55376
1985
1

55376
1985
1

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Sabah FAKIR qui n'a ménagé aucun effort pour que ce travail soit accompli dans les meilleures conditions.

Mes vifs remerciements également à Monsieur le Professeur Michel WALDSCHMIDT qui m'a conseillé et guidé pour la réalisation de cette thèse.

Les discussions que j'ai eues avec Monsieur le Professeur Jean WUSTHOLZ m'ont été très profitables ; il a montré beaucoup d'intérêt pour ce travail, je lui en suis reconnaissant.

Je remercie aussi Madame le Professeur Nicole ZINN-JUSTIN d'avoir présidé le jury.

La frappe soigneuse est l'oeuvre de Madame Raymonde BERAT ; je l'en remercie ainsi que Mesdames Françoise WDOWCZYK, Monique LLORET, Messieurs Albert GOURNAY et Michel PROVOST et également tout le personnel de l'U.E.R. de Mathématiques de l'Université de LILLE I.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

AVANT-PROPOS

En 1974, G.V. Chydnovsky démontre (cf. introduction, th. 8) que des corps du type $\mathbb{Q}(\{e^{x_i y_j}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \ell\})$, où $x_1, \ldots, x_k$ (resp. $y_1, \ldots, y_\ell$) désignent des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant une hypothèse de mesure d'indépendance linéaire, ont "des grands degrés de transcendance" sur $\mathbb{Q}$.

L'un des ingrédients essentiels de la méthode de Chydnovsky est un critère d'indépendance algébrique, amélioré notamment par E. Reyssat (cf. [Re]).

M. Waldschmidt et Zhu-Yao-Chen donnent une généralisation en plusieurs variables de ces critères (cf. Introduction, th. 10).

Le but de ce travail est de donner un raffinement effectif et quantitatif du résultat de Chydnovsky.

Pour cela, nous commençons par démontrer (cf. théorème 1.I) un raffinement effectif d'un critère de M. Waldschmidt et Zhu-Yao-Chen. Ce raffinement fait intervenir la constante absolue $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{2^i-1}$. On démontre que $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{2^i-1} = 3{,}46274663\ldots$ (cf. chapitre I, § 2). Il serait intéressant de savoir si ce nombre est transcendant.

Ensuite, nous appliquons ce critère effectif, pour obtenir une "mesure d'approximation simultanée" des nombres $e^{x_i y_j}$. Plus précisément, nous démontrons (cf. chapitre II, corollaire 1.II) le théorème suivant :

Enoncé du théorème : Soient $n \geq 1$, $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ n nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et K un corps de degré fini sur $\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$.

On pose $\kappa = \dfrac{k\ell}{k+\ell}$.

Théorème.- On suppose $\kappa > 2^n$. Alors, il existe une constante $c \geq 1$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait la propriété suivante :

il existe un nombre réel T_o tel que pour tout nombre réel $T \geq T_o$ et tout $(\gamma_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}}$ élément de $K^{k\ell}$ satisfaisant à : $\max\limits_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T$,

on ait :

$$\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| \geq \exp\left(-cT^{3,5.\frac{\kappa.2^n}{\kappa-2^n}+\varepsilon}\right) .$$

INTRODUCTION

Il existe quatre méthodes pour démontrer l'indépendance algébrique.

1ère méthode : *Approximation diophantienne.*

En 1844, Liouville construit une classe de nombres transcendants appelés "nombres de Liouville" à l'aide du théorème suivant :

Théorème 1.- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que :
il existe une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})_n$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \neq \frac{p_n}{q_n}$ et $\lim_{n\to\infty} q_n^n \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0$.

Alors, x est transcendant.

On étend ce théorème pour obtenir une indépendance algébrique.

2ème méthode : *Méthode de Siegel.*

En 1873, Hermite démontre la transcendance de e. La technique consiste à approcher la fonction exponentielle par certaines fractions rationnelles "approximants de Padé".

En développant la méthode d'Hermite, Lindeman en 1882 démontre la transcendance de π et énonce un résultat plus général qui a été complètement démontré par Weierstrass. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Lindemann-Weirstrass.

Théorème 2 (Lindemann-Weirstrass).- Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ algébriquement indépendants.

On trouve une démonstration dans [Bak 1].

En 1929, Siegel étend le théorème 2 en remplaçant la fonction exponentielle par des E fonctions du type $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ vérifiant des équations différentielles linéaires (cf. [Sig]).

L'un des outils de cette méthode, qui deviendra un outil fondamental dans la transcendance, est un lemme sur la résolution d'équations linéaires homogènes en nombres entiers, basé sur le principe des tiroirs.

Ce résultat est connu sous le nom de "lemme de Siegel" (cf. Lemme 1.0).

En 1954, Schidlovsky [Sch] généralise les résultats obtenus par Siegel.

3. *Méthode de Mahler.*

En 1929, K. Mahler obtient l'indépendance algébrique des valeurs de certaines fonctions transcendantes satisfaisant à des équations fonctionnelles.

Cette méthode a été développé par J.H. Loxton et A.J. Van der Poorten [LO-PO].

4. *Méthode de Gelfond-Schneider.*

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à cette méthode, créé en 1949 par A.O. Gelfond, ainsi qu'à ses développements.

Cette méthode repose sur deux outils essentiels :

1. des outils algébriques :

   - des critères d'indépendance algébrique (cf. introduction, th. 3 et th. 10).

   - des lemmes de "petites valeurs" sur les polynômes exponentiels, (cf. introduction, th. 13.0).

2. des outils analytiques : "les lemmes de Schwartz" et les "lemmes d'approximation", (cf. th. 15.0).

Un aperçu historique de la méthode de Gelfond sur l'indépendance algébrique :

En 1949, Gelfond [Ge, Ch. III, § 4] démontre un critère de transcendance appelé "critère de Gelfond" qui remplace l'inégalité de Liouville (si α est un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré n, $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ses conjugués et d un dénominateur de α, alors

$$- n(t(\alpha) \leqslant \mathrm{Log}|\alpha_i| \qquad \text{pour tout} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

où $t(\alpha) = \max(\mathrm{Log}\ d, \mathrm{Log}|\alpha_1|,\ldots,\mathrm{Log}|\alpha_n|))$ dans une démonstration de transcendance.

Ce critère lui a permis d'étendre la méthode pour démontrer l'indépendance algébrique de deux nombres valeurs de la fonction exponentielle, plus précisément le cas particulier $d = 3$ de sa conjecture.

Conjecture de Gelfond : Si β est un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré $d \geqslant 2$ et si α est algébrique sur $\mathbb{Q}$ différent de 0 et 1, alors :

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}\ \mathbb{Q}(\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) = d-1.$$

Ce problème est un cas particulier de la conjecture de Schanuel :

Conjecture de Schanuel : Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors :

$$\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n, e^{\alpha_1},\ldots,e^{\alpha_n}) \geqslant n$$

Le critère de transcendance de Gelfond dit critère de Gelfond est donné par R. Tijdeman [Tij 1] sous la forme simplifiée suivante :

Théorème 3.- Soit $\theta \in \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $N > N_o$, il existe $P_N \in \mathbb{Z}[X]$ tel que :

$$|P_N(\theta)| < \exp(-6N^2)$$

et $\qquad \deg P_N + \mathrm{Log}\ H(P_N) < N$

où $H(P_N)$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de P.

Alors, θ est algébrique.

Pour pouvoir appliquer ce critère, Gelfond démontrer un "lemme de zéro" sur les polynômes exponentiels. Ce lemme a été amélioré par R. Tijdeman [Tij 2].

Théorème 4.- Soit $f(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z)\exp(w_k z)$ où P_k est un polynôme de degré $\leqslant d$ pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant m$.

On pose : $W = \max_{k=1} |w_k|$ et $n(f,R)$ le nombre de zéros de f dans un disque de rayon R :

Si f est non identiquement nulle, alors

$$n(f,R) \leqslant 3dm + 4RW.$$

En utilisant le lemme de zéro, W.D. Brownawell [Brow 1], A.A. Shmelev [Shm 1] et M. Waldschmidt [Wald 1] améliorent indépendamment le premier résultat de Gelfond sur l'indépendance algébrique et obtiennent le théorème suivant :

Enoncé du théorème :

Soient $x_1,\ldots,x_k$ (resp. $y_1,\ldots,y_\ell$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants. On pose :

$$S_1 = \{e^{x_i y_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell\}$$

$$S_2 = \{x_i, e^{x_i y_i} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell\}$$

$$S_3 = \{x_i, y_j, e^{x_i y_j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant \ell\}.$$

Théorème 5.- On a :

a) si $\frac{k\ell}{k+\ell} \geqslant 2$ alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_1) \geqslant 2$

b) si $\frac{k\ell+k}{k+\ell} \geqslant 2$ alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_2) \geqslant 2$

c) si $\frac{k\ell}{k+\ell} > 1$ alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_3) \geqslant 2$.

Un raffinement du critère de tanscendance de Gelfond a permis à W.D. Brownawell [Brow 2] et M. Waldschmidt [Wald 2] de résoudre le huitième problème de Schneider [Sch. p. 138] : l'un des deux nombres e^e et e^{e^2} est transcendant.

Une version du critère de Gelfond raffiné est donné par M. Waldschmidt [Wald 3], c'est le théorème 6.

Théorème 6.- Soient θ un nombre complexe, $(t_N)_{N\geq 0}$ et $(d_N)_{N\geq 0}$ deux suites de nombres ≥ 1 et $(P_N)_{N\geq 1}$ une suite de polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$. On définit :

$$T_N = 2(d_{N-1}+d_N+d_{N+1})(t_{N-1}+t_N+t_{N+1}) \qquad (N \geq 1).$$

On suppose que : $\lim\limits_{N\to\infty} T_N = +\infty$. On suppose de plus que :

$$|P_N(\theta)| < e^{-T_N}$$

et $\deg P_N \leq d_N$, $\deg P_N + \log H(P_N) \leq t_N$.

Alors θ est algébrique et $P_N(\theta) = 0$ pour tout $N \geq 1$.

Jusqu'en 1970, la méthode de Gelfond ne permettait pas de démontrer l'indépendance algébrique de plus de deux nombres.

En 1971, W.D. Brownawell [Brow 3] et A.A. Shmelev [Shm 2], en utilisant des mesures de tanscendance de certains nombres, obtiennent l'indépendance algébrique de 3 nombres valeurs de la fonction exponentielle.

En 1973, G.V. Chydnovsky [Ch 1] étend le critère de Gelfond pour obtenir un critère d'indépendance algébrique de plusieurs nombres et à l'aide d'un "lemme de petites valeurs" sur les polynômes exponentielles (cf. [Tij. 4], théorème 1) obtient l'indépendance algébrique de 3 nombres sans utiliser de mesure de transcendance. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 7.- Soient $x_1,\ldots,x_k$ (resp. $y_1,\ldots,y_\ell$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et vérifient l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_1) : il existe $L_o > 0$, $H_o > 0$ et c une constante (ne dépendant que de $x_1,\ldots,x_h,y_1,\ldots,y_\ell$) tels que pour tout $L > L_o$ et $H > H_o$ et pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbb{Z}^k$ et $(h_1,\ldots,h_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ vérifiant :

$$0 < \max_{1\leq i\leq h} |\lambda_i| \leq L \quad \text{et} \quad 0 < \max_{1\leq j\leq \ell} |h_j| \leq H.$$

on ait

$$\left|\sum_{i=1}^{h} \lambda_i x_i\right| \geqslant \exp(-cL) \quad \text{et} \quad \left|\sum_{j=1}^{\ell} h_j y_j\right| \geqslant \exp(-cH).$$

Alors, on a :

a) si $\frac{k\ell}{k+\ell} \geqslant 4$, alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_1) \geqslant 3$;

b) si $\frac{k\ell+k}{k+\ell} \geqslant 4$, alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_2) \geqslant 3$;

c) si $\frac{k\ell}{k+\ell} > 3$, alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_3) \geqslant 3$.

(S_1, S_2 et S_3 désignent les ensembles définis dans le théorème 5).

Remarquons que l'hypothèse d'indépendance linéaire (C_1) est satisfaite dans de nombreux exemples : notamment quand les x_i (resp. y_j) sont des nombres algébriques, ou des logarithmes de nombres algébriques ou des puissances d'un nombre transcendant "usuel".

Dans ces exemples, on peut même remplacer dans (C_1), $\exp(-cL)$ par $\exp(-c \log L)$ (resp. $\exp(-cH)$ par $\exp(-c \log H)$).

En 1974, au moyen du semi-résultant (cf. chapitre 0, § 3) G.V. Chydnovsky (cf. [Ch 2] et [Ch 3]) généralise ces résultats et obtient les premiers énoncés fournissant de grands degrés de transcendance, plus précisément le théorème 8.

Théorème 8.- Soient $x_1,\ldots,x_k$ (resp. $y_1,\ldots,y_\ell$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_1).

Soit n un entier $\geqslant 1$. On a :

a) si $\frac{k\ell}{k+\ell} \geqslant 2^n$, alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_1) \geqslant n+1$;

b) si $\frac{k\ell+k}{k+\ell} \geqslant 2^n$, alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_2) \geqslant n+1$;

c) si $\frac{k\ell+k+\ell}{k+\ell} > 2^n$, alors $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_3) \geqslant n+1$.

On obtient comme corollaire du théorème 8 une généralisation du 1er résultat de Gelfond sur l'indépendance algébrique (cas $d = 3$ de sa conjecture), c'est le théorème 9.

Théorème 9.- Soient α, β des nombres algébriques tels que : $\alpha \neq 0$, $\operatorname{Log} \alpha \neq 0$ et $d = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \geq 2$.
Alors :

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}) \geq \left[\frac{\operatorname{Log}(d+1)}{\operatorname{Log} 2}\right]$$

(où $[\ ]$ désigne la partie entière).

Pour obtenir ce théorème, on applique le théorème 8.b, dans le cas suivant :

$$k = \ell = d, \quad x_i = \beta^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad \text{et} \quad y_j = \beta^{j-1} \log \alpha, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Une esquisse de démonstration du théorème 8 est donné par G.V. Chydnovsky (cf. [Ch 4], § 7, p. 115-121).

Notons que les travaux de R. Endell [End] complètent la démonstration de G.V. Chydnovsky.

En utilisant des outils d'algèbre commutative Ju. V. Neskrenko démontre un raffinement quantitatif du théorème 9 (cf. [Nes]).

Inspiré par les idées de Chydnovsky, E. Reyssat [Re] démontre un critère d'indépendance algébrique et P. Philippon [Phi 1] applique ce critère pour obtenir un résultat analogue au théorème 8, dans le cas p-adique, mais avec une démonstration plus simple.

M. Waldschmidt et Zhu Yao Chen [Wald-Zhu] généralisent les critères d'indépendance algébrique de G.V. Chydnovsky et de E. Reyssat et obtiennent le théorème suivant :

Théorème 10.- Pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un nombre réel $c_o = c_o(n) \geq 1$ ayant la propriété suivante :

Soit $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{C}^n$ et soit η un nombre réel, $\eta \geq 1$. On suppose qu'il existe deux nombres réels N_o et c, avec $N_o > 1$ et $c > 6\, c_o^{\eta}$, tels que, pour tout nombre réel $N \geq N_o$ et tout $(z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$

satisfaisant à :

$$|z_i-\theta_i| < \exp(-2cN^{\eta}) \quad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq n$$

il existe un polynôme non nul $F \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ vérifiant :

$$t(F) \leq N$$

$$\text{et} \qquad 0 < |F(\theta_1,z_2,\ldots,z_n)| < \exp(-cN^{\eta}).$$

Alors $\eta < 2^n$.

Nous démontrons, dans le chapitre I de ce travail, un raffinement effectif de ce critère (cf. théorème I.1).

Ensuite, nous appliquons ce résultat pour obtenir un raffinement effectif quantitatif du théorème 8.a de G.V. Chydnovsky (cf. Corollaire 1.II du théorème 1.II).

Récemment, P. Philippon [Phi 2, théorème 1] par des méthodes d'algèbre commutative, améliore les critères d'indépendance algébrique précédents et, par conséquent, il obtient une amélioration du théorème 8, c'est le théorème suivant :

Théorème 11.- Soient $x_1,\ldots,x_k$ (resp. $y_1,\ldots,y_\ell$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X(\varepsilon)$ tel que pour tout $X \geq X(\varepsilon)$ et tout k-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ (resp. tout ℓ-uplet $(h_1,\ldots,h_\ell)$) d'entiers rationnels non tous nuls, de valeurs absolues $\leq X$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right| \quad \left(\text{resp.} \quad \sum_{j=1}^{\ell} h_j y_j\right) \geq \exp(-X^{\varepsilon}).$$

Alors, on a :

a) $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_1) \geq \dfrac{k\ell}{k+\ell} - 1$;

b) $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_2) \geq \dfrac{k\ell+k}{k+\ell} - 1$;

c) $\deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(S_3) \geq \dfrac{k\ell}{k+\ell}$.

Ainsi, P. Philippon résout presque "la moitié" de la conjecture de Gelfond, en effet, il obtient comme corollaire du théorème précédent, le résultat suivant :

Théorème 12.- Soient α un nombre algébrique $\neq 0,1$ et β algébrique de degré $d \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$. Alors, au moins $\left[\frac{d}{2}\right]$ des nombres $\alpha^{\beta},\ldots,\alpha^{\beta^{d-1}}$ sont algébriquement indépendants.

D'autre part, il faut noter que les travaux utilisant des outils géométrico-algébriques de Masser et Wüstholz (cf. [Mas-Wü 1] et [Mas-Wü 2]) sur les "lemmes de zéros" dans un contexte général de groupe algébrique donnent les résultats sur les grands degrés de transcendance aussi bien dans le cas exponentiel que dans le cas elliptique.

