'' \in (L_{x'}^{-1,r_i})_{m\times m}$$

(b) $$[\partial_i^{(k)},\partial_j^{(\ell)}] = c(x\,;D_{x'})\partial_i^{(k)} + d(x\,;D_{x'})\partial_j^{(\ell)} + M_2(x\,;D_{x'})$$

avec $c,d \in (L_{x'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$ et $M_2 \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$

Preuve de (a). Rappelons que $[A,B] = AB-BA$

(a) $$[\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}] = g(x\,;D_{x'}) \in (L_{x'}^{1-\frac{1}{r_i},r_i})_{m\times m}$$

En effet :

$$[\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}] = D_{x_o}\lambda_i^k(x\,;D_{x'}) - \lambda_i^k(x\,;D_{x'})D_{x_o} + \lambda_i^\ell(x\,;D_{x'})D_{x_o}$$

$$- D_{x_o}\lambda_i^\ell(x\,;D_{x'}) + \lambda_i^k(x\,;D_{x'})\lambda_i^\ell(x\,;D_{x'})$$

$$- \lambda_i^\ell(x\,;D_{x'})\lambda_i^k(x\,;D_{x'}) \quad ;$$

d'autre part :

$$\lambda_i^k(x\,;\xi') = \lambda_i(x\,;\xi')I_m + \sum_{j=1}^{\infty} V_{i,j}^k(x\,;\xi')|\xi'|^{1-j/r_i} \quad ,$$

symbole $(\lambda_i^k(x\,;D_{x'})\lambda_i^\ell(x\,;D_{x'})) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\alpha \lambda_i^k(x\,;\xi')\right][D_{x'}^\alpha\lambda_i^\ell(x\,;\xi')]$.

D'où

$$(D_{x_o}\lambda_i^k)(x\ ;\ \xi') = D_{x_o}\lambda_i(x\ ;\ \xi')I_m + \sum_{j=1}^{\infty} (D_{x_o}V_{i,j}^k)(x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-\frac{j}{r_i}},$$

$$[D_{x_o}\lambda_i^k - D_{x_o}\lambda_i^\ell](x\ ;\ \xi') = \sum_{j=1}^{\infty} [D_{x_o}V_{i,j}^k - D_{x_o}V_{i,j}^\ell](x\ ;\ \xi')|\xi'|^{1-\frac{j}{r_i}},$$

symbole $[\lambda_i^k(x\ ;\ D_{x'})\lambda_i^\ell(x\ ;\ D_{x'}) - \lambda_i^\ell(x\ ;\ D_{x'})\lambda_i^k(x\ ;\ D_{x'})] \sim$

$$\sim \sum_{\alpha\neq 0} \frac{1}{\alpha!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\alpha \lambda_i^k(x\ ;\ \xi')D_{x'}^\alpha\lambda_i^\ell(x\ ;\ \xi') - \left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\alpha \lambda_i^\ell(x\ ;\ \xi') \times \right.$$

$$\left. \times\ D_{x'}^\alpha\ \lambda_i^k(x\ ;\ \xi')\right]$$

d'après H (cf. page 103).

Donc

$[D_{x_o}\lambda_i^k - D_{x_o}\lambda_i^\ell] \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$; de même

$[\lambda_i^\ell D_{x_o} - \lambda_i^k D_{x_o}] \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$ et

$[\lambda_i^k\lambda_i^\ell - \lambda_i^\ell\lambda_i^k] \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$.

D'où $[\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}] = g(x\ ;\ D_{x'}) \in (L_{x'}^{1-1/r_i,r_i})_{m\times m}$; d'après la remarque 3 du chapitre précédent ((5.8)') on peut écrire :

$g(x\ ;\ D_{x'}) = [\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}] = \partial_i^{k\ell}\ I_m + \varepsilon_i^{k\ell}$ où

$\partial_i^{k\ell} \in L_{x'}^{1-1/r_i,r_i}$ est scalaire et $\varepsilon_i^{k\ell} \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ est matricielle m×m.

En reprenant la démonstration du lemme VI.1.1 (a), il existe $b \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ de la forme :

$$b = b'I_m + b'' \quad \text{avec} \quad b' \in L_{x'}^{o,r_i} \quad \text{et} \quad b'' \in (L_{x'}^{-1,r_i})_{m\times m}$$

$$\text{et} \quad a = -b$$

tels que :

$$g(x\ ;\ D_{x'}) = a(x\ ;\ D_{x'})\partial_i^{(k)} + b(x\ ;\ D_{x'})\partial_i^{(\ell)} + M_1$$

avec $M_1 \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$.

Preuve de (b). La preuve de (b) est analogue à celle de (a) ; on utilise H et la partie (b) du lemme VI.1.1.

Le lemme suivant permet de contrôler les termes d'ordre inférieur lorsque l'on permute les facteurs de $\tilde{\pi}$.

Lemme VI.1.2. ([18], [7]).

Soit $\quad Q_r(x\ ;\ D_x) = \partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)} \ldots\ldots\ldots \partial_1^{(s_1)} \ldots\ldots\ldots \partial_\omega^{(1)} \ldots\ldots\ \partial_\omega^{(s_\omega)}$

d'ordre r et soit $\hat{Q}_r(x\ ;\ D_x)$ l'opérateur obtenu par une permutation arbitraire des facteurs $\partial_i^{(j)}$ alors :

$$h(x\ ;\ D_x) = Q_r(x\ ;\ D_x) - \hat{Q}_r(x\ ;\ D_x)$$

est un opérateur appartenant (modulo des termes d'ordre $\leq r-2$), au module $S_{(r)}$ sur le sous-anneau $(L_{x'}^{o,\beta})_{m\times m}$ formé d'opérateurs $c = c'I_m + c''$ avec $c' \in L_{x'}^{o,\beta}$ et $c'' \in (L_{x'}^{-1,\beta})_{m\times m}$.

β est le plus petit multiple commun des r_i, $(1 \leqslant i \leqslant \omega)$. $S_{(r)}$ est engendré par les opérateurs monômes $Q_r/\partial_i^{(j)}$ formés par omission d'un des facteurs (à la fois) composant Q_r.

Preuve :

Il suffit d'effectuer la démonstration pour la permutation particulière des indices figurant dans :

$$s = \partial_1^{(1)} \ldots\ldots \partial_i^{(k-1)}\partial_i^{(k)}\partial_j^{(\ell)}\partial_j^{(\ell+1)} \ldots\ldots\ldots \partial_\omega^{(s_\omega)},$$

$$\bar{s} = \partial_1^{(1)} \ldots\ldots \partial_i^{(k-1)}\partial_j^{(\ell)}\partial_i^{(k)}\partial_j^{(\ell+1)} \ldots\ldots\ldots \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

où i peut être égal à j (mais pas nécessairement). Alors :

$$s-\bar{s} = \partial_1^{(1)} \ldots\ldots \partial_i^{(k-1)}[\partial_i^{(k)},\partial_j^{(\ell)}]\,\partial_j^{(\ell+1)} \ldots\ldots \partial_\omega^{(s_\omega)} .$$

D'après le corollaire VI.1.1. ,

$$[\partial_i^{(k)},\partial_j^{(\ell)}] = a(x\ ;\ D_{x'})\partial_i^{(k)} + b(x\ ;\ D_{x'})\partial_j^{(\ell)} + M(x\ ;\ D_{x'})$$

pour certains $a,b \in (L_{x'}^{o,\beta})_{m\times m}$ (puisque $\beta \gtrsim r_{ij}$) et pour un certain $M \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$ avec $b = b'I_m+b''$, $b' \in L_{x'}^{o,\beta}$, $b'' \in (L_{x'}^{-1,\beta})_{m\times m}$ et $a = -b$.

Ainsi modulo des termes d'ordre $\leqslant r-2$:

$$s-\bar{s} = \partial_1^{(1)} \ldots\ldots \partial_i^{(k-1)}\ a\ \partial_i^{(k)}\ \partial_j^{(\ell+1)} \ldots\ldots \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

$$+\ \partial_1^{(1)} \ldots\ldots \partial_i^{(k-1)}\ b\ \partial_j^{(\ell)}\ \partial_j^{(\ell+1)} \ldots\ldots \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

$$= a\, \partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_i^{(k-1)}\, \partial_i^{(k)}\, \partial_j^{(\ell+1)} \,\ldots\ldots\, \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

$$+ b\, \partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_i^{(k-1)} \partial_j^{(\ell)} \partial_j^{(\ell+1)} \,\ldots\ldots\, \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

$$+ [\partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_i^{(k-1)}, a]\, \partial_i^{(k)}\, \partial_j^{(\ell+1)} \,\ldots\, \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

$$+ [\partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_i^{(k-1)}, b]\, \partial_j^{(\ell)}\, \partial_j^{(\ell+1)} \,\ldots\, \partial_\omega^{(s_\omega)}$$

La démonstration est complète en remarquant que les deux derniers termes sont d'ordre $r-2$.

