

50376  
1985  
71

50376  
1985  
71

N° d'ordre : 656

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

**Docteur es Sciences Physiques**

par

**Abdellah EL MOUDNI**

**Maître es-Sciences**

**Docteur en Automatique**

## **CONTRIBUTION A LA MODELISATION ET A L'ANALYSE DES SYSTEMES DISCRETS A ECHELLES DE TEMPS MULTIPLES APPLICATION A LA COMMANDE OPTIMALE**



Soutenue le 4 juillet 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	M.Me. J.C. GENTINA	Président
	M. BENREJEB	Rapporteur
	P. BORNE	Rapporteur
	G. DAUPHIN-TANGUY	Rapporteur
	Lj. T. GRUJIĆ	Rapporteur
	G. GILLES	Examineur
	M. SINGH	Examineur
	P. VIDAL	Examineur

- A la mémoire de mon père

- A ma mère

AVANT-PROPOS

Nous tenons en premier lieu à rendre un dernier hommage posthume au Professeur François LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique qui, dès le début de nos recherches, nous a accueilli dans son équipe et a su nous faire partager son goût profond pour l'enseignement et sa passion pour la recherche. Qu'il reçoive ici un dernier témoignage de notre amitié.

En nous accordant un détachement et une dispense de nos enseignements, Monsieur le Professeur DAOLDI, Doyen de la Faculté des Sciences I de Casablanca, nous a permis de faire ce travail de recherche. Qu'il trouve ici l'expression de notre sincère gratitude.

Nous sommes particulièrement reconnaissant envers Monsieur le Professeur BORNE, Directeur du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'I. D. N., pour l'enseignement qu'il nous a tout d'abord dispensé et pour l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe. Mais notre reconnaissance envers lui ne saurait s'arrêter là : par ses qualités humaines, ses dons pédagogiques et son grand dynamisme, nous a formé, aidé et dirigé dans nos recherches avec une grande efficacité et ce dans un climat très amical. Il reste pour moi un exemple. Nous tenons à lui exprimer notre profonde amitié et notre profond dévouement.

Madame DAUPHIN-TANGUY, Maître-Assistante à l'I. D. N. nous a apporté une aide précieuse tout au long de ce travail, tant par les encouragements et les conseils qu'elle nous a prodigués que par l'amitié qu'elle nous a toujours manifestée. Qu'elle en soit remerciée et qu'elle sache tout l'attachement que nous lui portons.

Nous tenons à remercier très vivement Monsieur le Professeur GENTINA, Directeur de l'I. D. N. pour le grand honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici le témoignage de notre respectueuse gratitude.

Monsieur le Professeur BENREJEB de l'Ecole d'Ingénieurs de Tunis (E. N. I. T.) a été d'un grand soutien pour nous. Ses conseils éclairés nous ont été précieux dans bien des domaines et nous lui exprimons notre profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il nous a toujours manifesté. Nous lui transmettons nos très sincères remerciements.

Nous prions Monsieur le Professeur GRUJIĆ de la Faculté de Mécanique de Belgrade, d'accepter nos plus vifs remerciements pour la marque d'intérêt qu'il a montrée pour notre travail et pour le soutien que nous apportent sa présence et sa renommée internationale. Sa participation dans notre Jury nous honore grandement.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur GILLES de la Faculté Paul Sabatier de Lyon pour l'attachement qu'il a bien voulu porter à nos travaux en acceptant de participer à notre Jury de Thèse.

Nous sommes très reconnaissant envers Monsieur le Professeur SINGH de l'Université de Manchester pour avoir bien voulu juger nos travaux. Nous tenons à lui témoigner notre profonde gratitude et à le remercier pour l'honneur qu'il nous a fait en participant à notre Jury.

Nous sommes très honoré que Monsieur le Professeur VIDAL de l'Université de Lille I et Directeur du Laboratoire d'Automatique, ait accepté de participer à notre Jury de Thèse et nous tenons à ce qu'il reçoive ici le témoignage de notre reconnaissance.

Nous voudrions également remercier notre collègue et ami Monsieur RICHARD, Maître-Assistant à l'I. D. N., qui a su être à tout moment un interlocuteur très intéressé. Nous lui exprimons toute notre sympathie et notre amitié.

Que Madame TRICOT, Mademoiselle DENYS et Madame FERRAR, qui ont accepté avec gentillesse de s'occuper de la réalisation matérielle de ce mémoire, soient assurées de toute notre reconnaissance.

SOMMAIRE

pages

INTRODUCTION

CHAPITRE I ..... 1

CHAPITRE II ..... 79

CHAPITRE III ..... 129

CHAPITRE IV ..... 193

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I - Réduction de dimensionnalité  
Méthode de simplification de modèles

	page
<u>INTRODUCTION</u> .....	3
<u>I - DEFINITIONS ET DESCRIPTIONS DES SYSTEMES DISCRETS</u> .....	4
I.1 - Généralités .....	4
I.2 - Représentation des différents modèles .....	6
I.2.1 - Equation d'état .....	7
a) <i>Cas linéaire stationnaire</i> .....	7
b) <i>Cas non linéaire</i> .....	10
I.2.2 - Equation de récurrence .....	12
a) <i>Cas linéaire</i> .....	13
b) <i>Cas non linéaire</i> .....	14
I.3 - Stabilité d'un système dynamique .....	15
<u>II - METHODE DE SIMPLIFICATION DE MODELES :</u>	
<u>UTILISATION DE DESCRIPTION VECTORIELLE RECURRENTE</u> .....	17
II.1 - Représentation minimale des variables mesurables d'un système échantillonné .....	18
II.1.1 - Description des systèmes étudiés .....	18
II.1.2 - Méthode de mise en équation .....	19
a) <i>Formulation récurrente</i> .....	19
b) <i>Formulation récurrente minimale</i> .....	21
II.2 - Introduction d'un outil mathématique pour la description des systèmes échantillonnés .....	26
II.2.1 - Hypothèse .....	26
a) <i>Déterminant matriciel</i> .....	27
b) <i>Polynôme caractéristique généralisé</i> .....	28
II.2.2 - Formulation récurrente d'ordre minimal sur des systèmes partitionnés en blocs de matrices carrées .	30
a) <i>1ère Méthode de mise en équation récurrente</i> .....	30
b) <i>2ème Méthode de mise en équation récurrente</i> .....	38

III - <u>METHODE DE SIMPLIFICATION DE MODELES,</u> <u>UTILISATION DES PERTURBATIONS SINGULIERES</u> .....	44
III.1 - Perturbations singulières sur les représentations d'état .....	44
III.1.1 - Quelques résultats fondamentaux concernant les systèmes à plusieurs échelles de temps .....	46
III.1.2 - Cas général : Systèmes non linéaires ; Approximation d'ordre zéro .....	48
III.1.3 - Présentation dans le cas linéaire de la méthode des perturbations singulières .....	51
a) <i>Approximation à l'ordre zéro</i> .....	53
a1) <i>Etude de la partie lente</i>	
a2) <i>Etude de la partie rapide (couche limite)</i>	
a3) <i>Exemple d'application</i>	
b) <i>Une méthode de développement en série des solutions</i> .....	59
III.2 - Perturbations singulières sur les représentations récurrentes d'ordre élevé .....	65
III.2.1 - Position du problème .....	65
III.2.2 - Découplage des deux dynamiques .....	67
a) <i>Partie lente</i> .....	67
b) <i>Partie rapide</i> .....	68
<u>CONCLUSION</u> .....	71
<u>ANNEXE 1</u> - Propriétés de déterminant matriciel .....	73

CHAPITRE II - Etude des systèmes à deux dynamiques

page

<u>INTRODUCTION</u> .....	81
<u>I - PRESENTATION DES METHODES ANALYTIQUES DE MISE EN EVIDENCE</u>	
<u>DES DYNAMIQUES</u> .....	82
I.1 - Introduction .....	82
I.2 - Définition d'un système à double échelle de temps .....	82
I.3 - Présentation d'une méthode de mise en évidence de dynamiques .....	83
I.3.1. - Mise sous forme diagonale .....	83
I.3.2. - Détermination des solutions R(M) et R(L) .....	86
a) utilisation des suites $L_k$ et $M_k$ .....	86
b) utilisation des vecteurs propres .....	89
c) utilisation des polynômes annulateurs .....	90
I.3.3. - Application aux systèmes singulièrement perturbés ..	92
I.3.4. - Cas où la séparation des dynamiques n'est pas marquée .....	94
a) lorsqu'on connaît les valeurs et/ou vecteurs propres .....	94
b) lorsque les valeurs propres sont inconnues .....	96
I.3.5. - Méthode géométrique de mise en évidence des dynamiques en discret .....	97
<u>II - APPLICATION DE LA MODELISATION ET DECOUPLAGE DES SYSTEMES</u>	
<u>NON LINEAIRES DU TYPE LUR'E POSNIKOV</u> .....	99
II.1 - Mode de représentation utilisée .....	100
II.1.1. - $\alpha_i$ sont ordonnés par module décroissant .....	101
a) découplage partie lente/partie rapide .....	102
b) mise en oeuvre de la méthode .....	107

	page
II.1.2. - $\alpha_i$ ordonnés par module croissant .....	108
a) <i>partie lente</i> .....	110
b) <i>partie rapide</i> .....	111
III - <u>MISE EN EVIDENCE DES PROPRIETES PARTICULIERES DES MATRICES</u>	
<u>EN FLECHE :</u>	
<u>APPLICATION AUX SYSTEMES A DEUX DYNAMIQUES</u> .....	112
III.1 - Analyse des processus : Condition de stabilité d'un système non linéaire de type Lur'e Posnikov .....	112
III.2 - Détermination de la commande quasi-optimale de systèmes discrets singulièrement perturbés .....	117
III.2.1 Commande quasi-optimale .....	117
III.2.2 Application à la forme en flèche .....	121
IV - <u>ETUDE COMPARATIVE DES SYSTEMES DISCRET ET CONTINU SINGULIERE-</u> <u>MENT PERTURBES</u> .....	124
IV.1 - Modélisation .....	124
IV.2 - Découplage partie lente/partie rapide .....	126
IV.2.1 Partie lente .....	126
IV.2.1 Partie rapide .....	126
<u>CONCLUSION</u> .....	127

CHAPITRE III : Mise en oeuvre de la Transformation homographique  
pour l'étude de la partie lente discrète.

	Page
<u>INTRODUCTION</u> .....	131
<u>I - ETUDE DE LA PARTIE RAPIDE EN CONTINU ET LA PARTIE LENTE EN DISCRET..</u>	131
I.1 - Le système réciproque en continu.....	131
I.2 - Le système réciproque en discret.....	133
<u>II - ETUDE DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE</u> .....	133
II.1 - Introduction.....	133
II.2 - Définitions.....	134
II.2.1. Modélisation dans l'espace d'état.....	134
II.2.2. Modélisation sous forme symbolique par fonction de transfert.....	137
II.3 - Propriétés de la transformation homographique.....	141
II.3.1 - Analyse du système équivalent.....	141
II.3.2 - Etude des conditions initiales.....	143
a) 1ère approche.....	143
b) 2ème approche.....	146
II.4 - Application de la transformation homographique à la discrétisation d'une équation d'état continu.....	148
 <u>III - UTILISATION DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE POUR L'ETUDE DE LA PARTIE LENTE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES SINGULIEREMENT PERTURBES.</u>	 149
III.1 - Définition des systèmes étudiés.....	149
III.2 - Comportement dynamique par la transformation homographique entre le système discret et continu.....	151
III.3 - Application de la transformation homographique à l'étude de la partie lente.....	156
III.3.1 - Formes matricielles.....	159
III.3.2 - Forme des conditions initiales.....	162
III.3.3 - Interprétation des résultats.....	163
III.3.4 - Mise en oeuvre de la méthode.....	166

	Page
IV - <u>REMARQUES : APPLICATION DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE A</u>	
<u>D'AUTRES TYPES DE SYSTEMES.....</u>	168
IV.1 - Les valeurs propres du système sont groupées dans $D_{d\ell 1}$ et $D_{dr}$ ...	169
IV.2 - Les valeurs propres du système sont groupées dans $D_{d\ell 2}$ et $D_{dr}$ ...	169
IV.3 - Les valeurs propres du système sont groupées dans $D_{d\ell 1}$ $D_{d\ell 2}$ et $D_{dr}$ .....	173
V - <u>APPLICATION A UN SYSTEME NON LINEAIRE DE TYPE LUR'E POSNIKOV.....</u>	174
V.1 - Position du problème.....	174
V.2 - Mise en oeuvre de la méthode.....	176
<u>CONCLUSION</u> .....	176
Annexe III-1 .....	179
Annexe III-2 .....	187

CHAPITRE IV - Commande optimale des systèmes discrets singulièrement perturbés - Application aux systèmes à échelles de temps multiples

	page
<u>INTRODUCTION</u> .....	195
<u>I - COMMANDE QUASI OPTIMALE DES SYSTEMES A DOUBLE ECHELLE DE TEMPS</u> .....	196
I.1 - Décomposition de l'équation de Riccati .....	196
I.2 - Commande quasi optimale par décomposition temporelle ..	199
I.2.1. - Position du problème .....	200
I.2.2. - Décomposition du système .....	200
I.2.3. - Commande des sous-systèmes .....	202
I.2.4. - Commande composite .....	206
I.3 - Utilisation de la transformation homographique pour la détermination de la commande optimale de la partie lente .....	208
I.3.1. - Commande de la partie rapide obtenue par (PS+H)...	210
I.3.2. - Commande de la partie lente obtenue par (PS+H)....	210
I.4 - Mise en oeuvre des quatre méthodes sur un exemple .....	212
I.4.1. - Trajectoires optimales lentes .....	213
I.4.2. - Interprétation .....	217
<u>II - SYSTEMES A PLUSIEURS ECHELLES DE TEMPS</u> .....	218
II.1 - Représentation des systèmes .....	219
II.1.1. - Systèmes à plusieurs échelles de temps .....	219
II.1.2. - Systèmes multi-échelles de temps singulièrement perturbés .....	220
a) Cas où les dynamiques sont proches .....	221
b) Cas où les dynamiques sont bien séparées ...	222

page

II.2 - Présentation d'une modélisation pour les systèmes multi-échelles de temps .....	223
III - <u>OPTIMISATION QUADRATIQUE DES SYSTEMES MULTIVITESSES</u> .....	226
<u>CONCLUSION</u> .....	228

I N T R O D U C T I O N      G É N É R A L E

## I N T R O D U C T I O N

=====

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'étude des systèmes discrets dans deux domaines très importants : la modélisation et la réduction de dimensionnalité par des méthodes d'élimination d'une part, et par découplage des dynamiques lorsque les systèmes discrets sont multi-échelles de temps d'autre part.

Les systèmes concernés sont très nombreux et variés. Nous pouvons citer à titre d'exemple pour la première classe, les systèmes discrets non linéaires de type Lur'e Posnikov ; quant à la deuxième classe, nous pouvons citer les systèmes physiques tels que les systèmes pour lesquels nous pouvons distinguer la partie mécanique lente et la partie électronique rapide.

Dans tous les cas, se pose le problème de choix d'un modèle, convenant au but poursuivi (analyse, synthèse, commande optimale). Lorsque le type de représentation retenu conduit à un modèle de grande dimension, ou lorsque les valeurs numériques mises en jeu interviennent avec des ordres de grandeur très différents, il s'avère souvent nécessaire de réduire l'ordre du système, pour simplifier et réduire les calculs, ou pour supprimer des imprécisions et des divergences d'algorithmes.

Les méthodes de réduction par agrégation ou troncature fournissent une solution au premier problème. Celles-ci permettent d'éliminer une partie des composantes d'état du système, en conservant une relation qui régit le comportement des composantes restantes. Ces méthodes valables pour les systèmes linéaires s'adaptent parfaitement aux systèmes de type Lur'e Posnikov. Pour les modèles de ce type, il est souvent intéressant d'éliminer les variables intervenant linéairement. Pratiquement, cet aspect du problème revient dans de nombreux cas, à ne conserver que les grandeurs de sortie et celles intervenant non linéairement.

La méthode des perturbations singulières fournit une solution à la deuxième classe du problème. Lorsque les variables de vitesses d'évolution différentes sont identifiées et regroupées, la technique des P.S. permet le découplage des dynamiques et la détermination d'un système réduit correspondant au domaine dynamique concerné, avec cependant des problèmes d'imprécision pour l'étude des composantes lentes.

Les résultats nouveaux présentés dans ce mémoire peuvent être regroupés en plusieurs grands thèmes :

- *Présentation et généralisation des méthodes d'élimination basées sur la notion de polynôme annulateur, et de la dépendance des matrices aux systèmes partitionnés.*
- *Présentation d'un nouvel outil mathématique permettant de traiter directement sur des systèmes partitionnés en blocs avec l'utilisation de la notion de redondance dans le partitionnement des matrices.*

- *Présentation d'une modélisation des systèmes discrets multi-échelles de temps duale de celle des systèmes continus.*
- *Présentation d'une nouvelle méthode de séparation et découplage des systèmes discrets singulièrement perturbés, multi-échelles de temps.*
- *Mise en oeuvre sur une forme matricielle particulière (forme en flèche) de la méthode P.S. dans le cas de systèmes non linéaires de type Lur'e Posnikov.*
- *Définition de conditions particulières de stabilité des systèmes multivitesse.*
- *Utilisation de la transformation homographique (H) dans le développement d'une méthode de (PS + H).*
- *Présentation d'une méthode graphique de comparaison de degré de séparation des dynamiques entre les systèmes discrets et les systèmes continus "équivalents" obtenus par la transformation homographique.*
- *Définition d'un nouveau formalisme dans le partitionnement de la matrice solution de l'équation de Riccati pour l'étude de la commande optimale.*

Des exemples de simulation permettent une mise en oeuvre pratique de ces travaux. Ils montrent l'intérêt de ces résultats, en particulier lors de la simulation du comportement lent d'un système pour le découplage, et pour

les calculs de commande optimale et la détermination de trajectoires optimales.

Dans une première partie, un exposé récapitulatif des différents modes de représentations des systèmes discrets (état, séquence), ainsi que diverses formes matricielles d'état (Compagnon, Frobenius, flèche), permet d'introduire les notations utilisées. Divers algorithmes sont développés permettant la mise en équation d'un processus discret dans l'espace d'état sous forme d'une relation de récurrence vectorielle mettant en oeuvre un minimum de variables : l'utilisation des polynômes annulateurs de matrices, et la notion de dépendance de matrice, permettent en particulier la définition de méthodes systématiques de représentation. L'introduction d'un nouvel outil mathématique permet de généraliser tous ces résultats à des systèmes partitionnés sous forme de blocs de matrices.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous proposons d'appliquer la méthode des perturbations singulières en vue du découplage et ceci relativement aux représentations d'état et séquence. Cette méthode s'adapte parfaitement aux systèmes comportant des échelles de temps multiples dues aux phénomènes lents et aux phénomènes rapides. Cette théorie permet une représentation plus fidèle du comportement du système qu'une simplification de modèle qui conduirait à une représentation d'ordre réduit. Par ailleurs, la mise en oeuvre de la commande du système obtenu par cette méthode est moins lourde que celle de la commande optimale à partir du système global.

Le Chapitre II généralise au cas discret une méthode géométrique de séparation des dynamiques basée sur le tracé

des cercles de Gershgorine. Cette méthode s'applique aux cas non linéaires contrairement aux méthodes analytiques classiques. Lorsque la méthode des perturbations singulières peut s'appliquer à un modèle singulièrement perturbé, la qualité du système découplé obtenu dépend fortement de la représentation d'état initiale choisie. L'utilisation de la forme en flèche s'avère très intéressante et conduit à une détermination systématique du système découplé. Cette méthode valable en linéaire s'étend parfaitement aux systèmes non linéaires de type Lur'e Posnikov. Cette forme en flèche permet d'une part d'énoncer une condition suffisante simple de stabilité asymptotique, d'autre part de simplifier les expressions de la commande optimale.

Le Chapitre III utilise la notion de transformation homographique qui transforme le système discret étudié en un système continu équivalent avec conservation du comportement dynamique dans le cas général, et ce pour les différents types de représentation précédemment décrits. Appliquée conjointement à la technique des P.S., cette méthode permet d'obtenir une partie découplée lente qui tient compte de l'évolution de la partie rapide, contrairement à la méthode des P.S. seule.

Dans la première partie du Chapitre IV, nous étudions la commande optimale des systèmes à double échelle de temps. La décomposition du système est effectuée en mettant en évidence les parties rapides et les parties lentes. Une fois décomposé, le système global est étudié par l'intermédiaire des sous-systèmes issus de la décomposition. Cette structure qui concerne les propriétés naturelles du système nous permet une détermination simplifiée de la commande. Dans

la deuxième partie, le cas multivariable multivitesse est étudié. Une nouvelle représentation des systèmes à plusieurs dynamiques est proposée. Elle généralise les représentations classiques et permet une plus grande souplesse pour la détermination des sous-systèmes découplés. Les résultats précédemment décrits dans le cas monovarié sont développés pour les systèmes multivariables.

CHAPITRE I

REDUCTION DE DIMENSIONNALITE  
METHODE DE SIMPLIFICATION DE MODELES

---

INTRODUCTION

La description des systèmes complexes ou de grande dimension comprend trois grands types de problèmes : la modélisation, la simulation et l'identification. Parmi ces trois thèmes, la modélisation est un domaine de recherche important ayant conduit à de nombreux travaux.

Après la détermination préliminaire d'un modèle physique, souvent schématique et simplificateur, la mise en équation par application des lois physiques mène à différents modèles mathématiques caractérisant le même système. Les représentations les plus courantes pour les systèmes échantillonnés sont des modèles exprimés sous la forme d'équations de récurrence de type matriciel ou scalaire.

Ces modèles mathématiques sont choisis en fonction du but poursuivi. Ils peuvent être dans certains cas simplifiés ou réduits en vertu du compromis Précision / Rapidité d'exploitation. Après avoir présenté les systèmes échantillonnés étudiés et différents résultats relatifs à leur formulation, nous présentons dans ce chapitre quelques méthodes de simplification de modèle avec leurs domaines d'application et leurs avantages.

Parmi ces différentes approches :

- Une méthode d'élimination permettant d'obtenir des relations récurrentes, qui fait intervenir seulement une partie du vecteur état et dont l'ordre est majoré par celui du système initial.

- La généralisation de la méthode est étudiée ensuite pour les systèmes multivariables. Elle s'applique aux systèmes partitionnés en blocs de matrices et repose sur la notion de déterminant matriciel.

- La méthode des perturbations singulières des systèmes échan-

tillonnés constitue un outil de réduction pour les systèmes multi-échelles de temps. Elle est juste définie dans le premier chapitre et plus détaillée dans les chapitres suivants.

## I - DEFINITIONS ET DESCRIPTIONS DES SYSTEMES DISCRETS

### I.1 - Généralités

Les systèmes dynamiques les plus souvent rencontrés se distinguent par la nature des signaux qui interviennent dans leur description.

Les systèmes continus sont ceux dans lesquels les signaux sont définis par rapport à une variable temps continue.

Les systèmes discrets sont ceux dans lesquels les signaux sont définis à des intervalles de temps discrets, périodiques ou non.

Lorsque le signal discret est obtenu par prise de valeurs à des instants discrets d'un signal initialement continu, le système est dit échantillonné.

Les systèmes que nous allons étudier sont du type **discret échantillonné** et sont caractérisés principalement par deux ensembles de grandeurs accessibles susceptibles d'évoluer en fonction du temps.

Les variables d'**entrée** (et de commande) caractérisent l'influence de l'extérieur sur le système.

Les variables de **sortie** caractérisent l'influence du système sur son environnement. Ces variables sont supposées accessibles à la mesure.

A ces deux ensembles, il convient d'adjoindre la notion d'**état** qui correspond à un ensemble suffisant de variables dont la connaissance à l'instant initial permet à partir des équations régissant l'évolution du processus de préciser le comportement du système pour une loi d'évolution donnée.

Soient :

$$x_n^i \quad (i = 1, \dots, q)$$

les valeurs à l'instant  $n$  du vecteur état noté  $x_n$ . ( $x_0$  représente l'état initial du système à l'instant  $n_0$ ).

Dans le cas général des systèmes déterministes, il existe une relation de dépendance entre les valeurs du vecteur état aux instants  $n_0$  et  $n$  et l'évolution des entrées dans l'intervalle  $(n_0, n)$ . Cette propriété s'exprime sous la forme :

$$(I.1) \quad x_n = x(x_0, e(n_0, n), n_0, n)$$

où  $e(n_0, n)$  est le vecteur définissant l'évolution des entrées sur l'intervalle  $(n_0, n)$ .

Le vecteur  $x_n$  contient le minimum d'informations nécessaires, dont l'ordre définit la dimension du système.

Dans certains cas, il s'avère particulièrement intéressant de décrire l'évolution du système à partir des seules valeurs de certaines grandeurs caractéristiques. On est ainsi amené à définir la notion de vecteur **séquence**, dans ce cas les informations caractérisant le système sont formées des valeurs successives d'une même variable.

Un ensemble de valeurs d'une même variable d'état considérée en ces instants successifs est appelé vecteur séquence, si la connaissance de ces composantes suffit à caractériser l'évolution du système en réponse à une loi d'entrée connue.

Le nombre minimal de composantes d'un vecteur séquence est dans tous les cas égal à l'ordre du système.

Aux instants  $n_i$ , nous observons la valeur  $x_i$ , lorsque  $q$  valeurs consécutives sont suffisantes à la description du système. Celui-ci est régi par une équation scalaire de la forme :

$$(I.2) \quad x_{n+q} = f(x_{n+q-1}, x_{n+q-2}, \dots, x_n, e_{n+q-1}, \dots, e_n, n+q-1, \dots, n)$$

Nous étudierons par la suite, le problème d'équivalence entre les deux représentations citées (état et séquence) (I.1) et (I.2).

### I.2 - Représentation des différents modèles

La description des lois physiques régissant l'évolution d'un processus à partir des variables échantillonnées conduit en général à une équation récurrente de la forme :

$$(I.3) \quad f(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+q}, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m}, n, n+1, \dots, n+q) = 0$$

où  $y_n \in \mathbb{R}^p$  et  $u_n \in \mathbb{R}^r$  représentent respectivement le vecteur des sorties et le vecteur des entrées.

Si l'équation (I.3) peut s'écrire sous la forme :

$$(I.4) \quad \sum_{i=0}^q M_i(.) y_{n+i} = \sum_{i=0}^m N_i(.) u_{n+i}$$

où :

$$\begin{cases} M_k(.) = \{m_{ij}(.)\}_k \in \mathbb{R}^{p \times p} \\ N_k(.) = \{n_{jk}(.)\}_k \in \mathbb{R}^{r \times r} \end{cases}$$

sont des matrices dont les coefficients dépendent du temps et/ou des entrées  $u_n^i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) et/ou des sorties  $y_n^i$  ( $i = n, \dots, p$ ) et/ou des paramètres extérieurs,

il est possible de déduire de (I.4) une matrice  $F(\xi, .)$  obtenue par :

$$(I.5) \quad y(\xi) = F(\xi, .) u(\xi)$$

avec :

$$F(\xi, \cdot) = \left\{ \begin{array}{l} F_{ij}(\xi) , \\ i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, r \end{array} \right\}$$

si l'opérateur  $L(\xi) = \xi^i M_i(\cdot)$  défini par la transformation  $y_{n+i} = \xi^i y(\xi)$  est inversible. Ceci correspond dans le cas linéaire à la transformation en  $z$ , conduisant à la matrice de transfert  $F(z)$ .

### I.2.1 - Equation d'état

Pour une classe importante de systèmes (systèmes linéaires, stationnaires, systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov, ...), l'évolution du processus peut être décrite entre deux instants d'échantillonnage sous la forme :

$$(I.6) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A(\cdot) x_n + B(\cdot) u_n \\ y_n = C(\cdot) x_n + D(\cdot) u_n \end{cases}$$

où  $x_n \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur état du système.

$A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  et  $D(\cdot)$  sont des matrices non constantes de dimension respectives  $q \times q$ ,  $q \times r$ ,  $p \times q$ ,  $p \times r$ , appelées matrices d'évolution, de commande, d'observation et de transmission directe d'information.

Nous présentons ici dans le cas monovarié, quelques formes cano- niques matricielles.

#### a) Cas linéaire stationnaire :

L'équation (I.4) pour les systèmes linéaires monovariés s'écrit sous la forme :

$$(I.7) \quad \sum_{i=0}^q a_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^n b_i u_{n+i}$$

ce qui conduit à la fonction de transfert associée d'ordre  $q$  :

$$(I.8) \quad W(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^q a_i z^i} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Nous supposons que :

$$a_q = 1 \quad \text{et} \quad m \leq q-1 \quad (D = 0)$$

L'équation d'état associée, caractérisée par les matrices A, B, et C, peut se présenter, lorsque la matrice A est une matrice de type compagnon, sous la forme suivante :

$$(I.9) \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{q-1} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = [b_0 \dots \dots b_{q-1}]$$

Une deuxième représentation associée au système, correspond à une matrice A sous forme Frobenius, les matrices  $A_f$ ,  $B_f$  et  $C_f$  correspondantes s'écrivent :

$$(I.10) \quad A_f = A_c^T \quad B_f = C_c^T \quad C_f = B_c^T$$

Lorsque le système est modélisé directement sous une forme matricielle quelconque, il existe toujours, sous la seule condition de commandabilité de la paire (A, B), une matrice de transformation S ( $x = S \tilde{x}$ )

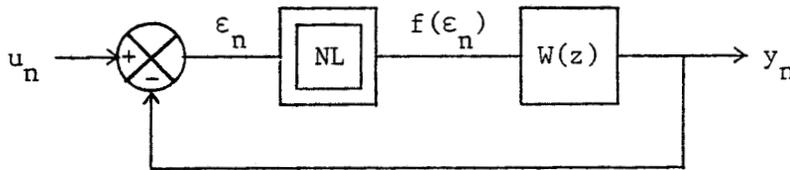


Pour une matrice  $A_F = A_C^T$ , la mise en forme en flèche s'obtient par :

$$(I.12) \quad \begin{cases} \bar{A}_F = \bar{A}_C^T = P_1^T A_F P_1^{-1T} \\ B_F = \bar{C}_C^T \\ \bar{C}_F = B_C^T \end{cases}$$

b) Cas non linéaire :

Nous nous intéressons maintenant aux systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov représenté par le schéma-bloc suivant :



comportant dans la chaîne d'action :

\* une partie linéaire représentée par la fonction de transfert  $W(z)$  :

$$(I.13) \quad W(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^q a_i z^i} \quad \begin{matrix} m \leq q-1 \\ a_q = 1 \end{matrix}$$

\* une non linéarité séparable  $f(\epsilon_n)$  qui est une fonction de classe  $\phi$  / Borne P. , 1976 / :

$$(I.14) \quad \phi = \left\{ \begin{array}{l} f/f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\epsilon_n) = f^*(\epsilon_n) \cdot \epsilon_n \\ f^*(\epsilon_n) \in [\underline{L}, \bar{L}] \subset \mathbb{R}, \underline{L} \leq \bar{L} \end{array} \right\}$$

La représentation d'état correspondante est alors, si  $(A, B, C)$  sont les matrices associées à la partie linéaire :

$$(I.15) \begin{cases} x_{n+1} = A x_n + B f(\epsilon_n) \\ y_n = C x_n \\ \epsilon_n = u_n - C x_n \end{cases}$$

ce qui nous donne en boucle fermée :

$$(I.16) \begin{cases} x_{n+1} = \left[ A - B C f^*(\epsilon_n) \right] x_n + B f^*(\epsilon_n) \cdot u_n \\ y_n = C x_n \end{cases}$$

En notant  $A^* = A - B C f^*(\epsilon_n)$ , nous obtenons la représentation sous forme compagnon en boucle fermée suivante :

$$(I.17) \quad A_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - f^*(\epsilon_n) b_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{q-1} - f^*(.) b_{q-1} \end{bmatrix}$$



$$B_c^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f^*(\epsilon_n) \end{bmatrix} ; \quad C_c^* = C_c$$

qui donne le triplet correspondant  $(\bar{A}_c^*, \bar{B}_c^*, \bar{C}_c^*)$  de forme en flèche d'expression semblable à (I.11) avec un nouveau polynôme caractéristique instantané de la matrice  $A_c^*$  non constant :

$$P(\xi, f^*(.)) = D(\xi) + f^*(.) N(\xi)$$

La notion de fonction de transfert utilisée en linéaire s'étend au système non linéaire et sera appelée fonction de transfert symbolique /Dauphin-Tanguy, 1983/.

Elle s'écrit, pour le système en boucle fermée, sous la forme  $W_{BF}(\xi, f^*(.))$  déduite de la fonction de transfert en boucle ouverte de même système  $W_{BO}(\xi) = W(\xi) = N(\xi) / D(\xi)$ .

$$(I.18) \quad \begin{cases} W_{BF}(\xi, f^*(.)) = \frac{f^*(.)N(\xi)}{D(\xi) + f^*(.)N(\xi)} \\ f^*(.) \in [\underline{L}, \bar{L}] \end{cases}$$

### I.2.2 - Equation de récurrence

Lorsque le système est caractérisé par une séquence définie à partir des valeurs successives de la variable  $y_n$ , les équations d'évolution sont du type (I.19) :

$$(I.19) \quad y_{n+q} = \Psi(y_{n+q-1}, \dots, y_n, u_{n+q-1}, \dots, u_n, n+q-1, \dots, n)$$

Si le processus est linéaire à coefficients constants, il vient l'équation de récurrence scalaire d'ordre  $q$  relative à  $y_n$  et  $u_n$  :

$$(I.20) \quad \sum_{i=0}^q f_i y_{n+i} = \sum_{j=0}^{q-1} g_j u_{n+j}$$

( $f_i$  et  $g_j$  sont des constantes caractérisant l'évolution du processus).

Il est commode de généraliser la représentation (I.20) aux systèmes non linéaires. Dans ce cas, les coefficients  $f_i$  sont des fonctions non linéaires.

Dans le cas particulièrement intéressant où seule la variable d'état  $y$  intervient de façon non linéaire, le processus étant sans mémoire, ils prennent la forme :

$$f_i = f(y_{n+i})$$

Si l'entrée est nulle, l'évolution du système est représentée par :

$$(I.21) \quad \sum_{i=0}^q f_i (y_{n+i}) y_{n+i} = 0$$

Différentes formes matricielles peuvent alors être déduites de la forme récurrente.

a) Cas linéaire :

Considérons le système linéaire décrit en régime libre par l'équation de récurrence :

$$(I.22) \quad y_{n+q} + \sum_{i=1}^q f_i y_{n+q-i} = 0$$

( $f_i$  sont des scalaires constants).

En prenant un vecteur défini par  $Y_n$  :

$$Y_n^T = (y_n, \dots, y_{n+q-1})$$

il vient la représentation matricielle de la forme :

$$(I.23) \quad Y_{n+1} = M_c Y_n$$

avec :

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ -f_q & \dots & \dots & \dots & -f_1 \end{bmatrix}$$

$M_c$  est une matrice de type compagnon

Une deuxième forme matricielle peut être obtenue par l'introduction des variables annexes /Laurent, Romelot, 1975/ /Borne, Gentina, Laurent, 1976/ définis par les équations suivantes :



avec :

$$f_i(y_{n+q-i}) = f_i^*(y_{n+q-i}) y_{n+q-i}$$

$$f_i^*(.) \in [\underline{f}_i, \bar{f}_i] \subset \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, q$$

Dans la matrice  $M_c(Y_n)$ , les coefficients  $f_i^*(.)$  dépendent des  $y_{n+q-i}$  aux différents instants d'échantillonnage. Par contre, ceux de la matrice  $M_F(.)$  dépendent de la seule variable  $y_n$  prise à l'instant  $n$ . Cette dernière matrice est plus facile à utiliser que la première. Elle donne lieu lors d'une étude de stabilité, à des conditions généralement moins contraignantes sur le système initial.

### I.3 - Stabilité d'un système dynamique

Les définitions de la stabilité sont nombreuses. Nous rappelons ici, celles qui seront utilisées par la suite.

Nous appellerons trajectoire, la solution  $x(n, n_0, x_0)$  représentée dans un repère d'état et  $\|x(n, n_0, x_0)\|$  une norme de vecteur  $x_n$ . L'évolution de cette norme permettra de caractériser les propriétés de stabilité du système.

#### Définition 1 :

L'équilibre du système représenté par l'équation (I.29) :

$$(I.29) \quad x_{n+1} = A(x_n, n) x_n$$

est dit stable au sens de Lyapunov /Lyapunov, 1949/, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n_0 \quad \exists \delta(\varepsilon, n_0) > 0 \text{ tel que :}$$

$$(I.30) \quad \forall x_0, \|x_0\| < \delta \quad \text{il vient} \quad \|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

$\delta$  est en général fonction de  $\varepsilon$  et  $n_0$ . Lorsqu'il est fonction de  $\varepsilon$  seul, on a la stabilité uniforme.

Définition 2 :

L'équilibre du système sera dit attractif, s'il existe un nombre  $\eta$  tel que :

$$(I.31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, n_0, x_0) = 0 \quad \forall x_0 (\|x_0\| < \eta) \quad \text{et} \quad \forall n_0$$

Définition 3 :

L'équilibre du système sera asymptotiquement stable s'il est à la fois stable et attractif.

Dans le cas où ni  $\delta$ , ni  $\eta$  ne dépendent de  $n_0$ , l'équilibre du système est asymptotiquement et uniformément stable.

Définition 4 :

Dans le cas d'un système asymptotiquement stable, on est parfois conduit à préciser la manière dont  $x(n_0, n, x_0)$  tend vers la position d'équilibre, ou du moins à définir le mouvement idéal enveloppant le mouvement réel. Cette idée conduit notamment à la notion de stabilité exponentielle.

La position d'équilibre d'un système supposé ramené à l'origine dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , est exponentiellement stable, s'il existe deux nombres réels  $\alpha \geq 1$  et  $\beta > 0$ , tels que l'on ait :

$$(I.32) \quad \|x(n, n_0, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| e^{-\beta(n-n_0)} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall n > n_0$$

Définition 5 :

L'ensemble  $D_a(n_0)$  est le domaine d'attraction à  $n_0 \in \mathbb{R}$  de l'origine  $x = 0$  si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n, n_0, x_0)\| = 0 \quad \forall x_0 \in D_a(n_0)$$

et si  $D_a(n_0)$  est un voisinage de  $x_n = 0$ .

L'ensemble  $D_a = \{(x_n, n) / x_n \in D_a(n), n \in \mathbb{R}\}$  est le domaine d'attraction de  $x = 0$  si et seulement si  $D_a(n_0)$  est le domaine d'attraction de  $x = 0$  à  $n_0$  pour tout  $n_0 \in \mathbb{R}$ .

Définition 6 : Domaine de stabilité /Grujić, 1975/

L'ensemble  $D_s(n_0)$  est le domaine de stabilité de  $x_n = 0$  pour tout  $n \geq n_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{R}$  si et seulement si :

a) pour tout  $n'_0 \geq n_0$  et tout  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ , la relation  $\|x(n, n'_0, x_0)\| < \varepsilon$  est satisfaite,  $\forall n \in [n'_0, +\infty[$  pour tout  $x_0 \in D_s(n'_0, \varepsilon)$  où  $D_s(n'_0, \varepsilon)$  est un voisinage de  $x = 0$

b)  $D_s(n) = \cup [D_s(n, \varepsilon) : \varepsilon \in ]0, +\infty[$

c)  $D_s(n_0) = \{(n, x_n) : \text{pour } n \geq n_0 \quad x_n \in D_s(n)\}$

Définition 7 :

Lorsque les domaines de stabilité et d'attraction sont constitués de tout l'espace de définition du vecteur état  $x_n$ , on dit qu'il s'agit de stabilité asymptotique globale.

## II - METHODE DE SIMPLIFICATION DE MODELES : Utilisation de description vectorielle récurrente

La recherche d'un modèle dynamique constitue le premier travail dans l'analyse, la simulation, la commande d'un système physique. Mais, lorsque l'ordre du modèle est élevé pour un processus complexe, son analyse devient très délicate et la simulation directe difficile et coûteuse.

Pour étudier de tels systèmes, il apparaît intéressant de décomposer le processus en sous systèmes fonctionnant ou non en interaction, ce qui conduit à chercher des modèles simplifiés.

La simplification peut s'opérer, soit d'un point de vue structurel, soit par diminution de l'ordre d'un modèle donné en conservant sa struc-

ture. Les simplifications de structure consistent à remplacer un modèle par un autre représenté par des équations plus faciles à résoudre.

Nous nous intéressons plus particulièrement ici aux simplifications par réduction d'ordre qui ont fait déjà l'objet de nombreux travaux /Sandell, Varaiya, 1978/ /Decoster, Van Cauwenberghe, 1970/.

Tout d'abord, nous présentons une méthode fondée sur la notion de polynôme annulateur, qui, à partir d'une représentation d'état d'ordre  $q$  conduit à une équation de récurrence d'ordre minimal inférieur à  $q$ . Cette méthode est généralisée aux systèmes interconnectés, multivariables après développement d'un outil mathématique relatif au calcul des matrices partitionnées en blocs.

Une autre approche de la réduction concerne les systèmes dont le modèle de base possède des termes d'ordres de grandeur très différents, soit dans l'équation d'état ou dans l'équation de récurrence. L'introduction d'un petit paramètre  $\mu$  normalise les termes et permet, par passage à la limite  $\mu = 0$ , de réduire l'ordre global. Cette méthode peut entraîner, comme dans le cas de la technique des perturbations singulières, un découplage des dynamiques du système.

## II.1 - Représentation minimale des variables mesurables d'un système échantillonné

Nous nous proposons de mettre en œuvre divers algorithmes permettant la mise en équation d'un processus sous forme d'équations de récurrence vectorielle régissant une partie des variables du système. Dans le cas des systèmes non linéaires de type Lur'e Postnikov, il est souvent intéressant d'éliminer les variables intervenant linéairement. Pratiquement, cet aspect du problème revient dans de nombreux cas, à ne conserver que les variables à commander.

### II.1.1 - Description des systèmes étudiés

Considérons la classe des systèmes multivariables non linéaires décrits par les équations de la forme :

$$(I.33) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A x_n + K^*(\varepsilon_n) \varepsilon_n & (a) \\ y_n = C x_n & (b) \\ \varepsilon_n = u_n - L x_n & (c) \end{cases}$$

avec :  $K^*(\varepsilon_n) = Bf^*(\varepsilon_n)$  d'après (I-15)

$x_n$  : vecteur état à l'instant  $n$ ,  $x_n \in \mathbb{R}^q$

$y_n$  : vecteur état de sortie,  $y_n \in \mathbb{R}^s$

$A$  : matrice constante représentant l'évolution de la partie linéaire du système,  $A \in \mathbb{R}^{q \times q}$

$u_n$  : entrée du système

$\varepsilon_n$  : vecteur caractérisant l'erreur du système,  $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^p$

$K^* : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{q \times p}$

$C \in \mathbb{R}^{s \times q}$

$L \in \mathbb{R}^{p \times q}$

Le but de l'étude est de déterminer une équation de récurrence vectorielle régissant  $\varepsilon_n$  et  $y_n$  et ceci aux différents instants, soit :

$$(I.34) \quad \begin{cases} M(\varepsilon_{n+m}, \dots, \varepsilon_n) = 0 \\ N(\varepsilon_{n+m}, \dots, \varepsilon_n) = F(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) \end{cases}$$

( $m$  peut être le degré du polynôme annulateur de la matrice  $A$  ou peut être lié à une notion de dépendance de matrices  $m < q$ ) que nous proposons d'étudier.

## II.1.2 - Méthode de mise en équation

### a) Formulation récurrente :

Il s'agit d'éliminer certaines composantes dans la description d'un système (I.33) et de déterminer des relations récurrentes régissant les composantes restantes ( $\varepsilon_n, y_n$ ).

Lorsque nous écrivons l'équation (I.33) à l'instant  $(n+i)T$  en régime autonome ( $u_n \equiv 0$ ), il vient :

$$(I.35) \quad \begin{cases} x_{n+i} = A^i x_n + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} K(.) \varepsilon_{n+j} & (a) \\ y_{n+i} = C x_{n+i} & (b) \\ \varepsilon_{n+i} = -L x_{n+i} & (c) \end{cases}$$

En multipliant à gauche les deux membres de la relation (I.35-a) par  $C$  d'une part, et par  $-L$  d'autre part, il nous vient les deux expressions suivantes :

$$(I.36) \quad \begin{cases} y_{n+i} = C A^i x_n + \sum_{j=0}^{i-1} C A^{i-1-j} K(.) \varepsilon_{n+j} & (a) \\ \varepsilon_{n+i} = (-L) A^i x_n + \sum_{j=0}^{i-1} (-L) A^{i-1-j} K(.) \varepsilon_{n+j} & (b) \end{cases}$$

Avoir une relation entre  $y_n$  et  $\varepsilon_n$  d'une part et une deuxième régissant la seule composante  $\varepsilon_n$ , revient à éliminer les termes  $C A^i x_n$  dans (I.36-a) et  $L A^i x_n$  dans (I.36-b). Pour cela, nous proposons deux méthodes d'élimination.

Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  des coefficients constants non tous nuls.

Lorsque nous faisons une sommation pondérée par ces coefficients à partir de la relation (I.36), nous obtenons :

$$(I.37) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^m \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^m \alpha_i C A^i x_n + \sum_{i=0}^m \alpha_i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} C A^{i-1-j} K(.) \varepsilon_{n+j} \right] \\ \sum_{i=0}^m \alpha_i \varepsilon_{n+i} = \sum_{i=0}^m \alpha_i (-L) A^i x_n + \sum_{i=0}^m \alpha_i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (-L) A^{i-1-j} K(.) \varepsilon_{n+j} \right] \end{cases}$$

L'annulation des termes :

$$(I.38) \quad \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i C A^i x_n}{\sum_{i=0}^m \alpha_i L A^i x_n}$$

(dans la suite, la notation "X/Y" signifiera X (respectivement Y))

peut s'effectuer de deux façons :

$$(I.39) \text{ a) } \sum_{i=0}^m \alpha_i A^i = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad \text{b) } \sum_{i=0}^m \alpha_i (C A^i) = 0 / \sum_{i=0}^m \alpha_i (L A^i) = 0$$

b) Formulation récurrente minimale :

b1) 1er cas : les  $\alpha_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) sont les coefficients d'un polynôme annulateur

Notons  $P_a(\lambda)$  un polynôme annulateur de la matrice A s'écrivant sous la forme :

$$(I.40) \quad P_a(\lambda) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \lambda^i$$

il vient alors :

$$(I.41) \quad P_a(A) = \sum_{i=0}^m \alpha_i A^i = 0$$

Cette propriété correspond à la solution (I.39-a) et la relation (I.37) devient après avoir ordonné par rapport à  $\epsilon_{n+j}$  :

$$(I.42) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^m \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=0}^{m-1} M^j(.) \epsilon_{n+j} \\ \sum_{i=0}^m \alpha_i \epsilon_{n+i} = \sum_{j=0}^{m-1} N^j(.) \epsilon_{n+j} \end{cases}$$

avec  $M^j$  et  $N^j$  des matrices s'écrivant sous la forme :

$$M^j(.) = \sum_{i=1+j}^m \alpha_i C A^{i-1-j} K(.)$$

$$N^j(.) = \sum_{i=1+j}^m \alpha_i L A^{i-1-j} K(.)$$

L'ordre d'itération des deux formulations récurrentes est de  $m$ . Nous le supposons inférieur à l'ordre  $q$  de la matrice  $A$  (degré de son polynôme caractéristique). Ceci constitue une réduction de dimensionnalité dans les formulations obtenues.

Dans le cas où la matrice initiale du système n'admet pas de polynôme annulateur de degré inférieur à l'ordre du système, une légère modification de la représentation utilisée permet toujours de s'y ramener. Le système (I.33) peut s'écrire alors sous la forme :

$$(I.43) \quad \begin{cases} x_{n+1} = (A + G L) x_n + (K(.) + G) \varepsilon_n \\ y_n = C x_n \\ \varepsilon_n = -L x_n \end{cases}$$

où  $G$  est une matrice  $q \times p$  à coefficients constants choisis afin que la matrice  $A' = A + G L$  admette un polynôme annulateur de degré minimum.

b2) 2ème cas : les  $\alpha_i$  ( $i=0, \dots, m$ ) sont des coefficients non définis a priori

Notons  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ , des coefficients non tous nuls tels que les relations suivantes soient satisfaites :

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i C A^i = 0 \quad / \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i L A^i = 0$$

La détermination des  $\alpha_i$  revient à résoudre un système d'équations homogènes relatifs à  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ , soit :

$$(I.44) \quad \begin{cases} \alpha_0 C + \alpha_1 C A + \alpha_2 C A^2 + \dots + \alpha_m C A^m = 0 \quad / \\ \alpha_0 L + \alpha_1 L A + \alpha_2 L A^2 + \dots + \alpha_m L A^m = 0 \end{cases}$$

où  $C A^i / L A^i$  sont des matrices  $\in \mathbb{R}^{s \times q}$

Pour que le système (I.44) admette une solution non nulle en  $\alpha_0 \dots \alpha_m$ , il est nécessaire et suffisant que le rang de la matrice  $N / M$  :

$$(I.45) \quad N = (C^T A^T C^T \dots A^{mT} C^T) / M = (L^T A^T L^T \dots A^{mT} L^T)$$

soit inférieur ou égal à  $m$  (nombre d'inconnus).