Cette méthode n'utilise pas directement de critère d'indépendance algébrique. Elle est basée essentiellement sur un "lemme de zéro" qui remplace le lemme de Tijdeman dans le cas exponentiel et un théorème de Hilbert-Nullstellensatz.

CHAPITRE 0

RESULTATS AUXILIAIRES

---

§ 1 - Lemme de Siegel.

La construction d'une fonction auxiliaire dans une démonstration de transcendance se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires homogènes dans un corps K (K de type fini), plus précisément on recherche une solution qui ne soit pas "trop grande".

Le lemme de Siegel est un outil pratique pour résoudre ce genre de problème.

La démonstration repose essentiellement sur le principe des tiroirs de Dirichlet.

Nous allons démontrer la version du lemme où $K = \mathbb{Q}$.

Lemme 1.0 (Siegel).- Soient n et m des entiers ≥ 1 et $a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ des entiers relatifs.

Soit le système des formes linéaires :

$$L_j(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i\ ,\quad 1 \leq j \leq m,\quad \text{où}\quad \underline{x} = (x_1,\ldots,x_n).$$

On pose $A = \max\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} |a_{i,j}|$.

Si $n > m$ alors il existe des entiers relatifs $x_1,\ldots,x_n$ tels que :

$$L_j(x_1,\ldots,x_n) = 0 \quad \text{pour tout } j,\ 1 \leq j \leq m$$

et $$0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq (nA)^{\frac{m}{n-m}} + 1 .$$

Preuve :

Soit X un entier tel que $(nA)^{\frac{m}{n-m}} - 1 \leq 2X < (nA)^{\frac{m}{n-m}} + 1$.

Pour $0 \leq |x_i| \leq X$, $1 \leq i \leq n$, on a $L_j(x_1,\ldots,x_n) \leq nAX$, $(1 \leq j \leq n)$.
Posons : $Y = nAX$.

$$\text{Card } \{(x_1,\ldots,x_n),\ x_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq |x_i| \leq X\} = (2X+1)^n$$

$$\text{Card } \{L_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,L_m(x_1,\ldots,x_n),\ 0 \leq |x_i| \leq X\} \leq (2Y+1)^m \quad ;$$

or : $$\begin{aligned}(2X+1)^n &\geq (2X+1)^{n-m} \times (2X+1)^m \\ &\geq (nA)^m \times (2X+1)^m \\ &> (2nAX+1)^m\end{aligned}$$

ou encore $(2X+1)^n > (2Y+1)^m$.

D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe $x_1'',\ldots,x_n''$ avec $0 \leq |x_i''| \leq X$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_1',\ldots,x_n'$ avec $0 \leq |x_j'| \leq X$, pour tout $1 \leq j \leq n$, tels que : $\underline{x}'' \neq \underline{x}'$ et $L_j(\underline{x}'') = L_j(\underline{x}')$, pour tout j, $1 \leq j \leq m$ ou encore $L_j(\underline{x}''-\underline{x}') = 0$, pour tout j, $1 \leq j \leq m$.

Posons : $\underline{x} = \underline{x}'' - \underline{x}'$, on a $\underline{x} \neq 0$ puisque $\underline{x}'' \neq x'$,

$$L_j(\underline{x}) = 0, \text{ pour tout } j,\ 1 \leq j \leq m$$

$$\text{et } 0 < \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 2X \leq (nA)^{\frac{m}{n-m}} + 1$$

§ 2 - *Notion de taille d'un polynôme.*

Définition.- Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$. On désigne par $H(P)$ le maximum des valeurs absolues des coefficients de P

et par $d^e_{X_i} P$ <u>le degré de</u> P <u>par rapport à</u> X_i. On définit la taille de P et on note $t(P)$ le nombre complexe :

$$\max\{\log H(P), 1+d^e_{X_1} P, \ldots, 1+d^e_{X_n} P\} .$$

Lemme 2.0.- Soient $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. On a les inégalités (1) et (2) suivantes :

$$t(\sum_{i=1}^{m} P_i) \leq \max_{i=1}^{m} t(P_i) + \log m \qquad (1)$$

et

$$t(\prod_{i=1}^{m} P_i) \leq (n+1) \sum_{i=1}^{m} t(P_i) . \qquad (2)$$

Preuve : On a : $H(\sum_{i=1}^{m} P_i) \leq m.\max_{i=1}^{m} H(P_i)$ et $\deg_{X_j} (\sum_{i=1}^{m} P_i) \leq \max_{i=1}^{m} \deg_{X_j} P_i$, d'où l'inégalité (1).

D'autre part, on a :

$$H(\prod_{i=1}^{m} P_i) \leq \prod_{i=1}^{m} H(P_i) \times \prod_{j=1}^{m} \prod_{\ell=1}^{n} (1+\deg_{X_\ell} P_j)$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m} H(P_i) \times \prod_{j=1}^{m} \prod_{\ell=1}^{n} t(P_j)$$

$$\leq \prod_{i=1}^{m} H(P_i) \times (\prod_{j=1}^{m} t(P_j))^n$$

et $\quad 1 + \deg_{X_j} (\prod_{i=1}^{m} P_i) \leq 1 + \sum_{i=1}^{m} \deg_{X_j} P_i$.

D'où $\quad t(\prod_{i=1}^{m} P_i) \leq (n+1) \sum_{i=1}^{m} t(P_i)$.

Lemme 3.0.- Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ non nul. Soient $(z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ et Z un nombre réel ≥ 1 vérifiant :

$$\max_{1\leq i\leq m-1} |z_i| \leq Z.$$

Si $P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)$ est non nul, alors

$$t(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)) \leq m(2+\mathrm{Log}\ Z)t(P).$$

Preuve :

On a : $H\big(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)\big) \leq \prod_{i=1}^{m-1}\big(\deg_{X_i} P+1\big)H(P)Z^{\sum_{j=1}^{m-1}\deg_{X_j} P}$

$$\leq \big(t(P)\big)^{m-1}H(P)Z^{(m-1)t(P)}$$

et $\deg\big(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)\big) \leq \big(t(P)-1\big)$

d'où $t\big(P(z_1,\ldots,z_{m-1},X)\big) \leq m\ t(P)(2+\log Z)$.

Lemme 4.0.- Soient m un entier ≥ 1, P un polynôme de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_m]$ et $(\theta_1,\ldots,\theta_m)$ m nombres complexes.

Soient $z_1,\ldots,z_m$ m nombres complexes vérifiant :

$$\max_{1\leq i\leq m} |\theta_i - z_i| \leq \varepsilon < 1.$$

Alors, il existe une constante c_1 (ne dépendant que de m et $(\theta_1,\ldots,\theta_m)$) telle que :

$$|P(\theta_1,\ldots,\theta_m) - P(z_1,\ldots,z_m)| \leq \varepsilon c_1^{t(P)}.$$

Preuve :

$$\big|P(\theta_1,\ldots,\theta_m)-P(z_1,\ldots,z_m)\big| \leq \big|P(\theta_1,\ldots,\theta_m)-P(z_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\big| + \ldots$$

$$\ldots + \big|P(z_1,\ldots,z_{m-1},\theta_m)-P(z_1,\ldots,z_m)\big|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\Big(H(P).(1+\max_{1\leq i\leq m}|\theta_i|)^{(m-1)t(P)}\ t(P)\max_{1<k<t(P)}|\theta_j^k - z_j^k|\Big)$$

or $|\theta_j^k - z_j^k| \leq |\theta_j - z_j| \times \sum_{i=0}^{k-1} |\theta_j|^i |z_j|^{k-1-i} \leq \varepsilon k\ (1+|\theta_j|)^k$

d'où

$$|P(\theta_1,\dots,\theta_m)-P(z_1,\dots,z_m)| \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\varepsilon(1+\sum_{1\leq i\leq m} |\theta_i|)^{mt(P)} t^2(P)\ H(P)\right)$$

$$\leq m\varepsilon\,(1+\max_{1\leq i\leq m} |\theta_i|)^{mt(P)} t^2(P) e^{t(P)}$$

$$\leq \varepsilon c_1^{t(P)} \quad \text{où} \quad c_1 = 3(1+\max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|)^m\ e^3.$$

Lemme 5.0.-

Soient $R(X_1,\dots,X_m) = X_m^d + R_1(X_1,\dots,X_{m-1}).X_m^{d-1} + \dots R_d(X_1,\dots,X_{m-1})$ un polynôme de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_m]$ et $(\theta_1,\dots,\theta_m)$ m nombres complexes tels que :

$$R(\theta_1,\dots,\theta_m) = 0.$$

Soient $z_1,\dots,z_{m-1}$ nombres complexes et ε réel, $0 < \varepsilon < 1$ tels que :

$$\max_{1\leq i\leq m-1} |z_i - \theta_i| \leq \varepsilon.$$

Alors, il existe un nombre complexe z_m tel que

$$|\theta_m - z_m| \leq \left(\varepsilon c_1^{t(R)}\right)^{1/d}$$

et $$R(z_1,\dots,z_{m-1},z_m) = 0.$$

Preuve : Ecrivons $R(z_1,\dots,z_{m-1},X)$ sous la forme :

$$R(z_1,\dots,z_{m-1},X) = \prod_{i=1}^{d} (X-u_i)$$

on a $$|R(z_1,\dots,z_{m-1},\theta_m)| \geq (\min_{1\leq i\leq d} |\theta_m - u_i|)^d.$$

D'après le lemme 4.0, on a :

$$|R(z_1,\dots,z_{m-1},\theta_m) - R(\theta_1,\dots,\theta_m)| \leq \varepsilon c_1^{t(R)}.$$

Comme $R(\theta_1,\dots,\theta_m) = 0$, on a alors $|R(z_1,\dots,z_{m-1},\theta_m| \leq \varepsilon c_1^{t(R)}$

et, par suite $\min\limits_{1\leq i\leq d} |\theta_m - u_i| \leq \left(\varepsilon c_1^{t(R)}\right)^{\frac{1}{d}}$.

Soit z_m une racine de $R(z_1,\dots,z_{m-1},X)$ telle que :

$$|\theta_m - z_m| = \min_{1\leq i\leq d} |\theta_m - u_i| .$$

Alors, on a :

$$|\theta_m - z_m| \leq \left(\varepsilon c_1^{t(R)}\right)^{\frac{1}{d}}$$

et $$R(z_1,\dots,z_{m-1},z_m) = 0.$$

§ 3 - *Notion de semi-résultant.*

La notion du semi-résultant a été introduite par Chudnovsky [Ch 2] pour étendre la méthode de Gelfond à l'indépendance algébrique de plusieurs nombres valeurs de la fonction exponentielle.

Définition.- Soient $P(X) = a_o X^p + \dots + a_p = a_o \prod\limits_{i=1}^{p} (X-t_i)$ et $Q(X) = b_o X^q + \dots + b_q = b_o \prod\limits_{j=1}^{q} (X-u_j)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_o \neq 0$ et $b_o \neq 0$.

Le nombre complexe $r(P,Q) = a_o^q b_o^p \prod\limits_{\substack{i,j \\ u_j \neq t_i}} (t_i - u_j)$ est appelé semi-résultant de P et Q.

Remarques :

1°) On a évidemment $r(P,Q) \neq 0$.

2°) Si les racines de P et les racines de Q sont 2 à 2 distincts alors $r(P,Q) = R(P,Q)$ où $R(P,Q)$ désigne le résultant de P et Q.

Lemme 6.0.- Il existe un polynôme $R \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_p,Y_o,\ldots,Y_q]$ (dépendant de P et Q) de degré "total" $\leq q$ par rapport aux variables $X_o,\ldots,X_p$ et de degré "total" $\leq p$ par rapport aux variables $Y_o,\ldots,Y_q$ avec $H(R) \leq 3^{pq}$, tel que

$$r(P,Q) = R(a_o,\ldots,a_p,b_o,\ldots,b_q).$$

Pour la preuve, on utilise les mêmes arguments que ceux de ([Bak-Mass], Chap. 14, lemme 2).

Lemme 7.0.- Soit m un entier ≥ 2. Soient H et G deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_m]$ et $z_1,\ldots,z_{m-1}$ des nombres complexes.

On suppose que $H(z_1,\ldots,z_{m-1},X)$ et $G(z_1,\ldots,z_{m-1},X)$ sont non constants. Alors,
il existe un polynôme $S \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{m-1}]$ tel que :

$$S(z_1,\ldots,z_{m-1}) = r\big(H(z_1,\ldots,z_{m-1},X),G(z_1,\ldots,z_{m-1},X)\big)$$

et
$$t(S) \leq (2m+\mathrm{Log}\ 3)t(H)t(G).$$

Preuve : Posons :

$H^*(X) = H(z_1,\ldots,z_{m-1},X)$

$G^*(X) = G(z_1,\ldots,z_{m-1},X)$.

Ecrivons :

$H^*(X) = H_o(\underline{z})X^h + \ldots + H_h(\underline{z})$ avec $H_o(\underline{z}) \neq 0$

$G^*(X) = G_o(\underline{z})X^g + \ldots + G_g(\underline{z})$ avec $G_o(\underline{z}) \neq 0$

où $H_i(\underline{z}) = H_i(z_1,\ldots,z_{m-1})$ $\qquad 1 \leq i \leq h$

$G_j(\underline{z}) = G_j(z_1,\ldots,z_{m-1})$ $\qquad 1 \leq j \leq g.$

D'après le lemme 6.0, il existe $R \in \mathbb{Z}[X_o,\ldots,X_h,Y_o,\ldots,Y_g]$ de hauteur majorée par 3^{hg}, de degré "total" $\leq g$ par rapport aux variables $X_o,\ldots,X_h$ et de degré "total" $\leq h$ par rapport aux variables $Y_o,\ldots,Y_g$, tel que :

$$r(H^*(X),G^*(X)) = R(H_o(\underline{z}),\ldots,H_h(\underline{z}),G_o(\underline{z}),\ldots,G_g(\underline{z})).$$

Posons : $S(\underline{X}) = R(H_o(\underline{X}),\ldots,H_h(\underline{X}),G_o(\underline{X}),\ldots,G_g(\underline{X}))$

où $\underline{X} = (X_1,\ldots,X_{m-1})$.

On a évidemment $S(z_1,\ldots,z_{m-1}) = r(H^*(X),G^*(X))$.

Comme le degré "total" de R par rapport aux variables $X_o,\ldots,X_h \leq g$ et le degré "total" de R par rapport aux variables $Y_o,\ldots,Y_g \leq h$; on a :

$$H(S) \leq H(R)e^{m(gt(H)+ht(G))}$$

et $\qquad \deg_{X_i} S \leq g \deg_{X_i} H + h \deg_{X_i} G$

d'où $\qquad t(S) \leq t(R) + m(gt(H) + ht(G))$

$\qquad\qquad \leq t(R) + 2m\, t(G)t(H)$

or $\qquad t(R) \leq ghLog\ 3 \leq t(G)t(H)Log\ 3$

donc $\qquad t(S) \leq (2m+Log\ 3)t(G)t(H).$

Lemme 8.0.- Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant et soit θ un nombre complexe.

Soit ζ une racine de P à distance minimale de θ.

On note s la multiplicité de ζ dans P. Alors

$$|r(P,P)||\theta-\zeta|^s \leq |P(\theta)|\exp(8t^2(P)).$$

Référence ([Re], III, lemme 3.7).-

Lemme 9.0.- Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants. Soit ζ une racine de P de multiplicité s.

Si $Q(\zeta) \neq 0$, on a :

$$|r(P,Q)| \leq |Q(\zeta)|^s \times \exp(6t(P)t(Q)).$$

Référence ([Re], III, lemme 3.8).-

Lemme 10.0.- Soient $n \geq 2$ et P un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$. Soit $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{C}^n$.

Soit $(z_1,\ldots,z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que : $\max\limits_{1\leq i\leq n-1} |z_i-\theta_i| \leq 1$.

On suppose que $P^*(X) = P(z_1,\ldots,z_{n-1}, X)$ est non constant ; on considère ζ une racine de $P(z_1,\ldots,z_{n-1},X)$ à distance minimale de θ_n et on note s sa multiplicité dans $P(z_1,\ldots,z_{n-1},X)$. Alors, il existe un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tel que :

i) $H(z_1,\ldots,z_{n-1}) = r(P^*(X),P^*(X))$;

ii) $|H(z_1,\ldots,z_{n-1})||\zeta-\theta_m|^s \leq |P^*(\theta_n)|\times \exp(c_2 t^2(P))$;

iii) $t(H) \leq (2n+\mathrm{Log}\ 3)t^2(P)$

où $c_2 = 32n^2\left(1+\mathrm{Log}(\max\limits_{1\leq i\leq n} |\theta_i| + 1)\right)^2$.

Preuve :

D'après le lemme 8.0, on a :

$$|r(P^*(X),P^*(X))||\zeta- \theta_n|^s \leq |P^*(\theta_n)|\exp(8t^2(P^*)).$$

Or, d'après le lemme 7.0, il existe $H \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tel que :

$$H(z_1,\ldots,z_{n-1}) = r(P^*(X),P^*(X))$$

et $\quad t(H) \leq (2n+\mathrm{Log}\ 3)t^2(P)$.

D'autre part, comme $\max\limits_{1\leq i\leq n-1} |z_i| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n-1} (|\theta_i|+1)$, on a :

$$t(P^*) \leq 2n(1+\mathrm{Log}(\max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|+1))t(P), \text{ d'après le lemme 3}$$

d'où $|H(z_1,\ldots,z_{n-1})||\zeta-\theta_n|^s \leq |P^*(\theta_n)| \times \exp(c_2 t^2(P))$

et $t(H) \leq (2n+\log 3)t^2(P)$

où $c_2 = 32n^2(1+\log(\max\limits_{1\leq i\leq n} |\theta_i|+1))^2$.

