N° d'ordre 1283

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR 3ème CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

par

Raphaël K. FREITAS

K-THEORIE REELLE DES VARIETES DE STIEFEL SANS TORSION

Membres du Jury :

Président : L. GRUSON (Université de Lille I)
Directeur de Recherche et Rapporteur : N. MAHAMMED (Université de Lille I)
Examinateurs : R. GERGONDEY (Université de Lille I)
S.G. HOGGAR (Université de Glasgow)
Membre invité : E. LEHMAN (Université de Caen)

Soutenue le 26 juin 1985

"A ma famille

et

à tous mes amis"

Je voudrais remercier vivement le Professeur L. GRUSON pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Monsieur N. MAHAMMED m'a suggéré ce travail qu'il a suivi avec beaucoup d'attention et ses encouragements et suggestions l'ont rendu possible ; qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

La présence dans ce jury du Professeur S.G. HOGGAR de l'Université de Glasgow (Grande Bretagne) m'honore beaucoup ; je l'en remercie sincèrement ainsi que Monsieur R. GERGONDEY d'avoir, tous deux, accepté d'examiner ce travail.

Le Professeur E. LEHMAN de l'Université de Caen me fait l'honneur de pariticiper à ce jury ; je l'en remercie beaucoup et à travers lui l'Université de Caen qui, à plusieurs reprises m'a offert ses facilités pendant l'élaboration de ce travail.

Enfin, Madame C. EVRARD a assuré la dactylographie de ce texte avec soin et une infinie patience ; je l'en remercie sincèrement ainsi que le service de l'imprimerie de l'Université de Lille I.

TABLE DES MATIERES

* *

*

INTRODUCTION

Dans ce travail, on s'intéresse à la K théorie réelle de certains espaces homogènes sans torsion (c'est-à-dire dont la cohomologie entière est libre) et principalement à celle des variétés de Stiefel complexes $W_{n,k}$ et des variétés de Stiefel quaternioniques $X_{n,k}$.

Cette hypothèse de non torsion permet d'avoir des propriétés intéressantes pour la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH qui sera ici l'outil essentiel dans la détermination des groupes $\widetilde{KO}^i$.

Dans le cas des variétés $W_{n,k}$ l'analyse des opérations de Steenrod auxquelles certaines différentielles de la suite sepctrale sont reliées, permettra d'exhiber des groupes $\widetilde{KO}^i(W_{n,k})$ libres lorsque n et k sont de parité contraire, résolvant ainsi, dans ces cas, le problème classique du passage du gradué associé à la filtration d'un groupe au groupe lui-même.

Dans le cas des variétés quaternoiniques $X_{n,k}$ l'approche est différente. On utilise essentiellement un travail de SEYMOUR sur les groupes de Lie et leurs espaces homogènes dans le cadre plus général de la KR-théorie définie par ATIYAH dans [A1]. Un des intérêts du travail de SEYMOUR est qu'il relie la K-théorie réelle d'un groupe de Lie compact simplement connexe et semi-simple aux types des représentations de base engendrant l'anneau $R(G)$ des représentations (virtuelles) de G. On en déduit la K-théorie réelle des groupes symplectiques et de manière analogue celle des variétés de Stiefel quaternioniques.

Enfin, on étudie la K-théorie réelle de l'espace homogène $G_{2/T}$ où G_2 est l'un des groupes de Lie exceptionnels et T un tore maximal de G_2.

N.B. Toutes les tensorisations sont de $\mathbb{Z}$-tensorisations.

CHAPITRE O

SUITE EXACTE DE BOTT ET SUITE SPECTRALE D'ATIYAH-HIRZEBRUCH

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines propriétés de base de la K-théorie (réelle ou complexe) des C.W. complexes finis et nous établissons quelques résultats préliminaires dont l'intérêt apparaîtra tout au long de ce travail.

0.1. *L'anneau* $\tilde{K}^*(S^o)$.

On a $\tilde{K}^{-1}(S^o) = 0$ et $\tilde{K}^{-2}(S^o) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par la classe stable $[h]-1$ du fibré en droite de Hopf au-dessus de $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ et de plus la multiplication par $[h]-1$ induit l'isomorphisme $K^*(X) \to K^{*-2}(X)$ de la périodicité de Bott en K-théorie complexe. (voir [A]).

0.2. *L'anneau* $KO^*(S^o)$.

Compte tenu de la périodicité 8 en K-théorie réelle, l'anneau $\widetilde{KO}^*(S^o)$ des coefficients possède une structure d'algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée sur $\widetilde{KO}^o(S^o) \simeq K^o(+) \simeq \mathbb{Z}$; (+ désigne un espace réduit à un point). On a :

$$\widetilde{KO}^*(S^o) = KO^*(+) = \mathbb{Z}[\eta_1,\eta_4]_{/I}$$

où $\eta_i \in KO^{-i}(+)$ et I est l'idéal des relations

$$2\eta_1 = \eta_1^3 = \eta_1\eta_4 = 0 \quad ; \quad \eta_4^2 = 4.$$

(Voir [BO],[SE]).

Il en résulte le tableau suivant des coefficients :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\widetilde{KO}^{-i}(S^0)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0

0.3. Suite exacte de Bott.

Pour tout C.W. complexe fini Y, nous disposons d'une suite exacte longue due à Bott :

$$\ldots \to \widetilde{KO}^i(Y) \xrightarrow{c} \widetilde{K}^i(Y) \xrightarrow{r\beta^{-1}} \widetilde{KO}^{i+2}(Y) \xrightarrow{d} KO^{i+1}(Y) \to \ldots$$

où c et r sont respectivement la complexification et la réélification, β l'isomorphisme de la périodicité de Bott en K-théorie complexe et d une certaine opération de cohomologie.

Si t désigne la conjugaison induite sur les groupes $\widetilde{K}^i(Y)$ par l'involution qui a tout fibré complexe E sur Y associe le fibré conjugué $\bar{E}$, alors complexification et réélification vérifient

(0.4)
$$rc(x) = 2x \qquad \text{pour} \quad x \in \widetilde{KO}^i(Y)$$
$$cr(y) = y + t(y) \ \text{pour tout} \quad y \in \widetilde{K}^i(Y)$$

Il résulte immédiatement de la relation $rc = 2$ que, si $\widetilde{KO}^i(Y)$ est libre la complexification $c : \widetilde{KO}^i(Y) \to \widetilde{K}^i(Y)$ est un monomorphisme d'anneau. La même relation permet de démontrer la

Proposition 0.5. Pour tout C.W. complexe fini Y pour lequel $K^*(Y)$ est sans torsion, le sous-module de torsion de $KO^*(Y)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2^s$ $(s \geqslant 0)$.

Démonstration : Soit $x \in KO^i(Y)$ (pour un certain i) un élément d'ordre m avec m strictement supérieur à 2. Alors on a : d'une part $mx = 0$ et $2x = rc(x) \neq 0$ et d'autre part, puisque $K^*(Y)$

est supposé **sans** torsion $c(x) = 0$ et par conséquent $rc(x) = 0$. D'où une contradiction.

En outre, avec les mêmes hypothèses sur Y que dans la proposition précédente, on obtient :

$$\mathrm{Ker}\{\widetilde{KO}^i(Y) \xrightarrow{c} \widetilde{K}^i(Y)\} = \mathrm{Im}\{\widetilde{KO}^{i+1}(Y) \xrightarrow{d} \widetilde{KO}^i(Y)\} \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\widetilde{KO}^i(Y),\mathbb{Z}_2).$$

0.6. *La suite spectrale d'ATIYAH HIRZEBRUCH.*

Tous les espaces considérés dans ce travail, ayant une structure de C.W. complexe fini, nous utilisons abondamment la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH, soit, en posant $\widetilde{KF}(-) = \widetilde{KO}(-)$ ou $\widetilde{K}(-)$,

$$E_2^{p,q}(Y) = \widetilde{H}^p(Y\ ;\ \widetilde{KF}^q(S^o)) \Rightarrow \widetilde{KF}^{p+q}(Y)$$

associée à la filtration de $\widetilde{KF}^*(Y)$ définie par

$$F^p\ \widetilde{KF}^\bullet(Y) = \mathrm{Ker}(\widetilde{KF}^\bullet(Y) \xrightarrow{i^!_{p-1}} \widetilde{KF}^\bullet(Y_{p-1}))$$

où $i^!_{p-1}$ désigne l'homomorphisme induit en $\widetilde{KF}$-théorie par l'inclusion i_{p-1} dans Y de son (p-1)ième squelette Y_{p-1}. Plus précisément on a :

$$E_\infty^{p,q}(Y) = \frac{F^p\ \widetilde{KF}^{p+q}(Y)}{F^{p+1}\ \widetilde{KF}^{p+q}(Y)}\ .$$

Dans cette suite spectrale que nous noterons désormais par s.s. A-H $\widetilde{KF}(-)$, les différentielles sont des dérivations et des opérations de cohomologie. En particulier dans s.s. A-H $\widetilde{KO}(Y)$, il est connu (voir [A-H]) que les différentielles

$$d_2^{p,8\ell-1} : E_2^{p,8\ell-1}(Y) = H^p(Y ; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{p+2}(Y ; \mathbb{Z}_2) = E_2^{p+2,8\ell-2}(Y)$$

sont les carrés de Steenrod Sq^2, et

$$d_2^{p',8\ell'} : E_2^{p',8\ell'}(Y) = H^{p'}(Y ; \mathbb{Z}) \to H^{p'+2}(Y ; \mathbb{Z}_2) = E_2^{p'+2,8\ell'-1}(Y)$$

les composés $Sq^2 \circ \rho$, où $\rho : H^p(Y ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^p(Y ; \mathbb{Z}_2)$ est la réduction modulo 2.

Remarquons que si $H^*(Y ; \mathbb{Z})$ est sans torsion, ρ est un épimorphisme en tout degré.

De ce qui précède, nous déduisons deux résultats relatifs aux C.W. complexes sans torsion.

Lemme 0.7. Soit Y un C.W. complexe fini, sans torsion. Alors dans s.s. A-H $\widetilde{KO}(Y)$ les différentielles $d_s^{p,q}$ sont nulles pour tout p et tout $s \geqslant 2$ dès que $q \equiv -2, -4 \bmod (8)$.

Démonstration : Considérons la suite exacte de Bott lorsque l'espace est $S^o = \{-1,+1\}$, soit :

$$\widetilde{KO}^{q-2}(S^o) \xrightarrow{c} \widetilde{K}^{q-2}(S^o) \xrightarrow{r\,\beta^{-1}} \widetilde{KO}^{q}(S^o) \xrightarrow{d} \widetilde{KO}^{q-1}(S^o) \to \cdots$$

On a : $\widetilde{KO}^{q-1}(S^o) = 0$ si $q \equiv -2, -4 \bmod(8)$. Il en résulte que la réélification $r : \widetilde{K}^q(S^o) \to \widetilde{KO}^q(S^o)$ est un épimorphisme de groupe pour ces valeurs de q.

Soient maintenant $\{E_s ; d_s\}$, $\{\grave{E}_s ; \grave{d}_s\}$ les suites spectrales d'ATIYAH-HIRZEBRUCH associées à Y, respectivement en K-théorie réelle et complexe ; on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
{}^{\backprime}E_s^{p-s,q+s-1} \arrow[r, "{}^{\backprime}d_s^{p-s,q+s-1}"] \arrow[d, "r_s^{p-s,q+s-1}"'] & {}^{\backprime}E_s^{p,q} \arrow[r, "{}^{\backprime}d_s^{p,q}"] \arrow[d, "r_s^{p,q}"'] & {}^{\backprime}E_s^{p+s,q+1-s} \arrow[d, "r_s^{p+s,q+1-s}"] \\
E_s^{p-s,q+s-1} \arrow[r, "d_s^{p-s,q+s-1}"] & E_s^{p,q} \arrow[r, "d_s^{p,q}"] & E_s^{p+s,q+1-s}
\end{tikzcd}$$

où $r_s^{*,*}$ désigne l'homomorphisme de suites spectrales induit par la réélification entre $\{{}^{\backprime}E_s, {}^{\backprime}d_s\}$ et $\{E_s, d_s\}$. Comme Y est sans torsion, s.s. A-H $\widetilde{KO}(Y)$ dégénère (i.e. ${}^{\backprime}d_s = 0$ pour tout $s \geqslant 2$). Du fait de la commutativité du diagramme, pour démontrer la nullité des différentielles $d_s^{p,q}$ sous les hypothèses du lemme, il suffit de montrer que $r_s^{p,q}$ est surjective sous ces mêmes hypothèses.

On procède par récurrence sur s.

Notons d'abord que, puisque Y est sans torsion, on a :

$$\begin{aligned}
{}^{\backprime}E_2^{p,q}(Y) &= \widetilde{H}^p(Y\ ;\ \widetilde{K}^q(S^o)) = \widetilde{H}^p(Y\ ;\ \mathbb{Z}) \otimes \widetilde{K}^q(S^o) \\
E_2^{p,q}(Y) &= \widetilde{H}^p(Y\ ;\ \widetilde{KO}^q(S^o)) = \widetilde{H}^p(Y\ ;\ \mathbb{Z}) \otimes \widetilde{KO}^q(S^o)
\end{aligned}$$

par application du théorème des coefficients universels.

Si $s = 2$, $r_2^{p,q}$ est un épimorphisme car c'est la $\mathbb{Z}$-tensorisation de l'épimorphisme $r : \widetilde{K}^q(S^o) \to \widetilde{KO}^q(S^o)$ par le $\mathbb{Z}$-module $H^p(Y\ ;\ \mathbb{Z})$.