Lorsque cette condition est vérifiée, nous déterminerons les  $\alpha_i$  solutions de l'équation (I.44). La sommation pondérée par ces  $\alpha_i$  des deux membres des deux relations (I.39) conduit à l'équation de récurrence (I.42).

Donc, le degré de l'équation de récurrence est lié au nombre de vecteurs colonnes indépendants de la matrice  $M / N$ .

Remarque : Lorsque dans les relations (I.45) nous posons  $m = q - 1$ , celles-ci s'écrivent :

$$(I.46) \quad \text{rg} (C^T A^T C^T \dots A^{Tq-1} C^T) < q$$

Ce qui correspond pour le cas des systèmes linéaires à la condition de non observabilité. Il nous vient, d'après cette remarque, la conséquence suivante :

Conséquence : Lorsqu'un système linéaire est non observable pour lequel les conditions (I.46) sont vérifiées, il est toujours possible de réduire le degré d'itération de son équation de récurrence, au rang de la matrice  $N$

Supposons que le rang de cette matrice soit  $r$  ( $r$  colonnes libres). Ecrire une équation de récurrence à l'ordre  $r$  revient donc à trouver des solutions non nulles en  $\beta_1$  de l'équation :

$$\beta_0 C^T + \beta_1 A^T C^T + \dots + \beta_r A^{rT} C^T = 0$$

(I.47)

Il suffit pour cela que le rang de la matrice :

$$(I.48) \quad (C^T \ A^T \ C^T \ \dots \ A^{rT} \ C^T)$$

soit inférieur ou égal à  $r$ , c'est ce qui est le cas par hypothèse.

b3) Exemple numérique :

Appliquons les résultats trouvés sur un exemple à valeurs numériques suivantes :

$$q = 3 \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix}$$

1ère méthode :

La matrice  $A$  admet en plus de son polynôme caractéristique, un polynôme annulateur  $P(\lambda)$  :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \quad \text{tel que} \quad P(A) = 0$$

$$\text{avec} \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_1 = -6 \quad \alpha_0 = 8$$

L'équation de récurrence correspondante obtenue à partir de ce polynôme est :

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = \begin{bmatrix} -0,5 & -1,5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} K^*(.) \varepsilon_{n+1} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} K^*(.) \varepsilon_n$$

Le polynôme caractéristique aurait donné des équations dont l'ordre d'itération est de 3.

2ème méthode :

Formons la matrice  $(C^T A^T C^T A^{2T} C^T)$  soit alors :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

dont le rang est 1. Donc, il existe des coefficients  $\alpha_0, \alpha_1$  tels que l'on ait :

$$\alpha_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

Une solution retenue correspond à  $\alpha_0 = -2$  et  $\alpha_1 = 1$ , nous permet d'avoir l'équation de récurrence à l'ordre 1 suivante :

$$y_{n+1} - 2 y_n = \begin{bmatrix} -0,5 & -1,5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} K^*(.) \varepsilon_n$$

Nous avons montré qu'il est toujours possible de décrire le système (I.33) sous la forme d'équation de récurrence vectorielle relative à certaines de ses composantes  $y_n$  et  $\varepsilon_n$ . Les coefficients intervenant dans cette écriture sont calculés à partir de l'une des deux méthodes proposées. Ce mode de calcul peut paraître long lorsque le système est d'ordre élevé. Par analogie, nous proposons une extension de ces méthodes et leur application aux systèmes partitionnés en blocs de matrices. L'utilisation des propriétés des anneaux commutatifs de matrices carrées et la définition de polynôme "annulateur généralisé" d'une matrice caractéristique en blocs, nous permettent de simplifier le problème /El Moudni, 1981/ /El Moudni, Richard, Dauphin-Tanguy, 1982/. L'étude sur des systèmes partitionnés apparaît dans de nombreux travaux /Tzafestas, Pimenides, 1983/ /Šiljak, 1981/ /Dennis, Traub, Webers, 1976/ /Chenin, 1980/.

II.2 - Introduction d'un outil mathématique pour la description des systèmes échantillonnés

II.2.1 - Hypothèse

Nous nous proposons d'étudier la classe des systèmes partitionnés en blocs de la forme :

$$(I.49) \quad Y_{n+1} = M Y_n$$

où :

$$Y_n^T = \left[ y_n^{1T} \dots y_n^{rT} \right] \quad \text{avec} \quad y_n^i \in \mathbb{R}^s$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1r} \\ M_{r1} & \dots & M_{rr} \end{bmatrix} \quad M_{ij} \in \mathbb{R}^{s \times s} \quad \forall i, j = 1, \dots, r$$

$$M \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad \text{avec} \quad q = r \times s$$

Dans cette description, les blocs  $M_{ij}$  sont supposés commuter entre eux :

$$(I.50) \quad M_{ij} M_{kl} = M_{kl} M_{ij} \quad i, j, k, l = 1, \dots, r$$

Dans la suite, nous définirons le déterminant matriciel et le polynôme caractéristique généralisé /El Moudni, 1981/ /El Moudni, Richard, Borne, 1981/.

Soient :

$\mathbb{E}$  : un anneau de matrices carrées d'ordre  $s$

$\mathbb{E}'$  : un sous-anneau de matrices commutatives de  $\mathbb{E}$  ( $\mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$ )

$\tilde{\mathbb{E}}$  : un anneau de matrices partitionnées en blocs de matrices carrées de  $\mathbb{E}$

$\tilde{\mathbb{E}}$  présente une structure de module à gauche /El Moudni, 1981/ /Chenin, 1980/ sur  $\mathbb{E}$  avec la définition de la multiplication externe notée  $\otimes$

définie comme suit :

$$M \in E, F \in E' \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

$$(I.51) \quad F \otimes M = F \otimes \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1r} \\ M_{r1} & & M_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FM_{11} & \dots & FM_{1r} \\ FM_{r1} & \dots & FM_{rr} \end{bmatrix}$$

et :

$$(I.52) \quad F \otimes Y_n = F \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ y_n^1 \\ \vdots \\ y_n^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F y_n^1 \\ \vdots \\ F y_n^r \end{bmatrix}$$

L'élément neutre pour cette multiplication est la matrice identité  $I_s \in E'$  telle que :

$$(I.53) \quad I_s \otimes M = M$$

a) Déterminant matriciel :

Nous appellerons déterminant matriciel de la matrice  $M \in E$ , la matrice notée  $DET(M)$  calculée comme suit :

$$(I.54) \quad DET(M) = DET(M_{ij}) = \sum Sg(n_1 \dots n_r) M_{n_1,1} M_{n_2,2} \dots M_{n_r,r}$$

$$(I.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{le } \Sigma \text{ est étendu à toutes les permutations} \\ - Sg = \pm 1 \text{ suivant que la permutation } (n_1 \dots n_r) \text{ est paire} \\ \text{ou impaire} \end{array} \right.$$

Ce déterminant matriciel possède des propriétés généralisant celles du déterminant scalaire (Annexe I).

b) Polynôme caractéristique généralisé :

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  de  $E$  est défini par le déterminant de la matrice caractéristique  $(\lambda I - A)$ , où  $\lambda$  est un scalaire et  $I$ , la matrice identité.

De la même façon, nous nous proposons d'introduire une matrice identité de  $E$  notée  $I$  et une matrice  $\Lambda$  de  $E'$ . Il nous vient alors la définition de polynôme caractéristique généralisé de la matrice  $A$  /El Moudni, Richard, Dauphin-Tanguy, 1982/ /El Moudni, Richard, Borne, 1981/.

$$(I.56) \quad P(\Lambda) = \text{DET} (\Lambda \otimes I - A) \in E'$$

Par développement, il vient l'expression :

$$(I.57) \quad P(\Lambda) = \Lambda^r + \sum_{i=0}^{r-1} F_i \Lambda^i \quad \text{avec} \quad F_i \in E' \subset \mathbb{R}^{s \times s}$$

Il est possible de démontrer une propriété de polynôme caractéristique généralisé, qui généralise ainsi le théorème de Cayley Hamilton aux matrices en blocs /El Moudni, Richard, Borne, 1981/.

Théorème :

La matrice  $A \in E$ , annule son polynôme caractéristique généralisé :

$$(I.58) \quad P(A) = A^r + \sum_{i=1}^{r-1} F_i \otimes A^i = 0$$

Le calcul de  $A^i$  se fait comme dans le cas scalaire, soit :

$$A^i = \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_j$$

Démonstration :

Soit  $\text{ADJ} (\Lambda \otimes I - A)$  la matrice adjointe de  $(\Lambda \otimes I - A)$  pour chaque  $\Lambda \in E'$ , on a :

$$\text{ADJ} (\Lambda \otimes I - A) = \sum_{k=0}^{r-1} \Lambda^k \otimes \beta_k$$

où  $\beta_k$  ( $k=0, \dots, r-1$ ) ont des éléments de  $E$ . Cependant :

$$(\Lambda \otimes I - A) \text{ADJ} (\Lambda \otimes I - A) = \text{DET} (\Lambda \otimes I - A) \otimes I$$

Soit alors :



$$(\Lambda \otimes I - A) \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \Lambda^k \otimes \beta_k = (\Lambda^r + \sum_{i=0}^{r-1} F_i \otimes \Lambda^i) \otimes I \quad \forall \Lambda \in E'$$

Il vient, par identification entre les deux membres, les relations suivantes :

$$(I.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} (0) \quad - A \otimes \beta_0 \quad \quad \quad = F_0 \otimes I \\ (1) \quad - A \otimes \beta_1 \quad + \beta_0 \quad = F_1 \otimes I \\ (2) \quad - A \otimes \beta_2 \quad + \beta_1 \quad = F_2 \otimes I \\ \dots \\ (r-1) \quad - A \otimes \beta_{r-1} + \beta_{r-2} = F_{r-1} \otimes I \\ (r) \quad \quad \quad \quad \quad \beta_{r-1} = I \end{array} \right.$$

Lorsque nous multiplions chaque équation (I.59-i) par  $A^i$ , et nous faisons une sommation du résultat, il vient :

$$F_0 \otimes I + F_1 \otimes A + \dots + F_{r-1} \otimes A^{r-1} + A^r = 0$$

soit le résultat recherché.

II.2.2 - Formulation récurrente d'ordre minimal sur des systèmes partitionnés en blocs de matrices carrées

a) 1ère Méthode de mise en équation récurrente :

Le système à étudier est celui qui peut être obtenu en partitionnant le système décrit en (I.33). Nous obtenons :

$$(I.60) \quad \begin{cases} X_{n+1} = A X_n + K(.) \varepsilon_n \\ Y_n = C X_n \end{cases}$$

Le procédé de partitionnement prendra en compte la dimension de la sortie  $y_n$ . Nous partitionnons ce système en blocs carrés de dimension  $s$ . Il vient alors :

$$Y_n \in \mathbb{R}^s, \varepsilon_n^T = (\varepsilon_n^{1T} \dots \varepsilon_n^{mT}), X_n^T = (x_n^{1T} \dots x_n^{rT}), x_n^i \in \mathbb{R}^s, \varepsilon_n^i \in \mathbb{R}^s$$

$A$  composée de  $r^2$  blocs  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, r$ ) avec  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{s \times s}$

$K(.)$  une matrice de  $r \times m$  blocs  $k_{ij}$  ( $i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, m$ ) les composantes  $k_{ij} \in \mathbb{R}^{s \times s}$

$C$  matrice bloc ligne de  $r$  blocs, dont les composantes

$C_j$  ( $j = 1, \dots, r$ )  $\in \mathbb{R}^{s \times s}$

Dans le cas où la dimension  $X_n / \varepsilon_n$  est multiple de  $s$ , le partitionnement est immédiat de la matrice  $A / K(.)$  en  $A / K(.)$  non redondantes. Dans le cas contraire, une simple dilatation dans la dimension de  $A / K(.)$  permet de résoudre le problème. Nous supposons qu'après ce partitionnement, tous les blocs sont commutatifs ; dans le cas contraire, des techniques de partitionnement avec dilatation peuvent être utilisées pour nous assurer cette propriété /El Moudni, 1983/ /El Moudni, Richard, Dauphin-Tanguy, 1982/.

Relation de récurrence entre  $Y_n$  et  $\varepsilon_n$  :

Ecrivons le système partitionné (I.60) à l'instant  $(n+i)T$ , il vient :

$$(I.61) \quad \begin{cases} X_{n+i} = A^i X_n + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} K(.) \varepsilon_{n+j} & (a) \\ Y_{n+i} = C X_{n+i} & (b) \end{cases}$$

La multiplication à gauche par  $C$  des deux membres de (I.61-a) fait apparaître la variable  $Y_{n+i}$ , soit alors :

$$(I.62) \quad C \otimes X_{n+i} = Y_{n+i} = C \otimes A^i \otimes X_n + \sum_{j=0}^{i-1} C \otimes A^{i-1-j} \otimes K(.) \varepsilon_{n+j}$$

Comme dans le cas scalaire, pour avoir une relation entre  $Y_n$  et  $\varepsilon_n$ , il faut éliminer les termes de la forme  $CA^i X_n$ . Pour cela, nous allons utiliser deux méthodes généralisant celles proposées dans le cas scalaire.

a1)  $\alpha_i$  coefficients matriciels d'un polynôme annulateur généralisé :

Définition :

Le polynôme annulateur généralisé de la matrice  $A$  à coefficients matriciels /El Moudni, 1983/ :

$$P(\Lambda) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \Lambda^i \quad (\alpha_i \in \mathbb{E}') \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

est un polynôme vérifiant :

$$P(A) = \alpha_m \otimes A^m + \dots + \alpha_1 \otimes A + \dots + \alpha_0 \otimes I = 0$$

Une sommation pondérée par les coefficients matriciels  $\alpha_i$  de  $P(\Lambda)$  des relations (I.62) fait apparaître  $P(A) = 0$ , soit :

$$(I.63) \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i \otimes Y_{n+i} = C \left[ \sum_{i=0}^m \alpha_i \otimes A^i \right] X_n + \sum_{i=0}^m \left[ \sum_{i=1+j}^m \alpha_i \otimes C \otimes A^{i-1-j} \otimes K(.) \varepsilon_{n+j} \right]$$

dans laquelle s'élimine le vecteur  $X_n$  et nous obtenons ainsi l'équation de récurrence liant  $Y_n$  à  $\varepsilon_n$  :

$$(I.64) \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i \otimes Y_{n+i} = \sum_{j=0}^{m-1} M^j(.) \otimes \varepsilon_{n+j}$$

avec 
$$M^j(.) = \sum_{i=1+j}^m \alpha_i \otimes C \otimes A^{i-1-j} \otimes K(.)$$

Le degré  $m$  de l'équation de récurrence (I.64) peut toujours être inférieur à  $r$ , "ordre" de la matrice  $A$ , et ceci peut toujours être obtenu par une simple modification du système partitionné en introduisant une matrice dont les blocs peuvent être choisis de telle sorte que le système modifié obtenu de la même manière qu'en scalaire, admette un polynôme annulateur généralisé.

Dans le cas général, l'élimination peut s'effectuer en déterminant les  $\alpha_i \in \mathbb{E}'$  tels que :

$$(I.65) \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i \otimes \left[ C \otimes A^i \right] = 0$$

Cette méthode utilise la notion de dépendance matricielle de vecteur par blocs /El Moudni, 1983/.

a2)  $\alpha_i$  coefficients matriciels non choisis a priori :

La méthode proposée ici est basée sur la dépendance matricielle des vecteurs par blocs  $C, CA, \dots, CA^m$ . Définissons les propriétés suivantes :

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_m$  : des blocs vecteurs de  $E$ , constitués des blocs carrés  $\in E'$ .

Définition 1 :

Les blocs vecteurs  $X_1, \dots, X_m$  sont dits matriciellement liés s'il existe  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in E'$  non tous nuls, tels que l'on ait :

$$\gamma_1 \otimes X_1 + \dots + \gamma_m \otimes X_m = 0 \quad (0 \text{ matrice carrée nulle } \in E')$$

Si cette liaison n'existe pas, on dira que  $X_1, \dots, X_m$  sont matriciellement indépendants.

Définition 2 :

Le rang matriciel d'un ensemble de blocs vecteurs  $X_i$  est le nombre maximum de vecteurs matriciellement indépendants qu'il est possible d'extraire de cet ensemble. On note :

$$\text{Rang } (X_1, \dots, X_m)$$

Conséquence :

Pour que les blocs vecteurs  $X_i$  d'éléments dans  $E'$  soient liés, il faut et il suffit que la matrice formée par les blocs vecteurs  $X_i$  ait des colonnes proportionnelles, ce qui donne :

$$\text{Rang } (X_1, \dots, X_m) < m \quad (\text{Rang : rang matriciel et réciproquement})$$

Appliquons ces résultats au système étudié (I.61). Notons  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  des matrices de  $E'$  arbitraires non nulles. La sommation pondérée par ces coefficients matriciels des relations (I.62) donnerait une relation de la forme (I.63). Eliminer les termes

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \otimes C \otimes A^i \otimes X_n$$

pour toute valeur de  $X_n$  revient à trouver des solutions matricielles en  $\alpha_i$  de l'équation suivante :

$$(I.66) \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i \otimes C \otimes A^i = 0$$

où  $C \otimes A^i$  sont des blocs vecteurs d'éléments dans  $\mathbb{E}'$ .

Pour que les équations (I.66) admettent une solution non nulle, il faut et il suffit que la relation (I.67) soit vérifiée :

$$(I.67) \quad \text{Rang} (C^T, A^T \otimes C^T, \dots, A^{Tm} \otimes C^T) < m$$

Si c'est le cas, la résolution des équations (I.66) détermine les  $\alpha_i$  pour lesquels les termes en  $CA^i X_n$  s'éliminent et nous obtenons le même type d'équation de récurrence que (I.64).

Remarque :

Pour un système partitionné en blocs tel que (I.60), lorsque le rang matriciel de la matrice  $(C^T, \dots, A^{mT} \otimes C^T)$  est inférieur au nombre de blocs vecteurs colonne ( $m$ ), il est toujours possible d'écrire une équation de récurrence dont le degré d'itération est égal au rang matriciel de cette matrice.

*a3) Exemple d'application :*

Considérons un système linéaire décrit par l'équation (I.60) avec les valeurs numériques suivantes :

$$q = 6 \qquad r = 3 \qquad s = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \left[ \begin{array}{cc} [0 & 0] \\ [0 & 0] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} [1 & 0] \\ [0 & -1] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} [0 & 0] \\ [0 & 0] \end{array} \right]$$

$$K = \left[ \begin{array}{cc} [1 & 0] \\ [0 & 0] \\ [1 & 0] \\ [0 & -2] \\ [0 & 0] \\ [0 & 1] \end{array} \right]$$

\* Méthode de polynôme annulateur généralisé :

La matrice A vérifie :

$$A^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \otimes A^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \otimes A + \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \otimes I = 0$$

Le polynôme annulateur généralisé correspondant est :

$$P(\Lambda) = \Lambda^3 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \Lambda + \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

avec :



$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il vient par conséquent l'équation de récurrence vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} & \alpha_3 \otimes Y_{n+3} + \alpha_2 \otimes Y_{n+2} + \alpha_1 \otimes Y_{n+1} + \alpha_0 \otimes Y_n = \\ & = (\alpha_3 \otimes C K) \varepsilon_{n+2} + (\alpha_2 \otimes C K + \alpha_3 \otimes CAK) \varepsilon_{n+1} + \\ & + (\alpha_1 \otimes C K(.) + \alpha_2 \otimes CAK(.) + \alpha_3 \otimes CA^2 K(.)) \varepsilon_n \end{aligned}$$

Soit, lorsque toutes les matrices sont remplacées par leur valeur numérique :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y_{n+3} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} Y_{n+2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} Y_{n+1} + \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} Y_n = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \varepsilon_{n+2} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \varepsilon_{n+1} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \varepsilon_n \end{aligned}$$



\* Méthode utilisant les blocs vecteurs  $CA^i$  :

Formons la matrice constituée par les blocs colonnes  $C, A^T C^T, A^{2T} C^T$ , on obtient :

$$N = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 27 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le rang matriciel de la matrice est de 1. Il existe des matrices carrées  $\alpha_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  telles que l'on ait :

$$\alpha_0 \otimes \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \alpha_1 \otimes \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$$

Pour qu'il y ait solutions matricielles en  $\alpha_i$ , il faut et il suffit que le rang matriciel de la matrice F soit inférieur ou égal à 2 :

$$F = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



Il vient alors l'équation suivante :

$$\alpha_0 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \otimes \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

avec la solution :

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

L'équation de récurrence vectorielle correspondante s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} Y_{n+1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \varepsilon_n$$

b) 2ème Méthode de mise en équation récurrente :

Cette étude concerne les systèmes discrets non linéaires décrits par l'équation d'état suivante :

$$(I.68) \quad x_{n+1} = A(\varepsilon_n) \varepsilon_n$$

où  $x_n \in \mathbb{R}^q$  : vecteur état de composantes  $x_n^i$  ( $i = 1, \dots, q$ )

$$x_n^T = (s_n^T \ \varepsilon_n^T), \quad s_n \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad \varepsilon_n \in \mathbb{R}^s \quad \text{avec } s+m-1 = q$$

$A : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$  la matrice caractéristique du système dépendant de  $\varepsilon_n$

Pour éliminer  $s_n$  et établir une équation de récurrence régissant  $\varepsilon_n$ , nous partitionnons tout d'abord le système (I.68) en blocs carrés de dimension  $s$  relative à  $\varepsilon_n$ . Il vient alors le système partitionné :

$$(I.69) \quad X_{n+1} = A(\varepsilon_n) \varepsilon_n$$

$A(\varepsilon_n)$  constituée de  $r^2$  blocs

$$X_n^T = (x_n^{1T} \ \dots \ x_n^{r-1T} \ \varepsilon_n^T) \quad x_n^i \in \mathbb{R}^s$$

Lorsque les blocs de la matrice  $A(\cdot)$  sont commutatifs, nous déterminons un polynôme annulateur généralisé  $P(\Lambda)$  :

$$(I.70) \quad P(\Lambda) = \Lambda^r + \sum_{i=1}^r p^i(\varepsilon_{n+r-i}) \Lambda^{r-i}$$

par simple identification dans ce dernier /El Moudni, Richard, Borne, 1981/, à partir de la notation :

$$(I.71) \quad p^i(\varepsilon_n) \Lambda^k \longleftrightarrow p^i(\varepsilon_{n+k}) \varepsilon_{n+k}$$

il vient l'équation de récurrence vectorielle sur le vecteur  $\varepsilon_n$  restant :

$$(I.72) \quad \varepsilon_{n+r} + \sum_{i=1}^r p^i(\varepsilon_{n+r-i}) \varepsilon_{n+r-i} = 0$$

En fait, après le partitionnement dans l'hypothèse non linéaire, la propriété de commutativité de tous les blocs de la matrice n'est généralement pas assurée /El Moudni, Richard, Borne, 1981/. Deux cas peuvent se présenter :

1er Cas : Tous les blocs des (r-1) premières colonnes sont commutatifs

Dans cette partie, nous supposons que  $A(\varepsilon_n)$  est la somme d'une matrice  $A$  dont tous les blocs sont commutatifs, et d'une autre matrice  $K(\varepsilon_n)$  dépendant de  $\varepsilon_n$ .

$$K(\varepsilon_n) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_1(\varepsilon_n) \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & k_r(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_1(\varepsilon_n) \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & k_r(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$K(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{q \times q} ; k_i(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{s \times s} ; k_r(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{q \times s}$$

Sous ces hypothèses, le système (I.69) peut s'écrire :

$$(I.73) \quad \begin{cases} X_{n+1} = A X_n + K(\varepsilon_n) \varepsilon_n = A(\varepsilon_n) X_n & (a) \\ \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I_s \end{bmatrix} X_n = C X_n & (b) \end{cases}$$

Convention :

Nous appelons déterminant matriciel de la matrice caractéristique  $A(\varepsilon_n)$ , la quantité  $\text{DET} (\lambda \otimes I - A - K(\varepsilon_n))$  calculée en développant les calculs par rapport aux (r-1) premières colonnes à blocs commutatifs /El Moudni, 1981/ /El Moudni, Richard, Borne, 1981/.

Théorème :

Les coefficients de l'équation de récurrence vectorielle associée à (I.73) sont définis par les coefficients de déterminant matriciel caractéristique de  $A(\varepsilon_n)$ , avec une identification correspondant à  $\varepsilon_{n+i} \leftrightarrow \Lambda^i$ .

Démonstration :

De (I.73-a), il vient, pour  $i = 0, \dots, r$  :

$$(I.74) \quad \varepsilon_{n+i} = C (A^i X_n) + \sum_{j=0}^{i-1} C \otimes A^{i-1-j} \otimes K(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j}$$

Une sommation pondérée par les coefficients  $F_i$  d'un polynôme annulateur généralisé de la matrice  $A$ , permet d'obtenir l'équation suivante :

$$(I.75) \quad \varepsilon_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} S(\varepsilon_{n+j}) \varepsilon_{n+j} = 0$$

avec :

$$S(\varepsilon_{n+j}) = F_i - \sum_{i=1+j}^r F_i \otimes C A^{i-1-j} K(\varepsilon_{n+j})$$

Ces coefficients  $S(\varepsilon_{n+j})$  peuvent être identifiés avec les coefficients de  $\text{DET} (\Lambda \otimes I - A - K(\varepsilon_n))$  mentionné ci-dessus.

2ème cas : La commutativité des blocs n'est pas satisfaite

Dans de nombreux cas, les blocs des  $(r-1)$  premières colonnes peuvent ne pas commuter entre eux. Cependant, l'introduction d'une redondance dans le partitionnement du système et une écriture particulière des blocs de la matrice partitionnée, peut pallier cette difficulté.

Il suffit d'écrire chaque composante à éliminer autant de fois que l'ordre du vecteur restant.

Pour le système (I.68), les composantes  $x_n^i$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) seront répétées  $s$  fois.

La matrice obtenue  $A(\varepsilon_n)$  est redondante par rapport à la matrice initiale. Elle est composée de  $m^2$  blocs.

$A(\varepsilon_n)$  est partitionnée de la même manière que dans le premier cas. Tous les blocs de  $(m-1)$  premières colonnes sont diagonaux donc commutatifs. Pour illustrer ce partitionnement particulier, nous considérons un système d'ordre 4 représenté par :

$$(I.76) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ \varepsilon_{n+1}^1 \\ \varepsilon_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}(\varepsilon_n^1) & a_{14}(\varepsilon_n^2) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}(\cdot) & a_{34}(\cdot) \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}(\cdot) & a_{44}(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \varepsilon_n^1 \\ \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$



La matrice partitionnée correspondante avec les deux premières colonnes à blocs commutatifs, est la suivante :

$$(I.77) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ x_{n+1}^2 \\ \varepsilon_{n+1}^1 \\ \varepsilon_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{13}(\cdot) & a_{14}(\cdot) \\ a_{13}(\cdot) & a_{14}(\cdot) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \\ a_{23}(\cdot) & a_{24}(\cdot) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{31} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{32} & 0 \\ 0 & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{33}(\cdot) & a_{34}(\cdot) \\ a_{33}(\cdot) & a_{34}(\cdot) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & a_{41} \\ 0 & a_{41} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & a_{42} \\ 0 & a_{42} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{43}(\cdot) & a_{44}(\cdot) \\ a_{43}(\cdot) & a_{44}(\cdot) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^1 \\ x_n^2 \\ x_n^2 \\ \varepsilon_n^1 \\ \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$

C'est une forme redondante par rapport au système initial. Elle nous assure la propriété de commutativité, ce qui nous permet l'application des méthodes de mise en équation et l'obtention des équations de récurrence vectorielle cherchées.

D'autres techniques de partitionnement et d'écriture de la matrice partitionnée peuvent être utilisées lorsqu'elles peuvent nous assurer

la propriété de commutativité /El Moudni, Richard, Dauphin-Tanguy, 1982/.

Le système (I.77) écrit sous la forme :

$$(I.78) \quad \begin{bmatrix} X_{n+1}^1 \\ X_{n+1}^2 \\ \epsilon_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \\ X_n^3 \end{bmatrix}$$

avec les matrices  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2 ; j = 1, 2, 3$ ) pouvant être écrites sous les formes suivantes :

$$A_{ij} \quad (i, j = 1, 2) = \begin{bmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} | & 0 \\ | & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou } \begin{bmatrix} 0 & | \\ 0 & | \end{bmatrix} \quad \text{ou } \begin{bmatrix} 0 & / \\ / & 0 \end{bmatrix}$$

(I.79)

$$A_{ij} \quad (i = 3 ; j = 1, 2) = \begin{bmatrix} a_{3,j} & 0 \\ 0 & a_{4j} \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} | & 0 \\ | & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou } \begin{bmatrix} 0 & | \\ 0 & | \end{bmatrix} \quad \text{ou } \begin{bmatrix} 0 & / \\ / & 0 \end{bmatrix}$$

Au lieu de répéter les variables dans les vecteurs  $X_1^1$  et  $X_1^2$ , nous pouvons introduire des nouvelles variables annexes telles que  $z_n^1$  :

$$(I.80) \quad X_n^{1T} = (z_n^1 \quad x_n^1) \quad X_n^{2T} = (z_n^2 \quad x_n^2)$$

Le systèmes (I.77) s'écrit encore sous la forme :

$$(I.81) \quad \begin{bmatrix} z_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^1 \\ \frac{z_{n+1}^2}{2} \\ x_{n+1}^2 \\ \varepsilon_{n+1}^1 \\ \varepsilon_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \eta & \xi & \psi \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \eta' & \xi' & \psi' \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a & a_{31} & b & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a' & a_{41} & b' & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n^1 \\ x_n^1 \\ \frac{z_n^2}{2} \\ x_n^2 \\ \varepsilon_n^1 \\ \varepsilon_n^2 \end{bmatrix}$$

Les coefficients introduits ( $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \xi, \psi, a, b, c$ ) sont choisis arbitrairement (ils peuvent être des zéros, par exemple).

Dans tous les cas de partitionnement, l'introduction de nouvelles variables et le choix parmi les différentes écritures, sont guidés pour l'obtention de la propriété de commutativité d'au moins celles des premières colonnes.

#### Interprétation des résultats

Le choix de la représentation décrivant l'évolution d'un système s'avère fondamental en vue de l'analyse et de la synthèse d'un processus linéaire ou non. Le but cherché consiste à réduire les variables du système aux seules variables qui influencent son comportement. Dans ce sens, nous avons proposé une généralisation au cas non linéaire des méthodes d'élimination usuellement réservées au linéaire. L'utilisation des polynômes annulateurs des matrices d'une part, et la notion de dépendance de matrices d'autre part, permettent en particulier la définition de méthodes systématiques de représentation. En se plaçant dans un anneau commutatif, les méthodes d'élimination ont été étendues aux systèmes partitionnés représentés par des blocs de matrices avec les mêmes règles de calcul que dans le cas scalaire. Pour assurer la propriété de commutativité entre les blocs de matrices, nous avons utilisé le principe de redondance ou dilatation à un certain ordre défini. La généralisation de ces méthodes aux systèmes partitionnés permet une réduction dans l'ordre des calculs lorsque le système est d'ordre élevé.

### III - METHODE DE SIMPLIFICATION DE MODELES, UTILISATION DES PERTURBATIONS SINGULIERES

La résolution de nombreux problèmes nécessite, à un moment de l'étude, l'utilisation des méthodes d'approximation.

Dans ce sens, les techniques des perturbations jouent un rôle très important dans de nombreux domaines. Les mathématiciens les utilisent pour approcher les équations de nombreux systèmes. Elles permettent en effet, d'obtenir des solutions approchées par passage à la limite proche de celle du système réel.

Ces méthodes sont aussi utilisées dans les domaines de la mécanique, de la physique, de l'automatique et plus généralement dans tous les cas où la description d'un processus met en jeu des petits paramètres. Il est possible /Sandell & al, 1978/ de distinguer deux grandes classes de problèmes pour l'application à l'automatique : les perturbations qui correspondent à des couplages "faibles" (perturbations régulières) et celles qui traduisent des couplages "forts" dues à des dynamiques différentes d'un système, ou à des ordres de grandeurs disproportionnés (perturbations singulières).

#### III.1 - Perturbations singulières sur les représentations d'état

L'idée de base des techniques des perturbations singulières est la simplification des systèmes contenant des petits paramètres dans leur équation. Nous nous intéressons plus particulièrement ici aux systèmes échantillonnés modélisés par des équations d'état.

$$(I.82) \quad \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \mu z_n, u_n) & x_n \in \mathbb{R}^{q_1} \\ z_{n+1} = g(x_n, \mu z_n, u_n) & z_n \in \mathbb{R}^{q_2} \end{cases}$$

Cette structure de perturbation adoptée, place le petit paramètre à droite du signe égal affecté à  $z_n$ .

La perturbation est singulière car, la valeur  $\mu = 0$  dans (I.82) réduit la résolution du système d'ordre  $q$  à celle d'un système d'ordre  $q_1$  /O'Malley 1974/.

Il s'agit généralement d'un système composé d'une partie lente  $x_n$ , et d'une partie rapide  $z_n$ .

Le coefficient  $\mu$  n'est pas défini en général, mais dépend du système étudié. Il peut être déterminé comme étant :

- le rapport entre les échelles de temps de la partie lente ( $n$ ) et de la partie rapide ( $n'$ ) :

$$\mu = \frac{n - n_0}{n'} \quad (n_0 \text{ étant l'instant initial})$$

- le rapport des valeurs propres extrêmes correspondant aux deux parties décrivant le régime libre du système lorsque le système est linéaire :

$$\mu = \frac{|\lambda_{\max} \text{ (partie rapide)}|}{|\lambda_{\min} \text{ (partie lente)}|}$$

Pour  $\mu = 0$ , le système devient :

$$(I.83) \quad \begin{cases} \bar{x}_{n+1} = f(\bar{x}_n, 0, \bar{u}_n) \\ \bar{z}_{n+1} = g(\bar{x}_n, 0, \bar{u}_n) \end{cases}$$

Nous obtenons un système réduit de dimension  $q_1$ , caractérisant l'évolution de la partie lente  $\bar{x}_n$ .

Dans le cas linéaire, en régime autonome (I.84) :

$$(I.84) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_{11} x_n + A_{12} \mu z_n \\ z_{n+1} = A_{21} x_n + A_{22} \mu z_n \end{cases}$$

devient, avec  $\mu = 0$  :

$$(I.85) \quad \bar{x}_{n+1} = A_{11} \bar{x}_n$$

Ceci implique que les valeurs propres de la matrice  $A_{11}$  sont voi-

sines de  $q_1$  valeurs propres lentes et nous montrerons par la suite que les  $q_2$  valeurs propres rapides seront approchées par les valeurs propres d'une matrice  $\mu(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$  caractérisant l'évolution de la partie rapide.

Le sens physique des variables est évidemment conservé puisque ce sont les variables d'état originelles qui sont utilisées.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour répondre aux exigences de la réduction d'ordre pour des systèmes linéaires ou non linéaires. Elle entraîne une diminution de l'ampleur de calcul et permet la réalisation des correcteurs simplifiés.

### III.1.1 - Quelques résultats fondamentaux concernant les systèmes à plusieurs échelles de temps

Les méthodes de perturbations singulières ont connu un développement très important dans de nombreux domaines qui touchent à l'analyse, l'estimation et la commande des systèmes dynamiques. En effet, elles permettent de résoudre des problèmes numériques liés soit à des dynamiques différentes, soit à un mauvais conditionnement des modèles dû à des termes d'ordre de grandeur très différents, tout en conservant leur sens aux variables caractérisant le système.

L'application des lois physiques régissant l'évolution d'un processus continu conduit souvent à des équations différentielles contenant plusieurs petits paramètres /Bishop, 1975/ /Hildebrand, 1968/. L'étude des systèmes échantillonnés mène aussi naturellement aux mêmes types d'équations /Kuo, 1970/.

La méthode de perturbations singulières est très développée dans le cas des systèmes continus et a fait l'objet de nombreux travaux /Kokotovic & al, 1976, 1982/ /O'Reilly, 1982/ et /Dauphin-Tanguy, 1983/. Récemment, /Saksena, O'Reilly, Kokotovic, 1984/ dans un article de synthèse comportant une étude bibliographique très complète, ont fait le point sur les différents domaines d'application des techniques des perturbations singulières et sur les principaux résultats obtenus pour l'analyse et la synthèse des systèmes comportant plusieurs dynamiques.

Des applications importantes utilisent la réduction d'ordre des systèmes, la stabilité /Grujić, 1976, 1978, 1979, 1981/ /Khalil, Kokotovic, 1979/, le calcul des trajectoires optimales /O'Malley, 1972/ /Sannutti, 1973/, les systèmes à retard et très généralement la synthèse des processus.

Contrairement aux systèmes continus, l'étude des systèmes discrets singulièrement perturbés (introduction d'un petit paramètre) n'a commencé que récemment, et il n'existe pas actuellement de modélisation générale et unique. Au départ, l'étude de ces systèmes a été faite essentiellement avec une modélisation semblable à celle des systèmes continus ( $\mu$  intervenant dans le vecteur à l'instant  $n+1$ ) /Comstock, Hsiao, 1976/ /Hoppenstead, Miranker, 1977/ /Grujić, 1977/ /Reinhardt, 1979/ /Hsiao, Jordan, 1979/ et a concerné principalement les problèmes de stabilité et de la valeur limite des systèmes de second ordre.

Depuis les années 80, un nombre important de travaux proposent une modélisation spécifique aux systèmes discrets /Phillips, 1980/ /Rajagopalan, Naidu, 1980/ /Blankenship, 1981/ /Naidu, Kailaza, Rao, 1981/ /Rao, Naidu, 1981/ /Kailaza, Rao, Naidu, 1981/ /Dauphin-Tanguy, Noël, Borne, 1982/ /Syracos, Sannuti, 1983/ /Fernando, Nicholson, 1983/ /El Moudni, Dauphin-Tanguy, Borne, 1984/ /Magdi Mahmoud, 1982/ /Bakatian, Khalil, 1984/ /Kando, Iwazumi, 1983/ /Magdi, Singh, 1981/, dont les études ont concerné la modélisation, le découplage, le problème des valeurs initiales, la réduction d'ordre et la commande, ....

Nous allons développer ici les résultats relatifs aux problèmes de conditions initiales et l'obtention des modèles simplifiés.

III.1.2 - Cas général : systèmes non linéaires ; Approximation à l'ordre zéro

Soit le système d'ordre  $q_1 + q_2$  décrit sous la forme :

$$(I.86) \quad \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \mu z_n) \\ z_{n+1} = g(x_n, \mu z_n) \end{cases}$$

avec :  $x_n \in \mathbb{R}^{q_1}$ ,  $z_n \in \mathbb{R}^{q_2}$ ,  $x_0$  et  $z_0$  des conditions initiales

$\mu$  : un paramètre scalaire  $\mu \in ]0, 1]$

Quand nous posons  $\mu = 0$ , l'équation (I.86) s'écrit sous forme de deux équations :

$$(I.87-a) \quad x_{\ell n+1} = f(x_{\ell n}, 0)$$

$$(I.88-a) \quad z_{\ell n+1} = g(x_{\ell n}, 0)$$

(I.87) exprime le mouvement décrivant l'évolution des variables lentes, les variables rapides ont atteint leur régime quasi-permanent et le système n'est plus que de l'ordre  $q_1$ .

(I.88) exprime le mouvement d'entraînement des variables rapides par les variables lentes.

Il est clair que cette approximation ne peut respecter les conditions initiales des variables  $z_n$  en raison de l'équation algébrique (I.88).

En supposant que  $x_{\ell n}$  puisse être déduite de (I.87) par l'équation suivante :

$$(I.87-b) \quad x_{\ell n} = h'(x_{\ell n+1})$$

nous obtenons :

$$(I.88-b) \quad z_{\ell n+1} = g(h'(x_{\ell n+1}))$$

Contrairement à la variable  $x_{\ell n}$  dont les conditions initiales sont définies par :

$$(I.89) \quad x_{\ell 0} = x_0$$

la variable  $z_{\ell n}$  a ses conditions initiales liées à celles de  $x_{\ell n}$  et il peut y avoir une différence importante entre  $z_{\ell 0} = g(h'(x_{\ell 0}))$  et  $z_0$  :

$$(I.90) \quad z_{\ell 0} \neq z_0$$

On ne pourra donc pas espérer avoir une approximation uniforme de  $z_n$  valable dès l'instant  $n = n_0$ .

L'approximation :

$$(I.91) \quad z_n = z_{\ell n} + O(\mu)$$

est seulement valable en dehors du voisinage de  $n_0$ , c'est-à-dire pour  $n \in [n', N]$  avec  $n' > n_0$ .

Par contre, si nous prenons pour  $x_{\ell 0}$  la condition initiale  $x_0$ , alors l'approximation :

$$(I.92) \quad x_n = x_{\ell n} + O(\mu)$$

est uniforme, donc valable sur  $[n_0, N]$ .

Le problème posé est un problème de raccordement ("couche limite") entre les conditions initiales  $z_0$  et le mouvement d'entraînement  $z_{\ell 0}$  ( $n > n_0$ ) des variables rapides par les variables lentes  $x_{\ell n}$ .

A l'ordre zéro, les variables  $x_n$  et  $z_n$  solutions de l'équation (I.86) sont partagées en une partie lente :

$$(I.93-a) \quad x_{\ell n} / z_{\ell n}$$

et une partie rapide  $x_{rn} = 0 / z_{rn}$  appelée partie correctrice par

/Rajagopalan, Naidu, 1980/ /Naidu, Kailaza, 1981, 1982/.

A un ordre plus élevé, la partie corrective de la variable lente  $x_{rn}$  n'est plus négligeable, ce qui peut s'écrire sous forme générale d'un terme d'ordre  $k$  d'un développement asymptotique :

$$(I.93-b) \quad \mu^{k+1} x_{rn} / \mu^k z_{rn}$$

Le coefficient  $k$  est pris égal à  $n$ , car il représente la décroissance des composantes rapides d'un intervalle à un autre.

Ces séries (I.93-b) tendent vers zéro en absence d'entrée quand  $\mu$  tend vers zéro (sauf à  $n = 0$  pour  $z_{rn}$ ), ce qui correspond aux hypothèses (I.89) et (I.90).

En remplaçant (I.93) dans (I.86) avec l'hypothèse de dérivabilité des fonctions  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$ , celle-ci peut s'écrire en fonction des dérivées partielles :

$$(I.94) \quad \begin{cases} \mu^{n+2} x_{rn+1} = \frac{\partial f(x_{ln}, \mu z_{ln})}{\partial x_n} \cdot \mu^{n+1} x_{rn} + \frac{\partial f(x_{ln}, \mu z_{ln})}{\partial z_n} \cdot \mu^{n+1} z_{rn} \\ \mu^{n+1} z_{rn+1} = \frac{\partial g(x_{ln}, \mu z_{ln})}{\partial x_n} \cdot \mu^{n+1} x_{rn} + \frac{\partial g(x_{ln}, \mu z_{ln})}{\partial z_n} \cdot \mu^{n+1} z_{rn} \end{cases}$$

Le système (I.94) s'écrit à l'ordre zéro en  $\mu$ , obtenu aussi pour  $\mu = 0$  :

$$(I.95) \quad \begin{cases} 0 = f_x(\cdot) x_{rn} + g_z(\cdot) z_{rn} & (a) \\ z_{rn+1} = f_x(\cdot) x_{rn} + g_z(\cdot) z_{rn} & (b) \end{cases}$$

La solution  $x_{rn}$  de l'équation algébrique (I.95-a), lorsqu'on la reporte dans (I.95-b), conduit à un système réduit de dimension  $q_2$ , caractérisant l'évolution de la partie rapide et appelée équation de couche limite.

$$(I.96) \quad z_{rn+1} = h(.) z_{rn}$$

L'approximation des composantes rapides valables  $\forall n$ , est ainsi obtenu par superposition de la solution de l'équation de couche limite  $z_{rn}$  définie dans un domaine du voisinage de  $n_0$ , et de la variable  $z_{\ell n}$  définie dans  $[n', N]$ , ( $n' > n_0$ ).

$$(I.97) \quad z_n = z_{\ell n} + z_{rn} + O(\mu)$$

### III.1.3 - Présentation dans le cas linéaire de la méthode des perturbations singulières

Nous supposons ici que les problèmes de modélisation sous forme d'un système échantillonné singulièrement perturbé sont résolus (la discussion à ce sujet sera faite dans le deuxième chapitre).

Soit un système linéaire représenté par l'équation d'état suivante :

$$(I.98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{21} & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = \begin{bmatrix} C_1 & C_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec :

$$X_n^T = \begin{bmatrix} x_n^T & z_n^T \end{bmatrix} \text{ le vecteur état } \in \mathbb{R}^q$$

$x_n \in \mathbb{R}^{q_1}$  regroupant les composantes lentes

$z_n \in \mathbb{R}^{q_2}$  regroupant les composantes rapides

$u_n \in \mathbb{R}^r$ ,  $y_n \in \mathbb{R}^p$  les vecteurs de commande et de sortie

$A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $C_j$  des matrices prenant des dimensions appropriées

Nous adopterons dans la suite, comme méthode des perturbations singulières pour les systèmes échantillonnés, celle qui consiste à faire apparaître dans le système (I.98) un petit paramètre  $\mu \in ]0, 1]$  affecté à une partie du vecteur état.

R.G. Phillips dans un article de synthèse sur les systèmes discrets singulièrement perturbés /Phillips, 1980/, propose le modèle suivant :

$$(I.99) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu^{1-\theta} A_{12} \\ \mu^\theta A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

avec :  $0 \leq \theta \leq 1$

$\mu$  est un petit paramètre positif qui permet de comparer les deux différentes échelles de temps et de normaliser les ordres de grandeur des termes de la matrice, il peut être exprimé par le rapport de :

$$\frac{\|A_{22}\|}{\|A_{11}\|}$$

L'étude qui suit concerne une classe de systèmes échantillonnés possédant la propriété de double échelle de temps, et s'écrivant sous la forme singulièrement perturbée suivante /Rajagopalan, Naidu, 1981/ /Kando, Iwazuni, 1983/ /El Moudni, Dauphin-Tanguy, Borne, 1984/ /Rajagopalan, Naidu, 1980/ /Kailaza, Naidu, 1980, 1981/ /Syracos, Sannuti, 1983/ :

$$(I.100) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec :  $x_0 = x(0)$ ,  $z_0 = z(0)$  sont les vecteurs état à l'instant initial

$$A_{12} = \frac{A_{12}^*}{\mu}, \quad A_{22} = \frac{A_{22}^*}{\mu}, \quad C_2 = \frac{C_2^*}{\mu}$$

Il apparaît que (I.100) peut être obtenu de (I.99) par un simple changement de base diagonal, ou en posant dans (I.100)  $\theta$  voisin de zéro et  $\mu \in ]0, 1]$ .

La modélisation (I.100) ainsi retenue apparaît, du point de vue formel, très proche de celle utilisée habituellement dans le cas des systèmes continus. En effet, le petit paramètre  $\mu$  intervient ici dans

le vecteur état  $\begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix}$ , et dans le cas continu, dans la dérivée du

vecteur état  $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mu \dot{z} \end{bmatrix}$ .

Nous présentons une méthode de simplification qui conduit à un découplage des dynamiques, semblable à celle utilisée de façon classique pour les systèmes continus /El Moudni, Dauphin-Tanguy, Borne, 1984/.

a) Approximation à l'ordre zéro :

a1) Etude de la partie lente :

Après la phase initiale où la partie rapide est prépondérante, l'influence des modes rapides devient négligeable, ce qui revient à faire tendre  $\mu$  vers zéro.

Pour  $\mu = 0$ , les variables  $x_n$ ,  $z_n$ ,  $u_n$  et  $y_n$  de (I.100) sont approchées par  $x_{ln}$ ,  $z_{ln}$ ,  $u_{ln}$  et  $y_{ln}$ . Nous obtenons le vecteur état associé à la partie lente :

$$(I.101) \quad \begin{cases} x_{ln+1} = A_{11} x_{ln} + B_1 u_{ln} & (a) \\ z_{ln+1} = A_{21} x_{ln} + B_2 u_{ln} & (b) \\ y_{ln} = C_1 x_{ln} & (c) \end{cases}$$

$$x_{\ell 0} = x_0 \quad \text{et} \quad z_{\ell 0} = A_{21} A_{11}^{-1} x_0$$

L'équation (I.101-a) décrit l'évolution des variables lentes, les variables rapides ont atteint leur régime permanent. Le système est de l'ordre  $q_1$ . L'équation (I.101-b) décrit le mouvement d'entraînement de la composante lente de la variable rapide  $z_{\ell n}$  par les variables lentes  $x_{\ell n}$ .

Si nous supposons que les conditions initiales sont conservées pour les composantes lentes, l'approximation du vecteur  $x_n$  par  $x_{\ell n}$  est valable sur tout l'intervalle  $[0, nT] \forall n$ . Par contre, d'une façon générale,  $z_{\ell 0}$  est différent de  $z_0$ . L'approximation des variables rapides par  $z_{\ell n}$  n'est donc pas valable sur tout l'intervalle de temps, mais seulement à partir d'un instant  $n'T$ .