Lemme 11.0.- Soit n un entier ≥ 2. Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ et $(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.
Soit $z_1,\ldots,z_{n-1}$ $(n-1)$ nombres complexes tels que :

$$\max_{1\leq i\leq n-1} |z_i - \theta_i| \leq 1.$$

On suppose que $P(z_1,\ldots,z_{n-1},X)$ et $Q(z_1,\ldots,z_{n-1},X)$ sont non constants, on considère ζ un nombre complexe tel que

$$P(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta) = 0 \quad \text{et} \quad Q(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta) \neq 0.$$

Soit s la multiplicité de ζ dans $P(z_1,\ldots,z_{n-1},X)$.
Alors,

il existe H un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tel que :

i) $H(z_1,\ldots,z_{n-1}) = r(P(z_1,\ldots,z_{n-1},X),Q(z_1,\ldots,z_{n-1},X))$

ii) $|H(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leq |Q(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta)|^s \times \exp(c_2 t(P)t(Q))$

iii) $t(H) \leq (2n+\log 3)t(P)t(Q)$

où $c_2 = 32n^2(1+\log(\max|\theta_i|+1))^2$.

Preuve :

D'après le lemme 9.0, on a :

$$|r(P^*,Q^*)| \leq |Q^*(\zeta)|^s \times \exp(6t(P^*)t(Q^*)).$$

Il existe, d'après le lemme 7.0, $H \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n-1}] \setminus \{0\}$ tel que :

$$H(z_1,\ldots,z_{n-1}) = r(P^*,Q^*)$$

et $\quad t(H) \leq (2n+\log 3)t(P)t(Q).$

D'autre part, on a : $t(P^*)t(Q^*) \leq n^2(2+\mathrm{Log}(\max_i|\theta_i|+1))t(P)t(Q)$

Par suite, on a : $|H(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leq |Q(z_1,\ldots,z_{n-1},\zeta)|^s \times \exp(c_2 t(P)t(Q)$

et $\quad t(H) \leq (2n+\log 3)t(P)t(Q).$

§ 4 - *Inégalité de Liouville.*

Définitions.- Soit $P(X) = a_o X^p + \ldots + a_p = a_o \prod_{j=1}^{p} (X-u_j)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_o \neq 0$.

On désigne par $M(P)$ le nombre complexe

$$|a_o| \prod_{j=1}^{p} \max(1,|u_j|).$$

Pour α un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, de polynôme minimal P_α, on pose :

$$M(\alpha) = M(P_\alpha).$$

Remarque : On a : $M(P) \leq (1+\deg P)H(P)$.

Lemme 12.0.- Soient α et β deux nombres algébriques de degrés respectivement p et q $(p > 1,\ q > 1)$.

On suppose que $\alpha \neq \beta$, alors on a :

$$|\alpha-\beta| \geq 2^{1-pq} M^{-q}(\alpha)\, M^{-p}(\beta).$$

Preuve : Soient $P(X) = a_o X^p + \ldots + a_p = a_o \prod_{i=1}^{p} (X-\alpha_i)$ (resp. $Q(X) = b_o X^q + \ldots + b_q = b_o \prod_{j=1}^{q} (X-\beta_j)$) le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ (resp. de β sur $\mathbb{Q}$).

On peut supposer sans restriction que $\alpha_1 = \alpha$ et $\beta_1 = \beta$.

On a $r(P,Q) = a_o^q b_o^q \prod_{\alpha_i \neq \beta_j} (\alpha_i - \beta_j)$

$$= (\alpha-\beta)\, a_o^q b_o^p \prod_{\substack{\alpha_i \neq \beta_j \\ (i,j)\neq(1,1)}} (\alpha_i - \beta_j)$$

or $|\alpha_i - \beta_j| \leq 2\max(1,|\alpha_i|)\max(1,|\beta_j|)$

d'où

$$|r(P,Q)| \leq |\alpha-\beta| \times 2^{pq-1} M(\alpha)^q M(\beta)^p.$$

Comme $P(X)$ et $Q(X)$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$, on a

$$|r(P,Q)| \geq 1$$

et, par conséquent, on a : $|\alpha-\beta| \geq 2^{1-pq}\, M(\alpha)^{-q}\, M(\beta)^{-p}$.

§ 5 - *Lemme de "petites valeurs"*.

L'un des ingrédients de la méthode de Gelfond pour l'indépendance algébrique est un "lemme de petites valeurs".

Dans le cas des polynômes exponentiels, Tijdeman a obtenu des résultats très fins ; il démontre [Tijd 3, p. 58 ; 10] un "lemme de zéros" pour des fonctions du type :

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} A_{\mu\nu} z^\mu e^{\alpha_\nu z} \quad ; \quad E \not\equiv 0$$

où $A_{\mu\nu}$ et α_ν sont des nombres complexes.

(une telle fonction est appelée "polynôme exponentiel" ;

plus précisément, il démontre que le nombre de zéros de E dans un disque de rayon R est inférieur ou égal à $3m + 4aR$ (où $m = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu$ et $a = \max_{\nu=0}^{n-1} |\alpha_\nu|$).

Ensuite, Tijdeman [Tijd 4, théorème 1] raffine ce résultat pour obtenir un "lemme de petites valeurs" :

Si E est "petite" en des pointes "bien réparties", alors les coefficients $A_{\mu\nu}$ sont "petits".

Un cas particulier de ce résultat est le lemme suivant :

Lemme 13.0.- Soient m et s deux entiers ≥ 1.

Soient $\alpha_o,\ldots,\alpha_{m-1}$ (resp. $\beta_o,\ldots,\beta_{s-1}$) des nombres complexes deux à deux distincts.

Posons : $a = \max_{0\leq\nu\leq m-1} (|\alpha_\nu|,1)$ $\qquad b = \max_{0\leq\sigma\leq s-1} (|\beta_\alpha|,1)$

$$a_o = \min_{\substack{\mu,\nu=0\ldots m-1\\ \mu\neq\nu}} (|\alpha_\nu-\alpha_\mu|,1) \qquad b_o = \min_{\substack{\rho,\sigma=0\ldots s-1\\ \rho\neq\sigma}} (|\beta_\rho-\beta_\sigma|,1)$$

Soient $A_o,\ldots,A_{m-1}$ des nombres complexes, on considère la fonction complexe :

$$E(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} A_\nu\, e^{\alpha_\nu z}.$$

Si $s \geq 2m + 13ab$, alors

$$\max_{0\leq\nu\leq m-1} |A_\nu| \leq s\sqrt{m!}\; e^{7ab}\left(\frac{1}{2a_o b}\right)^{m-1} \left(\frac{72b}{b_o\sqrt{s}}\right)^{s} \max_{0\leq\sigma<s} |E(\beta_\sigma)|.$$

Référence [Tij 4, théorème 3]

L'un des ingrédients de la démonstration du théorème 1.II (cf. chapitre II) est un "lemme de petites valeurs" pour la fonction auxiliaire qu'on est amené à construire.

L'objet du lemme suivant est de démontrer ce résultat.

Notations.

On considère $x_1,\dots,x_k$ (resp. $y_1,\dots,y_\ell$) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) suivante : il existe un entier $L_o > 0$ (resp. $M_o > 0$) et un nombre réel χ (resp. χ') tels que pour tout $L \geq L_o$ (resp. $M \geq M_o$) tout $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k} \in \mathbb{Z}^k$ vérifiant $0 < \max_{1\leq i\leq k} |\lambda_i| \leq L$ (resp. tout $(h_j)_{1\leq j\leq \ell} \in \mathbb{Z}^\ell$ vérifiant : $0 < \max_{i\leq j\leq \ell} |h_j| \leq M$). On ait :

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right| \geq \exp(-(\log L)^{\chi})$$

$$\left(\text{resp.} \quad \left|\sum_{j=1}^{\ell} h_j y_j\right| \geq \exp(-(\log M)^{\chi'})\right)$$

Remarquons qu'on peut supposer sans restreindre la généralité que $\chi \geq 1$ et $\chi' \geq 1$.

On adoptera dans la suite les notations suivantes :

Pour q entier ≥ 1, $\lambda \in \mathbb{N}^{qk}$ (resp. $h \in \mathbb{N}^{q\ell}$), on écrit : $\lambda = (\underline{\lambda}_1,\dots,\underline{\lambda}_q)$ avec $\underline{\lambda}_i = (\lambda_{i,1},\dots,\lambda_{i,k})$ pour tout i, $1 \leq i \leq q$ (resp. $h = (\underline{h}_1,\dots,\underline{h}_\ell)$ avec $\underline{h}_j = (h_{j,1},\dots,h_{j,\ell})$ pour tout j, $1 \leq j \leq \ell$.

On pose :

- $|\lambda| = \max\limits_{\substack{i\leq j\leq q\\ 1\leq j\leq k}} |\lambda_{i,j}|$ (resp. $|h| = \max\limits_{\substack{1\leq r\leq q\\ 1\leq s\leq \ell}} |h_{r,s}|$)

- $\underline{\lambda}_i.\underline{x} = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_{i,j}x_j$, pour tout i, $1 \leq i \leq q$

(resp. $\underline{h}_r.\underline{y} = \sum\limits_{s=1}^{\ell} h_{r,s}y_s$; pour tout r, $1 \leq r \leq q$)

- $\lambda.x = (\underline{\lambda}_1.\underline{x},\ldots,\underline{\lambda}_q.\underline{x})$

(resp. $h.y = (\underline{h}_1.\underline{y},\ldots,\underline{h}_q.y)$

- $c_3 = 13k\ell \max\limits_{1\leq i\leq k} |x_i| \max\limits_{1\leq j\leq \ell} |y_j|$.

En général, c_4, c_5,... désignent des constantes > 0 ne dépendant que de $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_\ell$, k, ℓ, χ et χ'.

On désigne par K un nombre réel "suffisamment grand" (en fonction des nombres L_o et M_o qui interviennent dans (C_2).

Considérons une fonction complexe du type :

$$F(\underline{z}) = \sum_{0\leq\lambda_{i,j}<K} a_\lambda \prod_{i=1}^{q} \exp((\underline{\lambda}_i.\underline{x})\, z_i)$$

où $\underline{z} = (z_1,\ldots,z_q)$, les a_λ sont des nombres complexes.

En appliquant le lemme 13.0 à la fonction F (cf. [Phi. 1] pour le cas p-adique), on obtient le lemme suivant :

<u>Lemme</u> *14.0.*- Soit H un nombre réel vérifiant :

$$H^\ell \geq 2K^k + c_3KH + 1.$$

Alors, on a

$$\max_{0\leq\lambda_{i,j}<k} |a_\lambda| \leq \exp\left(c_8q\left(K^k(\log K)^\chi + H^\ell(\log H)^{\chi'}\right)\right) \qquad |F(h.y)|.$$

Preuve : On démontre le lemme par récurrence sur q.

Cas $q = 1$; on pose :

- $\{\beta_\sigma, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant s-1\} = \{\sum_{t=1}^{\ell} h_t y_t, \quad 0 \leqslant h_t < H\}$;

  $s = H^\ell + 1.$

- $\{\alpha_\nu, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant m-1\} = \{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j, \quad 0 \leqslant \lambda_j < K\}$;

  $m = K^k + 1.$

- $A_\nu = a_\lambda$

Les α_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant m-1$ (resp. les β_σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant s-1$) sont deux à deux distincts puisque les x_j $(1 \leqslant j \leqslant k$ (resp. les y_t, $(1 \leqslant t \leqslant \ell)$) sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants.

De plus, les x_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ (resp. les y_t, $0 \leqslant t \leqslant \ell$) vérifient l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) donc pour λ, λ' dans $\mathbb{N}^{qk}$ tels que $\lambda \neq \lambda'$ (resp. h, h') dans $\mathbb{N}^{q\ell}$ tels que $h \neq h'$), on a :

$$|\lambda.x - \lambda'.x| = |(\lambda-\lambda').x| \geqslant \exp(-c_4(\log K)^\chi)$$

$$(\text{resp. } |h.y - h'.y| = |(h-h').y| \geqslant \exp(-c_4(\log H)^{\chi'}).$$

Comme $H^\ell \geqslant 2K^k + c_3KH + 1$, on peut appliquer le lemme 13.0 à la fonction F, on obtient :

$$\max_{0\leq\lambda_{i,j}<K} |a_\lambda| \leq (H^\ell+1)(K^k+1)!\,e^{7c_3KH}\left[\exp\left(c_4(\log K)^\chi\right)\right]^{K^k}$$

$$\times\left[\frac{72c_2H\exp(c_4(\log H)^{\chi'})}{(H^\ell+1)^{1/2}}\right]^{(H^\ell+1)} \times \max_{0\leq h_t<H}\left|E\left(\sum_{1\leq t<\ell} h_t\, y_t\right)\right|$$

$$\leq \exp\left(c_5K^k\log K + c_6K^k(\log K)^\chi + c_7H^\ell(\log H)^{\chi'}\right) \max_{0\leq h_t\leq H}\left|E\left(\sum_{1\leq t\leq\ell} h_t\, y_t\right)\right|,$$

puisque $\chi \geq 1$,

d'où :

$$\max_{0\leq\lambda_{i,j}<K} |a_\lambda| \leq \exp\left(c_8(K^k(\log K)^\chi + H^\ell(\log H)^{\chi'})\right) \max_{0\leq h_t<H}\left|E\left(\sum_{1\leq t\leq\ell} h_t\, y_t\right)\right. .$$

Le lemme est ainsi démontré pour le cas $q = 1$.

Supposons que le lemme soit vérifié jusqu'à l'ordre $q-1$.

Ecrivons $F(\underline{z})$ sous la forme :

$$F(\underline{z}) = \sum_{0\leq\lambda_{q,j}<K}\left(\sum_{\substack{0<\lambda_{i,j}<K\\ 1\leq i\leq q-1}} a_\lambda \prod_{i=1}^{q-1} \exp\left((\underline{\lambda}_i.\underline{x})\, z_i\right)\right) \exp\left((\underline{\lambda}_q.\underline{x})\, z_q\right).$$

Posons :

$$F_{\lambda_q}(z_1,\ldots,z_{q-1}) = \sum_{\substack{0<\lambda_{i,j}<K\\ 1\leq i\leq q-1}} a_\lambda \prod_{i=1}^{q-1} \exp\left((\underline{\lambda}_i.\underline{x})\, z_i\right).$$

Pour $(z_1,\ldots,z_{q-1})$ fixé, appliquons le lemme dans le cas d'une seule variable à la fonction F, nous obtenons

$$(1)\qquad \max_{0\leq\lambda_{q,j}<K} |F_{\lambda_q}(z_q,\ldots,z_{q-1})| \leq \exp\left(c_8(K^k(\log K)^\chi + H^\ell(\log H)^{\chi'})\right)$$
$$\times \max_{0\leq h_{q,s}<H} |F(z_1,\ldots,z_{q-1},\underline{h}_q.\underline{y})|.$$

D'autre part, l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction $F_{\lambda_q}(z_1,\ldots,z_{q-1})$ fournit :

$$\max_{\substack{0<\lambda_{i,j}<K \\ 1\leq i\leq q-1}} |a_\lambda| \leq \exp\left(c_9(q-1)\left(K^k(\log K)^\chi + H^\ell(\log h)^{\chi'}\right)\right) \times \max_{\substack{0\leq h_{r,s}<H \\ 1\leq r\leq q-1}} |F^{\lambda_q}(\underline{h}_1.\underline{y},\ldots,\underline{h}_{q-1}.\underline{y})|.$$

En utilisant l'inégalité (1), on déduit que :

$$\max_{\substack{0<\lambda_{i,j}<K \\ 1\leq i\leq q}} |a_\lambda| \leq \exp\left(c_{10}q\left(K^k(\log K)^\chi + H^\ell(\log H)^{\chi'}\right)\right) \times \max_{\substack{0\leq h_{r,s}<H \\ 1\leq r\leq q}} |F(\underline{h}_1.\underline{y},\ldots,\underline{h}_q.\underline{y})|.$$

§ 6 - *Un lemme d'approximation.*

Pour la démonstration du théorème 1.II. (cf. Chapitre II). On est amené à construire une fonction entière ayant des petites valeurs sur un ensemble de la forme :

$$S_M = \{(\underline{h}_1.\underline{y},\ldots,\underline{h}_q.\underline{y}), \quad 0 \leq |h| < M\} \subseteq \mathbb{C}^q$$

où $y_1,\ldots,y_\ell$ sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants et vérifient l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) (cf. notations, p. 15).

et M est un réel "suffisamment grand" en fonction de M_o (M_o est définie dans l'hypothèse (C_2)).

Nous voulons montrer que cette fonction est "petite" sur une boule contenant S_M ; pour cela, nous allons utiliser un "lemme d'approximation" c'est le lemme 15.0.

Notations :

Soit q un entier naturel ≥ 1. Soit $z = (z_1,\dots,z_q) \in \mathbb{C}^q$.
On pose : $|z| = \max(|z_1|,\dots,|z_q|)$.

Pour f une fonction de $\mathbb{C}^q$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, entière et r un nombre réel >0, on pose : $|f|_r = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|$.

On pose : $|f|_M = \max_{\sigma\in S_M} |f(\sigma)|$.

Lemme 15.0.- Soient f une fonction entière de $\mathbb{C}^q$ dans $\mathbb{C}$ et $S_M = \{(\underline{h}_1.y,\dots,\underline{h}_q.y),\ h \in \mathbb{N}^{q\ell},\ 0 \leq |h| < M\} \subseteq \mathbb{C}^q$, avec M "suffisamment grand" (en fonction de M_o).

