

N° d'ordre : 1353

50376
1986
145

50376
1986
145

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : ELECTRONIQUE

par

Mohammed EL MOUTAOUKIL



73 557
03612124X

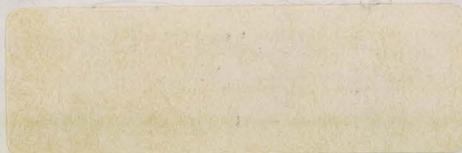
MODELISATION DES INTERACTIONS ENERGETIQUES DANS UNE PAROI MULTICOUCHE EN REGIME VARIABLE. ANALOGIE ELECTRIQUE.

Soutenue le 19 Septembre 1986 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Y. LEROY
P. THERY
J. POSTAIRE
A. LEBRUN
D. LECLERCQ
M. LEROY

Président
Rapporteur
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Invité



AVANT - PROPOS

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire "Mesures Automatiques" du Centre de Recherche Science des Matériaux & Techniques de construction (CRESMAT) de l'Université de Lille 1.

Monsieur le Professeur THERY m'a confié le thème de cette étude. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour ses orientations, ses conseils précieux et les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail ainsi que la part active qu'il a eue dans son aboutissement.

Il m'est agréable de rappeler que mes activités de recherche ont débuté au laboratoire du CRESMAT, alors dirigé par Monsieur le Professeur LEBRUN. Je tiens à le remercier pour tous ses conseils très riches et ses encouragements. Je suis très sensible à sa présence dans le jury pour juger ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur LEROY pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je suis très honoré par la présence de Monsieur POSTAIRE, Professeur à l'Université de Lille 1.

Je suis très reconnaissant à Monsieur LECLERCQ, Maître de Conférence à l'I.U.T. de Génie Mécanique de Lille pour son amicale collaboration et ses précieux conseils. Je suis très sensible à sa présence dans ce jury.

Je remercie Monsieur LEROY, Ingénieur à la Société Industrielle LESAFFRE, pour avoir accepté de faire partie du Jury.

.../...

.../...

Ma reconnaissance va à Monsieur GAVIOT, chercheur au Laboratoire qui m'a toujours conseillé quant à la partie théorique de mon travail et m'a aidé dans la mise en oeuvre informatique.

Mes remerciements vont également à tous mes collègues chercheurs pour l'aide qu'ils m'ont apportée et l'intérêt qu'ils ont témoigné à ce mémoire.

Madame CASTEGNIER s'est chargée de la frappe du manuscrit. Je voudrais la féliciter ici de la qualité de son travail et de sa grande patience.

Enfin, je remercie Messieurs DEHORTER et LEMAIRE qui ont assuré avec beaucoup de gentillesse l'impression de ce document.

SOMMAIRE

VI-3- VARIATIONS DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES DES SYSTEMES ELECTRIQUES ANALOGIQUES AUX SYSTEMES THERMIQUES	35
VII - FONCTION D'INFLUENCE SYMETRIQUE ET ANTISYMETRIQUE.....	40
VIII - SIMULATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT SYMETRIQUE ET ANTISYMETRIQUE	47
VIII-1- STOCKAGE ENERGETIQUE (MODE SYMETRIQUE)	48
VIII-2- TRANSFERT PUR (SANS ELEVATION DE TEMPERATURE)	55
CHAPITRE II : ECHANGE ÉNERGÉTIQUE ENTRE LA LIGNE ET LES MILIEUX EXTÉRIEURS	62
I - ANALOGIES ENERGETIQUES	63
II - EXPRESSION DE LA LOI DE CONSERVATION DE L'ENERGIE	65
III - INTERPRETATION ENERGETIQUE DE LA REPONSE INDICIELLE	67
III-1- SYSTEME A UN SEUL ACCES	67
III-2- SYSTEME A DEUX ACCES. PAROI HOMOGENE SOLLICITEE SUR CES DEUX FACES.	71
IV - ECHANGE ENERGETIQUE ENTRE LA LIGNE ET LES MILIEUX EXTE-RIEURS	76
IV-1- ETUDE DANS LE DOMAINE TEMPS	76
IV-2- PUISSANCES DISSIPEES ET ENERGIES STOCKEES POUR UN PROCESSUS DANS LE-QUEL IL Y A, A LA FOIS STOCKAGE ET TRANSFERT (ELEVATION DE LA TEMPE-RATURE SUR UNE SURFACE EXTERIEURE)	77
IV-2-1- Résultats relatifs aux puissances dissipées	77
IV-2-2- Energies stockées	80
IV-3- REPRESENTATION TEMPS DE LA DISSIPATION ET DU STOCKAGE. TRANSFERT PUR MODE ANTISYMETRIQUE	83
IV-3-1- Puissances	83
IV-3-2- Energies stockées dans chaque capacité	85
IV-4- REPRESENTATION TEMPS DE LA DISSIPATION ET DU STOCKAGE, "STOCKAGE PUR" SANS TRANSFERT DE CHALEUR A TRAVERS LE SYSTEME	88
IV-4-1- Puissances instantanées	88
IV-4-2- Energies stockées	90
V - COMPARAISON DES RESULTATS	90
VI - ETUDE DANS LE DOMAINE FREQUENCE	99
VII - VERIFICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION	101
VIII - SEPARATION DE LA DISSIPATION ET DU STOCKAGE A L'AIDE DES FONCTIONS D'INTERCORRELATION	102
IX - CONCLUSION	114

CHAPITRE III : EXTENSION A LA SIMULATION DES ÉCHANGES DANS LES SYSTEMES INHOMOGENES	116
I - INTRODUCTION	117
II - SYSTEME BICOUCHE (PAROI - COEFFICIENT D'ECHANGE)	117
II-1- INTRODUCTION	117
II-2- MODELISATION A L'AIDE DES LIGNES ELECTRIQUES	120
II-3- PRINCIPAUX RESULTATS	121
III - PAROI MULTICOUCHE	126
IV - MESURE DES FONCTIONS REPOSES	128
IV-1- SOLLICITATION SYMETRIQUE PURE	128
IV-2- SOLLICITATION ANTISYMETRIQUE	128
V - REPOSES INDICIELLES	128
VI - VERIFICATION EXPERIMENTALE	130
VI-1- ETUDE D'UNE STRUCTURE MULTICOUCHE	130
VI-1-1- Mesure des fonctions réponses	130
VI-1-2- Modélisation par les lignes électriques	132
VI-1-3- Réponses indicielles	134
VI-1-4- Perturbation introduite par un capteur disposé sur la surface d'un matériau	149
CHAPITRE IV : ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DES SYSTÈMES MULTICOUCHES ...	154
I - ETUDE DANS LE DOMAINE TEMPS	155
I-1- INTRODUCTION	155
I-2- CARACTERISATION DES GRANDEURS ENERGETIQUES DANS UN MATERIAU BICOUCHE.	156
I-2-a- Elévation de la température d'une seule face du système	156
II - GENERALISATION DE L'ETUDE ENERGETIQUE.....	163
CONCLUSION	174
ANNEXE 1	176
ANNEXE 2	190
BIBLIOGRAPHIE	198

INTRODUCTION GÉNÉRALE

.../...

mesurable modélisant l'énergie thermique dégradée par conduction thermique.

De la même façon, l'énergie électrostatique stockée dans les capacités est utilisée pour modéliser le stockage d'énergie utilisable. Les expressions de l'énergie dissipée et de l'énergie stockée dans la ligne montrent l'intérêt d'introduire deux modes normaux pour représenter l'énergie stockée et l'énergie dissipée dans la ligne.

Ces modes sont orthogonaux par rapport aux coordonnées d'espace et permettent une simplification des expressions de l'énergie stockée et de l'énergie dissipée. Cette analyse en modes normaux peut être étendue au domaine fréquence et introduit deux fonctions d'intercorrélation pour représenter les interactions énergétiques (stockage et dissipation) dans les lignes électriques modélisant des parois homogènes.

La dernière partie est relative aux systèmes multicouches modélisés par des lignes électriques connectées en cascade dont l'état ne peut plus être décrit comme la superposition de deux modes orthogonaux.

La formulation proposée montre l'intérêt de traitement par intercorrélation pour représenter les interactions énergétiques dans les systèmes complexes.

L'évolution d'une telle structure peut être représentée à l'aide de trois fonctions réponses accessibles à la mesure. L'avantage de la formulation est la simulation par les fonctions d'intercorrélations courant-tension, la dissipation interne et le stockage d'énergie utilisable dans une paroi multicouche interagissant avec les milieux extérieurs par divers types de conditions limites :

- représentées par des relations linéaires ou non,
- représentées par des relations à paramètres variables dans le temps,
- modélisables par des sources indépendantes sur chaque face.

.../...

.../...

Les fonctions d'intercorrélations $v_1 i_1$ et $v_2 i_2$ à l'entrée et à la sortie du modèle électrique pouvant être représentatives d'interactions énergétiques très complexes suivant les caractères non linéaires et inertiels de la charge. Toutefois, quelle que soit la complexité de ces interactions, la dissipation interne et le stockage d'énergie utilisable dans la paroi multicouche peuvent être calculés à partir des fonctions de corrélation entre les potentiels d'entrée et de sortie du modèle électrique.

Les résultats obtenus sont d'application générale et ont été vérifiés par traitement des flux et température mesurés sur une paroi bicouche.

CHAPITRE I : MODÉLISATION DE L'ÉTAT THERMIQUE D'UNE PAROI MONOCOUCHE
PAR DES LIGNES ÉLECTRIQUES (À RÉSISTANCE ET CAPACITÉ)

La connaissance de ce coefficient est fondamentale pour caractériser les échanges thermiques par conduction en régime non stationnaire.

Ce coefficient est calculable quand on connaît certains paramètres de l'échantillon étudié. On le définit comme suit :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

c : chaleur massique (J/kg.K)

λ : conductivité thermique (W/m.K)

ρ : masse volumique (kg/m³)

I-1- DEFINITION DE LA CAPACITE THERMIQUE

La capacité thermique d'un corps est la quantité de chaleur nécessaire pour élever sa température de 1 degré à pression constante. Compte tenu de la définition de la chaleur spécifique c, nous obtenons pour l'élévation de température dT.

$$dQ = M.c.dT$$

M étant la masse du corps.

d'où : $C = \frac{dQ}{dT} = M.c.$ (M en kg, c en J/kg.K, Q en Joules, C en J/°K)

I-2- RESISTANCE THERMIQUE

La résistance thermique d'un échantillon est donnée par la relation suivante

$$R = \frac{e}{\lambda S}$$

e : épaisseur de l'échantillon (m)

S : section " " (m²)

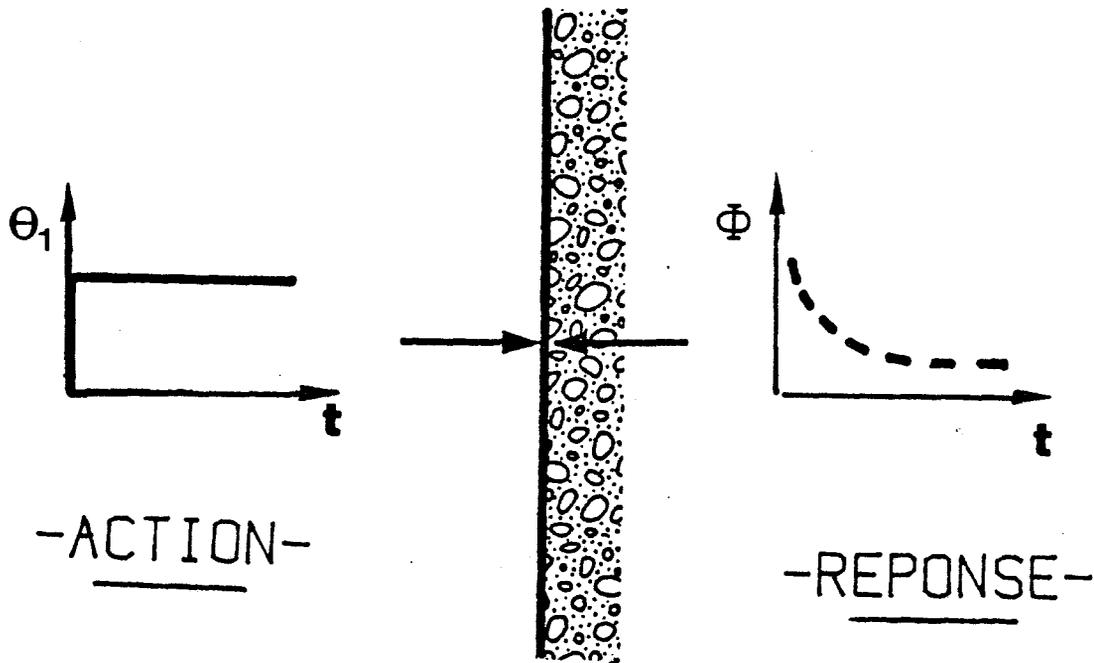
λ : conductivité thermique (W/mK)

I-3- CONDITIONS AUX LIMITES

L'évolution temporelle de la température ou du flux thermique aux deux extrémités d'un matériau permettent de connaître le champ thermique en fonction du temps à l'intérieur de ce matériau, ces conditions sont de 3 types :

* Condition de Dirichlet

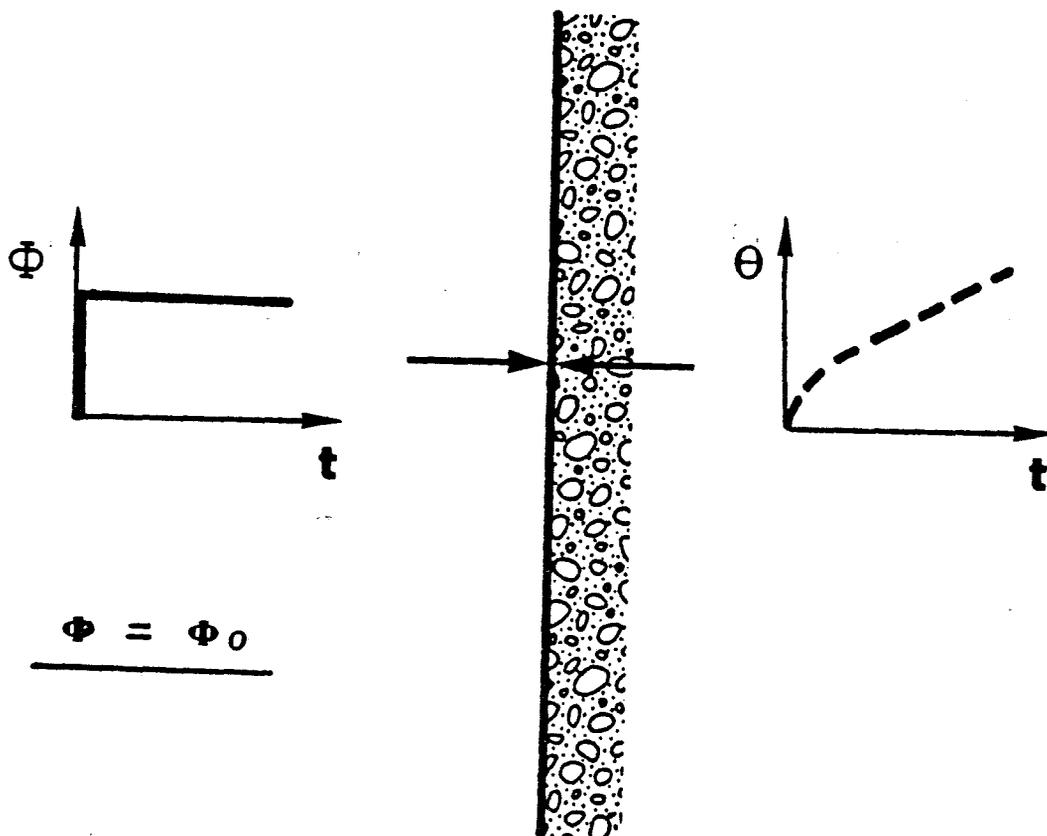
La température est imposée en tout point de la surface, pour une température θ_1 appliquée à la frontière ; en $x = x_0$ la température est : $\theta_1(x_0, t) = \theta_1(t)$



* Fourier

Le flux thermique est le même en tout point du matériau

$$\Phi(x_0, t) = \phi(t)$$



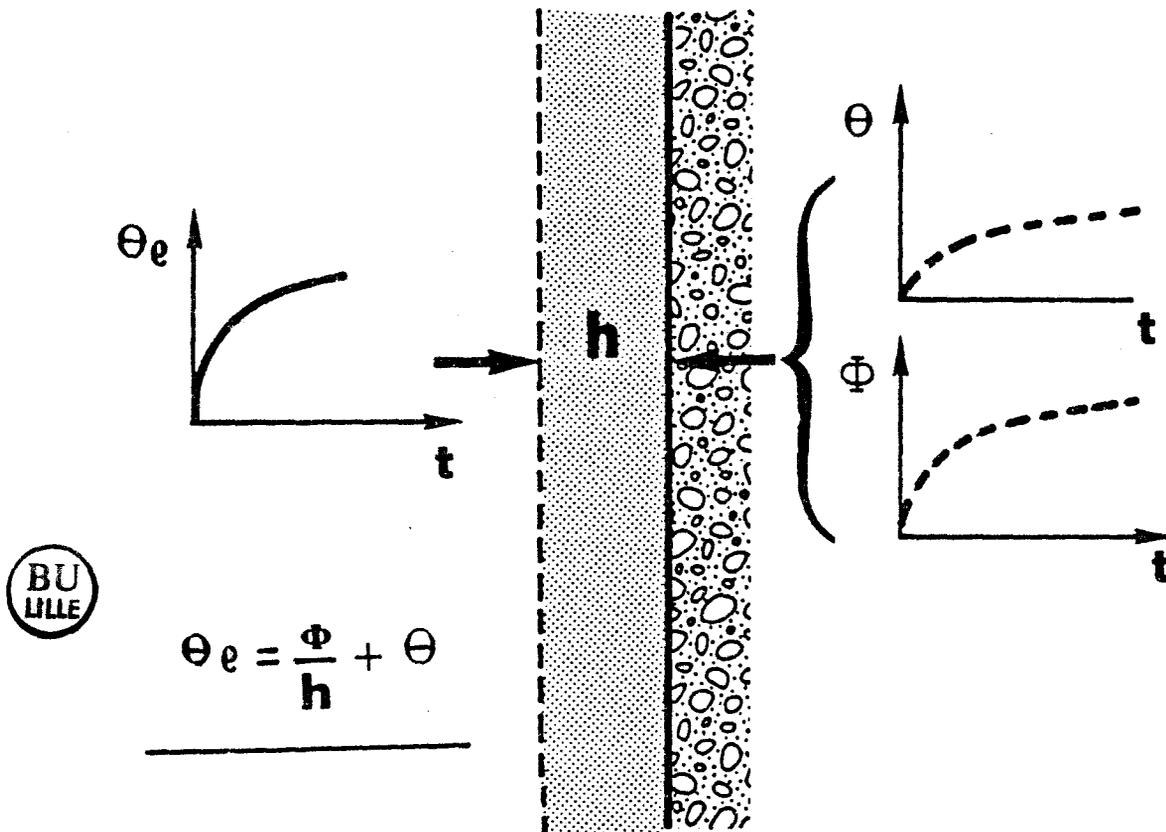
* Neumann

Dans ce cas, il existe une relation entre le flux thermique et la température

$$\phi(x_0, t) = h[\theta(x_0, t) - \theta_f]$$

θ_f étant la température d'un fluide en contact avec le matériau

h représente un coefficient de proportionnalité appelé coefficient d'échange.



I-4- CONDITIONS INITIALES

L'évolution du champ thermique en régime transitoire dépend des conditions initiales. Pour connaître parfaitement son évolution, on doit connaître sa valeur à l'instant $t = 0$: $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$

La solution de l'équation de Fourier doit vérifier cette condition lorsque l'on fait tendre le temps vers zéro.

II - MODELISATION A L'AIDE D'UNE LIGNE ELECTRIQUE (A RESISTANCE ET CAPACITE)

II-1- LIGNES ELECTRIQUES

II-1-1- Résistance linéique

La ligne étant homogène, la résistance totale de cette ligne est proportionnelle à la longueur de celle-ci. On peut donc définir une résistance par unité de longueur, ou résistance linéique R .

II-1-2- Capacité linéique

C'est le quotient de la charge d'un élément de conducteur de longueur unité par la différence de potentiel entre les deux conducteurs au droit de l'élément considéré. La capacité linéique est notée C (figure I-1).

II-1-3- Equations générales d'une ligne électrique

Considérons un élément de ligne de longueur Δx , de résistance linéique R et capacité linéique C , cet élément peut être assimilé à un quadripôle ($A_1 A_2, B_1 B_2$) représenté par le schéma suivant (figure I-1)

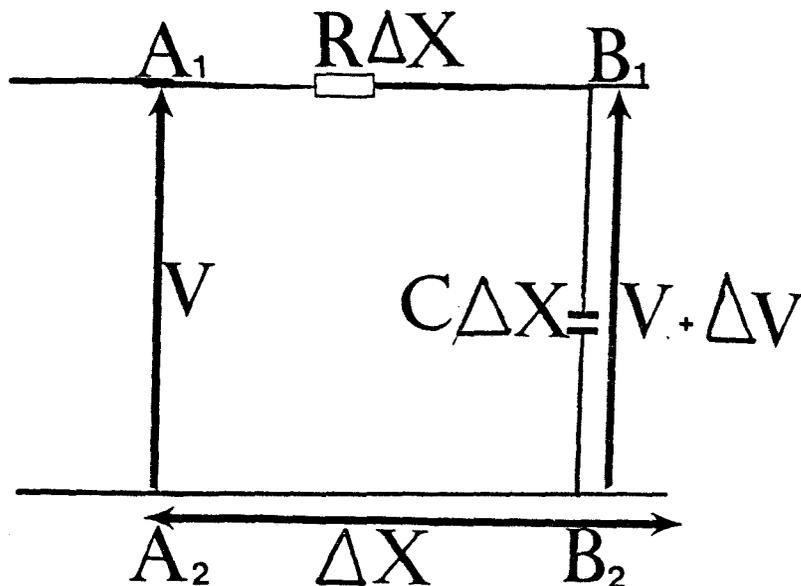


Figure I-1

Après avoir développé les calculs on trouve :

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = - Ri \quad (\text{chute ohmique de tension})$$

R résistance par unité de longueur

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = - \frac{C \partial v}{\partial t} \quad \text{conservation de la charge}$$

c : capacité par unité de longueur

En dérivant la première équation par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = - R \frac{\partial i}{\partial x}$$

Remplaçons $\frac{\partial i}{\partial x}$ par sa valeur dans la deuxième équation

$$\boxed{\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = R C \frac{\partial v}{\partial t}} \quad (I-2)$$

on obtient l'équation des télégraphistes. Cette équation ne pourra être intégrée que si la tension appliquée à l'entrée de la ligne est sinusoïdale, ou par le calcul opérationnel dans le cas des régimes transitoires.

II-1-4- Analogie entre grandeurs thermiques et électriques

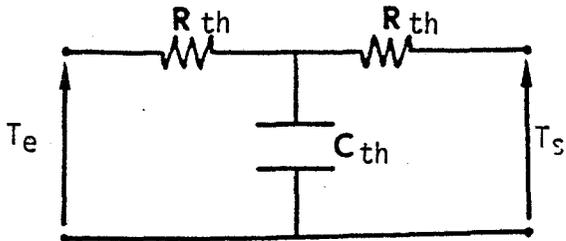
D'une façon générale, il est possible de modéliser un grand nombre de couches ; pour analyser les problèmes posés, il suffit de se limiter à deux.

Les variantes électriques de la représentation analogique ou homologique des champs thermiques dues à Languir (analogie continue en régime stationnaire et à Beuken (homologie discontinue en régime transitoire) représentent les capacités thermiques par des capacités électriques et les résistances thermiques par des résistances électriques.

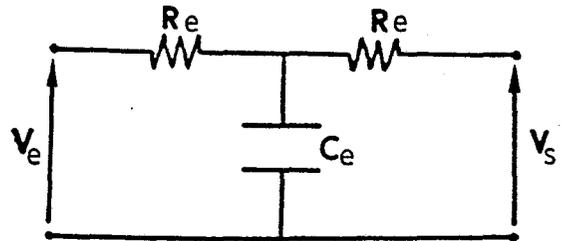
Le mur, milieu continu, considéré à une dimension (épaisseur) est représenté par un réseau monodimensionnel à constantes localisées ; en faisant croître le nombre des mailles, R et C tendent vers zéro, on obtient une ligne

continue, caractérisée par ses constantes réparties, sa résistance linéique r , et sa capacité linéique c .

Une paroi quelconque pourra être représentée par un quadripôle symétrique en T , sous la forme suivante :



Modèle thermique



Modèle électrique

L'étude des transferts thermiques dans une paroi et de la conduction électrique dans une ligne à constantes réparties mène à des équations de comportement homologues. Remarquons l'analogie entre les deux équations de propagations :

1) dans les lignes électriques

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -rI \quad \text{chute ohmique de tension}$$

r : résistance par unité de longueur

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{dV}{dt} \quad \text{conservation de la charge}$$

C : capacité par unité de longueur

2) de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} \phi \quad \text{Loi de Fourier}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho c \frac{dT}{dt} \quad \text{conservation de la chaleur}$$

c : capacité linéique

II-1-5- Adaptation des paramètres d'une ligne électrique à la modélisation d'une paroi

En thermique, il n'est pas possible de connaître la valeur de la température et du flux en chaque point de la paroi, à cause des perturbations introduites par les capteurs et les résistances de contacts. Pour minimiser ces erreurs, nous modélisons le comportement des systèmes thermiques à l'aide de lignes électriques constituées de cellules RC. De ce fait, l'étude de la température et du flux se ramène à l'étude de la tension électrique et du courant électrique.

Les appareils de mesure en électricité sont plus précis et possèdent une très grande impédance d'entrée. Par conséquent les erreurs dues aux mesures sont négligeables.

Soit à simuler par exemple, le transfert thermique à travers un matériau plexiglass tel que :

l'épaisseur $e = 2,5$ mm

la section $s = 1,75$ dm²

la conductivité $\lambda = 0,18$ (W/m.K)

la chaleur massique $c = 1380$ (J/kg.K)

la masse volumique $\rho = 1165$ (kg/m³)

On a vu précédemment que la résistance thermique est donnée par la relation suivante :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

De même pour la capacité thermique :

$$C_{th} = mc = \rho S e.c.$$

Pour les données ci-dessus on trouve :

$$R_{th} = 0,8 \text{ (K/W)}$$

$$C_{th} = 70,33 \text{ (J/K)}$$

Si de façon directe, on effectue l'analogie formelle entre grandeurs thermiques et électriques, on aboutit à des valeurs associées aux composants électriques d'ordre de grandeurs inacceptables pour des manipulations (exemple précédent).

On est alors amené à considérer un coefficient d'homologie (α) associé à la capacité électrique tout en conservant le produit R.C identique à celui du système thermique ($R_{th} C_{th} = R_e.C_e$), d'où les relations suivantes entre grandeurs thermiques et électriques :

$$R_e = \alpha \cdot R_{th}$$

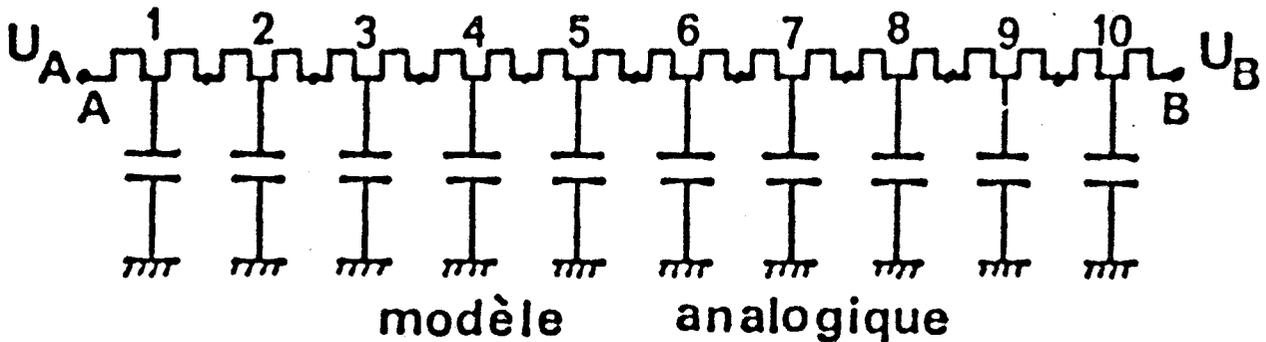
$$C_e = \frac{1}{\alpha} \cdot C_{th}$$

R_e : résistance électrique

C_e : capacité électrique

R_{th} : résistance thermique

d'où la représentation électrique du système thermique à l'aide d'éléments discrets, le système réel étant à constantes réparties.



Dans un milieu monodimensionnel la solution de l'équation des télégraphistes est représentée en régime sinusoïdal par l'équation matricielle :

$$\begin{vmatrix} v_s \\ i_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma x & -Z_c \text{ sh } \gamma x \\ \frac{1}{-Z_c} \text{ sh } \gamma x & \text{ch } \gamma x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_e \\ i_e \end{vmatrix}$$

ou inversement :

$$\begin{vmatrix} v_e \\ i_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch } \gamma x & Z_c \text{ sh } \gamma x \\ \frac{1}{Z_c} \text{ sh } \gamma x & \text{ch } \gamma x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_s \\ i_s \end{vmatrix}$$

La représentation permet de connaître la valeur de la tension et du courant à la sortie de la ligne quand on connaît les valeurs à l'entrée.

L'impédance d'entrée est définie comme étant le rapport de la tension d'entrée sur le courant d'entrée lorsque les variations de tension sont nulles à la sortie :

$$Z_e = \left(\frac{v_e}{i_e}\right)_{v_s=0} = Z_c \operatorname{th} \gamma e \quad \text{avec } \gamma = \sqrt{\frac{R_c \omega}{2}} (1+j)$$

Les relations de correspondance entre grandeurs thermiques et électriques ont été établies. Nous rappelons les principaux résultats.

Le passage de l'électrique en thermique ou inversement se fait à l'aide des relations suivantes :

Thermique		Electrique	
Température	θ_1 θ_2	V_1 V_2	Tension
Flux	ϕ_1 (entrée) ϕ_2 (sortie)	$i_1 \times \alpha$ (courant à l'entrée) $i_2 \times \alpha$ (courant à la sortie)	
$Z_{e\ th}$	(impédance d'entrée thermique)	$\frac{Z_e\ e\ell}{\alpha}$	(impédance d'entrée électrique)
$Z_{c\ th}$	(impédance caractéristique thermique)	$\frac{Z_c\ e\ell}{\alpha}$	(impédance caractéristique électrique)

II-1-6- Choix du nombre de cellules

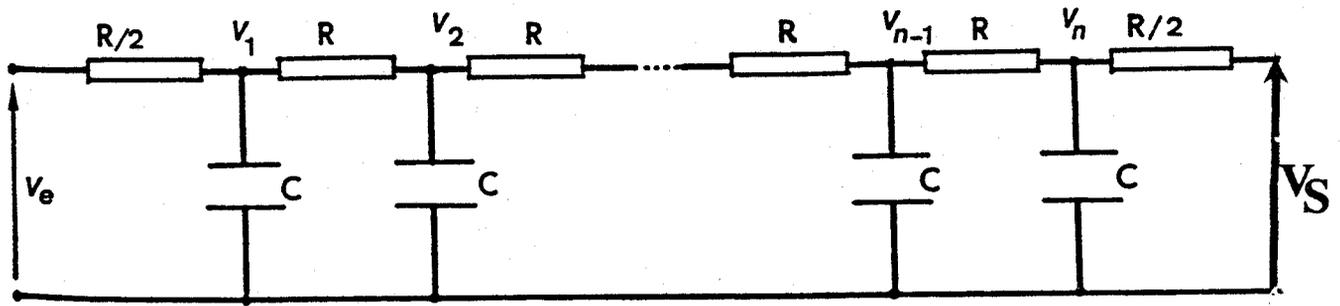
La modélisation d'une paroi quelconque conduit à l'assemblage de 10 cellules identiques en cascade. Une étude a montré que cette méthode de modélisation n'est valable qu'en basses fréquences.

Nous réalisons en pratique 10 cellules identiques. La somme des résistances électriques est égale au produit du facteur (α) et de la résistance thermique ; de même pour la capacité électrique :

$$\Sigma R_e = \alpha R_{th}$$

$$\Sigma C_e = \frac{C_{th}}{\alpha}$$

d'où le schéma pratique :



$n = 10$

L'utilisation d'un tel type de lignes permet de connaître les valeurs variables (v, i respectivement θ, ϕ) associées au transfert à tout instant et en tout point du système.

De telles mesures sont rigoureusement impossibles en thermique en raison du nombre de capteurs et des perturbations qu'apporteraient ces derniers au système.

Pour analyser les performances de la modélisation dans le domaine fréquentiel, nous avons mesuré l'impédance d'entrée pour chaque fréquence

$$Z_e(j \omega) = \frac{v_e}{I_e}, \text{ la sortie étant court-circuitée}$$

et avons relevé le module et l'argument de l'impédance d'entrée.

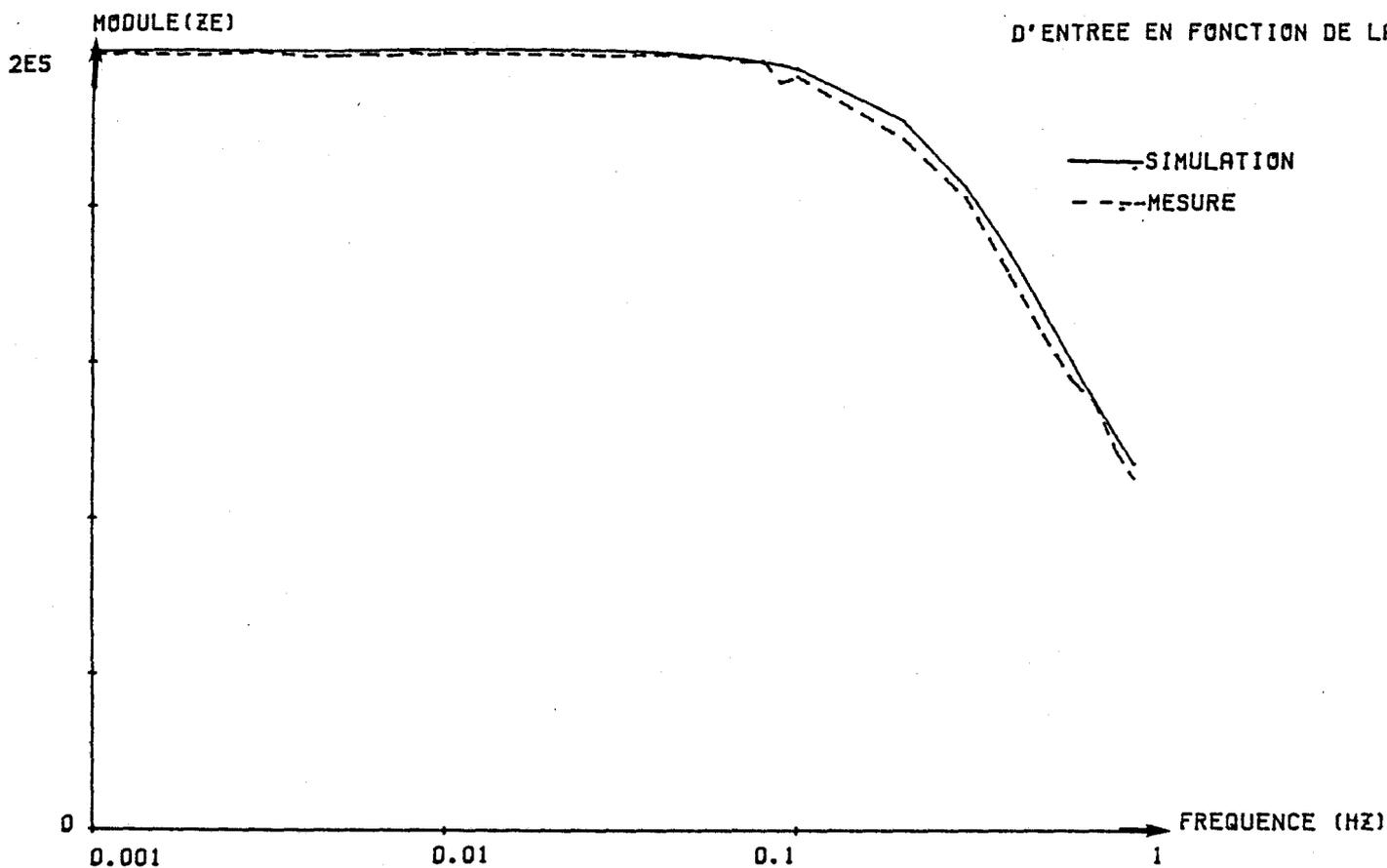
Pour cela, on a considéré trois échantillons (plexiglass, polystyrène et fluxmètre). Les résultats obtenus théoriquement et expérimentalement sont représentés sur la même feuille. Dans les deux cas, les courbes expérimentales et théoriques sont voisines l'une de l'autre. Pour le plexiglass, le déphasage varie entre (-4°) (fréquence pratiquement nulle: 0,001 Hz) et $(-\frac{\pi}{4})$ en passant par un minimum (-46°) pour une fréquence voisine de 0,05 Hz).

En ce qui concerne le polystyrène et le capteur, on obtient les mêmes types de courbes que pour le plexiglass mais décalées dans le domaine fréquence.



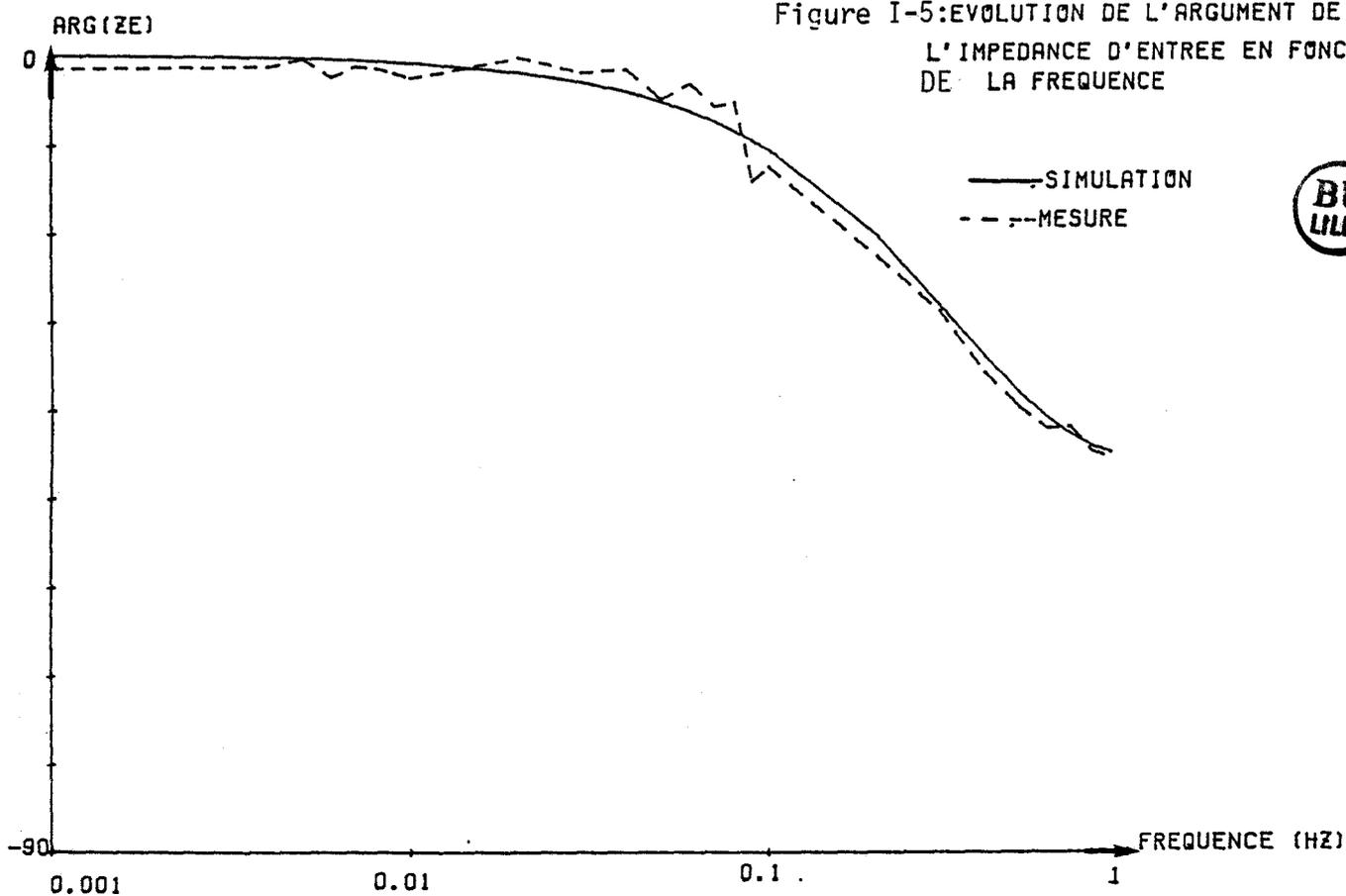
Matériaux	e mm	ρ kg m ⁻³	λ Wm ⁻¹ K ⁻¹	R K W ⁻¹	C J K ⁻¹	Cp J Kg ⁻¹ K ⁻¹	a 10 ⁻⁷ m ² s ⁻¹	b Js ⁻¹ /2m ⁻² K ⁻¹	RC s
Plexiglass	5	1200	0,190	1,55	153	1500	1,06	585	240
Plexiglass	9,8	1200	0,192	3	295,8	1490	1,07	586	890
Polystyrène	14,1	21	0,035	23,4	7,2	1438	11,59	32,5	170
Polystyrène	27,7	21	0,035	46	13,8	1405	11,86	32,1	635
Polystyrène	3	49,2	0,031	5,35	3,5	1380	4,56	45,9	19
Klégicel	14,5	203	0,047	18,15	70,7	1421	1,63	116,4	1283
Verre	6	2700	1,15	0,31	217,6	793	5,36	1571	67

Figure I-4: EVOLUTION DU MODULE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FRE

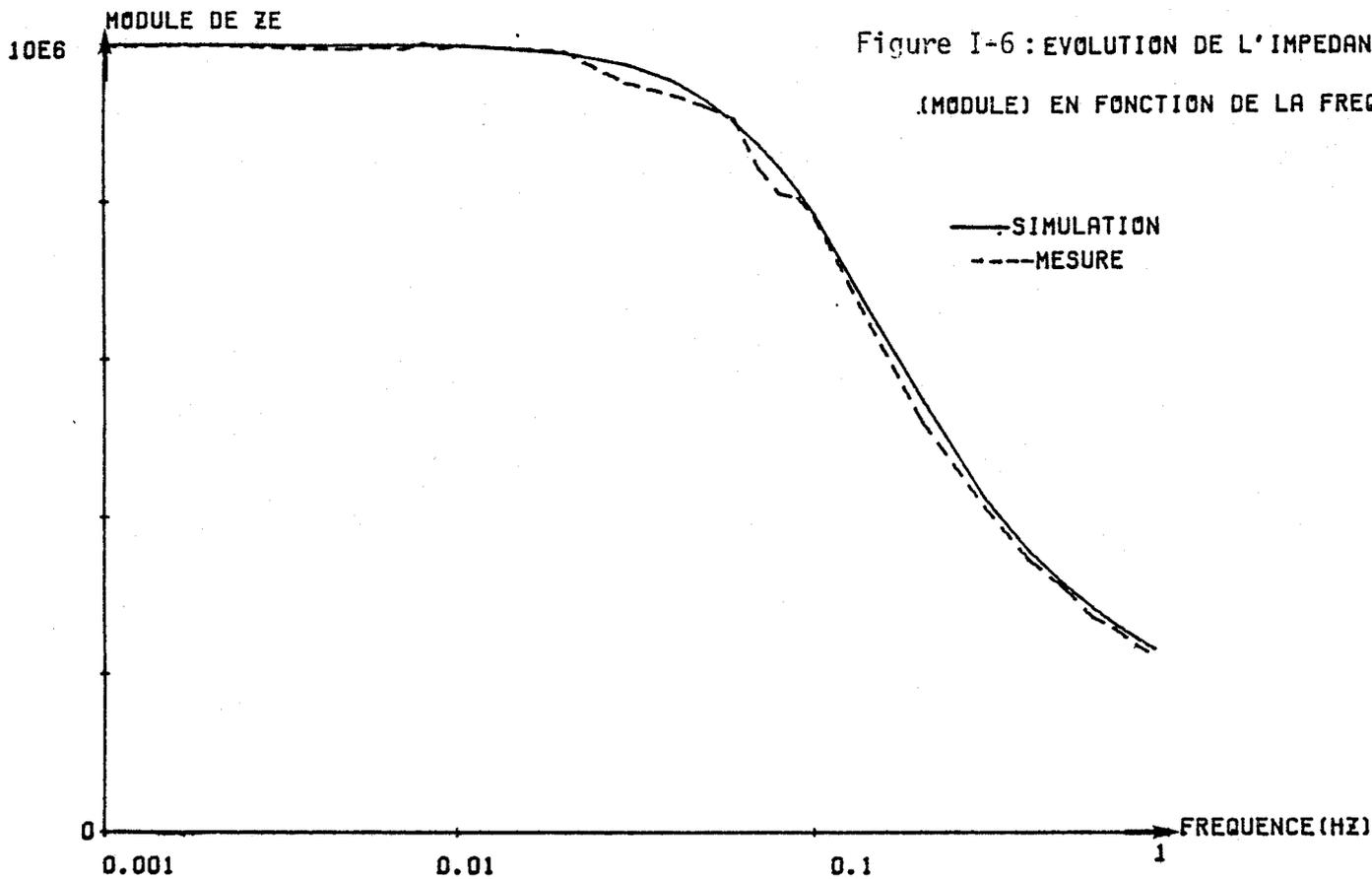


IMPEDANCE D'ENTREE D'UN ECHANTILLON DU FLUXMETRE

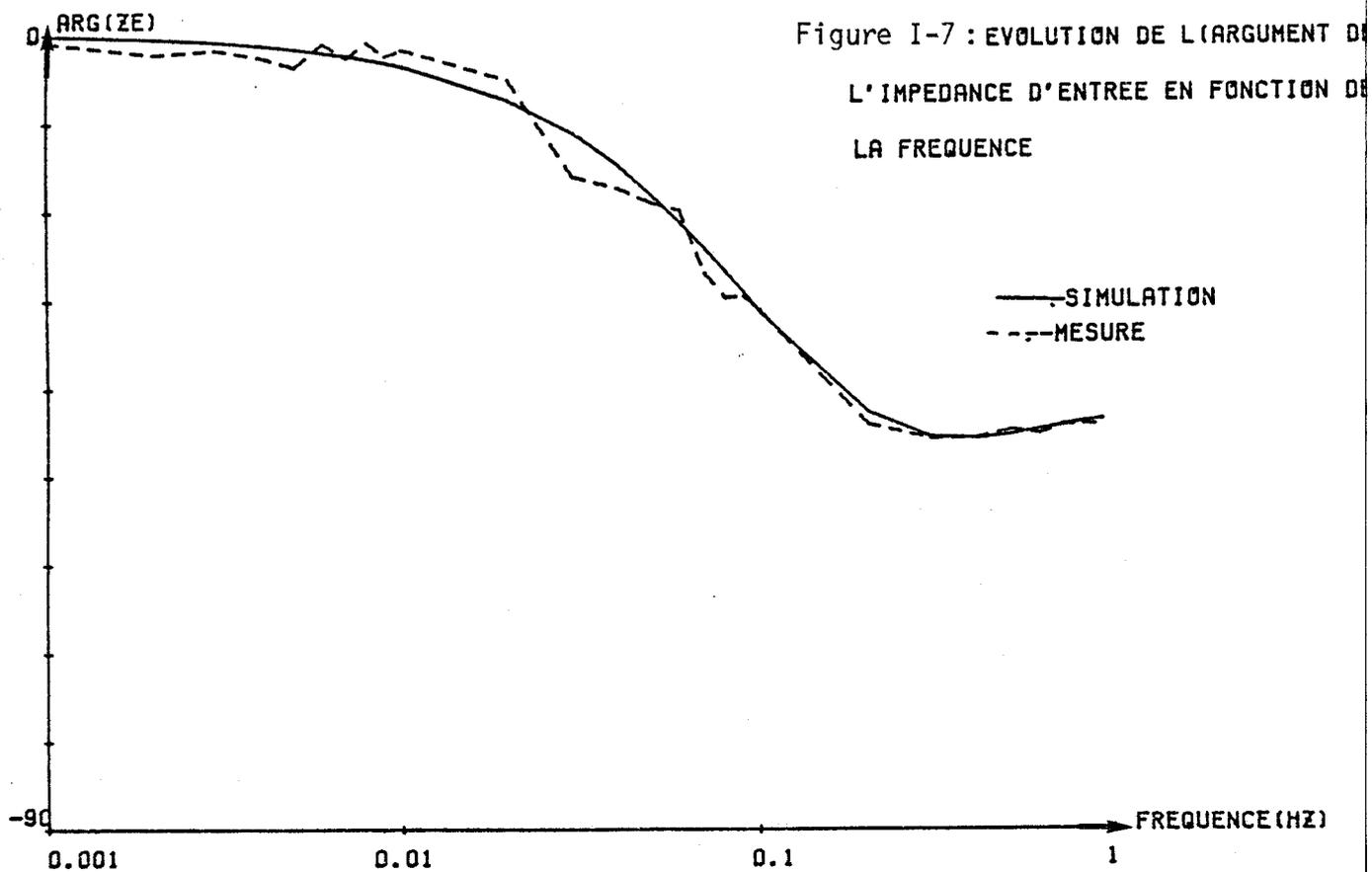
Figure I-5: EVOLUTION DE L'ARGUMENT DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FREQUENCE



EPAISSEUR 2.5MM

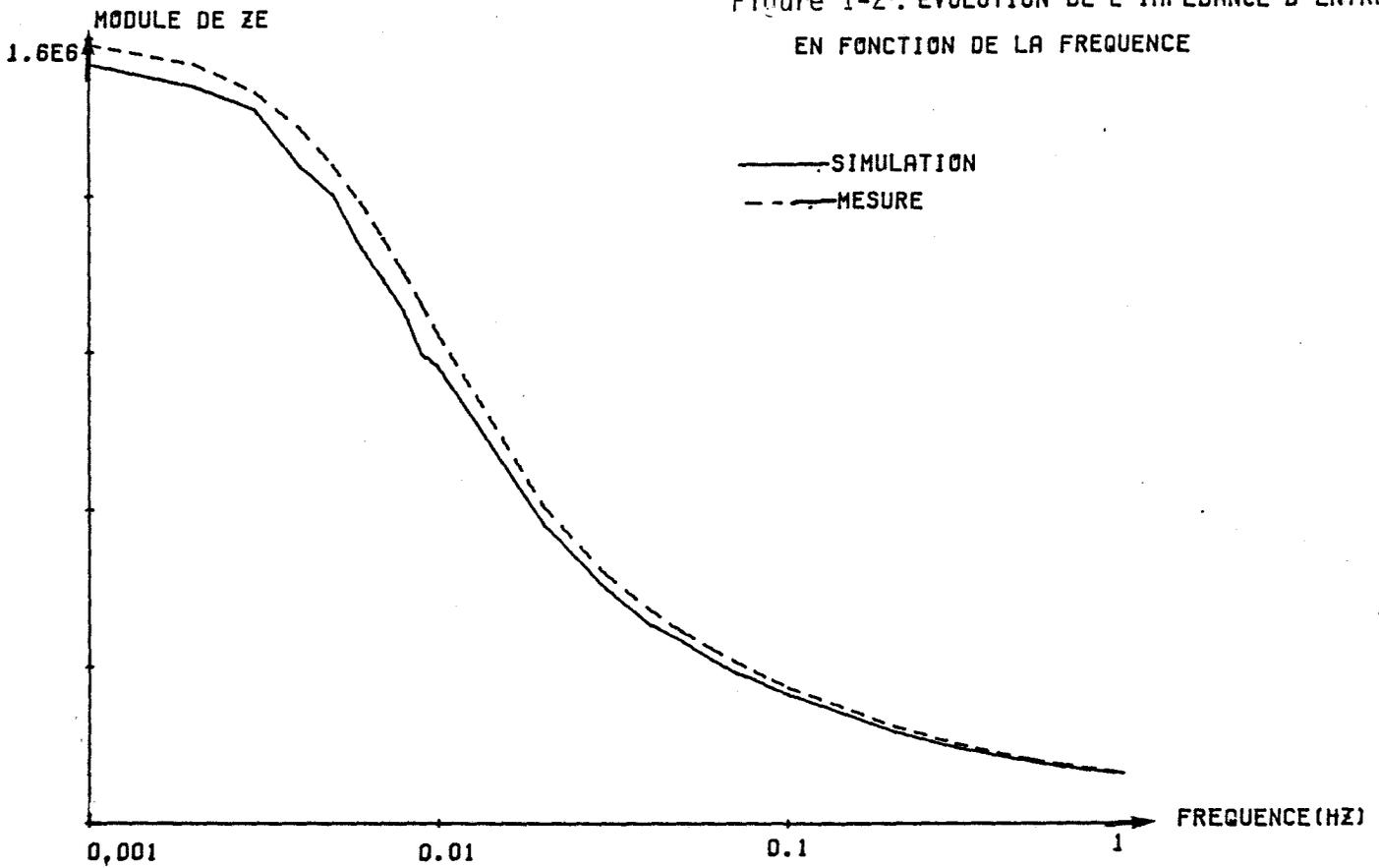


IMPEDANCE D'ENTREE D'UN ECHANTILLON DE POLYSTYRENE EPAISSEUR 2.5MM



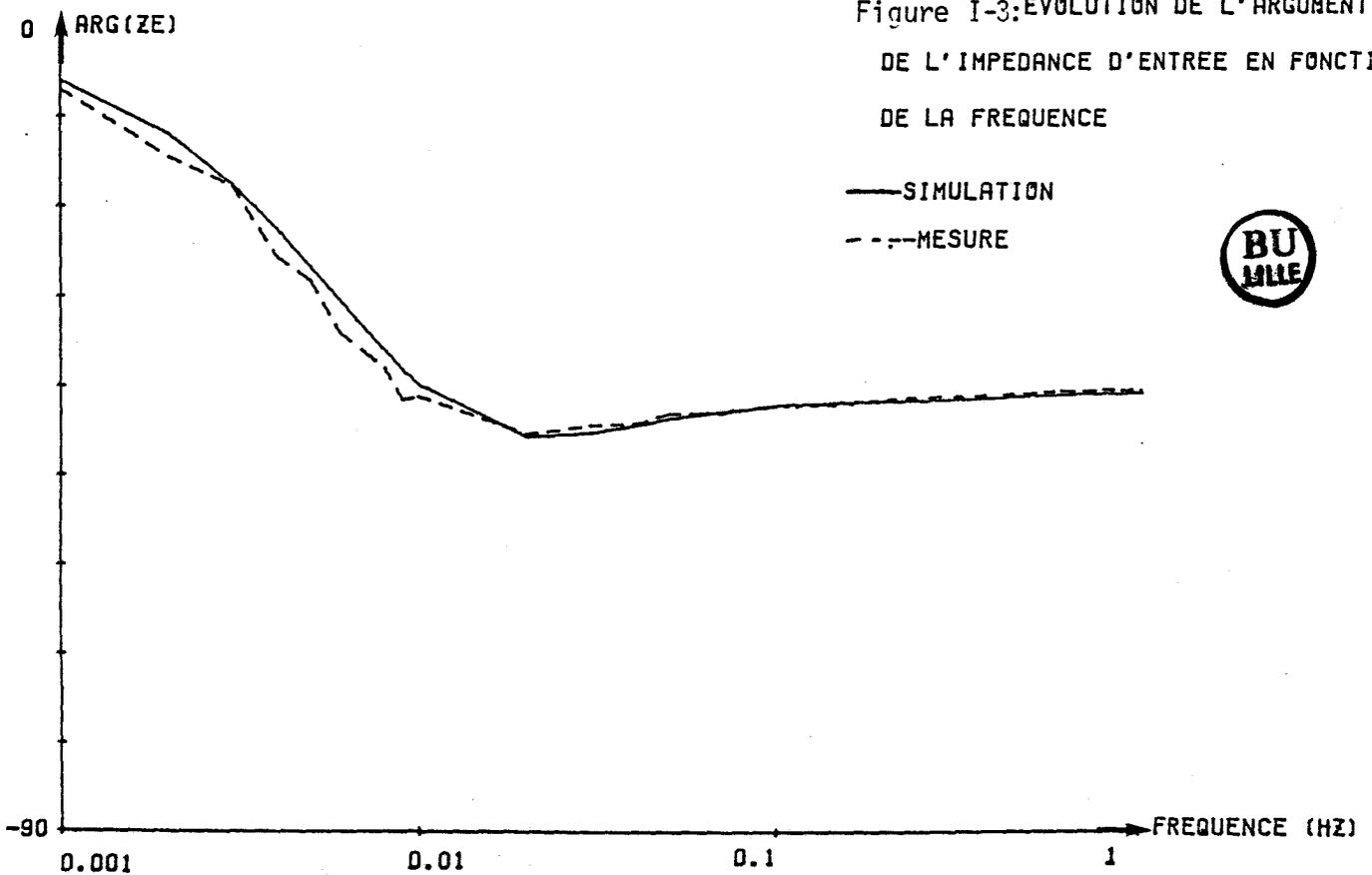
EPAISSEUR 2.5MM

Figure I-2: EVOLUTION DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FREQUENCE



IMPEDANCE D'ENTREE D'UN ECHANTILLON DE PLEXIGLASS EPAISSEUR 2.5MM

Figure I-3: EVOLUTION DE L'ARGUMENT DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FREQUENCE



III - REPRESENTATION TEMPS-INTRODUCTION DES "FONCTIONS D'INFLUENCE"

Lorsque les transferts thermiques ne sont pas sinusoïdaux, la variation de température peut toujours être développée en série de Fourier et le flux thermique $\phi(x,t)$ est alors obtenu par superposition des réponses (en module et en phase) correspondant à chacune des sollicitations sinusoïdales élémentaires.

En pratique, on peut également décomposer la sollicitation en une suite d'échelons décalés dans le temps suivant le schéma ci-dessous :

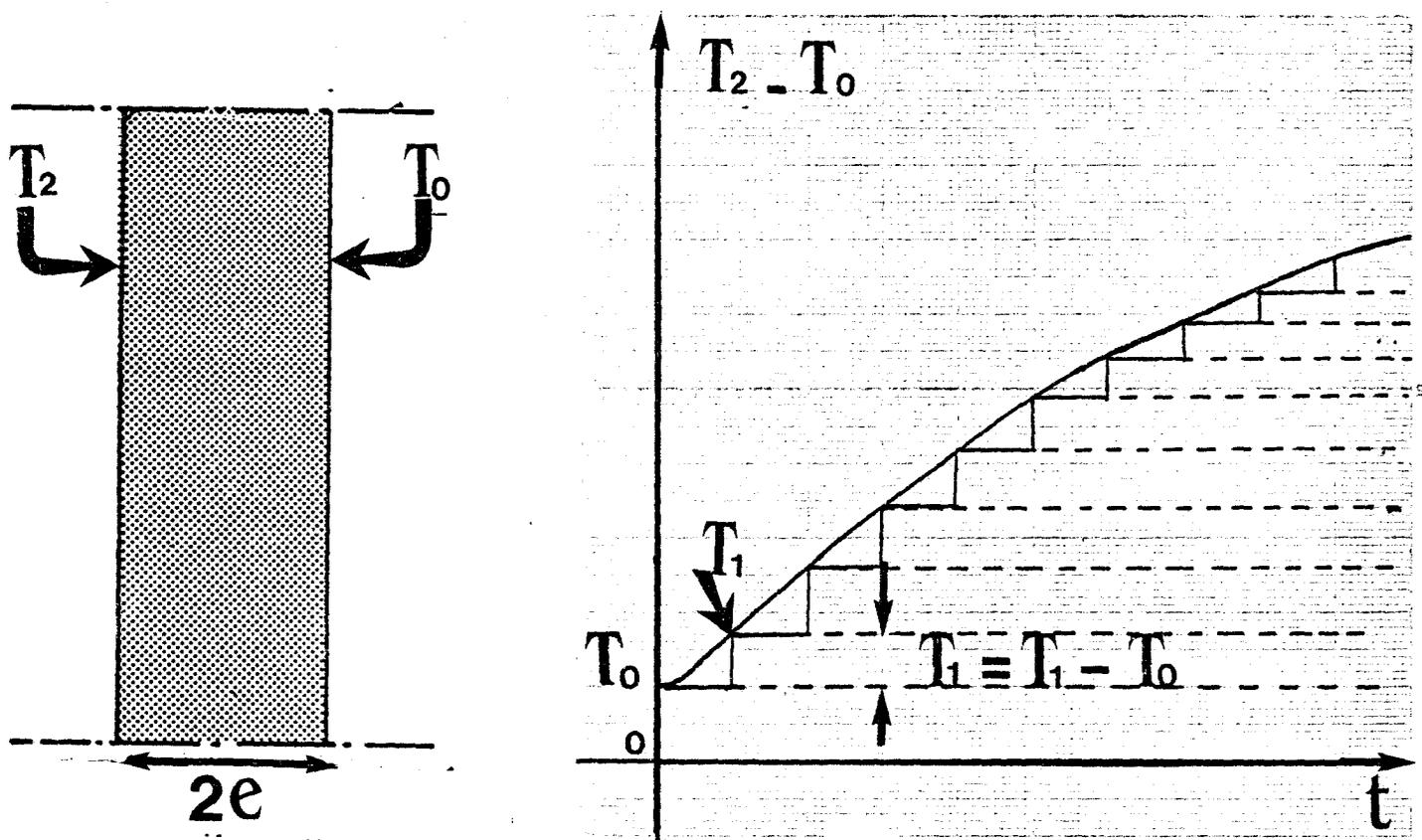


Figure I-8

et la réponse en un point est obtenue par une superposition de réponses indicielles pondérées suivant le produit de convolution :

$$\phi(o,t) = (T_2 - T_0) \cdot \phi_u(o,t) + \int_0^t T'(t-s) \cdot \phi_u(o,s) ds \quad (I-3)$$

T' étant la dérivée de la sollicitation présente sur la face d'entrée.

La réponse en flux thermique sur la face d'entrée est parfaitement déterminée lorsque l'on connaît la réponse indicielle $\phi_u(o,t)$ ou "fonction d'influence" sur la face d'entrée.

De la même façon le flux dans la face de sortie est déterminé par la réponse indicielle ou "fonction d'influence" correspondante $\phi_u(\lambda, t)$

Dans le cas particulier d'une paroi homogène (figure 1-8) les fonctions d'influence sont déterminées par la solution générale de l'équation de Fourier

$$\phi(x,t) = -\frac{\lambda}{e} \left(\frac{T_2 - T_0}{2} \right) - \frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0) \sum_1^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e} \right) \exp\left(-\frac{ak^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$$

Il en résulte pour la valeur du flux sur la face d'entrée ($x = -e$)

$$\phi(-e,t) = -\frac{\lambda}{e} \left(\frac{T_2 - T_0}{2} \right) - \frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{ak^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$$

De la même façon pour la fonction d'influence sur la face de sortie :

$$\phi(e,t) = -\frac{\lambda}{e} \left(\frac{T_2 - T_0}{2} \right) - \frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-\frac{ak^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$$

λ : conductivité thermique (W/Km)

$2e$: épaisseur (m)

a : diffusivité thermique (m^2/s)

La connaissance du champ de température permet de calculer les fonctions d'influence permettant de calculer les variations de température dans la paroi en régime variable.

$$T(x,t) = \frac{T_2 + T_0}{2} - \frac{x}{e} \left(\frac{T_2 - T_0}{2} \right) + 2 A_k$$

avec

$$A_k = \sum_0^{\infty} (1)^k \frac{(T_2 - T_0)}{k \pi} \sin \frac{k \cdot \pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e} \right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$$

Quel que soit le point considéré, le flux thermique est la superposition d'un régime permanent :

$$\phi_p = -\frac{\lambda}{2e} (T_2 - T_0) \quad \phi_p : \text{flux permanent}$$

et d'un régime transitoire :

$$\begin{aligned}\phi'(x,t) &= \phi_1(x,t) - \left[-\frac{\lambda}{2e} (T_2 - T_0)\right] \\ &= -\frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0) \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\end{aligned}$$

Le régime transitoire est obtenu par superposition de fonctions élémentaires :

$$\phi_k = (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$$

qui permettent le calcul du flux ϕ' lorsque l'on connaît les variations élémentaires de température sur la face gauche de la paroi (notée -).

Chaque fonction élémentaire est caractérisée par une même décroissance exponentielle quelle que soit la position considérée dans la paroi.

L'intérêt de la décomposition en fonctions élémentaires ϕ_k résulte des propriétés mathématiques de ces fonctions.

Le produit scalaire étant défini par la relation :

$$\langle \phi_k \cdot \phi_{k'} \rangle = \int_{-e}^{+e} \phi_k \cdot \phi_{k'} dx$$

Il est facile de voir que :

$$\langle \phi_k \cdot \phi_{k'} \rangle = 0 \quad \text{si } k \neq k'$$

et d'autre part :

$$\langle \phi_k \cdot \phi_k \rangle = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{2 e^2}\right)$$

Compte tenu de ces relations d'orthogonalité :

$$\langle \phi_k \cdot \phi' \rangle = -\frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0) \langle \phi_k^2 \rangle$$

$$\langle \phi_k \cdot \phi' \rangle = -\frac{\lambda}{2e} (T_2 - T_0) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{2 e^2}\right)$$

et la valeur moyenne :

$$\langle \phi'^2 \rangle = \frac{\lambda^2}{2e^2} (T_2 - T_0) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{2 e^2}\right)$$

L'utilisation systématique des développements en fonctions élémentaires ϕ_k est de permettre :

- la représentation des fonctions d'influence par une superposition de fonctions exponentielles,

- la représentation simple des grandeurs quadratiques associées à ces quantités.

Il faut bien remarquer ici que ces résultats concernent la partie transitoire du flux thermique.

Le champ de température peut être caractérisé de la même façon.

L'écart entre la température locale $T(x,t)$ et la température moyenne $(\frac{T_2+T_0}{2})$ est égale à la superposition d'un régime permanent :

$$\theta_p = -\left(\frac{T_2-T_0}{2e}\right) \cdot x \quad \theta_p : \text{température en régime permanent}$$

et d'un régime transitoire :

$$\theta'(x,t) = \left| T(x,t) - \left(\frac{T_0+T_2}{2}\right) \right| - \left| \frac{T_2-T_0}{2e} \right| \cdot x$$

$$\theta'(x,t) = 2 \cdot \sum_1^k (-1)^k \left(\frac{T_2-T_0}{k \pi}\right) \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

Le régime transitoire est obtenu par superposition de fonctions élémentaires :

$$\theta'(x,t) = 2(T_2-T_0) \sum_1^{\infty} \theta_k$$

avec

$$\theta_k = \frac{(-1)^k}{k \pi} \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

L'intérêt des fonctions élémentaires θ_k est de permettre une décomposition simple des fonctions d'influence et du carré moyen des variations de température dans toute la paroi.

$$\langle \theta'^2 \rangle = \int_{-e}^{+e} \theta'^2 dx = 4(T_2-T_0)^2 \sum_1^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

IV - CARACTERISTIQUE DE LA SOLUTION

Pour les faibles valeurs du temps la solution précédente ne converge vers la valeur exacte que si l'on prend en compte un nombre important de termes dans le développement en série.

Pour les faibles valeurs du temps, le milieu est assimilable à un milieu semi-infini et pour une variation en échelon de la température de surface le champ de température s'écrit :

$$T(x,t) = T_0 + (1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}})$$

et pour le flux local :

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)$$

Ce résultat est valable avec une grande concordance pour des durées allant jusqu'à $e^2/4a$, valeur qui peut être élevée (14,3 heures pour une paroi cellulaire d'épaisseur 20 cm, 5 mn pour un enduit de plâtre de 8 mm d'épaisseur).

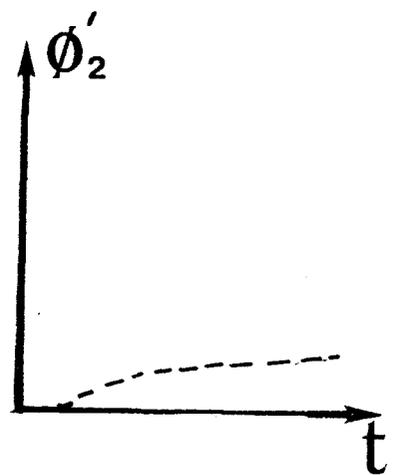
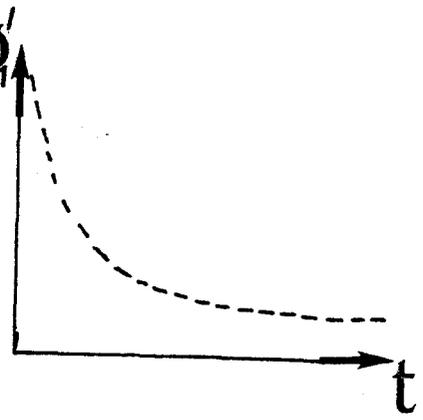
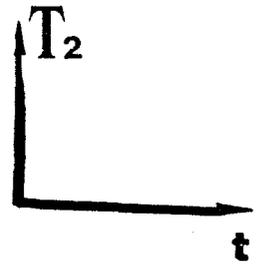
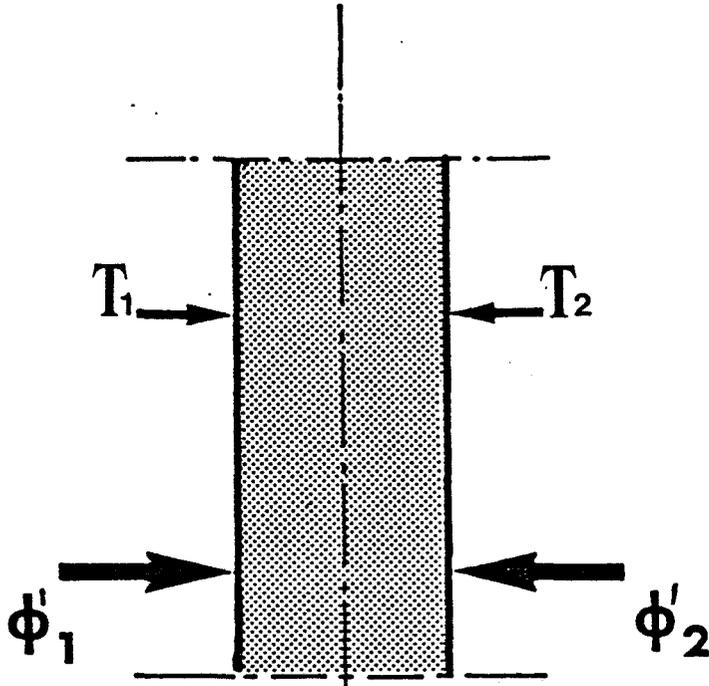
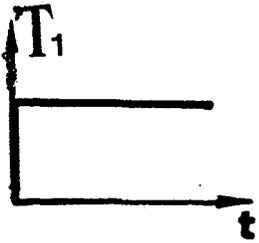
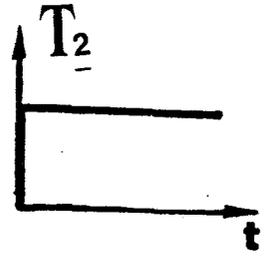
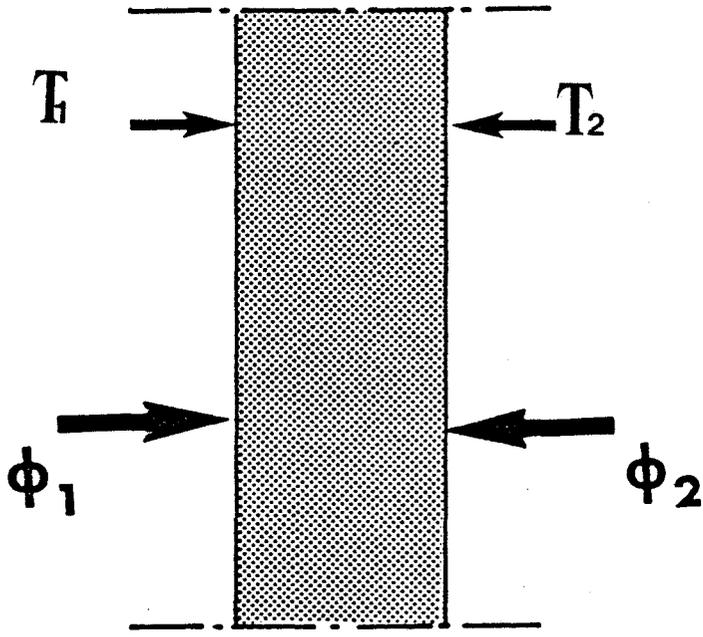
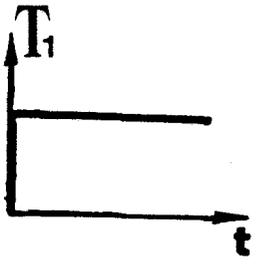
En ce qui concerne le flux transmis il reste nul pendant un long moment, le front thermique n'est pas parvenu sur l'autre face de la paroi.

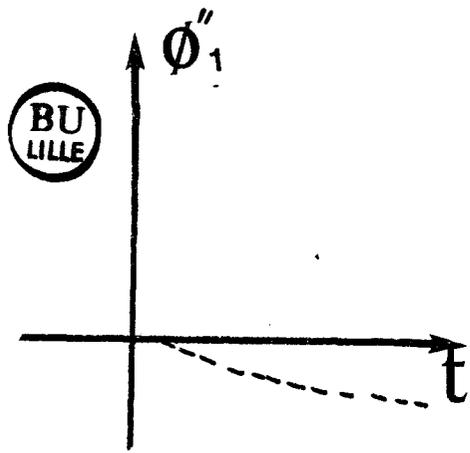
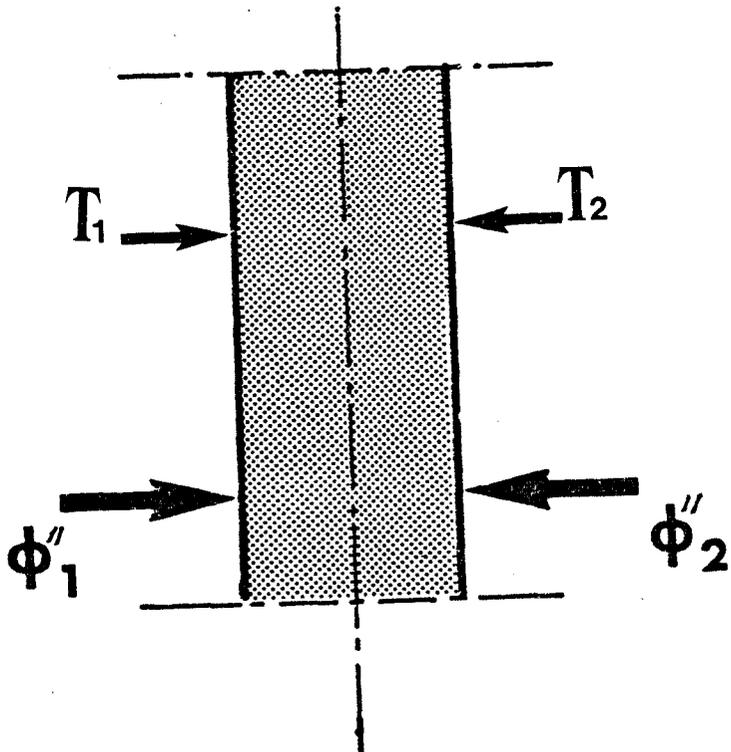
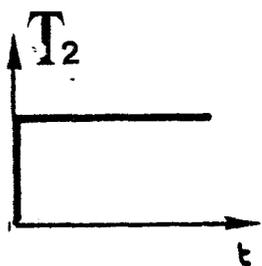
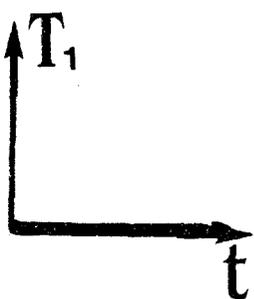
Compte tenu de l'expression du flux thermique, le retard observé sur la face de sortie est e^2/ba , soit une valeur de 3,6 heures pour la paroi de béton et 1,2 mn pour l'enduit de plâtre.

Dans cette phase dite transitoire, les échanges thermiques sont caractérisés par un paramètre fondamental (l'effusivité thermique),

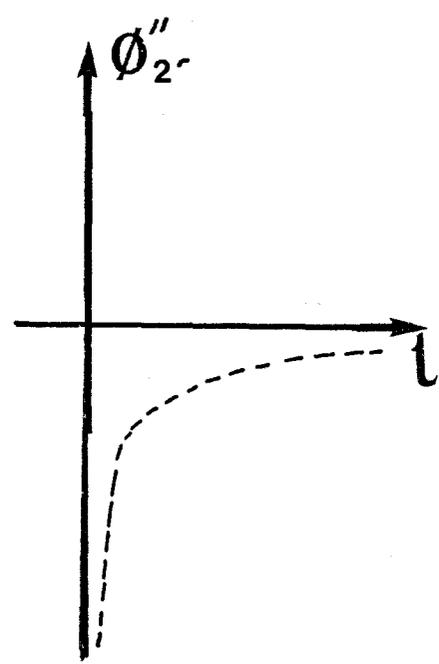
Cette méthode d'analogie s'applique à la situation plus générale où la température varie de part et d'autre de la paroi homogène. Compte tenu du principe de superposition, il est toujours possible de décomposer l'évolution du système en deux évolutions élémentaires dans lesquelles des sollicitations du type échelon sont imposées de part et d'autre de la paroi.

Considérons donc la situation suivante dans laquelle deux variations en échelon provoquent des échanges de flux ϕ_1 et ϕ_2 .





BU
LILLE



Les flux s'obtiennent par la superposition des flux correspondant à chaque excitation en échelon prise séparément, le flux traversant l'entrée est la superposition d'une composante en phase avec la variation de température T_1 et d'une composante retardée proportionnelle à la variation de température de sortie T_2 .

Le régime de fluctuation est caractérisé par les flux ϕ_2' et ϕ_1' , le régime quasi-permanent nécessite la connaissance de l'ensemble des flux ϕ_1' ϕ_2' , ϕ_1'' ϕ_2'' .

Dans le cas d'une paroi homogène, les fonctions d'influence avec excitation à droite et à gauche sont identiques. Dans cette configuration plus générale où la paroi est sollicitée simultanément sur ces deux faces, le flux en tout point dépend de façon complexe de chacune des élévations de températures (T_1-T_0) et (T_2-T_0) .