Supposons maintenant que $r_s^{p,q}$ est un épimorphisme pour $s \geqslant 2$. Nous avons :

$${}^{\backprime}E_{s+1}^{p,q} = {}^{\backprime}E_{s+1}^{p,q} \quad \text{du fait de la nullité des } {}^{\backprime}d_s^{p,q} \text{ et}$$

$$E_{s+1}^{p,q} \text{ est un quotient de } E_s^{p,q}$$

(car $d_s^{p,q} = 0$ comme conséquence directe de l'hypothèse de récurrence). Il s'ensuit que l'homomorphisme $r_{s+1}^{p,q} : {}^{\backprime}E_{s+1}^{p,q} \longrightarrow E_{s+1}^{p,q}$ est la composée de l'épimorphisme $r_s^{p,q}$ et de la projection de $E_s^{p,q}$ sur $E_{s+1}^{p,q}$. $r_{s+1}^{p,q}$ est par conséquent un épimorphisme, ce qui termine la démonstration du lemme.

Remarque. Le lemme (0.7) généralise le lemme (2.4) de [HOG] où l'auteur s'est restreint aux espaces admettant une structure cellulaire avec des cellules uniquement en dimension paire.

Proposition 0.8. Soit Y un C.W. complexe fini, sans torsion. Alors en tant que groupe abélien, on a :

$$\tilde{KO}^{-n}(Y) \otimes Q = \bigoplus_{\substack{p \\ p+n \equiv 0,4 \bmod(8)}} \tilde{H}^p(Y ; Z) \otimes Q$$

Démonstration : Notons d'abord qu'il résulte facilement d'un problème d'extension de groupe que $\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} \tilde{KO}^{-n}(Y) = \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} \operatorname{Gr} \tilde{KO}^{-n}(Y)$.

Comme par ailleurs, Y étant sans torsion la partie libre de $E_2(Y) = \bigoplus_p E_2^{p,-(n+p)}(Y)$ est isomorphe à $\bigoplus_{\substack{p \\ p+n \equiv 0,4 \bmod(8)}} \tilde{H}^p(Y ; \mathbb{Z})$, la proposition (08) équivaut à montrer que $\operatorname{Gr} \tilde{KO}^{-n}(Y) \otimes Q \simeq E_2(Y) \otimes Q$. Il suffit alors de prouver que pour tout $p \geqslant 1$ et tel que $p+n \equiv 0,4 \bmod(8)$ les différentielles $d_s^{p-s,s-1-(p+n)}$ de s.s. A-H $\tilde{KO}^{-n}(Y)$ sont triviales.

A cet effet, on utilise la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH associée à Y, en K-théorie complexe, soit $\{`E_s(Y), `d_s\}$. On sait que, Y étant sans torsion, s.s. A-H $\tilde{K}(Y)$ dégénère (i.e. $`d_s = 0$ pour tout $s \geqslant 2$).

Par ailleurs la complexification $c : \tilde{KO}^*(S^o) \to \tilde{K}(S^o)$ induit un homomorphisme de suites spectrales $c_s^{*,*} : E_s^{*,*}(Y) \longrightarrow `E_s^{*,*}(Y)$ donnant lieu au diagramme commutatif (D) suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{}'E_s^{p-s,s-1-(n+p)}(Y) \arrow[r, "{}'d_s^{p-s,s-1-(n+p)}"] & {}'E_s^{p,-(n+p)}(Y) \\
E_s^{p-s,s-1-(n+p)}(Y) \arrow[r, "d_s^{p-s,s-1-(n+p)}"] \arrow[u, "c_s^{p-s,s-1-(n+p)}"] & E_s^{p,-(n+p)}(Y) \arrow[u, "c_s^{p,-(n+p)}"']
\end{tikzcd} \qquad (D)$$

Montrons que pour tout $s \geqslant 2$, $c_s^{p,-(n+p)}$ est un monomorphisme. La proposition en résultera à cause de la commutativité de (D) et de la dégénérescence de s.s. A-H K(Y). On procède par récurrence sur s. Pour $s = 2$, considérons la suite exacte longue de Bott, écrite pour S^o, soit :

$$\ldots \to \tilde{KO}^{i+1}(S^o) \xrightarrow{d} \tilde{KO}^{i}(S^o) \xrightarrow{c} \tilde{K}^{i}(S^o) \xrightarrow{r\,\beta^{-1}} \tilde{KO}^{i+2}(S^o) \to \ldots$$

Comme $\tilde{KO}^1(S^o) \simeq \tilde{KO}^2(S^o) \simeq \tilde{KO}^5(S^o) \simeq 0$, la complexification $c : \tilde{KO}^i(S^o) \longrightarrow \tilde{K}^i(S^o)$ est un isomorphisme si $i \equiv 0 \bmod(8)$ et un monomorphisme si $i \equiv 4 \bmod(8)$. Par suite si $p+n \equiv 0,4, \bmod(8)$, $c_2^{p,-(p+n)}$ est un monomorphisme, puisque c'est la $\mathbb{Z}$-tensorisation du monomorphisme $\tilde{KO}^{-(p+n)}(S^o) \xrightarrow{c} \tilde{K}^{-(p+n)}(S^o)$ par le $\mathbb{Z}$-module libre $\tilde{H}^p(X\ ;\ Z)$.

Supposons que $c_s^{p,-(p+n)}$ est un monomorphisme pour $s \geqslant 2$.

Alors $d_s^{p-s,s-1-(p+n)} = 0$ et $E_{s+1}^{p,-(p+n)}$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de $E_s^{p,-(p+n)}$.

De plus, ${}'E_{s+1}^{p,-(p+n)} = {}'E_s^{p,-(p+n)}$. Il en résulte que :

$$c_{s+1}^{p,-(p+n)} : E_s^{p,-(p+n)} \supset E_{s+1}^{p,-(p+n)} \longrightarrow {}'E_{s+1}^{p,-(p+n)} = {}'E_s^{p,-(p+n)}$$

est une restriction de $c_s^{p,-(p+n)}$ et par suite est injectif puisque $c_s^{p,-(p+n)}$ l'est.

Corollaire 0.9. La torsion dans $\mathrm{Gr}\ \widetilde{KO}^{-n}(Y)$ ne peut provenir que de la torsion dans $E_2(Y)$.

Enfin, nous utiliserons la

Proposition 0.10. (voir [R]). Soit Y un C.W. complexe fini, sans torsion et soit $z \in \widetilde{KO}^{p-1}(Y)$ un élément de torsion. Alors si $z \in F^{p+1}\ \widetilde{KO}^{p-1}(Y)$, il existe $y \in F^{p+1}\ \widetilde{KO}^{p}(Y)$ tel que $d(y) = z$ où d est l'opération de cohomologie dans la suite exacte de Bott.

CHAPITRE I

SUR LA K-THEORIE REELLE DES VARIETES DE STIEFEL COMPLEXES

1. *Introduction.*

Soit $W = W_{n,k}$ $(k < n)$ la variété de Stiefel des k-repères orthonormés dans l'espace euclidien $\mathbb{C}^n$. Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.1.

a) si n est impair et k pair, seuls les groupes $\widetilde{KO}^{-1}(W)$ et $\widetilde{KO}^{-2}(W)$ peuvent avoir de la torsion.

b) si n est pair et k impair, les groupes $\widetilde{KO}^{0}(W)$, $\widetilde{KO}^{3}(W)$ et $\widetilde{KO}^{4}(W)$ sont libres.

Rappelons d'abord (voir [ST], [B-S]) que l'algèbre $H^*(W_{n,k}\ ;\ \mathbb{Z})$ de cohomologie entière de $W_{n,k}$ est isomorphe à la $\mathbb{Z}$-algèbre extérieure $\Lambda_{\mathbb{Z}}[h_{n-k+1},\ldots,h_i,\ldots,h_n]$ engendrée par des générateurs h_i de degré $2i-1$ $(n-k+1 \leqslant i \leqslant n)$. En tant que groupe abélien libre, $H^*(W_{n,k}\ ;\ \mathbb{Z})$ est engendrée par des monômes de la forme

$$h_{j_1} \ldots h_{j_i} \ldots h_{j_r}\ ,\quad n-k+1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant n.$$

On dira que les (h_i), $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$, forment un système simple de générateurs pour $H^*(W_{n,k}\ ;\ \mathbb{Z})$.

Par ailleurs les opérations de Steenrod sur $W = W_{n,k}$ sont fournies par la formule de Wu ([B-S] page 429) :

$$Sq^2(h_i) = (i-1)\, h_{i+1} \bmod 2.$$

de sorte que

$$Sq^2(h_i) = h_{i+1} \bmod 2 \quad \text{si } i \text{ est pair et}$$

$$Sq^2(h_i) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Dans la suite, lorsqu'il s'agira d'opérations de Steenrod sur $W_{n,k}$, nous omettrons d'écrire "mod 2" que nous sous-entendrons.

Enfin, $W = W_{n,k}$ admettant une structure de C.W. complexe fini, (explicitement construite dans [ST]), nous pouvons lui appliquer la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH en K-théorie réelle.

2. *Etude de la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH de* $W = W_{n,k}$.

Nous sommes en mesure de montrer la

Proposition I.2.1. Si n et k sont de parité contraire, alors dans s.s. A-H $\widetilde{KO}(W)$ ($W = W_{n,k}$) on a :

- si k est pair, $E_3^{p,-1} = 0$ pour tout $p \not\equiv 0 \bmod(8)$.
- si k est impair, $E_3^{p,-1} = 0$ pour tout $p \not\equiv 0,3,7 \bmod(8)$.

Démonstration : Il revient au même de prouver l'exactitude de la suite

$$E_2^{p-2,0} \longrightarrow E_2^{p,-1} \longrightarrow E_2^{p+2,-2} ,$$

qui du fait de la surjectivité de la réduction modulo 2 ρ, est équivalente à celle de la suite

$$H^{p-2}(W\,;\,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2} H^p(W\,;\,\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{Sq^2} H^{p+2}(W\,;\,\mathbb{Z}_2).$$

Dorénavant $(j_1,j_2,\dots,j_s)$ désignera un s-uple d'entiers tels que $n-k+1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_s \leqslant n$; $h_{(j_1,\dots,j_s)}$ le monôme $h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_s}$ et $|(j_1,\dots,j_s)|$ le degré de $h_{(j_1,\dots,j_s)}$.

Nous cherchons à construire un antécédant $y \in H^{p-2}(W ; \mathbb{Z}_2)$ par Sq^2 pour tout élément x appartenant au noyau de

$$d_2^{p,-1} = Sq^2 : H^p(W ; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{p+2}(W ; \mathbb{Z}_2).$$

Soit x un tel élément ; x s'écrit comme somme finie de monômes $h_{(j_1,\dots,j_s)}$ tel que $|(j_1,\dots,j_s)| = \sum_{\alpha=1}^{s} (2j_\alpha - 1) = p$. Il se présente alors deux possibilités :

- ou bien $h_{(j_1,\dots,j_s)}$ est annulé par Sq^2 (i.e. $Sq^2 h_{(j_1,\dots,j_s)} = 0$)
- ou bien $Sq^2 h_{(j_1,\dots,j_s)} \neq 0$ et alors il existe une autre suite $(k_1,\dots,k_r)$ telle que $h_{(k_1,\dots,k_r)}$ figure dans l'expression de x, avec $Sq^2 h_{(k_1,\dots,k_r)} = Sq^2 h_{(j_1,\dots,j_s)}$. Ceci résulte simplement du fait que les h_i mod 2, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$ forment un système simple de générateurs pour l'algèbre $H^*(W ; \mathbb{Z}_2)$.

Si $(j_1,\dots,j_s)$ obéit au deuxième cas et si $(k_1,\dots,k_r)$ est une autre suite telle que $Sq^2 h_{(j_1,\dots,j_s)} = Sq^2 h_{(k_1,\dots,k_r)}$ alors on a :

- $r = s$
- il existe i_o et i_1 $(i_o < i_1)$ tels que

$$j_1 = k_i \quad \text{pour tout} \quad i \neq i_o \quad \text{et de} \quad i_1 ,$$

$$j_{i_o} = k_{i_o} - 1 \quad , \quad j_{i_1} = k_{i_1} + 1.$$

De plus $h_{j_1} \dots h_{j_{i-1}} Sq^2(h_{j_i}) \dots h_s = 0$ pour tout $i \neq i_o$.

<u>Démonstration</u> : L'égalité $r = s$ découle, d'une part du fait que Sq^2 étant une dérivation, le transformé par Sq^2 d'un monôme $h_{(j_1,\dots,j_s)}$ s'exprime comme somme de monômes de même longueur ℓ et d'autre part de la propriété des h_i mod 2, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$, de constituer un système simple de générateurs pour $H^*(X,\mathbb{Z}_2)$. Cette dernière propriété entraîne l'existence du couple d'entiers i_o et i_1.

En effet, pour des raisons de degré (degré $h_{(j_1,\ldots,j_s)}$ = degré $h_{(k_1,\ldots,k_s)}$ l'existence d'un indice i_o tel $j_{i_o} \neq k_{i_o}$ entraîne celle d'un i_1 tel que $j_{i_1} \neq k_{i_1}$.

Maintenant comme $Sq^2 h_{(j_1,\ldots,j_s)} \neq 0$ par hypothèse, il existe au moins un indice i_o que nous supposerons minimal tel que $h_{j_1}\ldots h_{j_{i_o-1}} Sq^2(h_{j_{i_o}})..h_{j_s}$ soit non nul, et de plus, à cause de l'égalité

$$Sq^2 h_{(j_1,\ldots,j_s)} = Sq^2\, h_{(k_1,\ldots,k_s)} \qquad (*)$$

$h_{j_1}\ldots h_{j_{i_o-1}} Sq^2(h_{j_{i_o}})\ldots h_{j_s}$ doit figurer dans l'expression du deuxième membre de $(*)$.

Il existe donc un indice i_1 tel que

$$h_{j_1}\ldots h_{j_{i_o-1}} \cdot Sq^2(h_{j_{i_o}})\ldots h_{j_s} = h_{k_1}\ldots h_{k_{i_o}}\ldots Sq^2(h_{k_{i_1}})\ldots h_{k_s} \qquad (**)$$

avec $i_1 > i_o$ puisque $(j_1,\ldots,j_s) \neq (k_1,\ldots,k_s)$ et que i_o a été choisi minimal.

Comme h_i, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$, est un système simple de générateurs, il résulte de l'égalité $(**)$ que $j_{i_o}+1 = k_{i_o}$ et $j_{i_1} = k_{i_1}+1$.