Alors, il existe des constantes c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15} et c_{16} positives non nuls (ne dépendant que des y_j, ℓ et q) telles que :
pour tout réel r et tout réel R tels que : $R \geq 2r > c_{11} M$, on ait :

$$|f|_r \leq \left(\frac{c_{12} r}{R}\right)^{c_{13} M^{\ell}} |f|_R + |f|_M \left(c_{14} r\right)^{c_{15} M^{\ell}} \exp\left(c_{16} M^{\ell} (\log M)^{\chi'}\right).$$

Preuve :

Démontrons le lemme dans le cas d'une seule variable c'est-à-dire $q = 1$; S étant un produit direct, on démontre le cas général par récurrence sur q.

Posons $s = M^{\ell}$ et notons $z_1,\dots,z_s$ les éléments de S. Les z_i sont 2 à 2 distincts puisque les y_j sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants.

On choisit c_{11} suffisamment grande en fonction des y_j pour qu'on ait : $S \subset B(0,r)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| = r$; d'après la formule des résidus on a :

$$\frac{1}{(2i\pi)} \int_{|\vartheta|=R} \frac{f(\vartheta)}{\prod_{j=1}^{s} (\vartheta - z_j)} \frac{d\vartheta}{(\vartheta - z)} = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{s} (z - z_j)} + \sum_{t=1}^{s} \frac{f(z_t)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{s} (z_t - z_j)} \frac{1}{(z_t - z)}$$

$$\text{d'où } f(z) = \prod_{j=1}^{s} (z - z_j) \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{|\vartheta|=R} \frac{f(\vartheta)}{\sum_{j=1}^{s} (\vartheta - z_j)} \frac{d\vartheta}{(\vartheta - z)} \right] - \sum_{t=1}^{s} \frac{f(z_t)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{s} (z_t - z_j)} \cdot \frac{1}{(z_t - z)}$$

par suite, on a :

$$|f(z)| \leqslant (2r)^s \times \frac{1}{(2\pi)} \times \frac{1}{(R-r)^s} \times \frac{R}{(R-r)} \times |f|_R + s(2r)^{s-1} \times |f|_M \times \min_{t=1}^{s} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{s} \frac{1}{|z_t - z_j|} .$$

Comme $R \geqslant 2r$, on a $R - r \geqslant \frac{R}{2}$ et, par suite, on a :

$$(2r)^s \times \frac{1}{(2\pi)} \times \frac{1}{(R-r)^s} \times \frac{R}{(R-r)} \leqslant (c_{12} \frac{r}{R})^s .$$

D'autre part, comme les y_j vérifient l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) et M est "suffisamment grand" ; on a :

$$\min_{t=1}^{s} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{s} \frac{1}{(z_t - z_j)} \leqslant \exp((s-1)(\log M)^{\chi'}).$$

Par conséquent, on a :

$$|f(z)| \leqslant (c_{12} \frac{r}{R})^s \times |f|_R + s(2r)^{s-1} \times |f|_M \times \exp((s-1)(\log M)^{\chi'}).$$

Comme $s = M^{\ell}$, on a :

$$|f(z)| \leqslant (c_{12} \frac{r}{R})^{M^{\ell}} \times |f|_R + |f|_M \times (2r)^{M^{\ell}} \times \exp(M^{\ell}(\log M)^{\chi'}).$$

CHAPITRE 1

§ 1 - *Enoncé du théorème 1.1.*

Pour n entier ≥ 1, $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{C}^n$, η un nombre réel $> 2^{n-1}$ et a_1 un nombre réel > 0, on pose :

$$- c_n(\eta,a_1) = \left[32n^2\left(1+\log(\max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|+1)\right)^2\right]^{\eta+a_1}$$

$$- \kappa_n(\eta) = \frac{\eta}{\eta-1} \times \frac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2}-1} \times \ldots \times \frac{\frac{\eta}{2^{n-1}}}{\frac{\eta}{2^{n-1}}-1} .$$

Théorème 1.1.- Soient n un entier ≥ 1, $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{C}^n$ et un nombre réel $> 2^{n-1}$. Soient a_1,a_2 des nombres réels tels que $0 < a_2 < a_1 \leq a_2 \times \frac{\eta}{\eta-1}$. Soient $N_1 \geq 1$, N_2 et c des nombres réels tels que :

$$c \geq c_n(\eta,a_1) \quad \text{et} \quad N_2 \geq \left(c\, N_1\right)^{\kappa_n(\eta)} .$$

On suppose que la propriété (A_n), suivante, est vérifiée :

(A_n) Pour tout nombre réel $N \in [N_1,N_2]$ et tout $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ satisfaisant à : $\max_{1\leq i\leq n} |z_i-\theta_i| \leq \exp(-cN^{\eta+a_1})$, il existe un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ tel que :

$$0 < |P_N(z_1,\ldots,z_n)| \leq \exp(-cN^{\eta+a_2})$$

et $\qquad t(P_N) \leq N.$

Alors $\qquad \eta < 2^n.$

Remarque : La valeur de la constante $c_n(\eta,a_1)$ n'a pas grande importance, le nom important dans le théorème est $\kappa_n(\eta)$ que nous allons étudier dans la suite (cf. § 2).

Nous montrerons que $\lim_{n\to\infty} \kappa_n(2^n) = 3,46274663...$

Schéma de la démonstration :

On démontre le théorème par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on procède par l'absurde.

On considère $\theta \in \mathbb{C}$, $\eta > 1$, $N_1 \geqslant 1$, N_2, c, a_1 et a_2 des nombres réels satisfaisant aux conditions du théorème 1.

On suppose la propriété (A_1) vérifiée et $\eta \geqslant 2$.

On considère α_N une racine de P_N qui à distance minimale de θ.

Comme $P_N \in \mathbb{Z}[X]$, à l'aide du semi-résultant (cf. lemme 8.0), on montre que $|\alpha_N-\theta|$ est "petit". En utilisant alors l'inégalité de Liouville (cf. lemme 12.0) et l'hypothèse $\eta \geqslant 2$, on démontre que $\alpha_N = \alpha_{N'}$ pour tout N, N' dans l'intervalle $[N_1,N_2]$.

On désigne par α cette racine commune aux P_N, $N \in [N_1,N_2]$. La propriété (A_1) permet de trouver un polynôme G_{N_1} de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $G_{N_1}(\alpha)$ soit "petit" mais non nul. Cela implique que $r(G_{N_1},P_{N_1})$ est "petit" ; comme P_{N_1} et G_{N_1} appartiennent à $\mathbb{Z}[X]$, on a une contradiction.

Une fois démontré le cas $n = 1$, on suppose $n > 1$ et le théorème vrai jusqu'à l'ordre $n-1$.

On considère $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{C}^n$, η réel $> 2^{n-1}$, $N_1 \geqslant 1$, N_2 c, a_1 et a_2 des nombres réels vérifiant $c \geqslant c_n(\eta,a_1)$, $N_2 \geqslant (cN_1)^{\kappa_n(\eta)}$ et $0 < a_2 < a_1 \leqslant a_2 \times \frac{\eta}{\eta-1}$.

On suppose la propriété (A_n) vérifiée.

On construit alors des nombres réels M_1, M_2, c', a_1' et a_2' vérifiant : $c' \geq c_{n-1}(\frac{\eta}{2}, a_1')$, $M_2 \geq (c' M_1)^{\kappa_{n-1}(\frac{\eta}{2})}$ et pour tout $M \in [M_1, M_2]$ et tout $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ satisfaisant à :

$\max_{1 \leq i \leq n-1} |z_i - \theta_i| \leq \exp\left(-c\, M^{\frac{\eta}{2} + a_1'}\right)$, on construit au moyen du semi-résultant, un polynôme P_M' de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ vérifiant :

$$0 < |P_M'(z_1, \ldots, z_{n-1})| \leq \exp\left(-c' M^{\frac{\eta}{2} + a_2'}\right) .$$

et

$$t(P_M') \leq M.$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure que $\frac{\eta}{2} < 2^{n-1}$.

Démonstration du théorème 1.

Cas $n = 1$, on procède par l'absurde.

Soit $\theta \in \mathbb{C}$, soient $N_1 \geq 1$, N_2, c, a_1 et a_2 des nombres réels tels que : $c \geq c_1(\eta, a_1)$, $N_2 \geq (cN_1)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$ et $0 < a_2 < a_1 \leq a_2 \times \frac{\eta}{\eta-1}$.

Supposons la propriété (A_1) vérifiée et $\eta \geq 2$.

Soit $N \in [N_1, N_2]$, d'après (A_1), il existe $P_N \in Z[X]$ tel que :

$$0 < |P_N(\theta)| \leq \exp(-cN^{\eta + a_2})$$

et

$$t(P_N) \leq N.$$

Soit α_N la racine de P_N à distance minimale de θ et s_N sa multiplicité. D'après le lemme 8.0, on a

$$\begin{aligned} |r(P_N, P_N)|\,|\alpha_N - \theta|^{s_N} &\leq |P_N(\theta)| \times \exp(8t^2(P_N)) \\ &\leq \exp(-cN^{\eta + a_2}) \times \exp(8N^2) \\ &\leq \exp(-c' N^{\eta + a_2}) \text{ (où } c' = \quad) \text{ puisque } \eta \geq 2. \end{aligned}$$

Or $P_N \in \mathbb{Z}[X]$ donc $r(P_N,P_N) \geq 1$, de l'inégalité précédente, on tire l'inégalité (*) : $|\alpha_N-\theta|^{s_N} \leq \exp(-c'N^{\eta+a_2})$.

Montrons que $\alpha_N = \alpha_{N'}$, pour N,N' dans l'intervalle $[N_1,N_2]$ avec $N \leq N' \leq 2N$.

Supposons que c'est faux ; soient alors N,N' dans $[N_1,N_2]$ avec $N \leq N' \leq 2N$ et $\alpha_N \neq \alpha_{N'}$.

Posons :

$$\Delta = [\mathbb{Q}(\alpha_N,\alpha_{N'}):\mathbb{Q}], \quad \delta_N = [\mathbb{Q}(\alpha_N) : \mathbb{Q}], \quad \delta_{N'} = [\mathbb{Q}(\alpha_{N'}):\mathbb{Q}].$$

α_N étant une racine de P_N de multiplicité s_N, on a :

$$M(\alpha_N)^{s_N} \leq M(P_N)$$

or $M(P_N) \leq (1+\deg P_N)H(P_N)$,

d'où $M(P_N) \leq e^{2\,t(P_N)}$
$\leq e^{2\,N}$

et, par suite, $M(\alpha_N)^{s_N} \leq e^{2\,N}$ (1)

de même, on a :

$$M(\alpha_{N'})^{s_{N'}} \leq e^{2\,N'} \qquad (1')$$

d'autre part, on a :

$$\frac{\Delta}{\delta_N} \leq \delta_{N'} \leq \frac{\deg P_{N'}}{s_{N'}} \leq \frac{N'}{s_{N'}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta}{\delta_{N'}} \leq \frac{N}{s_N} \qquad (2)$$

En utilisant le lemme 12.0, on obtient :

$$|\alpha_N-\alpha_{N'}| \geqslant 2^{1-\Delta} (\alpha_N)^{-\frac{\Delta}{\delta_N}} M(\alpha_{N'})^{-\frac{\Delta}{\delta_{N'}}}.$$

On en déduit d'après les inégalités (1), (1') et (2)

$$|\alpha_N-\alpha_{N'}|^{s_N s_{N'}} \geqslant 2^{(1-\Delta)s_N s_{N'}} e^{-2NN'} e^{-2NN'} .$$

Or $\delta_N s_N \leqslant \deg P_N \leqslant N$ et $\delta_{N'} s_{N'} \leqslant N'$ donc

$\Delta s_N s_{N'} \leqslant NN'$; d'où

$$(**) \qquad |\alpha_N-\alpha_{N'}|^{s_N s_{N'}} \geqslant 2^{s_N s_{N'}-NN'} e^{-4NN'} ;$$

d'autre part, on tire de l'inégalité (*), l'inégalité suivante :

$$|\alpha_N-\alpha_{N'}| \leqslant 2\max\left\{\exp\left(-c' \frac{N^{\eta+a_2}}{s_N}\right), \exp\left(-c'\frac{N'^{\eta+a_2}}{s_{N'}}\right)\right\}$$

ou encore, $|\alpha_N-\alpha_{N'}|^{s_N s_{N'}} \leqslant 2^{s_N s_{N'}} \max\{\exp(-c'N^{\eta+a_2}s_{N'}), \exp(-c'N^{\eta+a_2}s_N)\}$;

comme $N \leqslant N'$, on a :

$$|\alpha_N-\alpha_{N'}|^{s_N s_{N'}} \leqslant 2^{s_N s_{N'}} \exp(-c'N^{\eta+a_2}).$$

Cette dernière inégalité et l'inégalité (**) donnent :

$$2^{-NN'} e^{-4NN'} \leqslant \exp(-c'N^{\eta+a_2})$$

comme $N' \leqslant 2N$, on a

$$\exp\left(-2(4+\log 2)N^2\right) \leqslant \exp(-c'N^{\eta+a_2})$$

or $c' > 2(4+\log 2)$ et $\eta \geqslant 2$ d'où la contradiction.

Par conséquent, $\alpha_N = \alpha_{N'}$ pour tout (N,N') avec N et N' dans l'intervalle $[N_1,N_2]$.

Soit α cette racine commune aux polynômes P_N , $N \in [N_1, N_2]$

D'après l'inégalité (*), on a

$$|\alpha-\theta|^{s_{N_2}} \leqslant \exp(-c' N_2^{\eta+a_2})$$

ou encore

$$|\alpha-\theta| \leqslant \exp\left(-c' \frac{N_2^{\eta+a_2}}{s_{N_2}}\right) \leqslant \exp\left(-c' N_2^{\eta-1+a_2}\right)$$

or $\dfrac{\eta+a_1}{\eta-1+a_2} \leqslant \dfrac{\eta+a_2 \frac{\eta}{\eta-1}}{\eta-1+a_2} = \dfrac{\eta}{\eta-1}$

et $N_2 \geqslant (c N_1)^{\frac{\eta}{\eta-1}}$

donc $|\alpha-\theta| \leqslant \exp(-c N_1^{\eta+a_1})$.

D'après (A_1), il existe $G_{N_1} \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$0 < |G_{N_1}(\alpha)| < \exp(-c N_1^{\eta+a_2})$$

et $$t(G_{N_1}) \leqslant N_1 .$$

Le lemme 9.0 donne

$$\begin{aligned} |r(G_{N_1}, P_{N_1})| &\leqslant |G_{N_1}^{s_{N_1}}(\alpha)| \times \exp\left(6 t(P_{N_1}) t(G_{N_1})\right) \\ &\leqslant \exp(-c N_1^{\eta+a_2}) \times \exp(6 N_1^2) \\ &\leqslant \exp(-c' N_1^{\eta+a_2}). \end{aligned}$$

Or C_{N_1} et P_{N_1} sont des polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$, donc $r(G_{N_1},P_{N_1})$ est un entier non nul et, par suite, $|r(G_{N_1},P_{N_1})| \geq 1$. Cela contredit l'inégalité :

$$|r(G_{N_1},P_{N_1})| \leq \exp(-c'N_1^{+a_1}) < 1.$$

On en conclut que si (A_1) est vérifiée, alors $\eta < 2$; ce qui montre le théorème dans le cas $n = 1$.

Supposons le théorème vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$.

Soient a_1,a_2 des nombres réels tels que : $0 < a_2 < a_1 \leq a_2 \frac{\eta}{\eta-1}$, $N_1 \geq 1$, N_2 et c des nombres réels tels que :

$$c \geq c_n(\eta,a_1) \quad \text{et} \quad N_2 \geq (cN_1)^{\kappa_n(\eta)} .$$

Supposons la propriété (A_n) vérifiée.

On définit a_1' et a_2' comme suit:

$$a_1' = \frac{a_1}{2} \quad \text{et} \quad a_2' = \frac{1}{2}\left[\frac{(\eta+a_2)^2}{(\eta+a_1)} - \eta\right] .$$

On a : $0 < a_2' < a_1' \leq a_2' \times \dfrac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2}-1}$, en effet :

$a_2' = \frac{1}{2}\left[\dfrac{\eta(2a_2-a_1) + a_2^2}{\eta+a_1}\right]$; comme $a_1 \leq a_2 \frac{\eta}{\eta-1} < 2a_2$

alors $a_2' > 0$.

D'autre part, $a_2' < \frac{a_2}{2} \iff \eta(2a_2-a_1) + a_2^2 < \eta a_2 + a_1a_2$

$$\iff \eta a_2 + a_2^2 < \eta a_1 + a_1a_2.$$

Comme $a_2 < a_1$, on a $\eta a_2 + a_2^2 < \eta a_1 + a_1 a_2$ et, par suite, on a :

$$a_2' < \frac{a_2}{2} < \frac{a_1}{2} \leqslant a_1' .$$

Enfin, on a : $a_1' \leqslant a_2' \times \dfrac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2} - 1}$, en effet :

$$a_1' \leqslant a_2' \times \frac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2} - 1} \iff a_1 \leqslant \frac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2} - 1} \times \frac{\left(\eta(2a_2 - a_1) + a_2^2\right)}{\eta + a_1}$$

$$\iff \eta^2 a_1 + a_1^2 \frac{\eta}{2} - a_1 \eta - a_1^2 \leqslant \eta^2 a_2 + a_2^2 \frac{\eta}{2}$$

$$\iff \eta(\eta-1) a_1 + a_1^2 \left(\frac{\eta}{2} - 1\right) \leqslant \eta^2 a_2 + a_2^2 \frac{\eta}{2} .$$

Or $a_1 \leqslant a_2 \times \dfrac{\eta}{\eta-1}$, donc on a :

$$\eta(\eta-1) a_1 \leqslant \eta^2 a_2 \quad \text{et} \quad a_1^2 \leqslant a_2^2 \times \frac{\eta^2}{(\eta-1)^2} \leqslant a_2^2 \times \frac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2} - 1}$$

et, par suite on a : $a_1' \leqslant a_2' \times \dfrac{\frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2} - 1}$.