L'expression précédente peut être généralisée par la relation :

$$T(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{x}{2e} (T_1-T_2) + 2 A k$$

avec

$$A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \left| (T_2-T_0) \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) + (T_1-T_0) \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \right| \exp \left(- \frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t \right)$$

Le flux est donné par :

$$\phi(x,t) = \frac{\lambda}{e} \left(\frac{T_1-T_2}{2} \right) - \frac{\lambda}{e} \cdot B_k$$

$$B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \pi} \left| (T_2-T_0) \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) - (T_1-T_0) \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \right| \exp \left(- \frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t \right)$$

En introduisant comme précédemment les fonctions élémentaires ϕ_{k-} et ϕ_{k+} pour représenter les sollicitations en provenance des faces de gauche et de droite nous obtenons pour la composante transitoire du flux thermique :

$$\phi'(x,t) = \phi(x,t) - \phi_p \quad \phi_p = \frac{\lambda}{e} \left(\frac{T_1-T_2}{2} \right)$$

$$\phi'(x,t) = -\frac{\lambda}{e} \sum_1^{\infty} \left[(T_2-T_0) \phi_{k-} + (T_1-T_0) \phi_{k+} \right]$$

avec

$$\phi_{k+} = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \cdot \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

$$\phi_{k-} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \cdot \exp\left(\frac{-a k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

Les fonctions élémentaires ϕ_{k+} et ϕ_{k-} associées à une valeur de l'indice k représentent l'effet des sollicitations en provenance de chaque face (ϕ_{k-} pour la face gauche, ϕ_{k+} pour la face droite).

De façon générale, les variations de température (T_1-T_0) et (T_2-T_0) sur chaque face ne sont pas proportionnelles entre elles et le flux thermique ϕ' dépend de façon complexe des quantités (T_1-T_0) et (T_2-T_0) .

En particulier, la valeur moyenne de $\langle \phi'^2 \rangle$ dans toute la paroi s'exprime de façon complexe des variations (T_1-T_0) et (T_2-T_0) .

De la même façon pour la composante transitoire le champ de température :

$$\theta'_k(x,t) = 2 \cdot \sum_1^{\infty} \left[(T_2-T_0) \theta_{k-} + (T_1-T_0) \theta_{k+} \right]$$

avec

$$\theta_{k+} = \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

$$\theta_{k-} = \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t\right)$$

Comme précédemment les fonctions élémentaires θ_{k+} et θ_{k-} associées à une valeur de l'indice k représentent l'effet de sollicitation en provenance de chacune des faces sur le champ de température interne.

Il est alors facile de voir que la valeur moyenne du carré θ'^2 dans toute la paroi dépend de façon complexe des élévations de température (T_2-T_0) et (T_1-T_0) sur chaque face.

V - SIMULATION DES FONCTIONS D'INFLUENCE D'UNE LIGNE HOMOGENE

Nous avons montré comment il est possible de simuler une paroi plane d'épaisseur donnée à l'aide d'une ligne électrique de résistance linéique R et de capacité linéique C et avons mis en évidence les limites de cette simulation (voir le récapitulatif des grandeurs thermiques et électriques).

La modélisation par une ligne électrique permet le relevé des fonctions d'influence introduites précédemment.

La modélisation d'une paroi quelconque de paramètres thermophysiques données (λ, ρ, c) mène à la représentation suivante :

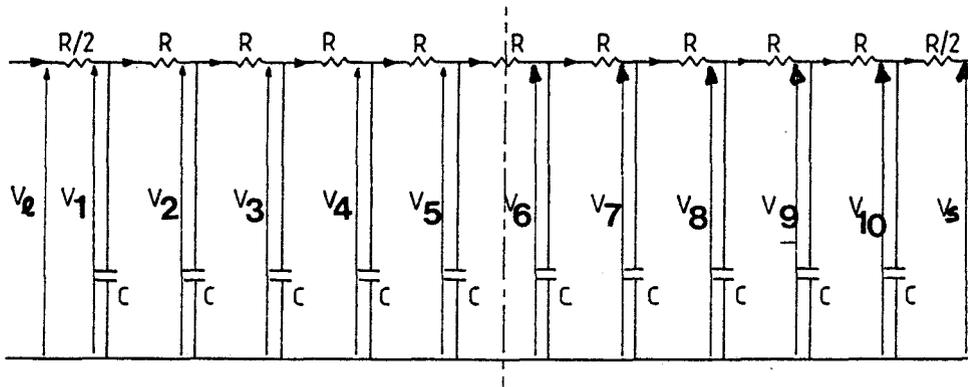
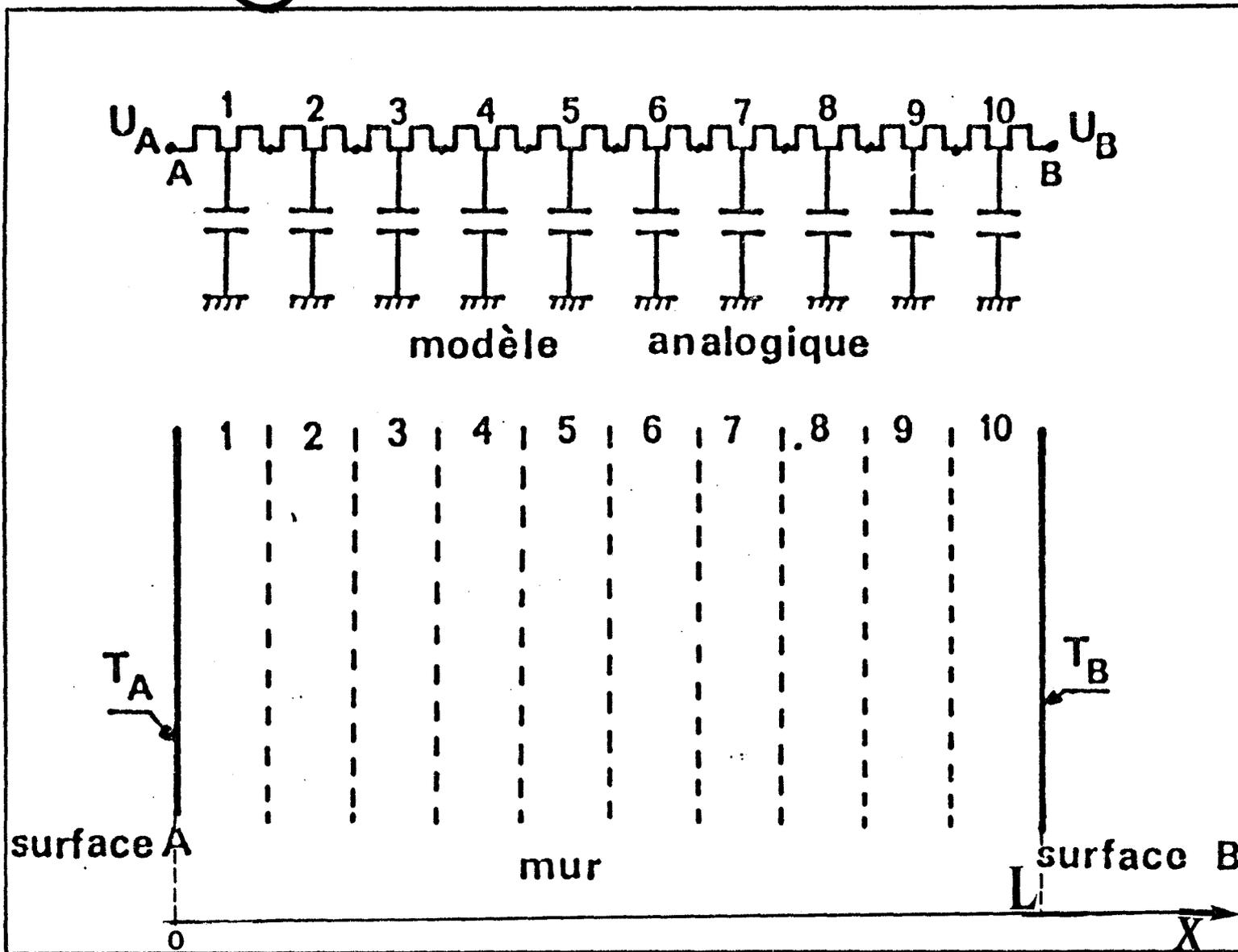


Figure I-9 : Système électrique équivalent à la paroi étudiée

La ligne électrique utilisée est constituée d'un ensemble de dix cellules RC connectées en cascade. Chaque cellule simule une tranche du matériau selon la figure I-10.

A l'instant $t = 0$, on applique à l'extrémité gauche de la ligne électrique la tension U_A et à l'extrémité droite on applique la tension U_B .

Les courants et tensions sont nuls en tout point de la ligne avant l'instant initial.



$L = 2$ fois l'épaisseur de la paroi

Figure I-10

On désire connaître la valeur de la tension et du courant en tout point de la ligne en fonction du temps ($U(x,t)$, $I(x,t)$),

Etablissons les relations liant $U(x,t)$ et $I(x,t)$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + R_i(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + C \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0$$

Ces relations conduisent à l'équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = RC \cdot \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$$

analogue à l'équation de Fourier :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

a étant la diffusivité thermique

$$RC = \frac{L^2}{a} \quad ; \quad a = \frac{1}{\rho C} \quad ; \quad L : \text{longueur de la ligne électrique,}$$

La résolution de l'équation de Fourier a donné les résultats suivants :

$$T(x,t) = \frac{T_A + T_B}{2} + \frac{x}{e} \cdot \frac{T_A - T_B}{2} + 2 \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \left| \frac{(T_A - T_0)}{K\pi} \sin \frac{K\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) + \frac{(T_A - T_0)}{K\pi} \sin \frac{K\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \right| \exp\left(-\frac{ak^2\pi^2}{4e} t\right)$$

$$\phi(x,t) = \frac{\lambda}{e} \cdot \frac{T_A - T_B}{2} - \frac{\lambda}{e} \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K \left| (T_A - T_0) \sin \frac{K\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) - (T_A - T_0) \sin \frac{K\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \right| \exp\left(-\frac{ak^2\pi^2}{4e} t\right)$$

Par analogie, on peut déduire l'équation de la tension $U(x,t)$ et du courant $I(x,t)$ à partir de ces deux équations.

VI - RESULTATS EXPERIMENTAUX

VI-1- DESCRIPTION ET ANALYSE DE LA CHAINE DE MESURES ET DE TRAITEMENT

Le dispositif expérimental est représenté par la figure I-11 où nous distinguons :

- une source : celle-ci a pour fonction d'imposer au système des signaux sélectionnés par le microordinateur. Pour la plupart de nos expériences, un échelon de tension a été appliqué à l'entrée de la ligne fournie par un convertisseur (DAC)
- Un microordinateur CBM 4032 bâti autour du microprocesseur de Rockwell (le 6502).
- Une carte multifonction gérée par le microprocesseur de l'ordinateur.

Cette carte regroupe un multiplexeur analogique haut niveau à 16 voies, un amplificateur à gain et un convertisseur analogique numérique 12 bits relativement rapide (40 μ s).

- Une carte comportant une horloge programmable et un interface entrée-sortie parallèle P.I.A. permettant de séquencer les prises de mesure à une période déterminée au préalable par le microordinateur.

Une entrée PIA est réservée au déclenchement des mesures à partir d'une excitation extérieure.

- Une imprimante.
- Une unité de stockage.
- Une table traçante.

Les résultats des mesures sont stockés dans "la mémoire vive" du microordinateur puis traités et transférés sur les disques souples de l'unité de stockage. Ils sont alors disponibles pour être traités à nouveau ou visualisés sur l'imprimante ou la table traçante.

VI-2- CONCEPTION ET REALISATION D'UN PROGRAMME DE GESTION ADAPTE A LA CHAINE DE MESURES

En tenant compte qu'un dispositif de laboratoire doit être le plus polyvalent possible, afin d'exploiter au mieux les possibilités de la chaîne de mesure, nous avons réalisé un programme d'acquisition en langage "Basic" comportant

deux parties distinctes.

* La première établit un "dialogue" entre la machine et l'utilisateur définissant :

- les voies à scruter,
- la période d'échantillonnage,
- le nombre de points de mesures,
- le nom du fichier de sauvegarde sur disques souples dans lequel seront stockés les résultats de la mesure.

* la seconde partie du programme Basic génère un programme en "langage machine" adapté aux critères de mesure fixés lors de la partie "dialogue".

Le principal intérêt d'un programme en langage machine étant sa rapidité d'exécution, il est très important de réduire au maximum sa longueur.

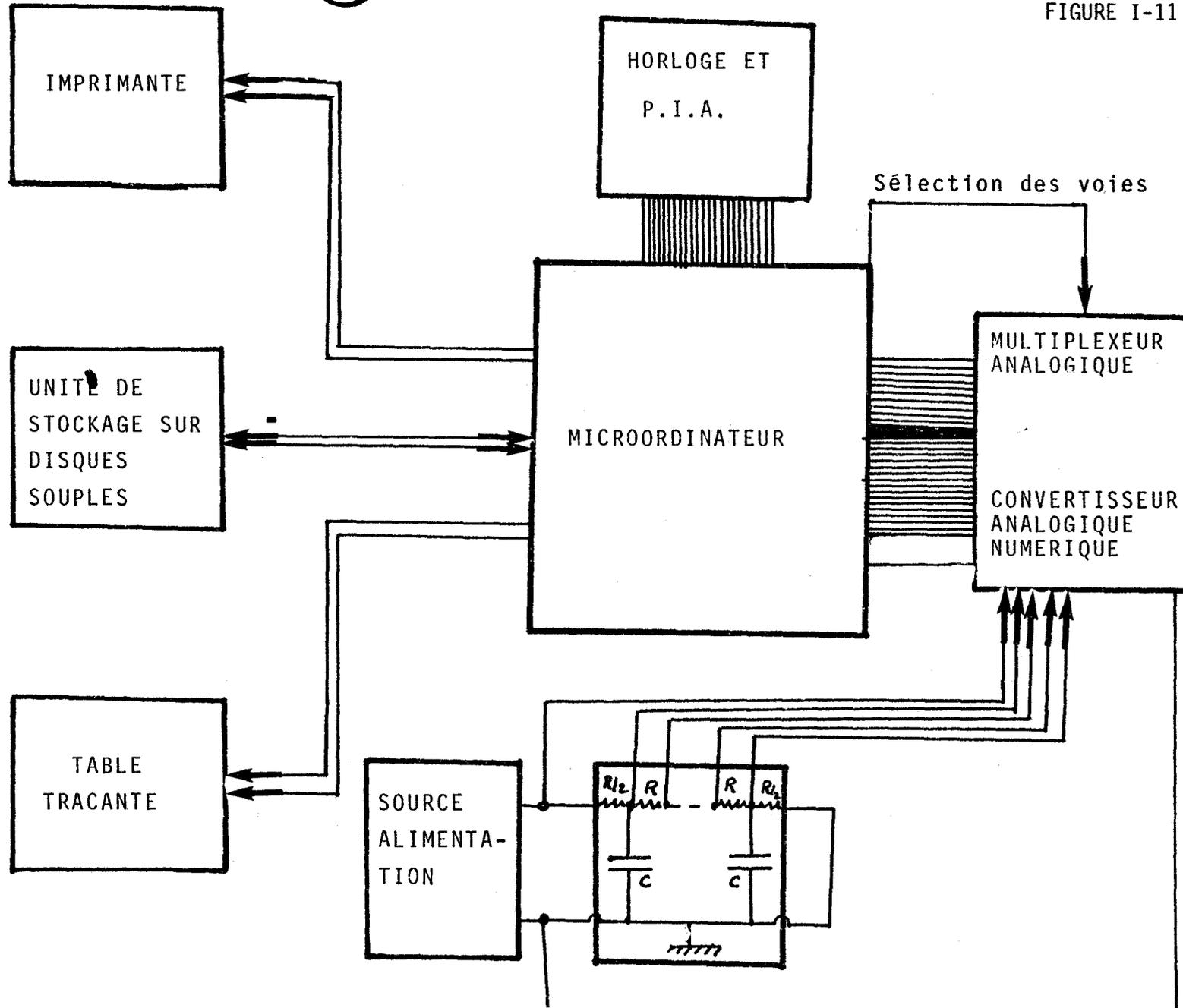


FIGURE I-11

VI-3- VARIATIONS DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES DES SYSTEMES ELECTRIQUES ANALOGIQUES AUX SYSTEMES THERMIQUES

Chaque paroi étudiée est représentée par le modèle électrique figure I-12

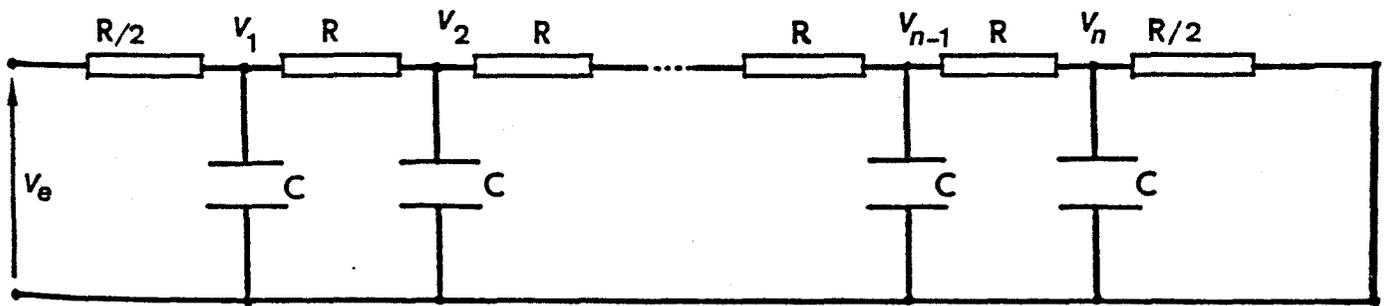


Figure I-12

Dans ce cas, chaque cellule représente $\frac{2e}{10}$ ($2e$: épaisseur de la paroi) ; les tensions sont relevées aux bornes de chaque capacité.

A l'instant $t = 0$, on applique à l'entrée de la ligne en $x = 0$, une tension (type échelon), l'autre extrémité étant court-circuitée (puits thermique).

Nous avons fait l'étude de trois échantillons d'effusivité thermique différente en vue d'élargir, ultérieurement, le champ d'expérimentation à quelques matériaux typiques déjà caractérisés expérimentalement.

Sur la figure I-13, nous avons représenté les différentes tensions d'une ligne électrique de résistance linéique R et de capacité linéique C correspondant à l'échantillon de polystyrène (d'épaisseur 2,5 mm et d'une surface de 1,75 dm²). L'examen de ce réseau de courbes montre que la tension aux bornes de la première capacité s'élève très rapidement pour atteindre le régime permanent ; par contre, la tension aux bornes de la dernière capacité pour des temps inférieurs à 0,2 secondes reste nulle. On distingue deux régimes : un régime transitoire ($t < 0,5$ seconde) et un régime permanent ($t > 0,5$ seconde).

Les courants circulant dans chaque cellule sont représentés dans la figure I-14 . Le courant dans la première demi-cellule (n°1) est important ($10^{-6} \text{ A} < I_1 < 10^{-4} \text{ A}$). L'ensemble des courants convergent vers $1 \mu\text{A}$ en régime permanent (nous rappelons que les dix cellules représentant le polystyrène ont une résistance globale de $10 \text{ M}\Omega$ et qu'à l'entrée de la ligne, on a appliqué un échelon de tension de 10 volts).

Les figures I-15 et I-16 représentent les variations des tensions et courants correspondant à chacune des cellules de la ligne électrique modélisant un échantillon de plexiglass d'épaisseur 2,5 mm et $1,75 \text{ dm}^2$.

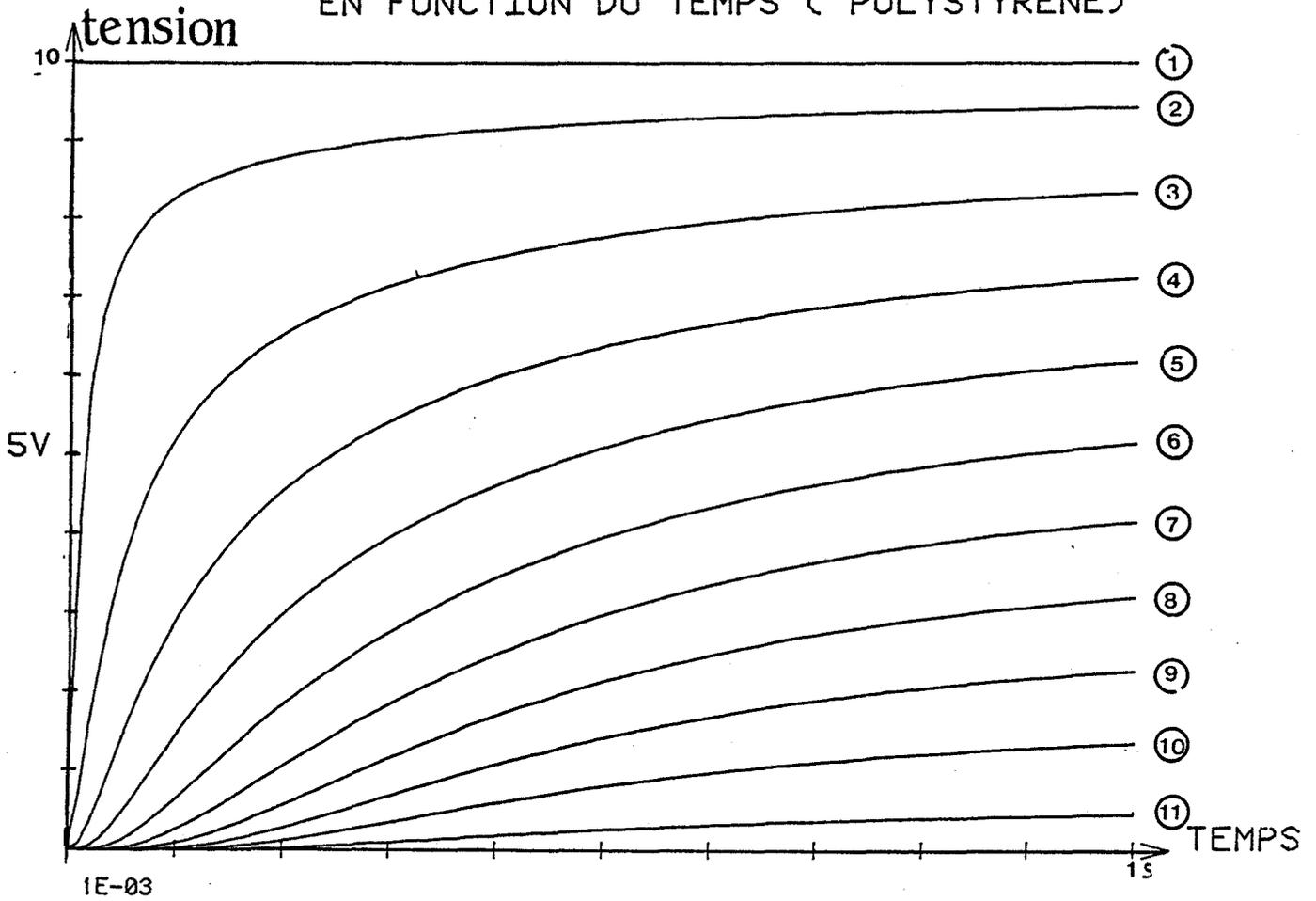
La constante de temps du plexiglass ($R.C = 56,2$ secondes) est supérieure à celle du polystyrène (3 secondes) et du fluxmètre (1 seconde).

L'analyse de ces courbes montre qu'aux environs de dix secondes, on passe au régime permanent.

Les figures I-17 et I-18 représentent également les variations en fonction du temps, de la tension et du courant correspondant à chaque cellule du fluxmètre.

Le régime permanent est obtenu à partir de 0,2 seconde. Le temps de réponse est assez faible. Cela s'avère intéressant pour l'utilisation du fluxmètre en régime variable.

FIGURE (I-13) ⁻³⁷⁻ ÉVOLUTION DE LA TENSION EN FONCTION DU TEMPS (POLYSTYRENE)



COURANT (A)

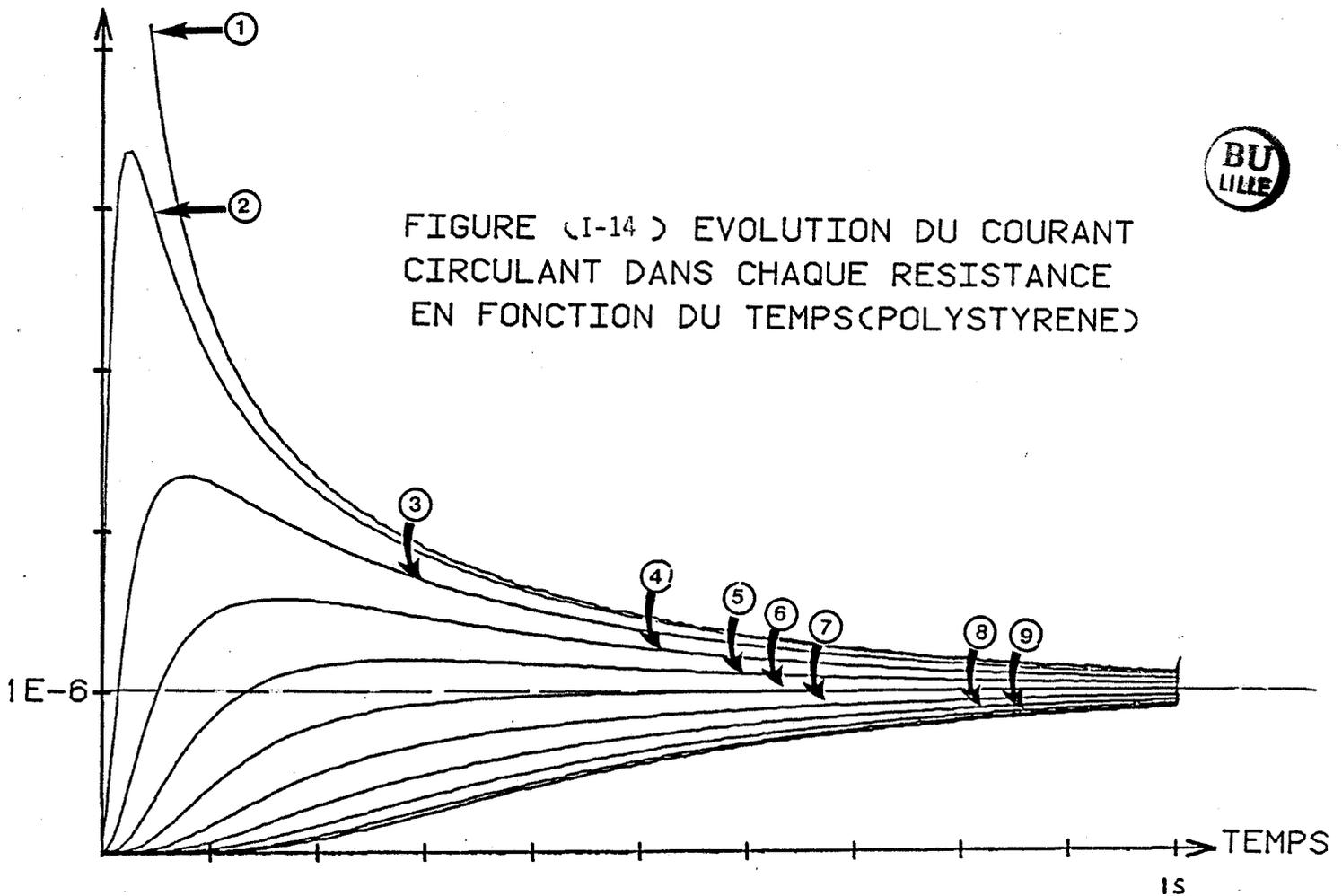
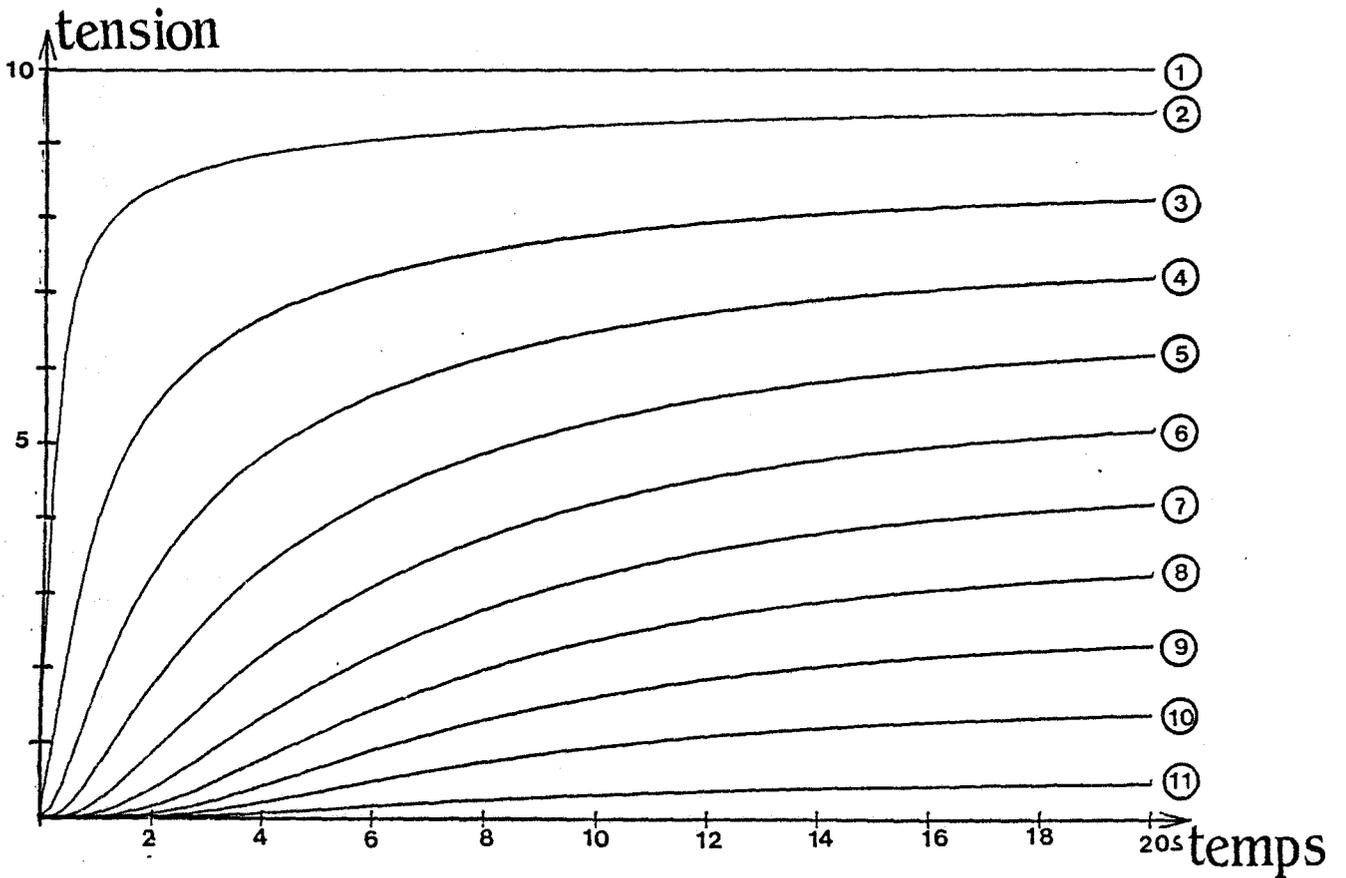


FIGURE (I-14) ÉVOLUTION DU COURANT CIRCULANT DANS CHAQUE RESISTANCE EN FONCTION DU TEMPS (POLYSTYRENE)

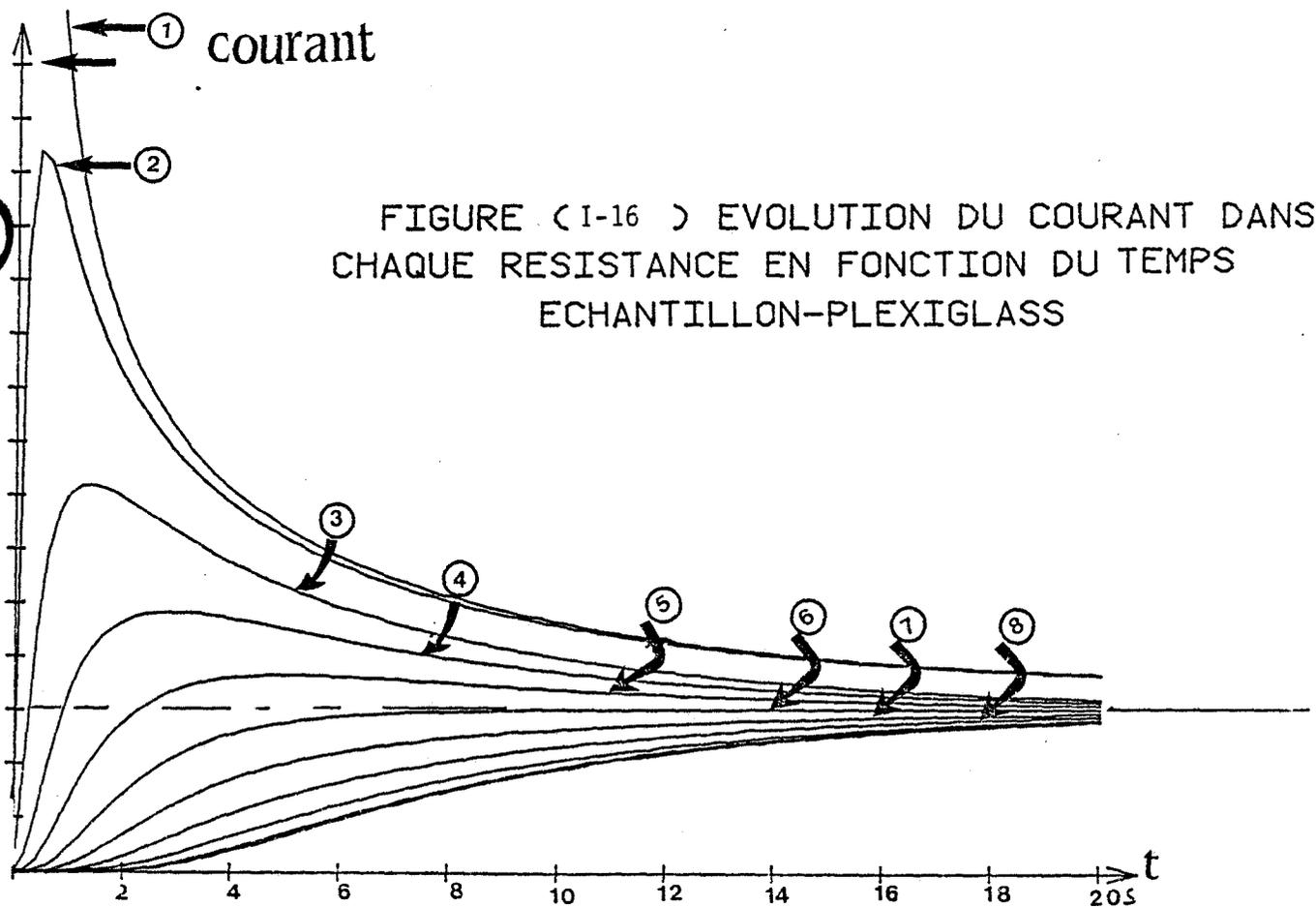
FIGURE (I-15) EVOLUTION DE LA TENSION E
FONCTION DU TEMPS (ECHATILLON-PLEXIGLASS)



3E-5 ← ① courant

BU
LILLE

FIGURE (I-16) EVOLUTION DU COURANT DANS
CHAQUE RESISTANCE EN FONCTION DU TEMPS
ECHANTILLON-PLEXIGLASS



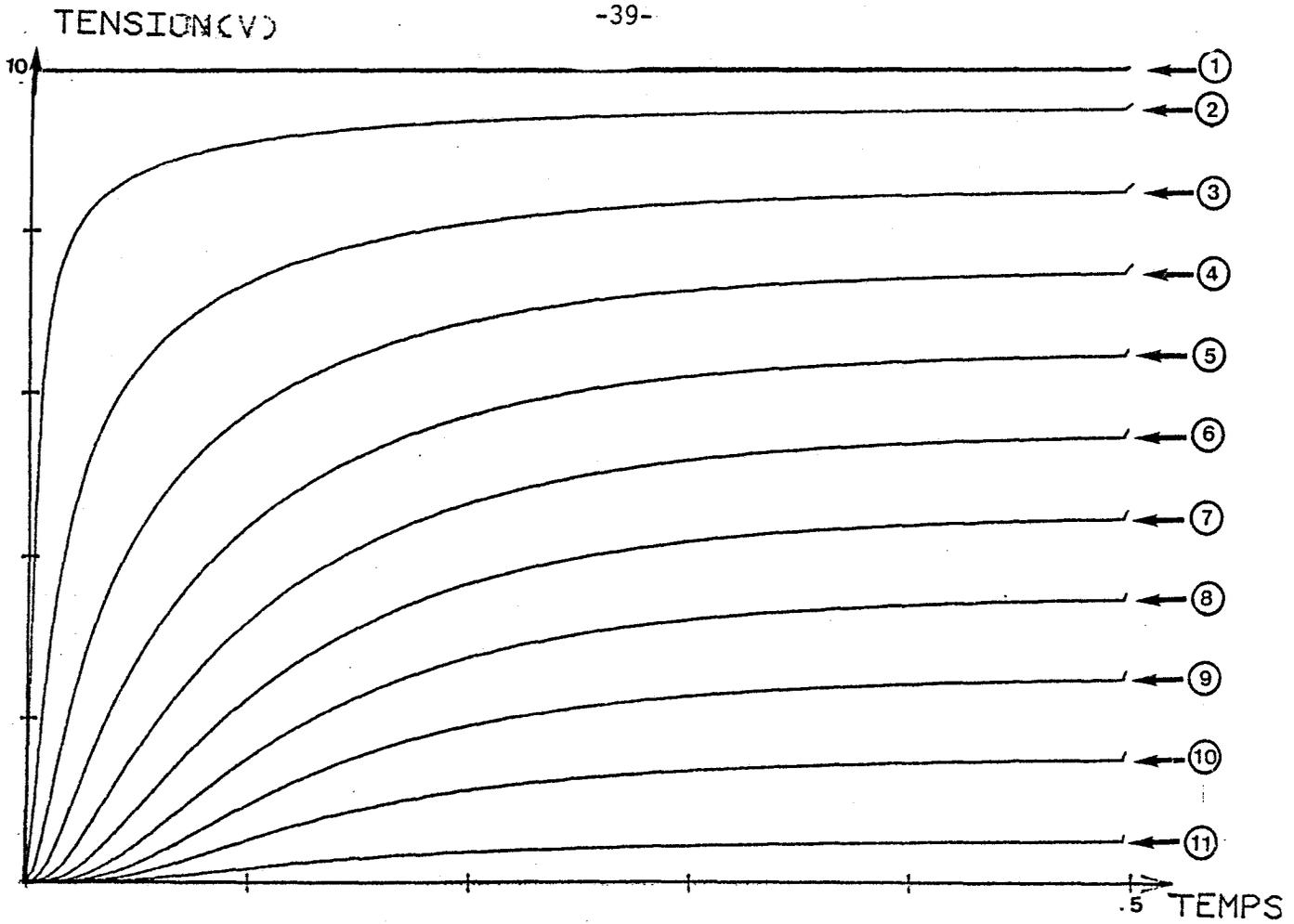


Figure I-17

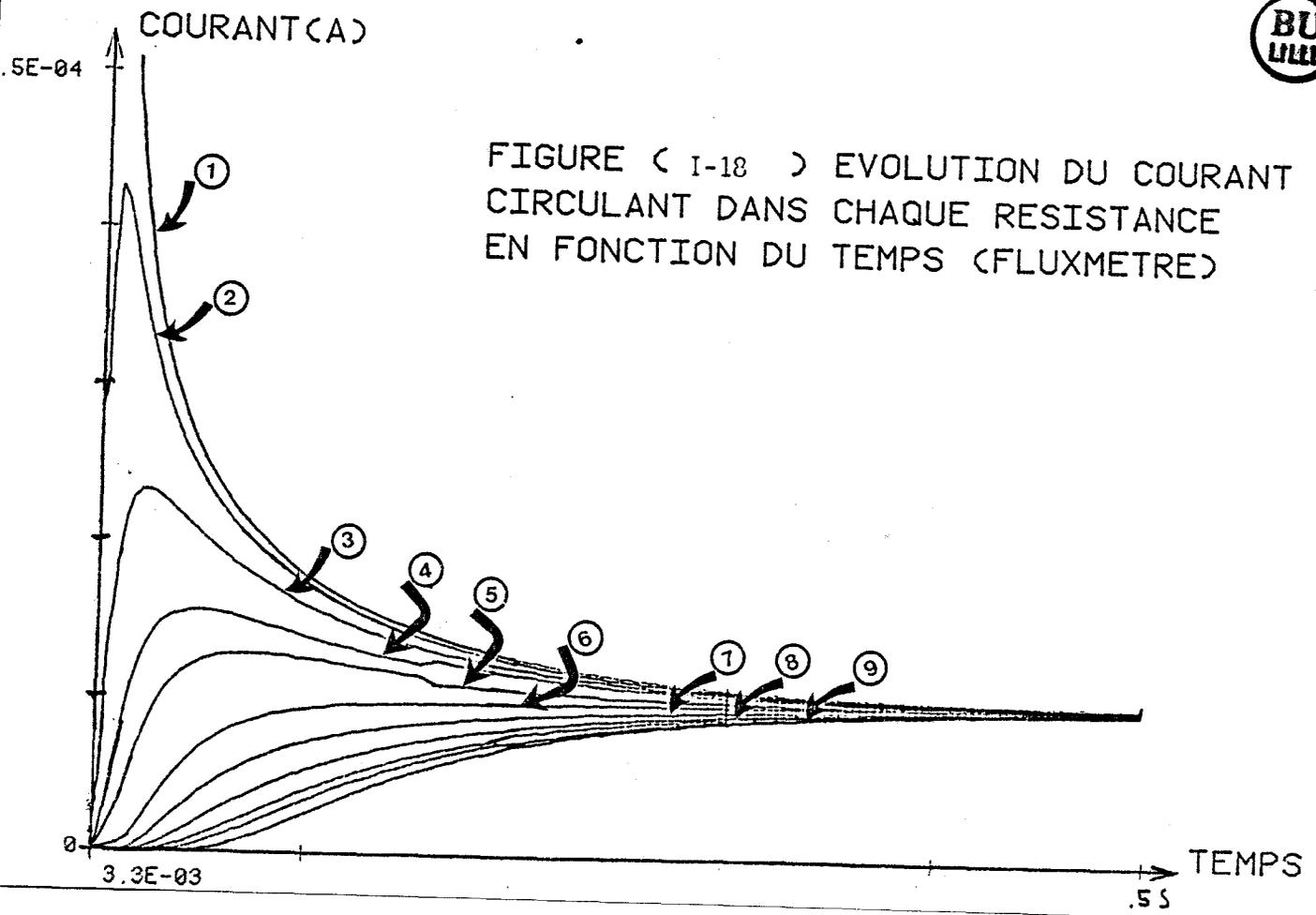


FIGURE (I-18) EVOLUTION DU COURANT CIRCULANT DANS CHAQUE RESISTANCE EN FONCTION DU TEMPS (FLUXMETRE)



VII- FONCTION D'INFLUENCE SYMETRIQUE ET ANTISYMETRIQUE

Pour une paroi sollicitée sur une seule face l'intérêt du développement des diverses réponses indicielles en fonctions élémentaires ϕ_{k-} et θ_{k-} résultent des propriétés d'orthogonalité des ϕ_k et θ_k pour $k \neq k'$.

La complexité du développement lorsque la paroi est sollicitée simultanément sur ses deux faces résulte du fait que les fonctions élémentaires

- ϕ_{k+} et ϕ_{k-} ne sont pas orthogonales
- θ_{k+} et θ_{k-} ne sont pas orthogonales

Cependant, il est possible d'obtenir un développement en fonctions orthogonales en transformant les développements précédents. Pour cela, il suffit de regrouper des termes dans chacun des développements.

Considérons les quantités $\phi'(x,t)$ et $\phi'(-x,t)$

$$\phi'(x,t) = -\frac{\lambda}{e} \sum_1^{\infty} (-1)^k [(T_2-T_0) \cos \frac{k\pi}{2} (1-\frac{x}{e}) - (T_1-T_0) \cos \frac{k\pi}{2} (1+\frac{x}{e})] \exp(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t)$$

$$\phi'(-x,t) = -\frac{\lambda}{e} \sum_1^{\infty} (-1)^k [(T_2-T_0) \cos \frac{k\pi}{2} (1+\frac{x}{e}) - (T_1-T_0) \cos \frac{k\pi}{2} (1-\frac{x}{e})] \exp(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t)$$

$$\phi'(x,t) = \phi(x,t) - \phi_p \quad , \quad \phi'(-x,t) = \phi(-x,t) - \phi_p$$

ϕ_p : flux permanent

Effectuons :

$$\phi'(x,t) + \phi'(-x,t) = -\frac{\lambda}{e} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^k [(T_2-T_1) A_1 + (T_2-T_1) A_2] \exp(-\frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} t)$$

$$A_1 = \cos \frac{k\pi}{2} (1-\frac{x}{e}) \quad ; \quad A_2 = \cos \frac{k\pi}{2} (1+\frac{x}{e})$$

$$\text{or : } \cos \frac{k\pi}{2} (1-\frac{x}{e}) + \cos \frac{k\pi}{2} (1+\frac{x}{e}) = 2 \cos \frac{k\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2} \frac{x}{e}$$

Cette expression n'est différente de zéro que si k est pair avec $k = 2 p$

$$\phi'(x,t) + \phi'(-x,t) = -\frac{\lambda}{e} (T_2-T_1) \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos \frac{2p \pi x}{e} \exp(-\frac{a \pi^2 p^2}{e^2} t)$$

De la même façon en effectuant la différence :

$$\phi'(x,t) - \phi'(-x,t) = -\frac{\lambda}{e}(T_1+T_2-2T_0) \sum_1^{\infty} (A_1-A_2) \exp\left(-\frac{a^2\pi^2h^2}{4e^2}t\right)$$

$$\phi'(x,t) - \phi'(-x,t) = -\frac{\lambda}{e}(T_1+T_2-2T_0) \sum_1^{\infty} \sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi}{2}\frac{x}{e} \exp\left(-\frac{a\pi^2h^2}{4e^2}t\right)$$

zéro pour les valeurs pairs ,

D'où l'expression finale de la différence :

$$\phi'(x,t) - \phi'(-x,t) = \frac{2\lambda}{e}(T_1+T_2-2T_0) \sum_1^{\infty} (-1)^{2p+1} A_p$$

$$\text{avec } A_p = \sin\frac{(2p+1)\pi x}{e}, \exp -\frac{a(2p+1)^2\pi^2 t}{4e^2}$$

Il résulte de ces résultats que les combinaisons de variables :

$$\Sigma\phi'(x,t) = \phi'(x,t) + \phi'(-x,t)$$

$$\Delta\phi'(x,t) = \phi'(x,t) - \phi'(-x,t)$$

s'expriment toutes deux par des développements

$$\Sigma\phi'(x,t) = -\frac{\lambda}{e}(T_2 - T_1) \sum_1^{\infty} \phi_{2p,t}$$

$$\text{avec } \phi_{2p,t} = (-1)^p \cos\frac{2p\pi x}{e} \exp -\frac{a\pi^2 p^2 t}{e^2}$$

$$\Delta\phi'(x,t) = -\frac{\lambda}{e}(T_1+T_2-2T_0) \sum_1^{\infty} \phi_{2p+1,s}$$

$$\text{avec } \phi_{2p+1,s} = (-1)^{2p+1} \sin\frac{(2p+1)\pi x}{e} \exp\left(-\frac{a(2p+1)^2\pi^2 t}{4e^2}\right)$$

Les fonctions $\phi_{2p,t}$ et $\phi_{2p+1,s}$ sont orthogonales

$$\langle \phi_{2p,t}, \phi'_{2p,t} \rangle = 0$$

$$\langle \phi_{2p+1,s}, \phi'_{2p+1,s} \rangle = 0$$

Elles permettent une simplification des développements des quantités $\Sigma\phi'$ et $\Delta\phi'$ et une expression simplifiée des quantités quadratiques par rapport à ces grandeurs. Il faut, en effet remarquer que les quantités $\Sigma\phi'$ et $\Delta\phi'$ ne dépendent plus de deux variables indépendantes et non corrélées (T_1-T_0) et (T_2-T_0)

(comme $\phi'(x,t)$) mais d'une combinaison unique des variables T_1 et T_2 .

$$\Sigma\phi'(x,t) = h_t(x,t) \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\Delta\phi'(x,t) = h_s(x,t) \cdot (T_1 + T_2 - 2T_0)$$

en interprétant $\Sigma\phi'(x,t) = \phi'(x,t) + \phi'(-x,t)$ comme étant le flux moyen traversant la partie comprise entre x et $-x$, $h_t(x,t)$ est une fonction représentative de transfert de chaleur dans cette partie.

Par contre, $\Delta\phi$ représente un bilan thermique dans la même région de l'espace, et $h_s(x,t)$ représente le stockage énergétique dans cette région de l'espace.

Les modes de stockage et de transfert sont donc développés en fonctions élémentaires orthogonales entre elles .

Le champ des écarts de température peut être traité de la même façon compte tenu des résultats précédents.

$$\begin{aligned} \theta'(x,t) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} [(T_2 - T_0) \sin \frac{k\pi}{2} (1 + \frac{x}{e}) + \\ + (T_1 - T_0) \sin \frac{k\pi}{2} (1 + \frac{x}{e})] \exp - \frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta'(-x,t) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} [(T_2 - T_0) \sin \frac{k\pi}{2} (1 + \frac{x}{e}) \\ + (T_1 - T_0) \sin \frac{k\pi}{2} (1 - \frac{x}{e})] \exp (- \frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta'(x,t) + \theta'(-x,t) = 2(T_1 + T_2 - 2T_0) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} [\sin \frac{k\pi}{2} (1 + \frac{x}{e}) \\ + \sin \frac{k\pi}{2} (1 - \frac{x}{e})] \exp(- \frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta'(x,t) + \theta'(-x,t) &= 2(T_1 + T_2 - 2T_0) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \cos k\pi \frac{x}{e} \\ &= 2(T_1 + T_2 - 2T_0) \sum_1^{\infty} \end{aligned}$$

et de la même façon pour la différence :

$$\theta'(x,t) - \theta'(-x,t) = 2(T_1 - T_2) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) - \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{e}\right) \right] \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{4e^2}\right)$$

$$\theta'(x,t) - \theta'(-x,t) = -2(T_1 - T_2) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi x}{e}$$

$$\theta'(x,t) - \theta'(-x,t) = -2(T_1 - T_2) \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{2p}}{2p\pi} \sin 2p \frac{\pi x}{e}$$

De la même façon que précédemment, il apparaît que la différence de température entre les plans x et $-x$ ne dépend que de la différence $(T_1 - T_2)$ alors que l'élévation de la somme des variations de température $\theta'(x,t)$ et $\theta'(-x,t)$ ne dépend que des variations de la quantité $(T_1 + T_2 - 2 T_0)$.

L'intérêt d'introduire les modes de transfert et de stockage résulte de l'orthogonalité des fonctions introduites dans les développements en série.

Supposons les quantités :

$$\Sigma\phi'(x,t) \quad , \quad \Delta\phi'(x,t)$$

$$\Sigma\theta'(x,t) \quad , \quad \Delta\theta'(x,t)$$

connues en chaque point de la paroi. Les composantes transitoires des flux et températures sont également connues.

$$\phi'(x,t) = \frac{1}{2} [\Sigma\phi' + \Delta\phi']$$

$$\phi'(-x,t) = \frac{1}{2} [\Sigma\phi' - \Delta\phi']$$

De même pour les températures :

$$\theta'(x,t) = \frac{1}{2} [\Sigma\theta' + \Delta\theta']$$

$$\theta'(-x,t) = \frac{1}{2} [\Sigma\theta' - \Delta\theta']$$

Il en est de même des grandeurs quadratiques moyennes sur toute la paroi.
En effet, compte tenu de la propriété d'orthogonalité.:

$$\langle \Sigma \phi' \cdot \Delta \phi' \rangle = 0$$

$$\langle \Sigma \theta' \cdot \Delta \theta' \rangle = 0$$

il est apparent que :

$$\int_{-e}^{+e} \phi'^2(x,t) dx = \frac{1}{4} \int_{-e}^{+e} (\Sigma \phi'^2 + \Delta \phi'^2) dx$$

et de la même façon :

$$\int_{-e}^{+e} \theta'^2 dx = \frac{1}{4} \int_{-e}^{+e} (\Sigma \theta'^2 + \Delta \theta'^2) dx$$

Compte tenu des expressions obtenues, on vérifie les relations :

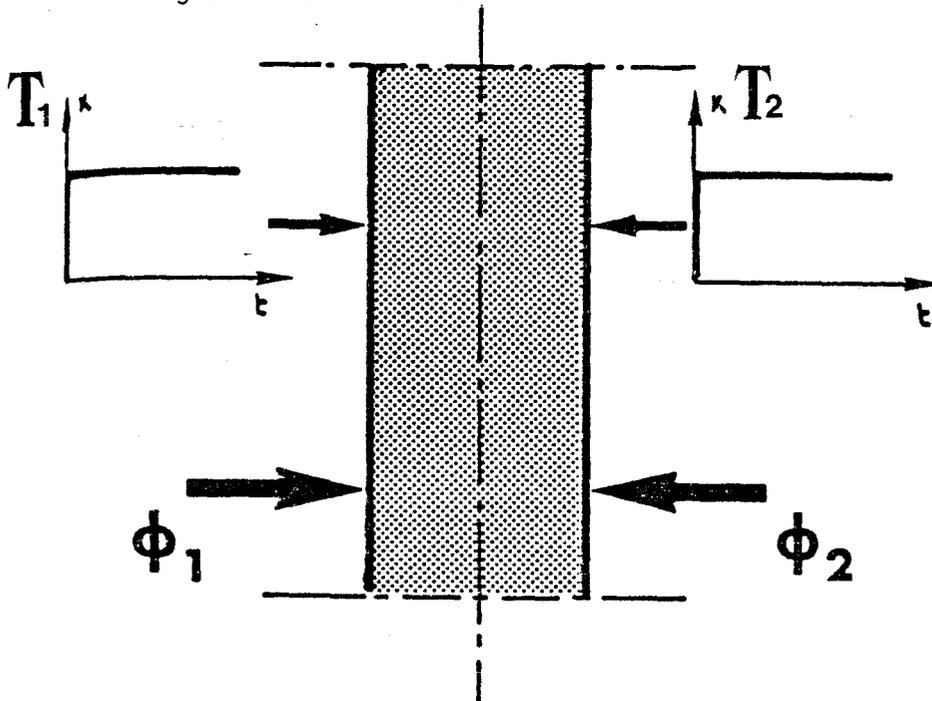
$$\Sigma \phi'(x,t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \Delta \theta'(x,t)$$

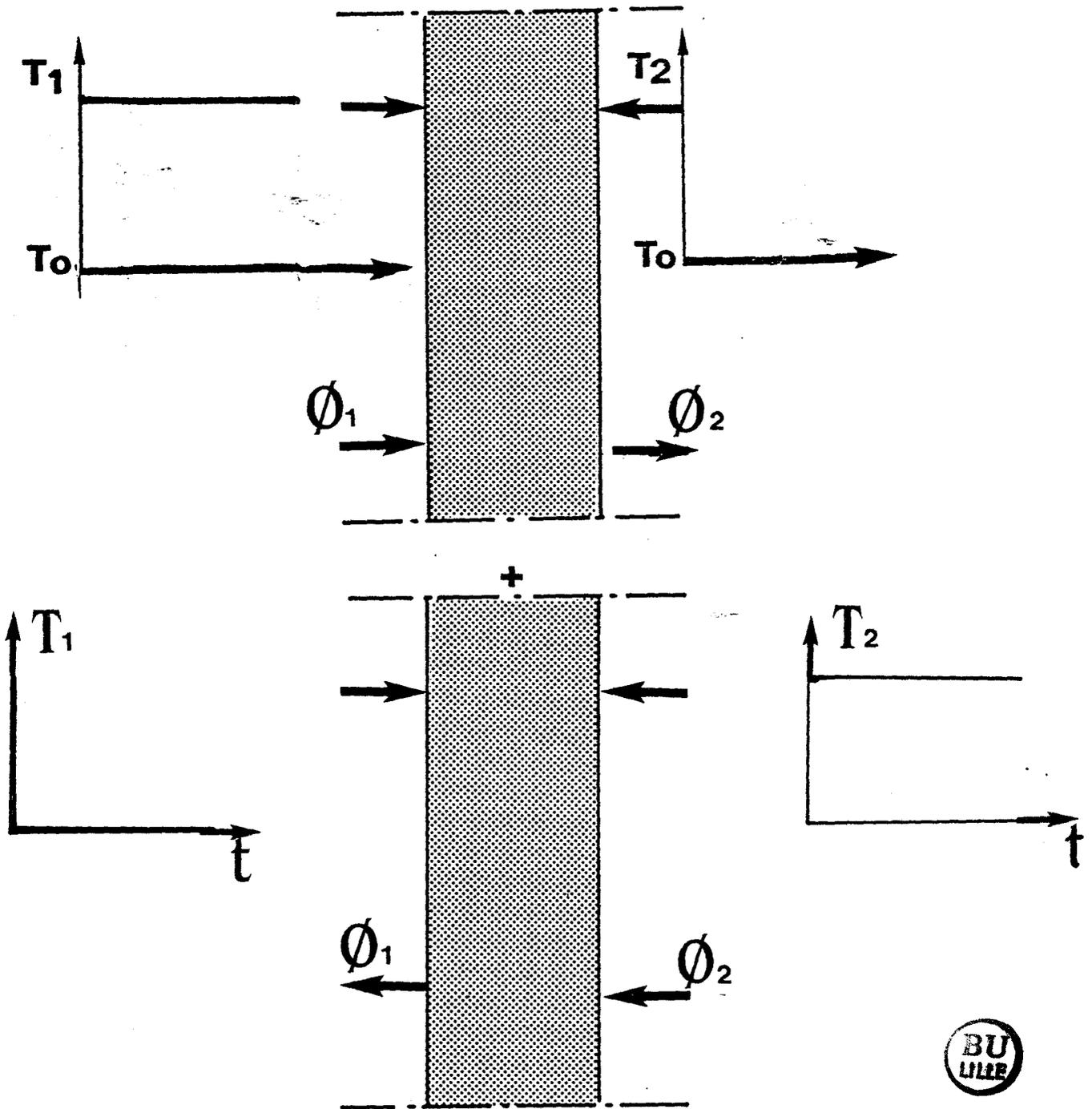
et

$$\Delta \phi'(x,t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \Sigma \theta'(x,t)$$

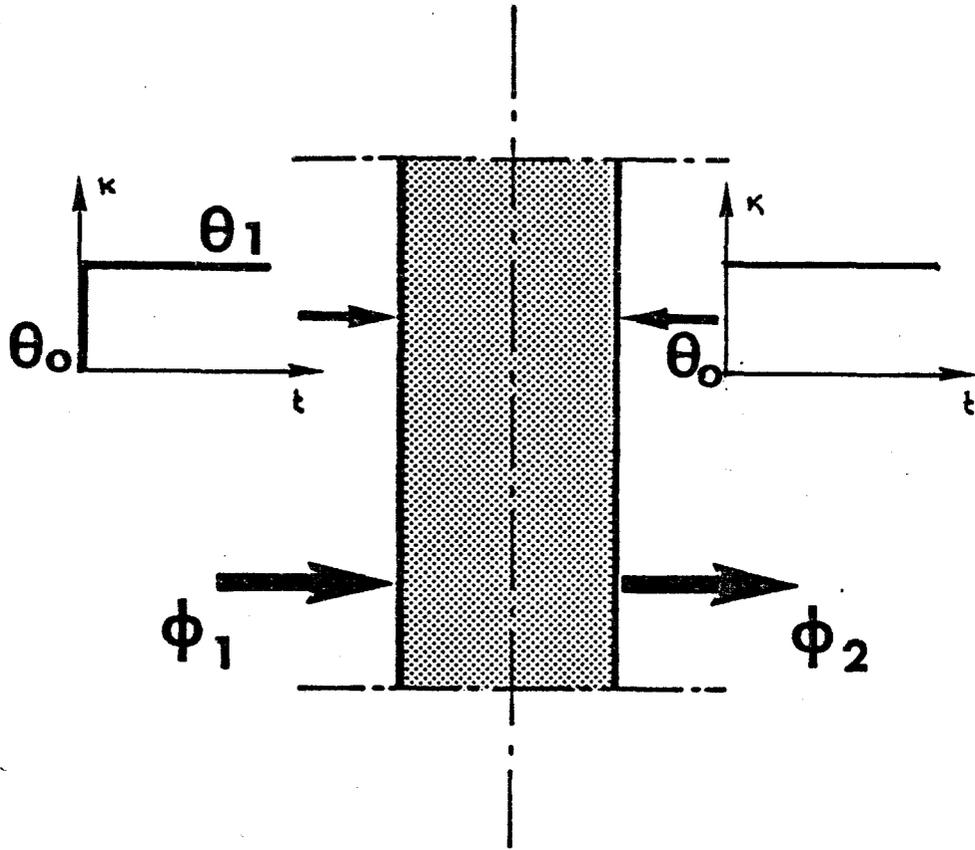
INTERPRETATION PHYSIQUE DES RESULTATS OBTENUS POUR UN SYSTEME A DEUX ACCES

En résumé, l'état d'une paroi homogène en régime variable peut être défini par deux fonctions de transfert en flux mesurable en supposant l'autre extrémité de ligne en court-circuit selon le schéma suivant :

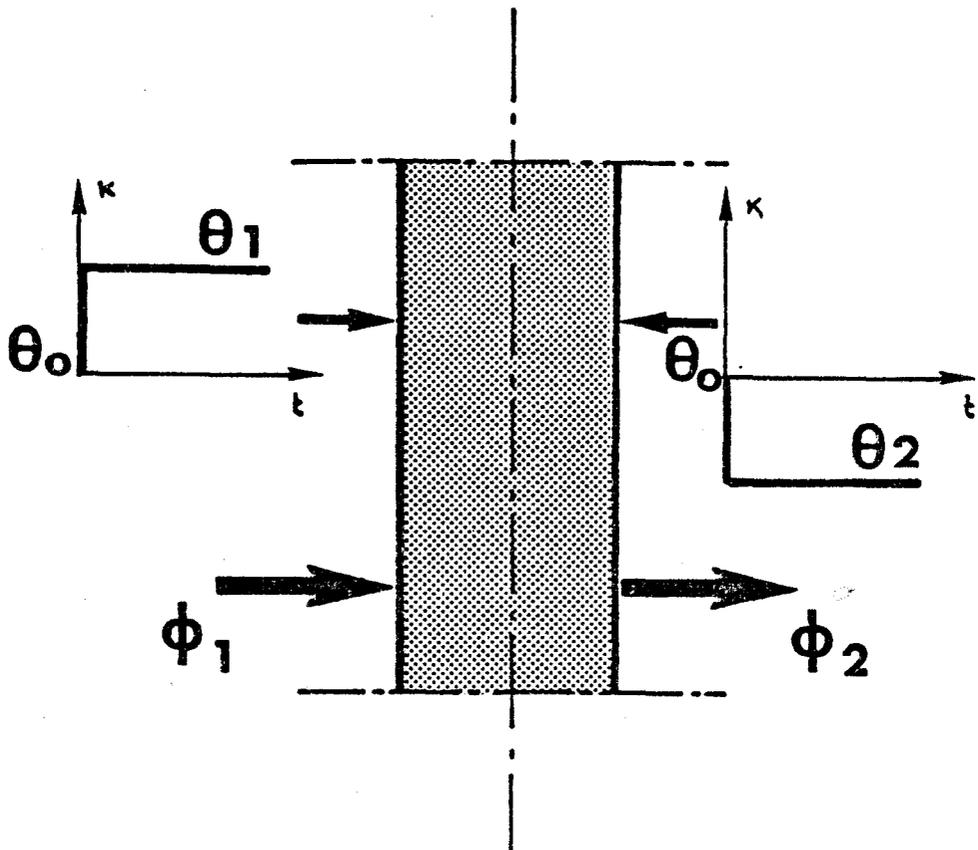




La superposition d'un mode de stockage et de transfert pur qui peut être considérée comme fonction de transfert, la sortie étant en ce cas en court-circuit.



STOCKAGE PUR

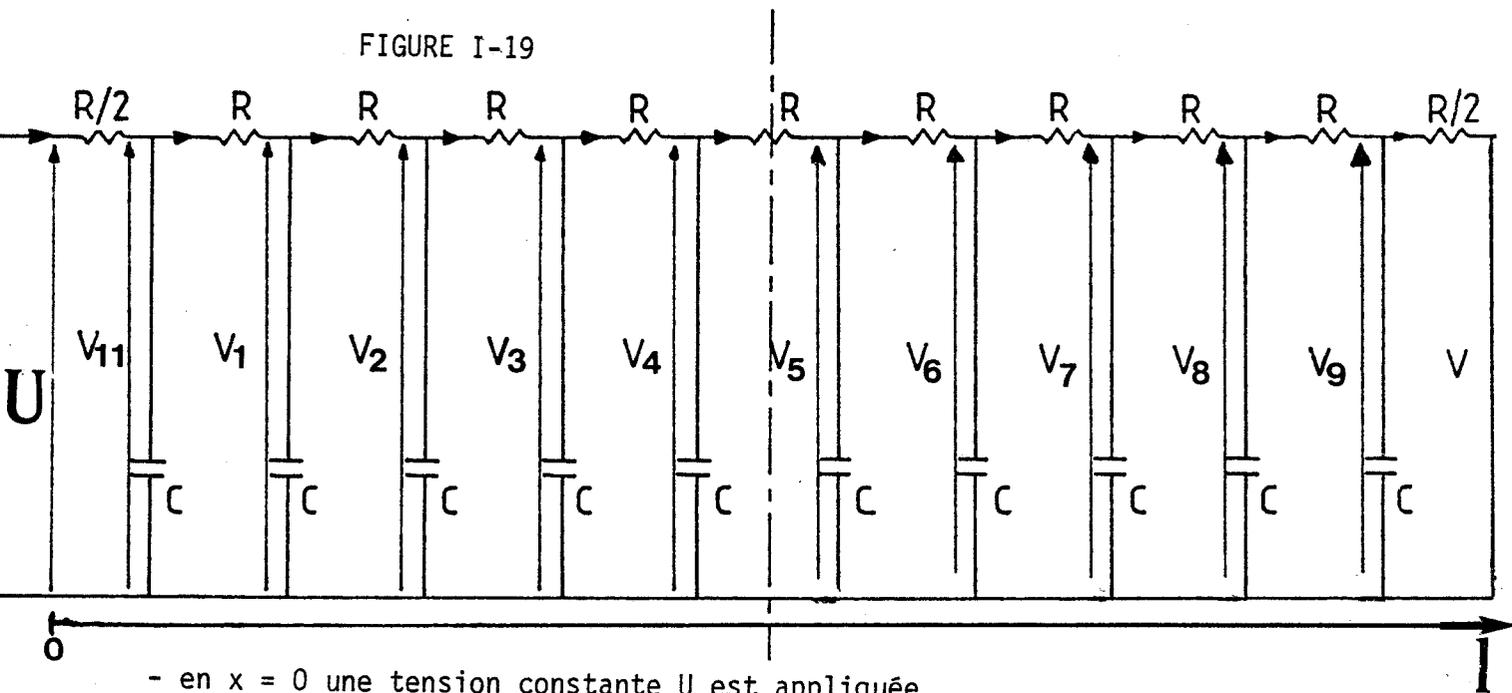


VIII - SIMULATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT SYMETRIQUE ET ANTI-SYMETRIQUE

On a vu précédemment qu'une paroi homogène de paramètres thermophysiques (λ, ρ, c) a le même comportement qu'une ligne électrique de résistance linéique R et de capacité linéique C

Dans une ligne de longueur finie, le caractère de la tension et du courant dépend des caractéristiques électriques de la ligne elle-même et des conditions aux extrémités de la ligne, ces dernières déterminant le caractère des réflexions à l'une ou l'autre extrémité. Les ondes de la tension et du courant dans la ligne sont, en fait, des ondes composées, résultant pratiquement d'une suite infinie d'ondes provenant des réflexions répétées à l'une ou l'autre extrémité.

Considérons la ligne suivante :



- en $x = 0$ une tension constante U est appliquée,
- en $x = L$ la tension est nulle (court-circuit) (figure ci-dessus)

Vérifions que les tensions aux bornes de chaque capacité et les courants circulant dans chaque branche dus à la seule source de tension en $x = 0$ sont la somme de celles du mode symétrique et du mode antisymétrique.

VIII-1-STOCKAGE ENERGETIQUE (MODE SYMETRIQUE)

Soit une ligne de transmission telle qu'elle a été définie précédemment (figure I-19) de paramètres R, C , de longueur L , représentée figure I-20

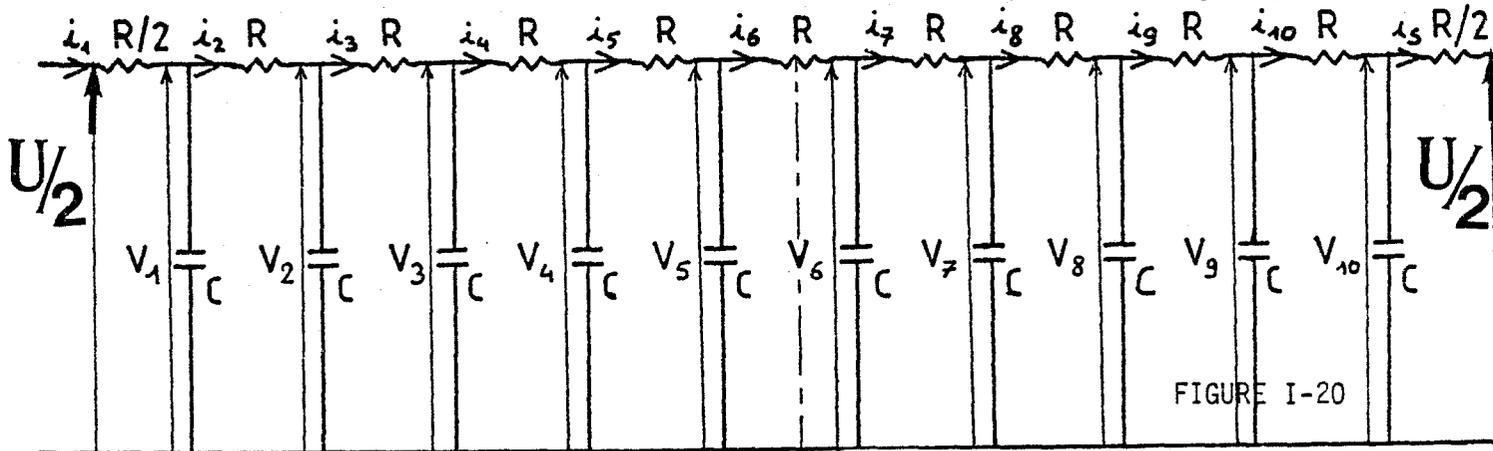


FIGURE I-20

A l'instant $t = 0$, on applique à $x = 0$ une tension de constante $U/2$

(fournie par une carte, impédance interne nulle). L'extrémité $x = L$ est soumise également à la même tension $U/2$.

Les courants et tensions sont par hypothèse nuls en tout point de la ligne à l'instant initial.

Nous nous intéressons aux tensions et aux courants circulant dans chaque branche de la ligne.

Exemple : Ligne simulant l'échantillon "polystyrène"

La tension appliquée en $x = 0$ et $x = L$ étant $\frac{U}{2} = 5 \text{ V}$, la figure I-21 représente la variation dans le temps des tensions observées aux différents noeuds de la ligne (échantillon polystyrène 2,5 mm d'épaisseur 13 x 13,5 cm² de surface)

L'examen de ce réseau de courbes montre que les tensions sont pratiquement égales deux à deux par rapport à $x = \frac{L}{2}$, en régime permanent ; dans la zone d'effusivité $b = \sqrt{\frac{C}{R}}$, les faibles écarts qui existent semblent dus essentiellement aux composants électriques (capacités) utilisés lors de nos manipulations. l'erreur sur la valeur de ces dernières était de $\pm 10 \%$.

Les résultats relatifs aux courants électriques sont repris figure I-22 Les courants sont pratiquement égaux deux à deux en valeur absolue par rapport à $x = \frac{L}{2}$.

Les courants circulant dans les premières résistances (i_1, i_2, i'_1, i'_2) diminuent rapidement, en revanche les autres ($i_3, i_4, i_5, i'_3, i'_4, i'_5$) augmentent passant par un maximum et décroissent. Le courant de la branche du milieu de la ligne est nul.

En conséquence, la ligne est équivalente à deux lignes à circuit ouvert de cinq cellules chacune.

Les mesures sont particulièrement difficiles pour des échantillons du type polystyrène, compte tenu de leurs grandes résistances.

Par ailleurs, nous avons effectué des mesures de tension, calculé les courants pour une ligne (plexiglass de même dimension que le polystyrène). Pour cela, nous avons appliqué en $x = 0$ la tension constante $\frac{U}{2} = 5$ V, et en $x = L$ la même tension.

Les courbes de réponses des tensions en fonction du temps représentent le graphe I-23.

Le régime d'effusivité est d'environ 10 secondes pour le plexiglass contre 0,5 secondes pour le polystyrène.

Les courbes de réponses des tensions en fonction du temps sont représentées sur la figure I-24.

L'allure des tensions et courants sont semblables à ceux simulant le polystyrène au temps près.