D'où la définition d'un domaine dit "de couche limite" caractérisé par l'équation de couche limite.

a2) Etude de la partie rapide (couche limite) :

Pour définir la partie rapide du système, nous supposons que la composante rapide relative à  $x_n$  s'éteint rapidement, ce qui nous permet d'écrire à l'instant  $(n+1)$  :

$$(I.102) \quad x_{rn+1} = 0$$

Les composantes rapides des variables sont définies de la façon suivante :

$$(I.103) \quad \begin{cases} x_{rn} = x_n - x_{\ell n} & (a) \\ z_{rn} = z_n - z_{\ell n} & (b) \\ u_{rn} = u_n - u_{\ell n} & (c) \\ y_{rn} = y_n - y_{\ell n} & (d) \end{cases}$$

Pour exprimer les variables rapides, nous calculons la différence entre le système réel et le système lent approché. Il nous vient alors,

d'après l'hypothèse exprimée en (I.102) :

$$(I.104) \quad \begin{cases} 0 = A_{11} x_{rn} + A_{12} \mu z_{rn} + B_1 u_{rn} & (a) \\ z_{rn+1} = A_{21} x_{rn} + A_{22} \mu z_{rn} + B_2 u_{rn} & (b) \\ y_{rn} = \begin{bmatrix} C_1 & \mu C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{rn} \\ z_{rn} \end{bmatrix} & (c) \end{cases}$$

De (I.104-a), nous obtenons l'expression de la partie rapide de  $x_n$  :

$$(I.105) \quad x_{rn} = -A_{11}^{-1} A_{12} \mu z_{rn} - A_{11}^{-1} B_1 u_{rn}$$

En la substituant dans (I.104-b), il nous vient l'équation régissant la partie rapide du système :

$$(I.106) \quad \begin{cases} z_{rn+1} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \mu z_{rn} + (B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1) u_{rn} \\ y_{rn} = (C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}) \mu z_{rn} - C_1 A_{11}^{-1} B_1 u_{rn} \end{cases}$$

et :

$$z_{r0} = z_0 - z_{\ell 0} = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0 \quad \text{d'après (I.101)}$$

Ceci reste vrai si l'on suppose que la composante rapide de l'entrée  $u_{rn}$  ne porte que sur les variables rapides  $z_n$  et ne déstabilise pas la partie lente du système.

Le système réduit rapide comporte une transmission directe de l'information représentée par la matrice  $-C_1 A_{11}^{-1} B_1$ .

L'approximation des composantes rapides valable  $\forall n$  est ainsi obtenue par superposition de la solution de l'équation de couche limite définie dans le domaine  $[0, n']$  et de la variable  $z_{\ell n}$  définie dans  $[n', N]$   $N > n'$ .

$$z_n = z_{rn} + z_{\ell n} + o(\mu)$$

Le système global apparaît découplé :

$$(I.107) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_\ell \\ z_r \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ \mu z_r \end{bmatrix}_n + \\ \quad + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 - A_{21}A_{11}^{-1}B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\ell \\ u_r \end{bmatrix}_n \\ \\ y_n = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 - C_1A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell \\ \mu z_r \end{bmatrix}_n - C_1A_{11}^{-1}B_1 u_{rn} \\ \\ x_{\ell 0} = x_0 \quad z_{r0} = z_0 - A_{21}A_{11}^{-1}x_0 \end{array} \right.$$

Selon le domaine d'évolution du processus, le système réduit sera constitué de la partie rapide ou de la partie lente.

On constate que la partie lente découplée ne prend pas en compte l'évolution dynamique de la partie rapide, contrairement à la partie rapide pour laquelle une bonne précision est ainsi obtenue.

a3) Exemple d'application :

Soit le système de dimension 5 représenté en régime autonome par le modèle discret de matrice d'état A /Phillips, 1980/ représentant un générateur de vapeur :

$$A = \begin{bmatrix} 0,9014 & 0,1179 & 0,0525 & 0,0167 & 0,02104 \\ -0,0196 & 0,8743 & 0 & 0,025 & 0,02934 \\ -0,0071 & 0,7342 & 0,20175 & 0,013 & 0,21067 \\ -0,75 & 0,0557 & -0,032 & 0,19357 & -0,014076 \\ -0,306 & -0,01694 & -0,011 & 0,14278 & 0,013217 \end{bmatrix}$$

Le spectre des valeurs propres se décompose en deux parties :

$$\{0,8777 \pm 0,1054j\} \quad \text{et} \quad \{0,0179, 0,2055 \pm 0,0236j\}$$

Ce qui montre que le système comporte deux dynamiques, les composantes lentes correspondant aux variables  $x_n^1, x_n^2$  et les composantes rapides aux variables  $z_n^1, z_n^2$  et  $z_n^3$ , avec :

$$\begin{cases} x_n^T = (x_n^1, x_n^2) : \text{vecteur lent} \\ z_n^T = (z_n^1, z_n^2, z_n^3) : \text{vecteur rapide} \end{cases}$$

Le choix du paramètre  $\mu$  comme rapport des modules des valeurs propres extrêmes ( $\mu = 0,2$ ) conduit à modéliser le système sous forme singulièrement perturbée.

BU  
LILLE

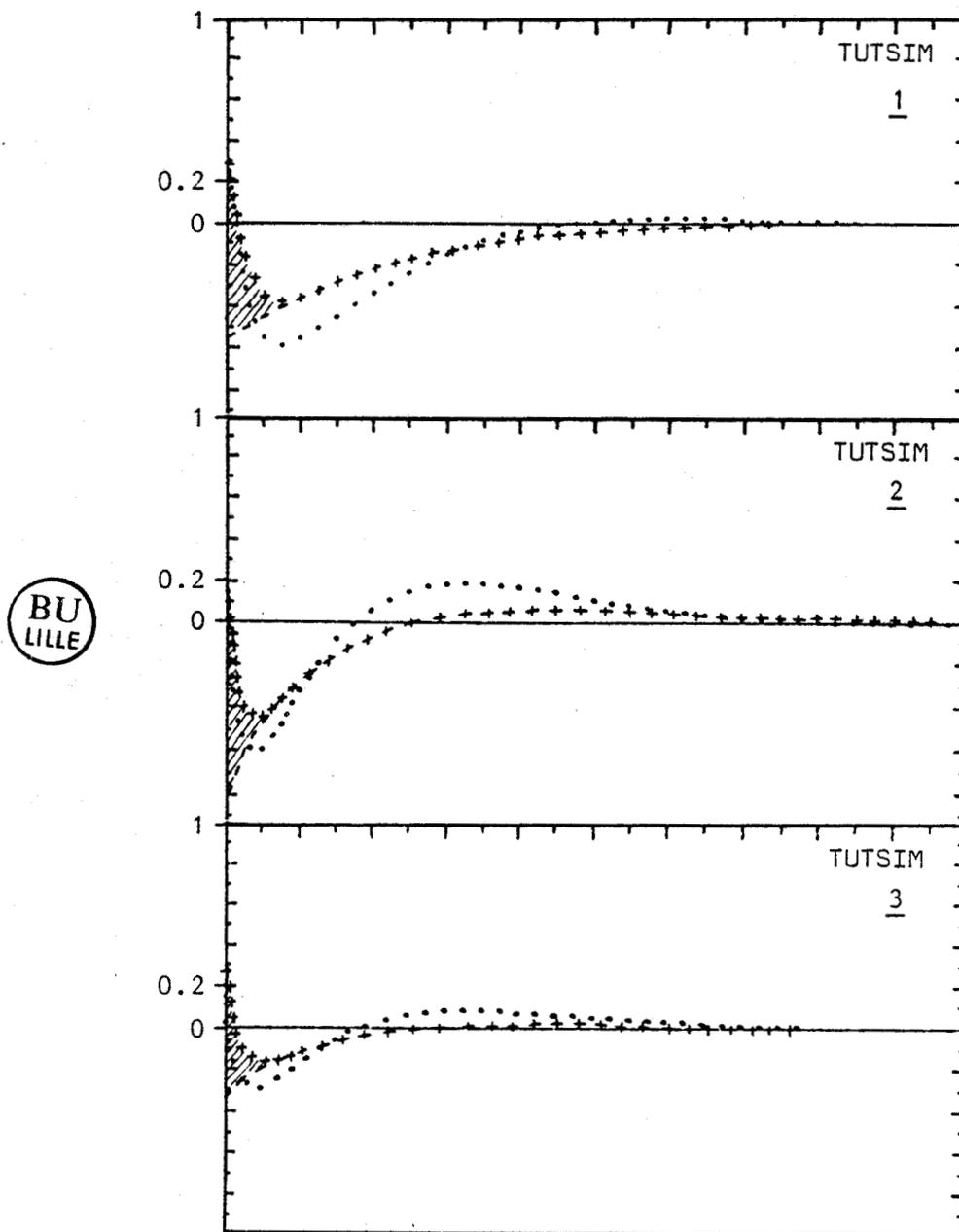
$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,9014 & 0,1179 & | & 0,2625 & 0,0835 & 0,1052 \\ -0,0196 & 0,8743 & | & 0 & 0,125 & 0,1467 \\ -0,0071 & 0,7342 & | & 1,00875 & 0,065 & 1,05335 \\ -0,75 & -0,0557 & | & -0,16 & 0,96785 & -0,0703 \\ -0,306 & -0,01694 & | & -0,055 & 0,7139 & 0,066085 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \mu z_n^1 \\ \mu z_n^2 \\ \mu z_n^3 \end{bmatrix}$$

Par application des relations (I.101) et (I.106), le système apparaît sous forme découplé.

$$\begin{bmatrix} x_\ell^1 \\ x_\ell^2 \\ z_r^1 \\ z_r^2 \\ z_r^3 \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,9014 & 0,1179 & | & & & \\ -0,0196 & 0,8743 & | & & & \\ \hline & & | & 0,20121 & -0,00814 & 0,18587 \\ & & | & 0 & 0,0116 & 0,20624 & 0,002 \\ & & | & 0,0068 & 0,14778 & 0,019517 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\ell^1 \\ x_\ell^2 \\ z_r^1 \\ z_r^2 \\ z_r^3 \end{bmatrix}_n$$

Une simulation du système (programme de simulation (TUTSIM) donne pour différentes composantes du vecteur état  $z_n$  les courbes suivantes

lorsque les conditions initiales valent respectivement 0.5, 0.2, 0.6.



BU  
LILLE

.....  $z_n^i$  : composante initiale      +++++  $\hat{z}_n^i = z_{ln}^i + z_{rn}^i$   
 -----  $z_{ln}^i$  : composante lente de  $z_n^i$

Les courbes de simulation obtenues font apparaître nettement le phénomène de couche limite (zones hachurées). L'approximation  $\hat{z}_n^i$  obtenue par superposition de  $z_{ln}^i$  et  $z_{rn}^i$  est d'autant plus proche de la variable réelle

$z_n^i$  que la séparation des dynamiques est plus marquée. On constate pour les trois composantes rapides découplées une très bonne précision statique.

b) Une méthode de développement en série des solutions :

Lorsque l'approximation à l'ordre zéro est insuffisante, plusieurs méthodes sont envisageables pour chercher un développement des solutions du système (I.108) en fonction de  $\mu$  :

$$(I.108) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_{11} x_n + A_{12} \mu z_n \\ z_{n+1} = A_{21} x_n + A_{22} \mu z_n \end{cases}$$

La plupart du temps, il est suffisant d'utiliser deux domaines d'évolution, un domaine relatif à l'évolution des parties lentes ( $x_{ln}$  et  $z_{ln}$ ) et un domaine correspondant à l'évolution des parties rapides ( $x_{rn}$  et  $z_{rn}$ ), et de faire un développement additif /Rajagopalan, Naidu, 1980/ /Naidu, Kailaza, 1981/, c'est cette technique que nous allons décrire ici.

On cherche alors un développement asymptotique des solutions  $x_n$  et  $z_n$  du système (I.108) sous la forme :

$$(I.109) \quad \begin{cases} x_n = x_{ln} + \mu^{n+1} x_{rn} \\ z_n = z_{ln} + \mu^n z_{rn} \end{cases}$$

Chacune des variables est donc séparée en une partie lente et une partie rapide. On choisit d'imposer que les variables rapides tendent vers zéro quand  $\mu$  tend vers zéro, c'est-à-dire que la partie rapide s'éteint et que la solution est donnée par  $x_{ln}$  et  $z_{ln}$  une fois le raccordement effectué (sauf pour  $z_n$  à  $n=0$ ).

On développe alors en fonction de  $\mu$ , chacune des variables de (I.109) soit (I.110) :

$$(I.110) \left\{ \begin{array}{l} x_{ln} = \sum_{j=0}^N x_{ln}^j \mu^j \quad / \quad z_{ln} = \sum_{j=0}^N z_{ln}^j \mu^j \quad (a) \\ x_{rn} = \sum_{j=0}^N x_{rn}^j \mu^j \quad / \quad z_{rn} = \sum_{j=0}^N z_{rn}^j \mu^j \quad (b) \end{array} \right.$$

En substituant les séries (I.110-a) dans (I.108) d'une part et les séries (I.110-b) d'autre part, nous obtenons les relations suivantes :



$$(I.111) \left\{ \begin{array}{l} (a) \left\{ \begin{array}{l} x_{ln+1}^0 + \mu x_{ln+1}^1 + \mu^2 x_{ln+1}^2 + \dots + \mu^k x_{ln+1}^k + \dots = \\ = A_{11} \left[ x_{ln}^0 + \mu x_{ln}^1 + \mu^2 x_{ln}^2 + \dots + \mu^k x_{ln}^k + \dots \right] + \\ + A_{12} \mu \left[ z_{ln}^0 + \mu z_{ln}^1 + \dots + \mu^k z_{ln}^k + \dots \right] \\ z_{ln+1}^0 + \mu z_{ln+1}^1 + \mu^2 z_{ln+1}^2 + \dots + \mu^k z_{ln+1}^k + \dots = \\ = A_{21} \left[ x_{ln}^0 + \mu x_{ln}^1 + \mu^2 x_{ln}^2 + \dots + \mu^k x_{ln}^k + \dots \right] + \\ + A_{22} \mu \left[ z_{ln}^0 + \mu z_{ln}^1 + \dots + \mu^k z_{ln}^k + \dots \right] \end{array} \right. \\ (b) \left\{ \begin{array}{l} \mu^{n+2} \left[ x_{rn+1}^0 + \mu x_{rn+1}^1 + \dots + \mu^k x_{rn+1}^k + \dots \right] = \\ A_{11} \mu^{n+1} \left[ x_{rn}^0 + \mu x_{rn}^1 + \mu^2 x_{rn}^2 + \dots + \mu^k x_{rn}^k + \dots \right] + \\ + A_{12} \mu^{n+1} \left[ z_{rn}^0 + \mu z_{rn}^1 + \dots + \mu^k z_{rn}^k + \dots \right] \\ \mu^{n+1} \left[ z_{rn+1}^0 + \mu z_{rn+1}^1 + \dots + \mu^k z_{rn+1}^k + \dots \right] = \\ A_{21} \mu^{n+1} \left[ x_{rn}^0 + \mu x_{rn}^1 + \mu^2 x_{rn}^2 + \dots + \mu^k x_{rn}^k + \dots \right] + \\ + A_{22} \mu^{n+1} \left[ z_{rn}^0 + \mu z_{rn}^1 + \dots + \mu^k z_{rn}^k + \dots \right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lorsque nous identifions les termes de même puissance en  $\mu$ , il nous vient, pour les parties lentes, à partir de (I.111-a) :

- à l'ordre zéro :

$$(I.112) \quad \begin{cases} x_{\ell n+1}^0 = A_{11} x_{\ell n}^0 & (a) \\ z_{\ell n+1}^0 = A_{21} x_{\ell n}^0 & (b) \end{cases}$$

Ce système réduit est le même que celui obtenu en posant  $\mu = 0$  dans (I.108), il correspond alors à la partie lente (I.101) sans entrées. Le système admet une solution si  $x_{\ell 0}^0 = x_0$ . Une fois  $x_{\ell n}^0$  déterminé,  $z_{\ell n}^0$  est automatiquement fixée par (I.112-b).

- à l'ordre 1 :

$$(I.113) \quad \begin{cases} x_{\ell n+1}^1 = A_{11} x_{\ell n}^1 + A_{12} z_{\ell n}^0 & (a) \\ z_{\ell n+1}^1 = A_{21} x_{\ell n}^1 + A_{22} z_{\ell n}^0 & (b) \end{cases}$$

- à l'ordre 2, nous avons :

$$(I.114) \quad \begin{cases} x_{\ell n+1}^2 = A_{11} x_{\ell n}^2 + A_{12} z_{\ell n}^1 & (a) \\ z_{\ell n+1}^2 = A_{21} x_{\ell n}^2 + A_{22} z_{\ell n}^1 & (b) \end{cases}$$

et ainsi de suite jusqu'à un ordre élevé.

Les solutions de (I.113-a), (I.114-a) exigent la détermination des conditions initiales  $x_{\ell 0}^1$  et  $x_{\ell 0}^2$  qui sont obtenues par la résolution des équations régissant les parties rapides (notons que la détermination des solutions  $x_{\ell n}^1$  et  $x_{\ell n}^2$  fixe celle de  $z_{\ell n}^1$  et  $z_{\ell n}^2$  par (I.113-b) et (I.114-b)). Celles-ci sont obtenues par identification aussi à partir de (I.111-b), il nous vient alors :

- à l'ordre zéro :

$$(I.115) \quad \begin{cases} 0 = A_{11} x_{rn}^0 + A_{12} z_{rn}^0 & (a) \\ z_{rn+1}^0 = A_{21} x_{rn}^0 + A_{22} z_{rn}^0 \end{cases}$$

En supposant  $A_{11}$  inversible, (I.115) s'écrit encore sous la forme :

$$I.116) \quad \begin{cases} x_{rn}^0 = -A_{11}^{-1} A_{12} z_{rn}^0 & (a) \\ z_{rn+1}^0 = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) z_{rn}^0 & (b) \end{cases}$$

En régime autonome, (I.116) correspondent aux deux équations déjà établies en (I.105) et (I.106) exprimant l'évolution de la partie rapide du système : équation de couche limite.



- à l'ordre 1, nous obtenons la relation :

$$(I.117) \quad \begin{cases} x_{rn+1}^0 = A_{11} x_{rn}^1 + A_{12} z_{rn}^1 & (a) \\ z_{rn+1}^1 = A_{21} x_{rn}^1 + A_{22} z_{rn}^1 & (b) \end{cases}$$

qui peut encore s'écrire :

$$(I.118) \quad \begin{cases} x_{rn}^1 = A_{11}^{-1} x_{rn+1}^0 - A_{11}^{-1} A_{12} z_{rn}^1 & (a) \\ z_{rn+1}^1 = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) z_{rn}^1 + A_{21} A_{11}^{-1} x_{rn+1}^0 & (b) \end{cases}$$

- à l'ordre 2, on a :

$$(I.119) \quad \begin{cases} x_{rn+1}^1 = A_{11} x_{rn}^2 + A_{12} z_{rn}^2 & (a) \\ z_{rn+1}^2 = A_{21} x_{rn}^2 + A_{22} z_{rn}^2 \end{cases}$$

ou encore :

$$(I.120) \quad \begin{cases} x_{rn}^2 = A_{11}^{-1} x_{rn+1}^1 - A_{11}^{-1} A_{12} z_{rn}^2 & (a) \\ z_{rn+1}^2 = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) z_{rn}^2 + A_{21} A_{11}^{-1} x_{rn+1}^1 & (b) \end{cases}$$

Des équations à un ordre quelconque peuvent être obtenues.

Les solutions de (I.116-b), (I.118-b) et (I.120-b) peuvent être déterminées, si on connaît les valeurs initiales  $z_{r0}^0$ ,  $z_{r0}^1$  et  $z_{r0}^2$ . Une fois  $z_{rn}^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) connues,  $x_{rn}^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) sont fixées par (I.116-a), (I.118-a) et (I.120-a).

Pour déterminer ces valeurs initiales ( $x_{l0}^1$ ,  $x_{l0}^2$ ,  $z_{r0}^1$  et  $z_{r0}^2$ ), nous utilisons l'expression totale de  $x_n$  et  $z_n$  :

$$(I.121) \left\{ \begin{array}{l} x_n = x_{ln}^0 + \mu x_{ln}^1 + \mu^2 x_{ln}^2 + \dots + \mu^k x_{ln}^k + \dots + \\ \quad + \mu^{n+1} \left[ x_{rn}^0 + \mu x_{rn}^1 + \mu^2 x_{rn}^2 + \dots + \mu^k x_{rn}^k + \dots \right] \\ z_n = z_{ln}^0 + \mu z_{ln}^1 + \mu^2 z_{ln}^2 + \dots + \mu^k z_{ln}^k + \dots + \\ \quad + \mu^n \left[ z_{rn}^0 + \mu z_{rn}^1 + \mu^2 z_{rn}^2 + \dots + \mu^k z_{rn}^k + \dots \right] \end{array} \right.$$

vérifiant à l'instant initial  $n = 0$  :



$$(I.122) \left\{ \begin{array}{l} x_0 = x_{l0}^0 + \mu x_{l0}^1 + \mu^2 x_{l0}^2 + \dots + \mu^k x_{l0}^k + \dots + \\ \quad + \mu \left[ x_{r0}^0 + \mu x_{r0}^1 + \mu^2 x_{r0}^2 + \dots + \mu^k x_{r0}^k + \dots \right] \\ z_0 = z_{l0}^0 + \mu z_{l0}^1 + \mu^2 z_{l0}^2 + \dots + \mu^k z_{l0}^k + \dots + \\ \quad + \left[ z_{r0}^0 + \mu z_{r0}^1 + \mu^2 z_{r0}^2 + \dots + \mu^k z_{r0}^k + \dots \right] \end{array} \right.$$

On retrouve :

$$x_0 = x_{l0}^0 \quad \text{et} \quad z_0 \neq z_{l0}^0$$

Il nous vient alors, en identifiant suivant les puissances successives de  $\mu$  :

- à l'ordre zéro :

$$(I.123) \quad \begin{cases} x_{\ell 0}^0 = x_0 & (a) \\ z_{r0}^0 = z_0 - z_{\ell 0}^0 & (b) \end{cases}$$

Soit, lorsque nous remplaçons  $z_{\ell 0}^0$  par sa valeur tirée de (I.112),  $z_{r0}^0$  est complètement déterminé et s'écrit :

$$z_{r0}^0 = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0$$

ce qui est semblable à l'équation établie en (I.107).

- à l'ordre 1 et 2, nous obtenons respectivement :

$$(I.124) \quad \begin{cases} z_{r0}^1 = - z_{\ell 0}^1 & (a) \\ z_{r0}^2 = - z_{\ell 0}^2 & (b) \end{cases}$$

et

$$(I.125) \quad \begin{cases} x_{r0}^0 = - x_{\ell 0}^1 & (a) \\ x_{r0}^1 = - x_{\ell 0}^2 & (b) \end{cases}$$

En utilisant les relations données par (I.123), (I.124) et (I.125), les équations correspondant aux parties lente et rapide peuvent être résolues.

L'examen de cette technique que nous avons développée, révèle que la situation est analogue à celle des systèmes continus singulièrement perturbés qui utilisent cette forme de développement asymptotique. En continu, les parties lente et rapide sont prises dans des échelles de temps différentes.

Remarque sur la modélisation :

La modélisation proposée des systèmes échantillonnés multi-échelle de temps sous forme singulièrement perturbée, présente une dualité nette avec celle appliquée au cas continu /Dauphin-Tanguy, 1983/ /Kokotovic, 1975/.

Elle apparaît tout d'abord dans l'introduction du petit paramètre  $\mu$  au sein du vecteur état (dans la dérivée du vecteur état en continu), mais aussi dans la forme des résultats calculés pour les systèmes découplés. En effet, une dynamique est obtenue avec une plus grande précision. Il s'agit ici de la dynamique rapide qui tient compte de la partie lente découplée (dans le cas continu, c'est le cas pour la partie lente). Ceci peut être un inconvénient quand l'étude concerne particulièrement la partie lente. Une nouvelle approche permettant de pallier cette difficulté fera l'objet d'une étude détaillée dans le troisième chapitre.

III.2 - Perturbations singulières sur les représentations récurrentes d'ordre élevé

III.2.1 - Position du problème

Considérons un système linéaire stable en régime autonome, régi par une équation de récurrence scalaire relative à la composante  $y_n$ . Elle s'écrit sous la forme :

$$(I.126) \quad \alpha_{q_1+q_2} y_{n+q_1+q_2} + \alpha_{q_1+q_2-1} y_{n+q_1+q_2-1} + \dots + \\ + \alpha_{q_2} y_{n+q_2} + \alpha_{q_2-1} y_{n+q_2-1} + \dots + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = 0$$

où les coefficients constants  $\alpha_0, \dots, \alpha_{q_2-1}$  sont très petits comparés aux autres coefficients  $\alpha_{q_2+q_1}, \dots, \alpha_{q_2}$ .

Par un choix approprié d'un petit paramètre positif  $\mu \in ]0, 1]$ , les  $q_2$  coefficients  $\alpha_{q_2-1}, \dots, \alpha_0$  peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\alpha_{q_2-1} = \mu a_{q_2-1} \quad \alpha_{q_2-2} = \mu^2 a_{q_2-2} \quad \dots$$

$$\alpha_1 = \mu^{q_2-1} a_1 \quad \alpha_0 = \mu^{q_2} a_0$$

avec :

$$\alpha_i = a_i \quad \text{pour} \quad i = q_1+q_2, \dots, q_2$$

(I.126) peut être réécrite en fonction de  $\mu$  sous la forme (I.127) :

$$(I.127) \quad a_{q_2+q_1} y_{n+q_2+q_1} + a_{q_2+q_1-1} y_{n+q_2+q_1-1} + \dots +$$

$$a_{q_2} y_{n+q_2} + a_{q_2-1} \mu y_{n+q_2-1} + a_{q_2-2} \mu^2 y_{n+q_2-2} + \dots +$$

$$a_0 \mu^{q_2} y_n = 0$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$(I.128) \quad y(n=0) = y(0) \quad y(n=1) = y(1) \quad \dots \quad y(n=q_2+q_1-1) = y(q_2+q_1-1)$$

Cette forme récurrente (I.127) admet une représentation équivalente dans l'espace d'état :

$$(I.129) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

avec :

$$x_n^T = (y_{n+q_2+q_1-1} \ y_{n+q_2+q_1-2} \ \dots \ y_{n+q_2}) \quad x_n \in \mathbb{R}^{q_1}$$

$$z_n^T = (y_{n+q_2-1} \ \mu y_{n+q_2-2} \ \dots \ \mu^{q_2-1} y_n) \quad z_n \in \mathbb{R}^{q_2}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \frac{-a_{q_2+q_1-1}}{a_{q_2+q_1}} & \dots & \frac{-a_{q_2}}{a_{q_2+q_1}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-a_{q_2-1}}{a_{q_2+q_1}} & \dots & \frac{-a_0}{a_{q_2+q_1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\mu A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

III.2.2 - Découplage des deux dynamiques

a) Partie lente :

Puisque la représentation d'état (I.129) est sous forme singulièrement perturbée, il en est de même de la forme récurrente (I.127). Lorsque

nous mettons  $\mu = 0$  dans les deux représentations, leur ordre est réduit de  $q_2+q_1$  à  $q$ . Les composantes  $y_{n+i}$  sont approchées par  $y_{\ell n+i}$  ( $i = q_2+q_1, \dots, q_2$ ) et  $x_n$  par  $x_{\ell n}$ . Il nous vient alors les deux systèmes réduits équivalents :

$$(I.130) \quad \begin{cases} a_{q_2+q_1} y_{\ell n+q_2+q_1} + a_{q_2+q_1-1} y_{\ell n+q_2+q_1-1} + \dots + \\ + a_{q_2} y_{\ell n+q_2} = 0 \\ x_{\ell n+1} = A_{11} x_{\ell n} ; \quad x_{\ell n}^T = (y_{\ell n+q_2+q_1}, \dots, y_{\ell n+q_2})^T \end{cases}$$

Les deux représentations réduites ainsi obtenues correspondent à la partie lente du système (I.127). Ceci suppose que les composantes rapides du système ont atteint leur régime établi.

Les conditions initiales sont conservées pour cette partie lente :

$$(I.131) \quad x_{\ell 0} = x_0$$

Conséquence :

En posant  $\mu = 0$  dans une équation récurrente singulièrement perturbée (I.127), la partie restante représente la partie lente du système. Les conditions initiales étant conservées pour cette partie.

b) Partie rapide :

Pour établir les équations régissant la partie rapide, nous utilisons les résultats établis sur les représentations d'état. Nous utilisons pour cela les relations (I.105). Il nous vient d'après (I.129) :

$$(I.132) \quad \begin{cases} z_{rn+1} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \mu z_{rn} \\ z_{r0} = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0 \end{cases}$$

Lorsque nous explicitons ces différentes expressions, nous obtenons :

$$(I.133) \quad \left. \begin{aligned} z_{rn+1} &= \begin{bmatrix} \frac{-\mu a_{q_2-1}}{a_{q_2}} & \dots & \frac{-\mu^{q_2-1} a_1}{a_{q_2}} & \frac{-\mu^{q_2} a_0}{a_{q_2}} \\ \mu & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \diagdown & \diagdown & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{bmatrix} z_{rn} \\ z_{r0} &= \begin{bmatrix} y_{r(q_2-1)} \\ \vdots \\ y_r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{(q_2-1)} \\ \vdots \\ y(0) \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} \frac{-a_{q_2+q_1}}{a_{q_2}} & \dots & \frac{-a_{q_2+1}}{a_{q_2}} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{(q_2+q_1-1)} \\ \vdots \\ y_{(q_2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$



A cette forme d'état (I.133) correspond une représentation scalaire équivalente (I.134) :

$$(I.134) \quad a_{q_2} y_{rn+q_2} + a_{q_2-1} \mu y_{rn+q_2-1} + \dots + a_1 \mu^{q_2-1} y_{rn+1} + a_0 \mu^{q_2} y_{rn} = 0$$

Cette équation en régime autonome correspond à la partie de l'équation de récurrence initiale (I.127) perdue par l'opération  $\mu = 0$ .

Nous remarquons qu'il y a conservation des conditions initiales pour toutes les composantes sauf  $y_{rn+q_2-1}$ . Ceci s'explique par le fait que dans la mise en équation d'état, les composantes de  $z_{n+1}$  se trouvent affectées de  $\mu$  sauf la première composante  $y_{n+q_2}$  et de ce fait lorsque nous posons  $\mu = 0$ , cette dernière ne disparaît pas et devient lente entraînée par le vecteur  $x_n$ .

Conséquence :

La partie rapide de l'équation de récurrence (I.127) s'obtient en considérant la partie affectée par le petit paramètre  $\mu$ . Les conditions initiales ne sont pas conservées pour cette partie.

Le système correspondant à l'équation de récurrence scalaire (I.127) apparaît ainsi découpée avec les deux parties :

$$(I.135) \quad \begin{cases} \text{Partie lente : } a_{q_2+q_1} y_{\ell n+q_2+q_1} + \dots + a_{q_2} y_{\ell n+q_2} = 0 \\ \text{Partie rapide : } a_{q_2} y_{rn+q_2} + \mu a_{q_2-1} y_{rn+q_2-1} + \dots + \mu^{q_2} a_0 y_{rn} = 0 \end{cases}$$

et suivant l'évolution du processus considéré, le système réduit sera constitué de la partie lente ou de la partie rapide.

Application :

Considérons l'équation de récurrence à coefficients numériques suivante :

$$\begin{cases} y_{n+4} + 0,6 y_{n+3} + 0,5 y_{n+2} + 0,09 y_{n+1} + 0,008 y_n = 0 \\ y(3), y(2), y(1) \text{ et } y(0) \end{cases}$$

Cette équation peut être mise sous la forme singulièrement perturbée en faisant apparaître un coefficient  $\mu = 0,1$  ; soit alors :

$$y_{n+4} + 0,6 y_{n+3} + 0,5 y_{n+2} + 0,9 \mu y_{n+1} + 0,8 \mu^2 y_n = 0$$

Les deux systèmes découplés apparaissent sous la forme :

$$y_{\ell n+4} + 0,6 y_{\ell n+3} + 0,5 y_{\ell n+2} = 0$$

et  $y_{\ell}(3) = y(3) \quad y_{\ell}(2) = y(2)$

pour sa partie lente. La partie rapide s'écrit :

$$0,5 y_{rn+2} + 0,09 y_{rn+1} + 0,008 y_{rn} = 0$$

et  $y_r(1) = y(1) - \frac{1}{0,5} [y(3) + 0,6 y(2)]$   $y_{r0} = y(0)$

### CONCLUSION

Il n'y a pas de modèle universel, ni de méthode de réduction générale. Des critères de choix existent, fondés sur le but poursuivi et le domaine d'application concerné. La théorie des perturbations singulières que nous venons d'introduire est un moyen particulièrement attirant de réduction de modèle. Cette réduction repose sur une décomposition temporelle du système global de dimension  $q = q_1 + q_2$  en un système de dimension  $q_1$  et un système de dimension  $q_2$ . Il s'ensuit que l'analyse du système original (d'état ou séquence) peut être réduite à l'analyse des deux sous-systèmes issus de la décomposition. Elle est encore peu connue au niveau direct de l'utilisateur et actuellement en grand développement. Elle apparaît comme une technique de réduction de dimensionnalité avec des champs d'application très variés et une implémentation numérique très simple.

Dans les prochains chapitres, nous étudierons le problème de la modélisation sous forme de systèmes à plusieurs échelles de temps et de la mise en évidence de ces dynamiques.

ANNEXE 1

PROPRIETES DE DETERMINANT MATRICIEL

1. Le déterminant matriciel est une fonction multilinéaire par rapport aux vecteurs qui le composent.

2.  $M$  et  $M' \in E$ , on a :  $\text{DET}(M.M') = \text{DET}(M) . \text{DET}(M')$ .

3. Comme en scalaire, le calcul de ce déterminant peut être effectué par développement par rapport aux lignes ou colonnes de la matrice introduisant ainsi la notion de mineurs matriciels associés à chaque élément  $M_{ij}$  de  $M$ .

4. L'inverse de la matrice  $M$  noté  $M^{-1}$  existe si le  $(\text{DET}(M))^{-1}$  existe et se calcule comme dans le cas scalaire par la méthode usuelle de la matrice adjointe de  $M$ .

Nous avons en plus /El Moudni, 1981/ :

Théorème 1 :

$$(A1.1) \quad [\text{DET}(M)]^T = \text{DET}(M^T)$$

dont la démonstration est évidente.

Théorème 2 :

$$(A1.2) \quad \det M = \det (\text{DET } M)$$

Démonstration :

Nous allons démontrer ce théorème par récurrence.

pour  $r = 1$ , on a  $\text{DET } M = M_{11} = M$

donc :  $\det (\text{DET } M) = \det M$

Supposons la propriété vérifiée à l'ordre  $r$ , démontrons là à l'ordre  $r+1$ . Pour cela, nous considérons la matrice  $M_1$  partitionnée en  $(r+1)^2$  blocs commutatifs :

$$M_1 = \begin{bmatrix} M & B \\ C & M \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} B = (B_1 \dots B_r) \quad B_i \in \mathbb{E}' \\ C^T = (C_1^T \dots C_r^T) \quad C_i \in \mathbb{E}' \end{array}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{r1} & \dots & M_{rr} \end{bmatrix} \quad \text{notée aussi sous la forme } (D_1 \dots D_r) \text{ avec}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} M_{1i} \\ \vdots \\ M_{ri} \end{bmatrix}. \quad \text{Supposons que } M \text{ est régulière, il nous vient /Gantmacher, 1968/ :$$

$$\det M_r = \det M \det (M - CM^{-1}B) = \det H$$

avec :

$$H = (M - CM^{-1}B) \begin{bmatrix} M & & & \\ & I_s & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_s \end{bmatrix}$$

qui s'écrit encore :

$$H = \left[ MD_1 - CB_1, D_2 - CM^{-1}B_2, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right]$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\det H = \det \text{DET } H$$

Calculons alors le déterminant matriciel de  $H$ , soit :

$$\text{DET } H = \text{DET} \left[ MD_1 - CB_1, D_2 - CM^{-1}B_2, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right]$$

D'après les propriétés de déterminant matriciel, cette expression peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{DET } H = & \text{DET} \left[ MD_1, D_2 - CM^{-1}B_2, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right] + \\ & + \text{DET} \left[ -CB_1, D_2 - CM^{-1}B_2, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right] \end{aligned}$$



soit encore, par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \text{DET } H = & \text{DET} \left[ MD_1, D_2, D_3 - CM^{-1}B_3, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right] + \\ & + \text{DET} \left[ MD_1, -CM^{-1}B_2, D_3 - CM^{-1}B_3, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right] + \\ & + \text{DET} \left[ -CB_1, D_2, D_3 - CM^{-1}B_3, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right] + \\ & + \text{DET} \left[ -CB_1, -CM^{-1}B_2, D_3 - CM^{-1}B_3, \dots, D_r - CM^{-1}B_r \right] \end{aligned}$$

Or, le dernier terme a deux colonnes proportionnelles,  $CB$  et  $CB_2 M^{-1}$ , il est donc nul.

En développant de la même manière toutes les colonnes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{DET } H &= M \text{ DET } (D_1, \dots, D_r) \\ &+ B_1 \text{ DET } (C, D_2, \dots, D_r) \\ &+ B_2 \text{ DET } (D_1, C, \dots, D_r) \\ &\vdots \\ &+ (-1)^i B_i \text{ DET } (D_1, \dots, D_i, C, D_{i+1}, \dots, D_r) \\ &+ (-1)^r B_r \text{ DET } (D_1, \dots, D_{r-1}, C) \end{aligned}$$

L'expression trouvée est celle de déterminant matriciel de  $M_1$  développée par rapport à sa première ligne et ceci identiquement au calcul mené sur les matrices à coefficients scalaires. Nous obtenons donc :

$$\det H = \det \text{DET } H$$

et

$$\det M_1 = \det \text{DET } M_1$$

Si certaines matrices de la diagonale principale sont singulières, le théorème reste valable par passage à la limite /Gantmacher, 1968/.

Le résultat énoncé apparaît d'une façon non explicite dans un article de synthèse /Denis, Traub, Weber, 1976/.

CHAPITRE II

## ETUDE DES SYSTEMES A DEUX DYNAMIQUES

---

### INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons développer des méthodes analytiques qui permettent de déterminer des variables lentes et rapides d'un système dynamique. Nous généraliserons aux cas des systèmes échantillonnés, une méthode géométrique de localisation des modes dans le plan complexe, établie pour les systèmes continus.

Lorsque la méthode des perturbations singulières peut s'appliquer à un modèle échantillonné à deux dynamiques, la qualité du système découplé obtenu dépend fortement de la représentation d'état initiale choisie. L'utilisation de la forme en flèche s'avère dans ce sens très intéressante et conduit à une détermination systématique du système découplé. Cette méthode valable pour les systèmes linéaires, s'adapte parfaitement aux systèmes non linéaires de grande dimension de type Lur'e Posnikov.

Après une présentation de la méthode de séparation des dynamiques utilisée dans l'hypothèse échantillonné, nous proposons une méthode de découplage à partir d'une représentation d'état en flèche. La méthode proposée de mise en oeuvre particulièrement aisée permet de séparer au mieux les différentes dynamiques du processus étudié, s'interprète et s'explique dans de nombreux cas directement sur la fonction de transfert de la partie linéaire du processus.

La forme en flèche s'avère un outil très puissant. Elle permet d'une part, d'énoncer une condition suffisante de stabilité asymptotique des systèmes non linéaires de type Lur'e Posnikov ; d'autre part la détermination de la commande optimale dans le cas linéaire se fait de façon plus économique puisqu'elle réduit la résolution d'une équation de Riccati relative à la partie lente à une résolution d'une équation algébrique d'expression simplifiée, et ceci avec une précision obtenue

habituellement pour la commande composite.

Une étude comparative entre les sous-systèmes découplés obtenus des systèmes discrets et continus permet d'apporter une solution quand l'étude concerne la partie lente discrète. En effet cette dernière, lorsqu'elle est découplée, ne se trouve pas très précise, puisqu'elle ne tient pas compte de la partie rapide discrète.

## I - PRESENTATION DES METHODES ANALYTIQUES DE MISE EN EVIDENCE DES DYNAMIQUES

### I.1 - Introduction

La modélisation des systèmes dynamiques ayant des modes lents et des modes rapides est obtenue en décomposant le système en deux sous-systèmes qui mettent en évidence les échelles de temps différentes. Pour ce faire, nous définissons dans la suite la notion de double échelle de temps.

### I.2. - Définition d'un système à double échelle de temps

Un système linéaire stationnaire stable caractérisé par l'équation d'état :

$$(II.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A x_n + B u_n \\ y_n = C x_n \end{cases} \quad x_n \in \mathbb{R}^q$$

possède la propriété de double échelle de temps s'il peut être décomposé en deux sous-systèmes disjoints :

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{\ell n+1} \\ x_{rn+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\ell n} \\ x_{rn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_r \end{bmatrix} u_n \\ y_n &= \begin{bmatrix} C_\ell & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\ell n} \\ x_{rn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec  $x_{\ell n} \in \mathbb{R}^{q_1}$   
 $x_{rn} \in \mathbb{R}^{q_2}$        $q_1 + q_2 = q$

tels que :

$$(II.3) \quad |\lambda_{\min}(A_{\ell})| \gg |\lambda_{\max}(A_r)|$$

avec  $A_{\ell}$  et  $A_r$  regroupant respectivement les modes lents et rapides.

La condition (II.3) exprime que  $(A_{\ell})^n$  décroît beaucoup moins vite que  $(A_r)^n$ .

A partir de la relation (II.3), il a été montré [Phillips 1980] que l'on pouvait exprimer la propriété de double échelle de temps par des conditions portant non plus sur des valeurs propres mais sur les normes de matrices.

Toute matrice carrée  $A$  et sa norme euclidienne  $\|A\|$  vérifient la relation :

$$(II.4) \quad |\lambda_{\max}(A)| \leq \|A\|$$

et si  $A^{-1}$  existe

$$|\lambda_{\min}(A)|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$$

il nous vient une nouvelle propriété de la forme :

$$(II.5) \quad \|A_r\|^{-1} \gg \|A_{\ell}^{-1}\|$$

### I.3 - Présentation d'une méthode de mise en évidence de dynamiques

#### I.3.1. - Mise sous forme diagonale

Dans le cas d'un système linéaire, l'existence de plusieurs échelles de temps et de sous-systèmes associés peut être mise en évidence par des méthodes classiques de transformation de modèle et de bloc diagonalisation.

Nous sommes amenés à rechercher une description partitionnée de

(II.1) sous la forme :

$$(II.6) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = (C_1 \quad C_2) \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

où  $x_n^1 \in \mathbb{R}^{q1}$ ,  $x_n^2 \in \mathbb{R}^{q2}$

qui correspond à une partition arbitraire de vecteur état  $x_n$  initial.

Par la transformation (II.7) :

$$(II.7) \left\{ \begin{array}{l} x_n^1 = x_n^1 \\ z_{rn} = L x_n^1 + x_n^2 \end{array} \right.$$

(II.6) devient :

$$(II.8) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ z_{rn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & A_{12} \\ R(L) & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ z_{rn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_r \end{bmatrix} u_n \\ y = \begin{bmatrix} C_\ell & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ z_{rn} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec

$$(II.9) \left\{ \begin{array}{l} A_\ell = A_{11} - A_{12} L \\ A_r = A_{22} + L A_{12} \\ R(L) = A_{21} + L A_{11} - L A_{12} L - A_{22} L \\ B_r = L B_1 + B_2 \\ C_\ell = C_1 - C_2 L \end{array} \right.$$

Une deuxième transformation (II.10)

$$(II.10) \left\{ \begin{array}{l} x_{\ell n} = x_n^1 + M z_{rn} \\ z_{rn} = z_{rn} \end{array} \right.$$

transforme le système (II.8) sous la forme :

$$(II.11) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{\ell n+1} \\ z_{rn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\ell} - MR(L) & R(M) - MR(L)M \\ R(L) & A_r + R(L)M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\ell n} \\ z_{rn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\ell} \\ B_r \end{bmatrix} u_n \\ y_n = \begin{bmatrix} C_{\ell} & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\ell n} \\ z_{rn} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec

$$(II.12) \left\{ \begin{array}{l} B_{\ell} = B_1 - M B_r \\ C_r = C_2 - C_{\ell} M \\ R(M) = A_{12} - A_{\ell} M + M A_r \end{array} \right.$$

la matrice caractéristique du système (II.11) obtenue par les deux transformations (II.7) et (II.10) peut se mettre sous la forme diagonale si respectivement les résidus R(L) et R(M) sont nuls. Ce qui revient à chercher L et M solutions respectives de :

$$(II.13) \left\{ \begin{array}{l} R(L) = 0 = A_{21} + L A_{11} - L A_{12} L - A_{22} L \quad (a) \\ R(M) = 0 = A_{12} - A_{\ell} M + M A_r \quad (b) \end{array} \right.$$

Le but de cette diagonalisation est de rassembler dans le vecteur  $x_{\ell n}$  les composantes lentes et dans le vecteur  $z_{rn}$  les composantes rapides. Ceci est réalisé par la solution L de (II.13 a). Cette solution n'est pas unique puisqu'elle dépend de l'ordre dans lequel sont prises les composantes de vecteur état.

L'existence et le calcul des solutions L et M des équations (II.13) ont été étudiés par de nombreux auteurs [Kokotović 1975] [chow, Kokotović 1970] [Magni 1981] [Avramović 1979].

I.3.2. - Détermination des solutions de R(M) et R(L)

a) Calcul des suites  $L_k$  et  $M_k$

La méthode proposée par [Kokotovic 1975] consiste à définir une suite (II.14) :

$$(II.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{k+1} = (A_{22} L_k + L_k A_{12} L_k - A_{21}) A_{11}^{-1} \\ \text{avec } \begin{cases} L_0 = -A_{21} A_{11}^{-1} \\ A_0 = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{cases} \end{array} \right.$$

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées par le système (II.6) [Kando, Iwazumi, 1984].



$$(II.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A_{11} \text{ inversible} \\ -\|A_{11}^{-1}\| < \min \left[ \frac{1}{2 \left[ \|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| \right]}, \frac{\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|}{\left[ \|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| \right]^2 + 8 \left[ \|A_0\| \|A_{12}\| \|L_0\| \right]} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \|L_0\| = \|A_{21} A_{11}^{-1}\| \\ \|A_0\| = \|A_{22} + L_0 A_{12}\| = \|A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}\| \end{array} \right.$$

La suite (II.14) converge vers une racine unique bornée L : solution de l'équation de Riccati R(L) et dont l'amplitude est :

$$(II.16) \quad 0 \leq \|L\| \leq \|L_0\| + \frac{\left[ 2 \left[ \|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| \right] \|L_0\| \right]}{\left[ \|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| \right]}$$

et vérifie la propriété de double échelle de temps :

$$(II.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda (A_{11} - A_{12} L) = \lambda (A_l) \\ \lambda (A_{22} + L A_{12}) = \lambda (A_r) \end{array} \right.$$

de plus,  $k = 0$  dans (II.14), nous donne :

$$L_1 = L_0 + A_0 L_0 A_{11}^{-1}$$

soit :

$$(II.18) \quad \frac{\|L_1 - L_0\|}{\|L_0\|} \leq \|A_0\| \|A_{11}^{-1}\|$$

Si en plus de la condition (II.15), l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$(II.19) \quad \mu = \|A_0\| \|A_{11}^{-1}\| \ll 1 \quad (\mu \in ] 0 \ 1 ] )$$

Il vient (II.20), lorsque  $\|A_{12}\| \|L_0\| = O(\mu)$

$$(II.20) \quad \frac{\|L_1 - L_0\|}{\|L_0\|} < \mu$$

ce qui permet d'utiliser  $L_0$  comme une approximation à  $O(\mu)$  de :

$$(II.21) \quad L = L_0 + O(\mu) = -A_{21} A_{11}^{-1} + O(\mu)$$

d'où les résultats suivants :

$$(II.22) \quad \begin{cases} A_\ell = A_{11} + O(\mu) \\ A_r = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} + O(\mu) \end{cases}$$

De la même façon, la solution  $M$  de l'équation de Lyapunov  $R(M)$

(II.13 b) peut être calculée par la récurrence suivante :

$$(II.23) \quad \begin{cases} M_{k+1} = A_{11}^{-1} \left[ M_k (A_{22} + L A_{12}) + A_{12} L M_k + A_{12} \right] \\ \text{avec } M_0 = A_{11}^{-1} A_{12} \end{cases}$$

Comme pour  $L$ ,  $M$  peut s'écrire sous la forme :

$$(II.24) \quad M = A_{11}^{-1} A_{12} + O(\mu)$$

Remarque sur le choix de  $\mu$

Il ressort du paragraphe que  $\mu$  peut être choisi en utilisant soit, une relation entre valeurs propres, soit une relation portant sur des normes de matrice. La partition du système (II.1) en deux sous-systèmes (II.2) est nécessaire pour vérifier la condition d'échelle de temps double. Cette partition nécessite, en premier lieu, une transformation de la matrice A.

Cet arrangement peut être effectué par de simples transformations telles que la permutation et le calibrage.

La permutation est nécessaire pour faire correspondre les  $q_1$  premiers états aux  $q_1$  états lents, et les  $q_2$  derniers états aux  $q_2$  états rapides.

Le calibrage est essentiellement destiné à un réajustement de valeurs permettant de vérifier la condition (II.15). En effet, lorsque les matrices sont mal conditionnées, la relation  $|\lambda_{\max}(A)| \leq \|A\|$  devient  $|\lambda_{\max}(A)| \ll \|A\|$  et la condition (II.15) risque de ne pas être vérifiée, bien que le système ait la propriété de double échelle de temps.

Ces transformations effectuées, le système (II.1) est sous la forme (II.2). Le choix de  $\mu$  représente alors une normalisation des deux sous-systèmes lents et rapides. Cette normalisation permet un ajustement du système et alors  $\mu$  représente le degré de rapidité d'un système par rapport à l'autre.