Posons : $c_n' = \left(c_n(\eta, a_1)\right)^{\frac{1}{2}}$ et $c' = \dfrac{c}{c_n'}$

Comme $c \geqslant c_n(\eta, a_1)$ par hypothèse, on a :

$$c' \geqslant c_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}, \frac{a_1}{2}\right).$$

Or, $a_1' = \dfrac{a_1}{2}$ donc $c' > c_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}, a_1'\right)$.

On définit M_1 et M_2 de la façon suivante :

$$M_1 = \left(\frac{1}{4^{\eta-1}} \times c_n'^{\frac{1}{\eta+a_1}} \times N_1^{\frac{\eta}{\eta-1}} \right)^2 , \quad M_2 = \left(c' M_1\right)^{\frac{\kappa_n(\eta)}{\eta/\eta-1}}$$

On a : $\dfrac{\kappa_n(\eta)}{\eta/\eta-1} = \kappa_{n-1}(\frac{\eta}{2})$ donc $M_2 = (c'M_1)^{\kappa_{n-1}(\frac{\eta}{2})}$.

Soit $M \in [M_1, M_2]$, définissons le polynôme P'_M ;
soit N le nombre réel défini par $cN^{\eta+a_1} = c'M^{\frac{\eta}{2}+a'_1}$.
Montrons d'abord que : $N \in [N_1, N_2]$.

$$N = \left(\frac{1}{c'_n}\right)^{\frac{1}{\eta+a_1}} M^{\frac{\frac{\eta}{2}+a'_1}{\eta+a_1}} = \left(\frac{1}{c'_n}\right)^{\frac{1}{\eta+a_1}} M^{\frac{1}{2}}$$

Comme $M \geq M_1$, on a $N \geq (\frac{1}{c'_n})^{\frac{1}{\eta+a_1}} M_1^{\frac{1}{2}}$.

On remplace M_1 par sa valeur dans cette inégalité, on obtient :

$$N \geq 4^{\frac{1}{\eta-1}} N_1^{\frac{\eta}{\eta-1}} \geq N_1 .$$

D'autre part, comme $M \leq M_2$ on a $N \leq \frac{1}{c'_n})^{\frac{1}{\eta+a_1}} M_2^{\frac{1}{2}} \leq M_2^{\frac{1}{2}}$

Or $M_2 = (c'M_1)^{\frac{\kappa_n(\eta)}{\eta/\eta-1}}$ et $M_1 = \left(4^{\frac{1}{\eta-1}} c'^{\frac{1}{\eta+a_1}}_n N_1^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right)^2$ donc

$$N \leq c'^{\frac{\kappa_n(\eta)}{2\eta/\eta-1}} \times \left(4^{\frac{1}{\eta-1}} c'^{\frac{1}{\eta+a_1}}\right)^{\frac{\kappa_n(\eta)}{\eta/\eta-1}} \times N_1^{\kappa_n(\eta)} .$$

Comme $c' = \frac{c}{c'_n}$, on a :

$$N \leq (cN_1)^{\kappa_n(\eta)} \leq N_2 .$$

On va construire, au moyen du semi-résultant, le polynôme P'_M.
Soit $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ satisfaisant à :

$$\max_{1\leq i\leq n-1} |z_i-\theta_i| \leq \exp\left(-c'M^{\frac{\eta}{2}+a_1}\right)$$

comme $c'M^{\frac{\eta}{2}+a_1'} = cN^{\eta+a_1}$ alors, on a

$$\max_{1\leq i\leq n-1} |z_i-\theta_i| \leq \exp(-cN^{\eta+a_1}) \quad ;$$

par suite, d'après (A_n), il existe $P_N \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ vérifiant :

$$0 < |P_N(z_1,\ldots,z_{n-1},\theta_n)| < \exp(-cN^{\eta+a_2})$$

et $$t(P_N) \leq N.$$

Considérons le polynôme $P_N^*(X) = P_N(z_1,\ldots,z_{n-1},X)$ de $\mathbb{C}[X]$, si P_N^* est constant, on pose :

$$P_M'(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}) = P_N(X_1,\ldots,X_{n-1},0).$$

P_M' répond à la question, en effet :

$$\begin{aligned} 0 < |P_M'(z_1,\ldots,z_{n-1})| &\leq \exp(-cN^{\eta+a_2}) \\ &\leq \exp\left(-c'M^{\frac{\eta+a_2}{2}}\right) \\ &\leq \exp\left(-c'M^{\frac{\eta}{2}+a_2'}\right) \quad \text{puisque } \frac{a}{2} > a_2'. \end{aligned}$$

On a évidemment

$$t(P_M') \leq N < M.$$

Supposons que P_n^* ne soit pas constant ; soit ζ_N une racine de P_N^*, à distance minimale de θ_n, et s_N sa multiplicité.

D'après le lemme 10.0, il existe un polynôme non nul $H_N \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tel que :

$$H_N(z_1,\ldots,z_{m-1}) \neq 0$$

$$|H_N(z_1,\ldots,z_{n-1})|\ |\zeta_N-\theta_n|^{s_N} \leqslant |P_N^*(\theta_n)| \times \exp\left(\frac{c}{2}\ t^2(P_N)\right)$$

et $\quad t(H_N) \leqslant (2n+\log 3)t^2(P_N).$

Comme $|P_N^*(\theta_n)| \leqslant \exp(-cN^{\eta+a_2})$ et $t(P_N) \leqslant N$, on en déduit que :

$$|H_N(z_1,\ldots,z_{n-1})|\,|\zeta_N-\theta_n|^{s_N} \leqslant \exp(-cN^{\eta+a_2}) \times \exp(\frac{c}{2}\ N^2)$$

$$\leqslant \exp(-\frac{c}{2}\ N^{\eta+a_2})$$

et $\quad t(H_N) \leqslant (2n+\log 3)N^2.$

Deux cas peuvent se présenter :

<u>1er cas</u> : $|H_N(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leqslant \exp(-\frac{c}{4}\ N^{\eta+a_2}).$

Posons : $P'_M = (H_N)^4$, alors P'_M vérifie

$$0 < |P'_M(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leqslant \exp(-cN^{\eta+a_2})$$

$$\leqslant \exp\left(-c'M^{\frac{\eta+a_2}{2}}\right)$$

$$\leqslant \exp\left(-c'M^{\frac{\eta}{2}+a'_2}\right) \quad \text{puisque} \quad a'_2 \leqslant \frac{a_2}{2}$$

et $\quad t(P'_M) \leqslant 4(n+1)t(H_N)$

$$\leqslant 4(n+1)(2n+\log 3)N^2$$

or $\quad N = (\frac{1}{c'_n})^{\frac{1}{\eta+a_1}}\ M^{\frac{1}{2}}$ avec $c'_n > \left(4(n+1)(2n+\log 3)\right)^{\frac{\eta+a_1}{2}}$;

donc $\quad t(P'_M) \leqslant M.$

<u>2ème cas</u> : $|\zeta_N-\theta_n|^{s_N} \leqslant \exp\left(-\frac{c}{4} N^{\eta+a_2}\right)$.

Posons $N'^{\eta+a_1} = \frac{N^{\eta+a_2}}{4s_N}$, on a donc : $|\zeta_N-\theta_n| \leqslant \exp\left(-cN'^{\eta+a_1}\right)$.

Montrons d'abord que $N' \in [N_1,N_2]$.

Comme $s_N \leqslant \deg P^*_N \leqslant N$, on a $N' \geqslant (\frac{1}{4})^{\frac{1}{\eta+a_1}} \; N^{\frac{\eta+a_2-1}{\eta+a_1}}$.

Or $N \geqslant N_1 \geqslant (\frac{1}{c'_n})^{\frac{1}{\eta+a_1}} \; M_1^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{\eta+a_2-1}{\eta+a_1} \geqslant \frac{\eta-1}{\eta}$, donc on a :

$$N' \geqslant (\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{\eta+a_1}} \left((\tfrac{1}{c'_n})^{\frac{1}{\eta+a_1}} \; M_1^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} .$$

Par définition, on a : $M_1 = \left(4^{\frac{1}{\eta-1}} \; c'^{\frac{1}{\eta+a_1}}_n \; N_1^{\frac{\eta}{\eta-1}}\right)^2$.

D'où, $N' \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\eta+a_1}} \; 4^{\frac{1}{\eta-1}} \; N_1 > N_1$.

D'autre part, on a : $N' \leqslant N \leqslant N_2$, par conséquent, on a :

$$N' \in [N_1,N_2].$$

Comme $|\xi_N-\theta_n| \leqslant \exp(-cN'^{\eta+a_1})$ et, par hypothèse

$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1} |z_i-\theta_i| \leqslant \exp(-cN^{\eta+a_1}) \leqslant \exp(-cN'^{\eta+a_1})$, on déduit de la propriété (A_n) l'existence d'un polynôme $P_{N'}$ de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ vérifiant :

$$0 < |P^*_{N'}(\zeta_n)| < \exp(-cN'^{\eta+a_2})$$

et $$t(P_{N'}) \leqslant N'.$$

Il existe, d'après le lemme 11.0, un polynôme H'_N de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n-1}]$ tel que :

$$0 < |H'_N(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leqslant |P^*_{N'}(\zeta_N)|^{s_N} \exp(\frac{c}{8}\, t(P_N)t(P_{N'}))$$

et $$t(H'_N) \leqslant (2n+\log 3)t(P_N)t(P_{N'}).$$

On a donc :

$$0 < |H'_N(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leqslant \exp(-c\, s_N\, N'^{\eta+a_2}) \exp(\frac{c}{8}\, NN')$$

$$\leqslant \exp\left(-c\, \frac{N^{\frac{(\eta+a_2)^2}{\eta+a_1}}}{4}\right) \exp(\frac{c}{8}\, N^2)$$

Or, par définition de a'_2, on a :

$$\frac{(\eta+a_2)^2}{\eta+a_1} = \eta+2a'_2$$

d'où $$0 < |H'_N(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leqslant \exp\left(-c\, \frac{N^{\eta+2a'_2}}{4}\right) \exp(\frac{c}{8}\, N^2)$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{c}{8}\, N^{\eta+2a'_2}\right)$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{c}{8}\, M^{\frac{\eta}{2}+a'_2}\right) .$$

Posons : $P'_M = (H'_N)^8$, alors P'_M vérifie :

$$0 < |P'_M(z_1,\ldots,z_{n-1})| \leqslant \exp\left(-cM^{\frac{\eta}{2}+a'_2}\right).$$

et $t(P'_M) \leq 8(n+1)t(H'_N)$

$$\leq 8(n+1)(2n+\log 3)N^2$$

$$\leq M, \quad \text{puisque} \quad c'_n > \left[8(n+1)(2n+\log 3)\right]^{\frac{\eta+a_1}{2}} .$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure que $\frac{\eta}{2} < 2^{n-1}$ ou encore $\eta < 2^n$.

Le théorème 1 est ainsi démontré.

D'une façon analogue, on démontre une variante du théorème 1, c'est le résultat suivant :

On pose $c_n(\eta) = \left[32n^2\left(1+(\log \max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|+1)\right)^2\right]$.

Théorème 2.1.- Soient n un entier ≥ 1, $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{C}^n$ et η un nombre réel $> 2^{n-1}$. Soient $N_1 \geq 1$, N_2 et c des nombres réels tels que :

$$c \geq c_n(\eta) \quad \text{et} \quad N_2 \geq (cN_1)^{\kappa_n(\eta)} .$$

On suppose que :

pour tout nombre réel $N \in [N_1,N_2]$ et tout $(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ satisfaisant à $\max_{1\leq i\leq n} |z_i-\theta_i| \leq \exp(-2cN^\eta)$, il existe un polynôme non nul $P_N \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ tel que :

$$0 < |P_N(z_1,\ldots,z_n)| \leq \exp(-cN^\eta)$$

et $$t(P_N) \leq N.$$

Alors, $$\eta < 2 .$$

La preuve du théorème 2 dans le cas $n = 1$ est analogue à celle du théorème 1.

Pour le cas $n > 1$, il y a quelques modifications dans les définitions de c'_n, M_1, N et N' :

On pose : $c'_n = \left(c_n(\eta)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$M_1 = \left(8^{\frac{1}{\eta-1}} \quad c'^{\frac{1}{\eta}}_n \quad N_1^{\frac{\eta}{\eta-1}} \right)^2$$

On définit N en fonction de M de la façon suivante :

$$cN^{\eta} = c'M^{\eta/2}.$$

N' est défini par : $N'^{\eta} = \dfrac{N^{\eta}}{8s_N}$.

On obtient comme corollaire du théorème 1, le résultat suivant :

Enoncé du corollaire 1.1.- Soient n un entier ≥ 1, soit η un nombre réel $> 2^{n-1}$, $(\theta_1,\ldots,\theta_n) \in \mathbb{C}$ et θ_{n+1} un entier algébrique sur $\mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_n]$.

Soit R un polynôme de $\mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_n][X]$ unitaire tel que :

$$R(\theta_1,\ldots,\theta_n,\theta_{n+1}) = 0.$$

Soient a_1, a_2 et c des nombres réels tels que :

$$0 < a_2 < a_1 \leq a_2 \frac{\eta}{\eta-1}$$

et $\quad c \geq t(R)\, c_n(\eta,a_1)$.

Posons $c_1 = \dfrac{c}{t(R)}$, $c_2 = 24(n+1)^2\, t(R)\, c$.

Corollaire 1.1.- Soient $N_1 \geq 1$ et N_2 des nombres réels tels que :

$$N_2 \geq (cN_1)^{\kappa_n(\eta)}.$$

On suppose que pour tout $N \in [N_1, N_2]$ et tout $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant :

$$\max_{1 \leq i \leq n+1} |z_i - \theta_i| \leq \exp(-c_1 N^{\eta + a_1}) \quad \text{et} \quad R(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0,$$

il existe $G_N \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ tel que :

$$0 < |G_N(z_1, \ldots, z_{n+1})| \leq \exp(-c_2 N^{\eta + a_2})$$

et
$$t(G_N) \leq N.$$

Alors,
$$\eta < 2^n.$$

Preuve :

Soit $N \in [N_1, N_2]$. Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\max_{1 \leq i \leq n} |z_i - \theta_i| \leq \exp(-cN^{\eta + a_1}).$$

D'après le lemme 5.0, il existe $z_{n+1} \in \mathbb{C}$ tel que :

$$R(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad |z_{n+1} - \theta_{n+1}| \leq \exp(-\frac{c}{t(R)} N^{\eta + a_1}).$$

Comme $c_1 = \frac{c}{t(R)}$, on a $|z_{n+1} - \theta_{n+1}| \leq \exp(-c_1 N^{\eta + a_1})$ et on a évidemment

$$\max_{1 \leq i \leq n} |z_i - \theta_i| \leq \exp(-c_1 N^{\eta + a_1}).$$

D'après l'hypothèse, il existe $G_N \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ tel que :

$$0 < |G_N(z_1, \ldots, z_{n+1})| \leq \exp(-c_2 N^{\eta + a_2})$$

et
$$t(G_N) \leq N.$$

Il existe (cf. Lemme 11.0) $H_N \in Z[X_1, \ldots, X_n]$ $(H_N = r(G_N^*, R^*))$ tel que :

$$0 < |H_N(z_1,\dots,z_n)| \leqslant |G_N(z_1,\dots,z_{n+1})| \times \exp(c_1\ t(R)t(G_N)$$

$$\leqslant \exp(-c_2 N^{\eta+a_2})| \times \exp(\frac{c_2}{2}\ N)$$

$$\leqslant \exp(-\frac{c_2}{2} N^{\eta+a_2})$$

et $$t(H_N) \leqslant \left(2(n+1) + \log 3\right)t(R)t(G_N)$$

$$\leqslant \left(2(n+1) + \log 3\right)t(R)N$$

$$\leqslant \frac{c_2}{2c} N.$$

Posons $P_N = (H_N)^{\left[\frac{2c}{c_2}\right]+1}$, on a alors :

$$0 < |P_N(z_1,\dots,z_n)| < \exp(-cN^{\eta+a_2})$$

et $$t(P_N) \leqslant (n+1)\ \frac{4c}{c_2}\ t(H_N)$$

$$\leqslant (n+1)\ \frac{4c}{c_2}\ (2(n+1)+\log 3)t(R)N$$

comme $c_2 = 24(n+1)^2 t(R)c$; on a $t(P_N) \leqslant N$.

Le théorème 1.I permet de conclure que $\eta < 2^n$.

§ 2 - *Etude de* $\kappa_n(2^n)$.

Lemme 1.I.- Pour k entier $\geqslant 0$, notons $p(k)$ le nombre de partitions de k :

$$p(k) = \text{card}\ \{(m_1,m_2,\dots) \in \mathbb{N}^N\ ;\ k = m_1 + 2m_2 + \dots\}\ ;\quad p(0) = 1.$$

On considère la fonction définie pour $0 < x < 1$ par

$$f(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{-1}.$$

Alors,

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} p(k)x^k$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n(2^n) = f(\tfrac{1}{2}) \ .$$

Preuve :

Pour $0 < x < 1$; posons $f_n(x) = \prod_{m=1}^{m=n} (1-x^m)^{-1}$.

On peut écrire $f_n(x)$ comme suit

$$f_n(x) = \sum_{m_1=0}^{\infty} x^{m_1} \times \sum_{m_2=0}^{\infty} x^{2m_2} \times \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} x^{nm_n}$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0} x^{m_1+2m_2+\dots+nm_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)x^k$$

où $p_n(k)$ désigne le nombre des n-uplets $(m_1,m_2,\dots,m_n)$ avec $m_j \in \mathbb{N}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n$ et $m_1 + 2m_2 + \dots nm_n = k$.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k\geq 0} p(k)x^k$.