En première approximation, malgré l'écart existant entre les tensions symétriques de la ligne par rapport à $x = \frac{L}{2}$, du à la précision des capacités, les réponses obtenues expérimentalement sont très significatives. Elles montrent que le relevé des réponses indicelles pour des lignes attaquées aux deux extrémités par la même tension s'obtiendra en considérant qu'elle est équivalente à la somme des deux demi-lignes de la figure I-25,

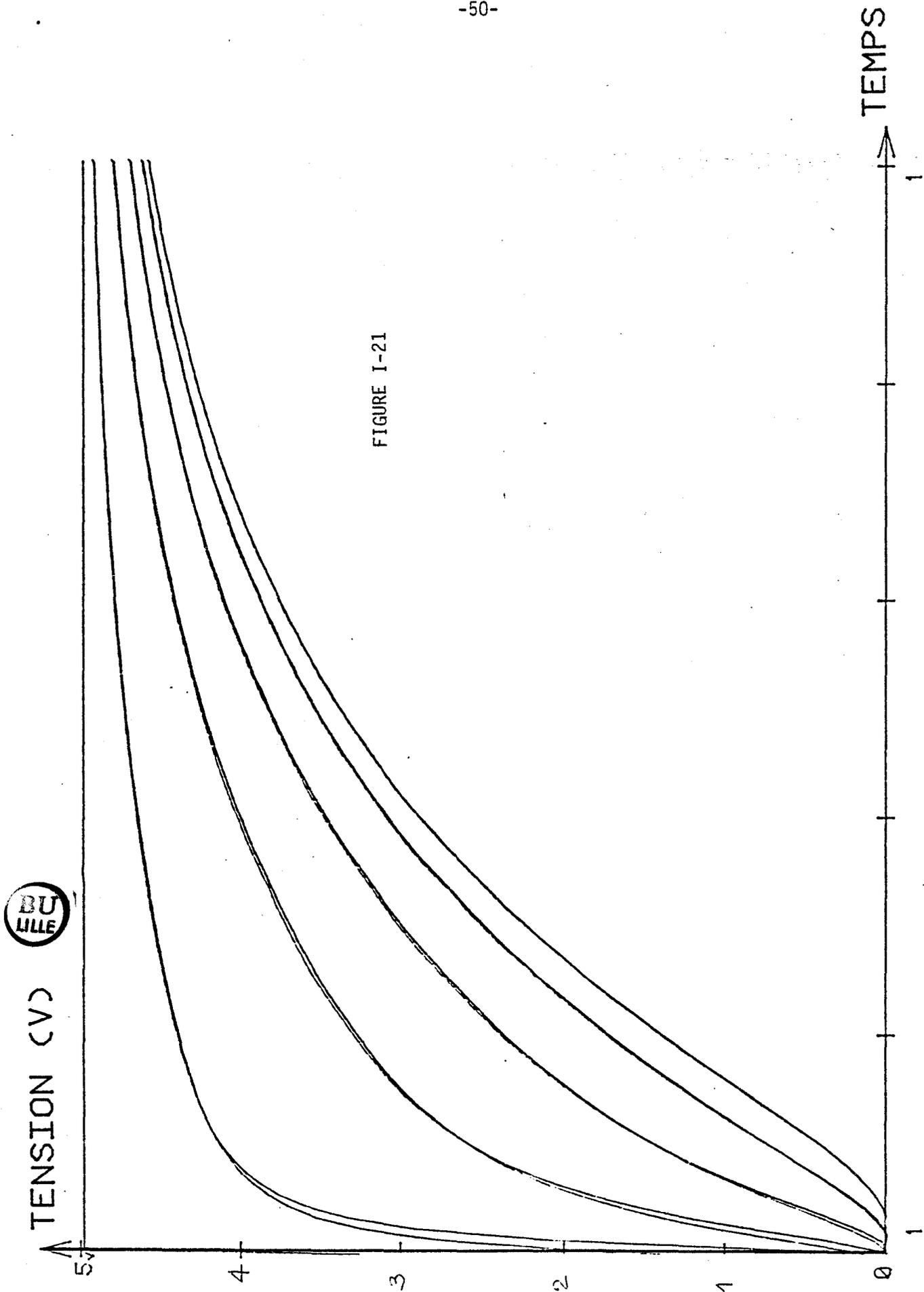
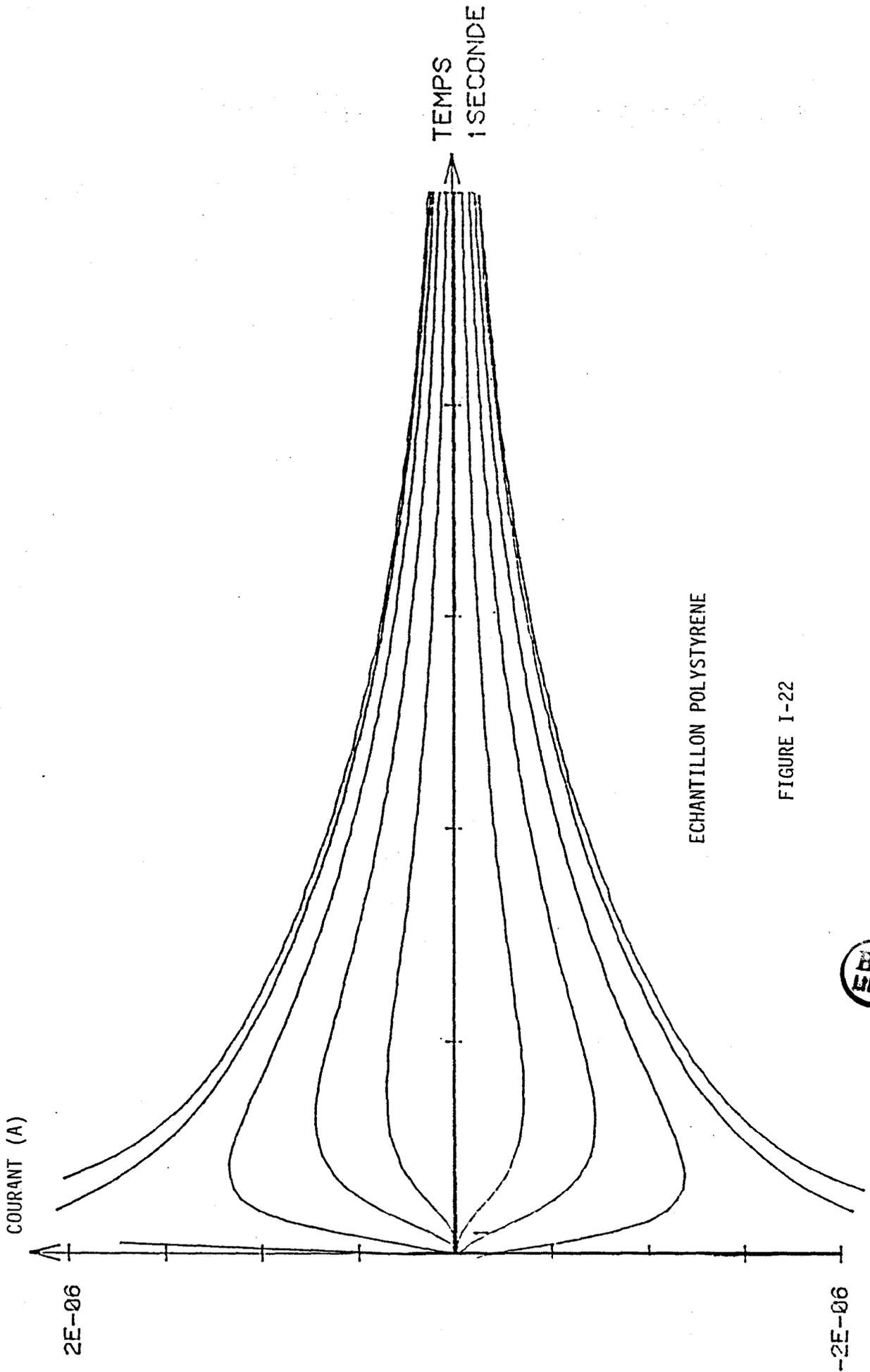


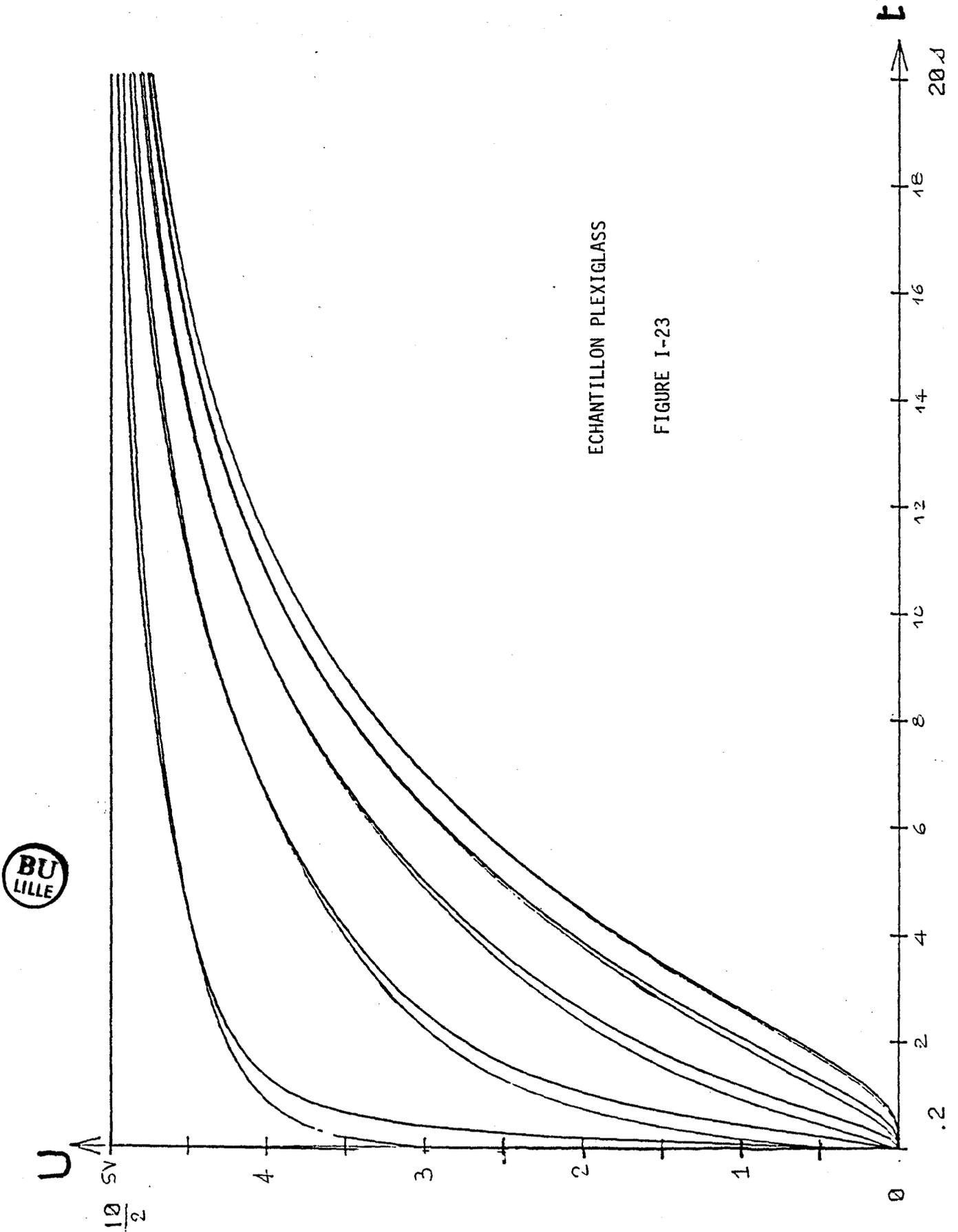
FIGURE I-21



ECHANTILLON POLYSTYRENE

FIGURE I-22





ECHANTILLON PLEXIGLASS

FIGURE I-23



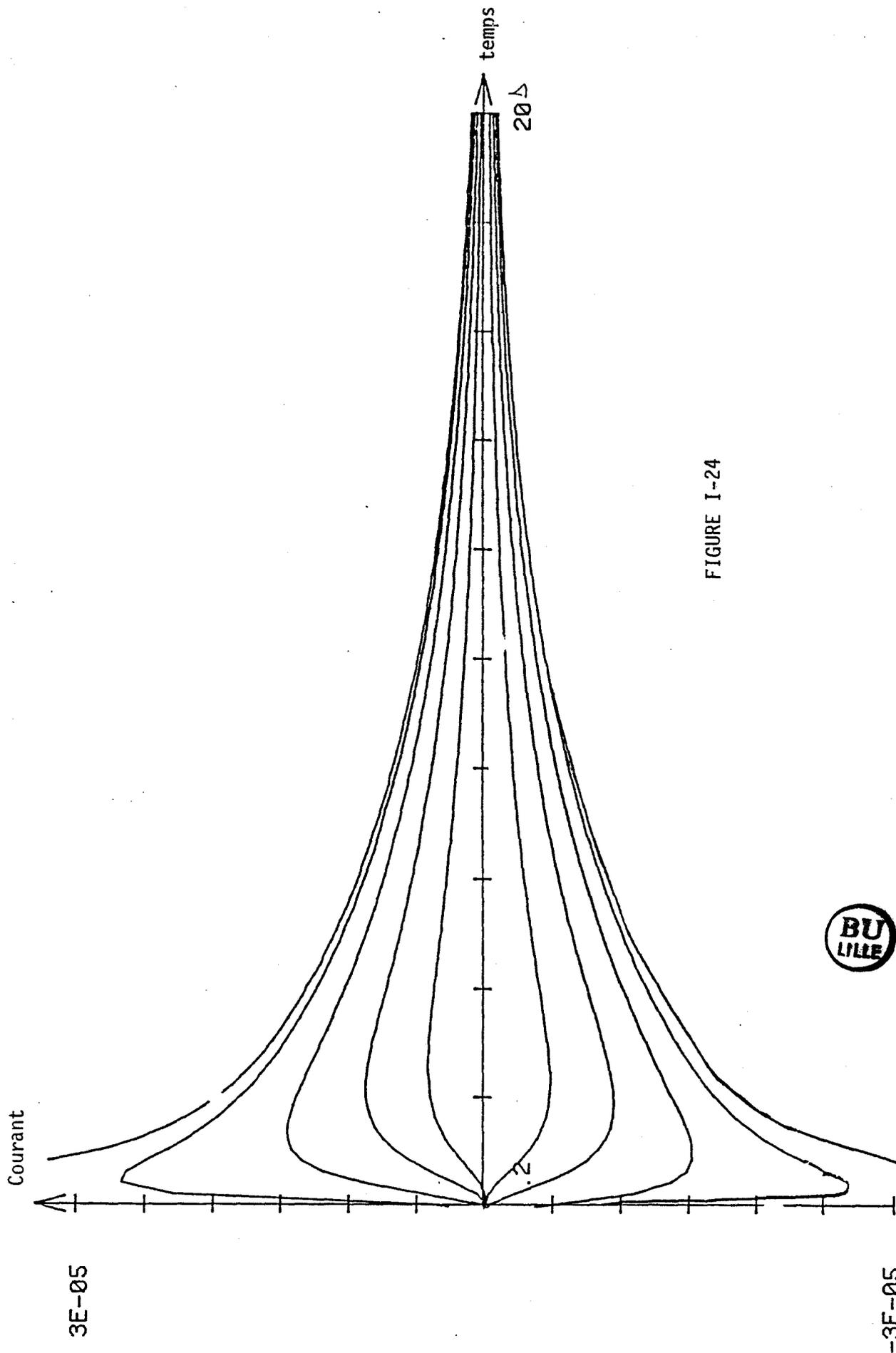


FIGURE I-24

Le schéma de la figure I-20 devient :

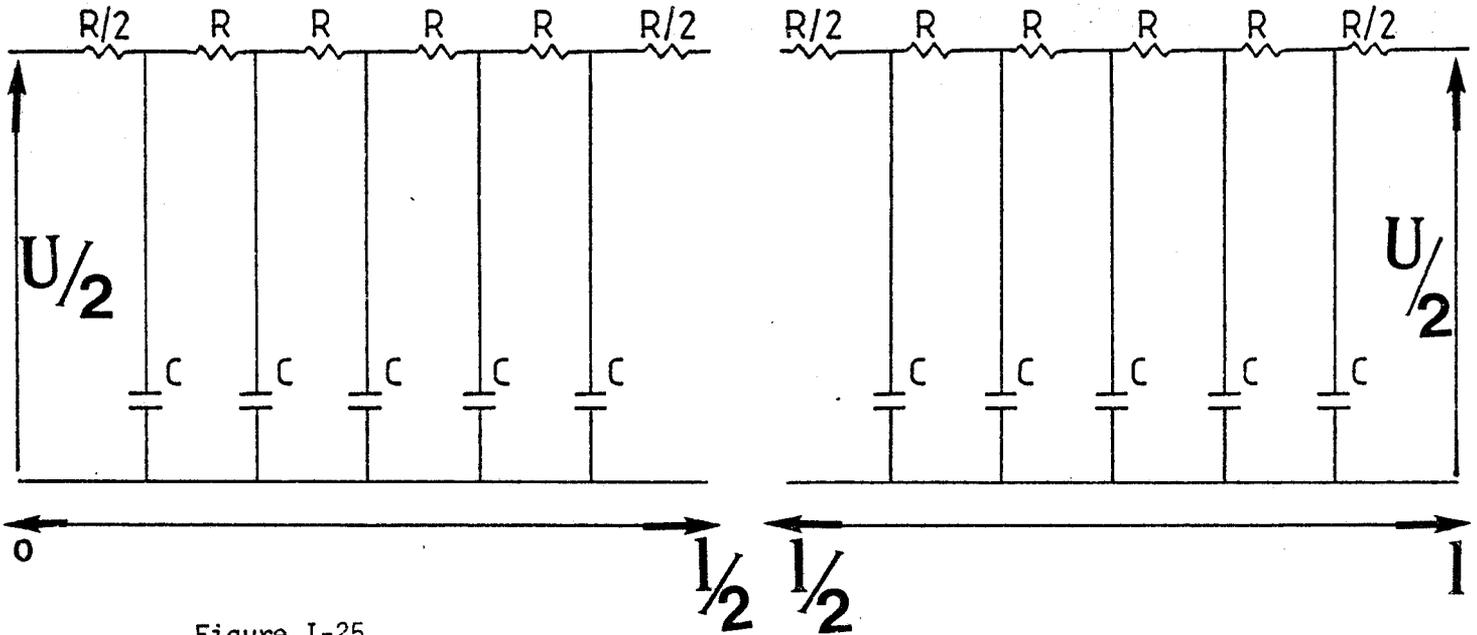
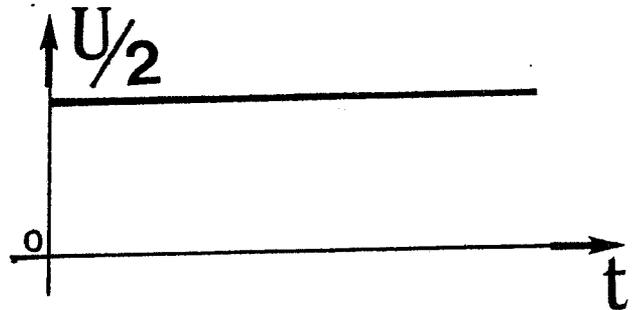


Figure I-25

La tension $\frac{U}{2}$ est un échelon :

$$\frac{1}{2} U(t) \begin{cases} t < 0 ; \frac{1}{2} U(t) = 0 \\ t > 0 ; \frac{1}{2} U(t) = 5 \text{ V} \end{cases}$$



En pratique, il n'est pas utile d'étudier dix cellules ; il suffit de ne considérer que les cinq premières cellules soumises à un échelon de tension d'amplitude ($U/2$), l'autre extrémité de cette ligne étant ouverte.

On relève les tensions existantes aux bornes de chaque capacité de la ligne, déterminant les courants circulant dans les différentes résistances. Les tensions aux bornes des cinq autres capacités et les courants circulant dans les résistances s'obtiennent par symétrie.

Expérimentalement, cette modélisation est intéressante du fait de l'économie en matériel et temps de mesure.

VIII-2-TRANSFERT PUR (SANS ELEVATION DE TEMPERATURE)

Pour réaliser cette étude expérimentale, deux alimentations indépendantes sont nécessaires (deux cartes) soit une ligne électrique dont les éléments sont parfaitement déterminés (figure I-26) . Cette ligne est attaquée (en $x = 0$) par un générateur de tension constante (échelon) présentant une résistance interne nulle.

La sortie de cette ligne (en $x = L$) est soumise à un tension de même amplitude (échelon), de signe contraire.

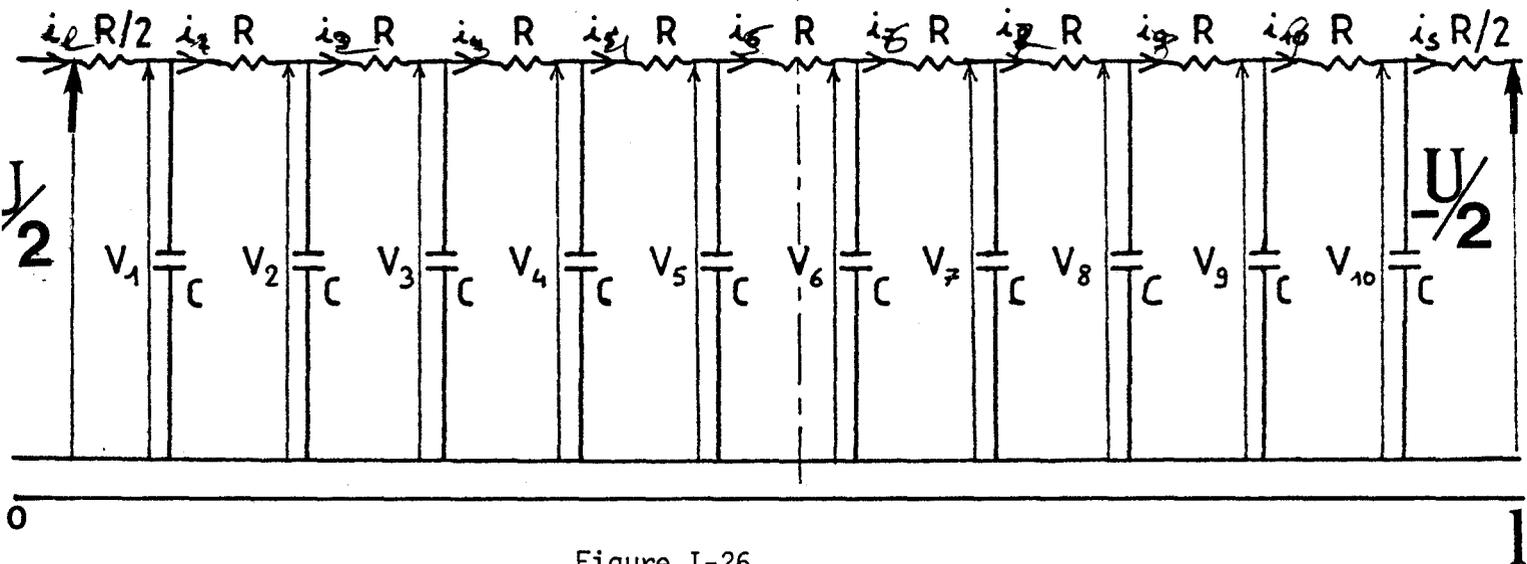


Figure I-26

Nous avons vérifié, lors de la manipulation que les tensions d'alimentation sont égales et opposées et qu'elles ne sont pas décalées dans le temps, l'une par rapport à l'autre.

Dans ces conditions, et en tenant compte des valeurs des capacités utilisées, nous avons modélisé deux échantillons le polystyrène (2,5 mm d'épaisseur et $13 \times 13,5 \text{ cm}^2$).

L'ensemble des mesures permet d'accéder à l'énergie moyenne stockée et à l'énergie moyenne dissipée au cours d'une période.

L'évolution de la tension aux bornes de chaque capacité de la ligne en fonction du temps est représentée figure I-27 (échantillon polystyrène).

L'examen de l'ensemble des courbes montre que les tensions symétriques par rapport à $x = L/2$, sont égales deux à deux et de signe contraire (régime permanent); le régime permanent est plus vite atteint. Il y a un léger écart en régime transitoire entre les tensions symétriques, vraisemblablement lié aux composants.

La tension aux bornes de la résistance ($R_{RL/2}$) se trouvant au milieu de la ligne est nulle.

Ainsi, quand on applique deux échelons de tension de même amplitude et de signe contraire aux extrémités (entrées) d'une ligne électrique constituée de dix cellules en cascade, on relève un court-circuit fictif au milieu de la ligne.

La figure I-28 représente les courants électriques en fonction du temps. Nous constatons que l'ensemble de ces courants converge vers la même valeur en régime permanent ($1 \mu A$). Ce dernier est obtenu pour $t = 0,5$ seconde. En régime transitoire, les intensités à l'entrée diminuent très rapidement après avoir passé un maximum; par contre, ceux du centre augmentent en tendant vers le régime permanent.

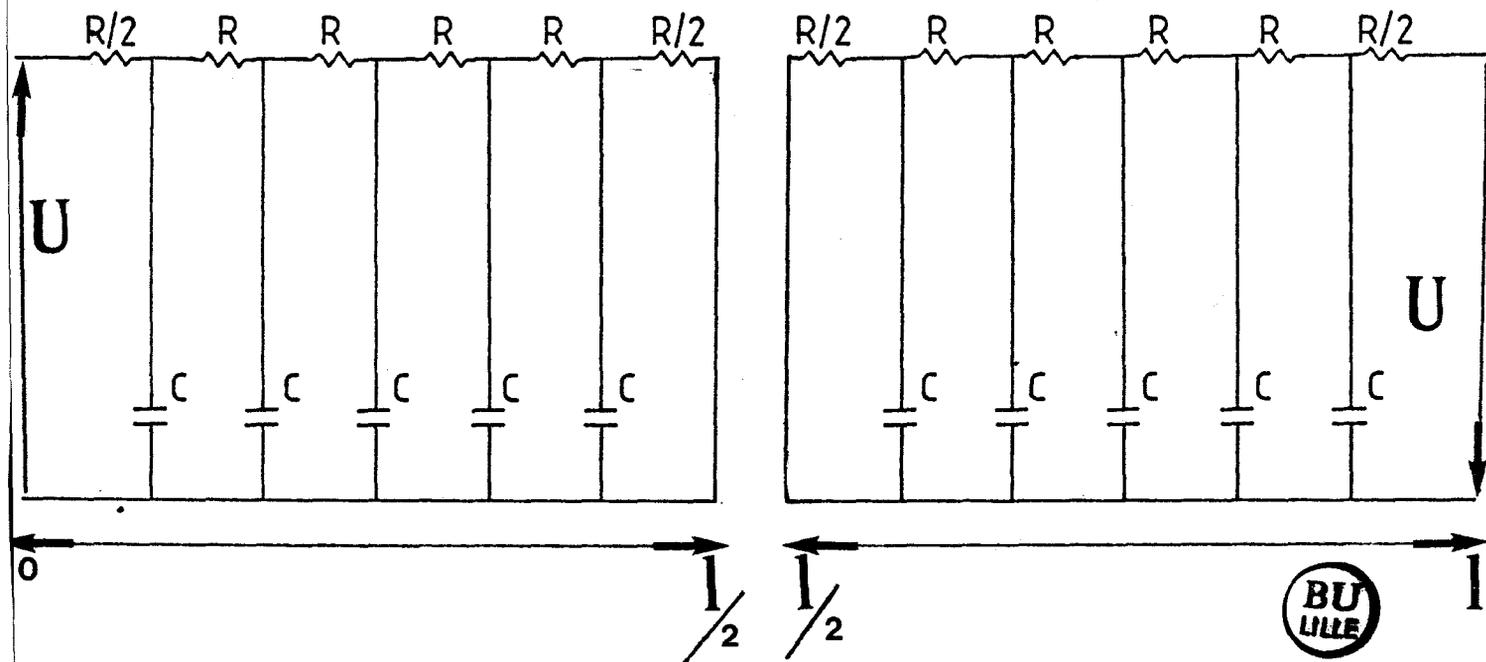
Les résultats relatifs au plexiglass sont donnés par la figure I-29 pour les courants et la figure I-30 pour les tensions.

Le régime permanent est atteint pour 10 secondes contre 0,6 pour le polystyrène.

Les remarques faites auparavant sont confirmées. Le mode de transfert converge plus vite vers le régime permanent que le mode de stockage.

En conclusion :

Il est donc possible de simplifier le schéma de la figure I-26 caractérisant le mode antisymétrique et de le remplacer par un schéma plus simple ci-dessous :



L'utilisation des modes de transfert et de stockage revient donc à représenter l'état local d'une ligne à plusieurs accès en fonction de conditions limites bien définies : fonction de transfert



Echantillon polystyrène

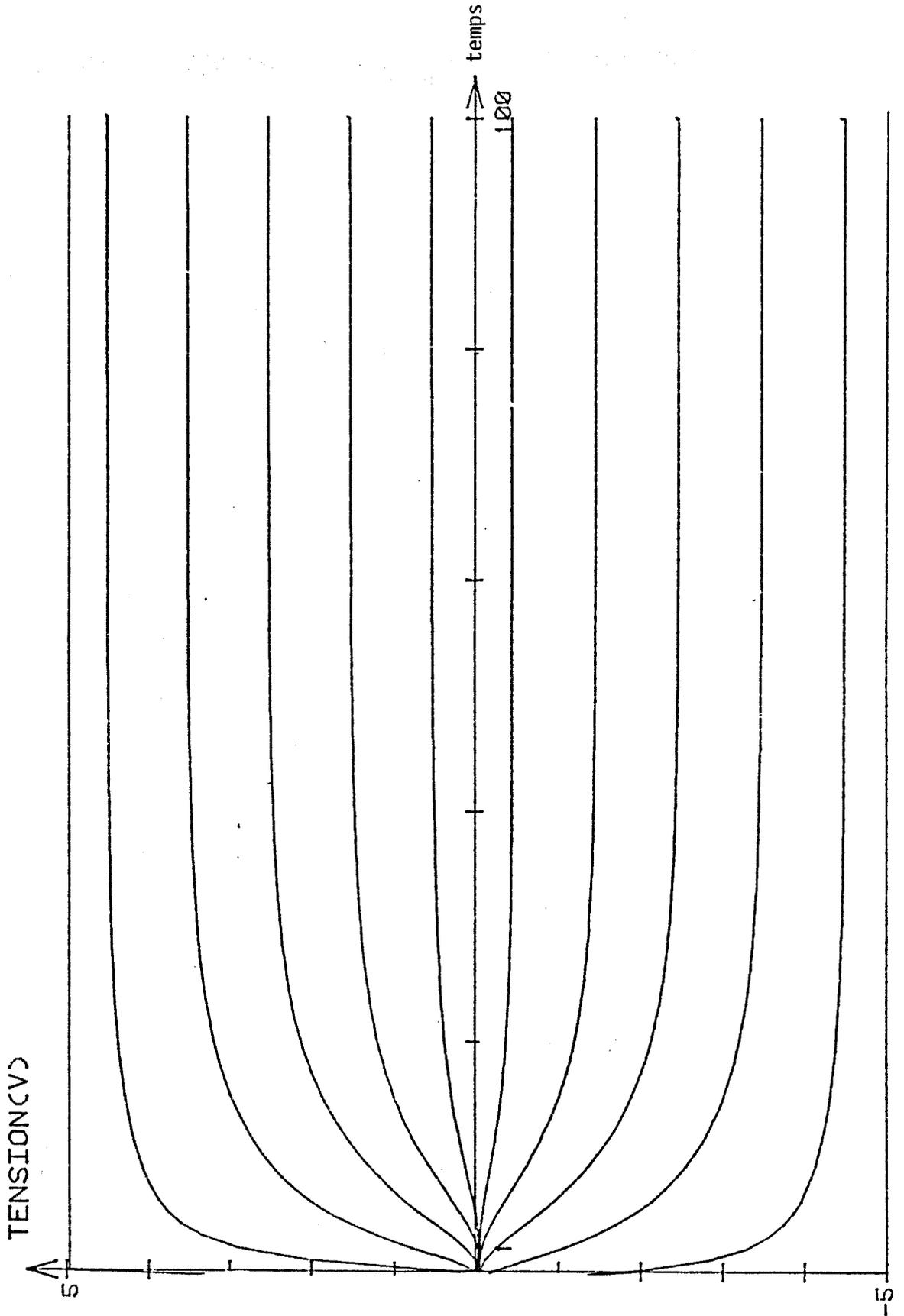


Figure I-27

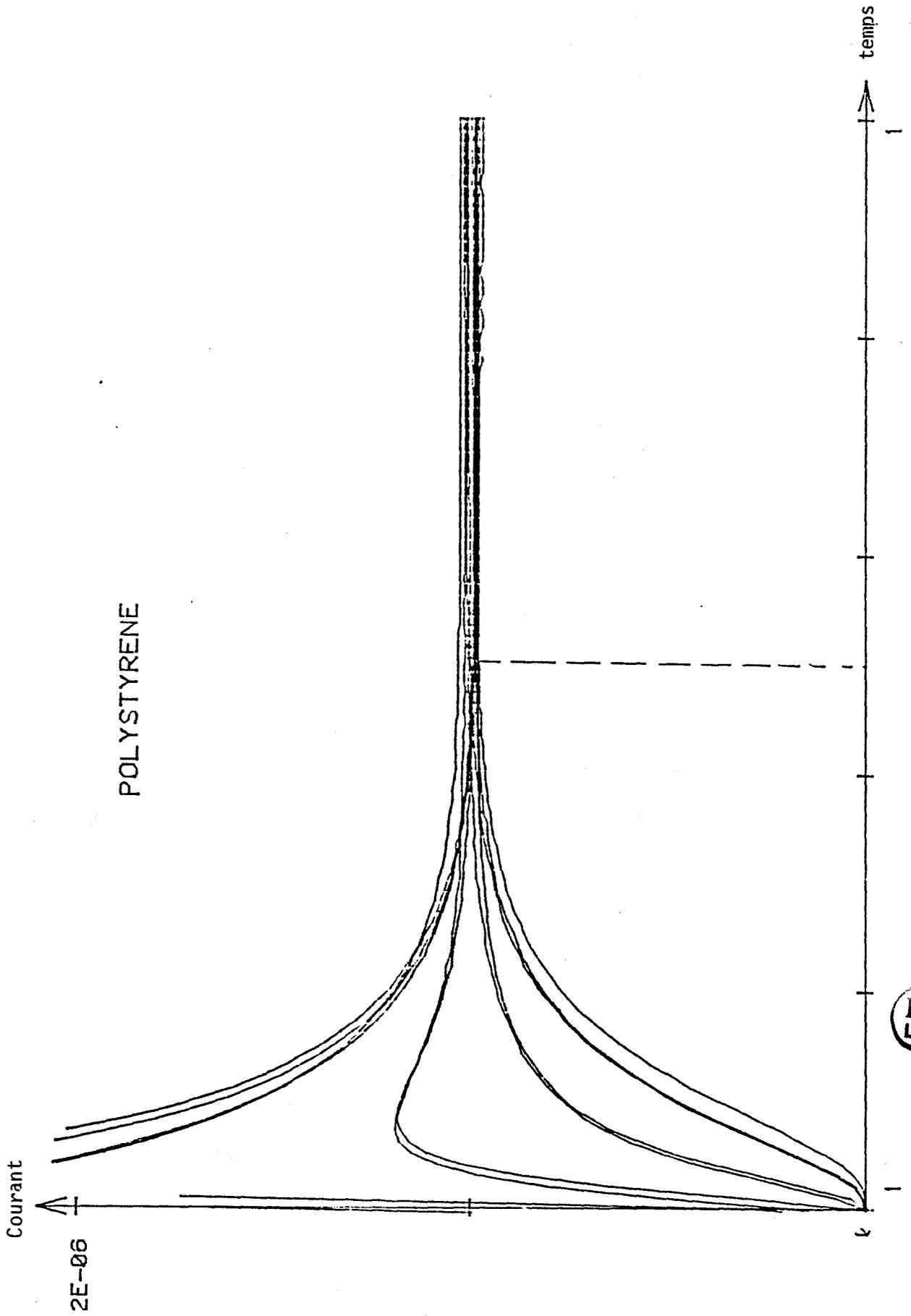
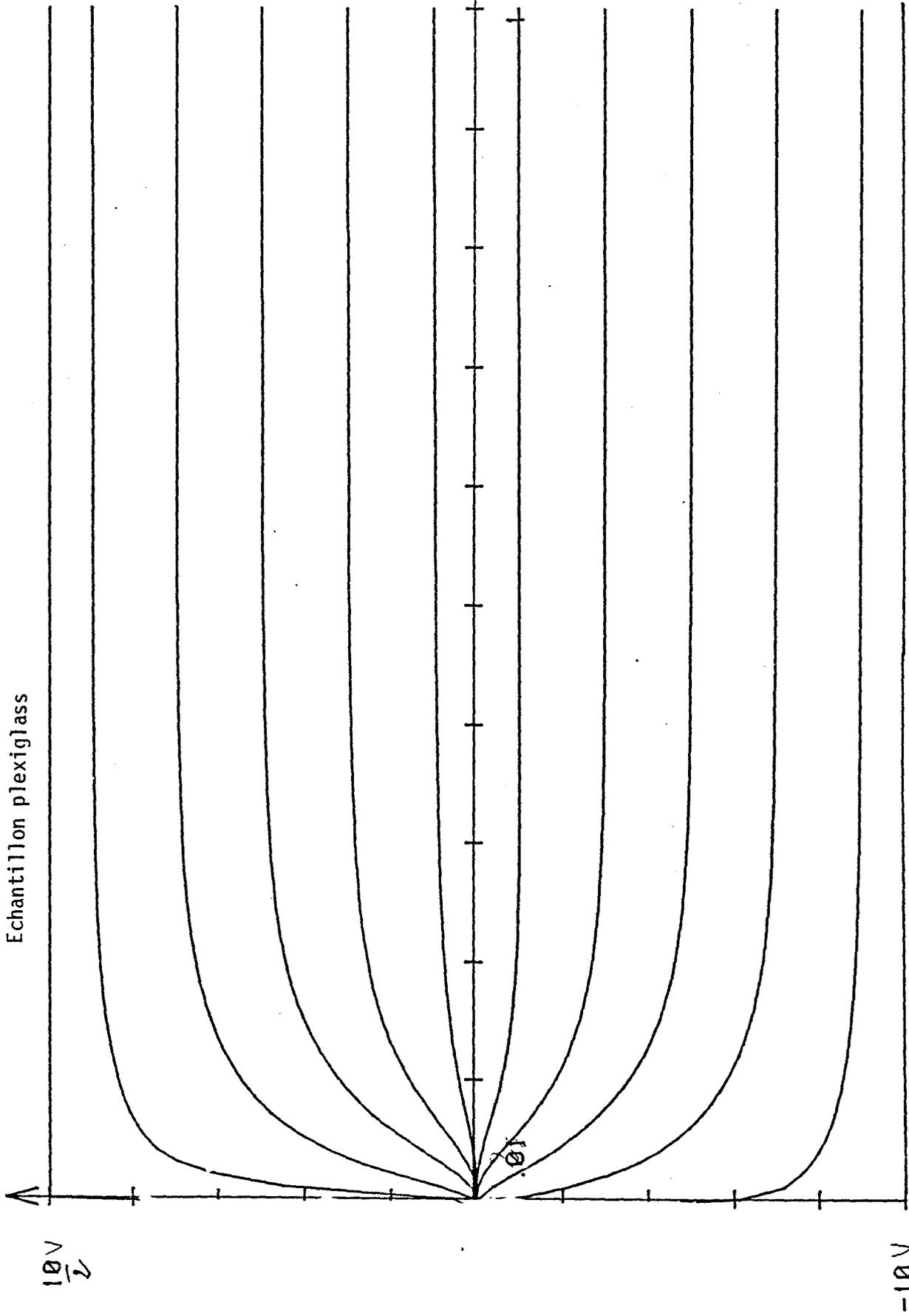


Figure I-28



Echantillon plexiglass

Tension



-60-

Figure I-29

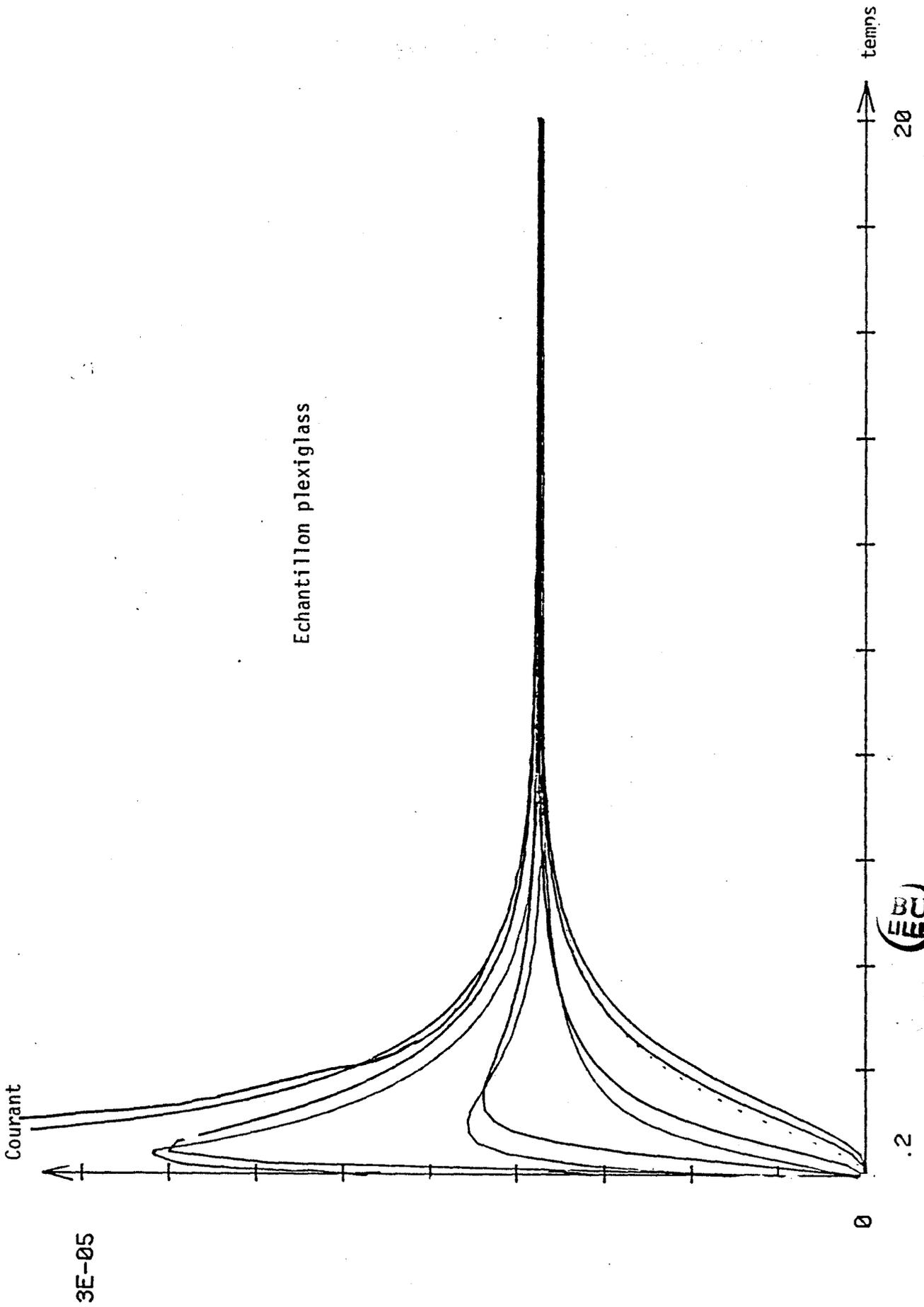


Figure I-30

CHAPITRE II : ECHANGE ÉNERGÉTIQUE ENTRE LA LIGNE
ET LES MILIEUX EXTÉRIEURS

I - ANALOGIES ENERGETIQUES

La théorie des lignes et des réseaux utilisée précédemment pour modéliser les transferts thermiques n'a pas pour objet de fournir une interprétation physique des variables tension et courant, une telle description exigeant les concepts de base de l'électromagnétisme.

Pour la même raison, la théorie des réseaux ne fournit pas d'interprétation physique concernant la puissance et l'énergie.

La théorie de l'électromagnétisme montre que pour un accès soumis à la tension $v(t)$ et traversé par le courant $i(t)$ (figure II-1), ces grandeurs obéissent à la convention de signe définie par l'énergie échangée entre le réseau et le milieu extérieur à travers l'accès entre deux instants t_0 et t

$$W(t) = \int_{t_0}^t v_1(t) \cdot i_1(t) dt \quad , \quad v_2(t) = 0$$

W étant l'énergie s'exprimant en Joule.

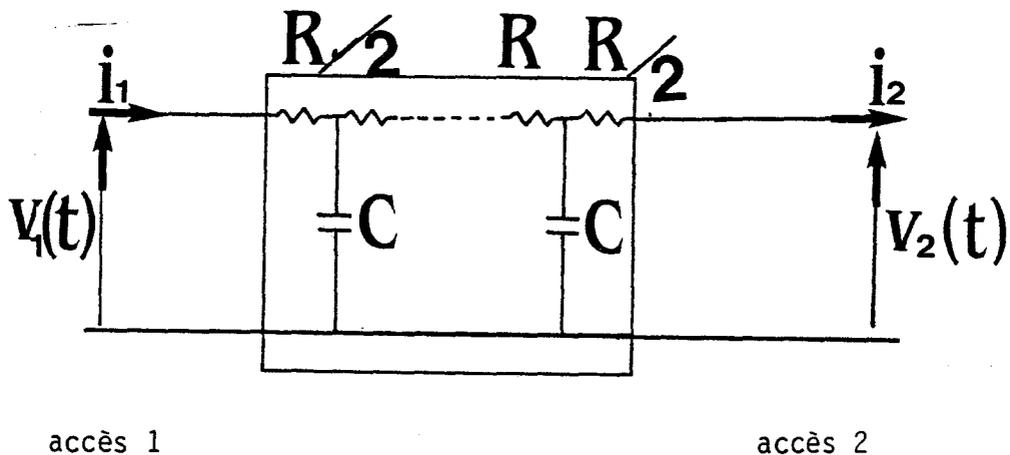


Figure II-1

Il en résulte pour la puissance :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = v_1(t) \cdot i_1(t)$$

accès 1 $v_1(t)$: tension à l'entrée
 $i_1(t)$: courant à la sortie

accès 2 $v_2(t) = 0, i_2(t) \neq 0$

Pour une ligne à deux accès modélisant les transferts thermiques, le bilan des échanges énergétiques entre la ligne et les sources extérieures est défini par la relation :

$$P = \sum_{\text{accès}} v i = v_1(t) i_1(t) - v_2(t) i_2(t)$$

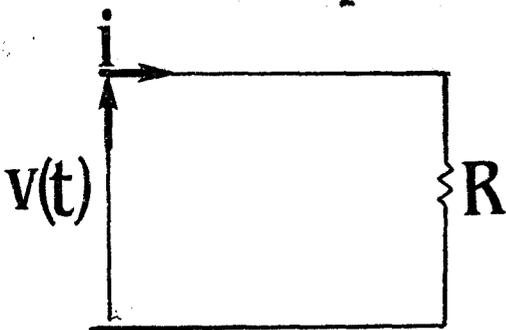
compte tenu du signe de i_2 .

La puissance échangée à travers l'ensemble des accès d'un réseau est égale à la puissance stockée et dissipée dans tous les éléments.

En intégrant la relation précédente, on voit que si un réseau est initialement au repos, l'énergie qui entre par les accès entre les instants 0 et t est égale à l'énergie stockée et dissipée dans tous les éléments du réseau pendant le même intervalle de temps.

On obtient les expressions de la puissance et de l'énergie dans la ligne électrique en utilisant des relations (v,i) des éléments idéalisés.

Résistance :



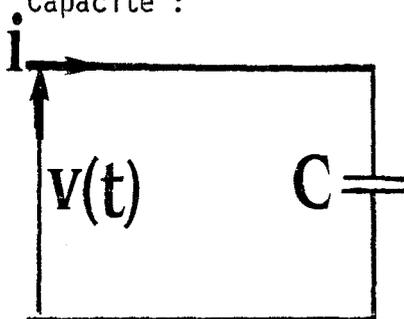
$$P(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R i^2(t)$$

L'énergie dissipée est donnée par la relation :

$$W(t) = \int_0^t R i^2(t) dt$$

C'est une quantité définie positive puisque l'énergie dissipée dans la résistance est toujours dégradée.

Capacité :



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

La puissance échangée est définie

$$p(t) = Cv(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Cv(t)^2}{2} \right)$$

En intégrant de t_0 à t cette expression, on obtient l'énergie :

$$W(t) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(C \frac{dv^2(t)}{2} \right) dt$$

$$W(t) = \frac{C}{2} [v^2(t) - v^2(t_0)]$$

$W(t)$ peut prendre des valeurs positives ou négatives. La puissance peut soit entrer soit sortir de la capacité. L'énergie stockée entre t_0 et t ne dépend que de la tension aux bornes de la capacité aux instants t_0 et t et non du détail des transformations. C'est une fonction d'état.

Si à $t = 0$ $v_0(t_0) = 0$

$$W(t) = \frac{C}{2} v^2(t)$$

II - EXPRESSION DE LA LOI DE CONSERVATION DE L'ENERGIE

La notion d'énergie dissipée et d'énergie emmagasinée dans les éléments R et C peut s'introduire dans l'expression de la loi de conservation de l'énergie. Etant donné une ligne, on peut écrire l'équation précédente de façon à décomposer la sommation des échanges dans les réseaux en deux sommations l'une par les éléments résistifs, l'autre par les éléments capacitifs.

$$\sum_{\text{accès}} v(t)i(t) = \sum_{\text{résistance}} v(t)i(t) + \sum_{\text{capacité}} v(t)i(t)$$

$$\begin{aligned} \text{soit : } \sum_{\text{accès}} v i &= v_1 i_1 - v_2 i_2 \\ \sum_{\text{accès}} v i &= \sum_R R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\sum_C \frac{Cv^2(t)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En introduisant l'énergie dissipée } P_d &= \sum_R R i^2(t) \\ \text{" " " stockée } U &= \sum_C \frac{Cv^2(t)}{2} \end{aligned}$$

la loi de conservation de l'énergie s'exprime par la relation :

$$v_1 i_1 - v_2 i_2 = P_d + \frac{d}{dt} U$$

en valeur moyenne sur une transformation cyclique

$$\overline{v_1 i_1 - v_2 i_2} = P_d$$

puisque l'énergie stockée est à valeur moyenne nulle.

Pour les mêmes raisons que précédemment, la description des transferts thermiques par l'équation de Fourier n'a pas pour objet de fournir une interprétation de l'interaction entre variables décrivant l'état thermique local flux et température (une description exige les concepts de base de la thermocinétique). Il faut donc utiliser la thermodynamique des évolutions pour interpréter le produit température-flux suivant la théorie classique des évolutions irréversibles. Tout transfert thermique dans une paroi engendre un échange d'entropie à travers les surfaces de la paroi considérée.

Le flux d'entropie couplé au flux thermique ϕ est défini par le quotient $\frac{\phi}{T}$ (T : température absolue).

$$\frac{\phi}{T} = \frac{\phi}{T_0 + \theta} = \frac{\phi}{T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)} = \frac{\phi}{T} - \frac{\phi\theta}{T_0^2}$$

Pour les faibles écarts par rapport à la température absolue, l'échange d'entropie à travers l'accès du système est la somme d'une quantité proportionnelle à ϕ à valeur moyenne nulle et d'une autre quantité proportionnelle au produit $\theta\phi$ à valeur moyenne non nulle, représentative des échanges énergétiques à travers l'accès du système.

Il y a donc analogie entre :

- la puissance fournie $v(t).i(t)$ dans chaque accès et le produit $\theta(t).\phi(t)$ proportionnel à l'échange d'entropie sur une face,
- l'énergie électrostatique stockée dans chaque capacité $\left(\frac{Cv^2(t)}{2}\right)$ et une quantité $\left(\frac{C\theta^2(t)}{2}\right)$ proportionnelle à l'énergie utilisable stockée dans les capacités thermiques distribuées du système,
- la puissance dissipée par effet joule $\frac{dP_d}{dx} = \sum_r r I^2(t)$ et la dissipation interne par conduction thermique $\frac{e\phi^2}{\lambda S}$, soit en explicitant les lois de conservation dans chaque système :

$$v_1(t) i_1(t) - v_2(t) i_2(t) = \sum \frac{R}{R} i^2 + \frac{d}{dt} \sum \frac{c v^2}{2}$$

$$\theta_1 \phi_1 - \theta_2 \phi_2 = \sum \frac{e \phi^2(t)}{\lambda S T_0} + \frac{d}{dt} \left(\sum \frac{e s c \theta^2}{2 T_0} \right)$$

III - INTERPRETATION ENERGETIQUE DE LA REPOSE INDICIELLE

III-1- SYSTEME A UN SEUL ACCES

Reprenons la paroi soumise sur la face gauche à une variation de température $(T_2 - T_0)$ en forme d'échelon (figure II-2) et soit ϕ_2 le flux entrant dans la paroi à partir de l'instant $t = 0$.

Explicitons dans ces conditions le bilan énergétique précédent (échange d'entropie dans la face d'entrée) modélisable par un échange de puissance électrique.

En appelant T_2 et T_0 les tensions électriques d'entrée et de sortie modélisant les températures correspondantes et ϕ_2 la valeur du courant électrique, la puissance électrique échangée dans le plan d'entrée de la ligne s'exprime par la relation :

$$P(t) = \phi_2(T_2 - T_0) = \phi_u(T_2 - T_0)^2$$

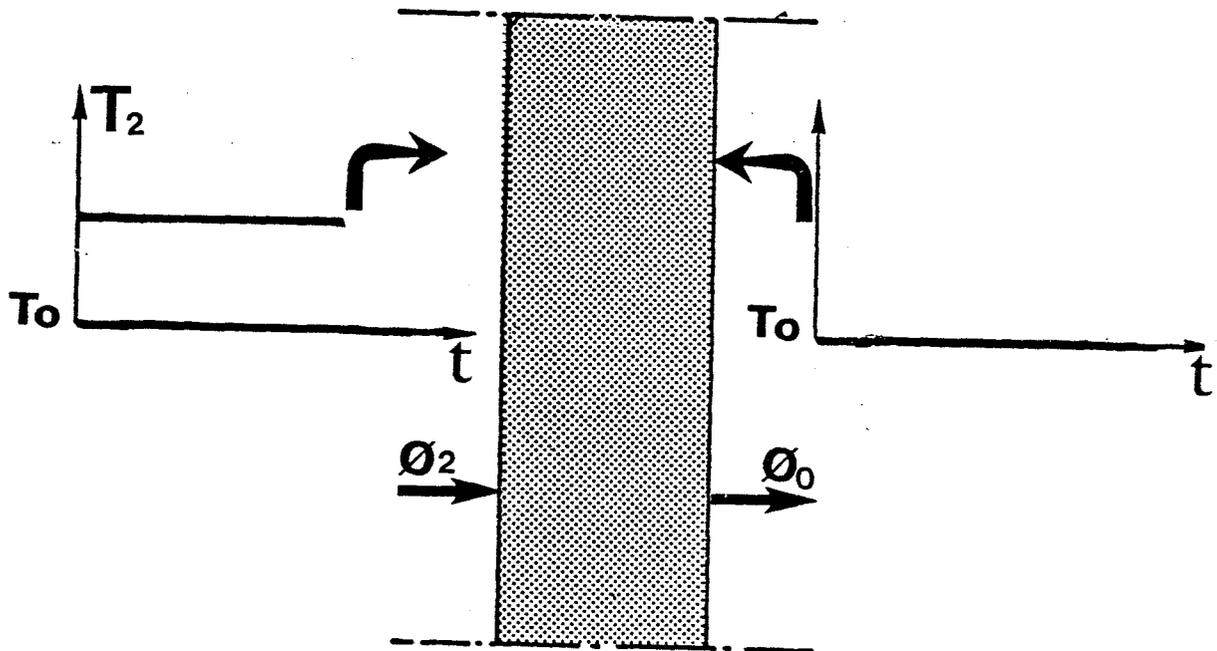


Figure II-2

ϕ_u étant la réponse indicielle ou fonction d'influence dans le plan d'entrée.

ϕ_u réponse à $(T_2 - T_0) = 1 \text{ V}$

Lorsque $T_2 - T_0 = 10$, $\phi_2 = 10 \phi_u$

Cet échange de puissance avec le milieu extérieur provoque une dissipation d'énergie, modélisable par l'effet Joule dans la ligne électrique. En utilisant ϕ_2 pour représenter le courant électrique local, la dissipation énergétique est localement représentée par unité de longueur par la quantité (effet Joule)

$$\frac{dPd}{dx} = \frac{e\phi^2}{\lambda S^2} = \frac{(\phi_p + \phi')^2}{\lambda} = \frac{\phi_p^2 + \phi'^2 + 2\phi_p\phi'}{\lambda}$$

ϕ_p et ϕ' représentant le régime permanent proportionnel à $T_2 - T_0$ et le régime transitoire correspondant

$$\phi_p = \frac{\lambda}{2e} \cdot (T_2 - T_0)$$

$$\phi' = -\frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0) \sum_1^{\infty} \phi_k$$

Compte tenu des relations précédentes, nous obtenons pour les termes figurant dans l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans la ligne :

$$\left\langle \frac{\phi_p^2}{\lambda} \right\rangle = \int_{-e}^{+e} \frac{\lambda (T_2 - T_0)^2}{(2e)^2} dx = \frac{\lambda}{2e} (T_2 - T_0)^2$$

$\langle \rangle$ représentant la valeur de ϕ_p intégrée sur toute la paroi.

$$\left\langle \frac{\phi'^2}{\lambda} \right\rangle = \frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0)^2 \sum_k \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{2 e^2}\right)$$

Compte tenu de l'égalité suivante obtenue dans la première partie :

$$\langle \phi' \cdot \phi_p \rangle = \frac{\lambda}{e} (T_2 - T_0)^2 \sum \phi_k$$

avec $\phi_k = (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$

$\langle \phi' \cdot \phi_p \rangle$ est proportionnelle au carré $(T_2 - T_0)^2$.

Soit $g(t)$ la fonction de temps correspondant à la somme des quantités précédentes

$$\left\langle \frac{\phi_p^2}{\lambda} \right\rangle + \left\langle \frac{\phi'^2}{\lambda} \right\rangle + \langle \phi' \cdot \phi_p \rangle = g(t) \cdot (T_2 - T_0)^2$$

De la même façon, partant de l'expression définissant les écarts de température par rapport à la température moyenne des 2 faces $(\frac{T_2+T_0}{2})$ (potentiel absolu moyen des 2 accès)

$$\theta(x,t) = T(x,t) - \frac{T_2+T_0}{2} = \left(\frac{T_2-T_0}{2e}\right) x + 2(T_2-T_0) \sum_k \theta_k$$

il est possible de calculer la quantité d'énergie utilisable stockée sous forme d'énergie électrostatique dans les capacités électriques par unité de longueur de ligne :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\rho c}{2} \left(T(x,t) - \frac{(T_2+T_0)}{2} \right)^2 = \frac{\rho c}{2} \theta^2(x,t)$$

L'énergie utilisable étant ici définie par les écarts de température par rapport à la température moyenne de la ligne.

En fait, on peut également définir l'énergie utilisable par rapport à une autre référence, la température de la face arrière (potentiel absolu T_0) maintenue constante. Dans ces conditions, l'écart de température par rapport à la référence T_0 est :

$$\theta'(x) = (T(x,t) - T_0) = \frac{T_2+T_0}{2} - T_0 + \frac{(T_2-T_0)}{2e} x + 2(T_2-T_0) \sum_k \theta_k$$

$$\theta' = \theta(x,t) + \bar{\theta} \quad \text{avec} \quad \bar{\theta} = \frac{T_0+T_2}{2} - T_0$$

$$\theta_k = \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \exp\left(-\frac{a k^2 \pi^2 t}{4 e^2}\right)$$

$\bar{\theta}$ étant la différence entre la température moyenne des 2 faces et la température de la face arrière.

L'énergie utilisable stockée dans la ligne est donnée par :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\rho c}{2} [T(x,t) - T_0]^2 = \frac{\rho c}{2} (\bar{\theta}^2 + \theta^2(x,t) + 2 \bar{\theta} \theta(x,t))$$

La moyenne spatiale de $\theta(x,t)$ étant nulle, en intégrant sur le volume de la paroi la relation précédente, on obtient :

$$U = (C \frac{\bar{\theta}^2}{2} + \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2})$$

En procédant de la même façon que précédemment, il est facile de voir que l'énergie électrostatique stockée dans la ligne est proportionnelle à $(T_2 - T_0)^2$. Il en est de même de la quantité $\frac{dU}{dt}$ qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = b(t) \cdot (T_2 - T_0)^2$$

En reportant dans le bilan énergétique précédent, nous obtenons :

$$\phi_u (T_2 - T_0)^2 = g(t) (T_2 - T_0)^2 + b(t) (T_2 - T_0)^2$$

soit $\phi_u(t) = g(t) + b(t)$

La réponse indicielle est donc représentative des processus de conduction thermique (modélisable par la conduction électrique) et de stockage d'énergie utilisable dans l'établissement d'un régime permanent.

La réponse indicielle est une fonction d'état représentative de l'évolution d'un système et caractéristique de ce système. Il en est de même de la somme de la dissipation et du stockage énergétique dans l'ensemble du système.

III-2- SYSTEME A DEUX ACCES. PAROI HOMOGENE SOLLICITEE SUR CES DEUX FACES

Considérons maintenant comme dans la première partie une paroi sollicitée par des variations de température $T_1 - T_0$ et $T_2 - T_0$ sur chacune de ces deux faces (figure II-3) et considérons comme précédemment un bilan énergétique

$$(T_1 - T_0) \phi_1 - (T_2 - T_0) \phi_2 = \sum_{\text{résistance}} \frac{R\phi^2}{T_0} + \sum_{\text{capacité}} \frac{C\theta^2(t)}{2T_0}$$

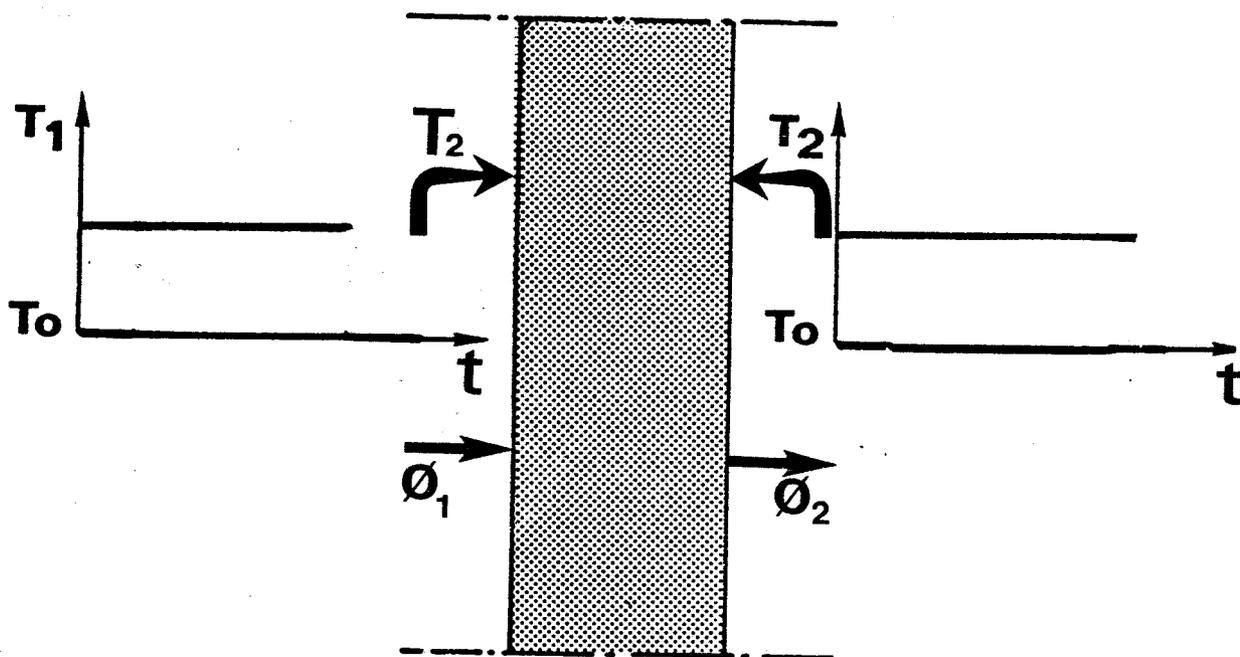


Figure II-3

Le premier membre peut s'exprimer en fonction des quantités ΣT , ΔT , $\Sigma\phi$, $\Delta\phi$ introduites précédemment.

En développant l'expression précédente, on vérifie que :

$$(T_1 - T_0)\phi_1 - (T_2 - T_0)\phi_2 = \frac{1}{2} \left((T_1 - T_2)\Sigma\phi + (T_1 + T_2 - 2T_0)\Delta\phi \right)$$

avec $\Sigma\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

Les quantités $T_1 - T_2$ et $T_1 + T_2 - 2T_0$ figurant dans l'expression précédente peuvent être considérées comme des quantités indépendantes au même titre que les variations $T_1 - T_0$ et $T_2 - T_0$.

La dissipation énergétique (effet Joule) s'exprime de façon complexe en fonction des variations de température $(T_1 - T_0)$ et $(T_2 - T_0)$.

Les expressions ne se simplifient que si l'on utilise un développement en fonctions orthogonales, introduisant deux séries proportionnelles à $(T_1 - T_2)$ d'une part et $(T_1 + T_2 - 2 T_0)$ d'autre part. Dans ces conditions, la dissipation interne devient :

$$\frac{dPd}{dx} = \frac{\phi^2}{\lambda} = \frac{(\phi_p + \phi')^2}{\lambda}$$

avec
$$\phi' = \frac{\Sigma\phi' + \Delta\phi'}{2}$$

$$\frac{dPd}{dx} = \frac{1}{\lambda} (\phi_p^2 + \phi_p(\Sigma\phi' + \Delta\phi') + \phi_1')$$

$$\phi_1' = \frac{1}{4} (\Sigma\phi'^2 + \Delta\phi' + 2\Sigma\phi' \Delta\phi')$$

Les développements définissant $\Sigma\phi'$ et $\Delta\phi'$ étant orthogonaux entre eux, en intégrant sur l'épaisseur de la paroi :

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \Sigma\phi' \cdot \Delta\phi' \right\rangle = 0$$

et

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \phi_p \cdot \Delta\phi' \right\rangle = 0$$

Par contre, toutes les autres quantités sont différentes de zéro et proportionnelles à :

$$(T_1 - T_2)^2 \text{ ou à } (T_1 + T_2 - 2 T_0)^2$$

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \phi_p^2 \right\rangle = \frac{\lambda}{2e} (T_1 - T_2)^2$$

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \frac{\Sigma \phi'^2}{4} \right\rangle = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2)^2 \Sigma_p \exp\left(-\frac{2 a \pi^2 p^2 t}{e^2}\right)$$

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \Sigma \phi' \phi_p \right\rangle = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2)^2 \Sigma_k \phi_{kt}$$

$$\left\langle \frac{1}{\lambda} \Delta \phi' \right\rangle = \frac{\lambda}{e} (T_1 + T_2 - 2T_0)^2 \Sigma_p \exp\left(\frac{-a(2p+1)^2 \pi^2 t}{4e^2}\right)$$

Compte tenu de cette expression la puissance dissipée peut s'écrire sous la forme de deux termes respectivement proportionnels à $(T_1 - T_2)^2$ et à $(T_1 + T_2 - 2T_0)^2$, soit sous forme simplifiée :

$$P_d = g_t (T_1 - T_2)^2 + g_s (T_1 + T_2 - 2 T_0)^2$$

De la même façon en ce qui concerne l'énergie utilisable stockée sous forme électrostatique dans les capacités de la ligne électrique, compte tenu de l'expression :

$$\theta'(x,t) = \frac{1}{2} [\Sigma \theta'(x,t) + \Delta \theta'(x,t)]$$

et

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= \frac{(T_1 - T_2)}{2e} \cdot x + \frac{1}{2} (\Sigma \theta' + \Delta \theta') \\ &= \theta_p + \theta'(x,t). \end{aligned}$$

En reportant cette expression dans l'expression de l'énergie électrostatique

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\rho C}{2} \theta^2(x,t) = \frac{\rho C}{2} [\theta_p + \theta'(x,t)]^2$$

En intégrant sur toute l'épaisseur de la paroi, compte tenu de

$$\int_{-e}^{+e} \theta'(x,t) dx = 0$$

$$U = \rho c e [\theta_p^2 + \langle \theta' \rangle^2]$$

$$= \rho c e \left[\theta_p^2 + \frac{\langle \Sigma \theta' \rangle^2}{4} + \frac{\langle \Delta \theta' \rangle^2}{4} \right]$$

Compte tenu des résultats obtenus dans la première partie U est également la somme d'un terme proportionnel à $(T_1 - T_2)^2$ et d'un autre terme proportionnel à $(T_1 + T_2 - 2T_0)^2$ soit :

$$U = b_t (T_1 - T_2)^2 + b_s (T_1 + T_2 - 2T_0)^2$$

Ces expressions (de la puissance dissipée et de l'énergie stockée) peuvent être reportées dans le bilan énergétique précédent :

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2) \Sigma \phi + (T_1 + T_2 - 2T_0) \Delta \phi &= (g_t(t) + b_t(t)) * \\ &+ (T_1 - T_2)^2 + (g_s(t) + b_s(t))(T_1 + T_2 - 2T_0) \end{aligned}$$

Cette relation étant vérifiée quelles que soient les valeurs des variables indépendantes $(T_1 - T_2)$ et $(T_1 + T_2 - 2T_0)$, nous aurons :

$$\Sigma \phi = (g_t + b_t) (T_1 - T_2) = h_t (T_1 - T_2)$$

$$\Delta \phi = (g_s + b_s) (T_1 + T_2 - 2T_0) = h_s (T_1 + T_2 - 2T_0)$$

Les fonctions de transfert introduites dans la partie précédente ont donc également une signification énergétique.

Des simulations ont été réalisées de façon à montrer l'intérêt d'utiliser la décomposition en mode de transfert et de stockage pour analyser les interactions énergétiques dans une paroi en régime variable.

Si l'on reprend la décomposition introduite entre les modes de transfert et de stockage, il apparaît que :

- l'énergie électrostatique stockée dans chaque condensateur est la superposition des énergies de chacun des modes normaux pour une excitation du type échelon.

Ce résultat s'entend évidemment suivant le principe de superposition à une évolution quelconque ;

- la puissance dissipée est égale à la superposition des puissances dissipées dans chacun des modes ;

- en utilisant la superposition, il est facile de vérifier le bilan énergétique :

$$= P_d + \frac{dU}{dt}$$

IV - ECHANGE ENERGETIQUE ENTRE LA LIGNE ET LES MILIEUX EXTERIEURS

IV-1- ETUDE DANS LE DOMAINE TEMPS

L'étude des transferts thermiques à travers une paroi et de la conduction électrique dans une ligne à constantes réparties mène à des équations de comportement analogues.

La vérification précise des principes développés précédemment peut être effectuée, en exploitant les mesures relevées expérimentalement sur une ligne électrique dont les paramètres convenablement choisis se rapportent de façon simple à ceux d'une paroi constituée d'un matériau donné.

L'étude expérimentale du stockage d'énergie utilisable nécessite une mesure simultanée en chaque plan du matériau, de la température et du flux.

La mise en oeuvre de ces mesures n'est pas envisageable dans le cadre de mesures thermiques en raison des perturbations introduites par l'ensemble des capteurs et des résistances de contact résultant de l'assemblage.

Nous avons vu que la transposition thermique électrique est effectuée en considérant un coefficient d'homologie α tel que :

$C_{el} = \frac{C_{th}}{2}$	C_{el} = capacité électrique
	C_{th} = capacité thermique
$R_{el} = \alpha R_{th}$	R_{el} = Résistance électrique
	R_{th} = Résistance thermique

La modification d'effusivité de la ligne se traduit par les correspondances suivantes :

Electrique	Thermique
V_{el} (tension)	T_{th} (température)
I (courant)	ϕ/α flux
R_{el} (résistance électrique)	$\alpha \cdot R_{th}$ résistance thermique
C_{el} (capacité électrique)	$\frac{C_{th}}{\alpha}$ capacité thermique
Energie stockée = $\frac{1}{2} C_{el} V_{el}^2$	$\frac{1}{2} \frac{C_{th}}{\alpha T_0} T^2$
Energie dissipée : $R_{el} I_{el}^2$	$1/\alpha R_{th} \phi^2/T_0$

IV-2- PUISSANCES DISSIPÉES ET ENERGIES STOCKÉES POUR UN PROCESSUS DANS LEQUEL IL Y A, A LA FOIS STOCKAGE ET TRANSFERT (ELEVATION DE LA TEMPERATURE SUR UNE SURFACE EXTERIEURE)

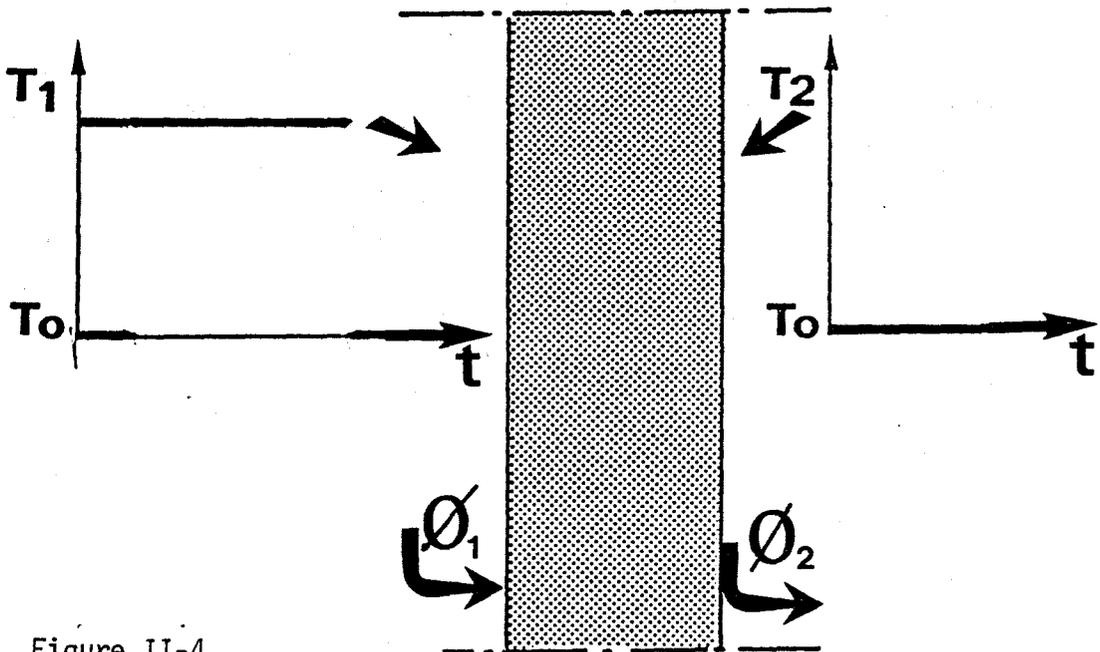


Figure II-4

IV-2-1- Résultats relatifs aux puissances dissipées

Les courbes de la figure II-5 représentent le partage de la puissance dissipée entre les résistances de la ligne électrique modélisant la paroi considérée précédemment (Figure II-4).

Ces courbes permettent de décrire le partage de la puissance dissipée dans chaque résistance en fonction du temps d'un échantillon de polystyrène d'épaisseur 2,5 mm et 1,75 dm² de surface.

L'examen de ces résultats montre que la puissance dissipée diminue en fonction du temps, en passant par un maximum (régime transitoire). En régime permanent la dissipation est la même tout au long de la ligne : elle est minimale. Sur la figure II-6, nous avons représenté la somme des puissances dissipées dans les résistances.

La figure II-7 représente l'ensemble des résultats concernant la

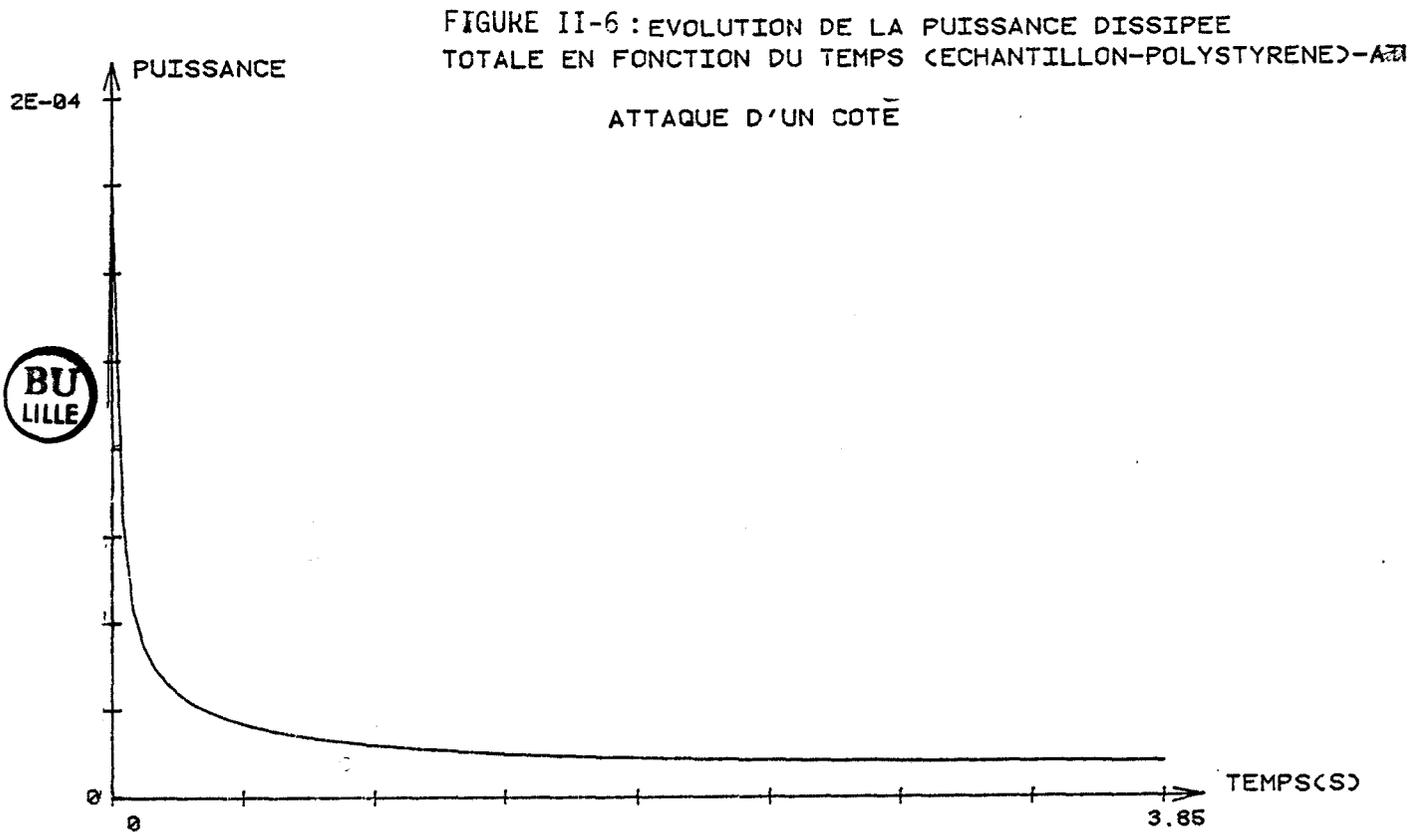
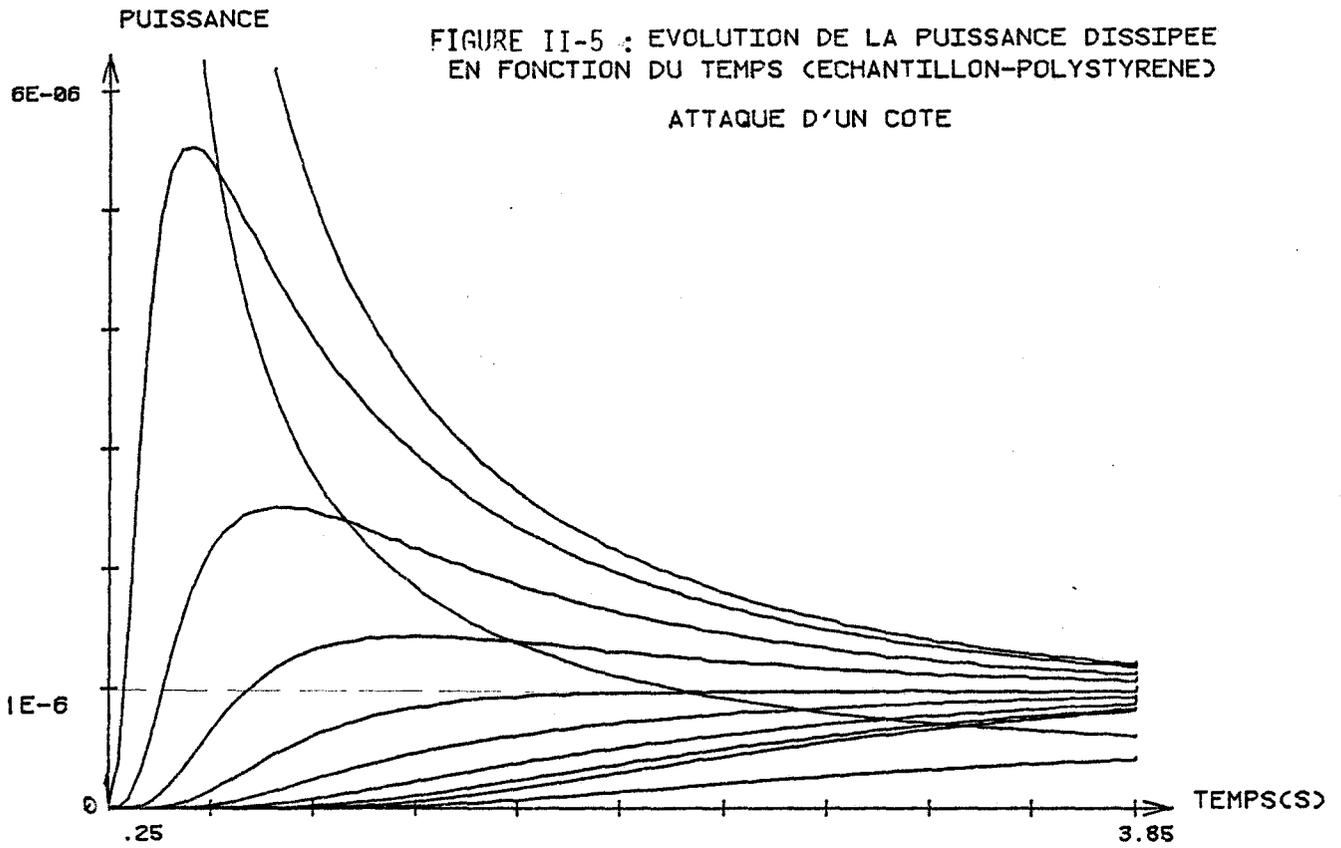


FIGURE II-7 : EVOLUTION DE LA PUISSANCE DISSIPÉE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)

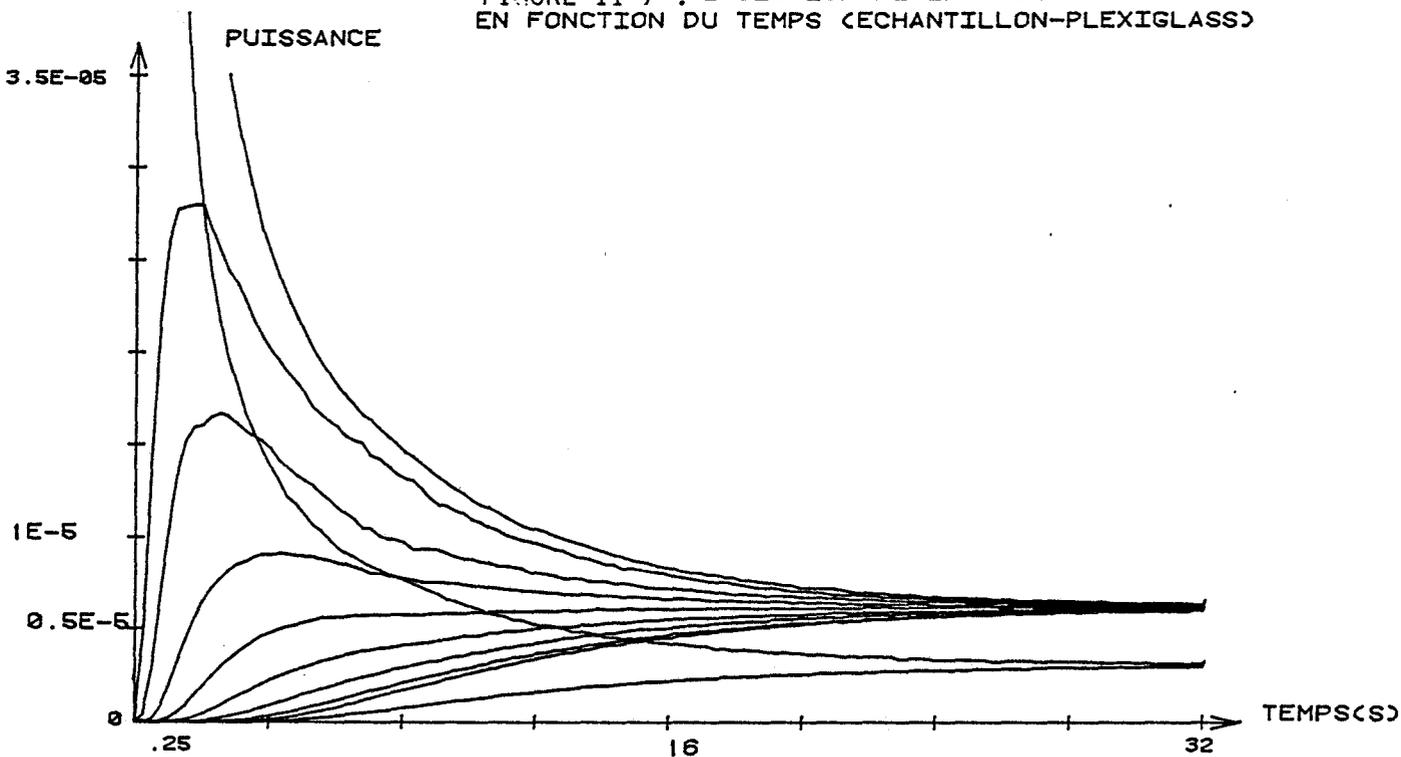
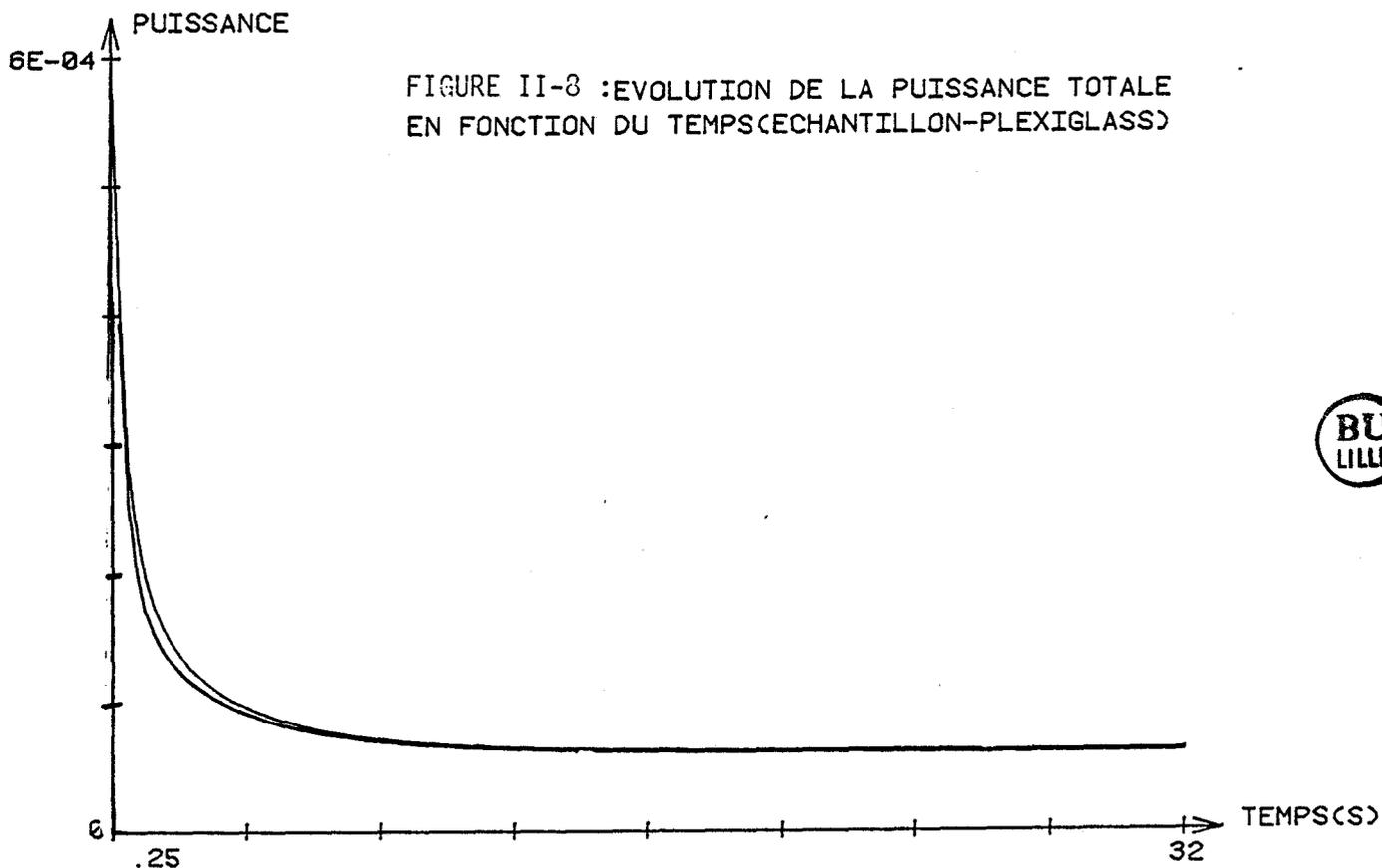


FIGURE II-8 : EVOLUTION DE LA PUISSANCE TOTALE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)



dissipation en fonction du temps d'un échantillon de plexiglass de même dimension que le polystyrène.

Les mêmes remarques peuvent être faites quant à l'évolution de la dissipation.

De la même façon que précédemment, nous avons représenté sur la figure II-8 la puissance totale.

En régime permanent la puissance dissipée P_d prend la valeur :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_d = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2(t)}{R} dt = \frac{V_0^2}{R}$$

IV-2-2- Energies stockées

Les formes énergétiques sont en général définies à l'aide de grandeurs quadratiques ; un système apte à stocker de l'énergie, fait intervenir ses variables d'état de façon quadratique dans la description de la mémoire du processus.

La relation $(\frac{1}{2} CV^2(t))$ relative au stockage énergétique nécessite la connaissance de la tension aux bornes de chaque capacité de la ligne électrique. Ainsi, nous avons présenté sur la figure II-9 l'évolution de l'énergie stockée en fonction du temps d'un échantillon de polystyrène.

L'ensemble de ces résultats montre comment se fait le transfert énergétique à travers l'échantillon.

L'énergie stockée augmente en fonction du temps, en convergeant vers une valeur W_p (W_p étant prise comme référence pour représenter l'énergie stockée en régime permanent) alors que la dissipation évolue dans le sens contraire.

L'évolution de l'énergie totale en fonction du temps est représentée figure II-10.

De la même façon, nous avons représenté figure II-11 les résultats relatifs à un échantillon de plexiglass de mêmes dimensions que le polystyrène. La remarque précédente s'applique également.

Sur la figure II-12, nous avons représenté l'énergie totale (plexiglass).

-81-
FIGURE II-9: EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE EN FONCTION
DU TEMPS (ECHANTILLON -POLYSTYRENE)

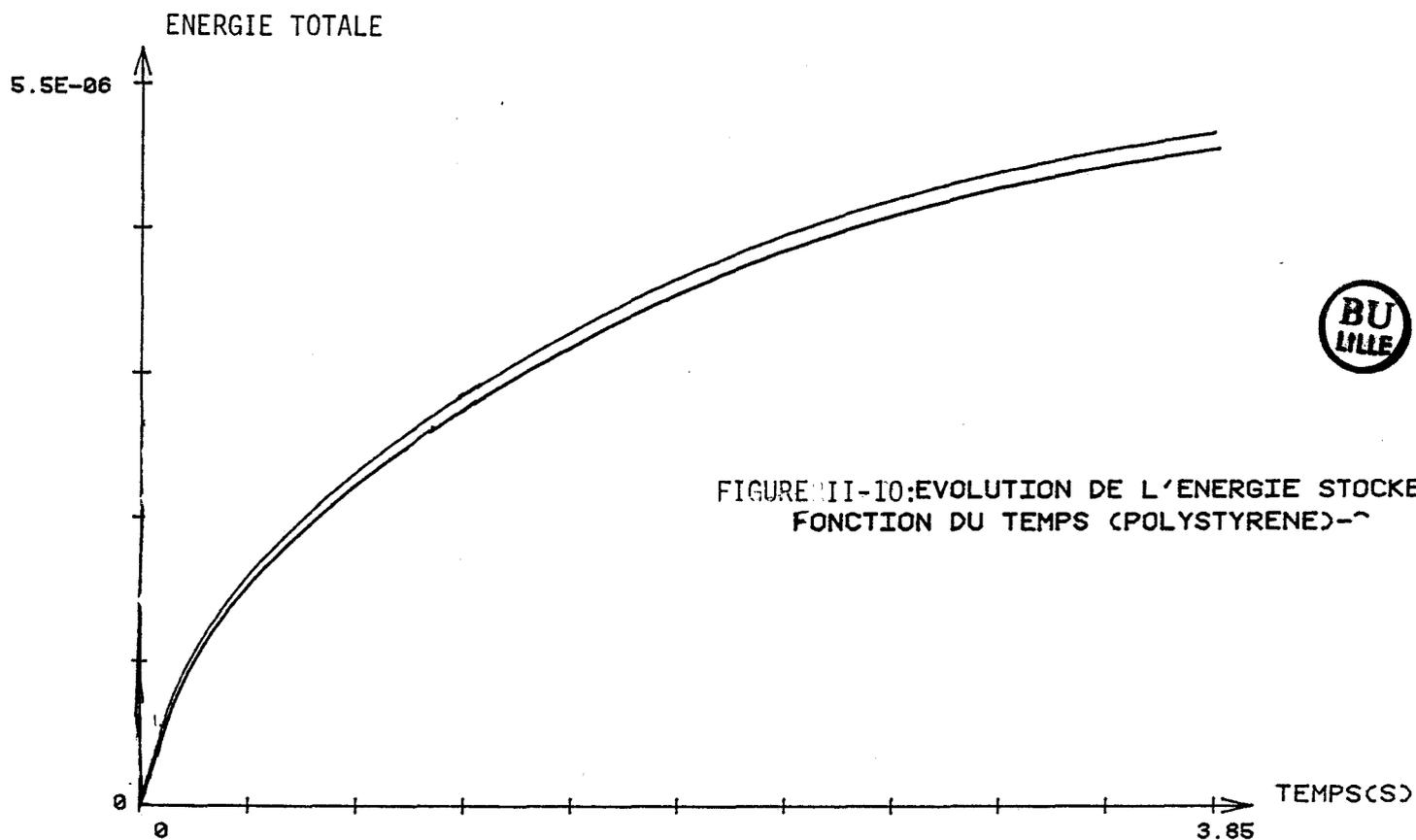
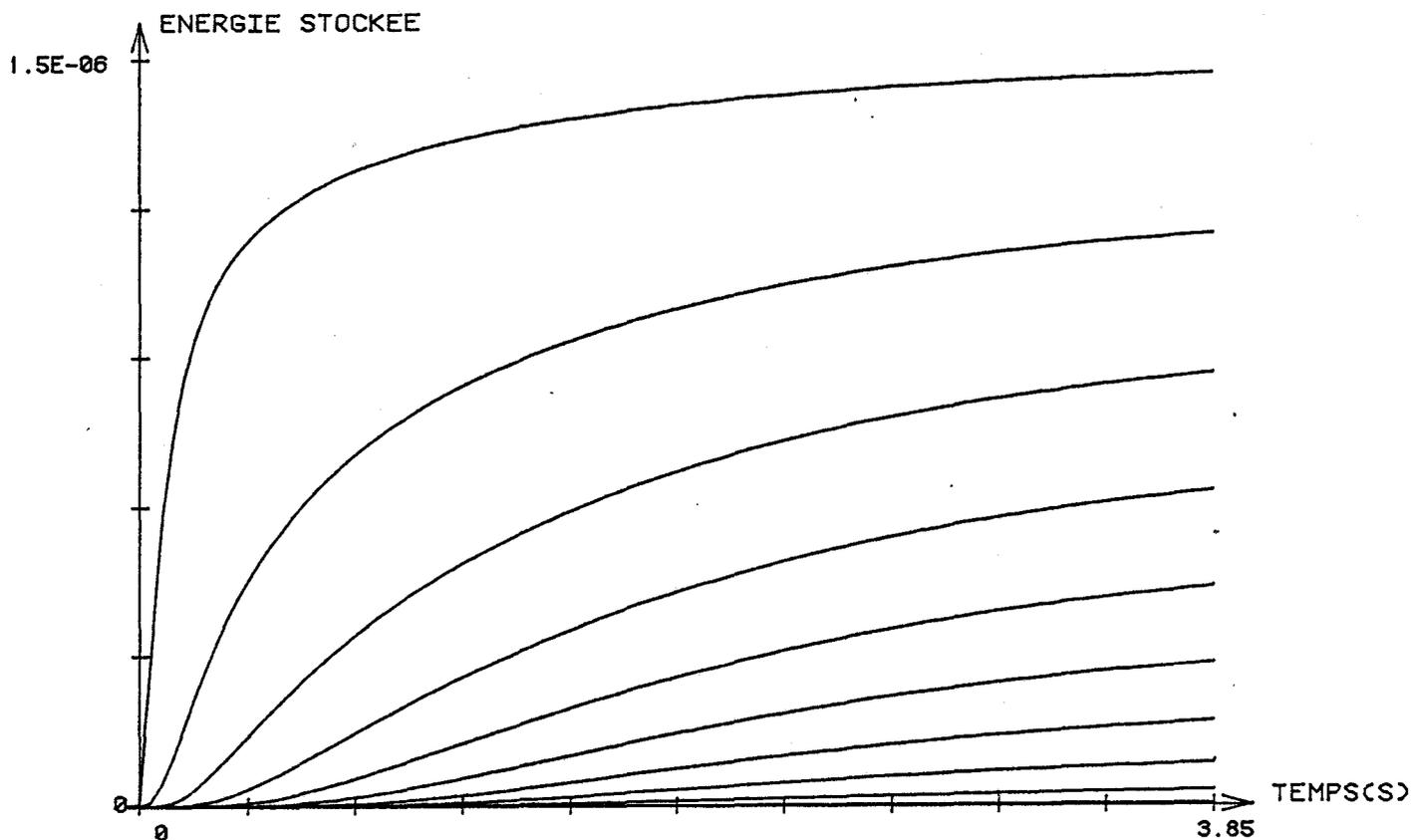
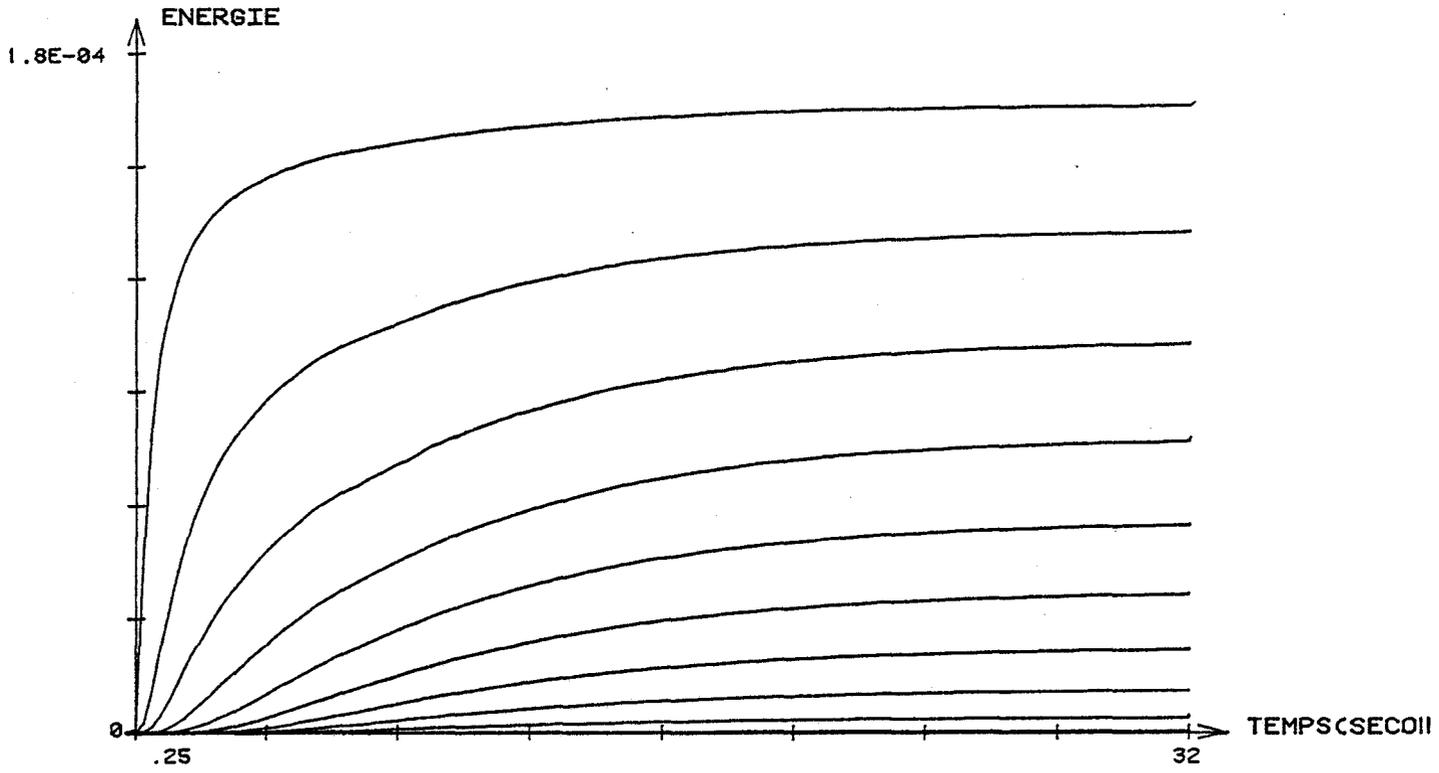


FIGURE III-10: EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE
FONCTION DU TEMPS (POLYSTYRENE)





EVOLUTION DE L'ENERGIE EN FONCTION DU TEMPS (PLEXIGLASS)

FIGURE II-11

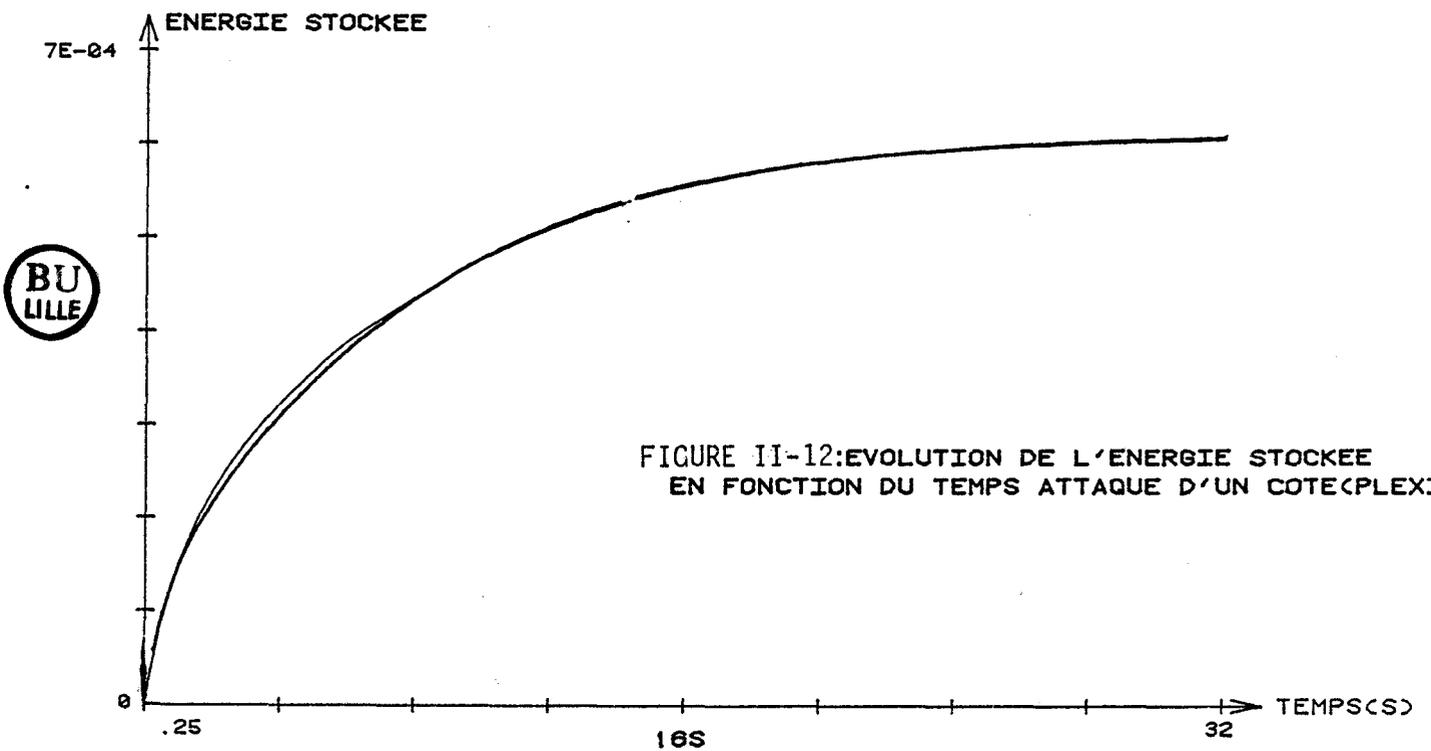


FIGURE II-12: EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE EN FONCTION DU TEMPS ATTAQUE D'UN COTE (PLEXIGLASS)



Partant des résultats obtenus, il est possible de vérifier que les modes introduits précédemment pour décrire l'état instantané de la ligne peuvent également être utilisés pour décrire l'état énergétique.

En particulier, nous nous proposons de vérifier dans le domaine temps :

- que la puissance dissipée en mode normal pouvait être obtenue par superposition de puissances dissipées dans chacun des deux modes (transfert pur, stockage pur),
- que l'énergie stockée en mode normal pouvait ainsi être obtenue par superposition des énergies stockées.

IV-3-"REPRESENTATION TEMPS" DE LA DISSIPATION ET DU STOCKAGE. "TRANSFERT PUR"
MODE ANTISYMETRIQUE

IV-3-1- Puissances

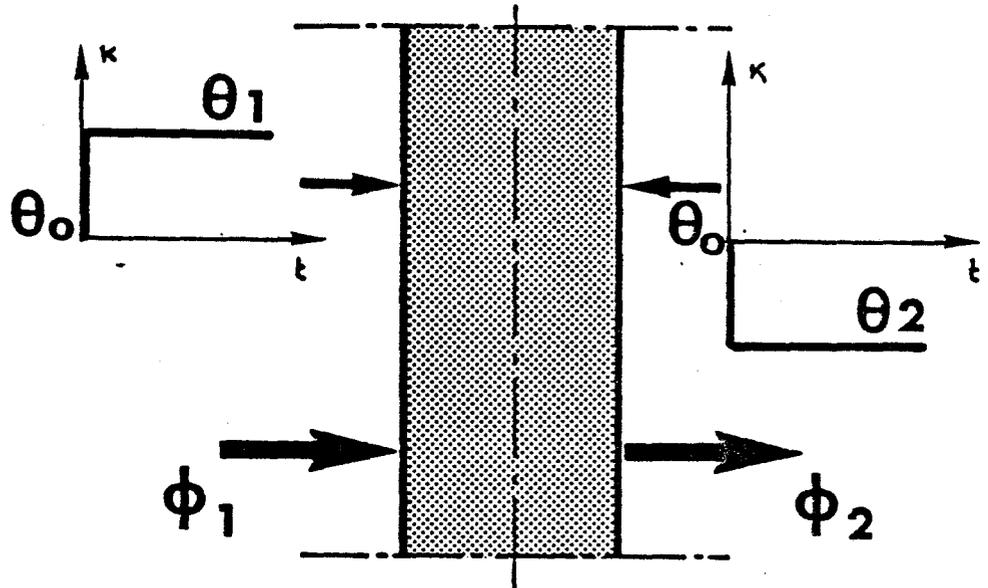


FIGURE II-13

Pour $t < 0$ $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$

Pour $t > 0$ $\theta_1 = T_{1/2} + T_0$

$\theta_2 = T_0 - T_{1/2}$ avec $T_0 = \theta_0$

La figure II-14 représente les évolutions des quantités relatives aux puissances dissipées dans chacune des résistances. On peut remarquer que ces courbes présentent un maximum en régime transitoire avant de tendre vers une valeur constante (régime permanent).

L'échantillon étudié étant le polystyrène, la puissance totale est représentée figure II-15.

FIGURE II-14: EVOLUTION DE LA PUISSANCE DISSIPÉE EN FONCTION DU TEMPS (ÉCHANTILLON-POLYSTYRÈNE) ATTAQUE ANTISYMETRIQUE

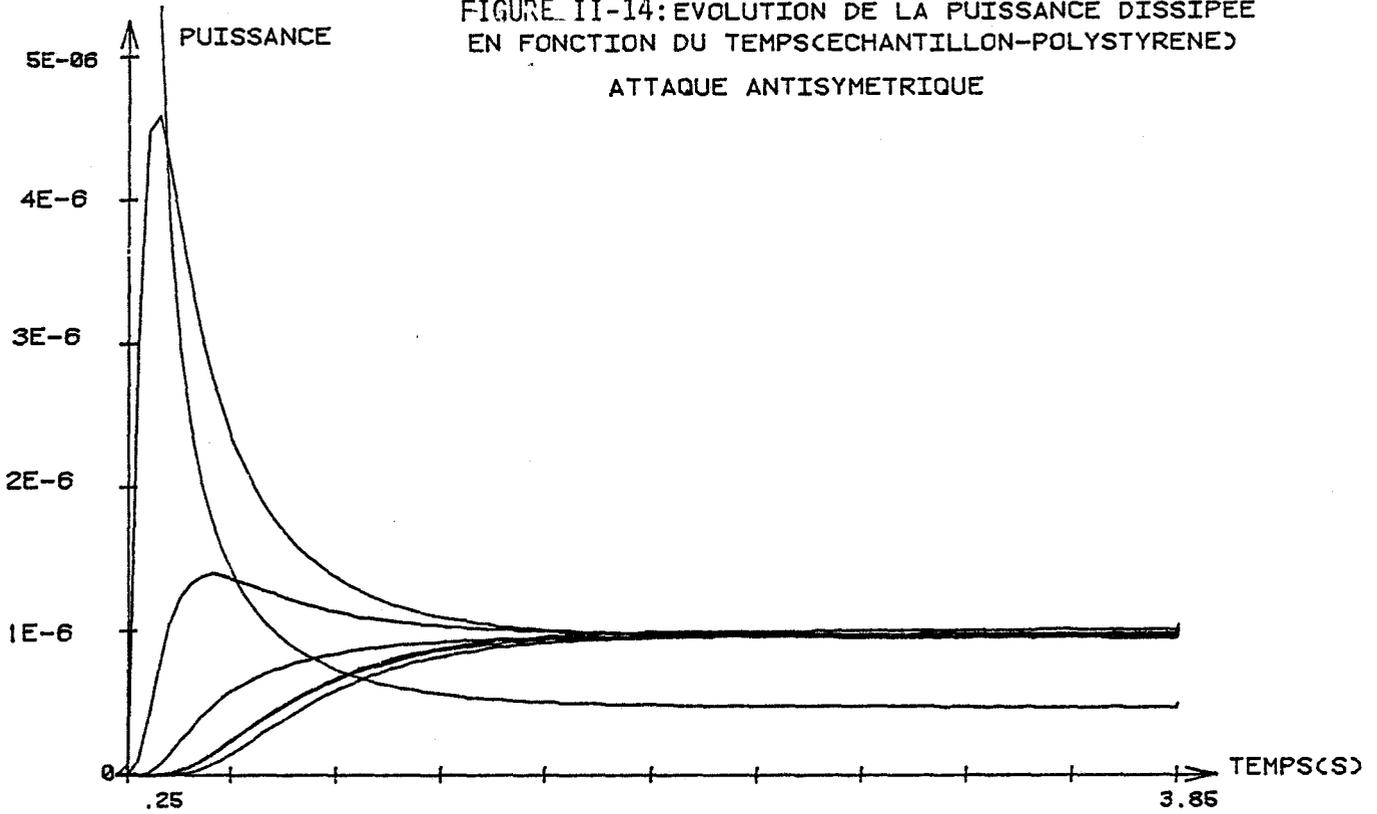
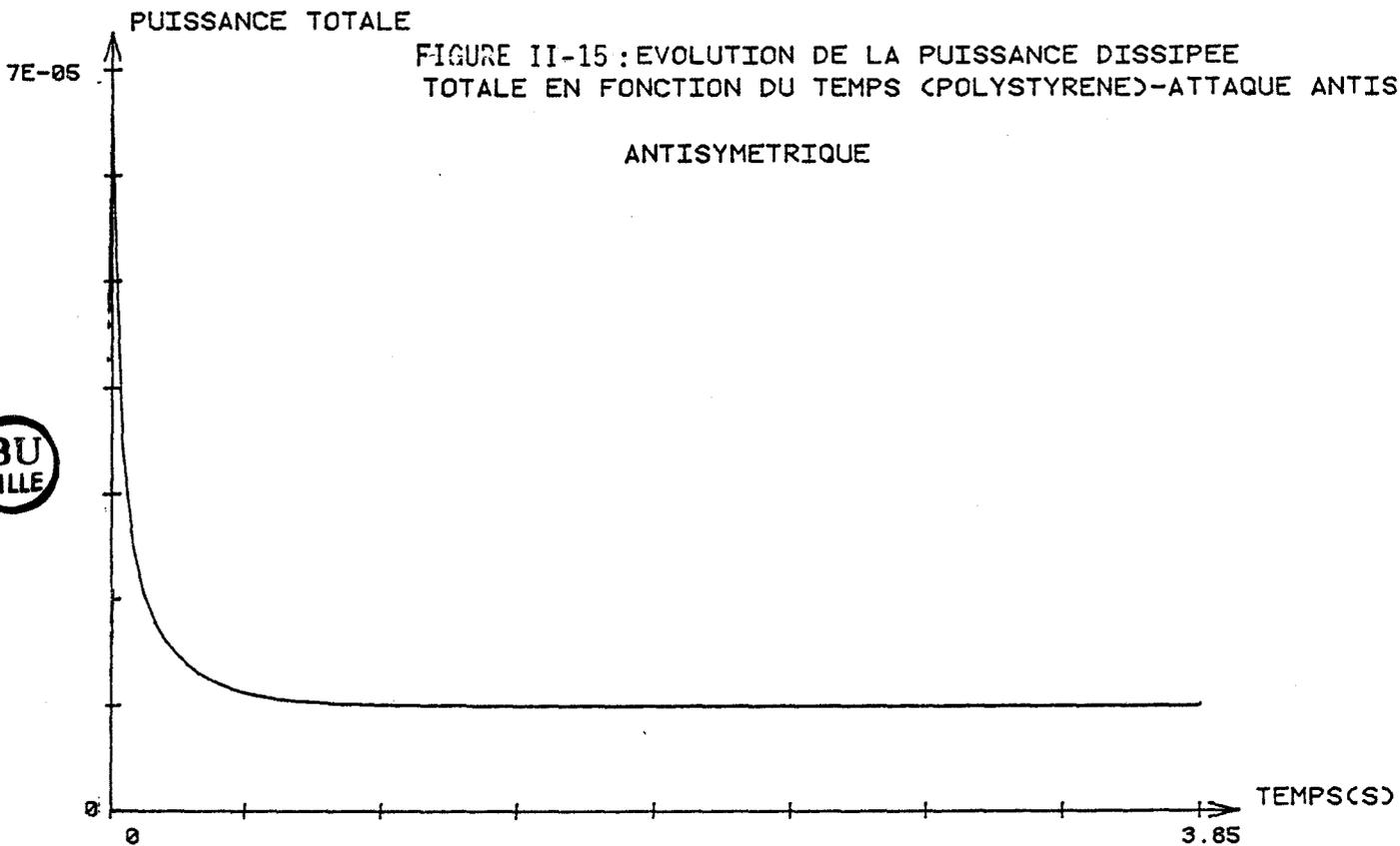


FIGURE II-15: EVOLUTION DE LA PUISSANCE DISSIPÉE TOTALE EN FONCTION DU TEMPS (POLYSTYRÈNE)-ATTAQUE ANTISYMETRIQUE



IV-3-2- Energies stockées dans chaque capacité

Le système étant symétrique, le flux entrant pour la face 1 prend une valeur égale au flux sortant sur la face 2. Il n'y a aucune variation d'énergie interne au cours de l'évolution et la température moyenne reste constante pendant toute la transformation

$$\bar{\theta}(t) = \theta_0 \qquad \Delta\Phi(t) = 0$$

Connaissant les valeurs des tensions, nous avons calculé l'énergie stockée par chaque capacité à chaque instant.

Ces résultats sont représentés figures II-16 et II-17 pour le polystyrène, et figures II-18 et II-19 pour le plexiglass.

L'examen des courbes représentatives de l'évolution de l'énergie en fonction du temps montre que le régime permanent est très vite atteint, et que du fait de la symétrie les énergies sont égales deux à deux.

En régime permanent (phase de conductivité), l'énergie stockée ne dépend pas du temps et est représentée par une portion de droite horizontale.

FIGURE II-16 :EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE EN FONCTION DU TEMPS
(ECHANTILLON -POLYSTYRENE)-ATTAQUE ANTISYMETRIQUE

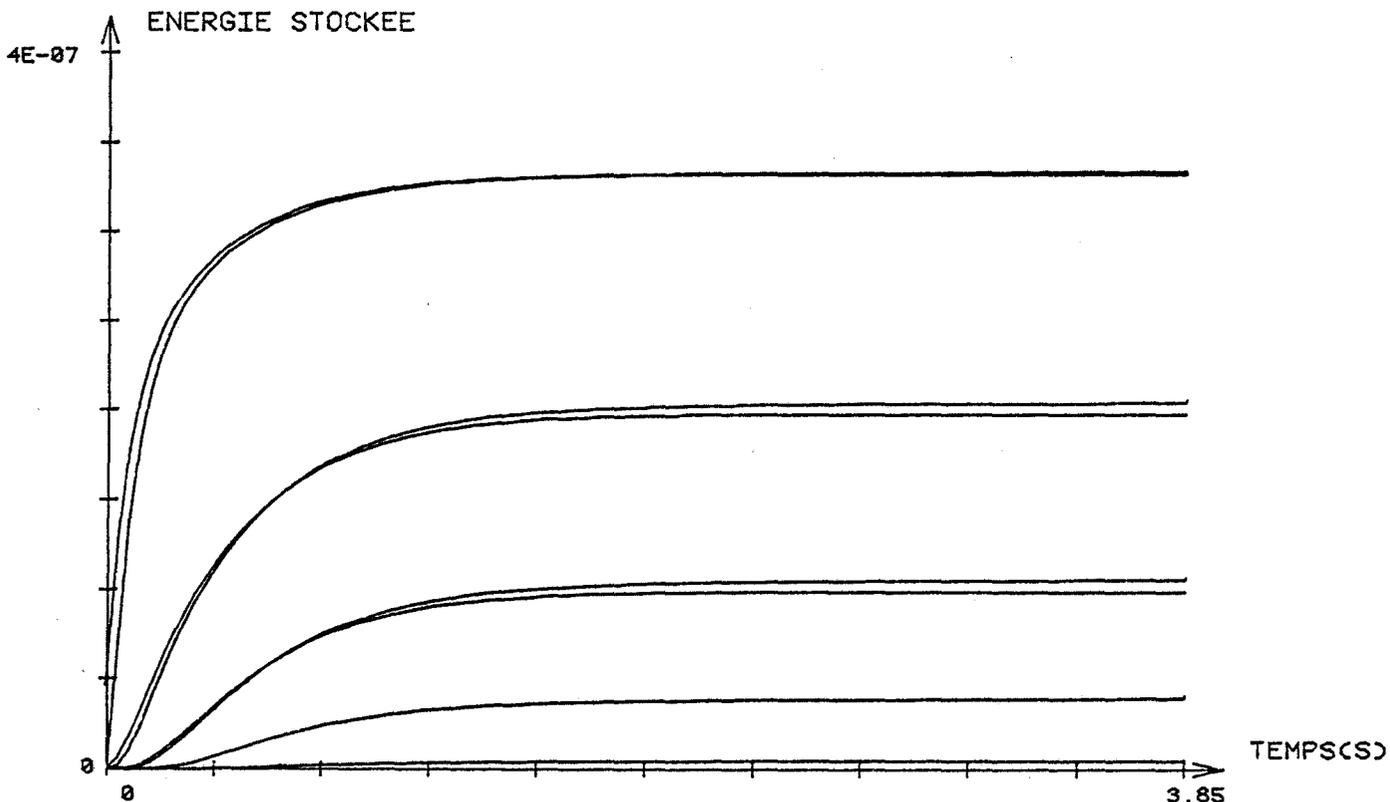
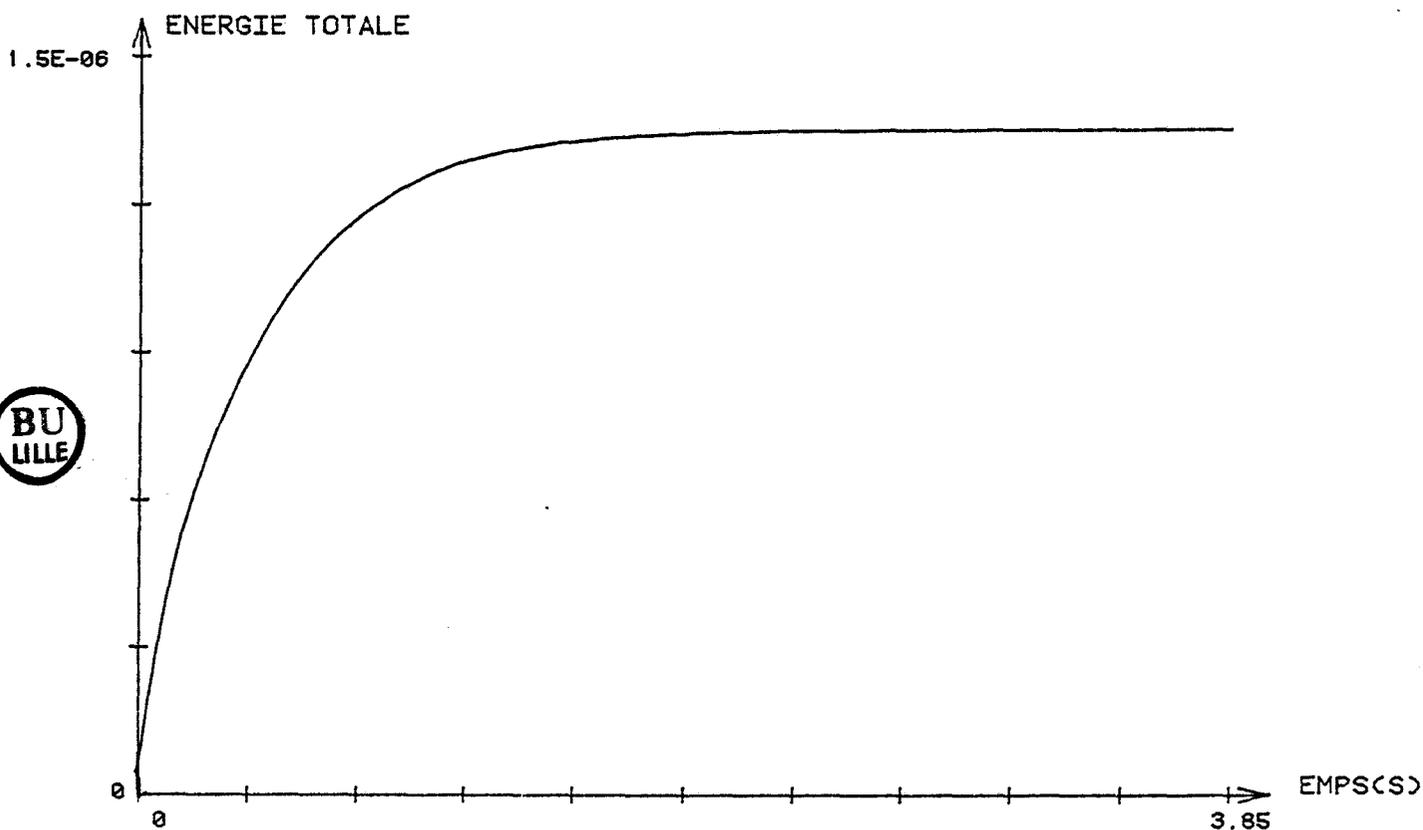


FIGURE II-17 :EVOLUTION DE L'ENERGIE TOTALE EN FONCTION
DU TEMPS (ECHANTILLON-POLYSTYRENE) -ATTAQUE ANTISYMETRIQUE



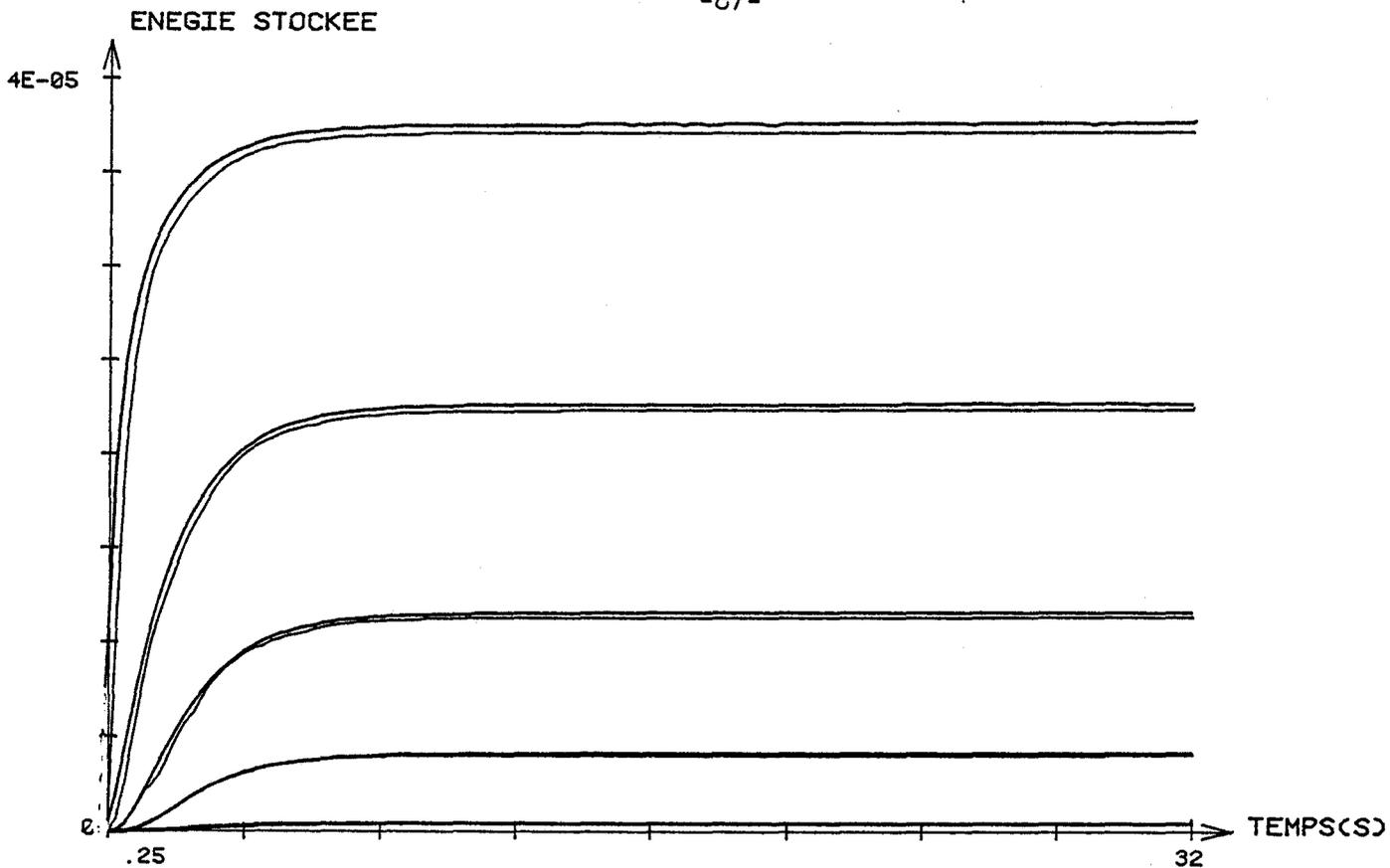


FIGURE II-18 :EVOLUTION DE L'ENEGIE STOCKEE PAR CHAQUE CAPACITE EN FONCTION DU TEMPS (PLEXI)

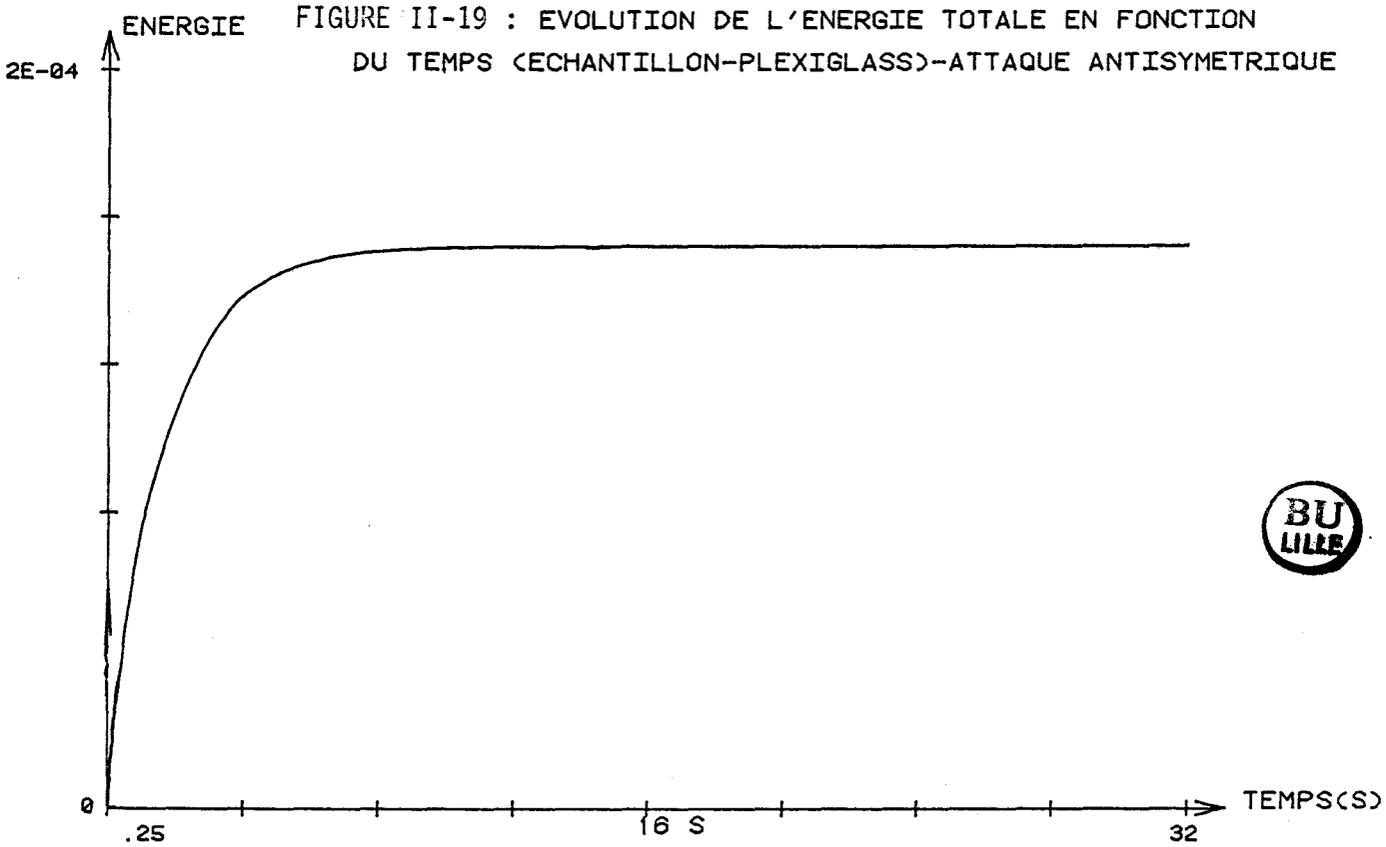


FIGURE II-19 : EVOLUTION DE L'ENERGIE TOTALE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)-ATTAQUE ANTISYMETRIQUE



IV-4- "REPRESENTATION TEMPS" DE LA DISSIPATION ET DU STOCKAGE, "STOCKAGE PUR"
SANS TRANSFERT DE CHALEUR A TRAVERS LE SYSTEME

IV-4-1 - Puissances instantanées

$$\theta_1 = T_0 + \frac{T_1}{2}$$

$$\theta_2 = T_0 + \frac{T_1}{2}$$

$$\theta_1 = T_0$$

$$\theta_2 = T_0$$

$t > 0$

$t < 0$

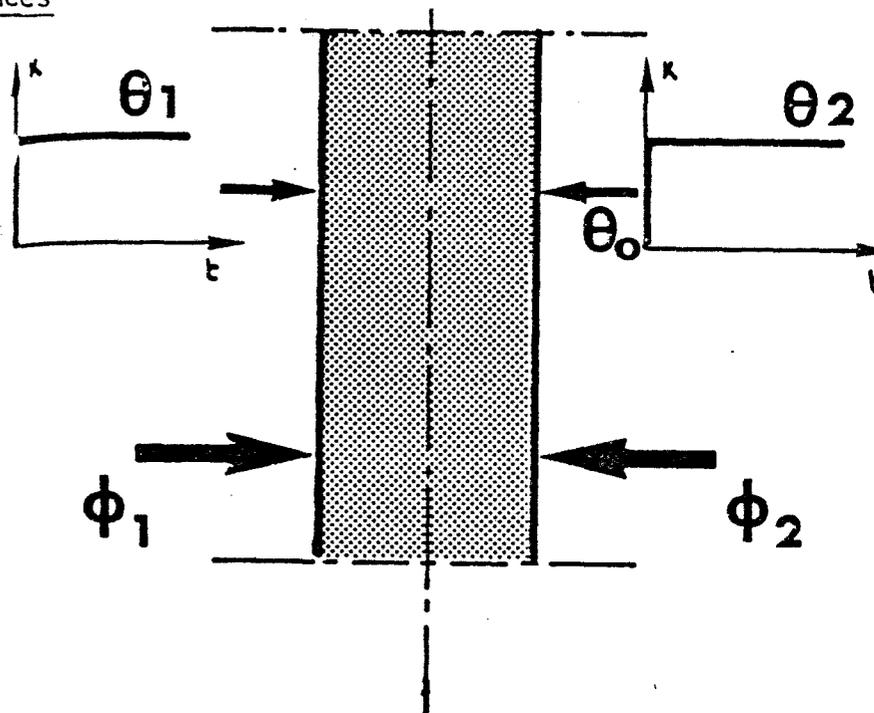


FIGURE II-20

Le système étant symétrique, les flux sont à chaque instant de même amplitude et de sens contraire de sorte que $\Sigma\Phi(t) = 0$.

Connaissant les variations instantanées des tensions (température), il est possible de calculer :

- l'énergie stockée dans chaque capacité,
- les courants circulant dans chaque branche de la ligne,
- les puissance dissipées dans chacune des résistances.

La figure II-21 montre les variations de Pd (en puissances dissipées), en fonction du temps. Les processus de transfert et de stockage engendrent des puissances de même ordre de grandeur en régime transitoire. Dans la partie asymptotique de l'évolution, la puissance dissipée par conduction (effet Joule) est nulle pour le processus de stockage et constante pour le processus de transfert (régime permanent).

FIGURE II-21: EVOLUTION DE LA PUISSANCE DISSIPEE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON-POLYSTYRENE)

ATTAQUE SYMETRIQUE

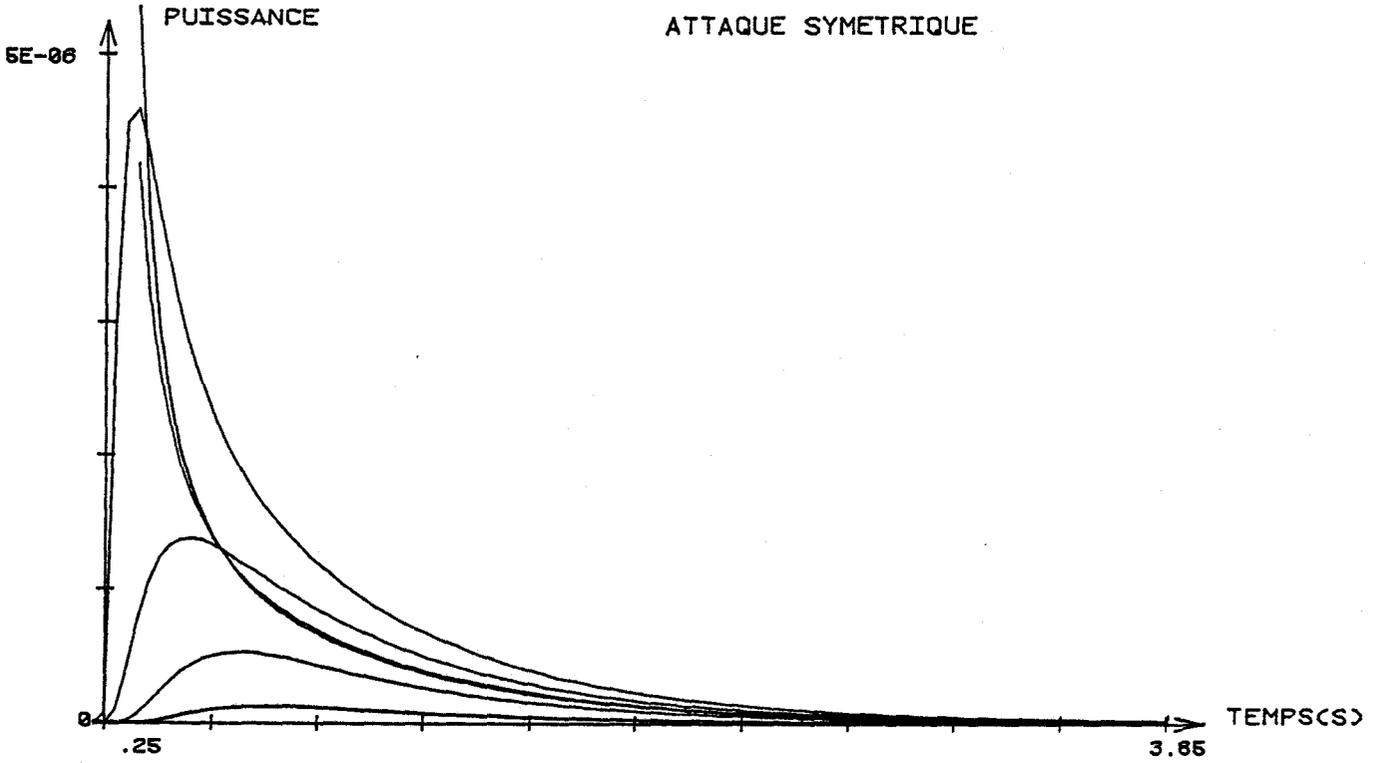
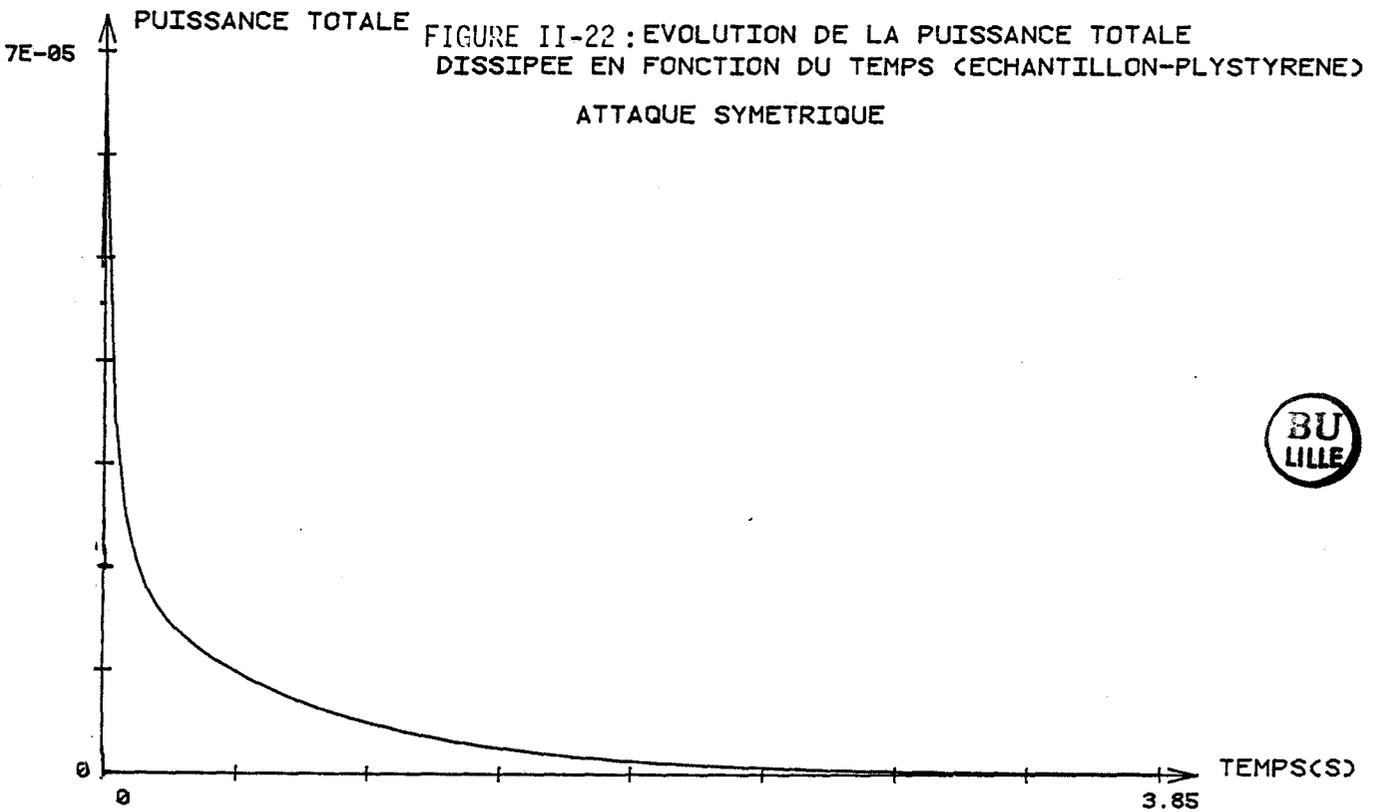


FIGURE II-22: EVOLUTION DE LA PUISSANCE TOTALE DISSIPEE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON-PLYSTYRENE)

ATTAQUE SYMETRIQUE



La figure II-22 représente les variations dans le temps de la puissance totale dissipée par conduction dans le processus de stockage.

IV-4-2- Energies stockées

De la même façon nous avons étudié deux échantillons le plexiglass et le polystyrène (2.5 mm d'épaisseur et 1,75 dm² de surface).

La paroi étant soumise à des sollicitations de type échelon sur les deux faces, nous avons mesuré les tensions aux bornes des différentes capacités et calculé l'énergie stockée par chaque capacité.

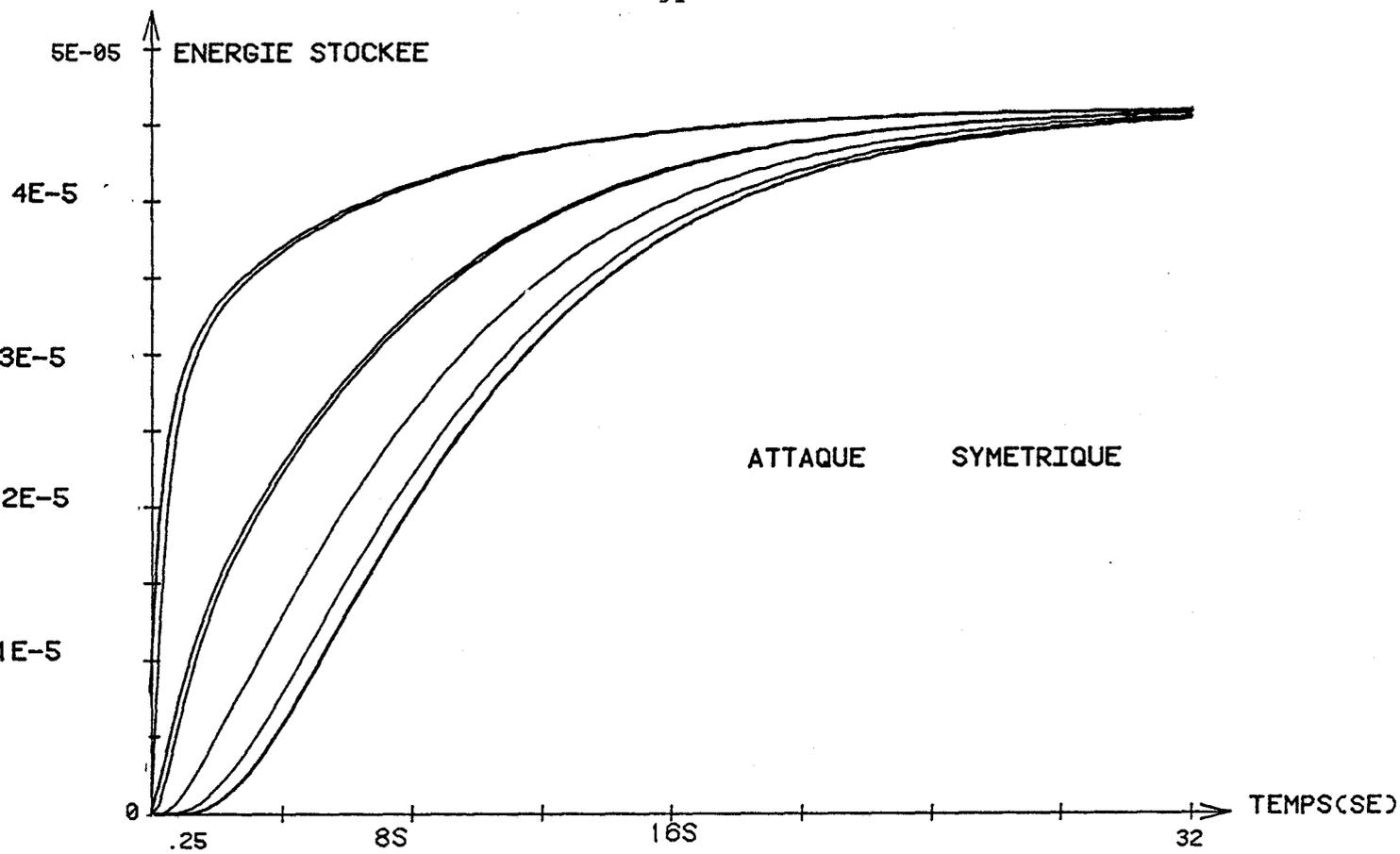
Sur la figure II-23 nous avons représenté l'évolution de l'énergie stockée par chaque capacité de l'échantillon plexiglass. Sur la figure II-24 sont représentés les résultats relatifs au polystyrène.

V - COMPARAISON DES RESULTATS

Dans un système quelconque, s'il n'y a pas disparition de masse, on peut utiliser le principe de la conservation de l'énergie qui stipule que l'énergie n'est ni créée, ni détruite, elle ne fait que changer de forme. Ainsi, on peut écrire que l'énergie totale fournie par la source W_f est la somme :

- de la puissance dissipée en pertes électriques W_p
- de l'accroissement de l'énergie électrique stockée dans les capacités W_s

$$W_f = W_p + W_s$$



EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE PAR CHAQUE
CAPACITE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON - PLEXIGLASS)

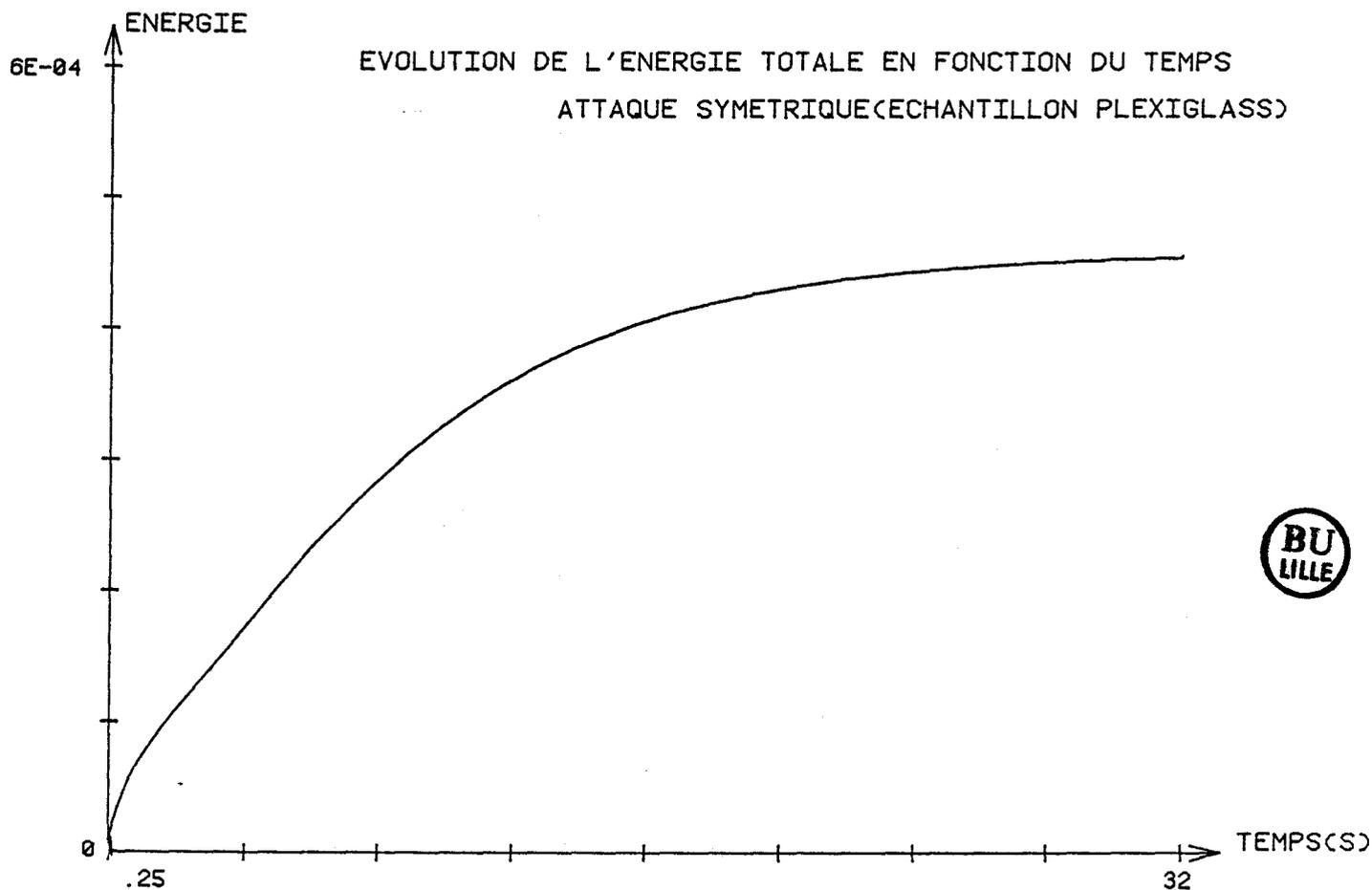
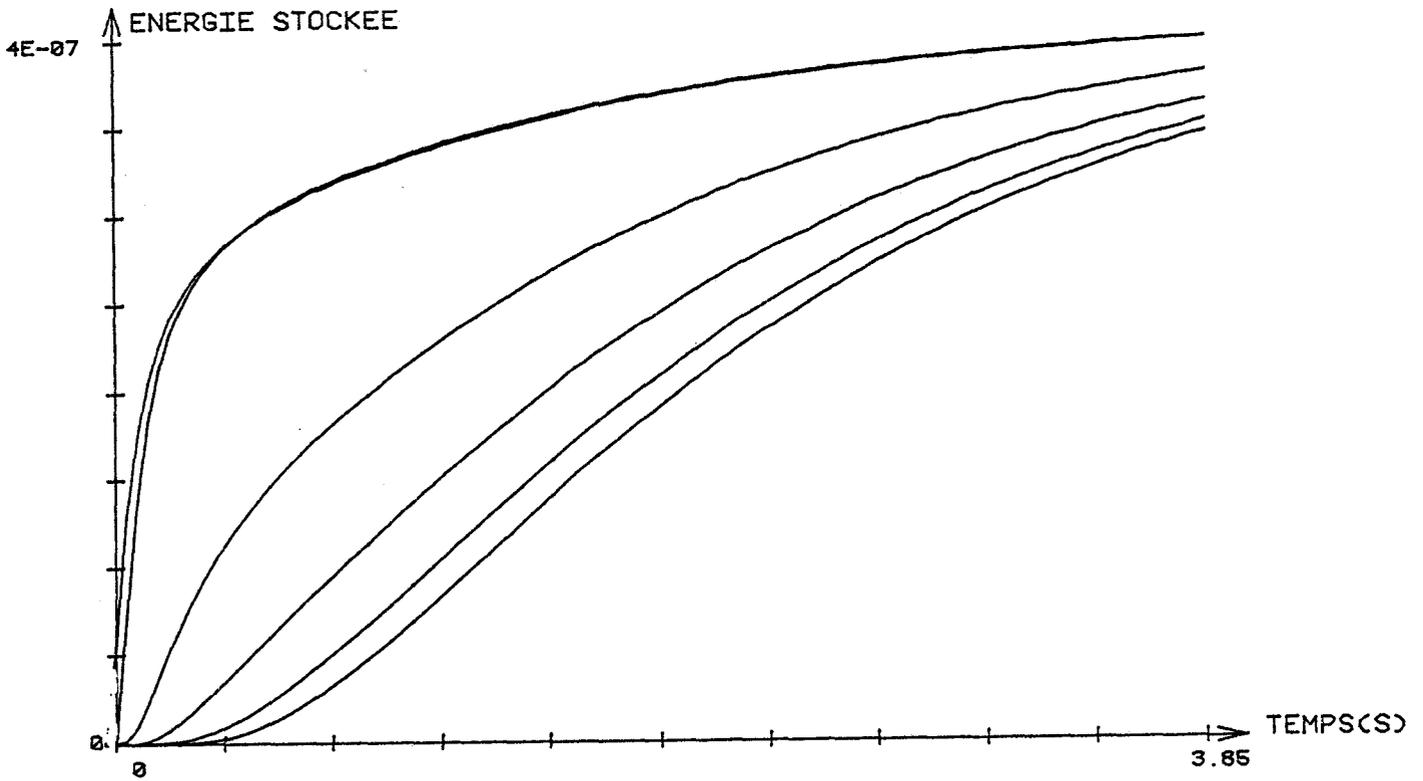


Figure II-23

EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE
EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON -POLYSTYRENE)-ATTAQUE SYMETRIQUE



EVOLUTION DE L'ENERGIE TOTALE
EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON -POLYSTYRENE)-ATTAQUE SYMETRIQUE

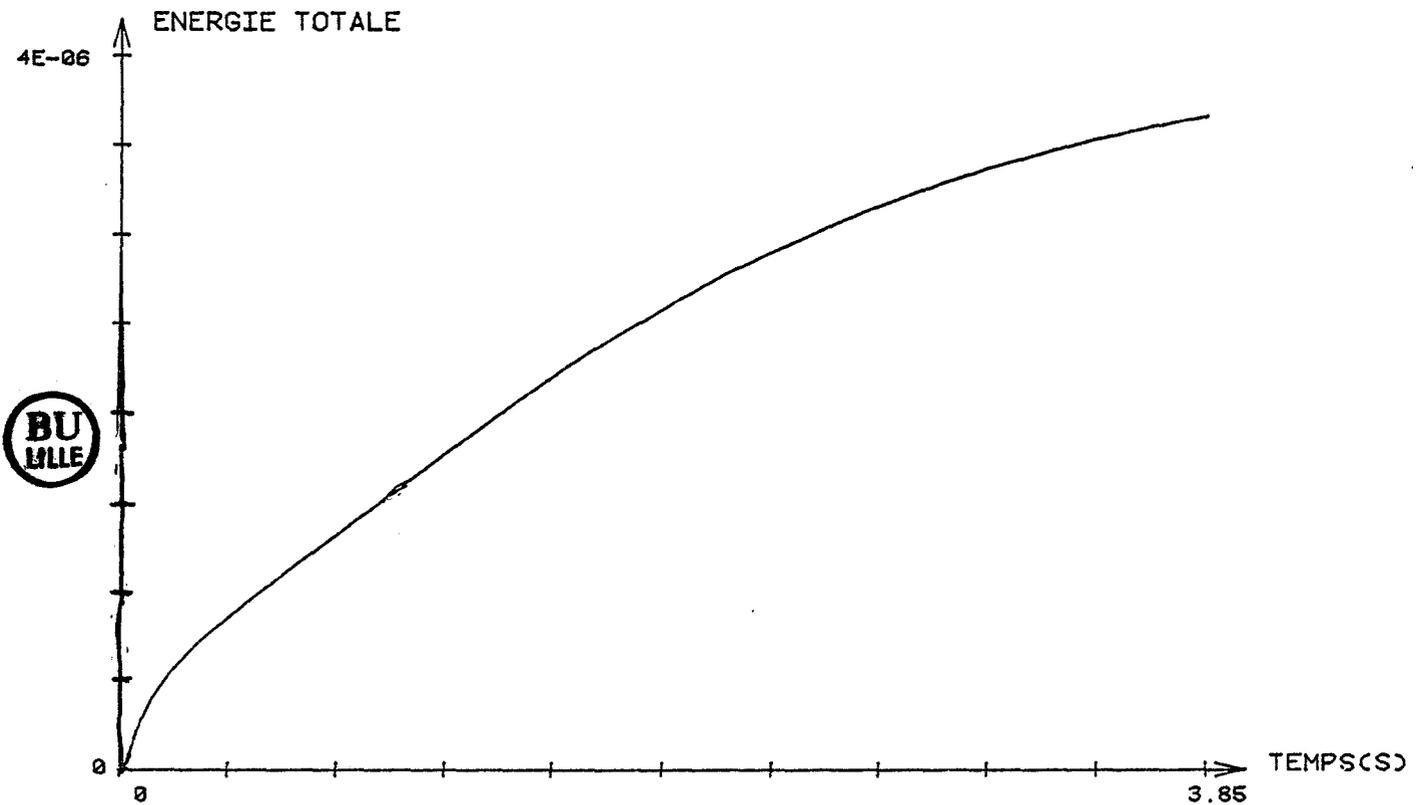


FIGURE II-24

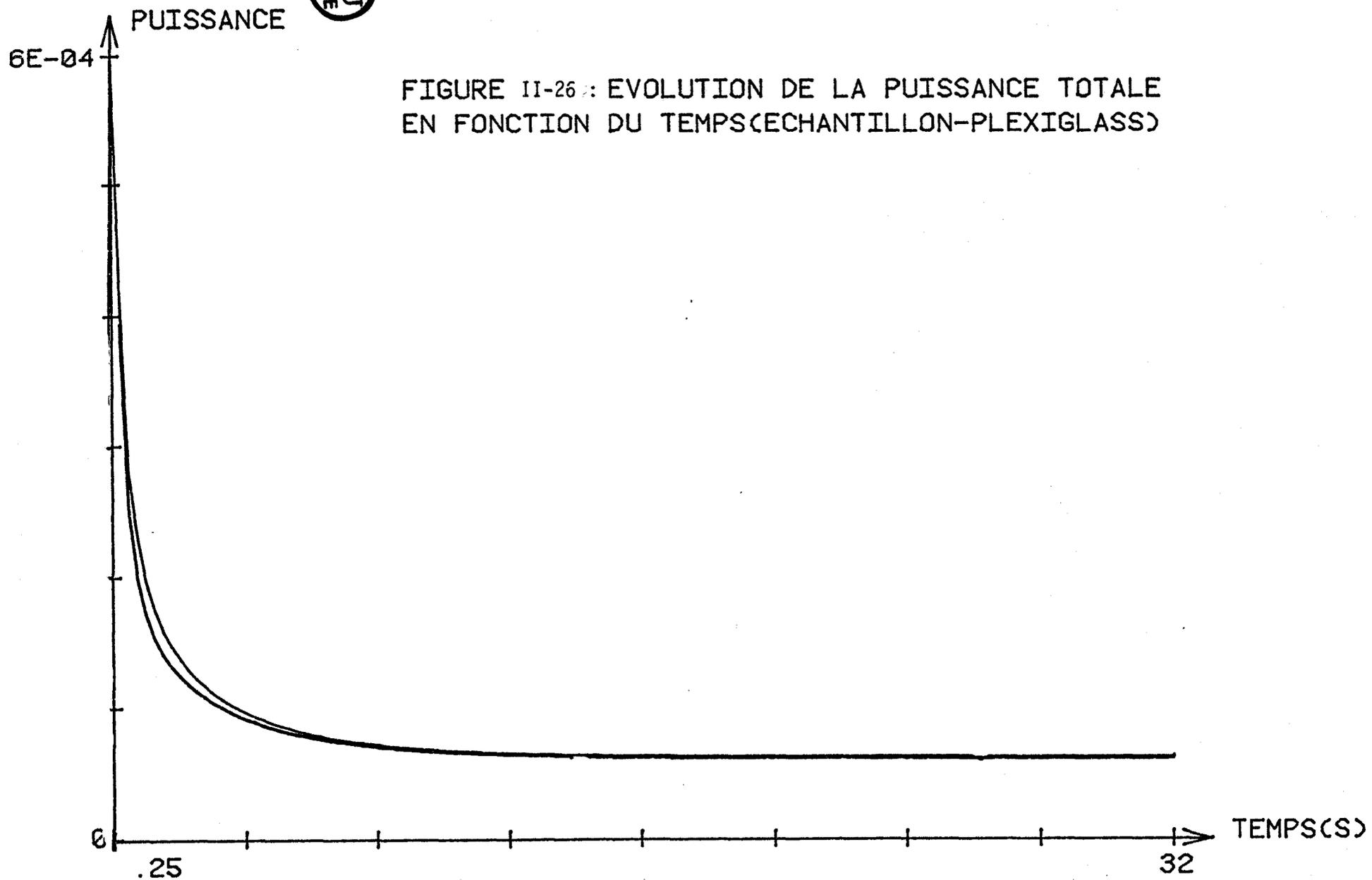
1.5E-04
↑ PUISSANCE

FIGURE II-25 : COMPARAISON DE LA PUISSANCE TOTALE DISSIPÉE

ECHANTILLON -POLYSTYRENE

0
↑ TEMPS(S)
0.25 3.85





Pour une paroi à deux accès, ayant donc deux degrés de liberté, on peut introduire deux modes indépendants (stockage, transfert) et nous avons vérifié dans le domaine temps que :

- l'état de la dissipation instantanée s'obtient par superposition de la dissipation dans les deux modes,
- l'état du stockage s'obtient également par la superposition du stockage dans les deux modes.

Sur la figure II-25 , nous avons représenté :

- la puissance totale dissipée dans les résistances de la ligne (ligne soumise à un échelon de tension, à l'entrée, la sortie étant court-circuitée),
- la somme des puissances totales dissipées dans les résistances dans le cas des deux modes (transfert pur, stockage pur).

Nous représentons aussi les résultats relatifs à un autre échantillon le plexiglass sur la figure II-26.

De la même façon, nous avons procédé à la vérification du principe de superposition quant à l'énergie stockée.

La figure II-27 représente l'évolution en fonction du temps de :

- l'énergie totale stockée (ligne soumise à un échelon, sortie en court-circuit),
- somme des énergies provenant des deux modes (transfert pur - stockage pur).

L'examen de ces résultats montre qu'il y a une légère différence liée aux capacités utilisées en manipulation.

La figure II-28 représente les mêmes résultats pour le plexiglass.

Sur la figure II-29 nous avons représenté les résultats :

- $v(t) i(t)$: puissance fournie au système,
- $\sum_r Ri^2(t)$: puissance totale dissipée
- $\frac{d}{dt} \sum_c \frac{CV^2}{2}$: puissance stockée (disponible)
- $\sum_r Ri^2(t) + \frac{d}{dt} \sum_c \frac{CV^2}{2}$

L'objectif est de comparer $v(t) i(t)$ et $\sum_r Ri^2(t) + \frac{d}{dt} \left(\sum_c \frac{CV^2}{2} (t) \right)$

On remarque que les deux courbes sont confondues.

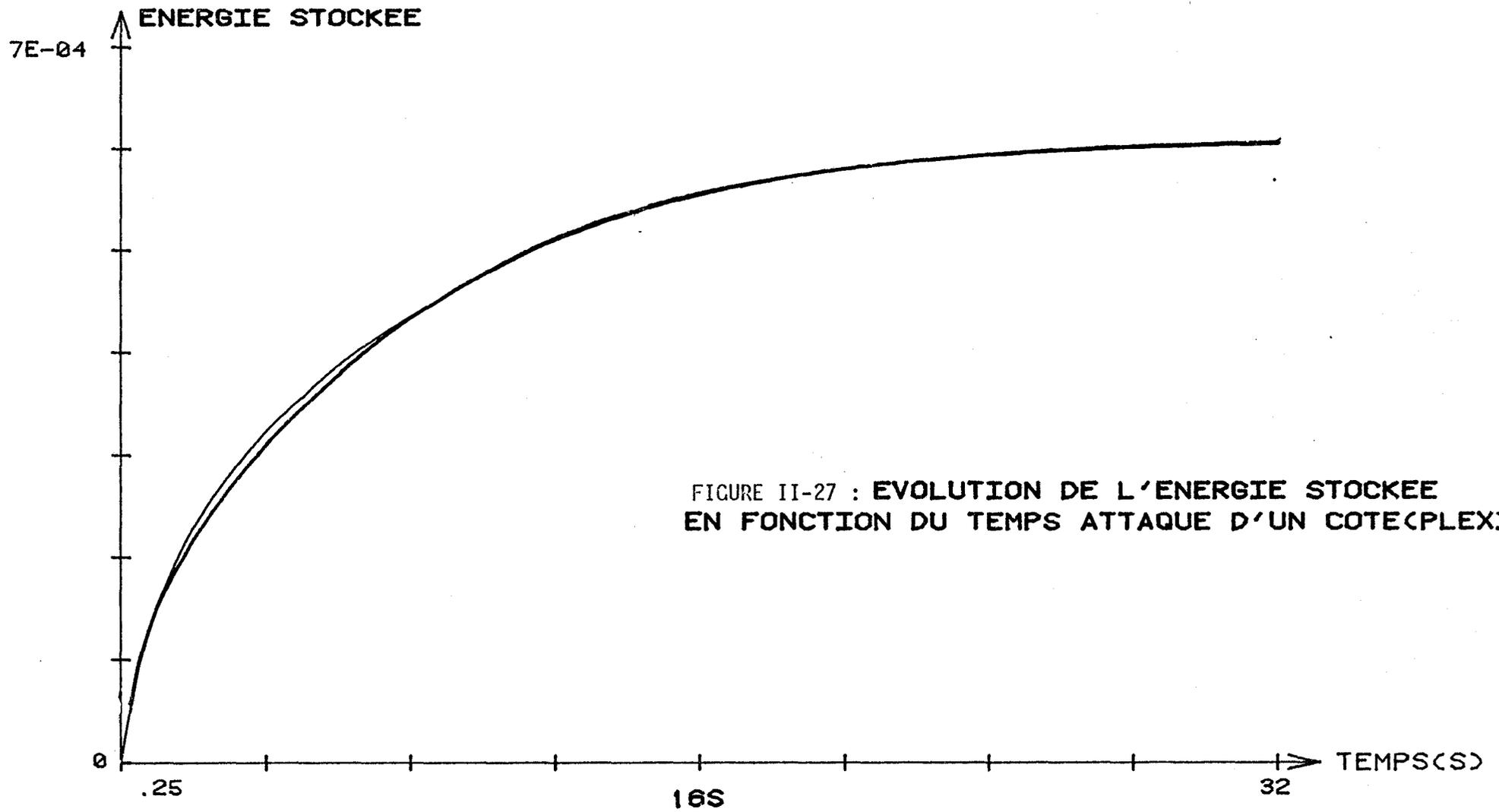
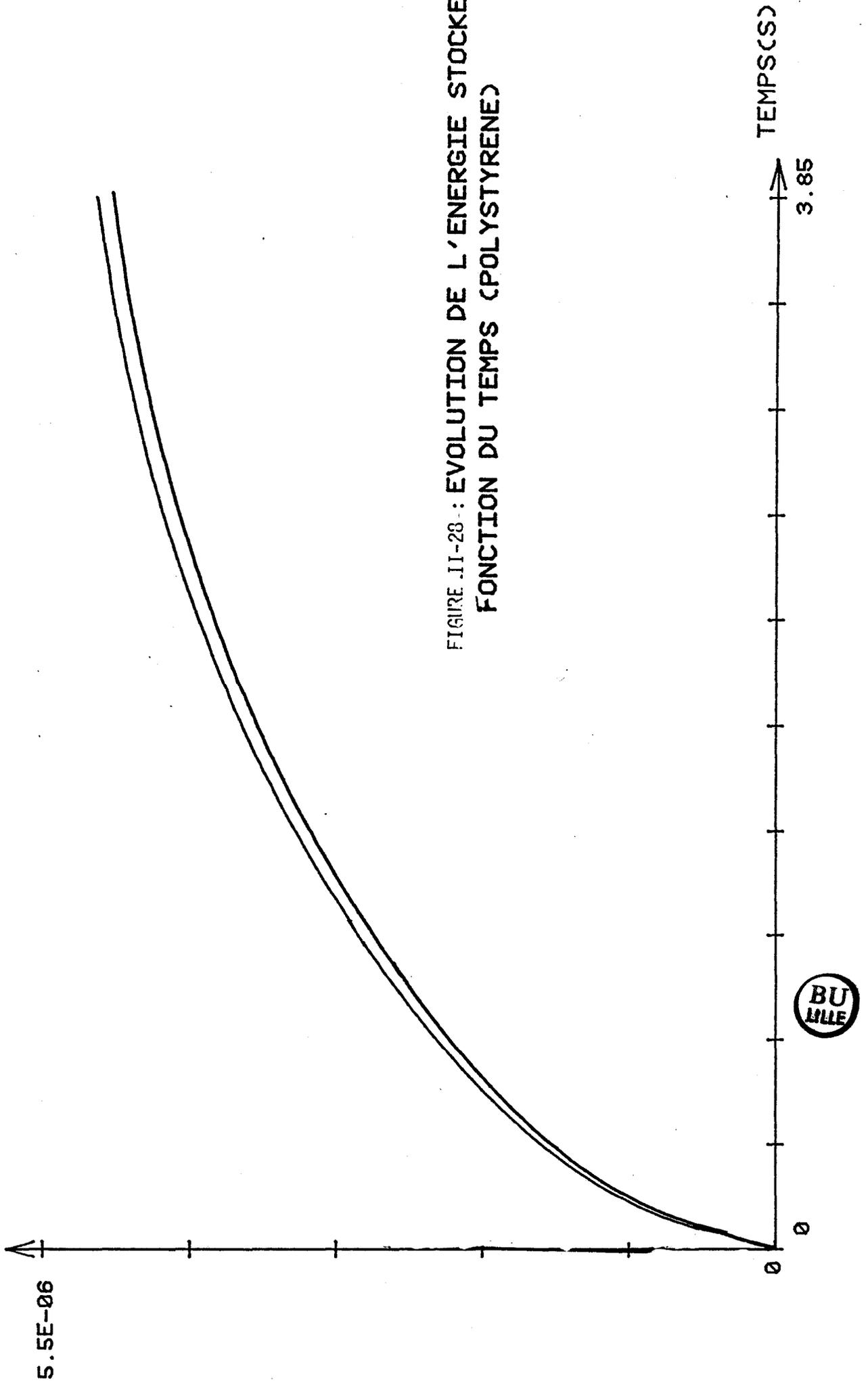


FIGURE II-27 : EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE EN FONCTION DU TEMPS ATTAQUE D'UN COTE (PLEXIGI)

FIGURE .II-28 : EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE
FONCTION DU TEMPS (POLYSTYRENE)





EVOLUTION DE LA PUISSANCE DISSIPEE EN FONCTION DU TEMPS
VERIFICATION DU DE LA RELATION (N' 1)
ECHANTILLON PLEXIGLASS (2.5MM D'EPAISSEUR)

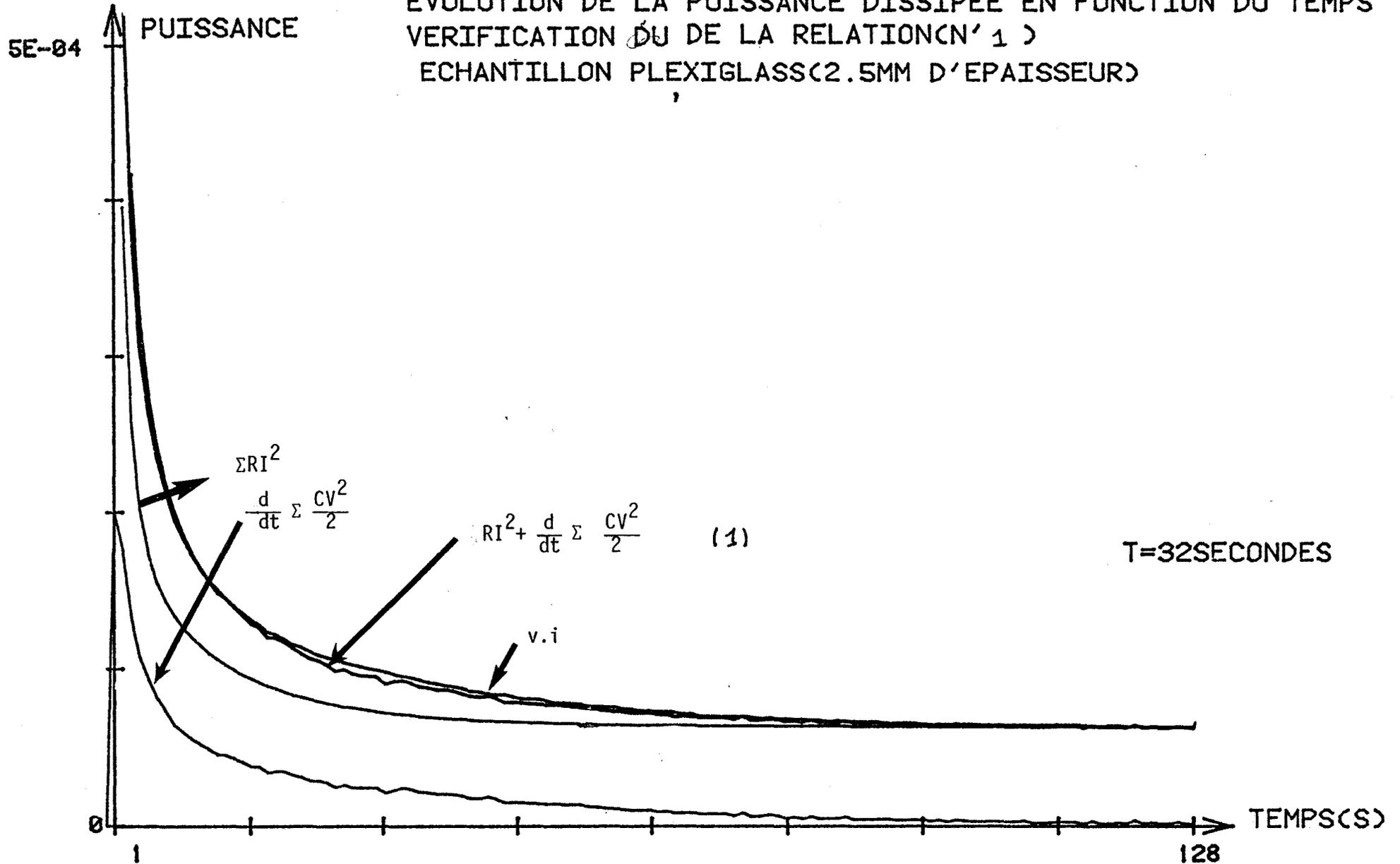


FIGURE II-29

VI - ETUDE DANS LE DOMAINE FREQUENCE

Etant donné deux grandeurs conjuguées par rapport à l'énergie, c'est-à-dire dont le produit est homogène à une puissance (tension électrique et courant par exemple), l'interaction énergétique entre ces grandeurs est habituellement représentée dans le domaine fréquence par la densité spectrale de puissance mutuelle VI^X

Une représentation équivalente à cette grandeur est définie par la fonction d'intercorrélacion entre les deux grandeurs conjuguées par rapport à l'énergie.

Cette fonction ayant une signification énergétique est définie par la relation classique suivante :

$$R_{\theta\phi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta(t) \phi(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) \theta(t+\tau) dt$$

La fonction d'intercorrélacion est également utilisée pour exprimer la dépendance statistique entre deux phénomènes, quand $R_{\theta\phi}(\tau) = 0$ les deux processus $\theta(t)$ et $\phi(t)$ ne sont plus corrélés.



La fonction d'autocorrélacion est donnée par la relation suivante :

$$R_{\theta\theta}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \theta(t) \theta(t-\tau) dt$$

Cette fonction décrit la mémoire statistique du processus $\theta(t)$; elle exprime la dépendance entre les valeurs définissant le même processus à un instant donné et les valeurs définissant le même processus aux instants précédents décalés de τ .

θ représentant une tension électrique et ϕ un courant , les densités spectrales associées à ces grandeurs sont :

$$S_{\theta\theta} = \hat{\theta} \hat{\theta}^*$$

$$S_{\theta\phi} = \hat{\theta} \hat{\phi}^*$$

Ces quantités sont liées aux fonctions d'intercorrélacion précédentes par la relation :

$$S_{\theta\theta} = TF(R_{\theta\theta})$$

$$S_{\theta\phi} = TF(R_{\theta\phi})$$

TF : transformée de Fourier

Si de plus, ϕ est lié à θ par un produit de convolution

$$\phi = h(\tau) \otimes \theta$$

Les quantités précédentes sont liées entre elles par la relation :

$$R_{\theta\phi}(\tau) = h(\tau) \otimes R_{\theta\theta}(\tau)$$

Ces résultats sont généraux et s'appliquent à la représentation des interactions énergétiques dans tout système. Elles s'appliquent en particulier :
 - au calcul de la représentation équivalente à la représentation fréquence des échanges énergétiques dans chacun des modes de transfert et de stockage

$$R_{\left(\frac{\Sigma\phi, \Delta\theta}{2}\right)} \quad \text{pour le stockage}$$

$$R_{\left(\frac{\Delta\phi, \Sigma\theta}{2}\right)} \quad \text{pour le transfert}$$

A la vérification du principe de superposition des états énergétiques dans le domaine fréquence :

$$R_{\phi\theta} = R_{\frac{\Sigma\phi, \Delta\theta}{2}} + R_{\frac{\Delta\phi, \Sigma\theta}{2}}$$

Cette relation correspond au cas où la référence est la température ou le potentiel de la face arrière de la ligne.

Elle s'applique aussi si la référence est prise par rapport à la température moyenne

$$R_{\phi(\theta - \bar{\theta})} = R_{\Sigma\phi} \frac{\Delta\theta}{2} * R_{\Delta\phi\left(\frac{\Sigma\theta - \bar{\theta}}{2}\right)}$$

De ce point de vue, on peut définir pour chacun des modes (stockage pur, transfert pur) :

$$R_{\frac{\Sigma\phi, \Delta\theta}{2}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Sigma\phi(t) \cdot \frac{\Delta\theta}{2} (t-\tau) dt$$

et

$$R_{\frac{\Delta\phi, \Sigma\theta}{2}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta\phi(t-\tau) \frac{\Sigma\theta}{2} (t-\tau) dt$$

Ces fonctions sont liées entre elles par des produits de convolution

$$R_{\frac{\Sigma\phi, \Delta\theta}{2}} = h(t) \otimes R \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$R_{\frac{\Sigma\theta, \Delta\phi}{2}} = h'(t) \otimes R_{\Delta\phi \cdot \Delta\phi}$$

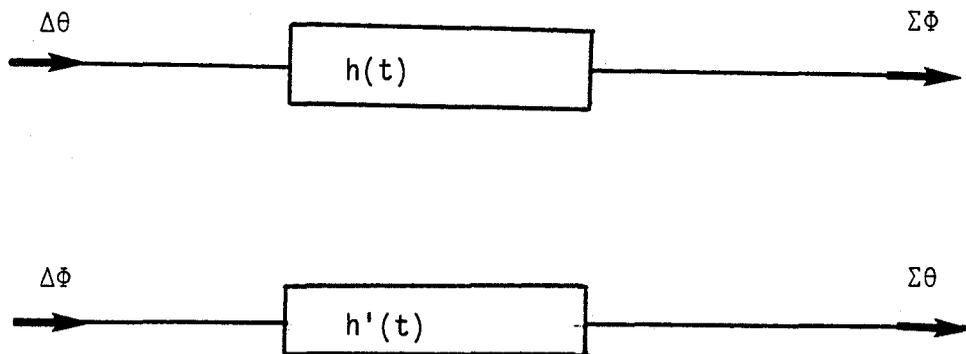
Avec $\Sigma\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\Delta\theta = T_1 - T_2$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

$$\Sigma\theta = T_1 + T_2 - 2 T_0$$

En utilisant ces coordonnées généralisées, une paroi homogène peut être considérée comme un système linéaire transformant des signaux d'entrée $\Delta\theta(t)$ et $\Delta\phi(t)$ en des signaux de sortie $\Sigma\phi(t)$ et $\Sigma\theta(t)$



$h(t)$ représente la réponse impulsionnelle pour le processus de transfert, $h'(t)$ représente la réponse impulsionnelle pour le processus de stockage.

Pour les signaux "d'énergie finie" ou transitoires, on ne divise plus par le temps d'intégration puisque les intégrales sont convergentes et que la moyenne tendrait vers 0. Les bornes d'intégration sont choisies de sorte qu'en ces points les signaux puissent être considérés comme nuls.

Dans le cas des signaux d'énergie finie, la transformée de Fourier ne définit plus des spectres de densité de puissance, mais des spectres de densité d'énergie.

VII - VERIFICATION DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION, CALCUL DES DIFFERENTES FONCTIONS D'INTERCORRELATION.

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit des variables conjuguées $\Delta\theta(t)$, $\Sigma\phi(t)$ et $\Delta\phi(t)$, $\Sigma\theta(t)$. Ces grandeurs sont connues par mesures simultanées ou simulées par des produits de convolution.

Nous avons simulé sur les deux mêmes échantillons (plexiglass-polystyrène) que précédemment deux variations en créneaux de $\Delta\theta$ (amplitude) et de donnée supérieure à la constante du temps des processus, les réponses correspondantes $\Sigma\phi$ et $\Delta\phi$ sont représentées figures II-30 et II-31.

Nous avons calculé :

- la fonction d'intercorrélacion $R_{\phi\theta}$
- la fonction d'intercorrélacion $R_{\frac{\Sigma\phi.\Delta\theta}{2}}$ (figures II-33 et II-35)
- la fonction d'intercorrélacion $R_{\frac{\Delta\phi.\Sigma\theta}{2}}$ (figures II-34 et II-36)

L'objectif de ces simulations est de montrer que le principe de superposition s'applique aussi dans le domaine fréquentiel.

Pour pouvoir comparer les résultats obtenus, nous avons représenté les fonctions d'intercorrélacions ($R_{\phi\theta}$, $R_{\frac{\Sigma\phi.\Delta\theta}{2}}$, $R_{\frac{\Delta\phi.\Sigma\theta}{2}}$) sur les mêmes fig. II-37 et II-38. On vérifie sur ces courbes que $R_{\phi\theta}$ est égale à la somme de deux fonctions d'intercorrélacion :

- $R_{\frac{\Delta\phi.\Sigma\theta}{2}}$ dans le cas du stockage pur ($\Sigma\theta = 0, \Delta\theta = 0$)
- $R_{\frac{\Sigma\phi.\Delta\theta}{2}}$ dans le cas du transfert pur ($\Delta\phi = 0, \Sigma\theta = 0$)

De la même façon, nous avons calculé et représenté les fonctions d'intercorrélacion du polystyrène sur les figures

VIII - SEPARATION DE LA DISSIPATION ET DU STOCKAGE A L'AIDE DES FONCTIONS D'INTERCORRELATION

SIGNAUX PAIRS ET IMPAIRS

Un signal est pair si : $x(t) = x(-t)$

Un signal est impair si $x(t) = -x(-t)$

Tout signal réel peut être décomposé en une partie paire et une partie impaire

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

avec $x_p(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$

$$x_i(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

EVOLUTION DE LA SOMME DES COURANTS EN
FONTION DU TEMPS ATTAQUE ANTISYMETRIQUE

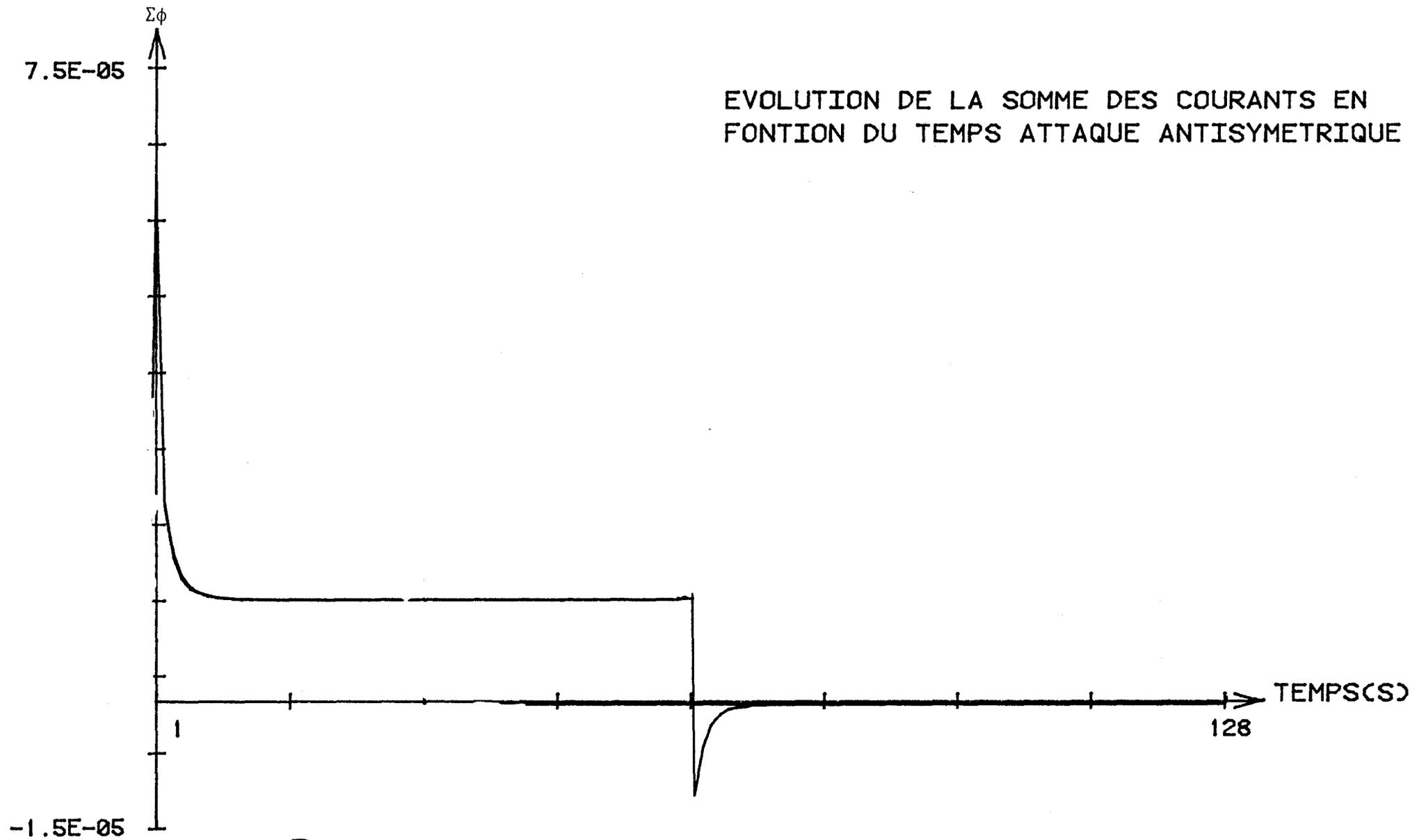


FIGURE II-30





EVOLUTION DE LA DIFFERENCE DES COURANTS EI
EN FONCTION DU TEMPS
ATTAQUE SYMETRIQUE

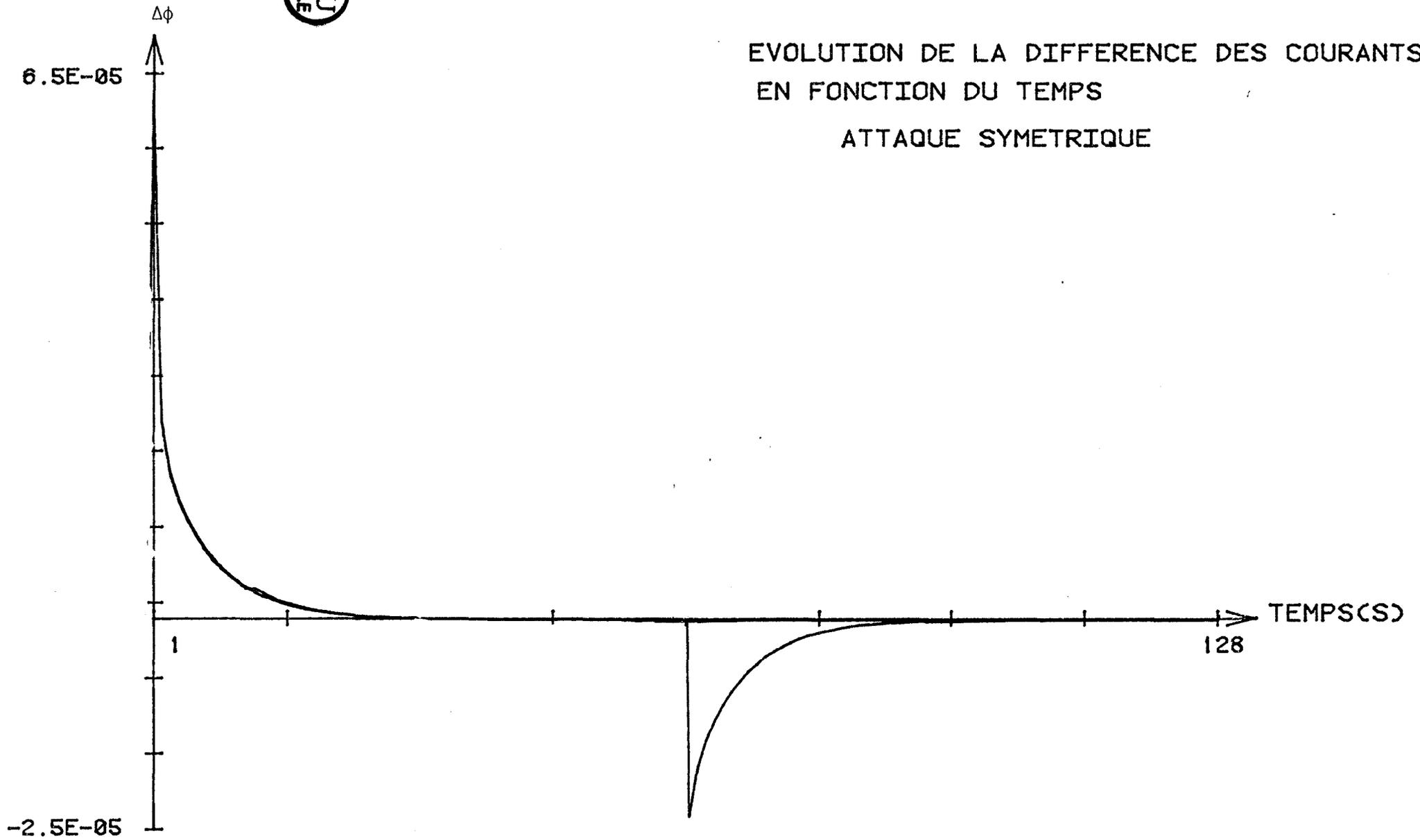
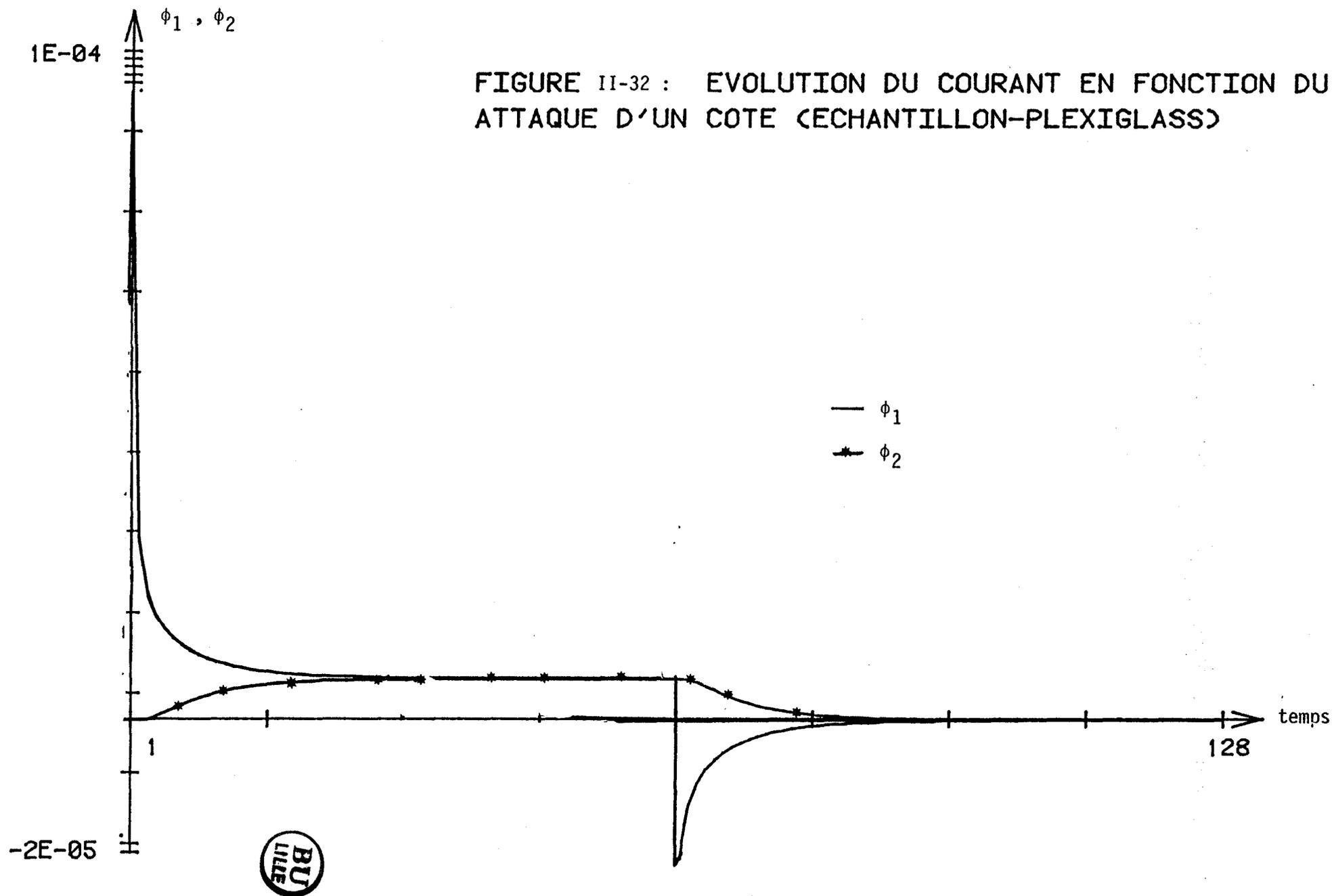


FIGURE II-31

FIGURE II-32 : EVOLUTION DU COURANT EN FONCTION DU TEMPS
ATTAQUE D'UN COTE (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)



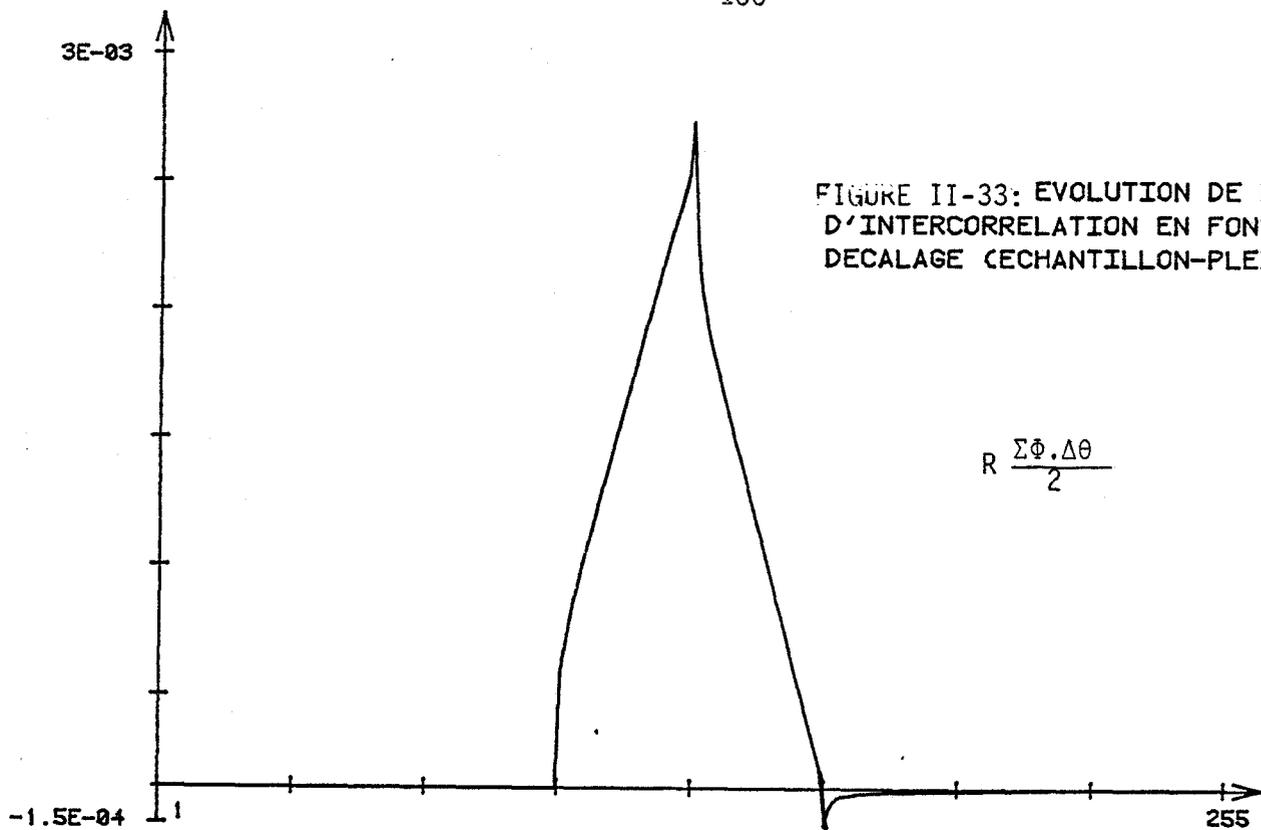


FIGURE II-33: EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECALAGE (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)

$$R \frac{\Sigma\phi \cdot \Delta\theta}{2}$$

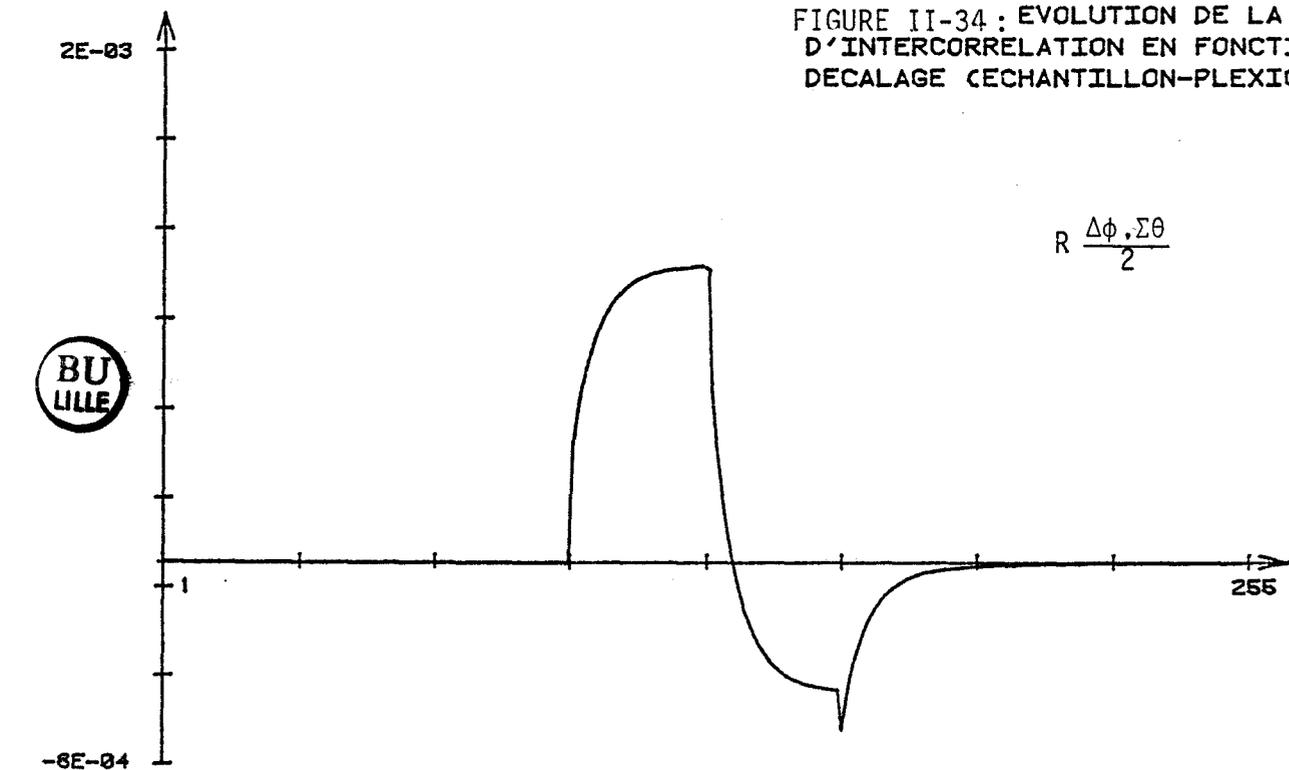


FIGURE II-34: EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECALAGE (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)

$$R \frac{\Delta\phi \cdot \Sigma\theta}{2}$$



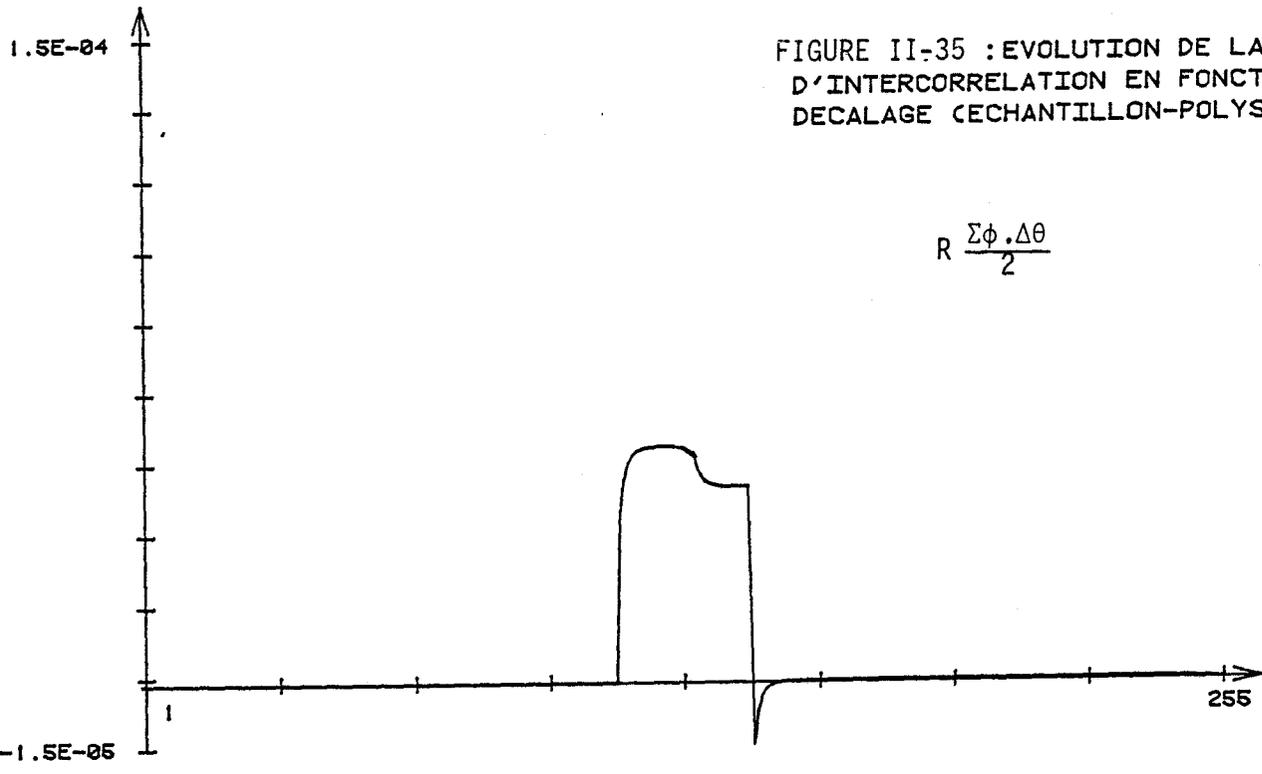


FIGURE II-35 : EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECALAGE (ECHANTILLON-POLYSTYRENE)

$$R \frac{\Sigma \phi \cdot \Delta \theta}{2}$$

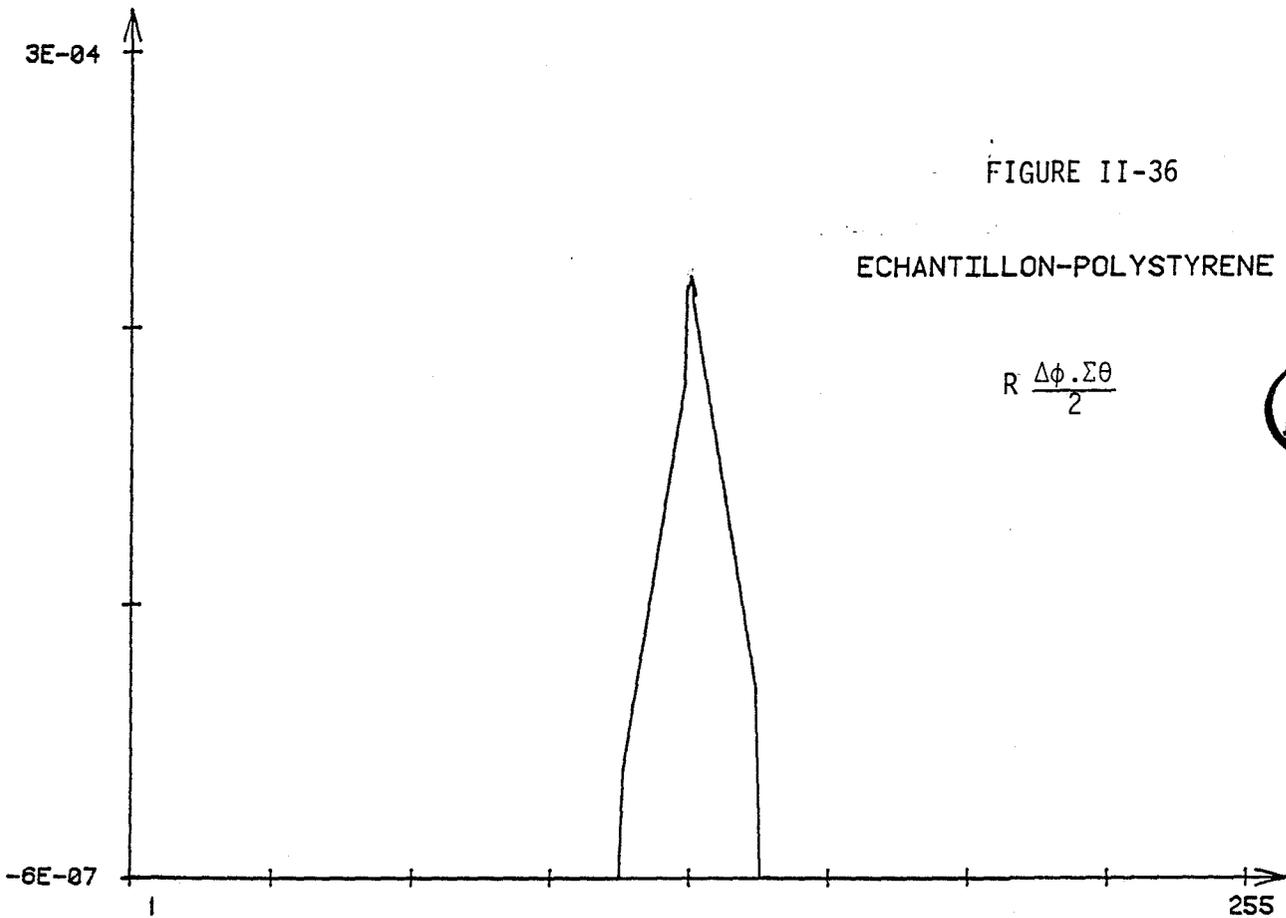


FIGURE II-36

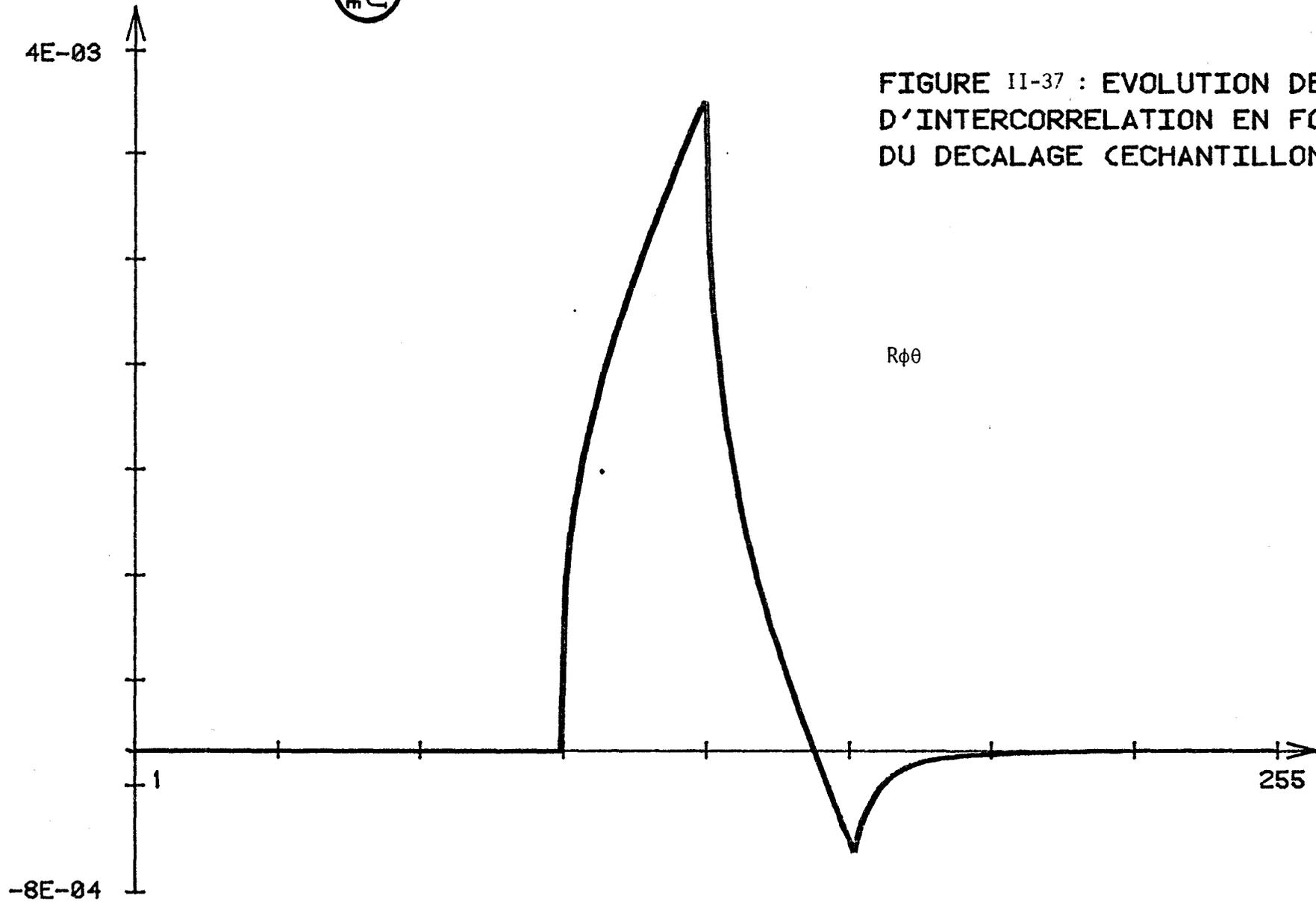
ECHANTILLON-POLYSTYRENE

$$R \frac{\Delta \phi \cdot \Sigma \theta}{2}$$





FIGURE II-37 : EVOLUTION DE LA FONCTION
D'INTERCORRELATION EN FONCTION
DU DECALAGE (ECHANTILLON-PLEXIGLASS)



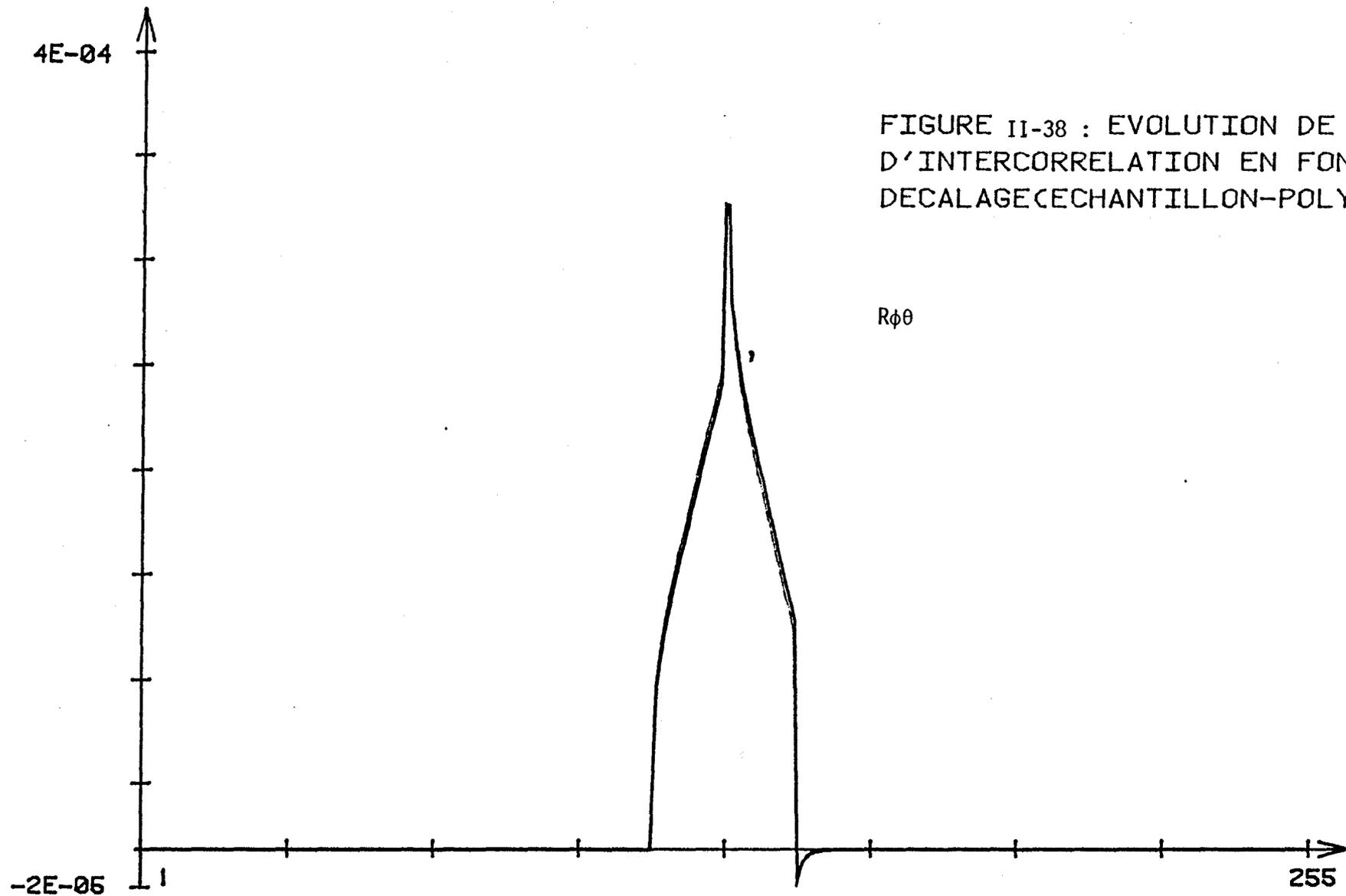


FIGURE II-38 : EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECALAGE (ECHANTILLON-POLYSTYRENE)

$R\phi\theta$



Dans le domaine fréquence : $x(f) = P(f) + jI(f)$

$P(f)$ la partie réelle du spectre est paire

$I(f)$ la partie imaginaire du spectre est impaire.

APPLICATION

Sur la face d'entrée du système, les échanges énergétiques définis dans le domaine fréquence sont caractérisés par l'interspectre :

$$S_{\theta\phi}(t) = \theta(f) \cdot \phi^*(f)$$

θ : tension électrique

ϕ : courant électrique

Comme les fonctions d'intercorrélation possèdent les propriétés de parité, il est possible de découpler dans le domaine temps les parties réelles et imaginaires de l'interspectre.

Le théorème de Wiener Kinchine conduit à :

$$R_e(\theta(f) \cdot \phi^*(f)) = \frac{1}{2} \text{TF} [R_{\theta\phi}(\tau) + R_{\phi\theta}(\tau)] = \frac{1}{2} \text{TF} (B_p)$$

$$I_m(\theta(f) \cdot \phi^*(f)) = \frac{1}{2} \text{TF} [R_{\theta\phi}(\tau) - R_{\phi\theta}(\tau)] = \frac{1}{2} \text{TF} (B_i)$$

B_p et B_i désignent les parties paires et impaires constituant la fonction d'intercorrélation.

A titre d'exemple, nous avons calculé $B_p(\tau)$ et $B_i(\tau)$ pour les processus :

- une paroi de plexiglass disposée le long d'un puits thermique est sollicitée par une impulsion de température.

- une paroi de polystyrène étudiée dans les mêmes conditions.

Les figures II-39, II-40, II-41 et II-42 représentent la forme des parties paires et impaires de chacune des fonctions d'intercorrélation calculée entre la tension et le courant.

Il est à noter que la partie paire $B_p(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\theta(t)\phi(t-\tau) + \theta(t-\tau)\phi(t)] dt$ au point zéro représente la dissipation moyenne \bar{P}_d

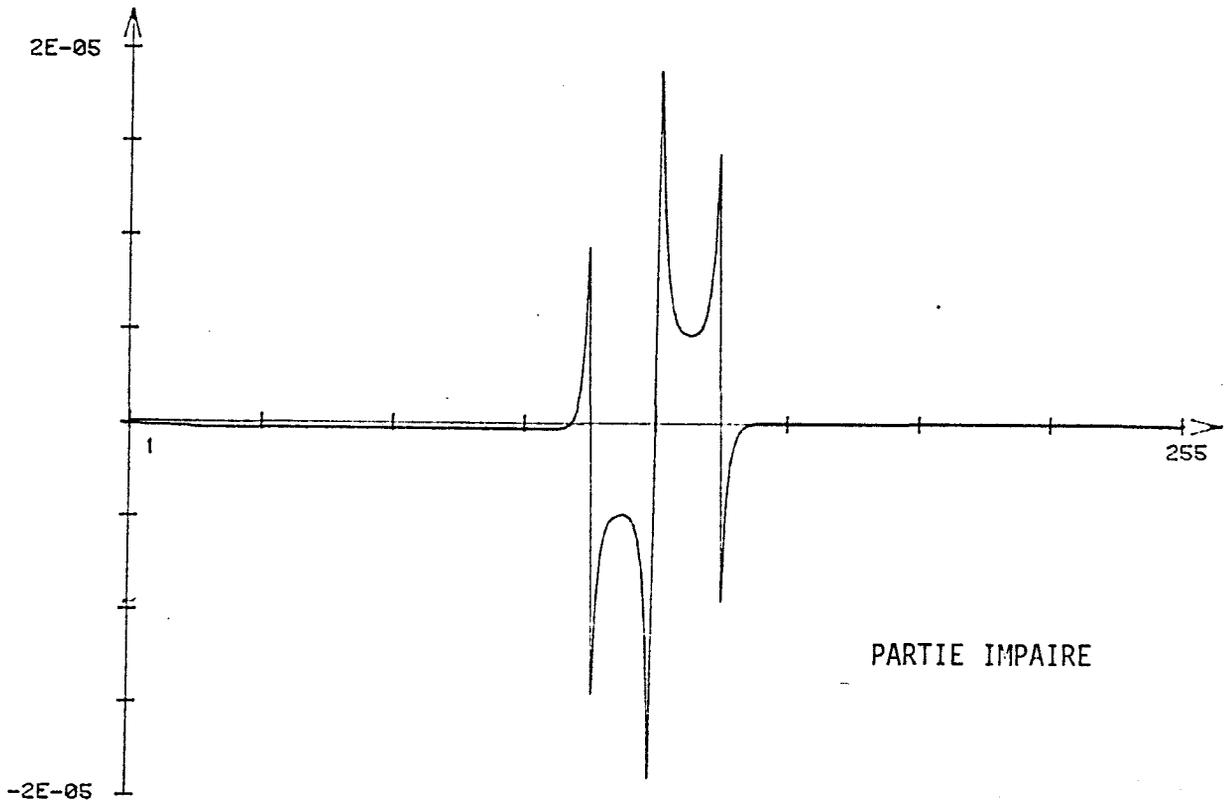
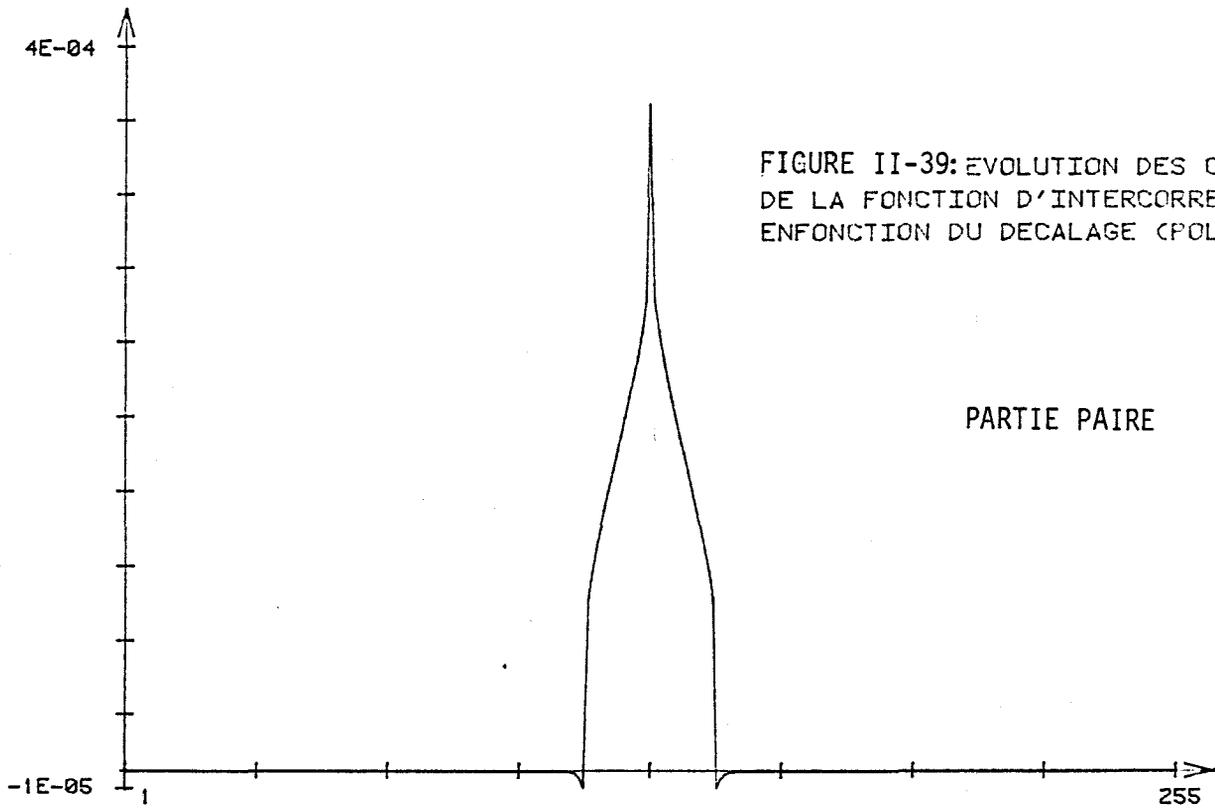


FIGURE II-40

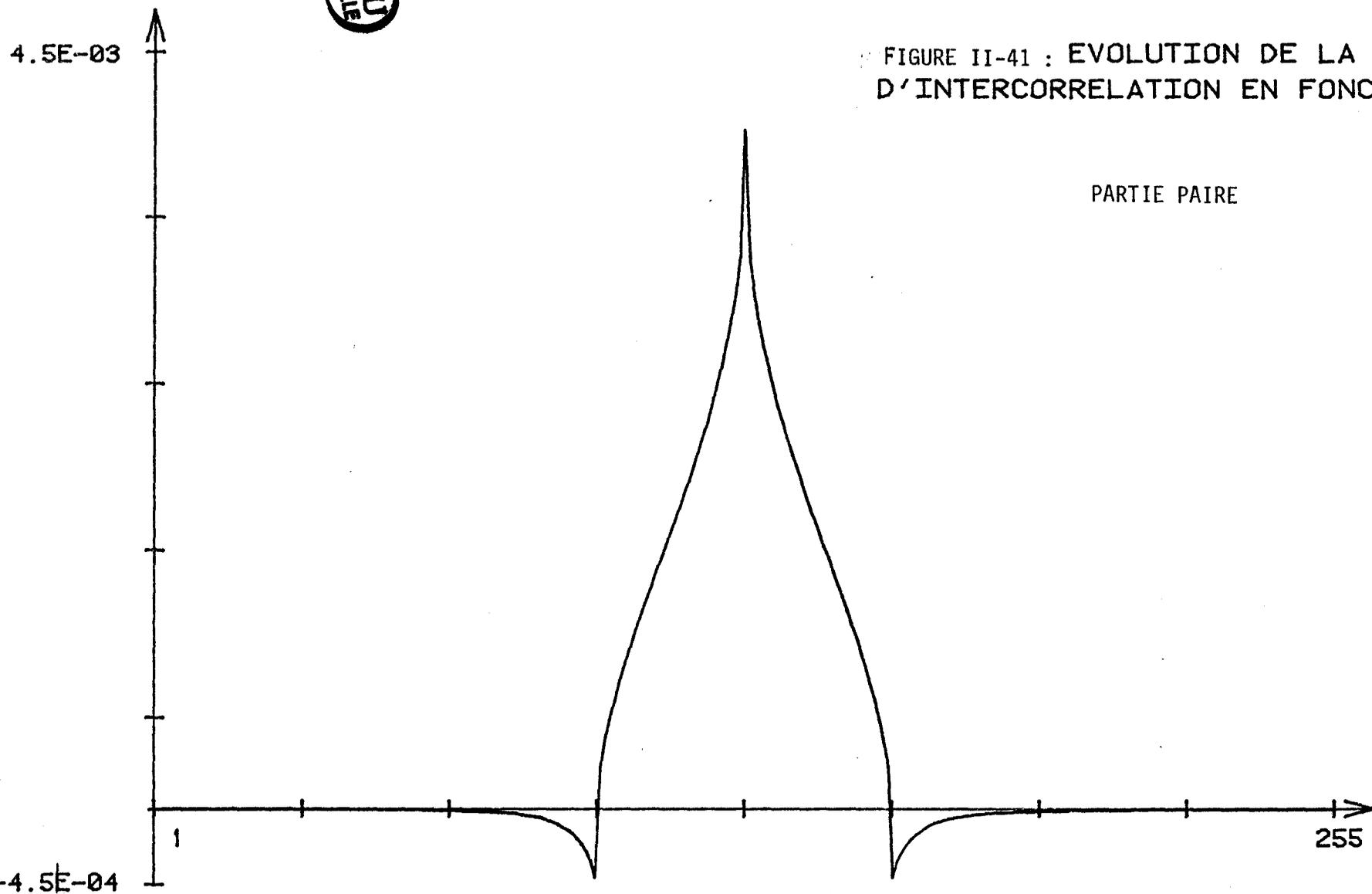
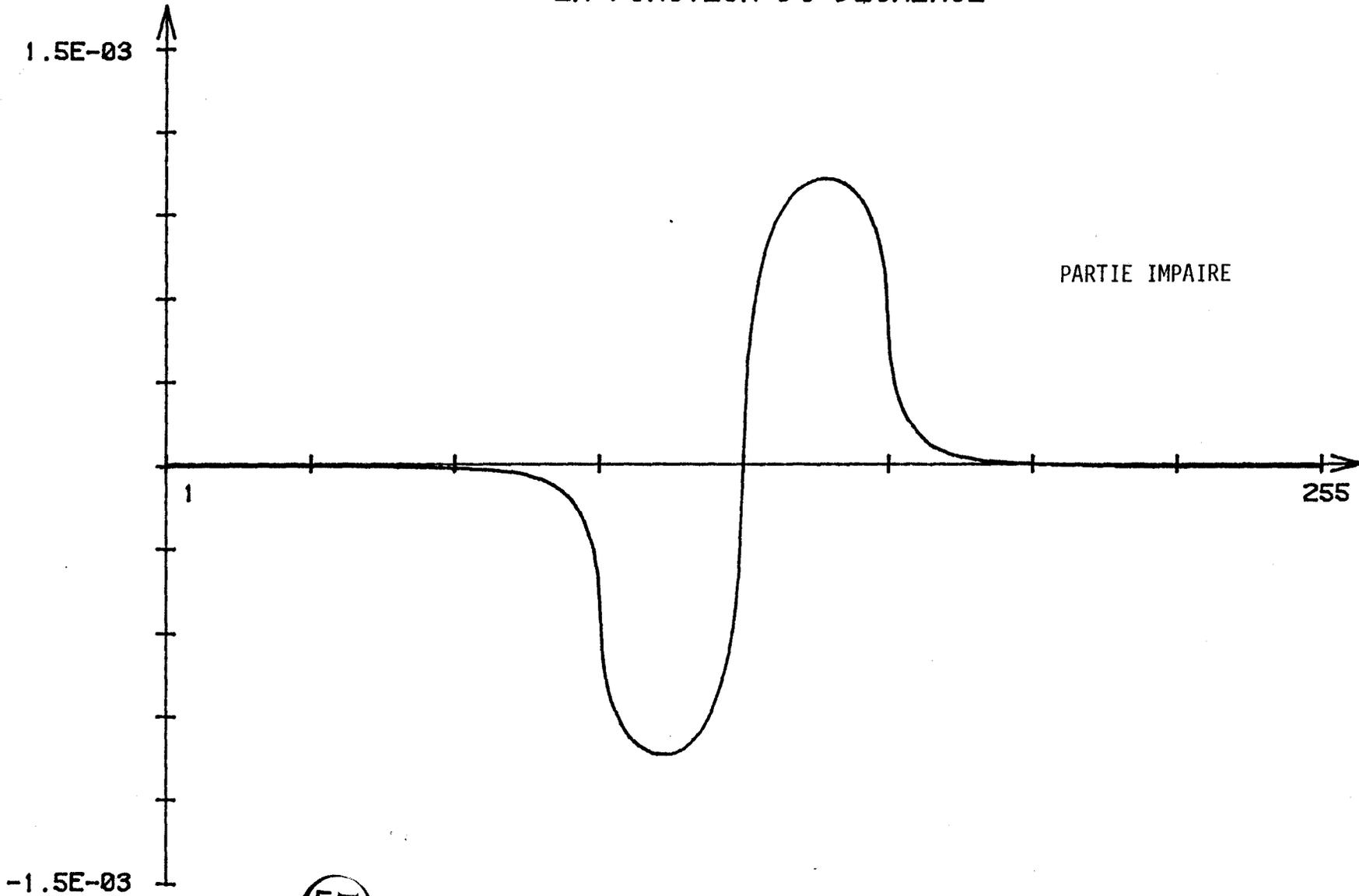


FIGURE II-41 : EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECA

PARTIE PAIRE

FIGURE II-42 : EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECALAGE



IX - CONCLUSION

En résumé, étant donné une paroi homogène soumise sur ses deux faces à des échanges avec le milieu extérieur, il est possible de représenter à chaque instant l'état local du système comme la superposition de deux modes normaux.

Cette décomposition résulte de la diagonalisation de la matrice de transition sous la forme :

$$\begin{vmatrix} \Sigma\phi \\ \Phi\theta \end{vmatrix} = H(p) \begin{vmatrix} b\sqrt{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b\sqrt{p}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\phi \end{vmatrix}$$

(avec $H(p) = \frac{1 + \text{ch} \sqrt{cp}}{\text{sh} \sqrt{cp}}$)

$$\Sigma\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\Sigma\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\bar{\tau} = RC$$

$$b = \sqrt{\frac{C}{R}}$$

R : résistance thermique

C : capacité thermique

Compte tenu de cette diagonalisation, le flux moyen sur l'ensemble des faces d'entrée et de sortie $\Sigma\phi$ dépend de la seule différence de température $\Delta\theta$ entre les faces externes de l'échantillon. Cette relation de dépendance étant exprimée dans le domaine temps par le produit de convolution :

$$\Sigma\phi(t) = u_t(t) \otimes \frac{\partial}{\partial t} (\theta_1 - \theta_2)$$

De la même façon, la quantité de chaleur stockée dans l'échantillon ne dépend que de la variation en fonction du temps de l'écart entre les températures de surface et la température initiale

$$\Delta\phi(t) = u_s \otimes \frac{\partial}{\partial t} (T_1 + T_2 - 2 T_0)$$

Notre travail a permis de montrer que le principe de superposition avait également une signification énergétique locale.

La dissipation intérieure locale s'exprime comme la superposition de la dissipation dans chacun des modes de stockage et de transfert.

De la même façon, l'énergie utilisable peut être obtenue en utilisant le principe de superposition.

Le principe de superposition des états énergétiques de chaque mode normal dans le domaine temps et dans le domaine fréquence.

CHAPITRE III : EXTENSION À LA SIMULATION DES ÉCHANGES
DANS LES SYSTEMES INHOMOGÈNES

I - INTRODUCTION

Dans la première partie nous avons montré l'intérêt de simuler les interactions énergétiques dans une paroi soumise à des sollicitations externes en provenance de ses faces à l'aide d'une ligne électrique analogique.

La dissipation par effet Joule (dans la ligne électrique) simule la "dissipation" interne par conduction thermique et le stockage d'énergie électrostatique dans les capacités de la ligne électrique simule l'énergie stockée dans la paroi.

Nous avons montré l'intérêt d'introduire des combinaisons entre grandeurs d'entrée et de sortie (seule façon d'obtenir des relations fonctionnelles entrée-sortie indépendantes des conditions limites) pour décomposer l'expression de la puissance "dissipée" et de l'énergie stockée en quantités additives indépendantes l'une de l'autre ayant une signification thermodynamique (stockage et transfert).

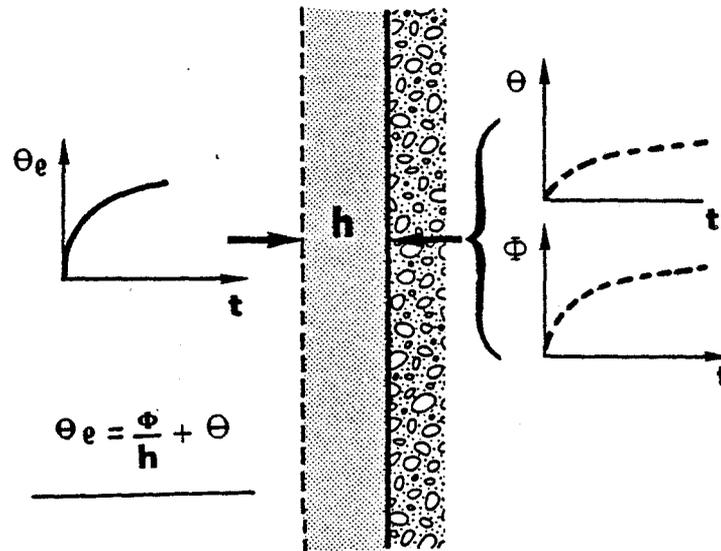
L'objectif de ce chapitre est d'étendre le domaine d'application de la méthode à des configurations réelles plus complexes (en particulier aux systèmes multicouches). Nous montrons comment il est possible d'introduire des composantes symétriques et antisymétriques $(\Sigma\phi, \Delta\theta)$ et $(\Sigma\theta, \Delta\phi)$ pour une paroi multicouche. Nous proposons également une nouvelle méthode pour mesurer les trois fonctions réponses (u_1, u_2, u_3) , caractéristiques d'une paroi multicouche. Dans une paroi homogène, la quantité $\Sigma\phi$ est liée de façon biunivoque à la quantité $\Delta\theta$ et, de la même façon $\Delta\phi$ ne dépend que de $\Sigma\theta$. Il n'en est pas de même pour une paroi multicouche puisque la matrice entrée-sortie obtenue en multipliant les matrices représentatives des transferts dans chaque couche homogène n'a pas la même forme que dans une paroi homogène. Il faut donc introduire une fonction réponse supplémentaire pour caractériser l'effet de dissymétrie.

II - SYSTEME BICOUCHE (PAROI - COEFFICIENT D'ECHANGE)

II-1- INTRODUCTION

Considérons une excitation de type convectif obéissant à la loi de Newton sur l'une des faces d'une paroi homogène (figure III-1) caractérisée de la façon suivante :

Figure III-1



$$\Phi_{\text{convectif}} = h(T_f - T_s) \quad \theta \rightarrow T_s$$

et

$$\Phi_{\text{conductif}} = \Phi_{\text{convectif}} \quad \theta_e \rightarrow T_f$$

T_s la température de la paroi, T_f la température du fluide loin de la paroi.
 h est le coefficient d'échange en (W/m^2K) .

Si le fluide est en mouvement par une circulation forcée, on dit qu'il y a convection forcée. Si le mouvement du fluide est spontané à cause des variations de masses volumiques dues à son échauffement, on dit qu'il y a convection libre. Le coefficient d'échange varie en fonction :

- de la nature du fluide ;
- des températures en présence : h croît quand $(T_s - T_f)$ croît ;
- de la vitesse de circulation du fluide au voisinage de la paroi ;
- de l'orientation de la paroi,
- de la dimension de la paroi.

En procédant comme précédemment, la solution de l'équation de Fourier peut être décomposée en une série de fonctions orthogonales chacune décroissant exponentiellement suivant une loi de la forme :

$$\exp\left(-\frac{\mu^2 a t}{4 e^2}\right) \quad , \quad a \text{ diffusivité thermique (m}^2/\text{s)}, e : \text{l'épaisseur}$$

Le coefficient μ étant solution de l'équation transcendante

$$\mu \cotg \mu = - \frac{eh}{\lambda} = H$$

Le développement en série de la partie transitoire du champ de température est représenté par l'expression :

$$\theta(x,t) = 2 \sum_1^{\infty} \frac{\mu_n + H \sin \mu_n}{\mu_n^2 + H \sin^2 \mu_n} \sin \mu_n x e^{-\frac{\mu_n^2 a t}{4 e^2}}$$

Cette relation montre que la méthode de la partie précédente basée sur le concept de fonctions orthogonales peut être étendue à des systèmes plus complexes pour représenter les transferts thermiques à la fois par conduction et par convection.

Il est nécessaire de situer l'efficacité de l'échange thermique entre le fluide et la paroi, le rapport résistance interne sur résistance externe définit le nombre de Biot :

$$\frac{R_i}{R_e} = \frac{e}{\lambda} \cdot \frac{1}{R_e} = \frac{e}{\lambda} \cdot h_e = B_i$$

Plusieurs cas de figures peuvent se présenter selon R_i et R_e :

a) Résistance extérieure R_e supérieure à la résistance interne R_i

Lorsque $R_e \gg R_i$, (avec $R_e > 10 R_i$) le nombre de Biot $< 0,1$, il est courant de considérer que la température intérieure de la paroi est uniforme, l'erreur étant $< 5 \%$.

b) Lorsque la résistance extérieure de la paroi R_e est inférieure à la résistance R_i , la face de la paroi et à la température du fluide. Ce cas correspond à la condition de Dirichlet introduite dans le premier chapitre.

c) N'oublions pas de considérer le troisième cas où le nombre de Biot est supérieur ou est égal à 0,1.

Dans la suite de ce travail, nous essayons d'étudier ces trois cas à l'aide de lignes électriques modélisant la paroi étudiée (le plexiglass).

II-2- MODELISATION A L'AIDE DES LIGNES ELECTRIQUES

Pour tenir compte du coefficient d'échange, on connecte une résistance à l'entrée de la ligne électrique modélisant une paroi homogène de paramètres thermophysiques (λ, ρ, c). La résistance est calculée en fonction de la résistance totale de l'échantillon.

Soit par exemple à modéliser une paroi de plexiglass de 2,5 mm d'épaisseur et 1,75 dm² de surface ; en tenant compte du coefficient d'échange, cela revient à considérer le schéma suivant :

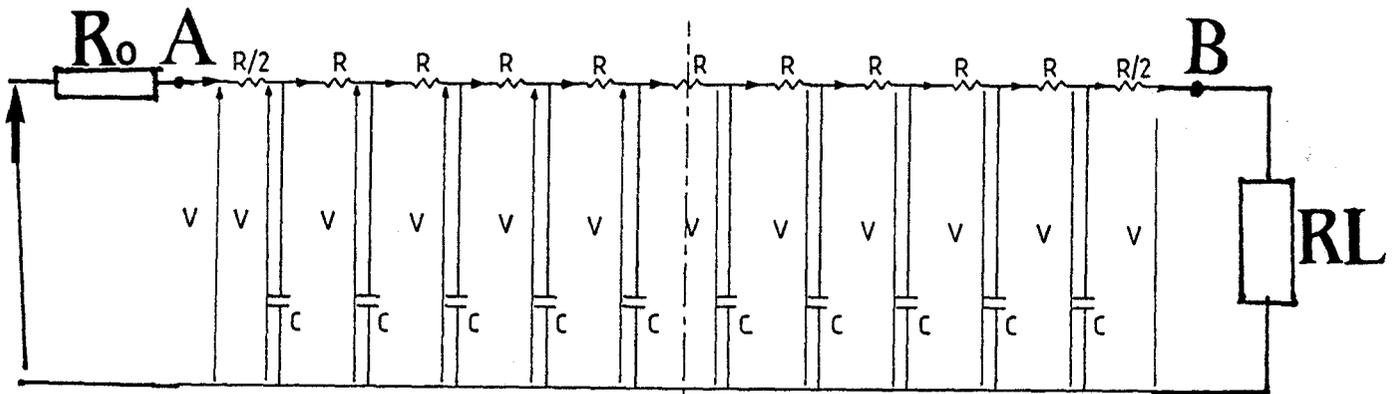


Figure III-2

ONDE INCIDENTE, ONDE REFLECHIE

D'une façon générale, l'énergie va de A vers B ; alors :

- on introduit (V_i, i_i) pour l'onde incidente,
- on introduit (V_r, i_r) pour l'onde réfléchie.

En régime sinusoïdal, la tension (et le courant) en un point quelconque de la ligne définie ci-dessus est la superposition d'ondes de tensions (V_i et V_r) et de courant (i_i et i_r) ayant toutes la même forme que la tension (et le courant) à l'entrée de la ligne, mais ayant des amplitudes différentes et apparaissant à des instants successifs. Ces instants sont obtenus à partir de multiples du temps de propagation τ . On peut ainsi décomposer l'onde incidente de tension V_i en une somme d'ondes $v_i, v_i', v_i'' \dots$ apparaissant aux instants $\theta, \theta + 2\tau, \theta + 4\tau$

De même, on peut décomposer l'onde réfléchie V_r en une somme d'ondes v_r , v_r^I , v_r^{II} ... apparaissant aux instants $(2\tau-\theta)$, $(4\tau-\theta)$, $(6\tau-\theta)$.

On a les mêmes résultats pour les ondes de courant.

COEFFICIENT DE REFLEXION A LA SORTIE

Le coefficient de réflexion à la sortie est $\Gamma_L = \frac{R_L - Z_C}{R_L + Z_C}$.

Nous rappelons que la résistance caractéristique est le rapport entre l'amplitude de la tension et l'amplitude du courant d'une même onde mobile $R_c = \frac{V_i}{I_i}$,

Nous rappelons que l'impédance caractéristique est donnée par la relation :

$$Z_C = \sqrt{\frac{R}{Cp}}$$

COEFFICIENT DE REFLEXION A L'ENTREE

A partir du début de la perturbation et pendant une durée égale à 2τ seule l'onde incidente agit à l'entrée. A partir de l'instant 2τ , une onde réfléchie par la sortie (v_r, i_r) parvient à l'entrée, s'y réfléchit à nouveau et donne naissance à une deuxième onde incidente (v_i^I, i_i^I).

Le coefficient de réflexion de la tension à l'entrée de la ligne est donné par : $\Gamma_0 = \frac{R_0 - Z_C}{R_0 + Z_C}$

II-3- PRINCIPAUX RESULTATS

Pour mettre en évidence l'influence du coefficient d'échange sur le coefficient de réflexion, nous nous sommes intéressés à la relation :

$$\Gamma_0 = \frac{Z_0 - Z_C}{Z_0 + Z_C} = \frac{1 - Z_C/Z_0}{1 + Z_C/Z_0} = \frac{1-k}{1+k}$$

avec $k = \frac{Z_C}{Z_0}$

$Z_0 = R$; Z_C est fonction de ω par conséquent de la fréquence (la seule façon de calculer Z_C est de fixer la fréquence) ; il nous est apparu plus judicieux de considérer trois valeurs arbitraires de la résistance $R_1 (R_1 = \frac{1}{hC})$, en vue de mettre en évidence l'influence de ce coefficient.

Pour cela, considérons le schéma expérimental (figure III-3) :

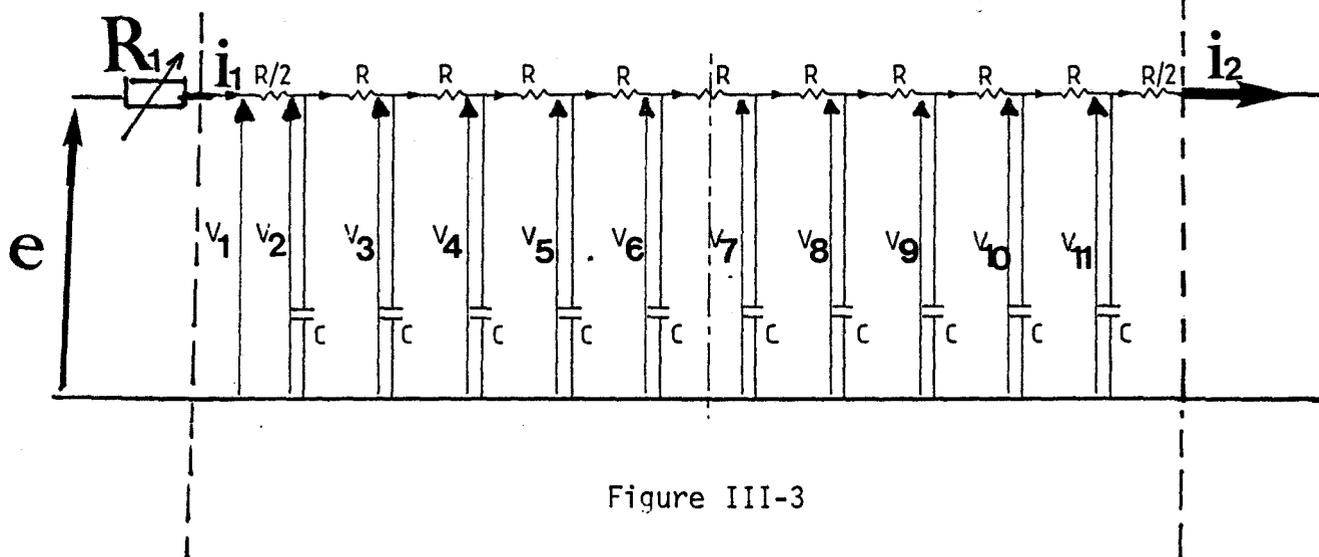


Figure III-3

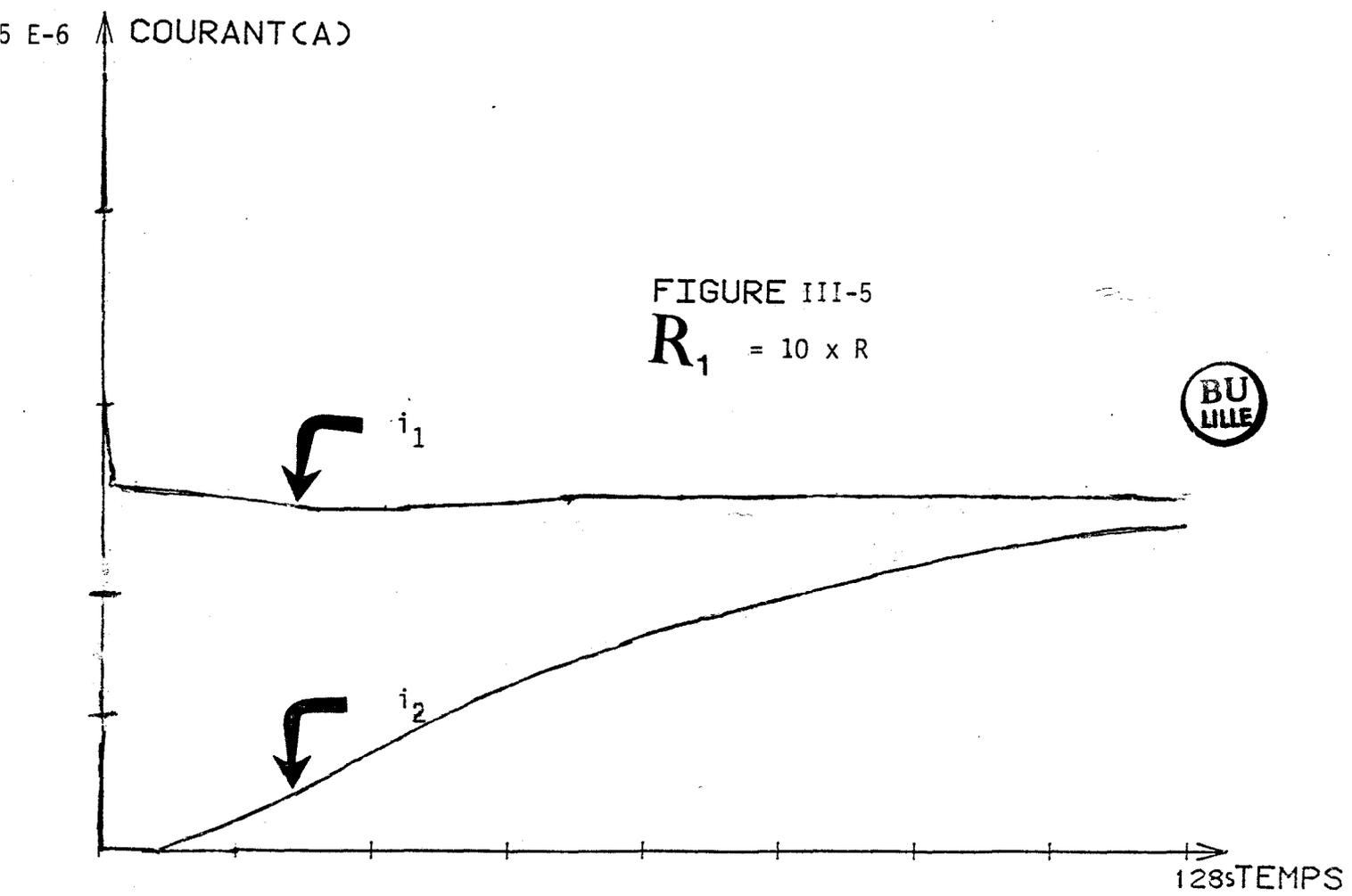
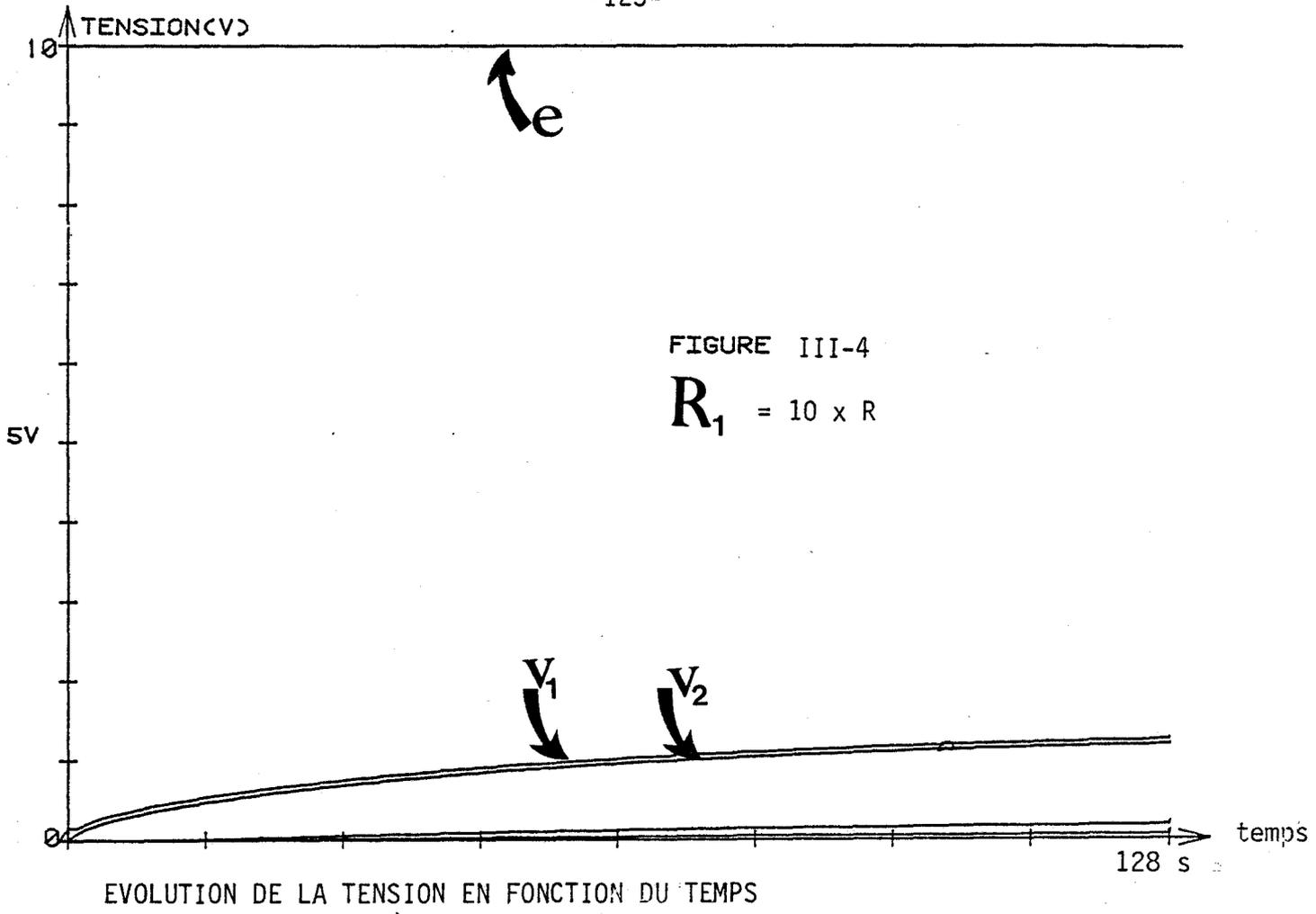
A l'instant $t = 0$, on applique une tension à l'entrée de l'ensemble (ligne, coefficient) fournie par un générateur d'impédance interne nulle ; les courants et tensions sont supposés nuls en tout point de la ligne avant l'instant initial ; l'autre extrémité de la ligne étant court-circuitée ($R_L = 0$). Le coefficient de réflexion à la sortie de la ligne définit par $\Gamma_L = \frac{R_L - Z_C}{R_L + Z_C}$ vaut -1 d'où $v_i = -v_r$; $i_i = i_r$ (il y a réflexion totale avec changement de signe pour la tension, sans changement de signe pour le courant).

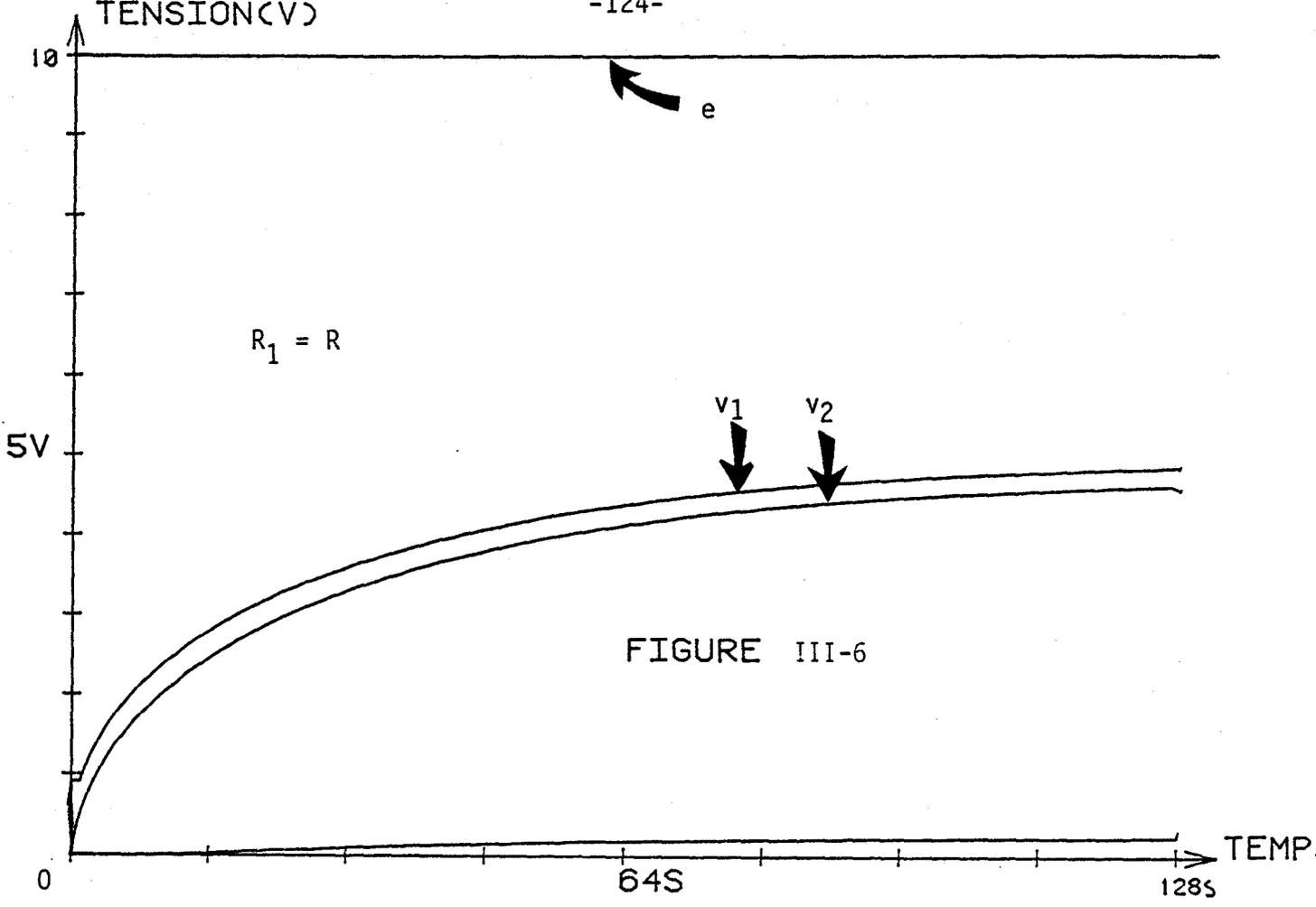
Sur la fig. III-4 nous avons représenté l'évolution de la tension en fonction du temps, l'évolution du courant est représentée figure III-5. ces résultats sont relatifs au cas où $R_1 = \frac{1}{h} = 10 R$ (R : résistance totale de l'échantillon). L'examen de ces courbes montre que le courant à l'entrée est constant (générateur de courant), l'onde venant de la sortie se réfléchit totalement, sans changement de signe pour la tension, avec changement de signe pour le courant (on a réflexion en tension).

La fig. III-6 donne les résultats lorsque $R_1 = \frac{1}{h} = R$; dans ce cas $\Gamma_0 = 0$ (ligne adaptée). On a réflexion de la tension et du courant.

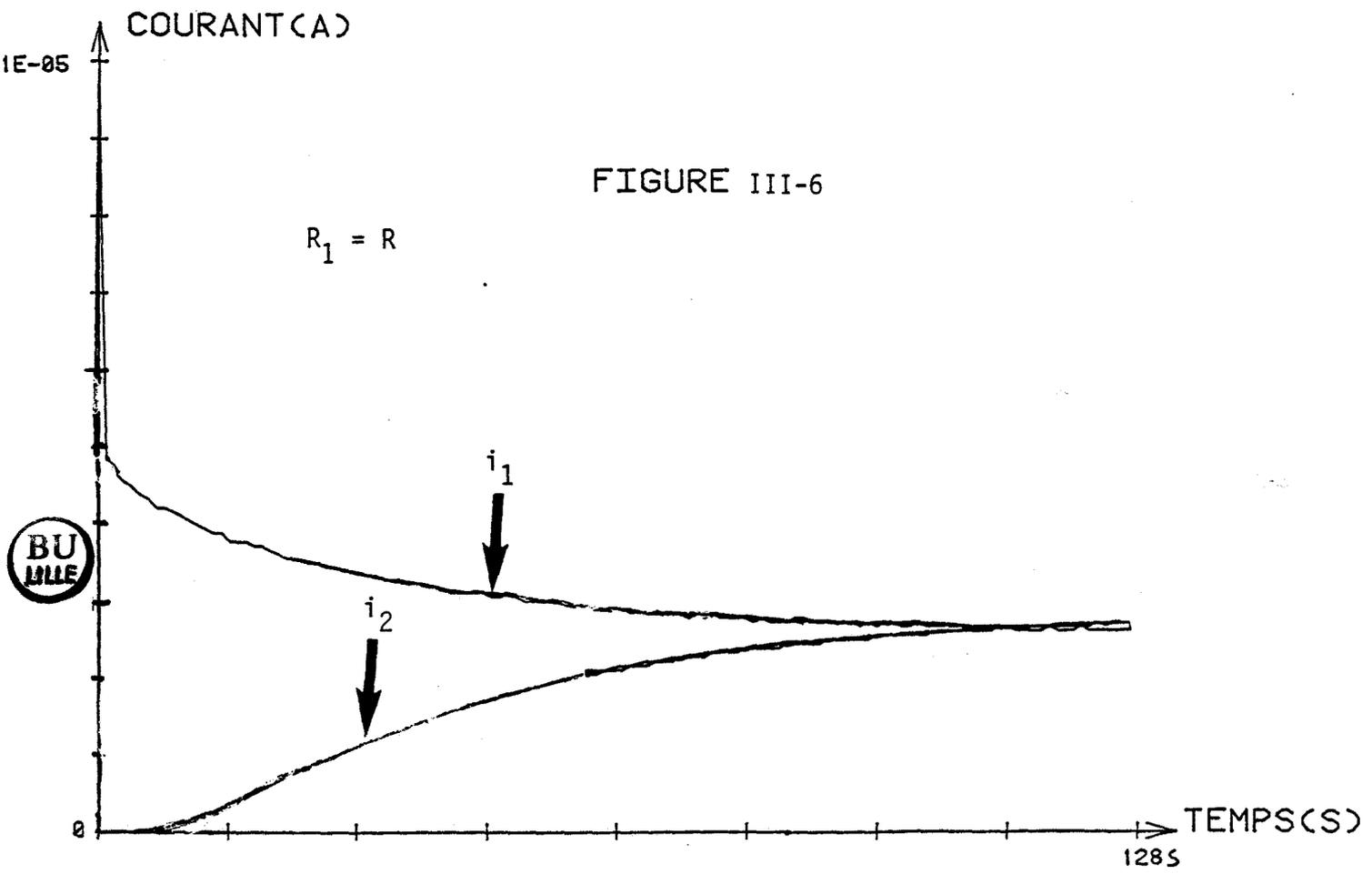
La figure III-7 illustre les résultats relatifs au cas où $R_1 = \frac{1}{h} = \frac{R}{10}$. Dans ce cas, $\Gamma_0 = -1$; l'examen des courbes montre que le courant à l'entrée de la ligne est important en régime transitoire.

L'onde venant de la sortie se réfléchit totalement avec changement de signe pour la tension, sans changement de signe pour le courant (on a réflexion





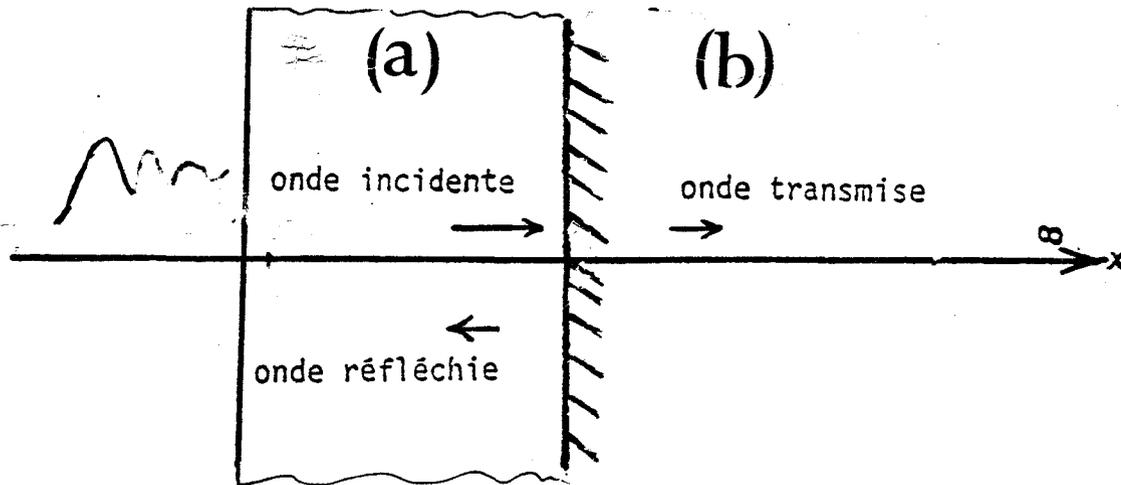
EVOLUTION DE LA TENSION EN FONCTION DU TEMPS



Compte tenu de la valeur du coefficient de réflexion à la sortie Γ_L :

- aucune variation de température n'est transmise au milieu b, puisque les amplitudes de toutes les ondes de température transmises sont identiquement nulles.
- Les variations de températures issues du milieu a sont réfléchies dans ce même milieu puisque le coefficient de réflexion vaut -1.

Les variations de flux sont transmises au milieu b. Le schéma de la figure suivante permet de mieux comprendre tous ces phénomènes.



III - PAROI MULTICOUCHE

La généralisation précédente nous conduit à introduire les quantités $(\Sigma\phi, \Delta\theta)$, $(\Sigma\theta, \Delta\phi)$ pour représenter le transfert et le stockage énergétique dans le système multicouche. Les fonctions orthogonales n'ayant pas la même symétrie par rapport aux coordonnées d'espace, les relations liant flux et températures sont plus complexes.

Le flux moyen traversant le système dépend à la fois de la différence de température $\Delta\theta$ et de l'élévation de température des parois.

Cette dépendance apparaît clairement lorsque l'on remplace chacun des milieux par une matrice de transition

$$\begin{vmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B' & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \end{vmatrix}$$

(θ_0, ϕ_0) représentent la température et le flux thermique à la sortie du premier échantillon.

Matrice de transition relative au deuxième échantillon

$$\begin{vmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & D \\ D' & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \end{vmatrix}$$

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, la matrice résultante n'est pas symétrique et les quantités précédentes ($\Sigma\phi, \Delta\phi, \Delta\theta, \Sigma\theta$)

$$\begin{vmatrix} \Sigma\phi \\ \Delta\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1 + \phi_2 \\ \phi_1 - \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{vmatrix}$$

ne sont plus liées entre elles par une matrice diagonale.

Il en résulte un couplage entre les modes lié par la relation :

$$\begin{aligned} \Sigma\phi &= h_1 * \Delta\theta(t) + h_2 * \Sigma\theta(t) \\ \Delta\phi &= h_3 * \Sigma\theta(t) + h_2 * \Delta\theta(t) \end{aligned}$$

avec : $h_1 = \mathcal{L}^{-1}(A_1)$ $h_2 = \mathcal{L}^{-1}(A_2)$ $h_3 = \mathcal{L}^{-1}(A_3)$

en terme de réponses impulsionnelles ou en terme de réponses indicielles.

La relation précédente se généralise sous la forme :

$$\Sigma\phi = u_1 * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta + u_2 * \frac{\partial}{\partial t} \Sigma\theta$$

De la même façon, le bilan des flux dans le système dépend à la fois de la température moyenne des surfaces d'échange $\Sigma\theta$ et de la différence de température $\Delta\theta$

$$\Delta\phi = u_2 * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta + u_3 * \frac{\partial}{\partial t} \Sigma\theta$$

L'évolution d'un système initialement à l'équilibre thermique est décrite par trois fonctions réponses u_1, u_2 et u_3 .

IV - MESURE DES FONCTIONS REPONSES

Compte tenu de la forme des relations précédentes la méthode de mesure des coefficients u_1 , u_2 et u_3 est définie de la façon suivante :

IV-1- SOLLICITATION SYMETRIQUE PURE

Le système dissymétrique est soumis à une variation égale de température sur chacun de ses accès.

Les flux entrant dans le système sont inégaux.

Les quantités $\Sigma\phi$ et $\Delta\phi$ sont définies par les relations :

$$\Sigma\phi = u_2 * \frac{\partial}{\partial t} \Sigma\theta = u_2$$

$$\Delta\phi = u_3 * \frac{\partial}{\partial t} \Sigma\theta = u_3$$

IV-2- SOLLICITATION ANTISYMETRIQUE

De la même façon, lorsque le système est soumis à une sollicitation dissymétrique

$$\Sigma\phi = u_1 * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta = u_1$$

$$\Delta\phi = u_2 * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta = u_2$$

Les fonctions réponses (u_1 , u_2 et u_3) sont obtenues par enregistrement des flux correspondant à chacune des sollicitations symétrique ou antisymétrique.

V - REPONSES INDICIELLES

Pour une sollicitation de ce type, l'un des accès du système est maintenu à température constante, l'autre accès étant soumis à une sollicitation unitaire. Dans ces conditions $\Sigma\theta = \Delta\theta$.

Le système étant dissymétrique, les accès d'entrée et de sortie sont repérés par les indices (1,2).

Pour la configuration (1,2), entrée 1 sollicitée, accès 2 maintenu à température constante.

$$\Sigma\phi_{1,2} = (u_1 + u_2) * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta = u_1 + u_2$$

$$\Delta\phi_{1,2} = (u_2 + u_3) * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta = u_2 + u_3$$

soit en explicitant les flux ϕ_1 et ϕ_2

$$\phi_1 = \frac{\Sigma\phi + \Delta\phi}{2} = u_2 + \frac{u_1 + u_3}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{\Sigma\phi - \Delta\phi}{2} = \frac{u_1 - u_3}{2}$$

Les flux ϕ_1 et ϕ_2 sont des superpositions complexes des fonctions élémentaires de base.

L'évolution de l'état de la configuration inverse est obtenue en changeant le signe de la fonction réponse u_2 , donc une excitation imposée côté 2, l'accès 1 étant maintenue à température constante.

$$\Sigma\phi_{2,1} = (u_1 - u_2) * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta = u_1 - u_2$$

$$\Delta\phi_{2,1} = (u_3 - u_2) * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta = u_3 - u_2$$

$$\phi_1 = -u_2 + \frac{u_1 + u_3}{2} = \frac{\Sigma\phi_{2,1} + \Delta\phi_{2,1}}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} = \frac{\Sigma\phi - \Delta\phi}{2}$$

Les réponses indicielles sont faciles à simuler au moyen de lignes électriques connectées en cascade et s'obtiennent par superposition des fonctions réponses élémentaires u_1 , u_2 et u_3 .

La comparaison des flux (ϕ_1 et ϕ_2) obtenue pour chacune des configurations (1,2) et (2,1) montre que la dissymétrie du système est représentée par la seule fonction u_2 . En effectuant la différence des flux ϕ_1 et ϕ_2 entrant dans le système, côté excitation, il vient en effet :

$$\phi_1 - \phi_2 = 2 u_2$$

(1,2) (2,1)

VI - VERIFICATION EXPERIMENTALE

Les résultats du premier chapitre sont relatifs à des structures symétriques pour lesquelles on peut toujours décomposer un processus thermique en deux modes de base indépendants. Dans ce paragraphe, nous traiterons le problème plus général des structures dissymétriques pour lesquelles il y a couplage des modes.

VI-1- ETUDE D'UNE STRUCTURE MULTICOUCHE

L'objectif est de présenter une nouvelle méthode de mesure des fonctions réponses u_1 , u_2 et u_3 . Les résultats obtenus sur diverses structures dissymétriques peuvent être utilisés pour simuler la réponse de ces structures à des signaux quelconques.

VI-1-1- Mesure des fonctions réponses

Nous avons montré précédemment pour une structure multicouche que l'on pouvait introduire deux relations :

$$\Sigma\phi = u_1 * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta + u_2 * \frac{\partial}{\partial t} \Sigma\theta$$

$$\Delta\phi = u_2 * \frac{\partial}{\partial t} \Delta\theta + u_3 * \frac{\partial}{\partial t} \Sigma\theta$$

Pour déterminer chacune de ces fonctions réponses, nous procédons de la façon suivante :

- Sollicitation symétrique

En imposant aux deux accès une sollicitation en échelon (figure IV-1), on obtient :

$$\Sigma\phi = u_2 \quad \text{et} \quad \Delta\phi = u_3$$

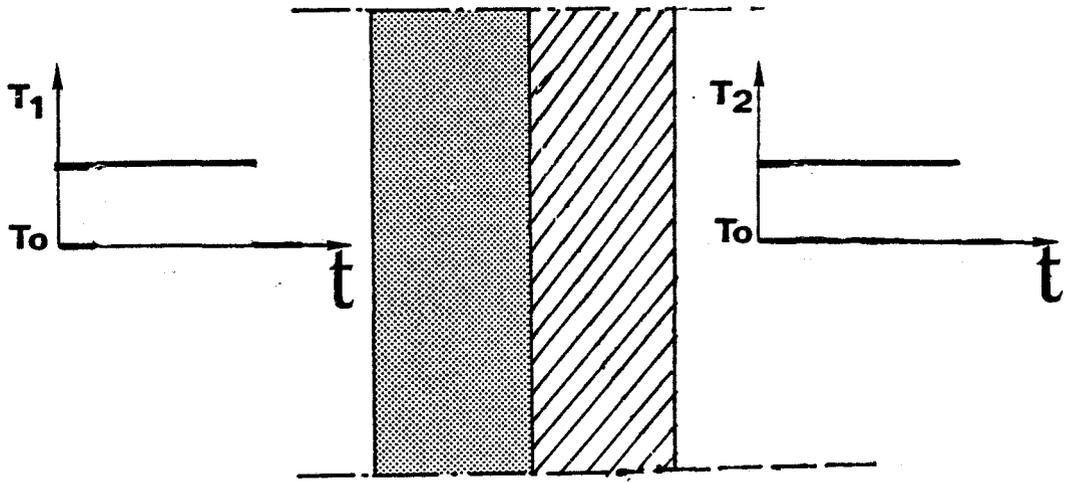


Figure III-8

- Sollicitation antisymétrique

Nous avons imposé deux sollicitations égales mais de sens contraire comme le montre la figure III-8 , et dans ce cas :

$$\Sigma\theta = \theta_1 - \theta_2 = 0$$

$$\Sigma\phi = u_1 \quad \Delta\phi = u_2$$

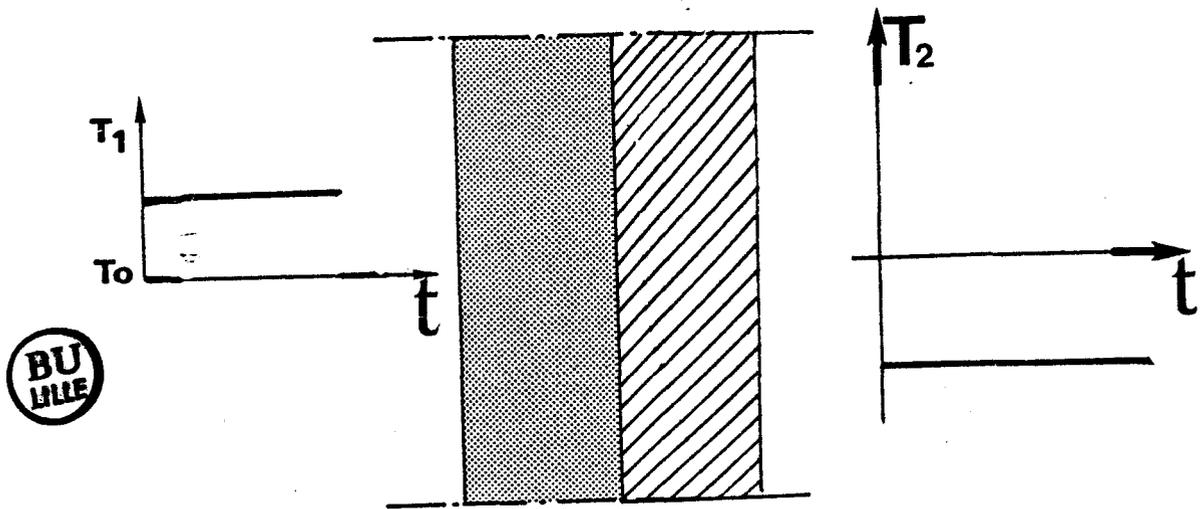


Figure III-9

VI-1-2- Modélisation par les lignes électriques

Le bicouche est constitué des deux matériaux déjà étudiés séparément : le polystyrène (d'épaisseur 2,5 mm et de surface 1,75 dm²) et le plexiglass de mêmes dimensions.

Chacun de ces matériaux est modélisé par un ensemble de dix cellules RC montées en cascade. Les deux schémas électriques correspondant à chacune des figures précédentes seront représentés ci-après (figure III-10 et figure III-11)

Nous rappelons que les deux échantillons ont pour constantes thermophysiques :

Matériau	ρ	λ	c	a	b
Polystyrène	11,8	0,03	1200	$2,12 \cdot 10^{-6}$	20,6
Plexiglass	1165	0,18	1380	$1,15 \cdot 10^{-7}$	538

Connaissant les différents paramètres, il est possible de calculer la résistance thermique et la capacité thermique de chaque échantillon, en utilisant les relations suivantes :

$$RC = \frac{\ell^2}{a} \quad \text{et} \quad \frac{R}{C} = \frac{1}{b^2}$$

soit

$$C \rightarrow \frac{\ell \cdot b}{\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad R \rightarrow \frac{\ell}{b \sqrt{a}}$$

a = diffusivité du système thermique

b = effusivité du système thermique

ℓ = longueur du système thermique

R = résistance globale de la ligne thermique

C = capacité globale de la ligne thermique

Pour déterminer les flux et les températures thermiques, nous utiliserons les schémas électriques suivants :

Mode symétrique

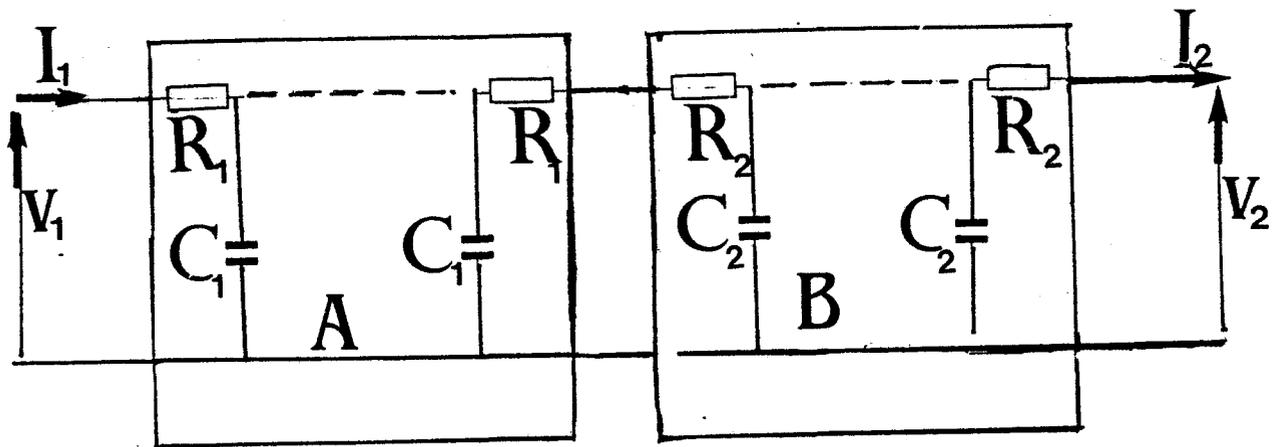


Figure III-10

Mode antisymétrique

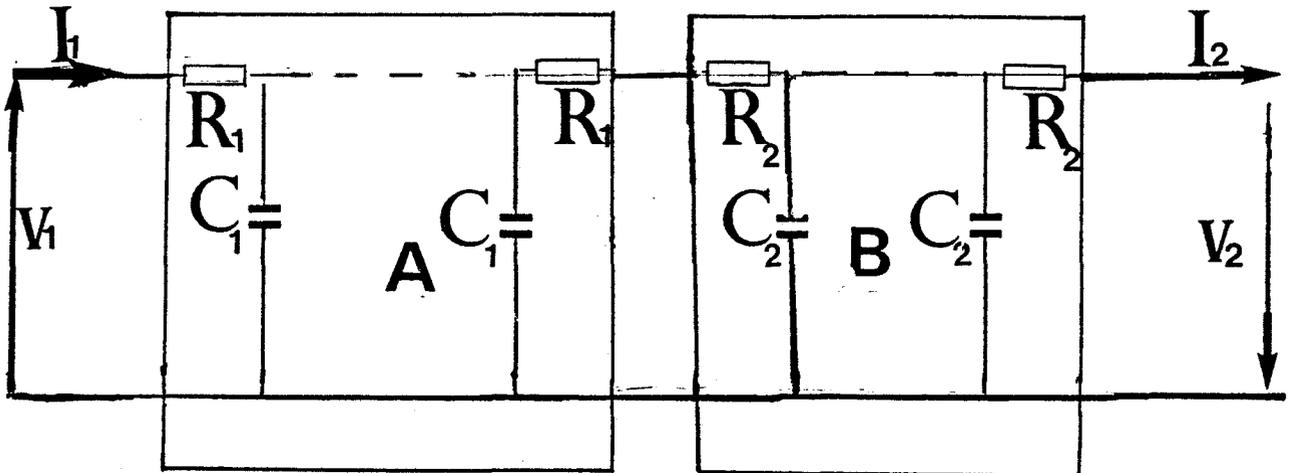


Figure III-11



La figure III-12 représente l'évolution des tensions (températures) en fonction du temps dans le cas d'une attaque symétrique.

L'examen de l'ensemble de ces courbes(III-12) montre :

- d'une façon très significative l'influence du coefficient de couplage,
- le régime d'effusivité de chacun des deux échantillons,
- l'effet du bicouche (AB ou BA) qui n'intervient pas.

La figure III-13 représente l'évolution des tensions en fonction du temps (système soumis à une attaque antisymétrique). Là aussi, on voit apparaître le terme de couplage.

Les fonctions réponses sont représentées fig. III-14. Dans ce cas, nous remarquons qu'en régime transitoire $u_1 = u_3$, par contre u_2 prend une valeur négative. En régime permanent u_3 , u_2 tendent vers une valeur nulle, par contre u_1 tend vers une valeur constante (rappelons tout simplement que $u_1 = (\phi_1 + \phi_2)_{ant.}$, $u_2 = (\phi_1 + \phi_2)_{sy.}$ et $u_3 = (\phi_1 - \phi_2)_{sy.}$).

Les trois fonctions réponses caractérisent entièrement le système. La fonction u_3 est représentative du transfert de chaleur au travers de la structure ; les fonctions u_2 et u_1 sont représentatives du stockage dissymétrique de chaleur dans le système.

La figure III-15 représente les réponses u_1 , u_2 , u_3 mesurées sur le même système inversé. Il est intéressant de remarquer que la fonction u_2 présente dans ce cas particulier une inversion de signe.

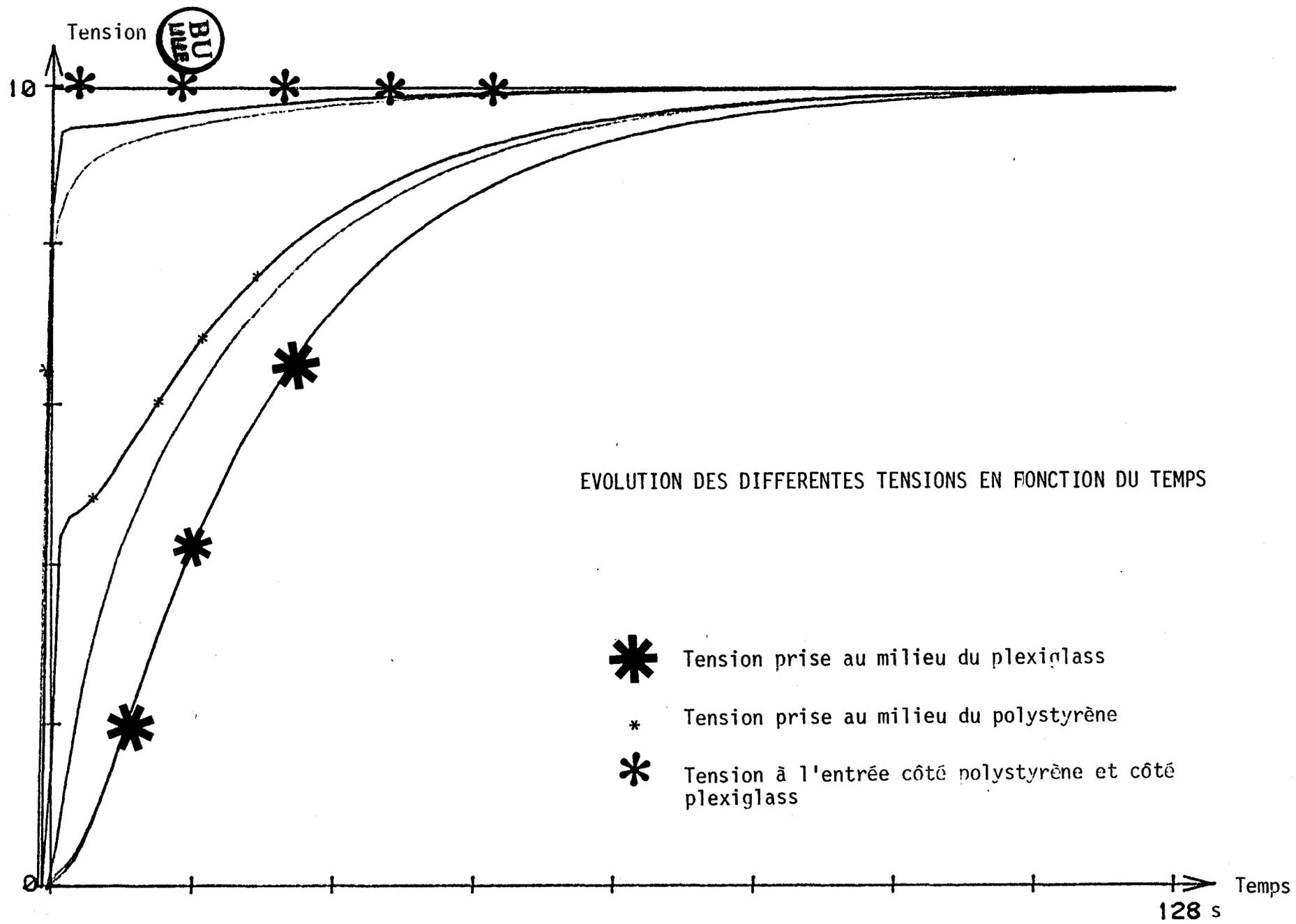


Figure III-12
MODE SYMIETRIQUE

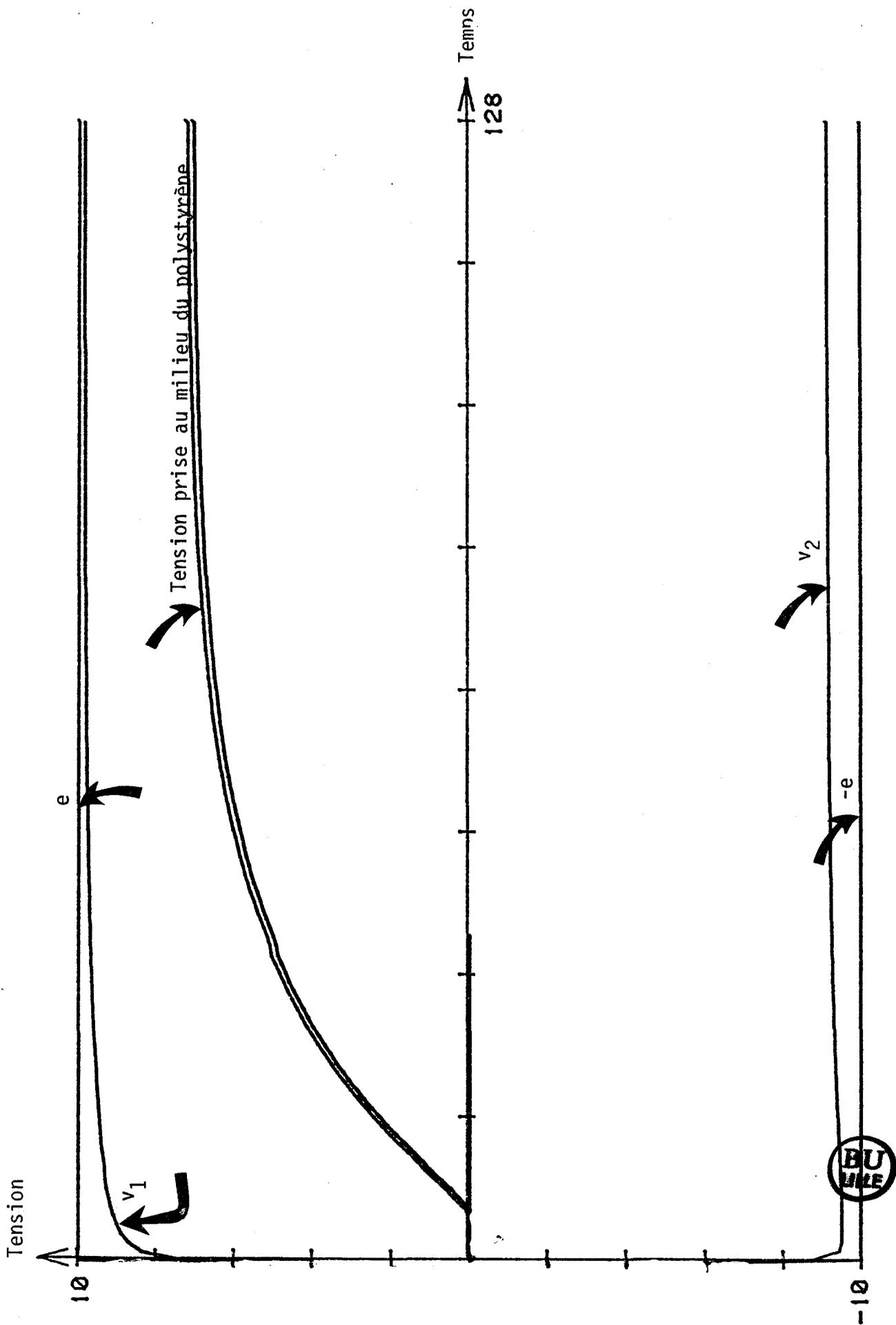
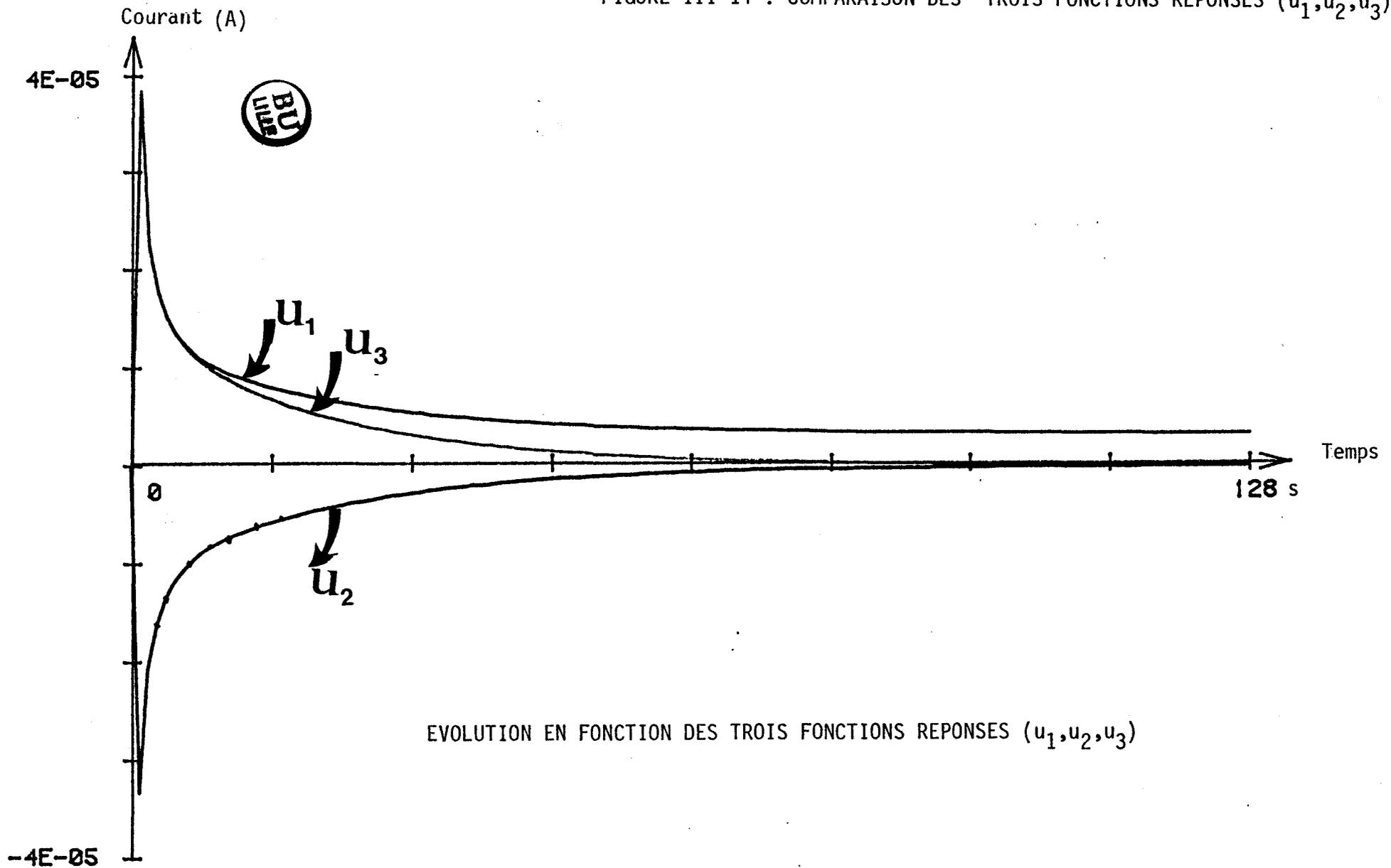


FIGURE III-13 : EVOLUTION DE LA TENSION EN FONCTION DU TEMPS

FIGURE III-14 : COMPARAISON DES TROIS FONCTIONS REPOSES (u_1, u_2, u_3)



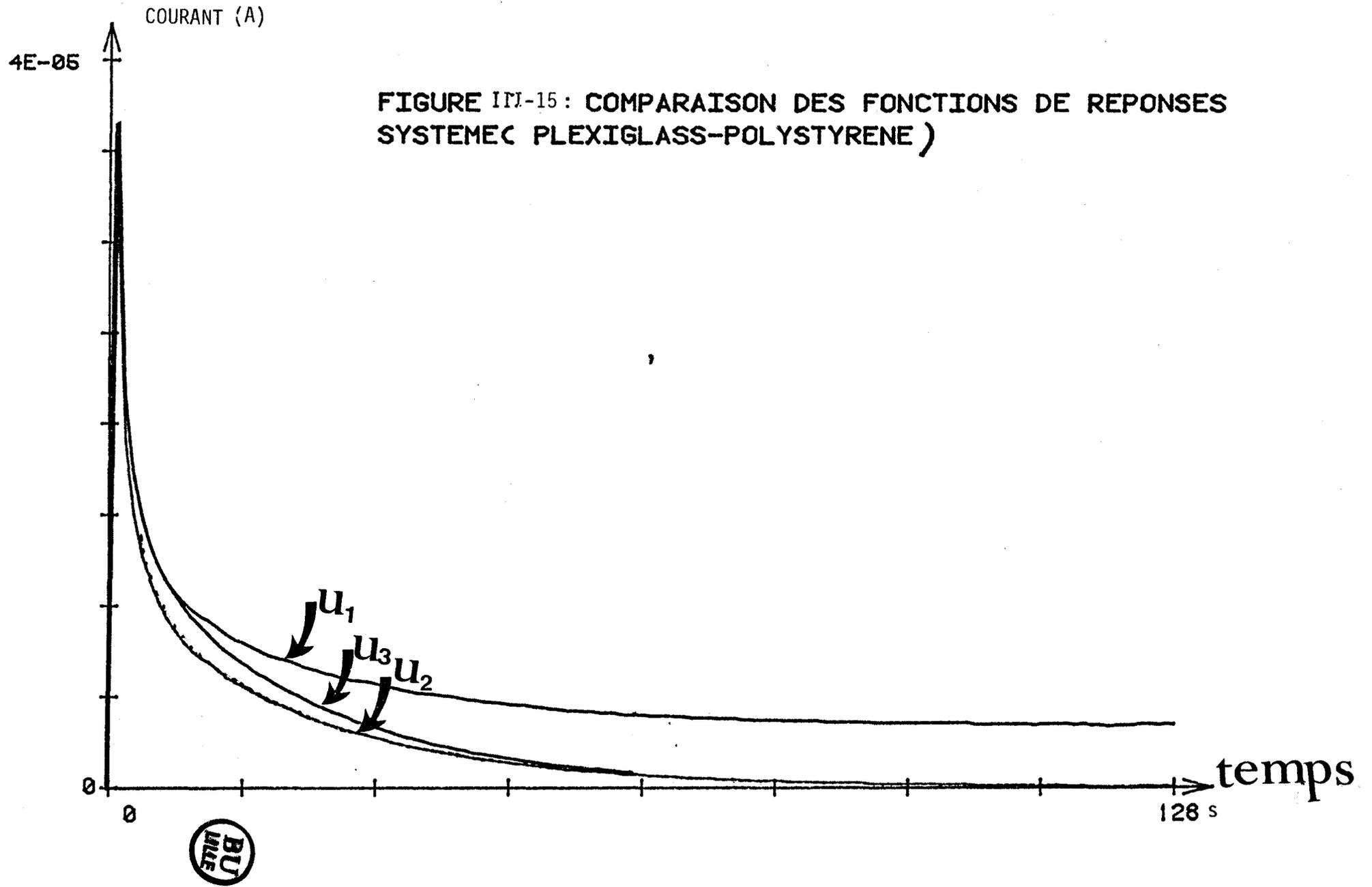


FIGURE III-15: COMPARAISON DES FONCTIONS DE REPOSES SYSTEMEC PLEXIGLASS-POLYSTYRENE)

VI-1-3- Réponses indicielles

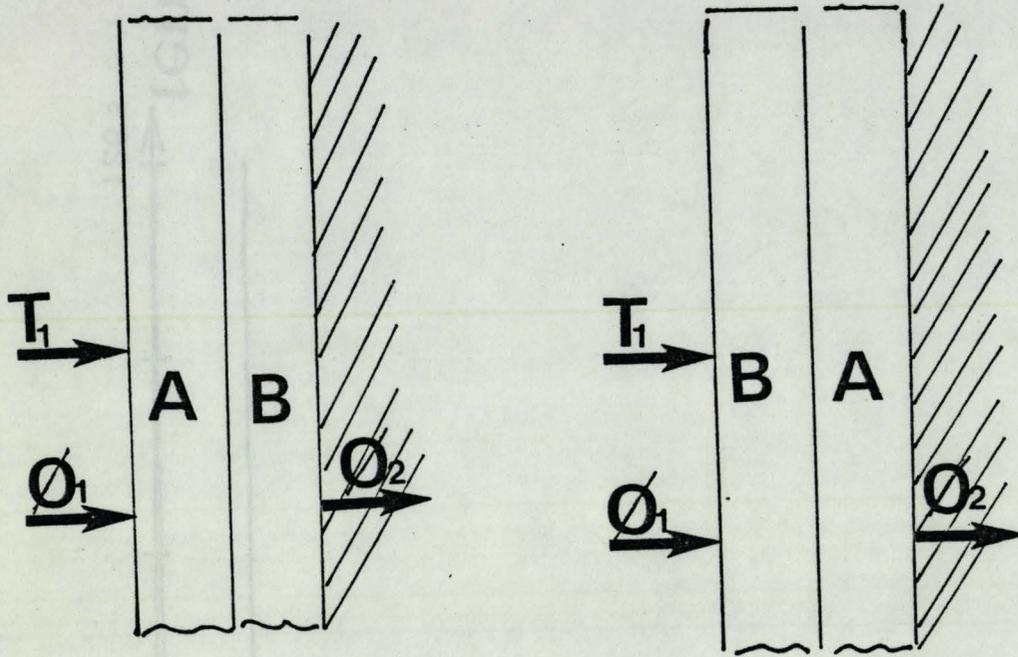


Figure III-16

Modélisation à l'aide des lignes électriques

Pour cela, considérons le schéma de la figure III-17

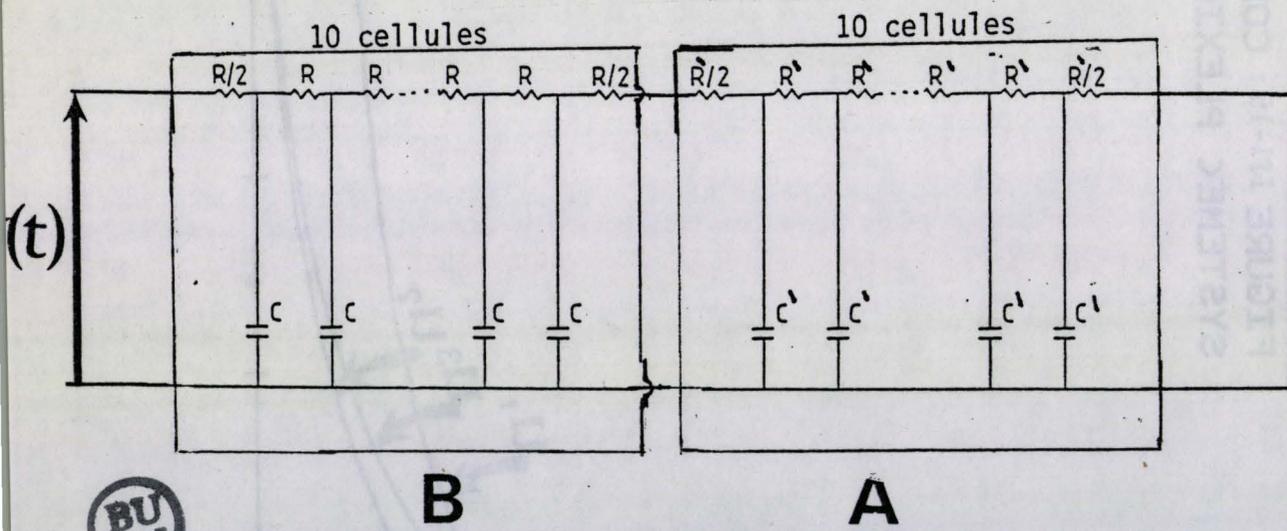


Figure III-17.

A l'entrée de la ligne nous avons appliqué un échelon de tension de 10 volts ($V(t) = 10 \text{ V}$), et avons imposé $V_S = 0$ (court-circuit).

Nous nous sommes intéressés aux courants circulant dans chaque branche et aux tensions électriques aux différents noeuds pour les deux configurations ($A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$).



Les résultats expérimentaux pour la première sont représentés sur les figures III-18 et III-19 ; ceux de la seconde configuration sont représentés figures III-20 et III-21.

L'examen du réseau de courbes représenté sur la figure III-18 montre qu'il y a une forte chute de tension dans le polystyrène (due à la forte résistance de ce dernier) ; à l'entrée du plexiglass une tension de 0,5 Volts est appliquée.

La tension à l'entrée du plexiglass est nulle pour $t < 1,1$ seconde alors que la suite des tensions dans le polystyrène est presque au régime permanent. Pour $t = 16$ secondes, temps pendant lequel nous avons fait nos mesures, la tension à la sortie du polystyrène atteint le régime permanent. Par contre, les tensions dans le plexiglass sont encore loin d'atteindre ce régime.

Les courants correspondants (fig. III-19) convergent vers $1 \mu A$. Une nouvelle fois, on constate que le régime permanent n'est pas encore atteint pour le plexiglass.

Les courbes de la seconde configuration (fig. III-20) montrent que pour $t = 128$ secondes, le régime permanent est atteint et que la tension à l'entrée du polystyrène est loin d'être négligeable (8 V).

Les courants représentés sur la fig. III-21 convergent vers $1 \mu A$. En régime permanent, les courants sont indépendants de la disposition des couches.

L'ensemble de ces résultats nous conduit à faire les remarques suivantes. La disposition de ces couches revêt une grande importance dans les problèmes d'isolation thermique en régime variable et de la localisation des énergies "dissipées". Par contre, en régime établi, la position de l'isolant ne joue pas un rôle très important car les flux (à l'entrée du bicouche et à la sortie) sont proportionnels à la somme des résistances des couches composites.

Le temps de réponse du bicouche (polystyrène-plexiglass) est inférieur à celui de la configuration (plexiglass-polystyrène). Ce résultat met en évidence l'intérêt d'isoler les parois par l'intérieur en régime variable.

Polystyrène

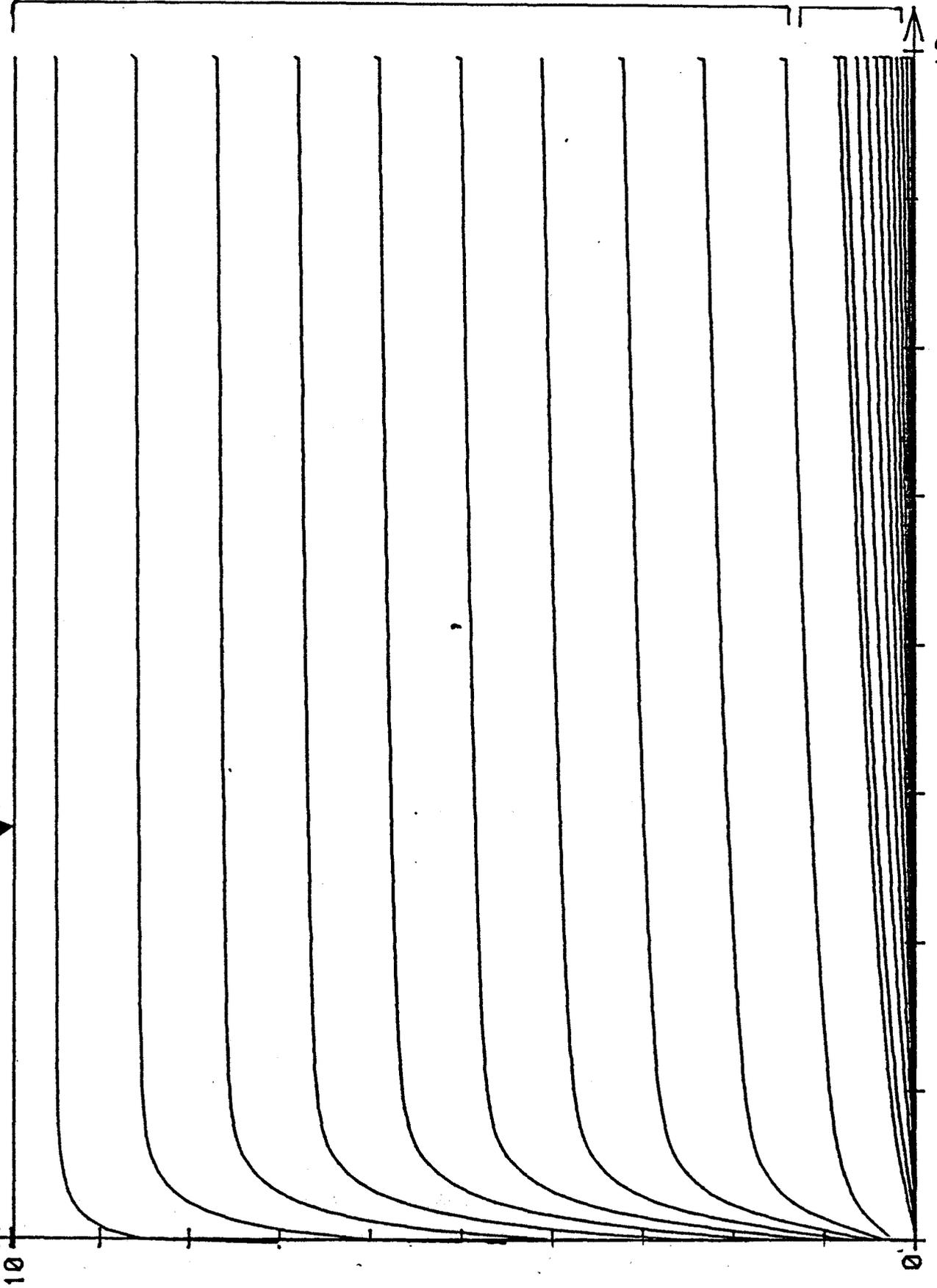
Plexiglass

temps

tension à l'entrée



Tension



16

FIGURE III-18

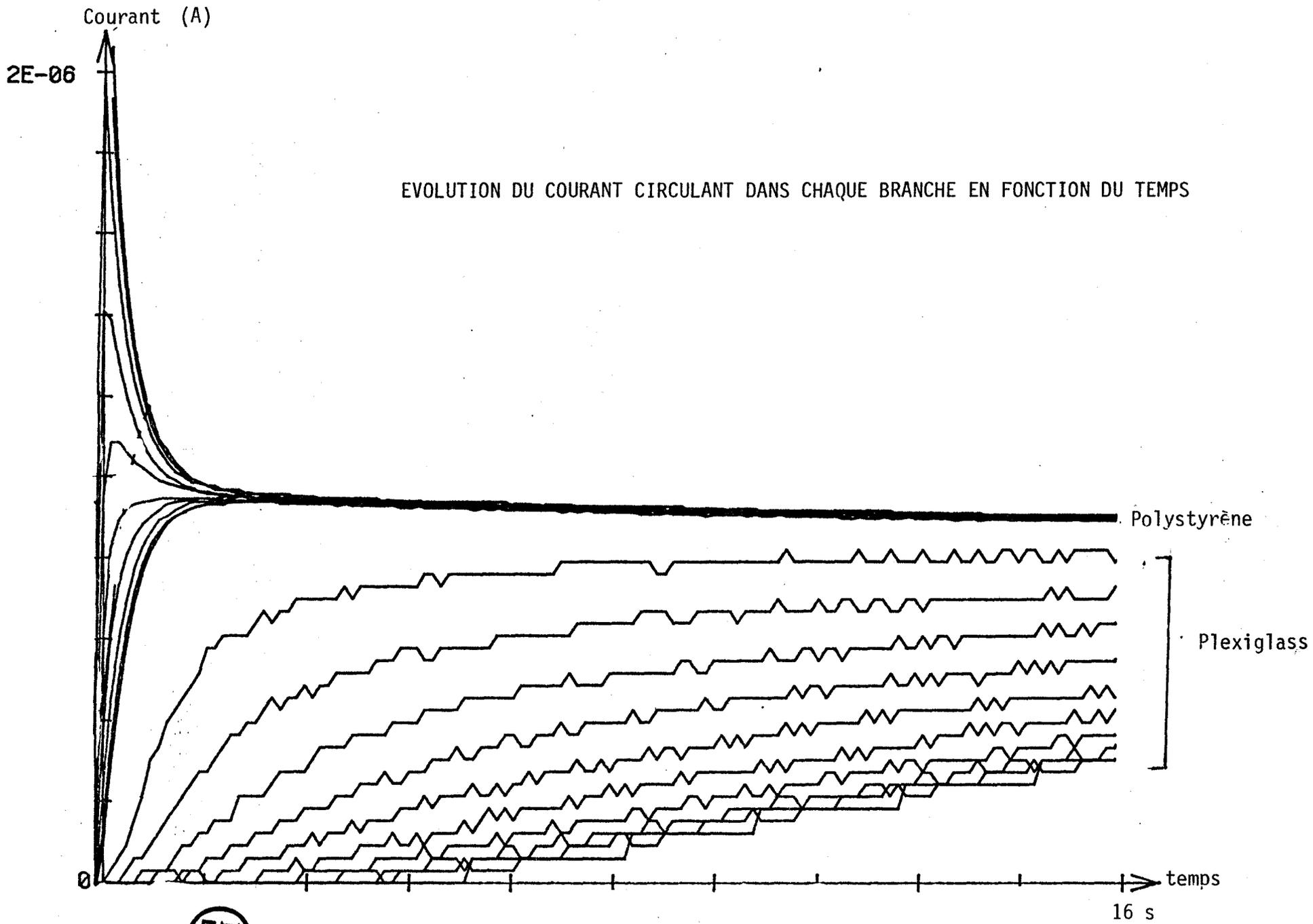


FIGURE III-19

Plexiglass

Polystyrène

Temps

128 A

Tension

10

0

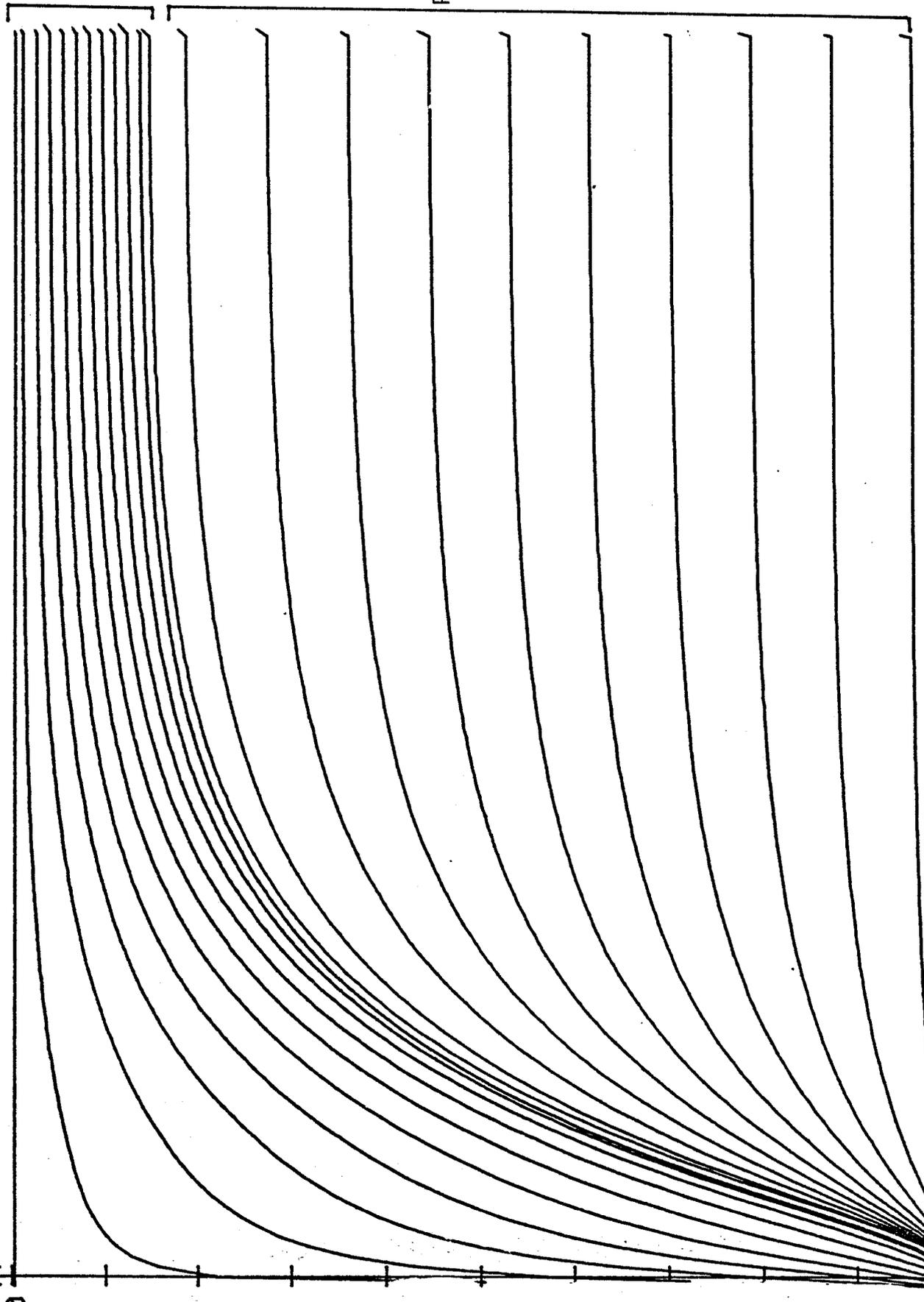
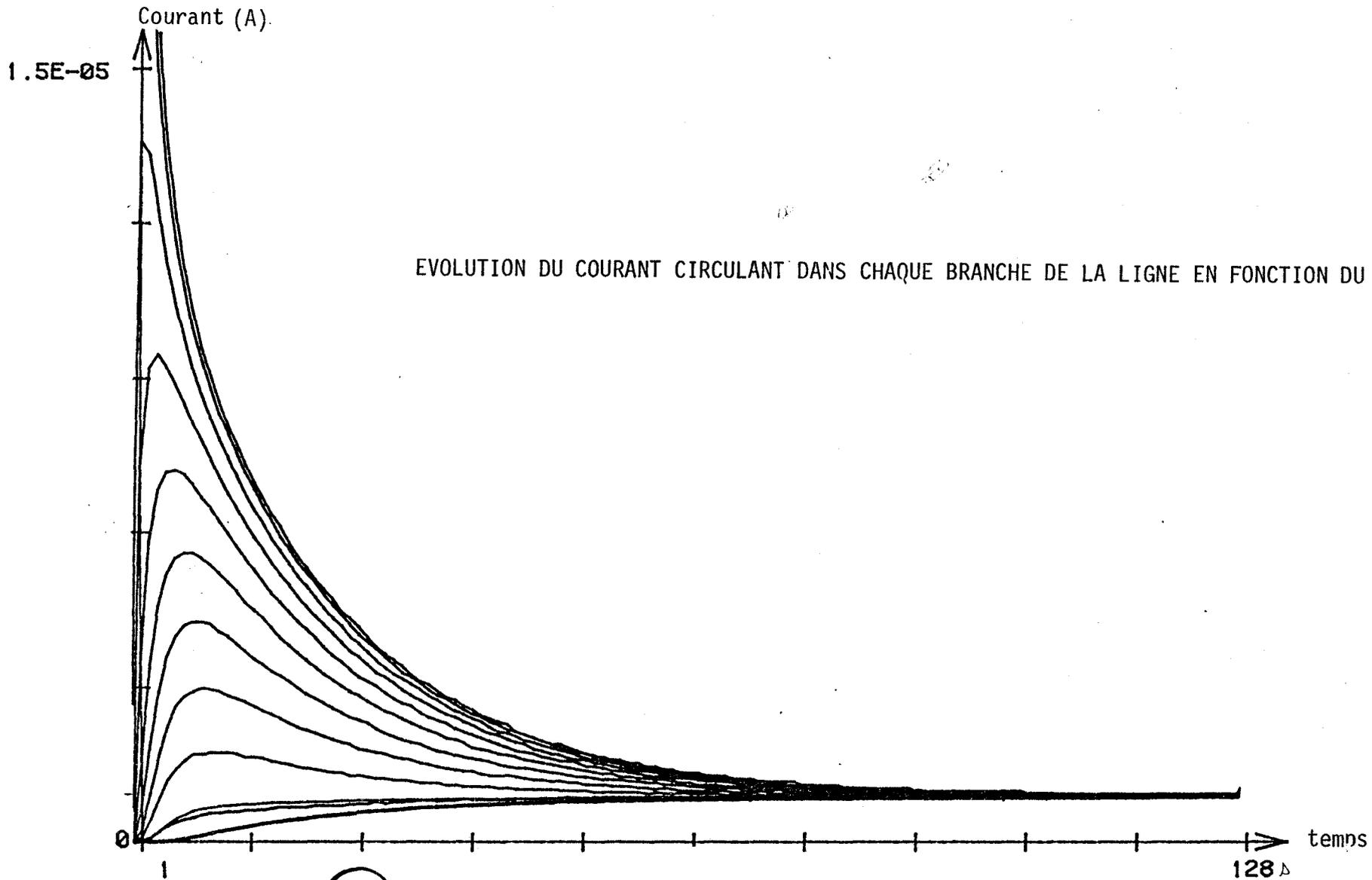


FIGURE III-20



EVOLUTION DU COURANT CIRCULANT DANS CHAQUE BRANCHE DE LA LIGNE EN FONCTION DU TEMPS



FIGURE III-21

Rappelons que le temps de réponse est défini comme le temps donnant la réponse à 90 % de sa valeur moyenne finale.

Rappelons aussi qu'en régime transitoire, le module de l'impédance d'entrée est égal à l'impédance caractéristique de la première couche. Dans ce domaine, c'est l'effusivité thermique de la première couche de la paroi ($b = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{\omega}$) qui régit l'ensemble du phénomène thermique.

En régime permanent, l'impédance d'entrée est égale en module à la somme des résistances thermiques des différentes couches constitutives quel que soit l'ordre de disposition de ces couches dans la paroi. Cela illustre de nouveau l'importance de la disposition des couches.

Sur la figure III-22 nous avons représenté les tensions moyennes dans la première ligne modélisant le polystyrène et dans la deuxième ligne modélisant le plexiglass. Ce résultat est relatif à la première configuration.

Sur la figure III-23 les résultats relatifs à la deuxième configuration sont représentés.

Pour déterminer la température moyenne du bicouche, nous sommes partis de la relation :

$$(C_1 + C_2) \bar{T} = C_1 \bar{T}_1 + C_2 \bar{T}_2$$

C_1 : capacité thermique du premier matériau,

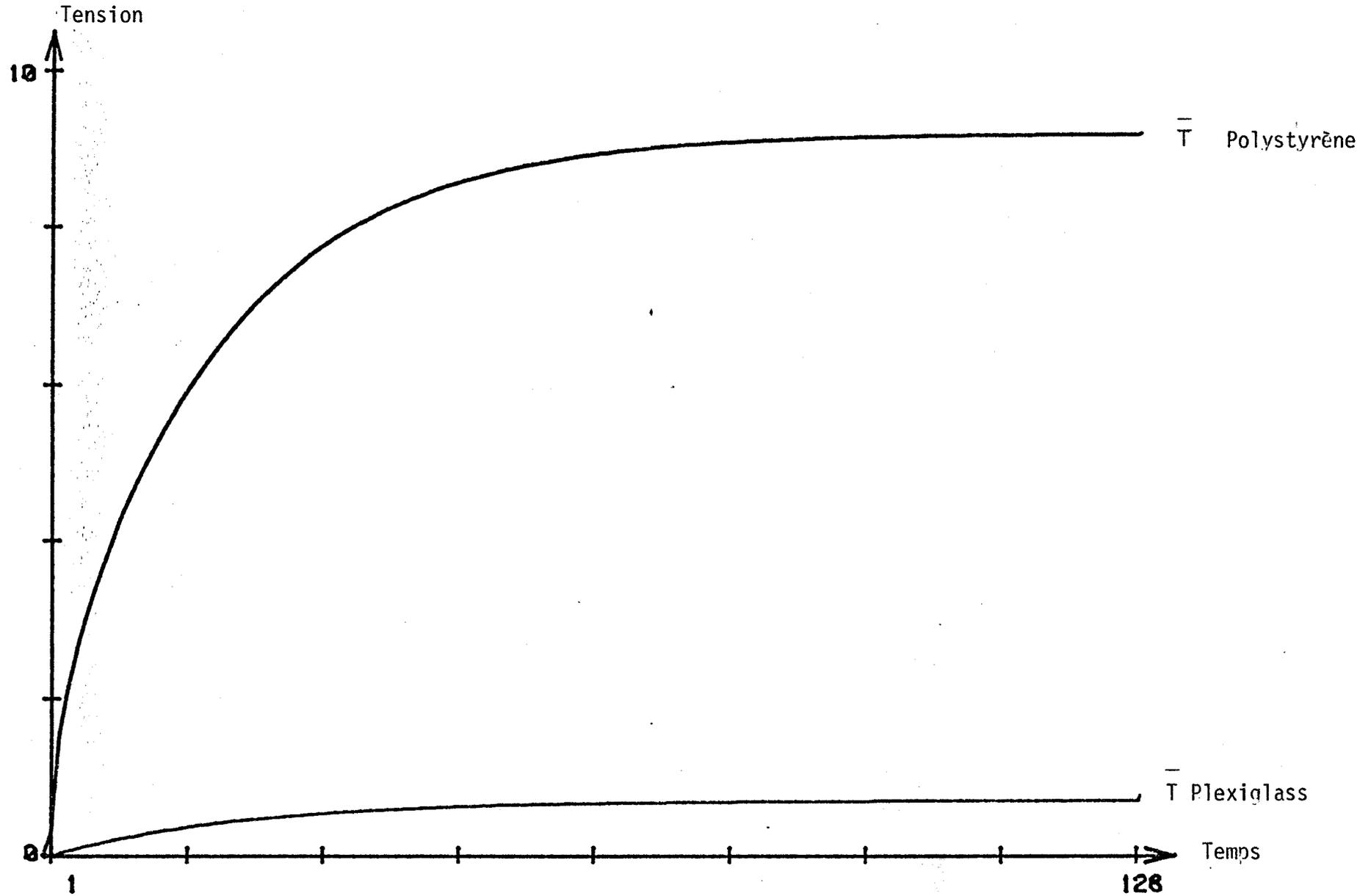
C_2 : " " " second "

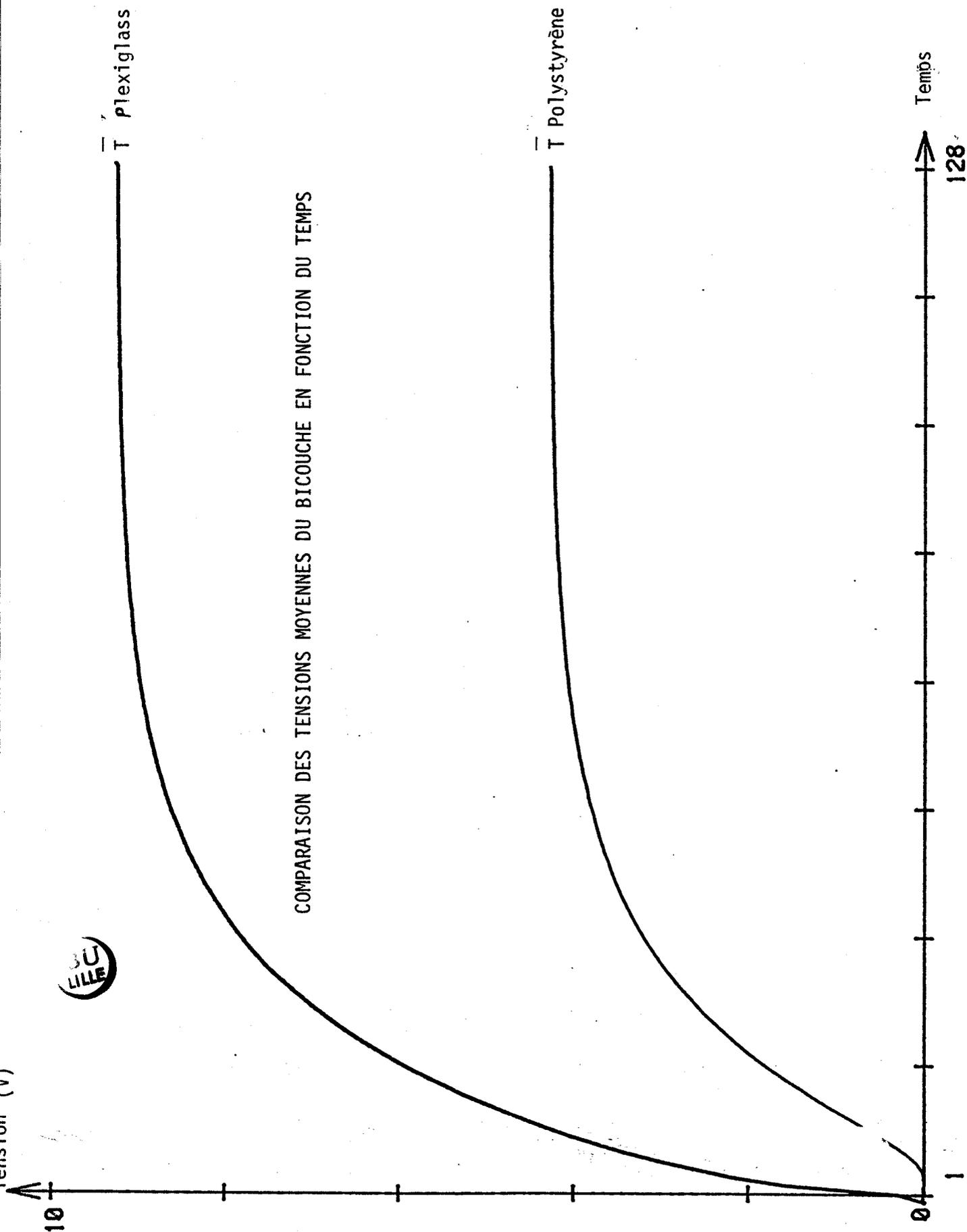
La figure III-24 illustre les résultats relatifs à la température moyenne selon que l'on a la configuration A-B ou la configuration B-A. Ces résultats sont très significatifs.

Comparaison des résultats (mesurés et calculés) des flux à l'entrée et à la sortie

Nous avons montré comment il est possible de calculer les réponses individuelles en fonction de (u_1, u_2, u_3).

FIGURE III-22 : COMPARAISON DES TENSIONS MOYENNES (PLEXI-POLY EN FONCTION DU TEMPS LES DEUX ECHANTILLONS ONT LES MEMES DIMENSIONS





COMPARAISON DES TENSIONS MOYENNES DU BICOUCHE EN FONCTION DU TEMPS

FIGURE III-23

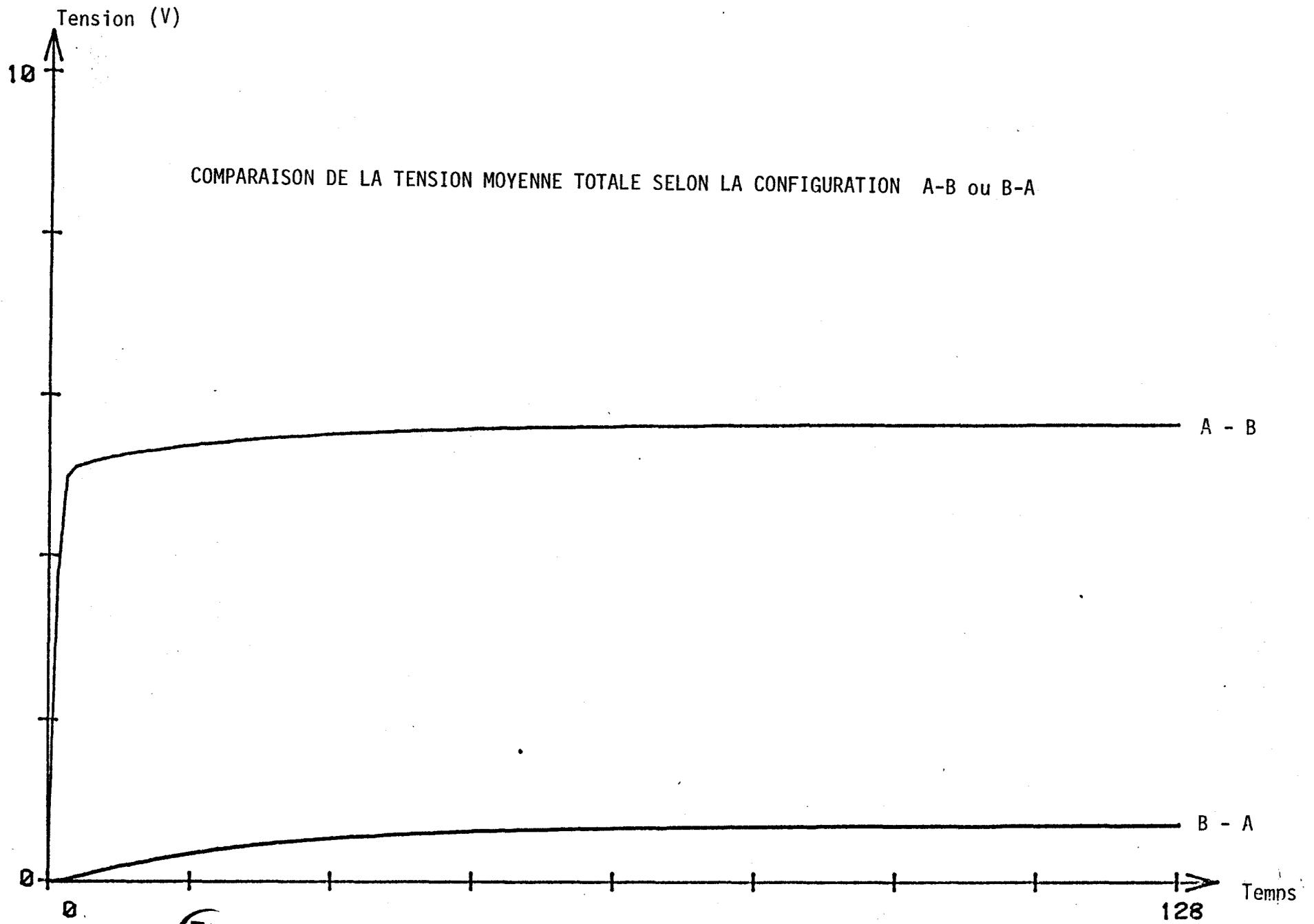


FIGURE III-24

Nous rappelons que :

$$\phi_1 = \frac{\Sigma\phi + \Delta\phi}{2} = u_2 + \frac{u_1 + u_3}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{\Sigma\phi - \Delta\phi}{2} = \frac{u_1 - u_3}{2}$$

$$\Sigma\phi = \phi_1 + \phi_2 \qquad \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

Sur la fig. III-25 nous avons représenté les flux ϕ_1 et ϕ_2 calculés et ceux mesurés directement. Les courbes sont pratiquement confondues.

VI-1-4- Perturbation introduite par un capteur disposé sur la surface d'un matériau

Le fait de disposer un fluxmètre thermique sur la surface d'un matériau perturbe la dynamique des échanges thermiques entre le matériau et le milieu extérieur. Pour montrer l'effet de cette perturbation, nous avons simulé le bicouche capteur + polystyrène (épaisseur 2,5 mm, surface 1,75 dm²) par la ligne électrique suivante :

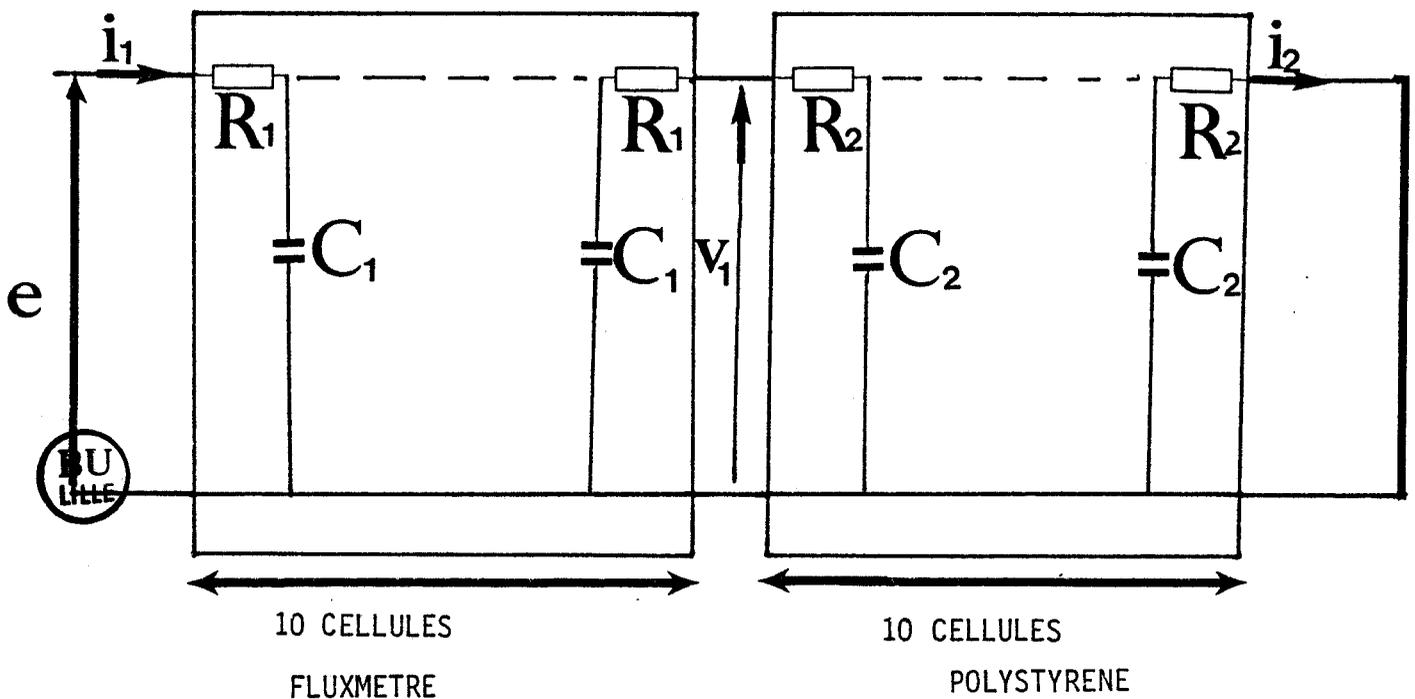


FIGURE III-26

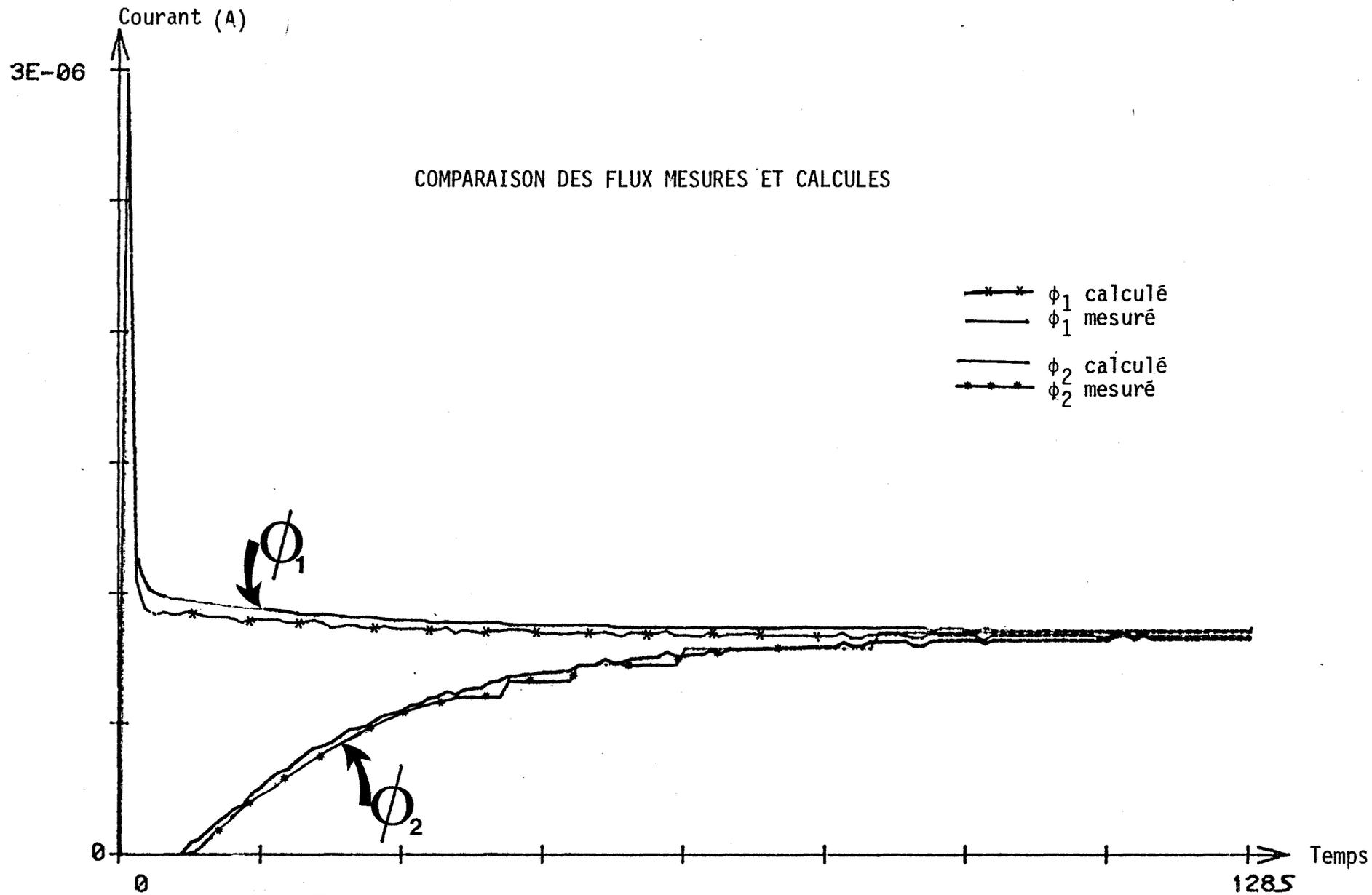


FIGURE III-25

A l'instant $t = 0$, on applique un échelon de tension à l'entrée de la ligne (fluxmètre + polystyrène), l'autre extrémité étant court-circuitée. et on relève la tension aux bornes de chaque capacité.

Dans les figures III-27 et III-28 nous avons représenté l'évolution de la tension et du courant correspondant à chaque cellule de la ligne (capteur + polystyrène).

Nous rappelons que pour un monocouche, pour des temps très faibles (régime transitoire), seule l'effusivité conditionne les échanges énergétiques.

La lecture de ces courbes montre que la perturbation introduite par le capteur :

- est importante en régime transitoire, le fluxmètre se comportant comme une capacité localisée placée en parallèle devant l'impédance d'entrée du matériau,
- est négligeable en régime permanent, le fluxmètre n'ayant pratiquement aucune influence sur la caractéristique des matériaux dont la résistance thermique est très grande vis-à-vis de celle du capteur.

D'une façon générale, la perturbation introduite en régime transitoire par un capteur n'est appréciable que pour les isolants dont l'effusivité est faible vis-à-vis de celle des fluxmètres.

EVOLUTION EN FONCTION DU TEMPS DES DIFFERENTES TENSIONS

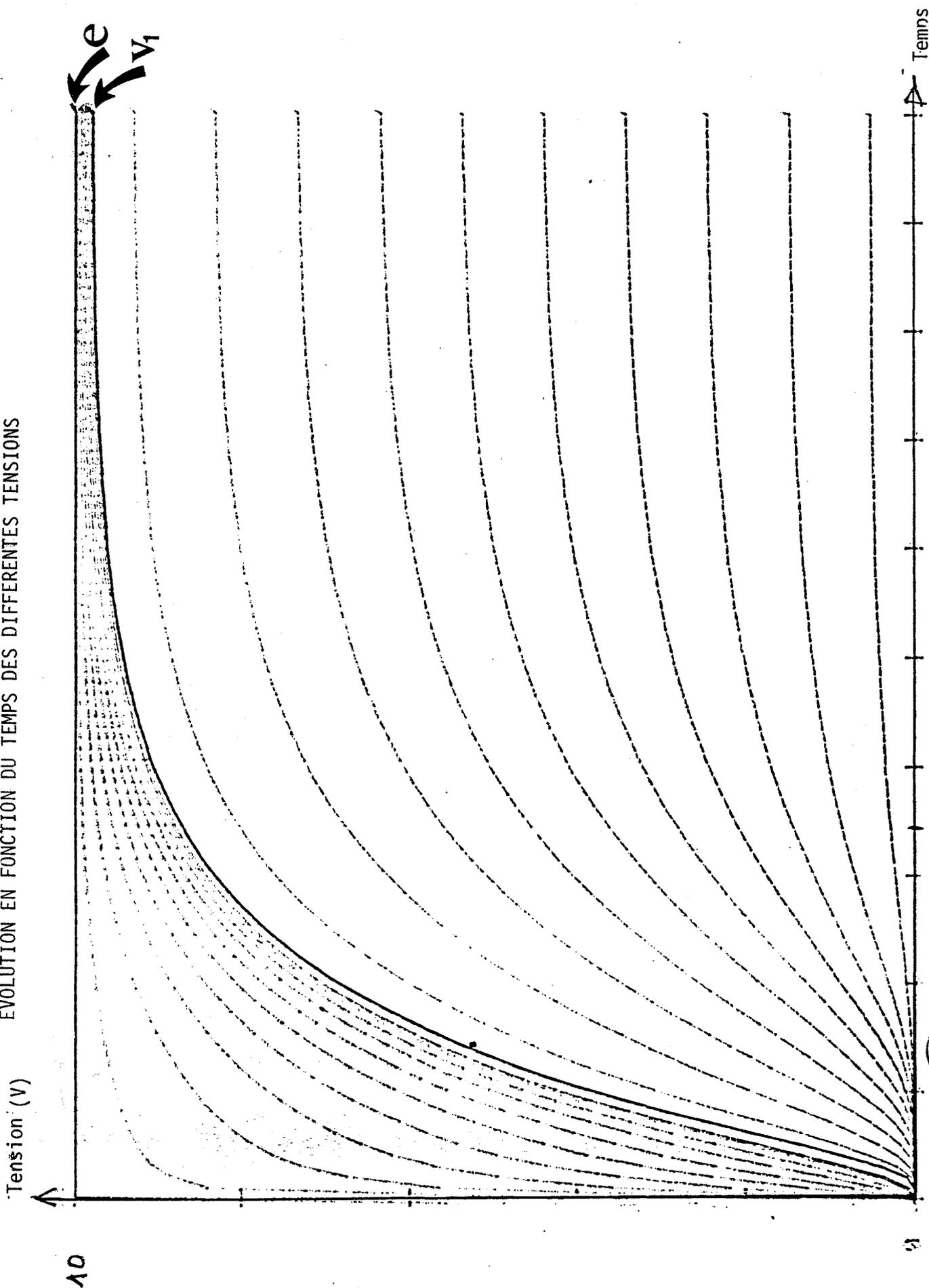
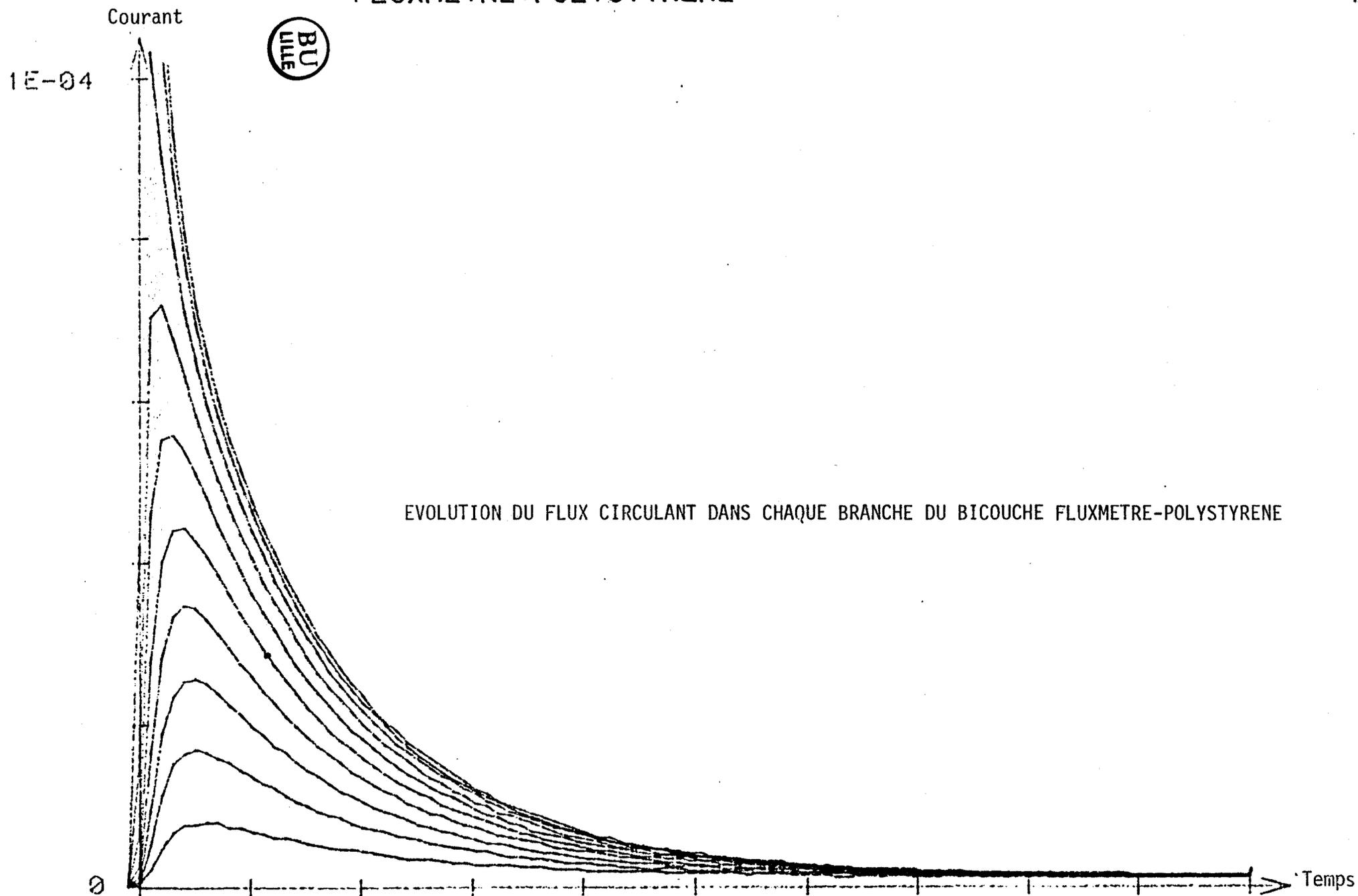


FIGURE III-27



FLUXMETRE+POLYSTYRENE



EVOLUTION DU FLUX CIRCULANT DANS CHAQUE BRANCHE DU BICOUCHE FLUXMETRE-POLYSTYRENE

FIGURE III-28

3s

CHAPITRE IV : ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DES SYSTÈMES MULTICOUCHES

I - ETUDE DANS LE DOMAINE TEMPS

I-1- INTRODUCTION

La partie précédente nous a permis de montrer que l'évolution temporelle d'un système hétérogène de type bicouche était caractérisé par trois fonctions u_1 , u_2 , u_3 parfaitement déterminées lorsque l'on connaît la réponse à chacun des modes symétrique et antisymétrique et les deux réponses indicielles. Ces diverses réponses sont représentatives de l'état énergétique du système bicouche. A la différence des structures homogènes, l'évolution du système ne dépend pas que de la différence de température mais également de l'élévation de la température moyenne. Cet effet est dû à des interactions énergétiques internes.

L'objet de cette partie est d'utiliser les lignes électriques modélisant les parois multicouches pour caractériser quelques configurations typiques (structure bicouche) :

- La distribution de température et de flux dans la paroi soumise à une différence de température sans élévation de température moyenne,
- Elévation de température moyenne sans différence de température,
- Elévation de la température d'une seule face de la paroi, ou application d'une différence de température et d'une élévation de température moyenne.

A l'aide de l'analogie, nous montrons que la dissipation énergétique aussi bien que le stockage d'énergie dépendent fortement des liaisons avec le milieu extérieur et doivent être modélisés pour chaque configuration utilisée. Une simplification souvent utilisée consiste à maintenir la face de sortie à température constante et à caractériser les performances énergétiques pour cette configuration déterminée. Dans ce cas, seule la température de la face d'entrée est susceptible de varier en fonction du temps et caractériser l'interaction énergétique de la paroi avec le milieu extérieur.

I-2- CARACTERISATION DES GRANDEURS ENERGETIQUES DANS UN MATERIAU BICOUCHE

I-2-a- Elévation de la température d'une seule face du système

On considère un matériau bicouche constitué d'un échantillon de plexiglass et de polystyrène superposés (figure IV-1). Cet assemblage étant disposé à la surface d'un puits thermique, le comportement du système, du point de vue énergétique diffère suivant que la configuration du bicouche est du type (A-B) ou (B-A). En effet, les valeurs de l'impédance d'entrée de chacune des configurations conditionnent à chaque instant les valeurs des énergies stockées et dissipées dans l'ensemble du système et ce dernier n'est pas invariant vis-à-vis d'une permutation des deux accès.

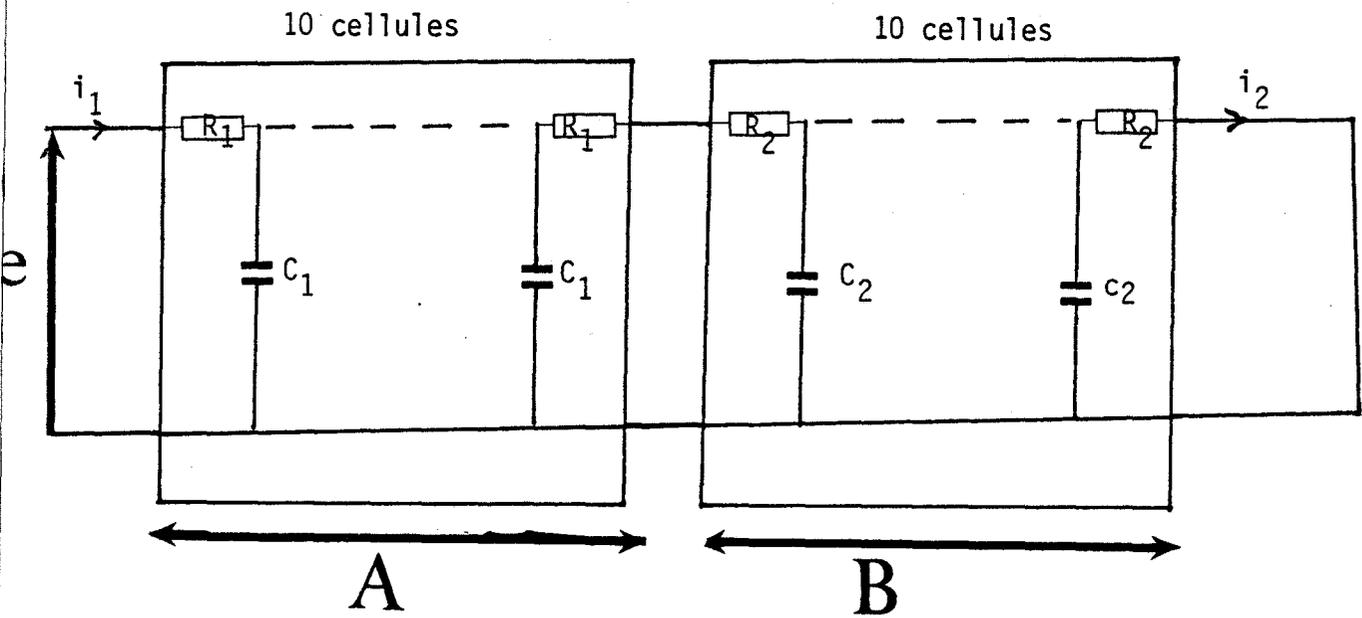


FIGURE IV-1



A = Polystyrène

$R_A = 0,8 \text{ K/W}$

$C_A = 70,3 \text{ J/K}$

B = Plexiglass

$R_B = 4,76 \text{ K/W}$

$C_B = 0,62 \text{ J/K}$

$$R_e = \alpha R_{th} = 2.10^6 R_{th}$$

$$C_e = \frac{C_{th}}{\alpha} = C_{th} 2.10^{-6}$$

Pour une sollicitation indicielle en tension, les courants calculés ont été représentés dans le premier chapitre.

Il en résulte la possibilité de calculer à chaque instant les valeurs des énergies stockée et dissipée. En effet, l'application des relations :

- $P_d = RI^2(t)$: P_d représente la puissance dissipée dans chaque résistance par effet Joule

- $U = \frac{1}{2} CV^2(t)$: U : énergie stockée par chaque capacité

conduit aux résultats :

- Sur la figure IV-2 nous avons représenté l'évolution de la puissance dissipée dans chaque résistance en fonction du temps (configuration B-A), l'examen de l'ensemble des courbes montre que la puissance à l'entrée du plexiglass passe par un maximum en régime transitoire ;

- Sur la figure IV-3 nous avons représenté les mêmes évolutions relatives à la configuration (A-B).

Nous avons aussi représenté l'évolution des énergies stockées dans chaque capacité en fonction du temps sur la figure IV-4 et IV-5 .

La configuration (A-B) pour laquelle le régime permanent est obtenu le plus rapidement est affectée d'un stockage inférieur à celui observé pour la configuration (B-A). Cet état de fait résulte en première approximation du compromis existant entre la capacité du matériau disposé en entrée et la résistance de celui disposé sur le puits.

L'évolution du stockage au début du processus est régie uniquement par la valeur de l'effusivité du matériau situé en entrée.

En conclusion : les tracés relatifs au stockage et à la dissipation permettent de différencier le comportement énergétique des deux structures. L'effusivité du matériau disposé à l'entrée conditionne la dissipation et le stockage.

Le polystyrène a une effusivité très inférieure par rapport à celle du plexiglass. Par conséquent, c'est dans la configuration (plexiglass-polystyrène) que la dissipation et le stockage sont prépondérants.

Les figures IV-6 et IV-7 montrent clairement ces résultats.

EVOLUTION DE LA PUISSANCE DISSIPÉE DANS CHAQUE RESSTANCE EN FONCTION DU TEMPS (ECHANTILLON PLEXIGLASS-POLYSTYRENE)

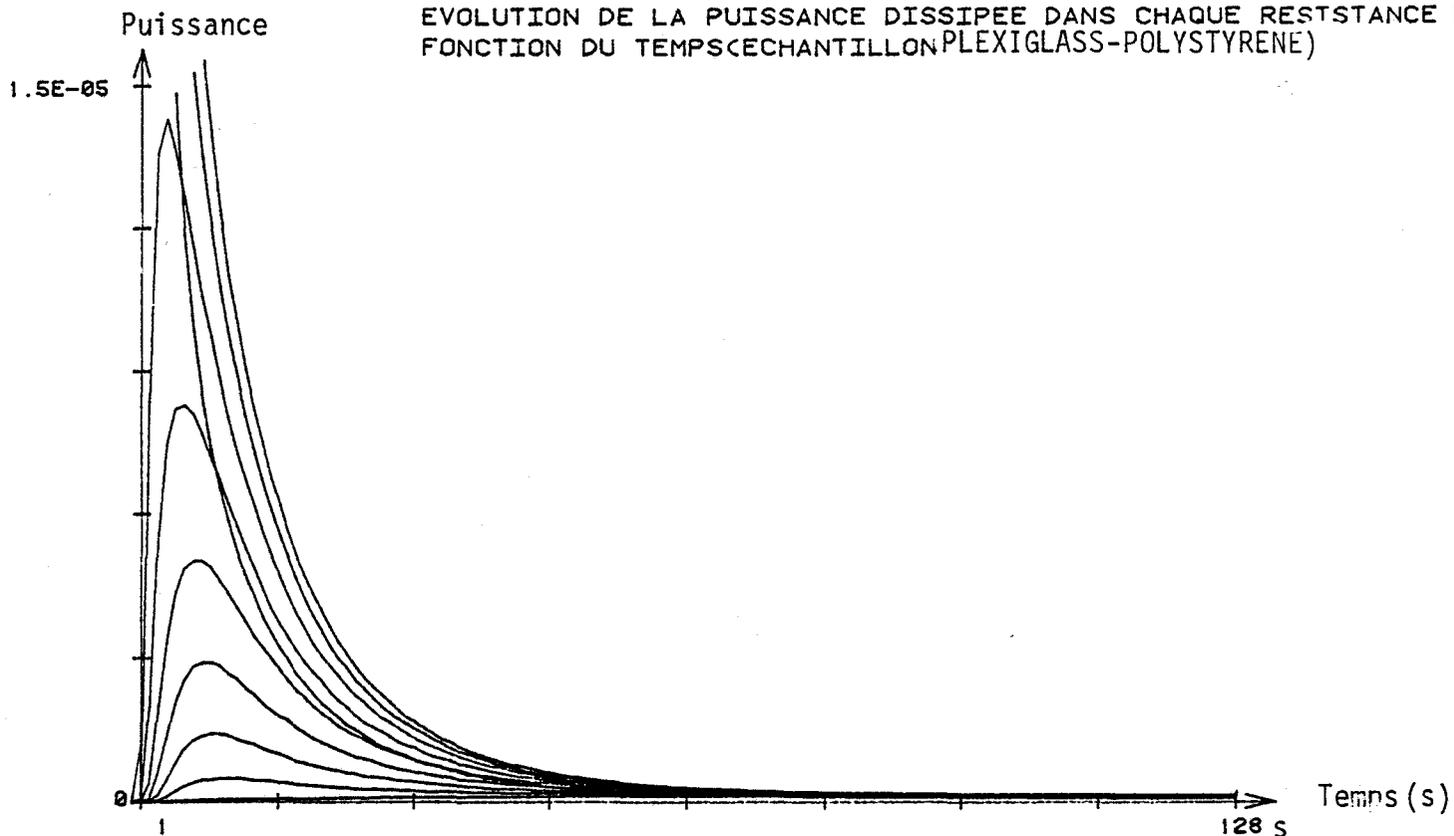


FIGURE IV-2

EVOLUTION DE LA PUISSANCE EN FONCTION DU TEMPS (POLYSTYRENE-PLEXIGLASS)

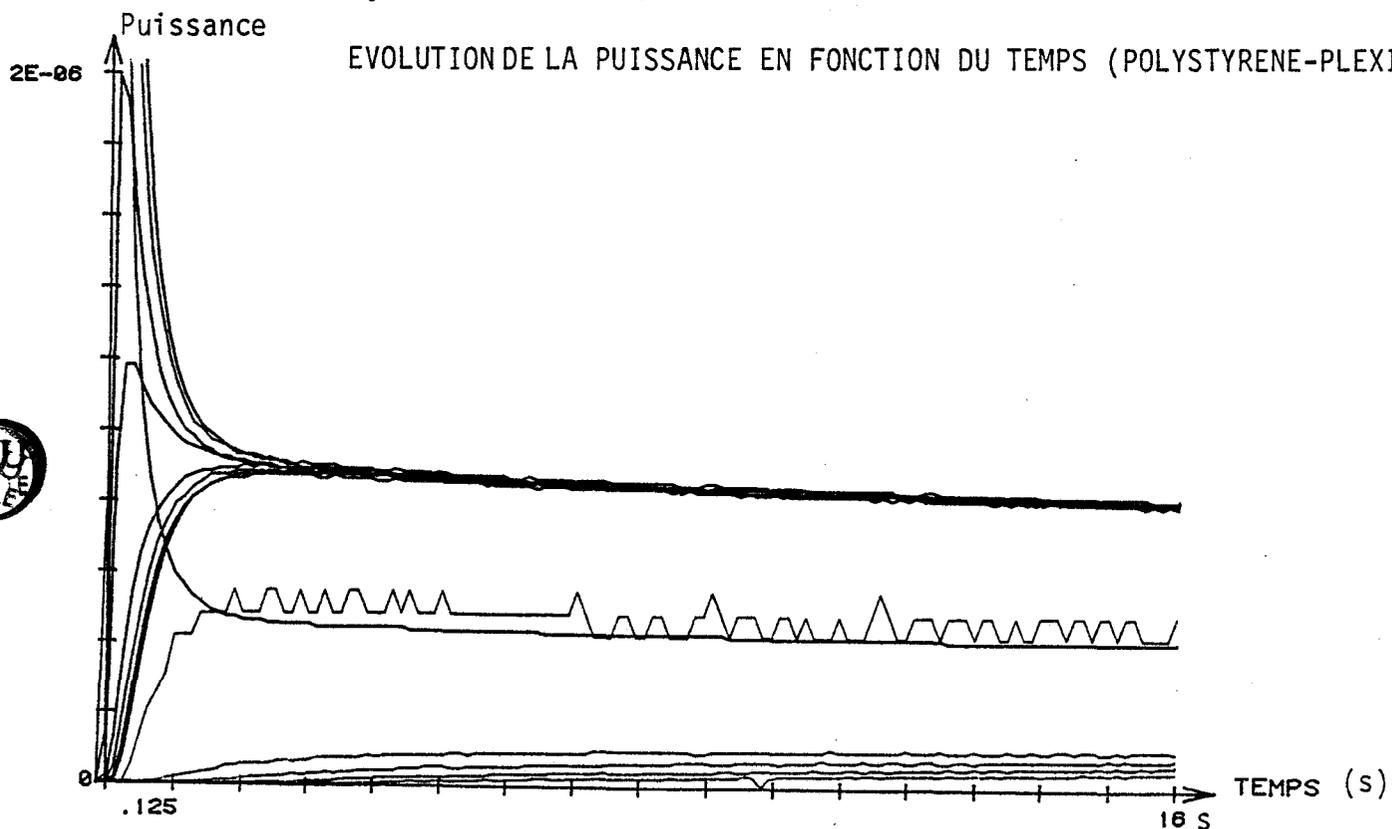
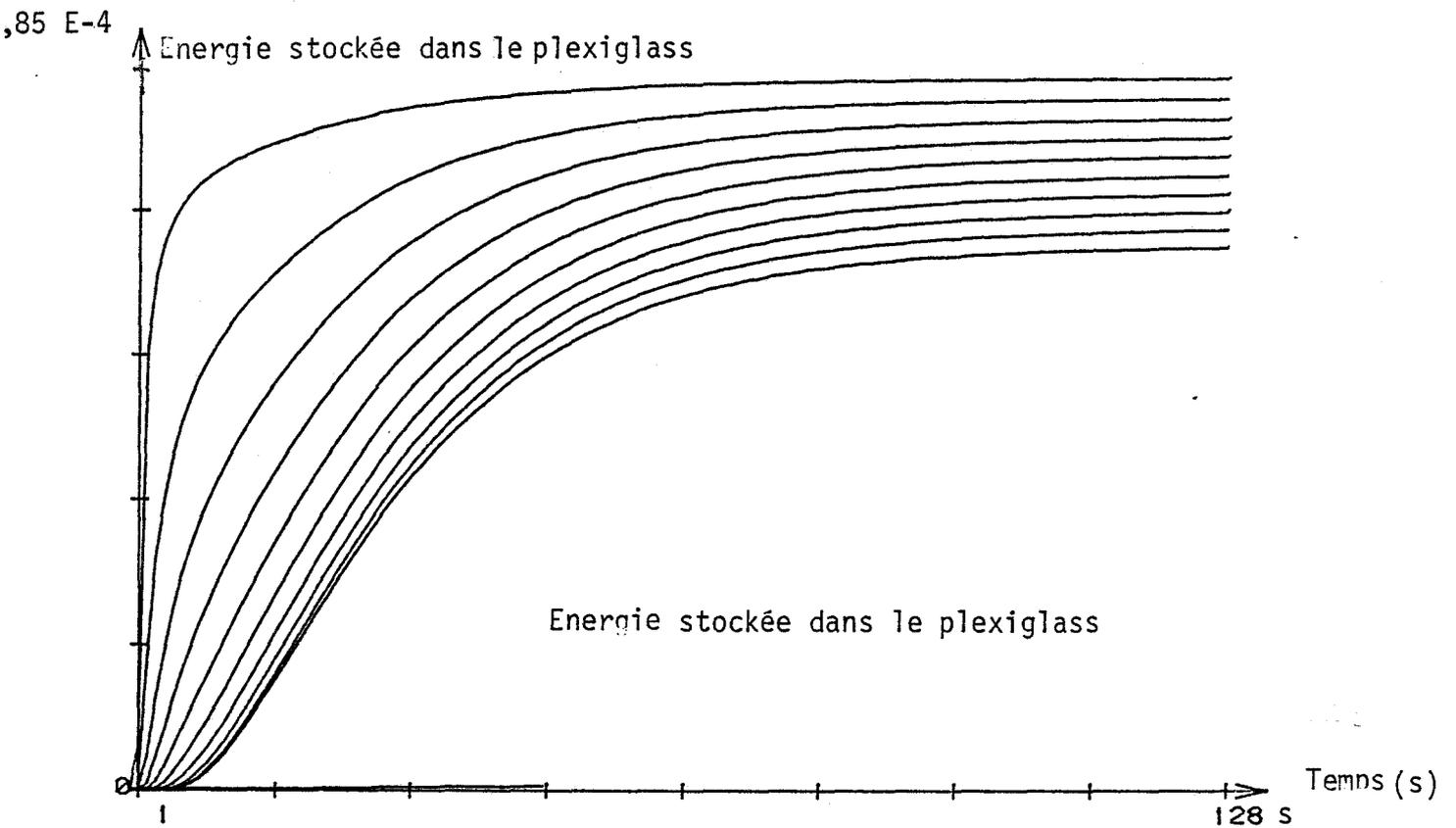


FIGURE IV-3



EVOLUTION DE L'ENERGIE STOCKEE EN FONCTION DU TEMPS

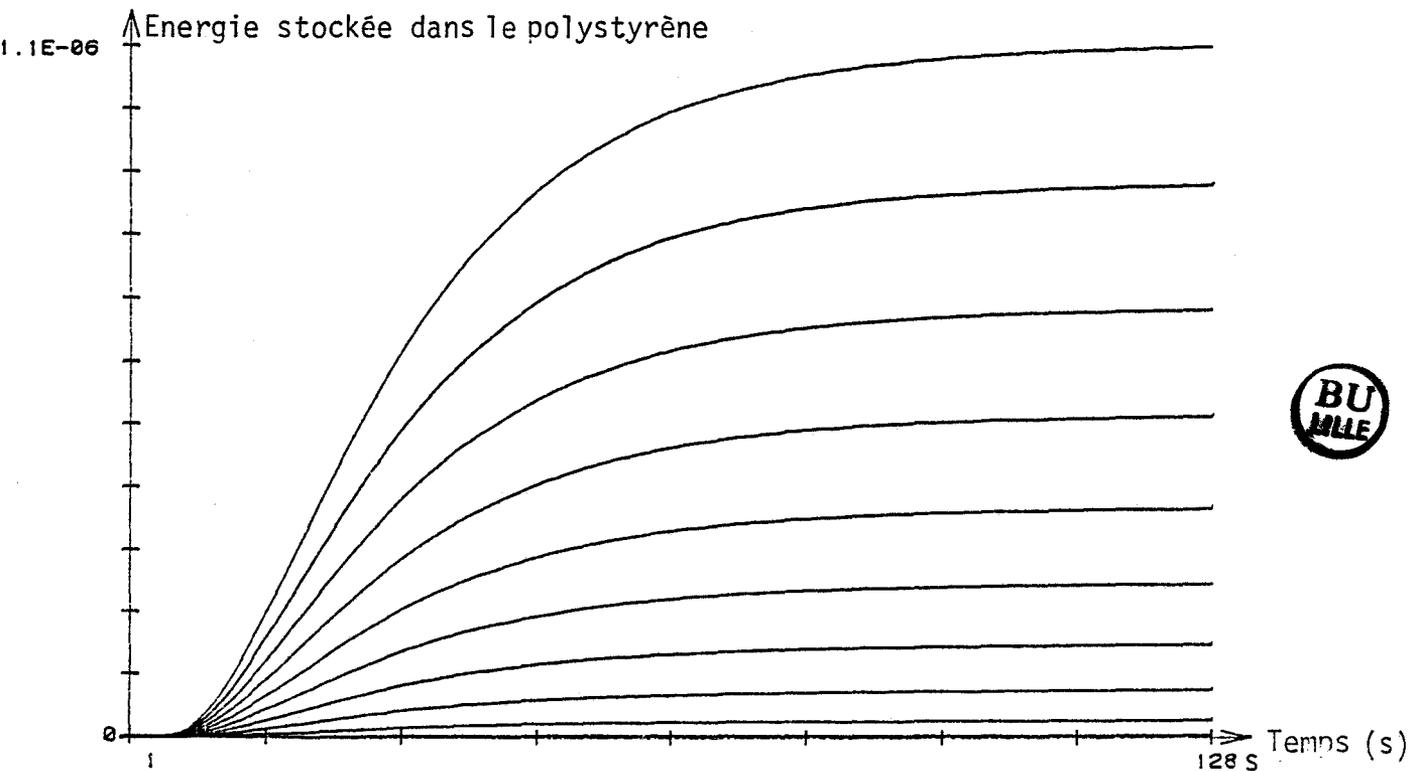
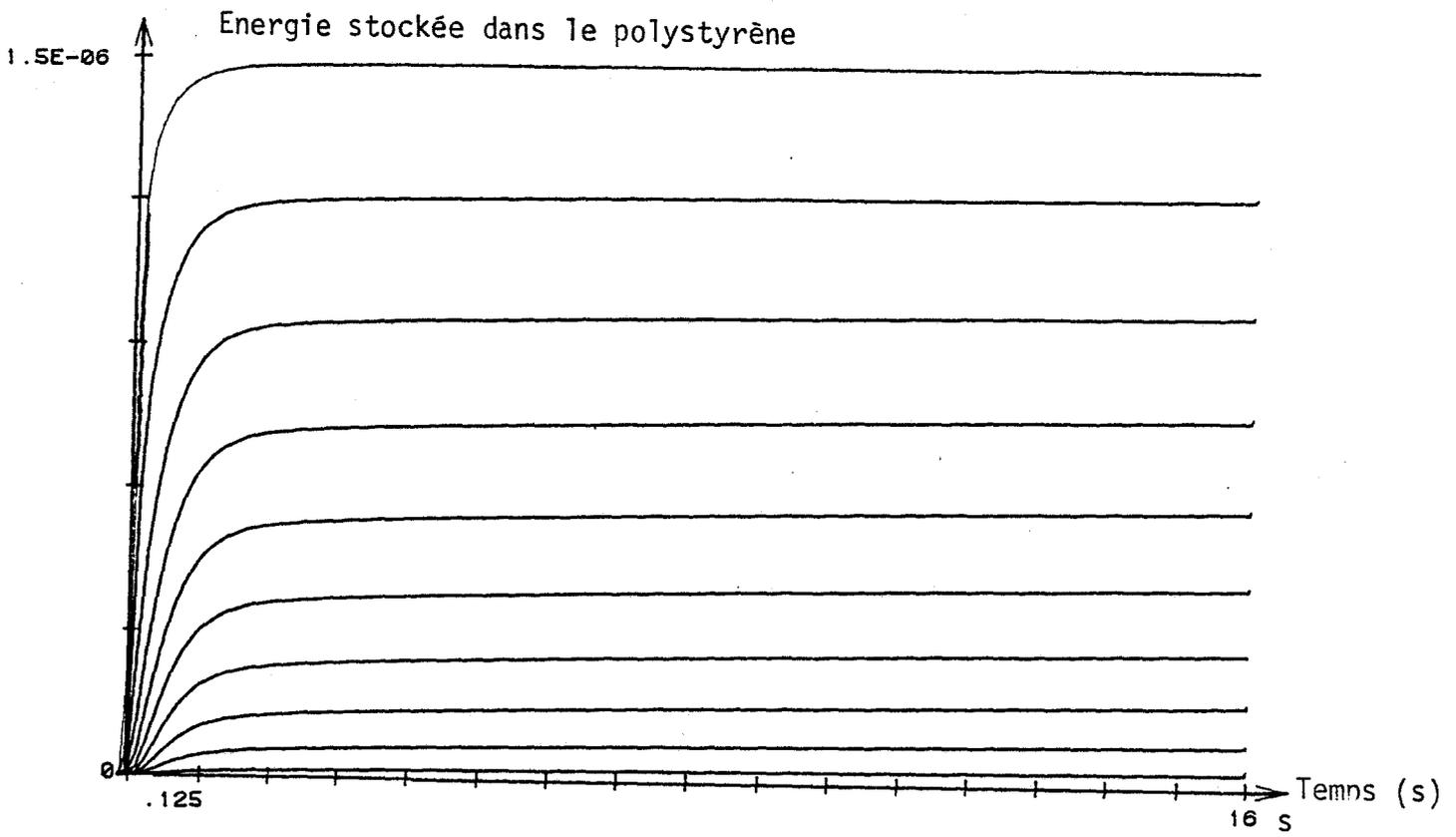


FIGURE IV-4 : CONFIGURATION PLEXIGLASS-POLYSTYRENE



EVOLUTION DE L'ENERGIE EN FONCTION DU TEMPS

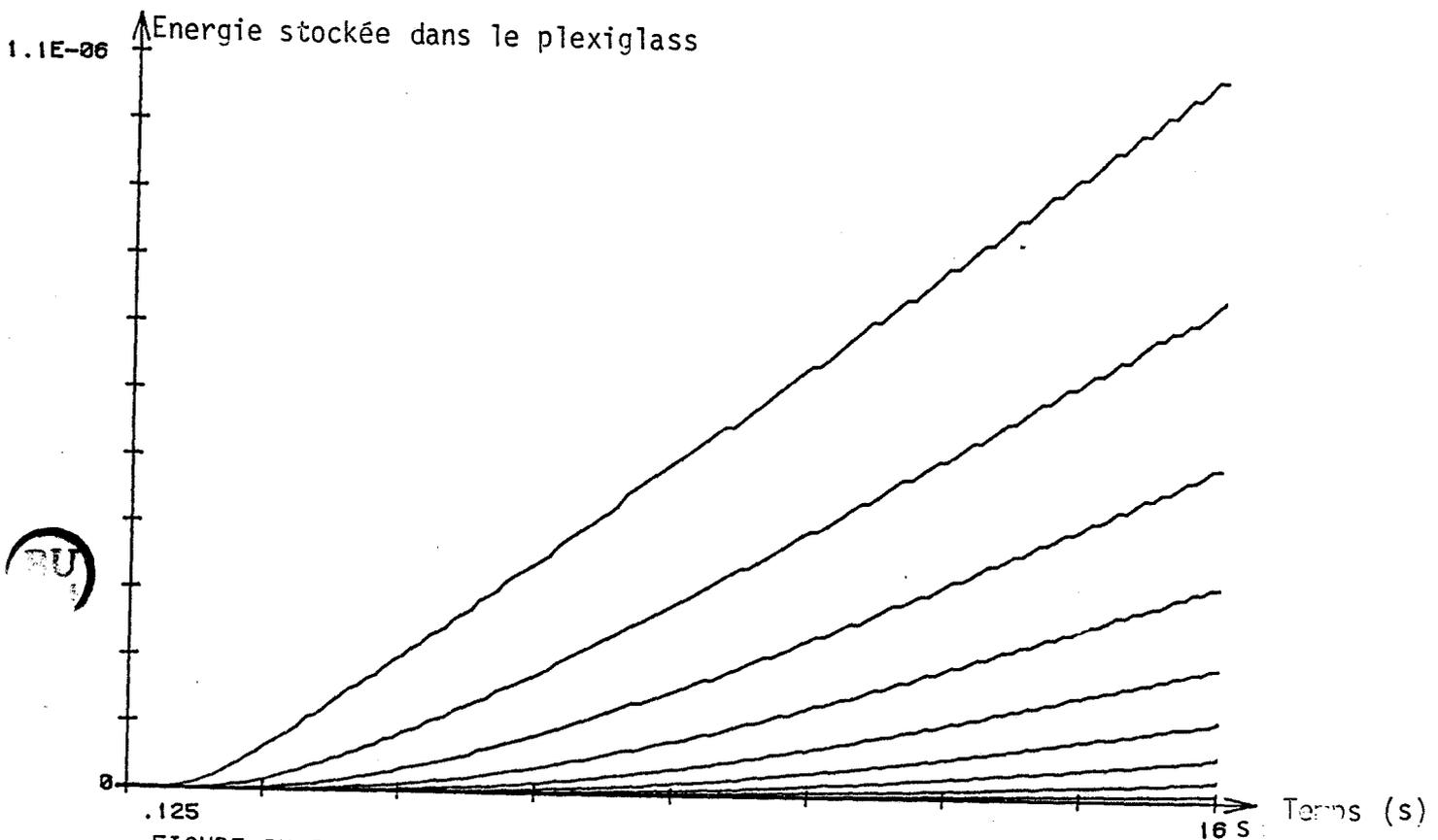


FIGURE IV-5 : CONFIGURATION POLYSTYRENE-PLEXIGLASS

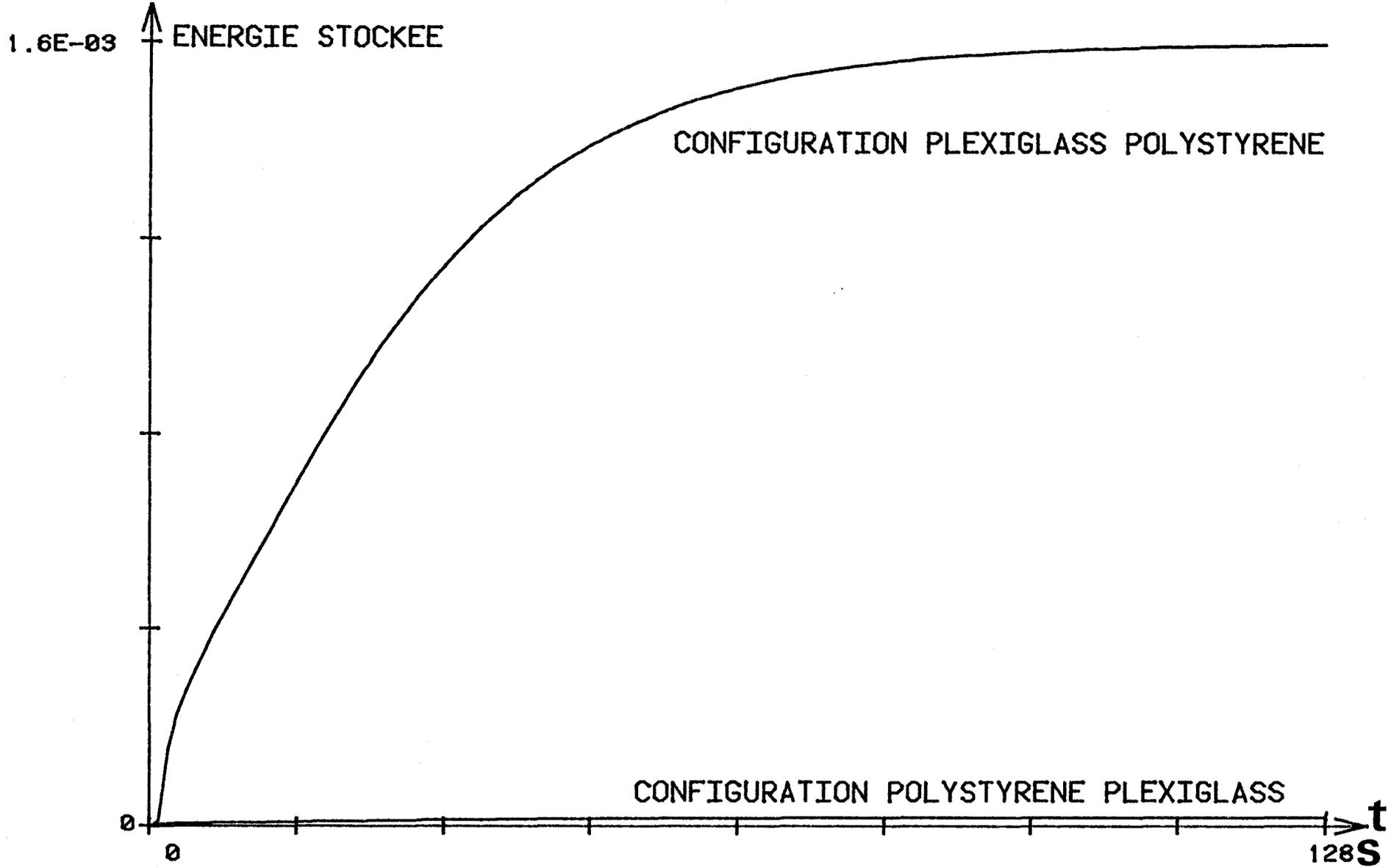
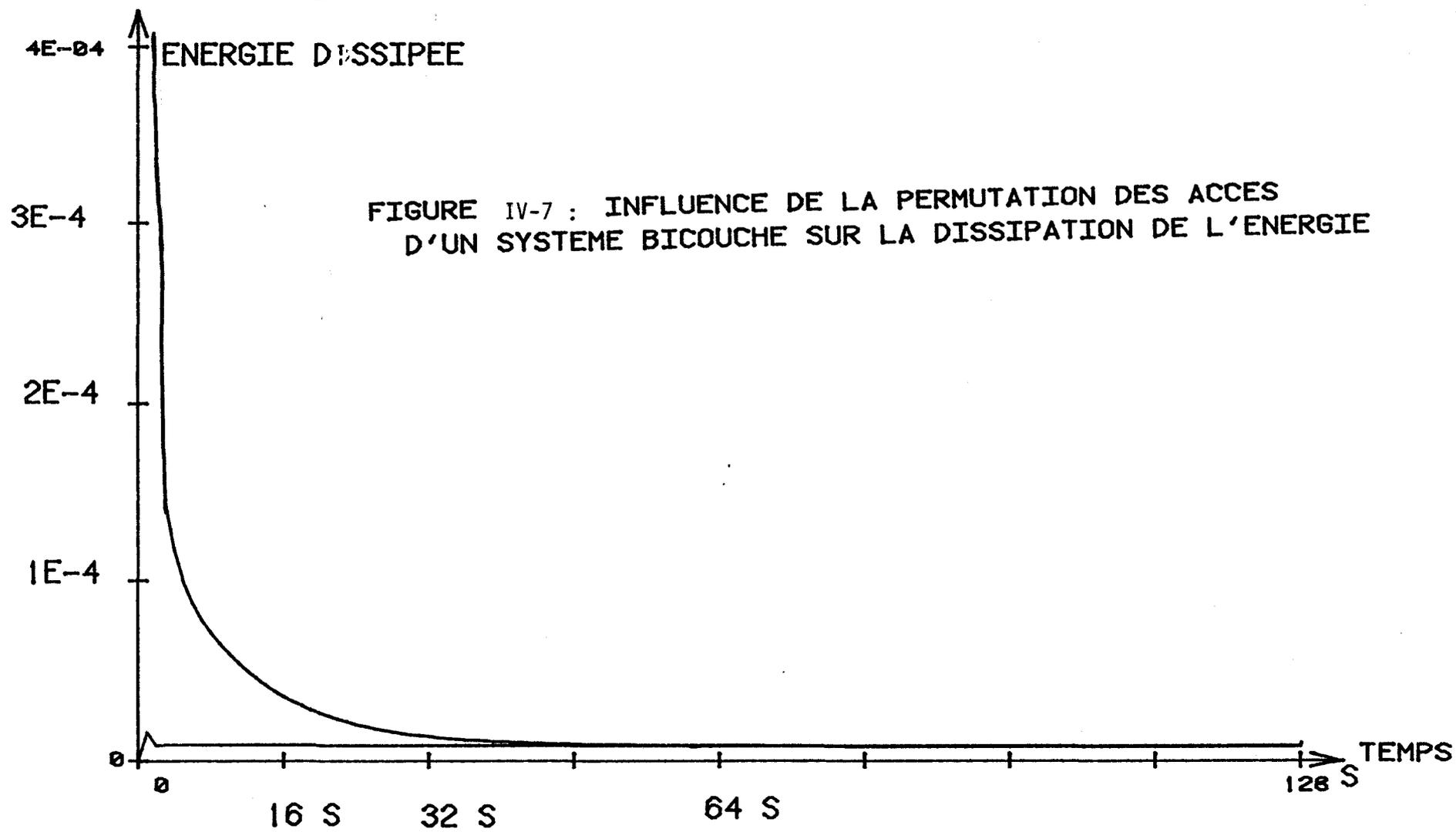


FIGURE IV-6 : INFLUENCE DE LA PERMUTATION DES ACCES D'UN SYSTEME BICOUCHE SUR LE STOCKAGE D'ENERGIE UTILISABLE





II - GENERALISATION DE L'ETUDE ENERGETIQUE

L'ensemble des résultats précédents nous conduit à simuler les transferts thermiques dans une paroi multicouche à l'aide de plusieurs lignes connectées en cascade, quelle que soit la nature des environnements extérieurs qu'ils soient représentés par des relations linéaires ou non, représentés par des relations à paramètre variable comportant des sources indépendantes ou non. Il est possible de simuler l'effet du filtrage de la paroi sur l'ensemble des sollicitations provenant de chacun des accès de la ligne.

L'interaction énergétique entre la ligne et le milieu extérieur est représentée au niveau de l'accès 1 par la fonction d'intercorrélation $R_{\theta_1\phi_1}$. Cette fonction d'intercorrélation peut avoir une forme complexe lorsque la relation liant les grandeurs θ_1 et ϕ_1 est rendue non linéaire et inertielle. Les composants modélisant la condition limite (θ_s, ϕ_s) sont non linéaires. De la même façon, l'intercorrélation énergétique entre la ligne et le milieu extérieur est représentée au niveau de l'accès 2 par la fonction d'intercorrélation $R_{\theta_2\phi_2}$. La relation $\theta_2\phi_2$ peut elle aussi être complexe (non linéaire inertielle).

Dans cette configuration générale, les échanges énergétiques entre le système et le milieu extérieur sont représentés dans le domaine fréquentiel par la différence $R_{\theta_1\phi_1} - R_{\theta_2\phi_2}$.

Cette quantité dépend en fait des deux seules variables θ_1 et θ_2 puisque :

$$R_{\theta_1\phi_1} - R_{\theta_2\phi_2} = R_{\Sigma\phi\Delta\theta} + R_{\Delta\phi\Sigma\theta}$$

ne dépend que des seules températures θ_1 et θ_2 suivant les relations :

$$R_{\Sigma\phi\Delta\theta} = u_1 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Delta\theta} + u_2 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Sigma\theta\Delta\theta}$$

$$R_{\Delta\phi\Sigma\theta} = u_3 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Sigma\theta\Sigma\theta} + u_2 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Sigma\theta}$$

u_1 , u_2 et u_3 sont les trois fonctions réponses définies précédemment.

L'évolution énergétique des lignes simulant la paroi multicouche ne dépend donc que du degré de corrélation entre la tension d'entrée et de sortie ou ce qui revient au même de la fonction d'intercorrélation $R_{\Sigma\theta\Delta\theta}$

Entrée et sortie décorrélées

Lorsque le potentiel de sortie est maintenu constant (simulation des transferts thermiques dans une paroi maintenue sur une face à température constante) :

$$\theta_1 = \Delta\theta = \Sigma\theta$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\Sigma\theta = \theta_1 + \theta_2$$

Dans ce cas, les relations précédentes deviennent :

$$R_{\Sigma\phi\Delta\theta} = (u_1 + u_2) \theta \frac{\partial}{\partial t} R_{\theta_1\theta_1}$$

$$R_{\Delta\phi\Sigma\theta} = (u_3 + u_2) \theta \frac{\partial}{\partial t} R_{\theta_1\theta_1}$$

$$R_{\Sigma\phi\Delta\theta} = R_{\Sigma\phi\theta_1} \quad ; \quad R_{\Delta\phi\Sigma\theta} = R_{\Delta\phi\theta_1}$$

Soit en effectuant la sommation :

$$R_{\Sigma\phi\theta_1} + R_{\Delta\phi\theta_1} = R_{\phi_1\theta_1} = (u_1 + u_2 + u_3) \theta \frac{\partial}{\partial t} R_{\theta_1\theta_1}$$

Dans ce cas particulier, l'interaction flux température ne dépend que de la température d'entrée.

Entrée et sortie corrélées

Un autre cas extrême correspond où les variations des tensions d'entrée et de sortie se font de façon à ce que les grandeurs $\Delta\theta$ et $\Sigma\theta$ ne soient pas corrélées c'est-à-dire : $R_{\Delta\theta\Sigma\theta} = 0$.

En remplaçant $R_{\Delta\theta\Sigma\theta}$ dans les deux relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{\Sigma\phi\Delta\theta} &= u_1 * \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Delta\theta} \\ R_{\Delta\phi\Sigma\theta} &= u_3 * \frac{\partial}{\partial t} R_{\Sigma\theta\Sigma\theta} \end{aligned}$$

Les échanges énergétiques correspondant à toute configuration pratique se situent entre ces deux configurations extrêmes.

Dans les cas où les températures d'entrée et de sortie corrélées de façon telle que la relation :

$$R_{\Delta\theta\Sigma\theta} = 0$$

soit toujours vérifiée, nous obtenons :

$$R_{\theta_1\phi_1} - R_{\theta_2\phi_2} = u_1 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Delta\theta} + u_3 \otimes \frac{d}{dt} R_{\Sigma\theta\Sigma\theta}$$

L'énergie du système s'exprime dans le domaine fréquence par la superposition des énergies de chacun des deux modes normaux. Par contre, lorsqu'il y a corrélation entre température d'entrée et de sortie, la fonction d'intercorrélation

$$R_{\Delta\theta\Sigma\theta} \neq 0$$

prend une valeur différente de zéro et la somme des énergies stockée et dissipée dans la paroi

$$R_{\theta_1\phi_1} - R_{\theta_2\phi_2} = u_1 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Delta\theta} + u_3 \otimes \frac{d}{dt} R_{\Sigma\theta\Sigma\theta} + 2u_2 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Sigma\theta}$$

comporte un terme de couplage proportionnel à la fonction d'intercorrélation entre les sollicitations correspondant à chaque mode normal. Cette relation est générale et s'applique quelle que soit la nature des conditions limites.

A titre d'exemple, nous l'avons vérifiée lorsque la relation (θ_2, ϕ_2) est non linéaire et simulée par une diode.

Pour vérifier toutes ces relations, nous utilisons le dispositif schématisé suivant :

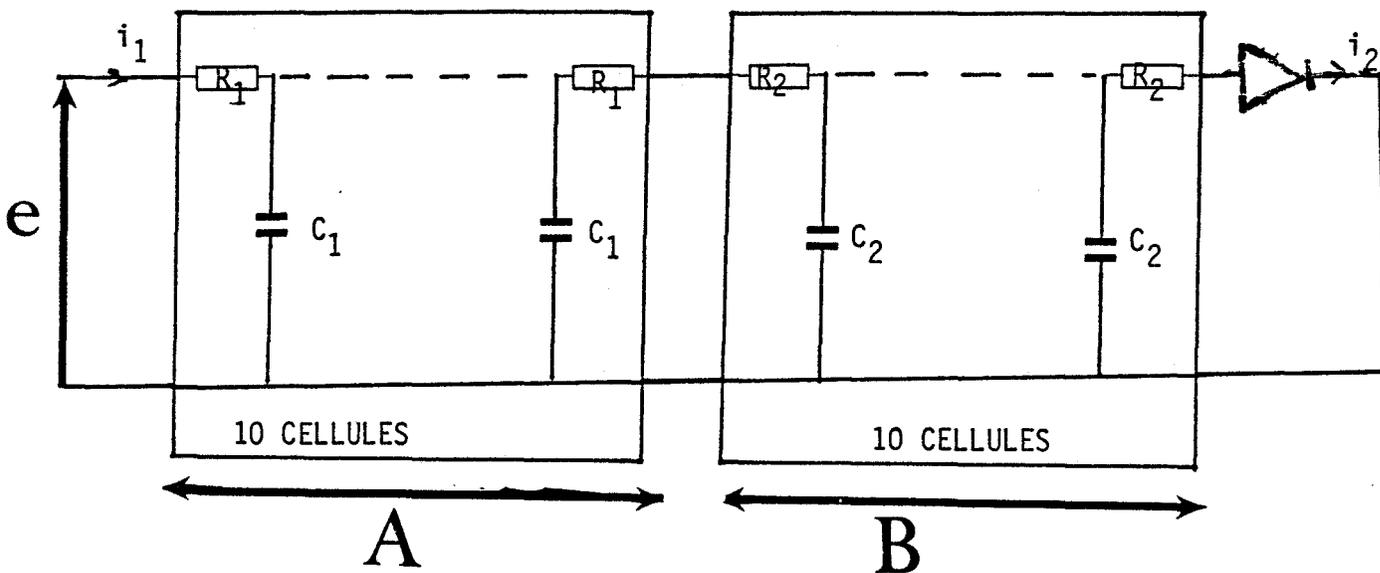


FIGURE A

Chaque échantillon est représenté par un ensemble de 10 cellules identiques montées en cascade.

Sur la figure IV-8 nous avons représenté l'évolution de $\Delta\theta(\theta_1 - \theta_2)$ en fonction du temps.

L'évolution de $\Sigma\theta(\theta_1 + \theta_2)$ en fonction du temps est représentée fig. IV-9.

La figure IV-10 montre les deux réponses simulées et mesurées de $\Delta\Phi$.

On remarque que les courbes sont confondues.

Sur la figure IV-11, nous avons représenté l'évolution de $\Sigma\Phi$ en fonction du temps. Les deux courbes sont confondues (simulation et mesure).

Sur la figure IV-12, nous avons représenté la fonction d'intercorrélation $R_{\Sigma\theta\Delta\theta}$.

La fonction d'intercorrélation $R_{\Delta\theta\Delta\theta}$ est représentée figure IV-13.

La figure IV-14 montre la comparaison de $R_{\Sigma\Phi\Delta\theta}$ et de

$$u_1 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Delta\theta\Delta\theta} + u_2 \otimes \frac{\partial}{\partial t} R_{\Sigma\theta\Delta\theta}$$

On observe une très bonne superposition, ce qui montre le caractère très général de la méthode utilisée.

EVOLUTION DE LA DIFFERENCE DE TEMPERATURE EN FONCTION DU TEMPS

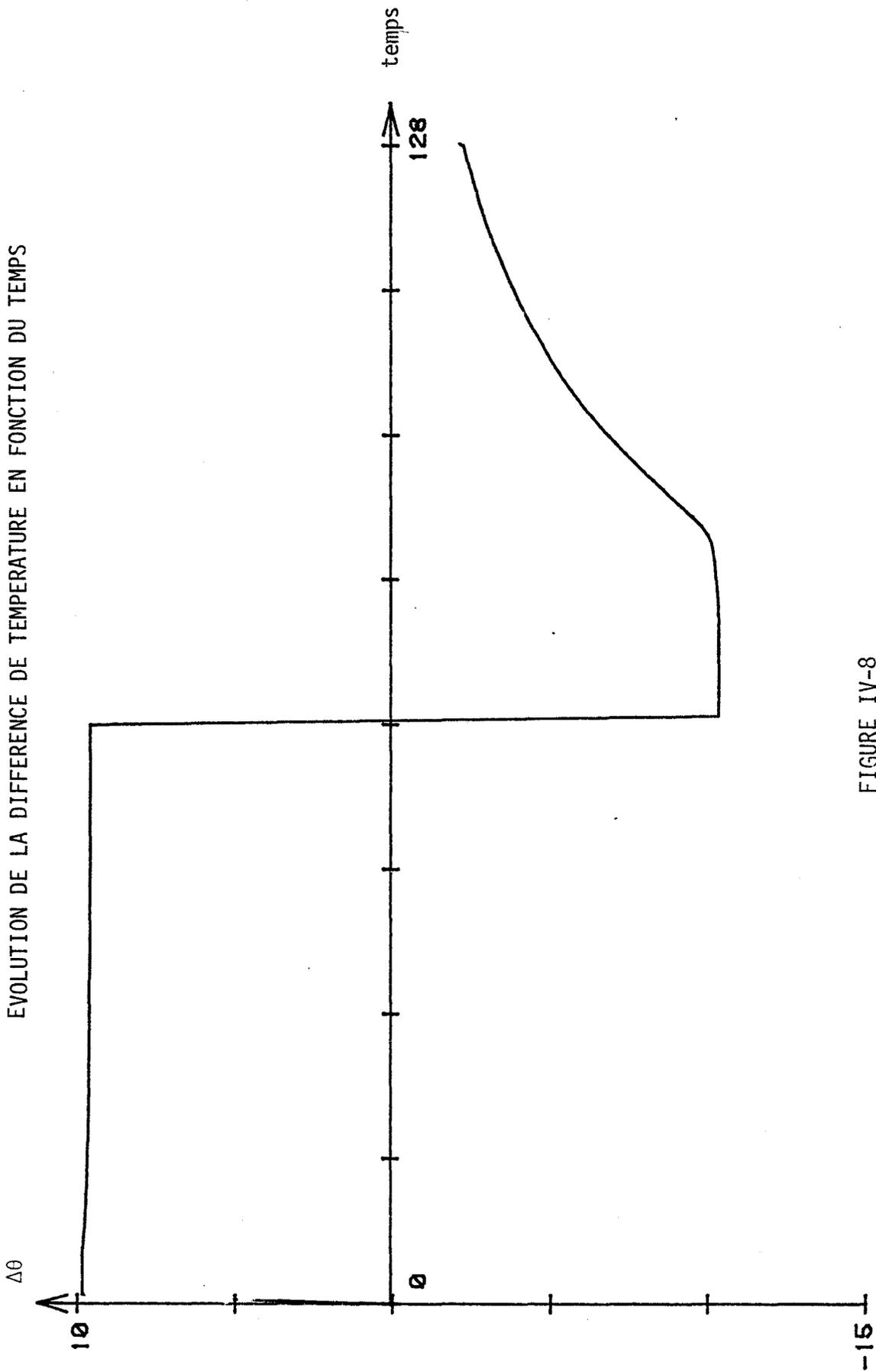


FIGURE IV-8



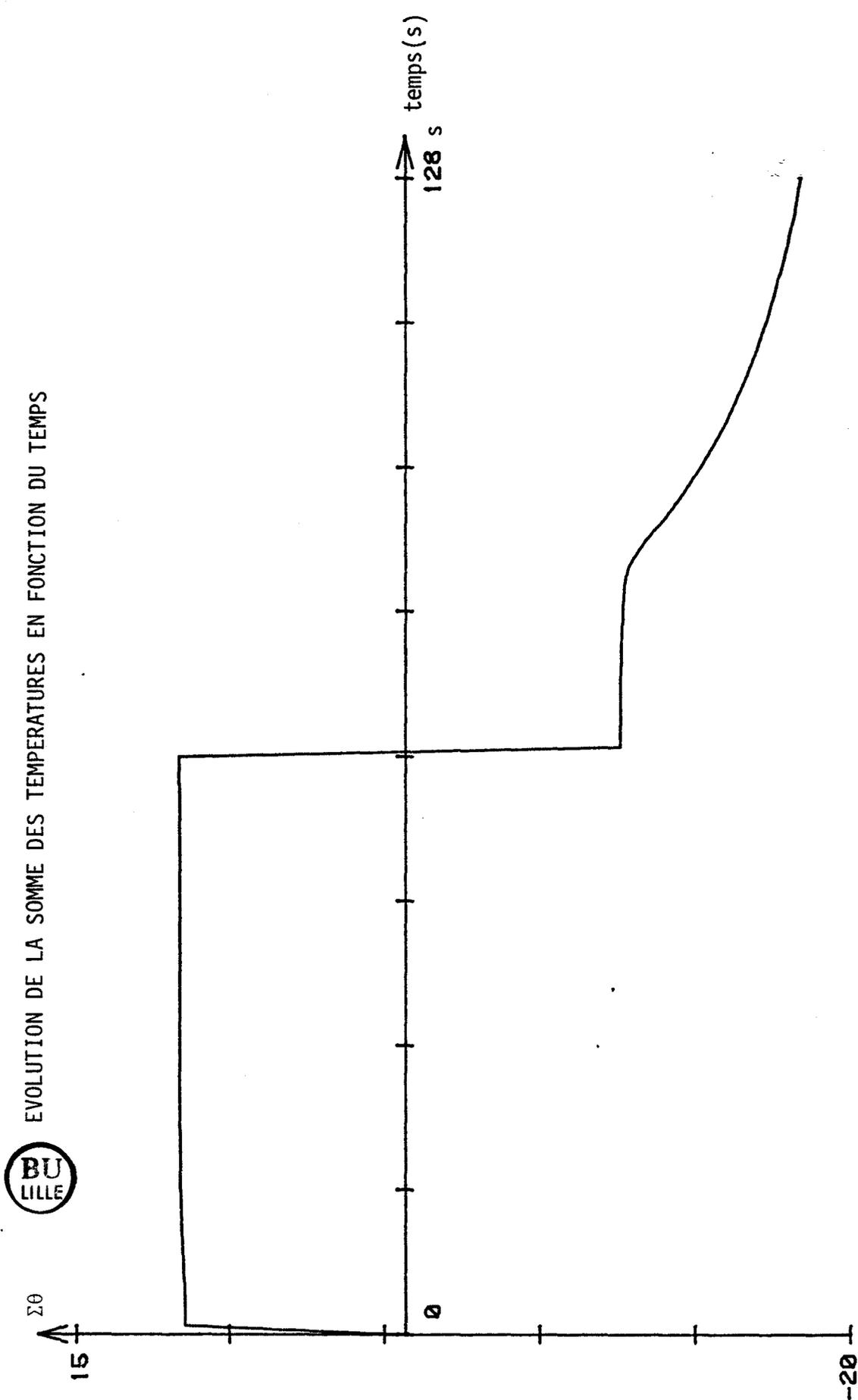


FIGURE IV-9

EVOLUTION DE LA DIFFERENCE DES FLUX EN FONCTION DU TEMPS

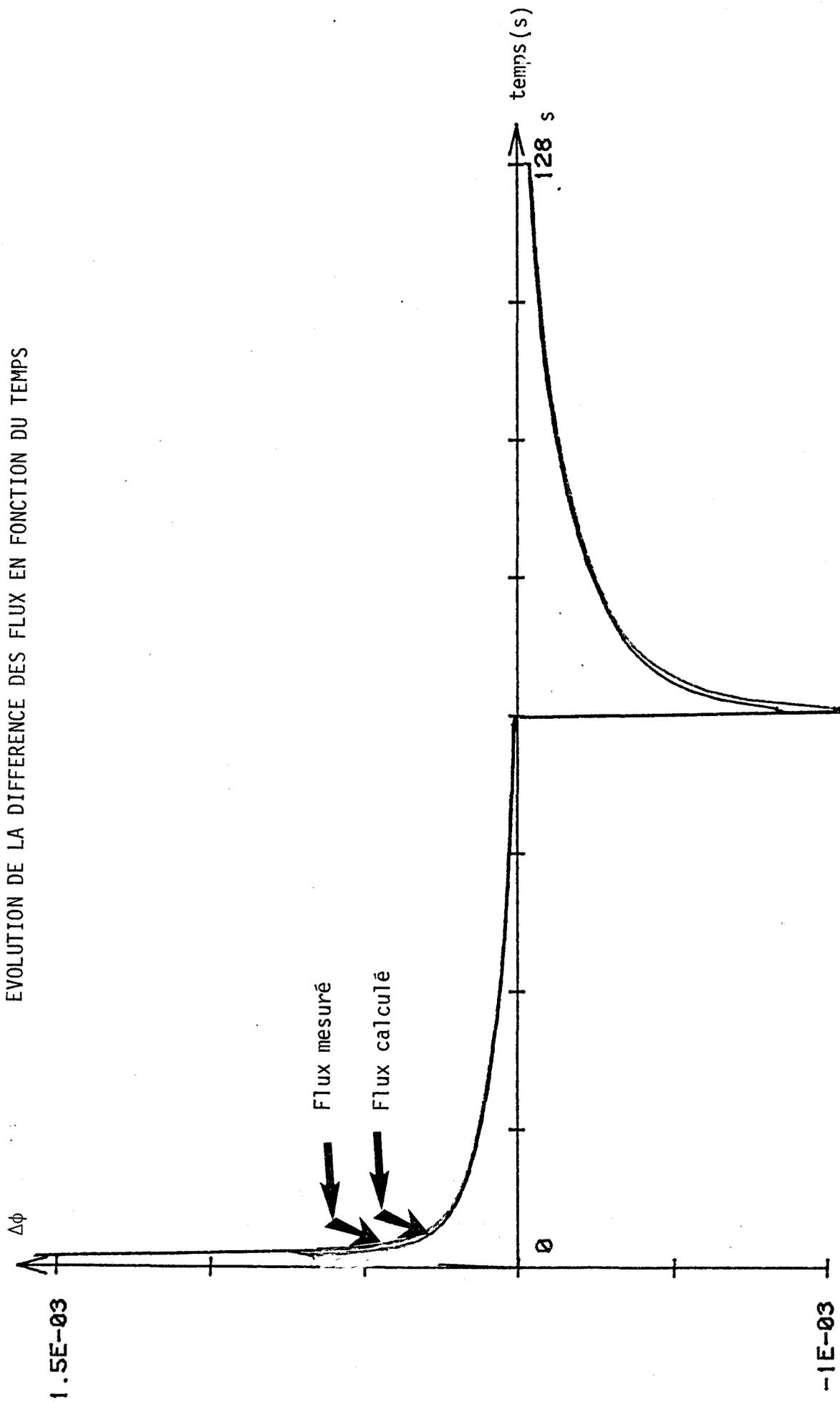


FIGURE IV-10

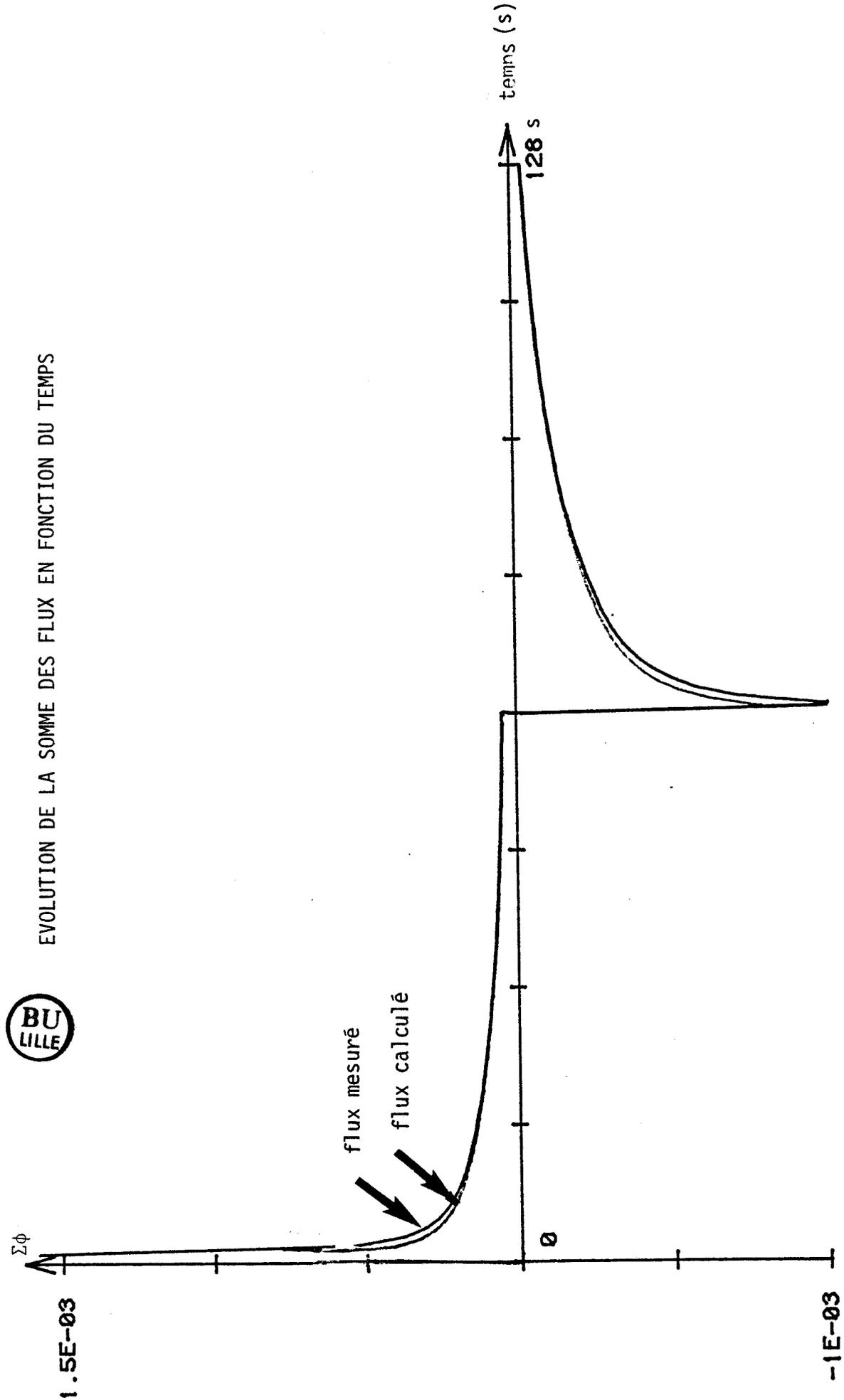


FIGURE IV-11

EVOLUTION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION EN FONCTION DU DECALAGE τ

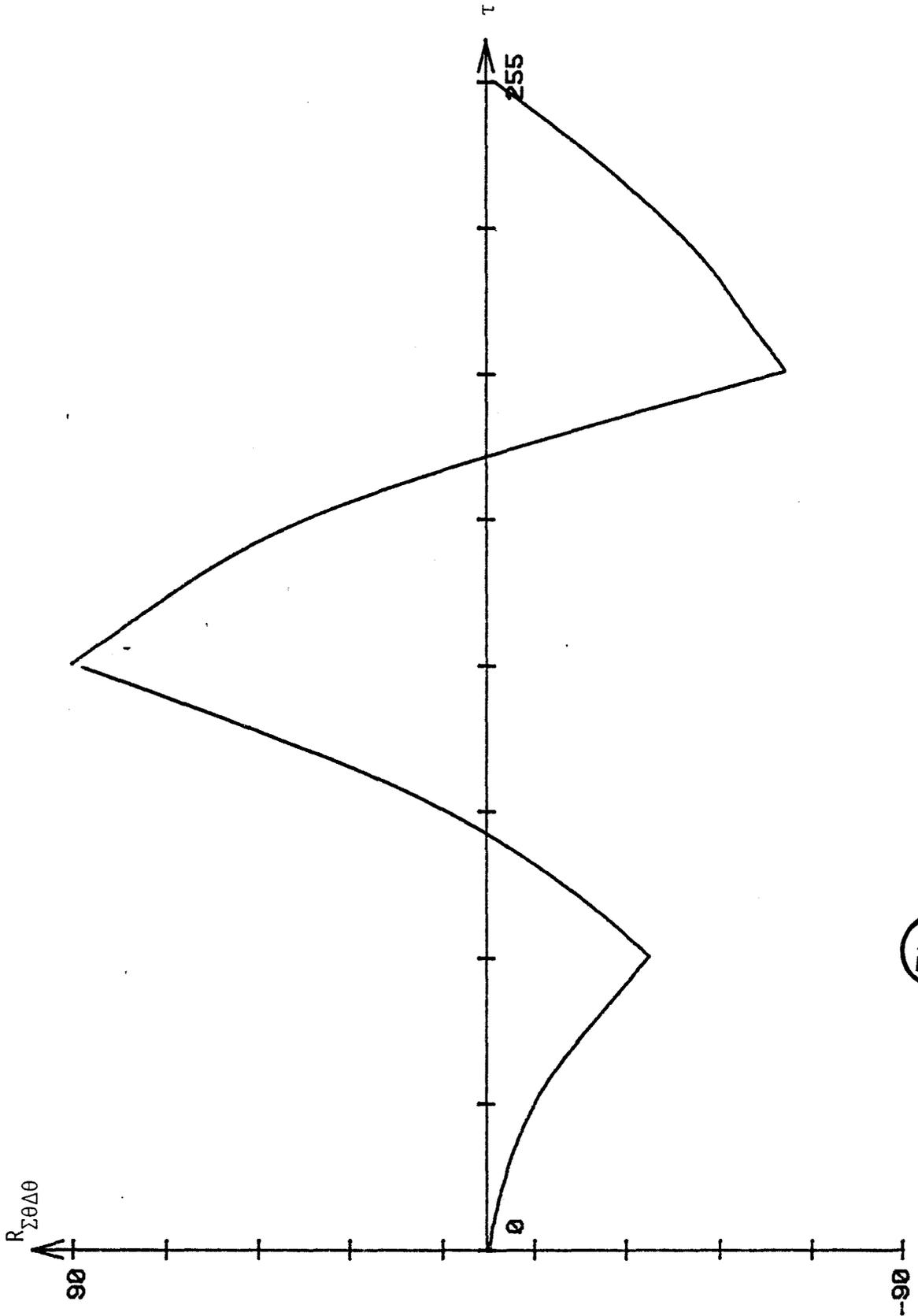


FIGURE IV-12

EVOLUTION DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION EN FONCTION DU DELALAGE τ

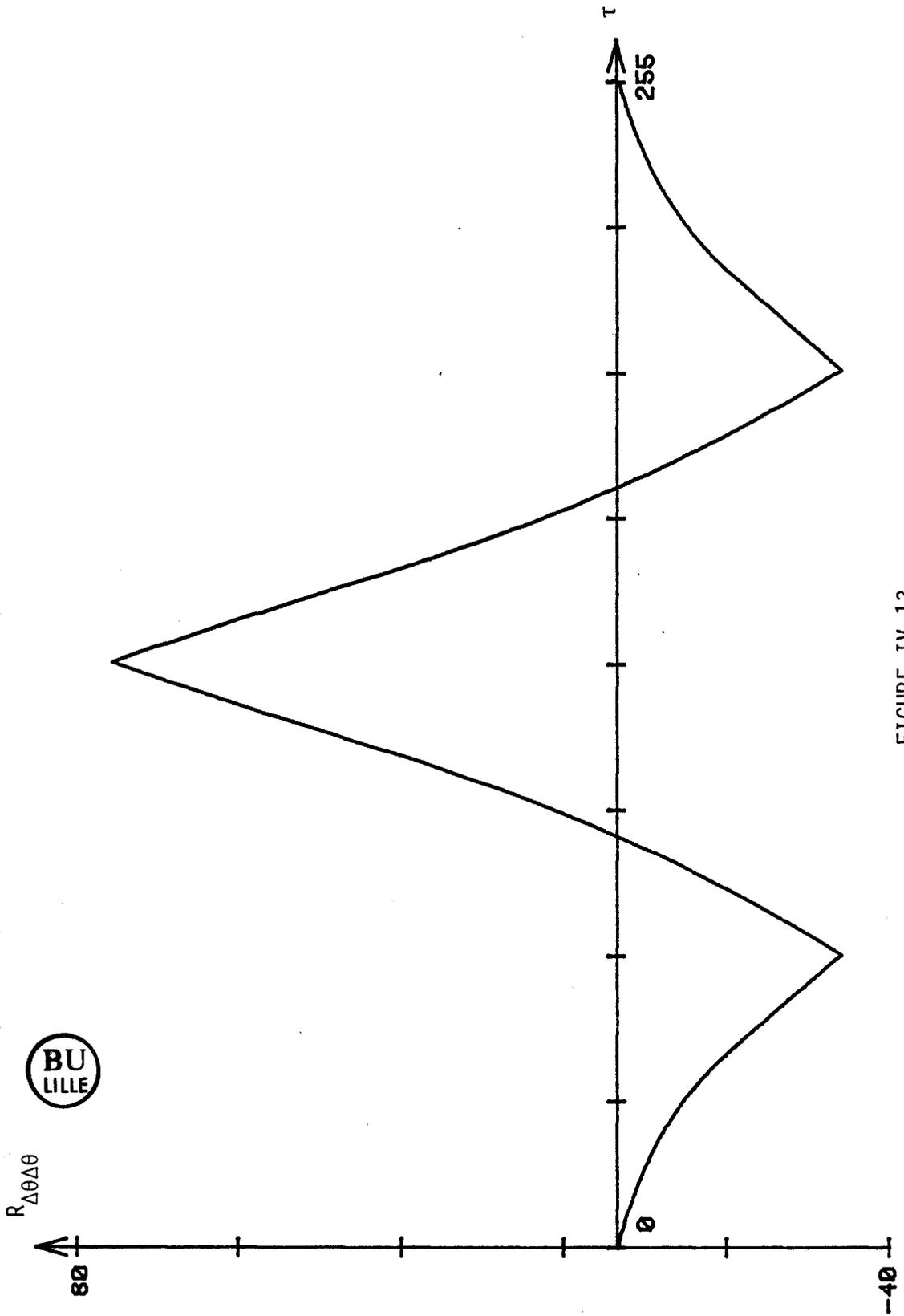


FIGURE IV-13

COMPARAISON DES FONCTIONS D'INTERCORRELATION

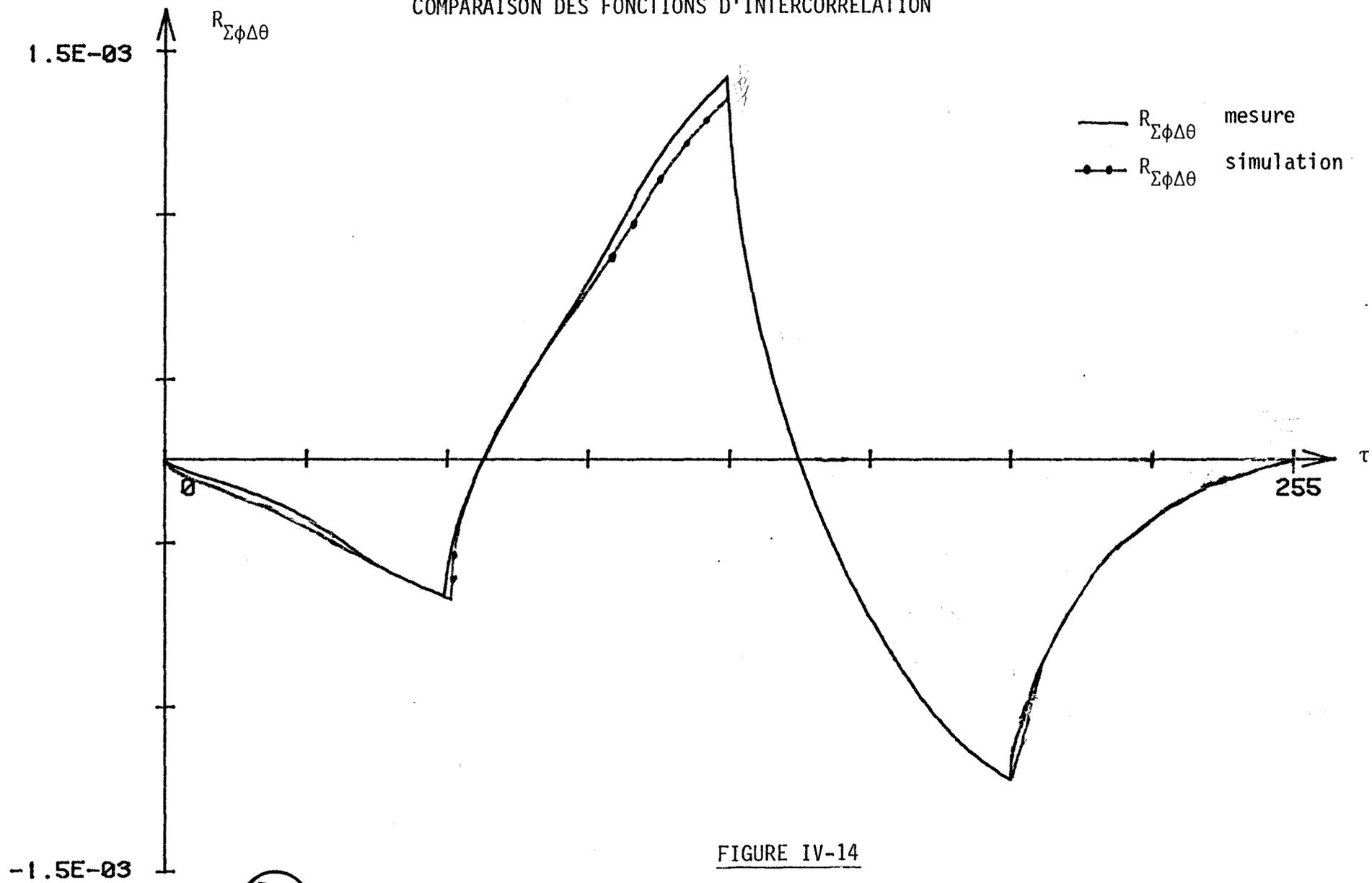


FIGURE IV-14



CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans le cas plus général où la paroi simulée est hétérogène et dissymétrique, il y a couplage entre modes normaux. Dans le domaine fréquence, l'énergie stockée comporte trois termes représentatifs de l'état énergétique de chacun des modes et de l'énergie d'interaction entre ces modes. L'intérêt de la simulation par lignes électriques est de permettre une mesure simple des fonctions d'influence permettant la représentation des échanges énergétiques en régime variable. Les résultats ont été validés par le traitement des flux thermiques et températures mesurées sur une paroi multicouche réelle.

ANNEXE 1 : QUELQUES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

I - MATERIAUX ETUDIES

Nous avons choisi pour cette étude un bicouche plexiglass Klegicel.

Le plexiglass est un matériau dont on connaît parfaitement les caractéristiques thermophysiques. Le klegicel est un produit "isolant" qui présente la particularité d'avoir un poids spécifique relativement important lui conférant une capacité thermique non négligeable. Ces caractéristiques engendrent des constantes de temps suffisamment importantes pour rendre secondaire les perturbations engendrées par les fluxmètres.

Plexiglass : Epaisseur : 0,98 cm
 R_{th} : 3 K/W
 λ : 0,192 W/M°C
 ρ : 1199 kg/m³
 a : $1,09 \cdot 10^{-7}$ m²/s
 b : $1580 \text{ J s}^{-1/2} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

Klegicel : Epaisseur : 1,45 cm
 R_{th} : 18,15 K/W
 λ : 0,047 W/m°C
 ρ : 203 kg/m³
 a : $1,63 \cdot 10^{-7}$ m²/s
 b : $116,4 \text{ J s}^{-1/2} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

Le système à étudier est disposé sur plaque échangeuse dont la température est réglée à 22°C environ. L'ensemble est recouvert d'un matelas isolant afin de ne pas subir l'influence de la plaque chaude supérieure. Pour minimiser l'échange par rayonnement entre la plaque chaude et l'isolant, la surface de ce dernier est recouverte d'une couche réfléchissante. A l'instant t_0 l'isolant est enlevé et la plaque chaude est descendue au contact du système.

La figure 1 montre les deux réponses indicelles obtenues ; on remarque que la fonction u_1 qui ne dépend que de $\Delta\theta$ a une constante de temps beaucoup plus faible que u_2 .

Sur la figure 2, nous avons représenté l'évolution de la température en fonction du temps.

La figure 3 représente l'évolution des flux correspondants.

II - EVOLUTION QUELCONQUE SUR UNE FACE

Pour vérifier les relations des convolutions suivantes :

$$\Sigma\Phi = h_1 * \Delta\theta + h_2 * \Sigma\theta$$

$$\Delta\Phi = h_3 * \Sigma\theta + h_2 * \Delta\theta$$

avec $h_1 = - \frac{(1 + \Sigma E/2)}{F}$

$$h_2 = - \frac{\Delta E}{2F}$$

$$h \longrightarrow h_3 = \frac{1 - \Sigma E/2}{F}$$

Pour le cas particulier d'un système bicouche :

$$\Delta E = \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a_1}} \ell_1 \cdot \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a_2}} \ell_2 \left| \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_1 b_2} \right|$$

$$\Sigma E = \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a_2}} \ell_1 \cdot \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a_2}} \ell_2 \left| \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1 b_2} \right| + 2(\text{ch} \sqrt{\frac{P}{a_1}} \ell_1 \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a_2}} \ell_2)$$

$$F = \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a_1}} \ell_1 \cdot \frac{1}{b \sqrt{P}} \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a_2}} \ell_2 + \text{ch} \sqrt{\frac{P}{a_2}} \ell_2 \cdot \frac{1}{b_1 \sqrt{P}} \cdot \text{sh} \sqrt{\frac{P}{a_1}} \ell_1$$

La fonction h_2 est représentative de la dissymétrie du système. Elle caractérise le couplage entre les modes fondamentaux.

Remarque : Dans le cas d'une évolution lentement variable ($P \rightarrow 0$) on obtient :

$$h_1 \rightarrow - \frac{2}{\Sigma R} \quad , \quad h_2 \rightarrow 0 \quad ; \quad h_3 \rightarrow 0$$

les relations deviennent : $\Sigma\Phi = - \frac{2}{\Sigma R} \cdot \Delta\theta$

$$\Delta\Phi \approx 0$$

Nous avons effectué sur le système une évolution cyclique quelconque sur la face 1 et maintenu la face 2 à température constante.

Les évolutions de température imposées T_{1a} et T_{2a} sont représentées graphe 2 ainsi que le $\Delta\theta$ correspondant.

Les flux résultants sont représentés graphe 3. On peut remarquer que ϕ_{1a} flux d'entrée côté plexiglass est beaucoup plus élevé que ϕ_{1b} flux d'entrée côté klegicel. Ceci résulte de la plus grande capacité du plexiglass.

On observe que ϕ_{2a} est confondu avec ϕ_{2b} . Ce résultat vérifie la relation étudiée précédemment :

$$\phi_{2a} - \phi_{2b} = h_2 * \theta_2$$

θ_2 représentant la variation de T_2 est ici nul, donc $\phi_{2a} = \phi_{2b}$.

Le graphe 4 montre la comparaison de $\Sigma\phi$ simulé et expérimental et $\Delta\phi$ simulé et expérimental

$$\Sigma\phi_{\text{simulé}} = h_1 * \Delta\theta$$

$$\Delta\phi_{\text{simulé}} = h_2 * \Sigma\theta$$

On vérifie la très bonne concordance des courbes qui permet de valider nos relations.

Le graphe 5 montre les évolutions de $2\Sigma\phi_a$ et $2\Sigma\phi_b$ simulées et expérimentales. Ici encore la concordance est très bonne.

$$2 \Sigma\phi_a = h_1 * \Delta\theta + h_2 * \Sigma\theta$$

$$2 \Sigma\phi_b = h_1 * \Delta\theta - h_2 * \Sigma\theta$$

FONCTIONS D'INTERCORRELATIONS ET D'AUTOCORRELATIONS

Pour illustrer la représentation des transferts par des fonctions d'intercorrélations dans les parois multicouches, nous avons appliqué la relation :

$$R_{\Sigma\phi.\Delta\theta} = h_1 * R_{\Delta\theta.\Delta\theta} + h_2 * R_{\Sigma\theta.\Delta\theta}$$

REPS INDICIELLES (T=13S)



- DIF DE LA SOMME DES FLUX
- SOM DE LA SOMME DES FLUX

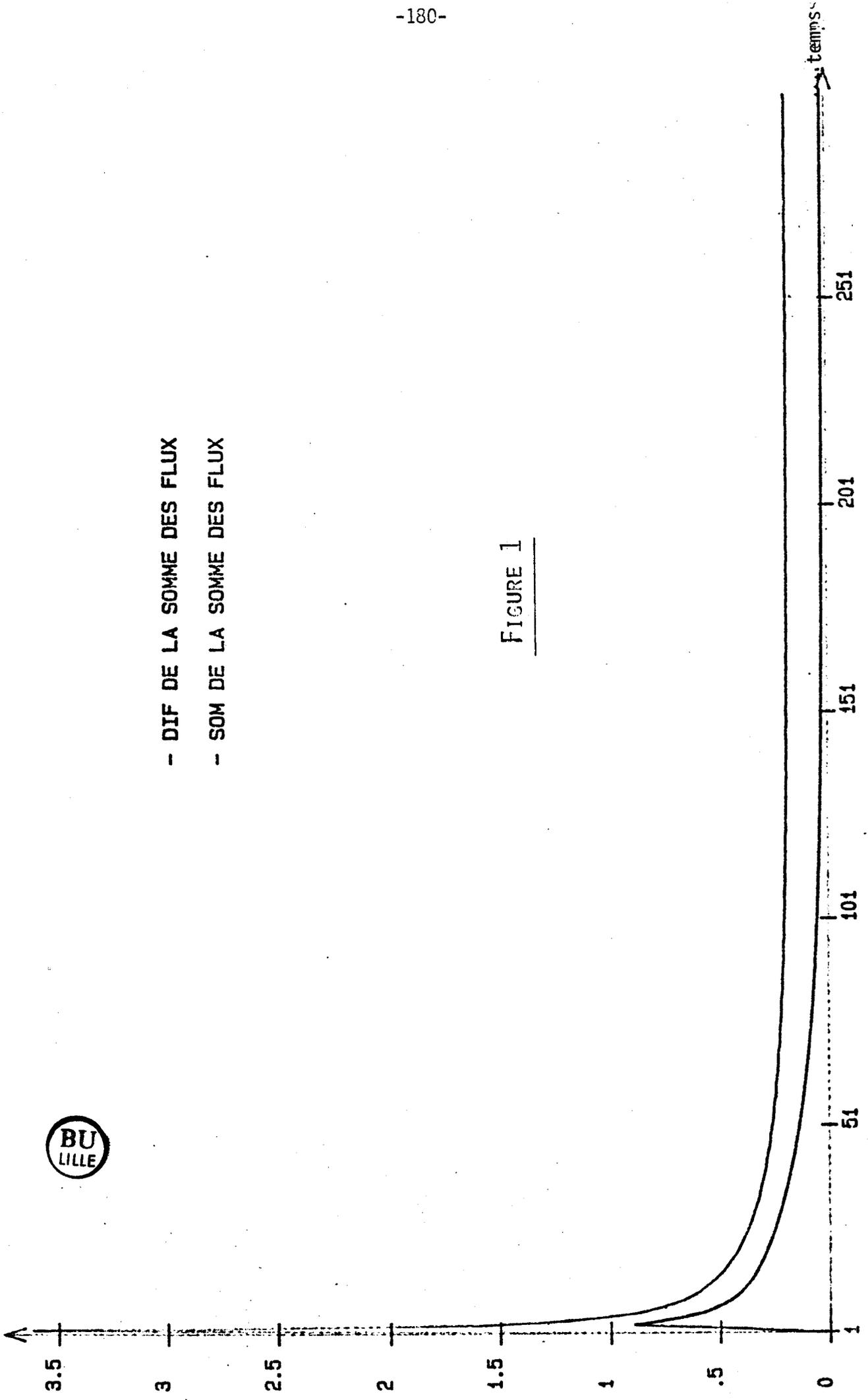


FIGURE 1

PLEXI KLEGICEL ESSAI 3

$T^{\circ}C$

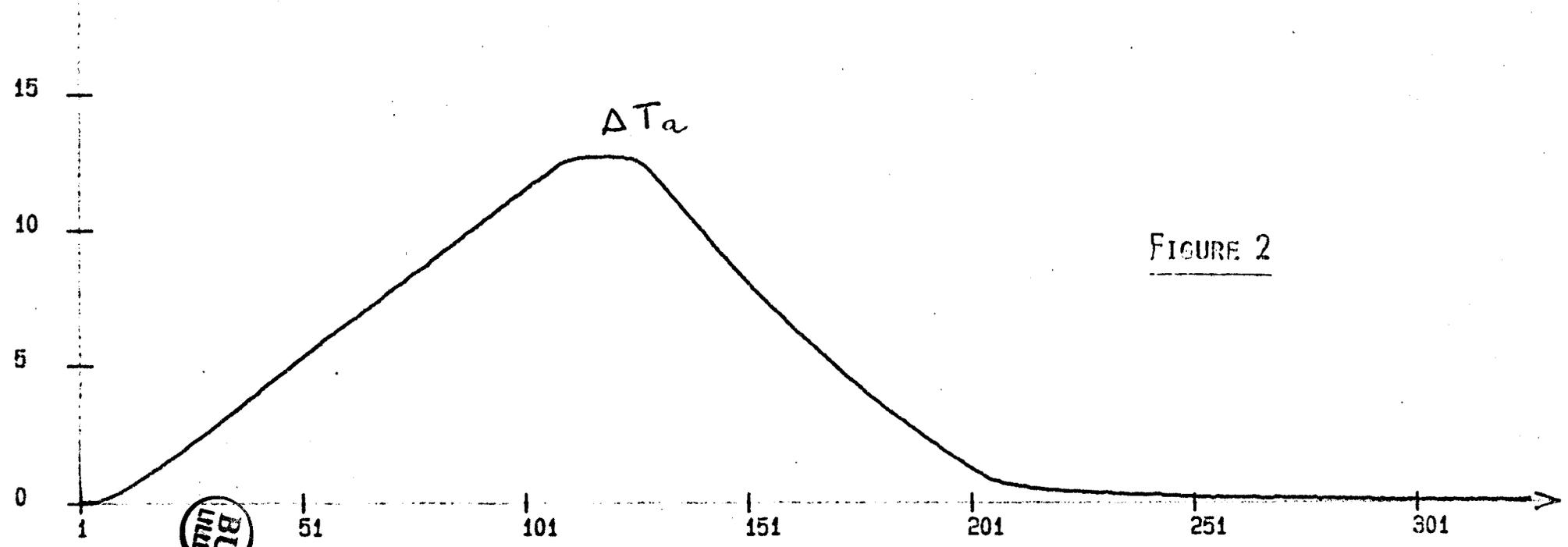
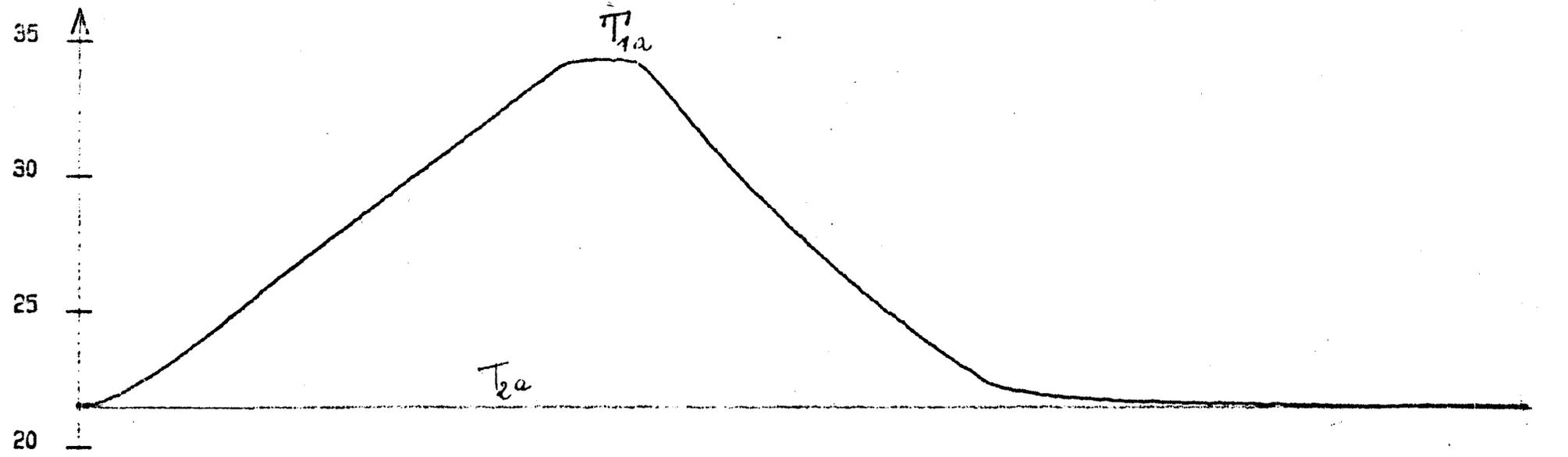


FIGURE 2

temps

PLEXI KLEGICEL ESSAI 3

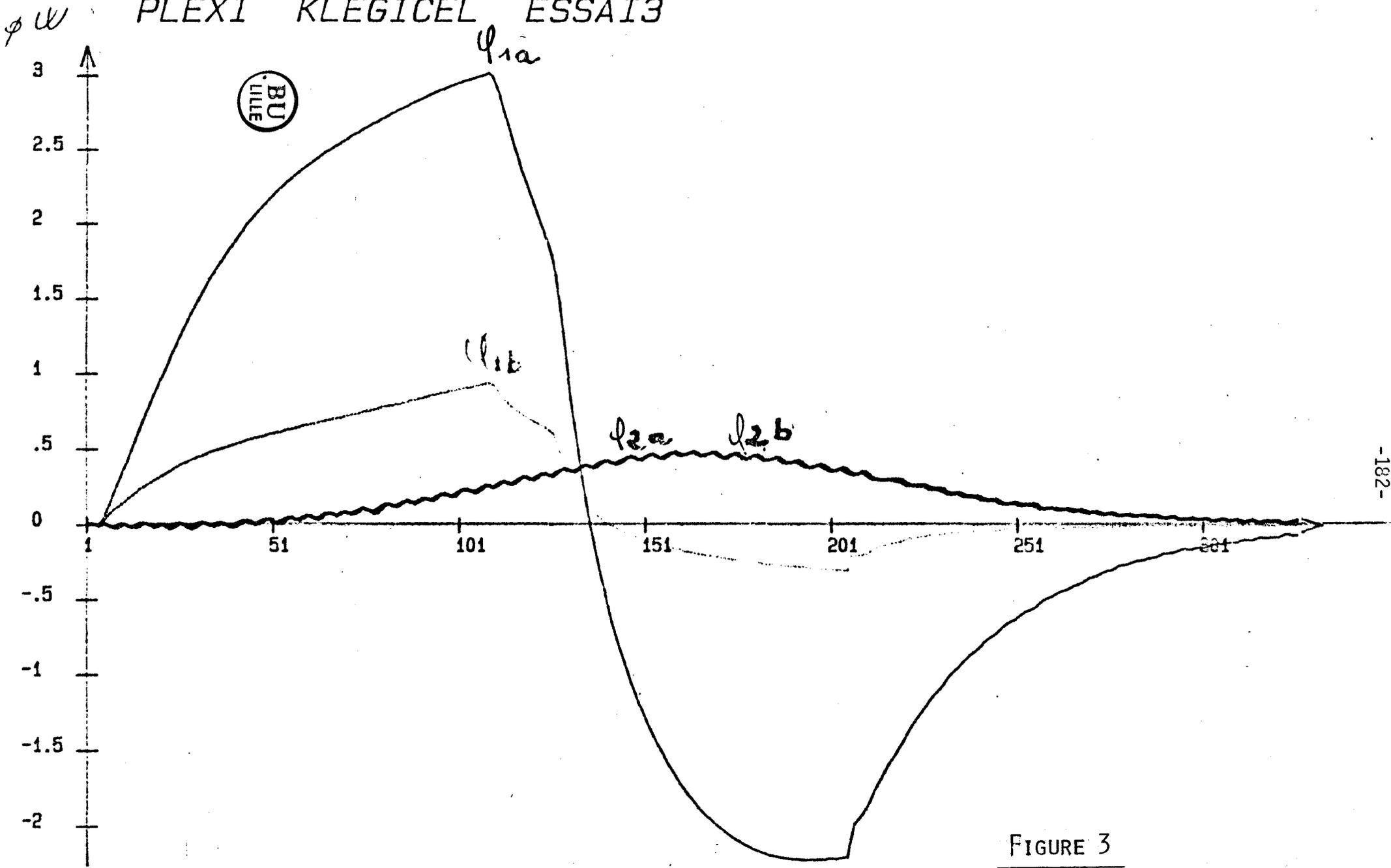


FIGURE 3

Nous avons effectué les calculs sur les résultats de l'essai précédent. La figure 4 montre les fonctions d'autocorrélations $R_{\Delta\theta, \Delta\theta}$ et d'intercorrélations $R_{\Sigma\theta, \Delta\theta}$ qui sont égales dans ce cas particulier car $\Delta\theta = \Sigma\theta$. On peut observer l'effet de lissage résultant de l'opération de corrélation.

La figure 5 représente les deux produits de convolution $h_1 * R_{\Delta\theta, \Delta\theta}$ et $h_2 * R_{\Sigma\theta, \Delta\theta}$.

On peut observer que la valeur moyenne sur la durée du processus du produit de convolution $h_2 * R_{\Sigma\theta, \Delta\theta}$ est sensiblement nulle.

$$\overline{h_2 * R_{\Sigma\theta, \Delta\theta}} = 0$$

Cette observation confirme les résultats précédents :

$$\overline{R_{\Sigma\phi, \Delta\theta}} = \frac{2}{R} \cdot \overline{R_{\Delta\theta, \Delta\theta}}$$

La figure 6 montre comparativement

$$2 R_{\Sigma\phi, \Delta\theta} \text{ et } h_1 * R_{\Delta\theta, \Delta\theta} = h_2 * R_{\Sigma\theta, \Delta\theta}$$

les deux courbes sont très voisines et valident la relation théorique.

Essai avec conditions limites de 3^e espace : Pour réaliser cet essai, deux plaques de polystyrène de 3 mm d'épaisseur ont été disposées entre les fluxmètres et les plaques échangeuses.

La figure 6 montre $\Sigma\theta(t)$ et $\Delta\theta(t)$. Nous n'avons plus cette fois de température imposée sur la face 2 $\Delta\theta \neq \Sigma\theta$; les flux résultants sont représentés figure 7.

La figure 8 montre la comparaison de $2\Sigma\phi_a$ et de $h_1 * \Delta\theta + h_2 * \Sigma\theta$. On observe une très bonne superposition, ce qui montre le caractère très général de la méthode utilisée.

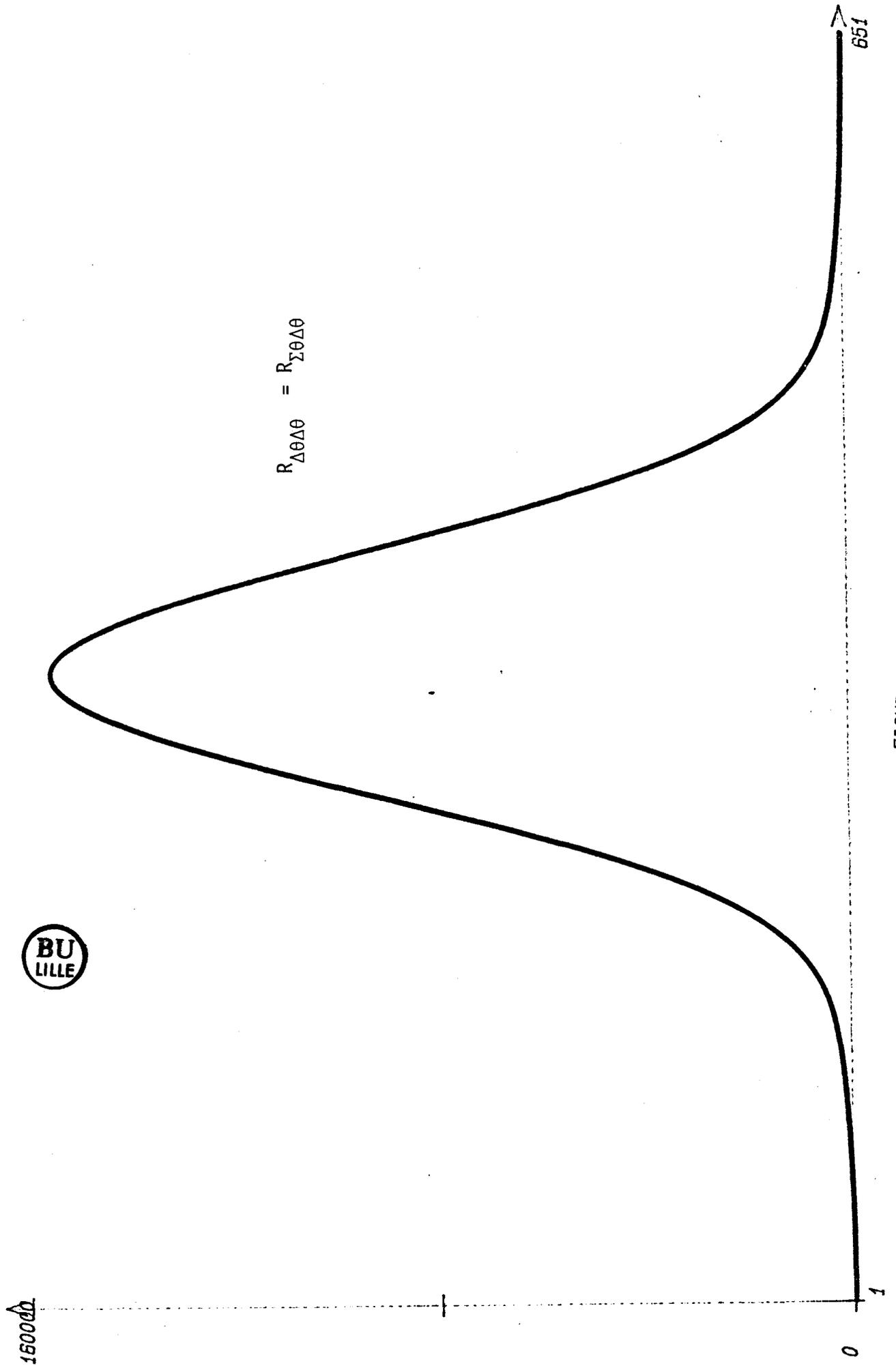


FIGURE 4

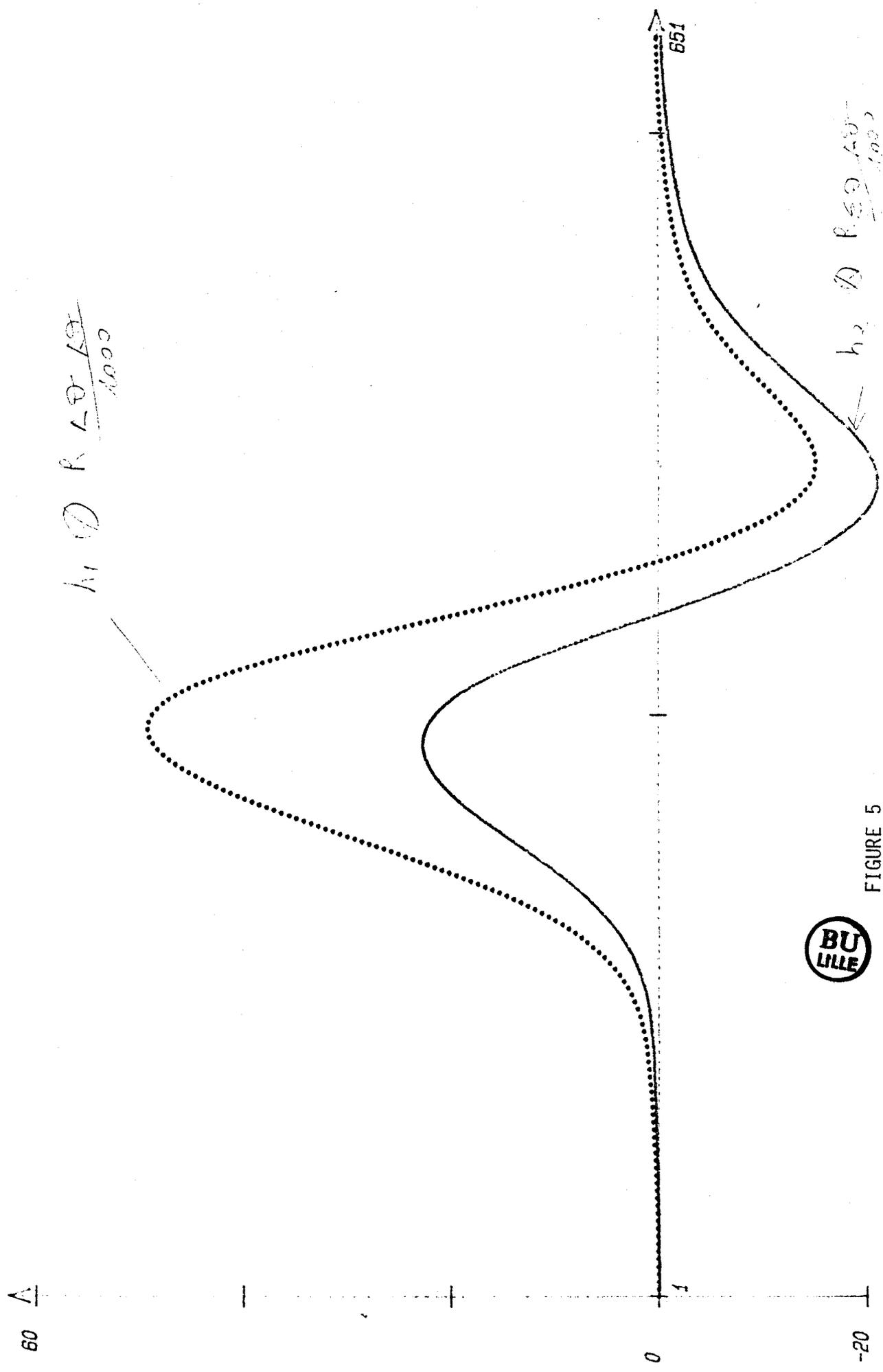


FIGURE 5



$\text{---} \quad 2 * \left(R \leq \varphi \Delta \sigma / 1000 \right)$
 $\text{.....} \quad h_1 \otimes R_{\Delta \sigma} \text{---} h_2 \otimes R_{\Delta \sigma} \text{---}$
 $\text{---} \quad \text{---}$

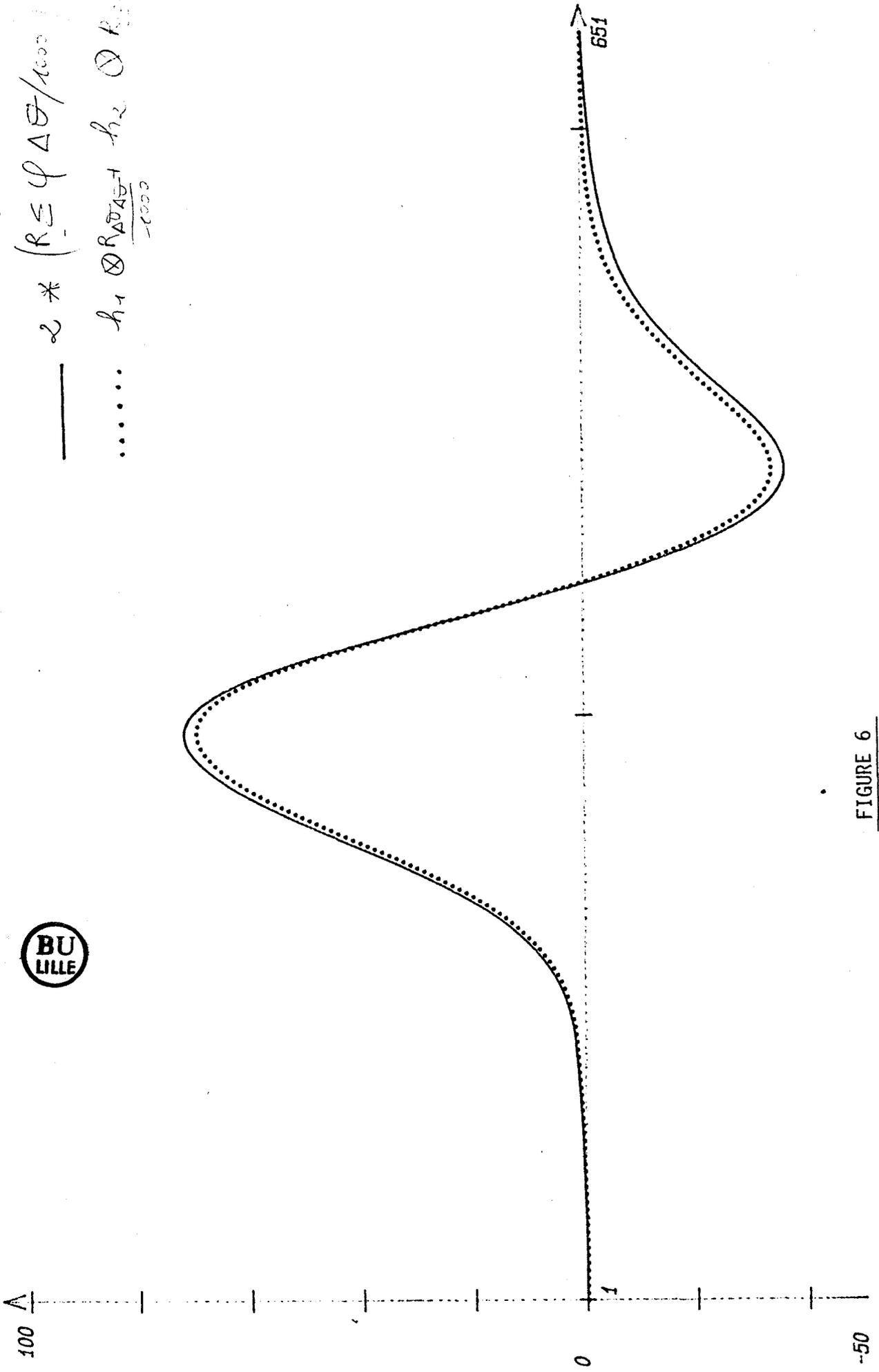


FIGURE 6

ESSAI 4 TEMPERATURES

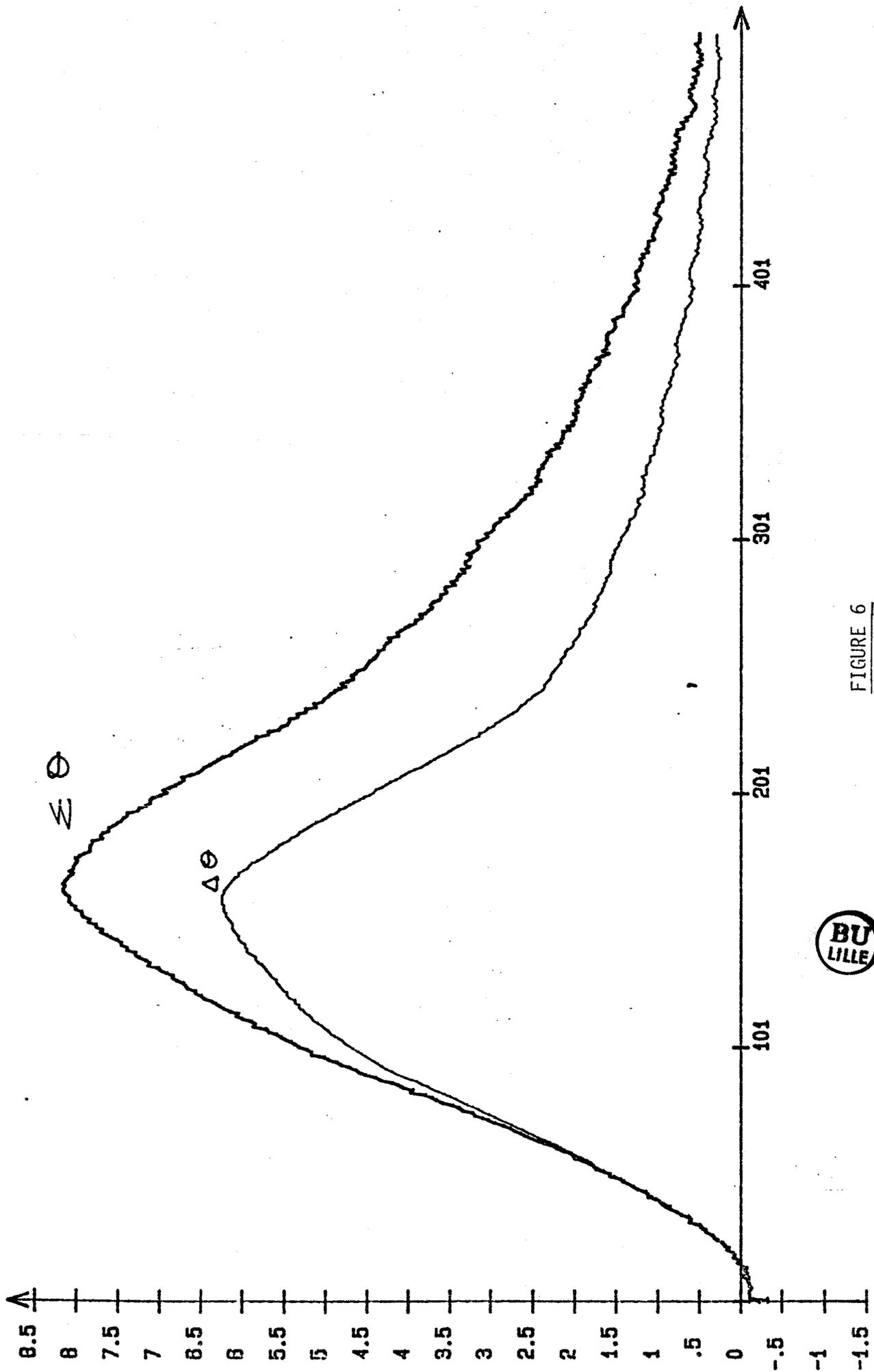


FIGURE 6

ESSAI 4 (POLY PLEXI KLEGI)

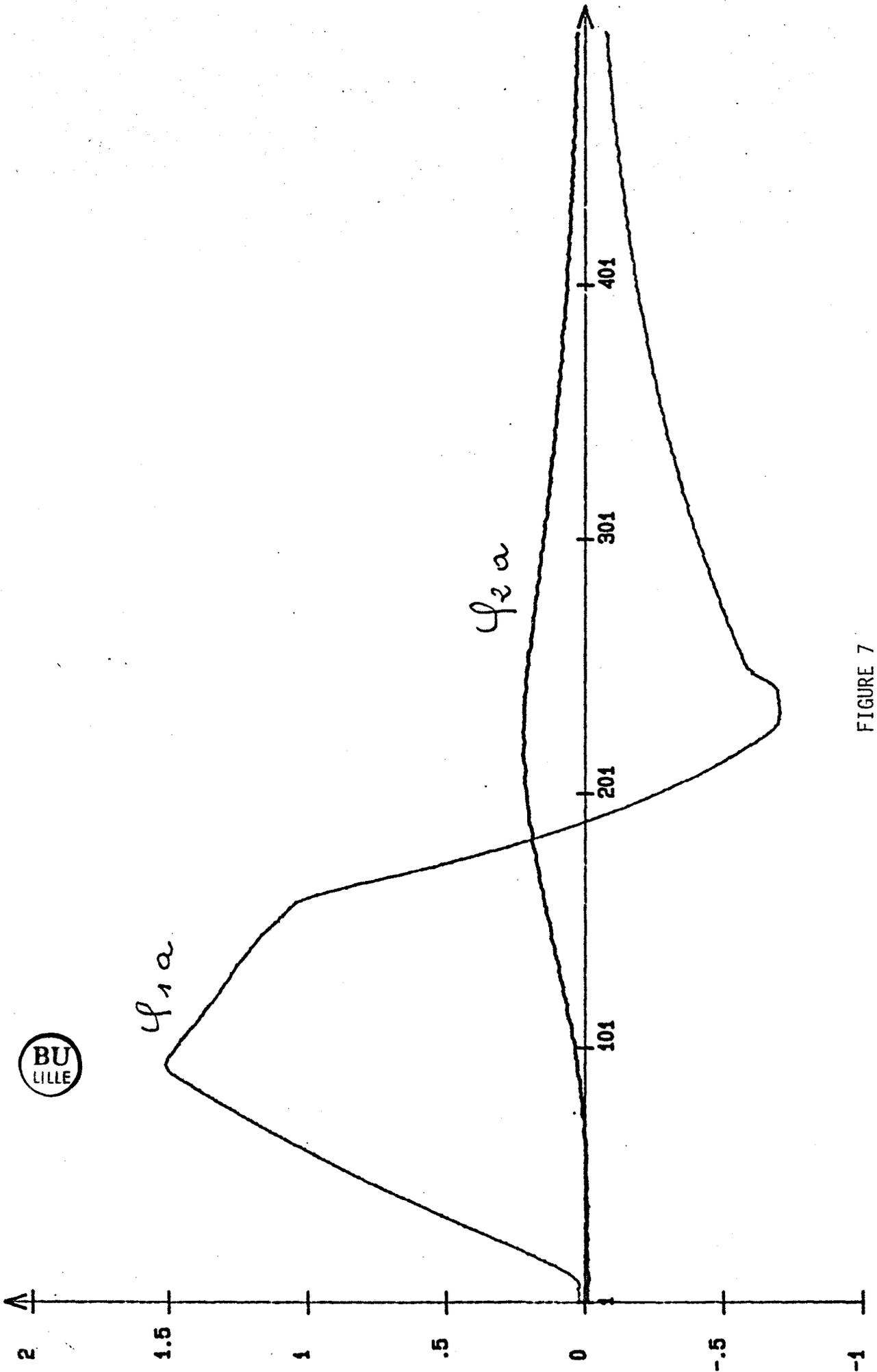


FIGURE 7

ESSAI 4 (POLY PLEXI KLEGI)

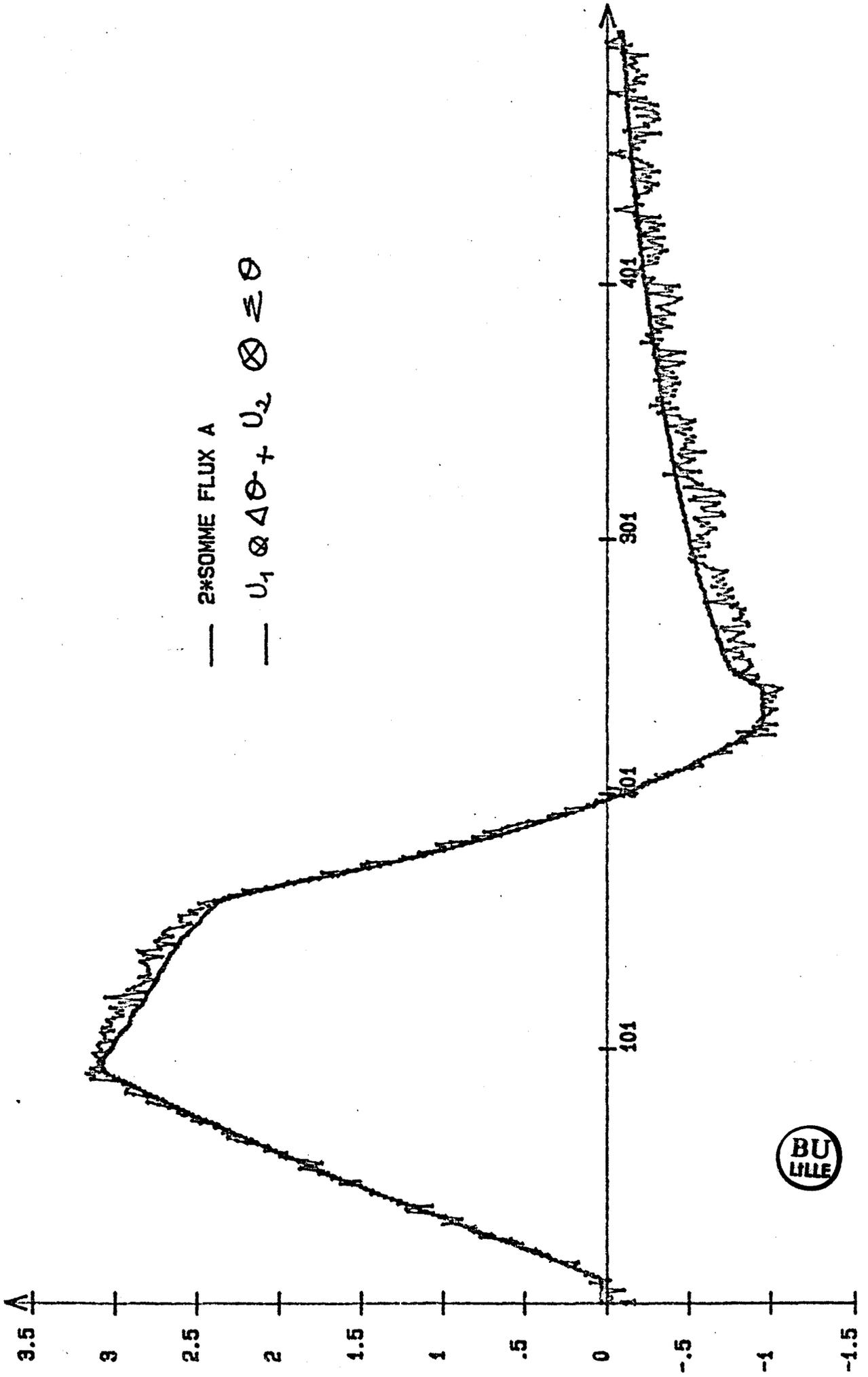


FIGURE 8

ANNEXE II

1 - PUISSANCE INSTANTANEE D'INTERACTION DE DEUX SIGNAUX

Considérons deux signaux quelconques $u(t)$ et $v(t)$ pouvant être complexes et dont le produit est homogène à une puissance.

on peut définir une grandeur énergétique d'interaction simultanée entre les deux signaux.

$$\left. \begin{aligned} P_{uv}(t) &= u(t) \cdot v^*(t) \\ P_{vu}(t) &= v(t) \cdot u^*(t) \end{aligned} \right\} \text{ Puissance d'interaction entre les deux signaux}$$

Dans le cas des signaux réels :

$$P_{uv}(t) = P_{vu}(t) = u(t) \cdot v(t)$$

La puissance moyenne d'interaction est définie comme suit :

$$P_{uv}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot v^*(t) dt$$

$$P_{vu}(t_0 - T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cdot u^*(t) dt$$

L'énergie d'interaction définie dans un intervalle de temps Δt autour de t_0 a pour valeur :

$$E_{uv}(t_0, \Delta t) = \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} P_{uv}(t) dt = \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} u(t) \cdot v^*(t) dt$$

L'énergie d'interaction totale est :

$$E_{uv} \neq \int_{-\infty}^{+\infty} P_{uv}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot v^*(t) dt$$

Si l'un des deux signaux $u(t)$ ou $v(t)$ est nul en dehors d'un certain intervalle (on parle de signal transitoire), on ne peut plus parler de puissance moyenne ; seule l'énergie totale garde un intérêt.

2 - REGIME NON SINUSOIDAL

Toute fonction périodique non sinusoidale qui est complètement intégrable peut être décomposée en série de Fourier.

Par exemple, une source de tension non sinusoidale peut être écrite :

$$e = E_{d.c.} + \sqrt{2} E_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \sqrt{2} E_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots + \sqrt{2} E_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (3-2-1)$$

Cette équation peut être généralisée plus précisément par les suppositions suivantes : $E_0 = E_{d.c.} / \sqrt{2}$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 0$

à partir de là, on peut écrire : $E_{d.c.} = \sqrt{2} E_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$

La série de Fourier pour la fonction e peut s'écrire sous une forme générale

$$e = \sqrt{2} \sum_0^n E_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad (3-2-2)$$

En général, l'application d'une tension périodique à un circuit passif crée un courant qui peut être écrit comme suit :

$$i = \sqrt{2} \sum_0^m I_m \sin(m\omega t + \alpha_m - \phi_m) \quad (3-2-3)$$

Pour les circuits linéaires, les fréquences du courant correspondent à celles de la tension ; la substitution $m = n$ peut être faite, et la relation (3-2-3) devient :

$$i = \sqrt{2} \sum_0^n I_n \sin(n\omega t + \alpha_n - \phi_n) \quad (3-2-4)$$

$$\text{où } I_n = \frac{E_n}{|Z_n|} \quad Z_n = |Z_n| e^{j\phi_n}$$

Relation entre énergie et puissance :

A tout instant, le flux énergétique dans un circuit linéaire avec une tension non sinusoidale périodique e est donné par une combinaison des relations (3-2-2) et (3-2-3)

$$e i = \sum_{n=0}^n \sum_{m=0}^m E_n I_m \{ -\cos [(n-m) \omega t + \phi_n] - \cos [(n+m) \omega t + 2 \alpha_n - \phi_n] \}$$

(3-2-5)

Le transfert instantané d'énergie n'est pas limité aux produits de fréquences semblables de la tension et du courant, mais contient des produits de fréquences qui se croisent.

L'énergie W s'écoulant dans un circuit en temps T est l'intégrale définie par :

$$W = \int_0^T e i dt$$

3 - TABLEAU RESUMANT LES FORMULATIONS THERMIQUES ET ELECTRIQUES

En électricité	En thermique
$\frac{\partial V}{\partial x} = -r I$ Chute ohmique de tension	$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} \phi$ Loi de Fourier
$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{cV}{dt}$ Conservation de la charge	$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho c \frac{dT}{dt}$ Conservation de la chaleur
$P_a = \text{Re}(VI^*) = \frac{1}{2}(VI^* + IV^*)$ Puissance active	$S_a = \frac{1}{2T_0} (\theta\phi^* + \theta^*\phi)$ (1)
$jP_r = \text{Im}(VI^*) = \frac{1}{2}(VI^* - I^*V)$ Puissance réactive	$j S_r = \frac{1}{2T_0} (\theta\phi^* - \theta^*\phi)$ (2)
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> (1) (2) </div> $\Rightarrow \text{div } P = -\Gamma i^2(t) - cv \frac{dv}{dt}$ expression de la divergence spatiale du flux de puissance	$To^2 \cdot \text{div } Is = To \text{div } \phi - \text{div } \theta \phi$ $\text{div } \theta(t) \cdot \phi(t) = -\frac{1}{\lambda} \phi^2(t) - g \theta \frac{d\theta}{dt}$ avec $g = \rho c$
(1) → lié à la dissipation	on retrouve les deux phénomènes :
(2) → lié au stockage de l'énergie	- dissipation
	- stockage de l'énergie

BIBLIOGRAPHIE

B I B L I O G R A P H I E



1. J. MAX
- "Méthodes et techniques du traitement du signal"
Masson, 1981
2. J.P. VABRE
- "Circuits à constantes réparties"
Tome III
3. L. COHEN
- "Théorie du circuit électrique de Heaviside.
Applications aux filtres électriques, aux câbles sous-marins, aux lignes de transmissions d'énergie et aux lignes artificielles"

4. L. BOE
- "Dipôles et quadripôles
Etude des circuits électriques et radioélectriques sous une forme simple et générale"
5. E. PILLET
- "Sur la généralisation de la notion de puissance réactive"
R.G.E., Mai 1982
6. W. SHEPHERD, P. ZAND
- "Energy flow and power factor in nonsinusoidal circuits"
Cambridge University press, 1979
7. F. DE COULON
- "Théorie et traitement des signaux"
Volume VI

8. P. F. COMBES
- "Transmission en espace libre et sur les lignes"
9. A. ANGOT
- "Compléments de mathématiques"
10. R. LEGROS
- "Circuit et amplificateurs linéaires en régime non sinusoïdal"
Volume 1
11. D. LECLERCQ
- "Caractérisation des transferts thermiques par analyse de la réponse en fréquence"
Thèse 3è cycle, Nov. 1982, Lille
12. R.A. KOUGBEADJO
- "Identification de la diffusivité thermique par traitement de transfert de chaleur"
Thèse 3è cycle, 1980, Lille
13. B. DUTHOIT, P. THERY, J.M. DEVISME
- "Application des bilans d'énergie et d'entropie au traitement des mesures de flux et de température dans une paroi réelle en régime variable"
Entropie n° 107-108, 1982
14. L. OTER, P. THERY
- "Application des méthodes de la théorie des systèmes au calcul des flux dans une paroi multicouche en régime variable"
Art. proposé à la Revue Générale de Thermique, 1985
15. E. GAVIOT
- "Application des méthodes de la théorie du signal à la dissociation des énergies en régime variable"
Thèse 3è cycle, Lille, 1985

16. B. DUTHOIT, D. LECLERCQ, P. THERY
- "Signal and system analysis for unstead heat conductor problems"
J. Appl. Phys. 54, 1983

17. P. THERY, A. FARZA, B. DUTHOIT
- "Mesure de la résistance thermique effective d'une paroi homogène par traitement d'un bilan d'entropie en régime variable"
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 25, n° 8, 1982

18. P. THERY
- "Fluxmètre calorifique"
Brevet Anvar, 1979

19. B. DUTHOIT
- "Les méthodes de la théorie du signal appliquées à l'étude des interactions énergétiques entre une paroi opaque et son environnement"
Thèse d'état, 16 Octobre 1985

20. F. WATTIAU
- "Contribution à l'étude théorique et expérimentale des échanges thermiques en régime transitoire dans les matériaux de construction"
Thèse de 3^e cycle, Lille, 1978

21. A. FARZA
- "Application du bilan d'entropie à la caractérisation des pertes par conduction thermique en régime variable"
Thèse de 3^e cycle, 1981

22. D. HERNOT et G. PORCHER
- "Thermique appliquée aux bâtiments"

23. J.F. SACADURA
-"Initiation aux transferts thermiques"
24. Nour Eddine SAHRAOUI
-"Contribution à l'étude en régime transitoire d'un nouveau modèle approché pour caractériser le comportement thermique d'un local. Etude expérimentale des transferts dans les locaux"
Thèse 3^e cycle, Lille, 1985
25. M. EL MOUTAOUKIL
-"Simulation des échanges thermiques à l'aide des lignes électriques"
Mémoire de D.E.A.
26. M. SAMODI
-"La théorie des systèmes appliqués à l'analyse du partage des flux thermiques à l'interface de deux milieux en régime variable".
27. L. OTER-DUTHOIT
-"Application des méthodes de la théorie des systèmes à la simulation de l'évolution des flux thermiques sur les faces d'entrée et de sortie d'une paroi multicouche"
Thèse 3^e cycle, 1985
28. J.P. BARDON
-"Transferts thermiques par conduction et rayonnement"
29. R. CADIERGUES
-"Données complémentaires sur le calcul des régimes variés linéaires"
Etudes thermiques
Tome 10E, n° 3, Juin 1979