La condition (II.15)  $\|A_{11}^{-1}\| \ll \left[ \|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| \right]^{-1}$  est normalisée en choisissant :

$$(II.25) \quad \mu = \|A_{11}^{-1}\| \left[ \|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\| \right]$$

La condition (II.3)  $|\lambda_{\min}(A_\ell)| \gg |\lambda_{\max}(A_r)|$  conduit au choix de  $\mu$  :

$$(II.26) \quad \mu = \frac{|\lambda_{\max}(A_r)|}{|\lambda_{\min}(A_\ell)|}$$

Par suite de (II.3) et (II.22), nous pouvons écrire :

$|\lambda_{\min}(A_{11})| \gg |\lambda_{\max}(A_r)|$  donc un autre choix possible pour  $\mu$  est :

$$\mu = \frac{|\lambda_{\max}(A_r)|}{|\lambda_{\min}(A_{11})|}$$

Ce choix peut être guidé par des considérations physiques (rapport de masses, de concentration...).

### b) Utilisation des vecteurs propres

Le calcul des valeurs propres et la détermination des vecteurs propres correspondants permet de trouver une solution  $L$  de l'équation de Riccati.

Nous supposons d'abord que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont distinctes, et soit  $X_1$  la matrice de dimension  $q \times q_1$  des vecteurs propres correspondants.

Comme  $z_{rn}$  ne contient aucun des modes de  $A_\ell$  et que  $z_{rn} = L x_n^1 + x_n^2$  il en résulte que :

$$(II.27) \quad (L, I) X_1 = 0$$

Si nous partitionnons  $X_1$  en  $X_1 = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  et si  $X$  est inversible, la solution  $L$  assurant la séparation des modes est donnée par :

$$(II.28) \quad L = -Y X^{-1} \quad \text{avec } X \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_1} \text{ et } Y \in \mathbb{R}^{(q-q_1) \times q_1}$$

Au lieu de considérer la matrice des vecteurs propres à droite et de prendre en compte la matrice des vecteurs propres  $X_1$  associés aux  $q_1$  modes lents, on peut considérer la matrice  $X_2$  réciproque dont les lignes sont les vecteurs propres associés aux  $q_2$  modes rapides.

Cette méthode nécessite la connaissance, non seulement des valeurs propres mais aussi des vecteurs propres de la matrice initiale du système, ce qui parfois peut être un inconvénient lorsque le système est de grande dimension.

c) Utilisation des polynômes annulateurs

Cette solution a été proposée par [Magni, 1981] faisant appel aux polynômes annulateurs de la matrice et ne nécessite que le calcul des vecteurs propres.

Soit  $P(\lambda)$  un polynôme annulateur de la matrice  $A$  ( $q \times q$ ) et  $P_1(\lambda)$  et  $P_2(\lambda)$  deux polynômes tels que :

$$(II.29) \quad P_1(\lambda) \cdot P_2(\lambda) = P(\lambda) \quad \left( P(\lambda) \text{ peut être le polynôme caractéristique de } A \right)$$

Les racines de  $P_1(\lambda)$  et  $P_2(\lambda)$  appartiennent à deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  de valeurs propres de  $A$  tels que :

$$(II.30) \quad \begin{aligned} E_1 \cap E_2 &= \emptyset \\ E_1 \cup E_2 &= E \end{aligned}$$

( $E_1$  regroupe les valeurs propres lentes et  $E_2$  les valeurs propres rapides et engendrent des matrices de vecteurs propres  $X_1$  et  $X_2$ )

Soit  $S$  la matrice de changement de base telle que :

$$(II.31) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ z_{rn} \end{bmatrix}$$

qui permet de diagonaliser la matrice  $A$  du système (II.6), la matrice  $S$  est obtenue par :

$$(II.32) \quad S = \begin{bmatrix} I & O \\ -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M \\ -L & I-LM \end{bmatrix}$$

[Magni 1981] a montré que S est obtenue à partir des matrices  $N(P_i(A))$  par :

$$(II.33) \quad S = \left[ N(P_1(A)), N(P_2(A)) \right]$$

avec  $N(P_i(A))$ , la matrice formée par les vecteurs  $v$  tels que  $P_i(A)v = 0$ , de dimension  $q \times q_i$  ( $i = 1, 2$ ),

La matrice  $N(P_1(A))$  simultanément  $N(P_2(A))$  peut être partitionnée en

$$\left[ \begin{array}{c} S \\ T \end{array} \right] / \left[ \begin{array}{c} U \\ V \end{array} \right]$$

Pour une permutation adéquate de  $x_n = \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{bmatrix}$  telle que S soit régulière,

la matrice  $(V - T S^{-1} U)$  l'est aussi et on obtient :

$$(II.34) \quad \begin{cases} L = -T S^{-1} \\ M = U (V + LU)^{-1} \end{cases}$$

Plusieurs cas de solutions se déduisent de cette méthode. Nous remarquons que les matrices  $\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$  peuvent être calculées à partir des vecteurs propres, ce qui rejoint le cas b) décrit au-dessus.

Une autre démarche consiste après avoir calculé  $P_1(A)$  à chercher une permutation des composantes de l'état, telle que :

$$(II.35) \quad \text{rang} \left[ P_1(A) \begin{bmatrix} 0 \\ I_{q_2} \end{bmatrix} \right] = q_2$$

et pour ce cas, L est solution de

$$(II.36) \quad P_1(A) \begin{bmatrix} I_{q_2} \\ -L \end{bmatrix} = 0$$

Une troisième démarche [Magni, 1981] [Fossard, 1982] s'affranchit de tout calcul de vecteurs propres de rang et d'inversion de matrice et

repose sur des combinaisons linéaires des  $q_2$  dernières colonnes avec les  $q_1$  premières d'une matrice de dimension  $2q \times q$  définie par :

$$(II.37) \quad M = \begin{bmatrix} P_1(A) \\ I_q \end{bmatrix}$$

de manière à faire apparaître la matrice suivante :

$$(II.38) \quad \begin{array}{l} q \\ q_1 \\ q_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} & \begin{array}{c} P_1(A) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -L \\ I \end{array} & \begin{array}{c} \\ I \end{array} \end{array} \right.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{q_1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{q_2}$

dans laquelle apparaît la matrice  $(-L)$  cherchée.

Les conditions d'existence d'une solution  $L$  s'exprime par la non singularité des deux matrices  $X$  et  $S$  dans (II.28) et (II.34).

Dans la mesure où l'on a en général multiplicité des solutions pour  $L$  pour  $P_1$  et  $P_2$  donnés, suivant l'ordre des composantes de  $x_n$ , une solution de norme minimale ou une solution de forme spéciale est souvent recherchée.

### I.3.3. - Application aux systèmes singulièrement perturbés

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, le modèle adopté pour une forme singulièrement perturbée est une représentation dans laquelle apparaît le petit paramètre  $\mu \in ]0 \ 1]$  en facteur multiplicatif d'une partie du vecteur état sous la forme :

$$(II.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{21} & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = (C_1 \quad C_2^*) \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} \quad x_n \in R^{q1}, z_n \in R^{q2} \end{array} \right.$$

avec cette notation, les matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}^*$ ,  $A_{21}$  et  $A_{22}^*$  ainsi que  $C_1$  et  $C_2^*$  sont à priori du même ordre de grandeur.

En présentant ce système sous la forme (II.6), on aurait :

$$A_{22} = A_{21}^* \mu \quad A_{12} = A_{12}^* \mu \quad C_2 = C_2^* \mu$$

Les quantités précédemment définies  $L_0$ ,  $A_0$ , en (II.14) dépendent de  $\mu$

$$(II.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0 = -A_{21} A_{11}^{-1} \\ A_0 = \mu (A_{22}^* - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}^*) = \mu A_0^* \end{array} \right.$$

Si  $\mu$  est suffisamment petit, la relation suivante est satisfaite :

$$(II.41) \quad \mu \|A_{11}^{-1}\| \ll \left[ \|A_0^*\| + \|A_{12}^*\| \|L_0\| \right]^{-1}$$

il en résulte, à une précision  $O(\mu)$  près que :

$$(II.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_\ell = A_{11} + \mu A_{12}^* A_{21} A_{11}^{-1} \\ A_r = \mu (A_{22}^* - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}^*) \end{array} \right.$$

en faisant tendre  $\mu$  vers zéro, on obtient  $A_\ell = A_{11}$  et  $A_r$  de l'ordre de  $\mu (A_{22}^* - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}^*)$

Ce résultat peut être bien obtenu à partir de (II.39) en faisant tendre  $\mu$  vers zéro, ce qui est fait habituellement (chapitre I).

Les équations de Riccati et de Lyapunov définissant L et M s'écrivent comme suit :

$$(II.43) \quad \begin{cases} A_{21} + L A_{11} - L \mu A_{12}^* L - \mu A_{22}^* L = 0 \\ A_{12}^* - \left[ \frac{A_{11}}{\mu} - A_{12}^* L \right] M + M(A_{22}^* + L A_{12}^*) = 0 \end{cases}$$

quand  $\mu \rightarrow 0$ , il est clair que  $L \rightarrow L_0 = -A_{21} A_{11}^{-1}$  et que M est de l'ordre de  $\mu A_{11}^{-1} A_{12}^*$ , tandis que les autres termes prennent les formes suivantes :

$$(II.44) \quad \begin{cases} A_\ell = A_{11} \\ A_r = \mu (A_{22}^* - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}^*) \\ B_\ell = B_1 \\ B_r = B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1 \\ C_\ell = C_1 \\ C_r = \left[ C_2^* - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}^* \right] \mu \end{cases}$$

Nous retrouvons les équations des deux systèmes découplés proposées dans le premier chapitre.

#### I.3.4. - Cas où la séparation des dynamiques n'est pas bien marquée

En général, on se trouve en face d'un problème lors d'une décomposition d'un système global de grande dimension, car l'existence de ces deux classes de dynamiques nettement séparées est assez rare. Deux méthodes existent afin de pallier à cette difficulté :

- . La première suppose que nous connaissions les valeurs propres et/ou les vecteurs propres ;
- . La deuxième consiste en une localisation des valeurs propres dans le plan complexe.

a) lorsqu'on connaît les valeurs et/ou vecteurs propres

La méthode proposée par |Syracos, Sannuti, 1983| réside en deux

points essentiels :

- La détermination de l'ordre  $q_1$  des variables lentes,
- La mise sous forme singulièrement perturbée du système initial.

Il s'agit donc de trouver  $q_1$  et  $q_2$  et l'ordre des variables pour que après permutation et calibrage, le système initial (II.6) vérifie la propriété (II.15).

Pour cela, après avoir ordonné toutes les valeurs propres selon les modes décroissants et calculé la matrice des vecteurs propres normalisés correspondants  $V = [\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2]$ , la transformation :

$$(II.45) \quad X_n = V \hat{X}_n = X_1 \hat{X}_n^1 + X_2 \hat{X}_n^2$$

est appliquée au système (II.6) ce qui le met sous la forme :

$$(II.46) \quad \begin{bmatrix} \hat{X}_{n+1}^1 \\ \hat{X}_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_n^1 \\ \hat{X}_n^2 \end{bmatrix}$$

avec  $\hat{A}_{11}$  regroupant toutes les valeurs propres lentes

$\hat{A}_{22}$  regroupant toutes les valeurs propres rapides

Si on note  $R_{\lambda i}$  et  $R_{ri}$  les normes euclidiennes des  $i^{\text{èmes}}$  lignes de  $X_1$  et  $X_2$  pour chaque état  $x_n^i$ , le rapport des composantes rapides aux composantes lentes peut être exprimé par le rapport  $\alpha_i$  :

$$(II.47) \quad \alpha_i = \frac{R_{ri}}{R_{\lambda i}}$$

Pour une première approximation en deux classes, estimée à partir du spectre des valeurs propres, les indices  $\alpha_i$  sont calculés, les états associés au  $q_1$  plus grandes valeurs de  $\alpha_i$  sont ceux qui contiennent le plus fort nombre de modes rapides.

Si pour  $q_1$  choisi, nous constatons une nette séparation entre les indices  $\alpha_i$  ( $i = 1 \dots q_1$ ) et  $\alpha_i$  ( $i = q_1+1 \dots q_1+q_2$ ), la valeur supposée

$q_1$  est retenue ; sinon, elle est modifiée. Ceci peut entraîner une séparation différente de celle estimée sur la base des valeurs propres.

b) lorsque les valeurs propres sont inconnues

Lorsque ni le nombre, ni les valeurs des valeurs propres ne sont connues, un premier essai est fait à priori, avec la méthode proposée par [Magni 1981]. Soit  $q_1$  le nombre des valeurs propres lentes, supposées toutes réelles. Le polynôme annulateur de la matrice  $A$ ,  $p_1$  associé à  $q_1$  valeurs propres est  $p^{q_1}$ . Par la méthode exposée auparavant, on en déduit une matrice  $L^* = -T S^{-1}$  avec  $N[p_1(A)] = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}$  qui met la matrice  $A$  sous la forme suivante :

$$(II.48) \quad \begin{bmatrix} A_{\ell}^* & A_{12} \\ R(L^*) & A_r^* \end{bmatrix},$$

le terme  $R(L^*)$  n'étant nul que si le système a effectivement  $q_1$  valeurs propres nulles. La norme de  $R(L^*)$  peut donner une indication du nombre de valeurs propres lentes. Pour différentes valeurs de  $q_1$ , la norme de  $\|R(L^*)\|$  passe par un minimum lorsque la séparation des valeurs propres est correcte.

Les valeurs propres de  $A_{\ell}^*$  et  $A_r^*$ , associés au minimum de  $\|R(L^*)\|$  sont proches si les dynamiques sont bien séparées de valeurs propres réelles à cause de la pseudo triangularisation correspondante.

Les méthodes analytiques vues auparavant, montrent que la principale difficulté pour mettre le système sous forme singulièrement perturbée, réside dans la détermination des composantes du vecteur état relatives à la partie lente, et de celles relatives à la partie rapide, et ceci dans le but de partitionner le système. Une solution s'est dégagée par son efficacité et repose sur le calcul des valeurs propres. Cette solution qui s'adapte parfaitement aux cas linéaires, devient inutilisable quand il

s'agit des systèmes non linéaires où jusqu'alors, il n'existait pas de méthodes adaptées.

I.3.5. - Méthode géométrique de mise en évidence des dynamiques dans le cas des systèmes discrets

De nombreuses méthodes ont été développées pour localiser des valeurs propres dans le plan complexe : régions de Gudkov [Chambat 1981], disques de Gershgorine [Bauer 1968] [Deif 1982], ainsi que des homotopies permettant de transformer un domaine en un autre (par exemple le cercle unité en un demi-plan complexe à gauche de l'axe imaginaire) [Gutman, Jury 1981], [Barnett, Scraton 1982]. Les disques de Gershgorine ont été appliqués à des études de stabilité [Limebeer 1982] [Gentina 1976]. Une méthode pratique fondée sur l'utilisation des cercles de Gershgorine, permettant une mise en évidence des dynamiques d'un système a été mise au point dans le cas des systèmes continus par [Dauphin-Tanguy, Borne 1982], [Dauphin-Tanguy 1983] que nous proposons d'étendre au cas des systèmes échantillonnés.

Définition :

Si A est une matrice caractérisant le système, d'éléments  $\{a_{ij}; i, j = 1 \dots q\}$ , alors les valeurs propres de A appartiennent au domaine formé par l'union des cercles de rayons respectifs  $R_i$  et de centre  $a_{ii}$  définis par :

$$(II.49) \quad |\lambda - a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |a_{ij}| = R_i$$

Ces cercles de Gershgorine (d'après le théorème de Gershgorine) définis ici en lignes peuvent être également définis en colonnes par :

$$(II.50) \quad |\lambda - a_{ii}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |a_{ji}|$$

Théorème

Si les cercles  $C_i(a_{ii}, R_i)$  et  $C_k(a_{kk}, R_k)$  sont tels que  $|a_{ii}| - |a_{kk}| \gg (R_i + R_k) \forall i \in I_i$  et  $\forall k \in I_k$  avec  $I_i \cap I_k = \emptyset$



Le domaine  $I_k$  est composé de deux parties correspondant aux valeurs propres positives et négatives, ainsi que le domaine  $I_i$ .

Il est évident que d'après la figure si la relation :

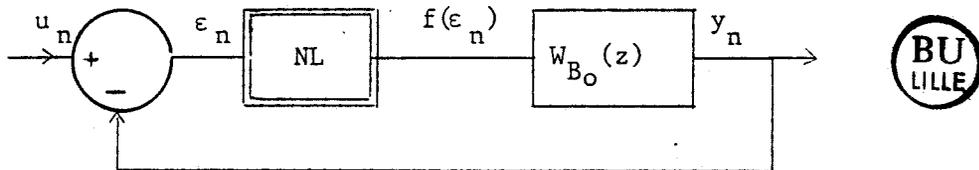
$$R_i + R_k < |a_{ii}| - |a_{kk}| \quad \forall i \in I_i, \quad \forall k \in I_k$$

est vérifiée, alors les cercles de Gershgorine associés à la matrice A peuvent être regroupés en deux domaines disjoints correspondant à deux ensembles de valeurs propres disjoints, donc il y a existence de deux dynamiques différentes.

## II - APPLICATION DE LA MODELISATION ET DECOUPLAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES DE TYPE LUR'E POSNIKOV

L'étude concerne les systèmes de type Lur'e Posnikov pour lesquels il est possible de mettre en évidence deux dynamiques différentes quelle que soit la variation de la non linéarité  $f_n^* = f^*$  dans l'intervalle  $[\underline{f}, \bar{f}]$

Les systèmes étudiés sont représentés par le schéma bloc suivant :



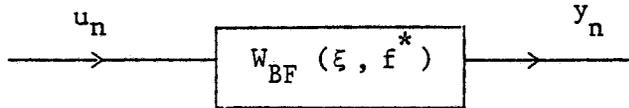
et modélisés pour la partie linéaire par la fonction de transfert en boucle ouverte  $W_{Bo}(z)$

$$(II.51) \quad W_{Bo}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} b_i z^i}{z^q + \sum_{i=0}^{q-1} a_i z^i}$$

Le système peut être également représenté en boucle fermée par un opérateur symbolique de transfert [Dauphin-Tanguy, 1983] [EL Moudni, Dauphin-Tanguy, Borne, 1984] :

$$(II.52) \quad W_{BF}(\xi, f^*) = \frac{f^* N(\xi)}{D(\xi) + f^* N(\xi)}$$

dont le bloc diagramme est le suivant :



Nous nous proposons d'étudier le comportement dynamique de ce type de système et d'effectuer un découplage temporel partie lente / partie rapide par la méthode des perturbations singulières.

### II.1 - Mode de représentation utilisé

Le système représenté sous forme schéma bloc (II.52) peut être modélisé dans l'espace d'état sous forme d'une forme en flèche [Benrejeb, 1980] [Benrejeb, Borne, Laurent, 1982] et défini par le triplet  $(A_F^*, B_F^*, C_F)$

$$(II.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_F^* = \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_i & & \\ & & & \ddots & \\ \dots & \gamma_i^* & \dots & & \alpha_q^* \end{bmatrix} \quad B_F^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f^* \end{bmatrix}, \quad C_F = \begin{bmatrix} N(\alpha_1) & \dots & N(\alpha_{q-1}) & b_{q-1} \end{bmatrix} \\ \text{avec } \beta_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q-1} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \\ \gamma_i^* = -P(\alpha_i, f^*) = -D(\alpha_i) - f^* N(\alpha_i) \\ \alpha_q^* = -\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i - a_{q-1} - f^* b_{q-1} \end{array} \right.$$

où  $P(\xi, f^*)$  est le polynôme caractéristique de la matrice  $A_F^*$  défini à partir du dénominateur de  $W_{BF}(\xi, f^*)$ .

Le premier problème qui se pose concerne la mise en évidence des

dynamiques et la modélisation sous forme singulièrement perturbée. Nous utiliserons la méthode présentée dans le paragraphe précédent.

Par le choix des coefficients  $\alpha_i$ , le système étudié, modélisé sous forme en flèche (II.53) se trouve directement sous forme singulièrement perturbé. En effet, les éléments  $\alpha_i$  correspondant aux valeurs (approchées ou exactes) des racines du polynôme  $P(\alpha_i, f_o^* = \frac{f + \bar{f}}{2})$  peuvent être ordonnés de deux manières différentes.

II.1.1. -  $\alpha_i$  ordonnés par module décroissant ( $|\alpha_i| < |\alpha_j| \quad i < j$ )

Ce qui permet après vérification par la méthode géométrique, présentée précédemment de partitionner le système en deux blocs de dynamiques différentes, ainsi le système (II.54)

$$(II.54) \quad \begin{cases} X_{n+1} = A_F^* X_n + B_F^* u_n \\ y_n = C_F X_n \end{cases}$$

devient :

$$(II.55) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{21} & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = \begin{bmatrix} C_1 & C_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$x_n \in R^{q_1} \quad z_n \in R^{q_2} \quad q_1 + q_2 = q$$

où

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{q_1} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_{q_1} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^* & \dots & \dots & \gamma_{q_1}^* \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^* = \frac{A_{12}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_{q_1} \end{bmatrix}$$

$$A_{22}^* = \frac{A_{22}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \alpha_{q_1+1} & & \beta_{q_1+1} \\ & \ddots & \vdots \\ \gamma_{q_1+1}^* & \dots & \alpha_{q_1+q_2}^* \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f^* \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [N(\alpha_1) \dots N(\alpha_{q_1})], \quad C_2^* = \frac{1}{\mu} [N(\alpha_{q_1+1}) \dots b_{q-1}]$$

Les principales propriétés de cette modélisation résident dans les formes des matrices :

- la partie lente est caractérisée par une matrice diagonale à coefficients constants, supposée stable et toujours inversible.

- les matrices de couplage  $A_{12}^*$  et  $A_{21}$  sont formées d'éléments nuls sauf respectivement une colonne et une ligne.

- la matrice  $A_{22}^*$  conserve la forme en flèche.

- le coefficient  $\mu$  peut être choisi en calculant le rapport

- la matrice de commande de la partie lente,  $B_1$  est nulle.

$$\left| \frac{\alpha_{q_1+1}}{\alpha_{q_1}} \right|$$

Le système global est donc faiblement commandable, mais cela n'entraîne aucun problème puisque la partie lente est supposée stable.

a) Découplage partie lente / partie rapide

Par l'application de la méthode des perturbations singulières en posant  $\mu = 0$ , le système est découplé en deux parties :

a<sub>1</sub>) Eléments de la partie lente

La partie lente est caractérisée par :

$$(II.56) \quad \begin{cases} x_{ln+1} = A_{11} x_{ln} + B_1 u_{ln}, & B_1 = 0 \\ y_{ln} = C_1 x_{ln} \end{cases}$$

avec  $x_{\ell_0} = x_0$

Cette partie lente étant formée des termes diagonaux  $\alpha_1 \dots \alpha_{q_1}$

$$(II.57) \quad y_{\ell}(z) = \sum_{i=1}^{q_1} \frac{zN(\alpha_i)}{(z-\alpha_i)} x_{\ell_0}^i$$

soit alors

$$(II.58) \quad y_{\ell n} = \sum_{i=1}^{q_1} N(\alpha_i) (\alpha_i)^n x_{\ell_0}^i$$

avec  $x_{\ell_0}^i = x_0^i$  ,  $x_n = (x_n^1 \dots x_n^{q_1})$

$a_2$ ) Etude de la partie rapide

La partie rapide est décrite par les relations suivantes :

$$(II.59) \quad \begin{cases} z_{r n+1} = A_r z_{rn} + B_r u_{rn} \\ y_{rn} = C_r z_{rn} + D_r u_{rn} \end{cases}$$



avec :

$$\begin{cases} A_r = \mu(A_{22}^* - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}^*) = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ B_r = B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1 = B_2 \\ C_r = \mu(C_2^* - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}^*) = C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12} \\ D_r = -C_1 A_{11}^{-1} B_1 = 0 \end{cases}$$

et  $z_{r0} = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0$

La matrice  $A_{11}$  étant diagonale à termes tous non nuls est toujours inversible.

Lorsque nous remplaçons chaque matrice par son expression dans (II.59), nous obtenons :

$$A_r = \begin{bmatrix} \alpha_{q_1+1} & & & \beta_{q_1+1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{q_1+1}^* & \dots & \dots & \alpha_{q_1+q_2}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{q_1+1} & & & \beta_{q_1+1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{q_1+1}^* & \dots & \dots & \alpha_r^* \end{bmatrix}$$

tous les termes de  $A_r$ , sauf un situé à la pointe de la flèche, sont identiques aux termes  $A_{22}^*$ .

$$(II.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^* = + \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\gamma_i^*}{\alpha_i} \beta_i \\ \alpha_r^* = \alpha_{q_1+q_2}^* - \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\gamma_i^* \beta_i}{\alpha_i} = \alpha_{r_1} + f^* \alpha_{r_2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_r = \left[ N(\alpha_{q_1+1}) \dots b_{q_2+q_1-1} - \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\beta_i}{\alpha_i} N(\alpha_i) \right], \\ z_{r0} = z_0 - \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\gamma_i^*}{\alpha_i} x_0^i \end{array} \right.$$

Cette forme d'état conduit à l'opérateur symbolique de transfert du système rapide découplé  $W_{rBF}(\xi, f^*)$ , de la même forme que celle du système initial, soit :

$$(II.61) \quad W_{rBF}(\xi, f^*) = \frac{f^* N_r(\xi)}{D_r(\xi) + f^* N_r(\xi)}$$

Elle peut être calculée par :

$$(II.62) \quad W_{rBF}(\xi, f^*) = C_r (\xi I_{q_2} - A_r)^{-1} B_r$$

Le déterminant de la matrice  $(\xi I_{q_2} - A_r)$  correspond au nouveau

polynôme "caractéristique" de la partie rapide. Il correspond au dénominateur de  $W_{rBF}(\xi)$  qui est la somme de deux parties. L'une correspondant au dénominateur et l'autre affectée de  $f^*$  correspondant au numérateur de la fonction de transfert en boucle ouverte de la partie rapide soit :

$$(II.63) \quad W_{rBo}(\xi) = \frac{N_r(\xi)}{D_r(\xi)}$$

avec :

$$\gamma_i^* = -P(\alpha_i, f^*) = -[D(\alpha_i) + f^* N(\alpha_i)]$$

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^{q_1} \gamma_i^* \frac{\beta_i}{\alpha_i} = - \left[ \sum_{i=1}^{q_1} D(\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} + f^* \sum_{i=1}^{q_1} N(\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right]$$

$$\alpha_r^* = \alpha_{q_1+q_2}^* - \sum_{i=1}^{q_1} \gamma_i^* \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \alpha_{r_1} + f^* \alpha_{r_2}$$

(II.64) avec :

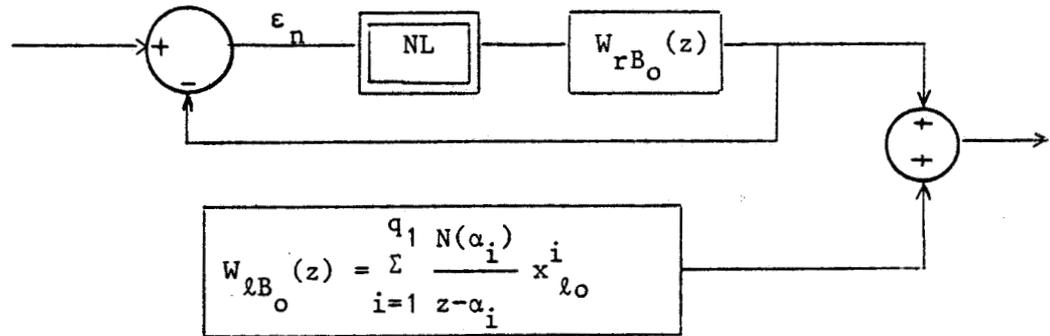
$$\begin{cases} \alpha_{r_1} = - \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i - a_{q-1} - \sum_{i=1}^{q_1} D(\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \\ \alpha_{r_2} = - b_{q-1} - \sum_{i=1}^{q_1} N(\alpha_i) \frac{\beta_i}{\alpha_i} \end{cases}$$

Ce qui donne les expressions suivantes :

$$(II.65) \quad \begin{cases} N_r(\xi) = \sum_{j=q_1+1}^{q_1+q_2-1} (\xi-\alpha_i) \alpha_{r_2} + \sum_{i=q_1+1}^{q_1+q_2-1} \beta_i N(\alpha_i) \prod_{\substack{j=q_1+1 \\ i \neq j}}^{q_1+q_2-1} (\xi-\alpha_j) \\ D_r(\xi) = \prod_{j=q_1+1}^{q_1+q_2} (\xi-\alpha_i) (\xi-\alpha_{r_1}) + \sum_{i=1+q_1}^{q_1+q_2-1} \beta_i D(\alpha_i) \prod_{j=q_1+1}^{q_1+q_2-1} (\xi-\alpha_j) \end{cases}$$

Nous avons montré que par l'utilisation de la représentation en flèche pour un système non linéaire de type Lur'e Posnikov, admettant deux dynamiques, il est possible de déduire les fonctions de transfert

des deux systèmes découplés et ceci directement à partir de la fonction de transfert initiale. Le schéma bloc correspondant à ce découplage temporel est le suivant :



Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 1

Tout système non linéaire de type Lur'e Posnikov représenté dans l'espace d'état par la forme en flèche  $(A_F^*, B_F^*, C_F)$  et décrit par  $q_1$  premières variables lentes et  $q_2$  variables rapides, peut être découplé temporellement. Le système lent découplé est linéaire, le système rapide réduit est non linéaire de type Lur'e Posnikov représenté par une forme en flèche, dont la fonction de transfert en boucle ouverte est obtenue directement à partir de la fonction de transfert initiale par les relations (II.65).

Théorème 2

Le gain statique du système initial est conservé dans la partie rapide réduite.

Démonstration :

Pour une matrice en flèche  $A_F$  de dimension  $q$ , son déterminant est obtenu par :

$$(II.66) \quad \det A_F = P(o, f^*) \quad [\text{Benrejeb, Borne, Laurent, 1983}]$$

Or  $A_F$  est partitionnée en :

$$A_F = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

avec  $A_{11}$  est inversible. Le théorème de [Rosenbrock, 1970] conduit à la relation suivante :

$$(II.67) \quad \begin{aligned} \det A_F &= \det A_{11} \det (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \\ &= \det A_{11} \det A_R \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$(II.68) \quad P(o, f^*) = \det A_{11} [P_R(o, f^*)]$$

d'où :

$$(II.69) \quad D(o) + f^* N(o) = \prod_{i=1}^{q_1} \alpha_i [D_R(o) + f^* N_R(o)]$$

Ce qui entraîne par identification :

$$(II.70) \quad W_{B_0}(o) = \frac{N(o)}{D(o)} = \frac{N_R(o)}{D_R(o)} = W_{RB_0}(o)$$

### b) Mise en oeuvre de la méthode

Soit le système représenté par :

$$\left\{ \begin{aligned} W_{B_0}(z) &= \frac{-z^2 + 0.2009z - 0.004}{z^3 - 0.68z^2 + 0.51z - 0.002942} \\ f^* &\in [0.91 \quad 1.09] \end{aligned} \right.$$

Le polynôme  $P\left[\xi, f_o^* = \frac{f + \bar{f}}{2} = 1\right]$  admet trois racines réelles 0.89, 0.78 et 0.01. Ceci nous permet un choix approprié des coefficients  $\alpha_i$  de la matrice en flèche. En prenant  $\mu \approx 0.064$ , il nous vient les deux systèmes découplés suivants :

La partie lente étant formée des termes diagonaux  $\alpha_1 = 0.89$  et  $\alpha_2 = 0.78$ , il vient alors :

$$y_{\ell}(z) = \frac{-0.61 z}{z - 0.89} x^1_{\ell 0} + \frac{-0.45 z}{z - 0.78} x^2_{\ell 0}$$

soit encore :

$$y_{\ell n} = -0.61 (0.89)^n x^1_{\ell 0} - 0.45 (0.78)^n x^2_{\ell 0}$$

avec :

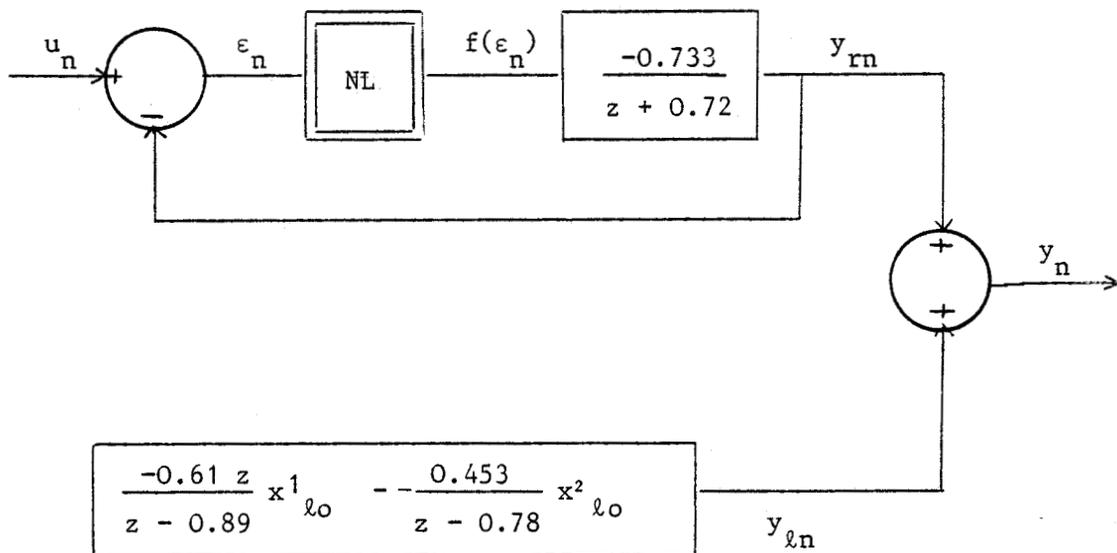
$$\begin{bmatrix} x^1_{\ell 0} \\ x^2_{\ell 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1_0 \\ x^2_0 \end{bmatrix}$$

la partie rapide par application des relations (II.65) permet d'avoir en boucle ouverte :



$$W_{rB_0} = \frac{-0.733}{z + 0.72}$$

Le schéma bloc associé aux deux systèmes découplés est le suivant :



II.1.2. -  $\alpha_i$  ordonnés par modules croissants ( $|\alpha_i| > |\alpha_j|$   $i < j$ )

Le système s'écrit sous la forme singulièrement perturbée sous la forme suivante :

$$(II.71) \quad \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu' z_n \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n$$

$$y_n = (C_1^* \quad C_2) \begin{bmatrix} \mu' z_n \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$z_n \in \mathbb{R}^{q_2}, \quad x_n \in \mathbb{R}^{q_1} \quad q_1 + q_2 = q$$

où

$$A_{11}^* = \frac{1}{\mu'} \begin{bmatrix} \alpha'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha'_{q_2} \end{bmatrix}, \quad A_{21}^* = \frac{1}{\mu'} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma'_{q_2+1} & \dots & \gamma'_{q_2} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \beta'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \beta'_{q_2} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} \alpha'_{q_2+1} & & \beta'_{q_2+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_{q_2+1} & \dots & \alpha'_{q_2+q_1} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f^* \end{bmatrix},$$

$$C_1^* = \frac{1}{\mu'} \left[ N(\alpha'_1) \dots N(\alpha'_{q_2}) \right], \quad C_2 = \left[ \alpha'_{q_2+1} \dots b_{q-1} \right]$$

Les principales propriétés de cette modélisation sont les suivantes :

- la partie lente est caractérisée par une matrice en flèche, dont la matrice de commande  $B_2$  n'est pas nulle.

- les matrices de couplage  $A_{21}^*$  et  $A_{12}$  sont formées d'éléments nuls sauf respectivement une ligne et une colonne.

- le coefficient  $\mu'$  peut être choisi en calculant le rapport

$$\frac{\alpha'_{q_2}}{\alpha'_{q_2+1}}$$

a) partie lente

Elle est caractérisée par :

$$(II.72) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_{22} x_{\ell n} + B_2 u_{\ell n} \\ y_{\ell n} = C_2 x_{\ell n} \end{cases}$$

Cette forme d'état conduit à un opérateur symbolique de transfert de système lent découplé  $W_{\ell BF}(\xi, f^*)$  de la même forme que celle du système initial :

$$(II.73) \quad W_{\ell BF}(\xi, f^*) = f^* \frac{N_{\ell}(\xi)}{D_{\ell}(\xi) + f^* N_{\ell}(\xi)}$$

Le dénominateur de  $W_{\ell BF}(\cdot)$  correspond au déterminant de  $(\xi I - A_{11})$  qui doit être différent de zéro pour toute valeur de  $f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$

$$(II.74) \quad \det(\xi I - A_{11}) = \prod_{j=q_2+1}^{q_2+q_1-1} (\xi - \alpha'_j) (\xi - \alpha'_{q_1+q_2}) - \sum_{i=q_2+1}^{q_1+q_2-1} \beta'_i \gamma_i^* \prod_{\substack{j=q_2+1 \\ j \neq i}}^{q_1+q_2-1} (\xi - \alpha'_j) \\ = D(\xi) + f^* N(\xi)$$

avec

$$(II.75) \quad \begin{cases} \alpha'_{q_1+q_2} = - \sum_{i=1}^{q_2+q_1-1} \alpha'_i - a_{q-1} - f^* b_{q-1} \\ \gamma_i^* = - [D(\alpha'_i) + f^* N(\alpha'_i)] \end{cases}$$

$$(II.76) \quad \left. \begin{aligned} \text{d'où} \quad N(\xi) &= \prod_{j=q_2+1}^{q_2+q_1-1} (\xi - \alpha'_j) (-b_{q-1}) + \sum_{i=q_2+1}^{q_1+q_2-1} \beta'_i N(\alpha'_i) \prod_{\substack{j=q_2+1 \\ j \neq i}}^{q_1+q_2-1} (\xi - \alpha'_j) \\ D(\xi) &= \prod_{j=q_2+1}^{q_2+q_1-1} (\xi - \alpha'_j) (\xi + \sum_{i=1}^{q_1+q_2-1} \alpha'_i + a_{q-1}) + \\ &\quad \sum_{i=q_2+1}^{q_1+q_2-1} \beta'_i D(\alpha'_i) \prod_{\substack{j=q_2+1 \\ j \neq i}}^{q_1+q_2-1} (\xi - \alpha'_j) \end{aligned} \right\}$$





avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_i^* = -P(\alpha_i, f^*) \\ \beta_i = \prod_{j=1}^{q-1} (\alpha_j - \alpha_i)^{-1} \\ \alpha_q^* = -\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i - a_{q-1} - f^* b_{q-1} \end{array} \right.$$

Par un choix approprié des coefficients  $\alpha_i$ , le système étudié peut être modélisé sous forme singulièrement perturbée, et s'écrit alors lorsque les  $\alpha_i$  sont ordonnés par module décroissant sous la forme suivante :

$$(II.80) \quad \begin{bmatrix} z_{n+1} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu z_n \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$z_n \in \mathbb{R}^{q_1}, \quad x_n \in \mathbb{R}^{q_2}$$



avec

$$A_{11}^* = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{q_1} \end{bmatrix}, \quad A_{21}^* = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^* & \dots & \gamma_{q_1}^* \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \beta_{q_1} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} \alpha_{q_1+1} & & \beta_{q_1+1} \\ & \ddots & \vdots \\ \gamma_{q_1+1}^* & \dots & \alpha_{q_1+q_2} \end{bmatrix}$$

Le système découplé correspondant s'écrit :

$$(II.81) \quad \begin{bmatrix} z_{rn} \\ x_{ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_l \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} A_r = \mu(A_{11}^* - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}^*) = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \\ A_l = A_{22} \end{cases}$$

Définition :

La matrice  $A_F$  est sa propre majorante si tous ses éléments sont positifs.

Théorème 1 :

a) Si la matrice  $A_F$  caractérisant le système est sa propre majorante, et si tous ses éléments non constants sont isolés dans une seule rangée, alors le système vérifie la conjoncture linéaire. Si les conditions de Kotelyanski sont vérifiées sur la matrice  $(I_q - A_F)$ , alors le système est asymptotiquement stable.

b) Si la matrice  $A_F$  n'est pas sa propre majorante, alors il est possible de se ramener au cas précédant, s'il existe une norme vectorielle  $p(X_n)$  telle que :

$$p(X_{n+1}) \leq M(A_F) p(X_n)$$

où  $M(A_F)$  vérifie les contraintes :

Les conditions de Kotelyanski portant sur les mineurs principaux de la matrice  $(I_q - A_F)$ , soit :

$$(II.82) \quad \det_r (I_q - A_F) \geq \varepsilon > 0 \quad \forall r = 1 \dots q \quad \forall f^* \in [\underline{f}, \bar{f}]$$

Pour une matrice en flèche  $(I_q - A_F)$ , par un choix approprié des coefficients  $\alpha_i$ , les  $(q - 1)$  premières conditions s'écrivent :

$$(II.83) \quad \det_r (I_q - A_F) = \prod_{j=1}^r (1 - \alpha_j) \quad r = 1 \dots q-1$$

ce qui donne  $\prod_{i=1}^{q-1} (1 - \alpha_i) \geq \varepsilon > 0$  vrai par le choix de  $\alpha_i$

La seule condition à vérifier concerne donc le déterminant d'ordre  $q$  et s'écrit :

$$(II.84) \quad \det_q (I_q - A_F) \geq \varepsilon > 0$$

Nous proposons le théorème suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système :

Théorème 2 :

Si la matrice  $A_F$  caractérisant le système de type Lur'e Posnikov est sa propre majorante, les  $(q-1)$  coefficients  $\alpha_i$  étant choisis de module inférieur à l'unité, et si la condition suivante relative à la matrice  $(I_q - A_F)$  :

$$(II.85) \quad \det \left[ (I_{q_2} - A_{22}) - A_{21} (I_{q_1} - A_{11})^{-1} A_{12} \right] \geq \varepsilon > 0 \quad \forall f^* \in [\bar{f} \quad \underline{f}]$$

est vérifiée, alors le système est stable.

Démonstration :

$A_F$  est sa propre majorante, le système global est stable si :

$\det (I_q - A_F) \geq \varepsilon > 0$ , soit encore

$$\det \begin{bmatrix} I_{q_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{q_2} - A_{22} \end{bmatrix}$$

ce qui s'écrit en développant le déterminant suivant la méthode de Rosenbrock :

$$\det (I_q - A_F) = \det (I_{q_1} - A_{11}) \det \left[ (I_{q_2} - A_{22}) - A_{21} (I_{q_1} - A_{11})^{-1} A_{12} \right] \geq \varepsilon > 0$$

avec

$$\det (I_{q_1} - A_{11}) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{vrai par choix de } \alpha_i$$

et la condition qui reste à vérifier est celle annoncée dans le théorème 2.

Théorème 3 :

Lorsque la matrice  $A_F$  est sa propre majorante, une condition suffisante de stabilité de système est obtenue par la relation suivante :

$$(II.86) \quad \det (I_{q_2} - A_{22}) = \det (I_{q_2} - A_{22}) \geq \left[ \begin{array}{c} q_1 \\ \Sigma \\ i=1 \end{array} \frac{\gamma_i^* \beta_i}{1 - \alpha_i} \right] \begin{array}{c} q_1 + q_2 - 1 \\ \Pi \\ j=1+q_1 \end{array} (1 - \alpha_i)$$

Démonstration :

Explicitons la condition de stabilité établie dans le théorème 2, soit :

$$\det \left[ (I_{q_2} - A_{22}) - A_{21} (I_{q_1} - A_{11})^{-1} A_{12} \right] \geq \varepsilon > 0$$

Elle s'écrit encore :

$$\det \left[ \begin{array}{ccc} I - \alpha_{q_1+1} & & -\beta_{q_1+1} \\ & \ddots & \\ & & q_1 \\ -\gamma_{q_1+1}^* & \text{---} & 1 - \alpha_{q_1+q_2} \\ & & \Sigma_{i=1} \frac{\gamma_i^* \beta_i}{1 - \alpha_i} \end{array} \right] \geq \varepsilon > 0$$

En utilisant une propriété de déterminant, celle-ci prend une deuxième forme :

$$\det (.) = \det (I_{q_2} - A_{22}) + \det \left[ \begin{array}{ccc} 1 - \alpha_{q_1+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & q_1 \\ -\gamma_{q_1+1}^* & \text{---} & \Sigma_{i=1} \frac{\gamma_i^* \beta_i}{1 - \alpha_i} \end{array} \right] \geq \varepsilon > 0$$

Ce qui nous donne en développant les calculs par rapport à la dernière colonne :

$$\det (I_{q_2} - A_{22}) - \prod_{j=q_1+1}^{q_1+q_2-1} (1-\alpha_j) \sum_{i=1}^{q_1} \frac{\gamma_i^* \beta_i}{1-\alpha_i} \geq \varepsilon > 0$$

d'où la condition énoncée .

### Corollaire

Si le système global peut être représenté par la matrice  $A_F$  possédant la propriété de double échelle de temps et peut être décomposé en une partie lente caractérisée par  $A_\ell = A_{22}$  et une partie rapide correspondant à  $A_r = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ , alors la condition de stabilité obtenue pour le système réduit par l'application des conditions de Kotelyanski conformément au théorème 3 est une condition suffisante de stabilité du système global.

## III.2 - Détermination de la commande quasi optimale de systèmes discrets singulièrement perturbés

Lorsque la dimension des systèmes devient grande, la mise en oeuvre de commandes optimales conduit parfois à des calculs complexes d'optimisation. De surcroît, le risque d'avoir un problème mal conditionné pour le calcul de la commande globale n'est pas à écarter. Dans ce sens, le fait de négliger certaines constantes de temps petites conduirait à un système d'ordre réduit, s'avère particulièrement intéressant si l'approximation est justifiée.

### III.2.1. - Commande quasi-optimale

L'optimisation des systèmes singulièrement perturbés a été largement étudiée pour les systèmes continus, et a donné lieu à de nombreux développements [Kokotovic, Haddad, 1975] [Chow, Kokotović 1976] [Fossard, Magni, 1980] [Kokotovic, O'Malley, Sannuti, 1976] [Dauphin-Tanguy, 1983].

Concernant les systèmes discrets singulièrement perturbés, peu de travaux ont été faits relativement aux problèmes de commande optimale [Kaïlaza Rao et Naidu, 1982] [Bennis, 1982] [Kando, Iwazumi, 1983], [Bakhtiar, Khalil, 1984], [Hisham et Al, 1985]

Nous nous intéressons ici à la commande linéaire quadratique à horizon infini des systèmes échantillonnés à deux dynamiques. L'approche de cette commande peut se faire par deux voies différentes. La première résulte d'une décomposition de l'équation de Riccati globale (que nous développerons par la suite), tandis que la seconde est basée sur le principe de décomposition temporelle que nous étudierons en détail dans le chapitre IV.

Soit le système :

$$(II.87) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_{11} x_n + A_{12} \mu z_n + B_1 u_n & x(0) = x_0 \\ z_{n+1} = A_{21} x_n + A_{22} \mu z_n + B_2 u_n & z(0) = z_0 \\ y_n = (C_1 \quad C_2 \mu) \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

que l'on désire commander en minimisant l'expression :

$$(II.88) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n^T y_n + u_n^T R u_n$$

R étant une matrice définie positive.

La solution optimale d'un tel problème est donnée par la relation :

$$(II.89) \quad u_n^* = - (R + B^T k B)^{-1} B^T k A \begin{bmatrix} \bar{x}_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

k étant la solution stable du régime permanent de l'équation de Riccati :

$$(II.90) \quad k = C^T C + \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ \mu A_{12}^T & \mu A_{22}^T \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ \mu A_{12}^T & \mu A_{22}^T \end{bmatrix} \\ k \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \left[ R + \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix}$$

dans laquelle  $C = \begin{bmatrix} C_1 & \mu C_2 \end{bmatrix}$ .

Si la matrice k prend la forme (II.91) dont le choix sera justifié ultérieurement (chapitre IV) :

$$(II.91) \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} & \mu k_{12} \\ \mu k_{12}^T & \mu^2 k_{22} \end{bmatrix}$$

L'équation (II.90) peut être partitionnée et nous obtenons les quatre équations matricielles suivantes:



$$(II.92) \quad (a) \quad k_{11} = C_1^T C_1 + A_{11}^T (k_{11} A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) + A_{21}^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) \\ - \left[ A_{11}^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + A_{21}^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu^2 k_{22} B_2) \right] \\ \left[ B_1^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + B_2^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu^2 k_{22} B_2) + R \right]^{-1} \\ \left[ B_1^T (k_{11} A_{11} + \mu k_{12} A_{21}) + B_2^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) \right]$$

$$(b) \quad k_{12}^T = C_2^T C_1 + A_{12}^T (k_{11} A_{11} + \mu k_{12} A_{21}) + A_{22}^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) \\ - \left[ A_{12}^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + A_{22}^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu k_{22} B_2) \right] \\ \left[ B_1^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + B_2^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu k_{22} B_2) + R \right]^{-1} \\ \left[ B_1^T (k_{11} A_{11} + \mu k_{12} A_{21}) + B_2^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 A_{22} A_{21}) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad k_{22} &= C_2^T C_2 + A_{12}^T (k_{11} A_{12} + \mu k_{12} A_{22}) + \mu A_{22}^T (k_{12}^T A_{12} + \mu k_{22} A_{22}) \\
 &\quad - \left[ A_{12}^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + A_{22}^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu^2 k_{22} B_1) \right] \\
 \text{(II.92)} \quad & \\
 \text{suite} \quad & \left[ B_1^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + B_2^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu^2 k_{22} B_2) + R \right]^{-1} \\
 & \left[ B_1^T (k_{11} A_{12} + \mu k_{12} A_{21}) + B_2^T (\mu k_{12} A_{12} + \mu^2 k_{22} A_{12}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad k_{12} &= C_1^T C_2 + A_{11}^T (k_{11} A_{12} + \mu k_{12} A_{22}) + \mu (k_{12}^T A_{12} + k_{22} A_{21}) \\
 &\quad - \left[ A_{11}^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + A_{21}^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu k_{22} B_2) \right] \\
 & \left[ B_1^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + B_2^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu k_{22} B_2) + R \right]^{-1} \\
 & \left[ B_1^T (k_{11} A_{12} + \mu k_{12} A_{22}) + B_2^T (\mu k_{12}^T A_{12} + \mu k_{22} A_{22}) \right]
 \end{aligned}$$

Pour  $\mu$  tendant vers 0, l'équation (II.92) se réduit au système dégénéré suivant :

$$\text{(II.93)} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 k_{11} = C_1^T C_1 + A_{11}^T k_{11} A_{11} - A_{11}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{11} \quad \text{(a)} \\
 k_{12} = C_1^T C_2 + A_{11}^T k_{11} A_{12} - A_{11}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{12} \quad \text{(b)} \\
 k_{12}^T = k_{12}^T \quad \text{(c)} \\
 k_{22} = C_2^T C_2 + A_{12}^T k_{11} A_{12} - A_{12}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{12} \quad \text{(d)}
 \end{array} \right.$$

L'équation (II.93a) admet une solution semi-définie positive si la paire  $(A_{11}, B_1)$  est stabilisable et si la paire  $(A_{11}, C_1)$  est détectable. Elle correspond à l'équation de Riccati relative à la partie lente du système  $(A_{11}, B_1, C_1)$ . Sa résolution permet d'en déduire les quatre blocs de la matrice  $k$ .

La commande déterminée par cette méthode est la suivante :

$$u_n^* = - (R + B^T k B)^{-1} B^T k A X_n$$

$$(II.94) \quad u_n^* = \left[ R + \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \mu k_{12} \\ \mu k_{12}^T & \mu^2 k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \mu k_{12} \\ \mu k_{12}^T & \mu^2 k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

d'où

$$u_n^* = -\alpha^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \mu k_{12} \\ \mu k_{12}^T & \mu^2 k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$u_n^* = -\alpha^{-1} \left[ \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} (k_{11} A_{11} + \mu k_{12} A_{21}) + B_2^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) \right] x_n \\ - \alpha^{-1} \left[ \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix} (\mu k_{11} A_{12} + \mu^2 k_{12} A_{22}) + B_2^T (\mu^2 k_{12}^T A_{12} + \mu^3 k_{22} A_{22}) \right] z_n$$

avec :

$$(II.95) \quad \alpha = R + B_1^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + B_2^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu^2 k_{22} B_2)$$

La méthode que nous venons de présenter réduit la résolution du système global à celle du sous-système dégénéré représentant la partie lente. En effet, la détermination de la matrice  $k_{11}$  par (II.93a) permet d'en déduire les autres blocs de matrice  $k_{12}$  et  $k_{22}$  par les relations (II.93b) et (II.93c) d'où la commande optimale  $u_n^*$  de (II.94) cherchée. Cette expression peut se trouver simplifiée et ceci pour une représentation particulière du système initial.

### III.2.2. - Application à la forme en flèche

Les résultats proposés viennent d'être établis sur une forme quelconque. Dans la suite nous envisagerons le cas d'un processus discret à partir d'une représentation en flèche de structure équivalente à celle des systèmes de type Lur'e Posnikov précédemment décrits, pour lesquels la non linéarité est remplacée par un gain équivalent.

Il nous vient alors différents résultats simplifiés suivant la structure adoptée de la forme en flèche.

Deux cas se présentent à nous, suivant que la partie rapide ou la partie lente se trouve à la pointe de la matrice.

1er cas :

Le système (II.87) peut prendre la forme suivante :

$$(II.96) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \hline z_{n+1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \hline 0 & \mu A_{22} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \hline z_n \\ x_n \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix} u_n \end{cases}$$

dans laquelle, le vecteur de commande  $B_1$ , correspondant à la partie lente ( $A_{11}$ ), est un vecteur nul.

Dans les relations établies auparavant (II.93), quand nous remplaçons  $B_1$  par zéro, elles s'écrivent sous la forme simplifiée suivante :

$$(II.97) \quad \begin{cases} k_{11} = C_1^T C_1 + A_{11}^T k_{11} A_{11} & (a) \\ k_{12} = C_1^T C_2 + A_{11}^T k_{11} A_{12} & (b) \\ k_{22} = C_2^T C_2 + A_{12}^T k_{11} A_{12} & (c) \end{cases}$$

Les relations (II.97a) permettent de déterminer très simplement  $k_{11}$ . En effet,  $A_{11}$  est diagonale, donc :

$$A_{11} = A_{11}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{q_1} \end{bmatrix}$$

Si  $k_{11} = \{k_{11}(i, j) / i, j = 1 \dots q_1\}$  alors (II.97a) s'écrit :

$$k_{11}(i, j) = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_1(i) \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots C_1(j) \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \alpha_{q_1} \end{bmatrix} k_{11}(i, j) \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \alpha_{q_1} \end{bmatrix}$$

d'où la relation exprimant les éléments de la matrice  $k_{11}$

$$(II.98) \quad k_{11}(i, j) = \frac{C_1(i) C_1(j)}{1 - \alpha_i \alpha_j} \quad \text{pour } i, j = 1 \dots q_1$$

Les relations (II.97b) et (II.97c) sont déduites facilement.  
La matrice  $\alpha'$  devient :

$$\alpha' = R + \mu^2 B_2^T k_{22} B_2$$

et la loi de commande optimale s'écrit :

$$(II.99) \quad u_n^* = -\alpha'^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) \\ -\alpha'^{-1} \begin{bmatrix} B_2^T (\mu^2 k_{12}^T A_{12} + \mu^3 k_{22} A_{22}) \end{bmatrix} z_n \end{bmatrix} x_n$$

La partie lente non commandable ( $B_1 = 0$ ) séparément est commandée ici par l'intermédiaire de la variable rapide  $z_n$ .

2ème cas :

Lorsque le système (II.87) représenté par une forme en flèche prend la forme suivante :

$$(II.100) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \hline \mu A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & B_1 \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ \vdots & & B_2 \\ 0 & & \end{bmatrix} u_n$$

$$y_n = \begin{bmatrix} C_1 & \mu C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix}$$

dans laquelle le vecteur de commande  $B_2$  relatif à la partie rapide est un vecteur nul.

Les relations établies (II.93) restent inchangées. Par contre, le coefficient  $\alpha$  se simplifie et la loi de commande optimale  $u_n^*$  aussi. Elles s'écrivent ainsi sous la forme :

$$(II.101) \quad \begin{cases} \alpha'' = R + B_1^T k_{11} B_1 \\ u_n^* = -\alpha''^{-1} \left[ B_1^T (k_{11} A_{11} + \mu k_{12} A_{21}) \right] x_n - \alpha''^{-1} \left[ B_1^T (\mu k_{11} A_{12} + \mu^2 k_{12} A_{22}) \right] z_n \end{cases}$$

Aucune partie du système découplé ne se trouve non commandable séparément comme dans le 1er cas.

Comme dans les domaines de découplage et de stabilité, la forme en flèche s'avère ici aussi intéressante. Elle permet une simplification dans la résolution des équations de Riccati, ainsi que dans la résolution des lois de commande.

#### IV - ETUDE COMPARATIVE DES SYSTEMES DISCRETS ET CONTINUS SINGULIEREMENT PERTURBES

Nous proposons un récapitulatif des résultats établis pour les systèmes échantillonnés et continus en vue de leur comparaison.

##### IV.1 - Modélisation

Les systèmes continus et échantillonnés représentés dans l'espace d'état sous la forme :

$$(II.102) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \\ y_n = Cx_n \end{cases} \quad x, x_n \in \mathbb{R}^q$$

Lorsque les systèmes (II.102) possèdent la propriété de double échelle de temps, ils s'écrivent sous la forme singulièrement perturbée :

$$(II.103) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mu \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ x(0) , z(0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{21} & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = \begin{bmatrix} C_1 & C_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mu z_n \end{bmatrix} \\ x_0 , z_0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} x , x_n \in \mathbb{R}^{q_1} \text{ les vecteurs lents du système considéré} \\ z , z_n \in \mathbb{R}^{q_2} \text{ les vecteurs rapides du système considéré} \\ A_{ij}^* = A_{ij} / \mu , C_2^* = C_2 / \mu , B_2^* = B_2 / \mu \\ q_1 + q_2 = q \end{array} \right.$$

Une dualité apparente dans la modélisation, le petit paramètre  $\mu$  apparaît au sein de vecteur état en échantillonné, dans la dérivée de vecteur état en continu.

IV.2 - Découplage partie lente / partie rapide

IV.2.1. - partie lente

Elle est obtenue en mettant dans les deux systèmes (II.102)  $\mu = 0$

continu

$$(II.104) \quad \begin{cases} x_{\ell}^o = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x_{\ell} + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u_{\ell} \\ y_{\ell} = (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) x_{\ell} - C_2 A_{22}^{-1} B_2 u_{\ell} \\ x_{\ell}(o) = x(o) \end{cases}$$

discret

$$\begin{cases} x_{\ell n+1} = A_{11} x_{\ell n} + B_1 u_{\ell n} \\ y_{\ell n} = C_1 x_{\ell n} \\ x_{\ell o} = x_o \end{cases}$$



IV.2.2. - partie rapide

$$(II.105) \quad \begin{cases} z_r^o = A_{22} z_r + B_2 u_r \\ y_r = C_2 z_r \\ z_r(o) = z(o) - A_{22}^{-1} A_{21} x(o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{rn+1} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) z_{rn} + (B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1) u_{rn} \\ y_{rn} = (C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}) z_{rn} + C_1 A_{11}^{-1} B_1 u_{rn} \\ z_{ro} = z_o - A_{21} A_{11}^{-1} x_o \end{cases}$$

### Interprétation des résultats

La méthode des perturbations singulières permet en posant  $\mu = 0$  dans (II.103) de déconnecter les différentes parties d'un système (discret ou continu) possédant deux dynamiques différentes, et d'obtenir avec une précision suffisante (d'autant plus grande que  $\mu$  est petit) le système lent réduit en continu et le système rapide réduit en discret.

La méthode de perturbations singulières respectivement en continu et en discret ne donne pas toujours des résultats suffisamment précis : le système rapide découplé en continu ne tient pas compte de l'évolution de la partie lente, et le système lent découplé en discret ne tient pas compte de l'évolution de la partie rapide sauf sous forme de conditions initiales pour le cas continu ; ceci peut être un inconvénient quand l'étude s'intéresse à la partie lente/rapide du discret/continu.

### CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats concernant la modélisation des systèmes discrets à deux dynamiques sous forme singulièrement perturbée et les avantages que la représentation en flèche matricielle nous procure pour la réduction, l'analyse et la commande optimale des processus à deux dynamiques, en particulier pour les systèmes non linéaires de type Lur'e Posnikov.

Nous avons montré, une certaine dualité dans les résultats obtenus pour les systèmes discrets et les systèmes continus et une inversion dans la précision de systèmes découplés ainsi trouvés.

CHAPITRE III

MISE EN OEUVRE DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE  
POUR L'ETUDE DE LA PARTIE LENTE DISCRETE

---

INTRODUCTION

Nous avons vu au deuxième chapitre dans l'utilisation de la méthode des perturbations singulières, que la partie rapide relative aux systèmes continus et la partie lente correspondant aux systèmes discrets, sont obtenues avec une précision plus faible que la partie lente (respectivement rapide).

Pour lever ces difficultés, il a été proposé en continu pour l'étude de la partie rapide, l'utilisation simultanée de la notion de systèmes réciproques /Dauphin Tanguy, 1983/ et de la méthode des perturbations singulières. Quand à l'étude de la partie lente en discret, nous proposons une méthode qui utilise une transformation dite homographique /Borne, Gentina, 1974/ et la méthode des perturbations singulières en discret et continu /El Moudni, Dauphin Tanguy, Borne, 1984/.

I - ETUDE DE LA PARTIE RAPIDE EN CONTINU ET LA PARTIE LENTE EN DISCRET.

I.1. Le système réciproque en continu.

La notion de système réciproque a été introduite par /Hutton, Friedland, 1975/ pour les problèmes de réduction par la méthode de Routh, développée par /Dauphin Tanguy, El Moudni, Borne, 1982/ et généralisée par /Dauphin Tanguy, Lebrun, Borne, 1983/ pour les systèmes à plusieurs dynamiques.

Pour un système continu linéaire représenté dans l'espace d'état par un triplet matriciel (A, B, C) avec sa fonction de transfert s'écrivant sous la forme :

$$W(p) = C(pI - A)^{-1} B$$

La fonction de transfert du système réciproque notée  $\tilde{W}(p)$  est obtenue par :

$$\tilde{W}(p) = \frac{1}{p} W\left(\frac{1}{p}\right)$$

dont le triplet matriciel dans l'espace d'état est :

$$[ A^{-1}, B, -CA^{-1} ]$$

il y a donc inversion des dynamiques du système. La partie lente est devenue rapide, la partie rapide est devenue lente. Les techniques de perturbations singulières s'appliquent encore sur le nouveau système et donnent pour les systèmes découplés réciproques une bonne précision sur la partie lente (initialement rapide). Une deuxième application de la transformation réciproque sur le système découplé obtenu permet d'avoir la partie rapide découplée avec le maximum de précision.

Ainsi le meilleur découplage est représenté par une partie lente obtenue directement du système initial et une partie rapide obtenue par application de perturbation singulière et la transformation réciproque.

Il s'écrit par référence aux équations du chapitre II, en (II-104) et (II-105) sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{partie lente} \quad & \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_\ell &= (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x_\ell + (B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2) u_\ell \\ y_\ell &= (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) x_\ell - C_2 A_{22}^{-1} B_2 u_\ell \\ x_\ell(0) &= x(0) \end{aligned} \right. \\ \text{partie rapide} \quad & \left\{ \begin{aligned} \dot{z}_r &= \frac{A_{22}}{\mu} z_r + \left( \frac{B_2}{\mu} + A_{22}^{-1} A_{21} B_1 \right) u_r \\ y_r &= C_2 z_r + \int_{t_0}^t (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) B_1 u_r dt \\ z_r(0) &= z(0) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les modifications apportées sur le système rapide, se manifestent dans la matrice de commande par addition d'un terme  $(A_{22}^{-1} A_{21} B_1)$  et au niveau des conditions initiales en supprimant les phénomènes de couche limite sur  $z_r$  ( $z_r(0) = z(0)$ ).

## I.2 - Le système "réciproque" en discret.

Quand nous analysons les systèmes découplés relatifs aux systèmes continu et discret, nous constatons qu'il y a une inversion dans les précisions. La partie lente étant obtenue avec une bonne précision en continu ne l'est pas en discret et les propriétés soit inverses en ce qui concerne la partie rapide.

A l'image de la transformation réciproque en continu qui permet d'avoir les deux systèmes découplés avec le maximum de précision, dans le cas discret, il suffit de disposer d'une transformation qui permet d'avoir un système continu équivalent au système discret étudié, en conservant la nature des dynamiques. La transformation adaptée est la transformation dite homographique notée H, que nous définissons dans la suite du chapitre.

## II - ETUDE DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE.

### II.1. Introduction.

La résolution formelle des systèmes continus non linéaires ne peut généralement être envisagée à partir des méthodes analytiques usuelles. La recherche des solutions nécessite alors la mise en oeuvre de moyens de calcul numérique ou analogique.

Dans l'éventualité d'une résolution sur ordinateur, diverses contraintes sont imposées par la technologie des opérateurs disponibles. En particulier, le traitement de l'information sous forme discrète implique la définition d'un modèle de même nature. C'est dans ce sens que se pose généralement le problème de la discrétisation d'une équation d'état et c'est dans ce sens qu'une transformation homographique a été proposée /Borne, Gentina, 1974/ /Gentina, 1975/. Elle permet d'associer de manière rigoureuse à un système continu un système discret et constitue ainsi un moyen de transposer le problème optimal continu en un problème optimal discret /Borne, Gentina, 1974/ /Quet 1976/.

Le modèle discret doit refléter l'ensemble des propriétés de commandabilité, d'observabilité, de stabilité et d'unicité du processus initial, il doit aussi permettre d'approcher au mieux la solution réelle.

Pour les systèmes échantillonnés singulièrement perturbés, cette transformation homographique sera d'un grand apport, car elle permettra de lever cette imprecision sur le système lent découplé. Elle permet d'associer de manière rigoureuse au système échantillonné un système continu sans perte des propriétés essentielles attachées au processus et permet aussi de transposer le problème échantillonné singulièrement perturbé en un problème continu.

## II.2. Définitions.

### II.2.1 - Modélisation dans l'espace d'état.

Les systèmes discrets que nous proposons d'étudier sont représentés par une équation d'état de la forme :

$$(III-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = A x_n + B u_n \\ y_n = C x_n \\ x_0 : \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

$x_n$  est le vecteur état du système,  $x_n \in \mathbb{R}^q$

$u_n, y_n$ , sont les vecteurs d'entrée et de sortie,  $u_n \in \mathbb{R}^r, y_n \in \mathbb{R}^s$ .

A partir d'une transformation homographique matricielle sur l'opérateur A, il est possible d'exprimer sous une autre forme l'équation d'état discrète (III-1). En effet posons par définition :

$$(III-2) \quad x_{n+1} - x_n = \dot{x}$$

quantité que nous exprimerons à partir de :

$$(III-3) \quad \frac{x_{n+1} + x_n}{2} = x$$

il nous vient alors l'expression suivante :

$$(III-4) \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} - x_n = (A-I) \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} \left( \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) + \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} B \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \\ \frac{y_{n+1} + y_n}{2} = C \left( \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) \end{array} \right.$$

en posant :  $\frac{y_{n+1} + y_n}{2} = y$  et  $\frac{u_{n+1} + u_n}{2} = u$

l'expression (III-4) s'écrit sous la forme :

$$(III-5) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (A - I) \left( \frac{A + I}{2} \right)^{-1} x + \left( \frac{A + I}{2} \right)^{-1} B u \\ y = C x \end{array} \right.$$

Donc, au triplet matriciel du système discret initial (III-1) (A, B, C) correspond par le biais de la transformation homographique notée H, le triplet du système continu (III-5) correspondant :

$$\left( (A-I) \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1}, \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} B, C \right).$$

Inversement, soit un processus continu décrit par l'équation d'état (III-6) :

$$(III-6) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = M x + F u \\ y = G x \\ x(0) : \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

avec  $x$  : le vecteur caractérisant l'état du système,  $x \in \mathbb{R}^q$   
 $u, y$  : les vecteurs d'entrée et de sortie.

D'une manière analogue, il est possible de déduire de l'équation (III-6) une solution récurrente décrivant dans l'espace d'état l'évolution d'un vecteur  $x_n$ .

$$(III-7) \quad x + \frac{\dot{x}}{2} = x_{n+1}$$

en fonction de

$$(III-8) \quad x - \frac{\dot{x}}{2} = x_n$$

il nous vient d'après (III-7) (III-8) et (III-6) l'expression (III-9)

$$(III-9) \quad \begin{cases} x + \frac{\dot{x}}{2} = (I + \frac{M}{2}) (I - \frac{M}{2})^{-1} (x - \frac{\dot{x}}{2}) + (I - \frac{M}{2})^{-1} F (u - \frac{\dot{u}}{2}) \\ y - \frac{\dot{y}}{2} = G (x - \frac{\dot{x}}{2}) \end{cases}$$

En posant :  $y - \frac{\dot{y}}{2} = y_n$  et  $u - \frac{\dot{u}}{2} = u_n$

(III-9) s'écrit encore :

$$(III-10) \quad \begin{cases} x_{n+1} = (I + \frac{M}{2}) (I - \frac{M}{2})^{-1} x_n + (I - \frac{M}{2})^{-1} F u_n \\ y_n = G x_n \end{cases}$$

Donc, au triplet du système continu (III-6) (M, F, G) correspond par le biais de la transformation homographique notée  $H^{-1}$ , le triplet du système discret (III-10) correspondant :

$$\left( (I + \frac{M}{2}) (I - \frac{M}{2})^{-1}, (I - \frac{M}{2})^{-1} F, G \right).$$

Afin de simplifier l'écriture des équations, notons respectivement  $H(A)$  et  $H^{-1}(M)$  les transformées de type homographique des matrices A et M, avec :

$$(III-11) \quad \begin{cases} H(A) = (A - I) \left( \frac{A + I}{2} \right)^{-1} \\ H^{-1}(M) = (I + \frac{M}{2}) (I - \frac{M}{2})^{-1} \end{cases}$$

Ainsi le système continu (III-5) associé à l'équation d'état discret (III-1) s'écrit encore :

$$(III-12) \quad \begin{cases} \dot{x} = H(A) x + \left( \frac{A + I}{2} \right)^{-1} B u \\ y = C x \end{cases}$$

de même pour le système discret (III-10) associé à l'équation d'état continu (III-6) s'écrit :

$$(III-13) \quad \begin{cases} x_{n+1} = H^{-1}(M) x_n + \left( I - \frac{M}{2} \right)^{-1} F u_n \\ y_n = G x_n \end{cases}$$

La fonction de matrice  $\left( \frac{A + I}{2} \right)^{-1} B / \left( I - \frac{M}{2} \right)^{-1} F$  traduit sur le plan continu / discret l'influence de la commande sur le système. Elle est obtenue par composition de deux matrices A et B / M et F.

On vérifie facilement la relation (III-14) pour une matrice D carrée d'ordre q,

$$(III-14) \quad H^{-1}(H(D)) = D$$

### II.2.2 - Modélisation sous forme symbolique par fonction de transfert.

Nous présentons ici, la notion de transformation homographique pour autres modes de représentations.

Nous poserons pour la suite de l'étude que la notation X/Y signifiera X respectivement Y.

#### Définition 1.

Considérons le système linéaire représenté par l'équation récurrente / différentielle à coefficients constants :

$$(III-15) \quad \sum_{i=0}^n a_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^m b_i u_{n+i} / \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}$$

Le système continu obtenu par la transformation homographique H / discret obtenu par la transformation  $H^{-1}$ , est défini par l'équation différentielle / récurrente suivante :

$$(III-16) \quad \sum_{i=0}^n \beta_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{(i)} / \sum_{i=0}^n \beta'_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha'_i u_{n+i}$$

où les coefficients  $\beta_i, \beta'_i, \alpha_i, \alpha'_i$ , sont constants.

Définition 2.

Si l'on note  $z/p$  l'opérateur symbolique tel que à  $y_{n+i}/y^i$  corresponde  $z^i y(z)/p^i y(p)$  alors l'expression (III-15) conduit à la fraction rationnelle :

$$(III-17) \quad W_d(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} / W_c(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b'_i p^i}{\sum_{i=0}^n a'_i p^i}$$

qui correspond à la fonction de transfert en discret / continu.

Le système continu correspondant à  $W_d(z)$  obtenu par la transformation H / discret correspondant à  $W_c(p)$  obtenue par  $H^{-1}$  est représenté par :

$$(III-18) \quad \tilde{W}_c(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(\frac{p}{2}\right)^i}{\sum_{i=0}^n \beta_i \left(\frac{p}{2}\right)^i} = \frac{N(p)}{D(p)} / \tilde{W}_d(z) = 2 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha'_i z^i}{\sum_{i=0}^n \beta'_i z^i} = \frac{N'(z)}{D'(z)}$$

qui est obtenu à partir de  $W_d(z) / W_c(p)$  par :

$$(III-19) \quad \tilde{W}_c(p) = \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} W_d\left(z = \frac{1 + \frac{p}{2}}{1 - \frac{p}{2}}\right) / \tilde{W}_d(z) = \frac{2}{z + 1} W_c\left(p = \frac{2(z-1)}{z + 1}\right)$$



Plusieurs cas sont à envisager :

- \* Si le coefficient  $a_0$  de  $W_d(z)$  /  $a'_0$  de  $W_c(p)$  est différent de zéro alors :
  - si  $m \leq n-1$ , le degré de  $N(p)$  et  $D(p)$  /  $N'(z)$  et  $D'(z)$  relativement à  $\tilde{W}_c(p)$  /  $\tilde{W}_d(z)$  est de  $(n-1)$  et  $n$
  - si  $m = n$ , le degré de  $N(p)$  et  $D(p)$  /  $N'(z)$  et  $D'(z)$  relativement à  $\tilde{W}_c(p)$  /  $\tilde{W}_d(z)$  est de  $n$  et  $n+1$ .
- \* Si le coefficient  $a_0$  de  $W_d(z)$  /  $a'_0$  de  $W_c(p)$  est nul, ce qui correspond à une fonction  $W_d(z)$  /  $W_c(p)$  comportant un terme en  $\frac{1}{z}$  /  $\frac{1}{p}$ , alors :
  - si  $m < n$ , le degré de  $N(p)$  et  $D(p)$  /  $N'(z)$  et  $D'(z)$  est de  $(n-1)$  et  $n$
  - si  $m = n$ , le degré de  $N(p)$  et  $D(p)$  /  $N'(z)$  et  $D'(z)$  est de  $n$  et  $n+1$ .

Définition 3.

Quand  $m \leq n - 1$ , alors le triplet matriciel  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  /  $(\tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{G})$  associé à la fraction  $\tilde{W}_c(p)$  /  $\tilde{W}_d(z)$  est déduit du triplet initial  $(A, B, C)$  /  $(M, F, G)$  associé à  $W_d(z)$  /  $W_c(p)$  par les relations suivantes

$$(III-23) \quad \begin{array}{l} \tilde{A} = H(A) \\ \tilde{B} = \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} B \\ \tilde{C} = C \end{array} \Bigg/ \begin{array}{l} \tilde{H} = H^{-1}(M) \\ \tilde{F} = \left( I - \frac{M}{2} \right)^{-1} F \\ \tilde{G} = G \end{array}$$

il suffit pour déterminer ces relations, d'expliciter  $W_d(z)$  /  $W_c(p)$  en :

$$(III-24) \quad W_d(z) = C (zI - A)^{-1} B \quad / \quad W_c(p) = G(pI - M)^{-1} F$$

d'où

$$(III-25) \quad \tilde{W}_c(p) = \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} W_d \left( \frac{1 + \frac{p}{2}}{1 - \frac{p}{2}} \right) \quad / \quad \tilde{W}_d(z) = \frac{2}{z + 1} W_c \left( \frac{2(z-1)}{z + 1} \right)$$

soit encore :

$$(III-26) \quad \tilde{W}_c(p) = \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} C \left( \frac{1 + \frac{p}{2}}{1 - \frac{p}{2}} I - A \right)^{-1} B /$$

$$\tilde{W}_d(z) = \frac{2}{z+1} G \left( \frac{2(z-1)}{z+1} - M \right)^{-1} F$$

d'où

$$(III-27) \quad \tilde{W}_c(p) = C \left[ pI - (A-I) \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} \right]^{-1} \left( \frac{A+I}{2} \right) B /$$

$$\tilde{W}_d(z) = G \left[ zI - \left( I + \frac{M}{2} \right) \left( I - \frac{M}{2} \right)^{-1} \right]^{-1} \left( I - \frac{M}{2} \right) F$$

ce qui donne par identification la relation (III-23).

### II.3 - Propriétés de la transformation homographique.

#### II.3.1. Analyse du système équivalent.

Les propriétés de stabilité de commandabilité et d'observabilité du système équivalent obtenu après transformation homographique ont été étudiées par /Borné, Gentina, 1974/.

##### a) Stabilité.

La stabilité des systèmes discrets (III-1) et continus (III-6) fonctionnant en régime autonome est imposée par les contraintes respectives suivantes :

$$(III-28) \quad \max |\lambda_A| < 1$$

$$(III-29) \quad \max \operatorname{Re}(\lambda_M) < 0$$

il vient pour les transformés par homographie

$$(III-30) \quad \max |\lambda_{H^{-1}(M)}| < 1$$

$$(III-31) \quad \max \operatorname{Re}(\lambda_{H(A)}) < 0$$

En effet, la transformation homographique réalise la transformation biunivoque dans le plan complexe et l'intérieur du cercle de rayon unité en le demi plan partie réelle négative.

Dans ce sens l'application des conditions de stabilité à un système discret / continu et à son transformé continu / discret conduit nécessairement au même résultat.

Cette transformation se présente du point de vue stabilité donc comme une extension à la représentation d'état de transformée en w/Vidal, 1968/ qui à l'intérieur du cercle de rayon unité, fait correspondre le demi plan complexe  $\text{Re} < 0$ .

b) Dualité.

Pour un fonctionnement en régime autonome du système décrit par l'équation d'état (III-32), le système adjoint s'écrit sous la forme (III-33) :

(III-32)

$$x_{n+1} = A x_n$$

(III-33)

$$\psi_{n+1} = (A^T)^{-1} \psi_n$$

(III-34) avec

$$x_n^T \psi_n = \text{cte}$$

Il apparaît en représentant par (III-35) la transformée continu du système (III-32) :

$$\dot{x} = H(A) x \quad (\text{a})$$

(III-35)

$$\dot{\psi} = H[(A^T)^{-1}] \psi \quad (\text{b})$$

compte tenu des relations (III-35) et (III-36)

(III-36)

$$H[(A^T)^{-1}] = -[H(A)]^T$$

il vient

(III-35)

$$\dot{\psi} = -[H(A)]^T \psi \quad (\text{c})$$

Le système (III-35 c) est ainsi le système adjoint du système (III-35a) transformé du système (III-32). Une propriété semblable peut être établie dans le sens continu - discret.

c) Commandabilité - observabilité.

La condition de commandabilité du système linéaire décrit par la relation (III-1) peut s'exprimer simplement au moyen des composantes  $Z_i^A$  de la matrice A, il vient :

$$\text{Commandabilité de (III-1) : } \text{rang} (Z_1^A B, Z_2^A B \dots Z_q^A B) = q$$

Les matrices A et H(A) possèdent les mêmes composantes /Gentina, 1975/, les conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité des systèmes (III-1) et (III-5) sont identiques.

Cette propriété se vérifie également pour le système continu et son système transformé discret par  $H^{-1}$ .

Les propriétés d'observabilité et de commandabilité s'échangent par dualité. Nous en déduisons, compte tenu des résultats précédents, l'équivalence des propriétés d'observabilité des systèmes discret et continu associés par H, ainsi que celle du système continu et discret associé par  $H^{-1}$ .

II.3.2 - Etude des conditions initiales.

a) 1ère approche.

Pour cette étude, nous utilisons la définition même des transformations homographiques H et  $H^{-1}$  en tenant compte de facteur "temps" entre le système discret et le système continu équivalent.

Ainsi, pour définir un système continu à partir d'un système discret par H, nous avons utilisé la relation suivante :

$$x = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$$

La valeur continue apparaît comme une valeur moyenne de deux valeurs échantillonnées consécutives définie à un instant t, ce dernier peut prendre des valeurs comprises entre n et n+1. Comme pour les variables

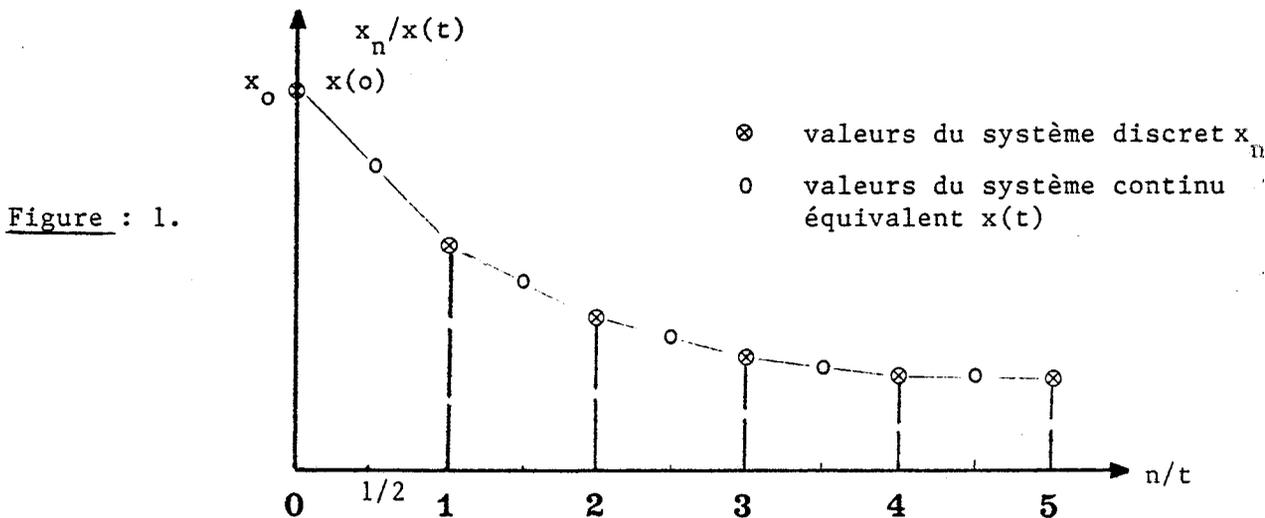
continues, nous définissons l'instant  $t$  comme une moyenne des deux instants échantillonnés  $n+1$  et  $n$  relatifs à  $x_{n+1}$  et  $x_n$ , tel que

$$(III-37) \quad t = \frac{n+1 + n}{2}$$

Donc, le système continu sera obtenu par :

$$(III-38) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} \\ \dot{x}(t) = x_{n+1} - x_n \\ t = \frac{n+1 + n}{2} \end{array} \right.$$

Il nous vient en traçant les graphes des deux variables,  $x_n$  représentant le système discret initial et  $x(t)$  défini par (III-38).



Le système continu est défini par les valeurs médianes entre deux valeurs échantillonnées consécutives et ceci aux instants  $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , l'instant  $n = 0$  définit la valeur des conditions initiales  $x(0)$ .

Celles-ci sont obtenues par simple prolongement de la courbe  $x(t)$  de  $t = \frac{1}{2}$  à 0 (continuité à l'origine). Elles prennent alors les valeurs  $x_0$  correspondant aux conditions initiales de système échantillonné initial.

De même pour un système discret obtenu à partir d'un système continu pour la transformation  $H^{-1}$ , il suffit d'adjoindre à la relation (III-39) définissant les valeurs échantillonnées.

$$(III-39) \quad \begin{cases} x_n = x(t) - \frac{\dot{x}(t)}{2} \\ x_{n+1} = x(t) + \frac{\dot{x}(t)}{2} \end{cases}$$

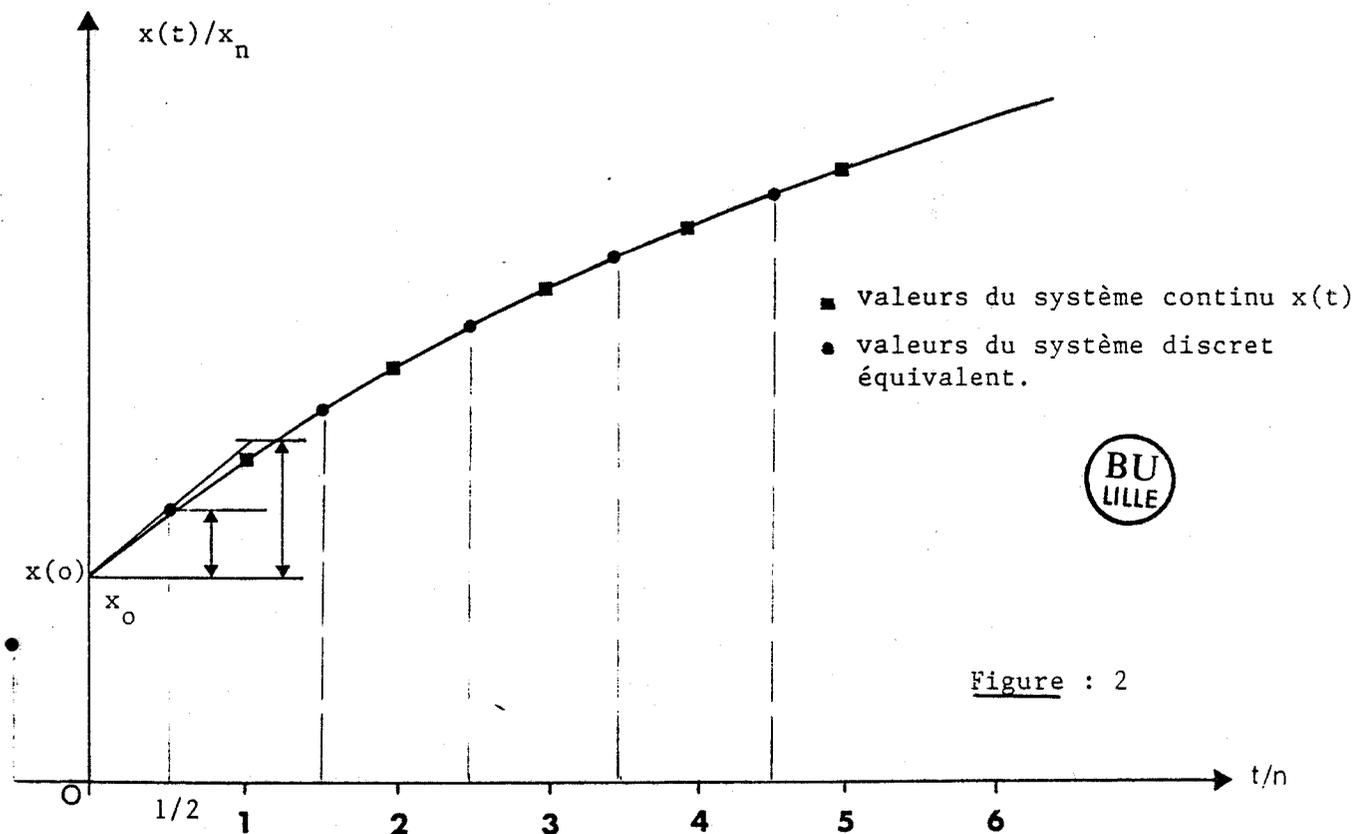
une autre relation liant  $n$  à  $t$  définie par :

$$(III-40) \quad n = t - \frac{1}{2}$$

telle qu'on ait :

$$(III-41) \quad x_{(t - \frac{1}{2})} = x(t) - \frac{\dot{x}(t)}{2}$$

En traçant point par point (III-39) à partir d'un système continu représenté par  $x(t)$  il nous vient la figure suivante :



d'après le graphe, le système discret apparaît être défini par des valeurs discrètes  $x_n$  obtenues pour les points de  $x(t)$  pris aux instants  $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$  L'instant  $t = 0$  définit la valeur des conditions initiales  $x_0$ .

Celles - ci prenant les valeurs  $x(0)$  et ceci par une simple interpolation dans les points échantillonnés.

Remarque.

La transformation homographique proposée  $H/H^{-1}$  permet le passage de ce système discret (III-1)/continu (III-6) à un système continu équivalent (III-5)/discret équivalent (III-10). Le modèle continu/discret reflète l'ensemble des propriétés de commandabilité, d'observabilité, de stabilité et d'unicité du processus initial. Il doit aussi permettre d'approcher au mieux la solution réelle. La conservation des conditions initiales apparait comme une conséquence logique.

b) 2ème approche.

Une deuxième forme de conditions initiales peut être obtenue en considérant les définitions des transformées  $H$  et  $H^{-1}$ .

Soient les deux systèmes échantillonné et continu suivants :

$$(III-42) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = A x_n + B u_n \\ y_n = C x_n \end{array} \right. \quad (a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = M x + F u \\ y = G x \end{array} \right. \quad (b)$$

$x_0$ ,  $u_0$  et  $x(0)$ ,  $u(0)$  sont les conditions initiales respectivement du système échantillonné (III-42 a) et continu (III-42 b) respectivement à  $n = 0$  et  $t = 0$ . (III-42 b) est l'équivalent continu du système (III-42 a) défini par :

$$(III-43) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x_{n+1} + x_n}{2} = \left( \frac{A+I}{2} \right) x_n + B u_n \quad (a) \\ M = H(A) \quad (b) \\ F = \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} B \quad (c) \end{array} \right.$$

dont les conditions initiales  $x(0)$  sont définies à partir de (III-43 a) par :

$$(III-44) \quad x(o) = \left( \frac{A+I}{2} \right) x_o + \frac{B}{2} u_o$$

De même pour le système (III-42 a) transformé discret du système continu (III-42 b) avec :

$$(III-45) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n = x - \frac{\dot{x}}{2} = \left( I - \frac{M}{2} \right) x - \frac{F}{2} u \quad (a) \\ A = H^{-1}(M) \quad (b) \\ B = \left( I - \frac{M}{2} \right)^{-1} F \quad (c) \end{array} \right.$$

les conditions initiales  $x_o$  sont déduites de (III-45 a) par :

$$(III-46) \quad x_o = \left( I - \frac{M}{2} \right) x(o) - \frac{F}{2} u(o)$$

lorsque nous remplaçons dans (III-46)  $x(o)$  par son expression définie dans (III-44), cette expression devient :

$$(III-47) \quad x_o = \left( I - \frac{M}{2} \right) \left[ \left( \frac{A+I}{2} \right) x_o + \frac{B}{2} u_o \right] - \frac{F}{2} u(o)$$

soit encore :

$$(III-48) \quad x_o = \left( I - \frac{M}{2} \right) \left( \frac{A+I}{2} \right) x_o + \left( I - \frac{M}{2} \right) \frac{B}{2} u_o - \frac{F}{2} u(o)$$

avec B prenant la valeur (III-45 c),  $\left( I - \frac{M}{2} \right) \left( \frac{A+I}{2} \right) = I$ , et en considérant que à l'instant initial on a :

$$(III-49) \quad u(o) = u_o$$

on vérifie, à partir de (III-48) que nous obtenons :

$$x_o = x_o$$

II.4 - Application de la transformation homographique  $H^{-1}$  à la discrétisation d'une équation d'état continu /Borne, Gentina, 1974/.

La transformée homographique matricielle qui vient d'être présentée peut constituer un outil adapté à l'intégration numérique des systèmes continus linéaires. Il convient d'introduire la notion de pas de discrétisation ou d'intégration  $\Delta t$  /Borne, Gentina, Laurent 1972/ /Birkhoff, Varga 1958/ /Borne, Gentina 1976/

Le système continu (III-6) peut être mis sous une forme discrète telle que (III-50) :

$$(III-50) \quad x + \Delta t \frac{\dot{x}}{2} = (I + \frac{M}{2} \Delta t) (I - \frac{M}{2} \Delta t)^{-1} (x - \Delta t \frac{\dot{x}}{2}) + (I + \frac{M}{2} \Delta t)^{-1} \Delta t F u$$

En instant  $x_{n+1}$  et  $x_n$ , les valeurs états successifs définis aux instants  $n$  et  $n + \Delta t$ , il vient alors le système discrétisé (III-51) :

$$(III-51) \quad x_{n+1} = H^{-1}(M \Delta t) x_n + (I - \frac{M}{2} \Delta t)^{-1} \Delta t F u_n$$

L'intégration de l'équation linéaire (III-6) entre les instants  $n$  et  $n + \Delta t$  fournit une solution de la forme :

$$(III-52) \quad x_{n+1} = e^{M \Delta t} x_n + \int_0^{\Delta t} e^{M(\Delta t - \tau)} F u(\tau) d\tau, \quad \tau \in [n, n+1]$$

Dans ce cas, il est possible de montrer que la transformation homographique  $H^{-1}(M \Delta t)$  constitue une approximation au troisième ordre de  $e^{M \Delta t}$ , en effet, pour ces deux fonctions de matrice, il nous vient :

$$(III-53) \quad \begin{cases} e^{M \Delta t} = I + M \Delta t + \frac{M^2}{2!} \Delta t^2 + \frac{M^3}{3!} \Delta t^3 \cdot e^{M \Delta t} \theta_1 \\ H^{-1}(M \Delta t) = I + M \Delta t + \frac{M^2}{2!} \Delta t^2 + \frac{M^3}{3!} \Delta t^3 [12(I - M \Delta t \theta_2)^{-4}] \end{cases}$$

$$0 < \theta_1, \quad \theta_2 < 1$$

Un résultat analogue peut être obtenu concernant l'entrée, il suffit de considérer pour cela  $u(t)$  constant sur le pas d'intégration  $\Delta t$ .

Inversement, si l'on dispose d'un système discret, on peut se demander dans quelles conditions la transformation homographique  $H$  pourrait mener à un modèle continu permettant la résolution par voie analogique du système initial discret.

En effet, entre les instants  $n \Delta t$  et  $(n+1) \Delta t$  définissant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , on peut associer au processus discret (III-1), son transformé continu (III-54) :

$$(III-54) \quad \dot{x} = \frac{1}{\Delta t} H(A) x + \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{I+A}{2} \right)^{-1} B u$$

Une telle transformation peut trouver son application dans la synthèse et la commande des systèmes échantillonnés transposant ainsi au continu le problème initial discret.

### III - UTILISATION DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE POUR L'ETUDE DE LA PARTIE LENTE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES SINGULIEREMENT PERTURBES.

Nous savons, que lorsque le but de la réduction est d'étudier le comportement lent du système échantillonné, la technique de perturbations singulières pour la réduction ne donne pas toujours des résultats précis, en effet, le système lent découplé ne tient pas compte de l'évolution de la partie rapide.

Nous proposons ici, une méthode d'étude qui utilise simultanément la notion de transformation homographique étudiée au début du chapitre, et la méthode des perturbations singulières en continu et en échantillonné.

#### III.1 - Définition des systèmes étudiés.

Les systèmes que nous proposons d'étudier sont des systèmes linéaires singulièrement perturbés représentés par un triplet matriciel  $(A, B, C)$

dans l'espace d'état ou par sa fonction de transfert  $C(zI - A)^{-1}B = W_d(z)$ .

Nous supposons que les valeurs propres de la matrice A, ou les poles de  $W_d(z)$  se répartissent dans les cercles de Geshgorine suivant :

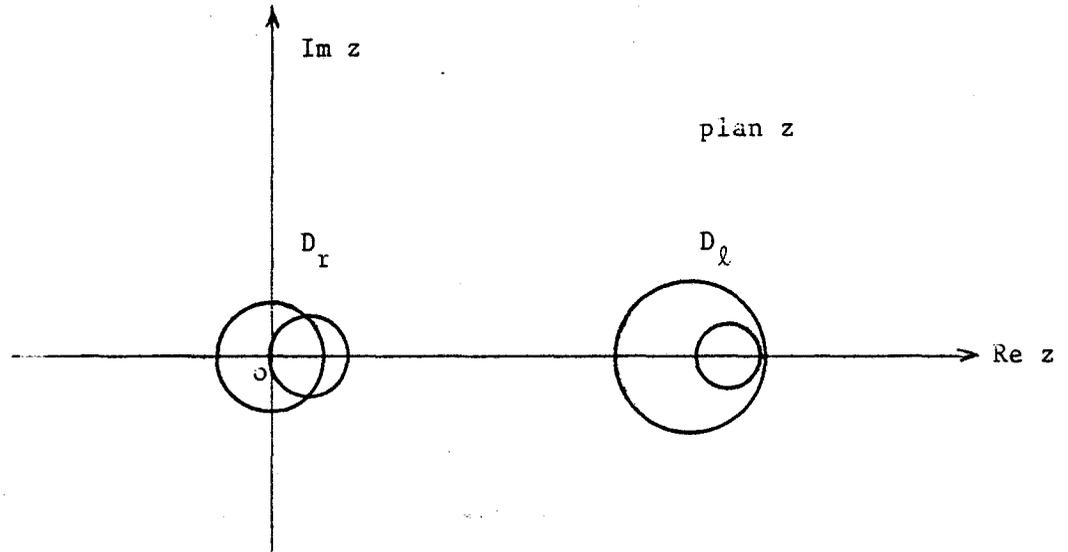


Figure : 3

$D_l/D_r$  regroupe les valeurs propres lente / rapide du système.  
Nous supposons de plus /Kando et Iwazumi 1984/ /Phillips 1980/ :

$$(III-55) \quad \text{Re } |\lambda(A)| \gg \text{Im } |\lambda(A)|$$

ceci implique que les valeurs propres de la matrice caractérisant l'évolution du système se répartissent ainsi :

- les valeurs propres correspondant à la partie lente sont localisées dans  $D_l$  et sont à partie réelle positive,

- les valeurs propres relatives à la partie rapide sont localisées dans le domaine  $D_r$  et sont à parties réelles positives.

Le cas correspondant le plus souvent à des systèmes singulièrement perturbés obtenu par échantillonnage des systèmes continus qui sont aussi singulièrement perturbés.

III.2 - Comportement dynamique par la transformation homographique entre les systèmes discrets et les systèmes continus équivalents.

Pour un système échantillonné singulièrement perturbé représenté par sa fonction de transfert  $W_d(z)$ , les poles peuvent être groupés en deux domaines bien séparés, l'un lent, l'autre rapide.

Théorème 1.

La fonction de transfert  $\tilde{W}_c(p)$  obtenue de  $W_d(z)$  par la relation (III-25), se trouve elle aussi sous forme singulièrement perturbée dont les poles correspondants se trouvent bien séparés en deux domaines, lent et rapide relatifs à ceux de  $W_d(z)$ .

Démonstration.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons une propriété importante de la transformation homographique, celle qui fait correspondre à un cercle dans le plan  $z$ , un autre cercle dans le plan  $p$ , comme le montre la figure :

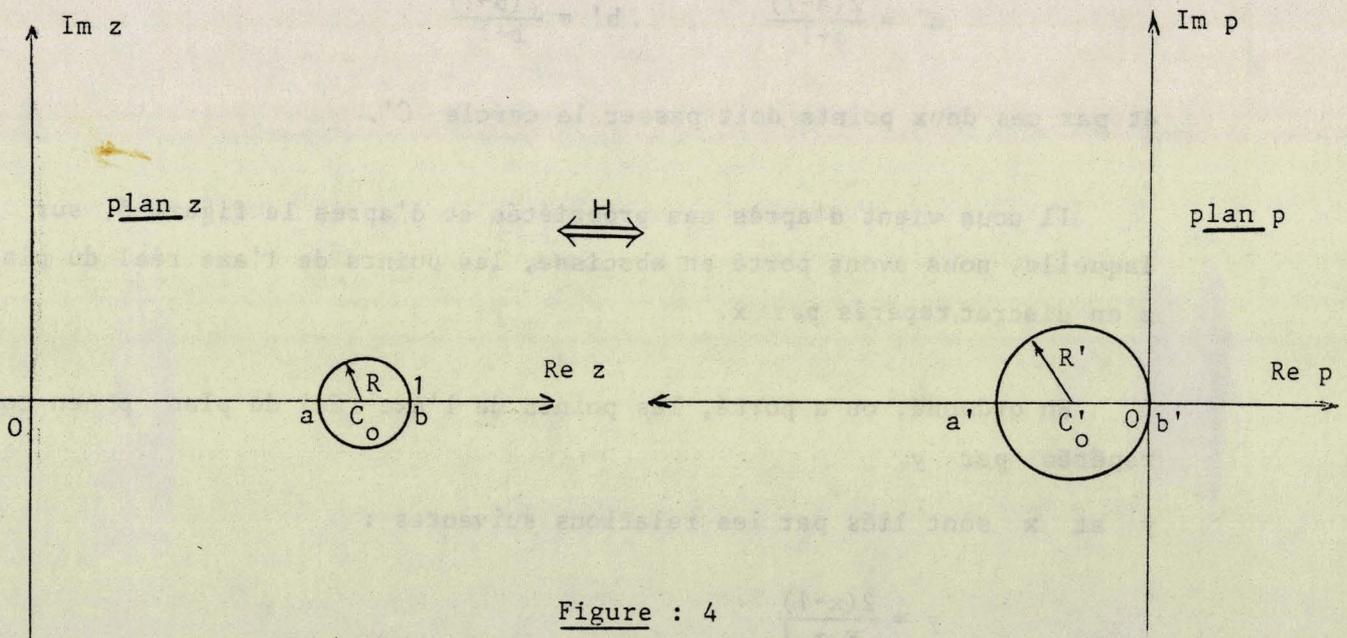


Figure : 4

Le centre  $C'_o$  et le rayon  $R'$  de cercle  $C'$  dans le plan  $p$  sont liés à ceux du cercle  $C$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} C'_o = \frac{2(C_o^2 + R^2 - 1)}{(C_o + 1)^2 - R^2} \\ R' = \frac{4R}{(C_o + 1)^2 - R^2} \end{cases}$$

Au cercle  $C$ , correspond  $a$  et  $b$  qui sont définies dans le plan complexe comme étant :

$$(III-56) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \inf (\text{Réal valeurs propres}) \\ b = \sup (\text{Réal valeurs propres}) \end{array} \right. \quad (a)$$

Ainsi en connaissant les deux valeurs réelles, elles leurs correspondent respectivement deux autres valeurs dans le plan  $p$ ,  $a'$  et  $b'$  qui correspondent aussi à :

$$(III-56) \quad \left\{ \begin{array}{l} a' = \inf (\text{Réal valeurs propres}) \\ b' = \sup (\text{Réal valeurs propres}) \end{array} \right. \quad (b)$$

et sont obtenues comme suit :

$$a' = \frac{2(a-1)}{a+1}, \quad b' = \frac{2(b-1)}{b+1}$$

et par ces deux points doit passer le cercle  $C'$ .

Il nous vient d'après ces propriétés et d'après la figure 5, sur laquelle, nous avons porté en abscisse, les points de l'axe réel du plan  $z$  en discret repérés par  $x$ .

En ordonné, on a porté, les points de l'axe réel du plan  $p$  en continu repérés par  $y$ .

$y$  et  $x$  sont liés par les relations suivantes :

$$y = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

que nous représentons par la courbe  $\Gamma$  exprimant le lien entre les transformés des points sur les axes réels.

La partie lente discrète du système apparaît étant formée par deux domaines dont les valeurs extrêmes sont (1) (2) et (3) et (4), ainsi que la partie rapide formée par deux domaines dont les extrêmités sont (5) (6) et (7) (8).

(1) (2) se projettent en (1') et (2') sur  $\gamma$  par l'intermédiaire de  $\Gamma$  ainsi que (3) et (4) en (3') (4').

(5) (6) et (7) (8) se projettent aussi en (5') (6') et (7') (8'). Il apparaît donc d'après le graphe que relativement aux systèmes continus, (7') (8') et (5') (6') correspondent aux extrêmes des valeurs propres lentes, au pôle de  $W_c(p)$ , tandis que (1') (2') et (3') (4') correspondent à la partie rapide.

Donc, les domaines lent (I) et rapide (II) en discret se transforment en deux autres domaines en continu, respectivement lent (III) et rapide (IV).

(III) et (IV) apparaissent bien séparés et répondent ainsi à cette notion de conservation de dynamiques du discret en continu.

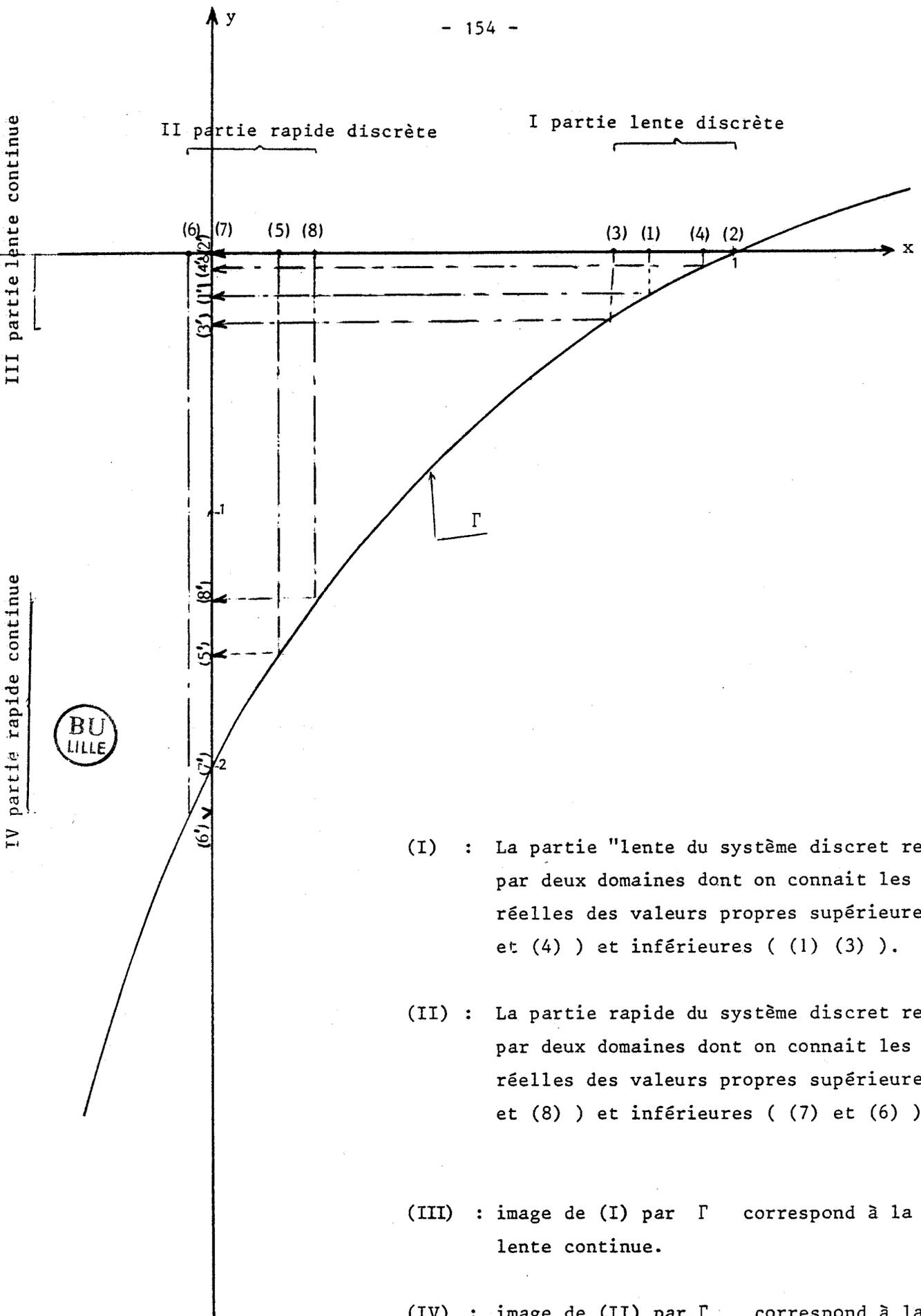
Une représentation dans le plan complexe des deux systèmes discret et continu apparaît sur la figure 6. Nous constatons que cette notion de double échelle de temps est conservée entre les deux systèmes. La séparation entre  $D_{ld}$  et  $D_{rd}$  est nettement conservée dans le plan complexe continu entre  $D_{lc}$  et  $D_{rc}$ . Le degré de séparation restant dans le même ordre de grandeur, il suffit pour s'en rendre compte de chiffrer  $\mu_d$  et  $\mu_c$  respectivement le degré de séparation en discret et continu, on trouve :

$$(III-57) \quad \begin{cases} \mu_d = \frac{R_1 + R_2}{|a_1 - a_2|} = 0,2434 \\ \mu_c = \frac{R'_1 + R'_2}{|a'_1 - a'_2|} = 0,284 \end{cases}$$

Conséquence.

La transformation homographique conserve la nature des dynamiques entre les systèmes discrets étudiés et les systèmes continus équivalents.

Cette propriété étant réalisée, le système continu équivalent au système discret initialement modélisé sous forme singulièrement perturbée, se trouve lui aussi sous la même forme et la méthode des perturbations



(I) : La partie "lente" du système discret repérée par deux domaines dont on connaît les parties réelles des valeurs propres supérieures ( (2) et (4) ) et inférieures ( (1) (3) ).

(II) : La partie rapide du système discret repérée par deux domaines dont on connaît les parties réelles des valeurs propres supérieures ( (5) et (8) ) et inférieures ( (7) et (6) )

(III) : image de (I) par  $\Gamma$  correspond à la partie lente continue.

(IV) : image de (II) par  $\Gamma$  correspond à la partie rapide continue.

Figure 5.

domaine rapide continu  $D_{rc}$

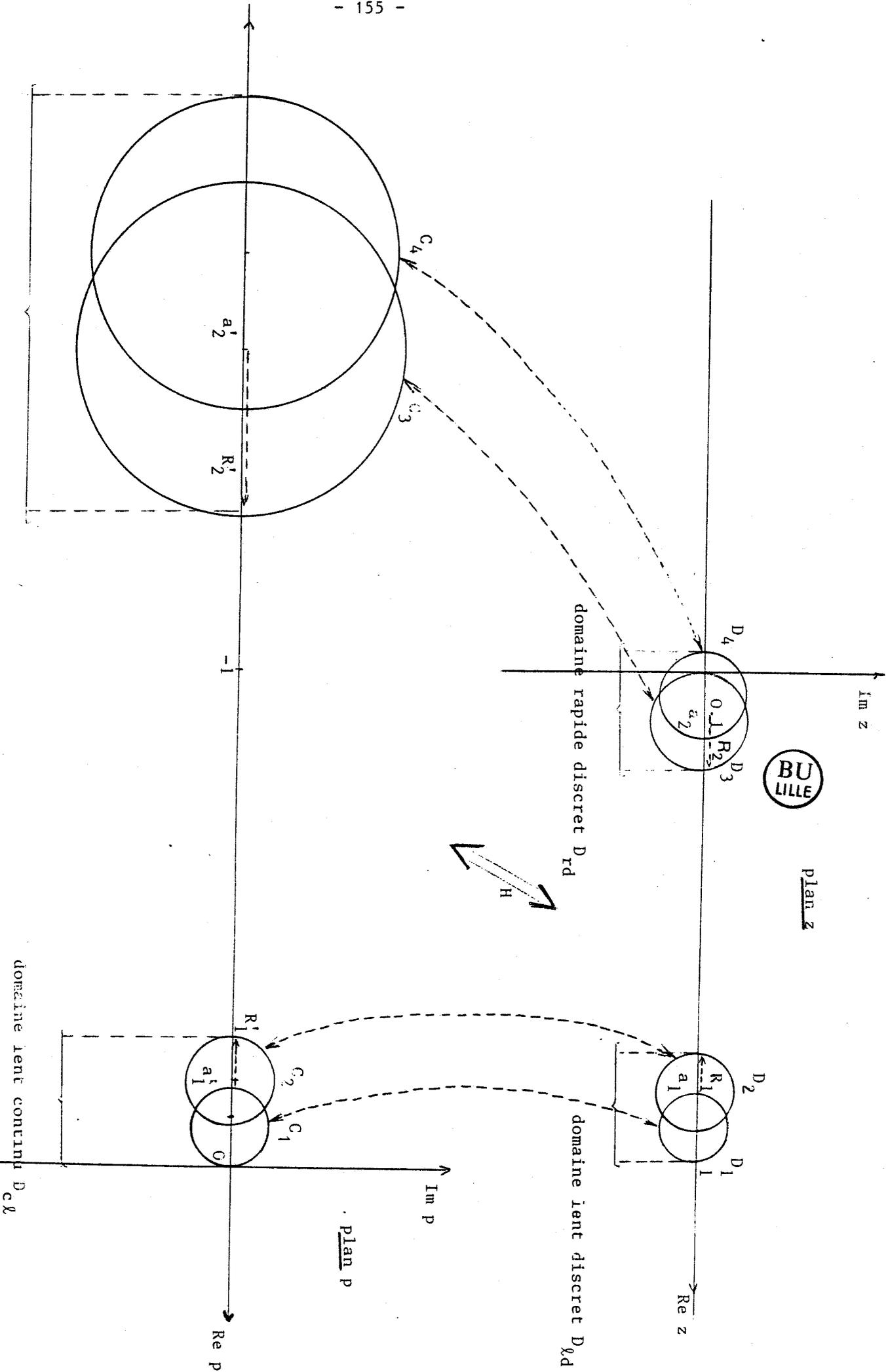


Figure : 6

peut être appliquée. Elle ajoute à l'ensemble des propriétés déjà citées celle de conservation : cette notion de double échelle de temps pour de tels systèmes.

III.3 - Application de la transformation homographique à l'étude des composantes lentes.

Les transformations homographiques  $H$  et  $H^{-1}$  conservent la nature des dynamiques du système initial, lorsque nous passons de l'échantillonné au continu par  $H$  ou l'inverse par  $H^{-1}$ . Les termes de la matrice  $A$  de forte amplitude, qui composent la partie lente du discret, deviennent les composantes de faibles amplitudes, qui composent la partie lente en continu pour lesquelles les techniques des perturbations singulières en continu s'appliquent directement.

La démarche proposée est donc la suivante :

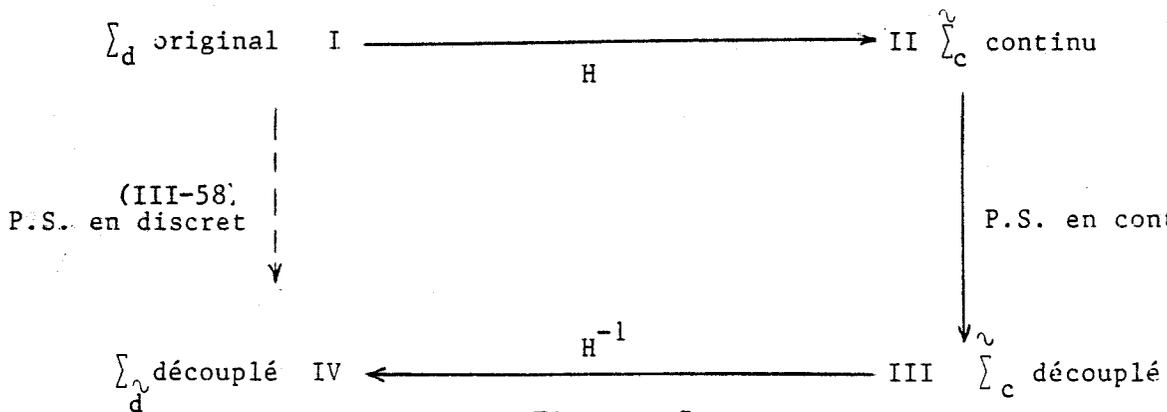


Figure : 7

Le système échantillonné initial étudié est le suivant :

$$(III-59) \quad \begin{cases} X_{n+1} = A X_n + B u_n \\ y_n = C X_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (a)$$

peuvent être mis sous la forme singulièrement perturbée :

$$(III-59) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* & \mu \\ A_{21} & A_{22}^* & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = (C_1 \quad C_2^* \quad \mu) \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \text{ conditions initiales} \quad (b)$$

avec 
$$A_{i2}^* = \frac{A_{i2}}{\mu} \quad (i = 1,2) \quad C_2^* = \frac{C_2}{\mu}$$

Les deux représentations par le biais de la transformation H deviennent :

$$(III-60) \quad \begin{cases} \dot{X} = \tilde{A} X + \tilde{B} u \\ y = \tilde{C} X \end{cases} \quad (a)$$

et

$$(III-60) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \quad (b)$$

Les composantes lentes du système continu sont alors rassemblées dans x. Il suffit pour s'en rendre compte de tracer les cercles de Gershgorine correspondant à (III-60), ce dernier est alors modélisé sous forme singulièrement perturbée :

$$(III-61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \mu \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21}^* & \tilde{A}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2^* \end{bmatrix} u \\ \tilde{A}_{2j}^* = \tilde{A}_{2j}/\mu \quad (j = 1,2) , \quad \tilde{B}_2^* = \tilde{B}_2/\mu \\ y = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) \\ z(0) \end{cases} \quad \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

En appliquant les techniques de perturbations singulières en continu sur le système (III-61), le découplage de la partie lente est obtenue avec le maximum de précision, puisqu'elle tient compte de l'évolution de la partie rapide.

La partie rapide n'a pas besoin de cette modification, le découplage initial sur (III-59) lui donne suffisamment de précision puisqu'elle tient compte de l'évaluation de la partie lente.

Donc, nous allons utiliser les deux techniques de perturbations singulières, celles des systèmes échantillonnés introduites dans le premier chapitre, et celles des systèmes continus. Les deux techniques nous permettent d'obtenir un système découplé avec une précision suffisante approchant aussi bien le système initial.

Nous allons maintenant expliciter les différentes matrices en différentes étapes de la procédure d'étude proposée.

En posant  $\tilde{\mu} = 0$  dans le système (III-61), la partie lente continue est découplée et les relations suivantes représentent l'évolution de  $x_\ell$  :

$$(III-62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_\ell = \tilde{A}_\ell x_\ell + \tilde{B}_\ell u_\ell \\ y_\ell = \tilde{C}_\ell x_\ell + \tilde{D}_\ell u_\ell \\ z_\ell = -\tilde{A}_{22}^{-1} (\tilde{A}_{21} x_\ell + \tilde{B}_2 u_\ell) \end{array} \right. \quad \text{avec } x_\ell(0) = x(0)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_\ell = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{B}_\ell = \tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_\ell = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{D} = -\tilde{C}_2 \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{B}_2 \end{array} \right.$$

La partie rapide continue découplée est obtenue directement :

$$(III-63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_r = \tilde{A}_r z_r + \tilde{B}_r u_r \\ y_r = \tilde{C}_r z_r \end{array} \right.$$

avec  $z_r(0) = z(0) + \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} x(0)$

ce qui conduit aux matrices du système continu découplé :

$$(III-64) \quad \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} \tilde{A}_\ell & 0 \\ 0 & \tilde{A}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} \tilde{B}_\ell & 0 \\ 0 & \tilde{B}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_d = (\tilde{C}_\ell \quad \tilde{C}_r), \quad \tilde{D}_d = \tilde{D}_\ell$$

Après une nouvelle application de la transformation homographique  $H^{-1}$ , sur le système continu découplé, le système rapide discret découplé apparaît sous la forme :

$$(III-65) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{rn+1}^{\sim} = A_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} + B_r^{\sim} u_{rn} \\ y_{rn}^{\sim} = C_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} \end{array} \right. , \quad z_{ro}^{\sim} : \text{conditions initiales}$$

de même pour la partie lente discrète découplée qui s'exprime par :

$$(III-66) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{\ell n+1}^{\sim} = A_{\ell}^{\sim} x_{\ell n}^{\sim} + B_{\ell}^{\sim} u_{\ell n} \\ y_{\ell n}^{\sim} = C_{\ell}^{\sim} x_{\ell n}^{\sim} + D_{\ell}^{\sim} u_{\ell n} \\ z_{\ell n}^{\sim} = K_{\ell}^{\sim} x_{\ell n}^{\sim} + L_{\ell}^{\sim} u_{\ell n} \end{array} \right. , \quad x_{\ell 0}^{\sim} : \text{condition initiale de cette partie lente}$$



ce qui conduit aux matrices du système global découplé :

$$(III-67) \quad A_d^{\sim} = \begin{bmatrix} A_{\ell}^{\sim} & 0 \\ 0 & A_r^{\sim} \end{bmatrix} , \quad B_d^{\sim} = \begin{bmatrix} B_{\ell}^{\sim} & 0 \\ 0 & B_r^{\sim} \end{bmatrix} , \quad C_d^{\sim} = [C_{\ell}^{\sim} \quad C_r^{\sim}] , \quad D_d^{\sim} = D_{\ell}^{\sim}$$

l'indice,  $\ell, r, d$ , indique le découplage par le biais de la transformation homographique.

### III.3.1. Formes matricielles.

Le triplet matriciel  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  relatif au système (III-60) est alors :

$$(III-68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = H(A) \\ \tilde{B} = \left( \frac{A+I}{2} \right)^{-1} B \\ \tilde{C} = C \end{array} \right.$$

et le vecteur des conditions initiales correspondant est :

$$(III-69) \quad \begin{bmatrix} x(o) \\ z(o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne en fonction du système initial :

$$(III-70) \quad \left. \begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} + 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}, 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} \\ 2A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}, [(A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12}] A^{*-1} \end{bmatrix} \\ \text{avec } A^* &= \begin{bmatrix} \frac{A_{22}+I}{2} & -\frac{A_{21}}{2} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} 2(A_{11}+I)^{-1} B_1 - (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} \bar{B}_2 \\ A^{*-1} \bar{B}_2 \end{bmatrix} \\ \text{avec } \bar{B}_2 &= B_2 - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} B_1 \\ \tilde{C} &= (C_1 \quad C_2) \end{aligned} \right\}$$

Les expressions de (III-62) donnent alors :

$$(III-71) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{A}_2 &= 2[(A_{11}-I) - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21}] (A_{11}+I)^{-1} \\ \tilde{B}_2 &= 2(A_{11}+I)^{-1} [B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} \bar{B}_2] \\ \tilde{C}_2 &= C_1 - 2C_2 \bar{A}_{22} (A_{11}+I)^{-1} \\ \tilde{D}_2 &= -C_2 \bar{A}_{22} \bar{B}_2 \end{aligned} \right.$$

$$\text{avec } \bar{A}_{22} = [(A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12}]^{-1}$$

Ceux de (III-63) sont de la forme :

$$(III-72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_r = [ (A_{22}-I) - A_{21}(A_{11}+I)^{-1} A_{12} ] A^{*-1} \\ \tilde{B}_r = A^{*-1} \bar{B}_2 \\ \tilde{C}_r = C_2 \\ \tilde{D}_r = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui conduit aux expressions matricielles de (III-65) avec :

$$(III-73) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_r^{\sim} = (A_{22} - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12}) \\ B_r^{\sim} = B_2 - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} B_1 = \bar{B}_2 \\ C_r^{\sim} = C_2 \end{array} \right.$$



et celles de (III-66) avec :

$$(III-74) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\lambda}^{\sim} = [ A_{11} - (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} ] [ I + (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A_{22} A_{21} ]^{-1} \\ B_{\lambda}^{\sim} = [ I + A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} ]^{-1} [ B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r^{\sim} ] \\ C_{\lambda}^{\sim} = C_1 - 2 C_2 (A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\ D_{\lambda}^{\sim} = - C_2 \bar{A}_{22} B_r^{\sim} \\ K_{\lambda}^{\sim} = - 2 \bar{A}_{22} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\ L_{\lambda}^{\sim} = - \bar{A}_{22} B_r^{\sim} \end{array} \right.$$

en remarquant que  $\bar{A}_{22}$  peut s'écrire sous une deuxième forme soit :

$$\bar{A}_{22} = (A_r^{\sim} - I)^{-1}$$

Les expressions au-dessus deviennent encore :

$$(III-75) \left\{ \begin{array}{l} A_{\ell}^{\nu} = [A_{11} - (A_{11} + I)^{-1} A_{12} (A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} A_{21}] [I + (A_{11} + I)^{-1} A_{12} (A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} A_{21}]^{-1} \\ B_{\ell}^{\nu} = [I + A_{12} (A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1}]^{-1} [B_1 - A_{12} (A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} B_{\mathcal{R}}^{\nu}] \\ C_{\ell}^{\nu} = C_1 - 2C_2 (A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \\ D_{\ell}^{\nu} = -C_2 (A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} B_{\mathcal{R}}^{\nu} \\ K_{\ell}^{\nu} = -2(A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \\ L_{\ell}^{\nu} = -(A_{\mathcal{R}}^{\nu} - I)^{-1} B_{\mathcal{R}}^{\nu} \end{array} \right.$$

III.3.2. Forme des conditions initiales :

Reprenons le schéma de la figure 7 :

en : (I) , le système échantillonné initial a comme condition initiale  $\begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

(II) , le système continu obtenu de (I) par la transformation H, et les

conditions initiales correspondantes sont  $\begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$  avec :

$$(III-76) \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

(III) , le système continu découplé par les techniques de perturbations singulières du continu, les conditions initiales sont  $\begin{bmatrix} x_{\ell}(0) \\ z_{\mathcal{R}}(0) \end{bmatrix}$  où

$$(III-77) \quad \begin{bmatrix} x_{\ell}(0) \\ z_{\mathcal{R}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 2A^* [(A_{22} - I) - A_{21} (A_{11} + I)^{-1} A_{12}]^{-1} A^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

(IV) , le système échantillonné découplé obtenu de (III) par la transformation  $H^{-1}$  avec :

$$(III-78) \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\ell 0} \\ \tilde{z}_{r 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\ell}(0) \\ z_r(0) \end{bmatrix}$$

soit en remplaçant  $\begin{bmatrix} x_{\ell}(0) \\ z_{\ell}(0) \end{bmatrix}$  par (III-77)

$$(III-79) \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\ell 0} \\ \tilde{z}_{r 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 2(A_r \tilde{\nu} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

### III.3.3. Interprétation des résultats.

Les modifications apportées au système lent (III-75) par rapport aux expressions (I-101) portent sur  $A_{\ell}^{\nu}$ ,  $B_{\ell}^{\nu}$ ,  $C_{\ell}^{\nu}$ ,  $K_{\ell}^{\nu}$ ,  $L_{\ell}^{\nu}$  avec l'introduction d'une transmission directe de l'information  $(-C_2(A_r \tilde{\nu} - I)^{-1} B_r^{\nu})$

L'approximation de la partie lente (III-75) est plus précise, puisqu'elle prend en compte l'influence de la partie rapide.

Les conditions initiales restant conservées pour cette partie, ce qui simplifie pour autant les calculs des trajectoires optimales à horizon fini.

Ainsi donc, la méthode des perturbations singulières, utilisée seule ou couplée avec la transformation homographique permet de découpler les parties lente et rapide avec le maximum de précision sur chacune d'elles.

L'avantage des perturbations singulières réside dans la réduction de dimensionnalité et le découplage. Nous utilisons l'une ou l'autre des deux approches ou les deux à la fois.

Ainsi dans le cas du découplage, et suivant le domaine d'étude retenu, nous pouvons avoir lorsque nous nous intéressons à :

- partie lente seulement :

Nous retenons celle qui est obtenue par la méthode de (PS + H) pour laquelle on a l'approximation :

$$(III-80) \quad x_n \approx x_{\ell n}$$

représenté par le quadriplet matriciel  $(A_{\ell}, B_{\ell}, C_{\ell}, D_{\ell})$  (III-75)

$$\text{avec} \quad x_{\ell 0} = x_0$$

- partie rapide seulement :

Comme vu précédemment, la méthode PS donne le maximum de précision sur le système rapide découplé. Dans ce cas nous retenons l'approximation :

$$(III-81) \quad z_n \approx z_{\ell n} + z_{rn}$$

dont les matrices d'évolution de  $z_{rn}$  sont  $(A_r, B_r, C_r, D_r)$  (I-106)

et les conditions initiales sont représentées par :

$$z_{r0} = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0$$

- partie lente et partie rapide :

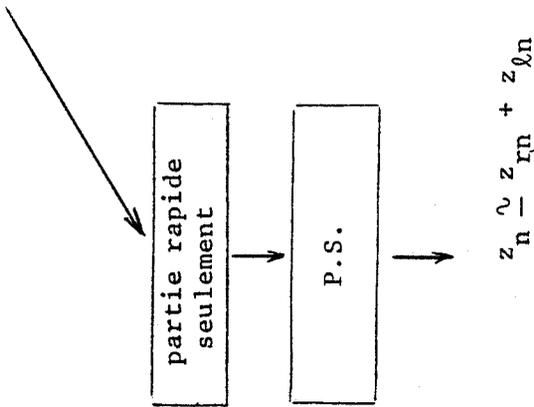
Bien que l'approximation de la partie rapide par le système (III-73) soit légèrement moins précise que par le système (I-106), lorsque nous nous intéressons à la partie lente et à la partie rapide, c'est le système obtenu par (PS + H) qui se présente comme une meilleure approche du système initial. Il nous vient alors :

$$(III-82) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n \approx x_{\ell n} \\ z_n \approx z_{\ell n} + z_{rn} \end{array} \right.$$

dont les matrices d'évolution pour les deux parties sont représentées en (III-73) et (III-75) avec les conditions initiales définies par :

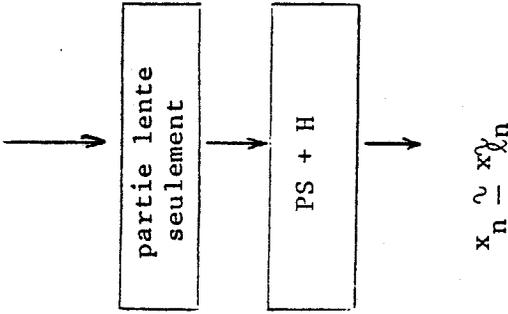
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{21} & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n$$

$$y_n = (C_1 \ C_2^*) \begin{bmatrix} x_n \\ \mu z_n \end{bmatrix}$$

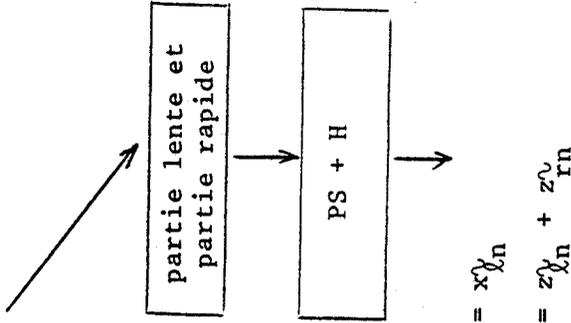


avec

$$\begin{cases} z_{rn+1} = A_r z_{rn} + B_r u_{rn} \\ y_r = C_r z_{rn} + D_r u_{rn} \\ z_{r0} = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_{ln+1} = A_l x_{ln} + B_l u_{ln} \\ y_{ln} = C_l x_{ln} + D_l u_{ln} \\ x_{l0} = x_0 \end{cases} \quad \text{(III-75)}$$



$$\begin{cases} x_{ln+1} = A_l x_{ln} + B_l u_{ln} \\ y_{ln} = C_l x_{ln} + D_l u_{ln} \\ z_{ln} = K_l x_{ln} + L_l u_{ln} \end{cases} \quad \text{(III-75)}$$

et

$$\begin{cases} x_{l0} = x_0 \\ z_{rn+1} = A_r z_{rn} + B_r u_{rn} \\ y_{rn} = C_r z_{rn} \\ z_{r0} = z_0 + 2(A_r^{-1} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} x_0 \end{cases} \quad \text{(III-73)}$$



Figure : 8



$$(III-84) \quad \begin{bmatrix} x_{\ell_{n+1}}^1 \\ x_{\ell_{n+1}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9014 & 0.1179 \\ -0.0196 & 0.8743 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\ell_n}^1 \\ x_{\ell_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{où} \quad \begin{bmatrix} x_{\ell_0}^1 \\ x_{\ell_0}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

L'application des relations (III-73) et (III-75) permet d'obtenir cette partie lente découplée modifiée, dont le système correspondant s'écrit :

$$(III-85) \quad \begin{bmatrix} x_{\ell_{n+1}}^1 \\ x_{\ell_{n+1}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.874834 & 0.163395 \\ -0.055618 & 0.870434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\ell_n}^1 \\ x_{\ell_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{bmatrix} x_{\ell_0}^1 \\ x_{\ell_0}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix} \quad \text{obtenue de (III-79)}$$

Comparons maintenant les deux systèmes lents découplés (III-84) et (III-85) à la partie lente initiale du système (III-83).

Il s'agit de comparer les variables  $x_n^1$ ,  $x_{\ell_n}^1$  et  $x_{\ell_n}^1$  d'une part, et  $x_n^2$ ,  $x_{\ell_n}^2$  et  $x_{\ell_n}^2$  d'autre part.

Une simulation du système donne pour différentes composantes les courbes suivantes de la figure : 9.

Les courbes de simulation obtenues font apparaître nettement l'amélioration apportée sur les composantes  $x_{\ell_n}^1$  et  $x_{\ell_n}^2$ . En effet, les composantes  $x_{\ell_n}^1$  et  $x_{\ell_n}^2$  obtenues par application conjointe des perturbations singulières et la transformation homographique approchent très bien les variables initiales  $x_n^1$  et  $x_n^2$ . Ceci apparaît nettement sur la figure ce qui montre l'intérêt de la transformation dans l'étude des systèmes échantillonnés.

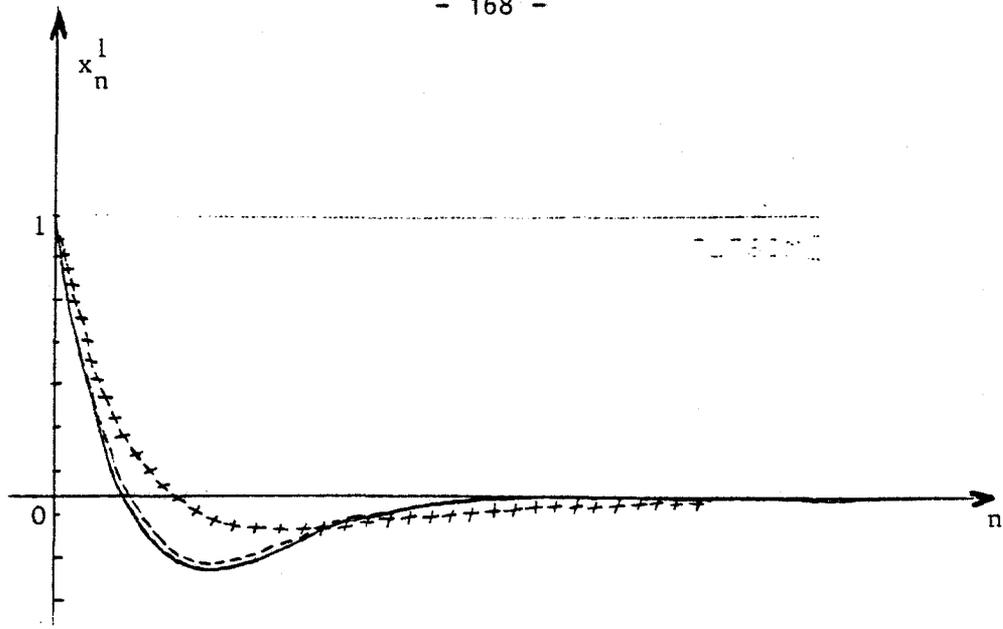
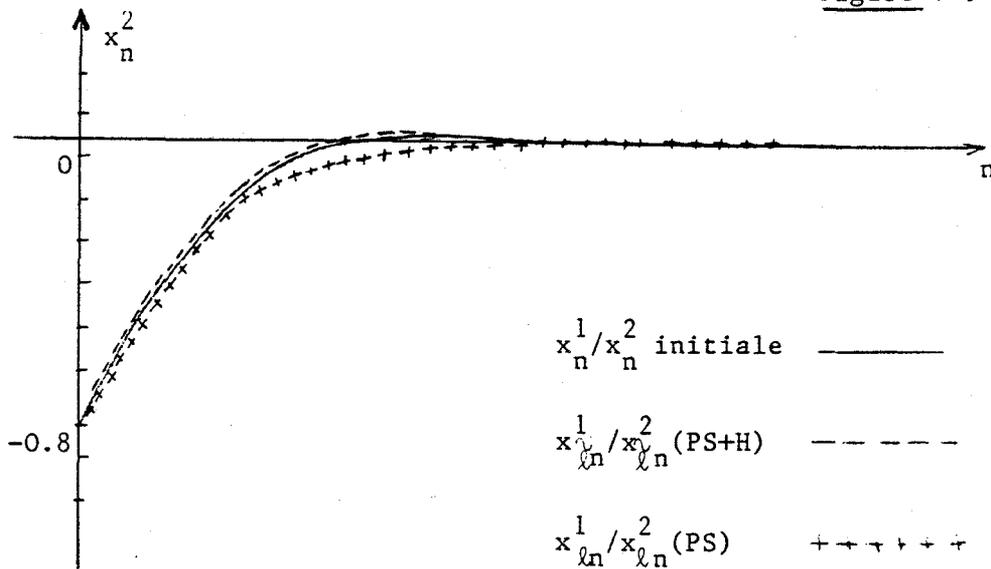


Figure : 9



IV - REMARQUE : APPLICATION DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE A D'AUTRES TYPES DE SYSTEMES.

Un système discret singulièrement perturbé peut avoir un spectre des valeurs propres, se présenter de la façon suivante :

- Un domaine  $D$  regroupant toutes les valeurs propres lentes du système, composé de l'union de deux domaines,  $D_{dl2}$  affecté aux valeurs lentes correspondant aux valeurs propres à partie réelle négative,  $D_{dl1}$  affecté aux valeurs propres lentes correspondant aux valeurs propres à partie réelle positive.  $D_{dr}$  un domaine regroupant toutes les valeurs propres formant la partie rapide du système. Une représentation par les cercles de Gershorine est de la forme suivante :

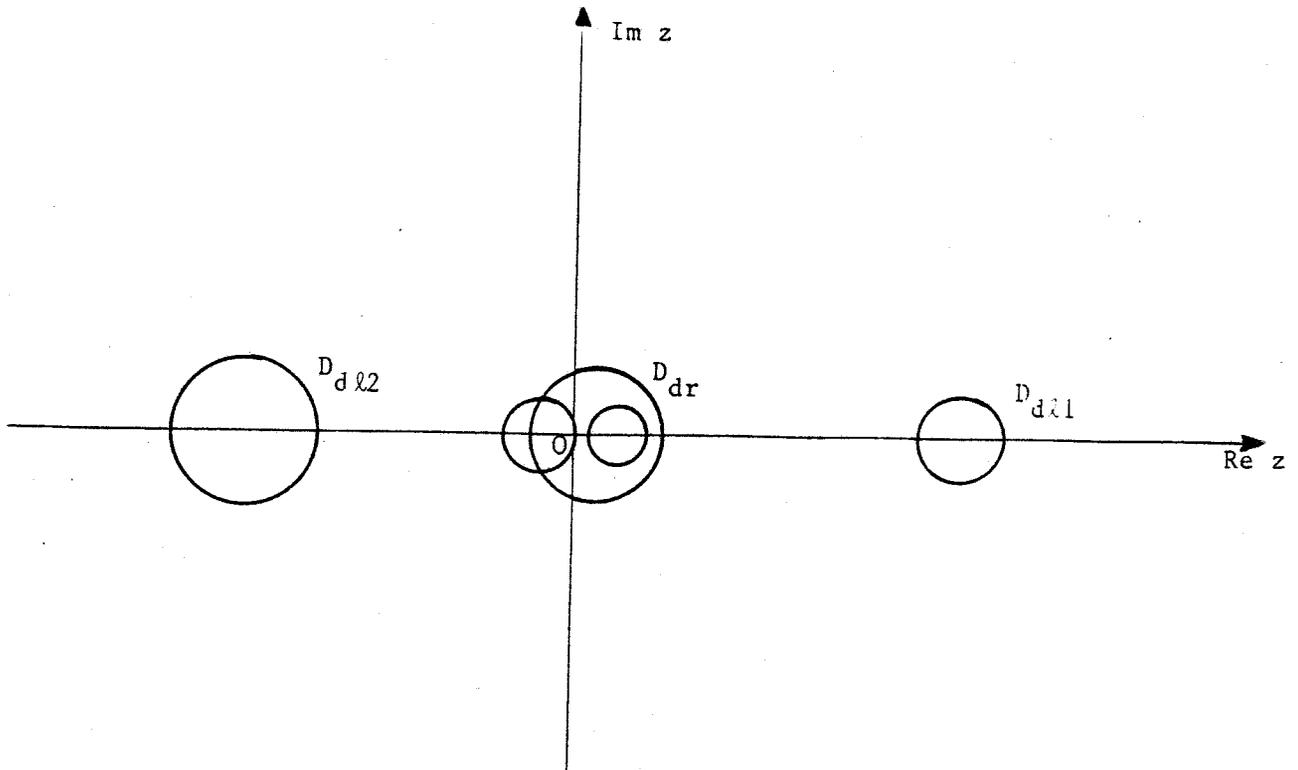


Figure : 10

trois cas peuvent se présenter quand à la répartition des dynamiques de tels systèmes :

IV.1 - Les valeurs propres du système sont groupées dans  $D_{dl_1}$  et  $D_{dr}$ .

Ce cas correspond exactement aux systèmes que nous nous sommes proposés d'étudier et en font essentiellement l'objet de notre étude.

IV.2 - Le spectre des valeurs propres correspond à  $D_{dl_2}$  et  $D_{dr}$ .

Ces systèmes sont caractérisés par les valeurs propres lentes relatives à  $D_{dl_2}$  qui sont à partie réelles négatives.

Une vérification rapide par le diagramme de la figure 5 montre que dans ce cas, la transformation homographique ne conserve pas la nature des dynamiques. Il y a une inversion des dynamiques entre le système discret initial et le système continu correspondant, la méthode (PS + H) ne semble pas être utile quant à l'étude de la partie lente, par contre elle est intéressante quand l'étude concerne la partie rapide.

Il nous vient pour de tels systèmes représentés par (III-86) lorsque nous appliquons la même démarche d'étude que celle décrite par (III-58).

$$(III-86) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_n \\ y_n = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

devient par le biais de la transformation homographique :

$$(III-87) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

les matrices  $\tilde{A}_{ij}$ ,  $\tilde{B}_i$ ,  $\tilde{C}_j$  prenant les valeurs de (III-70).

Les composantes rapides du système sont rassemblées dans  $x$ , ceci apparait clairement en traçant les cercles de Gershgorine correspondant à (III-87). Ce dernier est alors modélisé sous forme singulièrement perturbée :

$$(III-88) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mu \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^* & \tilde{A}_{12}^* \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^* \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) \\ z(0) \end{cases} \text{ conditions initiales} \\ y = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ \text{avec} \quad \tilde{A}_{1j}^* = \tilde{A}_{1j} \mu \quad (j = 1, 2) \quad \tilde{B}_1^* = \tilde{B}_1 \mu \end{array} \right.$$

Les parties lente et rapide sont de la forme suivante :

$$(III-89) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_\ell = (\tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12}) z_\ell + (\tilde{B}_2 - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1) u_\ell \\ y_\ell = (\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12}) z_\ell - \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1 u_\ell \\ x_\ell = -\tilde{A}_{11}^{*-1} (\tilde{A}_{12}^* z_\ell + \tilde{B}_1^* u_\ell) \\ z_\ell(0) = z(0) \end{array} \right.$$

et

$$(III-90) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_r = \tilde{A}_{11} x_r + \tilde{B}_1 u_r \\ y_r = \tilde{C}_1 x_r \\ x_r(0) = x(0) + \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} z(0) \end{array} \right.$$

Après une nouvelle application de la transformation homographique  $H^{-1}$ , sur le système continu découplé, le système lent discret découplé apparaît sous la forme :

$$(III-91) \left\{ \begin{array}{l} x_\ell^\lambda = A_\ell^\lambda x_\ell^\lambda + B_\ell^\lambda u_\ell^\lambda \\ y_\ell^\lambda = C_\ell^\lambda x_\ell^\lambda \end{array} \right. \quad \text{avec } x_\ell^\lambda, \text{ les conditions initiales}$$

où

$$(III-92) \left\{ \begin{array}{l} A_\ell^\lambda = A_{11} - A_{12} (A_{22} + I)^{-1} A_{21} \\ B_\ell^\lambda = B_1 - A_{12} (A_{22} + I)^{-1} B_2 \\ C_\ell^\lambda = C_1 - C_2 (A_{22} + I)^{-1} A_{21} \end{array} \right.$$

de même pour la partie rapide directe découplée qui s'exprime par :

$$(III-93) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{rn+1}^{\sim} = A_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} + B_r^{\sim} u_{\lambda n}^{\sim} \\ y_{rn}^{\sim} = C_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} + D_r^{\sim} u_{\lambda n}^{\sim} \\ z_{rn}^{\sim} = K_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} + L_r^{\sim} u_{\lambda n}^{\sim} \end{array} \right. \quad x_{r0}^{\sim} : \text{conditions initiales}$$

avec

$$(III-94) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_r^{\sim} = [A_{22} - (A_{22} + I)^{-1} A_{21} (A_{\lambda} - I)^{-1} A_{12}] [I + (A_{22} + I)^{-1} A_{21} (A_{\lambda} - I)^{-1} A_{12}]^{-1} \\ B_r^{\sim} = [I + A_{21} (A_{\lambda} - I)^{-1} A_{12} (A_{22} + I)^{-1}]^{-1} (B_2 - A_{21} (A_{\lambda} - I)^{-1} B_{\lambda}) \\ C_r^{\sim} = C_2 - 2C_1 (A_{\lambda} - I)^{-1} (A_{22} + I)^{-1} \\ D_r^{\sim} = -C_1 (A_{\lambda} - I)^{-1} B_{\lambda} \\ K_r^{\sim} = -2(A_{\lambda} - I)^{-1} A_{12} (A_{22} + I)^{-1} \\ L_r^{\sim} = -(A_{\lambda} - I)^{-1} B_{\lambda} \end{array} \right.$$

Les conditions initiales du système discret découplé sont obtenues par :

$$(III-95) \quad \begin{bmatrix} x_{\lambda 0}^{\sim} \\ z_{r0}^{\sim} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2(A_{\lambda} - I)^{-1} A_{12} (A_{22} + I)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Interprétation.

Quand le but est l'étude de la partie rapide du système, la méthode (PS + H) est très importante car elle supprime les problèmes de couches

limites posés par l'écart entre les valeurs initiales  $z_o$  et  $z_{ro}$  de la partie rapide avant et après découplage. Les modifications apportées au système rapide (III-94) par rapport aux expressions (I-106) portent sur  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$ .

Par contre, lorsque l'étude concerne la partie lente, la méthode (PS + H) n'est pas intéressante. Pour lever cet inconvénient, nous proposons d'adjoindre dans la démarche d'étude proposée (figure 7), la notion de système réciproque /Dauphin Tanguy 1983/, la méthode (PS + H + Réciproque) permet de pallier à ce manque de précision sur la partie lente.

#### IV.3 - Les valeurs propres du système sont groupées dans :

$$(D_{d\ell 1} \ D_{d\ell 2}) \text{ et } D_{dr}.$$

C'est le cas dont la matrice caractérisant l'évolution du système se présente avec des valeurs propres à parties réelles positives et négatives correspondant aux deux parties lente et rapide.

Une vérification par le diagramme de la figure 5, montre que le système discret initial à double échelle de temps, se transforme par le biais de la transformation homographique en un système continu à triple échelle de temps.  $D_{d\ell 2}$  se transforme en un domaine  $D_{cr2}$  dont les valeurs propres caractérisées par une grande vitesse,  $D_{dr}$  se transforme en un domaine à dynamique moyenne ( $D_{crm}$ ),  $D_{d\ell 1}$  restant lent et devient  $D_{c\ell 1}$ . Le système continu peut être considéré comme à double échelle de temps en regroupant ( $D_{c\ell 1}$  et  $D_{crm}$ ) sous un domaine lent avec  $D_{cr2}$  comme un domaine rapide. Nous sommes ramenés par ce regroupement au cas étudié au paravant (III-2).

V - APPLICATION A UN SYSTEME NON LINEAIRE DE TYPE LUR'E POSNIKOV.

V.1 - Position du problème.

Nous avons montré (chapitre II) que pour un système non linéaire de type Lur'e Posnikov représenté par :

$$(III-96) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{Bo}(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)} \\ f^* \in [\underline{L} \bar{L}] \end{array} \right.$$

Par le biais de la forme en flèche, nous pouvons déduire directement la fonction de transfert de la partie rapide en boucle ouverte, obtenue avec le maximum de précision. Pour cela, les relations (chapitre II) nous permettent cette détermination.

Pour la partie lente, nous proposons la démarche suivante. En appliquant la transformation homographique à (III-96), nous obtenons le système continu équivalent de la forme :

$$(III-97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_{Bo}(\lambda) = \frac{\tilde{N}(\lambda)}{\tilde{D}(\lambda)} \\ f^* \in (\underline{L} \bar{L}) \end{array} \right.$$

avec

$$\tilde{W}_{Bo}(\lambda) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}} \quad W(\xi) = \frac{1 + \frac{\lambda}{2}}{1 - \frac{\lambda}{2}} \quad )$$

L'utilisation des techniques de découplage, par la forme en flèche /Dauphin Tanguy 1983/ nous permet de déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de la partie lente,  $\tilde{W}_{BoL}(p)$ .

Une nouvelle application de la transformation homographique sur  $\tilde{W}_{BoL}(p)$ , nous permet d'avoir la fonction de transfert en boucle ouverte

de la partie lente discrète soit :

$$W_{Bo\ell}^{\sim}(\xi) = \frac{2}{1-\xi} \quad \tilde{W}_{Bo\ell}(\lambda = \frac{2(\xi-1)}{\xi+1})$$

La démarche pouvant être schématisée comme suit :

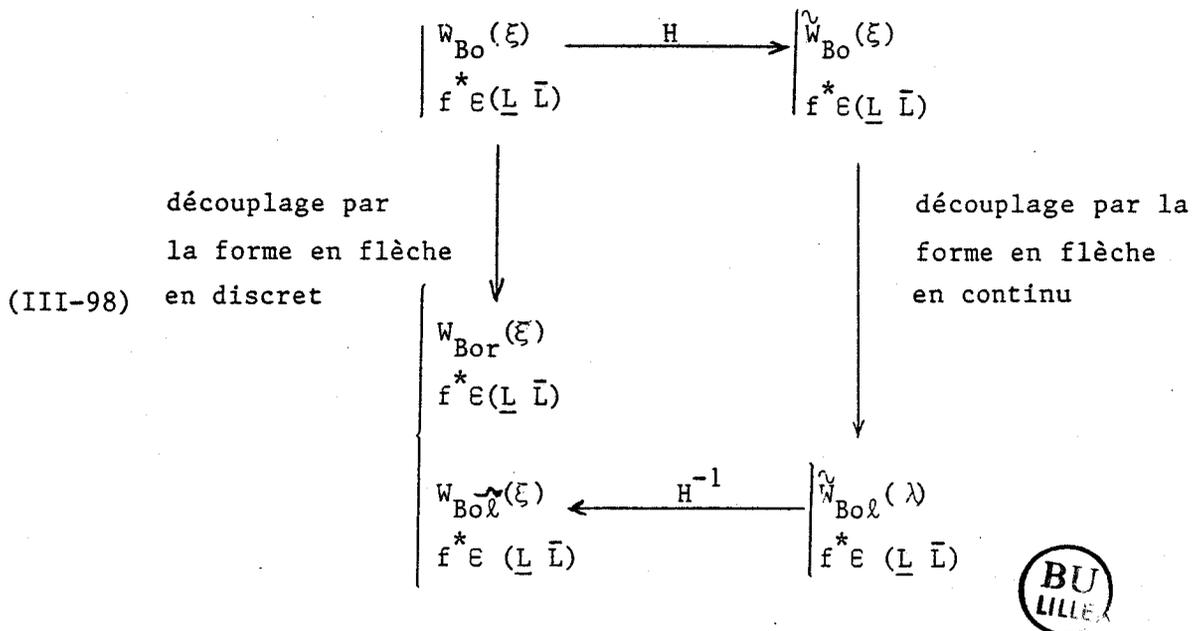


Figure: 11

Le schéma non linéaire de type Lur'e Posnikov est aussi décomposé suivant le schéma bloc suivant :

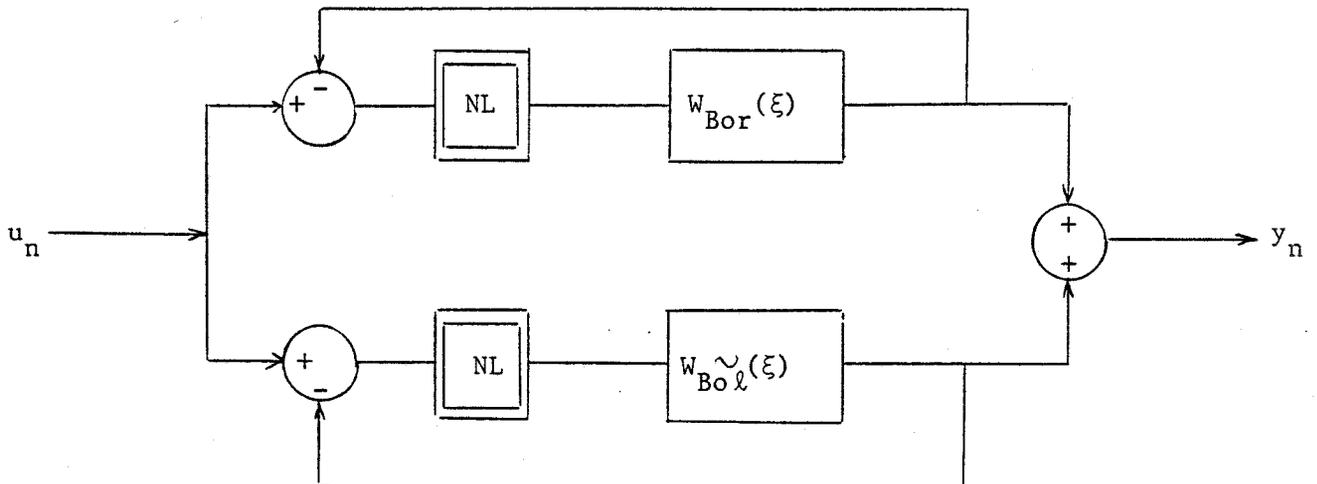


Figure : 12

Chaque sous système étant lui même de type Lur'e Posnikov.

V.2 - Mise en oeuvre de la Méthode.

Prenons à titre d'exemple le système de type Lur'e Posnikov précédemment étudié et représenté par l'équation à coefficients numériques :

$$\left\{ \begin{array}{l} W(z) = \frac{-0.4 z + 0.04}{z^2 - 0.5 z + 0.04} \\ f^* \in [0.55 - 1.45] \end{array} \right.$$

le système continu correspondant est caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}(p) = \frac{-0.57 p - 0.935}{p^2 + 2.493 p + 1.4025} \\ f^* \in [0.55 - 1.45] \end{array} \right.$$

Par application des relations (chapitre II ) en discret et celles en continu /Dauphin Tanguy 1983/, les deux systèmes lent et rapide en boucle ouverte sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{\text{Bor}}(z) = \frac{0.1236}{z - 0.1984} \\ W_{\text{Bo}}(z) = \frac{-0.398}{z - 0.4} \end{array} \right.$$

et  $f^* \in [0.55 \quad 1,45]$

CONCLUSION.

Nous avons présenté dans ce chapitre des résultats originaux concernant la modélisation des systèmes échantillonnés à deux dynamiques sous forme singulièrement perturbée.

La définition de la transformation homographique pour différentes formes de représentations permet l'étude des systèmes échantillonnés, singulièrement perturbés dans les dynamiques lentes avec la même précision que celle obtenue pour les parties rapides habituellement étudiés par la méthode des perturbations singulières. Cette approche permet également de découpler des sous systèmes avec une précision satisfaisante même quand les dynamiques ne sont pas très nettement séparées, puisque la partie rapide en discret tient compte de la variable lente, la précision sur la partie lente étant obtenue par l'intermédiaire du passage à une description continue.

ANNEXE III-I.

Nous allons développer tous les calculs concernant la démarche d'étude proposée (III-52).

- (I) : le système échantillonné initial caractérisé par :

$$(AIII-1) \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = (C_1 \quad C_2)$$

devient par la transformation H représenté par le triplet continu :

- (II)

$$(AIII-2) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{21} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2)$$

- Il n'y a pas d'inversion de dynamique.



avec :

$$(AIII-3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11}-I & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{11}+I}{2} & \frac{A_{12}}{2} \\ \frac{A_{21}}{2} & \frac{A_{22}+I}{2} \end{bmatrix}^{-1} \\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}+I}{2} & \frac{A_{12}}{2} \\ \frac{A_{21}}{2} & \frac{A_{22}+I}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = C = (C_1 \quad C_2) \end{array} \right.$$

On pose :

$$A^* = \frac{A_{22}+I}{2} - \frac{A_{21}}{2} \left( \frac{A_{11}+I}{2} \right)^{-1} \frac{A_{12}}{2} = \frac{1}{2} \left[ (A_{21}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}+I}{2} & \frac{A_{12}}{2} \\ \frac{A_{21}}{2} & \frac{A_{21}+I}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} + \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} \left[ \frac{A_{22}+I}{2} - \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} \right]^{-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} & \\ & - \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} A^{*-1} \\ - A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} & A^{*-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (A_{11}-I) \left[ \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} + \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \right] - A_{12} A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} & \\ & , A_{12} A^{*-1} - (A_{11}-I) \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} A^{*-1} \\ A_{21} \left[ \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} + \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \right] - (A_{22}-I) A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} & \\ & , (A_{22}-I) A^{*-1} - A_{21} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} A^{*-1} \end{bmatrix}$$

explicitons les différents blocs de la matrice  $\tilde{A}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= (A_{11}-I) \left[ \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} + \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \frac{A_{12}}{2} A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \right] - A_{12} A^{*-1} \frac{A_{21}}{2} \left[ \frac{A_{11}+I}{2} \right]^{-1} \\ &= (A_{11}-I) \left[ 2(A_{11}+I)^{-1} + (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \right] - A_{12} A^{*-1} (A_{11}+I)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} + (A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} + \left[ (A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} - I \right] A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} + \left[ (A_{11}-I) - (A_{11}+I) \right] (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{A}_{11} = 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{21} &= A_{21} \left[ 2(A_{11}+I)^{-1} + (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \right] - (A_{22}-I) A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2A_{21} (A_{11}+I)^{-1} + \left[ A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} - (A_{22}-I) \right] A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2A_{21} (A_{11}+I)^{-1} - \left[ (A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2A_{21} (A_{11}+I)^{-1} - \left[ (A_{22}+I) - 2I - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2A_{21} (A_{11}+I)^{-1} - \left[ 2A^* - 2I \right] A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2A_{21} (A_{11}+I)^{-1} - 2 \left[ I - A^{*-1} \right] A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \\
 &= 2A_{21} (A_{11}+I)^{-1} - 2 A_{21} (A_{11}+I)^{-1} + 2A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}
 \end{aligned}$$



d'où

$$A_{21} = 2A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{12} &= \left[ A_{12} - (A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] A^{*-1} \\
 &= \left[ A_{11}+I - (A_{11}+I) \right] (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{12} = 2 (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{22} &= \left[ (A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] A^{*-1} \\
 &= AA^{*-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(A_{11}+I)^{-1} + (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}, & -(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} \\ -A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} & A^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1 = 2(A_{11}+I)^{-1} B_1 + (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} B_1 - (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} B_2$$

$$\tilde{B}_1 = 2(A_{11}+I)^{-1} B_1 - (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} (B_2 - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} B_1)$$

$$\tilde{B}_2 = A^{*-1} (B_2 - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} B_1)$$

(III) Découplage en continu.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\lambda &= \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} \\ &= 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} - 4(A_{11}+I)^{-1} \\ &\quad \times A_{12} A^{-1} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1} \end{aligned}$$

$$= 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} (I+2A^{-1}) A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}.$$

$$= 2(A_{11}-I)(A_{11}+I)^{-1} - 4(A_{11}+I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}$$

$$\tilde{A}_\lambda = 2 \left[ (A_{11}-I) - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right] (A_{11}+I)^{-1}$$

avec

$$\bar{A}_{22} = (I+2A^{-1}) \left[ (A_{22}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] = (A+2I) A^{-1} \left[ (A_{22}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]$$

$$= \left[ (A_{22}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] \left[ (A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]^{-1} \left[ (A_{22}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]$$

$$= \left[ (A_{22}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right] \left[ (A_{22}+I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]^{-1} \left[ (A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]$$

$$\bar{A}_{22} = \left[ (A_{22}-I) - A_{21} (A_{11}+I)^{-1} A_{12} \right]^{-1} =$$

$$\tilde{A}_r = \tilde{A}_{22} = A A^{*-1}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\ell &= \tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{22}^{-1} B_2 \\ &= 2(A_{11}+I)^{-1} B_1 - (A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} B_r - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} A^{*-1} A^* A^{-1} A^{*-1} B_r \\ &= 2(A_{11}+I)^{-1} B_1 - (A_{11}+I)^{-1} A_{12} [I + 2A^{-1}] A^{*-1} B_r \\ &= 2(A_{11}+I)^{-1} B_1 - 2(A_{11}+I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} B_r \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_\ell = 2(A_{11}+I)^{-1} [B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r]$$

$$\tilde{B}_r = \tilde{B}_2 = A^{*-1} B_r$$

$$\tilde{C}_\ell = \tilde{C}_1 - 2\tilde{C}_2 A^* A^{-1} A^{*-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}$$

$$\tilde{C}_\ell = C_1 - 2C_2 A^{-1} A_{21} (A_{11}+I)^{-1}$$



$$\tilde{C}_r = \tilde{C}_2 = C_2$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\ell &= -\tilde{C}_2 \tilde{A}_{22}^{-1} B_r \\ &= -C_2 A^* A^{-1} A^{*-1} B_r \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_\ell = -C_2 A^{*-1} B_r$$

le système découplé en continu est caractérisé par :

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} \tilde{A}_\ell & 0 \\ 0 & A_r^\sim \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} \tilde{B}_\ell & 0 \\ 0 & B_r^\sim \end{bmatrix} \quad \tilde{C}_d = \begin{bmatrix} \tilde{C}_\ell & \tilde{C}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_d$$

Sur ce système, nous appliquons les transformations inverses  $H^{-1}$ , il nous vient le triplet suivant en direct.

en (IV) :

$$A_d^\gamma = \begin{bmatrix} A_\ell^\gamma & 0 \\ 0 & A_r^\sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \frac{A_\ell^\gamma}{2} & 0 \\ 0 & I + \frac{A_r^\sim}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - \frac{A_\ell^\gamma}{2} & 0 \\ 0 & I - \frac{A_r^\sim}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$B_d^\gamma = \begin{bmatrix} B_\ell^\gamma & 0 \\ 0 & B_r^\sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \frac{\tilde{A}_\ell}{2} & 0 \\ 0 & I - \frac{A_r^\sim}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_\ell & 0 \\ 0 & B_r^\sim \end{bmatrix}$$

$$C_d^\gamma = \tilde{C}_d, \quad D_d^\gamma = D_\ell^\sim = \tilde{D}_\ell.$$

avec :

$$\begin{aligned} A_\ell^\gamma &= \left( I + \frac{\tilde{A}_\ell}{2} \right) \left( I - \frac{\tilde{A}_\ell}{2} \right)^{-1} \\ &= \left[ I + \left[ (A_{11} - I) - 2(A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \right] \left[ I - (A_{11} - I) - 2(A_{11} + I)^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right] (A_{11} + I)^{-1} \right]^{-1} \\ &= \left[ A_{11} + I + A_{11} - I - 2(A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right] (A_{11} + I)^{-1} (A_{11} + I) \left[ A_{11} + I - \right. \\ &\quad \left. A_{11} + I + 2(A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$A_\ell^\gamma = \left[ A_{11} - (A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right] \left[ I + (A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 A_r &= \left( I + \frac{\tilde{A}_r}{2} \right) \left( I - \frac{A_r}{2} \right) = \left( I + \frac{A A^{*-1}}{2} \right) \left( I - \frac{A A^{*-1}}{2} \right)^{-1} \\
 &= \left( A^* + \frac{A}{2} \right) A^{*-1} \left[ \left( A^* - \frac{A}{2} \right) A^{*-1} \right]^{-1} \\
 &= \left( A^* + \frac{A}{2} \right) A^{*-1} A^* \left( A^* - \frac{A}{2} \right)^{-1} \\
 &= \left( A^* + \frac{A}{2} \right) \left( A^* - \frac{A}{2} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

d'où

$$A_r^{\sim} = A_{22} - A_{21} (A_{11} + I)^{-1} A_{12}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\chi}^{\sim} &= \left( I - \frac{\tilde{A}_{\chi}}{2} \right)^{-1} \tilde{B}_{\chi} \\
 &= \left[ I - \left[ (A_{11} - I) - 2(A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right] (A_{11} + I)^{-1} \right]^{-1} 2(A_{11} + I)^{-1} [B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r^{\sim}] \\
 &= (A_{11} + I) \left[ 2I - 2(A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} \right]^{-1} 2(A_{11} + I)^{-1} [B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r^{\sim}] \\
 &= (A_{11} + I) \left[ (I - (A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21}) \right]^{-1} (A_{11} + I)^{-1} [B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r^{\sim}] \\
 &= \left[ (A_{11} + I) (I - (A_{11} + I)^{-1} A_{12} \bar{A}_{22} A_{21}) (A_{11} + I)^{-1} \right]^{-1} (B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r^{\sim})
 \end{aligned}$$

$$B_{\chi}^{\sim} = \left[ I + A_{12} \bar{A}_{22} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \right]^{-1} (B_1 - A_{12} \bar{A}_{22} B_r^{\sim})$$



$$\begin{aligned}
 B_r^{\sim} &= \left( I - \frac{\tilde{A}_r}{2} \right)^{-1} \tilde{B}_r \\
 &= \left( I - \frac{A A^{*-1}}{2} \right)^{-1} A^{*-1} \tilde{B}_r \\
 &= A^* \underbrace{\left( A^* - \frac{A}{2} \right)^{-1}}_I A^{*-1} \tilde{B}_r
 \end{aligned}$$

$$\underline{B_r^{\sim}} = B_2 - A_{21} (A_{11} + I)^{-1} B_1$$

$$\underline{C_{\lambda}^{\sim}} = C_1 - 2C_2 A^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1}$$

$$\underline{C_r^{\sim}} = C_2$$

$$\underline{D_{\lambda}^{\sim}} = - C_2 (A_r^{\sim} - I)^{-1} B_r^{\sim}$$

Avec les notations adoptées  $\bar{A}_{22}$  s'écrivent sous une deuxième forme :

$$\bar{A}_{22} = (A_r^{\sim} - I)^{-1}$$

ANNEXE III-2.

I - Passage de discret en continu.

Les coefficients de la fonction de transfert en continue obtenu par la transformaiton homographique d'une fonction de transfert du discret, peuvent être déterminés par le tableau suivant :

$$w_d(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}, \text{ la fonction de transfert en } p \text{ est obtenu par :}$$

$$\tilde{w}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{p}{2}} \quad w_d\left(\frac{1 - \frac{p}{2}}{1 + \frac{p}{2}}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(\frac{p}{2}\right)^i}{\sum_{i=0}^n \beta_i \left(\frac{p}{2}\right)^i}$$

Le choix de tableaux à partir duquel seront déterminés les coefficients sera fonction de degré du numérateur et dénominateur, c'est le tableau à l'ordre n pour le dénominateur, et celui d'ordre (n-1) pour le numérateur.

Le tableau :

<u>Ordre 1.</u>	$\frac{p}{2}$	$\frac{b_1}{b_0}$	$\frac{b_0}{b_0}$		
		1	-1	$\alpha_1 = b_1 - b_0$	
		1	1	$\alpha_0 = b_1 + b_0$	
 <u>Ordre 2.</u>	 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$	 $\frac{b_2}{b_0}$	 $\frac{b_1}{b_0}$	 $\frac{b_0}{b_0}$	
		1	-1	1	$\alpha_2 = b_2 - b_1 + b_0$
	$\frac{p}{2}$	2	0	-2	$\alpha_1 = 2b_2 - 2b_0$
		1	1	1	$\alpha_0 = b_2 + b_1 + b_0$

<u>Ordre 3.</u>	<u>b<sub>3</sub></u>	<u>b<sub>2</sub></u>	<u>b<sub>1</sub></u>	<u>b<sub>0</sub></u>
(p/2) <sup>3</sup>	1	-1	1	-1
(p/2) <sup>2</sup>	3	-1	-1	3
(p/2)	3	1	-1	-3
	1	1	1	1

<u>Ordre 4.</u>	<u>b<sub>4</sub></u>	<u>b<sub>3</sub></u>	<u>b<sub>2</sub></u>	<u>b<sub>1</sub></u>	<u>b<sub>0</sub></u>
	1	-1	1	-1	1
	4	-2	0	2	-4
	6	0	-2	0	6
	4	2	0	-2	-4
	1	1	1	1	1

<u>Ordre 5.</u>	<u>b<sub>5</sub></u>	<u>b<sub>4</sub></u>	<u>b<sub>3</sub></u>	<u>b<sub>2</sub></u>	<u>b<sub>1</sub></u>	<u>b<sub>0</sub></u>
	1	-1	1	-1	1	-1
	5	-3	1	1	-3	-5
	10	-2	-2	2	2	-10
	10	2	-2	-2	2	10
	5	3	1	-1	-3	-5
	1	1	1	1	1	1

$$\text{ex : } w(z) = \frac{b_1 z + b_0}{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

Le numérateur de  $W \left( \frac{P}{2} \right)$  est de degré 2, c'est à partir de tableau "ordre 2" que les coefficients sont déterminés.

Le dénominateur est d'ordre 3, les coefficients seront déterminés du du tableau "d'ordre 3". Il nous vient alors :

$$W\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2 (b_0 - b_1) - \frac{p}{2} (-2b_0) + (b_1 + b_0)}{\left(\frac{p}{2}\right)^3 (b_3 - b_2 + b_1 - b_0) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 (3b_3 - b_2 - b_1 + 3b_0) + \frac{p}{2} (3b_3 + b_2 - b_1 - 3b_0) + \dots + (b_3 + b_2 + b_1 + b_0)}$$

Le tableau à l'ordre  $n$  est déterminé de celui à l'ordre  $(n-1)$  pour une simple addition des lignes du tableau à l'ordre  $(n-1)$  sauf pour sa première ligne qui est constituée de  $+1$  et  $-1$  alternées, et pour sa dernière ligne qui est constituée de  $1$ .

II - Passage de continu en direct.

Utilisant le même procédé qu'avant sur des tableaux disposés d'une manière différente :

$$W_c(p) = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i p^i}{\sum_{i=0}^n \beta_i p^i}$$

son image en discret  $\tilde{W}_d(z)$  est obtenu de la façon suivante :

$$\tilde{W}_d(z) = \frac{2}{1+z} W_c\left(2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right) = 2 \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i b^i}$$

les coefficients  $b_i, a_i$  sont déterminés à partir des tableaux suivants :

		$\alpha_0$	$2\alpha_1$	$4\alpha_2$	$8\alpha_3$	$16\alpha_4$	$32\alpha_5$
<u>Ordre 1</u>	$z$	1	1				$a_1 = \alpha_0 + 2\alpha_1$
		1	-1				$a_0 = \alpha_0 - 2\alpha_1$
<u>Ordre 2</u>	$z^2$	1	1	1			$a_2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2$
	$z$	2	0	-2			$\alpha_1 = 2\alpha_0 - 8\alpha_2$
		1	-1	1			$\alpha_0 = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 4\alpha_2$

	$\alpha_0$	$2\alpha_1$	$4\alpha_2$	$8\alpha_3$	$16\alpha_4$	$32\alpha_5$
<u>Ordre 3</u>	$z^3$	1	1	1		
	$z^2$	3	1	-1	-3	
	$z$	3	-1	-1	3	
		1	-1	1	-1	

<u>Ordre 4</u>		1	1	1	1	1
		4	2	0	-2	-4
		6	0	-2	0	6
		4	-2	0	2	-4
		1	-1	1	-1	1

<u>Ordre 5</u>		1	1	1	1	1	
		5	3	1	-1	-3	-5
		10	2	-2	-2	2	+10
		10	-2	-2	2	2	-10
		5	-3	1	1	-3	5
		1	-1	1	-1	1	-1



Exemple  $W_c(p) = \frac{\alpha_0}{\beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}$  dont l'image en discret est :

$$\tilde{W}_d(z) = \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

le numérateur est déterminé à partir de tableau "ordre 1".

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_0 + 2\alpha_1 = \alpha_0 \\ b_0 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = \end{cases}$$

le dénominateur est donné par le tableau "ordre 2".

$$\begin{cases} a_2 = \beta_0 - 2\beta_1 + 4\beta_2 \\ a_1 = 2\beta_0 - 8\beta_2 \\ a_0 = \beta_0 - 2\beta_1 + 4\beta_2 \end{cases}$$

CHAPITRE IV

COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES DISCRETS  
SINGULIEREMENT PERTURBES - APPLICATION AUX SYSTEMES  
A ECHELLE DE TEMPS MULTIPLES

---

INTRODUCTION

Dans la première partie du chapitre, effectuons une étude comparative des différentes approches de la commande quasi-optimale sur un exemple pratique. Nous étudions pour cela la méthode de décomposition de l'équation de Riccati globale introduite dans le deuxième chapitre. Nous utiliserons ensuite une seconde méthode basée sur la décomposition temporelle développée précédemment et qui correspond à une complète séparation des problèmes d'optimisation. Enfin, l'étude précise de la partie lente discrète découplée est possible si la réduction par la méthode P.S. est accompagnée de l'application de la transformation homographique. Nous montrons pour deux domaines très importants de l'étude des systèmes, la simulation et la commande optimale, l'apport très net de cette dernière méthode de réduction (PS + H) pour les systèmes à dynamique lente.

Dans la deuxième partie, nous présentons une méthode originale de modélisation sous forme singulièrement perturbée des systèmes échantillonnés multivitesse, qui regroupe sous forme unique les systèmes à paramètres multiples et ceux qui peuvent être assimilés à des systèmes à paramètre unique. Cette modélisation permet, pour la réduction, deux approches différentes que nous appelons "dégénérescence progressive" et "séparation directe partie lente/partie rapide", et conduit à un algorithme de séparation. La méthode (PS + H) d'étude de la partie lente discrète fournit des résultats différents suivant la démarche utilisée.

I. COMMANDE QUASI OPTIMALE DES SYSTEMES A DOUBLE ECHELLE DE TEMPS

I.1 - Décomposition de l'équation de Riccati

Soit le système :

$$(IV.1) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_{11} x_n + A_{12} \mu z_n + B_1 u_n \\ z_{n+1} = A_{21} x_n + A_{22} \mu z_n + B_2 u_n \\ y_n = C_1 x_n + C_2 \mu z_n \end{cases}$$

avec  $x_0, z_0$ , les conditions initiales

$$x_n \in R^{q_1}, z_n \in R^{q_2}, q_1 + q_2 = q$$

l'étude concerne la détermination de la commande à horizon infini permettant de minimiser le critère suivant :

$$(IV.2) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n^T y_n + u_n^T R u_n$$

R étant une matrice définie positive. La solution optimale d'un tel problème est donnée par la relation [Larminat, Thomas, 1977] :

$$(IV.3) \quad u_n^* = -(R + B^T k B)^{-1} B^T k A \begin{bmatrix} x_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ A_{21} & \mu A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = (C_1 \quad \mu C_2)$$

k étant solution de l'équation de Riccati :

$$(IV.4) \quad k = C^T C + A^T k A - A^T k B (R + B^T k B)^{-1} B^T k A$$

Lorsque nous mettons la matrice  $k$  sous la forme suivante :

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & \mu k_{12} \\ \mu k_{12}^T & \mu k_{22} \end{bmatrix}$$

une forme utilisée d'une façon classique pour les systèmes continus singulièrement perturbés [Dauphin-Tanguy, 1983], les équations obtenues après partitionnement de (IV.4) et posant  $\mu = 0$ , se réduisent au système dégénéré suivant :

$$(IV.5) \quad \begin{cases} k_{11} = C_1^T C_1 + A_{11}^T k_{11} A_{11} - A_{11}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{11} \\ k_{12} = C_1^T C_2 + A_{11}^T k_{11} A_{12} - A_{11}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{12} \\ k_{12}^T = k_{12} \\ k_{22} = 0 \end{cases}$$

ce qui constitue un inconvénient pour la détermination des quatre blocs de la matrice  $k$  ( $k_{22}$  est toujours égal à zéro). Pour lever cette indétermination d'une part, et pour des raisons d'homogénéité d'autre part posons :

$$(IV.6) \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} & \mu k_{12} \\ \mu k_{12}^T & \mu^2 k_{22} \end{bmatrix}$$

De la même manière, faisons tendre  $\mu$  vers zéro dans les équations obtenues après partitionnement de (IV.4), celles-ci se réduisent au système dégénéré suivant :

$$(IV.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_{11} = C_1^T C_1 + A_{11}^T k_{11} A_{11} - A_{11}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{11} \quad (a) \\ k_{12} = C_1^T C_2 + A_{11}^T k_{11} A_{12} - A_{11}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{12} \quad (b) \\ k_{12}^T = k_{12}^T \quad (c) \\ k_{22} = C_2^T C_2 + A_{12}^T k_{11} A_{12} - A_{12}^T k_{11} B_1 (R + B_1^T k_{11} B_1)^{-1} B_1^T k_{11} A_{12} \quad (d) \end{array} \right.$$

L'équation de Riccati (IV.7-a) correspond à la partie lente du système. Sa solution existe sous les deux conditions de commandabilité et de détectabilité des paires  $(A_{11}, B_1)$  et  $(A_{11}, C_1)$ .

La détermination de  $k_{11}$  permet de trouver les quatre blocs de la matrice  $k$  et justifie pour autant le choix (IV.6) de la matrice  $k$ .

La commande que nous cherchons s'écrit :

$$(IV.8) \quad u_n^* = -\alpha^{-1} \left[ B_1^T (k_{11} A_{11} + \mu k_{12} A_{21}) + B_2^T (\mu k_{12}^T A_{11} + \mu^2 k_{22} A_{21}) \right] x_n \\ -\alpha^{-1} \left[ B_1^T (\mu k_{11} A_{12} + \mu^2 k_{12} A_{22}) + B_2^T (\mu^2 k_{12}^T A_{12} + \mu^3 k_{22} A_{22}) \right] z_n$$

$$\text{avec } \alpha = R + B_1^T (k_{11} B_1 + \mu k_{12} B_2) + B_2^T (\mu k_{12}^T B_1 + \mu^2 k_{22} B_2)$$

Donc la méthode de décomposition de l'équation de Riccati réduit la résolution d'un système d'ordre  $q = q_1 + q_2$  à celle d'un système  $q_1$ . Cependant cette méthode implique un ordre à respecter dans la détermination des blocs  $k_{ij}$  de la matrice  $k$ . Le calcul des blocs apparaît sous forme hiérarchisée. La figure 13 représente l'organigramme de calcul :

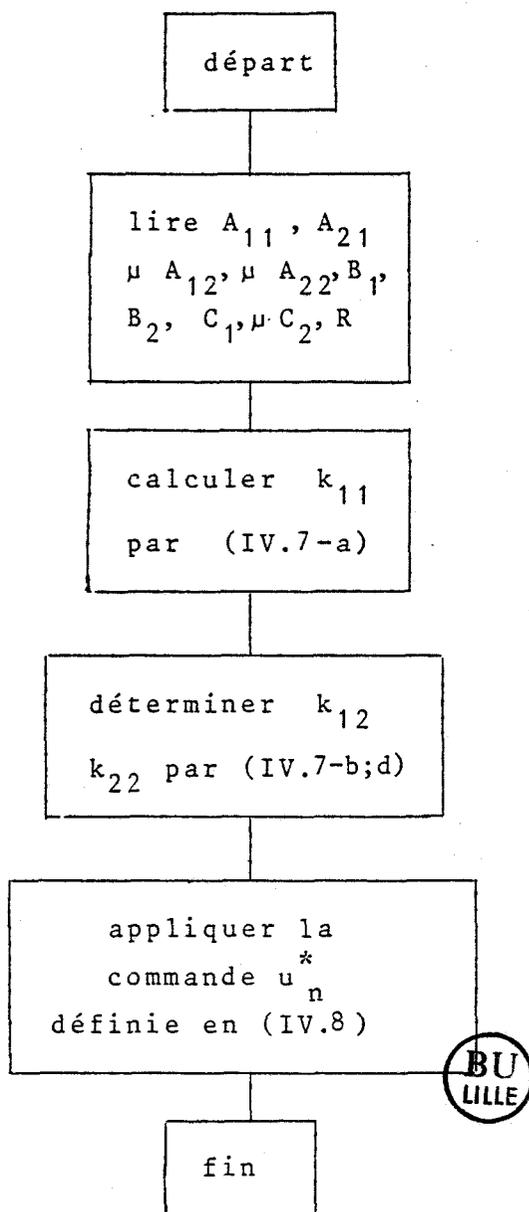


Figure 13

La seconde méthode que nous allons développer repose sur la complète séparation des systèmes lent et rapide.

### I.2 - Commande quasi optimale par décomposition temporelle

La séparation en deux sous systèmes représentant l'un la partie rapide et l'autre la partie lente d'un système permet de concevoir un régulateur du système global en commandant chacun des deux sous systèmes.

Cette méthode a été souvent utilisée dans le cas des systèmes continus singulièrement perturbés [Chow, Kokotovic, 1976] [Dauphin-Tanguy, 1983] [Litkouhi, Khalil 1984]. Nous généraliserons son application aux cas des systèmes échantillonnés singulièrement perturbés.

### I.2.1. - Position du problème

Reprenons le système (IV.1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_{11} x_n + A_{12} \mu z_n + B_1 u_n \\ z_{n+1} = A_{21} x_n + A_{22} \mu z_n + B_2 u_n \\ y_n = C_1 x_n + \mu z_n \end{cases}$$

avec  $x_0$ ,  $z_0$ , les conditions initiales.

et  $J$  le critère (IV.2) à minimiser :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (y_n^T y_n + u_n^T R u_n)$$

L'utilisation de la méthode PS sur le système (IV.1) permet de découpler en deux parties lente et rapide.

### I.2.2. - Décomposition du système

Nous avons vu (chapitre I) que le système lent est obtenu en considérant que la partie rapide est prépondérante pendant une courte période et qu'après celle-ci, les modes rapides sont d'influence négligeable. Cela revient à poser  $\mu = 0$ . Par contre, le système rapide est défini comme étant une différence entre le système réel et le système lent. Par suite, en supposant que  $A_{11}$  est inversible, les deux sous-systèmes lent et rapide sont respectivement décrits par :

$$(IV.9) \quad \begin{cases} x_{\ell n+1} = A_{11} x_{\ell n} + B_1 u_{\ell n} , x(0) = x_0 \\ y_{\ell n} = C_1 x_{\ell n} \end{cases}$$

et

$$(IV.10) \quad \begin{cases} z_{rn+1} = A_r z_{rn} + B_r u_{rn} , z_{r0} = z_0 - A_{21} A_{11}^{-1} x_0 \\ y_{rn} = C_r z_{rn} + D_r u_{rn} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} A_r = \mu(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \\ B_r = B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1 \\ C_r = \mu(C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}) \\ D_r = -C_1 A_{11}^{-1} B_1 \end{cases}$$

De même le critère  $J$  est décomposé en deux parties  $J_\ell$  et  $J_r$  représentant respectivement les parties lente et rapide de  $J$  [Fossard, Magni, 1982].

$$(IV.11) \quad J_\ell = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (y_{\ell n}^T y_{\ell n} + u_{\ell n}^T R u_{\ell n})$$

$$(IV.12) \text{ et } J_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (y_{rn}^T y_{rn} + u_{rn}^T R u_{rn})$$

Le problème de minimisation (IV.1) - (IV.2) est donc séparé en deux problèmes réduits (IV.9) - (IV.11) et (IV.10) - (IV.12) qui sont indépendants. Ces deux problèmes conduisent aux solutions  $u_{\ell n}^*$  et  $u_{rn}^*$  que nous déterminerons ci-après. La commande composite sera calculée dans un deuxième temps et déterminée par la relation :

$$u_C^* = u_{\ell n}^* + u_{rn}^*$$

I.2.3. - Commande des sous systèmes

Sous système lent

La commande optimale du système (IV.9) qui minimise le critère (IV.11) est donnée par la relation :

$$(IV.13) \quad u_{ln}^* = -(R + B_1^T k_l B_1)^{-1} B_1^T k_l A_{11} x_{ln}$$

où  $k_l$  est la solution semi définie positive unique de l'équation de type Riccati :

$$(IV.14) \quad k_l = C_1^T C_1 + A_{11}^T k_l A_{11} - A_{11}^T k_l B_1 (R + B_1^T k_l B_1)^{-1} B_1^T k_l A_{11}$$

La solution  $k_l$  de l'équation (IV.14) n'existe que si la paire  $(A_{11}, B_1)$  est stabilisable et si la paire  $(A_{11}, C_1)$  est détectable.

Sous système rapide

Le sous système est régi par les équations (IV.10)

$$\begin{cases} z_{rn+1} = A_r z_{rn} + B_r u_{rn} \\ y_{rn} = C_r z_{rn} + D_r u_{rn} \end{cases}$$

Le critère que nous désirons minimiser est représenté par (IV.12)

$$(IV.15) \quad J_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (y_{rn}^T y_{rn} + u_{rn}^T R u_{rn})$$

R étant définie positive.

$y_{rn}$  étant de la forme  $y_{rn} = C_r z_{rn} + D_r u_{rn}$ , nous aboutissons à un problème d'optimisation quadratique avec critère à coût croisé :

1er cas de solution

$$(IV.16) \quad J_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z_{rn}^T C_r^T C_r z_{rn} + 2 u_{rn}^T D_r^T C_r z_{rn} + u_{rn}^T R_o u_{rn})$$

où  $R_o = R + D_r^T D_r$

par le changement de commande :

$$(IV.17) \quad \bar{u}_{rn} = u_{rn} + R_o^{-1} D_r^T C_r z_{rn}$$

le problème d'optimisation est transformé en :

$$(IV.18) \quad z_{rn+1} = (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r) z_{rn} + B_r \bar{u}_{rn}$$

avec le critère correspondant :

$$(IV.19) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z_{rn}^T C_r^T (I - D_r R_o^{-1} D_r^T) C_r z_{rn} + \bar{u}_{rn}^T R_o \bar{u}_{rn}$$

La solution optimale du problème (IV.18) avec (IV.19) est donnée par :



$$(IV.20) \quad \bar{u}_{rn}^* = -(R_o + B_r^T k_r B_r)^{-1} B_r^T k_r (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r) z_{rn}$$

Celle relative au système initial est obtenue de la relation (IV.17) et nous obtenons alors :

$$(IV.21) \quad u_{rn}^* = - \left[ R_o^{-1} D_r^T C_r + (R_o + B_r^T k_r B_r)^{-1} B_r^T k_r (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r) \right] z_{rn}$$

où  $k_r$  est la solution, lorsqu'elle existe, unique semi-définie positive de l'équation de type Riccati :

$$(IV.22) \quad k_r = C_r^T (I - D_r R_o^{-1} D_r^T) C_r + (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r)^T k_r (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r) - (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r)^T k_r B_r (R_o + B_r^T k_r B_r)^{-1} B_r^T k_r (A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r)$$

La solution  $k_r$  de l'équation (IV.22) existe si la paire  $(A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r, B_r)$  est stabilisable et si la paire

$(A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r, \hat{C}_r)$  où :

$$\hat{C}_r^T \hat{C}_r = C_r^T (I - D_r R_o^{-1} D_r^T) C_r, \text{ est détectable.}$$

La paire  $(A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r, B_r)$  est stabilisable si et seulement si la paire  $(A_r, B_r)$  est stabilisable. De même il est évident que :

$$I - D_r R_o^{-1} D_r^T = (I + D_r R_o^{-1} D_r^T)^{-1} \text{ est définie positive}$$

puisque  $R$  l'est ; il existe alors une matrice  $Q_r$  régulière telle que :

$$Q_r^T Q_r = I - D_r R_o^{-1} D_r^T$$

La condition  $(A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r, \hat{C}_r)$  détectable revient à dire que la paire  $(A_r - B_r R_o^{-1} D_r^T C_r, Q_r C_r)$  est détectable. Cette dernière propriété n'est vérifiée que si la paire  $(A_r, C_r)$  est détectable. Par suite nous pouvons affirmer que l'équation (IV.22) admet une solution semi-définie positive unique si la paire  $(A_r, B_r)$  est stabilisable et si la paire  $(A_r, C_r)$  est détectable.

### 2ème cas de solution

Pour de tels systèmes (IV.10), admettant une transmission directe de l'information  $D_r$ , la commande optimale (IV.21) et l'équation de Riccati (IV.22) peuvent être écrites sous une deuxième forme faisant apparaître  $D_r$

[Dorato, Levis, 1971] [Litkouhi, Khalil, 1984] :

$$(IV.23) \quad u_{rn}^* = - \left[ R + D_r^T D_r + B_r^T k_r B_r \right]^{-1} \left[ B_r^T k_r A_r + D_r^T C_r \right] z_{rn}$$

où  $k_r$  est solution de l'équation de Riccati de la forme :

$$(IV.24) \quad k_r = C_r^T C_r + A_r^T k_r A_r - \left[ A_r^T k_r B_r + C_r^T D_r \right] \\ \times \left[ R + D_r^T D_r + B_r^T k_r B_r \right]^{-1} \left[ B_r^T k_r A_r + D_r^T C_r \right]$$

### Cas particulier

Lorsque la commande quasi-optimale associée à (IV.10) minimise le critère :

$$(IV.25) \quad J_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_{rn}^T y_{rn}$$

soit

$$(IV.26) \quad J_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z_{rn}^T C_r^T C_r z_{rn} + 2z_{rn}^T C_r^T D_r u_{rn} + u_{rn}^T D_r^T D_r u_{rn})$$

Ce qui se ramène par le changement de variable :

$$(IV.27) \quad \bar{u}_{rn} = u_{rn} + D_r^{-1} C_r z_{rn}$$

à un problème linéaire quadratique classique d'équation.

$$(IV.28) \quad \begin{cases} z_{rn+1} = (A_r - B_r D_r^{-1} C_r) z_{rn} + B_r \bar{u}_{rn} \\ y_{rn} = D_r \bar{u}_{rn} \\ J_r = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_{rn}^T D_r^T D_r \bar{u}_{rn} \end{cases}$$

si  $(A_r - B_r D_r^{-1} C_r)$  est stable, la commande optimale est :

$$\bar{u}_{rn} = 0$$

soit pour la valeur optimale  $u_{rn}$  de la commande  $u_n$  :

$$(IV.29) \quad u_{rn} = - D_r^{-1} C_r z_{rn}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} C_r = \mu (C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}) \\ D_r = - C_1 A_{11}^{-1} B_1 \end{cases}$$

Si  $(A_r - B_r D_r^{-1} C_r)$  n'est pas stable, il faut chercher une commande qui stabilise le système en boucle fermée.

#### 1.2.4. - Commande composite

La commande globale du système (IV.1) est donc :

$$(IV.30) \quad \begin{aligned} u_c^* &= u_{rn}^* + u_{ln}^* \\ u_c^* &= - (R + B_1^T k_\ell B_1)^{-1} B_1^T k_\ell A_{11} x_{ln} \\ &\quad - \left[ R + D_r^T D_r + B_r^T k_r B_r \right]^{-1} \left[ B_r^T k_r A_r + D_r^T C_r \right] z_{rn} \end{aligned}$$

Posons :

$$(IV.31) \quad \begin{cases} G_r = - \left[ R + D_r^T D_r + B_r^T k_r B_r \right]^{-1} \left[ B_r^T k_r A_r + D_r^T C_r \right] \\ G_\ell = - (R + B_1^T k_\ell B_1)^{-1} B_1^T k_\ell A_{11} \end{cases}$$

Le bouclage  $G_r$  stabilise la paire  $(A_r, B_r)$ , tandis que  $G_\ell$  stabilise la paire  $(A_{11}, B_1)$  ; par suite la commande composite s'écrit :

$$(IV.32) \quad u_c^* = + G_\ell x_{ln} + G_r z_{rn}$$

En utilisant les résultats établis dans les premiers chapitres (I et II) à savoir l'approximation à l'ordre zéro des variables, il vient :

$$(IV.33) \quad \begin{cases} x_{\ell n} = x_n \\ z_{rn} = z_n - z_{\ell n} \end{cases}$$

avec 
$$z_{\ell n} = A_{21} A_{11}^{-1} x_{\ell n} + B_r u_{\ell n}$$

Nous pouvons écrire que la loi de commande globale s'écrit :

$$(IV.34) \quad u_c^* = \left[ (I - G_r B_r) G_\ell - G_r A_{21} A_{11}^{-1} \right] x_n + G_r z_n$$

soit :

$$(IV.35) \quad u_c^* = k_1 x_n + k_2 z_n$$

avec :

$$k_1 = - \left[ (R + D_r^T D_r + B_r^T k_r B_r) (B_r^T k_r A_r + D_r^T C_r) (B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1) + I \right] \\ \times (R + B_1^T k_\ell B_1)^{-1} B_1^T k_\ell A_{11} + (R + D_r^T D_r + B_r^T k_r B_r) (B_r^T k_r A_r + D_r^T C_r) A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$k_2 = -G_r$$

L'optimisation quadratique de systèmes ayant des modes lents et des modes rapides par décomposition que nous venons de développer réduit la résolution d'un problème de dimension  $q = q_1 + q_2$  à celles d'un problème de dimension  $q_1$  et d'un problème de dimension  $q_2$ . La décomposition temporelle aboutit à une séparation complète des sous problèmes contrairement

à la méthode concernant la décomposition de l'équation de Riccati.

Néanmoins, la commande composite calculée ne semble pas être une bonne approximation à la commande optimale du système initial. Ceci est dû aux manques de précisions lors du découplage du système. En effet, la partie lente découplée n'est pas très précise, et il en est de même de la partie lente de  $z_n$ . Pour pallier à ce problème nous proposons la méthode (PS + H) qui donne une bonne précision sur les deux parties lente et rapide.

### I.3 - Utilisation de la transformation homographique pour la détermination de la commande optimale de la partie lente

Reprenons le système linéaire à deux dynamiques (IV.1) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_{11} x_n + A_{12} \mu z_n \\ z_{n+1} = A_{21} x_n + A_{22} \mu z_n \\ y_n = C_1 x_n + C_2 \mu z_n \end{cases}$$

et le critère à minimiser en vue de la détermination de la commande optimale (IV.2) :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n^T y_n + u_n^T R u_n$$

La décomposition temporelle du système (IV.1), par l'association de (PS + H) permet d'avoir une bonne précision sur les parties lente et rapide du système.

Le système retenu avec le maximum de précision lorsque nous nous

intéressons à sa partie lente et rapide est composé de :

la partie rapide :

$$(IV.36) \quad \begin{cases} z_{rn+1}^{\sim} = A_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} + B_r^{\sim} u_{rn} \\ y_{rn}^{\sim} = C_r^{\sim} z_{rn}^{\sim} \end{cases} \quad (a) \quad , \quad z_{ro}^{\sim} = z_o + 2(A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} x_o$$

et

$$z_{ln}^{\sim} = N_l^{\sim} x_{ln} + L_l^{\sim} u_{ln}$$

avec

$$\begin{cases} A_r^{\sim} = A_{22} - A_{21} (A_{11} + I)^{-1} A_{12} \\ B_r^{\sim} = B_2 - A_{21} (A_{11} + I)^{-1} B_1 \\ C_r^{\sim} = C_2 \\ N_l^{\sim} = -2 (A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \\ L_l^{\sim} = - (A_r^{\sim} - I)^{-1} B_r^{\sim} \end{cases}$$



la partie lente :

$$(IV.37) \quad \begin{cases} x_{ln+1}^{\sim} = A_l^{\sim} x_{ln}^{\sim} + B_l^{\sim} u_{ln} \\ y_{ln}^{\sim} = C_l^{\sim} x_{ln}^{\sim} + D_l^{\sim} u_{ln} \end{cases} \quad , \quad x_l^{\sim}(o) = x_o$$

avec

$$\begin{cases} A_l^{\sim} = \left[ A_{11} - (A_{11} + I)^{-1} A_{12} (A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} \right] \left[ I + (A_{11} + I)^{-1} A_{12} (A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} \right]^{-1} \\ B_l^{\sim} = \left[ I + A_{12} (A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \right]^{-1} \left[ B_1 - A_{12} (A_r^{\sim} - I)^{-1} B_r^{\sim} \right] \\ C_l^{\sim} = C_1 - 2 C_2 (A_r^{\sim} - I)^{-1} A_{21} (A_{11} + I)^{-1} \\ D_l^{\sim} = - C_2 (A_r^{\sim} - I)^{-1} B_r^{\sim} \end{cases}$$

I.3.1. - Commande de la partie rapide obtenue par (PS + H)

Elle est représentée par l'équation (IV.36) dont le critère  $J_r^\nu$  correspondant est le suivant :

$$(IV.36) \quad J_r^\nu = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_{rn}^T y_{rn}^\nu + u_{rn}^T R u_{rn} \quad (b)$$

La commande optimale correspondante s'écrit :

$$(IV.36) \quad u_{rn}^* = - \left[ R + B_r^\nu k_r^\nu B_r^\nu \right]^{-1} B_r^\nu k_r^\nu A_r^\nu z_{rn}^\nu \quad (c)$$

où  $k_r^\nu$  est la solution stable de l'équation de Riccati.

$$(IV.36) \quad k_r^\nu = C_r^\nu C_r^\nu + A_r^\nu k_r^\nu A_r^\nu - A_r^\nu k_r^\nu B_r^\nu (R + B_r^\nu k_r^\nu B_r^\nu)^{-1} B_r^\nu k_r^\nu A_r^\nu \quad (d)$$

1.3.2. - Commande de la partie lente obtenue par (PS + H )

La méthode proposée conjugant PS et H conduit à l'équation (III.37) où les modifications sont apportées sur  $A_\ell^\nu$ ,  $B_\ell^\nu$ ,  $C_\ell^\nu$ , avec l'introduction de  $D_\ell^\nu$  : la transmission directe de l'information.

Le critère  $J_\ell^\nu$  correspondant s'écrit :

$$(IV.38) \quad J_\ell^\nu = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_{\ell n}^T y_{\ell n}^\nu + u_{\ell n}^T R u_{\ell n}$$

$y_{\ell n}^\nu$  étant de la forme :

$$(IV.39) \quad y_{\ell n}^\nu = C_\ell^\nu x_{\ell n}^\nu + D_\ell^\nu u_{\ell n}$$

nous aboutissons à un problème d'optimisation quadratique avec critère à coût croisé comme c'est le cas pour la partie rapide obtenue

par PS :

$$(IV.40) \quad J_{\ell}^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x_{\ell n}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu} C_{\ell}^{\nu} x_{\ell n}^{\nu} + 2 u_{\ell n}^{\nu T} D_{\ell}^{\nu} C_{\ell}^{\nu} x_{\ell n}^{\nu} + u_{\ell n}^{\nu T} R_{\ell}^{\nu} u_{\ell n}^{\nu}, R_{\ell}^{\nu} = R + D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}$$

et dont la commande optimale est donnée par :

$$(IV.41) \quad u_{\ell n}^{\nu *} = - \left[ R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu} + (R_{\ell}^{\nu} + B_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu})^{-1} B_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} (A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}) \right] x_{\ell n}^{\nu}$$

où  $k_{\ell}^{\nu}$  est la solution, lorsqu'elle existe, unique semi-définie positive de l'équation de type Riccati :

$$(IV.42) \quad k_{\ell}^{\nu} = C_{\ell}^{\nu T} (I - D_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T}) C_{\ell}^{\nu} + (A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}) k_{\ell}^{\nu} (A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}) - (A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}) k_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu} (R_{\ell}^{\nu} + B_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu})^{-1} B_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} (A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu})$$

La solution  $k_{\ell}^{\nu}$  de l'équation (IV.42) existe si la paire  $(A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}, B_{\ell}^{\nu})$  est stabilisable et si la paire  $(A_{\ell}^{\nu} - B_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu}, \hat{C}_{\ell}^{\nu})$ , où :

$$\hat{C}_{\ell}^{\nu T} \hat{C}_{\ell}^{\nu} = C_{\ell}^{\nu T} (I - D_{\ell}^{\nu} R_{\ell}^{\nu -1} D_{\ell}^{\nu T}) C_{\ell}^{\nu} \text{ est détectable.}$$

Les relations (IV.41) et (IV.42) peuvent être écrites sous la forme suivante faisant apparaître la matrice  $D_{\ell}^{\nu}$ .

$$u_{\ell n}^{\nu *} = - \left[ \left[ R + D_{\ell}^{\nu T} D_{\ell}^{\nu} + B_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu} \right]^{-1} \left[ B_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} A_{\ell}^{\nu} + D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu} \right] \right] x_{\ell n}^{\nu}$$

avec  $k_{\ell}^{\nu}$  solution de l'équation de Riccati suivante :

$$k_{\ell}^{\nu} = C_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu} + A_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} A_{\ell}^{\nu} - \left[ A_{\ell}^{\nu} k_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu} + C_{\ell}^{\nu T} D_{\ell}^{\nu} \right] \left[ R + D_{\ell}^{\nu T} D_{\ell}^{\nu} + B_{\ell}^{\nu T} k_{\ell}^{\nu} B_{\ell}^{\nu} \right]^{-1} \left[ B_{\ell}^{\nu T} k_{\ell}^{\nu} A_{\ell}^{\nu} + D_{\ell}^{\nu T} C_{\ell}^{\nu} \right]$$

La commande composite déterminée avec le maximum de précision est donc donnée par :

$$(IV.43) \quad \underline{u}_{\ell}^{\nu *} = u_{\ell n}^{\nu *} + u_{\ell n}^{\nu *$$

$$u_c^* = - \left[ R + B_r^T k_r B_r \right]^{-1} B_r^T k_r A_r z_{rn} \\ - \left[ (R + D_\ell^T D_\ell + B_\ell^T k_\ell B_\ell)^{-1} (B_\ell k_\ell A_\ell + D_\ell^T C_\ell) \right] x_{\ell n} \\ u_c^* = G_r z_{rn} + G_\ell x_{\ell n}$$

avec

$$(IV.44) \quad \begin{cases} G_r = - \left[ R + B_r^T k_r B_r \right]^{-1} B_r^T k_r A_r \\ G_\ell = - \left[ R + D_\ell^T D_\ell + B_\ell^T k_\ell B_\ell \right]^{-1} \left[ B_\ell k_\ell A_\ell + D_\ell^T C_\ell \right] \end{cases}$$

En utilisant les résultats établis auparavant quant aux approximations :



$$(IV.45) \quad \begin{cases} x_{\ell n}^* = x_n \\ z_{rn}^* = z_n - z_{\ell n} \end{cases}$$

avec

$$z_{\ell n}^* = N_\ell x_{\ell n}^* + L_\ell u_{\ell n}$$

soit alors

$$(IV.46) \quad u_c^* = G_r z_n + \left[ (-G_r L_\ell + I) G_\ell - G_r N_\ell \right] x_n = k_2' z_n + k_1' x_n$$

les modifications portant sur  $k_1'$  et  $k_2'$  par rapport à  $k_1$  et  $k_2$  de  $u_c^*$

#### I.4 - Mise en oeuvre des quatre méthodes sur un exemple

Considérons le problème suivant :

(IV.47)

$$\begin{cases}
 x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0.9014 & 0.1179 \\ -0.0196 & 0.8743 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} 0.2625 & 0.0835 & 0.1052 \\ 0 & 0.125 & 0.1467 \end{bmatrix} \mu z_n + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_n \\
 z_{n+1} = \begin{bmatrix} -0.0071 & 0.7342 \\ -0.75 & -0.0557 \\ -0.306 & -0.01614 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} 1.0085 & 0.065 & 1.05335 \\ -0.16 & 0.96587 & -0.0703 \\ -0.0055 & 0.7139 & 0.066085 \end{bmatrix} \mu z_n + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_n \\
 y_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} 0.25 & 0.35 & 1 \end{bmatrix} \mu z_n \\
 \text{avec } \mu = 0.2, \quad x_n^T = (x_n^1 \quad x_n^2), \quad z_n^T = (z_n^1 \quad z_n^2 \quad z_n^3), \\
 x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} : \text{conditions initiales} \\
 \text{critère à minimiser} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n^T y_n + u_n^2
 \end{cases}$$

Appliquons les quatre méthodes d'optimisations déjà établies auparavant sur le système considéré et en particulier sur sa partie lente  $x_n$ .

I.4.1. - Trajectoires optimales lentes

1) trajectoire optimale :

Elle est obtenue par la relation suivante :

(IV.48)

$$x_{n+1}^* = \begin{bmatrix} 0.62136 & -0.26678 \\ -0.29964 & 0.48962 \end{bmatrix} x_n^* + \begin{bmatrix} 0.0311 & -0.01413 & -0.00228 \\ -0.02139 & -0.0058 & +0.00601 \end{bmatrix} z_n^* \quad (a)$$

2) trajectoire quasi-optimale 1 (méthode de décomposition de l'équation de Riccati) :

$$(IV-48) \quad x_{Dn+1}^* = \begin{bmatrix} 0.5962 & -0.2806 \\ -0.3247 & 0.4763 \end{bmatrix} x_{Dn}^* + \begin{bmatrix} 0.0297 & -0.0104 & -0.0027 \\ -0.0227 & -0.0021 & 0.0055 \end{bmatrix} z_{Dn}^* \quad (b)$$

3) trajectoire quasi-optimale 2 (méthode de PS)

Le système découplé correspondant à la partie lente est représenté par le triplet suivant :

$$A_\ell = \begin{bmatrix} 0.9014 & 0.1179 \\ -0.0196 & 0.8743 \end{bmatrix}, \quad B_\ell = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_\ell = (1 \quad 1)$$



le critère à minimiser est le suivant :

$$J_\ell = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_{\ell n}^T y_{\ell n} + u_{\ell n}^2$$

et la trajectoire quasi-optimale obtenue est donnée par :

$$(IV.48) \quad x_{\ell n+1}^* = \begin{bmatrix} 0.54145 & -0.2947 \\ -0.37955 & 0.46167 \end{bmatrix} x_{\ell n}^* \quad (c)$$

4) trajectoire quasi-optimale 3 (méthode PS + H)

le système correspondant est décrit par le triplet matriciel suivant :

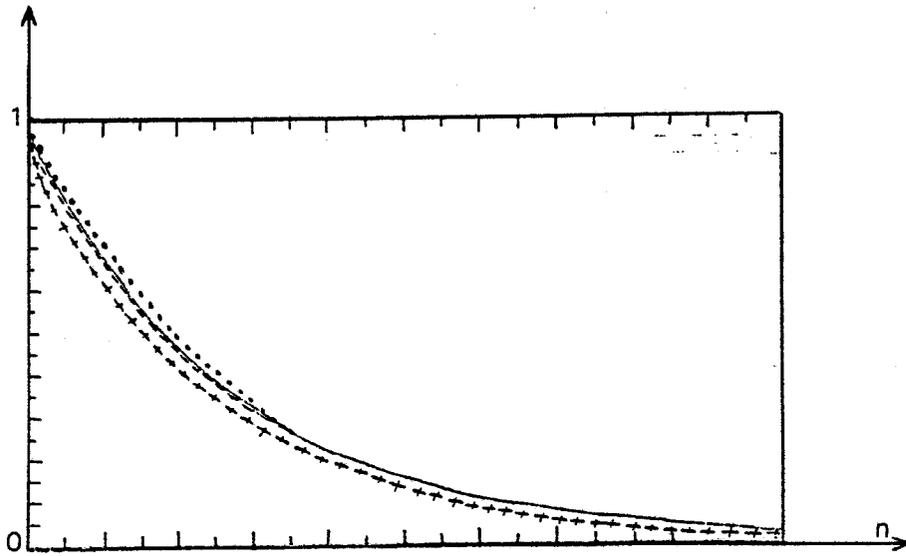
$$A_\ell^\gamma = \begin{bmatrix} 0.86945 & 0.1628 \\ -0.05544 & 0.87045 \end{bmatrix}, \quad B_\ell^\gamma = \begin{bmatrix} 1.1266 \\ 1.0629 \end{bmatrix}, \quad C_\ell^\gamma = [0.8308 \quad 1.0463], \quad D_\ell^\gamma = 0.463113$$

$$(IV.48) \quad \tilde{x}_{n+1}^* = \begin{bmatrix} 0.42708 & -0.37746 \\ -0.3599 & 0.35651 \end{bmatrix} \tilde{x}_n^* \quad (d)$$

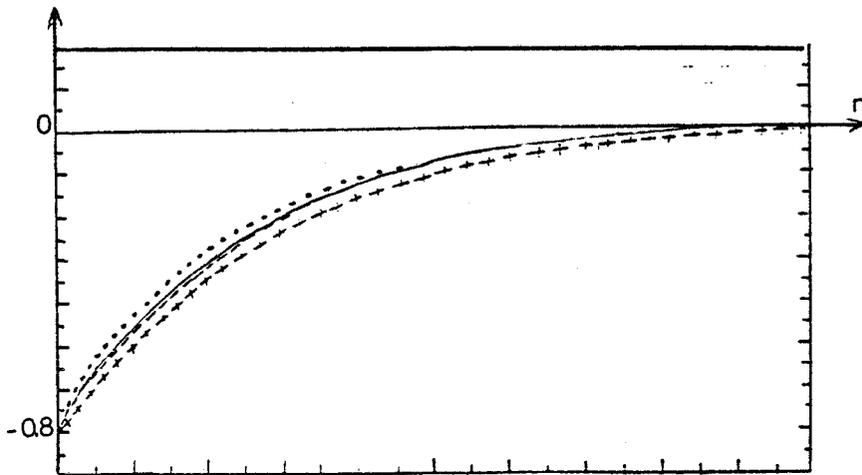
ce qui donne pour ces différents cas les courbes optimales pour les conditions initiales suivantes : figure 14

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}, \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Trajectoire  $x_n^1$



Trajectoire  $x_n^2$



- . Trajectoire optimale
- - - . Trajectoire quasi-optimale 3 (PS+H)
- ..... . Trajectoire quasi-optimale 1 (décomposition de l'équation Riccati)
- + + + + + . Trajectoire quasi-optimale 2 (PS)

Figure 14

#### 1.4.2. - Interprétation

La figure (14) montre de façon très nette la supériorité de la méthode proposée (PS + H). En effet, l'écart entre  $x_n^*$  optimal et  $x_{\lambda n}^*$  est presque négligeable.  $x_n^*$  et  $x_{\lambda n}^*$  peuvent être considérés comme confondus. Ceci s'explique par le fait que le découplage de cette partie pour (PS + H) la donne avec une bonne précision. Il vient ensuite la méthode de décomposition de l'équation de Riccati donnant une meilleure précision par rapport à la méthode de découplage par PS seulement. Ceci se justifie dans la relation (IV.48-b) par l'addition de deux termes associés respectivement aux modes d'évolution lent et rapide comme dans le cas de la trajectoire optimale (IV.48-a).

La trajectoire optimale 2 obtenue par PS est la moins précise, ceci du fait que dans son découplage elle ne tient pas compte de l'évolution de la partie rapide.

La commande quasi-optimale que nous venons de développer dans ce paragraphe a mis en évidence l'intérêt de la théorie des perturbations singulières comme méthode de réduction. En effet, alors que la solution optimale nécessite la résolution d'un système de dimension  $q_1 + q_2$ , ce qui signifie  $(q_1 + q_2) (q_1 + q_2) / 2$  équations non linéaires, la théorie des perturbations impose la résolution de systèmes de dimension réduite.

Les deux méthodes étudiées sont la décomposition de l'équation de Riccati globale et la décomposition temporelle. La première implique une hiérarchie dans la résolution du problème d'optimisation; quant à la deuxième méthode, elle met en évidence une totale indépendance dans la résolution des deux sous-systèmes issus de la décomposition. Cette méthode peut être considérée comme une approche hiérarchique originale. Au premier niveau décentralisation temporelle du système et optimisation des deux sous systèmes. Au second niveau, le coordinateur tient compte des interactions du processus pour mettre en oeuvre la commande composite  $u_c^*$ .

## II - SYSTEMES A PLUSIEURS ECHELLES DE TEMPS

Les chapitres précédents concernent la théorie de réduction de dimensionnalité en vue de l'analyse et de la commande des systèmes à deux échelles de temps. Nous proposons ici une extension de cette méthode aux systèmes présentant plusieurs échelles de temps.

La modélisation de tels systèmes mettant en évidence toutes les dynamiques permet par une analyse partitionnée de tous les sous-systèmes d'approcher le système global et de résoudre les problèmes de mise en oeuvre de la commande en allégeant considérablement les problèmes d'optimisation.

L'étude de tels systèmes a fait l'objet de nombreux travaux en continu [Kokotovic, O'Malley, Sannuti, 1976] [Hoppensteadt, 1969] [Khalil, Kokotović, 1979] [Grujić, 1978] [O'Malley, 1974] [Dauphin-Tanguy, 1981-82]. Les auteurs cités ont proposés différentes méthodes pour la modélisation des systèmes continus à plusieurs échelles de temps. En discret, peu de travaux ont été effectués [Dauphin-Tanguy, Noël, Borne, 1982] et aucune modélisation générale et universelle n'apparaît dans la littérature relativement aux systèmes discrets à échelles de temps multiples. Nous en proposons une approche qui tient compte de la séparation des dynamiques, et qui laisse à l'utilisateur la liberté de choix pour la détermination de la dimension du système réduit suivant des critères estimés.

Cette étude est une extension de celle des chapitres précédents, ce qui nous permettra de mettre en évidence la similitude des résultats. Nous présentons une analyse de systèmes utilisant la propriété de décomposition temporelle et une approche rapide du problème de la commande quasi-optimale.

II.1 - Représentation des systèmes

II.1.1. - Systèmes à plusieurs échelles de temps

Par une généralisation de la propriété d'échelle double, nous pouvons dire qu'un système possède la propriété d'échelles de temps multiple  $m$  si on peut le mettre sous la forme bloc-diagonal suivante :

$$(IV.49) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^m \end{bmatrix}$$

telle que les propositions suivantes :

$$(IV.50) \quad \begin{cases} |\lambda_{\min}(A_{11})| & \gg & |\lambda_{\max}(A_{22})| \\ |\lambda_{\min}(A_{22})| & \gg & |\lambda_{\max}(A_{33})| \\ \vdots & & \vdots \\ |\lambda_{\min}(A_{m-1, m-1})| & \gg & |\lambda_{\max}(A_{mm})| \end{cases}$$

soient satisfaites.

Ces inégalités peuvent être exprimées pour un ensemble de conditions portant sur les normes de matrices, et ceci d'après la relation suivante :

$$|\lambda_{\max}(A)| \leq \|A\|$$

qui peut s'écrire aussi lorsque  $A^{-1}$  existe :

$$|\lambda_{\min}(A)|^{-1} \leq \|A^{-1}\|$$

Ainsi la condition (IV.50) devient :

$$(IV.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|A_{mm}\|^{-1} \gg \|A_{m-1, m-1}^{-1}\| \\ \|A_{m-1, m-1}\|^{-1} \gg \|A_{m-2, m-2}^{-1}\| \\ \vdots \\ \|A_{22}\|^{-1} \gg \|A_{11}^{-1}\| \end{array} \right.$$

II.1.2. - Systemes multi-echelle de temps singulierement perturbés



Considérons le système linéaire représenté par les équations suivantes :

$$(IV.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = A_o x_n + \sum_{j=1}^N A_{oj} \mu_j z_n^j \quad x(o) = x_o \\ z_{n+1}^i = A_{io} x_n + \sum_{j=1}^N A_{ij} \mu_j z_n^j \quad z^i(o) = z_o \end{array} \right.$$

avec  $x_n \in R^{q_1}$   $z_n^i \in R^{q_2^i}$

Ce système est modélisé sous forme singulierement perturbée à paramètres multiples.

Les paramètres  $\mu_1 \dots \mu_N$  appartenant à l'intervalle  $]0,1]$  sont ordonnés et sont les composantes d'un vecteur  $\mu \in R^N$ .

L'hypothèse :

$$\mu_{i+1} / \mu_i \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|\mu\| \longrightarrow 0$$

met en évidence N échelles de temps rapides et ordonne les variables  $z_n^i$  suivant les vitesses croissantes ( $z_n^{i+1}$  étant plus rapide que  $z_n^i$ ).

Comme dans le cas des systèmes continus multi-échelle de temps, [Kokotovič, O'Malley, Sannuti, 1976] [Hoppensteadt, 1969] [Grujič, 1978] [Sandel, Varaiya, Athans, Safonov, 1978], deux classes de systèmes discrets multi-échelle de temps existent.

a) Cas où les dynamiques sont proches

Il s'agit donc de systèmes modélisés sous forme (IV.52) pour lesquels les paramètres  $\mu_i$  sont de même ordre de grandeur.

Nous pouvons reformuler ces problèmes en problèmes à paramètre unique. Il faut alors exprimer les scalaires  $\mu_1 \dots \mu_N$  sous forme de multiples d'un paramètre unique  $\varepsilon$  sous la forme :

$$\mu_i = \beta_i \varepsilon$$

La principale limite de cette scalarisation est que les résultats dépendent des coefficients  $\beta_i$  qui sont généralement inconnus.

Ce système (IV.52) s'écrit alors sous la forme :

$$(IV.53) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_o x_n + \varepsilon \sum_{j=1}^N A_{oj} \beta_j z_n^j \\ z_{n+1}^i = A_{io} x_n + \varepsilon \sum_{j=1}^N A_{ij} \beta_j z_n^j \end{cases}$$

b) Cas où les dynamiques sont bien séparées

Dans ce cas, les coefficients  $\mu_i$  sont différents et il est impossible de se ramener à un problème à paramètre unique. Ainsi pour un exemple d'un système linéaire de la forme :

$$(IV.54) \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LM} & A_{LG} \\ A_{ML} & A_{MM} & A_{MG} \\ A_{GL} & A_{GM} & A_{GG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \mu_1 y_n \\ \mu_2 z_n \end{bmatrix}$$



Les états  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  correspondent respectivement aux parties à vitesse lente, vitesse moyenne, et grande vitesse du système.

Pour obtenir une approximation de vitesse lente, il suffit d'écrire  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = 0$ , ce qui conduit à :

$$(IV.55) \quad \begin{bmatrix} \underline{x}_{n+1} \\ \underline{y}_{n+1} \\ \underline{z}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{LL} \\ A_{ML} \\ A_{GL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_n \end{bmatrix}$$

De même qu'une approximation à vitesse moyenne est obtenue pour  $\mu_2 = 0$ , ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{n+1} \\ \underline{y}_{n+1} \\ \underline{z}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LM} \\ A_{ML} & A_{MM} \\ A_{GL} & A_{GM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_n \\ \mu_1 \underline{y}_n \end{bmatrix}$$

L'équation :

$$(IV.56) \quad \bar{z}_{n+1} = \left[ A_{GG} - (A_{GL} \ A_{GM}) \begin{bmatrix} A_{LL} & A_{LM} \\ A_{ML} & A_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{LG} \\ A_{MG} \end{bmatrix} \right] \mu_2 z_n$$

correspond à l'approximation à grande vitesse.

Lorsqu'il s'agit d'un système de type (IV.52) à N dynamiques différentes, une séparation itérative de différents sous systèmes est effectuée, de la même manière que pour un système à deux dynamiques, en commençant par la partie la plus lente avec  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 = 0$ .

## II.2. Présentation d'une modélisation pour les systèmes multi-échelle de temps

Lorsque les dynamiques ne sont pas nettement séparées, ou quand une liberté de choix est souhaitée pour la détermination de la dimension du système réduit suivant des critères estimés en temps réel, comme la précision ou la rapidité des calculs ou la stabilité du système lent réduit, la modélisation sous forme (IV.52) apparaît trop rigide.

Nous proposons une modélisation plus souple duale de celle employée pour les systèmes continus [Dauphin-Tanguy, 1983], sous la forme suivante :

$$(IV.57) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 x_n^1 \\ \mu_2 \mu_1 x_n^2 \\ \vdots \\ \mu_N \prod_{i=1}^N \mu_i x_n^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{N1} & \dots & B_{Nr} \end{bmatrix} u_n \\ \\ y_n = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & \dots & C_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 x_n^1 \\ \mu_2 \mu_1 x_n^2 \\ \vdots \\ \mu_N \prod_{i=1}^N \mu_i x_n^N \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

avec



$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in \mathbb{R}^r, \quad y_n \in \mathbb{R}^p, \quad x_n \in \mathbb{R}^{q_i} \\ A = \{A_{ij} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_j} / i, j = 1 \dots N\} \\ B = \{B_{ij} \in \mathbb{R}^{q_i \times 1} / i=1 \dots N, j=1 \dots r\} \\ C = \{C_{ij} \in \mathbb{R}^{1 \times q_j} / i=1 \dots p, j=1 \dots N\} \\ \mu_1 = 1 \quad \mu_i \in ]0, 1] \quad \forall i = 2 \dots N \end{array} \right.$$

(le coefficient  $\mu_1$  apparaît ici dans un but de symétrie des équations, mais il sera pris par la suite égal à 1).

Les coefficients  $\mu'_j = \prod_{i=1}^j \mu_i$  ne sont pas indépendants, contrairement aux cas précédents.

Chacun des paramètres  $\mu_i$  appartenant à l'intervalle  $]0, 1]$ ,

les scalaires  $\mu'_j$  sont donc tels que :

$$0 < \mu'_k \leq \mu'_j \quad \text{pour } k > j$$

Ce qui ordonne les variables rapides par vitesses croissantes.

Chacun des scalaires  $\mu_i$  ( $i = 2, \dots, N$ ) permet de comparer la vitesse des variables  $x_n^i$  avec celles des variables  $x_n^{i-1}$ .

Cette forme de modélisation particulière des systèmes multivitesse possède des avantages importants pour la réduction de dimensionnalité, et donne beaucoup plus de souplesse d'utilisation que la forme (IV.52).

Les deux approches précédemment décrites sont contenues dans la modélisation proposée :

- si les parties rapides ont des vitesses de même ordre de grandeur, la séparation partie lente/partie rapide se fait directement en une seule étape en posant  $\mu_2 = 0$ . Le système multiparamètre est étudié alors comme un système à paramètre unique. Cette modélisation peut être rattachée au cas où tous les paramètres  $\mu_i \forall i = 2, \dots, N$  sont égaux à  $\mu$ .

- si les vitesses sont toutes différentes, ce système est alors étudié comme un système à paramètres multiples et la "dégénérescence" se fait progressivement en procédant de la manière suivante en posant  $\mu_2 = 0$ , puis  $\mu_3 = 0 \dots$  ce qui revient à déterminer les systèmes dégénérés du plus lent au plus rapide.

- si dans les composantes rapides, une variable  $x_n^{N-k}$  impose sa vitesse, les  $x_n^i$  ( $i < N-k$ ) composent alors la partie lente et les  $x_n^j$  ( $j \geq N-k$ ) composent la partie rapide, il est alors possible d'effectuer la séparation de façon progressive en posant  $\mu_{N-k} = 0 \dots \mu_N = 0$  dans le système rapide dégénéré.

De la même manière que pour les systèmes à double échelle de temps, suivant le domaine étudié, la nature du découplage retenu par PS pour les parties rapides dégénérées, ou par (PS + H) pour les parties lentes seulement ou les parties lentes et les parties rapides ensembles.

### III - OPTIMISATION QUADRATIQUE DES SYSTEMES MULTIVITESSES

Pour un système à deux échelles de temps, la commande optimale quadratique utilisant la décomposition temporelle réduit la résolution du système en deux sous-systèmes d'ordre réduit. L'extension de cette méthode au système à N échelles de temps entraîne une réduction très appréciable.

Reprenons le système (IV.57) avec le critère correspondant J à minimiser s'écrivant sous la forme :

$$(IV.58) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n^T y_n + u_n^T R u_n$$

La commande optimale cherchée est :

$$(IV.59) \quad u_n^* = - \left[ R + B^T k B \right]^{-1} B^T k A X_n$$

où k est la matrice semi-définie positive de l'équation de Riccati :

$$(IV.60) \quad k = C^T C + A^T k A - A^T k B (R + B^T k B)^{-1} B k A$$

dans laquelle A , B , C , sont définis en mettant (IV.57) sous la forme :

$$\begin{cases} X_{n+1} = A X_n + B u_n \\ y_n = C X_n \end{cases}$$

La solution  $k$  existe et est unique si le triplet  $(A, B, C)$  est stabilisable, détectable.

Décomposition du problème de commande

En mettant en évidence les composantes d'échelle de temps différentes du système (IV.57), nous aboutissons à la détermination de  $N$  sous-systèmes réduits de la forme :

$$(IV.61) \quad \begin{cases} x_{n+1}^i = A_{11}^{i-1} x_n^i + B_{11}^{i-1} u_n^i \\ y_n^i = C_{11}^{i-1} x_n^i + D^{i-1} u_n^i \end{cases} \quad i = 1 \dots N$$

avec

$$\begin{cases} B_1^k = [B_{11}^k \dots B_{1r}^k] \\ C_1^k = \begin{bmatrix} C_{11}^k \\ \vdots \\ C_{p1}^k \end{bmatrix} \end{cases}$$

de même le critère  $J$  est décomposé en  $N$  critères représentant les différents sous-systèmes (IV.76).

$$(IV.62) \quad J_i = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n^{iT} y_n^i + u_n^{iT} R u_n^i \quad i = 1 \dots N$$

soit encore :

$$\begin{aligned} J_i = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{iT} C_{11}^{i-1T} C_{11}^{i-1} x_n^i + 2u_n^{iT} D^{i-1} C_{11}^{i-1} x_n^i \\ + u_n^{iT} (R + D^{i-1T} D^{i-1}) u_n^i \end{aligned}$$

Nous avons ainsi à traiter  $N$  problèmes indépendants d'ordre réduit séparément.

### CONCLUSION

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons proposé la détermination des commandes optimales utilisant la théorie des perturbations singulières.

La méthode de (PS + H) donne une bonne approximation quant à la partie lente du système, ceci apparaît d'une part dans le découplage et dans le calcul de trajectoires optimales.

La deuxième partie de ce chapitre est une généralisation au cas multivariable multi-vitesses des résultats énoncés dans les précédents chapitres.

La modélisation sous forme singulièrement perturbée à paramètres multiplicatifs s'avère très intéressante puisqu'elle donne plus de souplesse dans la détermination du système réduit.

La méthode de découplage (PS + H) s'adapte très bien aux systèmes multi-échelles de temps et fournit une grande précision sur chaque sous-système dégénéré.

CONCLUSION GÉNÉRALE

## C O N C L U S I O N

=====

La définition d'un polynôme annulateur matriciel dans une première partie nous a conduit à présenter un certain nombre de méthodes d'élimination et de mise en équation sur des systèmes partitionnés.

Dans ce sens, nous avons été conduit, en utilisant les propriétés des anneaux commutatifs de matrices carrées, à effectuer un partitionnement en blocs particuliers de la matrice caractéristique de l'évolution du processus. Ces blocs doivent être commutatifs, exceptés ceux de la dernière colonne.

La définition d'un déterminant matriciel a permis de définir des méthodes d'élimination mettant en oeuvre la notion de polynôme annulateur, et la notion de dépendance de matrices.

La méthode des perturbations singulières mise en oeuvre dans la seconde partie s'avère très attrayante pour la réduction des systèmes discrets de grande dimension modélisés sous forme d'état ou séquence, présentant la propriété de multi-échelles de temps. La modélisation de tels systèmes discrets singulièrement perturbés met en évidence une nette dualité avec le cas des systèmes continus. Cette dualité apparaît dans la modélisation, la forme des résultats, et dans la méthode de séparation des dynamiques, d'où une possibilité d'unification dans les études

des systèmes discrets et continus singulièrement perturbés.

La forme matricielle en flèche se révèle un mode de représentation très puissant pour la caractérisation de dynamiques, la réduction d'ordre, le découplage, l'analyse et la détermination de commande optimale.

L'utilisation de la transformation homographique, conjointement à la méthode des perturbations singulières, permet donc une représentation très précise du système découplé, puisqu'elle fournit pour la partie lente la même précision que celle obtenue sur la partie rapide par la méthode P.S., avec la conservation des conditions initiales ; ceci simplifie les calculs en vue de la détermination de la synthèse du processus.

La détermination des lois de commande quasi-optimales est ensuite développée sous deux approches. Dans la première, une matrice de Riccati perturbée avec une nouvelle formulation différente de celle utilisée habituellement en continu, conduit à une construction hiérarchisée de la commande optimale composite ; dans la seconde, la décomposition temporelle du système global par P.S. et par P.S. + H permet le calcul séparé des commandes quasi-optimales lentes et rapides.

BIBLIOGRAPHIE

A

AVRAMOVIC B., (1979)

"Subspace Iteration Approach to the Time Scale Separation"  
Proc. of I.E.E. conf. on Dec. and Control, pp. 684-687.

B

BARNETT S., SCRATON R.E. (1982)

"Location of Matrix Eigenvalues in the Complex Plane"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 966-967.

BAUER F.L., (1968)

"Fields of Values and Gershgorin Disks"  
Numerische Mathematik, n° 12, pp. 91-95.

BENNIS O., (1982)

"Analyse et commande des systèmes à deux échelles de temps. Version continue et discrète"  
Thèse de 3ème cycle, Toulouse, 1982.

BENREJEB M., (1980)

"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés"  
Thèse ès sciences physiques, Mai 1980, Lille.

BENREJEB M., BORNE P., LAURENT F., (1982)

"Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus"  
RAIRO Automatique, Vol. 16, n° 2, pp. 133-146.

BISHOP A.B., (1975)

"Introduction to Discrete Linear Control"  
N.Y. Academic Press.

BLANKENSHIP G., (1981)

"Singularly Perturbed Difference Equations in Optimal Control Problems"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 4, pp. 911-917.

BORNE P., (1976)

"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés"  
Doctorat ès sciences physiques, Mars 1976, Lille.

BORNE P., GENTINA J.-C., (1974)

*"Definition of a Matrical Transformation Permitting the Discretization of a set of Differential Equations"*

Proc. of IFIP Symposium, pp. 452-455.

BORNE P., GENTINA J.-C., LAURENT F., (1976)

*"Stability of Large Scale Non Linear Discrete Systems by Use of Vectorical Norme"*

Proc. of IFAC Symposium, pp. 187-194.

C CHAMBAT M., (1971)

*"Localisation des valeurs propres, régions de Gudkov"*

RAIRO, n° R-3, pp. 82-88.

CHENIN, (1980)

*"Outils et modèle mathématique pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal"*

Acte d'un séminaire, 1980, ENSTEG Grenoble.

CHOW J.H., KOKOTOVIC P.V., (1976)

*"A Decomposition of Near-optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, pp. 701-705.

CHOW J.H., KOKOTOVIC P.V., (1976)

*"Eigenvalue Placement in Two-time Scale Systems"*

Proc. of IFAC Symposium on Large Scale Systems, Udine, Italy, pp. 321-326.

COMSTOCK C., HSIAO G.C., (1976)

*"Singular Perturbation for Difference Equation"*

Rocky Mountain, J. MATHS 6., 561.

D DAUPHIN-TANGUY G. (1981)

*"Sur une nouvelle méthode d'approche de stabilité des processus continus non linéaires et des systèmes à perturbations singulières"*

Thèse de Doctorat d'Ingénieur, Lille.

DAUPHIN-TANGUY G., (1983)

*"Sur la représentation multi-modèles des systèmes singulièrement perturbés. Application à l'analyse et à la synthèse"*

Thèse de Doctorat ès sciences physiques, octobre 1983, n° 600, Lille.

DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P., (1982)

*"Présentation d'une méthode géométrique permettant de séparer les diverses dynamiques d'évolution d'un système de grande dimension"*

Congrès International AMSE, Paris.

DAUPHIN-TANGUY G., EL MOUDNI A., BORNE P., (1982)

*"Sur une estimation des régimes transitoires des processus à plusieurs échelles de temps"*

Congrès MECO 82, Tunis, Tunisie, pp. 151-155.

DAUPHIN-TANGUY G., LEBRUN M., BORNE P., (1983)

*"Interprétation de la notion de système réciproque par les bond-graphs pour les processus multi-échelles de temps"*

Congrès IASTED A.I. 83, Lille, pp. 137-144.

DAUPHIN-TANGUY G., NOEL M., BORNE P., (1982)

*"Présentation d'algorithme de séparation des échelles de temps d'un processus discret"*

Congrès MECO, Tunis 82, pp. 161-165.

DECOSTER M., VAN GAUWENBERGHE A.R., (1976)

*"A Comparative Study of Different Reduction Methods (1)"*

Journal A., Vol. 17, n° 12, April 1976, pp. 68-74.

DECOSTER M., VAN GAUWENBERTHE A.R., (1976)

*"A Comparative Study of Different Reduction Methods (2)"*

Journal A., Vol. 17, n° 3, July 1976, pp. 125-134.

DEIF A.S., (1982)

*"Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers"*

Abacus Press, Halsted Press, England.

DENNIS J.E., TRAUB J.F., WEBER R.P., (1976)

*"The Algebraic Theory of Matrix Polynomials"*

SIAM J. NUMBER ANAL., Vol. 13, n° 6, pp. 831-845.

E

EL MOUDNI A.(1981)

*"Introduction d'un nouveau outil mathématique par la description des systèmes discrets non linéaires de grande dimension"*

Thèse de 3ème cycle, Mars 1981, Lille.

EL MOUDNI A. (1983)

*"Sur une représentation minimale des variables mesurables d'un système discret"*

Acte Congrès IASTED A.I. 83, Lille 1983, pp.179-184.

EL MOUDNI A., DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P. (1984)

*"Sur une nouvelle méthode de séparation des dynamiques d'un système discret à double échelles de temps"*

Acte du congrès A.M.S. Nice, pp. 92-97.

EL MOUDNI A., DAUPHIN-TANGUY G., BORNE P., (1981)

*"Sur une représentation minimale de l'évolution des variables mesurables d'un système discret non linéaire. Application à l'étude de stabilité"*

Proc. A.M.S. 1981, Lyon,

EL MOUDNI A., RICHARD J.P., BORNE P.(1981)

*"On a New Vectorial Description of Discrete Non Linear Multivariable Lur'e Posnikov Type Systems"*

Actes congrès SMD 81, Le Caire, 1981.

EL MOUDNI A., RICHARD J.P., DAUPHIN-TANGUY G., (1984)

*"On the Use of Matric Polynomials in the Description of Linear Discrete Systems"*

Revue Zentralblatt für Mathematik Springer Verlag, 1984.

EL MOUDNI A., RICHARD J.P., DAUHPIN-TANGUY G., (1982)

*"On the Use of Matric Polynomials in the Description of Non Linear Discrete System"*

2nd World Conf. on Math. at the Service of Man, July 1982, Cannaries.

F FERNANDO K.V., NICHOLSON H., (1983)

*"Singular Perturbational Approximations for Discrete-time Balanced Systems"*

IEEE, Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-28, n° 2, 1983.

FERNANDO K.V., NICHOLSON H., (1982)

*"Singular Perturbational Model Reduction in the Frequency Domain"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 969-970.

FERNANDO K.V., NICHOLSON H., (1982)

*"Singular Perturbational Model Reduction of Balanced Systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 2, pp. 466-468.

FOSSARD A.J., (1972)

*"Commande des systèmes multidimensionnels"*

Techniques de l'Automatisme, Dunod, Paris.

FOSSARD A.J., (1982)

*"Modélisation et analyse des systèmes à échelles de temps multiples"*

Cours ENSAE, Toulouse.

FOSSARD A.J., BERTHELOT M., MAGNI J.F., (1983)

*"On Coherency-based Decomposition Algorithms"*

Automatics, Vol. 19, n° 3, pp. 247-253.

FOSSARD A.J., MAGNI J.F., (1980)

*"A Frequential Analysis of Singularly Perturbed Systems with State or Output Control"*

Large Scale Systems, n° 1, pp. 223-228.

FOSSARD A.J., MAGNI J.F., (1982)

*"Modélisation, commande et applications des systèmes à échelles de temps multiples"*

RAIRO Automatique / Syst. Anal. and Cont., Vol. 16, n°1, pp. 5-23.

G

GANTMACHER F.R., (1966)

*"Théorie des matrices"*

Tomes 1 et 2, Dunod, Paris.

GENTINA J.C., (1976)

*"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes non linéaires de grande dimension"*

Thèse de Doctorat ès sciences physiques, Lille.

GRUJIĆ Lj.T., (1981)

*"Lyapunov-like Solutions for Stability Problems of the Most General Stationary Lur'e Posnikov Systems"*

Int. J. Syst. Sc., Vol. 12, n° 7, pp. 813-833

GRUJIĆ Lj.T., (1975)

*"Novel Development of Lyapunov Stability of Motion"*

Int. J. of Control, vol. 22, n° 4, pp. 525-549.

GRUJIĆ Lj.T., (1977)

*"Quasi-singular Perturbations of Time Discrete Systems"*

Proc. of JACC, pp. 857-862.

GRUJIĆ Lj.T., (1979)

*"Singular Perturbations and Large Scale Systems"*

Int. J. Cont., Vol. 29, n° 1, pp. 159-169.

GRUJIĆ Lj.T., (1979)

*"Singular Perturbations, Large Scale Systems and Asymptotic Stability of Invariant Sets"*

Int. J. Syst. Sc., Vol. 10, n° 12, pp. 1323-1341.

GRUJIĆ Lj.T., (1978)

"Singular Perturbations, Uniform Asymptotic Stability and Large Scale Systems"

Proc. JACC, Philadelphia, pp. 339-347.

GRUJIĆ Lj.T., (1981)

"Uniform Asymptotic Stability of Non Linear Singularly Perturbed General and Large Scale Systems"

Int. J. Cont., vol. 33, n° 3, pp. 481-504.

GUARDABASSI G., (1982)

"Asymptotic Analysis of Two-time-steps Discrete Time Systems"

IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

GUTMAN S., JURY E.I., (1981)

"A General Theory for Matrix Root-clustering in Subregions of the Complex Plane"

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 4, pp. 853-863.

H

HISHAM A., NASSER M., MAGDI S., (1985)

"Discrete Regulator with Time Scale Separation"

IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-30, n° 3, 1985.

HOPPENSTEADT F., (1969)

"On Systems of Ordinary Differential Equations with Several Parameters multiplying the derivatives"

J. of Differential Equation, n° 5, pp. 106-116.

HOPPENSTEADT F. , MIRANKER W.L., (1977)

"Multitime Method for Systems of Difference Equation"

Studies Appl. Math. 56-276.

HSIAO G.C., JORDAN K.F., (1979)

"In Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems"

Edited by P.W. Hemker and J.H. Miller (New-York : Academic Press).

HUTTON M.F., FRIEDLAND B., (1975)

"Routh Approximations for Reducing Order of Linear, Time-invariant Systems"

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, n° 3, pp. 329-337.

K

KAILASA RAO A., NAIDU D.S., (1981)

*"Singular Perturbation Method Applied to Theopen-loop Discrete Optimal Control Problem"*

Optimal Control Application and Methods, Vol. 3, pp. 131-137.

KAILASA RAO A., NAIDU D.S., (1981)

*"Singularly Perturbed Boundary Value Problems in Discrete Systems"*

Int. J. Control, 1981, Vol. 30, n° 6, pp. 1163-1173.

KANO H., (1983)

*"Periodic Solutions of Matrix Riccati Equations in Discrete Time-invariant Systems"*

Int. J. Contr., Vol. 38, n° 1, pp. 27-45.

KANDO H., IWAZUMI T., (1983)

*"Initial Value Problems of Singularly Perturbed Discrete Systems via Time Scale Decomposition"*

Int. J. Systems Sci., 1983, Vol. 14, n° 5, pp. 555-574.

KANDO H., IWAZUMI T., (1983)

*"Sub-optimal Control of Discrete Regulator Problems via Time Scale Decomposition"*

Int. J. Control, n° 37, n° 6, pp. 1323-1347

KHALIL H.K., KOKOTOVIC P.V., (1979)

*"D-stability and Multi-parameter Singular Perturbation"*

SIAM J. Cont. and Optim., Vol. 17, n° 1, pp. 56-65

KOKOTOVIC P.V., (1975)

*"A Riccati Equation for Bloch-diagonalization of Ill-conditioned Systems"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 812-814.

KOKOTOVIC P.V., AVRAMOVIC J.B., CHOW J.H., WINKELMAN, (1982)

*"Coherency Based Decomposition and Agregation"*

Automatica 17-47.

KOKOTOVIC P.V., HADDAD A.H., (1975)

*"Controllability and Time-optimal Control of Systems with Slow and Fast Modes"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 111-113.

KOKOTOVIC P.V., HADDAD A.H., (1975)

*"Singular Perturbations of a Class of Time Optimal Controls"*

IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 163-164

KOKOTOVIC P.V., O'MALLEY R.E., SANNUTI P., (1976)

*"Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory. An Overview"*

Automatica, Vol. 12, pp. 123-132.

L LARMINAT Ph., THOMAS Y., (1979)

*"Automatique des Systèmes linéaires" Tome 3 Commande*

Flamarion Sciences

LAURENT F., EL MOUDNI A., RICHARD J.P., BORNE P., (1979)

*"On Initial Stability Condition for Non-linear Large Scale Systems"*

4ème Congrès info. Automatica, Madrid, 1979.

LAURENT F., ROMELOT M., (1975)

*"Sur le régime dynamique d'un système échantillonné non linéaire décrit par un modèle redondant"*

CRAS, Paris, Tome 280, Série A, pp. 1033-1035.

LIMBEER D.J.N., (1982)

*"The Application of Generalized Diagonal Dominance to Linear System Stability Theory"*

Int. J. Cont., Vol. 36, n° 2, pp. 185-212.

LITKOUHI B., KHALIL H., (1984)

*"Infinite Time Regulators for Singularly Perturbed Difference Equation"*

Int. J. Control, 1984, Vol. 39, n° 3, pp. 587-598.

LONGCHAMP R., (1983)

*"Singular Perturbation Analysis of a Receding Horizon Controller"*

Automatica, Vol. 19, n° 3, pp. 303-308.

LYAPUNOV A.M., (1892)

*"Problème général de la stabilité de mouvement"*

Article original (en russe) dans comm. Soc. Math. Kharkow ; Traduit en français en 1907 (Annales Fac. Sc. Toulouse 9, pp. 203-475) ; Republié en anglais en 1949 (Vol. 17, Annales Math. Studies, Princeton).

M

MAGNI J.F., (1981)

*"Analyse et commande des systèmes à plusieurs échelles de temps"*

Thes. D.I. / ENSAE Toulouse

MAHMOUD M.S., (1982)

*"Order Reduction and Control of Discrete Systems"*

IEEE Proc., Vol. 129, n° 4, Juillet 1982.

MAHMOUD M.S., (1982)

*"Structural Properties of Discrete Systems with Slow and Fast Modes"*

Large Scale Systems 3, pp. 227-236.

MAHMOUD M.S., CHEN Y., SINGH M.G., (1980)

*"Discrete Two-time Scale Systems"*

UMIST Control Systems Centre Report, 497, 1980.

MAHMOUD M.S., CHEN Y., SINGH M.B., (1981)

*"On the Eigenvalue Assignment in Discrete Systems with Fast and Slow Modes"*

UMIST Control Systems Centre Report, 499.

N NAIDU D.S., KAILASA RAO A., (1982)  
*"Singular Perturbation Method for a Class of Initial- and Boundary-value Problems in Discrete Systems"*  
Int. J. Cont., Vol. 36, n° 1, pp. 77-94.

NAIDU D.S., KAILASA RAO A., (1981)  
*"Singular Perturbation Method for Initial-value Problems with Inputs in Discrete Control Systems"*  
Int. J. Control, Vol. 33, n° 5, pp. 953-965.

O O'MALLEY R.E., (1974)  
*"Introduction to Singular Perturbations"*  
Academic Press New-York.

O'REILLY J., (1982)  
*"Recent Progress in Singular Perturbation and Two-time Scale Methods of Control"*  
IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie.

P PHILLIPS R.G., (1980)  
*"Reduced Order Modeling and Control of Two-time Scale Discrete Systems"*  
Int. J. Control, n° 31, p. 765.

PHILLIPS R.G., (1983)  
*"The Equivalence of Time Scale Decomposition Technique Used in the Analysis and Design of Linear Systems"*  
Int. J. Cont., Vol. 37, n° 6, pp. 1239-1257.

R

RAJAGOPALAN P.R., NAIDU P.S., (1980)

"A Singular Perturbation Method for Discrete Control Systems"  
Int. J. Control, Vol. 32, n° 5, pp. 925-936

RAO A.K., HSIAO G.C., (1976)

"Singular Perturbation for Difference Equation"  
Rocky Mountain J. Maths 6., p. 561.

REINHARDT H.J., (1980)

"Singular Perturbation of Difference Methods for Linear Ordinary  
Differential Equation"  
Applicable, Analysis 10. 53.

RICHARD J.P., EL MOUDNI A., BORNE P., (1981)

"On the Determination of a Linear Model for a Locally Stable  
Non Linear Process"  
Congrès IASTED DAVOS.

S

SAKSENA V.R., O'REILLY J., KOKOTOVIC P.V., (1984)

"Singular Perturbations and Time Scale Methods in Control Theory :  
Servery 1976-1983  
Automatica, Vol. 20, n° 3, pp. 273-293, 1984.

SANDEL N.R., VARAIYA P., ATHANS M., SAFONOV M., (1978)

"Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale  
Systems"  
IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. AC-23, n° 2, pp. 108-128

SANNUTI P., (1974)

"A Note on Obtaining Reduced Order Optimal Control Problems by Singular  
Perturbations"  
IEEE Trans. on Aut. Control, Vol. AC-19, pp. 256-257.

SÎLJAK D.P., (1981)

*"Complex Dynamic Systems : Stability, Control and Reliability"*

*Lecture notes on Complex dynamic systems.*

University of Santa Clara, U.S.A., 1981.

SYRCOS G.P., SANNUTI P., (1983)

*"Singular Perturbation Modelling of Continuous and Discrete Physical Systems"*

Int. J. Control, Vol. 37, n° 5, pp. 1007-1022.

T TZAFESTAS S.G., PIMENIDES T.G., (1982)

*"Exact Model-matching Control of Three-dimensional Systems Using State and Output Feed Back"*

Int. J. Systems Sci., 1982, Vol. 13, n° 11, pp. 1171-1187.

V VIDAL P., (1968)

*"Systèmes échantillonnés non linéaires"*

Gordon et Breach

