THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE
Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Alain RAPP

ETUDE DE L'OPERATEUR $\bar{\partial}$ EN DIMENSION INFINIE

Membres du Jury : MM. Ph. ANTOINE, Président
G. COEURÉ, Rapporteur
M. ROGALSKI, Examinateur

Soutenue le 21 juin 1985

Monsieur le Professeur Philippe Antoine nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ; nous le remercions très vivement.

Monsieur le Professeur Gérard Coeuré a dirigé ce travail. Je lui adresse toute ma reconnaissance pour les conseils et les idées qu'il a su me donner.

Nous remercions Monsieur le Professeur Marc Rogalski d'accepter de faire partie de ce jury.

Nous remercions enfin le personnel de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées et notamment Madame Raymonde Bérat du soin et de la qualité apportés à la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le but de ce travail consiste à étudier l'équation $\bar{\partial} f = F$ en dimension infinie.

L'exactitude des formes $\bar{\partial}$ fermées sur un espace normé se vérifie facilement lorsque F est de classe C^1 à support borné. Pour de telles formes, P. BERNER [2] montre que $\omega \mapsto k_q(\omega)$, où ω est de type $(0,q)$ à support borné est de classe C^1 avec

$$k_q(\omega)(\xi) = \frac{q}{2i\pi} \int \omega_{x_o}(tx_o+\varepsilon) \frac{d\bar{t} \wedge dt}{t} \quad ,$$

est un opérateur d'homotopie pour la différentiation extérieure $\bar{\partial}$.

Dans le cadre du Séminaire d'Analyse Complexe de l'Université de Nancy que dirigeait G. COEURÉ, j'ai généralisé ce résultat dans des espaces normés en établissant l'existence d'une solution à l'équation $\bar{\partial}$ sur un ouvert convexe à frontière régulière quand le second membre est de classe C^1 et à décroissance assez rapide au bord de l'ouvert [35] et [36].

La méthode utilisée consiste, si ω est de type $(0,q)$ et de classe C^1 sur un ouvert convexe à frontière régulière par morceaux, à se ramener par approximation à des formes ω_ε à support borné, puis à utiliser l'opérateur d'homotopie ; on obtient alors $\omega_\varepsilon = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega_\varepsilon) + \bar{\partial}(k_q(\omega_\varepsilon))$. Ensuite, un lemme assez technique permet de passer à la limite sous certaines conditions de décroissance au bord dans le cas d'un ouvert borné ; sur un ouvert non borné, il faut rajouter des conditions d'uniforme intégrabilité à l'infini. On notera que le résultat est général et s'applique à des espaces normés avec une condition de régularité sur la norme et que le second membre de l'équation $\bar{\partial}$ est de type $(0,q)$, $q \geq 1$.

L'étude sur un ouvert pseudo-convexe Ω d'un espace de Hilbert séparable avec un second membre de type $(0,1)$ et C^{∞} a été étudiée par P. RABOIN [33] et [34] dans le cadre du séminaire évoqué plushaut.

A l'aide de la théorie de la mesure, il réussit à écrire dans $\mathbb{C}^n$, les inégalités a priori de HÖRMANDER sans utiliser la dimension. T désignant un automorphisme auto-adjoint de $\mathbb{C}^n$ et μ_T étant l'image de la mesure de Gauss par T, la solution d'HÖRMANDER de l'équation $\bar{\partial}f = F$ sur Ω vérifie :

$$(1) \qquad \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\phi} \, d\mu_T \leq 2\Lambda^2 \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\phi} \, d\mu_T \quad ;$$

Λ^2 est une plus grande valeur propre de T^2 et ϕ une fonction plurisousharmonique telle que $\{x;\phi(x) < c\} \Subset \Omega$ pour tout c ; l'intégrale de Cauchy s'écrit alors

$$f(z)\mu_T(B_{\varepsilon}) = \int_{B_{\varepsilon}} f(x+z)d\mu_T(x) + 2\int_0^1 \int_{B_{\varepsilon}} \bar{\partial}f(z+rx;x)dr \, d\mu_T(x) \quad ;$$

B_{ε} est la boule de rayon ε centrée à l'origine.

Ensuite, il se place sur un ouvert pseudo-convexe d'un espace de Hilbert séparable H. Si T est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint et injectif alors μ_T est une mesure de Radon sur H, comme conséquence du théorème de Minlos. En supposant F de classe C^1 et borné sur les bornés de Ω à une distance positive de la frontière de Ω, la relation (1) permet d'exhiber une solution de l'équation $\bar{\partial} f = F$ sur $T^2(H) \cap \Omega$ qui est C^1 sur $T^3(H) \cap \Omega$ pour la structure hilbertienne image de celle de H par T^3. Ultérieurement, un résultat de P. MAZET [28] permet de vérifier qu'en fait la solution de P. RABOIN est C^∞ sur $T^3(H) \cap \Omega$.

Ce résultat généralise considérablement celui de C.J. HENRICH [16] qui devait utiliser une hypothèse de croissance polynômiale à l'infini pour F et se limitait, en outre, à l'étude sur H tout entier. Bien que cette méthode ne fournisse pas l'existence de solutions sur Ω tout entier elle permet d'en déduire des conséquences intéressantes dans les espaces $\mathcal{DFN}$ (Dual de Frechet nucléaire) ; c'est ce que fait P. RABOIN mais avec des conditions restrictives.

Par la suite, J.F. COLOMBEAU et B. PERROT [9] tirent les mêmes conséquences dans les $\mathcal{DFN}$, sans hypothèses restrictives. Ils montrent que si E est un $\mathcal{DFN}$ et Ω un ouvert pseudo-convexe de E, pour toute forme différentielle F, C^∞ sur Ω de type $(0,1)$ et $\bar{\partial}$ fermée, il existe une fonction C^∞ sur tout Ω telle que $\bar{\partial} f = F$. Cela leur permet de résoudre le premier problème de Cousin sur un ouvert Ω pseudo-convexe d'un $\mathcal{DFN}$ et aussi de relever dans Ω les fonctions holomorphes définies sur l'intersection d'un hyperplan fermé et de Ω. Les techniques utilisées font appel à l'Analyse Fonctionnelle et à l'approximation.

Il semble alors naturel de se demander si le défaut de régularité de la solution du $\bar{\partial}$ sur un espace de Hilbert est due à la méthode ou est inhérent à la dimension infinie.

La réponse est partiellement apportée par G. COEURÉ [8] pour un second membre de classe C^1. Il construit un exemple d'une forme F de type (0,1) et de classe C^1 sur la boule unité de ℓ^2 telle que l'équation $\bar{\partial} f = F$ n'admette aucune solution C^1 dans tout voisinage de l'origine.

Pour exposer les résultats précités, nous procèderons de la manière suivante :

Dans le chapitre I, on présente la notion de mesures cylindriques dans les espaces de dimension infinie afin d'introduire naturellement la mesure gaussienne dans un espace de Hilbert séparable. Ce chapitre permettra de comprendre quelles sont les difficultés intrinsèques liées à la dimension infinie et sera indispensable pour la compréhension du chapitre III. Pour le lecteur qui souhaiterait un exposé général sur l'intégration en dimension infinie, on renvoit à [11], [21] et [40].

Dans le chapitre II, sont exposés les résultats dans un espace normé (A. RAPP [35] et [36]).

Le chapitre III développe les résultats de P. RABOIN [33] et [34] ; quelques compléments y sont apportés ; par exemple, l'existence de solutions C^1, sur $A(\Omega)$, pour un second membre C^1 sur Ω où A est nucléaire injectif. Il comprend aussi le résultat de P. MAZET qui permet de démontrer que la solution de P. RABOIN est C^∞, on détaillera aussi le contre-exemple de G. COEURÉ.

Le chapitre IV traite de la résolution du $\bar{\partial}$ dans un $\mathcal{DFN}$ ainsi que les applications de J.F. COLOMBEAU et B. PERROT [9].

CHAPITRE I

INTEGRATION EN DIMENSION INFINIE

Ce chapitre consiste à définir rapidement les mesures cylindriques et à introduire naturellement la notion de mesure gaussienne dans un espace d'Hilbert séparable.

Il permettra de comprendre les difficultés intrinsèques liées à la dimension infinie et sera fondamental pour la compréhension du chapitre III.

Pour le lecteur qui souhaiterait un exposé général sur le sujet nous renvoyons à [40].

Introduction.

L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ joue un rôle fondamental dans l'usage de la théorie de l'intégration sur $\mathbb{R}^n$: en dimension infinie, on est confronté au problème suivant :

Existe-t-il une mesure de borel dans un espace d'Hilbert H réel séparable de dimension infinie, invariante par translation et bornée sur les boréliens bornés. La réponse est négative. En effet, soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une une base orthonormée de H ; si B_n est la boule de centre e_n et de rayon $\frac{1}{2}$ et B la boule de rayon 2 centrée à l'origine, on a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \subset B$;

or, les B_n étant disjointes deux à deux, si une telle mesure μ existait on aurait $\mu(B) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = +\infty$.

Le même argument vaut pour la non existence de μ invariante par rotation.

Néanmoins la mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$ peut s'étendre à des espaces de dimension infinie ; elle sera invariante par rapport aux rotations d'un autre espace d'Hilbert qui s'envoie injectivement dans H.

Si A est un borélien de $\mathbb{R}^n$, soit x élément de $\mathbb{R}^n$ et dx la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, $|\ \ |$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}^+_*$,

on pose $P_t(A) = \dfrac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \displaystyle\int_A \exp(-\frac{|x|^2}{2t})dx.$

C'est la mesure de Gauss P_t dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons lui donner un sens sur un espace de Hilbert de dimension infinie.

Soit E un espace vectoriel réel et E^* un espace vectoriel de formes linéaires sur E qui séparent les points de E. Par exemple, E un Banach réel et $E^* = E'$ son dual topologique ; plus simplement H un espace d'Hilbert réel séparable et $H^* = H'$ son dual topologique isomorphe à H par $x \longrightarrow (x|.)$.

C'est ce dernier cas qui nous intéressera en vue des mesures gaussiennes.

Définition 1.- Ensemble cylindrique.

Un ensemble cylindrique dans E est un ensemble c de la forme $c = \{x \in E \mid (<x,y_1>,<x,y_2> \ldots <x,y_n>) \in A\}$ où A est un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $\{y_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de n éléments de E^*.

Si F^* est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension finie contenant $y_1,y_2,\ldots,y_n$; c sera dit posé sur F^*.

Soit F^* un sous-espace de dimension finie de E^*, la collection $\mathcal{S}_{F^*}$ des ensembles cylindriques posés sur F^* est une σ-algèbre.

Soit R la collection des ensembles cylindriques sur E^* ; c'est-à-dire : $R = \cup \mathcal{S}_{F^*}$, où F^* décrit la famille des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E^*. R est une algèbre.

Définition 2.- Fonction cylindrique.

Une fonction ϕ sur E sera dite cylindrique s'il existe des éléments $y_1,y_2,\ldots,y_n$ de E^* en nombre fini et une fonction borélienne Ψ sur $\mathbb{R}^n$, avec

$$\phi(x) = \Psi(<x,y_1>,<x,y_2>,\ldots,<x,y_n>).$$

Si F^* est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E^* contenant $y_1,y_2,\ldots,y_n$, ϕ sera dite posée sur F^*.

Définition 3.- Mesure cylindrique.

Une application $\mu : R \longrightarrow [0,1]$ est appelée mesure cylindrique si

1°) $\mu(E) = 1$

2°) $\mu|_{F^*}$ (notée μ_{F^*}) est σ-additive pour tout F^* sous-espace vectoriel de dimension finie de E^*.

On peut alors intégrer par rapport à μ toute fonction cylindrique borélienne positive. Car étant donné $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans E^*, il existe une mesure $\mu_{y_1,\ldots,y_n}$, borélienne et positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour toute fonction ϕ cylindrique, borélienne, positive, définie par $\phi(x) = \Psi(\langle x,y_1\rangle, \langle x,y_2\rangle, \ldots, \langle x,y_n\rangle)$, on ait :

$$\int \phi \, d\mu = \int_{R^n} \Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) d\mu_{y_1,\ldots,y_n}(u) \quad .$$

Le problème fondamental qui se pose est alors le suivant : soit une mesure cylindrique μ sur E ; existe-t-il un prolongement de μ sur la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par R qui soit σ additif, c'est-à-dire en fasse une vraie mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

On remarquera que si E est un Banach séparable et $E^* = E'$, l'algèbre $\mathcal{A}$ est en fait la σ-algèbre de Borel sur E ([11]).

L'absence de locale compacité dans les espaces de dimension infinie permet, en fait, l'existence de mesures cylindriques utiles qui n'ont pas d'extension σ-additive.

Nous allons nous intéresser à la mesure gaussienne qui fournira un exemple pour le problème précité.

Définition 4.- Mesure cylindrique de Gauss.

On se place dans la situation évoquée antérieurement $E = H$ Hilbert réel séparable, et $E^* = H' \cong H$.

Un ensemble cylindrique c dans H est donc de la forme :

$$c = \{x \in H \,|\, ((x|y_1), (x|y_2), \ldots, (x|y_n)) \in A\}$$

où A est un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire dans H et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont orthogoaux dans H. Pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, on définit $P_t(c) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_A \exp(\frac{-|x|^2}{2t})dx$. P_t est bien définie en ne dépendant pas des y_i et de A définissant c ; c'est une mesure cylindrique sur H. Montrons que P_t n'est pas σ-additive.

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H. On pose $A_n = \{x \in H \mid |(x|e_j)| \leq n,\ j = 1,2,\ldots,k_n\}$ où $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'entiers naturels non nuls.

On a $H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

On obtient $P_t(A_n) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-n}^{+n} \exp(-\frac{x^2}{2t})dx\right]^{k_n}$

On peut choisir la suite k_n telle que $P_t(A_n) \leq \frac{1}{(4)^n}$; on obtient alors $\sum_{n=1}^{+\infty} P_t(A_n) \leq \frac{1}{3}$ donc P_t n'est pas σ-additive car $P_t(H) = 1$ en effet, $H = \{x \in H \mid (x|e_1) \in \mathbb{R}\}$ donc $P_t(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2t})dx = 1$.

On signale le théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure cylindrique se prolonge en une mesure σ-additive sur la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par R c'est-à-dire provienne d'une vraie mesure sur $(H,\mathcal{A})$.

Théorème 1 [40].- *Soit* H *un espace de Hilbert réel séparable et* μ *une mesure cylindrique sur* H. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* μ *se prolonge en une mesure sur* $(H,\mathcal{A})$ *où* $\mathcal{A}$ *est la* σ-*algèbre de Borel sur* H *est que :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho > 0$ *telle que la mesure de tout ensemble cylindrique extérieur à la boule* B_ρ *fermée de centre* 0 *et de rayon* ρ *soit inférieur à* ε.

Définition 5.- *Fonction caractéristique d'une mesure cylindrique.*

Soit H un espace de Hilbert réel séparable et μ une mesure cylindrique sur H.

On pose, par définition, $\hat{\mu}(x) = \int_{F=\mathbb{R}.x} \exp[i(x|y)]\, d\mu_F(y)$.

$\hat{\mu}$ est appelée fonction caractéristique de la mesure cylindrique μ. Il est clair que $\hat{\mu}$ est une fonction définie sur H et que $\hat{\mu}(0) = 1$; enfin, $\hat{\mu}$ est définie-positive et $\hat{\mu}\big|_E$ est continue pour tout E sous-espace de dimension finie de H.