On a : $p_n(k) \leq p(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc $\sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)x^k$ converge uniformément par rapport à n pour x fixé.

D'où $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} p_n(k)x^k$.

Or $p_n(k) = p(k)$ pour $n \geq k$, donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$

ou encore $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$.

D'autre part, on a, $\kappa_n(2^n) = \frac{2^n}{2^n-1} \times \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1} \times \dots \times 2$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2^{n-1}}} \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{m=1}^{m=n} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$= f_n(\tfrac{1}{2})$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \kappa_n(2^n) = f(\frac{1}{2})$.

Lemme 2.1.- Soit Δ le discriminant de la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i\,\frac{\log 2}{2\pi})$.

Alors
$$f(\tfrac{1}{2})^{24} = \frac{2\Delta}{(2\pi)^{12}} .$$

Preuve :

Soit Δ_τ le discriminant de la courbe elliptique associée au réseau de base (ω_1, ω_2) avec $\operatorname{Im}\frac{w_2}{w_1} > 0$; $\tau = \frac{w_2}{w_1}$. On a par définition

$$\Delta_\tau = \frac{(2\pi)^{12}}{w_1^{12}}\, e^{2\pi i\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1-e^{2i\pi n\tau})^{24} .$$

Soit Δ le discriminant de la courbe elliptique $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i\,\frac{\log 2}{2\pi}$.

On a $\Delta = (2\pi)^{12}\ \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{1}{2^n})^{24}$

d'où $f(\frac{1}{2})^{24} = \frac{2\Delta}{(2\pi)^{12}}$.

Lemme 3.1.- On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour $0 < x < 1$.

On a : $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{|k|} x^{\frac{k(3k-1)}{2}}$.

Référence : voir [Ra].

Estimation de $\lim_{n\to\infty} \kappa_n(2^n)$.

Posons $g_{2n}(x) = \sum_{|k|\leq 2n} (-1)^{|k|} x^{\frac{k(3k-1)}{2}}$

$$g_{2n+1}(x) = \sum_{|k|\leq 2n+1} (-1)^{|k|} x^{\frac{k(3k-1)}{2}} .$$

Pour x fixé, $0 < x < 1$, la suite $g_{2n}(x)$ est décroissante et $g_{2n+1}(x)$ est croissante. De plus, on a :

$$g_{2n+1}(x) - g_{2n}(x) = -\left(x^{\frac{(2n+1)(6n+2)}{2}} + x^{-\frac{(2n+1)(6n+1)}{2}}\right) .$$

Comme $x > 0$, $g_{2n}(x) > g_{2n+1}(x)$ donc les suites $g_{2n}(x)$ et $g_{2n+1}(x)$ sont adjacentes (pour x fixé, $0 < x < 1$)

d'où $g_{2n+1}(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{f(\frac{1}{2})} \leq g_{2n}(\frac{1}{2})$.

On peut donc estimer $f(\frac{1}{2})$ avec une erreur aussi petite que l'on veut (prendre n suffisamment grand).

Pour $n = 1$, $\frac{1}{g_{2n}(\frac{1}{2})} = 3{,}45946$

$$\frac{1}{g_{2n+1}(\frac{1}{2})} = 3{,}46275 .$$

Pour $n = 2$, $\dfrac{1}{g_{2n}(\frac{1}{2})} = 3{,}46275$

$$\frac{1}{g_{2n+1}(\frac{1}{2})} = 3{,}46275$$

(ce calcul a été fait à 0,00001 près).

On a

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n(2^n) = 3{,}46274\ldots$$

CHAPITRE 2

Résumé :

Dans ce chapitre, on montre que si $x_1,\ldots,x_k$ (resp. $y_1,\ldots,y_\ell$) sont des nombres complexes $\mathbb{Q}$ linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$ et vérifient l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) (cf. chapitre 0, page 14), alors on a une mesure d'approximation simultanée des nombres $e^{x_i y_j}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \ell$.

Définitions et notations.

Soient $n \geq 1$, $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ n nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et ω un nombre complexe entier sur $\mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_n]$.

Le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ s'écrit sous la forme $R(\theta_1,\ldots,\theta_n,X_{n+1})$;

où $R(X_1,\ldots,X_{n+1}) = X_{n+1}^d + R_1(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}^{d-1} + \ldots + R_d(X_1,\ldots,X_n)$

avec $d = [\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega):\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n)]$

et $R_i(X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$, pour tout i, $1 \leq i \leq d$.

Posons $K = \mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)$.

Nous allons définir la taille d'un élément α de K relativement au système de générateurs $\{\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega\}$.

On écrit α sous la forme :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{P_i(\theta_1,\ldots,\theta_n)}{Q_i(\theta_1,\ldots,\theta_n)} \omega^i$$

où P_i et Q_i sont des polynômes de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ premiers entre eux, pour tout i, $0 \leq i \leq d-1$.

On note $Q = \text{ppcm}\{Q_i,\ 0 \leq i \leq d-1\}$ et $P'_i = \frac{Q}{Q_i}\ P_i$.

On a :

$$Q(\theta_1,\ldots,\theta_n).\alpha = \sum_{i=0}^{d-1} P'_i(\theta_1,\ldots,\theta_n).\omega^i.$$

Définition 1.- On appelle taille de α, et on note $t(\alpha)$, le nombre complexe :

$$\max\left(t(Q),t(P'_o),\ldots,t(P'_{d-1})\right).$$

Le théorème 1.I nous a inspiré l'idée de donner la définition suivante :

Définition 2.- Soient η un nombre réel ≥ 2 et c_o une constante ≥ 1 (ne dépendant que de n et η).

On dit que $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ vérifie l'hypothèse (H) avec l'exposant η et la constante c_o s'il existe des nombres réels a_1, a_2, c, N_1 et N_2 vérifiant :

$$0 < a_2 < a_1 \leq a_2 \times \frac{\eta}{\eta-1} \quad ,$$

$$c > c_n(\eta,a_1)$$

et

$$N_2 \geq (cN_1)^{c_o}$$

et tels que : pour tout $N \in [N_1,N_2]$ et tout $(z_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$ satisfaisant à : $\max\limits_{1\leq i\leq n} |z_i-\theta_i| \leq \exp(-cN^{\eta+a_1})$, il existe un polynôme P_N de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ vérifiant :

$$0 < |P_N(z_1,\ldots,z_n)| < \exp(-cN^{\eta+a_2})$$

et $$t(P_N) \leqslant N.$$

Remarque : Une conséquence du théorème 1.I et l'inégalité $\kappa_n(2^n) < 3,5$ est que $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ ne vérifie pas l'hypothèse (H) avec l'exposant 2^n et la constante 3,5.

Soient $x_1,\ldots,x_k$ (resp. $y_1,\ldots,y_\ell$) des nombres complexes $\mathbb{Q}$ linéairement indépendant et vérifiant l'hypothèse de mesure d'indépendance linéaire (C_2) (cf. chapitre 0, page 14).

On pose : $\kappa = \dfrac{k\ell}{k+\ell}$.

Théorème 1.II.- Soient η un nombre réel $\geqslant 2$, $c_o \geqslant 1$, une constante (ne dépendant que de n et η).

On suppose que :

(i) $\eta < \kappa$

(ii) $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ ne vérifie pas l'hypothèse (H) avec l'exposant η et la constante c_o.

Alors, il existe une constante $c \geqslant 1$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait la propriété (*) suivante :

il existe un nombre réel T_o tel que pour tout nombre réel $T \geqslant T_o$ et tout $(\gamma_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}}$ élément de $K^{k\ell}$ satisfaisant à :

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}} t(\gamma_{ij}) \leqslant T$$

on ait :

$$\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| \geqslant \exp\left(-c\, T^{co\,\frac{\kappa\eta}{\kappa-\eta}+\varepsilon}\right)$$

Avant de démontrer le théorème, nous allons énoncer un corollaire :

Corollaire 1.II.- On suppose que $\kappa > 2^n$. Alors, il existe une constante $c \geq 1$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on ait la propriété suivante :

il existe un nombre réel T_o tel que pour tout nombre réel $T \geq T_o$ et tout $(\gamma_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}}$ élément de $K^{k\ell}$ satisfaisant à :

$$\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T$$

on ait

$$\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij} - e^{x_i y_j}| \geq \exp\left(-c\, T^{3,5\frac{\kappa 2^n}{\kappa - 2^n} + \varepsilon}\right)$$

Preuve :

Comme $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ ne vérifie pas l'hypothèse (H) avec l'exposant 2^n et la constante 3,5 ; on applique le théorème 1.I avec $\eta = 2^n$ et $c_o = 3,5$.

Schéma de démonstration du théorème 1.II.

On procède par l'absurde, on suppose donc que le théorème est faux.

On considère une constante c "suffisamment grande" (en fonction de $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_\ell,n,\eta$, $\theta_1,\ldots,\theta_n,k$ et ℓ) et $\varepsilon > 0$ tel que la propriété (*) ne soit pas vérifiée.

On considère alors un nombre réel T "suffisamment grand" par rapport à c et $(\gamma_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}}$ élément de $K^{k\ell}$ satisfaisant à :

$$(1) \qquad \max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| < \exp\left(-c\, T^{co\frac{\kappa\eta}{\kappa-\eta}+\varepsilon}\right)$$

et

$$\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T .$$

On définit (cf. démonstration) un entier $q \geq 1$, des nombres réels a_2, a_1 vérifiant $0 < a_2 < a_1 \leq a_2 \times \frac{\eta}{\eta-1}$ et des nombres réels > 0 :

$L(T)$, $M(T)$ et $M'(T)$ qu'on note pour simplifier L, M et M'.

On démontre d'abord le résultat suivant :

pour $N = c_1\, LM'T$, il existe un polynôme G_N de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$\exp(-c_2 N^{\eta+a_1}) \leq |G_N(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \leq \exp(-c_3 N^{\eta+a_2})$$

et

$$t(G_N) \leq N$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes indépendantes de T.

La démonstration de ce résultat se fait en 3 pas :

1er pas : on construit, à l'aide du lemme de Siegel, une fonction auxiliaire à q variables de la forme :

$$F(\underline{z}) = P(e^{x_1 z_1},\ldots,e^{x_k z_q})$$

(où P est un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{kq}]$ de taille majorée par $c_4 L\ MT$)

telle que F ait des valeurs "très petites" dans l'ensemble

$$S = \{(\underline{h}_1.\underline{y},\ldots,\underline{h}_q.\underline{y}), \qquad 0 \leqslant |h| < M\}.$$

<u>*2ème pas*</u> : Les x_i (resp. les y_j) vérifiant l'hypothèse (C_2), on applique le lemme 14.0 (cf. chapitre 0) à la fonction F pour montrer qu'il existe $h' \in N^{q\ell}$, $0 \leqslant |h'| < M'$ tel que $|F(h'y)|$ ne soit pas "trop petit".

D'après (2), les (γ_{ij}) "approchent bien "les $e^{x_i y_j}$, on en déduit l'existence d'un polynôme G_N de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$|G_N(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \geqslant \exp\left(-c_2\ N^{\eta+a_1}\right)$$

et
$$t(G_N) \leqslant N.$$

<u>*3ème pas*</u> : Le lemme 15.0 (cf. Chapitre 0) nous permet de montrer que $|F(h'y)|$ est "petit" et, par suite, on a :

$$|G_N(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \leqslant \exp\left(-c_3\ N^{\eta+a_2}\right) .$$

L'hypothèse (1) nous permet de définir des réels N_1, N_2 vérifiant $N_2 \geqslant (c_5\ N_1)^{c_0}$ avec $c_5 \geqslant c_n(\eta,a_1)t(R)$ et tels que pour tout $N \in [N_1,N_2]$ et tout $(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ satisfaisant à :

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n+1} |z_i-\theta_i| \leqslant \exp(-c_6\ N^{\eta+a_1}) \quad \text{et} \quad R(z_1,\ldots,z_{n+1}) = 0$$

il existe $G_N \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$0 < |G_N(z_1,\ldots,z_{n+1})| \leqslant \exp(-c_7\, N^{\eta+a_2})$$

(où $\theta_{n+1} = \omega$, $c_6 = \dfrac{c_5}{t(R)}$ et $c_7 = 24(n+1)^2 t(R)\, c_5$.

Au moyen du semi-résultat $r(G_N(z_1,\ldots,z_n,X),R(z_1,\ldots,z_n,X))$ on démontre que $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ vérifie l'hypothèse $\textcircled{H}$ avec l'exposant η et la constante c_o , d'où la contradiction.

Définitions et notations.

1. On définit les relations "<< " et " $\asymp$ " dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la façon suivante :

$f \ll g \iff$ il existe une constante $c > 0$ tel que :

$f(x) \leqslant cg(x)$; $(x \to +\infty)$.

$f \asymp g \iff$ il existe une constante $c > 0$ tel que :

$f(x) = cg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soient a_1, a_2 des nombres réels tels que :

$$0 < a_1 < \frac{\kappa-\eta}{2} \quad \text{et} \quad 0 < a_2 < a_1 .$$

Soit q un entier naturel tel que : $\dfrac{n}{q} < \dfrac{\kappa-\eta}{2(\kappa+1)}$.

Posons :

$$a_1' = \frac{(\eta+a_1)\ell}{k\ell - (k+\ell)(\eta+a_1)}$$

$$a_2' = \frac{(\eta+a_2)\ell + \frac{n}{q}(\ell+\eta+a_2)}{k\ell-(k+\ell)(\eta+a_2) - \frac{n}{q}\left(\frac{\ell^2+(k+\ell)(\eta+a_2)}{\ell}\right)} .$$

Remarquons que :

i) $a_1' > 0$, puisque $0 < a_1 < \kappa-\eta$;

ii) $a_2' > 0$, puisque $0 < a_2 < \frac{\kappa-\eta}{2}$ et $\frac{n}{q} < \frac{\kappa-\eta}{2(\kappa+1)}$;

iii) si $\frac{n}{q} < a_1-a_2$, on a : $a_1' > a_2'$; en effet :

on a les équivalences suivantes :

$$a_2' < a_1' \iff \left[(\eta+a_2)\ell + \frac{n}{q}(\ell+\eta+a_2)\right] \times \left(k\ell-(k+\ell)(\eta+a_1)\right)$$

$$< (\eta+a_1)\,\ell \left[k\ell - (k+\ell)(\eta+a_2) - \frac{n}{q}\,\frac{\ell^2+(k+\ell)(\eta+a_2)}{\ell}\right]$$

$$a_2' < a_1' \iff \frac{n}{q}\left[(\ell+\eta+a_2)\left(k\ell-(k+\ell)(\eta+a_1)\right) + (\eta+a_1)\left(\ell^2+(k+\ell)(\eta+a_2)\right)\right]$$

$$< (\eta+a_1)\,\ell\left(\ell k-(k+\ell)(\eta+a_2)\right) - (\eta+a_2)\,\ell\left(k\ell-(k+\ell)(\eta+a_1)\right)$$

$$\iff \frac{n}{q}\left[\ell^2 k - k\ell(a_1-a_2)\right] < (a_1-a_2)\ell^2 k$$

d'où si $\frac{n}{q} < a_1 - a_2$ alors $a_2' < a_1'$.

Nous allons d'abord démontrer des lemmes auxiliaires sur lesquels reposent la démonstration du théorème.

Nous commençons par définir les nombres réels :

a_1, a_2, $L(T)$, $M(T)$ et $M'(T)$.

On suppose que le théorème est faux.

Soit c une constante "suffisamment grande".

Soit $\varepsilon > 0$ tel que la propriété (*) ne soit pas vérifiée.

Soit a_1 un nombre réel > 0 tel que :

$$a_1 < \kappa - \eta$$

et $a_1' < \dfrac{\eta\ell}{k\ell-\eta(k+\ell)} + \dfrac{\varepsilon}{c_o k}$ $\left(\text{où } a_1' = \dfrac{(\eta+a_1)\ell}{k\ell-(\eta+a_1)(k+\ell)}\right)$.

Posons : $a_2 = a_1 \dfrac{\eta-1}{\eta}$.

On a évidemment $0 < a_2 \leq a_1 \leq a_2 \dfrac{\eta}{\eta-1}$.

Soit q un entier naturel tel que :

$$\frac{n}{q} < \min\left(a_1-a_2 \ , \ \frac{\kappa-\eta}{2(\kappa+1)}\right) .$$

D'après ce qui précède, on a :

$$0 < a_2' < a_1' \qquad \left(\text{où } a_2' = \frac{(\eta+a_2)\ell + \frac{n}{q}(\ell+\eta+a_2)}{k\ell-(k+\ell)(\eta+a_2) - \frac{n}{q}\left(\frac{\ell^2+(k+\ell)(\eta+a_2)}{\ell}\right)}\right) .$$

Soit a_3' un nombre réel tel que $a_2' < a_3' < a_1'$.

ε ne vérifiant pas (*), considérons un nombre réel T "suffisamment grand" par rapport à c et $\gamma_{ij} \in K^{k\ell}$ vérifiant :

$$(1) \qquad \max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| \leq \exp\left(-c\ T^{c_o \frac{\kappa\eta}{\kappa-\eta} + \varepsilon}\right)$$

et $\displaystyle\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T$.