Au total, les deux s-uples $(j_1,\ldots,j_s)$ et $(k_1,\ldots,k_s)$ diffèrent en exactement deux points à savoir i_o et i_1. Il est alors clair que :

$$h_{j_1}\ldots h_{j_{i_o-1}} \cdot Sq^2(h_{j_i})\ldots h_{j_s} = 0 \qquad \text{si } i \neq i_o$$

puisque dans le cas contraire le raisonnement précédent montrerait que $(j_1,\ldots,j_s)$ et $(k_1,\ldots,k_s)$ diffèrent en au moins quatre points.

Soit alors $y = h_{j_1}\ldots h_{j_{i_o}}\ldots h_{j_{i_1-1}} . h_{k_{i_1}} . h_{j_{i_1+1}}\ldots h_{j_s} \in H^{p-2}(W\,;\,\mathbb{Z}_2)$;

on vérifie que

$$Sq^2 y = h_{(j_1,\ldots,j_s)} + h_{(k_1,\ldots,k_s)} \quad .$$

Par suite, il reste à s'intéresser au premier cas, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des suites $(j_1,\dots,j_s)$ avec $n-k+1 \leqslant j_1 <..< j_s \leqslant n$ et telles que $Sq^2 h_{(j_1,\dots,j_s)} = 0$. Appelons N_p cet ensemble.

D'après la formule

$$Sq^2 h_{(j_1,\dots,j_s)} = \sum_{i=1}^{s} h_{j_1} \dots h_{j_{i-1}} \cdot Sq^2(h_{j_i}) \dots h_{j_s}$$

- ou bien $Sq^2(h_{j_i}) = 0$ (i.e. j_i est impair)
- ou bien $Sq^2(h_{j_i}) = h_{j_i+1}$ (i.e. j_i est pair).

Maintenant, étant donné une suite $(j_1,\dots,j_s) \in N_p$, supposons qu'il existe un indice i_o, $1 < i_o < s$ ($i_o \leqslant s$ si n est impair) et tel que :

$$Sq^2 h_{j_{i_o}} = 0 \qquad \text{et} \qquad j_{i_o} - 1 < j_{i_o} - 1 \,.$$

Alors j_{i_o} est nécessairement impair et si $1 < i_o$, on vérifie que l'élément

$$y = h_{j_1} \dots h_{j_{i_o-1}} \cdot h_{j_{i_o+1}} \dots h_{j_s} \in H^{p-2}(W ; \mathbb{Z}_2)$$

est un antécédant de $h(j_1,\dots,j_s)$ par Sq^2. Dans le cas où $i_o = 1$, comme n et k sont de parité contraire $n-k$ est impair et j_1 étant impair, on a nécessairement $n-k+1 < j_1$ de sorte h_{j_1-1} mod 2 est un des générateurs de $H^*(W ; \mathbb{Z}_2)$. Il en résulte que l'élément

$$y = h_{(j_1-1,j_2,\dots,j_s)} \in H^{p-2}(W ; \mathbb{Z}_2)$$

répond à la question.

Remarquons que si n est pair et si $(j_1,\dots,j_s) \in N_p$ est une suite d'extrémité $j_s = n$, on a : en raisonnant par l'absurde j_{s-1} impair.

De plus

$$\sum_{i=1}^{s-1} (h_{j_1} \dots h_{j_{i-1}} \cdot Sq^2(h_{j_i}) \dots h_{j_{s-1}})h_n = 0$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{s-1} h_{j_1} \dots h_{j_{i-1}} \; Sq^2(h_{j_i}) \dots h_{j_{s-1}} = 0 \; .$$

Il est alors clair que si y est tel que $Sq^2 y = h(j_1,\dots,j_{s-1})$ on a $Sq^2(y \cdot h_n) = h(j_1,\dots,j_s)$ et le cas $j_s = n$ pair se ramène ainsi au cas $j_s = n$ impair.

Les autres suites de N_p forment un sous-ensemble N_p^* et vérifient la condition (H) suivante :

(H) Pour tout entier i, $1 < i \leqslant s$ tel que $Sq^2 h_{j_i} = 0$ on a :

$$j_{i-1} = j_i - 1.$$

Déterminons la forme de ces suites et raisonnons suivant la parité de n (qui, du reste fixe celle de k).

<u>Premier cas</u> : n est impair et k est pair.

Supposons que $p \equiv \alpha \bmod 8$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 7$, avec α impair et soit $(j_1,\dots,j_s) \in N_p^*$. Alors s est impair et de plus la condition (H) entraîne que $j_{s-1} = j_s - 1$ est pair. Il s'ensuit que j_{s-2} est impair (sinon j_{s-1} serait impair !) et en poursuivant ce raisonnement, on montre que la suite $(j_1,\dots,j_s)$ est de la forme :

j_1

j_2 ; $j_3 = j_2+1$

....

j_{s-3} ; $j_{s-2} = j_{s-3}+1$

j_{s-1} ; $j_s = j_{s-1}+1$

où les entiers $j_2, j_4, \ldots, j_{s-3}, j_{s-1}$ sont pairs.

Notons que j_1 est imapir. Par suite, si l'ensemble N_p^* n'est pas vide on a $j_1-1 \geqslant n-k+1$ (du fait des parités respectives de n et de k) et l'élément $y = h_{(j_1-1, j_2, \ldots, j_s)}$ vérifie l'égalité

$$Sq^2 y = h_{(j_1, \ldots, j_s)} .$$

Supposons maintenant que $p \equiv \beta \bmod(8)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 7$ avec β pair et soit $(j_1, \ldots, j_s) \in N_p^*$. Alors s est pair et j_s est impair $(j_s \leqslant n)$. Un raisonnement analogue à celui du cas précédent montre que $(j_1, \ldots, j_s)$ est de la forme

$$\begin{array}{l} j_1 \ ; \ j_2 = j_1+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ j_{s-3} \ ; \ j_{s-2} = j_{s-3}+1 \\ j_{s-1} \ ; \ j_s = j_{s-1}+1 \end{array}$$

où les entiers j_{s-2r-1}, $0 \leqslant r \leqslant \frac{s-2}{2}$ sont pairs ; en particulier j_1 est pair et peut être égal à $n-k+1$ et constituer a priori une obstruction à la construction d'un antécédant pour $h_{(j_1 \ldots, j_s)}$ comme le montre la discussion précédante.

Cependant, on a pour une telle suite :

$$p = |(j_1, \ldots, j_s)| = 4(j_1+j_3+\ldots+j_{s-3}+j_{s-1}) \equiv 0 \bmod(8)$$

de sorte que si $\beta \neq 0$, N^*p est l'ensemble vide et il n'y a rien à démontrer.

<u>Deuxième cas</u> : n est pair et k impair.

La différence essentielle d'avec le premier cas est que les suites $(j_1,\ldots,j_s) \in N_p^*$ n'ont plus obligatoirement un aboutissement j_s impair.

Si $p \equiv \alpha \bmod (8)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 7$ avec α impair et si $(j_1,\ldots,j_s) \in N_p^*$, nous avons deux possibilités suivant que $j_s = n$ ou $j_s < n$. Si $j_s < n$, j_s est nécessairement impair et l'on est ramené au premier cas.

Dans le cas où $j_s = n$, j_{s-1} est impair (sinon j_s serait égal à $j_{s-1}+1$ et par conséquent impair !) et la condition (H) impose à la suite $(j_1,\ldots,j_s)$ d'être de la forme

$$\begin{array}{l} j_1 \ ; \ j_2 = j_1+1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ j_{s-2} \ ; \ j_{s-1} = j_{s-2}+1 \\ j_s = n \end{array}$$

où les entiers $j_1,j_3,\ldots,j_{s-4},j_{s-2}$ sont pairs. Il en résulte que

$$p = |(j_1,\ldots,j_s)| = 4(j_1+j_3+\ldots+j_{s-4}+j_{s-2}) + 2j_s-1 \equiv \alpha \bmod (8)$$

ce qui entraîne que

$$\alpha \equiv 2j_s-1 \bmod (8) \equiv 2n-1 \bmod(8)$$

et comme n est pair

$$\alpha \equiv 3,7 \bmod(8).$$

Par conséquent, si $\alpha \neq 3,7$, il n'existe pas dans N_p^* de suite d'extrémité $j_s = n$ et il n'y a rien à démontrer. Les éléments de N_p^* sont alors, dans ces conditions, de la forme

$$\begin{array}{l} j_1 \\ j_2 \ ; \ j_3 = j_2+1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ j_{s-1} \ ; \ j_s = j_{s-1}+1 \end{array}$$

avec $j_s < n$ et, de plus, les entiers $j_1, j_3, \dots, j_{s-2}, j_s$ sont impairs ; en particulier, j_1 étant impair, la construction d'un antécédent pour $h_{(j_1,\dots,j_s)}$ ne pose aucun problème.

Supposons maintenant que $p \equiv \beta \bmod(8)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 7$ avec β pair et soit $(j_1,\dots,j_s) \in N_p^*$. Si $j_s = n$, il est facile de déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\begin{array}{l} j_1 \\ j_2 \ ; \ j_3 = j_2+1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ j_{s-4} \ ; \ j_{s-3} = j_{s-4}+1 \\ j_{s-2} \ ; \ j_{s-1} = j_{s-2}+1 \\ j_s = n. \end{array}$$

En particulier, j_1 est un entier impair et nous nous trouvons dans la situation favorable.

Si $j_s < n$, alors $(j_1,\dots,j_s)$ est de la forme :

$$\begin{array}{l} j_1 \ ; \ j_2 = j_1+1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ j_{s-3} \ ; \ j_{s-2} = j_{s-3}+1 \\ j_{s-1} \ ; \ j_s = j_{s-1}+1 \end{array}$$

où, en particulier j_1 est un entier pair et comme nous l'avions déjà remarqué, peut être une obstruction à l'existence d'un antécédant pour $h_{(j_1,\dots,j_s)}$. Cependant, nous avons

$$p = |(j_1,\dots,j_s)| = 4(j_1+j_3+\dots+j_{s-1}) \equiv 0 \bmod (8)$$

(car $j_1, j_3, \dots, j_{s-1}$ sont pairs). Il en résulte que N_p^* est vide si $\beta \neq 0$ et alors il n'y a rien à démontrer si $\beta = 2$, 4 ou 6.

La proposition I.2.1. est complètement démontrée.

3. *Démonstration du théorème I.1.*

Notons d'abord que $\dim W = \sum_{i=n-k+1}^{i=n} (2i-1) = k(2n-k)$ de sorte que $\dim W$ est pair (resp. impair) si k est **pair** (resp. impair). Plus précisément les congruences modulo 8 de $\dim W$ en fonction des parités de n et de k peuvent être ainsi énoncées :

- si k est pair et n impair, $\dim W \equiv 0 \bmod (8)$;
- si k est impair et n pair, $\dim W \equiv 3,7 \bmod (8)$;

  avec $\dim W \equiv 7 \bmod (8)$ si $n \equiv 0 \bmod (4)$ et

  $\dim W \equiv 3 \bmod (8)$ si $n \equiv 2 \bmod (4)$.

Maintenant un entier i étant fixé, posons p_o le plus grand entier p tel que le groupe $E_\infty^{p,i-p}(W)$ soit non trivial et supposons que $i - p_o \equiv 0,4 \bmod (8)$.

Alors, il résulte de la proposition 0.8 que $E_\infty^{p_o,i-p_o}(W)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{\beta p_o}$, βp_o désignant le p_o-ième nombre de Betti de W.

Par ailleurs, compte tenu de l'expression du gradué de $\widetilde{KO}^i(W)$, soit $\mathrm{Gr}\, \widetilde{KO}^i(W) = \bigoplus_{q>0} E_\infty^{q,i-q}(W)$, supposons que **tout** q **tel que** $i-q \equiv -2 \bmod (8)$ vérifie

$$(3.1)\qquad \begin{array}{l} a)\ E_3^{q,-1}(W) = 0 \\ b)\ E_3^{q-1,-1}(W) = 0 \end{array}$$

D'après le corollaire 0.9 et la relation 3.1 b), la torsion dans $\widetilde{KO}^i(W)$ ne peut provenir que des termes $E_\infty^{q,i-q}$ avec $i-q \equiv -2 \bmod(8)$.

Soit alors p le plus grand entier inférieur à p_o et tel que $i-p \equiv -2 \bmod(8)$. Soit $x \in F^p\,\widetilde{KO}^i(W)$ un élément de torsion (i.e. $2x = 0$). D'après la proposition 0.10, il existe un élément $y \in F^p\,\widetilde{KO}^{i+1}(W)$ tel que $dy = x$.

Comme $E_\infty^{p,i+1-p}(W) = E_\infty^{p,-1}(W) = E_3^{p,-1}(W) = 0$ ((3.1) a)), il s'ensuit que $F^p\,\widetilde{KO}^{i+1}(W) = F^{p+1}\,\widetilde{KO}^{i+1}(W)$, ce qui entraine que $y \in F^{p+1}\,\widetilde{KO}^{i+1}(W)$ et par conséquent $x = dy \in F^{p+1}\,\widetilde{KO}^i(W)$. Or, à cause du choix de p, $F^{p+1}\,\widetilde{KO}^i(W)$ n'a pas de torsion. Donc $2x = 0$ équivaut à $x = 0$. En itérant ce raisonnement pour les $p \equiv i+2 \bmod(8)$, pris dans l'ordre décroissant, on montre que les groupes $\widetilde{KO}^i(W)$ n'a pas de torsion. La suite de la démonstration est une application de cette discussion générale aux différents cas.

Premier cas : k est pair et n impair.

Alors, puisque $\dim W \equiv 0 \bmod(8)$, on a $E_\infty^{\dim W,\, i-\dim W} = \mathbb{Z}$ si $i \equiv 0,4 \bmod(8)$ et, de plus, les conditions (3.1) a) et (3.1) b) sont réalisées au vu de la proposition I.2.1. Il s'ensuit que les groupes $\widetilde{KO}^0(W)$ et $\widetilde{KO}^4(W)$ sont libres.

Si $i \equiv 1,5 \bmod(8)$, il est clair que le groupe $E_\infty^{\dim W,\, i-\dim W}$ est trivial. Par ailleurs, en posant $t_j = \dim W - 2(n-k+j)+1$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$, on a :

$$t_1 = \dim W - 2(n-k+1)+1 \equiv 1 \bmod (4)$$

(compte tenu de l'hypothèse faite sur n et k) et par suite $i-t_1 \equiv 0,4 \bmod(8)$ si $i \equiv 1,5 \bmod(8)$.

t_1 est par conséquent l'entier p_o de la discussion générale qui existe donc, a fortiori, et on vérifie à l'aide de la proposition I.2.1 que les conditions (3.1) a) et (3.1) b) sont réalisées. Le résultat pour $i \equiv 1,5 \bmod (8)$ s'ensuit.

Si $i \equiv 3 \bmod(8)$, remarquons d'abord que l'on a :

$$2(n-k+1)-1 \equiv 7 \bmod(8) \quad \text{si} \quad n-k+1 \equiv 0 \bmod(4)$$

$$\text{et} \quad 2(n-k+1)-1 \equiv 3 \bmod(8) \quad \text{si} \quad n-k+1 \equiv 2 \bmod(4).$$

Dans le cas où $n-k+1 \equiv 0 \bmod(4)$, on vérifie que le groupe $E_\infty^{t_1,3-t_1}$ est trivial tandis que $E_\infty^{t_2,3-t_2}$ est un groupe libre et t_2 est par conséquent l'entier p_o de la discussion générale. La démonstration se termine comme dans les cas précédents.

En revanche, dans le cas $n-k+1 \equiv 2 \bmod(4)$ l'entier $2(n-k+1)-1$ étant congru à 3 modulo(8) il est clair que le groupe $E_\infty^{t_1,3-t_1}$ peut ne pas être trivial auquel cas il serait tordu. Montrons qu'en fait il est trivial.

Considérons, à cet effet, le générateur $h_{n-k+2}.h_{n-k+3}\ldots h_n \bmod(2)$ de $E_2^{t_1,3-t_1} = H^{t_1}(W ; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$. On a alors $Sq^2(h_{n-k+1}.h_{n-k+3}\ldots h_n) = h_{n-k+2}.h_{n-k+3}\ldots h_n$. Par suite la différentielle

$$d_2^{t_1-2,4-t_1} = Sq^2 : E_2^{t_1-2,4-t_1} \longrightarrow E_2^{t_1,3-t_1}$$

est un épimorphisme d'où $E_3^{t_1,3-t_1} = E_\infty^{t_1,3-t_1} = 0$. On vérifie alors que p_o existe et est égal à t_2 et le résultat annoncé s'ensuit.

Lorsque $i \equiv 2 \bmod(8)$, on remarque que les groupes $E_\infty^{t_j,2-t_j}$, $1 \leqslant j \leqslant k$ sont triviaux, soit pour des raisons de congruences de l'entier $2-t_j$, soit en appliquant la proposition I.2.1. De même la composante du gradué correspondant à l'entier $t = \dim W - (2(n-k+1)-1 + 2(n-k+2)-1)$, soit $E_\infty^{t,2-t}$, est trivial puisque t est congru à 0 modulo 8. On vérifie alors que l'entier $\dim W - (2(n-k+1)-1 + 2(n-k+3)-1)$ est l'entier p_o de la discussion générale qui s'applique sans difficulté en vertu de la proposition I.2.1.

Deuxième cas : k est impair et n pair.

Si $n \equiv 0 \bmod(4)$, considérons d'abord les i tels que $i - \dim W \equiv 0,4 \bmod(8)$ ($\dim W \equiv 7 \bmod(8)$), autrement dit $i \equiv 7,3 \bmod(8)$. Pour $i \equiv 3 \bmod(8)$, les conditions (3.1) a) et (3.1) b) sont vérifiées et il s'ensuit que le groupe $\widetilde{KO}^3(W)$ est sans torsion.
Par contre, pour $i \equiv 7 \bmod(8)$, (3.1) b) n'est pas réalisée et aucune conclusion ne peut être tirée à propos de $\widetilde{KO}^7(W)$ à l'aide de la méthode générale indiquée.

Pour $i \equiv 0,4 \bmod(8)$, considérons l'entier t_1 défini précédemment :

$$t_1 = \dim W - 2(n-k+1)+1.$$

Alors, nous avons $t_1 \equiv 0 \bmod(4)$ et par suite $i - t_1 \equiv 0,4 \bmod(8)$. t_1 est donc l'entier p_o de la discussion générale. De plus, on vérifie que (3.1) a) et (3.1) b) sont réalisées et par conséquent les groupes $\widetilde{KO}^o(W)$ et $\widetilde{KO}^4(W)$ sont libres.

Si $n \equiv 2 \bmod(4)$, alors $\dim W \equiv 3 \bmod(8)$ et en procédant de manière analogue au cas $n \equiv 0 \bmod(4)$, on montre que $\widetilde{KO}^i(W)$ est un groupe libre pour $i = 0,3$ et 4.

Ceci termine la démonstration du théorème I.1.

Remarque. Si k est 2 et n impair, le point a) du théorème I.1 redonne un résultat de C. RIBEIRO qui établit que pour les H-espaces finis sans torsion ayant le type de SU(n), les groupes $\widetilde{KO}^{-1}$ et $\widetilde{KO}^{-2}$ sont les seuls susceptibles d'avoir de la torsion.

4. *Un exemple de Calcul.*

Finalement, nous montrons qu'il existe bien des variétés de Stiefel complexes pour lesquels certains des groupes $\widetilde{KO}^i$ ne sont pas isomorphes aux gradués associés correspondants. Ce qui justifie a posteriori la technique de calcul qui vient d'être développée.

Considérons à titre d'exemple la variété $W_{n,3}$ avec $n = 4\ell > 3$ et dont les nombres de Betti non nuls sont en degré 0, 2n-5, 2n-3, 2n-1, 4n-8, 4n-6, 4n-4 et 6n-9. On vérifie alors, compte tenu de la congruence de n que

$$\mathrm{Gr}\,\widetilde{KO}^o(W_{4\ell,3}) \cong E_\infty^{4(4\ell)-8,0} \oplus E_\infty^{4(4\ell)-6,-2} \oplus E_\infty^{4(4\ell)-4,-4}$$

De plus nous avons la

Proposition I.4.1. Le terme $E_2^{4(4\ell)-6,-2}$ est éternel (i.e.

$$E_\infty^{4(4\ell)-6,-2} = E_2^{4(4\ell)-6,-2} = \mathbb{Z}_2).$$

La démonstration de la proposition I.4.1 se fait en plusieurs étapes.

Soit $\phi : W_{n,3} \longrightarrow W_{n,2}$ la fibration en sphère de $W_{n,3}$ au-dessus de $W_{n,2}$ de fibre S^{2n-5} et définie par $\phi(v_1,v_2,v_3) = (v_1,v_2)$ pour tout 3 repère de vecteurs orthonormés de $\mathbb{C}^n$. Considérons la suite exacte de Gysin (déduite de la suite spectrale de Serre pour les fibrations voir [Sp] associée à cette fibration) : soit :

$$\cdots \to H^q(W_{n,2}\ ;\ \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^*} H^q(W_{n,3}\ ;\ \mathbb{Z}) \to H^{q-2n-5}(W_{n,2}\ ;\ \mathbb{Z}) \to H^{q+1}(W_{n,2}\ ;\ \mathbb{Z}) \to \cdots$$

où ϕ^* désigne l'homomorphisme induit en cohomologie par la projection ϕ.

Pour $q = 2n-1$, comme $H^4(W_{n,2} ; \mathbb{Z}) = 0$ si $n > 3$, il s'ensuit que $H^{2n-1}(W_{n,2} ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^*} H^{2n-1}(W_{n,3} ; \mathbb{Z})$ est un épimorphisme. Nous utilisons ce fait pour montrer le

<u>Lemme</u> *I.4.2.* Dans s.s. A-H $\widetilde{KO}^o(W_{4\ell,3})$ la différentielle

$$d_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0} : E_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0} \longrightarrow E_{2(4\ell)-5}^{4(4\ell)-6,-2} \quad \text{est triviale.}$$

<u>Démonstration</u> : Notons en effet que cette différentielle échappe à toutes les conditions de trivialité déjà énoncées. Considérons alors l'homomorphisme $\{\phi_s^{*,*}\}$ de suites spectrales induit par la projection ϕ et donnant lieu au diagramme commutatif (D') suivant :

$$\begin{tikzcd}
E_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(W_{4\ell,3}) \arrow[r, "d_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(W_{4\ell,3})"] & E_{2(4\ell)-5}^{4(4\ell)-6,-2}(W_{4\ell,3}) \\
E_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(W_{4\ell,2}) \arrow[u, "\phi_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}"] \arrow[r, "d_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(W_{4\ell,2})"] & E_{2(4\ell)-5}^{4(4\ell)-6,-2}(W_{4\ell,2}) \arrow[u, "\phi_{2(4\ell)-5}^{4(4\ell)-6,-2}"']
\end{tikzcd} \qquad (D')$$

Alors on a, d'une part $E_{2(4\ell)-5}^{4(4\ell)-6,-2}(W_{4\ell,2}) = 0$ (le nombre de Betti de $W_{n,2}$ étant nul en dimension $4n-6$) et d'autre part, on vérifie que

$$E_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(\bar{W}) = E_2^{2(4\ell)-1,0}(\bar{W}) \quad \text{si} \quad \bar{W} = W_{4\ell,2} \quad \text{ou} \quad W_{4\ell,3} \; ,$$

cette vérification se faisant à l'aide du lemme 0.7 et de la structure d'algèbre extérieure de la cohomologie de ces espaces pour cequi est du calcul des opérations de Steenrod.

Il en résulte que l'homomorphisme $\phi_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}$ est l'homomorphisme ϕ^* induit en cohomologie et qui, en vertu de ce qui précède est un épimorphisme. La commutativité de (D') et le fait que $d_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(W_{4\ell,2} = 0$ montrent alors que la différentielle $d_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}(W_{4\ell,3}) = d_{2(4\ell)-5}^{2(4\ell)-1,0}$ est nulle comme annoncé .

La seconde étape consiste à montrer que les autres différentielles intervenant dans le calcul du terme considéré dans la proposition I.4.1 sont triviales. Les seules susceptibles de ne pas l'être sont $d_{2(4\ell)-3}^{2(4\ell)-3,-6}$ et $d_{2(4\ell)-1}^{2(4\ell)-5,-4}$ qui, en fait, le sont, la première parce que de source triviale et la seconde en vertu du lemme 0.7. La proposition est donc complètement démontrée.

Nous avons donc prouvé que Gr $\widetilde{KO}^o(W_{4\ell,3}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ et cependant $\widetilde{KO}^o(W_{4\ell,3}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ d'après le théorème I.1. b).

CHAPITRE II

K-THEORIE REELLE DES GROUPES SYMPLECTIQUES Sp(n) (n ⩾ 1)

II.0. Introduction.

Nous donnons la structure additive de la K-théorie réelle des groupes symplectiques Sp(n) (n ⩾ 1) ; le résultat obtenu est le suivant :

Théorème II.0.1.

a) La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(Sp(n))$ est de rang 2^{n+1}

b) la torsion de $KO^*(Sp(n))$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^{2^{n+1}}$.

Il s'ensuit une conséquence importante.

Théorème II.0.2. Dans la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH correspondant au groupe $\widetilde{KO}^i(Sp(n))$, on a un isomorphisme de groupes abéliens

$$\widetilde{KO}^i(Sp(n)) \overset{\sim}{=} \bigoplus_p \left[\widetilde{H}^p(Sp(n)\ ;\ \mathbb{Z}) \otimes \widetilde{KO}^{i-p}(S^o)\right] \simeq E_2(Sp(n)) .$$

Nous nous basons essentiellement sur un travail de R.M. SEYMOUR sur la KR-théorie des groupes de Lie et de leurs espaces homogènes, la KR-théorie étant la théorie de cohomologie associée aux fibrés complexes à involutions, -Real bundle dans la terminologie d'ATIYAH) (voir [A1])-

Un tel fibré est un fibré vectoriel complexe $E \xrightarrow{\pi} X$ avec des involutions τ_E et τ_X sur E et X respectivement telles que :

1) $\pi\, \tau_E = \tau_X \pi$

2) la restriction $(\tau_E)_x : E_x \longrightarrow E_{\tau_X(x)}$ de τ_E à la fibre E_x au-dessus d'un point $x \in X$ est une involution semi-linéaire.

En particulier si l'involution sur la base X est l'involution triviale, τ_E est une involution semi-linéaire sur chaque fibre et donc une involution de l'espace vectoriel réel $E_x^{(\mathbb{R})}$ obtenu à partir de E_x par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. Si F_x désigne le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $+1$ de cette involution, et F le fibré vectoriel réel sur X ainsi défini, il est immédiat que $E \xrightarrow{\pi} X$ est le complexifié de $F \to X$ et cette association définit un isomorphisme naturel $KR^*(X) \cong KO^*(X)$.

II.1. Préliminaires.

Comme dans le cas de la K-théorie usuelle (réelle ou complexe), nous disposons de morphismes de complexification et de réélification $c : KR(X) \to K(X)$, $r : K(X) \to KR(X)$ respectivement, et vérifiant des relations analogues à celles de Bott, à savoir

$$rc(x) = 2x, \quad cr(y) = y+y^*, \quad x \in KR(X), \quad y \in K(X)$$

où $*$ désigne l'involution $K(X) \to K(X)$ définie par $[E]^* = [\tau_X^* \bar{E}]$ pour tout fibré complexe à involution E, $\bar{E}$ désignant la structure complexe conjuguée sur E et τ_X^* l'image réciproque par τ_X. On notera que si τ_X est l'identité sur X, on retrouve la conjugaison habituelle sur $K(X)$ ainsi que la complexification et la réélification signalées au chapitre 0.

Nous nous placerons désormais dans cette dernière hypothèse.

Rappelons maintenant -après l'avoir adoptée à la KO-théorie- un théorème de structure ([SE] théorème 4.2) qui permet d'avoir des informations sur $KR(X)$ à partir de la K-théorie complexe de X.

Théorème II.1.1. Supposons qu'en tant que groupe abélien $\mathbb{Z}_2$-gradué $K^*(X)$ est libre, et que l'involution $*$ $(* = t)$ décompose $K^*(X)$ sous la forme

$$K^*(X) = M_+ \oplus M_- \oplus T \oplus T^*$$

de sorte que $*$ soit la multiplication par $+1$ (resp. -1) sur M_+

(resp. M_-), et d'autre part échange T et T^*.

Soient $h_1,\ldots,h_n \in KO^*(X)$ tels que $c(h_1),\ldots,c(h_n)$ forment une base pour le $K^*(+)$-module $K^*(+) \otimes (M_+ \oplus M_-)$ (+ désigne un point) ; alors en tant que $KO^*(+)$-module

$$KO^*(X) = F \oplus r(K^*(+) \otimes T)$$

où F désigne le $KO^*(+)$-module libre engendré par les h_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Dans le cas des groupes de Lie G compacts, connexes, simplement connexes et semi-simples, une telle décomposition de la K-théorie complexe s'obtient à partir :

a) des représentations de G, l'anneau $R(G)$ s'exprimant à cause de la simple connexité sous la forme d'une algèbre polynomiale (voir [AD] pour les détails).

b) d'une classification de ces représentations (virtuelles) relativement à une involution $*$ sur $R(G)$ induite par celle considérée sur G.

c) d'un théorème de HODGKIN sur la structure de la K-théorie complexe des groupes de Lie compacts et simplement connexes ; plus précisément $K^*(G) = (\mathrm{Im}\ \sigma_G)$ où $\Lambda(\mathrm{Im}\ \sigma_G)$ désigne l'algèbre extérieure sur $\mathrm{Im}\ \sigma_G$ et $\sigma_G : K^0(BG) \to K^{-1}(G)$ la suspension universelle définie dans [HOD], page 15. (*)

Soit maintenant $\alpha : R(G) \to K^0(BG)$ l'application naturelle ([HUS] page 43) définie à partir du G-fibré principal $EG \to BG$. α est une injection car

---

(*) *La suspension* $\sigma_G : K^0(BG) \to K^{-1}(G)$ *est la composé* $\delta^{-1} \circ \pi_G^!$ *où* $\pi_G^!$ *est l'homomorphisme induit en K-théorie par la projection* π_G *du* G *fibré universel* $EG \xrightarrow{\pi_G} BG$ *et où* $\delta : K^{-1}(G) \to K^0(EG,G)$ *est le connectant de la suite exacte associée à la paire* (EG,G). δ *est ici est isomorphisme du fait de la contractilité de* EG.

G est connexe aussi identifiera-t-on $R(G)$ à son image par α dans $\bar{K}^{o}(BG)$ et écrira-t-on x au lieu de $\alpha(x)$ pour $x \in R(G)$.

Dans tout ce paragraphe, G est un groupe de Lie compact connexe, simplement connexe et semi-simple de rang s.

Alors $R(G) = \mathbb{Z}[\rho_1,\ldots,\rho_s]$ où les ρ_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ sont les représentations dites de base (voir [HOD],[SE] pour les définitions). D'après [SE] prop.5.1., ces représentations de base sont permutées par la conjugaison $* : R(G) \to R(G)$, et par suite on peut écrire $R(G)$ sous la forme

$$R(G) = \mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\gamma_1^*,\ldots,\gamma_k^*] \quad \text{avec} \quad r+2k = s,$$

les θ_i désignant les représentations irréductibles de base invariante par $*$.

D'après le résultat de HODGKIN et moyennant l'identification de $\alpha(\rho_i)$ avec ρ_i (mentionnée plus haut) tout élément de $K^*(G)$ s'écrit comme somme de monômes de la forme

$$m = \sigma(\theta_1)^{t_1}\ldots\,\sigma(\theta_r)^{t_r}.\sigma(\gamma_1)^{\varepsilon_1}\ldots\sigma(\gamma_k)^{\varepsilon_k}\,.\,\sigma(\gamma_1^*)^{\nu_1}\,\ldots\,\sigma(\gamma_k^*)^{\nu_k} =$$

$$n\,\sigma(\gamma_1)^{\varepsilon_1}\,\ldots\,\sigma(\gamma_k)^{\varepsilon_k}\,.\,\sigma(\gamma_1^*)^{\nu_1}\,\ldots\,\sigma(\gamma_k^*)^{\nu_k}$$

avec $t_i,\ \varepsilon_i,\ \nu_i = 0$ ou 1 et $\sigma_G = \sigma$.

Introduisons à ce stade de la définition suivante :

Définition II.1.2. Les entiers relatifs $w_i(m) = \sum_{j=1}^{j=i} j(\varepsilon_j-\nu_j)$ sont appelés les poids du monôme m.

Soit N la sous-algèbre de $K^*(G)$ engendrée par les monômes m de poids $w_i(m)$ nuls pour tout i, c'est-à-dire les monômes m de la forme $m = n\,\sigma(\gamma_1)\ldots\sigma(\gamma_k)\sigma(\gamma_1^*)..\sigma(\gamma_k^*)$, T la sous-algèbre de $K^*(G)$ engendrée par les monômes m dont le poids est positif pour le plus petit indice i tel que $w_i(m) \neq 0$, et T^* la sous-algèbre de $K^*(G)$ engendrée par les monômes m dont le poids est négatif pour le plus petit indice i tel que $w_i(m) \neq 0$.

Alors on vérifie que $w_i(m^*) = -w_i(m)$, et il en résulte d'une part, que $*$ échange T et T^*, et d'autre part laisse invariant N : comme c'est une involution, on a une décomposition $N = N_+ \oplus N_-$ correspondant aux valeurs propres $+1$ et -1 de $+$. Il s'ensuit :

$$K^*(G) = N_+ \oplus N_- \oplus T \oplus T^*.$$

<u>*Définition*</u> *II.1.3.* Une représentation linéaire complexe d'un groupe de Lie G est dit de type quaternionique si elle est obtenue par restriction de scalaires de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{C}$ dans une représentation quaternionique de G. ($\mathbb{H}$ est le corps des quaternions).

De même, une représentation complexe de G est dit de type réel si elle est la complexifiée d'une représentation réelle de G.

Le lemme suivant précise le rôle joué par certaines classes de représentations irréductibles d'un groupe de Lie compact connexe tel que $\pi_1(G) = 0$.

<u>*Lemme*</u> *II.1.4.* Soit $x \in K^0(BG)$ tel que $x = x^*$ et $x = \alpha(\rho)$ où ρ est une représentation irréductible de G ; alors :

1) si ρ est de type réel, il existe $z \in KO^0(BG)$ tel que $c(z) = x$;
2) si ρ est de type quaternionique, il existe $z \in KO^{-4}(BG)$ tel que $c(z) = \mu_2^2 x$ où μ_2 est le générateur de $K^*(+)$ pour sa structure d'algèbre Z_8-graduée.

Démonstration : Voir [SE], lemme 5.3.

Soit maintenant $\sigma_o : KO^o(BG) \to KO^{-1}(G)$ la suspension en K-théorie réelle définie de manière analogue à la suspension $\sigma_G : K^o(BG) \longrightarrow K^{-1}(G)$, il résulte de ce dernier lemme, la proposition suivante (voir [SE]).

Proposition II.1.5. Soit G un groupe de Lie compact, connexe semi-simple tel que $\pi_1(G) = 0$; si la conjugaison sur $R(G)$ est l'identité alors en tant que groupe abélien, on a :

$$KO^*(G) \cong \Lambda_{KO^*(+)} (\mathrm{Im}\ \sigma_o).$$

Il découle de cette étude que si $R(G)$ est engendré en tant qu'anneau par des représentations irréductibles auto-conjuguées, la structure additive de $KO^*(G)$ est bien déterminée.

Dans la suite, nous montrons que le groupe de Lie simple $Sp(n)$ vérifie les hypothèses de la proposition II.1.5 et que le résultat global qui vient d'être énoncé permet de conclure sur les différentielles "délicates" dans la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH associée à $Sp(n)$.

II.2. *K-théorie réelle de* $Sp(n)$.

Lemme II.2.1. Soit G un groupe de Lie compact. Alors toute représentation complexe de dimension finie de G, de type quaternionique est auto-conjuguée.

Démonstration : Soit $U : G \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(E)$ une représentation de type quaternionique dans un espace vectoriel de dimension finie ; E est de dimension complexe paire. Posons $\dim_{\mathbb{C}} E = 2n$, et soit $J : E \longrightarrow E$ l'anti-involution semi-linéaire définie par :

$$J(e_i) = e_{i+n} \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et}$$

$$J(e_i) = -e_{i-n} \quad \text{si} \quad n < i \leqslant 2n.$$

Alors J définit sur E une structure d'espace vectoriel quaternionique à gauche. Soit F ce $\mathbb{H}$-espace vectoriel : $(\lambda+\mu j)z = \lambda z + \mu(Jz)$; avec $\lambda+\mu j \in \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_j$ et $z \in E$.

U étant une représentation quaternionique de G dans F, il est clair que $U(g)$ commute avec J, pour tout $g \in G$. Comme J est semi-linéaire de E dans E, donc linéaire de E dans $\bar{E}$, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{J} & \bar{E} \\ {\scriptstyle U(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{U}(g)} \\ E & \xrightarrow[J]{} & \bar{E} \end{array}$$

montre que J est un opérateur d'entrelacement de U et de sa représentation conjuguée $\bar{U}$.

Considérons maintenant le cas où G est le groupe symplectique $Sp(n)$. Soit ρ_n la classe dans $RSp(n)$ de la représentation de $Sp(n)$ où toute matrice $M \in Sp(n)$ opère dans $\mathbb{C}^{2n}$ comme la multiplication à gauche par M. Posons $\alpha_i = \Lambda^i \rho_n$ $(i = 1,2,\ldots,n)$; alors les α_i, $i = 1,2,\ldots,n$, engendrent l'anneau $RSp(n)$ (voir [HUS] page 193). De plus

Lemme II.2.2. ρ_n est une représentation complexe de type quaternionique.

Démonstration : Soit J l'anti-involution semi-linéaire déjà considérée au lemme précédent, et $\beta' : E\times E \to \mathbb{C}$ la forme antihermitienne définie par $\beta'(x,y) = \beta(Jx,y)$, $x,y \in E$, β étant la forme hermitienne usuelle sur l'espace de la représentation $E \cong \mathbb{C}^{2n}$ de ρ_n. Alors tout élément M de $Sp(n) \subset U(2n)$ est, par définition une isométrie pour β' ce qui équivaut à $MJ = JM$; il en résulte que la multiplication par M définit un $\mathbb{H}$-automorphisme de E pour la structure quaternionique de ce dernier, définie par J.

Corollaire II.2.3. La conjugaison sur $RSp(n)$ est l'identité.

Démonstration : D'après les lemmes II.2.2 et II.2.3, ρ_n est auto-conjuguée et par suite les α_i aussi. Le corollaire résulte alors du fait que les α_i engendrent $R\,Sp(n)$ et que la conjugaison est un homomorphisme d'anneau.

Corollaire II.2.4.

a) En tant que $KO^*(+)$-module, l'algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(Sp(n))$ est isomorphe à un $KO^*(+)$-module sur 2^n générateurs ;

b) la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(Sp(n))$ est de rang 2^{n+1} et sa torision est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^{2^{n+1}}$.

Démonstration : Comme $Sp(n)$ est de rang n, le a) résulte directement de la proposition II.1.5. Le b) est une conséquence du a) et du fait que $KO^*(+)$ est de rang 2 et que sa torsion est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2)^2$ (voir le tableau des coefficients au chapitre 0).

II.3. Détermination des groupes $\widetilde{KO}^i(Sp(n))$.

Dans ce paragraphe nous utilisons la structure de $KO^*(+)$-module de $KO^*(Sp(n))$ pour calculer les différents groupes $\widetilde{KO}^i(Sp(n))$; au passage, elle permet de conclure à la trivialité de certaines différentielles "délicates" dans s.s. A-H $\widetilde{KO}(Sp(n))$.

Soit $H^*(Sp(n)\ ;\ \mathbb{Z})$ l'algèbre de cohomologie entière de $Sp(n)$; on sait que $H^*(Sp(n)\ ;\ \mathbb{Z}) \simeq \Lambda_{\mathbb{Z}}(x_3,\ldots,x_{4n-1})$, algèbre extérieure sur des générateurs x_i en degré i. Sp(n) est donc sans torsion et par conséquent la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH associée satisfait aux différentes propositions développées au chapitre 0.

Si l'on note

$$E_2(Sp(n)) = \bigoplus_{i=1}^{7} E_2^i(Sp(n))$$

où $E_2^i(Sp(n))$ désigne le terme E_2 dans s.s. A-H $KO^i(Sp(n))$,

$$Gr\ KO^*(Sp(n)) = \bigoplus_{i=0}^{7} Gr\ KO^i(Sp(n))$$

la somme directe des gradués correspondant respectivement aux différents groupes $KO^i(Sp(n))$ et enfin Tors(-) la torsion dans le groupe (-), on obtient

$$Tors(KO^*(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2^{2^{n+1}} \qquad \text{(corollaire II.2.4)}$$

$$Tors(E_2(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2^{r} \qquad \text{et}$$

$$Tors(Gr\ KO^*(Sp(n)) = \mathbb{Z}_2^{r'}$$

où r et r' sont deux entiers naturels vérifiant l'inégalité :

$$2^{n+1} \leqslant r' \leqslant r.$$

(on notera en particulier que l'inégalité $r' \leqslant r$ résulte du fait que de la torsion ne peut être introduite dans le gradué par une composante libre du terme E_2 en vertu de la proposition 08.)
L'estimation de r et de r' nous conduit au travail préparatoire suivant. Soit p un entier tel que le p-ième nombre de Betti $\beta_p = \beta_p(Sp(n))$ de Sp(n) soit non nul. Pour un entier i, $0 \leqslant i \leqslant 7$, considérons l'entier i-p avec la multiplicité β_p et notons $\alpha^1_{(i,p)}, \alpha^2_{(i,p)}, \ldots, \alpha^{\beta_p}_{(i,p)}$ pour les distinguer.

Soit A la liste de tous ces $i-p$, avec $0 \leqslant i \leqslant 7$, $\beta_p \neq 0$ et où chaque $i-p$ est compté avec la multiplicité β_p comme précédemment indiqué ; autrement dit

$$\begin{array}{cccc}
-p_1 & -p_2 & \cdots\cdots\cdots & -p_N \\
1-p_1 & 1-p_2 & \cdots\cdots\cdots & 1-p_N \\
2-p_1 & 2-p_2 & \cdots\cdots\cdots & 2-p_N \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\
7-p_1 & 7-p_2 & \cdots\cdots\cdots & 7-p_N
\end{array}$$

avec $0 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots < p_N$, $p_N = \dim Sp(n)$ et où l'écriture $i-p_k$ symbolise les β_k entiers $\alpha^1_{(i,p_k)}, \alpha^2_{(i,p_k)}, \ldots, \alpha^{\beta_k}_{(i,p_k)}$, tous égaux à $i-p_k$.

Soit A_ℓ la sous-liste des éléments $i-p$ de A (compté avec multiplicité) tels que $i-p \equiv \ell \mod(8)$ et soit $\mathrm{Card}\, A_\ell$ le cardinal de A_ℓ.

Alors, nous avons le résultat préliminaire suivant :

<u>*Lemme*</u> *II.3.1.* Pour tout couple (ℓ,ℓ') d'entiers, nous avons

$$\mathrm{Card}\, A_\ell = \mathrm{Card}\, A_{\ell'} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\psi_{(\ell,\ell')}$ l'application de A_ℓ dans $A_{\ell'}$ définie par $\psi_{(\ell,\ell')}(i-p) = \widetilde{i+(\ell'-\ell)} - p$ où $\widetilde{i+(\ell'-\ell)}$ est le représentant de la classe modulo 8 de $i - (\ell'-\ell)$ compris entre 0 et 7 inclus. Alors $\psi_{(\ell,\ell')}$ est clairement une injection ; car si i_o-p_o et i_1-p_1 sont deux éléments de A_ℓ avec $i_o \neq i_1$, alors $i_o + (\ell'-\ell) \not\equiv i_1 + (\ell'-\ell) \mod(8)$.

En échangeant ℓ et ℓ', nous remarquons que $\psi_{(\ell',\ell)}$ est aussi une injection et par suite $\psi_{(\ell,\ell')}$ est une bijection puisque A_ℓ et $A_{\ell'}$ sont finis. Et le lemme est démontré.

Proposition II.3.2. Supposons $q \equiv -1, -2 \bmod(8)$. Alors dans s.s. A-H $KO(Sp(n))$, les différentielles $d_s^{p,q}$ et $d_s^{p-s,q+s-1}$ sont nulles pour tout p et tout $s \geqslant 2$.

Démonstration : Rappelons que la torsion dans la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(Sp(n))$ est donnée par $\mathrm{Tors}(KO^*(Sp(n) \simeq \mathbb{Z}_2^{2^{n+1}}$.

Maintenant à partir de la liste A et en remarquant que chacune de ses lignes est constituée de 2^n termes lorsqu'ils sont comptés avec leurs multiplicités respectives (puisque la cohomologie entière de $Sp(n)$ est une algèbre extérieure sur n générateurs), il vient que $\mathrm{Card}\, A_\ell = 2^n$ comme conséquence du lemme II.3.1. Par suite, puisque $Sp(n)$ est sans torsion, nous avons :

$$\mathrm{Tors}(E_2(Sp(n)) \cong \mathbb{Z}_2^{\mathrm{Card}(A_{-1} \cup A_{-2})} = \mathbb{Z}_2^{2^{n+1}}$$

Il s'ensuit que la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(Sp(n))$ et le terme E_2 dans la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH ont la même torsion. Alors, nous avons un isomorphisme

$$KO^*(Sp(n)) \cong E_2(Sp(n))$$

de groupes abéliens, puisque d'après la proposition 08, ils ont aussi des parties libres isomorphes. Il en résulte que :

$$KO^*(Sp(n)) = \mathrm{Gr}\, KO^*(Sp(n)) = E_2(Sp(n)).$$

Ainsi, pour tout q dans A_{-1} ou A_{-2}, les cycles dans $E_2^{p,q}$ sont des cycles permanents, ce qui revient à dire que les différentiels $d_s^{p,q}$ et $d_s^{p-s,q+s-1}$ sont nulles pour de tels q et tout $s \geqslant 2$.
Cette dernière proposition entraîne immédiatement la

Proposition II.3.3. Pour tout i, dans la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH correspondant à $KO^i(Sp(n))$, nous avons des isomorphismes de groupes :

$$KO^i(Sp(n)) = E_2^i(Sp(n)) = \bigoplus_{p\geq 0} \left[H^p(Sp(n)\ ;\ \mathbb{Z}) \otimes \widetilde{KO}^{i-p}(S^o)\right].$$

En utilisant la formule $KO^i(-) = \widetilde{KO}^i(-) \oplus KO^i(+)$, il est tout aussi immédiat que les propositions II.3.2 et II.2.3 restent vraies pour la KO-théorie réduite, de sorte que nous avons :

$$\widetilde{KO}^i(Sp(n)) = \bigoplus_{p\geq 0} \left[\widetilde{H}(Sp(n)\ ;\ \mathbb{Z}) \otimes \widetilde{KO}^{i-p}(S^o)\right].$$

CHAPITRE III

K-THEORIE REELLE DES VARIETES DE STIEFEL QUATERNIONIQUES $X_{n,k}$ $(k < n)$

0. *Introduction.*

Les méthodes utilisées dans ce chapitre de même que les résultats obtenus, sont similaires à ceux du chapitre précédent et s'appuient essentiellement sur le théorème de structure de SEYMOUR. $X_{n,k}$ désignant la variété la variét de Stiefel des k-repères dans $\mathbb{H}^n$ (où $\mathbb{H}$ est le corps des quaternions), nous montrons le théorème suivant :

Théorème III.0.1. (*). En tant que groupes abéliens, la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(X_{n,k})$ est isomorphe à une $KO^*(+)$ algèbre extérieure sur k. générateurs.

Il s'ensuit le résultat principal de ce chapitre.

Théorème III.0.2. Dans la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH correspond au groupe $\widetilde{KO}^i(X_{n,k})$, on a un isomorphisme de groupe abéliens

$$\widetilde{KO}^i(X_{n,k}) = E_2(X_{n,k}) = \bigoplus_p \left[\widetilde{H}^p(X_{n,k}\ ;\ Z) \otimes \widetilde{KO}^{i-p}(S^o)\right]$$

Pour k = 2 et 3, les groupes $\widetilde{KO}^i(X_{n,k})$ ont été explicitement déterminés par Wu, Zhen De dans [W1] et [W2] en utilisant essentiellement la structure cellulaire de ces variétés.

(*) Ce résultat était connu de Lazarov ([L]).

1. *K-théorie complexe des variétés de Stiefel quaternioniques.*

Les groupes de K-théorie complexe des variétés de Stiefel quaternioniques ont été déterminés par ROUX ([RO]) en termes de représentations des groupes symplectiques (redémontrant en fait un résultat de Connor-Lazarov [4]) en utilisant essentiellement une suite spectrale de HODGKIN. Cette suite spectrale s'est, du reste, avéré extrêmement puissante dans le calcul de la K-théorie complexe d'espaces homogènes de groupes de Lie compacts et de groupe de Poincaré libre mais nous n'en aurons pas explicitement besoin ici et nous renvoyons le lecteur à [HOD_1].

Afin de décrire le résultat de ROUX, soit $I_{Sp(n)}$ l'idéal d'augmentation de l'application $R(Sp(n)) \xrightarrow{\varepsilon} R(\{1\}) = \mathbb{Z}$ induit par l'inclusion $\{1\} \hookrightarrow Sp(n)$ de sorte que

$$R(Sp(n)) = I_{Sp(n)} \oplus \mathbb{Z}.$$

Soit J la noyau de l'homomorphisme $R(Sp(n)) \to R(Sp(n-k))$ induit par l'inclusion de $Sp(n-k)$ dans $Sp(n)$, ρ_{2n} la représentation complexe canonique de $Sp(n) \subset U(2n)$ de i-ème puissance extérieure $\lambda^i(\rho_{2n})$. Alors les représentations virtuelles $\pi_i = \pi_i(\rho_{2n}) \in I_{Sp(n)}$ $1 \leqslant i \leqslant n$ peuvent être définies (voir [RO]) telles que $R(Sp(n)) = \mathbb{Z}[\lambda^1(\rho_{2n},\ldots,\lambda^n(\rho_{2n})]$ s'identifie, comme $\mathbb{Z}$-algèbre supplémentée à la $\mathbb{Z}$-algèbre des polynômes $\mathbb{Z}[\pi_1,\ldots,\pi_n]$ et de plus les éléments $\pi_i(\rho_{2n})$, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$ appartiennent à J. Alors nous avons :

Proposition III.1.1. (ROUX) En tant qu'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée

$$K^*(X_{n,k}) = K^*(Sp(n)/_{Sp(n-k)}) \simeq \Lambda_{\mathbb{Z}}[\pi_{n-k+1},\ldots,\pi_n] \ ,$$

chaque $\pi_i = \pi_i(e_{2n})$ étant de degré -1.

Roux a également montré que les classes de K-théorie respectivement associées aux π_i dans l'isomorphisme au-dessus proviennent de la β construction ; en d'autres termes $\pi_i(e_n)$ doit être interprété comme $\beta(\pi_i(e_{2n}))$.

D'une manière générale, pour un groupe de Lie compact G et un sous-groupe fermé H de G, la β construction est une application de $I = \mathrm{Ker}(R(G) \xrightarrow{j^*} R(H))$ (induite par l'inclusion $j : H \to G$) dans $K^{-1}(G/H) \simeq [G/H,U]$, où $[G/H,U]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie des applications de G/H dans le groupe unitaire infini U.

Si l'on regarde une représentation de G comme une application de G dans un certain $U(n) \subset U$, alors pour tout $[\sigma_1,\sigma_2] \in I$ $\beta([\sigma_1,\sigma_2])$ est par définition la classe d'homotopie de l'application $f : G/H \to U(n) \subset U$ définie par $f(gH) = \sigma_1(g)\sigma_2(g)^{-1}$ pour tout $gH \in G/H$. (f est bien définie puisque σ_1 et σ_2 ont la même restriction à H).

De plus chaque π_i est de la forme $\pi_i = \pi_i^o - \deg \pi_i^o$ où π_i^o est une représentation irréductible de base et $\deg \pi_i^o$ son degré. Comme β est additive et $\beta(\mathbb{Z}) = 0$ (voir [HOD] page 8) $K^*(X_{n,k})$ est donc additivement isomorphe à $\Lambda_{\mathbb{Z}}[\beta(\pi^o_{n-k+1}),\ldots,\beta(\pi^o_n)]$.

Rappelons maintenant que, d'après le corollaire II.2.3, la conjugaison sur $R(Sp(n))$ est l'identité. Il s'ensuit que les π_i^o, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$, et par suite les $\beta(\pi_i^o)$ sont auto conjugués. Nous en déduisons que la conjugaison sur $K^*(X_{n,k})$ est l'identité.

3. *K-théorie réelle de* $X_{n,k}$.

Introduisons la définition suivante :

Définition III.2.1. Soit Y un C.W. complexe fini et $E \xrightarrow{\pi} Y$ un fibré vectoriel complexe au-dessus de Y. $E \xrightarrow{\pi} Y$ est par définition un fibré vectoriel quaternionique s'il existe sur E une anti-involution semi-linéaire J_E commutant avec la projection π (i.e. J_E conserve chaque fibre).

Désignons par KH(Y) le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels quaternioniques et revenons aux variétés $X_{n,k}$. Nous voulons montrer que les $\beta(\overset{o}{\pi}_i)$, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$, éventuellement multiplié par un inversible de la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $K^*(+) \simeq \mathbb{Z}[\mu_2]/_{\mu_2^4=1}$ sont des complexifications de classes réelles.

Remarquons, à cette fin, que chacune des représentations irréductibles $\overset{o}{\pi}_i(\rho_{2n})$ est ou bien de type réel ou bien de type quaternionique puisqu'elle est auto-conjuguée. (on pourra voir une démonstration de ce fait dans [SE] prop. 5.1.)

De plus, chaque classe $\beta(\overset{o}{\pi}_i(\rho_n))$ hérite du type de $\overset{o}{\pi}_i$, c'est-à-dire $\beta(\overset{o}{\pi}_i)$ est complexifié (resp. quaternionique) si $\overset{o}{\pi}_i$ est de type réel (resp. quaternionique).

Pour voir ceci plus précisément, considérons la suspension "relative" σ' définie dans ([G-L] page 43) à partir de la fibration $G/H \to BH \xrightarrow{Bj} BG$ induite par l'inclusion $j : H \to G$; soit $\sigma' = \delta^{-1}\,\bar{B}j!$ défini de Ker Bj! dans $K^{-1}(G/H)$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{-1}(G/H) \arrow[r, "\delta"] & K^o(BH,G/H) \arrow[r] & K^o(BH) \\
 & & K^o(BG,*) \arrow[u, "\bar{B}j!"] \arrow[r] & K^o(BG) \arrow[u, "Bj!"]
\end{tikzcd}$$

dans lequel la ligne horizontale du dessus est la suite exacte associée à la paire (BH,G/H), G/H ayant été identifié à la fibre au-dessous d'un point base $*$ de BG.

D'autre part, l'homomorphisme $\alpha : R(G) \to K^{o}(BG)$ (voir chapitre précédent) applique $I = \mathrm{Ker}(R(G) \to R(H))$ dans $\mathrm{Ker}\ Bj! \simeq K^{o}(BG,BH)$.

Alors pour toute représentation ρ, α et β vérifient la relation ([G-L])

$$\beta(\rho) = \sigma'(\alpha(\rho)).$$

Comme il est clair que $\alpha(\rho)$ est complexifié d'une classe $KO^{o}(BG)$ si ρ est de type réel et que $\alpha(\rho) \in KH^{o}(BG)$ si ρ est de type quaternionique, cette dernière relation montre qu'il en est de même pour $\beta(\rho)$.

Si maintenant π_i^o est la complexification d'une représentation réelle de $Sp(n)$, soit $x_i \in KO^{-1}(X_{n,k})$ tel que $c(x_i) = \beta(\pi_i^o)$.

Dans le cas quaternionique, nous utilisons l'isomorphisme $t : KH(Y) \to KO^{-4}(Y)$ valable pour tout C.W. complexe fini Y (voir [SE] p.18) et en appelant $s : KH(Y) \to K(Y)$ la complexification naturelle, nous avons, d'après le lemme 5.2 de [SE]

2.2. $$\mu_2^2\ s(y) = ct(y) \quad \text{pour tout} \quad y \in KH(Y).$$

Maintenant, comme tout élément $y \in KH^{-1}(Y) = KH^{o}(Y\times B^{1}, Y\times S^{o})$ peut être représenté par un élément différence $\alpha : E_o\times S^{o} \to E_1\times S^{o}$ où $E_i \to X$ $(i = 0,1)$ sont des fibrés vectoriels et α un isomorphisme, on voit que la relation (3.2) a lieu pour tout $y \in KH^{-1}(Y)$.

Si, au regard du théoèrme de structure - théorème II.1.1- nous identifions tout élément $y \in K^{*}(Y)$ à l'élément $1 \otimes y$ de $K^{*}(+) \otimes K^{*}(Y)$, nous pouvons réécrire sous la forme

2.3. $$1 \otimes s(y) = \mu_2^2(1 \otimes ct(y)) , \qquad y \in KH^{-1}(Y)$$

en utilisant la relation $\mu_2^4 = 1$.

Dans notre cas, si pour un certain i, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$, $\pi_i^o(\rho_{2n})$ est de type quaternionique, soit $\xi_i \in KH^{-1}(X_{n,k})$ tel que $s(\xi_i) = \beta(\pi_i^o(\rho_{2n}))$. En appliquant (2.3) nous obtenons

$$1 \otimes \beta(\pi_i^o(\rho_{2n})) = \mu_2^2(1 \otimes ct(\xi_i)).$$

Appelons alors θ_i les π_i^o qui sont de type réel et ϕ_i les π_i qui sont de type quaternionique. Nous avons pour $n-k+1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \dots < i_q \leqslant n$; $1 \leqslant q \leqslant n \quad p \leqslant q$

$$1 \otimes \beta(\theta_{i_1})\dots\beta(\theta_{i_p})\cdot\beta(\phi_{i_{p+1}})\dots\beta(\phi_{i_q}) = (\mu_2^2)^{q-p}(1 \otimes c(x_{i_1})\dots c(x_{i_p})$$

$$ct(\xi_{i_{p+1}})\dots ct(\xi_{i_q})) =$$

$$(\mu_2^2)^{q-p}(1 \otimes c(x_{i_1}\dots x_{i_p}.t(\xi_{i_{p+1}}).t(\xi_{i_q})) \qquad 2.4.$$

Puisque les monômes dans le nombre de gauche de (2.4) forment une $K^*(+)$-base de $K^*(+) \otimes K^*(X_{n,k})$ d'après la proposition III.1.1, nous avons donc exhibé une $K^*(+)$ base constituée de complexifié de classes réelles. On remarquera que la multiplication par une puissance de μ_2^2 ne pose en effet aucun problème puisque μ_2^2 est inversible dans $K^*(+)$.

Par conséquent, le théorème de structure s'applique et nous avons démontré la

Proposotion III.2.5. La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée $KO^*(X_{n,k})$ est additivement isomorphe à $\Lambda_{KO^*(+)}(x_i, t(\xi_j))$, algèbre extérieure sur k générateurs. Il s'ensuit la

Proposition III.2.6. Pour tout entier i, on a un isomorphisme de groupes abéliens

$$\widetilde{KO}^i(X_{n,k}) \simeq \bigoplus_p [\widetilde{H}^p(X_{n,k} ; \mathbb{Z}) \otimes \widetilde{KO}^{i-p}(S^o)].$$

<u>Démonstration</u> : Nous procédons de la même manière que dans le cas des groupes symplectiques. Nous estimons l'ordre de la torsion dans l'algèbre Z_8-gradué $KO^*(X_{n,k})$ en nous servant de la proposition III.2.5. Puis, nous remarquons que le lemme II.3.1 reste valable lorsqu'on remplace $Sp(n)$ par $X_{n,k}$ et nous en déduisons comme dans la démonstration de la proposition II.3.2 que la torsion dans la $\mathbb{Z}$ algèbre $\mathbb{Z}_8$-graduée est isomorphe à celle du terme E_2 de la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH lui correspondant. Le résultat annoncé pour les groupes $\widetilde{KO}^i(X_{n,k})$ s'ensuit.

CHAPITRE IV

K-THEORIE REELLE DE L'ESPACE HOMOGENE G_2/T

IV.0. Introduction.

Soit G_2 le groupe de Lie exceptionnel de rang 2 et de dimension 14, et soit T un tore maximal de G_2 : on sait, notamment d'après Bott et amuelson [BO-SA] que la cohomologie entière de G_2/T est sans torsion. Plus précisément, on a :

$$H^2(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \cong H^4(G_2/T\ ;\ Z) \cong H^6(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \cong H^8(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \cong$$

$$H^{10}(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$H^o(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \cong H^{12}(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ et de plus les nombres de Betti de G_2/T sont nuls en degré impair. L'application de la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH en K-théorie complexe montre immédiatement que

$$K^{-1}(G_2/T) = 0$$

$$K^o(G_2/T) \simeq \bigoplus_{i=0}^{6} H^{2i}(G_2/T\ ;\ \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{(12)}.$$

Dans ce chapitre, on calcule les groupes de $\widetilde{KO}$-théorie de G_2/T ; la structure de ces groupes est donnée par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\widetilde{KO}^{-i}(G_2/T)$	$\mathbb{Z}^{(5)}$	0	$\mathbb{Z}^{(6)}$	$\mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z}^{(5)}\oplus\mathbb{Z}_2^{(2)}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^{(6)}\oplus\mathbb{Z}_2$	0

(0.1)

1. *Premiers résultats.*

On pose dorénavant $X = G_{2/T}$ et on utilise la suite exacte longue de Bott associée à X, soit

$$\to \widetilde{KO}^i(X) \xrightarrow{c} \widetilde{K}^i(X) \xrightarrow{r\beta^{-1}} \widetilde{KO}^{i+2}(X) \xrightarrow{d} \widetilde{KO}^{i+1}(X) \to \dots \ .$$

X étant sans torsion, il résulte alors de cette suite et de la relation $rc = 2$ (voir chap. 0) que :

$$\mathrm{Ker}\{c : \widetilde{KO}^i(X) \to \widetilde{K}^i(X)\} = \mathrm{Im}\{d : \widetilde{KO}^{i+1}(X) \to \widetilde{KO}^i(X)\} = \mathrm{Tors}(\widetilde{KO}^i(X))$$

où comme précédemment $\mathrm{Tors}(\widetilde{KO}^i(X))$ désigne le sous-groupe de torsion de $\widetilde{KO}^i(X)$.

De plus, la trivialité des groupes $\widetilde{K}^i(X)$ pour i impair montre que $d : \widetilde{KO}^i(X) \to \widetilde{KO}^{i-1}(X)$ est une injection de $\widetilde{KO}^i(X)$ dans $\widetilde{KO}^{i-1}(X)$ (i impair). En récapitulant, on a la

Proposition IV.1.1.

a) $\widetilde{KO}^i(X) = \mathrm{Tors}(\widetilde{KO}^{i-1}(X))$ pour tout i impair

b) $\widetilde{KO}^i(X) = F^i(X) \oplus \widetilde{KO}^{i+1}(X)$ pour i pair ($F^i(X)$: partie libre de $\widetilde{KO}^i(X)$).

Pour déterminer le rang des $\mathbb{Z}$-modules $\widetilde{KO}^i(X)$ avec i pair, on procède comme suit : d'après un résultat de ([TH], page 139)

$$\widetilde{KO}^o(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \widetilde{H}^{4*}(X ; Z) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}, \text{ d'où}$$

$$F^o(X) \cong H\,(X ; \mathbb{Z}) \oplus H^8(X ; \mathbb{Z}) \oplus H^{12}(X ; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{(5)}.$$

Alors, en posant $d_i = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\widetilde{KO}^i(X)$, la suite exacte courte

$$0 \to \widetilde{KO}^i(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \xrightarrow{c \otimes 1_{\mathbb{Q}}} K^i(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \xrightarrow{r\beta^{-1} \otimes 1_{\mathbb{Q}}} \widetilde{KO}^{i+2}(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \to 0$$

déduite de celle de Bott, fournit la relation

1.2. $$d_{i+2} = 11-d_i \quad ; \quad 0 \leqslant i \leqslant 4$$

(Rappelons que $\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} \tilde{K}^i(X) = 11$ pour i pair).

Par suite $d_o = 5$; $d_2 = 6$; $d_4 = 5$ et $d_6 = 6$.

Remarque. il va sans dire que ces résultats sur les parties libres des groupes considérés peuvent être obtenus comme conséquence de la proposition 0.8.

Pour les entiers i impairs, la détermination des groupes de torsion $\tilde{KO}^i(X)$ se fait au moyen de la suite spectrale d'ATIYAH-HIRZEBRUCH en $\tilde{KO}$-théorie dans laquelle nous avions remarqué que certaines différentielles sont reliées aux opérations de Steenrod.

2. *Cohomologie de* $X = G_{2/T}$ *et carrés de Steenrod.*

Pour déterminer l'action des carrés de Steenrod sur $X = G_{2/T}$, il est nécessaire d'avoir une connaissance plus approfondie de la cohomologie de cet espace. D'une manière générale, soit G un groupe de Lie compact, connexe et soit T un tore maximal de G, on sait que les nombres de Betti de G/T sont nuls en degré impair. Posons $\operatorname{rang} G = \ell$ et $\dim G = \ell+2m$. (ceci est toujours le cas sous les hypothèses faites sur G). Dans [BO-SA] Bott et Samuelson ont construit un espace B^m et une application f de B^m dans G/T tels que : d'une part, B^m est sans torsion, et, d'autre part la cohomologie entière de G/T s'identifie à une sous-algèbre de $H^*(B^m ; \mathbb{Z})$ contenant $f^*(H^2(G/T ; \mathbb{Z}))$ (f^* est l'homomorphisme induit en cohomologie par f). De plus, il existe une Z-base $\{x_1,x_2,\ldots x_m\} \in H^2(B^m ; \mathbb{Z})$ telle que $H^*(B^m ; \mathbb{Z})$, en tant qu'algèbre s'identifie au quotient $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_m]/I$ de l'algèbre polynômiale $\mathbb{Z}[x_1,x_2, \quad ,x_m]$ par l'idéal I engendré par les éléments $y_k = x_k^2 + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}\, x_i \cdot x_k$ où les $a_{i,k}$ sont les entiers de Cartan de G. On a alors une description de la cohomologie entière de G/T au moyen de x_i.

Pour G_2 il en résulte alors les faits suivants : (voir [BO-SA]) les éléments x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 de $H^2(B^6 ; \mathbb{Z})$ vérifient les relations

2.1.
$$x_1^2 = 0$$
$$x_2^2 = x_1x_2$$
$$x_3^2 = (x_1-3x_2).x_3$$
$$x_4^2 = -(x_2+x_3).x_4$$
$$x_5^2 = -(x_1+x_3+3x_4).x_5$$
$$x_6^2 = (-x_1+x_2-x_4-x_5).x_6$$

De plus, en posant $\alpha = -x_1+3x_2+2x_3+3x_4+x_5$ et $\beta = x_1-2x_2-x_3-x_4+x_6$, on a

2.2.
$$\alpha^2 + 3\alpha\cdot\beta + 3\beta^2 \quad ; \quad \alpha^6 = \beta^6 = 0.$$

La cohomologie entière de $X = G_{2/T}$ est engendrée additivement par les $\alpha\cdot\beta^k$ et β^k, $0 \leqslant k \leqslant 5$. De plus, β^3 est la première "puissance" de β divisible par 2 et, en tant que groupe abélien libre, une $\mathbb{Z}$-base de $H^*(X ; \mathbb{Z})$ est donnée par $\{1,\alpha,\beta,\alpha\beta,\beta^2,\alpha\beta^2,\beta^3/2,\alpha\cdot\beta^3/2,\beta^4/2,\alpha\cdot\beta^4/2, \beta^5/2,\alpha\cdot\beta^5/2\}$. Le calcul des éléments de cette base en fonction des x_i est long et un peu fastidieux. Nous en donnons, dans la mesure de notre intérêt les grandes lignes :

2.3.
$$\begin{aligned}\beta^3 = {} & 2x_1x_2x_4 + 2x_1x_2x_6 + 2x_1x_3x_6 - 4x_1x_4x_6 \\ & - 2x_1x_5x_6 - 2x_2x_3x_6 + 6x_2x_4x_6 + 4x_2x_5x_6 \\ & + 2x_3x_4x_6 + 2x_3x_5x_6 + 2x_4x_5x_6\end{aligned}$$

2.4. $$\beta^3/2 = x_1x_2x_4 + x_1x_2x_6 + x_1x_3x_6 - 2x_1x_4x_6 - x_1x_5x_6 - x_2x_3x_6 + 3x_2x_4x_6 + 2x_2x_5x_6 + x_3x_4x_6 + x_3x_5x_6 + x_4x_5x_6 \ .$$

on remarquera que les x_i étant de degré pair, commutent entre eux.

Posons $\rho(y) = \bar{y}$ pour tout $y \in H^*(X ; \mathbb{Z})$, ρ étant la réduction modulo 2 ; alors

2.5. $$\overline{\beta^3/2} = x_1x_2x_4 + x_1x_2x_6 + x_1x_3x_6 + x_1x_5x_6 + x_2x_3x_6 + x_2x_4x_6 + x_3x_4x_6 + x_3x_5x_6 + x_4x_5x_6 \quad (\text{mod } 2).$$

Sq^2 étant une dérivation de l'algèbre $H^*(X ; \mathbb{Z}_2)$, le calcul de son action se fait en utilisant essentiellement la formule de Cartan [ST]. En particulier, on notera qu'en raison de la nullité des nombres de Betti en degré impair (ce qui entraîne que $Sq^1 = 0$), tout élément u de $H^2(X ; \mathbb{Z}_2)$ vérifie la formule

2.6. $$Sq^2(u^k) = k\, u^{k+1} \qquad (k \geq 1).$$

Un calcul (relativement long) utilisant cette relation et les relations (2.1) montre alors que

2.7. $$Sq^2(\overline{\beta^3/2}) = 0.$$

De tout ce qui précède, il s'ensuit le lemme suivant :

Lemme. IV.2.8.

a) $Sq^2(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}^2 = \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} + \bar{\beta}^2$; $Sq^2(\bar{\beta}) = \bar{\beta}^2$;

b) $Sq^2(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}) = 0$; $Sq^2(\bar{\beta}^2) = 0$;

c) $Sq^2(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}^2) = 0$; $Sq^2(\overline{\beta^3/2}) = 0$;

d) $Sq^2(\bar\alpha\cdot\frac{\overline{\beta^3}}{2}) = \frac{\overline{\beta^5}}{2} + \bar\alpha\cdot\frac{\overline{\beta^4}}{2}$; $Sq^2(\frac{\overline{\beta^4}}{2}) = \frac{\overline{\beta^5}}{2}$

e) $Sq^2(\bar\alpha\cdot\frac{\overline{\beta^4}}{2}) = 0$; $Sq^2(\frac{\overline{\beta^5}}{2}) = 0$.

<u>Démonstration</u> : a), b) et c) résultent directement des relations 2.2 et 2.6 tandis que pour d) et e) il suffit d'écrire $Sq^2(\bar\alpha\cdot\frac{\overline{\beta^k}}{2})$ $(k \geq 3)$ sous la forme $Sq^2(\bar\alpha\cdot\overline{\beta^{k-3}}\cdot\frac{\overline{\beta^3}}{2})$ et d'utiliser la relation (2.7).

3. *Détermination des groupes* $\widetilde{KO}^i(X)$ *où* $X = G_{2/T}$.

Proposition IV.3.1. $\widetilde{KO}^{-3}(X) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

<u>Démonstration</u> : D'abord, on vérifie facilement, compte tenu des coefficients de la KO-théorie que le terme $E_\infty^{6,-1}$ est la seule composante éventuellement non triviale du gradué de $\widetilde{KO}^{-3}(X)$. Puis on note que

$Sq^2(\bar\alpha\cdot\bar\beta) = 0$; $Sq^2(\overline{\beta^2}) = 0$ 2.8. b)

$Sq^2(\bar\alpha\cdot\bar\beta^2) = 0$; $Sq^2(\frac{\overline{\beta^3}}{2}) = 0$ 2.8. c)

Il en résulte que les différentielles $d_2^{4,0} = Sq^2 \circ \rho : E_2^{4,0} \longrightarrow E_2^{6,-1}$ et $d_2^{6,1} = Sq^2 : E_2^{6,-1} \longrightarrow E_2^{8,-2}$ sont triviales. Il en est de même des autres différentielles $d_s^{6-s,s-2}$ et $d_s^{6,-1}$ $(s > 2)$: en effet, pour des raisons de cohomologie évidentes (à savoir la cohomologie en dimension impaire est triviale), il suffit de considérer les seules valeurs s paires. On remarque alors que trois cas seulement peuvent se produire :

- ou bien $d_s^{6-s,s-2}$ et $d_s^{6,-1}$ ont pour domaine ou aboutissement des modules triviaux (c'est le cas de $d_4^{2,2}$ et de $d_6^{6,-1}$) ;
- ou bien leur nullité est justiciable du lemme 0.7.
- ou bien encore, ce sont des homomorphismes d'un $\mathbb{Z}$-module fini dans un $\mathbb{Z}$-module libre (c'est le cas de $d_4^{6,-1}$).

Le terme $E_2^{6,-1}$ est donc éternel et on a

$$\mathrm{Gr}\ \widetilde{KO}^{-3}(X) = E_2^{6,-1} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

et par conséquent

$$\widetilde{KO}^{-3}(X) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 .$$

Proposition IV.3.2. $\widetilde{KO}^{-1}(X) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Pour les mêmes raisons qu'en (3.1) le gradué s'écrit $\widetilde{KO}^{-1}(X) = E_\infty^{8,-1}$. D'après 2.8. d) $Sq^2(\bar{\alpha} \cdot \frac{\beta^3}{2})$ et $Sq^2(\frac{\beta^5}{2})$ sont les générateurs de $E_2^{10,-2} = H^{10}(X ; Z_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ et par conséquent la différentielle $d_2^{8,-1} = Sq^2$ est un isomorphisme de $E_2^{8,-1}$ sur $E_2^{10,-2}$. Il en résulte que $E_3^{8,-1} = \mathrm{Ker}\ d_2^{8,-1} = 0$ et donc $E_\infty^{8,-1} = 0$ d'où le résultat annoncé.

Proposition IV.3.3. $\widetilde{KO}^{-7}(X) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Evaluons les termes $E_\infty^{2,-1}$ et $E_\infty^{10,-1}$, seules composantes éventuellement non nulles du gradué de $\widetilde{KO}^{-7}(X)$. Considérons d'abord $E_\infty^{2,-1}$; d'après 2.8. a) $d_2^{2,-1} = Sq^2 : E_2^{2,-1} \to E_2^{4,-2}$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que $E_3^{2,-1} = 0$: par conséquent $E_\infty^{2,-1}$ est trivial.

Pour ce qui concerne le terme $E_2^{10,-1}$ il découle de (2.8. d)) que $Sq^2 : H^8(X ; \mathbb{Z}_2) \to H^{10}(X ; \mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme. Comme la réduction modulo 2 $\rho : H^8(X ; \mathbb{Z}) \to H^8(X ; \mathbb{Z}_2)$ est une surjection, la différentielle $d_2^{8,0} = Sq^2 \circ \rho$ est un épimorphisme de sorte que $E_3^{10,-1}$ est trivial : d'où $E_\infty^{10,-1} = 0$.

Nous avons donc établi la trivialité du gradué de $\widetilde{KO}^{-7}(X)$: IV.3.3. en résulte.

Proposition 3.4. $\widetilde{KO}^{-5}(X) \cong \mathbb{Z}_2$.

Démonstration : Le gradué de $\widetilde{KO}^{-5}(X)$ s'écrit $Gr\,\widetilde{KO}^{-5}(X) = E_\infty^{4,-1} \oplus E_\infty^{12,-1}$. Dans le calcul du terme $E_\infty^{4,-1}$, on note que $Sq^2 : H^2(X ; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^4(X ; \mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme en vertu de 2.8. a), ce qui montre que la différentielle $d_2^{2,0} = Sq^2 \circ \rho : E_2^{2,0} \longrightarrow E_2^{4,-1}$ est un épimorphisme, et par conséquent $E_3^{4,-1} = E_3^{4,-1} = 0$.

Notre démarche pour calculer le terme $E_\infty^{12,-1}$ est légèrement différente car si les différentielles $d_s^{12-s,s-2}$ sont nulles pour $s \leqslant 8$ (en utilisant notamment le lemme 0.7), en revanche $d_{10}^{2,0} : E_{10}^{2,0} \to E_{10}^{12,-1} \simeq E_2^{12,-1}$ ne satisfait aucune des conditions de trivialité déjà utilisées. Aussi, nous revenons à $\widetilde{KO}^{-6}(X)$ auquel $\widetilde{KO}^{-5}(X)$ est lié par la proposition **IV.1.1** . Plus précisément, nous allons montrer que $\widetilde{KO}^{-6}(X)$ a de la torsion.

En effet, dans le gradué de $\widetilde{KO}^{-6}(X)$, $E_\infty^{12,-2}$ est une des composantes éventuellement non triviales, puisque $E_2^{12,-2} \cong \mathbb{Z}_2$. Le calcul montre alors que $d_s^{12-s,s-3} = 0$ pour tout s ; en particulier la nullité de $d_2^{10,-1}$ résulte **de la relation** 2.7. e) et celle de $d_{10}^{2,-1}$ du fait que $E_{10}^{2,-1} = E_3^{2,-1} = 0$. Par conséquent, $E_\infty^{12,-2} = E_2^{12,-2} \cong \mathbb{Z}_2$. De plus, comme X est de dimension 12, on a :

$$F^{13}\,\widetilde{KO}^{-6}(X) = \mathrm{Ker}(\widetilde{KO}^{-6}(X) \longrightarrow \widetilde{KO}^{-6}(X_{12}=X) = 0$$

d'où

$$\mathbb{Z}_2 \cong E_\infty^{12,-2} = \frac{F^{12}\,\widetilde{KO}^{-6}(X)}{F^{13}\,\widetilde{KO}^{-6}(X)} = F^{12}\,\widetilde{KO}^{-6}(X) .$$

Ainsi, $F^{12}\,\widetilde{KO}^{-6}(X)$ est un facteur direct dans $\widetilde{KO}^{-6}(X)$. Revenant à $\widetilde{KO}^{-5}(X)$, il résulte de la proposition 1.1. q) que $\widetilde{KO}^{-5}(X) \cong \mathbb{Z}_2$.

Finalement, des propositions 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 et de la proposition 1.1, il résulte que les groupes $\widetilde{KO}^{i}(X)$ sont bien ceux donnés par le tableau (0.1).

REFERENCES

[A] ATIYAH, M.F - K-theory. Benjamin, New-York, 1967.

[A1] ATIYAH, M.F - K-theory and Reality. Quart. J. Math. Oxford (2) 17 (1966), 367-86.

[A-H] ATIYAH, M.F. ; HIRZEBRUCH, F. - Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. Symp. Pure Math. 3. A.M.S Proc. 1961.

[AD] ADAMS, J.F. - Lecture on Lie groups. Benjamin 1969.

[B-S] BOREL, A. ; SERRE, J.P. - Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. A.M. J. Math. 75 (1953) 409-440.

[BO] BOTT, R. - Lectures on K(X). Benjamin, New-York, 1969.

[BO-SA] BOTT, R, and SAMUELSON, H. - Applications of the theory of Morse to symmetric spaces. 80 (1958), 965-1029.

[G-L] GITLER, S. and KEE YUEN LAM. - The K-theory of the Stiefel manifolds. p. 35-66 Berlin, Springer-Verlag.

[HOD] HODGKIN, L. - K-theory of Lie groups. Topology 6 (1967).

[HOD1] HODGKIN, L. - An equivariant formula in K-theory. Preprint of the University of Warwick.

[HOG] HOGGAR. - On the KO of the Grassmanians. Quart. J. Math. (2) 20 (1969), 447-463.

[HUS] HUSEMOLLER. - Fibre bundles. Mc. Graw Hill, 1966.

[L] LAZAROV, C.- Secondary characteristic classes in K-theory. Trans. Am. Math. Soc. t. 136, 1908.

[R] RIBEIRO, C. - Thèse de 3ème cycle - Université de Lille I, 1984. - C.R.A.S. Paris t. 299, série I, n°11, 1984.

[RO] ROUX, A. - Application de la suite spectrale de Hodgkin au calcul de la K-théorie des variétés de Stiefel. Bull. Soc. Math. France 99, 1971, 345-368.

[SE] SEYMOUR, R.M. - The Real K-theory of Lie groups and homogeneous spaces. Quart. J. Math. Oxford (2), 24 (1973).

[SP] SPANIER, E. - Algebraic Topology. Mac Graw Hill, 1966.

[ST] STEENROD, N. - Cohomology operations. Ann. Math. Studies 50, 1962.

[TH] THOMAS, A. - A relation between K-theory and cohomology. Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974).

[TO] TODA. - Order of the identity class of suspension spaces. Ann. of Math. 78, (1963) 300-325.

[W1] WU, ZHEN DE ; SHIZE [Liu, Zong Ze]. The KO-groups and J-groups of real (quaternionic) Stiefel Manifolds $V_{n,2}$ $(X_{n,2})$. Acta. Math. Sinica 24 (1981) n°3, 378-382.

[W2] WU, ZHEN DE. - The KO-groups of Stiefel Manifolds $O_{n,3}$. Acta. Mat. Sinica 25 (1982) n°6, 724-730

* *

*

RÉSUMÉ

Dans une première partie de ce travail, on étudie la torsion dans les groupes de K-théorie réelle des variétés de Stiefel complexes $W_{n,k}$. Moyennant des hypothèses de parité sur n et k, on exhibe des groupes $\widetilde{KO}^i(W_{n,k})$ qui sont sans torsion.

Dans une seconde partie, on s'intéresse aux variétés de Stiefel quaternioniques. Tout d'abord, on détermine les groupes de KO-théorie des groupes symplectiques $Sp(n)$, en utilisant notamment un résultat de R.M. SEYMOUR sur la KR-théorie des groupes de Lie et de leurs espaces homogènes. On établit ensuite que les résultats obtenus valent encore pour les variétés de Stiefel quaternioniques.

Enfin, on calcule la K-théorie réelle du quotient $G_{2/T}$ du groupe de Lie exceptionnel G_2 par un tore maximal T.

MOTS CLES : C.W. complexe sans torsion, cohomologie, suite spectrale, représentation linéaire.