On déduit du théorème 1, le théorème de Minlos-Sazonov.

Théorème 2 [40] *Minlos-Sazonov.*

Soit H *un espace de Hilbert réel séparable et* θ *une fonction définie positive sur* H *telle que* $\theta(0) = 1$ *alors une condition nécessaire et suffisante pour que* θ *soit la fonction caractéristique d'une mesure cylindrique* μ *qui se prolonge à* $(H,\mathcal{B})$ *en une mesure* σ*-additive est que :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists S_\varepsilon$ *opérateur nucléaire auto-adjoint défini positif dans* H *tel que :* $(S_\varepsilon(x)|x) < 1 \implies 1 - \mathrm{Re}\,\theta(x) < \varepsilon$.

Définition 6.- *Mesures gaussiennes.*

Soit A un opérateur nucléaire auto-adjoint défini-positif sur un espace de Hilbert réel séparable H et a un élément de H.

On dit que dans $(H,\mathcal{B})$ μ est la mesure gaussienne de moyenne a et d'opérateur de corrélation A si et seulement si

$$\hat{\mu}(z) = \exp(i(a|z) - \frac{1}{2}(A(z)|z)) = \theta(z).$$

En utilisant la relation

$$1 - \mathcal{Re}\ \theta(z) = 1 - \exp(-\frac{1}{2}(A(z)|z)) + (1 - \cos(a|z))\exp(-\frac{1}{2}(A(z)|z))$$

et le théorème de Minlos-Sazonov, on justifie l'existence de μ. Lorsque $a = 0$, on dit que la mesure gaussienne est centrée. Il est clair que la mesure gaussienne centrée et d'opérateur de corrélation A est le prolongement sur $(H,\mathcal{B})$ de l'image par l'opérateur de Hilbert Schmidt $\sqrt{A}$ de la mesure cylindrique de Gauss P_1.

Il est bon de noter que si μ est la mesure gaussienne de moyenne a et d'opérateur de corrélation A alors :

$$\forall z \in H, \quad \sigma_1(z) = (a|z) = \int_H (z|x)d\mu(x)$$

et

$$\forall (z_1,z_2) \in H^2 \qquad \sigma_2(z_1,z_2) - \sigma_1(z_1)\sigma_1(z_2) = \int_H (z_1|x)(z_2|x)d\mu(x) - (a|z_1)(a|z_2)$$

est égal à $(A(z_1)|z_2)$.

Enfin, si ν est la mesure gaussienne d'opérateur de corrélation A et centrée on a $\hat{\nu}(x) = e^{-1/2(A(x)|x)}$.

Si on pose $\nu_a = \tau_a\nu$ c'est-à-dire la translatée de la mesure ν suivant $a \in H \setminus \{0\}$ il est clair que $\hat{\nu}_a(x) = e^{i(a|x)}\hat{\nu}(x)$, donc ν_a est la mesure gaussienne de moyenne a et d'opérateur de corrélation A. On trouvera dans [38, 40] un exposé complet sur les mesures gaussiennes ainsi qu'une démonstration du résultat suivant qui sera souvent utilisé dans le chapitre III.

<u>Théorème</u> 3.- *Soit* H *un espace de Hilbert réel séparable,* μ *la mesure gaussienne centrée d'opérateur de corrélation* A *et* ν *la mesure de moyenne* $a \in H \setminus \{0\}$ *et d'opérateur de corrélation* A (i.e. $\nu = \tau_a \mu$) *alors si* $a \in A^{1/2}(H)$ μ *est équivalente à* ν *et l'on a*

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \rho(x,a) = \exp\left[(A^{-1/2}(a)|A^{-1/2}(x)) - \frac{1}{2}(A^{-1/2}(a)|A^{-1/2}(a))\right].$$

On notera pour la compréhension du théorème qu'il faut donner un sens à $(A^{-1/2}(a)|A^{-1/2}(x))$ en effet x n'est pas toujours dans $A^{1/2}(H)$!

On posera $(A^{-1/2}(a)|A^{-1/2}(x)) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(x|e_k)(A^{-1/2}(a)|e_k)}{\sqrt{\lambda_k}}$

où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal total de vecteurs propres de A de valeurs propres associées $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la limite étant prise en moyenne relativement à la mesure μ. On peut noter que cette fonction existe même en moyenne quadratique relativement à μ.

En effet :

$$\int_H \left|\left[\sum_{k=p}^{q} \frac{(x|e_k)(A^{-1/2}(a)|e_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\right]\right|^2 d\mu(x) \qquad p \leq q$$

$$= \int_H \sum_{k=p}^{q} \sum_{j=p}^{q} \frac{(x|e_k)(A^{-1/2}(a)|e_k)(x|e_j)(A^{-1/2}(a)|e_j)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} d\mu(x)$$

$$= \int_H \sum_{k=p}^{q} \frac{|(x|e_k)|^2}{\lambda_k} |(A^{-1/2}(a)|e_k)|^2 d\mu(x)$$

$$= \sum_{h=p}^{q} \frac{(A^{-1/2}(a)|e_k)^2}{\lambda_k} (A(e_k)|e_k)$$

$$= \sum_{h=p}^{p} |(A^{-1/2}(a)|e_k)|^2$$

la dernière expression tend vers zéro quand p tend vers $+\infty$. En fait, on peut voir que $\sum_{h=1}^{n} \frac{(x|e_k)(A^{-1/2}(a)|e_k)}{\sqrt{\lambda_k}}$ est une martingale et que sa limite quand n tend vers $+\infty$ existe μ presque partout.

Nous allons maintenant établir deux propositions fondamentales pour obtenir le résultat du chapitre III ; cela nécessite que nous précisions quelques notations et définitions :

H est toujours un espace de Hilbert réel séparable et A un opérateur nucléaire auto-adjoint défini positif. On notera $T = \sqrt{A}$ et μ_T la mesure de Gauss centrée d'opérateur de corrélation $T^2 = A$.

Ω est un ouvert borné de H et $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. On note $H_T = T(H)$ muni du produit scalaire $(x|y)_T = (T^{-1}(x)|T^{-1}(y))_H$. Soit $f : \Omega \to E$ une application. On dira que f est H_T différentiable en $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire continue $f'(a)$, de H_T dans E, telle que $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + o(||h||_T)$ quand h tend vers zéro dans H_T.

On rappelle que $f : \Omega \to E$ est dite Gateaux différentiable en $a \in \Omega$ si pour tout $h \in H$, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'(a)(h)$ et définit une application linéaire $h \to f'(a)(h)$.

Si on remplace H par H_T, on dira alors H_T Gateaux différentiable. Une fonction f définie sur Ω est de type bornée si elle est bornée sur les bornés de Ω situés à une distance positive de la frontière de Ω. Une propriété est locale sur Ω si elle a lieu sur ces mêmes bornés (par exemple, on parlera de local uniforme continuité).

Proposition 1.- Pour tout $g \in L^2_{loc}(\mu_T)$ *et tout borné* B *de* H *la fonction définie par* $G(z) = \int_B g(x)\exp(z\,|T^{-1}(x)).d\mu_T(x)$ *est de classe* C^1 sur H.

Preuve :

Etablissons pour commencer :

$$(1) \quad \int_H \exp(z|T^{-1}(x)).d\mu_T(x) = \exp \frac{1}{2}\,||z||^2 \; ,$$

cela résulte par exemple du théorème 3).

En effet, si y est dans $T(H)$ et que l'on note $\mu_{Ty} = \tau_y\mu_T$.

On a vu que

$$\frac{d\mu_{Ty}}{d\mu_T}(x) = \rho_T(x,y) = \exp - \frac{1}{2}\,\{||T^{-1}(y)||^2 - 2(T^{-1}(y)|T^{-1}(x))\}$$

et puisque $\int_H d\mu_{Ty} = 1$;

on obtient que $\int_H \exp(T^{-1}(y)|T^{-1}(x)).d\mu_T(x) = \exp(\frac{||T^{-1}(y)||^2}{2})$

en posant $y = T(z)$ le résultat est obtenu.

On va démontrer maintenant que G est gateaux différentiable et que

$$G'(z)(a) = \int_B g(x)\exp(z|T^{-1}(x))(a|T^{-1}(x)).d\mu_T(x)$$

cela résulte des inégalités

$$e^{\lambda u} \leq 1 + 2|\lambda|\text{ ch } u \qquad \text{et} \qquad |u| \leq \text{sh}|u|$$

pour tout u de $\mathbb{R}$ et pour tout λ de R tel que $|\lambda| \leq 1$ qui permettent d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. En écrivant :

$$g(x)\exp(z|T^{-1}(x))(u|T^{-1}(x)) = g(x) \frac{(a|T^{-1}(x))}{sh(a|T^{-1}(x))} sh(a|T^{-1}(x))\exp(z|T^{-1}(x))$$

puis en utilisant (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|G'(z)(a)| \leq \frac{1}{2} ||g||_{L^2(B)} \left[e^{2||z+a||^2} + e^{2||z-a||^2} - 2e^{2||z||^2} \right]^{1/2}$$

Ainsi $G'(z)(.)$ est une forme linéaire continue sur H.

Il reste à vérifier la continuité de $z \to G'(z)$; on approche g par une suite g_n de fonctions de type borné dans $L^2_{loc}(\mu_T)$.

On note $G_n(z) = \int_B g_n(x)\exp(z,T^{-1}(x)).d\mu_T(x)$;

on obtient donc

$$G'(z)(a)-G'_n(z)(a) = \int_B (g(x)-g_n(x)) \frac{(a|T^{-1}(x))}{sh(a|T^{-1}(x))} \frac{\exp(z+a|T^{-1}(x)) - \exp(z-a|T^{-1}(x))}{2} .d\mu_T(x)$$

on en déduit donc

$$|G'(z)(a)-G'_n(z)(a)| \leq \frac{1}{2} ||g-g_n||_{L^2(B)} \left[e^{2||z+a||^2} + e^{2||z-a||^2} - 2e^{2||z||^2} \right]^{1/2}$$

ainsi $G'_n(z)$ converge vers $G'(z)$ localement uniformément.

Il reste donc à établir la continuité de $G'(z)$ pour une fonction

$G(z) = \int_B g(x)\exp(z,T^{-1}(x)).d\mu_T(x)$, où g est de type borné.

Considérons

$$G'(z)(a)-G'(z_o)(a) = \int_B g(x)\left[\exp(z|T^{-1}(x)-\exp(z_o|T^{-1}(x))\right](T^{-1}(x)|a).d\mu_T(x)$$

donc

$$|G'(z)(a)-G'(z_o)(a)| \leq \int_B g(x)|\exp(z|T^{-1}(x))|1-\exp(z_o-z|T^{-1}(x))|(T^{-1}(x)|a)|.d\mu_T(x)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a :

$$|G'(z)(a)-G'(z_o)(a)| \leq (\int_B |g(x)|^2|1-\exp(z_o-z|T^{-1}(x))|^2.d\mu_T(x))^{1/2}$$
$$\times$$
$$(\int \exp(2z|T^{-1}(x))(T^{-1}(x))|a)^2.d\mu_T(x))^{1/2} .$$

L'étude de la première intégrale est immédiate en utilisant (1). Pour la seconde, on se donne une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée de de vecteurs propres pour T avec valeurs propres associées $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$; soient (x_k), (z_k), (a_k) les composantes de x, z et a sur cette base ; soit H_n le sous-espace de H engendré par $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$; on note alors a^n, x^n et z^n les projections de a, x, z sur H_n et P_n la projection orthogonale sur H_n

$$\int_{H_n} (a^n|T^{-1}(a^n))^2_{H_n} \exp(2z^n|T^{-1}(x^n))_{H_n} .d\mu_T(x^n)$$

est égal à

$$\frac{\exp(2||z^n||^2_{H_n})}{(2\pi)^{n/2}\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n} \int_{R^n} (T^{-1}(a^n)|x^n)_{H_n} \exp -\frac{1}{2}\{(T_n^{-2}\left[x^n-2T_n(z^n)\right]|x_n^n-2T_n(z^n))_{H_n}\}dx^n$$

qui est égal à

$$\left[(a^n|a^n)_{H_n} + (2T_n(z^n)|T_n^{-1}(a^n))^2_{H_n}\right]\exp(2||z^n||^2_{H_n})$$

qui est inférieur ou égal à

$$||a^n||^2_{H_n}(1+4||z^n||^2_{H_n})\exp(2||z^n||^2_{H_n}).$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$|G'(z)(a)-G'(z_o)| \leq \sup_{x\in B}|g(x)|(1-2\exp\frac{1}{2}||z_o-z||^2 + \exp 2||z_o-z||^2)^{1/2}$$

$$\cdot\ (1+4||z||^2)^{1/2}\exp(||z||^2)$$

ce qui assure la continuité de $z \longmapsto G'(z)$.

Proposition 2.- Pour tout f *dans* $L^2_{loc}(\mu_T)$ *l'application* $z \to {}_zf$, *où* ${}_zf(x) = f(x+z)$, *considérée comme application de* $T(H)$ *dans* $L^1_{loc}(\mu_T)$ *est uniformément continue sur tout borné de* $T(H)$ *et pour toute boule* B *de* H, *on a :*

$$||{}_zf||_{L^1(B)} \leq e^{||z||^2}||f||_{L^2(B+z)} \quad \text{et} \quad \int_B f(x+z).d\mu_T(x) = \int_{B+z} f(x)\rho_T(x,z).d\mu_T(x).$$

Preuve :

L'inégalité s'obtient à partir du second résultat en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1) du début de la démonstration de la proposition précédente.

Il existe une suite (f_n) de fonctions continues à supports bornés dans H_n telle que $f_n \circ P_n$ converge vers f dans L^2_{loc} ($f_n \circ P_n$ sera noté f_n dans la suite).

On a $$||{}_zf_n - {}_zf||_{L^1(B)} = \int_{B+z} |f_n(x) - f(x)|\rho_T(x,z).d\mu_T(x)$$
$$\leqslant ||f_n - f||_{L^2(B+z)} e^{||z||^2} .$$

Il en résulte que $({}_zf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ${}_zf$ dans $L^1_{loc}(\mu_T)$ et que

$$\int_B {}_zf(x).d\mu_T(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_B {}_zf_n(x).d\mu_T(x) = \int_{B+z} f(x)\rho_T(x,z).d\mu_T(x).$$

En outre, pour tous z et z' dans $T(B)$ et tout entier n positif, on a

$$||{}_zf - {}_{z'}f||_{L^1(B)} \leqslant ||{}_zf - {}_zf_n||_{L^1(B)} + ||{}_zf_n - {}_{z'}f_n||_{L^1(B)} + ||{}_{z'}f_n - {}_{z'}f||_{L^1(B)}$$

$$\leqslant ||f - f_n||_{L^2(B+z)} . e^{||z||^2} + e^{||z'||^2} ||f - f_n||_{L^2(B+z')}$$

$$+ ||{}_zf_n - {}_{z'}f_n||_{L^1(B)}$$

en fixant n assez grand et en utilisant l'uniforme continuité de f_n , on obtient l'uniforme continuité de $z \mapsto {}_zf$ sur tout borné de $T(H)$.

Définition 7.- Mesure quasi invariante.

H est un espace de Hilbert réel, $\mathcal{B}$ la σ-algèbre de Borel sur H et μ une mesure sur $(H,\mathcal{B})$; on dit que μ est quasi-invariante.

Si $M_\mu = \{a \in H | \tau_a\mu = \mu_a << \mu\}$ contient un sous-espace vectoriel dense dans H.

On remarque que si L est un tel sous-espace vectoriel et si $a \in L$, alors $\mu_a \sim \mu$.

On peut voir que cela signifie encore qu'il existe un sous-espace vectoriel L de H dense dans H tel que

$$\forall y \in L, \ \forall X \in \mathcal{B}, \quad \mu(y+X) = 0 \iff \mu(X) = 0.$$

On notera que dans un espace de dimension finie les mesures quasi-invariantes sont les mesures équivalentes à la mesure de Lebesgue [13 , IV, § 5].

Il est clair que si μ est la mesure de Gauss centrée et d'opérateur de corrélation A dans $(H,\mathcal{B})$, μ est quasi-invariante car $M_\mu \supset A^{1/2}(H)$.

Théorème 4 [40, 20].-

Soit $(H,\mathcal{B})$, H *est un espace de Hilbert réel séparable et* $\mathcal{B}$ *la* σ*-algèbre de Borel sur* H ; *soit* $a \in H\setminus\{0\}$ *telle que* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda a \in M_\mu$. *Soit* $L_1 = \mathbb{R}a$, μ_1 *la mesure image de* μ *par la projection orthogonale* P_L *sur* L_1 *et* $\tilde{\mu}_1$ *la mesure image par la projection orthogonale sur* $L_1^\perp$; *alors* $\tilde{\mu} = \mu_1 \times \tilde{\mu}_1$ *et l'on a :*

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}(x) = \sigma(P_L,(x))\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\mu(x,\tau a)d\tau \quad \textit{ou} \quad \sigma(y) \ \textit{est égale à} \ \frac{d\mu_1}{dx}(y),$$

dx *désignant la mesure de Lebesgue sur* L_1.

Définition 8.- Dérivation d'une mesure dans une direction.

Soit μ une mesure sur $(H,\mathcal{B})$ et $a \in H \setminus \{0\}$. On dira que μ est dérivable dans la direction a, si pour toute fonction à valeur réelle continue et bornée $(f \in C_H^b)$, $\lim_{\lambda\to 0} \int_H \frac{f(x+\lambda a)-f(x)}{\lambda} d\mu(x)$ existe.

Cette limite sera noté $\ell(f)$. On déduit du théorème de Banach-Steinhaus que ℓ est dans $(C_H^b, \|\ \|_\infty)'$ donc il existe une mesure algébrique à variation bornée ν sur $(H, \mathcal{B})$ telle que $\int_H f(x)d\nu(x) = \ell(f)$ pour tout f dans C_H^b.

On dit alors que ν est la dérivée de μ dans la direction a et l'on note $\nu = d_a\mu$.

Définition 8 bis.- Dérivée logarithmique d'une mesure.

Sous les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on suppose μ dérivable dans la direction a. Si $d_a\mu$ est absolument continu par rapport à μ, la dérivée $\frac{d_a\mu}{d\mu}$ est appelée dérivée logarithmique de dans la direction a et notée $\ell_\mu(x,a)$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.- Soit H *un espace de Hilbert réel séparable et* μ *la mesure gaussienne centrée d'opérateur de corrélation* A.

Alors pour tout a *dans* $A^{1/2}(H)$ $(a \neq 0)$ *la dérivée logarithmique de la mesure* μ *dans la direction* a *existe et est donnée par* $\ell_\mu(x,a) = (A^{-1/2}(a)|A^{-1/2}(x))$ *où le second membre est défini presque partout par le théorème 3.*

Preuve :

Soit μ_n la mesure image de μ par la projection P_n sur H_n. μ_n est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx_n sur H_n avec la densité

$$k_n(P_n x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(\lambda_k)^{1/2}} \exp(- \frac{x_k^2}{2\lambda_k})$$

et la dérivée logarithmique de μ_n dans la direction $P_n(a)$ est donnée par $\ell_n(P_n x, P_n a) = \frac{d}{d\lambda} \left[\text{Log } k_n(P_n x - P_n a)\right]_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k a_k}{\lambda_k}$.

On sait, d'après [40] , que la dérivée logarithmique de μ dans la direction a existe si et seulement si la suite $(\ell_n(\cdot, P_n a))_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable par rapport à la mesure μ. Or, pour tout couple d'entier (p,q) $p \leqslant q$, il est immédiat que

$$\int_H |\ell_p(P_p x, P_p a) - \ell_q(P_q x, P_q a)| d\mu(x)$$

$$\leqslant (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt) \sum_{k=p}^{q} \frac{|a_k|^2}{k}$$

$$= \sum_{k=p}^{q} \frac{|a_k|^2}{\lambda_k}$$

ce qui permet de conclure.

Intégration par Partie.

Soit H un espace de Hilbert réel et séparable, μ la mesure gaussienne centrée d'opérateur de corrélation A et f une fonction continue sur H, différentiable au sens de Gateaux, et telle que pour tout a de H $x \to f'(x)(a)$ soit continue et de type borné.

Alors pour ϕ de classe C^1 à support borné et $a \in A^{1/2}(H)$, $a \neq 0$, on a :

$$\int_H f'(x).(a)\phi(x).d\mu(x) = - \int_H f(x)\left[\delta_x\phi\right](a).d\mu(x)$$

avec $\left[\delta_x\phi\right](a) = \phi'(x)(a) - \ell\mu(x,a)\phi(x).$

Preuve :

$$\int_H f'(x).(a)\phi(x).d\mu(x) = \int_H (f\phi)'(x).(a).d\mu(x) - \int_H f(x)\phi'(x).(a).d\mu(x)$$

or

$$\int_H (f\phi)'(x).(a).d\mu(x) = \int_H \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}\left[(f\phi)(x+\alpha a) - (f\phi)(x)\right].d\mu(x)$$

donc d'après le théorème de convergence dominé, le second membre est égal à $\int_H (f\,\phi)(x)\ell\mu(x,a).d\mu(x)$ ce qui prouve le théorème.

Nous allons maintenant établir une formule du type Ostrogradsky.

Intégrale de surface.

H est un espace de Hilbert réel séparable et $\mathcal{B}$ la σ-algèbre de Borel sur H. Soit μ une mesure sur $(H,\mathcal{B})$ et S une hypersurface de classe C^1 dans H.

On définit μ^S si elle existe par :

$$\int_H f(x)d\mu^S(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon\pi}\int_{S_\varepsilon} f(x)d\mu(x)$$

ou S_ε désigne $\{x \in H | d(x,S) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, si la limite à droite quand $\varepsilon \to 0$ existe.

<u>*Théorème*</u> *6* [40, chap. V, § 27].- *Soit* H *un espace de Hilbert réel séparable et* μ *la mesure gaussienne centrée d'opérateur de corrélation* A. *Soit* $S_{z,R}$ *la sphère de centre* z *et de rayon* R ; *alors, pour toute fonction mesurable et bornée définie sur* $S = S_{z,R}$

$$\int_S f(x)|(\eta_x|u)|d\mu^S(x) = \int_{S_1} f(x)|(\eta_x|u)d\mu^S(x) + \int_{S_2} f(x)|(\eta_x|u)|d\mu^S(x).$$

u *est un vecteur unitaire de* $A^{1/2}(H)$,

$S_1 = \{x \in S|(x-z|u) \geq 0\}$ *et* $S_2 = \{x \in S|(x-z|u) \leq 0\}$,

η_x *désignant le vecteur normal unitaire extérieur à* S *en* x *et on a* :

$$i \in \{1,2\} \quad \int_{S_i} f(x)|(\eta_x|u)|d\mu_S = \int_{P_L(S_i)} \frac{f(y+tu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\mu(tu+y,\tau u)d\tau} d\mu_L(y)$$

avec pour L *le supplémentaire orthogonal de* $\mathbb{R}u$, P_L *la projection orthogonale sur* L, μ_L *la mesure image de* μ *par* P_L *et* $y + tu = P_L^{-1}(y) \cap S_i$,

<u>*Remarque*</u> : Il résulte d'un calcul fait dans la démonstration du théorème 7, l'expression suivante de ces intégrales de surface :

$$i = \{1,2\} \quad = \int_{S_i} f(x)|(\eta_x|u)|d\mu_S \;,$$

$$= \frac{||A^{-\frac{1}{2}}(u)||}{\sqrt{2\pi}} \int_{P_L(S_i)} f(ty+tu)\exp -\tfrac{1}{2}\{t||A^{-\frac{1}{2}}(u)||+ (\frac{A^{-\frac{1}{2}}(u)|A^{-\frac{1}{2}}(y)}{||A^{-\frac{1}{2}}(u)||})\}^2 \, d\mu_L(y) \;.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant qui sera utile pour établir les résultats du chapitre III.

Théorème 7.- Soit ϕ *une fonction localement uniformément continue et de type borné.*

On considère la fonction Φ *définie sur* H *par*

$$\Phi(z) = \int_{B_R+z} \phi(x)d\mu_T(x).$$

Φ *est* H_T *dérivable au sens de Gateaux et pour tout* z *de* H *et* h *de* H_T *on a :*

$$\Phi'(z)(h) = \int_{S_R+z} \phi(x)(\eta_x|h)d\mu_T^S(x).$$

Preuve :

On considère u un vecteur unitaire dans H_T et soit $H^R = L_1 \oplus \mathbb{R}u$ somme directe orthogonale et P_1 la projection orthogonale sur L_1.

Soit θ l'isomorphisme de H^R sur $R \times L_1$ défini par $\theta(tu+y) = (t,y)$.

Soit μ_{L_1} la projection orthogonale de μ_T sur L_1 alors on sait, d'après le théorème 4, que pour tout u de H_T la mesure $\tilde{\mu}_T$ image de μ_T par θ est équivalente à la mesure $\tilde{\mu} = dt \times \mu_{L_1}$ avec

$$\frac{d\tilde{\mu}_T}{d\tilde{\mu}}(t,y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(tu+y;\tau u)d\tau\right)^{-1}.$$

Calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(tu+y;\tau u)d\tau$,

on a :

$$\rho_T(tu+y;\tau u) = \exp\{-\frac{1}{2}\left[\tau^2||T^{-1}(u)||^2 - 2\tau(T^{-1}(u)|T^{-1}(tu+y))\right]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\left[\tau^2||T^{-1}(u)||^2 - 2\tau t||T^{-1}(u)||^2 - 2\tau(T^{-1}(u)|T^{-1}(y))\right].$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_T(tu+y;\tau u)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(||T^{-1}(u)||^2)(\tau^2 - 2\tau t - 2\tau(\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||^2})\}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(||T^{-1}(u)||^2)\left[\tau - t - (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||^2})\right]^2\}d\tau$$

$$\cdot \exp\{\frac{1}{2}(||T^{-1}(u)||^2)\left[t+\frac{(T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||^2})\right]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(||T^{-1}(u)||^2)\left[\tau - t - (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||^2})\right]^2\}d\tau$$

$$\cdot \exp\{\frac{1}{2}(t||T^{-1}(u)|| + (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||}))^2\}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{||T^{-1}(u)||}\exp\{\frac{1}{2}(t||T^{-1}(u)|| + (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||}))^2\} \quad ;$$

On obtient donc

$$\frac{d\tilde{\mu}_T}{d\tilde{\mu}}(t,y) = \frac{||T^{-1}(u)||}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(t||T^{-1}(u)|| + (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||})^2\} \quad .$$

On notera $B_1(z,R) = P_1(B_1(z,R))$; on désigne par

$[t_1(y)u, t_2(y)u]$ le segment découpé par la boule $B(z,R)$ sur $y+tu$;

on pose $\Phi(z+hu) - \Phi(z) = \Delta\Phi(z,h)$ où $h \in \mathbb{R}$,

on obtient alors

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{||T^{-1}(u)||} \Delta\Phi(z,h) = \int_{B_1(z,R)} \left[\int_{t_2(y)}^{t_2(y)+h} \phi(y+tu)\exp\{-\frac{1}{2}(t||T^{-1}(u)||^2 + (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||}))^2\}dt \right] d\mu_{L_1}$$

$$- \int_{B_1(z,R)} \left[\int_{t_1(y)}^{t_1(y)+h} \phi(y+tu)\exp\{-\frac{1}{2}(t||T^{-1}(u)||^2 + (\frac{T^{-1}(u)|T^{-1}(y)}{||T^{-1}(u)||}))^2\}dt \right] d\mu_{L_1}$$

Or, la fonction à intégrer est définie sur $(L_1 \setminus N_1) \times \mathbb{R}$ ou N_1 est μ_1 négligeable et elle est uniformément continue en t quand y parcourt $B_1(z,R) \setminus N_1$.

On obtient donc que

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{||T^{-1}(u)||} \Delta\Phi(z,h) = h\int_{B_1(z,R)} \left[\phi(y+tu)\exp\{-\frac{1}{2}(t||T^{-1}(u)||^2 + (T^{-1}(u)|T^{-1}(y)))^2\} \right]_{t_1(y)}^{t_2(y)} d\mu_{L_1}$$

$$+ o(|h|).$$

Cela permet de conclure en utilisant le théorème 6.

CHAPITRE II

L'EQUATION "$\bar{\partial}$" AVEC DECROISSANCE AU BORD SUR CERTAINS OUVERTS CONVEXES D'UN ESPACE DE BANACH.

----

1 - *Notations.*

Soient E un espace de Banach complexe et U un ouvert de E.

On note $\Omega_k^n(U)$ $(k \geq 0)$ l'espace des formes différentielles de degré n sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de classe C^k.

On note ${}_o\Omega_k^n(U) = \{\omega \in \Omega_k^n(U) | \omega$ est à support borné$\}$. Si $\omega \in \Omega_k^n(U)$ $k \geq 1$, on pose

$$D\omega(\zeta)\ (X_1 \dots X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \omega'(\zeta)\ (X_1 \dots \hat{X}_i \dots X_{n+1})$$

$D\omega \in \Omega_{k-1}^{n+1}(U)$.

Soit $\omega \in \Omega_1^n(U)$, ω sera appelée une forme de type (p,q) avec $p+q = n$ (ce que l'on note $\omega \in \Omega^{(p,q)}(U)$) si $\forall\, \zeta \in U$ et $\forall (X_1 \dots X_n) \in E^n$ et $\forall\, z \in \mathbb{C}$: $\omega(\zeta)\ (zX_1 \dots zX_n) = z^p\, \bar{z}^q\, \omega(\zeta)\ (X_1 \dots X_n)$.

Soit f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial Z(X)} = \frac{1}{2} (f'(\zeta).X - if'(\zeta).iX)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{Z}(X)} = \frac{1}{2} (f'(\zeta).X + if'(\zeta).iX).$$

Opérateur $\bar\partial$: Lorsque $k \geq 1$, c'est l'application de $\Omega_k^{(p,q)}(U)$ dans $\Omega_{k-1}^{p,q+1}(U)$ définie par :

$$\bar\partial\omega(\zeta)(X_1\dots X_{p+q+1}) = \frac{1}{p+q+1}\sum_{k=1}^{p+q+1}(-1)^{k+1}\frac{\partial\omega}{\partial\bar Z(X_k)}(\xi)\ (X_1\dots\hat X_i\dots X_{n+1}).$$

Lorsque ω est seulement dans $\Omega_o^{(p,q)}(U)$, pour tout sous-espace vectoriel H de dimension finie dans E, la restriction de ω à $U\cap H$ défini un courant [22], on posera $\bar\partial_H(\omega) = \bar\partial(\omega|_{U\cap H})$ au sens des courants.

Etant donné ω dans $\Omega_o^{(p,q)}(U)$, on dira que ω admet globalement un $\bar\partial$ s'il existe $\pi\in\Omega_o^{(p,q+1)}(U)$ tel que $\bar\partial_H(\omega) = \pi|_H$, pour tout H sous-espace de dimension finie. On remarquera que si $\omega\in\Omega_1^{(p,q)}(U)$, alors ω admet globalement un $\bar\partial$ qui coïncide avec le $\bar\partial$ habituel.

Soit X_o un vecteur unitaire de E. A toute forme différentielle dans $\Omega_o^{(n)}(U)$, on associe la forme ω_{X_o} de $\Omega^{(n-1)}(E)$ définie par :

$$\omega_{X_o}(\zeta;X_1\dots X_{n-1}) = \omega(\zeta;X_o\dots X_{n-1}) \qquad \text{si } \zeta\in U$$

$$\omega_{X_o}(\zeta;X_1\dots X_{n-1}) = U \qquad \text{si } \zeta\in E\setminus U.$$

Lorsque l'application $t\longmapsto\omega_{X_o}(\zeta+t\,X_o;X^{q-1})$ est intégrable par rapport à la mesure du plan complexe $\dfrac{d\bar t\wedge dt}{t}$, quel que soit ζ dans U et X^{q-1} dans E^{q-1}, on pose : $k_q(\omega)\ (\zeta) = \dfrac{n}{2i\pi}\displaystyle\int\omega_{X_o}(t\,X_o+\zeta)\,\dfrac{d\bar t\wedge dt}{t}$.

Etant donnée une fonction V continue sur E, on note $\overset{\circ}{V}$ l'ouvert défini $\{\zeta|V(\zeta)<0\}$. On dira que la frontière de $\overset{\circ}{V}$ est régulière par morceaux si V est l'enveloppe supérieure d'une famille finie $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ de fonctions continûment différentiables telles que chaque V_i' soit bornée sur $\overset{\circ}{V}$ et non nulle sur la frontière de $\overset{\circ}{V}$.

Soient $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i}$, $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta}$, $\overset{\circ}{V}_{i,\zeta}$ les ouverts définis respectivement par :

$\{-\varepsilon < V_i(\zeta) < 0\}$, $\{t \in \mathbb{C} \mid -\varepsilon < V_i(\zeta + t\, X_o) < 0\}$, $\{t \in \mathbb{C} \mid V_i(\zeta + t\, X_o) < 0\}$.

La proposition 1 établit un résultat de P. BERNER [2].

Proposition 1.- Etant donné ω *dans* ${}_o\Omega_1^{(o,q)}(E)$, $q \geq 1$, *alors* $k_{q+1}(\bar\partial\omega)$ *et* $k_q(\omega)$ *appartiennent respectivement à* $\Omega_o^{(o,q)}(E)$ et $\Omega_1^{(o,q-1)}(E)$ *et l'on a :*

$$k_{q+1}(\bar\partial\omega) + \bar\partial(k_q(\omega)) = \omega.$$

Démonstration :

Soit E_1 un supplémentaire de la droite $\mathbb{C}\, X_o$. Un vecteur ζ de E se décompose sous la forme $\zeta = \tau\, X_o + \zeta'$, $(\zeta' \in E_1)$. Soit $(X_1 \ldots X_q) = (X^q)$ dans E^q. Alors :

$$\bar\partial(k_q(\omega))\ (\zeta)\ (X^q) = -\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \frac{\partial k_q(\omega)}{\partial \bar Z(X_k)}\ (\zeta)\ (X_1 \ldots \hat X_k \ldots X_q)$$

$$= -\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^k \frac{\partial}{\partial \bar Z(X_k)}\ \frac{q}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \omega(t\, X_o + \zeta)\ (X_o, X_1 \ldots \hat X_k \ldots X_q)\ \frac{d\bar t \wedge dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \sum_{k=1}^{q}(-1)^k \frac{\partial}{\partial \bar Z(X_k)}\ \omega(t\, X_o + \zeta)\ (X_o, X_1 \ldots \hat X_k \ldots X_q)\ \frac{d\bar t \wedge dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\omega}{\partial \bar Z(X_o)}\ (t\, X_o + \zeta)(X_1 \ldots X_q) - (q+1)\bar\partial\omega(t\, X_o + \zeta)(X_o \ldots X_q)\ \frac{d\bar t \wedge dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\omega}{\partial \bar Z(X_o)}\ (t\, X_o + \tau X_o + \zeta')(X_1 \ldots X_q)\ \frac{d\bar t \wedge dt}{t} - (k_{q+1}\bar\partial\omega)(\zeta)(X_1 \ldots X_q)$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\mathbb{C}} \omega(t\, X_o + \tau\, X_o + \zeta')(X^q)\ \frac{d\bar t \wedge dt}{t} - k_{q+1}(\bar\partial\omega)(\zeta)(X^q).$$

Puisque ω est à support borné, il est clair que cette dernière intégrale vaut $\omega(\zeta)(X^q)$, ce qui établit la formule.

<u>*Théorème*</u> *1.- Soit* $\overset{\circ}{V}$ *un ouvert convexe borné à frontière régulière par morceaux de* E. *Soit* ω *dans* $\Omega_1^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$ *tel que*

(i) $\forall X^q \in E^q$, $\lim\limits_{\varepsilon \to o} \left[\sup |\omega(\zeta;X^q)\ ,-\varepsilon < V(\zeta) < 0\right] = 0.$

(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ *tel que* $(\bar\partial\omega)\ (\zeta;X^{q+1})$, *resp.* $\omega'(\zeta;X^{q+1})$ *soit borné sur* $\{\zeta|-\varepsilon < V(\zeta) < 0\}$ *pour tout* $X^{q+1} \in E^{q+1}$.

Alors

(a) $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\bar\partial$, *resp.* $k_q(\omega) \in \Omega_1^{(o,q-1)}(\overset{\circ}{V})$.

(b) $\bar\partial k_q(\omega)$ *et* $k_{q+1}(\bar\partial\omega)$ *sont dans* $\Omega_o^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$ *et* $\omega = k_{q+1}(\bar\partial\omega) + \bar\partial(k_q(\omega))$.

<u>*Démonstration*</u> :

Soit Ψ une fonction de classe C^1 sur R^N où N est le nombre de fonctions V_i dont V est l'enveloppe supérieure, telle que $\Psi(x) = 1$ si $x \in \left]-\infty,-1\right]^N$ et $\Psi(x) = 0$ si l'une des variables x_i est dans l'intervalle $\left]1,+\infty\right[$. La forme ω_ε définie par $\Psi\left(\frac{V_1+2\varepsilon}{\varepsilon},\ldots,\frac{V_i+2\varepsilon}{\varepsilon},\ldots,\frac{V_N+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\omega$ appartient à ${}_o\Omega_1^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$. Appliquons-lui la proposition 1, on obtient :

$$\omega_\varepsilon = k_{q+1}(\bar\partial\omega_\varepsilon) + \bar\partial(k_q(\omega_\varepsilon)).$$

Pour passer à la limite lorsque ε tend vers zéro, nous utiliserons le lemme suivant :

<u>*Lemme*</u> *1.- Soient* $\overset{\circ}{V}$ *un ouvert de* E *à frontière régulière par morceaux et* $\mathbf{X}_o$ *un vecteur non nul de* E. *Alors* Mes $\frac{d\bar t \wedge dt}{|t|}$ $\{t \in \mathbb{C}|-\varepsilon < V(\zeta+t\,X_o) < 0\}$ *est un* $O(\varepsilon)$, *localement uniformément par rapport à* ζ.

Démonstration :

Soit $E^i_\zeta = \{t \in \mathbb{C} \mid t\, X_o + \zeta \in \partial \overset{\circ}{V}_i \cap \overset{\circ}{\bar{V}}\}$. On introduit la fonction Φ_1 définie sur $\overset{\circ}{\mathbf{V}} \times R^3$ par : $\Phi_i(\zeta,\lambda,x,y) = V_i(\zeta+(x+iy)\, X_o) + \lambda$.

Soient $\zeta_o \in \overset{\circ}{V}$ et $t_o = x_o + i\, y_o \in E^i_{\zeta_o}$, posons $a = \zeta_o + t_o\, X_o$. Alors l'une des dérivées partielles $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}(\zeta_o,0,x_o,y_o) \neq 0$ ou $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}(\zeta_o,0,x_o,y_o)$ est non nulle.

En effet, si l'une et l'autre étaient nulles, on aurait $V_i'(\zeta_o+t\, X_o).\lambda\, X_o = 0$ quel que soit le nombre complexe λ. Autrement dit, la droite $\mathbb{C}\, X_o$ serait dans $\operatorname{Ker} V_i'(a)$ et le point ζ_o serait dans l'hyperplan $a + \operatorname{Ker} V_i'(a)$. Montrons qu'en fait cet hyperplan ne peut couper l'intérieur de V_i, ce qui établira la contradiction :

Soit h_o tel que $V_i'(a).h_o < 0$; puisque $V_i(a+\alpha\, h_o) = \alpha\, V_i'(a)\, h + o(\alpha)$, le segment $]a,a+\alpha\, h_o]$ est contenu dans $\overset{\circ}{V}$ pour $\alpha > 0$ assez petit et disjoint de $\overset{\circ}{V}$ pour $\alpha > 0$ assez petit.

Soit h_1 tel que $a + h_1 \in (a+\operatorname{Ker} V_i'(a))\ \ \overset{\circ}{V}$, alors l'intervalle $]a,a+h_1]$ est dans $\overset{\circ}{V}_i$, le plan P défini par $(a,\vec{h}_1,\vec{h}_o)$ coupe $\overset{\circ}{V}_i$ suivant un convexe ayant a pour point frontière, puisque $a + \alpha\ \ h_o$ est disjoint de $\overset{\circ}{V}_i$ pour $\alpha < 0$ assez petit. La tangente d'appui $\vec{T}$ en a est située dans le 2ème et 4ème quadrants. Le bord de $P \cap \overset{\circ}{V}_i$ vérifie localement $V_i(a+h_o\, x+h_1\, y) = 0$; puisque $\frac{\partial V_i}{\partial x}(0) = V_i'(a)\, h_o < 0$, ce bord est situé sur le graphe de $y = \theta(y)$ solution implicite de l'équation $V_i(a+h_o\, x+h_1\, y) = 0$ et un calcul immédiat montre que $\theta'(0) = 0$, ce qui est contradictoire avec la position de $\vec{T}$. On a donc prouvé :

$$\forall\, t \in E^i_{\zeta_o}\ ,\ (t=x+iy),\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}(\zeta_o,0,x,y) \neq 0 \ \text{ ou } \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}(\zeta_o,0,x,y) \neq 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}$ ne s'annule pas en $(\zeta_o,0,x_o,y_o)$ et appliquons le théorème des fonctions implicites. Il existe un voisinage W de $(\zeta_o,0,x_o)$, un intervalle $]A',B'[$ contenant y_o et une fonction ϕ de classe C^1 définie sur W, à valeurs dans $]A',B'[$, tels que $y = \phi(\zeta,\lambda,x)$ soit solution implicite de l'équation $\Phi_i(\zeta,\lambda,x,y) = 0$ avec $(\zeta_o,0,x_o,y_o)$ comme conditions initiales. Puisque chaque V_i' ne s'annule pas au bord, on choisit W de telle sorte que $|V_i' \circ \phi|$ soit borné inférieurement par un nombre $a > 0$ sur W. Il existe ainsi un voisinage V de ζ_o, un intervalle $]A,B[$ contenant x_o et un nombre α tel que, pour tout $\varepsilon \in]0,\alpha[$ et $\zeta \in V$, on ait :

$$\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \Big[]A,B[\times]A',B'[\Big] = \{x+i\phi(\zeta,\lambda,x) \,|\, x \in]A,B[,\ 0 < \lambda \leq \varepsilon\}.$$

Puisque $|V_i' \circ \phi|$ est minoré par a sous les conditions précédentes, $\left|\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right|$ est majoré par $\frac{1}{a}$ sous les mêmes conditions et l'aire de l'ensemble $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \Big[]A,B[\times]A',B'[\Big]$ est majoré par $\frac{B-A}{a}.\varepsilon$, pour $\varepsilon < \alpha$ et $\zeta \in V$.

Un argument de compacité permet maintenant de construire un ouvert Δ contenant $E^i_{\zeta_o}$ et un nouveau voisinage V de ζ_o tel que l'aire de $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \Delta$ soit majoré par $K.\varepsilon$ pour tout ζ dans V. De plus, pour ε assez petit et ζ assez voisiné de ζ_o, les t pour lesquels $\zeta + t.X_o$ appartient à $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_i \cap \overset{\circ}{V}$, appartiennent à Δ.

On en déduit donc que l'aire de $\{t \,|\, \zeta+t\, X_o \in \overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_i \cap \overset{\circ}{V}\}$ est un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ localement uniformément par rapport à ζ. On a clairement la même conclusion pour l'ensemble $\{t \,|\, \zeta+t\, X_o \in \overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}\}$. Enfin la distance de l'origine à $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \overset{\circ}{V}_{\zeta}$ est s.c.i. par rapport à ζ et décroissante par rapport à ε ; elle est donc localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif, indépendant de ε ; on obtient ainsi la même conclusion en substituant la mesure $\dfrac{d\bar{t} \wedge dt}{|t|}$ à celle de Lebesgue.

Revenons à la démonstration du théorème :

a) $k_{q+1}(\bar{\partial}\omega_\varepsilon)$ converge localement uniformément vers $k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)$.

Grâce au lemme précédent, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to o} \frac{q+1}{2i\pi} \int \left[\Psi(\ldots, \frac{V_i+2\varepsilon}{\varepsilon}, \ldots)\bar{\partial}\omega\right]_{X_o} (\zeta + t\, X_o) \frac{d\bar{t} \wedge dt}{t} = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)(\zeta),$$

localement uniformément.

Pour obtenir $k_{q+1}(\bar{\partial}\omega_\varepsilon)$, il faut ajouter à l'intégrale précédente le terme suivant :

$$\frac{q+1}{2i\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \sum \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} (\ldots, \frac{V_i+2\varepsilon}{\varepsilon}, \ldots)\bar{\partial}V_i \wedge \omega\right]_{X_o} (\zeta + t\, X_o) \frac{d\bar{t} \wedge dt}{t}.$$

Or ce terme est majoré par :

$$\frac{M}{\varepsilon} \int_{\overset{\circ}{V}{}^{3\varepsilon}_{\zeta}} ||\omega_{X_o} (\zeta + t\, X_o|| \frac{d\bar{t} \wedge dt}{|t|} ;$$

l'application du lemme et de l'hypothèse (i) montre que le terme complémentaire converge localement uniformément vers 0.

b) Etude de $\bar{\partial}k_q(\omega_\varepsilon)$.

Il est clair que ω_ε converge localement uniformément vers ω et que $\bar{\partial}k_q(\omega_\varepsilon) = \omega_\varepsilon - k_{q+1}(\bar{\partial}\omega_\varepsilon)$. On en déduit que $\bar{\partial}k_q(\omega_\varepsilon)$ converge localement uniformément vers $\pi = \omega - k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)$.

Ainsi pour tout sous-espace H, de dimension n dans E et tout $\phi \in \Omega_\infty^{n-q}(H \cap \overset{\circ}{V})$, ϕ à support compact, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \bar\partial k_q(\omega_\varepsilon)\phi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} (-1)^{q+1}\langle k_q(\omega_\varepsilon)\bar\partial\phi\rangle = (-1)^{q+1}\langle k_q(\omega)\bar\partial\phi\rangle = \langle\bar\partial_H(k_q(\omega))\phi\rangle.$$

Puisque, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \langle\bar\partial k_q(\omega_\varepsilon)\phi\rangle = \langle\pi|_H\phi\rangle$, on en déduit que :

$$\bar\partial_H(k_q(\omega)) = \pi_{|H} \text{ dans } \mathcal{D}'(\overset{\circ}{V} \cap H).$$

Ainsi, $k_q(\omega)$ admet globalement un $\bar\partial$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \bar\partial k_q(\omega_\varepsilon) = \bar\partial(k_q(\omega))$.

On a donc finalement, en passant à la limite lorsque ε tend vers zéro dans la relation $\omega_\varepsilon = k_{q+1}(\bar\partial\omega_\varepsilon) + \bar\partial(k_q(\omega_\varepsilon))$, le résultat cherché :

$$\omega = k_{q+1}(\bar\partial\omega) + \bar\partial(k_q(\omega)).$$

Si on remplace l'hypothèse ii) par l'hypothèse ii', on démontre en utilisant le lemme, i) et ii') que $(k_q(\omega_\varepsilon))'$ converge localement uniformément par rapport à ζ quand ε tend vers zéro vers

$\frac{q}{2i\pi}\int_{\overset{\circ}{V}_\zeta} (\omega_{X_o})'(\zeta+t\,X_o).(.)\,\frac{d\bar t \wedge dt}{t}$, ce qui prouve c).

<u>*Corollaire*</u> *1.- Soit* ω *une forme de* $\Omega_1^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$, $\bar\partial$ fermée, telle que

i) $\forall X \in E^q$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\sup\limits_{-\varepsilon < V(\zeta) < 0} |\omega(\zeta)(X)|) = 0.$

Alors $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\bar\partial$ *et* $\bar\partial(k_q(\omega)) = \omega$.

Remarque :

Si la norme de E est de classe C^1 sur $E\backslash\{0\}$, on peut appliquer les résultats ci-dessus à toute boule ouverte B de E, ce qui permet en particulier de voir que si ω, $\bar\partial$ fermée, appartient à $\Omega_1^{(o,q)}(B)$ et si $||\omega(\zeta)||$ tend vers zéro quand $d(\zeta,\partial B)$ tend vers zéro, alors $k_q(\omega)$ admet globalement un $\bar\partial$ et $\bar\partial(k_q(\omega)) = \omega$.

Dans ce paragraphe, E est un espace de Banach complexe dont la norme est une fonction de classe C^1 sur $E \setminus \{0\}$.

Théorème 2.- Soit $\overset{\circ}{V}$ *un ouvert convexe de* E, *à frontière régulière par morceaux. Soit* ω *dans* $\Omega_1^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$ *tel que*

(i) $\forall\, X^q \in E^q, \ \lim\limits_{\varepsilon\to o} \left[\sup\left|\omega(\zeta;X^q)\right|, -\varepsilon < V(\zeta) < 0\right] = 0.$

(ii) *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $(\bar\partial\omega)(\zeta;X^{q+1})$, *resp.* $\omega'(\zeta;X^{q+1})$ *soit borné sur* $\{\zeta|-\varepsilon < V(\zeta) < 0\}$ *pour tout* $X^{q+1} \in E^{q+1}$.

(iii) *Pour tout* ζ_o *de* $\overset{\circ}{V}$, *il existe un voisinage* W *de* ζ_o *tel que :*

$$\sup_{\zeta\in W}|\omega_{X_o}(t\, X_o+\zeta;X^{q-1})| \quad \text{et} \quad \sup_{\zeta\in W}|(\bar\partial\omega, \ \text{resp. } \omega')_{X_o}(\zeta+t\, X_o;X^q)|$$

sont intégrables par rapport à la mesure $\dfrac{d\bar t \wedge dt}{t}$, *pour tout* X^{q-1} *dans* E^{q-1} *ou* X^q *dans* E^q.

Alors

a) $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\bar\partial$, *resp.* $k_q(\omega) \in \Omega_1^{(o,q-1)}(\overset{\circ}{V})$.

b) $\bar\partial k_q(\omega)$ *et* $k_{q+1}(\bar\partial\omega)$ *sont dans* $\Omega_o^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$ *et*

$\omega = k_{q+1}(\bar\partial\omega) + \bar\partial(k_q(\omega)))$.

Démonstration :

Soit Ψ une fonction décroissante de classe C^1 sur R, nulle sur $]1,+\infty[$ et identique à 1 sur $]-\infty,-1]$.

Soit α_n défini par $\alpha_n = \Psi(\frac{||x||^2-2n}{n})$. Posons $\omega_n = \alpha_n.\omega$. En appliquant le théorème 1 à l'intersection de $\overset{\circ}{V}$ avec la boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{3n}$, on obtient :

(1) $$\omega_n = k_{q+1}(\bar\partial\omega_n) + \bar\partial k_q(\omega_n).$$

Puisque $\bar\partial\alpha_n$ converge localement uniformément vers 0, l'hypothèse (iii) entraîne la même conclusion pour $k_{q+1}(\bar\partial\alpha_n \wedge \omega)$. De plus, on a :

$$||\left[k_{q+1}(\bar\partial\omega)-k_{q+1}(\alpha_n.\bar\partial\omega)\right](\zeta)|| \leqslant \frac{q+1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\sqrt{n}} ||(\bar\partial\omega)_{X_o}(t\, X_o+\zeta)||\ \frac{d\bar t \wedge dt}{|t|}.$$

Toujours d'après (iii), cette majoration converge localement uniformément vers 0, on peut donc affirmer que $k_{q+1}(\bar\partial\omega_n)$ converge localement uniformément vers $k_{q+1}(\bar\partial\omega)$ lorsque n tend vers l'infini.

Il est clair que $k_q(\omega_n)$ converge localement uniformément vers $k_q(\omega)$; la démonstration est analogue à celle qui a prouvé la convergence de $k_{q+1}(\alpha_n\, \bar\partial\omega)$ vers $k_{q+1}(\bar\partial\omega)$. Puisque ω_n converge localement uniformément vers ω, $\bar\partial(k_q(\omega_n))$ converge localement uniformément vers $\pi = \omega - k_{q+1}(\bar\partial\omega)$, lorsque n tend vers l'infini.

On en déduit donc, comme dans le § III, que $k_q(\omega)$ admet globalement un $\bar\partial$ et que $\lim_{n\to+\infty} \bar\partial(k_q(\omega_n)) = \bar\partial(k_q(\omega))$.

La relation $\omega = k_{q+1}(\bar\partial\omega) + \bar\partial(k_q\omega)$ s'obtient par passage à limite dans la relation (1) ci-dessus.

Lorsque les hypothèses (ii) et (iii) portent sur ω' au lieu de $\bar\partial\omega$, on constate par un raisonnement analogue que $k_q(\omega_n)'$ converge localement uniformément vers $\frac{q}{2i\pi}\int_{\mathring{V}_\zeta}(\omega_{X_o})'(\zeta+t\,X_o)\,\frac{d\bar t\wedge dt}{t}$, prouvant ainsi la régularité de $k_q(\omega)$.

Corollaire 2.- *Soit* ω *une forme dans* $\Omega_1^{(o,q)}(\mathring{V})$, $\bar\partial$-*fermée, telle que :*

(i) $\forall X^q \in E^q$, $\lim\limits_{\varepsilon\to o}(\sup |\omega(\zeta)(X^q)|, \zeta|-\varepsilon < V(\zeta) < 0) = 0.$

(ii) *Pour tout* $\zeta_o \in \mathring{V}$, *il existe un voisinage de* ζ_o, W *tel que* $\sup\limits_{\zeta\in W}|\omega_{X_o}(t\,X_o+\zeta;X^{q-1})|$ *est intégrable par rapport à la mesure* $\frac{d\bar t\wedge dt}{|t|}$, *quel que soit* X^{q-1} *dans* E^{q-1}.

Alors, $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\bar\partial$ *et* $\bar\partial(k_q(\omega)) = \omega$.

Remarque : Le théorème 2 et le corollaire 2 s'appliquent à tout l'espace ; on peut, en particulier, en déduire le résultat suivant :

Pour tout ω dans $\Omega_1^{(o,q)}(E)$, ω $\bar\partial$-fermée, telle que $||\omega(\zeta)|| \leq \frac{A}{1+||\zeta||^2}$, alors $k_q(\omega)$ admet globalement un $\bar\partial$ et $\bar\partial(k_q(\omega)) = \omega$.

CHAPITRE III

L'EQUATION $\bar{\partial} f = F$ DANS UN ESPACE DE HILBERT.

Notations.

H désigne un espace de Hilbert complexe séparable, $H^{\mathbb{R}}$ est l'espace de Hilbert réel sous-jacent muni du produit scalaire $(x|y)_{H^R} = \mathcal{R}e(x|y)_H$.

T est un opérateur d'Hilbert-Schmidt auto-adjoint injectif sur H ; soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de vecteurs propres de T ayant pour valeurs propres respectives $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on note $||T||^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$ la norme de Hilbert-Schmidt de T.

On note H_T l'espace $T(H)$ muni de la structure hilbertienne $(H_T, (\ |\ )_{H_t})$ où $(x|y)_{H_t} = (T^{-1}(x)|T^{-1}(y))_H$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, H_n est le sous-espace $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}_{ej}$ et P_n la projection orthogonale sur H_n.

On désigne par μ_T la mesure gaussienne centré d'opérateur de corrélation T^2 sur $H^{\mathbb{R}}$, T étant défini sur $H^{\mathbb{R}}$ par $T(e_n) = \lambda_n.e_n$ et $T(i.e_n) = \lambda_n.i.e_n$.

On a vu au chapitre I, que si z est dans $T(H)$ alors μ_T et $\mu_{T,z} = \tau_z.\mu_T$ sont équivalentes et alors

$$\frac{d\mu_{T,z}}{d\mu_T}(x) = \rho_T(x,z) = \exp - \frac{1}{2}\{||T^{-1}(z)||^2 - 2\mathcal{R}e(T^{-1}(z)||T^{-1}(x))_H\}.$$

le produit scalaire $(T^{-1}(z)|T^{-1}(x))_{H^{\mathbb{R}}}$ étant défini μ_T presque partout sur H, et de carré μ_T sommable.

Il est clair $\int_H \rho_T^2(x,z)d\mu_T(x) = \exp(||z||^2_{H_T})$ pour tout z dans H_T.

En effet :

$$\rho_T^2(x,z) = \exp(-||z||^2_{H_T})\exp \mathcal{Re}(T^{-1}(z)|T^{-1}(x)$$

et puisque $\int_H \rho_T(x,z)d\mu_T(x) = 1$, le résultat est prouvé.

Une propriété sera dite vérifiée localement dans un ouvert borné de H si elle a lieu sur toute boule de Ω située à une distance strictement positive de la frontière de Ω, (par exemple, la locale continuité uniforme).

Une fonction sera dite de type borné sur Ω si elle est borné sur les bornés de Ω situé à une distance strictement positive de la frontière de Ω.

Si f est μ_T mesurable pour tout z de H, $x \mapsto f(x+z)$ est μ_T mesurable et sera toujours notée ${}_zf$.

B_R désignera la boule centrée en 0 et de rayon R.

Enfin, on rappelle que si Ω est un ouvert de H et si Ψ est de classe C^1 sur Ω ; on pose :

$$\bar{\partial}\Psi(x).(z) = \frac{1}{2}\left[\Psi'(x).(z) + i\,\Psi'(x)(iz)\right]$$

de même, on pose, si Ψ est dans $C^1(\Omega)$ et z dans H_T

$$\left[\bar{\delta}_x\Psi\right](z) = \bar{\partial}\Psi - \frac{1}{2}\left[\ell_{\mu_T}(x,z) + i\,\ell_{\mu_T}(x,iz)\right]\Psi(x).$$

Le résultat qui suit est dû à P. RABOIN [33] ; nous donnons avec plus de précisions les propriétés de différentiabilité.

<u>Théorème</u> *1.- Soit* Ω *un ouvert borné dans* H. *On suppose que pour tout entier* n *positif* f_n *est une fonction continûment dérivable, à dérivée de type borné sur le cyclindre* $P_n^{-1}(\Omega \cap H_n)$.

On suppose, en outre, que

a) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers l'application* f *dans l'espace* $L^2_{loc}(\Omega)$.

b) la suite $(\bar{\partial} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de type bornée dans son ensemble et converge simplement sur* Ω *vers une forme* F *de classe* C^1 *sur* Ω.

Alors

(i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de type borné sur* $\Omega \cap H_T$, *converge simplement sur* $\Omega \cap H_T$ *vers une fonction* f^* *qui vérifie pour tout* z *dans* $T^2(H) \cap \Omega$

$$f^*(z)\mu_T(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} f^*(x+z)\,d\mu_T(x) + 2\int_o^1\int_{B_\varepsilon} F(z+rx)(x)\,dr\;d\mu_T(x)$$

où μ_T *est la mesure de Gauss sur* H_T *et* B_ε *la boule de rayon* ε *de* H_T *centrée à l'origine telle que* $B_\varepsilon + z$ *soit à une distance strictement positive de la frontière de* $\Omega \cap H_T$.

(ii) la fonction f^* *est de type borné et localement uniformément continue sur* $\Omega \cap H_T$ *et de classe* C^1 *sur* $\Omega \cap H_{T^2}$, *en outre, elle vérifie* $\bar{\partial} f^* = F$ *sur* $\Omega \cap H_{T^2}$.

Preuve :

(i) Nous indiquons seulement les grandes lignes de la démonstration et nous renvoyons à [33] pour le détail des calculs.

On considère la mesure de Gauss μ_T sur H et la boule B_ε de H centrée à l'origine et telle que $z+B_\varepsilon$ sont à une distance strictement positive de la frontière de $\Omega \cap H$.

En utilisant l'invariance de la mesure de Gauss par $(x \mapsto xe^{i\theta})$ et en intégrant la formule intégrale de Cauchy Stoke à une variable, on obtient

$$(1) \qquad f_n(z)\mu_T(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon+z} f_n(x)\rho_T(x,z)d\mu_T(x)+2\int_o^1\int_{B_\varepsilon} \bar{\partial} f_n(z+rx)(x)dr\, d\mu_T(x).$$

On déduit à partir de l'hypothèse b) et de la proposition 2 du chapitre 1 que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type borné et converge simplement sur $\Omega \cap T(H)$ vers une fonction f^* qui vérifie

$$(2) \qquad f^*(z)\mu_T(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon+z} f(x)\rho_T(x,z)d\mu_T(x)+2\int_o^1\int_{B_\varepsilon} F(z+rx)(x)dr\, d\mu_T(x).$$

En utilisant cette expression et à nouveau la proposition 2, on constate que f^* est de type borné et localement uniformément continue sur $\Omega \cap H_T$.

En réécrivant (1) sur $\Omega \cap H_T$ pour la mesure de Gauss de H_T que l'on note encore μ_T , on obtient la relation annoncée en (i).

(ii) Etudions la différentiabilité de f^* sur $\Omega \cap H_{T^2}$.
La seconde intégrale dans (i) définit clairement une fonction de classe C^1 sur $\Omega \cap H_{T^2}$.

Nous allons étudier la première intégrale

$$\int_{B_\varepsilon} f^*(x+z)d\mu_T(x) = \int_{B_\varepsilon+z} f^*(x)\rho_T(x,z)d\mu_T(x).$$

On considère

$G(z_1,z_2)$ défini sur $(\Omega^{2\varepsilon} \cap H_{T^2}) \times (H_T \cap \Omega^{2\varepsilon})$ par

$$G(z_1,z_2) = \int_{B_\varepsilon+z_2} f^*(x)\rho_T(x,z_1)d\mu_T(x) = \int_{B_\varepsilon+z_2-z_1} f^*(x+z_1)d\mu_T(x)$$

où Ω^ε désigne l'ouvert formé des points de Ω situés à une distance supérieure à ε du bord de Ω.

On a donc

$$G(z_1,z_2) = \left(\int_{B_\varepsilon+z_2} f^*(x)\exp(T^{-1}(z_1)|T^{-1}(x))_{H_T^R}\, d\mu_T(x)\right)\exp - \frac{1}{2}\, ||z_1||^2_{H^R_{T^2}}$$

On applique la proposition 1 du chapitre 1, à la fonction :

$$H(z_1,z_2) = \exp \{\frac{1}{2}\, ||z_1||^2_{H^R_{T^2}}\}G(z_1,z_2).$$

H admet une dérivée partielle par rapport à z_1 qui est dans $(H_{T^2})'$ et $\frac{\partial H}{\partial z_1}(z_1,z_2)$ est continue sur $(\Omega_{2\varepsilon} \cap H_{T^2}) \times (H_T \cap \Omega_{2\varepsilon})$; on a, en fait

$$\frac{\partial H}{\partial z_1}(z_1,z_2)(h) = \int_{B_\varepsilon+z_2} f^*(x)\exp(T^{-1}(z_1)|T^{-1}(x))_{H_T^R}(T^{-1}(h)|T^{-1}(x))_{H_T^R}\, d\mu_T(x).$$

Seule la continuité $(z_1,z_2) \mapsto \frac{\partial H}{\partial z_1}(z_1,z_2)$ ne résulte pas de la proposition 1, chapitre I.

On appelle alors F l'expression sous l'intégrale et χ la fonction caractéristique de la boule.

On a :

$$\Delta\left(\frac{\partial H}{\partial z_1}\right) = \int_{H_T} \Delta\chi \; F \; d\mu_T + \int_{H_T} \chi \; \Delta F \; d\mu_T .$$

La première intégrale tend vers zéro, d'après le théorème de convergence dominé et la seconde d'après la proposition 2, chapitre I.

Maintenant en utilisant le théorème 7 chapitre 1, on voit que

$z_2 \mapsto H(z_1,z_2)$ est H_{T2} Gateaux différentiable sur $H_T \cap \Omega^{2\varepsilon}$

et l'on a $\dfrac{\partial H}{\partial z_2}(z_1,z_2)(h) = \displaystyle\int_{S_\varepsilon+z_2-z_1} f^*(x+z_1)(n_x|h)_{H_T^R} \, d\mu_T(x)$;

donc, d'après le théorème de composition des différentielles, on obtient que

$$(H(z,z))' = \frac{\partial H}{\partial z_1}(z,z) + \frac{\partial H}{\partial z_2}(z,z) \quad \text{sur} \quad H_{T2} \cap \Omega^{2\varepsilon}$$

ce qui permet de conclure à la différentiabilité de f^* sur $H_{T2} \cap \Omega$.

Il suffit de montrer la continuité de $z \mapsto \dfrac{\partial H}{\partial z_2}(z,z)$, celle de la première dérivée partielle étant déjà acquise ; on aura ainsi prouvé que f^* est C^1 sur $H_{T2} \cap \Omega$; or, on a

$$\frac{\partial H}{\partial z_2}(z,z)(h) = \int_{S_\varepsilon} f^*(x+z)(n_x|h)_{H_T^R} \, d\mu_T(x)$$

ce qui prouve la continuité.

Montrons, maintenant, que $\bar{\partial} f^* = F$ sur $\Omega \cap H_{T2}$.

On applique la formule d'intégration par partie (cf. Chapitre I).

On a donc pour toute fonction Ψ de classe C^1 à support borné dans $\Omega \cap H_{T^2}$ et à dérivée de type borné et pour tout z dans H_{T^3} :

$$\int_{H_{T^2}} \bar{\partial} f^*(x)(z)\Psi(x)d\mu_T(x) = - \int_{H_{T^2}} f(x)\left[\bar{\delta}_x \Psi\right](z)d\mu_T(x).$$

Pour tout entier positive n, on a de même

$$\int_{H_{T^2}} \bar{\partial} f_n(x)(z)\Psi(x)d\mu_T(x) = - \int_{H_{T^2}} f_n(x) \left[\bar{\delta}_x \Psi\right](z)d\mu_T(x)$$

en utilisant l'hypothèse b) et le fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type borné sur $\Omega \cap H_T$ on peut passer à la limite sous le signe intégral et on obtient

$$\int_{H_{T^2}} F(x)(z)\Psi(x)d\mu_T(x) = - \int_{H_{T^2}} f^*(x)\left[\bar{\delta}_x \Psi\right](z)d\mu_T(x).$$

On a donc

$$\int_{H_{T^2}} \partial f^*(x)(z)\Psi(x)d\mu_T(x) = \int_{H_{T^2}} F(x)(z)\Psi(x)d\mu_T(x) \qquad (3)$$

donc pour tout x dans $\Omega \cap H_{T^2}$ et tout z dans H_{T^3}.

Mais puisque f^* est C^1 sur $\Omega \cap H_{T^2}$ et que $T^3(H)$ est dense dans H_{T^2}, la relation (3) se prolonge à H_{T^2} par continuité, ce qui termine la démonstration.

Théorème 2.- Soit F *une forme différentielle* $\bar\partial$ *fermée de type de classe* C^1 *et de type borné sur un ouvert pseudo-convexe* Ω *borné dans* H. *Alors, pour tout opérateur nucléaire et injectif* A *sur* H, *il existe une application* f *de classe* C^1 *sur* $\Omega \cap H_A$ *solution de l'équation* $\bar\partial f = F$.

Preuve :

On utilise la décomposition polaire $A = UV$ avec U unitaire et V auto-adjoint positif et on pose $\sqrt{V} = T$ qui est injectif auto-adjoint et d'Hilbert-Schmidt.

F étant de type borné sur Ω borné, on peut trouver une fonction ϕ de la forme $\chi(-\mathrm{Log}\, d(.,\partial\Omega))$ avec χ convexe croissant assez vite qui soit plurisousharmonique sur Ω et telle que $||F||^2 \leqslant e^{\phi}$ sur Ω.

Pour tout entier n positif, on pose $\phi_n = \phi|_{H_n} \circ P_n$

si $z = \sum_{j=1}^{n} z_j e_j$

$$F_n(z) = \sum_{j=1}^{n} F_j(P_n z)\bar e_j \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \Omega_n$$

ou $\dot F_j(z) = F(z)(e_j)$ et $\bar e_j(z) = \bar z_j$.

Si T_n est l'application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans H_n définie par

$$T_n(z_1,z_2,\dots,z_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j e_j .$$

La forme différentielle $\tilde F_n$ définie sur l'ouvert pseudo-convexe $E_n = T_n^{-1}(\Omega \cap H_n)$ par $\tilde F_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_j(T_n z) d\bar z_j$ est de classe C^∞ et $\bar\partial$ fermée et si l'on pose

$$\tilde\phi_n(z) = \phi \circ T_n(z) + \frac{1}{2}\, ||z||^2_{C^n} \quad \text{pour tout } z \text{ dans } E_n ,$$

on a en notant dX_{2n} le mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{2n}$

$$\int_{E_n} ||\tilde{F}_n(z)||^2 \exp(-\tilde{\phi}_n(z)) \frac{dX_{2n}}{(2\pi)^n}$$

$$= \int_{E_n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \, |\dot{F}_j(T_m(z))|^2 \exp(-\phi(T_n(z)) + \frac{1}{2} ||z||^2_{\mathbb{C}^n}) \frac{dX_{2n}}{(2\pi)^n} .$$

Si Λ^2 est une plus grande valeur propre de T^2, on obtient

$$\int_{E_n} ||\tilde{F}_n(z)||^2 \exp(-\tilde{\phi}_n(z)) \frac{dX_{2n}}{(2\pi)^n} \leqslant \Lambda^2 \int_{E_n} ||F(T_n(z))||^2 \exp(-\phi(T_n(z)+ \frac{1}{2} ||z||^2_{C^n})) \frac{dX_{2n}}{(2\pi)^n}$$

donc

$$\int_{E_n} ||\tilde{F}_n(z)||^2 \exp(-\tilde{\phi}_n(z)) \frac{dX_{2n}}{(2\pi)^n} \leqslant \Lambda^2 \int_{\Omega_n} ||F \circ P_n||^2 \exp(-\phi_n) d\mu_T \leqslant \Lambda^2 \quad ;$$

or, $\tilde{\phi}_n$ est une fonction plurisousharmonique de E_n avec un minorant de plurisousharmonicité $c = 1$.

On peut donc d'après les estimations a priori de Hörmander [19] en conclure qu'il existe une fonction $\tilde{f}_n$ de classe C^1 sur E_n telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial}\tilde{f}_n = \tilde{F}_n \quad \text{sur } E_n \\ \displaystyle\int_{E_n} |\tilde{f}_n|^2 \exp(-\phi_n) \frac{dX_{2n}}{(2\pi)^n} \leqslant 2\Lambda^2 . \end{cases}$$

Posons $f_n(z) = \tilde{f}_n(\frac{z_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{z_n}{\lambda_n})$ pour tout z dans Ω^n, $z = \sum_{j=1}^{n} z_j e_j$.

On définit une application f_n telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} f_n = F_n \quad \text{sur } \Omega_n \\ \displaystyle\int_{\Omega_n} |f_n|^2 \exp(-\phi_n) d\mu_T \leqslant 2\Lambda^2 \end{cases} ;$$

or, puisque toute boule est incluse dans un cylindre Ω_n pour n assez grand, on peut, à une extraction près, supposer que la suite $(f_n \exp(-\phi_{n/2}))$ bornée dans $L^2_{loc}(\Omega,\mu_T)$ est convergente faiblement dans $L^2_{loc}(\Omega,\mu_T)$ vers une fonction g égale à $f \exp(-\phi_{/2})$ où f est μ_T mesurable ;

or, pour toute fonction h de $L^2_{loc}(\Omega\mu_T)$ et toute boule B de Ω, on a pour tout n entier positif

$$\int_B |f-f_n||h| d\mu_T \leqslant \int_B |f_n \exp(-\phi_{n/2}) - f \exp(-\phi_{/2})| \exp(\phi_{n/2}) |h| d\mu_T + \int_B |fh(\exp \frac{(\phi-\phi_n)}{2} - 1)| d\mu_T .$$

En utilisant la convergence faible de $f_n.\exp(-\frac{\phi_n}{2})$ vers $f.\exp(-\phi_{/2})$ et en appliquant le théorème de convergence dominé, on obtient que la suite f_n converge faiblement vers f dans $L^2_{loc}(\Omega,\mu_T)$, on est donc en mesure d'appliquer le théorème 1 ce qui termine la démonstration.

Remarque :

Un choix convenable de ϕ permet d'énoncer un résultat du même type dans le cas d'un ouvert pseudo-convexe non borné.

Pour la définition d'un ouvert pseudo-convexe en dimension infinie nous renvoyons à [30] ou [39]. En fait, il suffit de savoir que Ω est pseudo-convexe si et seulement si son intersection avec tout sous-espace vectoriel de dimension finie est pseudo-convexe.

Le problème qui se pose à la suite de ce théorème consiste à savoir si sous les mêmes hypothèses, on peut trouver une solution à l'équation $\bar{\partial} f = F$ sur $\Omega \cap H$.

La réponse est négative. Elle a été apportée par un exemple de G. COEURÉ [8] que nous allons détailler, en suivant la rédaction qu'en donne P. MAZET [28].

Le contre-exemple de G. COEURÉ.

Soit ϕ une application de classe C^∞ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,\phi(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \phi(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x\phi'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\phi''(x) = 0$$

(soit par exemple $\phi(x) = \mathrm{Log}(\frac{1}{x})$.

On définit $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\alpha(z) = z^2\phi(z\bar{z})$ si $z \neq 0$ et $\alpha(0) = 0$ il est clair que α est continue.

En outre, si $z \neq 0$ $\frac{\partial\alpha}{\partial z} = 2z\phi(z\bar{z}) + z^2\bar{z}\phi'(z\bar{z})$ et $\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}} = z^3\phi'(z\bar{z})$; les hypothèses faites sur ϕ entraînent que $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$ et $\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}$ tendent vers zéro quand z tend vers zéro.

On en déduit que α est de classe C^1.

On pose $B = \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}}$; pour $z \neq 0$, $\frac{\partial B}{\partial z} = 3z^2\phi'(z\bar{z}) + z^3\bar{z}\,''(z\bar{z})$ et $\frac{\partial B}{\partial\bar{z}} = z^4\phi''(z\bar{z})$.

On en déduit que $\frac{\partial B}{\partial z}$ et $\frac{\partial B}{\partial\bar{z}}$ tendent vers zéro quand z tend vers zéro ainsi B est de classe C^1.

On définit dans ℓ^2 la forme de degré (0,1) par

$$F(x) = \sum_{m\in N} B(x_m)d\bar{x}_m .$$

Il est facile de voir que F est bien définie ($B(x_n)$ est dans ℓ^2). F est C^1 dans la boule unité (on peut voir qu'elle est Gateaux différentiable que sa différentielle au sens de Gateaux est linéaire continue et que l'application différentielle $x \mapsto F'(x)$ est continue sur la boule unité).

La différentiabilité au sens de Gateaux est une conséquence de la différentiabilité uniforme de B sur tout compact

On a $\bar{\partial}F = 0$ (en effet $DF = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial B}{\partial z}(x_n)dx_n \wedge d\bar{x}_n$ qui n'a pas de composante (0,2).

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de fonction f de classe C^1 sur un voisinage de 0 telle que $\bar{\partial}f = F$.

Si une telle fonction existait, on pourrait alors trouver $r > 0$ $M > 0$ telle que f serait définie sur la boule $B(0,r)$ et bornée en module par M.

Soit H_N le sous-espace engendré par $\{e_0,e_1,\ldots,e_n\}$ de la base canonique. Pour tout N, on peut construire $F|_{H_N} = F_N$,

$$F_N = \sum_0^N B(x_m)d\bar{x}_n = \bar{\partial}\left(\sum_0^N \alpha(x_m)\right) \quad ;$$

il en résulterait que sur $B(0,r) \cap H_N$.

$f - \sum_0^N \alpha(x_m)$ serait une fonction analytique qui donc se développerait en série de polynômes homogènes de degré d $\sum_0^{+\infty} P_N^d(x)$.

On aurait donc

$$\left| \sum_0^N \alpha(x_m) + \sum_0^{+\infty} P_N^d(x) \right| \leqslant M \quad \text{sur } B(o,r) \cap H_N$$

et donc aussi sur $\bar{B}(0,r) \cap H_N$ par continuité.

On va intégrer sur le cercle $\{tx \mid |t| = 1\}$ de la droite complexe de vecteur directeur x par rapport à la mesure $\frac{dt}{2i\pi t^3}$; on obtient que :

$$\left| \sum_0^N \int_{|t|=1} \alpha(tx_m) \frac{dt}{2i\pi t^3} + \sum^{+\infty} P_N^d(x) \int_{|t|=1} \frac{t^d dt}{2i\pi t^3} \right| \leqslant M \quad ;$$

la première intégrale vaut $\int_{|t|=1} x_n^2 \phi(|x_n|^2) \frac{dt}{2i\pi t}$;

la seconde vaut 0 si $d \neq 2$ et 1 pour $d = 2$;

on obtient donc $\left| \sum_0^N x_n^2 \phi(|x_n|^2) + P_N^2(x) \right| \leqslant M$;

pour tout x de $B(0,r) \cap H_n$; or, puisque $\sum_0^N x_m^2 \phi(|x_n|^2)$ est une fonction symétrique en x_i et puisque $B(0,r) \cap H_N$ est invariante par permutation des coordonnées, on a toujours $\left| \sum_0^N x_n^2 \phi(|x_n|^2) + \sigma(P_N)(x) \right| \leqslant M$ pour tout x de $B(0,r) \cap H_n$ ou $\sigma(P_N)$ est le symétrisé de P_N.

Et, puisque le symétrisé est homogène de $d^o 2$, il peut s'écrire comme $a_N (\sum_{i=0}^{N} x_i)^2 + b_N \sum_{i=0}^{N} x_i^2$ ainsi pour $0 \leqslant p \leqslant N$, on a toujours la majoration, on a

$$x_o = x_1 = \ldots = x_p = \frac{r}{\sqrt{p+1}} \quad \text{et} \quad x_{p+1} = \ldots = x_N = 0,$$

on obtient donc

$$\left| r^2 \phi(\frac{r^2}{p+1}) + a_N (p+1) r^2 + b_N r^2 \right| \leqslant M.$$

Si $N \geqslant n^2-1$ en appliquant l'inégalité à $p = 0$, $p = n-1$ et $p = n^2-1$.

On obtient :

$$|\phi(r^2) + a_N + b_N| \leqslant \frac{M}{r^2}$$

$$|\phi(\frac{r^2}{n}) + a_N n + b_N| \leqslant \frac{M}{r^2}$$

$$|\phi(\frac{r^2}{n}) + a_N n^2 + b_N| \leqslant \frac{M}{r^2}$$

en formant une combinaison linéaire ayant pour coefficient $\frac{n}{n+1}$, -1, $\frac{1}{n+1}$, on en déduit

$$\left| \frac{n}{n+1} \phi(r^2) - \phi(\frac{r^2}{n}) + \frac{1}{n+1} \phi(\frac{r^2}{n^2}) \right| \leqslant \frac{2M}{r^2}$$

en faisant tendre n vers l'infini, on obtient une contradiction car

$$\frac{n}{n+1} \phi(r^2) \to \phi(r^2) \qquad \phi(\frac{r^2}{n}) \to +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} (\frac{r^2}{n^2}) \longrightarrow 0.$$

N.B. : On peut voir que la technique utilisée pour l'exemple que l'on vient de construire ne fonctionne pas si F est de classe C^p avec $p \geq 2$.

Pour un second membre C^p, $p \geq 2$, le problème posé reste ouvert.

Nous terminerons ce chapitre par un résultat de P. MAZET [28] qui permet de voir que dans le théorème 2, si F est C^∞ sur Ω alors il existe une solution $f \in C^\infty(\Omega \cap H_A)$ telle que $\bar\partial f = F$.

Proposition.- Soit H *un espace normé complexe et* F *une forme différentielle de type* $(0,1)$ *et de classe* C^∞ *sur un ouvert* Ω *de* H.

Soit f *une fonction localement bornée sur* Ω *dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie* E *est* C^∞ *et vérifie :* $\bar\partial f_{|E} = F_{|E}$.
Alors f *est de classe* C^∞ *sur* Ω *et vérifie* $\bar\partial f = F$.

Preuve :

f est C^∞ au sens de Gateaux cela permet de définir une dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$. Pour établir la proposition, il suffit de prouver que $f^{(n)}(x)(h)$ est borné au voisinage de $(x,0)$ dans $\Omega \times H^n$.

$f^{(n)}$ est une combinaison linéaire de dérivations du type $(\partial)^p \circ (\bar\partial)^q$ avec $p+q=n$; lorsque $q \neq 0$, cette dérivée s'écrit $(\partial)^p \circ (\bar\partial)^{q-1}(F)$; comme F est C^∞ sur Ω seul le cas $(\partial)^n(f)$ pose un problème.

Etant donnée une fonction g de classe C^2 sur un disque Δ de $\mathbb{C}$, fermé et centré à l'origine, la représentation intégrale de Cauchy donne :

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta} \frac{\partial g}{\partial t}(t)\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta} \frac{\partial^2 g}{\partial t\partial\bar t}\,\frac{dt \wedge d\bar t}{t} .$$

On intègre par partie la première intégrale pour obtenir :

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta} g(t)\,\frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\frac{\partial g}{\partial \bar{t}}(t)\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta}\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial\bar{t}}(t)\,\frac{dt\wedge d\bar{t}}{t}$$

Soit $h \in H - \{0\}$; en prenant Δ tel que $x + \Delta.h$ soit contenu dans Ω et en utilisant la relation $\bar{\partial} f = F$ sur les sous-espaces de dimension finie, on obtient :

$$(\partial)^n f(x)(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}(\partial)^{n-1} f(x+th;h)\,\frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}(\partial)^{n-1}F(x+th;h)\,\frac{dt}{t}$$

$$+ \int_{\Delta}(\partial)^n F(x+th;h)\,\frac{dt\wedge d\bar{t}}{t}\ .$$

Puisque F est C^∞, cette représentation permet de conduire un raisonnement par récurrence immédiat.

Remarque :

Cette proposition est la clé d'une démonstration du théorème 2 par P. MAZET [28] qui n'utilise pas l'intégration en dimension infinie. Toutefois, sa méthode n'opère que pour un second membre C^∞.

CHAPITRE IV

L'EQUATION $\bar{\partial}$ DANS LES OUVERTS PSEUDO-CONVEXES DES ESPACES D.F.N.

Notations et Définitions.

Soit E un D.F.N. ; E est limite inductive injective et dénombrable d'une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces de Banach. On peut, en fait, supposer que chaque E_n est un espace de Hilbert séparable et que chaque inclusion $E_n \to E_{n+1}$ est nucléaire (Cf. [18], VII et [17], VIII).

Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de E est une fonction continue et Gateaux analytique, ou ce qui est équivalent dans le cas des D.F.N., une fonction sur Ω telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_{|\Omega \cap E_n}$ est holomorphe sur $\Omega \cap E_n$ muni de la topologie de l'espace de Hilbert E_n. On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω.

Une fonction à valeurs complexes définie sur Ω est dite C^∞ si sa restriction à chaque $\Omega \cap E_n$ muni de la topologie induite par E_n est C^∞ pour la structure réelle sous-jacente de E_n.

Les principales notions de fonctions C^∞ dans les espaces localement convexes coïncident avec celle-ci, lorsque E est un D.F.N. (voir [1] ou [27]). On rappelle que chaque compact de E est contenu dans un compact d'un certain E_n. $C^\infty(\Omega)$ est muni de la topologie de la converge uniforme sur tout compact de Ω pour ses fonctions et leurs dérivées successives.

Pour chaque entier p, on note $\Lambda_p(E)$ l'espace des formes anti-symétriques p-antilinéaires continues sur E ; on le munit de la convergence uniforme sur les bornés de E ; $\Lambda_p(E)$ est alors la limite projective, suivant n dans $\mathbb{N}$, des espaces de Banach $\Lambda_p(E_n)$.

Une forme différentielle C^∞ de type $(0,p)$ sur Ω ouvert de E est une application C^∞ de Ω dans $\Lambda_p(E)$; cela signifie $\forall\ (n,k) \in \mathbb{N}^2$: l'application de $\Omega \cap E_n$ dans $\Lambda_p(E_k)$ obtenue par composition avec les injections canoniques est C^∞ pour les topologies d'espaces normés.

Le but de ce chapitre consiste à démontrer le théorème suivant dû à COLOMBEAU et RABOIN. La rédaction proposée tient compte des améliorations portant sur la différentiabilité obtenues au chapitre III.

Théorème.- *Soit* E *un D.F.N. complexe et soit* Ω *un ouvert pseudo-convexe de* E. *Alors, pour toute forme différentielle* F, C^∞ *de type* $(0,1)$ *et* $\bar\partial$ *fermée sur* Ω, *il existe une fonction* f, C^∞ *sur* Ω *telle que* $\bar\partial f = F$.

Pour la démonstration de ce résultat, nous allons établir 3 lemmes.

H désigne un espace de Hilbert complexe séparable, A un opérateur sur H nucléaire injectif, auto-adjoint. On note H_A l'espace $A(H)$ muni du produit scalaire $(x|y)_{H_A} = (A^{-1}(x)|A^{-1}(y))$. G est un Hilbert complexe séparable qui contient H avec une inclusion compacte. Ω est un ouvert pseudo-convexe de G et F une forme différentielle sur Ω, C^∞ de type $(0,1)$ et $\bar\partial$ fermée.

Pour tout $r > 0$, on pose $\Omega_r = \{x \in H \cap \Omega \,\big|\, ||x||_H < r\}$.

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de vecteurs propres orthonormés pour A.

<u>Lemme</u> 1.- *Pour tout* $r > 0$, *il existe une fonction* f^* *de classe* C^∞ *sur* $\Omega_r \cap H_A$ *telle que* $\bar\partial f^* = F$ *sur* $\Omega_r \cap H_A$.

<u>*Preuve*</u> :

On note d la distance dans G. L'adhérence dans G des ensembles $\{x \in \Omega_r \; d(x \mid \complement^{\Omega}_{G}) \geq \varepsilon\}$ est compacte dans G et contenue dans Ω. Donc F est borné sur ces ensembles et on peut construire une fonction convexe croissante continue χ sur $\mathbb{R}$ assez grande pour que

$$\|F(x)\|^2_{\Lambda(H)} \leq \exp\left[\chi(-\mathrm{Log}\; d(x, \complement^{\Omega}_{G}))\right].$$

On peut alors utiliser la preuve du théorème 2, chapitre III avec la fonction χ qui vient d'être signalée tout en remarquant que le fait que F est de type borné est remplacée ici par celui qu'une boule fermée de H est compacte dans G ■

Soit $H_o \longrightarrow H_1 \longrightarrow H_2$ une suite finie croissante d'espaces de Hilbert séparable avec injections nucléaires.

Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de H_2 et F une forme différentielle C^∞ de type $(0,1)$ et $\bar\partial$ fermée sur Ω.

On note $\Omega^o_r = \{x \in \Omega \cap H_o \,\big|\, \|x\|_{H_o} < r\}$, Ω^o_r est ouvert dans H_o on le munit de la topologie induite par H_o.

<u>Lemme</u> 2.- *Il existe une fonction* f^* *de classe* C^∞ *sur* Ω^o_r *telle que* $\bar\partial f^* = F$.

Preuve :

Soit $H_o \to \overline{H_o}^{H_1} \to \overline{H}^{H_2} = G$ (ou $\overline{H_o}^{H_2}$ désigne l'adhérence de H_o dans H_i, $i = 1$ ou 2).

Les injections canoniques sont nucléaires avec images denses car composées d'une application nucléaire et d'une projection.

L'injection $U : H_o \to G$ est de type $\ell^{1/2}$ comme composée de deux opérateurs de type ℓ^1 (cf. 8.3.3 et 8.2.7 [32]). Les théorèmes 8.3.1 et 8.3.2 de [32] appliqués à U montrent qu'il existe $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 2 bases orthonormales de H_o de G respectivement telles que $U(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda'_n (x|e'_n)_{H_o} . f_n$ pour tout x de H_o, les λ'_n étant les nombres d'approximation de U. Donc si on pose $\lambda_n = \sqrt{\lambda'_n}$ la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^1. Posons $e_n = \frac{e'_n}{\lambda_n}$, cela donne $e'_n = \lambda'_n . f_n$ et donc $f_n = \frac{e_n}{\lambda_n}$.

Soit $H = \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in G | (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \}$ muni du produit scalaire $(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n | \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \bar{y}_n$ alors H est un espace de Hilbert admettant la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme base orthonormale. La suite $(\frac{e_n}{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de G et l'injection de H dans G est nucléaire. Considérons maintenant A défini sur H par $A(e_n) = \lambda_n e_n$, A est nucléaire car $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^1 injectif auto-adjoint avec image dense et H_A coïncide avec H_o ; F est une forme différentielle sur $\Omega \cap G$ qui vérifie les hypothèses du lemme 1 ; donc on obtient le résultat si on remarque que Ω_r^o est contenu dans l'ouvert Ω_r du lemme 1.

Nous allons maintenant énoncer un lemme d'approximation.

<u>*Lemme*</u> *3.- Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert séparables avec* $E \to F$ *inclusion compacte. Soit* Ω *un ouvert pseudo-convexe de* F *tel que* $\Omega \cap E \neq \emptyset$.

Alors, pour tout $h \in H(\Omega \cap E)$ *et tout compact* K *de* E *contenu dans* Ω *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\tilde{h} \in H(\Omega)$ *tel que*

$$\sup_{x \in K} |\tilde{h}(x) - h(x)| < \varepsilon.$$

<u>*Preuve*</u> :

La démonstration étant très technique ; nous suivons celle de [9] sans modification, nous en dégageons les grandes lignes et renvoyons à [9] pour les détails.

On considère une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E qui est aussi un système orthogonal de F (l'existence en est assurée par th. 8.3.1 [32]). On note P_n la projection orthogonale de E sur le sous-espace de E engendré par $\{e_o, \ldots, e_n\}$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_o$ $\forall x \in K$, $P_n(x) \in \Omega$, $||x - P_n|| \leq \frac{1}{4} d_F(K \complement_F^\Omega)$

et $|h(x) - h(P_n(x))| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On fixe alors N supérieur à N_o, $\left[\frac{3}{4} d_F(K \complement_\Omega^F)\right]^{-1}$ et $\sup_{x \in K} ||x||_F$.

On choisit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de F telle que $f_i = \dfrac{e_i}{||e_i||_F}$.

Si $0 \leq i \leq N$ et qui contienne la famille $\left\{\dfrac{e_i}{||e_i||_F}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Posons :

$K_n = \{x \in \Omega \,\big|\, ||x||_F \leq n$ et $d_F(x, \complement_F^\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$;

$L_n = \{x \in \Omega \,\big|\, ||x - Q_n(x)||_F \leq \frac{1}{2} d_F(x, \complement_F^\Omega)\}$;

Q_n : la projection orthogonale de F sur le sous-espace engendré pour $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

On obtient alors : $n \geqslant N \Rightarrow \{Q_n(K) \subset K_n$ et $Q_{n+1}(K) \subset L_n\}$.

Si l'on pose $\Omega_n = \Omega \cap Q_n(F)$, on a donc pour $n \geqslant N$: $Q_{n+1}(K) \subset \Omega_{n+1} \cap L_n \cap K_{n+1}$. On utilise maintenant la construction de GRUMAN et KISELMAN [12] dans F pour la base $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en commençant à l'indice N. On obtient une suite h_n de fonctions holomorphes sur Ω_n telles que

$$h_{n+1}\big|_{\Omega_n} = h_n \quad \text{si} \quad n > N \qquad \text{et} \qquad h_N = h\big|_{\Omega_N}$$

$$|h_n(x) - h_{n-1}(Q_{n-1}(x))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \text{si} \quad x \in \Omega_n \cap K_n \cap L_{n-1} \qquad (n > N).$$

La fonction $\tilde{h}$ définie par $\tilde{h}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(Q_n(x))$ pour tout $x \in \Omega$ est alors dans $H(\Omega)$. Comme $Q_N = P_N$ sur K, en utilisant $|\tilde{h}(x) - h(Q_N(x))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et les inégalités du début de la démonstration, on obtient : $|\tilde{h}(x) - h(x)| < \varepsilon$ pour $x \in K$.

On peut maintenant à l'aide de ces 3 lemmes prouver le théorème. E est limite inductive d'une suite croissante d'espaces de Hilbert séparables E_n avec injections canoniques nucléaires $E_n \to E_{n+1}$ qui se factorise de la manière suivante :

$E_n = H_{o,n} \to H_{1,n} \to H_{2,n} = E_{n+1}$ où toutes les injections sont nucléaires et où les $H_{i,n}$ sont des Hilberts séparables.

E étant un D.F.N., il existe une suite exhaustive de compacts K_n dans Ω ; on peut supposer K_n compact dans E_n. Comme $\Omega \cap E_n$

est pseudo-convexe, si l'on note $\widehat{K_n}^{\Omega \cap E_n}$ l'enveloppe holomorphiquement convexe de K_n pour $H(\Omega \cap E_n)$, il est clair que $\widehat{K_n}^{\Omega \cap E_n}$ est un compact de $\Omega \cap E_n$ ([30] ou [39]). Il existe donc $r_n > 0$ tel que

$\widehat{K_n}^{\Omega \cap E_n} \subset \{x \in \Omega \cap E_n \mid \|x\|_{E_n} < r_n\}$ que l'on note $\Omega(n)$.

Si l'on considère la restriction de F à $\Omega \cap E_{n+1}$, les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites ; il existe donc f^* de classe C^∞ sur $\Omega(n)$ telle que $\bar{\partial} f_n^* = F$ sur $\Omega(n)$.

On pose $f_2 = f^*$.

On considère $f_3^* - f_2$ qui est holomorphe sur $\Omega(2)$ voisinage de $\widehat{K_2}^{\Omega \cap E_2}$; d'après un théorème d'approximation dans E_2 [29], $f_3^* - f_2$ peut être approché uniformément sur $\widehat{K_2}^{\Omega \cap E_2}$ par une fonction holomorphe sur $\Omega \cap E_2$. D'après le lemme 3, cette dernière fonction peut être approchée uniformément sur $\widehat{K_2}^{\Omega \cap E_2}$ par une fonction holomorphe sur $\Omega \cap E_3$; ainsi il existe $P_2 \in H(\Omega \cap E_3)$ telle que $\sup\limits_{x \in K_2} |f_3^*(x) - f_2(x) - P_2(x)| < \frac{1}{2^2}$.

On pose $f_3 = f_3^* - P_2$

On a donc f_3 est $C^\infty(\Omega(3))$, $\Omega(3) \subset \Omega \cap E_3$

$\bar{\partial} f_3 = F$ sur $\Omega(3)$ car $\bar{\partial} P_2 = 0$

$\sup\limits_{x \in K_2} |f_3(x) - f_2(x)| \leqslant \frac{1}{2^2}$.

Par récurrence, on obtient une suite f_n de classe C^∞ sur $\Omega(n)$ telle que $\bar{\partial} f_n = F$ sur $\Omega(n)$ et $\sup\limits_{x \in K_{n-1}} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Puisque pour tout $x \in \Omega$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_x$ entraîne

$x \in K_n \subset \Omega(n)$, $f_n(x)$ est définie pour n assez grand et

$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Les fonctions

$f_{n+p} - f_n$ sont holomorphes sur $\Omega(n)$ et lorsque $p \to +\infty$ la suite converge dans $\mathcal{H}(\Omega(n))$ muni de la convergence uniforme sur tout compact vers $f-f_n$, car tout compact de $\Omega(n)$ est contenu dans un K_m pour m assez grand. Donc $f = (f-f_n) + f_n$ est C^∞ sur $\Omega(n)$; puisque ceci est vrai pour tout n, f est C^∞ sur Ω et l'égalité $\bar{\partial}f = F$ provient de la construction de f.

Si $x \in \Omega$ et $y \in E$, alors $x \in \Omega(n)$ et $y \in E_n$ pour n assez grand ; l'holomorphie de $f-f_n$ sur $\Omega(n)$ implique donc :

$$\bar{\partial}f(x).(y) = \bar{\partial}f_n(x).(y) = F(x).(y) ,$$

ce qui termine la démonstration.

Les D.F.N. semblent êtrele cadre naturel où les méthodes de la cohomologie de P. DOLBEAULT se généralise.

Il semble probable que le résultat précédent puisse se généraliser aux groupes de cohomologies d'ordre supérieur, mais il est clair que si tel est le cas, la méthode employée ici ne peut être généralisée en l'état à un ordre plus élevé car elle repose sur l'égalité du noyau de l'opérateur $\bar{\partial}$ avec l'ensemble des fonctions analytiques.

Nous allons maintenant donner des applications du théorème.

Applications.

Corollaire 1.- Le premier problème de Cousin admet une solution sur tout ouvert pseudo-convexe d'un D.F.N.

La preuve est la même qu'en dimension finie [19] ; elle est fondée sur la surjection du $\bar{\partial}$ et sur le lemme de partition de l'unité suivant dont la preuve peut être adaptée de celle de [6].

Lemme.- Soit E *un espace localement convexe séparé réel avec une base de voisinage de* 0 *préhilbertiens et soit* U *un ouvert de* E *qui est de Lindelöf pour la topologie induite. Soit* $\mathcal{U}$ *un recouvrement d'ouverts de* U. *Alors il existe une suite* $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions de classe* C^∞ *sur* E *telles que*

(1) *pour tout* n, *support de* Ψ_n *est contenu dans un élément du recouvrement* $\mathcal{U}$.

(2) *tout* x *de* U *admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini des ensembles* $\{x \in U$ *tel que* $\Psi_n(x) > 0\}$.

(3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n(x) = 1, \ \forall x \in U$ *et* $0 \leq \Psi_n \leq 1$.

Corollaire 2.- Soit E *un D.F.N. complexe et* Ω *un ouvert pseudo-convexe de* E, H *un hyperplan fermé de* E *qui coupe* Ω. *Alors toute fonction holomorphe sur* $\Omega \cap H$ *peut se prolonger en une fonction holomorphe sur* Ω.

Preuve :

Elle est identique à celle bien connue en dimension finie.

Remarque :

Un contre-exemple dû à S. DINEEN [10] sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ montre qu'en général le premier problème de COUSIN n'a pas de solution sur un espace nucléaire.

On signale aussi que le premier problème de COUSIN était déjà résolu sur deux ouverts convexes d'un D.F.N. à base par d'autres méthodes [3, 4, 5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVERBUKH (VI) et SMOLYANOV (OG) - *The theory of differentiation in linear topological spaces*, (Russian Math. Surveys, t. 22 (1967), p. 201 à 258.

[2] BERNER (P) - Conférence à Dublin (non publiée).

[3] BOLAND (P) - *Duality and spaces of holomorphic functions, infinite dimensional holomorphy and applications*, [1975, Univ. Campinos, Sao Paulo, p. 131-138] et [North Holland Mathematics Studies, 12].

[4] BOLAND (P) - *Holomorphics functions on Nuclear spaces*, (Trans. Amer. Math. Soc., t. 209, 1975, p. 279-281).

[5] BOLAND (P) et DINEEN (S) - *Holomorphic functions on fully nuclear spaces*, (à paraître).

[6] BONIC (R) et FRAMPTON (J) - *Smooth functions on Banach manifolds*, (J. Math. et Mech. t. 15 (1966), p. 877-898).

[7] COEURE (G) et NOVERRAZ (P) - *Eléments de la théorie des faisceaux et domaines pseudo-convexes* (Cours de D.E.A. de Mathématiques Pures, Université de Nancy I, 1974).

[8] COEURE (G) - *L'équation* $\bar{\partial}u = f$ *en dimension infinie*, (Journées Bruxelles-Lille-Mons d'Analyse fonctionnelle, Avril 1978).

[9] COLOMBEAU (JF) et PERROT (B) - *L'équation* $\bar{\partial}$ *dans les ouverts pseudo-convexes des espaces DFN* (Bulletin de la SMF, Tome 110, 1982, n° 1).

[10] DINEEN (S) - *COUSIN's first problem on certain locally convex topological spaces*, (Annals Acad. Brasil, t. 48, (1976), p. 11 et 12.

[11] GROSS (L) - *Potential theory on Hilbert space*, (J. funct. Analysis, t. 1 (1967), p. 123-181).

[12] GRUMAN (L) et KISELMAN (CO) - *Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base*, (CRAS Sc Paris, t. 274, série A, (1972), p. 1296 à 1298).

[13] GUELFAND (IM) et VILENKIN (NY) - *Les distributions T 4* (Dunod, 1967).

[14] HENKIN (GM) - *Integral representation of functions in strictly pseudo-convex domains and applications to the* $\bar{\partial}$ *problem*, (Math. USSR Sbornik, Vol. 11, (1970).

[15] HENKIN (GM) et ROMANOV (AV) - *Exact Hölden estimates for the solutions of the* $\bar{\partial}$ *equation*, (Math. USSR IZVESTIJA, Vol. 5, (1971), n° 5).

[16] HENRICH (CJ) - *The* $\bar{\partial}$ *equation with polynomial growth on a Hilbert space*, (Duke Math. J. t. 40, (1973), p. 279-306).

[17] HOGBE-NLEND (H) - *Théorie des bornologies et applications*, (Lecture Notes in Math. n° 213, Springer Verlag, 1971).

.../...

[18] HOGBE-NLEND (H) - *Bornologies and Functional Analysis*, (North Holland Maths Studies, 26, (1978).

[19] HORMANDER (L) - *An introduction to complex analysis in several variables*, (North Holland, 1973).

[20] HORMANDER (L) - L^2 *estimates and existance theorem for the* $\bar{\partial}$ *operator*, Acta Math. 113 (1965), p. 89 à 152.

[21] HU-HSIUNG-KUO - *GAUSSIAN measures in Banach spaces*, (Lecture Notes in Math. n° 463, (1975), Springer Verlag).

[22] KERZMAN (N) - *HOLDER and* L^p *estimates for solutions of* $\bar{\partial}u = f$ *in strongly pseudo-convex domains*, (Communications on pure et applied Mathematics, Vol. 24, p. 301-379, 1971).

[23] KOHN (JJ) - *Harmonic integral on strongly pseudo-convex manifolds*, Ann. of Math. 2, 78 (1962), p. 112 à 148, 79 (1963).

[24] KRANTZ (SG) - *Function theory of several complex variables*, (Pure and Applied Mathematics, Willey-Interscience-publication).

[25] LELONG (P) - *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières à n variables*, (Presses de l'Université de Montréal, n° 28, (1968)).

[25 bis] LELONG (P) - *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives* (Gordon Breack, 1967 Dunod).

[26] LERAY (J) - *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe*, (Bull. S.M.F. 87 (1959), p. 81 à 180).

[27] LLOYD (J) - *Smooth partitions of unity on manifolds*, (Trans. Amer. Math. Soc. t. 187, 1974, p. 249-259).

[28] MAZET (P) - *Analytics sets in locally convex spaces*, (North Holland Studies, 1984).

[29] NOVERRAZ (P) - *Approximation of holomorphic or plurisubharmonics functions in certain Banach spaces*, Proceedings on infinite dimensional holomorphy (Lecture Notes in Math. n° 364, Springer Verlag, 1974, p. 178-185).

[30] NOVERRAZ (P) - *Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie*, (North Holland Maths Studies, Tome 3, 1973).

[31] OVRELID (N) - *Integral representation formulas and* L^p *estimates for the* $\bar{\partial}$ *equation*, (Math. Scand. 29, 1971, p. 137-160).

[32] PIETSCH (A) - *Nuclear locally convex spaces*, (Ergebnisse der Mathematik, t. 66, Springer Verlag, 1972).

.../...

[33] RABOIN (P) - *Le problème du $\bar{\partial}$ sur un espace de Hilbert,* (Bull. de la Soc. Math. de France, t. 107, 1979, p. 225 à 240).

[34] RABOIN (P) - *The $\bar{\partial}$ equation on Hilbert spaces and some applications,* (North Holland Math. Studies, t. 34 (1979) p. 713-734).

[35] RAPP (A) - *L'équation $\bar{\partial}$ avec décroissance au bord sur certains ouverts d'un espace de Banach,* C.R.A.S. t. 280, 12 mai 1975, série A, p. 1189 à 1191.

[36] RAPP (A) - *L'équation $\bar{\partial}$ avec décroissance au bord sur certains ouverts d'un espace de Banach,* (Bull. S.M.F. Suppl. Mémoire n° 46, (1976), p. 66 à 72).

[37] RIESZ (F) et NAGY (BSZ) - *Leçons d'Analyse fonctionnelle,* (Paris - Gauthier Villars, Budapest - Akadémia Kiado, 1978).

[38] RUDIN (W) - *Real and complex Analysis,* (Mac Graw Hill, 1966).

[39] SCHOTTENLOHER (M) - *The Levi problem for domains spread over locally convex spaces with a finite dimensional Schaüder decomposition,* (Annales de l'Institut Fourier, Vol. 26, n° 4 (1976), p. 207 à 237).

[40] SKOHOROD (AV) - *Integration in Hilbert spaces,* (Berlin Springer Verlag, 1934, Ergebniss der Mathematik, 79)

RÉSUMÉ

Ce travail a pour objet l'étude de l'existence de solutions à l'équation $\bar{\partial} f = F$, où le second membre est une forme différentielle de type (0,1) sur un e.v.t. complexe de dimension infinie, fermée.

Il comporte une étude des propriétés des mesures gaussiennes sur un espace de Hilbert, une description des résultats connus en particulier sur les espaces de Hilbert et les duaux d'espaces de Frechet nucléaires, une contribution nouvelle sur les convexes des espaces normés complexes, où l'existence d'une solution est démontrée lorsque le second membre est une (0,1) forme fermée à décroissance suffisamment rapide au bord, de classe C^1.

MOTS CLÉS :

- *pseudo-convexité,*
- *mesures gaussiennes,*
- *forme différentielle,*
- *dimension complexe infinie.*