On a en particulier, puisque $c_o > 1$,

$$(2) \qquad \max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| \leq \exp\left(-c\ T^{\frac{\kappa\eta}{\kappa-\eta} + \varepsilon/c_o}\right)$$

et $\max\limits_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T.$

On définit les nombres réels $L(T)$, $M(T)$ et $M'(T)$, qu'on note tout simplement L, M et M', comme suit :

$$L = c_1' \, T^{a_3'} \quad , \quad M = \frac{1}{c_2'} \, L^{\frac{k-n/q}{\ell+n/q}} \, T^{\frac{-n/q}{\ell+n/q}}$$

$$M' = c_3' \, L^{\frac{k}{\ell}}$$

où c_1' , c_2' et c_3' désignent des constantes (indépendantes de T) qu'on choisira plus tard.

D'après la définition de M, on a :

$$L^{kq} = c_2'^{\,(\ell+\frac{n}{q})q} \, M^{\ell q} (LMT)^n .$$

Avec le choix précédent de L, M et M', on a le lemme suivant :

Les notations " << " sont relatives aux fonctions de la variable T.

On pose $f(\varepsilon) = \frac{\eta\kappa}{\kappa-\eta} + \frac{\varepsilon}{c_0}$.

Lemme 1.11.- Les conditions A_i suivantes sont vérifiées :

A_1 : $LMT \ll M^{\ell}$

A_2 : $LM'T \ll M^{\ell}$

A_3 : $LM'^2 \ll M^{\ell}$

A_4 : $M^{\ell}(\log M')^{\chi'+\chi} \ll T^{f(\varepsilon)}$

A_5 : $L^k(\log L)^{\chi+\chi'} \ll T^{f(\varepsilon)}$

A_6 : $(LM'T)^{\eta+a_2} \ll M^{\ell}$

A_7 : $(LM'T)^{\eta+a_1} \gg L^k(\log L)^{\chi+\chi'}$.

Preuve :

Remarquons d'abord que :

$A_2 \Rightarrow A_1$, puisque $M' \gg M$

$A_6 \Rightarrow A_2$, puisque $\eta > 1$

$A_6 \Rightarrow A_3$, puisque $\eta \geq 2$

$A_5 \Rightarrow A_4$, puisque $L^k \cong M'$, $M'^{\ell} \gg M^{\ell}$ et $\chi+\chi' \geq 1$.

Ainsi pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que les conditions A_5 , A_6 et A_7 sont satisfaites.

Montrons qu'on a A_5.

Comme $L \cong T^{a'_3}$ et $a'_3 < a'_1$, on a $L^k(\log L)^{\chi+\chi'} \ll T^{ka'_1}$.

Or, par définition de a_1 , on a :

$$a'_1 < \frac{\eta\ell}{k\ell-\eta(k+\ell)} + \frac{\varepsilon}{c_o k} .$$

On en déduit que : $T^{ka'_1} < T^{\frac{\eta\ell k}{k\ell-\eta(k+\ell)} + \frac{\varepsilon}{c_o}}$

ou encore $T^{ka'_1} < T^{\frac{\eta\kappa}{\kappa-\eta} + \frac{\varepsilon}{c_o}}$, puisque $\kappa = \frac{k\ell}{k+\ell}$

et, par suite, on a : $L^k(\log L)^{\chi+\chi'} \ll T^{\frac{\eta\kappa}{\kappa-\eta} + \frac{\varepsilon}{c_o}}$.

Vérifions que A_6 est satisfaite.

Puisque $M' \cong L^{\frac{k}{\ell}}$, on a : $LM'T \cong L^{\frac{k+\ell}{\ell}} T$.

Par définition, on a :

$$M \cong L^{\frac{(k-\frac{n}{q})}{\ell+\frac{n}{q}}} \cdot T^{-\frac{n/q}{(\ell+\frac{n}{q})}}$$

Par suite, on a les équivalences suivantes :

$$A_6 \iff (L^{\frac{k+\ell}{\ell}} T)^{\eta+a_2} \ll L^{\frac{(k-n/q)\ell}{(\ell+n/q)}} \cdot T^{-\frac{n/q\,\ell}{(\ell+n/q)}}$$

$$\iff L^{k\ell-(\eta+a_2)(k+\ell)-\frac{n}{q}\left(\frac{\ell^2+(\eta+a_2)(k+\ell)}{\ell}\right)} \gg T^{(\eta+a_2)\ell+\frac{n}{q}(\ell+\eta+a_2)}$$

$$\iff L \gg T^{a_2'} .$$

D'après la définition L, cette dernière relation est satisfaite, donc on a A_6. Vérifions qu'on a A_7

$$A_7 \iff (L^{\frac{k+\ell}{\ell}} T)^{\eta+a_1} \gg L^k (\log L)^{\chi+\chi'}$$

$$\iff L^{\frac{k\ell-(\eta+a_1)(k+\ell)}{\ell}} (\log L)^{\chi+\chi'} \ll T^{\eta+a_1}$$

$$\iff L\,(\log L)^{(\chi+\chi')\cdot\frac{\ell}{k\ell-(\eta+a_1)(k+\ell)}} \ll T^{\frac{(\eta+a_1)\ell}{k\ell-(\eta+a_1)(k+\ell)}}$$

$$\iff L\,(\log L)^{(\chi+\chi')\cdot\frac{\ell}{k\ell-(\eta+a_1)(k+\ell)}} \ll T^{a_1'} .$$

Or, par définition, on a $L \cong T^{a_3'}$ avec $a_3' < a_1'$.

A_7 est donc satisfaite.

Dans la suite, $c_1, c_2, \ldots$ désignent des constantes indépendantes de T.

Lemme 2.11.- Sous l'hypothèse

(2) $$\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| \leq \exp\left(-c\ T^{f(\varepsilon)}\right)$$

et $$\max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T$$

il existe $C \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$\exp(-c_{44}L^k(\log L)^{\chi+\chi'}) \leq |G(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \leq \exp(-c_{41}M^{\ell}\log M')$$

et $$t(G) \leq c_{38}LM'T.$$

La démonstration de ce lemme se fait en 3 pas :

1er pas : Construction de la fonction auxiliaire.

On adopte les mêmes notations que dans le lemme 15 , chapitre 0.

On considère une fonction complexe à q variables, de la forme :

$$F(\underline{z}) = \sum_{0\leq\lambda_{i,j}<L} p_\lambda \prod_{i=1}^{q} \exp((\underline{\lambda}_i.\underline{x})\ z_i)$$

où $\underline{z} = (z_1,\ldots,z_q)$ et p_λ désignant des entiers.

Pour $h = (h_{i,s})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq s\leq \ell}} \in \mathbb{N}^{q\ell}$, on pose :

$$P_h(X_{11},\ldots,X_{k\ell}) = \sum_{0\leq\lambda_{i,j}<L} p_\lambda \prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{k}\prod_{s=1}^{\ell} X_{j,s}^{\lambda_{i,j}h_{i,s}} .$$

On a évidemment, $F(h.y) = P_h(e^{x_1y_1},\ldots,e^{x_ky_\ell})$.

Remarquons que pour h vérifiant $0 \leq |h| < M$, on a :

$$t(P_h) \leq c_8\left(LM + \log(\max|p_\lambda| + 1)\right).$$

Posons : $\phi(h.y) = P_h(\gamma_{11},\ldots,\gamma_{k\ell})$.

Ecrivons γ_{ij} dans $\mathbb{Q}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)$ sous la forme :

$$\gamma_{ij} = \sum_{r=0}^{d-1} \frac{P_{i,j,r}(\theta_1,\ldots,\theta_n)}{Q_{i,j,r}(\theta_1,\ldots,\theta_n)}\ \omega^r$$

où $P_{i,j,r}$ et $Q_{i,j,r}$ sont des polynômes de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ premiers entre eux, pour tout r : $0 \leq r \leq d-1$.

Posons : $Q_{i,j}$ = p.p.c.m. $\{Q_{i,j,r}\ ,\ 0 \leq r \leq d-1\}$, $Q = \prod_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} Q_{i,j}$.

On a : $Q_{i,j}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\gamma_{ij} = \sum_{r=0}^{d-1} P'_{i,j,r}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\omega^r$

où $P'_{i,j,r} = \dfrac{Q_{i,j}}{Q_{i,j,r}} \cdot P_{i,j,r}$.

Comme $\max\limits_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(\gamma_{ij}) \leq T$, alors, par définition, on a :

$$\max_{\substack{1\leq i<k\\ 1\leq j\leq \ell\\ 0\leq r\leq d-1}} t(P'_{i,j,r}) \leq T \quad \text{et} \quad \max_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} t(Q_{i,j}) \leq T.$$

Posons $S_{i,j}(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \sum_{r=0}^{d-1} P'_{i,j,r}(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}^r$.

Comme $t(P'_{i,j,r}) \leq T$ pour tout r, $0 \leq r \leq d-1$, on a :

$$t(S_{i,j}) \leq c_9T.$$

Posons : $\bar{L} = [L] + 1$ et $\bar{M} = [M] + 1$.

Remarque :

Il existe $S_h \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$Q^{q\bar{L}\bar{M}}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\phi(h.y) = S_h(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)$$

et
$$t(S_h) \leqslant c_{10}LMT.$$

En effet, on a :

$$Q^{q\bar{L}\bar{M}}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\phi(h.y) = \sum_{0\leqslant\lambda_{i,j}<L} p_\lambda \prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{k}\prod_{s=1}^{\ell}\left(Q_{i,j}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\gamma_{ij}\right)^{\lambda_{i,j}h_{i,s}}$$
$$\times\left(Q_{i,j}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\right)^{\bar{L}\bar{M}-\lambda_{i,j}h_{i,s}}$$

$$= \sum_{0\leqslant\lambda_{i,j}<L} p_\lambda \prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{k}\prod_{s=1}^{\ell}\left(S_{i,j}(\theta_1,\ldots\theta_n,\omega)\right)^{\lambda_{i,j}h_{i,s}}$$
$$\times\left(Q_{i,j}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\right)^{\bar{L}\bar{M}-\lambda_{i,j}h_{i,s}}$$

Posons : $S_h(X_1,\ldots,X_{n+1}) =$

$$\sum_{0<\lambda_{i,j}<L} p_\lambda \prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{k}\prod_{s=1}^{\ell}(S_{i,j}^{\lambda_{i,j}h_{i,s}}(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1})Q_{i,j}^{\bar{L}\bar{M}-\lambda_{i,j}h_{i,s}}(X_1,\ldots,X_n).$$

On a évidemment : $Q^{q\bar{L}\bar{M}}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\phi(h.y) = S_h(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)$

et $t(S_h) \leqslant c_{10}LMT$.

Lemme 2.1.II.- Il existe des entiers (p_λ) non tous nuls vérifiant : $\max|p_\lambda| \leqslant \exp(c_{15}LMT)$ et tels que :

$\phi(h.y) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}^{q\ell}$; $0 \leqslant |h| < M$.

Pour ces entiers, on a : $|F(h.y)| \leqslant \exp(-\frac{c}{2}T^{f(\varepsilon)})$.

Preuve :

On a l'équivalence suivante :

$\phi(h.y) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}^{q\ell}$, $0 \leqslant |h| < M$ <==> $S_h(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega) = 0$, pour tout $h \in \mathbb{N}^{q\ell}$, $0 \leqslant |h| < M$.

En écrivant $S_h(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)$ dans $\mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_n][\omega]$, on obtient un système de $c_{11}M^{\ell q}$ équations linéaires homogènes en les p_λ à coefficients dans $\mathbb{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_n]$, de tailles majorées par $c_{12}LMT$.

Cela fournit un système de $c_{13}M^{\ell q}(LMT)^n$ équations linéaires homogènes en les (p_λ) à coefficients entiers majorés par $\exp(c_{14}LMT)$.

Ce dernier système est de L^{kq} inconnues qui sont les p_λ $(0 \leqslant \lambda_{i,j} \leqslant L)$.

Or, d'après la définition de L et M, on a :

$$L^{kq} = c_2'^{\,(\ell+\frac{n}{q})q}\, M^{\ell q}(LMT)^n \quad \text{où } c_2' \text{ est une constante arbitraire.}$$

On peut supposer que $c_2' > 2c_{13}$ et, par conséquent, on a :

$$L^{kq} > 2c_{13}M^{\ell q}(LMT)^n.$$

D'après le lemme de Siegel (lemme 1, chapitre 0) il existe des entiers (p_λ) non tous nuls majorés par $\exp(c_{15}LMT)$ et tels que : $\phi(h.y) = 0$, pour tout $h \in N^{q\ell}$; $0 \leqslant |h| < M$.

Montrons que pour tout $h \in \mathbb{N}^{q\ell}$; $0 \leqslant |h| < M$, $|F(h.y)|$ est "petit".

Par définition, $\phi(h.y) = P_h(\gamma_{11},\ldots,\gamma_{k\ell})$ et $F(h.y) = P_h(e^{x_1y_1},\ldots,e^{x_ky_\ell})$.

Si, $0 \leqslant |h| < M$, on a $t(P_h) \leqslant c_8\left(LM + \log(\max_\lambda |p_\lambda| + 1)\right)$, comme $|p_\lambda| \leqslant \exp(c_{15}LMT)$, on a alors :

$$t(P_h) \leqslant c_{16}LMT.$$

L'hypothèse (2) $\max\limits_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{i,j}-e^{x_i y_j}| \leq \exp(-c\ T^{f(\varepsilon)})$

étant vérifiée, en appliquant le lemme 4.0, on obtient

$$|P_h(e^{x_1y_1},\ldots,e^{x_ky_\ell}) - P_h(\gamma_{11},\ldots,\gamma_{k\ell})| \leq \exp(c_{17}t(P_h)) \times \exp(-cT^{f(\varepsilon)})$$

$$\leq \exp(c_{18}LMT) \times \exp(-cT^{f(\varepsilon)}).$$

Or $T^{f(\varepsilon)} \gg LMT$ d'après la condition A_1 du lemme 1.II, c étant une constante suffisamment grande, on peut écrire que :

$$|P_h(e^{x_1y_1},\ldots,e^{x_ky_\ell}) - P_h(\gamma_{11},\ldots,\gamma_{k\ell})| \leq \exp(-\frac{c}{2}\ T^{f(\varepsilon)})$$

ou encore, $|F(h.y) - \phi(h.y)| \leq \exp(-\frac{c}{2}\ T^{f(\varepsilon)})$.

Or $\phi(h.y) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}^{q\ell}$, $0 \leq |h| < M$, on a donc

$$|F(h.y)| \leq \exp(-\frac{c}{2}\ T^{f(\varepsilon)}).$$

2ème pas : Nous allons montrer qu'il existe $h' \in \mathbb{N}^{q\ell}$, $0 \leq |h'| < M'$, tel que $F(h'.y)$ ne soit pas "trop petit".

Lemme 2.2.II.- Il existe $h' \in \mathbb{N}^{q\ell}$, $0 \leq |h'| < M'$, tel que :

$$|F(h'.y)| \geq \exp(-c_{21}L^k(\log L)^{\chi+\chi'}.$$

Par suite, on a :

$$|\phi(h'.y)| \geq \exp(-c_{24}L^k(\log L)^{\chi+\chi'}).$$

Preuve :

On peut appliquer le lemme 15.0 à la fonction F, construite dans le 1er pas, en posant :

$$a_\lambda = p_\lambda, \quad K = L \quad \text{et} \quad H = M'.$$

Les conditions du lemme 15.0 sont satisfaites dans ce cas, en effet :

$$M' = c_3' \, L^{\frac{k}{\ell}} .$$

On peut supposer que $c_3' > c_{19}$, où $c_{19} = 13k\ell \max_j |x_i| \max_j |y_j|$ et, par conséquent, puisque $\ell \geq 2$, on a

$$M'^{\ell} \geq 2L^k + c_{19} LM'.$$

On applique, alors, le lemme 15.0 à la fonction F, on obtient :

$$\max_{0 \leq \lambda_{i,j} < L} |p_\lambda| \leq \exp\left(c_{20}(L^k(\log L)^{\chi} + M'^{\ell}(\log M')^{\chi'})\right) \max_{0 \leq |h| < M'} |F(h.y)|$$

$$\leq \exp\left(c_{21} L^k (\log L)^{\chi+\chi'}\right) \max_{0 \leq |h| < M'} |F(h.y)|,$$

puisque $L^k \cong M'^{\ell}$.

Comme les (p_λ) sont des entiers non tous nuls, il existe $h' \in \mathbb{N}^{q\ell}$, $0 \leq |h'| < M'$ tel que :

$$|F(h'y)| \geq \exp(-c_{21} L^k (\log L)^{\chi+\chi'})$$

Nous avons une minoration analogue pour $\phi(h'y)$, en effet : l'hypothèse (2) étant vérifiée, d'après le lemme 4.0.

On a :

$$\begin{aligned} |F(h'.y) - \phi(h'.y)| &\leq \exp(c_{22} t(P_{h'})) \exp(-cT^{f(\varepsilon)}) \\ &\leq \exp(c_{23} LM'T) \exp(-cT^{f(\varepsilon)}) \\ &\leq \exp(-\tfrac{c}{2} T^{f(\varepsilon)}), \end{aligned}$$

puisque $LM'T \ll T^{f(\varepsilon)}$ (condition A_2) et c est une constante suffisamment grande.

Par suite $|\phi(h'.y)| \geq |F(h'.y)| - \exp(-\frac{c}{2} T^{f(\varepsilon)})$

$$\geq \exp(-c_{21} L^k (\log L)^{\chi+\chi'}) - \exp(-\frac{c}{2} T^{f(\varepsilon)})$$

$$\geq \exp(-c_{24} L^k (\log L)^{\chi+\chi'}),$$

puisque $T^{f(\varepsilon)} \gg L^k (\log L)^{\chi+\chi'}$ (condition A_5 du lemme 1.II) et c est suffisamment grande.

3ème pas : Nous allons montrer que $|F(h'.y)|$ est "petit".