<u>*Lemme VI.1.3.*</u> ([18], [7]).

Modulo des termes de $(L_x^{\tau-2})_{m\times m}$, $[\tilde{\pi}, \psi\, I_m] \in S_{(\tau)}$ pour tout $\psi \in L_x^o$, où $S_{(\tau)}$ est le module associe à l'opérateur $\tilde{\pi}$ (construit dans le lemme VI.1.2).

<u>Démonstration</u> :

$$[\tilde{\pi}, \psi] = \tilde{\pi}\psi - \psi\tilde{\pi}$$

$$= \partial_1^{(1)} \ldots\, \partial_p^{(r_p)}\, \psi \; - \psi\partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_p^{(r_p)}$$

$$= \partial_1^{(1)} \,\ldots\, \partial_p^{(r_p-1)} [\partial_p^{(r_p)}, \psi] + \partial_1^{(1)} \,\ldots\, \partial_p^{(r_p-1)}\, \psi \quad \partial_p^{(r_p)}$$

$$- \psi\partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_p^{(r_p)}$$

or $\partial_p^{(r_p)} = \partial_p'^{(r_p)}\, I_m + \Lambda_p''^{(r_p)}$ avec $\Lambda_p''^{(r_p)} \in (L_x'^{o,r_p})_{m\times m}$. D'où

$$[\partial_p^{(r_p)}, \psi] = [\partial_p'^{(r_p)}, \psi] I_m + [\Lambda_p''^{(r_p)}, \psi]$$

avec $[\partial_p'^{(r_p)}, \psi] \in L_x'^{o,r_p}$ et $[\Lambda_p''^{(r_p)}, \psi] \in (L_x'^{-1,r_p})_{m\times m}$

et par suite

$$[\tilde{\pi},\psi] = \partial_1^{(1)} \,\ldots\ldots\, \partial_p^{(r_p-1)}[\partial_p'^{(r_p)},\psi] + \partial_1^{(1)}\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-1)}\,\psi\partial_p^{(r_p)}$$

$$-\,\psi\partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p)} \quad \text{modulo un terme d'ordre} \leq \tau-2.$$

On répète le procédé

$$\partial_p^{(r_p-1)}[\partial_p'^{(r_p)},\psi] = [\partial_p^{(r_p-1)},[\partial_p'^{(r_p)},\psi]] + [\partial_p'^{(r_p)},\psi]\partial_p^{(r_p-1)}$$

$$= [\partial_p'^{(r_p-1)},[\partial_p'^{(r_p)},\psi]]I_m + [\Lambda_p''^{(r_p-1)},[\partial_p'^{(r_p)},\psi]]$$

$$+ [\partial_p'^{(r_p)},\psi]\partial_p^{(r_p-1)}.$$

D'où :

$$[\tilde{\pi},\psi] = \partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-2)}[\partial_p'^{(r_p)},\psi]\,\partial_p^{(r_p-1)}$$

$$+ \partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-1)}\psi\,\partial_p^{(r_p)} - \psi\,\partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p)}$$

(modulo des termes d'ordre $\leqslant \tau-2$)

$$= [\partial_p'^{(r_p)},\psi]\,\partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-2)}\,\partial_p^{(r_p-1)}$$

$$+ \partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-1)}\psi\,\partial_p^{(r_p)} - \psi\,\partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p)}$$

(modulo des termes d'ordre $\leq \tau-2$).

D'où

$$[\tilde{\pi},\psi] = [\partial_p'^{(r_p)},\psi]\,\partial_1^{(1)}\,\ldots\,\partial_p^{(r_p-2)}\,\partial_p^{(r_p-1)}$$

$$+ (\partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-1)}\psi - \psi\partial_1^{(1)}\,\ldots\ldots\,\partial_p^{(r_p-1)})\,\partial_p^{(r_p)}$$

(modulo des termes d'ordre $\leq \tau-2$).

En faisant une récurrence sur p on obtient donc le résultat.

Lemme VI.1.4.

Soit $a(x ; D_{x'})$ un opérateur proprement supporté appartenant à $(L^{o,k}_{x'})_{m\times m}$ c'est-à-dire :

$$a(x ; \xi') = a_o(x ; \xi') + a_1(x ; \xi')|\xi'|^{-1/k} + a_2(x ; \xi')|\xi'|^{-2/k} \ldots$$

où $a_j(x ; \xi') \in (S^o_{x'})_{m\times m}$.

Alors il existe des constantes C et R indépendante de a telles que :

$$||a(x ; D_{x'})\psi_2 u|| \leq C||\psi_2 u|| \quad \text{pour } u \in [C^\infty_o(\Omega)]^m$$

telle que $\operatorname{supp} \psi_2(x ; \xi') \subset \{\xi' ; |\xi'| \gtrsim R\}$.

Démonstration :

Si on pose $\zeta = |\xi'|^{1/k}$, on obtient un résultat standard qui traduit la continuité des opérateurs pseudo-différentiels où a est donné par une somme asymptotique en ζ.

Proposition VI.1.1. ([18],[7])

Soit $\partial^{(j)}_i = D_{x_o} I_m - \lambda^j_i(x ; D_{x'})$ où $\lambda^j_i(x ; \xi')$ est défini dans la proposition V.1.1.

Alors pour T, $\tilde{r}$ et k^{-1} suffisamment petits

$$|||u|||^2 \leq \frac{c}{k} |||\partial^{(j)}_i u|||^2 \qquad \text{pour } u \in [C^\infty_o(\Omega)]^m$$

où $\Omega = \{x = (x_o,x')$ tel que $|x'| < \tilde{r}$ et $0 \leq x_o \leq T\}$ et c est une constante indépendante de T, $\tilde{r}$, k et u.

En effet

$$\partial_i^{(j)} = \partial_i'^{(j)} I_m + \Lambda_i''^{(j)}$$

avec

$$\partial_i'^{(j)} = D_{x_o} - \Lambda_i'^{(j)}$$

où

$$\Lambda_i'^{(j)} \in L_{x'}^{1,r_i} \qquad \text{et} \qquad \Lambda_i''^{(j)} \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$$

On a :

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{c}{k} |||\partial_i'^{(j)} u|||^2$$

d'après M. Zeman [18].

D'autre part, il existe $c' > 0$ telle que :

$$|||\Lambda'' u|||^2 \leqslant c' |||u|||^2$$

car Λ'' est d'ordre 0.

D'où puisque $\partial_i'^{(j)} I_m = \partial_i^{(j)} - \Lambda_i''^{(j)}$ on a

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{2c}{k} \{ |||\partial_i^{(j)} u|||^2 + |||\Lambda_i''^{(j)} u|||^2 \}$$

et par suite :

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{2c}{k} |||\partial_i^{(j)} u|||^2 + \frac{2cc'}{k} |||u|||^2$$

Alors pour k^{-1} suffisamment petit $\frac{2cc'}{k} < \frac{1}{2}$ on a :

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{2c}{1 - \frac{2cc'}{k}} \times \frac{1}{k} |||\partial_i^{(j)} u|||^2$$

i.e. :

$$|||u|||^2 \leq \frac{c''}{k} |||\partial_i^{(j)} u|||^2$$

en posant $\qquad c'' = 4c.$

D'où la proposition.

Remarque. La majeure partie de la démonstration de l'estimation de $|||\tilde{b}\, u|||$ dans le cas (b) sera établie par récurrence. Rappelons que :

$$\pi_\tau = \partial_1^{r_1} \partial_2^{r_2} \ldots\ldots \partial_{\tau_\sigma}^{r_{\tau_\sigma}}$$

avec

$$r_1 \geq r_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \geq r_{\tau_\sigma} .$$

Soit $m_o = 0 \quad ,$

$m_1 = r_1 \quad ,$

$m_2 = r_1 + r_2 \ ,$

$m_i = r_1 + r_2 + \ldots + r_i \quad ;$

soit $Q_\alpha u = \partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(r_1)} \partial_2^{(1)} \ldots \partial_2^{(r_2)} \ldots \partial_i^{(r_i)} \partial_{i+1}^{(1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell)} u$

un opérateur de $(L_x^\alpha)_{m\times m}$ où $\alpha = m_i + \ell$, avec $0 \leq i \leq \tau-1$ et $0 \leq \ell \leq r_{i+1}$ (si $i = 0$, $Q_\alpha u = \partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell)} u$). Comme dans le lemme VI.1.2. on peut associer à cet opérateur le module $S_{(\alpha)}$.

Soit $S'_{(\alpha)}$ l'ensemble des opérateurs qui engendrent $S_{(\alpha)}$.

En conséquence de la proposition VI.1.1, on a les lemmes suivants.

Lemme VI.1.5. ([18],[7]).

Il existe une constante C indépendante de u telle que pour $\tilde{r},T,k^{-1}$ suffisamment petits, on ait :

$$C|||u|||^2_{\alpha-2} + C|||Q_\alpha u|||^2 \geq k \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha u|||^2 \quad \forall u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$$

Démonstration :

D'après la proposition VI.1.1, il existe $\frac{C}{3}$ tel que pour k assez grand :

$$\frac{C}{3} |||\partial_j^\gamma[\partial_1^{(1)} \ldots \partial_j^{(\gamma-1)} \partial_j^{(\gamma+1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell)} u]|||^2$$

$$\geq k|||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_j^{(\gamma-1)} \partial_j^{(\gamma+1)} \ldots\ldots \partial_{i+1}^{(\ell)} u|||^2$$

pour $1 \leq j \leq i$, $1 \leq \gamma \leq r_j$ et pour $j = i+1$ et $1 \leq \gamma \leq \ell$. D'après le lemme VI.1.2.

$$\partial_j^{(\gamma)}\partial_1^{(1)} \ldots\ldots \partial_j^{(\gamma-1)}\partial_j^{(\gamma+1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell)} u = Q_\alpha u + h_j^\gamma u + N_j^\gamma u$$

où $h_j^\gamma \in S_{(\alpha)}$ et $N_j^\gamma \in (L_x^{\alpha-2})_{m\times m}$.

D'où

$$(6.5) \qquad k|||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_j^{(\gamma-1)}\partial_j^{(\gamma+1)} \ldots\ldots \partial_{i+1}^{(\ell)} u|||^2$$

$$\leq \frac{C}{3}|||Q_\alpha u + h_j^\gamma u + N_j^\gamma u|||^2$$

$$\leq C|||Q_\alpha u|||^2 + C|||h_j^\gamma u|||^2 + C|||N_j^\gamma u|||^2$$

$$\leq C|||Q_\alpha u|||^2 + C|||h_j^\gamma u|||^2 + C|||u|||^2_{\alpha-2} .$$

En sommant les inégalités (6.5) sur j et γ on obtient

$$C|||u|||^2_{\alpha-2} + C \sum_{j,\gamma} |||h^\gamma_j\ u|||^2 + C|||Q_\alpha\ u|||^2$$

$$\gtrsim k \sum_{j,\gamma} |||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_j^{(\gamma-1)} \partial_j^{(\gamma+1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell)}\ u|||^2$$

$$\gtrsim k \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha\ u|||^2 \ .$$

Puisque $h^\gamma_j \in S_{(\alpha)}$

$$\sum_{j,\gamma} |||h^\gamma_j\ u|||^2 \leqslant C \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha\ u|||^2.$$

D'où

$$(6.6) \qquad C|||u|||^2_{\alpha-2} + C \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha\ u|||^2 + C|||Q_\alpha\ u|||^2$$

$$\gtrsim k \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha\ u|||^2 \ ;$$

pour $k > C$ on peut absorber le terme $C \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha\ u|||^2$ du premier membre de (6.6) dans le deuxième membre de (6.6). D'où

$$C|||u|||^2_{\alpha-2} + C|||Q_\alpha\ u|||^2 \gtrsim k \sum_{s_\alpha \in S'_{(\alpha)}} |||s_\alpha\ u|||^2 \ .$$

D'où le lemme.

Lemme VI.1.6 [18].

Soit $\alpha = m_i+\ell$ défini ci-dessus, il existe une constante c indépendante de u telle que pour $\tilde{r}, T, k^{-1}$ suffisamment petits, on ait les estimations suivantes :

$$(6.7)\quad a)\qquad c|||Q_\alpha u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}} \qquad \text{si } i = 0,\ 1 \leq \alpha \leq r_1$$

$$(6.8)\quad b)\qquad c|||Q_\alpha u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} \qquad \text{si } 1 \leq i,\ r_1 \leq \alpha \leq \tau$$

<u>Démonstration</u> :

Démonstration de a).

On démontre a) par récurrence sur α. Si $\alpha = 1$, (6.7) est une conséquence de la proposition VI.1.1. Supposons que (6.7) est satisfaite pour $1 \leq \alpha < r_1$ et démontrons (6.7) pour $\alpha+1$; $Q_{\alpha+1} = Q_\alpha \partial_1^{(\ell+1)}$. D'où d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$(6.9)\qquad c|||Q_{\alpha+1} u|||^2 \geq k|||\partial_1^{(\ell+1)} u|||^2_{\alpha-1-\frac{\alpha-1}{r_1}}$$

D'après le lemme VI.1.2. :

$$\partial_1^{(1)} \dots \partial_1^{(\ell-1)} \partial_1^{(\ell+1)} \partial_1^{(\ell)} u = Q_{\alpha+1} u + h_1^{\alpha+1} u + N_1^{\alpha+1} u$$

où $h_1^{\alpha+1} \in S_{(\alpha+1)}$ et $N_1^{\alpha+1} \in (L_x^{\alpha-1})_{m\times m}$. D'après l'hypothèse de récurrence on a comme (6.9) :

$$c|||\partial_1^{(1)} \dots \partial_1^{(\ell-1)} \partial_1^{(\ell+1)} \partial_1^{(\ell)} u|||^2 \geq k|||\partial_1^{(\ell)} u|||^2_{\alpha-1-\frac{\alpha-1}{r_1}} .$$

D'où

$$(6.10)\qquad c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||h_1^{\alpha+1} u|||^2 + c|||Q_{\alpha+1} u|||^2$$

$$\geq k|||\partial_1^{(\ell)} u|||^2_{\alpha-1-\frac{\alpha-1}{r_1}} .$$

Maintenant d'après le lemme VI.1.5.,

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k \sum_{s_{\alpha+1}\in S'_{(\alpha+1)}} |||s_{\alpha+1}\ u|||^2 \quad ;$$

puisque $h_1^{\alpha+1} \in S_{(\alpha+1)}$ on a :

$$|||h_1^{\alpha+1}\ u|||^2 \leq c \sum_{s_{\alpha+1}\in S'_{(\alpha+1)}} |||s_{\alpha+1}\ u|||^2 .$$

D'où (6.10) donne l'estimation :

(6.11) $$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c \sum_{s_{\alpha+1}\in S'_{(\alpha+1)}} |||s_{\alpha+1}\ u|||^2 + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2$$

$$\geq k|||\partial_1^{(\ell)}\ u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}} + k \sum_{s_{\alpha+1}\in S'_{(\alpha+1)}} |||s_{\alpha+1}\ u|||^2 ;$$

pour $k > c$, on peut absorber le terme $c \sum_{s_{\alpha+1}\in S'_{(\alpha+1)}} |||s_{\alpha+1}\ u|||^2$ du membre de gauche de (6.11) dans le membre de droite de (6.11) et on obtient :

(6.12) $$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k|||\partial_1^{(\ell)}\ u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}} \quad ;$$

en additionnant (6.9) et (6.12), on a :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k\Big[|||\partial_1^{(\ell)}u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}} + |||\partial_1^{(\ell+1)}\ u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}}\Big] .$$

D'après le lemme VI.1.4, on obtient alors :

$$(6.13)\qquad c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\, u|||^2 \gtrsim k|||a_1\, \partial_1^{(\ell)}\, u +$$

$$+ a_2\, \partial_1^{(\ell+1)}\, u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}}$$

pour tout a_1 et a_2 de $(L^{o,r_1}_{x'})_{m\times m}$ proprement supportés. D'après le lemme VI.1.1 (a) on a :

$$(6.14)\qquad c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\, u|||^2$$

$$\gtrsim k|||[a(x\ ;\ D_{x'})D_{x_o} + b(x\ ;\ D_{x'})]u + M(x\ ;\ D_{x'})u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}}$$

pour tout $a \in (L^{-1/r_1,r_1}_{x'})_{m\times m}$ et $b \in (L^{1-1/r_1,r_1}_{x'})_{m\times m}$ proprement supportés et pour un certain $M \in (L^{-\infty}_{x'})_{m\times m}$. D'où en considérant a de symbole $(1+|\xi'|^2)^{-1/r_1}\, I_m$ et b de symbole $(1+|\xi'|^2)^{1-1/r_1}\, I_m$ on obtient :

$$(6.15)\qquad c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\, u|||^2 \gtrsim k|||u|||^2_{\alpha-\frac{\alpha}{r_1}}$$

$$- k|||M\, u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}}\quad ;$$

puisque $M \in (L^{-\infty}_{x'})_{m\times m}$, alors d'après le lemme IV.1.1, pour un ε tel que $0 < \varepsilon < 1$

$$|||M\, u|||_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}} \lesssim \varepsilon|||u|||_{\alpha-\frac{\alpha}{r_1}}$$

Donc on peut absorber le 2ème terme du 2ème membre de (6.15) dans le premier terme du 2ème membre. Ainsi, on a :

$$(6.16)\qquad c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\, u|||^2 \gtrsim k|||u|||^2_{\alpha-\frac{\alpha}{r_1}}\ .$$

D'où pour $k > c$, on peut absorber le terme $c|||u|||^2_{\alpha-1}$ du premier membre de (6.16) dans le deuxième membre de (6.16) et on arrive à l'estimation

$$c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-\frac{\alpha}{r_1}}$$

ce qui termine la démonstration par récurrence de a).

Démonstration de b).

Si on pose $\alpha = r_1$ dans (6.7), on a

$$c|||Q_{r_1}\ u|||^2 \geq k|||u|||^2_{r_1-2+1/r_1}$$

puisque $r = \max\limits_{1\leq i\leq r_{\tau_\sigma}} r_i = r_1$ (car $r_1 \geq r_2 \ldots \geq r_{\tau_\sigma}$).

On voit que (6.8) est vérifiée pour $\alpha = r_1$. Avant de démontrer b) faisons la remarque suivante : les estimations (6.14) et (6.16) sont encore vérifiées avec Q_α modifié en remplaçant les termes $\partial_1^{(k)}$ par $\partial_j^{(k)}$, $j \neq 1$. La démonstration dans ce cas est la même que pour Q_α jusqu'à la ligne (6.13); on applique alors le lemme VI.1.1. (c) au lieu du lemme VI.1.1. (a); les estimations (6.14) et (6.16) sont encore vérifiées parce que lemme VI.1.1. (c) est plus fort que le lemme VI.1.1. (a).

Nous pouvons maintenant aborder la preuve de b).

La démonstration se fait par récurrence sur α. On suppose que (6.8) est vérifiée pour α avec $r_1 \leq \alpha < \tau$. Montrons que (6.8) est satisfaite pour $\alpha+1$. D'après l'hypothèse de récurrence, puisque $Q_{\alpha+1} = Q_\alpha\ \partial_{i+1}^{(\ell+1)}$

$$c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k|||\partial_{i+1}^{(\ell+1)}\ u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} \tag{6.17}$$

On peut aussi montrer que si (6.8) est vérifiée avec Q_α, elle est aussi vérifiée avec Q_α remplacé par l'opérateur :

$$\partial_1^{(1)} \dots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(1)} \dots \partial_{i+1}^{(\ell+1)} ,$$

puisque les deux opérateurs ont le même ordre et les mêmes multiplicités des caractéristiques, d'où :

$$c|||\partial_1^{(1)} \dots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(1)} \dots \partial_{i+1}^{(\ell+1)} u||| \geq k|||u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} \quad ;$$

cela implique que :

$$c|||\partial_1^{(1)} \dots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(1)} \dots \partial_{i+1}^{(\ell+1)} \partial_i^{r_i} u|||^2 \geq k|||\partial_i^{r_i} u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} .$$

D'après le lemme VI.1.2., on a :

$$\partial_1^{(1)} \dots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(1)} \dots \partial_{i+1}^{(\ell+1)} \partial_i^{(r_i)} u = Q_{\alpha+1} u + h_i^{r_i} u + N_i^{r_i} u$$

où $h_i^{r_i} \in S_{(\alpha+1)}$ et $N_i^{r_i} \in (L_x^{\alpha-1})_{m\times m}$. D'où :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||h_i^{r_i} u|||^2 + c|||Q_{\alpha+1} u|||^2 \geq k|||\partial_i^{(r_i)} u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} \quad ; \tag{6.18}$$

comme dans la preuve de (a), puisque

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1} u|||^2 \geq k \sum_{s_{\alpha+1} \in S'_{(\alpha+1)}} |||s_{\alpha+1} u|||^2 ,$$

d'après le lemme VI.1.5. et puisque $h_i^{r_i} \in S_{(\alpha+1)}$ on peut déplacer le terme $c|||h_i^{r_i} u|||^2$ du premier membre de (6.18) dans le deuxième membre et on obtient :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1} u|||^2 \geq k |||\partial_i^{(r_i)} u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} \quad ; \tag{6.19}$$

en sommant (6.17) et (6.19), on obtient :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k[|||\partial_{i+1}^{(\ell+1)}u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} + $$
$$+ |||\partial_i^{r_i}\ u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}}] \ .$$

D'après le lemme VI.1.4. on a alors :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}u|||^2 \geq k[|||a_1\partial_{i+1}^{(\ell+1)}u + a_2\partial_i^{(r_i)}\ u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}}] \tag{6.20}$$

pour tout a_1 et a_2 de $(L_{x'}^{o,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ proprement supportés.
On applique maintenant le lemme VI.1.1 (c) à (6.20) :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1}+c|||Q_{\alpha+1}u|||^2 \geq k|||b_1(x\ ;\ D_{x'})D_{x_o}\ u + b_2(x\ ;\ D_{x'})u +$$
$$+ \tilde{M}(x\ ;\ D_{x'})u|||^2_{\alpha-2-\frac{1}{r}}$$

pour tout $b_1 \in (L_{x'}^{o,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ et $b_2(L_{x'}^{1,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ proprement supportés et pour un certain $\tilde{M} \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$. D'où :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-1+\frac{1}{r}} - k|||\tilde{M}\ u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r}} \ ; \tag{6.21}$$

comme dans la preuve de (a) on peut absorber le deuxième terme du deuxième membre de (6.21) dans le premier terme du deuxième membre. Ainsi :

$$c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha\ -1+\frac{1}{r}} \ . \tag{6.22}$$

Appliquons le lemme IV.1.1. à nouveau ; on peut absorber le terme $c|||u|||^2_{\alpha-1}$ du premier membre de (6.22) dans le deuxième membre ce qui donne l'estimation voulue

$$c|||Q_{\alpha+1}\, u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-1+\frac{1}{r}}$$

D'où (6.8) est satisfaite pour tout α tel que : $r_1 \leq \alpha \leq \tau$. D'où le lemme.

Nous allons maintenant décrire un autre module noté W_α associé à l'opérateur Q_α.

On décrit d'abord les opérateurs qui engendrent $W_\alpha^{(1)}$. Ils forment la collection $W_\alpha'^{(1)}$. Si on note $T_\alpha = \partial_1^{r_1} \dots \partial_i^{r_i}\, \partial_{i+1}^{\ell}\, I_m$ les éléments de $W_\alpha'^{(1)}$ sont :

$$\frac{T_\alpha}{\partial_i}\,, \qquad b_i\,\frac{T_\alpha}{\partial_i}\,, \qquad D_{x_o}\,\frac{T_\alpha}{\partial_i\partial_j} \quad \text{et} \quad b_{ij}\,\frac{T_\alpha}{\partial_i\partial_j}$$

avec $i \neq j$, où b_i et b_{ij} sont des opérateurs proprement supportés de la forme : $b_i = b_i'\, I_m + b_i''$, $\quad b_{ij} = b_{ij}'\, I_m + b_{ij}''$ où

$$b_i' \in L_{x'}^{1-1/r_i, r_i}\,, \quad b_i'' \in (L_{x'}^{o, r_i})_{m\times m}\,, \quad b_{ij}' \in L_{x'}^{1, r_{ij}} \quad \text{et}$$

$$b_{ij}'' \in (L_{x'}^{o, r_{ij}})_{m\times m}$$

avec r_{ij} le plus petit multiple commun de r_i et r_j.

$W_\alpha'^{(2)}$ est formé de manière semblable en remplaçant l'opérateur T_α dans les éléments de $W_\alpha'^{(1)}$ par un élément de $W_\alpha'^{(1)}$.

On continue de cette manière en formant $W_\alpha'^{(3)}$, $W_\alpha'^{(4)}$,.... . Finalement, on pose $W_\alpha' = \bigcup_k W_\alpha'^{(k)}$ et W_α est le module engendré par tous les opérateurs de W_α' sur l'anneau des opérateurs c proprement supportés de $(L^o_{x'})_{m\times m}$ de la forme $c = c' I_m + c''$ avec $c' \in L^o_{x'}$, et $c'' \in (L^{-1}_{x'})_{m\times m}$

Lemme VI.1.7. ([18],[7])

Il existe une constante c indépendante de u telle que pour $\tilde{r},T,k^{-1}$ suffisamment petits, on ait l'estimation suivante :

(6.23) $$c|||Q_\alpha u|||^2 \geq k \sum_{w_\alpha \in W_\alpha'} |||w_\alpha u|||^2 \qquad \text{pour } u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m.$$

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence. C'est une démonstration assez longue ; nous allons la donner en plusieurs étapes. Comme dans le lemme VI.1.6., nous allons d'abord considérer le cas $\alpha = \ell \leq r_1$, puis le cas $\alpha = m_i+\ell$ où $i \geq 1$. Si $\alpha = \ell$, $Q_\alpha u = Q_\ell u = \partial_1^{(1)} \dots \partial_1^{(\ell)} u$. Nous allons montrer que :

(6.24) $$c|||Q_\ell u|||^2 \geq k \sum_{w_\ell \in W_\ell'} |||w_\ell u|||^2 \qquad 2 \leq \ell \leq r_1$$

Première étape.

Si $\ell = 2$, alors en appliquant la proposition VI.1.1. on a :

$$c|||\partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)} u|||^2 \geq k|||\partial_1^{(2)} u|||^2$$

et

$$c|||\partial_1^{(2)}\partial_1^{(1)} u|||^2 \geq k|||\partial_1^{(1)} u|||^2.$$

D'après le lemme VI.1.2.

$$\partial_1^{(2)}\partial_1^{(1)} = \partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)} + h_1^2 + N_1^2$$

où $h_1^2 \in S_{(2)}$ et $N_1^2 \in (L_x^o)_{m\times m}$; ceci implique :

$$(6.25) \qquad c|||u|||^2 + c|||h_1^2 u|||^2 + c|||\partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)} u|||^2$$

$$\geq k\{|||\partial_1^{(1)} u|||^2 + |||\partial_1^{(2)} u|||^2\} .$$

Puisque

$$c|||u|||^2 + c|||\partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)} u|||^2 \geq k \sum_{s_2 \in S'_{(2)}} |||s_2 u|||^2$$

et puisque $h_1^2 \in S_{(2)}$, on peut déplacer, comme dans la preuve du lemme VI.1.6, le terme $c|||h_1^2 u|||^2$ du premier membre de (6.25). D'où :

$$c|||u|||^2 + c|||Q_2 u|||^2 \geq k\{|||\partial_1^{(1)} u|||^2 + |||\partial_1^{(2)} u|||^2\}.$$

Après une application du lemme VI.1.4., on a :

$$(6.26) \qquad c|||u|||^2 + c|||Q_2 u|||^2 \geq k\{|||[a_1\partial_1^{(1)} + a_2\partial_1^{(2)}]u|||^2\}$$

pour tout $a_1, a_2 \in (L_{x'}^{o,r_1})_{m\times m}$ proprement supportés.

Or d'après le lemme VI.1.1. (b), pour tout opérateur $b_1 \in (L_{x'}^{o,r_1})_{m\times m}$ et $d_{1,2} \in (L_{x'}^{1-1/r_1,r_1})_{m\times m}$ proprement supportés, il existe des opérateurs $a_1, a_2 \in (L_{x'}^{o,r_1})_{m\times m}$ proprement supportés et $M_1 \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$ tels que :

$$a_1\partial_1^{(1)}u + a_2\partial_1^{(2)}u = b_1\partial_1 u + d_{1,2}u + M_1 u$$

Puisque l'ensemble W'_2 est constitué par les opérateurs du type $b_1\partial_1$ et $d_{1,2}$, (6.26) entraine

$$c|||u|||^2 + c|||Q_2 u|||^2 \geq k \sum_{w_2 \in W'_2} |||w_2 u|||^2 - k|||M_1 u|||^2 .$$

D'après le lemme VI.1.6.

$$c|||Q_2 \, u|||^2 \geq k|||u|||^2_{1-\frac{1}{r_1}} \, .$$

D'où

$$c|||u|||^2 + c|||Q_2 u|||^2 \geq k \sum_{w_2 \in W'_2} |||w_2 u|||^2 +$$

$$+ k\{|||u|||^2_{1-\frac{1}{r_1}} - |||M_1 u|||^2\} \, .$$

Puisque $M_1 \in (L^{-\infty}_{x'})_{m\times m}$, $|||M_1 u|||^2 \leqslant \varepsilon|||u|||^2_{1-\frac{1}{r_1}}$ pour tout $\varepsilon > 0$;

on arrive ainsi à l'estimation : (car $0 < 1-\frac{1}{r_1}$ et $-\frac{n}{2} \leqslant 1-\frac{1}{r_1}$)

$$c|||u|||^2 + c|||Q_2 u|||^2 \geq k \sum_{w_2 \in W'_2} |||w_2 u|||^2 \, . \tag{6.27}$$

Par une nouvelle application du lemme VI.1.6 et puisque $|||u|||^2 \leqslant \varepsilon|||u|||^2_{1-\frac{1}{r_1}}$ d'après le lemme IV.1.1., pour $k > c$ on peut déplacer le terme $c|||u|||^2$ du premier membre de (6.27) dans le deuxième membre et on obtient

$$c|||Q_2 \, u|||^2 \geq k \sum_{w_2 \in W'_2} |||w_2 u|||^2 \, .$$

Deuxième étape.

On suppose que (6.24) est vérifiée pour tout ℓ avec $2 \leqslant \ell < r_1$ et nous allons montrer que (6.24) est vérifiée pour $\ell+1$. Puisque $Q_{\ell+1} = Q_\ell \, \partial_1^{(\ell+1)}$, l'hypothèse de récurrence donne :

$$(6.28) \qquad c|||Q_{\ell+1}\, u|||^2 \geq k \sum_{w_\ell \in W'_\ell} |||w_\ell(\partial_1^{(\ell+1)}\, u)|||^2 \,.$$

Comme dans la première étape, à l'aide du lemme VI.1.2., on a :

$$\partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell-1)} \partial_1^{(\ell+1)} \partial_1^{(\ell)} = \partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell+1)} + h_1^{\ell+1} + N_1^{\ell+1}$$

où $h_1^{\ell+1} \in S_{(\ell+1)}$ et $N_1^{\ell+1} \in (L_x^{\ell-1})_{m\times m}$.

Si on examine l'opérateur $\partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell-1)} \partial_1^{(\ell+1)}$ on voit que l'estimation (6.24) est vérifiée aussi pour cet opérateur tout comme Q_ℓ. D'où :

$c|||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell-1)} \partial_1^{(\ell+1)} \partial_1^{(\ell)}\, u|||^2 \geq k \sum_{w_\ell \in W'_\ell} |||w_\ell(\partial_1^{(\ell)}\, u)|||^2$ et puisque

$$|||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell+1)} u + h_1^{\ell+1} u + N_1^{\ell+1} u|||^2 \leq |||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell+1)}\, u|||^2 + |||h_1^{\ell+1}\, u|||^2$$

$$+ |||N_1^{\ell+1}\, u|||^2 \leq |||Q_{\ell+1}\, u|||^2 + |||h_1^{\ell+1}\, u|||^2 +$$

$$+ |||u|||^2_{\ell-1}$$

on a :

$$(6.29) \quad c|||u|||^2_{\ell-1} + c|||h_1^{\ell+1}\, u|||^2 + \quad c|||Q_{\ell+1}\, u|||^2$$

$$\geq k \sum_{w_\ell \in W'_\ell} |||w_\ell(\partial_1^{(\ell)}\, u)|||^2 \,.$$

Comme dans la première étape, puisque $h_1^{\ell+1} \in S_{(\ell+1)}$, on peut appliquer le lemme VI.1.5 pour déplacer le terme $c|||h_1^{\ell+1} u|||^2$ dans le deuxième membre et le faire disparaître de l'estimation (6.29).

En utilisant le lemme VI.1.6, on fait aussi disparaître le terme $c|||u|||^2_{\ell-1}$ de l'estimation (6.29). En effet :

$$c|||Q_{\ell+1}\, u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\ell-\frac{\ell}{r_1}} \geq k\, \varepsilon|||u|||^2_{\ell-1} \quad .$$

D'où

$$c|||Q_{\ell+1}\ u|||^2+c|||Q_{\ell+1}u|||^2 \gtrsim c|||Q_{\ell+1}u|||^2+c|||u|||^2_{\ell-1}$$

$$\gtrsim k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||w_\ell(\partial_1^{(\ell)}u)|||^2$$

et on a :

$$c|||Q_{\ell+1}\ u|||^2 \gtrsim k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||w_\ell(\partial_1^{(\ell)}\ u)|||^2 \ . \tag{6.30}$$

En combinant (6.28) et (6.30) et en appliquant le lemme VI.1.4, on arrive à l'estimation :

$$c|||Q_{\ell+1}\ u|||^2 \gtrsim k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||a_1 w_\ell(\partial_1^{(\ell)}u)+a_2 w_\ell(\partial_1^{(\ell+1)}\ u)|||^2$$

pour a_1 et $a_2 \in (L^{o,r_1}_{x'})_{m\times m}$ proprement supportés. Puisque $w_\ell \in W'_\ell$ est scalaire d'ordre ℓ ou d'ordre $\ell-1$ avec $w_\ell = w'_\ell\ I_m + w''_\ell$ et w''_ℓ matriciel d'ordre $\ell-2$, alors l'opérateur $[a_i,w_\ell]\ \partial_1^{(j)}$ pour $i = 1,2$ et $j = \ell,\ell+1$ est d'ordre $\ell-2+0+1 = \ell-1$.

Alors par une autre application du lemme VI.1.6, on a

$$c|||Q_{\ell+1}\ u|||^2 \gtrsim k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||w_\ell[a_1\partial_1^{(\ell)}\ u + a_2\partial_1^{(\ell+1)}\ u]|||^2 \ .$$

En appliquant le lemme VI.1.1. (b) une nouvelle fois on a :

$$c|||Q_{\ell+1}\ u|||^2 \gtrsim k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||w_\ell(b_1\partial_1 u + b_{1,\ell}u + M_{1,\ell}u)|||^2$$

$$\gtrsim k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||w_\ell[b_1\partial_1+b_{1,\ell}]u|||^2 - k \sum_{w_\ell\in W'_\ell} |||w_\ell M_{1,\ell}u|||^2$$

pour tout $b_1 \in (L^{o,r_1}_{x'})_{m\times m}$ et $b_{1,\ell} \in (L^{1-1/r_1,r_1}_{x'})_{m\times m}$ proprement supportés et pour un certain $M_{1,\ell} \in (L^{-\infty}_{x'})_{m\times m}$.

Il est facile de voir que l'ensemble $W'_{\ell+1}$ est constitué par les termes $w_\ell(b_1\partial_1 + b_{1,\ell})$ avec un choix approprié de b_1 et $b_{1,\ell}$ et pour $w_\ell \in W'_\ell$. D'où :

(6.31) $$c|||Q_{\ell+1}\, u|||^2 \geq k \sum_{w_{\ell+1}\in W'_{\ell+1}} |||w_{\ell+1}\, u|||^2 - - k \sum_{w_\ell \in W'_\ell} |||w_\ell\, M_{1,\ell}\, u|||^2 .$$

Puisque $|||w_\ell\, M_{1,\ell}\, u|||^2 \leq \varepsilon|||u|||^2_{\ell-\frac{\ell}{r_1}}$ pour $\varepsilon > 0$ et puisque

$$c|||Q_{\ell+1}\, u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\ell-\frac{\ell}{r_1}}$$

d'après le lemme VI.1.6, on peut faire disparaître le deuxième terme du deuxième membre de (6.31) et on obtient :

(6.32) $$c|||Q_{\ell+1}\, u|||^2 \geq k \sum_{w_{\ell+1}\in W'_{\ell+1}} |||w_{\ell+1}\, u|||^2$$

Troisième étape.

En posant $\ell = r_1$ dans (6.32), on voit que (6.23) est vérifiée pour $\alpha = m_1 = r_1$.

On suppose que (6.23) est vérifiée pour $\alpha = m_i+\ell$ où $i \geq 1$ et $\ell \geq 0$ et nous allons montrer que (6.23) est vérifiée pour $\alpha+1$.

La preuve s'établit de manière analogue à la preuve de (6.24). Puisque $Q_{\alpha+1} = Q_\alpha \partial_{i+1}^{\ell+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence :

(6.33) $$c|||Q_{\alpha+1}\, u|||^2 \geq k \sum_{w_\alpha \in W'_\alpha} |||w_\alpha(\partial_{i+1}^{(\ell+1)}\, u)|||^2 .$$

Comme auparavant, d'après le lemme VI.1.2.

$$(6.34) \qquad \partial_1^{(1)} \ldots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell+1)} \partial_i^{(r_i)} = Q_{\alpha+1} + h_i^{r_i} + N_i^{r_i}$$

où $h_i^{r_i} \in S_{(\alpha+1)}$ et $N_i^{r_i} \in (L_{x'}^{\alpha-1})_{m\times m}$. Considérons l'**opérateur** $\partial_1^{(1)} \ldots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(\ell)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell+1)}$. Il diffère de Q_α par la contenance dans son produit d'un terme en plus $\partial_{i+1}^{(\ell+1)}$ et d'un terme en moins $\partial_i^{(r_i)}$. Si nous examinons l'ensemble $\tilde{W}'_\alpha$ associé à cet opérateur ($\tilde{W}'_\alpha$ est construit de la même manière que W'_α) et si on le compare avec l'ensemble W'_α associé à Q_α, on peut montrer que

$$c \sum_{\tilde{w}_\alpha \in \tilde{W}'_\alpha} |||\tilde{w}_\alpha u|||^2 \geq k \sum_{w_\alpha \in W'_\alpha} |||w_\alpha u|||^2$$

ceci parce que le terme courant de $\tilde{W}'_\alpha$ comparé au terme courant de W'_α contient un terme de plus $(a D_{x_o} + b)$ et un terme de moins $(c\partial_i + d)$ où a et $c \in (L_{x'}^{o,r_{i,i+1}})_{m\times m}$, $b \in (L_{x'}^{1,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ et $d \in (L_{x'}^{1-\frac{1}{r_i},r_i})_{m\times m}$.

Ainsi, on peut montrer que :

$$c|||\partial_1^{(1)} \ldots \partial_i^{(r_i-1)} \partial_{i+1}^{(1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell+1)} u|||^2 \geq k \sum_{w_\alpha \in W'_\alpha} |||w_\alpha u|||^2 .$$

Comme dans la deuxième étape, on montre ainsi en utilisant (6.34) que :

$$(6.35) \qquad c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||h_i^{r_i} u|||^2 + c|||Q_{\alpha+1} u|||^2$$

$$\geq k \sum_{w_\alpha \in W'_\alpha} |||w_\alpha (\partial_i^{(r_i)} u)|||^2 .$$

Comme dans l'étape 2, on peut faire disparaître les termes $c|||u|||^2_{\alpha-1} + c|||h_i^{r_i} u|||^2$ de l'estimation (6.35). En combinant la nouvelle estimation avec (6.33), on obtient, après une nouvelle application du lemme VI.1.4. :

$$c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k \sum_{w_\alpha \in W'_\alpha} |||w_\alpha [a\partial_i^{(r_i)} + b\partial_{i+1}^{(\ell+1)}]u|||^2$$

pour tout a et $b \in (L_{x'}^{o,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ proprement supportés. Ce qui conduit après une application du lemme VI.1.1 (c) à :

$$c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k \sum_{w_\alpha \in W'_\alpha} |||w_\alpha [c\ D_{x_o} + d + M]u|||^2$$

pour tout opérateur $c \in (L_{x'}^{o,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ et $d \in (L_{x'}^{1,r_{i,i+1}})_{m\times m}$ proprement supportés et pour un certain $M \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$.

Alors un argument analogue à celui utilisé dans l'étape 2 implique que :

$$c|||Q_{\alpha+1}\ u|||^2 \geq k \sum_{w_{\alpha+1} \in W'_{\alpha+1}} |||w_{\alpha+1}\ u|||^2$$

Donc (6.23) est vérifiée pour tout α.

<u>*Lemme VI.1.8.*</u> ([18]).

Soit V le module défini au chapitre V. Il existe une constante c indépendante de u telle que l'on ait l'estimation suivante :

$$c|||\tilde{\pi}\ u|||^2 \geq k \sum_{v \in V'} |||v(u)|||^2 \qquad \text{pour} \quad u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$$

<u>Démonstration</u> :

Puisque $\tilde{\pi} = Q_\tau$, le lemme VI.1.7 implique que

$$c|||\tilde{\pi}\ u|||^2 \geq k \sum_{w_\tau \in W'_\tau} |||w_\tau\ u|||^2$$

Après une comparaison des modules W_τ et V, il est facile de voir que $\sum_{w_\tau \in W'_\tau} |||w_\tau\ u|||^2 \geq \sum_{v \in V'} |||v(u)|||^2$ car $V' \subset W'_\tau$. D'où le lemme.

Corollaire VI.1.2. ([18],[7]).

Soit T l'opérateur défini par la proposition V.1.1. Il existe une constante c indépendante de u telle que

$$c|||\tilde{\pi}\ u|||^2 \geq k|||T\ u|||^2 \qquad \text{pour tout } u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m .$$

§ 2 - *Estimation de* $|||\tilde{b}\ u|||$ *dans le cas* (b) *et fin de la démonstration des théorèmes.*

Proposition VI.2.1. ([18],[7]).

Soit ψ_2 définie au chapitre III.

Soit $\tilde{b}(x\ ;\ D_x) = B_\tau(x\ ;\ D_x) + B_{\tau-1}(x\ ;\ D_x)$. Supposons que l'hyperplan $x_o = 0$ soit non caractéristique à l'origine relativement à $\tilde{b}$.

Alors il existe une constante c indépendante de u telle que pour $\tilde{r},T,k^{-1}$ suffisamment petits, on ait :

$$k|||\psi_2\ u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leq c|||\tilde{b}\ \psi_2\ u|||^2 \qquad \text{pour } u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$$

où $\Omega = \{x = (x_o,x')$ tel que $|x'| \leq \tilde{r}$ et $0 \leq x_o \leq T\}$.

Démonstration :

Soit $u_2 = \psi_2 u$. D'après la proposition V.1.1, on a :

$$(7.1) \qquad \tilde{b}\ u_2 = \tilde{\pi}\ u_2 + T\ u_2 + R\ u_2 \quad \text{où } T \in V \text{ et } R \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m} .$$

Puisque $Q_\tau = \tilde{\pi}$, si on pose $\alpha = \tau$ dans (6.23), on a l'estimation :

$$c|||\tilde{\pi}\ u_2|||^2 \geq k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} .$$

D'après le corollaire VI.1.2

$$c|||\tilde{\pi}\ u_2|||^2 \geq k|||T\ u_2|||^2$$

D'où :

$$c|||\tilde{\pi}\ u_2|||^2 \geq k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k|||T\ u_2|||^2 .$$

(7.1) implique que (puisque $\tilde{\pi} = \tilde{b} - T - R$)

$$(7.2)\qquad c|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + c|||T\ u_2|||^2 + c|||\tilde{b}\ u_2|||^2$$

$$\geq k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k|||T\ u_2|||^2 .$$

Pour $k > c$, on peut absorber les termes $c|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + c|||T\ u_2|||^2$

du premier membre de (7.2) dans le deuxième membre et on obtient :

$$c|||\tilde{b}\ u_2|||^2 \geq k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

d'où la proposition.

Nous sommes maintenant prêts à compléter la preuve du théorème II.3.1 en montrant comment l'estimation de $|||\tilde{b}\ u|||$ dans les deux cas (a) et (b) conduit à l'estimation de $|||\tilde{b}\ u|||$ dans le cas général, puis à l'estimation de $|||b\ u|||$.

<u>Démonstration du théorème II.3.1.</u>

$$||\tilde{b}\ u||^2 = ||\psi_1\tilde{b}u + \psi_2\ \tilde{b}u||^2 = ||\psi_1\ \tilde{b}u||^2 + ||\psi_2\ \tilde{b}u||^2 +$$
$$2\mathrm{Re}(\psi_1\ \tilde{b}u,\ \psi_2\ \tilde{b}u) \geq ||\psi_1\ \tilde{b}u||^2 + ||\psi_2\ \tilde{b}u||^2 - 2||\tilde{b}\ u||^2.$$

D'où

$$|||\tilde{b}\, u|||^2 \geq \frac{1}{3}[|||\psi_1\, \tilde{b}u|||^2 + |||\psi_2\, \tilde{b}u|||^2]$$

Estimons maintenant $|||\psi_i\, \tilde{b}u|||^2$, $i = 1,2$.

$$|||\psi_i\, \tilde{b}\, u|||^2 = |||\tilde{b}\, \psi_i\, u - [\tilde{b},\psi_i]u|||^2 \geq |||\tilde{b}\, \psi_i\, u|||^2 -$$

$$- |||[\tilde{b},\psi_i]u|||^2 .$$

D'un autre côté puisque $u = \psi_1 u + \psi_2 u = u_1+u_2$

$$|||[\tilde{b},\psi_i]u|||^2 \leq |||[\tilde{b},\psi_i]u_1|||^2 + |||[\tilde{b},\psi_i]u_2|||^2$$

Donc

$$|||\tilde{b}\, u|||^2 \geq \frac{1}{3}\, |||\psi_1\, \tilde{b}\, u|||^2 + \frac{1}{3}|||\psi_2\, \tilde{b}\, u|||^2$$

D'où :

$$\text{(7.3)} \qquad |||\tilde{b}\, u|||^2 \geq c|||\tilde{b}\, u_1|||^2 + c|||\tilde{b}\, u_2|||^2$$

$$- c|||[\tilde{b},\psi_1]u_1|||^2 - c|||[\tilde{b},\psi_1]u_2|||^2$$

$$- c|||[\tilde{b},\psi_2]u_1|||^2 - c|||[\tilde{b},\psi_2]u_2|||^2 \quad .$$

Estimons maintenant les derniers termes de (7.3). Puisque $\tilde{b} \in (L_x^\tau)_{m\times m}$ et $\psi_i \in L_x^o$, et puisque le coefficient de $D_{x_o}^\tau$ dans $\tilde{b}$ est I_m, $[\tilde{b},\psi_i] \in (L_x^{\tau-1})_{m\times m}$.D'où :

$$|||[\tilde{b},\psi_1]u_1|||^2 + |||[\tilde{b},\psi_2]u_1|||^2 \leq c|||u_1|||^2_{\tau-1} .$$

D'après la proposition V.1.1.

$$[\tilde{b},\psi_i]u_2 = [(\tilde{\pi}+T+R),\psi_i]u_2$$

où $T \in (L_x^{\tau-1-\frac{1}{q}})_{m\times m}$ et $R \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$. En examinant les opérateurs T et R, on voit qu'ils sont tous deux d'ordre $\leqslant \tau-2$ en x_o. D'où :

$$[T,\psi_i] \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m} \quad \text{et} \quad [R,\psi_i] \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$$

En outre (7.3) implique que :

$$(7.4) \qquad |||\tilde{b}\, u|||^2 \geq c|||\tilde{b}\, u_1|||^2 + c|||\tilde{b}\, u_2|||^2$$
$$- c|||u_1|||^2_{\tau-1} - c|||u_2|||^2_{\tau-2}$$
$$- c|||[\tilde{\pi},\psi_1]u_2|||^2 - c|||[\tilde{\pi},\psi_2]u_2|||^2$$

D'après le lemme VI.1.2, $[\tilde{\pi},\psi_i] \in S_{(\tau)}$ modulo des termes appartenant à $(L_x^{\tau-2})_{m\times m}$; (7.4) implique par conséquent que :

$$(7.5) \qquad |||\tilde{b}\, u|||^2 \geq c|||\tilde{b}\, u_1|||^2 + c|||\tilde{b}\, u_2|||^2$$
$$- c|||u_1|||^2_{\tau-1} - c|||u_2|||^2_{\tau-2}$$
$$- c \sum_{s_\tau \in S'_{(\tau)}} |||s_\tau\, u_2|||^2$$

En appliquant les propositions IV.1.1 et VI.2.1 et le lemme VI.1.5 à (7.5), on obtient :

$$c|||\tilde{b}\ u|||^2 \geq k\ |||u_1|||^2_{\tau-1} + k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

$$+ k \sum_{s_\tau \in S'_{(\tau)}} |||s_\tau\ u_2|||^2$$

$$- c|||u_1|||^2_{\tau-1} - c|||u_2|||^2_{\tau-2}$$

$$- c \sum_{s_\tau \in S'_{(\tau)}} |||s_\tau\ u_2|||^2$$

En appliquant le lemme IV.1.1 et en choisissant $k > c$, on obtient :

$$c|||\tilde{b}\ u|||^2 \geq k|||u_1|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

$$\geq k|||u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

Finalement, en appliquant le lemme IV.1.2, on obtient l'estimation voulue.

$$c|||b\ u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

et plus généralement :

$$k|||u|||^2_{\ell+\tau-2+\frac{1}{q}} \leq c|||b\ u|||^2_\ell \quad (\forall \ell).$$

Or $\quad |||bu|||^2_\ell \leq c'|||hu|||^2_{\ell+\tau-t}$.

D'où : $k|||u|||^2_{\ell+\tau-2+1/q} \leq c|||hu|||^2_{\ell+\tau-t}$ et pour $\ell = \tau-t$ on a

$$k|||u|||^2_{t-2+1/q} \leq c|||hu|||^2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. *DIEUDONNE.- Elements d'Analyse* - Tome 1, Gauthiers Villars.

[2] J. *DIEUDONNE.- Calcul infinitésimal* - Collection méthodes, Hermann.

[3] *DUNFORD-SCHWARTZ.- Linear Operators - Part 1.* Interscience Publishers.

[4] *P.M. GOORJIAN.- The uniqueness of the Cauchy problem for partial differential equations which may have multiple characteristics* - Transactions of the American math. Society, Vol. 146, Dec.69, pages 493-509.

[5] *D. GOURDIN.- Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicités constante, bien décomposables et le problème de Cauchy associé* - J. Maths. Kyoto Univ. (JMK YAZ) 17-3 (1977) pages 539-566.

[6] *D. GOURDIN et H. KADRI.- Unicité pour une classe de problèmes de Cauchy* C^∞ *matriciels* - Proposition de note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Paris.

[7] *D. GOURDIN et H. KADRI.- Un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy non caractéristique* C^∞ *matriciel* - A paraître.

[8] *L. HÖRMANDER.- Non uniqueness for the Cauchy problem* - Lecture Notes in Math, N°459, p. 36.

[9] *J. LERAY.-* Cours de Princeton - 1954.

[10] *W. MATSUMOTO.- Uniqueness of the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristics roots* - J. Math. Kyoto Univ, 15, n°3, 1975, pages 479-525.

[11] *S. MIZOHATA et Y. OHYA.- Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples II.* - Japan Journal of Math 40 (1971) page 63-104.

[12] *L. NIRENBERG.- Linear partial differential equations* - Conference Board of the A.M.S. Proc. Reg. Conf at Texas Tech. May 1972.

[13] *L. NIRENBERG and J.J. KOHN.- An algebra of pseudo differential operators* - Communications on pure and applied Mathematics, Vol.XVIII, 1965, pages 269-305.

[14] *A. PLIS.- A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere* - Comm. pure Appl. Math. 14 (1961), pp. 599-617.

[15] G.B. ROBERTS and P.R. WENSTON.- *Uniqueness in the Cauchy problem for weakly hyperbolic operators not satisfying Levi conditions* - Journal of Differential equations 40, 7-36 (1981).

[16] J. VAILLANT.- J. Maths Pures et Appl. Vol. 47, 1968, pages 1-40.

[17] K. WATANABE - C. ZUILY.- *On the uniqueness of the Cauchy problem for elliptic differential operators with smooth characteristics of variable multiplicity* - Comm. partial Differential Equations, 2, n°8 (1977) pp. 831-854.

[18] M. ZEMAN.- *On the uniqueness of the Cauchy problem for partial differential equations with multiple characteristics* - Annali della scuola Normale Superiore di Pisa (18) pages 257-285 (1980).

[19] C. ZUILY.- *Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels* - Comun. in partial Differential equations 6(2) pages 153-196 (1981).

[20] L. HÖRMANDER.- *Several complex Analysis.*

[21] J. LERAY.- *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, problème de Cauchy III* - Bull. Soc. Math. France 87, 1959, pages 81-180.

[22] H. POINCARÉ.- *Sur les résidus des intégrales doubles* - Acta Math. 9. 1887, pages 321-380.

[23] P. LANCASTER.- *Theory of matrices* - Academic press New York and London.

[24] HAUSCHWERDTFEGER.- *Les fonctions de Matrices* - Exposés de Géométrie.

[25] F. TREVES.- *Linear partial differential equations with constant coefficients*- Gordon and Breach - New York 1966.

[26] S. ALINHAC.- *Non unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs de type principal* - Séminaire Goulaouic - Schwartz 1980-1981 exposé n°XVI.

[27] S. ALINHAC. and C. ZUILY.- *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles* - Comm. in partial differential equations 6(7), pp. 799-828 (1981).

[28] A.P. CALDERON.- *Uniqueness in the Cauchy problem for differential equations* - Amer. J. Math. 80 (1958) pp. 16-36.

[29] A.P. CALDERON.- *Existence and uniqueness theorems for systems of partial differential equations* - in Fluid Dynamics and applied Mathematics, Gordon and Breach New York 1962 pp. 147-195.

[30] S. MIZOHATA.- *Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre* - Proc. Japan. Acad. 34 (1958) pp. 687-692.

[31] R.N. PEDERSEN.- *Uniqueness in Cauchy's problem for elliptic equations with double characteristics* - Ark. Mat. 6(1967) pp. 535-548.

[32] M. SUSSMAN.- *On uniqueness in Cauchy's problem for elliptic operators with characteristics of multiplicity greater than two* - Tohoku Math J. 29(1977) pp. 165-188.

[33] K. WATANABE.- *On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptic equations with triple characteristics* - Tohoku Math. J. 23(1971) pp. 473-490.

[34] M. ZEMAN.- *Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for linear partial differential equations with characteristics of constant multiplicity* - J. Differential Equations 24 (1977) pages 178-196.

[35] M. ZEMAN.- *Uniqueness of solutions of the problem for linear partial differential equations with characteristics of variable multiplicity* - J. Differential Equations. 27 (1978) pages 1-18.

[36] F.R. GANTMACHER.- *Théorie des matrices* - Tome 1, Dunod 1966.

[37] TOUADERA.- Thèse de 3ème cycle (en préparation).

[38] F. TREVES.- *Introduction to Fourier integral operators* - Tome 1 - Plenum press - New York and London 1980.

[39] H. KUMONO-GO.- *Remarks on pseudo differential operators* - J. Math. Soc. Japan 21 (1969) 413-439.

[40] L. HÖRMANDER.- *Pseudo-differential operators* - Communications on pure and applied Mathematics. Vol. XVIII, pages 501-517 (1965).

[41] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU.- *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires* - Gauthiers Villars 1981.

[42] L. HÖRMANDER.- *Linear partial differential operators* - Springer-Verlag, Berlin Göttingen-Heidelberg, 1964.

[43] R. BERZIN, J. VAILLANT.- *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 58, 1979, pages 165-216.

[44] J.C. DE PARIS.- *Problème de Cauchy Analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable* - J. Math. Pures et Appl. 51 1972 page 465-488.

[45] H. CARTAN.- *Théorie élémentaire des fonctions analytiques* - Hermann Paris 1961.

[46] D. GOURDIN.- *Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples* - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974.

[47] D. GOURDIN.- Thèse d'Etat - 1978.

[48] M. MECHAB.- Thèse de 3ème cycle 1983 - Lille I.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE LILLE

R E S U M E

L'unicité pour le problème de Cauchy C^{∞} non caractéristique a fait l'objet de nombreux travaux jusqu'à présent ; mais lorsque la multiplicité des caractéristiques est supérieure ou égale à trois ou lorsque l'opérateur différentiel est matriciel il y a peu de résultats connus.

Nous étudions ici une généralisation d'un travail de M. Zeman à des opérateurs aux dérivées partielles matriciels à caractéristiques de multiplicité constante du type $(\nu,0,\ldots,0)$, en supposant que le polynôme sous caractéristique du système matriciel ne s'annule pas sur l'ensemble caractéristique.

Cette extension au cas matriciel nécessite, en particulier, l'utilisation des fonctions de matrices d'opérateurs pseudo-différentiels en vue d'effectuer des réductions non évidentes de l'opérateur différentiel matriciel utilisé : diagonalisation de la partie principale et mise en facteur dans une algèbre de composition d'opérateurs pseudodifférentiels matriciels modulo des termes d'ordre inférieur fractionnaire.

MOTS CLÉS : *Problème de Cauchy*
Unicité
Non caractéristique
Système aux dérivées partielles
Caractéristique de multiplicité constante
Polynôme sous-caractéristique