N° d'ordre : 1257

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3e CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PAR

DEHAY Dominique

QUELQUES LOIS DES GRANDS NOMBRES POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES

MEMBRES DU JURY :
J. GEFFROY, Président
J. DELPORTE, R. MOCHÉ, Rapporteurs
D. BOSQ, P. JACOB, Examinateurs

SOUTENUE LE 26 MARS 1985

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur J. GEFFROY pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur J. DELPORTE a prêter une attention particulière à mes recherches et à mon manuscrit ; qu'il trouve ici l'expression de ma très sincère gratitude.

Monsieur R. MOCHÉ m'a proposé l'idée originale de cette étude, ma reconnaissance envers lui est profonde pour l'aide efficace et les conseils qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer.

Je remercie également très vivement Monsieur le Professeur D. BOSQ, Directeur du Laboratoire de Statistique et Probabilités, qui m'a accordé la faveur d'examiner cette thèse.

En voulant bien être membre du jury, Monsieur le Professeur P. JACOB témoigne de l'intérêt qu'il prend à ce travail ; je tiens à lui exprimer mes vifs remerciements.

Monsieur J. ROUSSEAU m'a manifesté une attention bienveillante en me communiquant quelques remarques sur ses travaux ; qu'il trouve ici l'expression sincère de mes remerciements.

Madame A. LENGAIGNE a dactylographié le texte avec soin et diligence. J'ai été sensible à la patience dont elle a fait preuve à mon égard lors de la correction des épreuves et la très grande qualité de son travail ; qu'il me soit permis de l'en remercier chaleureusement.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail.

P L A N.

Pages

Pages

INTRODUCTION.

Le sujet de cette thèse est l'étude de la loi forte des grands nombres pour les processus harmonisables (mesurables) : étant donné un tel processus : $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ *, à quelles conditions a-t-on :*

pour presque tout ω , $\quad \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} X_s(\omega) \quad ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$?

Plus précisément, en utilisant de manière répétée le fait que tout processus harmonisable est dominé par un processus stationnaire, on simplifie ou même on rend faisables certains calculs, ce qui permet d'améliorer des lois fortes des grands nombres obtenus par divers auteurs (notamment V.F. GAPOSHKIN et J. ROUSSEAU pour ne citer que les plus récentes) dans le cas particulier des processus stationnaires ou des processus harmonisables à mesure spectrale.

Il importait donc d'abord de montrer que la définition utilisée pour les processus harmonisables - dans le cadre de la théorie ensembliste des mesures - est la plus générale : c'est l'objet du chapitre I où on exhibe notamment des processus harmonisables sans mesure spectrale.

Ensuite, au chapitre II, nous introduisons la notion de domination des processus et, en ce qui concerne les processus harmonisables, la notion parallèle de domination des bimesures spectrales, ce qui permet d'introduire le résultat essentiel, déjà cité, de A.G. MIAMEE et H. SALEHI relatif à la domination de tout processus harmonisable par un processus stationnaire. Le travail bibliographique nécessité par cette étude a montré que d'autres définitions de l'harmonisabilité sont fréquemment utilisées (point de vue fonctionnel ; processus V*-bornés). Il nous a donc paru nécessaire aussi, dans ce chapitre II, de sortir - provisoirement - du cadre ensembliste pour procéder à une comparaison générale des différentes définitions possibles.*

On trouve dans le chapitre III le résultat central de toute l'étude : la loi forte des grands nombres est vérifiée si et seulement s'il existe un entier $p > 1$ *tel que* $\mu(]-p^{-n}\ ,\ p^{-n}[) \xrightarrow[n\to+\infty]{P-p.s.} 0$, *où* μ *est la mesure stochastique spectrale du processus harmonisable quelconque considéré (V.F. GAPOSHKIN avait établi ce résultat pour les processus stationnaires continus).*

Au chapitre IV sont données 3 conditions suffisantes portant sur la bimesure spectrale pour qu'un processus harmonisable vérifie la loi forte des grands nombres ainsi que des exemples qui montrent que ces conditions ne sont pas nécessaires, et que le problème ne peut se traduire de manière nécessaire et suffisante par les bimesures (2 processus stationnaires continus sont construits, ayant la même mesure spectrale, l'un vérifiant la loi forte, l'autre ne la vérifiant pas).

Enfin, au chapitre V, les résultats précédents sont affinés : on trouve des conditions suffisantes pour que l'on ait, pour presque tout ω *:*

$$g(t)\ .\ \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} X_s(\omega)\ ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad ,$$

où g *est une fonction pouvant tendre vers* $+\infty$ *avec* t *; et on découvre au passage une loi du log itéré pour le processus* $\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} X_s\ ds$.

CHAPITRE I

MESURES SPECTRALES

DES PROCESSUS HARMONISABLES.

I.1. - INTRODUCTION.-

Dans la littérature appliquée, on suppose presque toujours que les processus harmonisables ont une mesure spectrale, (cf. A. BLANC-LAPIERRE et B. PICINBONO [5]). En fait ce concept est plus général, et l'objet de ce chapitre est, précisément, de montrer l'existence de processus harmonisables dont la bimesure spectrale n'est pas prolongeable en une mesure spectrale.

Après avoir donné les différentes définitions et rappels nécessaires sur les mesures stochastiques et les processus harmonisables, nous reconstruirons du point de vue ensembliste - point de vue adopté dans l'ensemble de ce travail - l'exemple de processus harmonisable sans mesure spectrale donné par H. NIEMI [25] du point de vue fonctionnel, et nous donnerons une condition nécessaire et suffisante de prolongeabilité d'une bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

I.2. - MESURES HILBERTIENNES ET BIMESURES SPECTRALES.-

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et H un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert quelconque.

Nous rappelons qu'un anneau $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble quelconque Ω, est une famille non vide de parties de Ω, stable pour l'union et pour la différence propre, ou non.

I.2.1. - *Définition*.- <u>Une mesure hilbertienne</u> μ <u>définie sur un anneau</u> $\mathcal{A}$ <u>est une application</u> $\mu : \mathcal{A} \to H$, <u>additive et vérifiant la propriété de continuité monotone suivante</u> :

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \quad \underline{\text{et}} \quad A_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} \emptyset \Longrightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(<u>pour la topologie forte dans</u> H)

<u>qui est équivalente à la</u> σ-<u>additivité</u>.

I.2.2. - *Définition*.- <u>Nous appelons mesure stochastique, toute mesure hilbertienne à valeurs dans</u> $L^2_{\mathbb{K}}(S,F,P)$, <u>où</u> (S,F,P) <u>désigne un espace probabilisé quelconque</u>.

L'intégration par rapport à une mesure hilbertienne (et même banachique) est traitée dans le livre de N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ [10] (voir aussi [23]).

Yu. A. ROZANOV [26] et R. MOCHÉ [23] ont défini la bimesure spectrale de la manière suivante :

I.2.3. - *Définition*.- <u>Nous appelons bimesure spectrale sur un anneau</u> $\mathcal{A}$, <u>toute application</u> $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie :

$$(A,B) \leadsto M(A,B)$$

i) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $M(A,B) = \overline{M(B,A)}$,

ii) $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{A}$,

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow M(A_1 + A_2, B) = M(A_1,B) + M(A_2,B) ,$$

iii) M <u>est de type positif</u> :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \forall A_1,\dots,A_n \in \mathcal{A} ,$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \cdot \overline{a_k} \cdot M(A_j,A_k) \geq 0 ,$$

iv) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ et $A_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} \emptyset \Longrightarrow M(A_n, A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par abus de notation, nous écrirons $M(A \times B)$ au lieu de $M(A,B)$.

Nous obtenons :

1.2.4. - *Proposition*.- Pour toute mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{A} \to H$, définie sur un anneau $\mathcal{A}$, la fonction $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(A,B) \rightsquigarrow (\mu(A),\mu(B))_H$ est une bimesure spectrale.

La forme générale des bimesures spectrales sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ est donnée par R. MOCHÉ [23, th. 6 . p. IV. 35] :

1.2.5. - *Théorème*.- Soient un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et une application $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$. Pour que M soit une bimesure spectrale sur $(\Omega,\mathcal{A})$, il faut et il suffit qu'il existe un espace probabilisé $(S,\mathcal{F},P)$ et une mesure stochastique $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$ telle que :

$$\forall A , B \in \mathcal{A} , \qquad M(A,B) = E(\mu(A) . \overline{\mu(B)}) .$$

Toute bimesure spectrale vérifie la propriété suivante :

1.2.6. - *Lemme*.- Soit une bimesure spectrale M sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$. Quelles que soient les suites monotones $\mathcal{A}$-mesurables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers A et B , la suite $(M(A_n \times B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M(A \times B)$.

Preuve : Une mesure hilbertienne vérifie la propriété de continuité monotone, donc, en notant μ une mesure hilbertienne de bimesure spectrale M, nous obtenons :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(B) \quad ,$$

d'où $$\lim_{n\to+\infty} (\mu(A_n), \mu(B_n))_H = (\mu(A), \mu(B))_H \quad ,$$

soit $$\lim_{n\to+\infty} M(A_n \times B_n) = M(A \times B) \quad . \blacksquare$$

Dans ce cas, il en résulte que, pour tout B de la tribu $\mathcal{A}$, les applications $A \longmapsto M(A \times B)$ et $A \longmapsto M(B \times A)$ sont des mesures scalaires.

I.2.7.- Définition.- Nous dirons qu'une mesure hilbertienne sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ est à mesure spectrale, lorsque sa bimesure spectrale est prolongeable en une mesure scalaire sur $(\Omega \times \Omega , \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$, que nous appellerons mesure spectrale.

I.2.8.- Définition.- Nous dirons qu'une mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$, définie sur un anneau $\mathcal{A}$, est orthogonale lorsque :

$$\forall A , B \in \mathcal{A} , \qquad A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (\mu(A), \mu(B))_H = 0 .$$

P. MASANI [20] étudia ces mesures hilbertiennes.

D'après [20] et [23 , chap. V], lorsque $(\Omega,\mathcal{A})$ est un espace mesurable, une mesure hilbertienne μ est orthogonale si, et seulement si, sa bimesure spectrale M est prolongeable en une mesure spectrale concentrée sur la première bissectrice. Dans ce cas, M définit une mesure positive finie m sur $(\Omega,\mathcal{A})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A} , \qquad m(A) = M(A \times A).$$

Réciproquement, lorsque m est une mesure positive finie sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, il existe une unique mesure positive finie sur $(\Omega \times \Omega , \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$, que nous noterons $R(m)$, et qui vérifie :

$$\forall A\ ,\ B \in \mathcal{A}\ , \qquad R(m)\ (A \times B) = m(A \cap B)\ ;$$

et dans ce cas $R(m)$ est une mesure spectrale concentrée sur la première bissectrice [23 , p. V.17].

I.3. - PROCESSUS HARMONISABLES.-

Nous allons donner quelques rappels sur la théorie ensembliste des processus harmonisables suivant Yu. A. ROZANOV [26] et [23].

Considérons un espace probabilisé $(S,\mathcal{F},P)$ et notons H l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}\ (S,\mathcal{F},P)$.

La théorie de l'intégration par rapport à une mesure hilbertienne [10] et [23] permet de définir les processus harmonisables :

I.3.1. - *Proposition*.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$ une mesure stochastique. L'application $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$, $t \rightsquigarrow \int e^{itx}\ \mu(dx)$ définit un processus du second ordre que nous appellerons processus harmonisable.

Un processus harmonisable X est continu (en m.q.) [23,p. V.3.] et admet une unique mesure stochastique associée [23, p. V.11] que nous appellerons sa mesure stochastique spectrale .

Le théorème suivant caractérise les processus harmonisables par leurs noyaux [26 ; 9.2] et [23, p. V.13].

I.3.2. - *Théorème*.- Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est harmonisable si, et seulement si, son noyau K est harmonisable, c'est-à-dire s'il existe une bimesure spectrale M sur $(\mathbb{R}\ ,\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que :

$$\forall t,\ s \in \mathbb{R}\ , \qquad K(t,s) = (X_t,X_s)_H = \iint e^{i(tx-sy)}\ M(dx,dy)\ .$$

Dans ce cas la bimesure M est la bimesure spectrale associée à la mesure stochastique spectrale μ du processus harmonisable X ; M est unique.

Nous appellerons processus harmonisable à mesure spectrale, un processus harmonisable dont la bimesure spectrale est prolongeable.

Les processus faiblement stationnnaires et continus sont les processus harmonisables (à mesure spectrale) dont les mesures stochastiques spectrales sont orthogonales [23 , p. V. 18], c'est-à-dire que leurs mesures spectrales sont concentrées sur la première bissectrice.

I.4. - PROLONGEMENT D'UNE MESURE HILBERTIENNE.-

I.4.1. - Lemme d'unicité.- Soient μ_1 et $\mu_2 : \mathcal{A} \to H$ deux mesures hilbertiennes définies sur le même espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ coïncidant sur un Π-système $\mathcal{C}$ (stable par intersection finie) contenu dans $\mathcal{A}$, et contenant une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$.

Alors les mesures μ_1 et μ_2 coïncident sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Preuve : Cette démonstration est standard [10 , théorème III.5.9].
$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ est stable par différence propre et monotone croissante (c'est un λ-système), de plus $\mathcal{D}$ contient le Π-système $\mathcal{C}$, donc il contient la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. ■

1.4.2. - Lemme.- Etant données une algèbre $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω, et $m : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ une mesure scalaire, alors nous avons :

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{A}) , \qquad |m(B)| \leq \alpha ,$$

où $\alpha = \sup \{|m(A)| : A \in \mathcal{A} \}$.

Remarque : α est toujours un nombre fini, puisque toute mesure scalaire définie sur un espace mesurable est bornée [28, th. 6.4.].

Preuve : Les décompositions de Jordan [par ex. 28, § 6.6] des parties réelle μ et imaginaire ν de la mesure m, nous donnent :

$$m = \mu^+ - \mu^- + i(\nu^+ - \nu^-) .$$

Posons
$$n = \mu^+ + \mu^- + \nu^+ + \nu^- .$$

Le théorème [16 , sec. 13. th. D] appliqué à la mesure positive finie n nous permet d'écrire pour B de $\sigma(\mathcal{A})$ et pour $\varepsilon > 0$:

$$\exists A_\varepsilon \in \mathcal{A} , \quad n(B \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon ,$$

ainsi $\mu^+(B \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\mu^-(B \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\nu^+(B \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et $\nu^-(B \Delta A_\varepsilon) \leq \varepsilon$,

de plus nous avons : $|\mu^+(B) - \mu^+(A_\varepsilon)| \leq \mu^+(B \Delta A_\varepsilon)$,

et trois autres relations analogues avec μ^-, ν^+ et ν^- .

La fonction :
$$[0,\mu^+(\Omega)]\times[0;\mu^-(\Omega)]\times[0;\nu^+(\Omega)]\times[0;\nu^-(\Omega)] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z,t) \rightsquigarrow \sqrt{(x-y)^2+(z-t)^2}$$

étant continue sur un compact, est uniformément continue sur celui-ci.

Par conséquent, pour B de $\sigma(\mathcal{A})$ et $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta_\varepsilon > 0 \ , \ \exists A_{\eta_\varepsilon} \in \mathcal{A} \quad \text{tels que} \quad n(B \,\Delta\, A_{\eta_\varepsilon}) \leq \eta_\varepsilon \quad \text{et} \quad \big| |m(B)| - |m(A_{\eta_\varepsilon})| \big| \leq \varepsilon \ ,$$

d'où
$$|m(B)| \leq |m(A_{\eta_\varepsilon})| + \varepsilon \ ;$$

la relation précédente étant vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, nous obtenons :

$$|m(B)| \leq \sup \{|m(A)| \ : \ A \in \mathcal{A}\} \quad . \quad \blacksquare$$

Le théorème suivant généralise les résultats classiques sur le prolongement des mesures scalaires [par. ex. 10 , th. III.5.8.].

1.4.3. - *Théorème de prolongement*.- Toute mesure hilbertienne faiblement bornée définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω , $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$, se prolonge de manière unique en une mesure hilbertienne sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.

Remarques : Toute partie d'un espace de Hilbert est bornée si, et seulement si, elle est faiblement bornée [par ex. 29 , th. 2.6.].

Comme toute mesure hilbertienne définie sur un espace mesurable est bornée [23, p. IV. 2], la condition de majoration posée dans l'énoncé est nécessaire.

Preuve : Soit $\alpha = \sup \{||\mu(A)|| \ : \ A \in \mathcal{A}\}$, $(\alpha < +\infty)$.

Pour tout h de H , $\mu_h = (\mu, h)_H$ est une mesure scalaire sur $\mathcal{A}$, bornée par $\alpha||h||$, elle admet un unique prolongement sur $\sigma(\mathcal{A})$ que nous noterons μ'_h , et qui est borné par $\alpha||h||$.

Pour tous h_1 , h_2 de H , c_1 et c_2 de $\mathbb{K}$, nous avons :

$$\forall A \in \mathcal{A} \ , \qquad \mu_{c_1.h_1+c_2.h_2}(A) = \bar{c}_1.\mu_{h_1}(A) + \bar{c}_2.\mu_{h_2}(A) \quad ;$$

les mesures scalaires $\mu'_{c_1 \cdot h_1 + c_2 \cdot h_2}$ et $\bar{c}_1 \cdot \mu'_{h_1} + \bar{c}_2 \cdot \mu'_{h_2}$, définies sur $\sigma(\mathcal{A})$, coïncident sur l'algèbre $\mathcal{A}$, et par conséquent, elles sont égales (lemme d'unicité).

Ainsi, pour tout élément B de $\sigma(\mathcal{A})$, l'application $\overline{\mu'(B)} : H \longrightarrow \mathbb{K}$
$h \rightsquigarrow \mu'_h(B)$

est une forme linéaire, continue puisque $\forall h \in H$, $|\mu'_h(B)| \leqslant \alpha\|h\|$; donc, il existe un unique élément $\mu'(B)$ de H qui vérifie [par ex. 29 , th. 12.5] :

$$\forall h \in H , \qquad \mu'_h(B) = (\mu'(B), h)_H .$$

D'après le théorème de Pettis [10, th. IV.10.1] et [23 , p. IV.19], l'application $\mu' : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow H$ est une mesure hilbertienne.
$B \rightsquigarrow \mu'(B)$

De plus $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall h \in H$, $(\mu(A),h)_H = (\mu'(A),h)_H$, donc μ' prolonge μ.

L'unicité de ce prolongement résulte du lemme d'unicité précédent. ■

I.4.4. - <u>*Corollaire 1.*</u>- <u>Etant données</u> $\mathcal{A}$ <u>une algèbre de parties d'un ensemble</u> Ω, <u>une mesure hilbertienne bornée</u> $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$, <u>et son prolongement</u> μ' <u>à la tribu</u> $\sigma(\mathcal{A})$, <u>nous avons</u> :

$$H(\mu) = H(\mu') ,$$

<u>où</u> $H(\mu)$ (<u>respectivement</u> $H(\mu')$) <u>est le sous-espace de Hilbert de</u> H <u>engendré par</u> $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ (resp. $\{\mu'(A) : A \in \sigma(\mathcal{A})\}$).

<u>*Preuve*</u> : Le λ-système $\mathcal{D} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu'(A) \in H(\mu)\}$ contient l'algèbre $\mathcal{A}$, donc la tribu $\sigma(\mathcal{A})$, il en résulte que :

$$H(\mu') \subset H(\mu) \subset H(\mu') \quad . \blacksquare$$

I.4.5. - Remarque : Nous dirons qu'une <u>mesure stochastique</u>, $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$ définie sur un anneau $\mathcal{A}$, <u>est gaussienne</u>, lorsque le sous-espace de Hilbert $L^2(\mu)$ de $L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$ engendré par $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ est gaussien.

D'après le corollaire 1, le prolongement d'une mesure stochastique gaussienne définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ est une mesure stochastique gaussienne définie sur $\sigma(\mathcal{A})$.

Nous rappelons qu'une semi-algèbre $\mathcal{S}$ d'un ensemble Ω est un ensemble de parties de Ω vérifiant :

i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$,

ii) $S_1, S_2 \in \mathcal{S} \Longrightarrow S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$,

iii) $S \in \mathcal{S} \Longrightarrow S^c = S/\Omega$ est réunion finie de parties deux à deux disjointes de $\mathcal{S}$.

I.4.6. - Corollaire 2.- <u>Pour qu'une mesure hilbertienne,</u> $\mu : A \longrightarrow H$ <u>définie sur un espace mesurable</u> (Ω,A), <u>soit orthogonale, il suffit qu'il existe une semi-algèbre</u> $\mathcal{S}$ <u>engendrant la tribu</u> A <u>et vérifiant</u> :

$$\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}, \qquad S_1 \cap S_2 = 0 \Longrightarrow (\mu(S_1), \mu(S_2))_H = 0 .$$

Preuve :

1) Chaque élément de l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{S}$ est la réunion d'une famille finie d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{S}$; ainsi, des hypothèses, nous déduisons :

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow (\mu(A_1), \mu(A_2))_H = 0 .$$

2) Soit un élément A_o de $\mathcal{A}$, notons $\mathcal{A}_o$ la trace de $\mathcal{A}$ sur Ω/A_o, c'est-à-dire l'algèbre de parties de Ω/A_o définie par : $\mathcal{A}_o = \mathcal{A} \cap (\Omega/A_o)$, et A_o la trace de A sur Ω/A_o : $A_o = A \cap (\Omega/A_o) = \sigma(\mathcal{A}_o)$.

La mesure scalaire : $A_o \longrightarrow \mathbb{K}$, $A \rightsquigarrow (\mu(A), \mu(A_o))_H$ est nulle sur $\mathcal{A}_o$, donc sur $\sigma(\mathcal{A}_o) = A_o$.

Par conséquent :

$$\forall A_o , A \in A \quad , \quad A \cap A_o = \emptyset \Longrightarrow (\mu(A), \mu(A_o))_H = 0 .$$

3) $\mathcal{D} = \{A \in A : (\forall B \in A) (A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (\mu(A), \mu(B))_H = 0)\}$ est un λ-système contenant l'algèbre $\mathcal{A}$, donc il contient la tribu $\sigma(\mathcal{A}) = A$:

$$\forall A , B \in A \quad , \quad A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (\mu(A), \mu(B))_H = 0 \quad . \blacksquare$$

I.5. - Fonction de répartition d'une mesure hilbertienne definie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.-

Le but de ce paragraphe est de construire un exemple de mesure hilbertienne sans mesure spectrale. Pour cela nous développons quelques résultats sur les fonctions de répartition de mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, que nous n'avons pas trouvés dans les livres usuels.

A - *FONCTION DE REPARTITION DE* $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$.

D.A. EDWARDS [11] mentionne le résultat suivant, dû à J. GELFAND : une fonction $z : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est la fonction de répartition d'une mesure hilbertienne définie sur l'anneau des boréliens bornés si, et seulement si, elle vérifie :

1) $z(0) = 0$,

α) pour chaque y de H , la fonction complexe $(z(.),y)_H$ est à variations bornées dans chaque intervalle borné de $\mathbb{R}$,

β) $z(.)$ est continue à droite dans H .

Nous étudions le cas d'une mesure hilbertienne définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Les outils essentiels sont le théorème de Banach-Steinhaus [par. ex. 29 , th. 2.6.] et le théorème de Pettis [10 , th. IV.19.8] ; ceux-ci nous permettent, après avoir construit les mesures scalaires qui apparaissent dans la condition (α) ci-dessus, d'établir l'existence de la mesure hilbertienne correspondante.

1.5.1. - *Notation*.- Dans ce qui suit, lorsque $f(.)$ est une fonction à valeurs dans l'espace de Hilbert H, pour chaque h de H, la fonction à valeurs scalaires $(f(.),h)_H$ est notée $f_h(.)$.

1.5.2. - *Définition*.- Etant donnée une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$ définie sur un anneau $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω, nous appelons variation totale de μ, l'application $v(\mu,.) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0 , +\infty]$ définie par :

$$\forall E \subset \Omega , \quad v(\mu,E) = \sup \left(\sum_{j=1}^{n} ||\mu(A_j)|| \right) ,$$

la borne supérieure étant prise pour tous les choix possibles de n dans $\mathbb{N}^*$, et de $A_1,\ldots,A_n$, parties $\mathcal{A}$-mesurables et deux à deux disjointes de E.

On dit que μ est à variations bornées sur $E \subset \Omega$ si $v(\mu,E) < +\infty$.

Une étude de la variation totale de $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$ est faite dans [10] (voir aussi [23]).

1.5.3. - *Définition*.- Etant donnée une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, nous appelons variation totale de f sur I la quantité :

$$\mathrm{var}(f,I) = \sup \left(\sum_{j=1}^{n} ||f(t_j) - f(t_{j-1})|| \right) ,$$

la borne supérieure étant prise pour tous les choix possibles de n dans $\mathbb{N}^*$, et de la famille croissante $\{t_j : j = 0,\ldots,p\}$ de I.

On dit que f est à <u>variations bornées sur l'intervalle</u> I si $\mathrm{var}(f,I) < +\infty$.

I.5.4. - Définition.- Nous appelons fonction de répartition d'une mesure hilbertienne sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ définie par :

$$(r_0) \qquad f(t) = \mu(]-\infty, t]) , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Nous obtenons aisément le lemme suivant et son corollaire.

I.5.5. - Lemme.- Lorsque f est la fonction de répartition d'une mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$, pour chaque h de H , f_h est la fonction de répartition de la mesure scalaire μ_h .

I.5.6. - Corollaire.- La fonction de répartition $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ d'une mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$ vérifie les propriétés suivantes :

(r_1) $\forall h \in H$, l'application $f_h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est à variations bornées sur $\mathbb{R}$,

(r_2) $\forall h \in H$, f_h est continue à droite ,

$(r_2)'$ l'application f est continue à droite ,

(r_3) $\forall h \in H$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f_h(t) = 0$,

$(r_3)'$ $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$.

I.5.7. - Remarque : La fonction de répartition d'une mesure hilbertienne sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ n'est pas toujours à variations bornées sur $\mathbb{R}$.

En effet, considérons ℓ^2 l'espace de Hilbert des suites de nombres réels de carrés sommables , $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de ℓ^2 , et $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \ell^2$ la mesure hilbertienne dont la masse est répartie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mu(\{n\}) = h_n/n \quad ;$$

en notant f la fonction de répartition de μ , nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \qquad f(n+1) - f(n) = \mu(\{n+1\}) = h_{n+1} / (n+1)$$

ainsi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} ||f(n+1) - f(n)|| = \sum_{n=1}^{+\infty} ||h_n|| / n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n = +\infty$;

et $\qquad \mathrm{var}(f,\mathbb{R}) = +\infty$.

Bien entendu, lorsque $\dim H < +\infty$, la fonction de répartition d'une mesure hilbertienne, $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$, est à variations bornées sur $\mathbb{R}$.

Nous établissons le théorème réciproque au corollaire (I.5.6.).

I.5.8. - *Lemme*.- Une mesure scalaire m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de fonction de répartition f , vérifie :

$$v(m,I) = \mathrm{var}(f,I) \quad , \text{ pour tout intervalle } I.$$

Preuve : Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{I}$ des intervalles semi-ouverts à gauche de $\mathbb{R}$.

Soient un intervalle I et un nombre $\varepsilon > 0$.

Il existe un entier p non nul, et une famille $\{B_j : j = 1,\dots,p\}$ de boréliens, deux à deux disjoints, inclus dans I , et tels que :

$$v(m,I) \leq \sum_{j=1}^{p} |m(B_j)| + \varepsilon .$$

En utilisant les décompositions de Jordan des parties réelle μ et imaginaire ν de la mesure scalaire m , nous obtenons l'égalité :

$$m = \mu^+ - \mu^- + i(\nu^+ - \nu^-) .$$

Considérons la mesure positive finie $n = \mu^+ + \mu^- + \nu^+ + \nu^-$, et $\varepsilon' = \varepsilon/(2\,p^2 + p)$. Comme l'algèbre $\mathcal{A}$ engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, pour tout j de $\{1,\dots,p\}$, il existe A_j de $\mathcal{A}$ tel que : [16, sec. 13. th. D]

$$n(A_j \,\Delta\, B_j) \leqslant \varepsilon' \ .$$

De plus chaque B_j étant inclus dans l'intervalle I , chaque A_j peut être choisi inclus dans I.

De la relation précédente, nous déduisons :

$$\forall j \in \{1,\dots,p\} \ , \quad |m(B_j)| \leqslant |m(A_j)| + \varepsilon' \ .$$

Pour $j = 1,\dots,p$, posons :

$$A''_j = \bigcup_{k \neq j} (A_j \cap A_k) \qquad \text{et} \quad A'_j = A_j \,/\, A''_j \ ;$$

ainsi $\quad A'_j \, , A''_j \in \mathcal{A} \quad , \quad A'_j \cap A''_j = \emptyset \quad , \quad A'_j \cup A''_j = A_j$,

$$A_j \cap A_k = A''_j \cap A''_k \subset (A_j \,\Delta\, B_j) \cup (A_k \,\Delta\, B_k) \ ,$$

et $\quad A'_j \cap A'_k = \emptyset \qquad , \qquad$ pour $\quad j \neq k$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} |m(B_j)| &\leqslant \sum_{j=1}^{p} |m(A_j)| + p\,\varepsilon' \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p} |m(A'_j)| + \sum_{j \neq k} n(A_j \cap A_k) + p\,\varepsilon' \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\leqslant \sum_{j=1}^{p} |m(A'_j)| + 2\,p^2\,\varepsilon' + p\,\varepsilon' \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{p} |m(A'_j)| + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

La semi-algèbre $\mathcal{I}$ engendrant l'algèbre $\mathcal{A}$, il existe une famille finie d'intervalles $(I_j)_{j\leq q}$ de $\mathcal{I}$, deux à deux disjoints, inclus dans I, et tels que :

$$\sum_{j=1}^{p} |m(A_j')| \leq \sum_{j=1}^{q} |m(I_j)| .$$

Ces intervalles étant semi-ouverts à gauche, nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{p} |m(B_j)| \leq \sum_{j=1}^{q} |m(I_j)| + \varepsilon \leq \mathrm{var}(f,I) + \varepsilon .$$

Nous en déduisons :

$$v(m,I) \leq \mathrm{var}(f,I) .$$

Or, des définitions (I.5.1.) , (I.5.3.) et (I.5.4.), nous tirons, aisément, l'autre inégalité ; nous pouvons donc conclure :

$$v(m,I) = \mathrm{var}(f,I) . \ \blacksquare$$

I.5.9. - *Corollaire*.- Une mesure scalaire m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de fonction de répartition f, vérifie pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \quad B \subset I \Longrightarrow |m(B)| \leq \mathrm{var}(f,I) .$$

I.5.10. - *Théorème*.- Pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ vérifiant les conditions (r_1), (r_2) et (r_3), il existe une unique mesure hilbertienne sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dont la fonction de répartition est f.

Preuve : Notons $\mathcal{I}$ la semi-algèbre des intervalles semi-ouverts à gauche de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}$ l'algèbre qu'elle engendre.

1) Pour tout h de H, l'application $f_h : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est la fonction de répartition d'une mesure scalaire $\mu_h : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}$ [par ex. 28 , th. 8.14] qui est bornée par $\mathrm{var}(f_h,\mathbb{R})$ (corollaire I.5.9.).

2) Montrons que pour tout borélien B , la fonction $\overline{\mu_{\bullet}(B)} : h \longmapsto \overline{\mu_h(B)}$ est une forme linéaire continue sur H.

a) Forme linéaire : Etant donnés h_1 et h_2 de H , c_1 et c_2 de $\mathbb{C}$, pour tout intervalle $]a,b]$ de $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\mu_{c_1.h_1+c_2.h_2}(]a,b]) = \overline{c_1}.\mu_{h_1}(]a,b]) + \overline{c_2}.\mu_{h_2}(]a,b]) \quad ;$$

ainsi les mesures scalaires $\mu_{c_1.h_1+c_2.h_2}$ et $\overline{c_1}.\mu_{h_1} + \overline{c_2}.\mu_{h_2}$ coïncident sur le Π-système des intervalles bornés semi-ouverts à gauche, donc sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (lemme I.4.1.).

Par conséquent, pour tout borélien B , l'application $\overline{\mu_{\bullet}(B)} : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

b) Continuité des $\overline{\mu_{\bullet}(B)}$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *:* La continuité de $\overline{\mu_{\bullet}(I)}$ est évidente lorsque I appartient à l'ensemble $\mathcal{I}_M$ des intervalles semi-ouverts à gauche et bornés :

$$a < b \implies \mu_{\bullet}(]a,b]) = (f(b) - f(a), .)_H \,.$$

D'après le corollaire (I.5.9.), nous pouvons écrire :

(1) $$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \forall h \in H \,, \quad |\mu_h(B)| \leqslant \mathrm{var}(f_h, \mathbb{R}) < +\infty \,.$$

La famille de formes linéaires continues $\{\overline{\mu_{\bullet}(I)} \,;\, I \in \mathcal{I}_M\}$ définies sur l'espace de Hilbert H , est faiblement bornée donc bornée (ou équicontinue), d'après le théorème de Banach-Steinhauss [par. ex. 10 , th. II.1.11] :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que :}$$

$$\forall I \in \mathcal{I}_M \quad \text{et} \quad \forall h \in H \,, \qquad \|h\| \leqslant \eta \implies |\mu_h(I)| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Par la continuité monotone des mesures, nous obtenons que pour tout I de la semi-algèbre $\mathcal{I}$, la forme linéaire $\overline{\mu_{\bullet}(I)}$ est continue.

Finalement $\{\overline{\mu_{\bullet}(A)} : A \in \mathcal{A}\}$ est une famille de formes linéaires continues (nous savons que $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{\mu_{\bullet}(A)}$ est la somme de certaines formes linéaires de la famille $\{\overline{\mu_{\bullet}(I)} : I \in \mathcal{I}\}$).

En utilisant la relation (1) et le théorème de Banach-Steinhass, nous obtenons que la famille $\{\overline{\mu_{\bullet}(A)} : A \in \mathcal{A}\}$ est équicontinue :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall h \in H \quad , \quad \|h\| \leqslant \eta \Longrightarrow |\mu_h(A)| \leqslant \varepsilon \; ;$$

et par conséquent (lemme I.4.2.) :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \forall h \in H \quad , \quad \|h\| \leqslant \eta \Longrightarrow |\mu_h(B)| \leqslant \varepsilon \quad .$$

Ainsi pour tout B de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la forme linéaire $\overline{\mu_{\bullet}(B)}$ est continue.

3) Pour tout B de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, il existe donc un unique élément $\mu(B)$ de H qui vérifie [par ex. 29 , th. 12.5] :

$$\forall h \in H \quad , \qquad \mu_h(B) = (\mu(B), h)_H \; .$$

D'après le théorème de Pettis, la fonction $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$, ainsi définie, est une mesure hilbertienne.

De plus, par construction :

$$\forall h \in H \quad , \quad \forall a < b \quad , \quad (\mu(]a,b]), h)_H = f_h(b) - f_h(a)$$

d'où
$$(\mu(]-\infty , b]), h)_H = f_h(b) = (f(b), h)_H \; ,$$

et
$$\mu(]-\infty , b]) = f(b) \quad .$$

L'application f est la fonction de répartition de la mesure hilbertienne μ.

4) L'unicité de la mesure hilbertienne μ résulte du lemme d'unicité I.4.1. ■

I.5.11. - Fonction de répartition gaussienne.

Le corollaire (I.4.4.) et le théorème précédent nous donnent :

Corollaire. - Toute mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$, de fonction de répartition f vérifie :

$$H(\mu) = H(f) ,$$

où $H(f)$ est le sous-espace de Hilbert de H engendré par $\{f(a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Par conséquent, une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$, est gaussienne si, et seulement si, sa fonction de répartition $f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$ est un processus gaussien d'espace - temps $\mathbb{R}$, défini sur l'espace probabilisé $(S,\mathcal{F},P)$.

I.5.12. - Fonction de répartition à accroissements orthogonaux.

D'après le corollaire (I.4.6.) :

Proposition. - Une mesure hilbertienne sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est orthogonale si, et seulement si, sa fonction de répartition est à accroissements orthogonaux.

B - *UN EXEMPLE DE MESURE STOCHASTIQUE SANS MESURE SPECTRALE.*

Nous construisons un exemple de mesure stochastique dont la bimesure spectrale associée n'est pas prolongeable. Ce travail est une adaptation de la construction faite par D.A. EDWARDS [11] d'une mesure hilbertienne définie sur l'anneau des boréliens bornés de $\mathbb{R}$, dont la bimesure n'est pas prolongeable.

I.5.12. - Préliminaire.

Notons $\ell^2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace de Hilbert des suites de nombres réels de carrés sommables, muni de son produit scalaire usuel.

Lemme 1.- Soit $(a_{mn})_{m,n\geq 1}$ la matrice symétrique définie par :

$$a_{nn} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{mn} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(m-n))}{m-n} \qquad \text{pour} \quad m \neq n$$

Cette matrice est celle d'un opérateur symétrique A définie dans $\ell^2(\mathbb{R})$, de norme $||A|| \leq \frac{\pi}{2}$.

Nous définissons l'opérateur B de $\ell^2(\mathbb{R})$ par :

$$B = \frac{\pi}{2}\cdot I + A ,$$

d'où sa matrice $(b_{mn})_{m,n\geq 1}$:

$$b_{nn} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{mn} = a_{mn} \qquad \text{pour} \quad m \neq n \quad .$$

Lemme 2.- L'opérateur B est symétrique, positif et de norme $||B|| \leq \pi$.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de $\ell^2(\mathbb{R})$ définie par :

$$u_n = (n^{1/2}\ .\ \log(n+1))^{-1} .$$

Lemme 3.- Pour $m , n \geq 1$ posons $c_{mn} = b_{mn}.u_m.u_n$.
Pour toutes suites $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n)_{n\geq 1}$ vérifiant : $|\varepsilon_n| = |\eta_n| = 1$, nous avons :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}\cdot\varepsilon_m\cdot\eta_n \qquad \text{existe} ,$$

$$\forall N \geq 1 \quad , \quad 0 \leq \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}\cdot\varepsilon_m\cdot\varepsilon_n \leq \alpha \quad \text{et} \quad \left|\sum_{m,n=1}^{N} c_{mn}\cdot\varepsilon_m\cdot\eta_n\right| \leq \alpha ,$$

α étant une constante réelle.

De plus $\sum_{m,n=1}^{+\infty} c_{mn}^2 < +\infty$ et $\sum_{m,n=1}^{+\infty} |c_{mn}| = +\infty$.

Les démonstrations de ces résultats se trouvent en annexe (A.1.).

I.5.13. - L'exemple.

1) Considérons un $\mathbb{R}$-espace gaussien séparable H de dimension hilbertienne $\text{card}(\mathbb{N})$, et une de ses bases hilbertiennes $\{\psi_n : n \geq 1\}$.

Il existe un unique opérateur borné $C : H \to H$ défini par :

$$(\psi_m , C\,\psi_n)_H = c_{mn} \quad , \quad \text{pour} \quad n , m \geq 1$$

cet opérateur est symétrique et positif, il lui correspond un unique opérateur borné positif T [29, th. 12.33] tel que $T^2 = C$.

En posant $x_n = T\,\psi_n$ pour tout entier n, nous obtenons l'égalité :

$$(x_m, x_n)_H = (\psi_m, T^2\,\psi_n) = c_{mn} \quad , \quad \text{pour} \quad m , n \geq 1 .$$

2) *Construction de la mesure stochastique sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *par sa fonction de répartition.*

Définissons l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow H$ par :

$$f(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \leq 0 \quad ,$$

$$f(n) = f(n-1) + x_n \qquad \text{pour} \quad n = 1,2,\ldots \quad ,$$

f affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$, $n = 0,1,\ldots$

Nous constatons que f vérifie les conditions (r_2) et (r_3). Montrons que la condition (r_1) est satisfaite.

Soit h un élément de H.

Puisque l'application f est affine sur chacun des intervalles $[n , n+1]$ où $n \in \mathbb{Z}$, l'application f_h l'est, et sa variation totale sur $[n , n+1]$ est égale à $|f_h(n+1) - f_h(n)|$, c'est-à-dire $|(x_{n+1},h)|_H$ pour $n \geqslant 0$, et 0 sinon.

Lorsque ε_n désigne le signe du réel $(x_n,h)_H$ où $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{N} |(x_n,h)_H| = \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n \cdot x_n,h)_H ,$$

mais, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n \cdot x_n,h)_H \leqslant \|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \cdot x_n\| \cdot \|h\| ,$$

et
$$\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \cdot x_n\| = [\sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_n]^{1/2} ,$$

ainsi (lemme 3)

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n \cdot x_n,h)_H \leqslant \alpha^{1/2} \cdot \|h\| .$$

Par conséquent :

$$\forall h \in H , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |(x_n,h_n)_H| \leqslant \alpha^{1/2} \cdot \|h\| < +\infty ,$$

et l'application f_h est à variations bornées sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème (I.5.10.) l'application f est la fonction de répartition d'une mesure stochastique μ.

3) *La bimesure spectrale* M *de* μ *n'est pas prolongeable en une mesure sur* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

La bimesure spectrale M associée à la mesure stochastique μ vérifie :

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} |M(]m-1, m] \times]n-1, n])| = \sum_{m,n=1}^{+\infty} |(f(m) - f(m-1), f(n) - f(n-1))_H|$$

$$= \sum_{m,n=1}^{+\infty} |(x_m, x_n)_H|$$

$$= \sum_{m,n=1}^{+\infty} |c_{mn}| = + \infty$$

Ainsi l'application $M : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas à variations bornées dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, elle n'est pas prolongeable en une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ [28, th. 6.4.].

4) *Conclusion*.

La mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$ et le processus harmonisable $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$, $t \rightsquigarrow \int e^{itx} d\mu$, n'ont pas de mesure spectrale, puisque leur unique bimesure spectrale n'est pas prolongeable.

Nous allons maintenant rechercher une condition nécessaire et suffisante de prolongeabilité d'une bimesure spectrale.

I.6. - PROLONGEMENT D'UNE BIMESURE SPECTRALE SUR $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.-

Les fonctions de répartition des mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ et des mesures hilbertiennes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, déterminent entièrement ces mesures. Elles privilégient les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont relativement faciles à manipuler.

Afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ soit prolongeable , nous allons généraliser cette notion de fonction de répartition.

Mais nous nous contenterons d'étudier le cas des mesures scalaires (puis hilbertiennes) sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. Les démonstrations pour le cas de mesures sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ sont analogues mais plus fastidieuses.

A - FONCTIONS A VARIATIONS BORNEES AU SENS DE VITALI DANS UN RECTANGLE DE $\mathbb{R}^2$.

I.6.1. - *Définition*.- Une application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$, est à variations bornées (au sens de Vitali, [11]) dans un rectangle $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$, lorsqu'il existe une constante b telle que :

pour $t_1 < \dots < t_{p+1}$ dans I et $s_1 < \dots < s_{q+1}$ dans J

nous avons $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} ||\Delta_{jk}(\psi)|| \leq b$,

où $\Delta_{jk}(\psi) = \psi(t_{j+1}, s_{k+1}) - \psi(t_{j+1}, s_k) - \psi(t_j, s_{k+1}) + \psi(t_j, s_k)$.

Dans ce cas nous définissons la variation de ψ (au sens de Vitali) dans le rectangle $I \times J$ par

$$\mathrm{var}(\psi, I \times J) = \sup\Big(\sum_{j,k} ||\Delta_{jk}\, \psi||\Big)$$

la borne supérieure étant prise pour tous les choix possibles de p, q, $t_1,\dots,t_{p+1}$, $s_1,\dots,s_{q+1}$.

Le lemme suivant nous donne quelques propriétés de la variation d'une application à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$.

I.6.2. - Lemme.- Etant donnée une application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$ à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$, elle est à variations bornées dans tout rectangle de $\mathbb{R}^2$; de plus :

1) $$\lim_{t\to-\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{var}(\psi,]-\infty, t] \times]-\infty, s]) = 0 ,$$

$$\lim_{s\to-\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{var}(\psi,]-\infty, t] \times]-\infty, s]) = 0 ,$$

2) lorsque I, I' et J sont trois intervalles tels que :

$$I \cap I' = \emptyset \quad \text{et} \quad I \cup I' \ \text{est un intervalle} ,$$

nous avons :

$$\mathrm{var}(\psi, I \times J) + \mathrm{var}(\psi, I' \times J) \leq \mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) ,$$

$$\mathrm{var}(\psi, J \times I) + \mathrm{var}(\psi, J \times I') \leq \mathrm{var}(\psi, J \times (I \cup I')) ,$$

3) lorsque l'application ψ est continue à droite par rapport à chacune des variables, et I fermé à droite, précédant I' (ce qui implique : I' ouvert à gauche), les inégalités du (2) deviennent des égalités.

La démonstration de ce résultat est donnée en annexe (A.2.).

(B) - FONCTION DE REPARTITION D'UNE MESURE SCALAIRE DEFINIE SUR $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

I.6.3. - Définition.- Nous appelons fonction de répartition d'une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, $M : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{K}$, l'application $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$(\rho_o) \qquad \rho(t,s) = M(]-\infty, t] \times]-\infty, s]) , \quad t, s \in \mathbb{R} .$$

Nous obtenons aisément la proposition suivante :

I.6.4. - Proposition.- La fonction de répartition $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ d'une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ vérifie les propriétés suivantes :

(ρ_1) ρ est à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$,

(ρ_2) ρ est continue à droite ,

(ρ_3) $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to -\infty} \rho(t,s) = 0$,

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{s \to -\infty} \rho(t,s) = 0$.

Dans la propriété (ρ_2) nous considérons la continuité par rapport à l'ensemble des variables.

La réciproque de ce résultat fait l'objet du théorème suivant.

I.6.5. - Théorème.- Toute application $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les conditions (ρ_1), (ρ_2) et (ρ_3) , est la fonction de répartition d'une unique mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

Preuve : Notons $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{I}$ des intervalles semi-ouverts à gauche.

L'application ρ étant à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$, pour tous réels t et s , l'ensemble $\{var(\rho,]-\infty, t'] \times]-\infty, s']) , t' > t , s' > s\}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, minoré par $var(\rho,]-\infty, t] \times]-\infty, s])$ (lemme I.6.2.) et donc, possède une borne inférieure que nous noterons $v(t,s)$.

Ainsi nous venons de définir une application $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) - Propriétés de l'application v .

1) A partir de sa définition, nous obtenons aisément que l'application v vérifie :

$$\forall t\ ,\ s \in \mathbb{R}\ , \qquad v(t,s) = \lim_{\substack{t'\to t+\\ s'\to s+}} \operatorname{var}(\rho\ ,\ ]-\infty,\ t'] \times]-\infty,\ s']) \ .$$

Ainsi l'application $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est positive, croissante, continue à droite bornée par $\operatorname{var}(\rho, \mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}^2$.

2) Etant donnés $t_1 < t_2$ et $s_1 < s_2$ quatre réels, la propriété (3) du lemme (I.6.2.) nous donne :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \eta\to 0+}} \operatorname{var}(\rho\ ,\ ]t_1'\ ,\ t_2'] \times]s_1'\ ,\ s_2']) = v(t_2,s_2) - v(t_2,s_1) - v(t_1,s_2) + v(t_1,s_1)$$

$$= \Delta_{11}(v)\ ,$$

et pour $\varepsilon, \eta > 0$ et $j = 1,2$, t_j' et s_j' désignent respectivement $t_j + \varepsilon$ et $s_j + \eta$; et nous constatons que :

$$0 \leq \Delta_{11}\, v \qquad (v \text{ est totalement croissant}) \ .$$

3) L'application v est à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$. En effet, considérons $(t_j)_{j\leq p+1}$ et $(s_k)_{k\leq q+1}$ deux familles croissantes de réels. Du lemme I.6.2. nous déduisons :

$$\forall \varepsilon\ ,\ \eta > 0\ , \quad \sum_{j,k} \Delta_{jk}(\operatorname{var}(\rho\ ;\ ]-\infty,\ t+\varepsilon] \times]-\infty,\ s+\eta])) =$$

$$\operatorname{var}(\rho\ ,\ ]t_1+\varepsilon,\ t_2+\varepsilon] \times]s_1+\eta,\ s_2+\eta]).$$

L'application ρ étant à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$, le membre de droite est majoré par $\operatorname{var}(\rho, \mathbb{R}^2)$. De plus, le nombre de termes du membre de gauche étant fini, lorsque ε et η tendent vers 0+ , ce dernier tend vers $\sum_{j,k} \Delta_{jk}(v)$.

La croissance totale de v nous permet de conclure que :

$$\sum_{j,k} |\Delta_{jk}(v)| \leq \operatorname{var}(\rho,\ \mathbb{R}^2)\ .$$

4) Nous déduisons de la propriété (1) du lemme (I.6.2) que :

$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} v(t,s) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{s\to-\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} v(t,s) = 0 .$$

Par conséquent l'application ρ est la fonction de répartition d'une mesure positive M^* sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ bornée par $\mathrm{var}(\rho, \mathbb{R}^2)$.

5) De plus, étant donnés $t_1 < t_2$, $s_1 < s_2$, pour tous ε et $\eta > 0$ vérifiant : $t_1 < t_1 + 2\varepsilon < t_2$ et $s_1 < s_1 + 2\eta < s_2$, l'application ρ vérifie :

$$|\rho(t_2 + \varepsilon, s_2 + \eta) - \rho(t_2 + \varepsilon, s_1 + 2\eta) - \rho(t_1 + 2\varepsilon, s_2 + \eta) + \rho(t_1 + 2\varepsilon, s_1 + 2\eta)$$
$$\leq \mathrm{var}(\rho ,]t_1 + \varepsilon , t_2 + \varepsilon] \times]s_1 + \eta , s_2 + \eta]) ,$$

d'où en faisant tendre ε et η vers $0+$:

$$(\alpha) \qquad |\rho(t_2,s_2)-\rho(t_2,s_1)-\rho(t_1,s_2)+\rho(t_1,s_1)| \leq v(t_2,s_2)-v(t_2,s_1)-v(t_1,s_2)+v(t_1,s_1) .$$

b) - *Construction de la mesure* M *sur* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

1) Pour $s_1 < s_2$, il existe une mesure scalaire $M(. ,]s_1,s_2])$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de fonction de répartition $t \rightsquigarrow \rho(t,s_2) - \rho(t,s_1)$ [par ex. , th. 8.14].

De plus, lorsque $t_1 < t_2$, la relation (α) de a.5. nous donne :

$$|\rho(t_2,s_2)-\rho(t_2,s_1)-\rho(t_1,s_2)+\rho(t_1,s_1)| \leq M^*(]t_1,s_2] \times]s_1,s_2])$$

d'où $$|M(]t_1,t_2],]s_1,s_2])| \leq M^*(]t_1,t_2] \times]s_1,s_2]) .$$

Par la continuité monotone des mesures, nous obtenons :

$$\forall I \in \mathcal{I} \qquad |M(I,]s_1,s_2])| \leq M^*(I \times]s_1,s_2]) ,$$

et l'algèbre $\mathcal{A}$ étant engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{I}$:

$$(\beta) \quad \forall A \in \mathcal{A} , \qquad |M(A,]s_1,s_2])| \leqslant M^*(A \times]s_1,s_2]) .$$

De façon analogue, pour tout réel s, il existe une mesure scalaire $M(.,]-\infty, s])$ sur $(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de fonction de répartition $t \rightsquigarrow \rho(t,s)$ et qui vérifie :

$$(\gamma) \quad \forall A \in \mathcal{A} , \qquad |M(A,]-\infty, s])| \leqslant M^*(A \times]-\infty, s]) .$$

De plus pour tous I et I' majorés de $\mathcal{I}$ tels que : $I \cap I' = \emptyset$ et $I \cup I' \in \mathcal{I}$, les mesures scalaires $M(.,I) + M(.,I')$ et $M(., I \cup I')$ ayant la même fonction de répartition, sont égales.

2) Etant donné A de $\mathcal{A}$, considérons l'application $\rho_A : s \rightsquigarrow M(A,]-\infty, s])$ qui vérifie d'après ce qui précède :

$$s_1 < s_2 \Longrightarrow \rho_A(s_2) - \rho_A(s_1) = M(A ,]s_1 , s_2]) .$$

ρ_A est à variations bornées dans $\mathbb{R}$: pour toute famille croissante $(s_j)_{j \leqslant q+1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q} |\rho_A(s_{j+1}) - \rho_A(s_j)| &\leqslant \sum_{j=1}^{q} |M(A,]s_j, s_{j+1}])| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q} M^*(A \times]s_j , s_{j+1}]) \\ &\leqslant M^*(A \times \mathbb{R}) , \end{aligned}$$

puisque M^* est une mesure positive finie.

De plus ρ_A est continue à droite et $\lim\limits_{s\to-\infty} \rho_A(s) = -\infty$.

En effet par la relation (β) de b.l., nous obtenons :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\quad |\rho_A(s+\varepsilon)-\rho_A(s)| \leqslant M^*(A \times]s, s+\varepsilon]) ,$$

$$\text{et}\quad |\rho_A(s)-\rho_A(s-\varepsilon)| \leqslant M^*(A \times]s-\varepsilon, s]) ,$$

donc $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \rho_A(s+\varepsilon) = \rho_A(s)$;

d'autre part la relation (γ) nous donne :

$$\forall s \in \mathbb{R} ,\quad |\rho_A(s)| \leqslant M^*(A \times]-\infty, s])$$

d'où $\lim\limits_{s\to-\infty} \rho_A(s) = 0$.

Ainsi, il existe une mesure scalaire $M(A,.)$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de fonction de répartition ρ_A .

Des relations (β) et (γ) de b.l., il résulte que :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \forall I \in \mathcal{I} ,\quad |M(A,I)| \leqslant M^*(A \times I) ,$$

(δ) d'où $\forall A , A' \in \mathcal{A}$, $|M(A,A')| \leqslant M^*(A \times A')$.

Nous avons vu que pour tout réel s , $M(.,]-\infty, s])$ est une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, donc :

$\forall A , A' \in \mathcal{A}$,

$$A \cap A' = \emptyset \Longrightarrow M(A,]-\infty, s]) + M(A',]-\infty, s]) = M(A \cup A',]-\infty, s])$$

$$\Longrightarrow \rho_A(s) + \rho_{A'}(s) = \rho_{A\cup A'}(s) .$$

Par conséquent, pour tous A et A' de $\mathcal{A}$ tels que $A \cap A' = \emptyset$, les mesures scalaires $M(A,.) + M(A',.) = M(A \cup A',.)$ sont égales.

3) Notons $\mathcal{R}$ l'algèbre de $\mathbb{R}^2$ engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{S} = \{I \times J \ , \ I \text{ et } J \in \mathcal{I}\}$. Chaque élément de $\mathcal{R}$ est la réunion d'une famille finie d'éléments de $\mathcal{S}$ deux à deux disjoints.

D'après ce qui précède, nous pouvons définir une application additive $M : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$M(\sum S_n) = \sum M(S_n) \ ,$$

pour toute famille finie (S_n) de rectangles de $\mathcal{S}$ deux à deux disjoints.

La relation (δ) de b.l. entraîne que :

$$|M(\sum S_n)| \leq \sum M^*(S_n) \ ,$$

donc $\forall B \in \mathcal{R}$, $\qquad |M(B)| \leq M^*(B)$:

l'application additive $M : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ est bornée et possède la propriété de continuité monotone. Elle est une mesure scalaire qui admet un prolongement à la tribu $\sigma(\mathcal{R})$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ [10 , cor. III.5.9], que nous noterons encore M.

Nous constatons aisément que la fonction de répartition de la mesure scalaire M sur $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ est l'application ρ.

L'unicité de M découle du lemme d'unicité I.4.6. ■

Nous généralisons ce résultat :

I.6.6. - Remarque : Cas d'une mesure hilbertienne.

La fonction de répartition ρ d'une mesure hilbertienne μ sur $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ étant définie par :

$$\forall t \ , s \in \mathbb{R} \ , \qquad \rho(t,s) = \mu(]-\infty, t] \times]-\infty, s]) \ ,$$

on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème.- Pour qu'une application $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$ soit la fonction de répartition d'une mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow H$, il faut et il suffit que ρ vérifie les trois conditions suivantes :

$\forall h \in H$
- ρ_h est à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$
- ρ_h est continue à droite
- $\forall s \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \rho_h(t,s) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{s\to-\infty} \rho_h(t,s) = 0$.

La condition nécessaire est immédiate puisque, lorsque μ est une mesure hilbertienne, pour tout h de H , ρ_h est la fonction de répartition de la mesure scalaire μ_h .

Réciproquement, lorsqu'une application ρ vérifie ces conditions, pour tout h de H, ρ_h est la fonction de répartition d'une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ (cf. th. I.6.5.) telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \qquad |\mu_h(B)| \leq \mathrm{var}(\rho_h, \mathbb{R}^2)$$

Comme dans la démonstration du théorème (I.4.3.), par le théorème de Banach-Steinhaus nous en déduisons que, pour tout borélien B de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, l'application $\overline{\mu_{\bullet}(B)} : h \rightsquigarrow \overline{\mu_h(B)}$ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H. Puis, le théorème de Pettis nous permet de conclure à l'existence d'une mesure hilbertienne de fonction de répartition ρ. ■

(C) - C. N. S. DE PROLONGEABILITE D'UNE BIMESURE SPECTRALE SUR $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Nous montrons qu'une bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est prolongeable si, et seulement si, la "fonction de répartition" qui lui est associée ci-dessous est à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$.

I.6.7. - Lemme.- Etant donnée une bimesure spectrale M sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, l'application $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall t , s \in \mathbb{R} , \qquad \rho(t,s) = M(]-\infty, t] \times]-\infty, s]) ,$$

vérifie les propriétés (ρ_2) et (ρ_3).

Preuve : Soient t et s deux réels, pour toutes suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\varepsilon_n \downarrow 0 \quad \text{et} \quad \eta_n \downarrow 0$$

nous avons : $\lim\limits_{n\to\infty} M(]-\infty, t+\varepsilon_n] \times]-\infty, s+\eta_n]) = M(]-\infty, t] \times]-\infty, s])$

d'où
$$\lim_{n\to\infty} \rho(t+\varepsilon_n , s+\eta_n) = \rho(t,s) .$$

$\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow H$ désignant une mesure hilbertienne de bimesure spectrale M [; p. IV.35. th. 6], pour tous réels t et s , nous avons :

$$|(\mu(]-\infty, t]), \mu(]-\infty, s]))_H| \leq ||\mu(]-\infty, t])|| \cdot ||\mu(]-\infty, s])|| ,$$

ainsi
$$|\rho(t,s)| \leq \sup_{B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} ||\mu(B)|| \cdot ||\mu(]-\infty, s])|| \quad ;$$

or
$$\sup_{B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} ||\mu(B)|| \leq ||\mu||(\mathbb{R}) < +\infty ,$$

où $||\mu||$ désigne la semi-variation de μ [10, lemme IV.10.4],

et
$$\lim_{s\to-\infty} ||\mu(]-\infty, s])|| = 0 ,$$

par conséquent :

$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{s\in\mathbb{R}} |\rho(t,s)| = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{s\to-\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\rho(t,s)| = 0 \,. \qquad \blacksquare$$

Voici le résultat annoncé.

I.6.8. - Théorème.- Une bimesure spectrale $M : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}$ est prolongeable en une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ si, et seulement si, la fonction

$$\rho : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (t,s) \rightsquigarrow M(]-\infty,t]\times]-\infty,s]) \end{array}$$

est à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas le prolongement est unique.

Preuve :

Condition nécessaire : Lorsque la bimesure spectrale M est prolongeable en une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, la fonction ρ définie ci-dessus, qui coïncide avec la fonction de répartition du prolongement, est à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$ (cf. proposition I.6.4).

Condition suffisante : La fonction ρ, vérifiant les conditions (ρ_1), (ρ_2) et (ρ_3) du théorème I.6.5., est la fonction de répartition d'une mesure scalaire M' sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

Pour tout I du Π-système $\mathcal{I}$ des intervalles ouverts à gauche et majorés, les deux mesures scalaires $M'(. \times I)$ et $M(. \times I)$ coïncident sur $\mathcal{I}$ donc sur la tribu engendrée qui est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: elles sont égales (lemme d'unicité I.4.6.).

Ainsi pour tout borélien B, les deux mesures $M(B \times .)$ et $M'(B \times .)$ coïncident sur $\mathcal{I}$ donc elles sont égales.

Par conséquent ces deux fonctions M et M' coïncident dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et la mesure M' prolonge la bimesure spectrale M à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. ∎

Nous tirons aisément du théorème :

I.6.9. - Corollaire.- Toute bimesure spectrale positive définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est prolongeable.

Preuve : Pour tous $t_1 < \ldots < t_{p+1}$ et $s_1 < \ldots < s_{q+1}$:

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} |\Delta_{ij}(\rho)| = M(]t_1, t_{p+1}] \times]s_1 \times s_{q+1}]) \leq M(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) ,$$

donc $$\operatorname{var}(\rho, \mathbb{R}^2) < +\infty \quad ∎$$

CHAPITRE II

PROCESSUS HARMONISABLES ET DOMINATION.

II.1. - INTRODUCTION.-

Dans ce chapitre nous avons regroupé deux parties distinctes :

- les correspondances entre les différentes notions de processus harmonisables,

- la caractérisation de la domination entre deux processus harmonisables par la comparaison de leurs bimesures spectrales.

Les processus harmonisables, introduits par M. LOEVE comme généralisation des processus faiblement stationnaires [19, sect. 34], furent l'objet d'une théorie ensembliste abordée par Yu. A. ROZANOV [26] et d'une théorie fonctionnelle étudiée par H. NIEMI [25], ayant comme point commun la notion de processus V-borné dûe à S. BOCHNER [7, § 4].

L'identité entre les processus harmonisables, les processus continus et V-bornés, et les processus (f)-harmonisables, a été établie par A.G. MIAMEE et H. SALEHI [21], et H. NIEMI [25]. Dans ce chapitre nous verrons qu'il en est de même entre les processus harmonisables à mesure spectrale et les processus (f)-harmonisables à mesure spectrale. Les différentes correspondances entre ces notions seront récapitulées.

En utilisant la comparaison des noyaux auto-reproduisants développée par N. ARONSZAJN [3], R. MOCHÉ [22] a défini la domination entre processus du second ordre ; et en particulier entre processus harmonisables.

Dans la seconde partie, cette domination entre processus harmonisables sera caractérisée par la domination entre leurs bimesures spectrales associées. Puisque les processus faiblement stationnaires et continus ont des mesures spectrales positives, nous nous intéresserons à la domination par ces processus qui nous permettra de simplifier des calculs ultérieurs.

II.2. - CORRESPONDANCES ENTRE LA THÉORIE ENSEMBLISTE ET LA THÉORIE FONCTIONNELLE DES PROCESSUS HARMONISABLES.-

Considérons un espace probabilisé (S,F,P) et notons H , l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$.

Ⓐ - *PROCESSUS V-BORNES ET PROCESSUS HARMONISABLES.*

La définition des processus V-bornés est due à S. BOCHNER [7 , déf. 4.1.1.].

II.2.1. - Définition.- Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est dit V-borné lorsque :

- il est borné et faiblement $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_H)$ - mesurable ,

- il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}) \ , \qquad \left\| \int X_t \, . \, f(t)\, dt \right\| \leq c \, \|\hat{f}\|_\infty \ ,$$

où - $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction f :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad \hat{f}(t) = \int e^{2i\pi tu} \, . \, f(u)\, du \ ,$$

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup \{ |\hat{f}(t)| \ : \ t \in \mathbb{R} \} \leq \int |f(t)|\, dt \ ,$$

- l'intégrale de Pettis $\int X_t \cdot f(t)\, dt$ est définie, puisque :

$$\forall h \in H \ , \ \left|\int (X_t . f(t), h)_H \, dt\right| \leq \sup\{||X_t|| : t \in \mathbb{R}\} \ . \ ||h|| \ . \int |f(t)|\, dt \ .$$

H. NIEMI a établi [25 , cor. 3.2.5.] :

II.2.2. - *Lemme.*- Un processus borné et $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_H)$ - mesurable $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est V-borné si, et seulement si, il existe une constante c telle que :

$$\forall f \ , \ g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad , \quad \left|\int g(s) \left(\int (X_t, X_s)_H \, . \, f(t)\, dt\right) ds\right| \leq c \ . \ ||\hat{f}||_\infty \ . \ ||\hat{g}||_\infty \quad ;$$

et A.G. MIAMEE et H. SALEHI ont prouvé [21 , th. 9] :

II.2.3. - *Proposition.*- Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est harmonisable si, et seulement si, il est continu et il existe une constante c telle que :

$$\forall f \ , \ g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad , \quad \left|\iint (X_t, X_s)_H \, . \, f(t).g(s)\, dt\, ds\right| \leq c \ . \ ||\hat{f}||_\infty \ . \ ||\hat{g}||_\infty \ .$$

Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant :

II.2.4. - *Théorème.*- Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow X$ est harmonisable si, et seulement si, il est continu et V-borné.

II.2.5. - Il existe des processus V-bornés et non continus (et même non faiblement continus). [25, rem. 3.2.2.].

En effet, en considérant un élément ξ non nul de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$, le processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$ défini par :

$$\forall t \neq 0 \quad , \qquad X_t = 0 \quad , \quad \text{et} \qquad X_o = \xi \quad ,$$

est V-borné mais non faiblement continu, puisque :

- il est évidemment $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_H)$- mesurable ,

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $||X_t|| \leq ||\xi|| < +\infty$,

- $\forall f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $||\int X_t \cdot f(t)\, dt|| = 0 \leq ||\hat{f}||_\infty$,

et il n'est pas faiblement continu :

$$\forall t \neq 0 \ , \quad E(X_t \cdot \bar{\xi}) = 0 \ , \quad \text{et} \quad E(X_o \cdot \bar{\xi}) = ||\xi||^2 \neq 0 \ . \ \blacksquare$$

II.2.6. - <u>Tout processus V-borné est borné, mais la réciproque est fausse</u> : il existe des processus continus et bornés qui ne sont pas V-bornés. Donnons un exemple dû à E.G. GLADYSHEV [15 , § 3 ex. 1] ; H. NIEMI [25 , ex. 3.2.7] en donna un autre.

Considérons une application continue périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui ne s'annule jamais et dont la série de Fourier ne converge pas absolument.

Le noyau hermitien de type positif $K : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(t,s) \rightsquigarrow K(t,s) = f(t) \cdot \overline{f(s)}$, est le noyau de covariance d'une f.a. gaussienne centrée $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ [24, prop. 3.4.].

Supposons que le processus X soit continu et V-borné, donc, d'après le théorème (II.2.4.), il est harmonisable. Il existe une mesure stochastique μ de bimesure spectrale M telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad X_t = \int e^{itu}\, \mu(du) \ ,$$

et ,
$$\forall t, s \in \mathbb{R} \ , \quad f(t) \cdot \overline{f(s)} = K(t,s) = \iint e^{i(tu-sv)}\, M(du,dv) \ .$$

Ainsi l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la fonction caractéristique de la mesure complexe Φ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \quad \Phi(B) = \frac{1}{\overline{f(s)}} E(1_B \, . \, \bar{X}_s) = \frac{1}{\overline{f(s)}} E(1_B \, . \int e^{-isv} \mu(dv)) \, ,$$

dont les valeurs ne dépendent pas de $s \in \mathbb{R}$.

Puisque f est périodique de période T , la mesure complexe Φ est concentrée sur un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, invariant par la translation d'amplitude T : il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{itx_n} \, . \, \Phi(\{x_n\}) \quad ;$$

mais, comme Φ est une mesure complexe, elle est à variations bornées sur $\mathbb{R}$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\Phi(\{x_n\})| < + \infty \, ,$$

donc la série de Fourier de l'application f est absolument convergente, et nous obtenons une contradiction. ■

II.2.7. - <u>Il existe des processus harmonisables sans mesure spectrale.</u>

L'exemple d'un tel processus a été construit dans le paragraphe (I.5.B.). E.G. GLADYSHEV en a donné un autre [15, § 3. ex. 2].

II.2.8. - <u>Les processus faiblement stationnaires et continus sont harmonisables à mesure spectrale</u> [23, th. 4. p. V. 18]. <u>Mais, la réciproque est fausse.</u>

En effet, en considérant un élément ξ non nul de $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$, le processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \, , \qquad X_t = e^{it} \, . \, \xi + \xi$$

est harmonisable à mesure spectrale mais n'est pas faiblement stationnaire, puisque :

$$\forall t\ ,\ s \in \mathbb{R}\ , \qquad E(X_t . \bar{X}_s) = (e^{i(t-s)} + e^{it} + e^{-is} + 1)\ .\ ||\xi||^2$$

$$= \iint e^{i(tu-sv)}\ M(du,dv)$$

où M est la mesure spectrale sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ concentrée sur $\{(0,1)\ ;\ (1,0)\ ;\ (0,0)\ ;\ (1,1)\}$ et telle que

$$M(\{(0,1)\}) = M(\{(1,0)\}) = M(\{(1,1)\}) = M(\{(0,0)\}) = ||\xi||^2\ .\ \blacksquare$$

II.2.9. - *Tableau récapitulatif* :

Processus :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\text{faiblement stationnaire continu}} \arrow[d, Rightarrow, shift right] & & & \\
\underline{\text{harmonisable à mesure spectrale}} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & & & \\
\underline{\text{harmonisable}} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \underline{\text{V-borné continu}} \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & \\
& \underline{\text{continu borné}} \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[rr, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & & \underline{\text{V-borné}} \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[ll, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \\
& & \underline{\text{borné}} \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

(B) - *PROCESSUS (f) - HARMONISABLES ET PROCESSUS HARMONISABLES.*

Dans ce paragraphe, $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (resp. $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$) désigne l'espace des fonctions complexes continues, à support compact dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$) ; $C_b(\mathbb{R})$ $C_b(\mathbb{R})$ (resp. $C_b(\mathbb{R}^2)$) désigne l'espace des fonctions complexes continues et bornées dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et $C_o(\mathbb{R})$ celui des fonctions complexes continues dans $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini.

La théorie de l'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle [32] nous permet de poser (voir aussi [25 , § 2.4.]) :

II.2.10. - Définition.- Etant donnée une mesure de Radon bornée $\nu : K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \longrightarrow H$, le processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \qquad X_t = \int e^{itx}\, \nu(dx) \; .$$

est dit (f)-harmonisable.

H. NIEMI a établi le lien suivant [25, prop. 3.2.1.].

II.2.11. - Théorème.- Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est faiblement continu et V-borné si, et seulement si, il est (f)-harmonisable.

De plus, dans ce cas, le processus X est continu et la mesure de Radon bornée ν qui lui est associée, est unique. Nous l'appellerons la mesure de Radon spectrale de X.

II.2.12. - Remarque : La similitude que nous pouvons constater entre la définition d'un processus harmonisable (proposition I.3.1.) et celle d'un processus (f)-harmonisable (définition II.2.10.) n'est pas fortuite. Par les théorèmes (II.2.11.) et (II.2.6.) nous obtenons :

Un processus est harmonisable si, et seulement si, il est (f)-harmonisable.

Afin de caractériser le noyau d'un processus (f)-harmonisable, nous donnons la définition de la bimesure fonctionnelle d'une mesure de Radon [25 , déf. 2.3.1. et déf. 2.4.10].

II.2.13. - Définitions.-

1 - Une application bilinéaire continue $B : K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \times K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée une bimesure sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2 - La bimesure fonctionnelle d'une mesure de Radon $\nu : K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \longrightarrow H$, est la bimesure $B : K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \times K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall f , g \in K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \quad , \qquad B(f,g) = (\nu(f), \overline{\nu(g)})_H \quad .$$

Ainsi, en utilisant la théorie de l'intégration par rapport à une bimesure (fonctionnelle) [32, § 5.17 ; 25 , § 2.3.], H. NIEMI obtient la caractérisation suivante des processus (f)-harmonisables :

II.2.14. - Théorème.- Un processus borné et faiblement continu $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$, est V-borné si, et seulement si, il existe une bimesure bornée B sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall f \in C_o(\mathbb{R}) \quad , \qquad 0 \leq B(f,\bar{f})$,

- $\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ (u,v) \rightsquigarrow (e^{itu} , e^{-isv}) \end{array}$ est "fortement" intégrable par rapport à B

pour tous t et s de $\mathbb{R}$,

- le noyau K de X peut être représenté sous la forme :

$$\forall t , s \in \mathbb{R} \quad , \quad (X_t,X_s)_H = K(t,s) = B(e^{it\cdot} , e^{-is\cdot}) \quad .$$

Dans ce cas la bimesure bornée B est l'unique bimesure fonctionnelle de la mesure de Radon spectrale ν du processus (f)-harmonisable X .

II.2.15. - Définition.- Nous appellerons <u>processus (f)-harmonisable à mesure spectrale,</u> un processus (f)-harmonisable dont la bimesure $B : K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \times K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est prolongeable en une mesure de Radon bornée sur $\mathbb{R}^2$; dans ce cas la mesure de Radon, qui est unique, sera appelée mesure spectrale du processus (f)-harmonisable.

II.2.16. - Remarque : H. NIEMI a donné une construction fonctionnelle de l'exemple du paragraphe (I.5.B.), afin de prouver l'existence de processus (f)-harmonisables sans mesure spectrale.

Nous prouverons dans l'annexe (A.3.), la correspondance suivante :

II.2.17. - Théorème.- <u>Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est harmonisable à mesure spectrale si, et seulement si, il est (f)-harmonisable à mesure spectrale.</u>

II.2.18. - *Tableau récapitulatif : Correspondances entre les différentes notions de processus harmonisables.*

Processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,A,P)$.

$$\begin{tikzcd}
\text{faiblement stationnaire et continu} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\text{harmonisable à mesure spectrale} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \text{(f)-harmonisable à mesure spectrale} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{harmonisable} \arrow[dr, Leftrightarrow] & & \text{(f)-harmonisable} \arrow[dl, Leftrightarrow] \\
& \text{V-borné et (faiblement) continu} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{borné et continu} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{V-borné} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \text{borné} &
\end{tikzcd}$$

II.3. - DOMINATION ENTRE LES PROCESSUS HARMONISABLES.-

(A) - DOMINATION.

II.3.1. - Définition.- Etant donnés deux processus du second ordre X_1 et X_2, nous dirons que X_1 domine X_2 si, et seulement si, la différence $K_1 - K_2$ de leurs deux noyaux est de type positif, et nous posons $K_2 \leq K_1$.

On définit ainsi un préordre sur l'ensemble des processus du second ordre ayant le même espace-temps T, et un ordre sur l'ensemble des noyaux hermitiens de type positif défini sur le même ensemble T [3].

Lorsque $T = \mathbb{R}$, la section commençante de tout noyau harmonisable ne contient que des noyaux harmonisables [22] :

II.3.2. - Théorème.- Tout processus dominé par un processus harmonisable est harmonisable.

Mais nous verrons, (prop. II.3.8), que tout processus harmonisable est dominé par un processus faiblement stationnaire continu en m.q. Donc puisqu'il existe des bimesures spectrales sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ non prolongeables (I.5.B.) et que toute bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est associée à un processus harmonisable [23, p. IV.35. th. 6 et p. V. 13. th. 1], nous obtenons qu'un processus dominé par un processus harmonisable à mesure spectrale n'est pas toujours un processus harmonisable à mesure spectrale.

Afin de caractériser la domination entre des processus harmonisables, à l'aide de leurs bimesures spectrales, nous allons montrer que la somme de deux bimesures spectrales sur un même espace mesurable, est une bimesure spectrale.

(B) - CONE CONVEXE DES BIMESURES SPECTRALES SUR UN ESPACE MESURABLE (Ω, A).

II.3.3. - Lemme.- Etant donnés K_1 et K_2 deux noyaux hermitiens de type positif sur un ensemble T, il existe un espace probabilisé (S,F,P) et deux fonctions aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, définies sur (S,F,P), d'espace - temps T, et de covariances respectives K_1 et K_2.

Preuve :

1) Pour $j = 1,2$, K_j est un noyau hermitien de type positif sur T ; il existe un espace probabilisé (S_j,F_j,P_j) et une f.a. gaussienne centrée X_j de covariance K_j, définie sur (S_j,F_j,P_j) [24 , prop. 3.4].

De plus l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{K}}(S_1,F_1,P_1) \otimes L^2_{\mathbb{K}}(S_2,F_2,P_2)$ est isomorphe à l'espace $L^2_{\mathbb{K}}(S_1 \times S_2, F_1 \otimes F_2, P_1 \otimes P_2)$ [24, prop. 6.6.].

2) Posons : $(S,F,P) = (S_1 \times S_2, F_1 \otimes F_2, P_1 \otimes P_2)$

et $\forall t \in T$, $\qquad Y_{1t} = X_{1t} \otimes 1 \quad , \quad Y_{2t} = 1 \otimes X_{2t}$.

Pour $j = 1,2$, la f.a. $Y_j = \{Y_{jt} ; t \in T\}$ définie sur (S,F,P), a les mêmes lois multi-dimensionnelles que la f.a. gaussienne X_j :

$$\forall n \geq 1 \quad , \quad \forall t_1, \ldots, t_n \in T \quad , \quad \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{K}} \quad ,$$

$$P_1 \otimes P_2 ((Y_{jt_1}, \ldots, Y_{jt_n}) \in B_1 \times \ldots \times B_n)$$

$$= P_1 \otimes P_2(\{(s_1,s_2) \in S_1 \times S_2, (X_{jt_1}(s_j), \ldots, X_{jt_n}(s_j)) \in B_1 \times \ldots \times B_n\})$$

$$= P_j((X_{jt_1}, \ldots, X_{jt_n}) \in B_1 \times \ldots \times B_n) \quad ;$$

par conséquent, Y_j est une f.a. gaussienne centrée de covariance K_j.

3) La f.a. $Y_1 = \{Y_{1t} : t \in \mathbb{R}\}$ est $F_1 \times S_2$ - mesurable tandis que $Y_2 = \{Y_{2t} : t \in T\}$ est $S_1 \times F_2$ - mesurable. Les tribus $F_1 \times S_2$ et $S_1 \times F_2$ étant P-indépendantes, les f.a. Y_1 et Y_2 sont P-indépendantes. ■

Nous pouvons maintenant montrer que la somme de deux bimesures spectrales est une bimesure spectrale.

II.3.4. - Proposition.- La somme M de deux bimesures spectrales M_1 et M_2 sur un espace mesurable (Ω, A) est une bimesure spectrale sur (Ω, A).

De plus, pour toutes les fonctions mesurables bornées f et $g : (\Omega, A) \longrightarrow (\mathbb{K}, B_{\mathbb{K}})$, nous avons :

$$\iint f \otimes \bar{g} \, dM = \iint f \otimes \bar{g} \, dM_1 + \iint f \otimes \bar{g} \, dM_2 .$$

Preuve : L'intégration par rapport à une bimesure spectrale a été introduite par Yu. A. ROZANOV [26]. Elle a été simplifiée par R. MOCHÉ [23, chap. IV] après qu'ait été obtenue la forme générale des bimesures spectrales (th. I.2.5.). Nous reprenons ici ce dernier type d'argument.

1) Puisque M_1 et M_2 sont des noyaux hermitiens de type positif sur A, il existe un espace probabilisé (S, F, P) et deux f.a. gaussiennes μ_1 et μ_2 définies sur (S, F, P), centrées, indépendantes, d'espace - temps A, et de covariances respectives M_1 et M_2.

Vérifions que pour tout j de $\{1,2\}$, $\mu_j : A \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(S, F, P)$ est une mesure stochastique :

- *additivité* : deux événements disjoints, A_1 et A_2 de A, vérifient :

$$\forall B \in A \quad , \quad M_j(A_1 + A_2, B) = M_1(A_1, B) + M_j(A_2, B) \; ,$$

d'où $$E((\mu_j(A_1 + A_2) - \mu_j(A_1) - \mu_j(A_2)).\bar{\mu}_j(B)) = 0 ,$$

ainsi $$E(|\mu_j(A_1 + A_2) - \mu_j(A_1) - \mu_j(A_2)|^2) = 0 ,$$

et $$\mu_j(A_1 + A_2) = \mu_j(A_1) + \mu_j(A_2) .$$

- *σ-additivité* :

$$(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \text{ et } A_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} \emptyset \Longrightarrow M_j(A_n,A_n) = ||\mu_j(A_n)||^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

2) μ_1 et μ_2 étant indépendantes, la mesure stochastique $\mu = \mu_1 + \mu_2$ vérifie :

$$\forall A , B \in \mathcal{A} \quad E(\mu(A).\overline{\mu(B)}) = E(\mu_1(A).\overline{\mu_1(B)}) + E(\mu_2(A) . \overline{\mu_2(B)})$$

$$= M_1(A \times B) + M_2(A \times B) = M(A \times B) ;$$

ainsi l'application $M = M_1 + M_2 : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$, est la bimesure spectrale de la mesure stochastique μ (th. I.2.5.).

3) Toute fonction mesurable bornée $f : (\Omega,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ est μ, μ_1 et μ_2 - intégrable [23 , th. 3 p. IV.25], et vérifie :

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_1 + \int f\, d\mu_2 .$$

Il en résulte que si les fonctions mesurables f et $g : (\Omega,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ sont bornées, elles vérifient

$$\iint f \otimes \bar{g}\, dM = E(\int f\, d\mu . \overline{\int g\, d\mu})$$

$$= E(\int f\, d\mu_1 . \overline{\int g\, d\mu_1}) + E(\int f\, d\mu_1 . \overline{\int g\, d\mu_2})$$

$$+ E(\int f\, d\mu_2 . \overline{\int g\, d\mu_1}) + E(\int f\, d\mu_2 . \overline{\int g\, d\mu_2}) ;$$

mais les fonctions aléatoires μ_1 et μ_2 d'espace-temps $\mathcal{A}$ sont indépendantes :

$$\forall A\ ,\ B \in \mathcal{A}\ ,\quad E(\mu_1(A)\ .\ \overline{\mu_2(B)}) = 0\ ,$$

donc les sous-espaces de Hilbert $L^2(\mu_1)$ et $L^2(\mu_2)$ de $L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$, engendrés respectivement par $\{\mu_j(A) : A \in \mathcal{A}\}$ pour $j = 1;2$, sont orthogonaux et nous obtenons :

$$\iint f \otimes \bar{g}\ dM = E(\int f\ d\mu_1\ .\ \overline{\int g\ d\mu_1}) + E(\int f\ d\mu_2\ .\ \overline{\int g\ d\mu_2})$$

$$= \iint f \otimes \bar{g}\ dM_1 + \iint f \otimes \bar{g}\ dM_2\ .\ \blacksquare$$

II.3.5. - Corollaire.- Etant donné un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, l'ensemble des bimesures spectrales définies sur $(\Omega,\mathcal{A})$ est un cône convexe que nous noterons $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$.

De plus, pour tous M , M_1 , M_2 de $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A})$, et tous a_1 , a_2 de $\mathbb{R}^+$,

si $$M = a_1\ .\ M_1 + a_2\ .\ M_2$$

alors, toutes fonctions mesurables bornées f et $g : (\Omega,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}\ ,\ \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ vérifient

$$\iint f \otimes \bar{g}\ dM = a_1 \iint f \otimes \bar{g}\ dM_1 + a_2\ .\ \iint f \otimes \bar{g}\ dM_2\ .$$

Preuve : Soit une bimesure spectrale $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$; il existe une mesure stochastique μ dont la bimesure spectrale associée est M (th. I.2.5.).

Pour tout nombre réel a positif, l'application : $a\ .\ M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(A,B) \rightsquigarrow a\ .\ M(A \times B)$ est la bimesure spectrale associée à la mesure stochastique $\sqrt{a}\ .\ \mu$; de plus, d'après la théorie de l'intégration par rapport à une mesure hilbertienne [23 , chap. IV], toutes fonctions boréliennes bornées f et $g : (\Omega,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}\ ,\ \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ vérifient :

$$\int f\, d(\sqrt{a}\,.\,\mu) = \sqrt{a}\,.\int f\, d\mu$$

$$\iint f \otimes \bar{g}\, d(a\,.\,M) = a.\iint f \otimes \bar{g}\, dM \quad .$$

Ainsi, nous pouvons conclure grâce à la proposition précédente. ■

II.3.6. - Définition.- Etant donnés un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ et deux bimesures spectrales M_1 et $M_2 : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$, nous dirons que M_1 domine M_2 lorsque $M_1 - M_2$ est de type positif, autrement dit, lorsque $M_1 - M_2$ est une bimesure sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

II.3.7. - Remarques :

1 - Nous venons de définir une relation de preordre dans le cône convexe $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(A)$ des bimesures spectrales sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$.

2 - Etant donnée une mesure positive finie m sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, il existe une unique mesure $R(m)$ sur l'espace mesurable $(\Omega \times \Omega,\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ qui vérifie :

$$\forall A\ ,\ B \in \mathcal{A} \quad , \qquad R(m)\ (A \times B) = m(A \cap B)$$

$R(m)$ est une mesure spectrale sur $(\Omega,\mathcal{A})$ concentrée sur la 1ère bissectrice.

Nous dirons que m domine M lorsque $R(m)$ domine M , M étant une bimesure spectrale sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

Ⓒ - CARACTERISATION DE LA DOMINATION DES PROCESSUS HARMONISABLES PAR LES BIMESURES SPECTRALES.

II.3.8. - Théorème.- Soient deux processus harmonisables X_1 et X_2 de bimesures spectrales respectives M_1 et M_2 .

X_1 domine X_2 si, et seulement si, $M_1 - M_2$ est une bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}\ ,\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, autrement dit, si, et seulement si M_1 domine M_2 .

Preuve :

- *Condition nécessaire* : Supposons que X_1 domine X_2, donc que le noyau hermitien $K_1 - K_2$ est de type positif sur $\mathbb{R}$; il existe un processus X gaussien centré d'espace-temps $\mathbb{R}$ et de covariance $K = K_1 - K_2$ [24, prop. 3.4].

Le noyau $K_2 = K_1 - K$ est de type positif, donc le processus X est dominé par le processus harmonisable X_1 et, d'après R. MOCHÉ [22, th. II.2], X est harmonisable.

En notant M la bimesure spectrale de X, nous obtenons l'expression suivante du noyau $K_1 = K + K_2$:

$$\forall x , y \in \mathbb{R} , \quad K_1(x,y) = \iint e^{i(tx-sy)} M(dx,dy) + \iint e^{i(tx-sy)} M_2(dx,y) ,$$

et que la bimesure spectrale $M + M_2$ est associée au processus harmonisable X_1. Mais un processus harmonisable possède une unique bimesure spectrale [23, p. V.3], donc la bimesure spectrale M_1 du processus X_1 est égale à la somme $M + M_2$.

Par conséquent, la différence $M_1 - M_2$, qui est égale à M, est une bimesure spectrale.

- *Condition suffisante* : Supposons que les processus X_1 et X_2 sont tels que $M = M_1 - M_2$ soit une bimesure spectrale.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ borélienne bornée, la bimesure spectrale $M_1 = M + M_2$ vérifie (prop. II.3.4.) :

$$\iint f \otimes \bar{f} \, dM_1 = \iint f \otimes \bar{f} \, dM + \iint f \otimes \bar{f} \, dM_2 ,$$

et $$0 \leq \iint f \otimes \bar{f} \, dM ;$$

par conséquent $$0 \leq \iint f \otimes \bar{f} \, dM_2 \leq \iint f \otimes \bar{f} \, dM_1 .$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, pour tous les réels $t_1,\dots,t_n$, et les scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, en appliquant la relation précédente à la fonction $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, e^{it_j x}$, nous obtenons :

$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j . \bar{\alpha}_k . K_2(t_j,t_k) \leq \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j . \bar{\alpha}_k . K_1(t_j,t_k) \quad ,$$

où K_1 et K_2 sont les noyaux respectifs des processus X_1 et X_2.

Ainsi le noyau $K_1 - K_2$ est de type positif, et X_1 domine X_2. ■

La domination des bimesures spectrales sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est donc un ordre, on pourrait démontrer directement que la domination des bimesures sur un espace mesurable quelconque est un ordre.

De la démonstration précédente nous tirons :

II.3.9. - <u>Corollaire</u>.- X_1 <u>domine</u> X_2 <u>si, et seulement si, toute fonction</u> $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, <u>borélienne bornée, vérifie</u> :

$$0 \leq \iint f \otimes \bar{f}\, dM_2 \leq \iint f \otimes \bar{f}\, dM_1 \; .$$

II.3.10. - <u>Proposition</u>.- <u>Soient deux processus harmonisables</u> X_1 <u>et</u> X_2 <u>de bimesures spectrales respectives</u> M_1 <u>et</u> M_2 <u>telles qu'il existe une suite</u> $(r_n)_{n\geq 1}$ <u>de nombres entiers vérifiant</u> :

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n} = +\infty$,

<u>et</u> ii) $\forall n \geq 1$, $\forall c_{-r_n},\dots, c_{r_n} \in \mathbb{C}$,

$$0 \leq \sum_{j,k=-r_n}^{r_n} c_j \,.\, \bar{c}_k \,.\, (M_1 - M_2)\left(\left]\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \quad ,$$

<u>alors</u> X_1 <u>domine</u> X_2, <u>autrement dit</u>, $M_1 - M_2$ <u>est une bimesure spectrale</u>.

<u>*Remarque*</u> : D'après le théorème (II.3.8.) nous avons le résultat réciproque : si X_1 domine X_2 alors toute suite croissante $(r_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels vérifie la condition (ii).

Preuve : Considérons une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant les conditions (i) et (ii).

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, notons :

$$\varphi_t : x \rightsquigarrow e^{itx} \quad ,$$

$$\varphi_{nt} : x \rightsquigarrow \sum_{j=-r_n}^{r_n} e^{it\frac{j}{n}} \cdot 1_{]\frac{j}{n} ; \frac{j+1}{n}]}(x) \; .$$

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_{nt}(x) = \varphi_t(x)$

et $\forall n$, $|\varphi_{nt}(x)| \leq |\varphi_t(x)| = 1$

2) Soient m de $\mathbb{N}^*$, $t_1,\dots,t_m$ de $\mathbb{R}$ et $a_1,\dots,a_m$ de $\mathbb{C}$.

Notons

$$A = \sum_{p,q=1}^{m} a_p \cdot \overline{a_q} \cdot (K_1(t_p,t_q) - K_2(t_p,t_q))$$

$$= \sum_{p,q=1}^{m} a_p \cdot \overline{a_q} \cdot \{E(\int \varphi_{t_p}\, d\mu_1 \cdot \overline{\int \varphi_{t_q}\, d\mu_1}) - E(\int \varphi_{t_p}\, d\mu_2 \cdot \overline{\int \varphi_{t_q}\, d\mu_2})\}.$$

D'après le théorème de convergence dominée pour les mesures hilbertiennes [23,th. IV.10.10], nous avons :

pour $\ell = 1;2$ et $\forall p \leq m$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int \varphi_{nt_p}\, d\mu_\ell = \int \varphi_{t_p}\, d\mu_\ell$;

ainsi $A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p,q=1}^{m} a_p \cdot \overline{a_q} \cdot \{E(\int \varphi_{nt_p}\, d\mu_1 \cdot \overline{\int \varphi_{nt_q}\, d\mu_1})$

$$- E(\int \varphi_{nt_p}\, d\mu_2 \cdot \overline{\int \varphi_{nt_q}\, d\mu_2})\} \quad ;$$

donc en remplaçant les fonctions φ_{nt_p} par leurs expressions :

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p,q=1}^{m} a_p \cdot \overline{a_q} \cdot \sum_{j,k=-r_n}^{r_n} e^{i(t_p.\frac{j}{n} - t_q.\frac{k}{n})} \times (M_1 - M_2)(]\tfrac{j}{n} ; \tfrac{j+1}{n}] \times]\tfrac{k}{n} ; \tfrac{k+1}{n}])$$

d'où $$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j,k=-r_n}^{r_n} c_{jn} \cdot \overline{c_{kn}} \cdot (M_1 - M_2)\ (]\tfrac{j}{n} ; \tfrac{j+1}{n}] \times]\tfrac{k}{n} ; \tfrac{k+1}{n}])$$

avec $$c_{jn} = \sum_{p=1}^{m} a_p\, e^{it_p \frac{j}{n}} \quad , \quad - r_n \leqslant j \leqslant r_n \ .$$

Ainsi, d'après (ii), l'expression A est positive.

Le noyau $K_1 - K_2$ est de type positif, et X_1 domine X_2 . ■

(D) - *DOMINATION ET PROCESSUS FAIBLEMENT STATIONNAIRES.*

La domination entre les processus faiblement stationnaires se caractérise par :

II.3.11. - Proposition.- Considérons deux processus X_1 et X_2 faiblement stationnaires, continus (en m.q.), de mesures spectrales respectives $R(m_1)$ et $R(m_2)$.

X_1 domine X_2 si, et seulement si, $m_1 - m_2$ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Preuve :

- *Condition nécessaire* : si X_1 domine X_2 , alors $R(m_1) - R(m_2)$ est une bimesure spectrale ; d'où :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \qquad R(m_2)\ (B \times B) \leqslant R(m_1)\ (B \times B)$$

et $$m_2(B) \leqslant m_1(B) \ .$$

- *Condition suffisante :* si $m_1 - m_2$ est une mesure positive, alors pour tout $n \geq 1$, tous $a_1,\dots,a_n$ de $\mathbb{C}$, et tous $B_1,\dots,B_n$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ nous avons :

$$0 \leq \int \Big| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot 1_{B_j} \Big|^2 d(m_1 - m_2)$$

donc
$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{n} a_j \cdot \overline{a_k} \cdot (R(m_1) - R(m_2))\,(B_j \times B_k) ,$$

ainsi nous obtenons aisément que $R(m_1) - R(m_2)$ est une bimesure spectrale et que X_1 domine X_2, d'après le théorème (II.3.8). ■

II.3.12. - *Remarque :* L'application $R : m \rightsquigarrow R(m)$ définie sur l'ensemble des mesures positives finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ muni de la relation d'ordre usuelle, à valeurs dans l'ensemble des bimesures spectrales sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ concentrées sur la $1^{\text{ère}}$ bissectrice muni de la domination, est un isomorphisme d'espaces ordonnés.

R. MOCHÉ [22] a donné des conditions nécessaires et une condition suffisante sur les mesures spectrales, pour qu'un processus harmonisable à mesure spectrale domine un processus faiblement stationnaire et continu.

Le résultat ci-dessous jouera un rôle essentiel par la suite.

II.3.13. - *Proposition.*- Tout processus harmonisable est dominé par un processus faiblement stationnaire et continu.

Preuve : A.G. MIAMEE et H. SALEHI ont montré que toute bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est dominée par une mesure positive finie ([21, lemme 3]; voir aussi [23, chap. VI. § III.4] où l'on trouve une démonstration simplifiée).

Soit un processus harmonisable X de bimesure spectrale dominée par une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Il existe un processus Y faiblement stationnaire et continu en m.q., de bimesure spectrale $R(m)$ [22] . D'après le théorème (II.3.8.), Y domine X. ■

II.3.14. - Proposition.- L'ensemble des processus faiblement stationnaires, continus en m.q. et dominant un processus harmonisable donné admet un élément minimal pour la domination entre les processus.

Preuve : D'après le théorème (II.3.8.) et la remarque (II.3.12.) cette proposition est équivalente à :

L'ensemble des mesures positives finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dominant une bimesure spectrale donnée, admet un élément minimal.

Pour prouver ceci, nous allons utiliser le lemme de Zorn.

En effet, considérons l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures positives finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dominant une bimesure spectrale M fixée.

1) *Cet ensemble $\mathcal{M}$ n'est pas vide.*

Il existe une mesure positive finie m_1 vérifiant :

$$\iint f(s).\overline{f(t)}\, M(dt,ds) \leq \int |f(t)|^2\, m_1(dt)$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, borélienne bornée [21, lemme 3] ; donc, d'après le corollaire (II.3.9.), m_1 domine M :

$$m_1 \in \mathcal{M} \quad .$$

2) *Cet ensemble $\mathcal{M}$ est inductif pour la relation $\leq$ entre mesures.*

Les éléments de tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}$ étant des mesures positives finies, l'ensemble $\{m(\mathbb{R}) : m \in \mathcal{T}\}$ admet une borne inférieure positive que nous noterons α .

Lorsque $\mathcal{T}$ est totalement ordonné, il existe une suite décroissante $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, qui vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}) = \alpha .$$

Dans ce cas, pour tout borélien B , la suite $(m_n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0 , elle possède une limite que nous noterons $m^*(B)$; et d'après le théorème de Vitali - Hahn - Saks [10, cor. III.7.3.], la fonction d'ensembles obtenue : m^* , est une mesure qui est positive et bornée.

Si m' est un élément de $\mathcal{T}$ tel qu'il existe un borélien B qui vérifie :

$$m'(B) < m^*(B) ,$$

$\mathcal{T}$ étant totalement ordonné, nous obtenons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \qquad m' \leq m_n$$

ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\qquad m'(B^c) \leq m_n(B^c)$,

et $\qquad m'(B^c) \leq m^*(B^c)$,

par conséquent, $\qquad m'(\mathbb{R}) = m'(B) + m'(B^c) < m^*(B) + m^*(B^c) = m^*(\mathbb{R}) = \alpha$;

ce qui contredit l'existence de la borne inférieure α . Pour tout élément m de T, nous pouvons donc écrire :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \qquad m^*(B) \leq m(B) ,$$

et

(2.1) $\qquad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \qquad m^*(B) = \inf\{m(B) : m \in \mathcal{T}\}$

Or lorsque $p \in \mathbb{N}^*$, $c_1,\dots,c_p \in \mathbb{C}$ et $B_1,\dots,B_p \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad 0 \leq \sum_{j,k=1}^{p} c_j.\overline{c_k}.M(B_j \times B_k) \leq \sum_{j,k=1}^{p} c_j.\overline{c_k}.m_n(B_j \cap B_k) ,$$

d'où, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{j,k=1}^{p} c_j \cdot \overline{c_k} \cdot M(B_j \times B_k) \leq \sum_{j,k=1}^{p} c_j \cdot \overline{c_k} \cdot m^*(B_j \cap B_k) \ ;$$

par conséquent , m^* est une mesure positive finie dominant M : elle est un élément de $\mathcal{M}$.

Comme elle vérifie la relation (2.1.), tout élément de $\mathcal{T}$ lui est supérieur ou égal, donc $\mathcal{T}$ admet une borne inférieure qui est m^* .

Ainsi l'ensemble $\mathcal{M}$ est inductif, il admet un élément minimal, c'est-à-dire un élément m tel que :

$$m' \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad m' \lesssim m \implies m' = m \ . \ \blacksquare$$

CHAPITRE III

INTRODUCTION A LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES.

III.1. - INTRODUCTION.-

L'étude de la loi forte des grands nombres (L.F.G.N.) pour les processus faiblement stationnaires et continus, et pour les processus harmonisables à mesure spectrale, fut abordée par différents auteurs.

M. LOEVE [19], A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD [4], I.N. VERBISTKAYA [33] et V.F. GAPOSHKIN [13] ont donné des conditions suffisantes portant sur la covariance dans le cas des processus faiblement stationnaires et continus.

V.F. GAPOSHKIN, dans le cas précédent, et A. ARIMOTO [2], pour les processus harmonisables à mesure spectrale, ont établi des conditions suffisantes portant sur la mesure spectrale (où sa variation totale).

Dans ce chapitre - à l'aide des techniques de calcul employées par J. ROUSSEAU [27] et de la domination des bimesures spectrales sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par des mesures positives finies, obtenue par A.G. MIAMEE et H. SALEHI [21] - nous montrons que la L.F.G.N. est vérifiée par un processus harmonisable X, si et seulement s'il existe un entier $p > 1$ tel que la mesure stochastique spectrale μ de X vérifie la condition suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s. } \mu(]-p^{-n}, p^{-n}[) = 0 \quad .$$

V.F. GAPOSHKIN est parvenu à ce résultat pour les processus stationnaires et continus [13, th. 2], et pour les processus harmonisables à mesure spectrale [14, § 3.6]. Nous apportons donc la généralisation de ce dernier résultat aux processus harmonisables quelconques.

Notons qu'à partir de maintenant, la nature de notre étude change radicalement : les deux premiers chapitres traitaient de certaines propriétés du second ordre des processus par l'utilisation de techniques strictement hilbertiennes. Maintenant, l'attention va se porter sur les trajectoires de ces processus.

Notons aussi que, pour nous, un processus $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ du second ordre est faiblement stationnaire si :

$$\forall t , s, h \in \mathbb{R} , \qquad E(X_t \cdot \bar{X}_s) = E(X_{t+h} \cdot \bar{X}_{s+h}) ,$$

tandis qu'ordinairement, est imposée la constance de la moyenne : $t \rightsquigarrow E(X_t)$, condition qui est tout à fait superflue dans cette étude.

III.2. - POSITION DU PROBLÈME.-

III.2.1. - Définition.- Etant donnée une fonction aléatoire (f.a.) réelle ou complexe $X = \{X_t , t \in \mathbb{R}\}$ définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P), nous dirons que X vérifie la L.F.G.N. lorsqu'il existe un ensemble Ω_o, A-mesurable et de probabilité 1, tel que :

$\forall \omega \in \Omega_o$,

- l'application $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ soit $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ - mesurable et localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$,

- et $$\frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau(\omega)\, d\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 .$$

III.2.2. - Cas d'un processus du second ordre continu.

Considérons $X = \{X_t \,,\, t \in \mathbb{R}\}$ un processus du second ordre continu défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Puisque l'application $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \rightsquigarrow X_t$, est continue, le sous-espace de Hilbert $L^2(X)$ de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est séparable et l'application $t \rightsquigarrow ||X_t||$ est continue, donc $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - mesurable ; d'après le théorème de caractérisation de la Bochner - intégrabilité [23 , th. 8. p. III.11], nous en déduisons que le processus X est Bochner - intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

En passant par l'intermédiaire de l'intégrale de Pettis [23 , th. 5 p. III.10], il est clair que les intégrales de X sur les quatre intervalles d'extrémités a et b $(a < b)$ sont égales et nous notons $\int_a^b X_t \, dt$ leur valeur commune dans $L^2(X)$.

Lorsque la f.a. $X : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(\omega, t) \rightsquigarrow X_t(\omega)$ est, de plus, $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ - mesurable, il existe un ensemble Ω_o , $\mathcal{A}$-mesurable de probabilité 1, tel que pour tout ω de Ω_o , la fonction $X_{\cdot}(\omega) : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ soit localement intégrable ; de plus, pour tous a et b de $\mathbb{R}$, $a \leq b$, la variable aléatoire P - presque partout définie par $\omega \rightsquigarrow \int_a^b X_t(\omega) \, dt$, appartient à la classe d'équivalence de $\int_a^b X_t \, dt$ dans $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ [24, prop.3.9].

Dans ce cas, pour $t > 0$, nous noterons la moyenne du processus X sur $[-t, t]$ par :

$$\sigma_t(X) = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau \, d\tau \; .$$

Il est entendu que nous choisirons toujours pour représentant de cet élément de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la v.a. P - presque partout définie par :

$$\omega \rightsquigarrow \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau(\omega)\, d\tau \ .$$

La moyenne $\sigma(X) = \{\sigma_t(X) \ : t > 0\}$ est, alors, un processus du second ordre continu et P - p.s. à trajectoires continues [13 , prop. 5. p. III.5], et le processus X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.} \quad \sigma_t(X) = 0 \quad .$$

III.2.3. - *Convention*.- Dans la suite, le processus du second ordre et continu $X = \{X_t \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ sera toujours supposé mesurable.

Ceci n'est qu'une commodité, puisque tout processus réel et continu - étant continu en probabilité - admet une modification mesurable.

III.3. - PREMIÈRE RÉDUCTION DU PROBLÈME.-

Comme l'ont fait les différents auteurs cités à ce sujet, nous ramenons l'étude du comportement asymptotique P - p.s. du processus $\{\sigma_t(X) : t > 0\}$, à celle d'une suite. Nous suivons ici plus particulièrement la démarche de J. ROUSSEAU .

III.3.1. - *Lemme*.- Pour toute suite $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(|\Psi_n|^2) < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \quad \Psi_n = 0$$

Preuve : Le théorème de Beppo-Levy nous donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(|\Psi_n|^2) < +\infty \implies E(\sum_{n=0}^{+\infty} |\Psi_n|^2) < +\infty \quad ,$$

par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\Psi_n|^2 < +\infty \qquad P - p.s.$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} P - p.s.\ \Psi_n = 0 \quad .$$

Le résultat suivant est de A. BLANC-LAPIERRE et A. TORTRAT [6]. Il a été réétabli par J. ROUSSEAU dans le cas $t_n = n$.

III.3.2. - Proposition.- Soit $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus du second ordre, continu et tel que $\sup\{E(|X_t|^2) : t \in \mathbb{R}\} = c^2 < +\infty$.

Pour toute suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1\right)^2 < +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - p.s. \sup_{t_n<t\leq t_{n+1}} |\sigma_t(X) - \sigma_{t_n}(X)| = 0 \ .$$

Preuve : D'après le lemme (III.3.1.) il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E\Big(\sup_{t_n<t\leq t_{n+1}} |\sigma_t(X) - \sigma_{t_n}(X)|^2\Big) < +\infty \ .$$

1) *Etude trajectoire par trajectoire*. Pour P-presque tout ω et pour $t_n < t \leq t_{n+1}$, nous avons :

$$|\sigma_t(X)(\omega) - \sigma_{t_n}(X)(\omega)|^2$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2t_n}\right)\int_{-t_n}^{t_n} X_\tau(\omega)\,d\tau + \frac{1}{2t}\int_{-t}^{-t_n} X_\tau(\omega)\,d\tau + \frac{1}{2t}\int_{t_n}^{t} X_\tau(\omega)\,d\tau\right|^2 \ ;$$

ainsi en développant et en remarquant que :

$$0 < \frac{1}{2t} < \frac{1}{2t_n} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{2t_n} - \frac{1}{2t} \leq \frac{a_n}{2t_n^2} \quad \text{où} \quad a_n = t_{n+1} - t_n ,$$

nous obtenons :

$$|\sigma_t(X)(\omega) - \sigma_{t_n}(X)(\omega)|^2$$

$$\leq \frac{a_n^2}{4t_n^4} \int_{-t_n}^{t_n} \int_{-t_n}^{t_n} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta + \frac{1}{4t_n^2} \int_{-t}^{-t_n} \int_{-t}^{-t_n} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta$$

$$+ \frac{1}{4t_n^2} \int_{t_n}^{t} \int_{t_n}^{t} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta + \frac{a_n}{2t_n^3} \int_{-t_n}^{t_n} \int_{-t}^{-t_n} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta$$

$$+ \frac{a_n}{2t_n^3} \int_{-t_n}^{t_n} \int_{t_n}^{t} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta + \frac{1}{2t_n^2} \int_{-t}^{-t_n} \int_{t_n}^{t} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta .$$

2) Donc, le théorème de Fubini et l'inégalité de Schwarz nous donnent :

$$E(\sup_{t_n < t \leq t_{n+1}} |\sigma_t(X) - \sigma_{t_n}(X)|^2)$$

$$\leq \left[\frac{a_n^2}{4t_n^4} . (2t_n)^2 + \frac{1}{4t_n^2} . a_n^2 + \frac{1}{4t_n^2} . a_n^2 + \frac{a_n}{2t_n^3} . (2t_n a_n) + \frac{a_n}{2t_n^3} . (2t_n a_n) + \frac{1}{2t_n^2} . a_n^2\right] . c^2 ,$$

ainsi

$$\leq 4\, c^2 . \left(\frac{a_n}{t_n}\right)^2 = 4\, c^2 . \left(\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1\right)^2 . \blacksquare$$

III.3.3. - *Remarque* : Sous les hypothèses de la proposition (III.3.2.), l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \sigma_t(X) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \sigma_{t_n}(X) = 0 \quad ;$$

ce qui ramène l'étude de la L.F.G.N. à un problème séquentiel.

En particulier :

III.3.4. - Corollaire.- Tout processus harmonisable mesurable X vérifie :

- $\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \sup_{n<t\leq n+1} |\sigma_t(X) - \sigma_n(X)| = 0$,

- $\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \sigma_t(X) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \sigma_n(X) = 0$.

Preuve : En effet, la mesure stochastique spectrale μ de X vérifie [23 , prop. 5. p. V.3] :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \qquad E(|X_t|^2) \leq (||\mu||(\mathbb{R}))^2 < +\infty \quad .$$

Ainsi, en utilisant la proposition précédente avec $t_n = n$, nous pouvons conclure. ■

III.4. - REPRÉSENTATION DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE.-

III.4.1. - Convention.- Pour tout u de $\mathbb{R}$, $\frac{\sin(u)}{u}$ désignera la valeur en u de la fonction entière, bornée $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$u \rightsquigarrow \begin{cases} 1 \ , & \text{si} \quad u = 0 \\ \dfrac{\sin(u)}{u} \ , & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

ϑ est intégrable par rapport à toute mesure hilbertienne sur $(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ [23 , th. 3. p. IV. 25].

III.4.2. - Remarque : Considérons un processus harmonisable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ défini sur un espace probabilisé (Ω, A, P) ; sa moyenne sur tout intervalle $[-t, t]$, $t > 0$, est alors égale à :

$$\sigma_t(X) = \frac{1}{2t} \cdot \int_{-t}^{t} X_\tau \, d\tau \ ,$$

où l'intégrale envisagée est l'intégrale de Bochner.

III.4.3. - Théorème.- <u>Lorsque</u> X <u>est un processus harmonisable mesurable, de mesure stochastique spectrale</u> μ, <u>la moyenne</u> $\sigma(X)$ <u>de</u> X <u>s'écrit</u> :

$$\forall t > 0 \ , \qquad \sigma_t(X) = \int \frac{\sin(tu)}{tu} \, \mu(du) \ .$$

<u>De plus la bimesure spectrale</u> M <u>de</u> X <u>vérifie</u> :

$$\forall t, s > 0, \quad E(|\sigma_t(X) - \sigma_s(X)|^2) = \iint \left(\frac{\sin(tu)}{tu} - \frac{\sin(su)}{su}\right) . \left(\frac{\sin(tv)}{tv} - \frac{\sin(sv)}{sv}\right) M(du, dv) \ .$$

Preuve : Le processus harmonisable X s'exprime sous la forme :

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \ , \qquad X_\tau = \int e^{i\tau u} \, \mu(du)$$

ainsi

$$\forall t > 0 \ , \qquad \sigma_t(X) = \frac{1}{2t} \cdot \int_{-t}^{t} \left(\int e^{i\tau u} \, \mu(du) \right) d\tau \ .$$

L'application : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(u, \tau) \rightsquigarrow e^{i\tau u}$, est $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} ; \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ - mesurable et bornée, elle vérifie, d'après le théorème de Fubini mixte [23 , th. p. IV.32] :

$$\forall t > 0 \ , \qquad \int_{-t}^{t} \left(\int e^{i\tau u} \, \mu(du) \right) d\tau = \int \left(\int_{-t}^{t} e^{i\tau u} \, d\tau \right) \mu(du)$$

d'où

$$\sigma_t(X) = \int \frac{\sin(tu)}{tu} \, \mu(du) \ .$$

Par définition de l'intégration par rapport à une bimesure spectrale [23 , p. IV.39] nous avons :

$$\forall t , s > 0 , \quad E|\sigma_t(X)-\sigma_s(X)|^2 = E(\left|\int \left(\frac{\sin(tu)}{tu} - \frac{\sin(su)}{su}\right) \mu(du)\right|^2)$$

$$= \iint \left(\frac{\sin(tu)}{tu} - \frac{\sin(su)}{su}\right) . \left(\frac{\sin(tv)}{tv} - \frac{\sin(sv)}{sv}\right) M(du,dv) \quad \blacksquare$$

III.5. - DÉCOMPOSITION DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE : NOUVELLE RÉDUCTION DU PROBLÈME.-

Le corollaire (III.3.4.) nous a permis de restreindre notre étude à celle de la convergence de la suite $(\sigma_n(X))_{n \geq 1}$.

Le processus X étant harmonisable, la moyenne $\sigma_n(X)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_n(X) = (\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X)) + \int_{\{u:p^{-q} \leq |u|\}} \frac{\sin(p^q.u)}{p^q.u} \mu(du)$$

$$+ \int_{\{u:|u|<p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q.u)}{p^q.u} - 1\right) \mu(du) + \mu(]- p^{-q} , p^{-q}[) ,$$

avec $n , p, q \in \mathbb{N}$, $p^q < n \leq p^{q+1}$ et $p > 1$.

Nous allons montrer que, pour p fixé, les trois premiers termes de cette somme tendent P - p.s. vers 0 , lorsque n tend vers $+ \infty$; ce qui donnera une nouvelle réduction du problème.

Pour cela, nous utiliserons la domination - qui nous permettra de substituer à la bimesure spectrale de X , une mesure positive finie concentrée sur la diagonale de $\mathbb{R}^2$, grâce à un résultat de A.G. MIAMEE et H. SALEHI [21 , lemme 4] - et la technique de découpage de l'axe réel, employée par I.N. VERBITSKAYA [33] et J. ROUSSEAU [27], qui donneront des majorations suffisantes.

Compte tenu de la représentation de la moyenne $\sigma(X)$ obtenue ci-dessus, nous serons amenés à utiliser les inégalités suivantes :

III.5.1. - Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour $0 < s < t$, nous avons :

(i.1) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - \dfrac{\sin(su)}{su}\right| \leq c \,.\, |u| \,.\, (t-s)$,

(i.2) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - 1\right| \leq c \,.\, |u| \,.\, t$,

(i.3) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - \dfrac{\sin(su)}{su}\right| \leq c \,.\, (\frac{t}{s} - 1)$,

(i.4) $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - \dfrac{\sin(su)}{su}\right| \leq \dfrac{c}{|u|.s}$,

(i.5) $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu}\right| \leq \dfrac{c}{|u|.t}$.

Ces cinq majorations se vérifient aisément, les trois premières s'obtenant à l'aide du théorème des accroissements finis.

III.5.2. - *Lemme*.- Soient une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ et une suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs.

1) Si la suite $(t_n^{-2} \,.\, \sum_{r=0}^{n} t_r^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \int_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right) \mu(du) = 0 .$$

2) Si la suite $(t_n^2 \,.\, \sum_{r=n}^{+\infty} t_r^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^{-2} < +\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \int_{\{u:t_n^{-1}\leq|u|\}} \frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} \mu(du) = 0 .$$

3) <u>Si la suite</u> $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>vérifie simultanément les trois conditions précédentes, alors</u> :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \left[\int \frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\ \mu(du) - \mu(]-t_n^{-1}, t_n^{-1}[)\right] = 0 .$$

Preuve : Lorsque $M : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une bimesure spectrale, comme nous l'avons déjà dit, il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine M [21, lemme 4].

Puisque l'application : $u \rightsquigarrow \frac{\sin(u)}{u}$ est continue bornée dans $\mathbb{R}$, la domination de M par m entraîne les inégalités suivantes pour tout entier n :

$$0 \leqslant \iint_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}^2} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right).\left(\frac{\sin(t_n.v)}{t_n.v} - 1\right) M(du,dv)$$

$$\leqslant \int_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right)^2 m(du) \quad \text{(lemme II.3.9.)}$$

et

$$0 \leqslant \iint_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}^2} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right).\left(\frac{\sin(t_n.v)}{t_n.v}\right) M(du,dv)$$

$$\leqslant \int_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right)^2 m(du) .$$

Ainsi, d'après le lemme (III.3.1.), pour prouver les propriétés (1) et (2) il suffit d'établir que, respectivement :

$$\text{(3.1)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right)^2 m(du) < +\infty ,$$

$$\text{(3.2)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right)^2 m(du) < +\infty .$$

Notons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = \{u \in \mathbb{R} : t_{n+1}^{-1} \leqslant |u| < t_n^{-1}\}$.

1) L'inégalité (i.2) nous donne la majoration de la somme (3.1) par :

$$c^2 \sum_{n=0}^{+\infty} t_n^2 \sum_{r=n}^{+\infty} t_r^{-2} \cdot m(\gamma_r) \quad ,$$

d'où en permutant les termes :

$$c^2 \sum_{r=0}^{+\infty} t_r^{-2} \sum_{n=0}^{r} t_n^2 \cdot m(\gamma_r) \ ;$$

les ensembles γ_r $(r \in \mathbb{N})$ étant deux à deux disjoints, l'hypothèse (1) nous permet de conclure.

2) La somme (3.2) s'exprime sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\{u : t_n^{-1} \leq |u| < t_o^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n . u)}{t_n . u}\right)^2 m(du) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{u : t_o^{-1} \leq |u|\}} \left(\frac{\sin(t_n . u)}{t_n . u}\right)^2 m(du) \ .$$

Le second terme de cette somme est aisément majorable, grâce à l'inégalité (i.5), par :

$$c^2 \ . \ t_o^2 \ . \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^{-2}\right) \ . \ m(\mathbb{R}) \ .$$

Le premier terme se majore par :

$$c^2 \ . \sum_{n=0}^{+\infty} t_n^{-2} \ . \int_{\{u : t_n^{-1} \leq |u| < t_o^{-1}\}} u^{-2} \, m(du) \leq c^2 \ . \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^{-2} \ . \sum_{r=0}^{n-1} t_{r+1}^2 \, m(\gamma_r) \ .$$

Les hypothèses (2) sur la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous permettent de conclure.

III.5.3 - Remarques :

1 - Pour tout réel $t > 1$, la suite $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie toutes les hypothèses du lemme précédent, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s.} \left[\int \frac{\sin(t^n . u)}{t^n . u} \mu(du) - \mu \left(\left]- t^{-n} , t^{-n}\right[\right) \right] = 0 \ .$$

2 - Lorsque X est un processus harmonisable mesurable de mesure stochastique spectrale μ, et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres positifs vérifiant les trois conditions du lemme précédent, nous constatons que :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ [\sigma_{t_n}(X) - \mu(]-t_n^{-1}, t_n^{-1}[)] = 0 ,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \sigma_{t_n}(X) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \mu(]-t_n^{-1}, t_n^{-1}[) = 0$.

Afin d'obtenir le résultat annoncé au début du paragraphe (III.5.), il nous reste à étudier l'expression $\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X)$ pour $p^q < n \leq p^{q+1}$, p fixé. Mais, nous remarquons que :

pour $p^q < n \leq p^{q+1}$, $\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X) = \sum\limits_{j=p^q+1}^{n} (\sigma_j(X) - \sigma_{j-1}(X))$,

ce qui nous invite, comme l'a fait J. ROUSSEAU pour $p = 2$, à montrer le lemme suivant inspiré de I. GÀL et J. KOKSMA [12].

III.5.4. - *Lemme de majoration*.- Considérons un nombre entier $p > 1$. Tout nombre entier $n > 1$ s'écrira de manière unique sous la forme :

pour $p^q < n \leq p^{q+1}$, $n = p^q + 1 + \sum\limits_{k=0}^{q} e_k \cdot p^{q-k}$,

où $q, e_o,\ldots,e_q \in \mathbb{N}$, $0 \leq e_o \leq p-2$ et $0 \leq e_j \leq p-1$ pour $j = 1,\ldots,q$.

Notation.- Pour p fixé, posons :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad E_k = \{0,\ldots,p-2\} \times \{0,\ldots,p-1\}^k$

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{2,\ldots,q\}$, $\forall e \in E_k$, $\quad a_q(e) = p^q + 1 + \sum\limits_{j=0}^{k-1} e_j \cdot p^{q-j}$,

$$b_q(e) = a_q(e) + e_k \cdot p^{q-k} ,$$

et $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\forall e \in E_1$, $a_q(e) = p^q$ et $b_q(e) = p^q + 1 + e_o \cdot p^q + e_1 \cdot p^{q-1}$.

Lemme.- <u>Etant donné un nombre entier</u> $p > 1$, <u>toute suite</u> $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ <u>de nombres complexes, et toute suite</u> $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ <u>de nombres réels positifs vérifient</u> :

$$\forall q \geq 1 \, , \quad \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} \Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j \Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}\Big) \, . \, \Big[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \, . \sum_{e\in E_k} \Big| \sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} z_j \Big|^2\Big] .$$

Preuve : Soit $p^q < n \leq p^{q+1}$; le nombre entier n s'écrit de manière unique :

$$n = p^q + 1 + \sum_{j=0}^{q} e_j \, p^{q-j} \qquad \text{avec} \qquad e \in E_q \; ;$$

notons, pour $k = 1,\ldots,q$:

$$d_k(n) = p^q + 1 + \sum_{j=0}^{k} e_j \, p^{q-j} \qquad \text{et} \qquad d_o(n) = p^q \; .$$

Nous obtenons l'inégalité :

$$\Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j \Big| \leq \sum_{k=1}^{q} \Big| \sum_{j=d_{k-1}(n)+1}^{d_k(n)} z_j \Big| \; ,$$

en faisant apparaître les nombres α_k , $k \in \mathbb{N}^*$, et en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j \Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}\Big) \, . \, \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \, . \Big| \sum_{j=d_{k-1}(n)+1}^{d_k(n)} z_j \Big|^2\Big) \; .$$

Mais, $\forall k \in \{1,\ldots,q\}$, $\displaystyle \Big| \sum_{j=d_{k-1}(n)+1}^{d_k(n)} z_j \Big|^2 \leq \sum_{e\in E_k} \Big| \sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} z_j \Big|^2$,

d'où $$\Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j \Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}\Big) \, . \, \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \, . \sum_{e\in E_k} \Big| \sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} z_j \Big|^2\Big) \; . \; ■$$

Le lemme de majoration précédent nous amènera par la suite à utiliser le résultat suivant dont la démonstration emploie la même technique de majoration qu'au lemme (III.5.2.).

III.5.5. - <u>*Lemme*</u>.- <u>Pour tout processus harmonisable</u> X , <u>tout entier</u> $p > 1$, <u>et tout réel</u> α <u>de</u> $[0,p[$, <u>nous avons</u> :

$$(3.3) \qquad \sum_{q=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \cdot \max_{e\in E_k} E(|\sigma_{b_q(e)}(X) - \sigma_{a_q(e)}(X)|^2) \right| < +\infty .$$

<u>*Preuve*</u> : Considérons un entier $p > 1$. Pour tout q de $\mathbb{N}^*$, tout k de $\{1,\dots,q\}$ et tout e de E_k, notons $S_{q,e} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application continue bornée définie par :

$$S_{q,e}(u) = \frac{\sin(b_q(e).u)}{b_q(e).u} - \frac{\sin(a_q(e).u)}{a_q(e).u} .$$

Ainsi l'écart quadratique $E(|\sigma_{b_q(e)}(X) - \sigma_{a_q(e)}(X)|^2)$ est lié à la bimesure spectrale M du processus harmonisable X par la relation : (cf. théorème III.4.2.).

$$E(|\sigma_{b_q(e)}(X) - \sigma_{a_q(e)}(X)|^2) = \iint S_{q,e}(u) \cdot S_{q,e}(v)\, M(du,dv) .$$

Comme la bimesure spectrale M est dominée par une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, l'expression (3.3.) est majorée par :

$$(3.4) \qquad \sum_{q=1}^{+\infty} A(q) \quad \text{où} \quad A(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int S^2_{q,e}(u)\, m(du) .$$

Il reste donc à montrer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} A(q) < +\infty .$$

Suivant l'idée de J. ROUSSEAU, nous découpons le domaine d'intégration de $S^2_{q,e}$. Pour q de $\mathbb{N}^*$, posons :

$$\sum_1(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:|u|<p^{-q-1}\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ,$$

$$\sum_2(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:p^{-q-1}\leq|u|<p^{-q+k}\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ,$$

$$\sum_3(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:p^{-q+k}\leq|u|<1\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ,$$

$$\sum_4(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:1\leq|u|\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ;$$

ainsi,

$$A(q) \leq \sum_1(q) + \sum_2(q) + \sum_3(q) + \sum_4(q) \; ;$$

de plus en notant $\gamma_q = \{u \in \mathbb{R} : p^{-q-1} \leq |u| < p^{-q}\}$, pour q dans $\mathbb{N}$, nous obtenons une partition $\{\gamma_q : q \in \mathbb{N}\}$ de $]-1, 1[\,/\, \{0\}$.

1) <u>*Montrons que*</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 1$, tout k de $\{1,\dots,q\}$ et tout e de E_k, nous avons :

$$0 < b_q(e) - a_q(e) < p^{q-k+2} \quad \text{et} \quad 0 < b_q(e) \leq p^{q+1} \quad ;$$

ainsi, d'après l'inégalité (i.1), m étant une mesure positive, nous majorons :

$$\int_{\{u:|u|<p^{-q-1}\}} S^2_{q,e}(u)\, m(du) \leq c^2\, p^4 \; . \; p^{2q-2k} \, . \int_{\{u:|u|<p^{-q-1}\}} u^2\, m(du).$$

Par conséquent, en découpant de nouveau les domaines d'intégration, nous obtenons :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q) \leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \alpha^k \,.\, p^{2q-k} \,.\, \Big(\sum_{r=q+1}^{+\infty} \int_{\gamma_r} u^2\, m(du) + 0 \,.\, m(\{0\}) \,,$$

$$\leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q+1}^{+\infty} \alpha^k \,.\, p^{2q-k-2r} \,.\, m(\gamma_r) \,,$$

d'cù, en permutant les termes (théorème de Fubini) :

$$\leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=k+1}^{+\infty} \sum_{q=k}^{r-1} \alpha^k \,.\, p^{-k-2r+2q} \,.\, m(\gamma_r) \,,$$

$$\leq \frac{c^2 p^4}{p^2-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k \,.\, m\Big(\bigcup_{r=k+1}^{+\infty} \gamma_r \Big) \;;$$

comme m est une mesure positivie finie, et α appartient à $[0,p[$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q) \leq \frac{c^2 p^4}{p^2-1} \,.\, \frac{\alpha}{p-\alpha} \,.\, m(\{u : 0 < |u| < p^{-2}\}) < +\infty \,.$$

2) <u>*Montrons que*</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_2(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 1$, tout k de $\{1,\ldots,q\}$ et tout e de E_k , nous avons :

$$0 \leq b_q(e) - a_q(e) < p^{q-k+2} \quad \text{et} \quad p^q \leq a_q(e) \;;$$

ainsi l'inégalité (i.3) nous donne :

$$\int_{\{u:p^{-q-1} \leq |u| < p^{-q+k}\}} S^2_{q,e}(u)\, m(du) \leq c^2\, p^4 \,.\, p^{-2k} \,.\, \int_{\{u:p^{-q-1} \leq |u| < p^{-q+k}\}} m(du) \;;$$

en découpant les domaines d'intégration, nous obtenons :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_2(q) \leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q-k}^{q} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k \,.\, m(\gamma_r) \,,$$

d'où en permutant les termes :

$$\leqslant c^2\, p^4 \,.\, \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=\max(r,k)}^{r+k} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k .\, m(\gamma_r) \quad ,$$

$$\leqslant c^2\, p^4 \,.\, \sum_{r=0}^{+\infty} m(\gamma_r) \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k .(\min(r,k) + 1) \quad ,$$

par conséquent

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_2(q) \leqslant c^2\, p^4 \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k .\, m(\{u : 0 < |u| < 1\}) < +\infty \quad .$$

3) *Montrons que* $\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_3(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geqslant 1$, tout k de $\{1,\ldots,q\}$, et tout e de E_k , les inégalités (i.3) et (i.4) nous donnent :

$$\int_{\{u : p^{-q+k} \leqslant |u| < 1\}} S^2_{q,e}(u)\, m(du) \leqslant (cp)^2 \,.\, p^{-q-k} \int_{\{u : p^{-q+k} \leqslant |u| < 1\}} |u|^{-1}\, m(du) \quad .$$

Ainsi, il apparaît que

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_3(q) \leqslant (cp)^2 \,.\, \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{r=0}^{q-k-1} \alpha^k \,.\, p^{-q} \,.\, \int_{\gamma_r} |u|^{-1}\, m(du) \quad ,$$

d'où en majorant $|u|^{-1}$ et en permutant les termes :

$$\leqslant (cp)^2 \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{q=r+k+1}^{+\infty} \alpha^k \,.\, p^{-q+r+1} \,.\, m(\gamma_r) \quad ,$$

$$\leqslant (cp^2) \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k .\, \frac{p}{p-1} \,.\, m(\{u : 0 < |u| < 1\}) < +\infty \quad ;$$

or $\alpha \in [0,p[$

donc $\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_3(q) < +\infty$.

4) *Montrons que* $\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_4(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 1$, tout k de $\{1,\ldots,q\}$, et tout e de E_k , l'inégalité (i.4) nous permet d'écrire :

$$\int_{\{u:1\leq|u|\}} S^2_{q,e}(u)\ m(du) \leq c^2 \ .\ p^{-2q} \int_{\{u:1\leq|u|\}} u^{-2}\ m(du) \ .$$

Ainsi nous obtenons :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_4(q) \leq c^2 \ .\ \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \alpha^k \ .\ p^{k-2q} \ .\ m(\{u:1\leq|u|\}) \ ,$$

$$\leq c^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k \ .\ \frac{p^2}{p^2-1} \ .\ m(\{u:1\leq|u|\}) \ ,$$

$$\leq \frac{(cp)^2}{p^2-1} \ .\ \frac{\alpha}{p-\alpha} \ .\ m(\{u:1\leq|u|\}) < +\infty \ .$$

Finalement :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} A(q) < +\infty \ \blacksquare$$

L'emploi de la technique de domination des processus nous permet de généraliser la décomposition de la moyenne d'un processus stationnaire obtenue par V.F. GAPOSHKIN [13 , th. 1] au cas des processus harmonisables quelconques.

III.5.6. - *Théorème de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable.* -

Lorsque $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ est un processus harmonisable mesurable et de mesure stochastique spectrale μ, pour tout entier $p > 1$, il existe un processus du second ordre $\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$ vérifiant :

(3.6) $$\sigma_t(X) = \Psi_t(X,p) + \mu(]-p^{-q}, p^{-q}[)$$

où $n, q \in \mathbb{N}$, $n < t \leq n+1$ et $p^q < n \leq p^{q+1}$,

(3.7) $$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \Psi_t(X,p) = 0 .$$

Preuve : Rappelons d'abord les différentes réductions opérées sur la moyenne de X :

$$\sigma_t(X) = \sigma_t(X) - \sigma_n(X) - \sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X) + \sigma_{p^q}(X) - \mu(]-p^{-q},p^{-q}[) + \mu(]-p^{-q},p^{-q}[)$$

où $n, q \in \mathbb{N}$, $n < t \leq n+1$ et $p^q < n \leq p^{q+1}$.

On peut donc majorer $\Psi_t(X,p)$, qui est évidemment un processus du second ordre, de la manière suivante :

$$|\Psi_t(X,p)| \leq \sup_{n<t\leq n+1} |\sigma_t(X)-\sigma_n(X)|+|\sigma_{p^q}(X)-\mu(]-p^{-q},p^{-q}[)| + \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)| .$$

Les deux premiers termes de cette majoration tendent vers 0 P - p.s. quand $t \to +\infty$ (respectivement d'après les lemmes (III.3.4.) et (III.5.2.)). Pour établir (3.7) il reste à montrer que :

(3.8) $$\lim_{n\to+\infty} P\text{- p.s. } \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X)| = 0 .$$

Pour tous les entiers n et q tels que $p^q < n \leq p^{q+1}$, nous avons :

$$\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X) = \sum_{j=p^q+1}^{n} (\sigma_j(X) - \sigma_{j-1}(X)) \quad ;$$

ce qui entraîne, d'après le lemme de majoration (III.5.4.) :

$$\forall q \geq 1 , \quad \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|^2) \leq (\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}).[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k . \sum_{e\in E_k} |\sigma_{b_q(e)}(X)-\sigma_{a_q(e)}(X)|^2] ,$$

où $(\alpha_k)_{k\in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite quelconque de nombres positifs ; d'où la relation :

$$\forall q \geq 1 , \quad E[\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)- \sigma_{p^q}(X)|^2] \leq (\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}).[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k . \sum_{e\in E_k} E(|\sigma_{b_q(e)}(X)-\sigma_{a_q(e)}(X)|^2)]$$

$$\leq (\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}).[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k . p^{k+1} . \max_{e\in E_k} E(|\sigma_{b_q(e)}(X)-\sigma_{a_q(e)}(X)|^2)] ,$$

puisque $\forall k \in \mathbb{N}^* , \ \mathrm{card}(E_k) = (p-1)\, p^k$.

Pour prouver la relation (3.8), il suffit donc d'exhiber une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ telle que le dernier membre de l'inégalité précédente soit le terme général d'une série convergente.

Soit $\alpha \in]1,p[$, et posons $\alpha_k = \alpha^k$, pour $k \geq 1$.

Dans ce cas, le premier facteur $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}$ est positif majoré par $\frac{1}{\alpha-1}$, et d'après le lemme (III.5.5), le second est le terme général d'une série convergente. ■

III.6. - C.N.S. PORTANT SUR LA MESURE STOCHASTIQUE POUR LA L.F.G.N.-

Le théorème de décomposition précédent nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la mesure stochastique spectrale pour que la L.F.G.N. soit vérifiée :

III.6.1. - Théorème.- Un processus harmonisable, mesurable et de mesure stochastique spectrale μ, vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si, il existe un entier $p > 1$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} P - p.s.\ \mu(]-p^{-n}, p^{-n}[) = 0 . \tag{3.9}$$

Dans ce cas, cette dernière relation est vraie pour tout entier $p > 1$.

III.6.2. - Remarque : Pour tout entier $p > 1$, la mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$ vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(]-p^{-n}, p^{-n}[) = \mu(\{0\}) .$$

Or, les limites en m.q. et P - p.s. d'une suite de variables aléatoires de $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$, lorsqu'elles existent, sont égales P - presque partout. Par conséquent :

$$\forall p > 1 , \lim_{n\to+\infty} P - p.s.\ \mu(]-p^{-n}, p^{-n}[) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - p.s.\ \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(\{0\}) = 0 .$$

De plus, la bimesure spectrale M de la mesure stochastique μ vérifie :

$$\mu(\{0\}) = 0 \Longleftrightarrow M(\{0\}^2) = 0 .$$

CHAPITRE IV

CRITERES POUR LA L.F.G.N.

IV.1. - INTRODUCTION.-

A partir des travaux de V.F. GAPOSHKIN et J. ROUSSEAU, nous allons déterminer trois critères portant sur la bimesure spectrale d'un processus harmonisable pour que celui-ci vérifie la L.F.G.N..

Le premier est une conséquence directe de la généralisation du théorème de Menchoff-Rademacher prouvée par R.J. SERFLING.

Les deux autres découlent des techniques de calcul rencontrées au chapitre précédent qui utilisent le lemme de majoration (III.5.4.).

Nous commençons par étudier le comportement asymptotique de la suite $(\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$, où p est un entier supérieur à 1, et nous en déduisons les critères pour la L.F.G.N. Ces conditions suffisantes ne sont pas nécessaires comme le montre l'exemple de A. Ya. KHINCHIN.

Tout processus harmonisable étant dominé par un processus faiblement stationnaire, nous établissons une condition suffisante qui porte sur la covariance de ce dernier. Par contre, il existe des processus harmonisables ne vérifiant pas la L.F.G.N. qui sont dominés par des processus faiblement stationnaires qui la vérifient.

De ces critères se déduit aussi une condition suffisante pour les processus harmonisables à mesure spectrale qui généralise le résultat de V.F. GAPOSHKIN [13, th. 3'A] pour les processus faiblement stationnaires.

Dans la suite, Log désignera la fonction logarithme népérien et, pour tout réel $a > 1$, lg_a sera la fonction logarithme de base a.

IV.2. - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$: UTILISATION D'UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE MENCHOFF-RADEMACHER.-

V.F. GAPOSHKIN [13] a employé le théorème de Menchoff-Rademacher [1, th. 2.3.2.] pour étudier le comportement asymptotique de la suite $(\mu(\{u : 0 < |u| \leq 2^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la mesure stochastique μ est orthogonale. R.J. SERFLING [30] et A. SZEP [31, th. 3] ont donné une généralisation de ce théorème au cas des suites non orthogonales :

IV.2.1. - Théorème.- Etant donnés un espace probabilisé (Ω,A,P) et une suite $(\Psi_j)_{j\geq 1}$ de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ vérifiant :

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |E(\Psi_j \cdot \bar{\Psi}_k)| \cdot \mathrm{Log}(j) \cdot \mathrm{Log}(k) < +\infty ,$$

la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \Psi_j$ converge P - p.s. .

Nous en tirons le résultat suivant :

IV.2.2. - Proposition.- Soient $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ une mesure stochastique et $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$. En notant, pour tout j de $\mathbb{N}^*$, $\mu_j = \mu(\{u : t^{-1}_{j+1} \leq |u| < t^{-1}_j\})$, nous avons :

$$(4.1) \qquad \sum_{j,k=1}^{+\infty} |E(\mu_j \,.\, \bar{\mu}_k)| \,.\, \mathrm{Log}(j) \,.\, \mathrm{Log}(k) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{ u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) = 0 .$$

Preuve : La σ-additivité de la mesure stochastique μ donne dans $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$:

$$\forall n \geq 1 \quad , \qquad \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) = \sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j \quad ;$$

mais la condition (4.1) entraîne pour chaque n la convergence P - p.s. de la série $\sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j$ dont la somme ne peut être égale P - p.s. qu'à $\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})$.
Par conséquent, puisque la suite $(\sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j)_{n\geq 1}$ converge P - p.s. vers 0 , la suite $(\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}))_{n\geq 1}$ converge P - p.s. vers 0 . ■

IV.2.3. - Remarque : Dans la proposition précédente (IV.2.2.), nous constatons que l'hypothèse porte sur la corrélation entre les variables aléatoires μ_j , $j \in \mathbb{N}^*$, et sur leurs moyennes quadratiques :

$$\sum_{j\neq k} |E(\mu_j \,.\, \bar{\mu}_k)| \,.\, \mathrm{Log}(j) \,.\, \mathrm{Log}(k) < +\infty \quad ,$$

et

$$\sum_{j=1}^{+\infty} E(|\mu_j|^2) \,.\, (\mathrm{Log}(j))^2 < +\infty .$$

Nous retiendrons le résultat suivant :

IV.2.4. - Critère 1.- Lorsque $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ est une mesure stochastique de bimesure spectrale M pour laquelle il existe un entier $p > 1$ tel que :

$$(4.2)\qquad \sum_{j,k=1}^{+\infty} |M(\{u : p^{-j-1} \leqslant |u| < p^{-j}\} \times \{v : p^{-k-1} \leqslant |v| < p^{-k}\})| \, . \, \mathrm{Log}(j) \, . \, \mathrm{Log}(k) < +\infty ,$$

il apparaît que :

$$(4.3)\qquad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 \, .$$

De la proposition (IV.2.2.) nous déduisons la généralisation suivante du théorème [13 , th. 3'A] de V.F. GAPOSHKIN :

IV.2.5. - Corollaire.- Etant donnée $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ une mesure stochastique à mesure spectrale M telle qu'il existe un nombre réel $b_o \in]0,1[$ pour lequel :

$$(4.4)\qquad \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{|u|}\right) . \, \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{|v|}\right) |M| \, (du,dv) < +\infty ,$$

où $|M|$ désigne la mesure variation totale de la mesure scalaire M, il apparaît que :

$$\forall a \in]1, +\infty[\, , \qquad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0 \, .$$

Preuve : Lorsque x tend vers $+\infty$, $\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(x)$ et $\lg_a \lg_a(x)$ ont le même ordre de grandeur, donc la condition (4.4) vérifiée avec la fonction Log Log, l'est avec la fonction $\lg_a \lg_a$.

La fonction $\lg_a \lg_a$ étant croissante, et la mesure $|M|$ positive, nous avons :

$$\forall j , k > 0 , \quad 0 \leqslant \lg_a \lg_a (a^j) \, . \, \lg_a \lg_a(a^k) \, . \, |M| \, (\gamma_j \times \gamma_k)$$

$$\leqslant \iint_{\gamma_j\times\gamma_k} \lg_a \lg_a\left(\frac{1}{|u|}\right) . \, \lg_a \lg_a\left(\frac{1}{|v|}\right) |M| \, (du,dv) \quad ,$$

où $$\gamma_j = \{u : a^{-j-1} \leq |u| < a^{-j}\} ;$$

de plus, $\forall j , k > 0$, $|M(\gamma_j \times \gamma_k)| \leq |M| (\gamma_j \times \gamma_k)$.

Par conséquent, si n_o est un entier tel que $a^{-n_o} < b_o$, la condition (4.4) implique :

$$\sum_{j,k=n_o}^{+\infty} lg_a(j) . lg_a(k) . |M(\gamma_j \times \gamma_k)| < +\infty ,$$

et, d'après la proposition précédente, nous pouvons conclure. ■

IV.2.6. - Lemme.- Toute mesure positive finie M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ telle qu'il existe trois nombres réels $\varepsilon, c, b_o > 0$ vérifiant :

$$(4.5) \quad 0 < b_1, b_2 \leq b_o \leq e^{-1} \Longrightarrow M_o(\{u : 0 < |u| < b_1\} \times \{v : 0 < |v| < b_2\}) \leq c . \left[\mathrm{Log\,Log}(\frac{1}{b_1}) . \mathrm{Log\,Log}(\frac{1}{b_2})\right]^{-1-\varepsilon} ,$$

satisfait la relation :

$$(4.6) \ \exists b \in \left]0,e^{-1}\right], \iint_{\{u:0<|u|<b\}^2} \mathrm{Log\,Log}(\frac{1}{|u|}) . \mathrm{Log\,Log}(\frac{1}{|v|}) M_o(du,dv) < +\infty .$$

Preuve : En effet, e étant le nombre tel que $\mathrm{Log}(e) = 1$, notons :

$$\forall k \in \mathbb{N} , \quad C_k = \{u : e^{-e^{k+1}} \leq |u| < e^{-e^k}\} \quad \text{et} \quad B_k = \{u : 0 < |u| < e^{-e^k}\} ,$$

et considérons un entier $k_o \geq 1$ tel que $e^{-e^{k_o}} \leq b_o$;

ainsi, $$B_{k_o} \subset \{u : 0 < |u| < b_o\} .$$

La croissance de la fonction Log Log donne : $\forall j\ ,\ k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \iint_{C_j \times C_k} \text{Log Log}\left(\frac{1}{|u|}\right) . \text{Log Log}\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du,dv) \leqslant (j+1)(k+1).M_o(C_j \times C_k)$$

où les ensembles $C_k, k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$\forall r \in \mathbb{N} \qquad \bigcup_{k \geqslant r} C_k = B_r \ .$$

Donc la relation (4.6) est vérifiée avec $b = e^{-e^{k_o}}$ si la série double de terme général $(j+1)(k+1).M_o(C_j \times C_k)$ est convergente.

Etudions cette série :

$$\sum_{j,k=k_o}^{+\infty} (j+1)(k+1).M_o(C_j \times C_k) = \sum_{j,k=k_o}^{+\infty} \sum_{r=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} M_o(C_j \times C_k) \ ,$$

en permutant les termes, nous obtenons :

$$= \sum_{r=0}^{k_o-1} \sum_{s=0}^{k_o-1} \sum_{j=k_o}^{+\infty} \sum_{k=k_o}^{+\infty} \ldots + \sum_{r=0}^{k_o-1} \sum_{s=k_o}^{+\infty} \sum_{j=k_o}^{+\infty} \sum_{k=s}^{+\infty} \ldots + \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=0}^{k_o-1} \sum_{j=r}^{+\infty} \sum_{k=k_o}^{+\infty} \ldots$$

$$+ \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=k_o}^{+\infty} \sum_{j=r}^{+\infty} \sum_{k=s}^{+\infty} \ldots ,$$

d'où, en utilisant la σ-additivité de la mesure M_o :

$$= k_o^2 . M_o(B_{k_o} \times B_{k_o}) + k_o . \sum_{s=k_o}^{+\infty} M_o(B_{k_o} \times B_s)$$

$$+ k_o . \sum_{r=k_o}^{+\infty} M_o(B_r \times B_{k_o}) + \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=k_o}^{+\infty} M_o(B_r \times B_s) \ .$$

Ainsi, grâce à la relation (4.5), nous majorons par :

$$k_o^2 . M_o(B_{k_o} \times B_{k_o}) + 2c . k_o\, k_o^{-1-\varepsilon} . \sum_{r=k_o}^{+\infty} r^{-1-\varepsilon} + c \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=k_o}^{+\infty} (rs)^{-1-\varepsilon} < +\infty \ . \ \blacksquare$$

IV.2.7. - Remarque : La condition (4.5) peut être remplacée par une condition plus faible :

il existe trois réels $\varepsilon, b_o, c > 0$ et un entier $q \geq 2$ tels que :

(4.7) $$0 < b_1 , b_2 < b_o \Longrightarrow M_o(\{u : 0 < |u| < b_1\} \times \{v : 0 < |v| < b_2\})$$

$$\leq c . \left[\mathrm{Log}_2(\tfrac{1}{b_1}) . \mathrm{Log}_2(\tfrac{1}{b_2}) \ldots \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b_1}) . \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b_2})\right]^{-1} . \left[\mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b_1}) . \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b_2})\right]^{-\varepsilon} ,$$

où $\forall r \geq 1$, $\mathrm{Log}_{r+1} = \mathrm{Log} \circ \mathrm{Log}_r$.

IV.2.8. - Corollaire.- Lorsque $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},P)$ est une mesure stochastique à mesure spectrale M dont la variation totale $|M|$ vérifie l'une des conditions (4.5) ou (4.7), nous avons :

$$\forall a \in]1, +\infty[, \quad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0 .$$

IV.3. - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$: UTILISATION DU LEMME DE MAJORATION.-

IV.3.1. - Etude préliminaire.-

Considérons un entier $p > 1$. Comme J. ROUSSEAU, nous constatons que : pour $p^q < n \leq p^{q+1}$,

$$\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) - \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\}) \text{ P-p.s..}$$

Par conséquent :

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})| = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 .$$

IV.3.1.1. - <u>Etudions la suite</u> $(\mu(B_q))_{q\in\mathbb{N}}$ <u>où</u> $B_q = \{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}$

Cette suite converge P - p.s. vers 0 lorsque $\sum_{q=0}^{+\infty} E(|\mu(B_q)|^2) < +\infty$, c'est-à-dire lorsque :

(4.8) $$\sum_{q=0}^{+\infty} M(B_q \times B_q) < +\infty \quad .$$

IV.3.1.2. - <u>Etudions la suite</u> $\left(\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})|\right)_{q\in\mathbb{N}}$

En posant : $\forall j \in \mathbb{N}$, $V_j = \{u : p^{-j} \leq |u| < p^{-j+1}\}$, les boréliens V_j, $j \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$p^q < n \leq p^{q+1} \Longrightarrow \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\}) = \sum_{j=p^q+1}^{n} \mu(V_j) \quad .$$

Avec ces notations, le lemme de majoration (III.5.4) donne :

$$E\left(\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})|^2\right)$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{q} s_k^{-1}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{q} s_k \sum_{e\in\mathcal{E}_k} E\left|\sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} \mu(V_j)\right|^2\right)$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{q} s_k^{-1}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{q} s_k \sum_{e\in\mathcal{E}_k} M(A_q(e) \times A_q(e))\right) ,$$

où, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1,\dots,q\}$ et $e \in \mathcal{E}_k$,

$$A_q(e) = \{u : p^{-b_q(e)} \leq |u| \leq p^{-a_q(e)}\} .$$

Ainsi la suite étudiée converge P - p.s. vers 0, lorsque la série numérique de terme général le dernier membre de l'inégalité précédente est convergente pour un choix de la suite $(s_k)_{k\geq 1}$.

En particulier, si $(s_k)_{k\geq 1}$ est la suite constante 1, nous obtenons les conditions suffisantes :

$$(4.9)\qquad \sum_{q=1}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty ,$$

$$(4.10)\qquad \sum_{q=1}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} p^{k+1} \max_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty .$$

Ainsi nous sommes amenés à l'étude suivante :

IV.3.1.3. - <u>Etudions les ensembles</u> $A_q(e)$

Considérons un entier $q > 1$

a) <u>Soit $k = 1$</u> - Etant donnés e et e' deux éléments de E_1, rappelons que :

$$b_q(e) = p^q + 1 + e_o \cdot p^q + e_1 \cdot p^{q-1} , \quad b_q(e') = p^q + 1 + e'_o \cdot p^q + e'_1 \cdot p^{q-1} ,$$

$$a_q(e) = a_q(e') = p^q ;$$

nous constatons que $b_q(e') < b_q(e) \Longrightarrow A_q(e') \subset A_q(e)$;

de plus $\qquad \forall e \in E_1 , \qquad A_q(e) \subset \{u : p^{-p^{q+1}} \leq |u| < p^{-p^q}\} = C_q ,$

et $\qquad \text{card } E_1 = (p-1)\, p .$

b) <u>Soit $k \in \{2,\ldots,q\}$</u> . Etant donnés e et e' deux éléments de E_k, nous avons :

$$b_q(e) = a_q(e) + e_k \cdot p^{q-k} ,$$

$$b_q(e') = a_q(e') + e'_k \cdot p^{q-k} .$$

Si $a_q(e) = a_q(e')$ et $e_k > e'_k$, alors

$$A_q(e') \subset A_q(e) \subset \{u : p^{-a_q(e)-(p-1)p^{q-k}} \leq |u| < p^{-a_q(e)}\} ,$$

de plus, $\forall e \in \mathcal{E}_k$, $\operatorname{card}\{e' \in \mathcal{E}_k : a_q(e) = a_q(e')\} = p$.

Maintenant, considérons le cas où $a_q(e) \neq a_q(e')$, et posons

$$j_o = \inf\{j \in \{0,\dots,k-1\} : e_j \neq e'_j\} \quad ,$$

alors nous avons :

$$a_q(e) - a_q(e') = (e_{j_o} - e'_{j_o}) \cdot p^{q-j_o} + \sum_{j=j_o+1}^{k-1} (e_j - e'_j) \cdot p^{q-j} \quad ,$$

d'où $$|a_q(e) - a_q(e')| \geq p^{q-j_o} - \sum_{j=j_o+1}^{k-1} (p-1)\, p^{q-j} \quad ,$$

et $$|a_q(e) - a_q(e')| \geq p^{q-k+1} \quad .$$

En regroupant les éléments e de $\mathcal{E}_k$ qui donnent le même a_q , nous obtenons une partition $\mathcal{P}_k$ de $\mathcal{E}_k$ dont chaque classe E contient p éléments de $\mathcal{E}_k$, et vérifie :

$$\forall e \in E \quad , \quad A_q(e) \subset \{u : p^{-a_q(e)-(p-1)p^{q-k}} \leq |u| < p^{-a_q(e)}\} = C_q(E) \; .$$

De plus, d'après ce qui précède :

$$\forall E\ , E' \in \mathcal{P}_k \quad , \quad E \neq E' \Longrightarrow C_q(E) \cap C_q(E') = \emptyset$$

et $$\bigcup_{E \in \mathcal{P}_k} C_q(E) \subset C_q \; .$$

IV.3.1.4. - <u>Conséquence</u> : Lorsque M_o est une mesure positive sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, pour tout entier $q > 1$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) = \sum_{e \in \mathcal{E}_1} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) + \sum_{k=2}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) \; ,$$

M_o étant une mesure positive, nous majorons par :

$$\leq (p-1)\ p\ M_o(C_q \times C_q) + \sum_{k=2}^{q} p \sum_{E \in \mathcal{P}_k} M_o(C_q(E) \times C_q(E))$$

$$\leq p^2 \cdot M_o(C_q \times C_q) + (q-1)p \cdot M_o(C_q \times C_q)\ ,$$

et par conséquent :

$$(4.11) \qquad \forall q > 1\ , \quad \sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) \leq q \cdot p^2 \cdot M_o(C_q \times C_q)\ . \blacksquare$$

Le résultat suivant découle directement de l'étude précédente.

IV.3.2. - Critère 2.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ une mesure stochastique de bimesure spectrale M.

S'il existe trois réels ε, b_o, $c > 0$ tels que :

$$(4.12) \qquad 0 < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : 0 < |u| < b\}^2) \leq c \cdot \left[\mathrm{Log\ Log}\left(\frac{1}{b}\right)\right]^{-1-\varepsilon}\ ,$$

et

$$(4.13) \quad 0 < a < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : a \leq |u| < b\}^2) \leq c \cdot \left[\frac{\mathrm{Log}(a)}{\mathrm{Log}(b)} - 1\right] \cdot \left[\mathrm{Log\ Log}\left(\frac{1}{b}\right)\right]^{-3-\varepsilon}\ ,$$

alors pour tout entier $p > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s.}\ \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0\ .$$

Preuve : Les conditions (4.12) et (4.13) étant vérifiées avec la fonction Log , elles le sont avec la fonction $\lg_p$, d'après les propriétés des fonctions logarithmes.

En utilisant les notations précédentes, la condition (4.12) nous donne :

$$\forall q \geq q_o \ , \qquad 0 \leq M(B_q \times B_q) \leq c\left[\lg_p \lg_p(p^{p^q})\right]^{-1-\varepsilon} = c \cdot q^{-1-\varepsilon} \ ,$$

ainsi

$$\sum_{q=0}^{+\infty} M(B_q \times B_q) < +\infty \ .$$

De plus la condition (4.13) implique les inégalités suivantes :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \ , \ q \geq q_o \ , \ \forall k \in \{1,\ldots,q\} \ , \ \forall e \in E_k \ ,$$

$$0 \leq M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq c \cdot \left[\frac{\lg_p (p^{b_q(e)})}{\lg_p(p^{a_q(e)})} - 1\right] \cdot \left[\lg_p \lg_p(p^{a_q(e)})\right]^{-3-\varepsilon}$$

$$\leq c \cdot \left[\frac{b_q(e) - a_q(e)}{a_q(e)}\right] \cdot \left[\lg_p(a_q(e))\right]^{-3-\varepsilon} \ ;$$

or $\quad p^q \leq a_q(e) \leq b_q(e) \leq p^{q+1} \quad$ et $\quad 0 \leq b_q(e) - a_q(e) < p^{q-k+2}$,

donc

$$M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq c \cdot p^{-k+2} \cdot q^{-3-\varepsilon} \ ;$$

par conséquent :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} p^{k+1} \cdot \max_{e \in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq c \cdot p^3 \cdot \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1-\varepsilon} < +\infty \ .$$

D'après l'étude (IV.3.1.), les conditions (4.8) et (4.10) étant satisfaites, nous pouvons conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 \ . \ \blacksquare$$

IV.3.3. - <u>*Remarque*</u> : Les conditions (4.11) et (4.12) peuvent être remplacées par des conditions plus faibles :

<u>il existe trois réels</u> $\varepsilon, b_o, c > 0$ <u>et un entier</u> $q \geq 2$ <u>tels que</u> :

$$(4.14) \qquad 0 < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : 0 < |u| < b\}^2) \leq c \cdot \left[\mathrm{Log}_2(\tfrac{1}{b}) \ldots \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-1} \cdot \left[\mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-\varepsilon}$$

(4.15) $$0 < a < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : a \leqslant |u| < b\}^2)$$

$$\leqslant c \cdot \left[\frac{\mathrm{Log}(\frac{1}{a})}{\mathrm{Log}(\frac{1}{b})} - 1\right] \cdot \left[\mathrm{Log}(\tfrac{1}{b})\right]^{-2} \cdot \left[\mathrm{Log}_2(\tfrac{1}{b}) \ldots \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-1} \cdot \left[\mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-\varepsilon}$$

IV.3.4. - Critère 3.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ une mesure stochastique de bimesure spectrale M.

S'il existe une mesure positive finie M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ satisfaisant :

1) pour tout A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$,

(4.16) $$M(A \times A) \leqslant M_o(A \times A) ,$$

(4.6) $$2) \exists b_o \in]0,1[, \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(\frac{1}{|u|}) \cdot \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(\frac{1}{|v|})\, M_o(du,dv) < +\infty,$$

alors pour tout entier $p > 1$,

(4.3) $$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 .$$

Preuve : La condition (4.6) étant vérifiée avec la fonction Log, elle l'est avec la fonction $\lg_p$. Considérons un entier $q_o \geqslant 2$ tel que $p^{-p^{q_o}} < b_o$.

En utilisant les notations de l'étude (IV.3.1.), la condition (4.16) nous donne :

$$\forall q \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant M(B_q \times B_q) \leqslant M_o(B_q \times B_q) ;$$

comme $$M_o(B_q \times B_q) \leqslant q^{-2} \cdot \iint_{B_q \times B_q} \lg_p \lg_p (\frac{1}{|u|}) \cdot \lg_p \lg_p (\frac{1}{|v|})\, M_o(du,dv)$$

et $$q_o \leqslant q \Longrightarrow B_q \subset \{u : 0 < |u| < b_o\} ,$$

nous obtenons :

$$\forall q \geq q_o \ , \quad M(B_q \times B_q) \leq q^{-2} \cdot \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} lg_p \; lg_p(\frac{1}{|u|}) \cdot lg_p \; lg_p(\frac{1}{|v|}) \; M_o(du,dv)$$

d'où $\quad \sum_{q=0}^{+\infty} M(B_q \times B_q) < +\infty$: la condition (4.8) est satisfaite .

La condition (4.16) nous donne aussi :

$$\forall q \geq 1 \ , \quad 0 \leq \sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq \sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) \ ,$$

d'où, d'après la relation (4.11) ,

$$\leq q \cdot p^2 \cdot M_o(C_q \times C_q) \ ;$$

mais les ensembles C_q , $q \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$\bigcup_{q=q_o}^{+\infty} C_q = B_{q_o} \subset \{u : 0 < |u| < b_o\},$$

donc, M_o étant une mesure positive, nous obtenons :

$$\sum_{q=q_o}^{+\infty} q^2 \cdot M_o(C_q \times C_q) \leq \sum_{q=q_o}^{+\infty} \iint_{C_q \times C_q} lg_p \; lg_p(\frac{1}{|u|}) \cdot lg_p \; lg_p(\frac{1}{|v|}) \; M_o(du,dv)$$

$$\leq \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} lg_p \; lg_p \; (\frac{1}{|u|}) \; lg_p \; lg_p(\frac{1}{|v|}) \; M_o(du,dv) \ ,$$

et la condition (4.6) nous donne :

$$\sum_{q=q_o}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty$$: la condition (4.9) est satisfaite .

Ainsi, d'après l'étude (IV.3.1.), nous pouvons conclure. ■

IV.3.5. - __Remarques__ : 1) Comme toute bimesure spectrale M sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est dominée par une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ [21] , il existe toujours une mesure positive $M_o = R(m)$ sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ telle que M et M_o vérifient la relation (4.16).

2) Nous rappelons que si la condition (4.7) ou la condition (4.5) sont vérifiées, il en est de même de la condition (4.6).

3) Le corollaire (IV.2.5) peut être obtenu comme corollaire de la proposition précédente.

4) Lorsqu'il existe une mesure spectrale positive M_0 dominant la bimesure spectrale M de mesure stochastique μ, et satisfaisant la condition (4.6), alors, pour tout entier $p > 1$, nous avons :

(4.3)
$$\lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 .$$

IV.4. - LA L.F.G.N. POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES.-

Nous considérons une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$ et le processus harmonisable associé : $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$. Le comportement en moyenne quadratique de la moyenne de X est donnée par Yu. A. ROZANOV [26 , th. 2.2] :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad , \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_\tau \, . \, e^{-ix_0 \tau} \, d\tau = \mu(\{x_0\}) \; .$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \to +\infty} \sigma_t(X) = \mu(\{0\}) \; .$$

Nous allons donc établir des conditions suffisantes pour que cette convergence ait lieu aussi P - presque sûrement.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable (th. III.5.6) et des propositions (IV.2.4), (IV.3.2) et (IV.3.4).

IV.4.1. - Théorème.- Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, soit un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ dont la bimesure spectrale M vérifie l'une des hypothèses suivantes :

1) il existe un entier $p > 1$ tel que :

(4.2) $$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |M(\{u : p^{-j-1} \leq |u| < p^{-j}\} \times \{u : p^{-k-1} \leq |u| < p^{-k}\})| \, . \, \mathrm{Log}(j) \, . \, \mathrm{Log}(k) < +\infty \, ,$$

2) il existe trois nombres $\varepsilon, b_o, c > 0$ tels que :

(4.12) $$0 < b < b_o < 1 \Longrightarrow M(\{u : 0<|u|<b\}^2) \leq c \, . \, (\mathrm{Log\,Log}(\tfrac{1}{b}))^{-1-\varepsilon}$$

(4.13) $$0 < a < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : a<|u|<b\}^2) \leq c \, . \, (\frac{\mathrm{Log}(a)}{\mathrm{Log}(b)} - 1) \, . \, (\mathrm{Log\,Log}(\tfrac{1}{b}))^{-3-\varepsilon},$$

3) il existe une mesure positive finie M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ satisfaisant :

i) pour tout A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$:

(4.16) $$M(A \times A) \leq M_o(A \times A) \quad ,$$

(4.6) ii) $$\exists b_o \in]0,1[, \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log\,Log}(\frac{1}{|u|}) . \mathrm{Log\,Log}(\frac{1}{|v|}) M_o(du,dv) < +\infty \, .$$

Alors : $$\lim_{t \to +\infty} P - \text{p.s.} \; \sigma_t(X) = \mu(\{0\}) \, .$$

Dans ce cas, le processus X vérifie la L.F.G.N. si et seulement si :

$$M(\{0\}^2) = 0 \, .$$

IV.4.2. - *Remarques* : 1) Les conditions (4.12) et (4.13) peuvent être remplacées par les conditions plus faibles (4.14) et (4.15).

2) Toutes ces conditions sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires comme le montre l'exemple de A. Ya. KHINCHIN (IV.5.6.).

3) Dans l'énoncé du théorème (IV.4.1.), la fonction Log peut être remplacée par une fonction logarithme de base quelconque.

Dans le cas particulier où M est prolongeable en une mesure spectrale, le théorème précédent nous permet de donner un résultat que V.F. GAPOSHKIN [13, th. 4'A] a établi pour les processus faiblement stationnaires.

IV.4.3. - *Corollaire*.- Soit un processus harmonisable mesurable X de bimesure spectrale M, dominé par un processus faiblement stationnaire et continu Y dont le noyau r_1 vérifie :

$$(4.17) \qquad \exists\, b_o \geq e \;, \quad \int_{b_o}^{+\infty} \frac{r_2(u)\,.\,\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(u)}{u\,.\,\mathrm{Log}(u)}\, du < +\infty$$

avec $\forall u, v > 0 \;, \quad r_2(u) = \dfrac{1}{4.u^2} \displaystyle\int_{-u}^{u} \int_{-u}^{u} r_1(t-s)\, dt\, ds$ et $r_1(u-v) = E(Y_u . \bar{Y}_v)$

et $\mathrm{Log}(e) = 1$.

Alors X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si, $M(\{0\}^2) = 0$.

Remarques : 1) En particulier, lorsque Y est un processus faiblement stationnaire et continu dont le noyau vérifie la relation (4.17), en notant $R(m)$ sa mesure spectrale, nous obtenons :

$$Y \text{ vérifie la L.F.G.N.} \iff m(\{0\}) = 0 \;.$$

2) Pour que la condition (4.17) soit vérifiée, il suffit que :

(4.18) $\exists \varepsilon > 0 \quad , \; r_2(t) = O(\text{Log Log}(t))^{-2-\varepsilon}$ lorsque $t \to +\infty$

ou même seulement que :

(4.19) $\exists q \in \mathbb{N} \;, \; q \geq 2$ et $\exists \varepsilon > 0 \;,$

$$r_2(t) = O\left[(\text{Log}_2(t))^{-1} \,.\, (\text{Log}_2(t) \;\dots\; \text{Log}_q(t))^{-1} \,.\, (\text{Log}_q(t))^{-\varepsilon}\right]$$

lorsque $t \to +\infty$.

Preuve : Soit $R(m)$ la mesure spectrale du processus faiblement stationnaire Y , nous avons :

$$\forall u > 0 \quad , \qquad r_2(u) = \int \left(\frac{\sin(tu)}{tu}\right)^2 m(dt) \;.$$

Or il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|u| < t^{-1} \Longrightarrow c \leq \left(\frac{\sin(tu)}{tu}\right)^2 \quad ,$$

et comme m est une mesure positive, nous obtenons :

$$\forall u > 0 \quad , \qquad c \,.\, m(\{t : 0 < |t| < u^{-1}\}) \leq r_2(u) \;.$$

Considérons une suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$$

et un entier n_o tel que : $b_o \leq t_{n_o}$.

Nous pouvons écrire :

$$(4.21) \quad \int_{t_{n_o}}^{+\infty} \frac{r_2(u).\text{Log Log}(u)}{u.\text{Log}(u)}\, du = \sum_{n=n_o}^{+\infty} \int_{\{u:t_n<u\leq t_{n+1}\}} \frac{\text{Log Log}(u)}{u \,.\, \text{Log}(u)}\, r_2(u)\, du \;,$$

et d'après la relation précédente entre m et r_2 :

$$\geq \sum_{n=n_o}^{+\infty} \int_{\{u:t_n<u\leq t_{n+1}\}} \frac{\text{Log Log}(u)}{u \,.\, \text{Log}(u)}\, du \,.\, c \,.\, m(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})$$

d'où $$\geq \frac{c}{2} \,.\, \sum_{n=n_o}^{+\infty} \left[(\text{Log Log}(t_{n+1}))^2 - (\text{Log Log}(t_n))^2\right] \,.\, m(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) \;;$$

Il en résulte que :

$$c \sum_{n=n_o+1}^{+\infty} (\text{Log Log}(t_{n+1}))^2 \,.\, m(\{u : t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1}\})$$

$$\leq 2 \int_{t_{n_o}}^{+\infty} \frac{r_2(t) \,.\, \text{Log Log}(t)}{t \,.\, \text{Log}(t)}\, dt$$

$$+ c \,.\, (\text{Log Log}(t_{n_o}))^2 \,.\, m(\{u : 0 < |u| < t_{n_o}^{-1}\})$$

$< +\infty$, d'après (4.17) .

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1} \Longrightarrow 0 \leq \text{Log Log}(\frac{1}{|u|}) \leq \text{Log Log}(t_{n+1})$,

par conséquent :

$$\int_{\{u:0<|u|<t_{n_o}^{-1}\}} (\text{Log Log}(\frac{1}{|u|}))^2\, m(du) \leq \sum_{n=n_o}^{+\infty} (\text{Log Log}(t_{n+1}))^2 \,.$$

$$m(\{u : t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1}\}) < +\infty \,.$$

Puisque Y domine X, nous pouvons conclure que les conditions (4.16) et (4.6) du théorème précédent (IV.4.1) sont vérifiées avec $M_o = R(m)$, et donc :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = \mu(\{0\})$$

où μ est la mesure stochastique spectrale de X.

Par conséquent :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = 0 \iff M(\{0\}^2) = 0 \quad . \quad \blacksquare$$

Du théorème (IV.4.1.) nous déduisons aussi cette généralisation de [13, th. 3'A] :

IV.4.4. - Corollaire.- Sur un espace probabilisé (Ω, A, P) , considérons $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus harmonisable mesurable à mesure spectrale M telle qu'il existe un réel $b_o > 0$ pour lequel :

$$(4.4) \qquad \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} \text{Log Log}(\frac{1}{|u|}) \ . \ \text{Log Log}(\frac{1}{|v|}) \ |M| \ (du,dv) < +\infty \ .$$

Alors
$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = \mu(\{0\}) \ ,$$

et X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si, $M(\{0\}^2) = 0$.

A. ARIMOTO a donné d'autres types de critères en suivant la méthode de I.N. VERBITSKAYA [33]. Ainsi il a obtenu [2, th. 2] :

IV.4.5. - Théorème.- Soit X un processus harmonisable mesurable à mesure spectrale M telle que :

$$\exists \varepsilon > 0 \ , \qquad \iint_{\{u:|u|\leq b\}^2} |M| \ (du,dv) = 0(\frac{1}{|\text{Log}(b)|^{3+\varepsilon}}) \ ,$$

$$\iint_{\{u:|u|\leq b\}\times\{v:b<|v|\}} \frac{1}{|v|} \ |M| \ (du,dv) = 0(\frac{1}{b.|\text{Log}(b)|^{3+\varepsilon}}) \ ,$$

et

$$\iint_{\{u:b<|u|\}\times\{v:b<|v|\}} \frac{1}{|uv|} \ |M| \ (du,dv) = 0(\frac{1}{b^2.|\text{Log}(b)|^{3+\varepsilon}}) \ ,$$

lorsque $b \longrightarrow 0^+$.

Alors :
$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.x. } \sigma_t(X) = 0 \ .$$

IV.4.6. - Exemple de A. Ya KHINCHIN [33 , *rem.* 2].-

Il existe des processus faiblement stationnaires continus qui vérifient la L.F.G.N. sans satisfaire l'une des hypothèses du théorème (IV.5.1.), autrement dit, ces conditions ne sont pas nécessaires.

IV.4.6.1. - Construction.- Considérons deux variables aléatoires réelles U et V indépendantes sur un espace probabilisé (Ω, A, P), la variable U suivant la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$ tandis que la loi de V est notée m.

Le processus $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \qquad X_t = e^{i.(U+tV)} ,$$

est centré, du second ordre, faiblement stationnaire et continu :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad E(X_t) = E\left[e^{i.(U+tV)}\right] = E(e^{iU}) . E(e^{itV}) = 0 . E(i^{tV}) = 0 ,$$

$$r(t) = \int e^{itV} dP = \int e^{itv} m(dv) .$$

$R(m)$ est la mesure spectrale du processus faiblement stationnaire X (cf.I.2.8).

IV.4.6.2. - Condition nécessaire et suffisante pour que X *vérifie la L.F.G.N.-* Pour presque tout ω de Ω et tout $t > 0$, la moyenne $\sigma_t(X)(\omega)$ s'exprime sous la forme :

$$\sigma_t(X)(\omega) = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau(\omega) \, d\tau = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} e^{i.(U(\omega)+\tau.V(\omega))} \, d\tau ,$$

d'où $\qquad V(\omega) \neq 0 \implies |\sigma_t(X)(\omega)| = 0(\frac{1}{t}) \qquad$ pour $\quad t \to +\infty$,

et $\qquad V(\omega) = 0 \implies |\sigma_t(X)(\omega)| = 1$.

Par conséquent, X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si,

$$P(V = 0) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underline{m(\{0\}) = 0} \ ,$$

et il n'y a aucune autre condition sur la mesure de probabilité m .

IV.4.7. - <u>Il existe des processus faiblement stationnaires continus, qui ne vérifient pas la L.F.G.N., et dont la mesure spectrale</u> $R(m)$ <u>satisfait la relation</u> :

$$\underline{m(\{0\}) = 0} \qquad [13 , \text{th.3'B}].$$

D'après [1, 2.4.1.], il existe dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ - où λ est la mesure de Borel - une famille orthonormale $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

- $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < + \infty$,

- $\limsup_{n\to+\infty} |\sum_{k=0}^{n} c_k Z_k| = + \infty$, λ - p.s. .

On définit une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ en posant : $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu(B) = \sum_{k:2^{-k}\in B} c_k Z_k$, et on considère une version mesurable du processus harmonisable $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$ de mesure stochastique spectrale .

Y est stationnaire puisque :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y_t = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k Z_k e^{i2^{-k}t}$,

- $\forall t , s \in \mathbb{R}$ $E(Y_t.\bar{Y}_s) = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e^{i2^{-k}(t-s)}$.

Comme $\mu(\{0\}) = 0$, on a $m(0) = 0$, mais la L.F.G.N. n'est pas vérifiée par Y : sinon, puisque $\mu(]-2^{-n} , 2^{-n}[) = \mu(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} c_k Z_k$, et d'après le théorème (III.6.1.), on aurait :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k Z_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda\text{-p.s.}} \mu(\mathbb{R}) \quad , \qquad \text{ce qui est faux .}$$

On peut évidemment supposer que $E(|\mu(\mathbb{R})|^2) = 1$, ce qui fait que la mesure spectrale m de Y est une loi de probabilité.

IV.4.8. - Remarque : Il existe des processus harmonisables ne vérifiant pas la L.F.G.N., mais dominés par un processus harmonisable qui la vérifie. Ces processus peuvent être choisis faiblement stationnaires.

Plus particulièrement, on peut construire 2 processus continus stationnaires ayant la même mesure spectrale, l'un vérifiant la loi forte des grands nombres et l'autre ne la vérifiant pas : il suffit de reprendre le processus Y construit ci-dessus, au (IV.4.7.), dont la mesure spectrale a été notée m , et $X : t \longmapsto e^{i(U+tV)}$ - exemple de A. Ya. KHINCHIN - où V suit la loi m : comme $m(0) = 0$, ce dernier processus, dont la mesure spectrale est m , sur la loi forte des grands nombres (IV.4.6.).

CHAPITRE V

VITESSE DE CONVERGENCE DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE.

V.1. - INTRODUCTION.-

Nous montrons d'abord que la moyenne $\sigma_t(X)$ d'un procesus harmonisable mesurable X vérifie une loi du log. itéré, à savoir :

$$\sigma_t(X) = o(\text{Log Log}(t)) \qquad \text{lorsque} \quad t \to +\infty ,$$

autrement dit :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.}\ [\text{Log Log}(t)]^{-1} . \sigma_t(X) = 0 .$$

(Ce résultat a été démontré par V.F. GAPOSHKIN dans le cas particulier des processus faiblement stationnaires [13, cor. 5]).

Les techniques de calcul employées précédemment vont ensuite nous permettre d'estimer la vitesse de convergence P - p.s. vers 0 de la moyenne d'un processus harmonisable qui vérifie la L.F.G.N..

Ces derniers résultats améliorent aussi des résultats analogues de V.F. GAPOSHKIN pour les processus faiblement stationnaires [13, § 4].

V.2. - LOI DU LOG. ITÉRÉ POUR LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE.-

L'étude (IV.3.1) et la domination nous permettent de montrer que :

V.2.1. - Lemme.- Toute mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifie :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ p > 1 \ , \quad \lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s.}\ (\text{Log } n)^{-1} \cdot \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0$$

Preuve : Puisque :

$$\forall q \in \mathbb{N}\ , \ p^q < n \leq p^{q+1} \Longrightarrow \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) - \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})$$

et

$$\lim_{q \to +\infty} \max_{p^q < n \leq p^{q+1}} \frac{\text{Log}(n)}{q} = \text{Log}(p) \ ,$$

pour prouver le lemme, en utilisant les notations de l'étude (IV.3.1.), il suffit d'établir que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \cdot M(B_q \times B_q) < +\infty \quad ,$$

et

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty \ ,$$

où M est la bimesure spectrale de la mesure stochastique μ.

m désignant une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine la bimesure spectrale M, nous pouvons écrire :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \cdot M(B_q \times B_q) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \cdot m(B_q) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \cdot m(\mathbb{R}) < +\infty \ .$$

De plus ,

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) \leqslant \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} m(A_q(e)) ,$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{+\infty} p^2 \cdot m(C_q) \qquad \text{(d'après (4.11))} ,$$

$$\leqslant p^2 \cdot m(\bigcup_{q\geq 1} C_q) < +\infty \ . \ \blacksquare$$

V.2.2. - *Théorème (loi du log.itéré)*.- Tout processus harmonisable mesurable X de mesure stochastique μ vérifie :

$$\lim_{t\to+\infty} P - p.s. \quad (\text{Log Log}(t))^{-1}.\sigma_t(X) = 0 .$$

Preuve : D'après le théorème (III.5.6.) de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable, utilisé pour $p = 2$, il existe un processus du second ordre $\{\Psi_t(X,2) : t > 2\}$ tel que, $\forall t > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant : $1 + 2^n < t \leqslant 1 + 2^{n+1}$, on ait :

- $\sigma_t(X) = \mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) + \Psi_t(X,2)$,

- $\lim_{t\to+\infty} P - p.s.\ \Psi_t(X,2) = 0$.

Il suffit donc de vérifier que

$$\mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) \cdot (\text{Log Log}(t))^{-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{P-p.s.} 0 , \qquad \text{ce qui équivaut,}$$

compte tenu de l'égalité :

$$\mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) = \mu(\{0\}) + \mu(\{u : 0 < |u| < 2^{-n}\}) ,$$

à :

$$\mu(\{u : 0 < |u| < 2^{-n}\}) \cdot \lg_2^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P-p.s.} 0 , \qquad \text{et résulte}$$

donc du lemme précédent.

V.2.3. - Le résultat qui suit montre que la loi du log. itéré que nous venons d'obtenir est, d'une certaine manière, optimale.

Proposition.- Pour toute application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les conditions suivantes :

i) $\exists p > 1$, $\exists A > 0$ et $\exists n_o > 0$ tels que :

$$\forall n > n_o \quad , \quad g(p^{n+1}) < A \,.\, g(p^n) \,,$$

ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$,

iii) $g(t) = o(\mathrm{Log}\,(\mathrm{Log}\, t))$ quand $t \to +\infty$,

il existe un processus continu et stationnaire $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ construit sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ - λ est la mesure de Borel - et tel que :

$$\limsup_{t \to +\infty} (g(t))^{-1} \,.\, |\sigma_t(X)| = +\infty \qquad \lambda - \text{p.s.}$$

Preuve : D'après G. ALEXITS [1 , p. 100], il existe une famille orthonormale $(Z_k , k \in \mathbb{N})$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ et une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tels que :

- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty$,

- $\limsup\limits_{n \to +\infty} (g(p^n))^{-1} . \left| \sum\limits_{k=0}^{n} c_k Z_k \right| = +\infty \quad \lambda$ - p.s.

Dans l'espace $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, la famille $(c_k Z_k , k \in \mathbb{N})$ est sommable et l'on définit une mesure stochastique μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \quad \mu(B) = \sum_{(k : p^{-k} \in B)} c_k Z_k \,.$$

Soit X le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ : il est en fait stationnaire car

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot e^{itp^{-k}} \cdot Z_k$ - égalité que l'on peut vérifier à partir de :

$$\forall Z \in L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda) \ , \quad E(X_t \cdot \bar{Z}) = \int e^{itx} \quad \mu_Z(dx) \ ,$$

où μ_Z est la mesure complexe définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ , \quad \mu_Z(B) = E(\mu(B) \cdot \bar{Z}) \ -$$

- $\forall t , s \in \mathbb{R}$, $E(X_t \cdot \bar{X}_s) = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \cdot e^{i(t-s)p^{-k}}$.

D'après le théorème de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable (th. III.5.6.), nous avons :

$$\forall t > 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{tels que :} \quad 1 + p^n < t \leqslant 1 + p^{n+1} \ ,$$

$$\sigma_t(X) = \Psi_t(X,p) + \mu(]-p^{-n} \ , \ p^{-n}[) \ .$$

De plus, dès que t est assez grand, nous avons :

$$g(p^n) \geqslant A^{-2} \ . \ g(t) \ , \quad \text{car} \quad t \leqslant p^{n+2} \quad \text{(d'après (i))} \ .$$

Puisque $\Psi_t(X,p) \xrightarrow[t\to+\infty]{\lambda-p.s.} 0$ et d'après (ii), nous obtenons :

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{|\sigma_t(X)|}{g(t)} \geqslant A^{-2} \ . \ \limsup_{n\to+\infty} \frac{|\mu(]-p^{-n} \ , \ p^{-n}[)|}{g(p^n)} \ .$$

Or $\mu(]-p^{-n} \ , \ p^{-n}[) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k Z_k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot Z_k - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot Z_k$,

et par conséquent ,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|\mu(]-p^{-n}, p^{-n}[)|}{g(p^n)} = \limsup_{n\to+\infty} (g(p^n))^{-1} . |\sum_{k=0}^{n} c_k . Z_k|$$

$$= +\infty \qquad \lambda - \text{p.s.}$$

V.3. - VITESSE DE CONVERGENCE P - p.s. VERS 0 DE $\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$.-

$\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$ est évidemment le processus qui apparaît dans le théorème de décomposition de $\{\sigma_t(X) : t > 0\}$.

Nous allons simplement affiner des calculs déjà faits.

V.3.1. - Lemme.- Si un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$, une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et un entier $p > 1$ satisfont les conditions suivantes :

(5.1) $\exists A \in]1,p[$ et $\exists q_o \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq p^{q_o} , \quad g^2(pn) \leq A.g^2(n) ,$$

(5.2) il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine la bimesure spectrale M de X, tel que :

$$\int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du) < +\infty ,$$

alors le processus $\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$ a la propriété suivante :

(5.3) $$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } g(t) . \Psi_t(X,p) = 0 .$$

Il existe évidemment des fonctions g satisfaisant (5.1), par exemple :

- $t \rightsquigarrow \mathrm{Log}^{\gamma}\, t$, $\gamma > 0$

- $t \rightsquigarrow (\mathrm{Log}\ \ \mathrm{Log}(t))^{\gamma}$, $\gamma > 0$

- $t \rightsquigarrow t^{\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Preuve : Rappelons d'abord la majoration de $\Psi_t(X,p)$ obtenue dans la démonstration du théorème (III.5.6.) :

$$(A)\quad |\Psi_t(X,p)| \leq \sup_{n<t\leq n+1} (|\sigma_t(X)-\sigma_n(X)|) + |\sigma_{p^q}(X)-\mu(]-p^{-q},p^{-q}[)|$$

$$+ \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|) ,$$

où

- $t > 2$; n , $q \in \mathbb{N}$,

- $n < t \leq n+1$,

- $p^q < n \leq p^{q+1}$.

Etude préliminaire : Dans un premier temps, nous allons montrer que

$$(5.4)\qquad \lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^q) \cdot \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|) = 0$$

$$(5.5)\qquad \lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^q) \cdot |\sigma_{p^q}(X) - \mu(]-p^{-q} , p^{-q}[)| = 0 .$$

Nous savons (III.4.3.) que :

$$\forall q \in \mathbb{N} , \qquad \sigma_{p^q}(X) = \int \frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\, \mu(du)$$

et (p. 80) que : $\forall \alpha \in]1, p[$,

$$E(\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|^2)) \leq \frac{P}{\alpha-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int S^2_{q,e}(u) \cdot m(du) .$$

Nous allons montrer, par des calculs analogues à ceux des lemmes (III.5.2.) et (III.5.5.), que nous avons :

(5.6) $\exists \alpha \in]1,p[$ tel que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e \in E_k} \int S^2_{q,e}(u)\, m(du) < +\infty ,$$

(5.7) $$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \int_{\{u : p^{-q} \leq |u|\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\right)^2 m(du) < +\infty ,$$

(5.8) $$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \int_{\{u : |u| < p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u} - 1\right)^2 m(du) ,$$

puisque, d'après le lemme (III.3.1.) et l'étude p. 80, (5.6) $\Longrightarrow$ (5.4) et que (5.7) $\wedge$ (5.8) $\Longrightarrow$ (5.5).

Convention.- Ayant à étudier la nature de séries, on peut sans inconvénient convenir que dans (5.1) et (5.2), $q_o = 0$.

Notations.- On choisit α de manière que l'on ait $1 < \alpha < 2$, $\alpha . A < p$: c'est possible puisque : $1 < A < p$.

Il est clair que :

$\forall n , r \in \mathbb{N}^*$, $g^2(p^r n) \leq A^r . g^2(n)$ et qu'en particulier si l'on pose

$$\beta = g^2(1) , \quad \text{on a :}$$

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $g^2(p^q) \leq \beta . A^q$.

Nous suivons la démonstration du lemme (III.5.5) en reprenant les notations : ainsi

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\gamma_q = \{u : p^{-q-1} \leq |u| < p^{-q}\}$

1) <u>Montrons que</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_1(q) < +\infty$ (voir p. 75)

D'après la démonstration de la convergence de la série $\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q)$ (p. 75-76), nous savons que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_1(q) \leq c^2p^4 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q+1}^{+\infty} \alpha^k\, p^{2q-k-2r}\, g^2(p^q)\, m(\gamma_r)$$

$$\leq c^2p^4 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q+1}^{+\infty} \alpha^k\, p^{2q-k-2r} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= c^2p^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=k+1}^{+\infty} \sum_{q=k}^{r-1} \alpha^k\, p^{2q-k-2r} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= \frac{c^2p^4}{p^2-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k \sum_{r=k+1}^{+\infty} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$\leq \frac{\alpha}{p-\alpha} \cdot \frac{c^2p^4}{p^2-1} \cdot \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du) < +\infty .$$

2) <u>Montrons que</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) . \sum_2(q) < +\infty$: d'après les calculs analogues p. 75-76 , nous savons que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_2(q) \leq c^2p^4 \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=\max(r,k)}^{r+k} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k g^2(p^q)\, m(\gamma_r)$$

$$\leq c^2p^4 \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=\max(r,k)}^{r+k} \left(\frac{\alpha A}{p}\right)^k \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$\leq c^2p^4 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{\alpha A}{p}\right)^k\right) \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$< +\infty .$$

3) <u>Montrons que</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_3(q) < +\infty$. D'après des calculs analogues antérieurs, on sait que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_3(q) \leqslant (cp)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{q=r+k+1}^{+\infty} \alpha^k \, p^{-q+r+1} \, g^2(p^q) \, m(\gamma_r)$$

$$\leqslant c^2 p^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k \Big(\sum_{r=0}^{+\infty} \Big(\int_{\gamma_r} g^2\big(\frac{1}{|u|}\big) \, m(du)\Big) \sum_{q=r+k+1}^{+\infty} \big(\frac{A}{p}\big)^{q-r}\Big)$$

$$= c^2 p^3 \, . \, \frac{A}{p-A} \, . \, \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\frac{\alpha A}{p}\big)^k\Big) \, . \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\big(\frac{1}{|u|}\big) \, m(du)$$

$$< +\infty \, .$$

4) <u>Montrons enfin que</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \, . \, \sum_4(q) < +\infty$. On sait (p. 78) que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_4(q) \leqslant c^2 \, m(\mathbb{R}) \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \alpha^k \, p^{k-2q} \, g^2(p^q)$$

$$\leqslant \beta \; c^2 \, m(\mathbb{R}) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=k}^{+\infty} (\alpha p)^k \, \big(\frac{A}{p^2}\big)^q$$

$$= \beta \; c^2 \, m(\mathbb{R}) \, \frac{p^2}{p^2-A} \, . \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\frac{\alpha A}{p}\big)^k$$

$$< +\infty \, .$$

Il est facile de voir que ces 4 résultats partiels impliquent (5.6) (voir p. 75) et a fortiori impliquent (5.4) (voir p. 80) .

5) <u>Démonstration de la propriété</u> (5.7)

a) A partir de (i.5) p. 69, nous avons les majorations suivantes :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\int_{\{u:1>|u|\geq p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\right)^2 m(du)$$

$$\leq (cp)^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{q-1} g^2(p^q)\ p^{-2q+2r}\ m(\gamma_r)$$

$$\leq (cp)^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{q-1} \left(\frac{A}{p^2}\right)^{q-r} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= (cp)^2 \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=r+1}^{+\infty} \left(\frac{A}{p^2}\right)^{q-r}\right) \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= (cp)^2 \frac{A}{p^2-A} \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$< +\infty .$$

b) Toujours à partir de (i.5) p. 69, nous avons encore :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\int_{\{u:|u|\geq 1\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\right)^2 m(du) \leq c^2\ m(\mathbb{R}) \sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q)\ .\ p^{-2q}$$

$$\leq c^2\ m(\mathbb{R})\ \beta \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{A}{p^2}\right)^q$$

$$< +\infty \quad . \quad \blacksquare$$

6) Démonstration de la propriété (5.8)

L'inégalité (i.2) p. 69 entraîne :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\int_{\{u:|u|<p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u} - 1\right)^2 m(du)$$

$$\leq c^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=q}^{+\infty} p^{2q-2r}\ g^2(p^q)\ m(\gamma_r)$$

$$\leq c^2 \sum_{r=1}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)\ .\ \sum_{q=1}^{r} p^{2q-2r}\right)$$

$$\leq \frac{(cp)^2}{p^2-1} \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$< +\infty \quad \blacksquare$$

La propriété (5.5) est donc vérifiée. ■

<u>Nous pouvons maintenant conclure l'étude de la convergence</u> P - p.s. <u>de</u> $g(t) \cdot \Psi_t(X,p)$ <u>vers</u> 0 <u>quand</u> $t \to +\infty$. Puisque si $t > 2$ et $q \in \mathbb{N}$ sont liés par : $1 + p^q < t \leqslant 1 + p^{q+1}$, nous avons :

$$1 \leqslant \frac{g(t)}{g(p^q)} \leqslant A \quad ,$$

compte tenu de la majoration (A), de (5.4) et de (5.5), il suffit de montrer que :

$$\lim_{t \to +\infty} P - \text{p.s. } g(t) \cdot \sup_{n < t \leqslant n+1} (|\sigma_t(X) - \sigma_n(X)|) = 0 .$$

Or on sait (fin de la démonstration III.3.2., p. 65) que :

$$E\Big(\sup_{n<t\leqslant n+1} (|\sigma_t(X) - \sigma_n(X)|^2)\Big) \leqslant \frac{4}{n^2} (||\mu|| \ (\mathbb{R}))^2 .$$

D'après (III.3.1) et puisque $n < t \leqslant n+1 \Longrightarrow 1 \leqslant \dfrac{g(t)}{g(n)} \leqslant A$, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{g(n)}{n}\right)^2 < +\infty \quad ,$$ ce qui résulte des majorations ci-dessous :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{g(n)}{n}\right)^2 = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{n=p^q+1}^{p^{q+1}} \left(\frac{g(n)}{n}\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{q=0}^{+\infty} (p-1)\ p^q \left(\frac{g(p^{q+1})}{p^q}\right)^2$$

$$\leqslant (p-1)\ \beta\ A \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{p}\right)^q$$

$$< +\infty \ . \ ■$$

V.4. - VITESSE DE CONVERGENCE P - p.s. VERS 0 DE $\mu(]-p^{-n}, p^{-n}[)$ QUAND $n \to +\infty$.-

V.4.1. - Lemme.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une mesure stochastique, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres positifs, et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

- $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$,

- $g(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

En posant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu\{u : t^{-1}_{n+1} \leqslant |u| < t_n^{-1}\}$, nous avons :

(5.9) $$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |E(\mu_j . \overline{\mu_k})| . \mathrm{Log}(j) . \mathrm{Log}(k)\, g(t_j) . g(t_k) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} P\text{ - p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) . g(t_n) = 0 .$$

Preuve : D'après le théorème de Menchoff-Rademacher-Serfling-Szep, les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} g(t_n).\mu_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n$ converge P - p.s. D'autre part, μ étant σ-additive, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{k \to +\infty} \text{m.q.} \sum_{j=n}^{k} \mu_j = \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) .$$

Il existe donc un événement certain Ω_o tel que :

$\forall \omega \in \Omega_o$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $\lim_{k \to +\infty} \sum_{j=n}^{k} \mu_j(\omega) = \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega)$

- la série $\sum_{j=n}^{+\infty} g(t_j) . \mu_j(\omega)$ converge : nous notons $r_n(\omega)$ sa somme.

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \omega \in \Omega_o$, nous avons alors :

$$\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega) = \sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j(\omega)$$

$$= \sum_{j=n}^{+\infty} (g(t_j))^{-1} . (r_j(\omega) - r_{j+1}(\omega)) ,$$

d'où, en utilisant la formule de sommation d'Abel [par ex. 8, chap. VI, ex. 3] :

$$- \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega) = (g(t_n))^{-1} . r_n(\omega) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} r_j(\omega)((g(t_j))^{-1} - (g(t_{j-1}))^{-1}),$$

$$- |\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega)| \leq 2 \ (g(t_n))^{-1} . \sup(|r_j(\omega)| \ ; \ j \geq n) .$$

Il en résulte que $\forall \omega \in \Omega_o$:

$$g(t_n) . \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad . \blacksquare$$

Appliquons ce résultat au cas où μ est une mesure stochastique à mesure spectrale.

V.4.2. - Corollaire.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ une mesure stochastique à mesure spectrale M et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

On suppose que :

- $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} + \infty$,

(5.10) - $\displaystyle\iint_{\{u:0<|u|<1\}^2} f(\frac{1}{|u|}) \ . \ f(\frac{1}{|v|}) \ |M| \ (du,dv) < + \infty$,

où $\forall u > e$, $f(u) = g(u) \ . \ \mathrm{Log\,Log}(u)$.

Alors, $\forall a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} P$ - p.s. $g(a^n) \ . \ \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0$.

Preuve : La condition (5.10) est encore vérifiée lorsque dans la définition de f, on substitue au logarithme népérien un logarithme à base $a > 1$ quelconque .

$\forall j \in \mathbb{N}$, posons $\gamma_j = \{u : a^{-j-1} \leq |u| < a^{-j}\}$.

En utilisant la variation totale $|M|$ de la mesure M , nous avons :

$\forall j, k \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$- 0 \leq |M|(\gamma_j \times \gamma_k) \ \lg_a(j).\log_a(k) \ g(a^j).g(a^k) \leq \iint_{\gamma_j \times \gamma_k} f(\frac{1}{|u|}).f(\frac{1}{|v|}) \ |M|(du,dv) \ ,$$

$$- \ |M(\gamma_j \times \gamma_k)| \leq |M| \ (\gamma_j \times \gamma_k) \ .$$

Il en résulte que :

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |M(\gamma_j \times \gamma_k)| \lg_a(j) \ \lg_a(k) \ g(a^j)g(a^k)$$

$$\leq \iint_{\{u:0<|u|<a^{-1}\}^2} f(\frac{1}{|u|}) \ . \ f(\frac{1}{|v|}) \ |M| \ (du,dv)$$

$$< + \infty \ .$$

On conclut grâce au lemme précédent. ■

Dans le cas d'une bimesure quelconque M , on introduit une mesure positive majorante :

V.4.3. - Lemme.- Si une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \dashrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un entier $p > 1$ et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifient les propriétés suivantes :

1) $\exists B > 0$ et $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tels que :

(5.11) $\quad \forall q \in \mathbb{N} \ , \quad n_o \leq p^q \Longrightarrow g(p^{p^{q+1}}) \leq B.g(p^{p^q}) \ ,$

2) il existe une mesure positive M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ telle que :

(4.16) - pour tout événement A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$,

$$M(A \times A) \leqslant M_o(A \times A) ,$$

(5.12) - $\displaystyle\iint_{\{u:0<|u|<e^{-1}\}^2} f\left(\frac{1}{|u|}\right) . f\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du,dv) < +\infty$, où

$\forall u > 1$, $\qquad f(u) = g(u) . \text{Log Log}(u)$.

alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} P$ - p.s. $g(p^n) . \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0$.

Remarques :

- $t \rightsquigarrow (\text{Log Log}(t))^\alpha$, $\alpha > 0$ vérifie (5.11) ;

- (5.12) est aussi satisfaite quand, dans la définition de f , on substitue au logarithme népérien le logarithme à base p .

Preuve : μ étant additive, $\forall q , n \in \mathbb{N}$ tels que $p^q < n \leqslant p^{q+1}$,

$$\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) - \mu(\{u : p^{-n} \leqslant |u| < p^{-p^q}\}) .$$

1) Etude de $(\mu(B_q))_{q\in\mathbb{N}}$, où $B_q = \{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}$

q_o désignant un entier tel que $n_o + 2 \leqslant p^{q_o}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{q=q_o}^{+\infty} g^2(p^{p^q}) M(B_q \times B_q) &\leqslant \sum_{q=q_o}^{+\infty} g^2(p^{p^q}) . M_o(B_q \times B_q) \\
&\leqslant \sum_{q=q_o}^{+\infty} q^{-2} \iint_{B_q\times B_q} f\left(\frac{1}{|u|}\right) . f\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du,dv) \\
&\leqslant \left(\sum_{q=q_o}^{+\infty} q^{-2}\right) \iint_{B_{q_o}\times B_{q_o}} f\left(\frac{1}{|u|}\right) . f\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du,dv) \\
&< +\infty .
\end{aligned}$$

D'après le lemme (III.3.1.), on en déduit que :

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^{p^q}).\mu(B_q) = 0 \qquad \text{et, facilement, que :}$$

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^n).\mu(B_q) = 0 \quad , \qquad \text{où } p^q < n \leqslant p^{q+1} \quad .$$

2) Il reste à montrer que

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s.} \max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} (|\mu(\{u : p^{-n} \leqslant |u| < p^{-p^q}\})| \; g(p^n)) = 0 \quad , \quad \text{ce}$$

que l'on peut faire en utilisant encore le lemme (III.3.1) dans une étude parallèle à (IV.3.1) p. 89-92, dont on reprend les notations :

$$\sum_{q=q_o}^{+\infty} E(\max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leqslant |u| < p^{-p^q}\})|^2 . g^2(p^n)) .$$

$$\leqslant \sum_{q=q_o}^{+\infty} q(\sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e))) \; g^2(p^{p^{q+1}})$$

$$\leqslant \sum_{q=q_o}^{+\infty} q^2 \, p^2 \; M_o(C_q \times C_q) \; g^2(p^{p^q})$$

$$\leqslant B \cdot p^2 \sum_{q=q_o}^{+\infty} \iint_{C_q\times C_q} f(\frac{1}{|u|}) \; . \; f(\frac{1}{|v|}) \quad M_o(du,dv)$$

$$\leqslant B \, p^2 \iint_{\{u:0<|u|<p^{-2}\}^2} f(\frac{1}{|u|}) \; . \; f(\frac{1}{|v|}) \; M_o(du,dv)$$

$$< + \infty \; . \; \blacksquare$$

V.4.4. - Lemme.- <u>Si une mesure stochastique</u> $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$, <u>de bimesure spectrale</u> M , <u>un réel</u> $a > 1$ <u>et une application croissante</u> $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ <u>vérifient</u> :

1) $\exists B > 0$ <u>et</u> $\exists n_o \in \mathbb{N}$ <u>tels que</u> :

$$\text{(5.13)} \qquad \forall n \geqslant n_o \quad , \quad \sum_{q=n_o}^{n} g^2(a^q) \leqslant B \, . \, g^2(a^n)$$

2) <u>il existe une mesure positive</u> M_o <u>sur</u> $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ <u>telle que</u> :

(4.16) $M(A \times A) \leq M_o(A \times A)$, <u>pour tout événement</u> A <u>de l'algèbre engendrée par les intervalles de</u> $\mathbb{R}$,

(5.14) $$\iint_{\{u:0<|u|<1\}^2} g\left(\frac{1}{|u|}\right) . g\left(\frac{1}{|v|}\right) . M_o(du,dv) < +\infty ,$$

<u>alors</u> $\lim_{n\to+\infty} P$ - p.s. $g(a^n) . \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0$.

<u>*Preuve*</u> : Il suffit de démontrer que :

$$\sum_{n=n_o}^{+\infty} g^2(a^n)\, M(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}^2) < +\infty .$$

$\forall j \in \mathbb{N}$, si $\gamma_j = \{u : a^{-j-1} \leq |u| < a^{-j}\}$, nous avons :

$$\sum_{n=n_o}^{+\infty} M(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}^2) . g^2(a^n)$$

$$\leq \sum_{n=n_o}^{+\infty} \sum_{j=n}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} g^2(a^n)\, M_o(\gamma_j \times \gamma_k)$$

$$= \sum_{j=n_o}^{+\infty} \left(\sum_{k=n_o}^{j-1} \sum_{n=n_o}^{k} g^2(a^n).M_o(\gamma_j\times\gamma_k) + \sum_{k=j}^{+\infty} \sum_{n=n_o}^{j} g^2(a^n).M_o(\gamma_j\times\gamma_k)\right)$$

$$\leq B \sum_{j=n_o}^{+\infty} \left(\sum_{k=n_o}^{j-1} M_o(\gamma_j\times\gamma_k).g^2(a^k) + \sum_{k=j}^{+\infty} M_o(\gamma_j\times\gamma_k)\, g^2(a^j)\right)$$

(d'après (5.13))

$$\leq B \sum_{j=n_o}^{+\infty} \sum_{k=n_o}^{+\infty} M_o(\gamma_j\times\gamma_k)\, g(a^k) . g(a^j)$$

$$\leq B \sum_{j=n_o}^{+\infty} \sum_{k=n_o}^{+\infty} \iint_{\gamma_j\times\gamma_k} g\left(\frac{1}{|u|}\right) . g\left(\frac{1}{|v|}\right)\, M_o(du,dv)$$

$$= B \iint_{\{u:0<|u|<1\}^2} g\left(\frac{1}{|u|}\right) . g\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du,dv)$$

$< +\infty$ (d'après (5.14)) . ■

V.5. - VITESSE DE CONVERGENCE P - p.s. VERS 0 DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE.-

De (V.3) et (V.4) extrayons les résultats suivants :

V.5.1. - Théorème.- Soient un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ de bimesure spectrale M et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifient les 4 conditions suivantes :

I) (5.15) $M(\{0,0\}) = 0$

II) (5.1) $\exists p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $\exists A \in]1,p[$ et $\exists q_o \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq p^{q_o} \ , \quad g^2(pn) \leq A \ . \ g^2(n)$$

III) (i) (5.13) $\exists B \in]0, +\infty[$ et $\exists q_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall q \geq q_1 \ , \quad \sum_{k=q_1}^{q} g^2(p^k) \leq B \ g^2(p^q) \ ,$$

ou

(ii) - $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ et

$$(5.9) \qquad \sum_{j,k=1}^{+\infty} |M(\gamma_j \times \gamma_k)| \ . \ \mathrm{Log}(j) \ . \ \mathrm{Log}(k) \ . \ g(p^j) \ . \ g(p^k) < +\infty$$

où $\forall j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j = \{u : p^{-j-1} \leq |u| < p^{-j}\}$,

IV) il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine M, tel que :

$$(5.2) \qquad \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du) < +\infty \ .$$

Alors ,

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } g(t) \ . \ \sigma_t(X) = 0 \ .$$

V.5.2. - Théorème.- Soient un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ de bimesure spectrale M et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifient les 3 conditions suivantes :

I) (5.15) $$M(\{0,0\}) = 0$$

II) $\exists p\ ,\ q_o \in \mathbb{N}\ ,\ p > 1\ ,\ \exists A \in \,]1,p[$ et $\exists B \in \,]0, +\infty[$ tels que :

(5.1) $$\forall n \geq p^{q_o}\ ,\quad g^2(p^n) \leq A\, g^2(n)$$

(5.11) $$\forall q \geq q_o\ ,\quad g^2(p^{p^{q+1}}) \leq B . g^2(p^{p^q})$$

III) il existe une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dominant M et telle que :

(5.12) $$\int_{\{u:0<|u|<e^{-1}\}} (\mathrm{Log\ Log}(\frac{1}{|u|}) . g(\frac{1}{|u|}))^2\, m(du) < +\infty$$

Alors : $$\lim_{t\to+\infty} P - p.s.\quad g(t) . \sigma_t(X) = 0 .$$

V.5.3. - Remarques :

1) Sous les hypothèses de l'un ou l'autre des 2 théorèmes précédents, le processus harmonisable mesurable X vérifie la L.F.G.N..

2) Sans la condition (5.15), et μ désignant la mesure stochastique spectrale de X , on obtient seulement :

$$\lim_{t\to+\infty} P - p.s.\ (\sigma_t(X) - \mu(\{0\})) . g(t) = 0 .$$

ANNEXE 1.

Preuves des lemmes (I.5.12.).-

Preuve du lemme 1.-

a) Etant donnés une suite réelle $(t_n)_{n\geq 1}$ et un nombre entier N non nul, l'égalité de Parseval dans $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi], \mathcal{B}_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda)$ nous donne :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} e^{ixn} \cdot t_n\right|^2 dx = 2\pi \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 ,$$

donc par changement de variable et en utilisant la parité de la fonction intégrée, nous obtenons :

$$\int_{0}^{2\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} e^{i\frac{xn}{2}} \cdot t_n\right|^2 dx = 2\pi \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 ,$$

(1) $$\int_{0}^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} e^{i\frac{xn}{2}} \cdot t_n\right|^2 dx \leq 2\pi \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 ;$$

mais $$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{i\frac{xn}{2}} \cdot t_n\right|^2 = \sum_{m,n=1}^{N} e^{ix(\frac{m-n}{2})} \cdot t_m \cdot t_n ;$$

donc $$\int_{0}^{\pi} \left|\sum_{n=1}^{N} e^{i\frac{xn}{2}} \cdot t_n\right|^2 dx = 2 \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_m \cdot t_n + \pi \cdot \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 ;$$

nous en déduisons que :

$$-2 \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_m \cdot t_n \leq \pi \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 ,$$

et d'après (1) $$2 \sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_m \cdot t_n \leq \pi \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 ;$$

en conclusion $$\left|\sum_{m,n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_m \cdot t_n\right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 , \qquad \forall N \in \mathbb{N} .$$

b) *Construction de* $A : \ell_f^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R})$. Etant donnée une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ élément du sous-espace $\ell_f^2(\mathbb{R})$ de $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles à support fini, il existe un entier N tel que :

$$n > N \Longrightarrow t_n = 0 .$$

Pour N fixé, l'inégalité de Schwarz nous donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\sum_{n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_n\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_{mn}|^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{1}{m-n}\right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2$$

donc $$\left|\sum_{n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_n\right|^2 = O\left(\frac{1}{m^2}\right) \cdot N \cdot \sum_{n=1}^{N} |t_n|^2 , \text{ si } m \to +\infty;$$

par conséquent la suite de composante générale $\sum_{n=1}^{N} a_{mn} \cdot t_n$, N fixé, est un élément de l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$, et nous pouvons définir une application linéaire A de ℓ_f^2 dans ℓ^2 par :

$$\forall t \in \ell_f^2 , \qquad At = s$$

avec pour $s = (s_m)_{m\geq 1}$ et $m \geq 1$, $s_m = \sum_{n\geq 1} a_{mn} \cdot t_n$.

c) *Symétrie* : Etant données t et s de $\ell_f^2(\mathbb{R})$, elles sont à support fini et donc :

$$(At,s) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{n\geq 1} a_{mn} \cdot t_n\right) \cdot s_m = \sum_{m,n\geq 1} a_{mn} \cdot t_n \cdot s_m ;$$

mais $\forall m, n \geq 1, \qquad a_{mn} = a_{nm},$

d'où $$(At,s) = \sum_{n,m\geq 1} a_{nm} \cdot s_n \cdot t_m = (t,As) .$$

d) *Continuité de* A *et plongement.*

En notant $\phi : \ell_f^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :

$$\phi(t) = (At,t) = \sum_{m,n\geq 1} a_{mn} \cdot t_m \cdot t_n \quad , \quad t = (t_n)_{n\geq 1} \in \ell_f^2(\mathbb{R}) ,$$

nous obtenons aisément :

$$(At,s) = \frac{1}{4} (\phi(t+s) - \phi(t-s)) \quad , \quad t , s \in \ell_f^2(\mathbb{R}) ,$$

d'où, d'après la partie a) :

$$|(At,s)| \leq \frac{\pi}{8} \cdot (||t+s||^2 + ||t-s||^2) ,$$

par conséquent :

$$\forall t , s \in \ell_f^2(\mathbb{R}) \quad , \quad ||t|| \leq 1 \quad \text{et} \quad ||s|| \leq 1 \Longrightarrow |(At,s)| \leq \frac{\pi}{2} .$$

De plus $\ell_f^2(\mathbb{R})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$: tout élément de $\ell^2(\mathbb{R})$ est limite d'une suite d'éléments de $\ell_f^2(\mathbb{R})$; nous en déduisons :

$$|(At,s)| \leq \frac{\pi}{2} ||t|| \cdot ||s|| \quad \text{pour} \quad t \in \ell_f^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad s \in \ell^2(\mathbb{R})$$

et

$$||A(t)|| \leq \frac{\pi}{2} ||t|| \qquad \text{pour} \quad t \in \ell_f^2(\mathbb{R}) .$$

Ainsi l'application linéaire $A : \ell_f^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R})$ est continue sur le sous-espace dense $\ell_f^2(\mathbb{R})$ de $\ell^2(\mathbb{R})$, elle admet un unique prolongement continu que nous noterons $A : \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R})$.

Par continuité, nous obtenons aisément que l'application $A : \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{R})$ est linéaire continue symétrique et de norme $||A|| \leq \frac{\pi}{2}$. ∎

A partir de l'opérateur symétrique A de norme $||A|| \leq \frac{\pi}{2}$ définissons <u>l'opérateur</u> B <u>de</u> $\ell^2(\mathbb{R})$ <u>par</u> :

$$B = \frac{\pi}{2}.I + A ,$$

$$\forall m , n \geq 1 , \qquad m \neq n , \quad b_{mn} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}(m-n)}{m-n}$$

et pour $\qquad m = n , \quad b_{nn} = \frac{\pi}{2}$.

<u>*Preuve du lemme 2.-*</u>

a) Puisque les opérateurs A et I sont symétriques, il en est de même de leur combinaison linéaire B .

b) Pour tout élément s de $\ell^2(\mathbb{R})$ nous avons :

$$(Bs,s) = \frac{\pi}{2} . ||s||^2 + (As,s) ,$$

donc $\qquad (As,s) \leq \frac{\pi}{2} ||s||^2 \Longrightarrow 0 \leq (Bs,s) \leq \pi . ||s||^2$. ■

<u>Considérons la suite</u> $(u_n)_{n\geq 1}$ <u>définie par</u>

$$\forall n \geq 1 , \quad u_n = \frac{1}{n^{1/2}.\log(n+1)}$$

cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est un élément de $\ell^2(\mathbb{R})$ (séries de Bertrand) et nous pouvons poser :

$$\alpha = \pi . \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 .$$

Preuve du lemme 3.-

a) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{R})$, donc les suites $(\varepsilon_n . u_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n . u_n)_{n\geq 1}$ sont aussi des éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$.

Définissons des suites de $\ell^2_f(\mathbb{R})$ qui convergent vers $(\varepsilon_n . u_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n . u_n)_{n\geq 1}$ dans $\ell^2(\mathbb{R})$. Posons pour $N \geq 1$:

$$U_{N,n} = \varepsilon_n . u_n \quad \text{et} \quad V_{N,n} = \eta_n . u_n \quad , \quad \text{pour} \quad 1 \leq n \leq N ,$$

$$U_{N,n} = 0 \quad \text{et} \quad V_{N,n} = 0 \quad , \quad \text{pour} \quad N < n ,$$

et
$$U_N = (U_{N,n})_{n\geq 1} \quad , \quad V_N = (V_{N,n})_{n\geq 1} .$$

Ainsi $U_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} (\varepsilon_n . u_n)_{n\geq 1}$ et $V_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} (\eta_n . u_n)_{n\geq 1}$ dans $\ell^2(\mathbb{R})$

et $\forall N \geq 1$,
$$(V_N, B\, U_N) = \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} . \varepsilon_m . \eta_n ;$$

$$||U_N||^2 = ||V_N||^2 = \sum_{n=1}^{N} u_n^2 \leq \frac{\alpha}{\pi} .$$

b) Par continuité $\lim_{N\to+\infty} (V_N , B\, U_n)$ existe,donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} . \varepsilon_m . \eta_n$ existe .

c) L'inégalité de Schwarz nous permet d'écrire , pour $N \geq 1$:

$$|(V_N, B\, U_N)| \leq ||V_N|| . ||B\, U_N|| ;$$

mais $||B|| < \pi \implies |(V_N , B\, U_N)| \leq \pi . ||V_N|| . ||U_N|| \leq \alpha$,

par conséquent $\forall N \geq 1$, $\left| \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} . \varepsilon_m . \eta_n \right| \leq \alpha$.

B étant un opérateur positif :

$$\forall N \geqslant 1 \ , \quad 0 \leqslant (U_N, B\, U_N) \leqslant \alpha \Longrightarrow 0 \leqslant \sum_{m,n=1}^{N} c_{mn} \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_n \leqslant \alpha \ .$$

d) Nous avons :

$$m - n = 2k \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow |c_{mn}| = 0 \ ,$$

$$m - n = 2k+1 \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow |c_{mn}| = \frac{1}{m-n} \cdot u_n \cdot u_m \ ,$$

et

$$c_{nn} = \frac{\pi}{2} u_n^2 \ .$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{+\infty} c_{mn}^2 \leqslant \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.\log^2(n+1)} \cdot \frac{1}{m.\log^2(m+1)} < +\infty \ .$

De plus

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} |c_{mn}| \geqslant \sum_{\substack{m,n=1 \\ m-n \notin 2\mathbb{Z}}}^{+\infty} \frac{1}{|m-n|} \cdot u_n \cdot u_m \ ,$$

d'où après réindexation :

$$\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot u_{2k+1} \cdot u_{2k+1+n} \ .$$

Comme $u_{2k+1} > u_{2k+1+n}$ pour $k \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2k+1} \cdot u_{2k+1+n} \geqslant \sum_{\ell=2k+2}^{+\infty} u_\ell^2 \ , \quad \text{pour} \quad k \geqslant 0 \ .$$

Cette relation nous donne la minoration :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2k+1} \cdot u_{2k+1+n} \geqslant \int_{2k+2}^{+\infty} \frac{1}{u.\log^2 u}\, du = \frac{1}{\log(2k+2)}$$

et

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} |c_{mn}| \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{\log(2k+2)} = +\infty \ . \blacksquare$$

A N N E X E 2.

Preuve du lemme (I.6.2.).-

On vérifie aisément que lorsque l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ est à variations bornées sur $\mathbb{R}^2$, elle l'est sur tout rectangle $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} 0 \leq \operatorname{var}(\psi, I \times J) &\leq \min \{\operatorname{var}(\psi, I \times \mathbb{R}) , \operatorname{var}(\psi, \mathbb{R} \times J)\} \\ &\leq \max \{\operatorname{var}(\psi, I \times \mathbb{R}) , \operatorname{var}(\psi, \mathbb{R} \times J)\} \\ &\leq \operatorname{var}(\psi, \mathbb{R}^2) , \end{aligned}$$

où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Notons F l'ensemble des familles finies strictement croissantes de nombres réels, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Preuve de (1) : Soit $\varepsilon > 0$. L'application ψ étant à variations bornées dans $\mathbb{R}^2$, il existe $\{t_j : 1 \leq j \leq p+1\}$ et $\{s_k : 1 \leq k \leq q+1\}$ de F telles que :

$$\operatorname{var}(\psi, \mathbb{R}^2) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} ||\Delta_{jk}(\psi)|| \leq \operatorname{var}(\psi, \mathbb{R}^2) .$$

Soit $\{t'_j : 1 \leq j \leq p' + 1\}$ de F telle que : $t'_{p'+1} \leq t_1$; posons pour $j \leq p+1$,

$$t'_{j+p'+1} = t_j ;$$

la famille obtenue $\{t'_j : 1 \leq j \leq p + p'+2\}$ appartient à F, et pour toute $\{s'_j : 1 \leq j \leq q'+1\}$ de F contenant $\{s_j : 1 \leq j \leq q+1\}$, nous obtenons :

$$\mathrm{var}(\psi, \mathbb{R}^2) - \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} ||\Delta_{jk}(\psi)|| \quad ,$$

$$\leqslant \sum_{j=p'+2}^{p+p'+1} \sum_{k=1}^{q'} ||\Delta'_{jk}(\psi)|| \quad ,$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p+p'+1} \sum_{k=1}^{q'} ||\Delta'_{jk}(\psi)|| \leqslant \mathrm{var}(\psi, \mathbb{R}^2) \quad ,$$

où $\Delta'_{jk}(\psi) = \psi(t'_{j+1}, s'_{k+1}) - \psi(t'_{j+1}, s'_k) - \psi(t'_j, s'_{k+1}) + \psi(t'_j, s'_k)$;

nous en déduisons que :

$$\sum_{j=1}^{p'+1} \sum_{k=1}^{q'} ||\Delta'_{jk}(\psi)|| \leqslant \varepsilon \ .$$

Ainsi $\forall I , J \in \mathcal{I} \ , \ I \subset]-\infty, t_1] \Longrightarrow 0 \leqslant \mathrm{var}(\psi, I \times J) \leqslant \mathrm{var}(\psi, I \times \mathbb{R}) \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent :

$$\lim_{t \to -\infty} \sup_{J \in \mathcal{I}} (\mathrm{var}(\psi,]-\infty, t] \times J)) = 0$$

De même $$\lim_{s \to -\infty} \sup_{I \in \mathcal{I}} (\mathrm{var}(\psi, I \times]-\infty, s])) = 0 \ . \quad \blacksquare$$

Preuve de (2) : Soient I , I' et J de $\mathcal{I}$ tels que : $I \cap I' = \emptyset$, $I \cup I' \in \mathcal{I}$ et I précède I' .

Lorsque $\{t_j : 1 \leqslant j \leqslant p+q+2\}$ et $\{s_k : 1 \leqslant k \leqslant r+1\}$ de F sont telles que : $\forall j , \ t_j \in I \cup I'$, $\forall k , \ s_k \in J$,

$$t_{p+1} \in I \quad \text{et} \quad t_{p+2} \in I' ,$$

l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta_{jk}(\psi)|| + \sum_{j=p+2}^{p+q+1} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta_{jk}(\psi)|| \leqslant \sum_{j=1}^{p+q+1} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta_{jk}(\psi)|| \ .$$

Puisque le membre de droite est toujours majoré par $\mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J)$ nous en déduisons que

$$\mathrm{var}(\psi, I \times J) + \mathrm{var}(\psi, I' \times I) \leqslant \mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) .$$

De même $$\mathrm{var}(\psi, J \times I) + \mathrm{var}(\psi, J \times I') \leqslant \mathrm{var}(\psi, J \times (I \cup I')) .$$

Preuve de (3) : Pour obtenir les égalités, il faut posséder des informations supplémentaires sur le comportement de l'application ψ au voisinage de la borne commune aux intervalles I et I' .

Supposons que l'application ψ soit continue à droite par rapport à chacune des variables, et que l'intervalle I , précédant I' , soit fermé à droite de borne supérieure b.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\{t_j : 1 \leqslant j \leqslant n+1\}$ et $\{s_k : 1 \leqslant k \leqslant r+1\}$ de $\mathcal{I}$, incluses respectivement dans $I \cup I'$ de $\mathcal{I}$, et telles que :

$$- \quad \exists\, p < n \quad , \qquad t_{p+1} = b \quad ,$$

et $$- \ \mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) - \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \|\Delta_{jk}(\psi)\| \leqslant \mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) ;$$

ainsi $\forall j \leqslant p+1$, $t_j \in I$ et $\forall j > p+1$, $t_j \in I'$.

L'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, étant continue à droite par rapport à chacune des variables, il existe t' de $]b , t_{p+2}[$ (ou de $]b, +\infty[$ lorsque t_{p+2} n'est pas défini) tel que :

$$\forall k \in \{1,\dots,r+1\} \quad , \qquad \|\psi(t',s_k) - \psi(b, s_k)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2r} \quad ,$$

d'où $$\sum_{k=1}^{r} \|\psi(t', s_{k+1}) - \psi(t', s_k) - \psi(b, s_{k+1}) + \psi(b, s_k)\| \leqslant \varepsilon .$$

Posons pour $j \leqslant p+1$, $t'_j = t_j$, $t'_{p+2} = t'$,

et pour $j > p+2$, $t'_j = t_{j-1}$;

Les relations précédentes entraînent les inégalités :

$$\mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) - \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta'_{jk}(\psi)||$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta'_{jk}(\psi)|| + \sum_{k=1}^{r} ||\Delta'_{p+1\ k}(\psi)|| + \sum_{j=p+2}^{n+1} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta'_{jk}(\psi)||$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta_{jk}(\psi)|| + \varepsilon + \sum_{j=p+1}^{n} \sum_{k=1}^{r} ||\Delta_{jk}(\psi)|| ,$$

où $\Delta'_{jk} = \psi(t'_{j+1}, s_{k+1}) - \psi(t'_{j+1}, s_k) - \psi(t'_j, s_{k+1}) + \psi(t'_j, s_k)$.

Grâce au choix de la famille $\{t_j \quad 1 \leqslant j \leqslant n+1\}$ nous en déduisons que

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) - \varepsilon \leqslant \mathrm{var}(\psi, I \times J) + \mathrm{var}(\psi, I' \times J) + \varepsilon .$$

Par conséquent, en utilisant la propriété (2) du lemme, nous concluons :

$$\mathrm{var}(\psi, (I \cup I') \times J) = \mathrm{var}(\psi, I \times J) + \mathrm{var}(\psi, I' \times J) ;$$

de même $\mathrm{var}(\psi, J \times (I \cup I')) = \mathrm{var}(\psi, J \times I) + \mathrm{var}(\psi, J \times I')$. ■

ANNEXE 3.

Afin d'établir le théorème (II.2.17), dans un premier temps, prouvons :

Lemme.- <u>Considérons un espace topologique</u> T <u>séparable localement compact et dénombrable à l'infini, un</u> $\mathbb{K}$-<u>espace de Hilbert</u> H , <u>et une mesure de Radon</u> $\nu : \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T) \longrightarrow K$.

<u>Toute application</u> $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ <u>borélienne bornée est</u> ν-<u>intégrable</u>.

Preuve :

1) H étant un espace de Hilbert, la mesure de Radon $\nu : \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T) \longrightarrow H$ est prolongeable, c'est-à-dire que toute application borélienne bornée à support compact est ν-intégrable [25, lemme 2.4.3.].

2) Comme cette mesure de Radon ν est bornée, il existe une constante c telle que :

$$\forall f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T) \quad , \qquad ||\nu(f)||_H \leqslant c.||f||_\infty \quad ;$$

ainsi, grâce à la définition de la semi-variation $\nu^\bullet$ de ν [32 , déf. 1.1. ; 25 , déf. 2.2.2.] nous obtenons :

$$\forall f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T) \, , \qquad \nu^\bullet(|f|) \leqslant c.||f||_\infty \quad .$$

3) T étant un espace dénombrable à l'infini, il existe une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments positifs de $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)$, tendant simplement vers la fonction constante 1 [28, lemme d'Uryshon 2.12] ; d'après 2) tous les éléments de cette suite vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad , \qquad \nu^\bullet(f_n) \leqslant c \quad .$$

H étant un espace de Hilbert, la généralisation du lemme de Fatou [32, cor. 5.7] de E. THOMAS, nous donne l'inégalité suivante :

$$\nu^{\bullet}(1) \leq \liminf_{n\to+\infty} \nu^{\bullet}(f_n) \leq c$$

et donc
$$1 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu) .$$

4) La semi-variation $\nu^{\bullet}$ étant croissante et positivement homogène [32, prop. 1.3.], d'après les relations précédentes, toute application bornée $f : T \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifie :

$$\nu^{\bullet}(|f|) \leq c \, ||f||_{\infty} \quad .$$

Mais toute application borélienne bornée positive $f : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la limite simple d'une suite croissante d'applications boréliennes, bornées, positives et à support compact, ainsi, grâce au lemme de Fatou [32, cor. 5.7], f est un élément de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Lorsque f est une application borélienne bornée quelconque, en considérant ses parties réelle positive, réelle négative, imaginaire positive et imaginaire négative, nous obtenons aisément que f est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. ■

D'où la preuve du théorème :

- *Condition nécessaire* : Soit X un processus harmonisable à mesure spectrale , c'est-à-dire, dont la bimesure spectrale M est prolongeable en une mesure complexe sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ que nous noterons encore M.

D'après [9, §. 6.18], l'espace $\mathcal{L}^1(M)$ des fonctions boréliennes M-intégrables, $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$, contient l'espace des fonctions boréliennes bornées, et l'application B définie par :

$$B : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}^2} f \, dM$$

est une mesure de Radon bornée sur $\mathbb{R}^2$ dont le prolongement à l'espace $C_b(\mathbb{R}^2)$ des applications continues bornées, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, vérifient :

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}^2) \quad , \qquad \int_{\mathbb{R}^2} f \, dM = B(f)$$

d'où

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \quad , \qquad \iint f(t) \,.\, \overline{f(s)} \, M(dt,ds) = B(f \otimes \bar{f}) \;.$$

Comme M est une mesure spectrale, pour toute fonction étagée $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ nous avons (déf. I.2.3.) :

$$0 \leq \iint g(t) \,.\, \overline{g(s)} \, M(dt,ds) \;.$$

Tout élément de $C_b(\mathbb{R})$ étant la limite simple d'une suite bornée de fonctions étagées, le théorème de convergence dominée [par ex. 28 , th. 1. 3.4.], appliqué successivement aux mesures positives obtenue par les décompositions de Jordan des parties réelle et imaginaire de M , nous donne :

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \;, \qquad 0 \leq \iint f(t) \,.\, \overline{f(s)} \, M(dt,ds) \;,$$

d'où

$$0 \leq B(f \otimes \bar{f}) \quad .$$

De plus,

$$\forall t \;,\; s \in \mathbb{R} \;, \qquad K(t,s) = \iint e^{i(tu-sv)} \, M(du,dv) = B(e^{it\cdot} \otimes e^{-is\cdot}) \quad .$$

Ainsi le processus X est (f)-harmonisable à mesure spectrale B [25 , déf. 3.1.2].

- *Condition suffisante :* Supposons que le processus X soit (f)-harmonisable à mesure spectrale.

1) Sa bimesure fonctionnelle B est, donc, prolongeable en une mesure de Radon bornée $B : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}$, et toute fonction borélienne bornée $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ est B-intégrable [9 , § 13.9.17]. De plus, il existe une unique mesure complexe M sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ [28 , th. de représentation de Rues 6.19] vérifiant : ($C_o(\mathbb{R}^2)$ désignant l'espace des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}^2$ tendant vers 0 à l'infini)

$$\forall f \in C_o(\mathbb{R}^2), \qquad B(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, dM .$$

Montrons que pour toute fonction borélienne bornée $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ nous avons :

$$B(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, dM .$$

En effet, posons [32, chap. 4. compl. B. p. 132] :

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \quad , \qquad m(A) = \int_A dB = B(\chi_A) .$$

Comme , $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, $m(A) \in \mathbb{C}$, m est une mesure complexe sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

Lorsque f est une fonction borélienne bornée positive, il existe une suite bornée de fonctions étagées positives qui tend simplement vers f. Ainsi, d'après les théorèmes de convergence dominée ([28 , th. 1.34] et [32, th. 4.7]),

$$B(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, dm .$$

Nous obtenons donc aisément que pour toute fonction borélienne bornée $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$:

$$B(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, dm ;$$

nous en déduisons que :

$$\forall f \in C_o(\mathbb{R}^2) \quad , \qquad \int_{\mathbb{R}^2} f \, dm = \int_{\mathbb{R}^2} f \, dM$$

et, d'après l'unicité de M , $m = M$.

Ainsi, d'après les relations obtenues entre B , m et M , nous voyons que, pour toute fonction borélienne bornée f ,

$$B(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f \, dM \, .$$

2) En notant ν le mesure de Radon spectrale de X, qui est une mesure de Radon bornée $\nu : K_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \longrightarrow H$, toute fonction borélienne bornée $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ est ν-intégrable d'après le lemme précédent.

Puisque [25, th. 2.4.11] :

$$f, g \in L^1(\nu) \Longrightarrow f \otimes \bar{g} \in L^1(B) \quad \text{et} \quad B(f \otimes \bar{g}) = (\nu(f), \nu(g))_H \, ,$$

pour toutes fonctions boréliennes bornées f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nous obtenons :

$$\iint f \otimes \bar{g} \, dM = B(f \otimes \bar{g}) = (\nu(f), \nu(g))_H \, .$$

3) Par conséquent, la restriction à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de la mesure complexe M sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ est une bimesure spectrale (déf. I.2.3.) , et M est une mesure spectrale.

D'après H. NIEMI [25, th. 3.2.6.], le noyau K de X est de la forme :

$\forall t\ ,\ s \in \mathbb{R}\ ,\qquad K(t,s) = B(e^{it.} \otimes e^{-is.})$

d'où $$K(t,s) = \iint e^{i(tx-sy)}\, M(dx,dy)\ .$$

Par conséquent $X : \mathbb{R} \longrightarrow H$ est un processus harmonisable à mesure spectrale (th. I.3.2.). ∎

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. ALEXITS - *Convergence problems of orthogonal series.* Pergamon Press (1961).

[2] A. ARIMOTO - *On the strong law of large numbers for harmonizable stochastic processes.* Keio Engineering Reports, 25 (1972), p. 101-111.

[3] N. ARONSZAJN - *Theory of reproducing kernels.* Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), p. 337-404.

[4] A. BLANC-LAPIERRE, R. BRARD - *Les fonctions aléatoires stationnaires et la loi des grands nombres.* Bull. Soc. Math. France, 74 (1946), p. 102-105.

[5] A. BLANC-LAPIERRE, B. PICINBONO - *Fonctions aléatoires.* Coll. Technique et scientifique des Télécommunications, Masson, Paris (1981).

[6] A. BLANC-LAPIERRE, A. TORTRAT - *Sur la loi forte des grands nombres.* C.R. Acad. Sc. Paris, 267 A (1968), p. 740-743.

[7] S. BOCHNER - *Stationarity, boundness, almost periodicity of random-valued functions.* Proc. Third Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II, p. 7-27, University of California Press (1956).

[8] J. DIEUDONNÉ - *Calcul infinitésimal.* Coll. Méthodes, Hermann, Paris (1968).

[9] J. DIEUDONNÉ - *Eléments d'analyse - tome 2.* Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars, Paris (1971-1974).

[10] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ - *Linear operators, part. I : general theory.* Interscience Pub. New-York (1957).

[11] D.A. EDWARDS - *Vector-valued measure and bounded variation in Hilbert space.* Math. Scandinavia, 3 (1955), p. 90-96.

[12] I. GÀL, J. KOKSMA - *Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables.* Proc. Konink. Ned. Akad. v. Wetensh. 53 (1950), p. 638-653.

[13] V.F. GAPOSHKIN - *Criteria for the strong law of large numbers for some classes of second order stationary processes and homogeous random fields.* Th. Probability. Appl. 22 (1977), p. 286-310.

[14] V.F. GAPOSHKIN - *A theorem on the convergence almost everywhere of a sequence of mesurable functions, and its applications to sequences of stochastic integrals.* Math. USSR. Sbornik, 33 (1977) p. 1-17.

[15] E.G. GLADYSHEV - *Periodically and almost - periodically correlated random processes with continuous time parameter.* Th. Probability. Appl., 8 (1963), p. 173-177.

[16] P. HALMOS - *Measure theory.* D. Van Nostrand Comp., Princeton (1956).

[17] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA - *Inequalities.* Cambridge (1934).

[18] P.L. HENNEQUIN, A. TORTRAT - *Théorie des probabilités et quelques applications.* Masson, Paris (1965).

[19] M. LOÈVE - *Probability theory.* D. Van Nostrand Comp., Princeton (1963).

[20] P. MASANI - *Orthogonally scattered measures.*
Adv. Math., 2 (1968), p. 61-117.

[21] A.G. MIAMEE, H. SALEHI - *Harmonizability, V-boundness and stationarity dilation of stochastic processes.*
Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), p. 37-50.

[22] R. MOCHÉ - *Processus dominés par un processus harmonisable.*
Pub. IRMA, Lille, Vol. 3, fasc. 7 (1981).

[23] R. MOCHÉ - *Processus harmonisables.*
Polycopié D.E.A., Univ. Sc. Tech. Lille (1984).

[24] J. NEVEU - *Processus aléatoires gaussiens.*
Presses de l'Université de Montréal (1968).

[25] H. NIEMI - *Stochastic processes as Fourier transforms of stochastic mesaures.*
Ann. Acad. Sc. Fennicae, ser. A.I. Math., 1 (1975), p. 1-47.

[26] Yu. A. ROZANOV - *Spectral analysis of abstract functions.*
Th. Probability. Appl., 4 (1959), p. 271-287.

[27] J. ROUSSEAU - *La loi forte des grands nombres pour les processus harmonisables.*
Ann. Inst. Henri Poincaré, 15 (1979), p. 175-186.

[28] W. RUDIN - *Real and complex analysis.*
Mc Graw - Hill Publ. Comp., New Delhi (1977)

[29] W. RUDIN - *Functional analysis.*
Mc Graw - Hill Publ. Comp., New Delhi (1979).

[30] R.I. SERFLING - *Convergence properties of* S_n *under moment restrictions.*
Ann. Math. Stat., 41 (1970), p. 1235-1248.

[31] A. SZÉP - *The non-orthogonal Menchoff-Rademacher theorem.* Acta Sci. Math. (Hongria), 33 (1972), p. 231-235.

[32] E. THOMAS - *L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 20 (1970), p. 55-191.

[33] I.N. VERBITSKAYA - *On conditions for the applicability of the strong law of large numbers to wide sens stationary processes.* Th. Probability Appl., 11 (1966), p. 632-636.

RÉSUMÉ

A quelles conditions un processus harmonisable mesurable donné $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ vérifie-t-il la loi forte des grands nombres, à savoir :

$$\text{pour presque tout } \omega \text{ , } \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} X_s(\omega)\, ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \ ?$$

Grâce à l'emploi d'une technique originale : la domination par un processus stationnaire, il est établi que la réduction connue du problème, soit :

$$\exists p \in \mathbb{N} - \{0,1\} \text{ tel que } \mu(]-p^{-n}, p^{-n}[) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$$

où μ est la mesure stochastique spectrale de X au sens ensembliste, c'est-à-dire définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, est en fait une condition nécessaire et suffisante (chap. III).

Et les processus harmonisables considérés ici sont les plus généraux, comme l'établit une comparaison préalable des différentes définitions possibles de ce type de processus, notamment par la voie des mesures de Radon stochastiques (chap. II).

Ensuite des conditions suffisantes, mais non nécessaires, pour que X vérifie la loi forte des grands nombres, et portant sur sa bimesure spectrale, sont démontrées au chapitre IV. Elles assurent en gros la généralisation aux processus harmonisables des résultats les plus récents établis pour les processus stationnaires.

Il en est de même des raffinements de la loi forte des grands nombres obtenus au chapitre V qui sont, plus précisément, des conditions suffisantes

$$\text{pour que presque tout } \omega, \ g(t) \cdot \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} X_s(\omega)\, ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ où } g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \ .$$

MOTS CLÉS

- PROCESSUS FAIBLEMENT STATIONNAIRE.
- PROCESSUS HARMONISABLE.
- LOI GRAND NOMBRE.
- MESURE SPECTRALE.
- PROCESSUS STOCHASTIQUE / ANALYSE HARMONIQUE.