Lemme 3.2.II.- On a :

$$|F(h'.y)| \leq \exp(-c_{36} M^{\ell} \log M')$$

Par suite :

$$|\phi(h'.y)| \leq \exp(-c_{37} M^{\ell} \log M').$$

Preuve :

Appliquons le lemme 15.0 à la fonction auxiliaire F, avec

$r = c_{25} M'$, $R = c_{25} M'^2$, (où c_{25} est une constante convenablement choisie (cf. lemme 15.0).

$S_M = \{(\underline{h}_1 . \underline{y}, \ldots, \underline{h}_q . \underline{y}), \quad 0 \leq |h| < M\}$.

On obtient :

$$|F|_r \leq |F|_R (c_{26} M'^{-1})^{c_{27} M^{\ell}} + |F|_M (c_{28} M')^{c_{29} M^{\ell}} \exp(c_{30} M^{\ell} (\log M')^{\chi'})$$

$$\leq |F|_R \exp(-c_{31} M^{\ell} \log M') + |F|_M \exp(c_{32} M^{\ell} (\log M')^{\chi'}).$$

Rappelons que $F(z) = \sum_{0 \leq \lambda_{i,j} < L} p_\lambda \prod_{i=1}^{q} \exp((\underline{\lambda}_i . \underline{x}_i) z_i)$

avec $\max |p_\lambda| \leq \exp(c_{15} LMT)$

donc, on a : $|F|_R \leqslant L^{kq}\exp(c_{15}LMT)\exp(c_{33}LM'^2)$

$\leqslant \exp(c_{34}M^{\ell})$,

puisque $LMT \ll M^{\ell}$ (A_2) et $LM'^2 \ll M^{\ell}$ (A_3).

D'autre part, $|F|_M = \max\limits_{0\leqslant|h|<M} |f(h.y)| \leqslant \exp(-\frac{c}{2}T^{f(\varepsilon)})$

et $T^{f(\varepsilon)} \gg M^{\ell}(\log M')^{\chi'}$ (A_4)

d'où $|F|_r \leqslant \exp(-c_{35}M^{\ell}\log M') + \exp(-\frac{c}{4}T^{f(\varepsilon)})$

$\leqslant \exp(-c_{36}M^{\ell}\log M')$.

Comme $||h'y|| \leqslant r$, on a en particulier

$$|F(h'y)| \leqslant \exp(-c_{36}M^{\ell}\log M').$$

Nous avons une majoration analogue pour $\phi(h'y)$, en effet :

$$|\phi(h'y) - F(h'y)| \leqslant \exp(-\frac{c}{2}T^{f(\varepsilon)})$$

d'où $|\phi(h'y)| \leqslant \exp(-c_{36}M^{\ell}\log M') + \exp(-\frac{c}{2}T^{f(\varepsilon)})$

$\leqslant \exp(-c_{37}M^{\ell}\log M')$.

Preuve du lemme 22.II.-

Il existe (cf. remarque p. 15), $S_{h'} \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$Q^{q\bar{L}'\bar{M}'}(\theta_1,\ldots,\theta_n)\phi(h'y) = S_{h'}(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)$$

et $$t(S_{h'}) \leqslant c_{38}LM'T.$$

Posons $G = S_{h'}$.

On a $|G(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \leqslant |\phi(h'y)|\exp(c_{40}LM'T)$, puisque $t(Q) \leqslant c_{39}T$.

Or $|\phi(h'y)| \leqslant \exp(-c_{37}M^{\ell}\log M')$, d'après le lemme 3.2.II.

Comme $LM'T \ll M^{\ell}$ (A_2), on a alors :

$$|G(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \leqslant \exp(-c_{41}M^{\ell}\log M')$$

D'autre part, on a

$$|G(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega)| \geqslant |\phi(h'y)|\exp(c_{42}LM'T)$$
$$\geqslant \exp(-c_{24}L^k(\log L)^{\chi+\chi'})\ \exp(c_{43}LM'T)$$

d'après le lemme 2.2.II.

Comme $L^k \gg LM'T$, on a

$$|G(\theta_1,\ldots,\theta_n,\omega| \geqslant \exp(-c_{44}LM'T)$$

Le lemme 2.II est ainsi démontré.

Posons $N_1(T)$ et notons tout simplement N_1 le nombre réel $c_{45}LM'T$ (où c_{45} est une constante qu'on choisira convenablement).

Posons :
$$c_{46} = c_n(\eta,a_1)$$
$$c_{47} = c_{46}t(R)$$
$$c_{48} = 24(n+1)^2\ c_{47}$$
$$\theta_{n+1} = \omega$$
$$N_2(T) = (c_{47}N_1(T))^{c_0}$$

Lemme 3.II.- Sous l'hypothèse (2) :

$\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_iy_j}| \leqslant \exp(-cT^{f(\varepsilon)})$, on a la propriété suivante :

pour tout $(z_1,\ldots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant :

$$R(z_1,\ldots,z_{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{1\leqslant i\leqslant n+1} |z_i-\theta_i| \leqslant \exp(-c_{46}N_1^{\eta+a_1})$$

il existe $G_{N_1} \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ tel que :

$$0 < |G_{N_1}(z_1,\ldots,z_{n+1})| \leq \exp(-c_{48}N_1^{\eta+a_2})$$

et
$$t(G_{N_1}) \leq N_1 .$$

Preuve :

Considérons le polynôme G donné dans le lemme 2.II.

Puisque $\max_{1\leq i\leq n+1} |z_i-\theta_i| \leq \exp(-c_{46}\, N_1^{\eta+a_1})$, le lemme 4.0 fournit

$$|G(z_1,\ldots,z_{n+1}) - G(\theta_1,\ldots,\theta_{n+1})| \leq \exp\left(-c_{46}N_1^{\eta+a_1}\right)\exp\left(\frac{c_{46}}{2}\, t(G)\right)$$
$$\leq \exp\left(-\frac{c_{46}}{2}N_1^{\eta+a_1}\right)$$

puisque $t(G) \leq c_{38}LM'T < N_1$ (on choisit c_{45} tel que : $c_{45} > c_{38}$).

Par suite $|G(z_1,\ldots,z_{n+1})| \leq |G(\theta_1,\ldots,\theta_{n+1})| + \exp(-\frac{c_{46}}{2}\, N_1^{\eta+a_1})$

$$\leq \exp(-c_{41}M^{\ell}\log M') + \exp(-\frac{c_{46}}{2}N_1^{\eta+a_1}).$$

Or $(LM'T)^{\eta+a_2} \ll M^{\ell}$ (A_6) et comme T est "suffisamment grand" on peut supposer que :

$$c_{41}M^{\ell}\log M' > 2\, c_{48}N_1^{\eta+a_2} .$$

Comme $a_1 > a_2$ et T est "suffisamment grand", on peut écrire que :

$$c_{46}N_1^{\eta+a_1} > 4c_{48}N_1^{\eta+a_2}$$

et, par conséquent, on a :

$$|G(z_1,\ldots,z_{n+1})| \leq \exp(-2c_{48}N_1^{\eta+a_2}) + \exp(-2c_{48}N_1^{\eta+a_2})$$
$$\leq \exp(-c_{48}N_1^{\eta+a_2}).$$

D'autre part, on a

$$|G(z_1,\dots,z_{n+1})| \geq |G(\theta_1,\dots,\theta_{n+1})| - \exp(-\frac{c_{46}}{2} N_1^{\eta+a_1})$$

$$\geq \exp\left(-c_{44}L^k(\log L)^{\chi+\chi'}\right) - \exp(-\frac{c_{46}}{2} N_1^{\eta+a_1}).$$

Or $(LM'T)^{\eta+a_1} \gg L^k(\log L)^{\chi+\chi'}$ (A_7), comme $N_1 = c_{45}LM'T$ avec un choix convenable de c_{45}, on peut écrire que :

$$c_{44}L^k(\log L)^{\chi+\chi'} < c_{45}N_1^{\eta+a_1}$$

et, par conséquent : $|G(z_1,\dots,z_{n+1})| > 0$.

On pose $G_{N_1} = G$, ceci prouve le lemme 3.II.

Lemme 4.II.-

Sous l'hypothèse (1) $\max\limits_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} |\gamma_{ij}-e^{x_i y_j}| \leq \exp\left(-cT^{c_0 \frac{\kappa\eta}{\kappa-\eta}+\varepsilon}\right)$.

On a la propriété suivante :

pour tout $N \in [N_1(T),N_2(T)]$ et tout $(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant : $R(z_1,\dots,z_{n+1}) = 0$ et $\max\limits_{1\leq i\leq n+1} |z_i-\theta_i| \leq \exp(-c_{46}N_1^{\eta+a_1})$ il existe $G_N \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{n+1}]$ tel que :

$$0 < |G_N(z_1,\dots,z_{n+1})| < \exp -c_{48}N^{\eta+a_2}$$

et $$t(G_N) \leq N.$$

Preuve :

Soit $N \in [N_1(T),N_2(T)]$ et soit T' tel que :

$N = N_1(T')$ où $N_1(T') = c_{45}L(T\ )\ M'(T')\ T'$.

On a : $T' \geq T$ puisque $N_1(T') \geq N_1(T)$

et $T' \leqslant c_{49} T^{c_o}$ puisque $N_2(T) \geqslant N_1(T')$.

L'hypothèse (1) étant vérifiée, on en déduit que :

$$\text{et} \quad (3) \quad \begin{cases} \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant \ell}} |\gamma_{ij} - e^{x_i y_j}| \leqslant \exp(-c' T'^{f(\varepsilon)}) \\ \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant \ell}} t(\gamma_{ij}) \leqslant T' \end{cases}$$

où $c' = \dfrac{c}{c_{49}}$.

Soit $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant :

$$R(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |z_i - \theta_i| \leqslant \exp(-c_{46} N^{\eta + a_1})$$

les inégalités (3) étant vérifiées, d'après le lemme 3.II, il existe $G_{N_1(T')} \in Z[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ tel que :

$$0 < |G_{N_1(T')}(z_1, \ldots, z_{n+1})| < \exp\left(-c_{48} N_1^{\eta + a_1}(T')\right)$$

et $$t(G_{N_1(T')}) \leqslant N_1(T').$$

Par définition $N = N_1(T')$.

Le lemme 4.II est ainsi démontré.

Preuve du théorème 1.II :

Le lemme 4.II implique que $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ vérifie l'hypothèse (H) avec l'exposant η et la constante c_o (cf. Preuve du corollaire 1.I).

Cela contredit l'hypothèse.

Le théorème 3 est donc démontré.

Remarque : Une version effective du critère d'indépendance algébrique [Ph 2, théorème 1] permettrait de montrer que $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ ne vérifie pas l'hypothèse (H) avec l'exposant $(n+1)$ et, par conséquent, on aurait une amélioration du corollaire 1.II.

REFERENCES

[Bak] A. BAKER - *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, 2ème ed., 1979.

[Bak and Mass] A. BAKER and W. MASSER - *Transcendence theory*, Advances and applications. Academic Press Inc (London) LTP.

[Brown 1] W.D. BROWNAWELL - *The algebraic independence of certain values of the exponential function*, K. norske vidensk. Selsh. skr, n° 23 (1972).

[Brown 2] W.D. BROWNAWELL - *The algebraic independence of certain numbers related by the exponential function*, J. number theory 6, 1974.

[Brown 3] W.D. BROWNAWELL - *Gelfond's method for algebraic independence*, Trans. A.M.S. 210 (1975), 1 à 26.

[Ch 1] G.V. CHUDNOVSKY - *Algebraic independence of some values of the exponential function*, Math. Notes, t. 15, 1974, p. 391-398.

[Ch 2] G.V. CHUDNOVSKY - *Some analytic methods in the theory of transcendental numbers*, Ukrainian SSR Academy of sciences Preprint IM 74-8 Kiev, 1974, Analytic methods in diophantine approximations, id, IM 74-9, KIEV, 1974.

[Ch 3] G.V. CHUDNOVSKY - *A mutual transcendance measure for some classes of numbers*, Dokl Akad. Nauk. SSSR, 218 (1974), n° 4, 771-774. Engl. transl. Soviet. Math. Dokl, 15 (1974), 1424-1428.

[Ch 4] G.V. CHUDNOVSKY - Livre de Chydnovsky (cf. p. 115-121).

[End] R. ENDELL - *Zur algebraisehen un abhängigkeit gervisser Werte der Exponential function (nach Chudnovsky)*, Diplomarbeit, Düsseldorf, déc. 1981.

[Gel] A.O. GELFOND - *Transcendental and algebraic numbers*, Moscou, GITTL, 1952, English transl : Dover, 1960.

[Lo-Po] J.H. LOXTON and A.J. VAN DER POORTEN - *Arithmetic properties of solutions of a class of functional equations*, I. reine. august. Math. (Crell J), t. 330, 1982, p. 159-172.

[Mah] K. MAHLER - *An application of Jensen's formula to polynomials*, Mathematika, 7 (1960), 98-100.

[Mass] D.W. MASSER - *Polynomial Interpolation in several complex variables*, Journal of approximation theory 24, 18-34 (1978).

[Mas-Wü 1] D.W. MASSER and G. WÜSTHOLZ - *Zero estimates on group varieties I*, Invent. Math., t. 64, 1981, p. 489-516.

[Mas-Wü 2] D.W. MASSER and G. WUSTHOLZ - *Algebraic independence properties of values of elliptic functions*, (ex), p. 360-363.

[Mo] J.C. MOREAU - *Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques*, Séminaire P. Lelong, H. Skoda (Analyse) 18ème et 19ème année, 1978/1979.

[Nes] Ju.V. NESTERENKO - *On the algébraical independence of algebraic numbers to algebraic powers*, in : Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, Progress in Math. 31, Birkhaüser (1983), 199-220.

[Ph. 1] P. PHILIPPON - *Independance algébrique des valeurs de fonctions exponentielles p-adiques*, I reine angev. Math. Grelle 329 (1981), 42-51.

[Ph. 2] P. PHILIPPON - *Critères pour l'indépendance algébrique de familles de nombres*, C.R. Math. Rep. Sei. Canada vol. VI, n° 5, october 1984.

[Ra] RADEMACHER - Lectures on analytic number theory.

[Re] E. REYSSAT - *Un critère d'indépendance algébrique*, I reine augew Math. (Crelle), 329 (1981), 66-81.

[Sch] A.B. SIDLOVSKII - *On criteria for algebraic independence of values of a class of entire functions*, Irv. Akad. Nauk. SSR. Math., t. 23, 1959, p. 35-66. trad. angl : Amer. Math. Soc. Transl. (2), 1962, p. 339-370.

[Shm 1] A. SHMELEV - *On the method of A.O. Gelfond in the theory of transcendental numbers*, Math. Zametki 10 (1971), 415-426, Math. Notes 10, (1971), 672-678.

[Shm 2] A. SHMELEV - *Sur les propriétés arithmétiques des valeurs de la fonction exponentielle en des points algébriques (en russe)*, Izvest. vycs. veebn. Zaved, Mat., 1973, n° 10 (137), p. 90-99.

[Sie] C.L. SIEGEL - *Uber einige Anwendungen diophantiseher Approximationen*, Abh Preuces Akad. Wiss., t. 1, 1929, Gessam Abh. J n° 16, p. 209-266, Springer-Verlag, 1966.

[Tij 1] R. TIJDEMAN - *On the algebraic independence of certain numbers*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74 : Indag Math. 33 (1971), 146-162.

[Tij 2] R. TIJDEMAN - *On the number of zeros of general exponential polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74 : Indag Math. 33 (1971), 1 à 7.

[Tij 3] R. TIJDEMAN - *On the distribution of the values of certain functions*, thesis, Univ. of Amsterdam, the Nederlands, 1969.

[Tij 4] R. TIJDEMAN - *An auxiliary result in the theory of transcendental numbers*, Journal of number theory 5, 80-94 (1973).

[Wald 1] M. WALDSCHMIDT - *Independance algébrique des valeurs de la fonction exponentielle*, Bulletin Soc. Math. France 99, (1971), 285-304.

[Wald 2] M. WALDSCHMIDT - *Solution d'un problème de Sebneïder sur les nombres transcendants*, C.R. Acad. Sci. Ser. A,B 271 (1970), A 697-700.

[Wald 3] M. WALDSCHMIDT - *Algebraic Independence of transcendental numbers. Gelfond's Method and its developpements.* Perspectives in Mathematics. Anniversary of oberwolfach, 1984. (c) Birkhaüser Verlag, Basel.

[Wald-Zhu] M. WALDSCHMIDT et ZHU-YAO CHEN - *Une généralisation en plusieurs variables d'un critère de Gelfond*, C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. 1, 297, (1983), 229-232.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

RÉSUMÉ

D'après un résultat de Chudnovsky (1974), si $x_1,\dots,x_k$ (resp. $y_1,\dots,y_\ell$) sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et vérifient une hypothèse de mesure d'indépendance linéaire, alors

$$\text{si } \frac{k\ell}{k+\ell} \geqslant 2^n, \text{ on a } \deg \operatorname{tr} \mathbb{Q}(\{e^{x_i y_j}\ 1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant \ell\} \geqslant n+1.$$

Le but de ce travail est un raffinement effectif de ce résultat.

Dans la 1ère partie, nous démontrons une version effective d'un critère de M. WALDSCHMIDT et ZHU YAO CHEN et nous étudions la constante absolue : $2 \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{2^n}{2^n-1} \times \dots$ qui intervient dans ce critère.

Dans la 2ème partie, nous démontrons en particulier que si $\frac{k\ell}{k+\ell} > 2^n$, alors on a une mesure d'approximation simultanée des $e^{x_i y_j}$ par les éléments d'un sous-corps de $\mathbb{C}$ de degré de transcendance n sur $\mathbb{Q}$.

MOTS CLES : Critère d'indépendance algébrique, approximation simultanée, fonction exponentielle.

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE