

N° d'ordre : 1343

50376
1986
147

50376
1986
147

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES-ARTOIS

THÈSE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

FLANDRES-ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

par

STÉPHANE GUILLOT

OPTIMISATION DE GRANDS SYSTEMES NON LINEAIRES

EN METALLURGIE



Thèse soutenue le 26 juin 1986 devant la commission d'examen :

Membres du jury : Président : P. BACCHUS
Rapporteur : J. DENEL
Examineurs : C. BREZINSKI
J.C. FIOROT
Invités : J. DESCAMPS
F. PRADES.

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation - Bât M3 - 1^{er} étage

U.F.R. S'I.E.E.A.
59655 VILLENEUVE D'ASCO - CEDEX - FRANCE
Tél. 20.43.46.71

Je suis honoré que Monsieur le Professeur Bacchus préside le jury de ma thèse et je l'en remercie cordialement.

Je remercie Monsieur le Professeur Denei qui m'a proposé le sujet de cette thèse. Grâce à ses conseils et à ses compétences, j'ai pu mener à bien toutes les phases de mon travail.

Je remercie Monsieur Descamps, Directeur de l'Usine de Noyelles-Godault, et Monsieur Prades, responsable du service des Méthodes Industrielles, qui ont accepté de représenter la Société Penarroya dans ce jury. Je remercie aussi leurs collaborateurs pour leur accueil et leur aide lors de mes passages à Noyelles-Godault.

Je remercie Messieurs les Professeurs Brezinski et Fiorot pour leur participation au jury et leurs remarques sur mon travail.

Je remercie tous les membres du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation et plus particulièrement Monsieur Van Ingeland qui m'a aidé à l'élaboration de cette thèse.

Je n'oublie pas Madame Tailly et Monsieur Glanc grâce à qui vous pouvez lire un exemplaire de cette thèse.

TABLE DES MATIERE

Pages

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 : La résolution des problèmes non linéaires avec contraintes.

5

1 -INTRODUCTION

7

2 -Les premières fonctions de pénalisation.

9

3 -Le Lagrangien augmenté.

11

4 -Les fonctions de pénalisation exacte non-différentiables.

14

5 -Les fonctions de pénalisation exactes différentiables

19

7 -CONCLUSION.

25

CHAPITRE 2 : L'algorithme de résolution des problèmes non linéaires.

29

1 -INTRODUCTION.

30

2 -Notations et définitions.

31

3 -Description de l'algorithme.

36

4 -Etude de la convergence.

40

CHAPITRE 3 : Méthode duale pour la résolution d'un problème quadratique.

67

1 -INTRODUCTION.

69

2 -Notations et définitions.

69

3 -Résultats généraux sur des problèmes quadratiques.

71

4 -L'algorithme dual.

75

CHAPITRE 4 : L'implémentation.

85

CHAPITRE I.

LA RESOLUTION DES PROBLEMES NON LINEAIRES AVEC CONTRAINTES.

1 - Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons voir les méthodes les plus couramment employées pour résoudre les problèmes non linéaires du type

$$(P) \quad \begin{cases} \max f(x) \\ \text{sous } h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour résoudre ces problèmes, on va chercher des méthodes qui essayent d'une part de trouver des points qui vérifient les contraintes et d'autre part qui maximisent la valeur de f . Ces conditions ont conduit à l'utilisation des fonctions Lagrangiennes et des fonctions de pénalisation qui toutes les deux font intervenir la fonction économique et les contraintes.

Dans la suite du chapitre, on suppose que les fonctions f , h_i , et g_j sont suffisamment dérivables et on pose :

$\langle x, y \rangle$ produit scalaire de x et y

x^* solution de (P)

$A(x) = \{j \in \{1, \dots, m\}, g_j(x) = 0\}$ c'est l'ensemble des inégalités actives

et $L(x, \lambda, \mu) = \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle$. Le Lagrangien de (P) en x .

Les conditions nécessaires du premier ordre pour qu'un point x^* réalisable soit optimal ou conditions de Kuhn et Tucker sont les suivantes :

il existe λ^* élément de \mathbb{R}^p et μ^* élément de $(\mathbb{R}^-)^m$ tels que :

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=0}^m \mu_i^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

et $\langle \lambda^*, g(x^*) \rangle = 0$.

Les conditions nécessaires du second ordre assurent que le Lagrangien a une courbure négative au voisinage de x^* pour une direction réalisable c'est à dire :

$$\langle y, \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \cdot y \rangle \leq 0$$

pour tout y tel que: $\langle y, \nabla g_j(x^*) \rangle = 0 \quad j \in A(x^*)$
 et $\langle y, \nabla h_i(x^*) \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, p.$

Les conditions suffisantes du second ordre dont nous nous servirons plus loin sont les suivantes :

- . x^* est un point de Kuhn et Tucker, donc il existe λ^*, μ^* tels que λ^*, μ^*, x^* , vérifient les conditions de Kuhn et Tucker.
- . on a la stricte complémentarité c'est à dire que les μ_j tels que $j \in A(x^*)$ sont non nuls.
- . et on a: $\langle y, \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \cdot y \rangle \leq 0$
 pour tout y non nul tel que: $\langle y, \nabla g_j(x^*) \rangle = 0 \quad j \in A(x^*)$
 $\langle y, \nabla h_i(x^*) \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, p.$

Dans la suite du chapitre nous allons présenter plusieurs méthodes qui ont été étudiées dans la littérature. Nous commencerons dans la deuxième partie avec la méthode de Newton qui en général ne converge vers la solution x^* que si on fournit un bon point de départ.

Ensuite nous parlerons des fonctions de pénalisation. Il y en a deux types principaux; les fonctions de pénalisation séquentielles pour lesquelles la solution x^* est la limite d'une suite de maximisation de fonction de pénalisation et les fonctions de pénalisation exactes où x^* est la solution d'une seule fonction de pénalisation.

La troisième partie sera consacrée à l'étude des premières fonctions de pénalisation séquentielles et aux problèmes numériques

qu'elles peuvent engendrer à cause de leur paramètre de pénalisation qui tend vers l'infini. Cette difficulté disparaît avec la méthode du Lagrangien augmenté qui conserve un paramètre de pénalisation borné.

Nous étudierons ensuite dans la cinquième partie les fonctions de pénalisation exacte non différentiables. Nous donnerons un ensemble de résultats dus à Han et Mangasarian [19]. Nous étudierons aussi une méthode de résolution du problème de maximisation de cette fonction non différentiable basée sur la résolution d'une suite de problèmes quadratiques dus à Wilson [32] et Han [18].

Nous parlerons enfin des fonctions de pénalisation exacte différentiables qui ont été peu développées à cause des difficultés qui apparaissent lors de leur résolution.

II - La méthode de Newton.[28]

Dans cette section nous étudierons d'abord le cas d'un problème (P) sans inégalités. Dans ce cas x et λ doivent satisfaire les équations non-linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} h_i(x) &= c \quad i = 1, \dots, p \\ \nabla f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x) &= c \end{aligned} \tag{1.2}$$

La méthode de Newton consiste à résoudre une suite de systèmes linéaires qui sont des approximations linéaires, successives du système non linéaire initial. On passe donc de l'approximation (x, λ) à l'approximation (x', λ') en résolvant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 f(x) \cdot (x' - x) + \nabla f(x) + \sum_{i=1}^p (\lambda_i' - \lambda_i) \nabla h_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x) \\ \quad + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla^2 h_i(x) \cdot (x' - x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x) = 0 \quad (1.3) \\ \langle \nabla h_i(x), x' - x \rangle + h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

On pose $G(x, \lambda) = \nabla^2 L(x, \lambda)$

et $N(x) = [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x)]^T$.

On peut écrire le système à résoudre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} G(x, \lambda) & + N(x)^T \\ -N(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' - x \\ \lambda' - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) - N(x)^T \cdot \lambda \\ h(x) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Si nous regardons l'équation (1.4) nous remarquons deux choses. La première est que la méthode de Newton nécessite la connaissance des dérivées premières de la fonction f et des contraintes ($h_i, i=1, \dots, p$) ainsi que la dérivée seconde du Lagrangien.

La deuxième est que (x', λ') ne dépendent de λ qu'à travers la matrice $G(x, \lambda)$ car les autres termes dépendants de λ s'éliminent. En effet si $G(x, \lambda)$ est régulière, on peut écrire :

$$\lambda' = -(NG^{-1}N^T)^{-1} (NG^{-1}\nabla f - h) \quad (1.5)$$

$$x' - x = -G^{-1}N(NG^{-1}N^T)^{-1}h + (G^{-1}N^T(NG^{-1}N^T)^{-1}NG^{-1} - G^{-1})\nabla f \quad (1.6)$$

Si on a une suite $\{\lambda^k, k \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers λ^* et si on calcule la suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ à l'aide de la formule (1.6) alors la convergence de $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ vers x^* est superlinéaire. Garcia-Palomares et Mangasarian [14] montrent de plus qu'il existe un ϵ positif tel que si λ est à une distance inférieure à ϵ de λ^* alors la suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ calculée par la formule (1.5) converge vers x^* . Il n'est donc pas nécessaire que la

suite de λ^k tende vers λ^* mais il suffit qu'elle s'en approche suffisamment.

Pour résoudre un problème contenant des inégalités, Wilson [32] propose un algorithme appelé SOLVER. Il se base sur la remarque suivante: si $x' - x$ est solution de (1.4), on peut aussi le calculer en résolvant le problème quadratique suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \max \langle \nabla f(x), x' - x \rangle - 1/2 \langle G(x, \lambda) \cdot (x' - x), x' - x \rangle \\ \text{sous } \langle N(x), x' - x \rangle + h(x) = 0 \end{array} \right. \quad (1.7)$$

L'introduction d'inégalités $\{g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$, se fait simplement en ajoutant les inégalités suivantes au programme quadratique :

$$\langle \nabla g_j(x), x' - x \rangle + g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Nous reparlerons plus tard de cette approche quand nous chercherons une direction de descente pour les fonctions de pénalisation exacte non-différentiables.

En conclusion, la méthode de Newton est une méthode simple pour résoudre des problèmes non linéaires avec contraintes. Il y a cependant des inconvénients. Tout d'abord, cette méthode ne marche bien que si on fournit au départ une bonne approximation de x et de λ , donc ce n'est pas une méthode générale. Ensuite la solution obtenue est un point stationnaire, donc pas nécessairement un maximum, et il n'y a pas de moyen de diriger la recherche vers un maximum.

D'autres méthodes ont donc dû être développées quand on ne peut pas fournir de bonne estimation de la solution et de plus certaines d'entre-elles ne nécessitent pas le calcul des dérivées secondes.

III - Les premières fonctions de pénalisation.

On attribue à Courant [4] la première fonction de pénalisation pour résoudre un problème non linéaire avec des égalités. On pose:

$$\Phi(x, \sigma) = f(x) - 1/2\sigma \langle h(x), h(x) \rangle \quad (1.8)$$

Le terme de pénalisation est le terme quadratique et σ est le coefficient de pénalisation. En général le maximum de $\Phi(x, \sigma)$ n'est pas la solution du problème de départ pour un σ donné mais uniquement à la limite pour un σ infini. Cela nous donne l'algorithme suivant :

- 1) choisir une suite $\{\sigma^k, k \in \mathbb{N}\}$ tendant vers l'infini
- 2) pour chaque σ^k déterminer x^k solution de:

$$\max \Phi(x, \sigma^k). \quad (1.9)$$

- 3) on arrête si $h_1(x^k)$ est assez petit sinon on retourne en 2).

En général, le pas 2) sera résolu en utilisant une méthode numérique de maximisation sans contrainte qui déterminera x^k aussi précisément que possible.

Nous allons donner quelques résultats sur la convergence de cette fonction de pénalisation séquentielle; ils ont été donnés par Fletcher [11]. Soit x^* un point d'accumulation de la suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ et N^* la matrice $[\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)]^T$.

Si x^k maximise la fonction $\Phi(x, \sigma^k)$, on a :

$$\nabla \Phi(x^k, \sigma^k) = 0 = \nabla f(x^k) - \sigma^k h(x^k) N^k$$

donc
$$\nabla f(x^k) = \sigma^k h(x^k) N^k = -\lambda^k N^k. \quad (1.10)$$

si on pose
$$\lambda^k = -\sigma^k h(x^k) \quad (1.11)$$

On a à la limite $\nabla f(x^*) + \hat{\lambda}^* N^* = 0$ d'après (1.10) et $h(x^*) = 0$ d'après (1.11) donc x^* est un point de Kuhn et Tucker de (P). Fletcher montre aussi que la vitesse de convergence de l'algorithme (1.9) est linéaire.

Cet algorithme qui est assez naturel et paraît donner assez facilement la solution est en fait numériquement difficile. En effet notre paramètre σ tend vers l'infini et il devient délicat de trouver la solution x^k du pas 2) de l'algorithme proposé. Il est assez facile

d'obtenir $h(x^k) = 0$ mais difficile de vérifier la condition du premier ordre $\nabla f(x^k) + \lambda^k N^k = 0$. En pratique les grandes valeurs du terme de pénalisation masquent le terme $f(x)$ dans $\Phi(x, \sigma)$. Ceci pose le choix de la suite $\{\sigma^k, k \in \mathbb{N}\}$. Si σ^1 est trop grand on vérifie les contraintes mais on ne maximise pas f , si σ^1 est trop petit on a une borne solution pour $\Phi(x, \sigma)$ mais les contraintes sont mal vérifiées. Fletcher [8] propose de partir avec un σ^1 moyen et σ^k ne doit pas dépasser $\varepsilon^{1/2}$ si ε est la précision machine.

Si notre problème comporte des inégalités, on prendra la fonction de pénalisation :

$$\Phi(x, \sigma) = f(x) - \frac{1}{2} \sigma \sum_{j=1}^m \max [0, g_j(x)]^2$$

et on peut étendre les résultats précédents à cette nouvelle fonction avec des problèmes numériques accrus à cause de la non-différentiabilité du terme de pénalisation en $g_j(x) = 0$.

Dans le cas où le problème ne comporte que des inégalités, il existe un autre type de fonctions de pénalisation dites fonctions "barrières". Elles consistent à partir d'un point intérieur au domaine et à générer une suite de points qui restent dans ce domaine à l'aide d'un terme "barrière".

Les deux exemples les plus importants sont l'inverse :

$$\Phi(x, r) = f(x) - r \sum_{i=1}^m (g_i(x))^{-1}$$

étudié par Carroll [3] et la logarithmique :

$$\Phi(x,r) = f(x) - r \sum_{i=1}^m \log \langle -g_i(x) \rangle$$

étudiée par Frisch [13]. Ici le paramètre r tend vers 0 pour réduire peu à peu l'effet du terme "barrière". On peut établir des résultats semblables à ceux de la fonction de Courant et on a les mêmes erreurs numériques dus au fait que les gradients de Φ deviennent grands et de plus ces fonctions sont non définies en dehors du domaine.

IV - Le Lagrangien Augmenté.

Puisque la fonction de pénalisation (1.8) ne donne la solution x^* du problème non linéaire de départ (P) que pour une valeur σ tendant vers l'infini, on va chercher une autre fonction de pénalisation qui donnera cette solution pour un σ grand mais fini.

Si on note $x(\sigma)$ la solution de (1.8), on peut se demander pourquoi $x(\sigma)$ n'est pas égal à x^* en général. La raison est que le gradient de (1.8) en $x(\sigma)$ vaut 0 tandis qu'en x^* , il vaut $\nabla f(x^*)$, donc x^* et $x(\sigma)$ sont différents si $\nabla f(x^*)$ est non nul. Pour cela remplaçons f dans (1.8) par une fonction qui a son gradient nul en x^* , par exemple le Lagrangien. On a :

$$\Phi(x, \lambda, \sigma) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle - 1/2 \sigma \langle h(x), h(x) \rangle \quad (1.12)$$

avec λ une approximation de λ^* multiplicateur à l'optimum de (P). Cette fonction de pénalisation est construite avec le Lagrangien plus un terme de pénalisation d'où son nom. Si on choisit un σ assez grand, on verra par la suite une borne inférieure \underline{g} , on obtient une fonction indépendante de σ et on a l'algorithme suivant:

- 1°) - déterminer une suite $\{\lambda^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite λ^*
- 2°) - pour chaque λ^k , chercher $x(\lambda^k)$ solution de:

$$\max \Phi(x, \lambda^k).$$

3°) - fin si $h(x(\lambda^k))$ est assez petit sinon aller en 2).

A la différence du premier algorithme, on ne peut pas déterminer la suite $\{\lambda^k, k \in \mathbb{N}\}$ à priori mais on est obligé de déterminer l'élément suivant à chaque itération. Si σ est assez grand, x^* est solution de $\Phi(x, \lambda^*)$ donc on peut écrire les conditions d'optimalité, c'est à dire :

$$\nabla \Phi(x^*, \lambda^*) = 0 = \nabla f(x^*) + \lambda^* N^* - \sigma h(x^*) N^* \quad (1.13)$$

pour les conditions de Kuhn et Tucker. Pour la condition du second ordre, on doit avoir la matrice :

$$\nabla_x^2 \Phi(x^*, \lambda^*) = G(x^*, \lambda^*) - \sigma N^{*T} . N^* \quad (1.14)$$

qui doit être définie négative. D'après la définition de $G(x^*, \lambda^*)$ et les conditions nécessaires du second ordre pour $\langle P \rangle$, ceci est vrai si σ est supérieur à un $\underline{\sigma}$ de telle façon que le second terme l'emporte sur le premier ce qui donne le plus petit σ possible.

Pour un λ choisi, la valeur $x(\lambda)$ peut être considérée comme la solution de

$$\nabla \Phi(x, \lambda) = 0$$

Or le Jacobien de ce système, $\nabla_x^2 \Phi(x, \lambda)$ est défini négatif donc d'après le théorème des fonctions implicites, $x(\lambda)$ est une fonction C^1 définie sur un voisinage de x^*, λ^* .

On pose :

$$\psi(\lambda) = \Phi(x(\lambda), \lambda) \quad (1.15)$$

donc $\psi(\lambda) = \Phi(x(\lambda), \lambda) \geq \Phi(x^*, \lambda) = \Phi(x^*, \lambda^*) = \psi(\lambda^*)$

car $x(\lambda)$ est un maximum local de $\Phi(x, \lambda)$.

Calculer λ revient donc à minimiser $\psi(\lambda)$. Les dérivées premières et secondes de ψ sont connues :

$$\nabla\psi(\lambda) = + h(x(\lambda)) \quad (1.16)$$

et

$$\nabla^2\psi(\lambda) = -N(x(\lambda)) \cdot G(x(\lambda), \lambda)^{-1} \cdot N^T(x(\lambda)) \quad (1.17)$$

avec $G(x(\lambda), \lambda) = \nabla_x^2 \Phi(x(\lambda), \lambda)$

et $N(x(\lambda)) = \{\nabla h_1(x(\lambda)), \dots, \nabla h_p(x(\lambda))\}^T$.

en utilisant la méthode de Newton, on obtient :

$$\lambda' = \lambda - [\nabla^2\psi(\lambda)]^{-1} \nabla\psi(\lambda)$$

$$\lambda' = \lambda + (N G^{-1} N^T)^{-1} h(x(\lambda)). \quad (1.18)$$

Cette actualisation de λ nécessite la connaissance des dérivées secondes. En revanche celle de Powell [27] et Hestenes [21] se base sur le fait que :

$$(N G^{-1} N^T)^{-1} \text{ voisin de } S = -\sigma I \quad \text{quand } \sigma \text{ est grand donc:}$$

$$\lambda' = \lambda + S h(x(\lambda)). \quad (1.20)$$

Plus σ est grand plus S approche $(N G^{-1} N^T)^{-1}$ donc plus la vitesse de convergence de $\{\lambda^k, k \in \mathbb{N}\}$ vers λ^* est grande. En utilisant cette méthode d'actualisation, Powell [27] a écrit un algorithme qui a une convergence linéaire de vitesse constante, au besoin en augmentant le paramètre σ . Malheureusement augmenter σ peut créer des problèmes numériques. De plus un domaine vide n'est pas toujours détecté et σ continue à être augmenté, sans limite, ce qui est néfaste numériquement.

Fletcher [12] propose de garder le σ fixe mais de diminuer éventuellement le pas pour assurer une diminution suffisante de $\psi(\lambda)$ à chaque itération.

Dans le cas où notre problème de départ s'écrit avec des inégalités, Rockafellar [30] a proposé une approche qui permet de les prendre en compte.

Pour une inégalité qui s'écrit :

$$g_j(x) \leq 0,$$

on ajoute une variable d'écart r_j , telle que :

$$g_j(x) + r_j = 0 \quad r_j \geq 0$$

donc le Lagrangien augmenté devient :

$$\Phi(x, \mu, \sigma) = f(x) + \langle \mu, g(x)+r \rangle - 1/2\sigma \langle g(x)+r, g(x)+r \rangle \quad (1.21)$$

$$\Phi(x, \mu, \sigma) = f(x) - 1/2 \sigma \langle g(x)+r - \mu/\sigma, g(x)+r - \mu/\sigma \rangle + 1/2 \langle \mu, \mu \rangle / \sigma$$

On cherche la plus grande valeur de $\Phi(x, \mu, \sigma)$ donc le terme central doit être le plus petit possible ce qui nous donne :

$$\Phi(x, \mu, \sigma) = f(x) + \sum_{j=1}^m \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} \mu_j^2 & \text{si } g_j(x) \leq \frac{\mu_j}{\sigma} \\ \mu_j g_j(x) - 1/2\sigma g_j^2(x) & \text{si } g_j(x) \geq \frac{\mu_j}{\sigma} \end{cases} \quad (1.22)$$

La plupart des résultats obtenus avec les égalités peuvent être étendus au cas avec des inégalités. Le fait que x^* maximise $\Phi(x, \mu^*, \sigma)$ pour un σ assez grand reste vrai. Il découle du résultat pour les égalités si on a la stricte complémentarité et Fletcher [10] l'a démontré si on ne l'a pas.

Si on appelle $x(\mu)$ la valeur de x qui maximise $\Phi(x, \mu, \sigma)$ pour σ assez grand on peut définir $\Psi(\mu)$ par :

$$\Psi(\mu) = \Phi(x(\mu), \mu) \geq \Phi(x^*, \mu)$$

or :

$$\Phi(x^*, \mu) = f(x^*) + \sum_{j=1}^m \begin{cases} 1/2 \sigma \mu_j^2 & \text{si } g_j(x^*) \leq \frac{\mu_j}{\sigma} \\ \mu_j g_j(x^*) - 1/2\sigma g_j^2(x^*) & \text{si } g_j(x^*) \geq \frac{\mu_j}{\sigma} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\geq f(x^*) + \sum_{j=1}^m \begin{cases} 1/2 \sigma \mu_j^2 \\ 1/2 \sigma g_j^2(x^*) \end{cases} \\ &\geq f(x^*) = \Phi(x^*, \mu^*) = \Psi(\mu^*) \end{aligned}$$

Ce résultat est vrai localement si on a la stricte complémentarité et peut certainement être étendu dans l'autre cas en utilisant Fletcher [10].

On peut calculer les dérivées premières et secondes de Ψ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu_j}(\mu) = \min \left\langle \frac{\mu_j}{\sigma}, g_j(x) \right\rangle$$

et

$$\nabla^2 \Psi(\mu) = \begin{vmatrix} -N \oplus N^T & 0 \\ 0 & -1/\sigma I \end{vmatrix}$$

avec les lignes de N correspondant aux indices j tels que $g_j(x) > \mu_j/\sigma$ et celles de I aux indices j tels que $g_j(x) \leq \mu_j/\sigma$.

On peut donc calculer la suite $\{\mu^k, k \in \mathbb{N}\}$ avec une méthode de type Newton comme pour les égalités en utilisant les dérivées premières et secondes de Ψ . Si σ est assez grand, on peut reprendre la formule simplifiée (1.19), ce qui donne :

$$\lambda_j^k = \lambda_j + \min\{\sigma g_j(x), \mu_j\}.$$

Terminons par quelques remarques. La première concerne le choix du σ et ses modifications. Fletcher [10] propose des méthodes automatiques de mise à jour et en particulier il affecte un σ_1 différent à chaque contrainte. La deuxième est valable pour toutes les méthodes de pénalisation : si le problème comporte des égalités linéaires, il est préférable de s'en servir pour diminuer la taille du problème en

éliminant des variables et des équations plutôt qu'en les incorporant dans la fonction de pénalisation. C'est ce qui est fait dans notre programme et qui sera expliqué au chapitre IV.

La méthode du Lagrangien augmenté a été utilisée par Muntagh et Saunder [26] qui ont fabriqué un code "MINOS/AUGMENTED" et nous comparerons au chapitre IV les résultats obtenus avec ce code aux autres résultats.

U) - Les fonctions de pénalisation exacte non-différentiables.

Dans cette partie, nous allons chercher à résoudre le problème (P) à l'aide d'une seule fonction de pénalisation. Pour cela nous posons :

$$\Phi(x, \alpha) = f(x) - \alpha Q(\|h(x), \max(0, g(x))\|) \quad (1.23)$$

avec α un réel positif, $\|\cdot\|$ une norme de \mathbb{R}^{m+p} et Q une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ vérifiant :

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0 \\ Q(\xi) &> 0 \quad \text{si } \xi > 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\text{et} \quad \infty > Q'(0_+) = \lim_{\xi \rightarrow 0_+} \frac{Q(\xi) - Q(0)}{\xi} > 0.$$

La fonction de pénalisation exacte classique:

$$\Phi_1(x, \alpha) = f(x) - \alpha \sum_{i=1}^p |h_i(x)| - \alpha \sum_{j=1}^m \max(0, g_j(x))$$

vérifie les conditions fixées car $Q(\xi) = \xi$. De même la fonction $Q(\xi) = \xi + \xi^2$ vérifie aussi (1.24) tandis que la fonction de pénalisation de courant : $Q(\xi) = \xi^2$ ne vérifie pas (1.24) car la dérivée en 0 est nulle.

Nous allons maintenant donner un ensemble de résultats dus à Han et Mangasarian [19] qui relie les solutions du problème (P) et celles de la fonction de pénalisation (1.23) sous certaines hypothèses. Une des

plus importantes est la qualification de Mangasarian-Fromovitz [25] qui d'une part assure que les conditions de Kuhn et Tucker sont vraies en un minimum local et surtout d'autre part est une condition nécessaire et suffisante pour que la solution de (P) soit stable sous de petites perturbations. Elle est donc la condition minimum pour qu'un problème soit bien posé.

Définition. Qualification de Mangasarian-Fromovitz.

Soit \bar{x} un point réalisable pour (P): $h(\bar{x})=0$, $g(\bar{x})\leq 0$ et $J=\{j, g_j(\bar{x})=0, j=1, \dots, m\}$. Les contraintes h et g vérifient la qualification de Mangasarian-Fromovitz en \bar{x} si et seulement si :

les gradients $\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, p\}$ sont linéairement indépendants

et il existe d élément de \mathbb{R}^n tel que :

$$\begin{aligned} \langle \nabla h_i(x), d \rangle &= 0 \quad i = 1, \dots, p & (1.25) \\ \langle \nabla g_j(x), d \rangle &< 0 \quad j \in J \end{aligned}$$

On démontrera au chapitre I une formulation équivalente de cette qualification :

Proposition : Equivalence de la Qualification de Mangasarian-Fromovitz.

Soit \bar{x} un point réalisable pour (P), h et g continûment différentiables. La qualification de Mangasarian-Fromovitz est vraie en \bar{x} si et seulement si il existe un voisinage $V(\bar{x}, \varepsilon)$ de \bar{x} tel que :

pour toute fonction $b(x)$ bornée de $V(\bar{x}, \varepsilon)$ dans \mathbb{R}^p , il existe une fonction $d(x)$ bornée de $V(\bar{x}, \varepsilon)$ dans \mathbb{R}^n telle que pour tout x de $V(\bar{x}, \varepsilon)$ on aie :

$$\begin{aligned} \langle \nabla g_j(x), d(x) \rangle &< -1 \quad j \in I \\ \langle \nabla h_i(x), d(x) \rangle &= b_i(x) \quad i=1, \dots, p. \end{aligned}$$

Rappelons aussi un théorème de McCormick [24] sur les conditions du second ordre pour le problème $\langle P \rangle$:

Théorème 1 : Conditions suffisantes du second ordre.

Soit $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ élément de \mathbb{R}^{n+p+m} vérifiant les conditions de Kuhn et Tucker pour $\langle F \rangle$:

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^p \bar{u}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m v_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

et $\bar{v} \leq 0$, $\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$ avec $g_i(\bar{x}) \leq 0$ et $h_i(\bar{x}) = 0$.

Si f , g et h sont de classe C^2 en \bar{x} et vérifient en x non nul :

$$\left. \begin{array}{l} \langle \nabla g_j(\bar{x}), x \rangle = 0 \quad i \in K \\ \langle \nabla g_j(\bar{x}), x \rangle < 0 \quad i \in L \\ \langle \nabla h_i(\bar{x}), x \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right\} \Rightarrow \langle x, \nabla_x^2 L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) x \rangle < 0 \quad (1.26)$$

avec $K = \{j, g_j(\bar{x}) = 0, u_j > 0, j=1, \dots, m\}$

et $L = \{j, g_j(\bar{x}) = 0, u_j = 0, j=1, \dots, m\}$.

alors \bar{x} est un maximum local strict de $\langle P \rangle$ c'est à dire qu'il existe un voisinage $V(\bar{x})$ tel que pour tout x de $V(\bar{x})$ on ait $f(x) < f(\bar{x})$.

Donnons maintenant les principaux résultats que Han et Mangasarian [19] ont montrés. Le premier théorème nous dit que le minimum de la fonction de pénalisation est aussi le minimum de $\langle P \rangle$.

Théorème 2.

Si il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $\alpha > \underline{\alpha}$, on a $P(\bar{x}, \alpha) \gg P(x, \alpha)$ pour tout x élément d'un ensemble Y contenant \bar{x} et

des points réalisables pour $\langle P \rangle$ alors \bar{x} est solution de $\langle P \rangle$ restreint à Y .

Relions dans l'autre sens un maximum local strict de $\langle P \rangle$ et un maximum de la fonction de pénalisation exacte à l'aide de la qualification de Mangasarian-Fromovitz.

Théorème 3.

Soit f, g et h des fonctions continûment différentiables sur un voisinage de \bar{x} maximum local strict de $\langle P \rangle$. Si la qualification de Mangasarian-Fromovitz est vraie en \bar{x} alors pour toutes les normes $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^m , il existe un $\underline{\alpha} > 0$ tel que pour tout $\alpha > \underline{\alpha}$, \bar{x} soit un maximum local de $\Phi(x, \alpha)$ défini en (1.25).

Pour démontrer ce théorème, Han et Mangasarian montrent d'abord que les solutions de $\Phi(x, \alpha)$ sont indépendantes de la norme choisie dans \mathbb{R}^m . Montrons maintenant que les conditions du second ordre sont suffisantes pour obtenir un maximum local strict de $\Phi(x, \alpha)$.

Théorème 4.

Supposons que les hypothèses du théorème 1 soient vraies et que Q vérifie les conditions (1.26) et soit convexe. Si $\|\cdot\|$ est une norme de \mathbb{R}^{m+p} et $\|\cdot\|'$ sa norme duale alors pour tout $\alpha > \underline{\alpha}$ avec

$$\underline{\alpha} = \frac{\|\bar{u}, \bar{v}\|'}{Q'(0^+)}$$

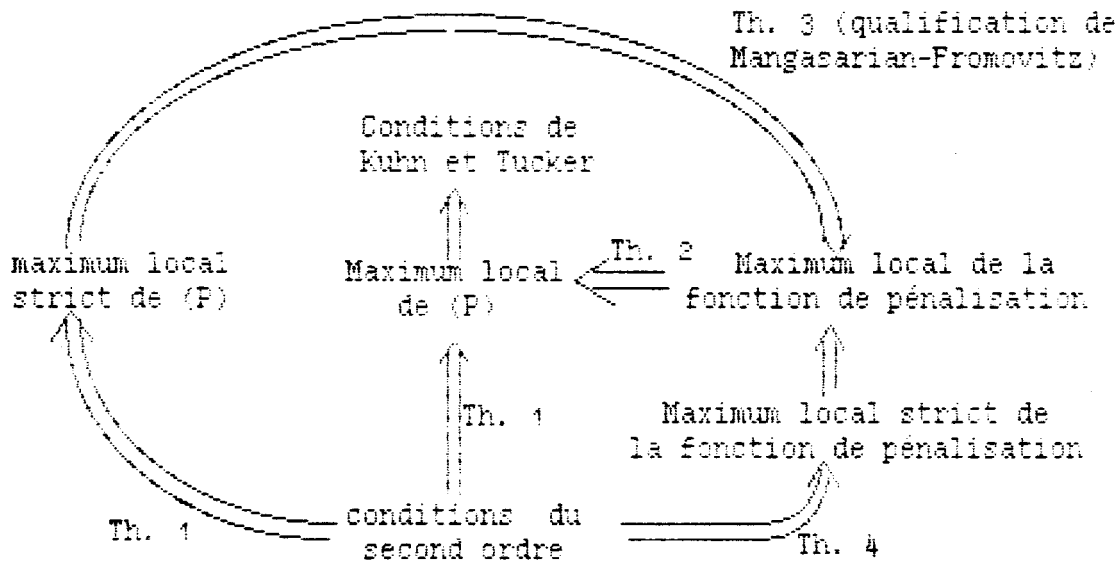
le point \bar{x} est un maximum local strict de $\Phi(x, \alpha)$.

Enonçons enfin un dernier théorème qui montre que les conditions de Kuhn et Tucker sont vraies en un minimum local de la fonction de pénalisation.

Théorème 5.

Si il existe $\alpha \gg 0$ tel que pour tout $\alpha \gg \alpha$ on ait $\phi(\bar{x}, \alpha) \gg \phi(x, \alpha)$ pour tout x dans un voisinage $V(\bar{x})$ qui contient des points réalisables de $\langle P \rangle$ et si f , g et h sont différentiables en \bar{x} alors il existe (\bar{u}, \bar{v}) éléments de \mathbb{R}^{m+p} tel que $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ vérifie les conditions de Kuhn et Tucker de $\langle P \rangle$.

Résumons sur un schéma les résultats obtenus :



On voit donc qu'il existe des relations entre le maximum de $\langle P \rangle$ et celui de la fonction de pénalisation qui permettent d'utiliser cette fonction de pénalisation pour rechercher la solution de $\langle P \rangle$.

Notre problème maintenant est de choisir une fonction de pénalisation exacte, par exemple :

$$\Phi_1(x, \alpha) = f(x) - \alpha \sum_{i=1}^p |h_i(x)| - \alpha \sum_{j=1}^m \max(0, g_j(x)) \quad (1.27)$$

et ensuite de trouver le maximum de cette fonction.

C'est une fonction non dérivable donc on ne peut pas utiliser les algorithmes classiques. Une des premières méthodes a été proposée par Wilson [32] c'est la Programmation Séquentielle Quadratique. Elle consiste à résoudre une suite de problèmes quadratiques $PQ(x^k)$ déduits du problème (P) pour trouver une suite de direction de déplacement pour Φ_1 en x^k .

$$PQ(x^k) \begin{cases} \max \tilde{F}(x^k, \delta^k) \\ h_i(x^k) + \langle \nabla h_i(x^k), \delta^k \rangle = 0 & i=1, \dots, p \\ \bar{g}_j(x^k) + \langle \nabla g_j(x^k), \delta^k \rangle \geq 0 & j=1, \dots, m \end{cases} \quad (1.28)$$

avec $\tilde{F}(x^k, \delta^k) = f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), \delta^k \rangle - 1/2 \langle \delta^k, \nabla_x^2 \langle x^k, \lambda^k, \mu^k \rangle . \delta^k \rangle$

Les problèmes quadratiques choisis ont l'avantage de ne comporter que des contraintes linéaires ce qui permet d'employer des méthodes simples pour les résoudre. De plus la partie quadratique de \tilde{F} fait intervenir le hessien du lagrangien c'est à dire la courbure de la fonction économique et des contraintes. On pose $x_{k+1} = x_k + \delta_k$ et on a une suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ qui converge vers un point stationnaire de Φ_1 . On rejoint ici la méthode de Newton dont nous avons parlé plus haut (section 2). Cet algorithme nécessite un volume de calcul important pour calculer le Hessien du Lagrangien. C'est pourquoi Han [16] a proposé de remplacer le Hessien en $\langle x_k, \lambda_k, \mu_k \rangle$ par une matrice B^k symétrique définie positive qui est une approximation de ce Hessien et est mise à jour à chaque itération à l'aide d'une méthode de type BFGS. De plus il pose

$$x^{k+1} = x^k + \delta^k \delta^k$$

avec δ^k tel que x^{k+1} maximise $\Phi_1(x^k + \delta^k \delta^k, r)$ sur le segment $[x^k, x^k + \delta^k]$.

C'est cette méthode de Métrique Variable avec Programmation Quadratique Séquentielle que nous allons utiliser dans la suite de cette thèse et qui a été programmée pour des problèmes non linéaires de grande taille. Cette méthode en pratique donne de bons résultats numériques car il n'y a pas de coefficients qui tendent vers l'infini et nécessite peu de calcul des fonctions et gradients non linéaires. Il y a cependant un problème qui intervient lors du déroulement de l'algorithme lorsque le domaine de PQ est vide. Cette difficulté devra être levée pour assurer un bon fonctionnement de l'algorithme.

III - Les fonctions de pénalisation exacte différentiables.

L'idée dans cette partie est d'éliminer les problèmes dus à la non-différentiabilité des fonctions de pénalisation étudiées ci-dessus en utilisant des fonctions différentiables.

La première de ces fonctions pour les égalités est due à Fletcher [9] et consiste à utiliser un lagrangien augmenté :

$$\Phi(x) = f(x) + \langle \lambda(x), h(x) \rangle = - \langle h(x), Sh(x) \rangle \quad (1.29)$$

mais avec $\lambda(x)$ vérifiant :

$$\lambda(x) = N^* \nabla f(x) \quad \text{avec } N^* N^T = I$$

Pour S il y a deux possibilité : $S = 1/2 \sigma I$ ou $S = \sigma N^* N^{*T}$. Dans les deux cas, comme pour le lagrangien augmenté, il existe une valeur $\underline{\sigma}$ telle que pour tout $\sigma > \underline{\sigma}$, si x^* est solution de (P) et si les conditions du second ordre sont vraie alors x^* est un maximum pour $\Phi(x)$. Cette valeur de $\underline{\sigma}$ est obtenue en écrivant que $\nabla^2 \Phi(x)$ est définie négative.

Si $S = \sigma N^* N^{*T}$, on peut aussi écrire (1.31) sous la forme :

$$\Phi(x) = f(x) + \langle \pi(x), h(x) \rangle \quad (1.30)$$

$$\text{avec} \quad \pi(x) = N^*(\nabla f(x) - \sigma N^{*T} h(x)) \quad (1.31)$$

On peut interpréter $\pi(x)$ comme le multiplicateur de Lagrange du problème:

$$\left| \begin{array}{l} \max_{\delta} 1/2 \sigma \langle \delta, \delta \rangle + \langle \nabla f(x), \delta \rangle \\ \text{sous } \langle \nabla h_i(x), \delta \rangle + h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Les contraintes de (1.32) étant la linéarisation des égalités, cela permet de traiter facilement le cas des inégalités en utilisant $\hat{\Phi}$ défini au (1.30) et $\pi(x)$ étant le multiplicateur de Lagrange du problème:

$$\left| \begin{array}{l} \max_{\delta} 1/2 \sigma \langle \delta, \delta \rangle + \langle \nabla f(x), \delta \rangle \\ \text{sous } \langle \nabla g_j(x), \delta \rangle + g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Une autre idée a été développée par Di Pillo et Grippo [7] dans le cas des égalités. Elle consiste à augmenter le Lagrangien avec un terme quadratique en $\nabla_x L(x, \lambda)$ en plus de celui en $h(x)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \Phi(x, \lambda) = & f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle - 1/2 \langle h(x), h(x) \rangle \\ & - 1/2 \rho \langle M(x) (\nabla f(x) + N^T(x) \lambda), M(x) (\nabla f(x) + N^T(x) \lambda) \rangle \end{aligned} \quad (1.34)$$

Plusieurs possibilités pour $M(x)$ sont proposées comme $M = N(x)$, $M = N^*$ ou encore $M = I$. Il existe aussi pour ce problème un couple $(\underline{\sigma}, \underline{\rho})$ tel que pour $\sigma < \underline{\sigma}$ et $\rho < \underline{\rho}$, si x^* est solution de (P) et si les conditions du second ordre sont vraies, x^* maximise $\Phi(x, \lambda)$.

Si on pose $\hat{\Phi}^*(x) = \min_{\lambda} \Phi(x, \lambda)$ alors si $M = N^*$, la fonction $\hat{\Phi}^*(x)$ peut être interprétée comme une fonction du type (1.29). Si $M = I$ alors $\hat{\Phi}^*(x)$ peut s'écrire sous la forme (1.30) :

$$\hat{\Phi}^*(x) = f(x) + \langle \pi(x), f(x) \rangle$$

avec

$$\pi(x) = N^* \langle \nabla f(x) + 1/\rho N^{*T} h(x) \rangle.$$

Dans le cas des inégalités, il n'y a pas de généralisation simple comme dans le cas précédent car $\pi(x)$ est différent. Cependant Di Pillo, Grippo et Zampariello ont donné une expression de fonction de pénalisation dans [8] mais celle-ci contient des termes non quadratiques en λ et nécessite le choix de 3 paramètres (σ, ρ, τ) ce qui est très pénalisant.

Enfin une autre méthode a été proposée par Han et Mangasarian [18]. Elle est applicable dans le cas des inégalités et consiste à obtenir la vérification de $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$ en l'utilisant comme terme de pénalisation dans le problème dual. On obtient la fonction de pénalisation différentiable suivante :

$$\Phi(x, \lambda) = -f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle - 1/2\rho \langle \nabla_x L(x, \lambda), \nabla_x L(x, \lambda) \rangle$$

qu'on doit maximiser.

Si maintenant on cherche à résoudre le problème qui consiste à maximiser la fonction de pénalisation exacte différentiable, on peut utiliser les algorithmes existants de deux façons différentes :

- a) - en utilisant directement une méthode d'optimisation qui converge bien,
- b) - en l'utilisant comme un critère en association avec une méthode qui génère des directions ou des points.

Les deux méthodes ont leurs désavantages. La méthode a) nécessite la connaissance des dérivées secondes de f , h et g pour connaître la dérivée première de Φ ce qui est un handicap vis à vis des méthodes utilisant les dérivées premières. La méthode b) demande une méthode

auxiliaire compatible par exemple la Programmation Quadratique Séquentielle. Malheureusement elle ne fournit une direction de descente que pour un σ grand d'où erreurs numériques possibles. Une dernière source de difficultés enfin pour la fonction de pénalisation suggérée par Fletcher: le domaine de (1.34) peut être vide ce qui rend le problème impossible si on n'ajoute pas de variables artificielles.

En conclusion les avantages d'une fonction de pénalisation dérivable sont en partie perdus par les problèmes lors de la résolution ce qui explique le faible intérêt apporté à ces méthodes.

DII) - Conclusion.

Dans ce chapitre nous n'avons pas voulu citer tous les moyens de résoudre le problème (P). Il reste entre autre de nombreuses fonctions de pénalisation que nous n'avons pas citées (voir Loostma [23] et Fletcher [12]).

Nous avons cependant cité les méthodes les plus employées pour résoudre ce problème, en particulier celles qui peuvent être utilisées pour des problèmes de grande taille comme ceux que nous aurons à résoudre. Nous avons aussi cherché à estimer, si cela est possible, la qualité numérique des méthodes proposées car c'est sur ce critère qu'un algorithme peut être jugé. En effet les méthodes qui apparaissent les plus simples du point de vue théorique ne sont pas toujours celles qui donnent les meilleurs résultats. Nous verrons au chapitre IV, une comparaison de la mise en oeuvre de deux de ces méthodes : le Lagrangien Augmenté et la Métrique Variable avec une Programmation Quadratique Séquentielle.

CHAPITRE II

L'ALGORITHME DE RESOLUTION DES PROBLEMES NON LINEAIRES.

1) - Introduction.

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme de résolution des problèmes non linéaires. Il utilise la maximisation d'une fonction de pénalisation non différentiable notée φ_λ qui vérifie les conditions données par Han et Mangasarian [19].

$$\varphi_\lambda(x) = f(x) - \lambda \sum_{i=1}^p |h_i(x)| - \lambda \sum_{j=1}^m \max(0, g_j(x))$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, nous ne pouvons pas utiliser les algorithmes classiques de résolution. Nous travaillerons donc itérativement en utilisant comme direction de déplacement la solution d'un programme quadratique. C'est la programmation Quadratique Séquentielle en Métrique Variable. Ensuite dans cette direction, nous déterminerons l'itéré suivant à l'aide de la recherche d'Armijo.

Les hypothèses que doit vérifier le problème pour obtenir la convergence de l'algorithme vers un point stationnaire sont classiques. Elles assurent la régularité du domaine et permettent de se dégager d'un point stationnaire non solution car les contraintes linéaires n'y sont pas vérifiées.

Avant de donner le théorème de convergence de l'algorithme nous étudierons successivement les propriétés de la fonction de pénalisation φ_λ et les conséquences de l'hypothèse de Mangasarian-Fromovitz puis nous donnerons quelques résultats sur la recherche d'Armijo.

III) - Notation.

- $x, \underline{x}, \bar{x}$ éléments de \mathbb{R}^n , \underline{x} est la borne inférieure de x , \bar{x} la borne supérieure. On a : $\underline{x} \ll x \ll \bar{x}$.
- D polyèdre compact de \mathbb{R}^n c'est à dire

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \ll b\}$$
avec A une matrice (L, n) et b un élément de \mathbb{R}^L .
- f
 $h_i, i=1, \dots, p$
 $g_j, j=1, \dots, m$
- sont des fonctions continuellement dérivables de
- \mathbb{R}^n
- dans
- \mathbb{R}
- .
- $\langle \dots \rangle$ est le produit scalaire de \mathbb{R}^n .
- $\partial / \partial x_j$ est la dérivée partielle par rapport à x_j .
- $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x . C'est le vecteur :

$$\langle \partial f / \partial x_1(x), \dots, \partial f / \partial x_n(x) \rangle^T$$
- $\{B^k / k \in \mathbb{N}\}$ est une suite de matrices (n, n) définies, positives et symétriques (uniformément bornées).
- $h'(x, z)$ est la valeur en z de l'approximation linéaire de h en x :
- $$h'(x, z) = h(x) + \langle \nabla h(x), z-x \rangle.$$
- $h'(x; d)$ est la dérivée directionnelle de h le long de d en x :

$\forall (\bar{x} - \varepsilon)$ boule ouverte de centre x et de rayon ε .

Δ une division du segment $[0, 1]$:

$$\Delta = \{ \theta \in [0, 1], \exists j \in \mathbb{N}, \theta = 2^{-j} \}$$

II - Définitions et Rappels.

* - Fonction ouverte.

Une fonction multivoque Γ de $X \subset \mathbb{R}^n$ dans $P(Y)$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ est dite ouverte en x de X si et seulement si :

pour toute suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite x

pour tout y élément de $\Gamma(x)$,

il existe une suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite y telle que pour tout $k > k_0$ fixé, on ait : $y^k \in \Gamma(x^k)$.

* - Fonction fermée.

Une fonction multivoque Γ de $X \subset \mathbb{R}^n$ dans $P(Y)$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ est dite fermée en x de X si et seulement si :

pour toute suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite x

pour toute suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite y .

On a $y^k \in \Gamma(x^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ implique $y \in \Gamma(x)$.

* - Fonction multivoque continue.

Une fonction multivoque est continue si et seulement si elle est à la fois ouverte et fermée.

* - Vecteur tangent - Cône tangent.

Si A est une partie de \mathbb{R}^n et x un élément de \bar{A} , on dit que y élément de \mathbb{R}^n est un vecteur tangent à A en x si et seulement si il existe une suite infinie $\{(\lambda^k, x^k) / k \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\{(\lambda^k, x^k) / \lambda^k > 0, x^k \in A, k \in \mathbb{N}\}$$

telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x^k = x$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k (x^k - x) = y$

Si A est une partie de \mathbb{R}^n et x un élément de \bar{A} , on appelle cône tangent à A en x , l'ensemble des vecteurs tangents à A en x . On le note $T(A, x)$.

* - Cône polaire négatif.

Si K est un cône de \mathbb{R}^n , on appelle cône polaire négatif de K l'ensemble $\Gamma^-(K)$ défini par :

$$\Gamma^-(K) = \{y \in \mathbb{R}^n / y \cdot x \leq 0, \forall x \in K\}.$$

* - Conditions de Kuhn et Tucker en un point \hat{x} solution de P.

Si \hat{x} est solution de P,

$$\exists u \in \mathbb{R}^p$$

$$\exists v \in (\mathbb{R}^-)^n$$

tels que: $\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p u_i \nabla h_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^n v_j \nabla g_j(\hat{x}) \in \Gamma^-(T(D, \hat{x}))$

et $g_j(\hat{x}) \cdot v_j = 0$ pour $j = 1, \dots, n$.

* - Conditions de Kuhn et Tucker en $(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ solution de $PQ(x, B)$.

Si $(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ est solution de $PQ(x, B)$,

$$\exists u \in \mathbb{R}^p, \exists \bar{u} \in (\mathbb{R}^+)^p, \exists \bar{u}' \in (\mathbb{R}^+)^p$$

$$\exists v \in (\mathbb{R}^-)^n, \exists \bar{v} \in (\mathbb{R}^+)^n, \exists \bar{v}' \in (\mathbb{R}^+)^p$$

tels que:

$$\nabla f(x) - \langle \hat{z} - x \rangle + \sum_{i=1}^p u_i \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^m v_j \nabla g_j(x) \in \Gamma^-(I(D, \hat{z}))$$

$$[g_j(x) + \langle \nabla g_j(x), \hat{z} - x \rangle - \hat{t}_j] v_j = 0 \quad j=1, \dots, m$$

$$-2\mu \hat{s}_i - \mu - \ell_i u_i + \bar{u}_i - \bar{u}_i' = 0$$

$$u_i \hat{s}_i = 0 \quad \text{et} \quad \bar{u}_i' \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

$$-2\mu \hat{t}_j - \mu - q v_j + \bar{v}_j - \bar{v}_j' = 0$$

$$\bar{v}_j \hat{t}_j = 0 \quad \text{et} \quad \bar{v}_j' \langle \max(0, g_j(x)) - \hat{t}_j \rangle = 0. \quad j = 1, \dots, m$$

* - Fonction de pénalisation φ_λ

On appelle fonction de pénalisation, la fonction φ_λ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telle que :

$$\varphi_\lambda(x) = f(x) - \lambda \sum_{i=1}^p |h_i(x)| - \lambda \sum_{j=1}^m \max(0, g_j(x))$$

avec λ élément de \mathbb{R}^+ .

* - On note ψ , la fonction définie par :

$$\psi(\theta, x, \lambda) = \varphi_\lambda(x + \theta d) - \varphi_\lambda(x) - \theta/2 \varphi_\lambda'(x; d)$$

Elle représente l'écart entre la valeur de φ en $x + \theta d$ et celle d'une droite de pente $\varphi_\lambda'(x; d)/2$ passant par $\varphi_\lambda(x)$.

* - Lagrangien de (P) en x, u, v .

On appelle Lagrangien de (P) ou fonction Lagrangienne la fonction de $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^p * \mathbb{R}^m$ définie par

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{i=1}^p u_i h_i(x) + \sum_{j=1}^m v_j g_j(x).$$

* - Qualification de Mangasarian-Fromowitz (Rappel).

La qualification de Mangasarian-Fromowitz est vraie en x élément de $D(P)$ si et seulement si :

- les gradients $\{\nabla h_i(x), i = 1, \dots, p\}$ sont linéairement indépendants et il existe d élément de \mathbb{R}^n tel que :

$$\begin{aligned} \langle \nabla h_i(x), d \rangle &= 0 \quad i = 1, \dots, p \\ \langle \nabla g_j(x), d \rangle &< 0 \quad j \in \{1, \dots, m / g_j(x) = 0\} \\ A_1 \cdot d &> 0 \quad l \in \{1, \dots, L / A_1 x = b_1\} \end{aligned}$$

* - Théorème n° 2 de Berge [2]

Si $\varphi(x, y)$ est une fonction numérique semi-continue supérieurement dans $X \times Y$, et si Γ est une application multivoque fermée de X dans Y telle que $\Gamma(x) \neq \emptyset$ pour tout x , alors $M(x) = \max \{\varphi(x, y), y \in \Gamma(x)\}$ est semi-continue supérieurement.

* - Théorème du maximum de Berge [2].

Si $\varphi(y)$ est une fonction numérique continue dans Y et si Γ est une application multivoque continue de X dans Y telle que $\Gamma(x) \neq \emptyset$ pour tout x , alors $M(x) = \max \{\varphi(y), y \in \Gamma(x)\}$ est une fonction numérique continue dans X et $\sharp(x) = \{y, y \in \Gamma(x), \varphi(y) = M(x)\}$ est une application semi continue supérieurement de X dans Y .

III - Description de l'algorithme.

On veut résoudre :

$$(P) : \begin{cases} \max f(x) \\ x \in D \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Dans la suite du chapitre on fera les hypothèses suivantes :

- (H1) : D est un polyèdre compact de \mathbb{R}^n .
- (H2) : Le domaine $D(P)$ est non vide.
- (H3) : La qualification de Mangasarian-Fromovitz est vraie en tout point de $D(P)$.
- (H4) : Les multiplicateurs de Kuhn et Tucker associés à la solution $(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ de $PO(x, B)$ sont uniformément bornés par M par rapport à x dans D .
- (H5) : En tout point x de D , $D(P)$ pour λ assez grand, il existe une direction d telle que :
- $$\langle \nabla h_i(x), d \rangle = 0 \text{ si } h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, P$$
- $$\langle \nabla g_j(x), d \rangle < 0 \text{ si } g_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, M$$
- $$A_l \cdot d > 0 \quad \text{si } A_l x = b_l \quad l = 1, \dots, L.$$
- et $\varphi_\lambda(x+d) > \varphi_\lambda(x)$.

L'algorithme suivant permet de résoudre (P) sous les hypothèses (H1) à (H5)

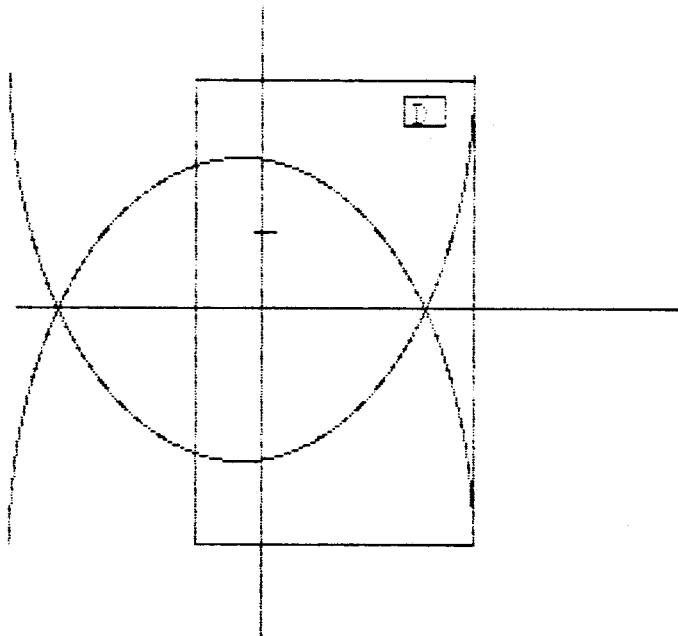
- Pas 1.** Soit x^0 un point de D , $B^0 = I$ et λ assez grand.
- Pas 2.** Calculer (z^k, s^k, t^k) solution optimale de $PO(x^k, B^k)$.
- Pas 3.** Déterminer x^{k+1} .
- .Si x^k est réalisable pour (P) ou si il existe un i_0 ou un j_0 tel que $s_{i_0}^k \neq h_{i_0}(x^k)$ ou $t_{j_0}^k < g_{j_0}(x^k)$ alors on pose $d^k = z^k - x^k$ et $x^{k+1} = x^k + t(x^k, d^k) \cdot d^k$
- avec $t(x^k, d^k) = \sup\{\theta \in \Delta, \psi(\theta, x^k, d^k) \geq 0\}$.
- .Sinon on prend le d^k de l'hypothèse 5 et on pose $x^{k+1} = x^k + d^k$
- .Déterminer B^{k+1} .
- Pas 4.** Si $x^{k+1} = x^k$ fin. Sinon aller au Pas 2.

Remarque.

a) - L'utilisation de la direction donnée par l'hypothèse 5 au pas 3 de l'algorithme permet de se sortir d'une impasse dans laquelle on peut se trouver à cause d'un point de départ trop éloigné du domaine de $\langle P \rangle$. Cette procédure qui n'est pas automatique car elle nécessite une vue globale du problème ne sera donc utilisée qu'un nombre fini de fois. Dans la suite du chapitre, on va se placer après sa dernière utilisation. Donnons un exemple pour montrer son utilisation.

Soit le problème $\langle P \rangle$

$$\begin{array}{l} \max -x \\ h_1(X) = 1-x^2-y \\ h_2(X) = 1-x^2+y \\ -1/2 \leq x \leq 3/2 \\ -3/2 \leq y \leq 3/2 \end{array}$$



On a $\varphi_\lambda(X) = f(X) - \lambda(|h_1(X)| + |h_2(X)|)$.

Si on part du point $X^0 = (-1/2, 0)$, on a :

$$PQ(x^0, B^0) = \begin{cases} \max -x - 1/2(\langle x + 1/2 \rangle^2 + y^2) - \mu(s_1^2 + s_1 + s_2^2 + s_2) \\ 5/4 + x - y - s_1 = 0 \\ 5/4 + x - y - s_2 = 0 \\ 0 \leq s_1 \leq 3/4 \\ 0 \leq s_2 \leq 3/4 \end{cases}$$

La seule solution de ce problème quel que soit μ est $X = \langle -1/2, 0 \rangle$ donc on se trouve dans une impasse. On cherche donc la direction de l'hypothèse 5. Il suffit dans ce cas de prendre $d = \langle 5/4, 0 \rangle$ et on a $X' = \langle 3/4, 0 \rangle$. Ce qui nous donne :

$$\psi_\lambda(x^0) = 1/2 - \lambda \cdot 3/2 < -3/4 - \lambda \cdot 7/8 = \psi_\lambda(x^1) \quad \text{si } \lambda > 2.$$

On peut ensuite continuer l'algorithme et on trouve la solution : $x^* = \langle 1, 0 \rangle$.

b) La recherche de x^{k+1} dans l'autre cas fait appel à une technique introduite par Armijo [1] qui permet d'atteindre le maximum à la limite sans avoir à le rechercher à chaque itération. Cela permet de diminuer les calculs donc d'augmenter les performances de l'algorithme.

c) L'actualisation des $\{P^k, k \in \mathbb{N}\}$ doit être telle que les matrices soient symétriques définies positives. Nous étudierons au chapitre 4 une actualisation basée sur la méthode BFGS.

d) On rappelle (voir chapitre I et IV) que ce problème $PQ(x^k, B^k)$ permet d'avoir des informations d'ordre 2 sur la fonction économique et les contraintes par l'intermédiaire des matrices B^k qui sont une approximation du Hessien du Lagrangien.

IV - Etude de la convergence.

On définit :

$$I^-(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} / h_i(x) < 0\}$$

$$I^0(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} / h_i(x) = 0\}$$

$$I^+(x) = \{i \in \{1, \dots, p\} / h_i(x) > 0\}$$

$$J^-(x) = \{j \in \{1, \dots, m\} / g_j(x) < 0\}$$

$$J^0(x) = \{j \in \{1, \dots, m\} / g_j(x) = 0\}$$

$$J^+(x) = \{j \in \{1, \dots, m\} / g_j(x) > 0\}$$

Proposition 2.1. Dérivée directionnelle de ψ_λ en x le long de $d = z-x$.

Soit x élément de D . Si z est un élément de D et $d = z-x$ alors

$\psi'_\lambda(x;d)$ existe et :

$$\begin{aligned} \psi'_\lambda(x;d) &= \langle \nabla f(x), d \rangle + \lambda \sum_{I^-(x)} \langle \nabla h_i(x), d \rangle - \lambda \sum_{I^0(x)} |\langle \nabla h_i(x), d \rangle| \\ &\quad - \lambda \sum_{I^+(x)} \langle \nabla h_i(x), d \rangle - \lambda \sum_{J^0(x)} \max\{\langle \nabla g_j(x), d \rangle, 0\} \quad (2.1) \\ &\quad - \lambda \sum_{J^+(x)} \langle \nabla g_j(x), d \rangle \end{aligned}$$

Preuve.

Pour θ positif et assez petit tel que $h_i(x+\theta d)$ soit du signe de $h_i(x)$ pour $i \in I^-(x) \cup I^+(x)$ et $g_j(x+\theta d)$ soit du signe de $g_j(x)$ pour $j \in J^-(x) \cup J^+(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_\lambda(x+\theta d) - \psi_\lambda(x)}{\theta} &= \frac{f(x+\theta d) - f(x)}{\theta} + \lambda \sum_{i \in I^-(x)} \frac{h_i(x+\theta d) - h_i(x)}{\theta} \\ &\quad - \lambda \sum_{i \in I^0(x)} \frac{|h_i(x+\theta d) - 0|}{\theta} - \lambda \sum_{i \in I^+(x)} \frac{h_i(x+\theta d) - h_i(x)}{\theta} \end{aligned}$$

$$+ \lambda \sum_{j \in J^0(x)} \frac{\max \{g_j(x+\theta d), 0\} - 0}{\theta} - \lambda \sum_{j \in J^+(x)} \frac{g_j(x+\theta d) - h_i(x)}{\theta}$$

Les fonctions f ; h_i , $i=1, \dots, p$; g_j , $j=1, \dots, m$ sont continuellement différentiables donc quand θ tend vers 0, on a :

- pour f :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(x+\theta d) - f(x)}{\theta} = \langle \nabla f(x), d \rangle$$

- pour $i \in \{1, \dots, p\}$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{h_i(x+\theta d) - h_i(x)}{\theta} = \langle \nabla h_i(x), d \rangle$$

- pour $j \in J^+(x)$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g_j(x+\theta d) - g_j(x)}{\theta} = \langle \nabla g_j(x), d \rangle$$

- pour $j \in J^0(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\max \{g_j(x+\theta d), 0\} - 0}{\theta} &= \max \left\{ \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g_j(x+\theta d) - 0}{\theta}, 0 \right\} \\ &= \max \left\{ \langle \nabla g_j(x), d \rangle, 0 \right\} \end{aligned}$$

d'où l'égalité (2.1). \square

Proposition 2.2. Minoration de la dérivée de φ_λ en x .

Soit x élément de D et $(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ la solution optimale de $PQ(x, B)$, alors il existe $\Delta = \lambda - M > 0$ et $\Delta' = \mu - \lambda > 0$ tels que :

$$\varphi'_\lambda(x, d) \geq \langle Bd, d \rangle + \Delta \sum_{i=1}^p |h_i(x) - \hat{s}_i|$$

$$+ \Delta \sum_{j=1}^m \langle \max \{g_j(x), 0\} - \hat{t}_j \rangle \quad (2.2)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x; d) \geq \langle \mathbf{P}d, d \rangle + \Delta \sum_{i=1}^p |h_i(x)| + \Delta' \sum_{i=1}^p \hat{s}_i \\ + \Delta \sum_{j=1}^m \langle \max \{g_j(x), 0\} \rangle + \Delta' \sum_{j=1}^m \hat{t}_j \end{aligned} \quad (2.2')$$

Preuve.

Si $(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ est solution de $PQ(x, B)$, le point optimal est réalisable donc en notant $d = (\hat{z} - x)$ on a :

$$\begin{aligned} h_i(x) + \langle \nabla h_i(x), \lambda \rangle - \varepsilon_i \hat{s}_i &= 0 & i = 1, \dots, p \\ g_j(x) + \langle \nabla g_j(x), \lambda \rangle - \hat{t}_j &\leq 0 & j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

On écrit donc

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x; d) &= \langle \nabla f(x), \lambda \rangle + \lambda \sum_{I^-(x)} \langle -h_i(x) - \hat{s}_i \rangle \\ &\quad - \lambda \sum_{I^0(x)} | -h_i(x) + \hat{s}_i | - \lambda \sum_{I^+(x)} \langle -h_i(x) + \hat{s}_i \rangle \\ &\quad - \lambda \sum_{J^0(x)} \max \langle -g_j(x) + \hat{t}_j, 0 \rangle - \lambda \sum_{J^+(x)} \langle \nabla g_j(x), d \rangle \end{aligned}$$

Compte tenu du signe des $h_i(x)$ et de leurs valeurs, on peut écrire :

$$\varphi'_\lambda(x; d) = \langle \nabla f(x), d \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle - \lambda \sum_{j=1}^m \langle \nabla g_j(x), \lambda \rangle \quad (2.3)$$

$(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ est solution optimale de $PQ(x, B)$ dont il vérifie les conditions de Kuhn et Tucker; \hat{z} et x étant élément de D , $\hat{z} - x$ est élément de $T(D, \hat{z})$ donc

$$\langle \nabla f(x), d \rangle - \langle \mathbf{P}d, d \rangle + \sum_{i=1}^p u_i \langle \nabla h_i(x), d \rangle + \sum_{j=1}^m v_j \langle \nabla g_j(x), d \rangle \geq 0$$

$$\text{donc } \langle \nabla f(x), d \rangle \geq \langle Bd, d \rangle - \sum_{i=1}^p u_i \langle -h_i(x) + \varepsilon_i \hat{s}_i \rangle - \sum_{j=1}^m v_j \langle \nabla g_j(x), d \rangle$$

On peut minorer $\varphi'_\lambda(x; d)$

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x; d) &\geq \langle Bd, d \rangle + \sum_{I^-(x)} \langle \lambda - u_i \rangle \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle + \sum_{I^+(x)} \langle \lambda + u_i \rangle \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle \\ &\quad - \lambda \sum_{J^+(x)} \langle \nabla g_j(x), d \rangle - \sum_{j=1}^m v_j \langle \nabla g_j(x), d \rangle \end{aligned}$$

On sait avec les conditions de Kuhn et Tucker que :

$$v_j \langle g_j(x) - \hat{t}_j \rangle = -v_j \langle \nabla g_j(x), d \rangle$$

quantité qui est nulle si $j \in J^0(x)$ et positive si $j \in J^-(x)$.

Comme $(\hat{z}, \hat{s}, \hat{t})$ est réalisable on a pour j dans $J^+(x)$

$$-\langle \nabla g_j(x), d \rangle \geq g_j(x) - \hat{t}_j \geq 0$$

donc on a la minoration:

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x; d) &\geq \langle Bd, d \rangle + \sum_{I^-(x)} \langle \lambda - u_i \rangle \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle \\ &\quad + \sum_{I^+(x)} \langle \lambda + u_i \rangle \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle + \sum_{J^+(x)} \langle \lambda + v_j \rangle \langle g_j(x) - \hat{t}_j \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

Or u_i , $i = 1, \dots, p$ et v_j , $j = 1, \dots, m$ sont bornés uniformément par M (hypothèse (H_4)). On pose $\Delta = \lambda - M$ qui est strictement positif et on a :

$$\lambda - u_i \geq \Delta > 0$$

$$\lambda + u_i \geq \Delta > 0$$

$$\lambda - v_j \geq \Delta > 0$$

Donc on a (2.2) :

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x, d) \geq \langle B d, d \rangle + \Delta \sum_{i=1}^p \langle |h_i(x)| - \hat{s}_i \rangle \\ + \Delta \sum_{j=1}^m \langle \max \langle g_j(x), 0 \rangle - \hat{t}_j \rangle \end{aligned}$$

Si on reprend (2.4) et si on utilise les conditions de Kuhn et Tucker pour \hat{s}_i et \hat{t}_j on a :

$$\begin{aligned} (-\lambda - \varepsilon_1 u_1) \hat{s}_1 &= \langle -\lambda + 2\mu \hat{s}_1 + \mu + \bar{u}_1 \rangle \hat{s}_1 \geq \Delta' \hat{s}_1 \\ (-\lambda - v_1) \hat{t}_1 &= \langle -\lambda + 2\mu \hat{t}_1 + \mu + \bar{v}_1 \rangle \hat{t}_1 \geq \Delta' \hat{t}_1 \end{aligned}$$

avec $\Delta' = \mu - \lambda > 0$ ce qui nous donne (2.2').

Proposition 2.3.

Si $(x^*, 0, 0)$ est solution optimale du programme $PQ(x^*, B)$ alors x^* est stationnaire pour $\langle F \rangle$.

Preuve.

Si $(x^*, 0, 0)$ est solution optimale de $PQ(x^*, B)$, ce point est réalisable, on a donc :

$$h_i(x^*) + \langle \nabla h_i(x^*), x^* - x^* \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

et
$$g_j(x^*) + \langle \nabla g_j(x^*), x^* - x^* \rangle = 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

donc $h_i(x^*) = 0$, $i=1, \dots, p$ et $g_j(x^*) \leq 0$, $j=1, \dots, m$ donc x^* est réalisable pour $\langle F \rangle$.

Si on écrit la condition de Kuhn et Tucker de $PQ(x^*, B)$ en $(x^*, 0, 0)$ on a :

$$\exists u \in \mathbb{R}^p$$

$$\exists v \in (\mathbb{R}^-)^m$$

tels que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p u_i h_i(x^*) + \sum_{j=1}^m v_j g_j(x^*) \in \Gamma^-(T(D, x^*))$$

$$\langle g_j(x^*) \rangle v_j = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

qui sont exactement les conditions de Kuhn et Tucker de $\langle P \rangle$ en x^* donc x^* est stationnaire pour $\langle P \rangle$. \square

Proposition 2.4.

Si $(x^*, 0, 0)$ n'est pas solution de $PQ(x^*, B)$ et si (z^*, s^*, t^*) est cette solution, alors :

$$\varphi'_\lambda(x^*; d) > 0$$

Preuve.

Considérons d'abord le cas où x^* est non réalisable. Dans ce cas, il existe i_0 ou j_0 tels que :

$$s_{i_0}^k \neq h_{i_0}(x^k) \text{ ou } t_{j_0}^k < g_{j_0}(x^k)$$

Car on s'est placé après la dernière utilisation de la direction de l'hypothèse 5 (pas 3 de l'algorithme).

Réécrivons (2.2) :

$$\varphi'_\lambda(x; d) \geq \langle Bd, d \rangle + \Delta \sum_{i=1}^p \left(|h_i(x^*)| - s_i^* \right) + \Delta \sum_{j=1}^m \left(\max \langle g_j(x^*), 0 \rangle - t_j^* \right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x; d) &\geq \Delta |h_{i_0}(x^*)| - s_{i_0}^* > 0 \\ \text{ou} \quad \varphi'_\lambda(x; d) &\geq g_{j_0}(x^*) - t_{j_0}^* > 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Si x^* est réalisable, on a $s^*=0$ et $t^*=0$ donc $z^*-x^*=d$ qui est non nul. Si x^* n'est pas solution de $\langle P \rangle$, c'est que ce n'est pas la maximum de

$$\tilde{f}(x^*, B, j) = \langle \nabla f(x^*), d \rangle - 1/2 \langle Bd, d \rangle.$$

Si $\langle B, d, d \rangle$ est strictement positif alors $\varphi'_\lambda(x, d)$ est strictement positif d'après (2.2). Si $\langle Bd, d \rangle$ est nul alors $\langle \nabla f(x^*), d \rangle$ est strictement positif donc $\varphi'_\lambda(x^*, d)$ est strictement positif d'après (2.3).

Montrons maintenant que la fonction δ qui à x élément de D associe le domaine linéarisé est continue en tout point de $D(F)$. Donnons d'abord une qualification équivalente à celle de Mangasarian-Fromovitz [19].

Proposition 2.5. Qualification équivalente à Mangasarian-Fromovitz.

Soit \bar{x} tel que $h_i(\bar{x}) = 0, i=1, \dots, p; g_j(\bar{x}) < 0, j = 1, \dots, m; A_l \bar{x} \leq b_l, l = 1, \dots, L; J^0(\bar{x})$ défini précédemment et ∞ un réel strictement positif. La qualification de Mangasarian-Fromovitz est vraie en \bar{x} si et seulement si il existe un voisinage $V(\bar{x}, \delta)$ de \bar{x} tel que :

Pour toute fonction $b(x)$ de $V(\bar{x}, \delta)$ dans \mathbb{R}^k , bornée sur $V(\bar{x}, \delta)$, il existe une fonction bornée $d(x)$ de $V(\bar{x}, \delta)$ dans \mathbb{R}^n telle que pour tout x de $V(\bar{x}, \delta)$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla g_j(x), d(x) \rangle &< -\infty & i \in J^0(\bar{x}) \\ \langle \nabla h_i(x), d(x) \rangle &= b_i(x) & i = 1, \dots, p \\ A_l \cdot d(x) &\leq \infty & \text{pour } l \in L^0(\bar{x}) = \{l=1, \dots, L \text{ et } A_l \bar{x} = b_l\} \end{aligned}$$

Preuve.

1°) - Si la deuxième qualification est vraie, alors $\langle \nabla h_i(\bar{x}), d(\bar{x}) \rangle = b_i$ pour tout b dans \mathbb{R}^p donc les gradients $\nabla h_i(\bar{x})$ sont linéairement indépendants. De plus si $b(x) = 0$ et $x = \bar{x}$ on a l'existence d'une direction d telle que :

$$\begin{aligned} \langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle &= 0 \\ \langle \nabla g_j(\bar{x}), d \rangle &< 0 & \text{pour } j \in J^0(\bar{x}) \\ A_l \cdot d &> 0 & \text{pour } l \in L^0(\bar{x}) \end{aligned}$$

2°) Si Mangasarian-Fromovitz est vrai, les gradients $\nabla h_i(\bar{x})$ sont indépendants donc $p \ll n$. On choisit $n-p$ vecteur W_i de \mathbb{R}^n tels que

$$\{\nabla h_1(\bar{x}), \dots, \nabla h_p(\bar{x}), W_1, \dots, W_{n-p}\}$$

soient linéairement indépendants. Définissons la matrice $W(x)$ comme ceci.

$$W(x) = [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x), W_1, \dots, W_{n-p}]^T$$

$W(\bar{x})$ est régulière dont il existe $\varepsilon > 0$ tel que $W^{-1}(x)$ existe et soit bornée dans $V(\bar{x}, \varepsilon)$ parce que les fonctions $\nabla h_i(x)$ $i=1, \dots, p$ sont continues en \bar{x} .

Mangasarian-Fromovitz nous assure l'existence d'un vecteur \bar{z} de \mathbb{R}^n tel que

$$\langle \nabla h_1(\bar{x}), \bar{z} \rangle = 0$$

$$\langle \nabla g_j(\bar{x}), \bar{z} \rangle < 0 \quad \text{pour } j \in J^0(\bar{x})$$

$$A_i \cdot \bar{z} > 0 \quad \text{pour } i \in I^0(\bar{x})$$

Si on définit $z(x) = A^{-1}(x) \cdot c$ avec c élément de \mathbb{R}^n :

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W_1 \bar{z} \\ \vdots \\ W_{n-p} \bar{z} \end{bmatrix}$$

On a $A(\bar{x}) \cdot z(\bar{x}) = A(\bar{x}) \cdot \bar{z}$ donc $z(\bar{x}) = \bar{z}$ et $z(x)$ est continu sur $V(\bar{x}, \varepsilon)$ car $A^{-1}(x)$ est continu et borné.

On pose :

$$-\delta = \max \left\{ \max_{i \in J^0(\bar{x})} \langle \nabla g_j(\bar{x}), \bar{z} \rangle, \max_{i \in I^0(\bar{x})} A_i \bar{z} \right\}$$

On a pour x élément de $V(\bar{x}, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
 & \langle \nabla g_j(x), z(x) \rangle \leq -\delta/2 && \text{pour } j \in J^0(\bar{x}) \\
 & A_1 z(x) \geq \delta/2 && \text{pour } l \in L^0(\bar{x}) \\
 \text{et} & \langle \nabla h_i(x), z(x) \rangle = 0 && \text{pour } i \in \{1, \dots, p\}
 \end{aligned}$$

Si maintenant nous avons $b(x)$ une fonction bornée de $V(\bar{x}, \varepsilon)$ dans \mathbb{R}^h on pose :

$$\bar{b}(x) = \begin{pmatrix} b(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $y(x) = W^{-1}(x) \bar{b}(x)$. La fonction $y(x)$ de $V(\bar{x}, \varepsilon)$ dans \mathbb{R}^k est bornée et on a pour x élément de $V(\bar{x}, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla h_i(x), y(x) \rangle &= b_i(x) && \text{pour } i = 1, \dots, p \\
 \langle \nabla g_j(x), y(x) \rangle &\leq \lambda && \text{pour } j \in J^0(\bar{x}) \\
 A_1 y(x) &\geq -\lambda && \text{pour } l \in L^0(\bar{x})
 \end{aligned}$$

avec $\lambda = \max \{ \lambda_1, \lambda_2 \}$ et

$$\lambda_1 = \max_{j \in J^0(\bar{x})} \left\{ \sup_{x \in V(\bar{x}, \varepsilon)} \langle \nabla g_j(x), y(x) \rangle \right\}$$

$$\lambda_2 = \max_{l \in L^0(\bar{x})} \left\{ \sup_{x \in V(\bar{x}, \varepsilon)} A_1 x \right\}$$

Si on pose

$$\beta = \frac{2(\infty + \lambda)}{\delta} \quad \text{et} \quad d(x) = \beta z(x) + y(x)$$

alors on a pour x élément de $V(\bar{x}, \varepsilon)$

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla h_i(x), d(x) \rangle &= b_i(x) && i = 1, \dots, p \\
 \langle \nabla g_j(x), d(x) \rangle &\leq -\infty && j \in J^0(\bar{x}) \\
 A_1 d(x) &\geq \infty && l \in L^0(\bar{x})
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On peut maintenant montrer que le domaine linéaire est non vide dans un voisinage de \bar{x} élément de $D(P)$ puisque la qualification de Mangasarian-Fromovitz est vraie sur $D(P)$. Donnons d'abord une définition.

Définition.

On note δ la fonction multivoque définie pour x élément de \mathbb{R}^n :

$$\delta(x) = D(PQ(x, B)) = \left\{ z \in D \mid \begin{array}{l} h_i(x, z) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ \text{et } g_j(x, z) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{array} \right\}$$

Corollaire 2.6.

Si \bar{x} est un élément de $D(P)$ et si la qualification de Mangasarian-Fromovitz est vraie en \bar{x} alors il existe un voisinage $V(\bar{x}, \varepsilon)$ de \bar{x} dans lequel $\delta(x)$ est non vide.

Preuve.

La démonstration est immédiate en utilisant la proposition (2.5) avec $h_i(x) = h_i(x)$, $i = 1, \dots, p$ et

$$\alpha = \max_{j \in J^0(\bar{x})} |g_j(\bar{x})|.$$

On a l'existence d'un voisinage $V(\bar{x}, \varepsilon)$ et d'une direction $d(x)$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle \nabla h_i(x), d(x) \rangle &= h_i(x) \quad i = 1, \dots, p \\ \langle \nabla g_j(x), d(x) \rangle &\leq \alpha \quad j \in J^0(x). \end{aligned}$$

On a aussi en diminuant ε si nécessaire:

$$\langle \nabla g_j(x), d(x) \rangle < -g_j(x) \text{ pour } j \in J^-(\bar{x}) \text{ et } x \in V(\bar{x}, \varepsilon)$$

car les fonctions $g_j(x)$, $\nabla g_j(x)$ et $d(x)$ sont continues.

Donc dans $V = V(\bar{x}, \varepsilon) \cap D$, on a $\delta(x)$ qui est non vide. \square

Proposition 2.7.

La fonction multivoque $\mathcal{S}(x)$ est continue en tout point \bar{x} de $D(F)$.

Preuve.

Soit \bar{x} élément de $D(F)$. Il existe un voisinage de \bar{x} qui sera noté V tel que V soit inclus dans D et que pour tout x élément de V , $\mathcal{S}(x)$ soit non vide.

\mathcal{S} est fermée car les fonctions h_i , $i = 1, \dots, p$ et g_j , $j = 1, \dots, m$ sont continuellement différentiables sur \mathbb{R}^n et D est un compact de \mathbb{R}^n .

On doit donc montrer que \mathcal{S} est une fonction ouverte en \bar{x} .

Soit $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de V de limite \bar{x} et \bar{y} un élément de $\mathcal{S}(\bar{x})$. Montrons qu'il existe une suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite \bar{y} telle que y^k appartienne à $\mathcal{S}(x^k)$ à partir d'un rang k_0 .

La qualification de Mangasarian-Fromovitz nous assure que les gradients $\{\nabla h_i(\bar{x}), i = 1, \dots, p\}$ sont linéairement indépendants et qu'il existe d dans \mathbb{R}^n tel que :

$$\begin{aligned} \langle \nabla h_i(x), d \rangle &= 0 & i = 1, \dots, p \\ \langle \nabla g_j(x), d \rangle &< 0 & j \in J^0(\bar{x}) \\ A_1 d &> 0 & 1 \in L^+(\bar{x}) \end{aligned}$$

On définit l'ensemble D_1 :

$$D_1 = \{t \in D / g_j^0(\bar{x}, t) < 0, j = 1, \dots, m\}.$$

a) Montrons qu'il existe un point y appartenant à $\mathcal{S}(\bar{x})$ et à l'intérieur de D_1 .

Si 1 est élément de $L^+(\bar{x}) = \{1 = 1, \dots, L / A_1 x > b_1\}$ alors il existe en voisinage $V_1(\bar{x})$ tel que pour tout t de $V_1(\bar{x})$ on aie :

$$A_1 t > b_1.$$

On pose

$$\bar{V} = \left(\bigcap_{k \in L^+(\bar{x})} V_1(\bar{x}) \right) \cap V$$

\bar{V} est un voisinage de \bar{x} . Donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$V(\bar{x}, \varepsilon) \subset \bar{V}$$

On a l'ensemble

$$\{y / y = \bar{x} + \bar{\theta}d, 0 \leq \bar{\theta} < \bar{\theta}_1\},$$

qui est contenu dans $V(\bar{x}, \varepsilon)$ si

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\varepsilon}{\langle d, d \rangle^{1/2}} > 0$$

On pose :

$$\bar{\theta} = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\|d\|}, \min_{j \in J^+(\bar{x})} \left\langle \frac{-\bar{g}_j(\bar{x})}{\langle \nabla \bar{g}_j(\bar{x}), d \rangle}, \langle \nabla \bar{g}_j(\bar{x}), d \rangle > 0 \right\} \right\}$$

et $y = \bar{x} + \bar{\theta}d$.

On a . pour $l \in L^+(\bar{x}) = \{k = 1, \dots, L / A_1 x > b_1\}$

$$A_1 y = A_1(\bar{x} + \bar{\theta}d) > b_1 \quad \text{par définition de } \bar{\theta}_1 \text{ et } \bar{\theta}.$$

. pour $l \in L^0(\bar{x}) = \{l = 1, \dots, L / A_1 x = b_1\}$

$$A_1 y = A_1(\bar{x} + \bar{\theta}d) = b_1 + \bar{\theta}A_1 d > b_1$$

par définition de d

. pour $j \in J^-(\bar{x})$

$$\begin{aligned} g_j(\bar{x}, \bar{\theta}) &= g_j(\bar{x}) + \langle \nabla g_j(\bar{x}), \bar{x} + \bar{\theta}d - \bar{x} \rangle \\ &= g_j(\bar{x}) + \bar{\theta} \langle \nabla g_j(\bar{x}), d \rangle < 0 \end{aligned}$$

par définition de $\bar{\theta}$.

. pour $j \in J^0(\bar{x})$

$$g'_j(\bar{x}, y) = \bar{\theta} \langle \nabla g_j(\bar{x}), d \rangle < 0 \quad \text{par définition de } d.$$

donc y appartient à l'intérieur de D_1 .

b) Montrons qu'il existe une suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite y telle que pour $k > k_0$ on ait y^k dans $\delta(x^k)$.

Construisons cette suite de y^k en utilisant le fait que les gradients $\nabla h_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, p$ sont linéairement indépendants en \bar{x} . On peut donc écrire $\{1, \dots, n\} = I \cup \bar{I}$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \nabla h_1(x^k) \\ \vdots \\ \nabla h_p(x^k) \end{bmatrix}^I$$

soit régulière pour k supérieur à un k_0 .

On pose alors $\{y^k_i, k \in \mathbb{N}\} = y_i$ si i est dans \bar{I} et $\{y^k_i, k \in \mathbb{N}\}$ est tel que :

$$\begin{bmatrix} \nabla h_1(x^k) \\ \vdots \\ \nabla h_p(x^k) \end{bmatrix}^I [y^k]_{\bar{I}} = -h_i(x^k) + \langle \nabla h_i(x^k), x^k \rangle - \begin{bmatrix} \nabla h_1(x^k) \\ \vdots \\ \nabla h_p(x^k) \end{bmatrix}^{\bar{I}} [y^k]_{\bar{I}}$$

on a $h_i(x^k, y^k) = 0$ pour $i = 1, \dots, p$.

La suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ converge vers y par définition de $y = \bar{x} + \bar{\theta}d$ sachant que $\langle \nabla h_i(\bar{x}), d \rangle = 0$.

Enfin y appartient à l'intérieur de D_1 et les fonctions g_i , $i = 1, \dots, m$ sont continuellement différentiables donc il existe k_0 tel que pour k supérieur à k_0 on ait y^k dans l'intérieur de D_1 .

On a construit une suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ de limite y telle que y^k soit dans $\delta(x^k)$ pour $k \gg k_0$.

c) Si \bar{y} appartient à l'intérieur de D_1 , la suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ convient et δ est continue.

Si \bar{y} appartient à la frontière de D_1 , construisons alors comme dans le b) une deuxième suite $\{y^k, k \in \mathbb{N}\}$ vérifiant:

$$h_i(\bar{x}, y^k) = 0 \quad \text{pour } i=1, \dots, p.$$

y^k n'est pas obligatoirement un élément de D_1 . Construisons donc une suite d'éléments de D_1 de la façon suivante :

$$\bar{y}^k = y^k \text{ si } y^k \text{ est dans } D_1,$$

$$\bar{y}^k \text{ est un point du segment } [y^k, y^k] \cap \text{frontière de } D_1 \\ \text{si } y^k \text{ n'est pas dans } D_1.$$

$\{\bar{y}^k, k \in \mathbb{N}\}$ est défini et \bar{y}^k est dans $\delta(x^k)$.

On a y dans l'intérieur de D_1 et $\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}^k = \bar{y} \quad \text{par construction de } \{y^k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{donc } \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}^k = \bar{y} \text{ et } \bar{y}^k \text{ est dans } \delta(x^k).$$

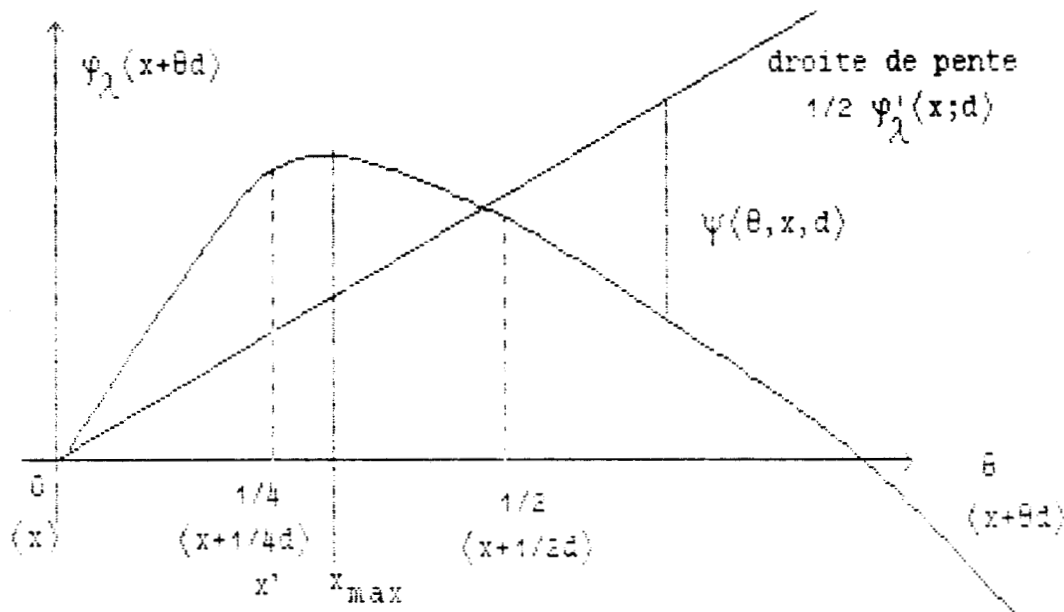
On a donc la suite cherchée.

δ est donc continue en \bar{x} élément de $D(P)$.

Avant d'énoncer le théorème de convergence de notre algorithme, nous allons donner quelques résultats sur la recherche linéaire d'Arnold. Cette technique a été présentée en 1988 [1] et consiste à rechercher par dichotomie un point qui augmente suffisamment la valeur de φ_λ entre x et

$x+d$. Elle évite la recherche du maximum mais permet tout de même d'obtenir les résultats cherchés à la limite.

D'un point de vue graphique on a :



Δ et $\psi(\theta, x, d)$ ayant été définis dans la partie 2.

On note

$$F(x, d) = \{ \theta \in \Delta, \psi(\theta, x, d) > 0 \}$$

et

$$R(x, d) = \{ \theta \in [0, 1], \psi(\theta, x, d) = 0 \} \cup \{ t \}$$

On a $t(x, d)$ du pas 3 de l'algorithme qui est égal à $\sup \{ F(x, d) \}$, et on pose

$$v(x, d) = \{ \inf R(x, d) \}$$

Lemme 2.8.

Soit (x, d) un élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si on a $\varphi'_\lambda(x; d) > 0$ alors $F(x, d)$ est non vide.

Preuve.

Ecrivons la définition de $\varphi'_\lambda(x, d)$

$$\varphi'_\lambda(x, d) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_\lambda(x+\theta d) - \varphi_\lambda(x)}{\theta}$$

donc il existe un $\bar{\theta}$ tel que pour $\theta \in]0, \bar{\theta}[$ on aie :

$$\left| \frac{\varphi_{\lambda}(x+\theta d) - \varphi_{\lambda}(x)}{\theta} - \varphi'_{\lambda}(x; d) \right| < 1/2 \varphi'_{\lambda}(x; d)$$

$$1/2 \varphi'_{\lambda}(x; d) < \frac{\varphi_{\lambda}(x+\theta d) - \varphi_{\lambda}(x)}{\theta} < 3/2 \varphi'_{\lambda}(x; d)$$

donc $\varphi_{\lambda}(x+\theta d) - \varphi_{\lambda}(x) - \theta/2 \varphi'_{\lambda}(x; d) > 0$ pour $\theta \in]0, \bar{\theta}[$

il existe donc \bar{t} tel que pour $t > \bar{t}$, $2^{-t} < \bar{\theta}$ donc $F(x, d)$ est non vide. \square

Lemme 2.9.

Soit (x, d) un élément de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On a $t(x, d) > 1/2 r(x, d)$.

Preuve.

Si $R(x, d) = \{1\}$ alors $r(x, d) = 1$ et on a pour tout θ de $[0, 1]$ $\psi(\theta, x, d) > 0$ puisque c'est vrai au voisinage de $\theta = 0$ et que la courbe ne coupe pas la droite donc $t(x, d) = 1 > 1/2$.

Si non $r(x, d) \in R(x, d) - \{1\}$ et $\psi(\theta, x, d) > 0$ dans $[0, r(x, d)]$ donc $F(x, d) > 1/2 r(x, d)$.

Lemme 2.10.

Soit $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite de \mathbb{R}^n convergeant vers x^* telle que pour tout $k > k_0$ $J^+(x^k) \neq \emptyset$. On a alors

$$J^+(x^k) = J \cup J^+(x^*)$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N} \ g_j(x^k) > 0 \text{ et } g_j(x^*) = 0\}.$$

Preuve.

Si $j \in J^+(x^k)$ pour tout $k > k_0$ on a $g_j(x^k) > 0$ donc

$$g_j(x^*) > 0 \text{ donc } j \in J \text{ si } g_j(x^*) = 0$$

$$\text{ou } j \in J^+(x^*) \text{ si } g_j(x^*) > 0.$$

Si $j \in J^+(x^*) \cup J$.

Si j appartient à J on a $g_j(x^k) > 0$ par construction

sinon $g_j(x^*) > 0$ donc il existe un k_0 tel que pour $k > k_0$ on ait $g_j(x^k) > 0$.

Donc j appartient à $J^+(x^k)$ pour $k > k_0$. \square

Lemme 2.11.

Soit $\{(x^k, d^k), k \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ convergeant vers une limite (x^*, d^*) . Si φ'_λ coïncide avec une fonction continue sur l'ensemble $\{(x^k, d^k), k \in \mathbb{N}\}$ et en (x^*, d^*) alors

$$\varphi'_\lambda(x^*, d^*) \leq 0$$

Preuve.

Soit f une fonction continue telle que:

$$f(x^k, d^k) = \varphi'_\lambda(x^k, d^k) \quad k \in \mathbb{N}$$

$$f(x^*, d^*) = \varphi'_\lambda(x^*, d^*)$$

On pose: $\Psi_1(\theta, x, d) = \varphi_\lambda(x + \theta d) - \varphi_\lambda(x) - \theta/2 f(x, d)$

$$R_1(x, d) = \{ \theta \in [0, 1], \Psi_1(\theta, x, d) = 0 \}$$

L'ensemble $R_1(x, d)$ est fermé en (x^*, d^*) . En effet, si on prend une suite $\{(y^k, b^k), k \in \mathbb{N}\}$ de limite (\bar{y}, \bar{b}) et θ^k de limite $\bar{\theta}$ tel que $\theta^k \in R_1(y^k, b^k)$ alors $\bar{\theta}$ appartient à $R_1(\bar{y}, \bar{b})$ par continuité des fonctions φ_λ et f .

En appliquant le 2° théorème de Berge, on montre alors que la fonction $r_1(x, d) = \inf\{R_1(x, d)\}$ est semi continue inférieure en (x^*, d^*) .

Supposons que $\varphi'_\lambda(x; d)$ soit strictement positive. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ et un voisinage de (x^*, d^*) tel que $r_1(x, d) > 2\varepsilon$ donc $t_1(x, d) > \varepsilon$. Il existe donc un k_0 tel que pour tout $k > k_0$, on ait $t_1(x^k, d^k) > \varepsilon$.

On a:

$$x^{k+1} = x^k + t_1(x^k, d^k)d^k > x^k + \varepsilon d^k$$

On a aussi la suite $\{d^k, k \in \mathbb{N}\}$ qui tend vers d^* non nul donc pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe k_1 tel que pour tout $k > k_1$, on aie:

$$\|d^k\| > \|d^*\| - \varepsilon_1$$

donc il existe k_2 tel que pour tout $k > k_2$, on aie:

$$\|x^{k+1} - x^k\| > \varepsilon \cdot \|d^*\| / 2$$

donc (x^*, d^*) n'est pas limite de la suite $\{(x^k, d^k), k \in \mathbb{N}\}$

donc $\varphi'_\lambda(x^*, d^*) \ll 0 \quad \square$

Théorème 2.12.

Si $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ est une suite de points construits avec l'algorithme décrit au début du chapitre et si x^* est un point d'accumulation de cette suite, alors x^* est stationnaire pour (F) .

Preuve.

On note (z^k, s^k, t^k) la solution optimale de $PG(x^k, D^k)$.

1°) - La suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ est constante à partir d'un certain rang.

Il existe donc k_0 tel que $x^{k_0+1} = x^{k_0}$ donc $s^{k_0+1} = s^{k_0}$, $t^{k_0+1} = t^{k_0}$ et $z^{k_0+1} = z^{k_0}$ et on a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^{k_0} = x^*$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = z^{k_0}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^k = s^{k_0}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t^k = t^{k_0}$$

puisque $x^{k_0+1} = x^{k_0}$ c'est que $F(x^{k_0}, z^{k_0} - x^{k_0})$ est vide sinon on aurait un successeur différent de x^{k_0} . Donc d'après la proposition 2.8 :

$$\varphi'_{\lambda}(x^{k_0}, z^{k_0} - x^{k_0}) \ll 0$$

D'après le pas 3 de l'algorithme, on a s^{k_0} et t^{k_0} nuls sinon on utiliserait la direction de l'hypothèse 5 et on aurait $x^{k_0+1} \neq x^{k_0}$ donc $\langle x^{k_0}, 0, 0 \rangle$ est solution de $PQ(x^{k_0}, B^{k_0})$ d'après la proposition 2.4.

En utilisant la proposition (2.3) et le fait que $\langle x^{k_0}, 0, 0 \rangle$ soit solution de $PQ(x^{k_0}, B^{k_0})$, on voit que x^{k_0} est point stationnaire de $\langle F \rangle$.

2°) - On suppose maintenant que pour tout k : $x^{k+1} \neq x^k$.

Dans ce cas, on a aussi $z^{k+1} \neq z^k$. Les suites $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$ sont deux suites dans un compact D . Elles admettent chacune un point d'accumulation x^* et z^* et il existe $N' \subset \mathbb{N}$ tel que :

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in N'}} x^k = x^*$$

$$\text{et} \quad \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in N'}} z^k = z^*$$

Montrons d'abord que x^* est élément de $D(F)$.

Supposons que x^* n'appartient pas à $D(F)$ donc il existe :

$$i_0 \in \{1, \dots, p\} \text{ tel que } h_{i_0}(x) \neq 0$$

ou

$$j_0 \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } g_{j_0}(x) > 0$$

Ceci va nous permettre de montrer que $\varphi'_{\lambda}(x^*, d^*) > 0$ et $\varphi'_{\lambda}(x^*, d^*) < 0$ ce qui est impossible donc $x^* \in D(F)$.

On ne peut pas utiliser la minoration de $\varphi'_{\lambda}(x_p, d_p)$ pour faire un passage à la limite parce que φ'_{λ} n'est pas une fonction continue de $\langle x, d \rangle$. On va devoir minorer $\varphi'_{\lambda}(x^k, d^k)$ par une fonction continue par rapport à $\langle x, d \rangle$ pour pouvoir passer à la limite et minorer $\varphi'_{\lambda}(x^*, d^*)$ puis utiliser le lemme 2.14.

Ecrivons (2.3).

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x^k, d^k) &= \langle \nabla f(x^k), d^k \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p \langle |h(x) - s_i^k| \rangle \\ &\quad - \lambda \sum_{j \in J^+(x)} \langle \nabla g_j(x), d \rangle \end{aligned}$$

Si j est dans une infinité de $J^+(x^k)$, on peut supposer que j est dans tous les $J^+(x^k)$, au besoin en extrayant une sous-suite $\{x^k, k \in \mathbb{N}'\}$ avec $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ sinon on peut supposer qu'il n'est dans aucun des $J^+(x^k)$.

. Si $J^+(x^k)$ est vide. On a :

$$\varphi'_\lambda(x^k, d^k) = \langle \nabla f(x^k), d^k \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p \langle |h(x) - s_i^k| \rangle \quad (2.5)$$

puisque pour tout k , $J^+(x^k) = \emptyset$ on a :

$$s_j(x^k) \quad (0 \text{ pour } j = 1, \dots, m)$$

donc par passage à la limite

$$s_j(x^*) \quad (0 \text{ pour } j = 1, \dots, m)$$

En utilisant (2.2') on peut écrire :

$$\varphi'_\lambda(x^k, d^k) \geq \Delta \sum_{i=1}^p \langle |h(x) - s_i^k| \rangle + \Delta \sum_{i=1}^p \langle s_i^k \rangle \geq \Delta \sum_{i=1}^p |h_1(x^k)|$$

par passage à la limite sur \mathbb{N}' en utilisant la continuité des fonctions h_1 et f on a :

$$\langle \nabla f(x^*), d^* \rangle + \Delta \sum_{i=1}^p \langle |h(x^*) - s_i^*| \rangle \geq \Delta \sum_{i=1}^p |h_1(x^*)|$$

Si on écrit la valeur de $\varphi'_\lambda(x^*, \lambda^*)$ on a :

$$\varphi'_\lambda(x^*, d^*) = \langle \nabla f(x^*), \lambda^* \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p |h(x^*) - s_i^*| \geq \Delta \sum_{i=1}^p |h_i(x^*)|$$

Si x n'appartient pas à $D(P)$, il existe i_0 tel que $h_{i_0}(x^*) > 0$ donc on a $\varphi'_\lambda(x^*, d^*) > 0$.

L'expression (2.5) nous donne une fonction continue qui coïncide avec φ'_λ sur l'ensemble $\{(x^k, d^k), k \in \mathbb{N}\}$ et en (x^*, d^*) . Nous pouvons appliquer le lemme 2.11 donc on a $\varphi'_\lambda(x^*, d^*) \leq 0$.

Ces deux résultats sont contradictoires donc x^* appartient au domaine de (F) .

. Si $J^*(x^k)$ est non vide, on a d'après le lemme (2.10).

On $J^+(x^k) = J^+(x^*) \cup J$ avec :

$$J = \{j \in \{1, \dots, m\} / \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, g_j(x^k) > 0 \text{ et } g_j(x^*) = 0\}$$

On écrit (2.3)

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x^k, d^k) &= \langle \nabla f(x^k), d^k \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p (|h(x^k)| - s_i^k) \\ &\quad - \lambda \sum_{j \in J^+(x^*)} \langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle - \lambda \sum_{j \in J} \langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

en utilisant les conditions de Karun et Tucker en (x^k, s^k, t^k) solution optimale de $PQ(x^k, P^k)$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x^k, d^k) &\geq \Delta \sum_{i=1}^p |h(x^k)| + \Delta \sum_{i=1}^p s_i^k \\ &\quad + \sum_{j \in J^+(x^*)} (u_j + \lambda) \langle -\nabla g_j(x^k), d^k \rangle + \sum_{j \in J} (v_j + \lambda) \langle -\nabla g_j(x^k), d^k \rangle \end{aligned}$$

x^k est réalisable pour $PQ(x^k, P^k)$ donc

$$g_j(x^k) + \langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle - t_j^k \leq 0$$

donc

$$-\langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle \geq g_j(x^k) - t_j^k$$

On a pour tout k : $g_j(x^k) > 0$ et $\langle \lambda + v^k \rangle \geq \Delta > 0$.

On a aussi :

$$\langle -\lambda - v_j \rangle t_j \geq \Delta' t_j$$

donc :

$$\sum_{j \in J^+(x^*) \cup J} \langle v_j + \lambda \rangle \langle -\nabla g_j(x^k), d^k \rangle \geq \sum_{j \in J^+(x^*) \cup J} \langle \Delta g_j(x^k) + \Delta' t_j^k \rangle$$

Si j appartient à J la limite de $g_j(x^k)$ est nulle, donc celle de t_j^k car $0 \ll t_j^k \ll g_j(x^k)$ donc la limite de $\langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle$ est nulle aussi. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi'_\lambda(x^k, d^k) &= \langle \nabla f(x^k), d^k \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p \langle |h_i(x^k)| - s_i^k \rangle \\ &- \lambda \sum_{j \in J^+(x^*)} \langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle - \lambda \sum_{j \in J} \langle \nabla g_j(x^k), d^k \rangle \\ &\geq \sum_{i=1}^p \langle \Delta |h_i(x)| + \Delta' s_i^k \rangle \\ &+ \sum_{j \in J^+(x^*)} \langle \Delta g_j(x^k) + \Delta' t_j^k \rangle + \sum_{j \in J} \langle \Delta g_j(x^k) + \Delta' t_j^k \rangle \end{aligned}$$

en utilisant la continuité des fonction f , h_i , g_j on a par passage à la limite:

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla f(x^*), d^* \rangle + \lambda \sum_{i=1}^p \langle |h_i(x^*)| - s_i^* \rangle - \lambda \sum_{j \in J^+(x^*)} \langle \nabla g_j(x^*), d^* \rangle \\
& \geq \sum_{i=1}^p \langle \Delta |h_i(x^*)| + \Delta' s_i^* \rangle + \sum_{j \in J^+(x^*)} \langle \Delta g_j(x^*) + \Delta' t_j^* \rangle \\
& \geq \sum_{i=1}^p \Delta |h_i(x^*)| + \sum_{j \in J^+(x^*)} \Delta g_j(x^*)
\end{aligned}$$

donc par définition de $\psi'_\lambda(x^*, d^*)$, on a :

$$\psi'_\lambda(x^*, d^*) \geq \Delta \sum_{i=1}^p |h_i(x^*)| + \Delta \sum_{j \in J^+(x^*)} g_j(x^*)$$

donc $\psi'_\lambda(x^*, d^*) > 0$ si x^* non réalisable.

Dé même que dans le cas précédent, on a ψ'_λ qui coïncide avec une fonction continue définie en (2.6) donc on a $\psi'_\lambda(x^*, d^*) < 0$ ce qui est contraire au résultat précédent donc x^* est dans $D(P)$.

* x^* est dans $D(P)$. Montrons maintenant que x^* est stationnaire pour (P) .

Nous savons qu'il existe un voisinage V de x^* tel que pour tout x de V , $\mathcal{S}(x)$ soit non vide. Donc pour k assez grand on a $\mathcal{S}(x^k)$ non vide donc s^k et t^k nuls.

On a la suite $\{z^k, s^k, t^k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ des solutions optimales de $PQ(x^k, B^k)$ qui converge vers $(z^*, 0, 0)$.

D'après le théorème du maximum de Berge, l'application qui à un point x de $D(P)$ associe z la solution optimale de $PQ(x, B)$ est fermée car \mathcal{S} est continue sur $D(P)$.

Sachant que z^k est solution de $PQ(x^k, B^k)$ on a donc z^* solution optimale de $PQ(x^*, B^*)$.

Si x^* n'est pas stationnaire pour P alors x^* n'est pas solution optimale de $PQ(x^*, B^*)$ donc

$$\varphi'_\lambda(x^*, d^*) > 0$$

d'après la proposition (2.4).

Si on reprend ici les fonctions définies en (2.5) et (2.6) selon le cas, on peut encore montrer que:

$$\varphi'_\lambda(x^*, d^*) < 0.$$

Les deux résultats que nous avons obtenus sont contradictoires donc x^* est stationnaire pour $\langle P \rangle$. \square

L'algorithme que nous avons proposé converge donc vers un point stationnaire de $\langle P \rangle$ à la condition qu'on sache trouver la direction donnée à l'hypothèse 5 lorsque c'est nécessaire. Cela peut se réaliser en diminuant le domaine D en changeant les bornes. Cette modification permet soit de changer de cheminement soit d'enlever la zone de D vers laquelle on se dirige sans pouvoir en sortir. Nous verrons au chapitre 5 que cette technique peut être utilisée avec bonheur.

CHAPITRE III.

Méthode duale pour la résolution
d'un problème quadratique.

1. Introduction

Le coeur de l'algorithme de résolution des problèmes non linéaires est constitué de la recherche d'une direction de déplacement à partir d'un point x donné. Pour obtenir cette direction, nous devons résoudre un problème à objectif quadratique et à contraintes linéaires. Le but de ce chapitre est de présenter un algorithme de résolution de ce problème noté PQ.

Nous déterminerons une suite de points y^k qui seront chacun solution d'un problème PQ(J^k); les ensembles J^k sont formés des indices des contraintes de PQ qui sont réalisées. Les J^k sont emboîtés et tels que le dernier soit égal à l'ensemble des contraintes d'origine. Le dernier y^k obtenu sera donc solution du problème PQ.

Cette approche qui consiste à générer une suite de points optimaux mais non réalisable pour l'ensemble des contraintes ressemble à la résolution du problème dual d'où son nom. Elle a l'avantage de ne comporter qu'une phase contrairement à beaucoup d'autres méthodes et d'avoir un bon comportement numérique ce qui la rend attrayante.

2. Notations et définitions.

PQ problème quadratique à contraintes linéaires:

$$\text{PQ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max f(y) = \langle g, y \rangle - 1/2 \langle Gy, y \rangle \\ c_i y - b_i = 0 \quad i=1, \dots, p \\ c_j y - b_j = 0 \quad j=p+1, \dots, m+p \end{array} \right.$$

K ensemble des contraintes de PQ

$$K = \{1, \dots, m+p\}$$

A ensemble de contraintes actives

$$A = \{i \in K / c_i y - b_i = 0\}, \text{ on note } q \text{ le cardinal de } A$$

J(y) ensemble des contraintes vérifiées en y

$$J(y) = \{i \in K / c_i y - b_i = 0 \text{ si } i \in p \text{ ou } c_i y - b_i \leq 0 \text{ sinon}\}$$

N matrice (q,n) formée des lignes de C indexées par A

$$N = [c_i], i \in A$$

G matrice (n,n) symétrique définie positive

M sous-espace de dimension n-q défini par:

$$M = \{y \in \mathbb{R}^n / c_i y - b_i = 0, i \in A\}$$

*Si \hat{y} est un point solution de (PQ), nous pouvons écrire les conditions de Kuhn et Tucker en y :

il existe $u \in \mathbb{R}^p$ et $v \in (\mathbb{R}^-)^{m-p}$ tels que:

$$g - G\hat{y} + \sum_{i=1}^p u_i c_i + \sum_{j=p+1}^{m+p} v_j c_j = 0$$

$$(c_j \hat{y} - b_j) v_j = 0 \quad j = p+1, \dots, m+p$$

*Sous-problème PQ(I) du problème PQ:

Soit I un sous-ensemble de K. On note PQ(I), le problème quadratique défini par:

$$PQ(I) \left\{ \begin{array}{l} \max f(y) = \langle g, y \rangle - 1/2 \langle Gy, y \rangle \\ c_i y - b_i = 0 \quad i \in I \\ c_j y - b_j \leq 0 \quad j \in I \end{array} \right.$$

*Couple solution. S-couple:

Si y est une solution du problème $PQ(I)$ et si A est l'ensemble des contraintes actives en y , $(A \cap I)$, alors (y, A) est appelé S -couple de $PQ(I)$.

Remarque: (y, A) est aussi un S -couple de $PQ(A)$

3. Résultats généraux sur les problèmes quadratiques.

Réécrivons d'abord le problème $PQ(x, B)$ sous la forme standard de PQ :

$$PQ(x, B) \begin{cases} \max \tilde{f}(x, B, z) - \mu \left[\sum_{i=1}^p (s_i + s_i^2) + \sum_{j=1}^m (t_j + t_j^2) \right] \\ z \in D = \{ z \in \mathbb{R}^n / A_l z \geq b_l, \quad l=1, \dots, L \} \\ h_i(x, d) - \varepsilon s_i = 0 & i=1, \dots, p \\ g_j(x, d) - t_j = 0 & j=1, \dots, m \\ 0 < s_i < |h_i(x)| & i=1, \dots, p \\ 0 < t_j < \max(0, g_j(x)) & j=1, \dots, m \end{cases}$$

on pose $y = (z, s, t)$

$$\text{et } c_i(x) = \langle \nabla h_i(x), 0 \dots 0, 0 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } i=1, \dots, p$$

$$c_j(x) = \langle A_j, 0 \dots 0, 0 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, L$$

$$c_{j+1}(x) = \langle \nabla g_j(x), 0 \dots 0, 0 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, m$$

$$c_{j+L+m}(x) = \langle 0 \dots 0, 0 \dots -1 \dots 0, 0 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, p$$

$$c_{j+L+m+p}(x) = \langle 0 \dots 0, 0 \dots 1 \dots 0, 0 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, p$$

$$c_{j+L+m+2p}(x) = \langle 0 \dots 0, 0 \dots 0, 0 \dots -1 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, m$$

$$c_{j+L+2m+2p}(x) = \langle 0 \dots 0, 0 \dots 0, 0 \dots 1 \dots 0 \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, m$$

$$b_i(x) = -h_i(x) + \langle \nabla h_i(x), x \rangle \quad \text{pour } i=1, \dots, p$$

$$b_j(x) = -g_j(x) + \langle \nabla g_j(x), x \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, m$$

$$b_{j+m}(x) = 0, \quad b_{j+m+p}(x) = |h_j(x)| \quad \text{pour } j=1, \dots, p$$

$$b_{j+m+2p}(x)=0, \quad b_{j+2m+2p}(x)=\max\langle 0, g_j(x) \rangle \quad \text{pour } j=1, \dots, m$$

$$g = \langle \nabla \tilde{f}, -\mu \dots -\mu, -\mu \dots -\mu \rangle$$

$$\text{et } G = \left(\begin{array}{c|c} B & \bigcirc \\ \hline \bigcirc & \begin{array}{c} -2\mu \\ \swarrow \\ -2\mu \end{array} \end{array} \right)$$

Définition

Si les lignes de N sont linéairement indépendantes, on définit:

$$N^* = \langle N G^{-1} N^T \rangle^{-1} N G^{-1} \quad \text{une matrice } \langle q, n \rangle$$

$$\text{et } H = G^{-1} \langle I - N^T N^* \rangle \quad \text{une matrice } \langle n, n \rangle$$

Remarques:

N^* est appelé pseudo inverse de N

H est l'inverse du Hessien de $f(y)$ réduit aux contraintes actives.

Proposition 3.1

Les matrices N^* et H ont les propriétés suivantes:

- $H G H = H$
- H est symétrique définie positive
- $H N^T = 0$
- $N^* N^T = I$
- $N^* G H = 0$

Preuve

$$\begin{aligned} \text{i) écrivons } H G H &= G^{-1} \langle I - N^T N^* \rangle \langle I - N^T N^* \rangle \\ &= G^{-1} \langle I - N^T N^* \rangle - G^{-1} N^T N^* \langle I - N^T N^* \rangle \end{aligned}$$

$$= G^{-1} \langle I - N^T N^* \rangle = H$$

ii) H est symétrique car G est symétrique donc on peut écrire:

$$\begin{aligned} H^T &= \langle I - N^T N^* \rangle^T G^{-1} = \langle I - N^{*T} N \rangle G^{-1} \\ &= \langle I - G^{-1} N^T \langle N G^{-1} N^T \rangle^{-1} N \rangle G^{-1} \\ &= G^{-1} - G^{-1} N^T \langle N G^{-1} N^T \rangle^{-1} N G^{-1} = G^{-1} \langle I - N^T N^* \rangle = H \end{aligned}$$

Soit y un élément de \mathbb{R}^n :

$$y^T H y = y^T H G H y = z^T H z \quad \text{avec } z = H y$$

$z^T H z$ est positif ou nul car z peut être nul donc $y^T H y$ est positif ou nul pour tout y d'où le résultat.

$$\begin{aligned} \text{iii) écrivons } H N^T &= G^{-1} \langle I - N^T N^* \rangle N^T = G^{-1} N^T - G^{-1} N^T \langle N G^{-1} N^T \rangle^{-1} N G^{-1} N^T \\ &= G^{-1} N^T - G^{-1} N^T \end{aligned}$$

$$\text{iv) écrivons } N^* N^T = \langle N G^{-1} N^T \rangle^{-1} N G^{-1} N^T = I$$

$$\text{v) écrivons } N^* G H = N^* \langle I - N^T N^* \rangle = N^* - N^* N^T N^* = N^* - N^* = 0$$

Proposition 3.2

Soit \hat{y} un point de \mathcal{M} : \hat{y} est solution de PQ sur \mathcal{M} si et seulement si il existe $u \in \mathbb{R}^p$ et $v \in (\mathbb{R}^-)^m$ vérifiant:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -N^* \nabla f(\hat{y}) \quad \text{et} \quad H \nabla f(\hat{y}) = 0$$

preuve

i) Si \hat{y} est solution de PQ alors les conditions de Kuhn et Tucker sont vraies donc il existe u dans \mathbb{R}^p et v dans $(\mathbb{R}^-)^m$ tels que:

$$\langle c_j \hat{y} - b_j \rangle v_j = 0 \quad j = p+1, \dots, m+p$$

$$\text{et } \nabla f(\hat{y}) = -\sum_{i=1}^p u_i c_i - \sum_{j=p+1}^{m+p} v_j c_j$$

si j est dans A , $c_j \hat{y} - b_j = 0$ sinon $v_j = 0$ donc on a :

$$\nabla f(\hat{y}) = -\sum_{i \in A} u_i c_i - \sum_{j \in A} v_j c_j = -N^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

donc en utilisant la proposition 3.1, on peut écrire :

$$-N^* \nabla f(\hat{y}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H \nabla f(\hat{y}) = 0$$

ii) Soit \hat{y} dans \mathcal{M} tel que il existe $u \in \mathbb{R}^p$ et $v \in (\mathbb{R}^-)^m$ vérifiant :

$$-N^* \nabla f(\hat{y}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H \nabla f(\hat{y}) = 0$$

on note \bar{y} l'optimum de P_0 sur \mathcal{M} , on a d'après i) : $\nabla f(\bar{y}) = -N^T \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}$

calculons $\bar{y} - \hat{y}$

on a $N(\bar{y} - \hat{y}) = 0$ car les deux points sont dans \mathcal{M}

et $\nabla f(\bar{y}) - \nabla f(\hat{y}) = -G(\bar{y} - \hat{y})$

$$\text{donc } (\bar{y} - \hat{y}) = -G^{-1} (\nabla f(\bar{y}) - \nabla f(\hat{y}))$$

$$\text{d'où } N(\bar{y} - \hat{y}) = -NG^{-1} (\nabla f(\bar{y}) - \nabla f(\hat{y})) = NG^{-1} N^T \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} + NG^{-1} \nabla f(\hat{y})$$

$$\text{donc } NG^{-1} N^T \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = -NG^{-1} \nabla f(\hat{y})$$

$$\text{soit } \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = -(NG^{-1} N^T)^{-1} NG^{-1} \nabla f(\hat{y})$$

$$\text{ou encore } N^T \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = -N^T N^* \nabla f(\hat{y}) = -\nabla f(\bar{y})$$

revenons à l'expression de $\bar{y} - \hat{y}$

$$\bar{y} - \hat{y} = -G^{-1} (N^T N^* \nabla f(\hat{y}) - \nabla f(\bar{y})) = H \nabla f(\hat{y})$$

$$\text{donc } \bar{y} = \hat{y} + H \nabla f(\hat{y})$$

Si on a $H \nabla f(\hat{y})=0$, on a $\bar{y}=\hat{y}$ donc \hat{y} est point optimal pour PQ sur \mathcal{M} .

On remarque que si on connaît un point y de \mathcal{M} , on peut facilement calculer l'optimum \hat{y} sur \mathcal{M} , en effet:

$$\hat{y} = y + H \nabla f(y).$$

Pour connaître l'optimum de PQ, il suffira donc de connaître l'ensemble A des contraintes actives.

4. L'algorithme dual.

Nous allons décrire ci-dessous l'algorithme de résolution du problème PQ et donner ensuite une démonstration de sa convergence vers une solution de PQ.

Pas 0 recherche du minimum sur les égalités

On initialise: $A \subset \{1, \dots, p\}$ tel que $N = [c_i]_{i \in A}$ soit de rang maximum, $q = \text{card}(A)$, K^* , H , $\hat{y} = y + H \nabla f(y)$ avec y tel que $Ny=0$, $f(\hat{y}) = \langle a, \hat{y} \rangle - 1/2 \langle G \hat{y}, \hat{y} \rangle$ et $J(\hat{y})$.

Pas 1 Choix de la contrainte violée p

Si $V(\hat{y}) = K - J(\hat{y}) = \{i \in K / c_i \hat{y} - b_i > 0\} = \emptyset$ alors le point \hat{y} est réalisable et optimal, c'est la solution de PQ.

Dans le cas contraire, on choisit p dans $V(\hat{y})$ et on pose $x^r = c_p$.

$$A^+ = A \cup \{p\}$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pas 2 Calcul de la direction et de la longueur du pas

a) Calcul de la direction du pas:

$z = H n^{+T}$ direction du pas dans l'espace primal

$r = N^* n^{+T}$ direction du pas dans l'espace dual

b) calcul de la longueur du pas:

i) longueur t_1 : longueur maximale sans violer la réalisabilité duale

si $r \leq 0$ ou $A \subset \{1, \dots, p\}$, $t_1 = \infty$

$$\text{sinon } t_1 = \min_{\substack{r_j > 0 \\ j=p+1, \dots, m+p}} \left\langle -\frac{u_j^+(y)}{r_j} \right\rangle = -\frac{u_k^+(y)}{r_k}$$

ii) longueur t_2 : longueur maximale sans violer la réalisabilité primale

si $J(\hat{y}) - A = \emptyset$ ou si $c_j z \geq 0$ pour $j \in J(\hat{y}) - A$ alors $t_2 = \infty$

$$\text{sinon } t_2 = \min_{\substack{j \in J(\hat{y}) - A \\ c_j z < 0}} \left\langle -\frac{c_j y - b_j}{c_j z} \right\rangle = -\frac{c_1 y - b_1}{c_1 z}$$

iii) longueur t_3 : longueur dans l'espace primal tel que la contrainte p soit réalisée

si $|z| = 0$ alors $t_3 = \infty$

$$\text{sinon } t_3 = \frac{c_p y - k_p}{c_p z}$$

on pose $t = \min(t_1, t_2, t_3)$

Pas 3 Déplacement

a) Si $t = \infty$, $\text{PQ}(J(\hat{y}))$ est vide donc PQ est vide

b) Si $t_3 = \infty$, on pose $\bar{u}^+ = u^+ + t \begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix}$, on lâche la contrainte k ,

$A = A - \{k\}$, $q = q - 1$, on met à jour H , N^* , $J(\hat{y})$ et on va au pas 2

c) Sinon, on calcule $\bar{y} = y - tz$

$$\bar{f} = f - t n^+ z \langle 1/2t - u_{q+1}^+ \rangle$$

$$\bar{u}^+ = u^+ + t \begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix}$$

si $t=t_3$, on pose $u=u^+$, $A=A^+$, $q=q+1$, on met à jour H , N^* , $J(\hat{y})$ et on va au pas 1

si $t=t_1$ on lâche la contrainte k : $A=A-\{k\}$, $q=q-1$, on met à jour H , N^* , $J(\hat{y})$ et on va au pas 2

si $t=t_2$ on ajoute la contrainte 1, $A=A \cup \{1\}$, $q=q+1$, $u^+ = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}^+$, on met à jour H , N^* , $J(\hat{y})$ et on va au pas 2

L'algorithme décrit ci-dessus génère une suite de S-couples (y, A) qui sont solution de la suite de problèmes $PQ(J(\hat{y}))$. Quand il n'y a plus de contraintes violées alors (y, A) est un S-couple de PQ .

Démontrons maintenant la convergence de l'algorithme. Dans un premier temps, on considère que n^+ n'est pas combinaison linéaire de N .

On note H^+ et N^{*+} les matrices H et N^* définies pour A^+ . y est un point optimal de $PQ(J(y))$ donc:

$$\nabla f(y) = -N^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -[N^T, n^{+T}] \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = -N^{+T} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^+$$

donc en utilisant la proposition 3.1, on a

$$H^+ \nabla f(y) = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^+ (y) = -N^{*+} \nabla f(y) \quad \text{avec } v \in C \quad (3.2)$$

on a aussi

$$c_p y - b_p > 0 \quad (3.3)$$

$$\text{et } c_i y - b_i = 0 \quad i \in A \quad (3.4)$$

Définition

Le triplet $\langle y, A, p \rangle$ est appelé V-triplet si et seulement si les lignes de $N^+ = [c_i] \quad i \in A \cup \{p\}$ sont linéairement indépendantes et si les relations (3.1) à (3.4) sont vraies

Nous allons voir maintenant comment passer de ce V-triplet $\langle y, A, p \rangle$ au S-couple $\langle \bar{y}, \bar{A} \rangle$ de $PQ(J(y) \cup \{p\})$.

Proposition 3.3

Soit le V-triplet $\langle y, A, p \rangle$ et le point $\bar{y} = y - tz$ avec $z = Hn^{+T}$.

Si $r = N^+ n^{+T}$ alors:

$$- H^+ \nabla f(\bar{y}) = 0$$

$$- c_{i_1} \bar{y} - b_{i_1} = 0 \quad \text{pour } i \in A$$

$$- u^+(\bar{y}) = - N^{+*} \nabla f(\bar{y}) = u^+(y) + t \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } c_{j_1} \bar{y} - b_{j_1} = c_{j_1} y - b_{j_1} - t c_{j_1} z \quad \text{pour } j \in K - A$$

preuve

$$i) \text{ On a } \nabla f(\bar{y}) = \nabla f(y) - t Gz$$

$$\text{avec } Gz = GHn^{+T} = (I - N^+ N^{+*}) n^{+T} = n^{+T} - N^+ r = N^+ T \begin{bmatrix} -r \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } H^+ \nabla f(\bar{y}) = H^+ \nabla f(y) - t H^+ N^+ T \begin{bmatrix} -r \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$ii) c_{j_1} \bar{y} - b_{j_1} = c_{j_1} y - b_{j_1} - t c_{j_1} z = t c_{j_1} z$$

or $c_{j_1} = N_1$ donc $t c_{j_1} z = 0$ d'après la proposition 3.1

$$iii) \text{ On a } u^+(\bar{y}) = - (N^+)^* \nabla f(\bar{y}) = - (N^+)^* \nabla f(y) - t (N^+)^* Gz$$

$$u^+(\bar{y}) = u^+(y) - t (N^+)^* N^+ T \begin{bmatrix} -r \\ 1 \end{bmatrix} = u^+(y) + t \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix}$$

iv) Evident.

Si on pose $\bar{y} = y - t_3 z$, alors \bar{y} est le maximum de f sur M^+ . Si de plus $u^+(\bar{y}) \ll 0$ et $c_j \bar{y} - b_j \ll 0$ pour $j \in J(\bar{y})$, alors \bar{y} est le point optimal de $PQ(J(\bar{y}))$ et (\bar{y}, A^+) est un S-couple. Dans le cas contraire, on choisit le plus petit de t_1 et t_2 . Dans le premier cas, $u_k^+(\bar{y}) = 0$ et $(\bar{y}, A - \{k\}, p)$ est un V-triplet, dans le second, $c_1 \bar{y} - b_1 = 0$ et $(\bar{y}, A \cup \{1\}, p)$ est encore un V-triplet.

Énonçons donc le théorème:

Théorème 3.4

Soit un V-triplet (y, A, p) et \bar{y} un point tel que $\bar{y} = y - tz$, $z \in Hn^+$. On pose $t = \min(t_1, t_2, t_3)$ avec:

$$t_1 = \min \left\{ \infty, \min_{\substack{r_j > 0 \\ j = p+1, \dots, m+p}} \left\langle -\frac{u_j^+(y)}{r_j} \right\rangle \right\} = -\frac{u_k^+(y)}{r_k}$$

$$t_2 = \min \left\{ \infty, \min_{\substack{j \in J(y) - A \\ c_j z < 0}} \left\langle -\frac{c_j y - b_j}{c_j z} \right\rangle \right\} = -\frac{c_1 y - b_1}{c_1 z}$$

$$t_3 = \frac{c_p y - b_p}{c_p z}$$

alors, $c_p \bar{y} - b_p \ll c_p y - b_p$

et $f(\bar{y}) - f(y) = -t c_p z \langle 1/2t - u_{q+1}^+(y) \rangle \ll 0$

De plus si $t = t_3$, $(\bar{y}, A \cup \{p\})$ est un S-couple de $PQ(J(y) \cup \{p\})$; si $t = t_1$, $(\bar{y}, A - \{k\}, p)$ est un V-triplet et si $t = t_2$, $(\bar{y}, A \cup \{1\})$ est aussi un V-triplet.

preuve

grâce à la proposition 3.1, on peut écrire:

$$c_p z = n^T H n^{+T} = n^T H G n^{+T} = z^T G z > 0$$

Calculons $f(\bar{y}) - f(y)$ en utilisant la formule de Taylor:

$$f(\bar{y}) - f(y) = -t \langle \nabla f(y), z \rangle - 1/2 t^2 \langle Gz, z \rangle$$

D'après 3.1, on a $H^+ \nabla f(y) = 0$ donc $\nabla f(y) = N^+ \bar{u}^+(y)$

donc $H \nabla f(y) = -H N^+ \bar{u}^+(y) = -H [N^+, n^{+T}] \bar{u}^+(y) = -H n^+ \bar{u}_{q+1}^+(y)$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} -t \langle \nabla f(y), z \rangle &= -t z^T \nabla f(y) = -t n^+ H \nabla f(y) \\ &= t n^+ H n^+ \bar{u}_{q+1}^+(y) = t z^T n^+ \bar{u}_{q+1}^+(y) \end{aligned}$$

on sait que $z^T n^+$ est positif et que $\bar{u}_{q+1}^+(y)$ est négatif donc

$$f(\bar{y}) - f(y) = t z^T n^+ \bar{u}_{q+1}^+(y) - 1/2 t^2 n^+ z < 0$$

donc $f(\bar{y}) < f(y)$ si t est strictement positif.

On peut écrire aussi grâce à la proposition 3.3 que:

$$H^+ \nabla f(\bar{y}) = 0 \quad \text{et} \quad c_i y - b_i = 0 \quad \text{pour } i \in A$$

d'après la définition de t , on sait aussi que

$\bar{u}^+(\bar{y})$ est négatif ou nul ainsi que $c_j y - b_j$ pour $j \in J - A$.

1) si $t = t_3$ on a $c_p y - b_p = 0$ et $(y, A \cup \{p\})$ est un S-couple de $PR(J(y) \cup \{p\})$.

2) si $t = t_1$ et $t_1 < t_3$, alors $(y, A - \{k\}, p)$ est un V-triplet. En effet, si on note $N' = [c_i]_{i \in A - \{k\}}$, N'^+ et H' les matrices qui sont associées, on a:

- N' de rang maximum et n^+ linéairement indépendant de N'^+
- on a $H^+ \nabla f(\bar{y}) = 0$

$$\text{donc} \quad \nabla f(\bar{y}) = -N'^+ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^+ = - \sum_{i=1}^r c_i u_i - \sum_{j \in A \cup \{p\}} c_j v_j$$

$$\text{or } v_k = 0 \quad \text{donc} \quad \nabla f(\bar{y}) = -N'^+ \begin{bmatrix} k \\ v \end{bmatrix}^+ (\bar{y})$$

$$\text{donc 3.1 } H'^+ \nabla f(\bar{y}) = 0 \quad \text{et} \quad \text{3.2} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^+ (\bar{y}) = -(N'^+)^+ \nabla f(\bar{y})$$

sont vraies

- enfin $c_p \bar{y} - b_p > 0$ car $t_1 < t_3$

et $c_i \bar{y} - b_i = 0$ pour $i \in A$ d'après la proposition 3.3 donc $\langle y, A - \{k\}, p \rangle$ est un V-triplet.

3) Si $t = t_2$ et $t_2 < t_1 < t_3$, alors $\langle y, A \cup \{1\}, p \rangle$ est un V-triplet.

En effet Les lignes $\{n_i, i \in A \cup \{1\}\}$ sont linéairement indépendantes car les lignes $\{n_i, i \in A\}$ sont linéairement indépendantes et la ligne c_1 est dépendante des autres, il existe α dans \mathbb{R}^q tel que $c_1 = \alpha N$; on aurait donc $c_1 z = \alpha N z = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse $c_1 z > 0$.

$$\text{- on a } \nabla f(\bar{y}) = -N^+ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \langle \bar{y} \rangle - n_1^T . 0$$

donc si on note $N' = [c_i], i \in A \cup \{1\}$ on a :

$$\nabla f(\bar{y}) = - (N')^+ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \langle \bar{y} \rangle \quad \text{avec } v_1 = 0$$

$$\text{donc 3.1 } H^+ \nabla f(\bar{y}) = 0 \quad \text{et} \quad 3.2 \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \langle \bar{y} \rangle = - (N')^+ \nabla f(\bar{y})$$

sont vraies

- on a aussi $c_p \bar{y} - b_p < 0$ car $t_2 < t_3$

et $c_i \bar{y} - b_i = 0$ $i \in A$ ainsi que $c_1 \bar{y} - b_1 = 0$

donc $\langle y, A \cup \{1\}, p \rangle$ est un V-triplet

Donc si $\langle y, A, p \rangle$ est un V-triplet, on obtient un S-couple $\langle y, A' \cup \{p\} \rangle$ au bout d'un nombre fini de pas partiels ($t = t_1$ ou t_2) et d'un pas complet ($t = t_3$); car A' est inclus dans K fixé et il n'y a qu'un nombre fini de choix possible d'éléments de $J(y)$ pour former l'ensemble A' .

Considérons maintenant que n^+ est combinaison linéaire de N . $\langle y, A, p \rangle$ n'est pas un V-triplet. Dans ce cas, soit le problème $PQ(J(y) \cup \{p\})$ est vide, soit il est possible d'enlever une contrainte k à l'ensemble A tel que $\langle y, A - \{k\}, p \rangle$ soit un V-triplet. Dans le 1° cas, le problème PQ est

vide, dans le second, on se retrouve dans les hypothèses du 1° cas où n^+ est linéairement indépendant des lignes de N .

Théorème 3.5

Soit $\langle y, A \rangle$ un S-couple de $PQ\langle J(y) \rangle$ et p un élément de $K-J(y)$ tel que:

$$n^+ = c_p = rN \quad \text{et} \quad c_p y - b_p > 0$$

Si $r \leq 0$ alors $PQ\langle J(y) \cup \{p\} \rangle$ est vide;

sinon on peut enlever la contrainte k telle que:

$$\frac{u_k(y)}{r_k} = \min_{\substack{r_j > 0 \\ j \in \{p+1, \dots, m+p\}}} \left\{ -\frac{u_j(y)}{r_j} \right\}$$

et on a $A^- = A - \{k\}$ avec $\langle y, A^-, p \rangle$ un V-triplet.

preuve

Si $\bar{y} = y + z$ est solution de $PQ\langle J(y) \cup \{p\} \rangle$, on doit avoir $n^+ z = rNz \leq 0$ pour que la contrainte p soit vérifiée et $Nz \leq 0$ pour que les contraintes de A soient toujours satisfaites donc on doit avoir $r > 0$. Si $r \leq 0$, $PQ\langle J(y) \cup \{k\} \rangle$ est donc vide ainsi que PQ .

Si r est positif, il existe k défini dans l'énoncé et

$$n^+ = \sum_{i \in A} r_i n_i$$

on note $A^- = A - \{k\}$, on a:

$$n_k = \frac{1}{r_k} \left[-\sum_{i \in A^-} r_i n_i + n^+ \right]$$

$\langle y, A \rangle$ est un S-couple donc $\nabla f(y) = -N^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$$\nabla f(y) = -\sum_{i=1}^p \left\langle u_i - \frac{v_k}{r_k} r_i, n_i \right\rangle - \sum_{j \in A^-} \left\langle v_j - \frac{v_k}{r_k} r_j, n_j \right\rangle - \frac{v_k}{r_k} n^+$$

N est de rang maximum, n^+ est une combinaison linéaire des lignes de N et r_k est strictement positif donc N^+ est de rang maximum.

$$\text{on a } \nabla f(y) = -N^+{}^T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{donc}$$

$$H^+ \nabla f(y) = 0 \quad \text{donc (2.1) est vrai}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -(N^+)^* \nabla f(y)$$

$$\text{et pour } j \in A^- \quad v_j - \frac{v_k}{r_k} r_j \leq 0$$

$$\text{et } \frac{v_k}{r_k} \leq 0 \quad \text{donc (3.2) est vrai}$$

Comme on n'a pas bougé de point y , on a toujours:

$$c_p y - b_p > 0$$

$$\text{et } c_i y - b_i < 0 \quad \text{pour } i \in A^+$$

donc (y, A, p) est un V -triplet.

Les hypothèses du théorème 3.5 sont:

$$n^+ = Nr \quad \text{ce qui entraîne } r = N^+ n^+ \text{ et } z = Hn^+ = 0$$

$$\text{et } c_p - b_p > 0$$

Dans l'algorithme cela correspond après le pas 2 à $t_3=0$ et $t_2=0$ puisque $z=0$. Donc au pas 3 si $t_4=\infty$, on sait que le domaine est vide en utilisant le théorème 3.5. Si t_4 est fini, on se trouve dans le cas b) avec $u^+ = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ parceque ce cas ne peut se produire qu'au premier essai de déplacement. Donc on lâche la contrainte k pour trouver un V -triplet $(y, A - \{k\}, p)$ et on continue en calculant de nouveaux déplacements.

Théorème 3.6

L'algorithme dual décrit dans ce chapitre converge en un nombre fini d'itérations ou indique que le problème PQ est vide.

preuve

On part d'un point y^0 solution d'un sous-problème $PQ(J(y^0))$ avec $J(y^0)$ contenant l'ensemble $\{1, \dots, p\}$. Les ensembles $J(y^k)$ construits sont emboîtés ($J(y^{k+1}) \supset J(y^k)$) et sont contenus dans K . On a donc au maximum m contraintes violées à satisfaire or pour chaque contrainte on a un nombre fini d'itérations ou une indication de domaine vide donc l'algorithme proposé converge en un nombre fini d'itérations.

CHAPITRE IV
L'IMPLEMENTATION

1. Introduction

Il s'agit dans ce chapitre de passer de l'algorithme décrit dans les chapitres 2 et 3 à un code de programmation implanté sur une machine. Ce code doit pouvoir traiter des problèmes de grande taille en utilisant un temps et une taille raisonnable. De plus, du point de vue numérique il faut contrôler et minimiser les erreurs dues à l'arithmétique de l'ordinateur.

La première condition sera réalisée en utilisant des méthodes de factorisation des matrices qui permettront de résoudre facilement les systèmes linéaires rencontrés lors du déroulement de l'algorithme. Quand cela sera possible on associera à ces factorisations des actualisations pour l'ajout ou le retrait d'une colonne en vue de diminuer le temps de calcul lorsque les matrices à factoriser sont voisines.

La condition de stabilité numérique sera remplie aussi bien au niveau des factorisations en utilisant un critère numérique lors du pivotage qu'en équilibrant la matrice des gradients avant tout calcul pour diminuer la dispersion des valeurs.

Ces techniques ainsi que la méthode BFGS d'actualisation de matrices ont été utilisées pour la traduction de l'algorithme en un code de programmation implanté sur un ordinateur. Leur utilisation est importante pour la qualité des résultats et l'efficacité de l'algorithme mis en oeuvre.

2. Notations.

L matrice carrée triangulaire inférieure à diagonale unité

U matrice carrée triangulaire supérieure

D matrice diagonale

R matrice triangulaire supérieure non obligatoirement carrée

T matrice triangulaire inférieure à diagonale unité non obligatoirement carrée

E^j matrice élémentaire de la forme:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & x & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

colonne j

A_i^c élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $c^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A

P_{ij} matrice de permutation de la colonne i et de la colonne j:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}$$

3. Résolution des systèmes linéaires.

L'algorithme quadratique proposé au chapitre 3 nécessite la résolution d'un certain nombre de systèmes linéaires. Le premier consiste à chercher x , élément de \mathbb{R}^n tel que:

$$Nx = b \quad (4.1)$$

Il nous faut aussi calculer une direction primale z dans \mathbb{R}^n et une direction duale r dans \mathbb{R}^q telles que:

$$\text{et} \quad \begin{cases} z = Hr^+ \\ n = N^*r^+ \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\text{avec} \quad N^* = (NG^{-1}N^T)^{-1}NG^{-1}$$

$$\text{et} \quad H = G^{-1}(I - N^T N^*)$$

Sachant que les lignes de N sont linéairement indépendantes, il est possible de compléter la matrice N par une matrice C telle que la matrice $M = \begin{bmatrix} N^T & C \end{bmatrix}$ soit une matrice (n, n) régulière. Ceci permet par exemple de calculer x comme suit:

$$x = M^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a les relations suivantes:

$$MM^{-1} = I_n = \begin{bmatrix} N^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = N^T W + CZ = I_n \quad (4.4)$$

$$\text{et} \quad M^{-1}M = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} WN^T & WC \\ ZN^T & ZC \end{bmatrix} = I_n$$

$$\text{donc} \quad ZN^T = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{et} \quad ZC = I_{n-q}$$

Ces relations vont nous permettre d'écrire H à l'aide des matrices B et Z . Cette approche est appelée de "rang partiel" par Goldfarb [16]. En effet, elle permet de calculer la matrice H à partir d'une matrice Z d'ordre $n-q$ qui contient les informations nécessaires, ceci évitant de

faire des calculs avec une matrice N d'ordre q . Cette approche est d'autant meilleure que le nombre de contraintes actives q est plus grand donc celui des degrés de liberté $n-q$ petit.

Calculons ZGH et HGZ^T

$$\begin{aligned} ZGH &= Z(I - N^T N^*) = Z \quad \text{d'après (4.5)} \\ \text{et} \quad HGZ^T &= (ZGH)^T = Z^T \\ \text{donc} \quad ZG.H.GZ^T &= ZGZ^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

Z étant d'ordre maximal ainsi que Z^T , G étant régulière, la matrice ZGZ^T d'ordre (q, q) est régulière

de même, on a :

$$\begin{aligned} H I_n &= H(N^T W + GZ) = HGZ \quad \text{d'après la proposition (3.1)} \\ \text{et} \quad Z^T C^T H &= (HGZ)^T = H \end{aligned}$$

en reprenant la relation (4.6) et en remplaçant H par les expressions ci-dessus, on peut écrire :

$$Z^T = HGZ^T = HC.ZGZ^T \quad \text{donc} \quad C^T Z^T = C^T HC.ZGZ^T = I$$

$Z^T GZ$ étant régulière, on a :

$$C^T HC = (ZGZ^T)^{-1}$$

$$\text{donc} \quad Z^T (ZGZ^T)^{-1} = Z^T C^T HC = (I - W^T N) HC = HC$$

ceci d'après les relations entre M et M^{-1} ainsi que H et N^T on peut aussi écrire :

$$Z^T (ZGZ^T)^{-1} Z = HCZ = H(I_n - N^T W) = H$$

avec les mêmes relations donc :

$$H = Z^T (ZGZ^T)^{-1} z \quad (4.7)$$

ceci permet d'exprimer z et r :

$$z = Z^T (ZGZ^T)^{-1} z^+ \quad (4.8)$$

$$\text{et} \quad N^T r = N^T N^* n^+ = n^+ - Gz \quad (4.9)$$

Pour résoudre ces systèmes, il est intéressant de factoriser les matrices N et ZGZ^T en posant :

$$M = \begin{bmatrix} N^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = LU$$

$$\left| N^T = LR = TU \quad \text{factorisation de type LU} \right.$$

$$\text{donc } M = L \left[\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad \text{et } M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} U^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] L^{-1} = \left[\begin{array}{c} W \\ \hline Z \end{array} \right]$$

$$\text{et } \left| (ZGZ^T) = LDL^T \quad \text{factorisation de Cholesky} \right.$$

Ces factorisations permettent de résoudre facilement (4.7) et (4.8):

$$\text{on calcule } \left[\begin{array}{c} W_1 \\ \hline W_2 \end{array} \right] = L_0^{-1} n^+ \quad \text{donc } W_2 = Zn^+$$

$$LDL^T s = W_2$$

$$\text{d'où } z = (L_0^{-1})^T \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline s \end{array} \right]$$

$$\text{de même } \left[\begin{array}{c} W_1 \\ \hline W_2 \end{array} \right] = L_0^{-1} (n^+ - Gz)$$

$$\text{et } Ux = W_1$$

a) la factorisation de type LU

La factorisation de type LU décrite ici et programmée dérive de la factorisation LU décrite par Curtis et Reid [5].

Le problème est donc de factoriser une matrice (n, q) qui sera notée A et ensuite de pouvoir actualiser cette factorisation si on ajoute une colonne ou si on en enlève une.

On va construire une suite de matrices $\{^k A, k \in \{1, \dots, q\}\}$ de la façon suivante:

$$^1 A = A$$

à l'étape k : ${}^k A =$

$$\begin{bmatrix} {}^1 A_1^1 & \dots & \dots & \dots & {}^1 A_1^q \\ & {}^2 A_2^2 & \dots & \dots & {}^2 A_2^q \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & {}^{k-1} A_{k-1}^{k-1} & \dots & {}^{k-1} A_{k-1}^q \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & {}^k A_k^k & \dots & {}^k A_k^q \\ & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & & {}^k A_m^k & \dots & {}^k A_m^q \end{bmatrix}$$

avec ${}^k A_k^k$ non nul

On veut écrire la matrice ${}^{k+1} A$ à partir de la matrice ${}^k A$. Pour cela, on va la prémultiplier par une matrice E^k telle que:

$$E_{l+1}^k {}^k A_l^k + {}^k A_{l+1}^k = 0 \quad l=1, \dots, m-k$$

$$\text{donc } E_{l+1}^k = - \frac{{}^k A_{l+1}^k}{{}^k A_l^k} \quad l=1, \dots, m-k$$

ce qui nous donne la matrice ${}^{k+1} A = E^k {}^k A$ avec:

$${}^{k+1} A_j^i = {}^k A_j^i \quad i=1, \dots, k$$

$$j=1, \dots, q$$

$${}^{k+1} A_j^i = 0 \quad i=k+1, \dots, m$$

$$j=1, \dots, k$$

$${}^{k+1} A_j^i = {}^k A_j^i + E_1^k {}^k A_k^j \quad i=k+1, \dots, m$$

$$j=k+1, \dots, q$$

On peut répéter cette opération q fois si la matrice A est de rang maximum et on a:

$${}^q A = E^q E^{q-1} \dots E^1 A$$

on pose: ${}^q A = R$ et $(E^q E^{q-1} \dots E^1) = L^{-1}$

donc $R = L^{-1} A$ ou encore

en prémultipliant S par une matrice E^{q+1} comme dans la factorisation précédemment décrite, on peut écrire:

$$E^{q+1} S = R'$$

donc $A' = L(E^{q+1})^{-1}R' = L'R'$

avec $(L')^{-1} = E^{q+1}.E^q \dots E^1$

ceci permet de connaître T' et U' :

$$L' = \left[\begin{array}{c|c} T' & 0 \\ \hline & I \end{array} \right] \quad \text{et} \quad R' = \left[\begin{array}{c} U' \\ 0 \end{array} \right]$$

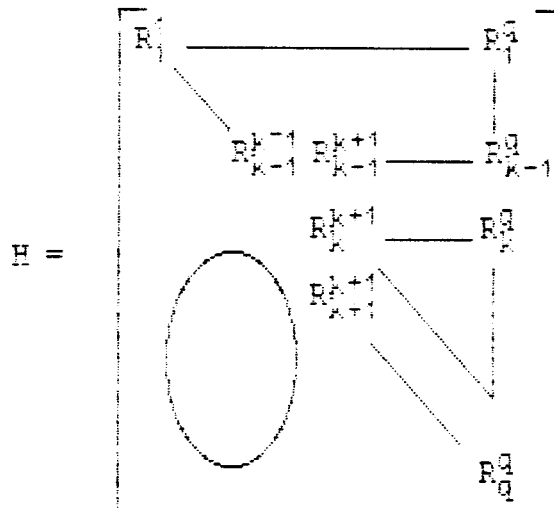
L'ajout d'une contrainte peut donc être considéré comme une étape de plus dans la factorisation LR avec le plus grand des $|s_i|, i=q+1, \dots, m$ comme pivot.

c) le retrait d'une contrainte.

Dans ce cas, la matrice N s'écrit:

$$N = \left[\begin{array}{c|c|c} N_1 & N_k & N_2 \end{array} \right] = L.R$$

et la matrice $N' = \left[\begin{array}{c|c} N_1 & N_2 \end{array} \right] = L.R$ avec:



Si on veut transformer la matrice H en une matrice R', seule la partie inférieure doit être modifiée. On note:

$$R' = E^{q-1} \dots \dots E^1 \cdot H$$

$$\text{donc } N' = LH = L(E^{q-1} \dots \dots E^1) L^{-1}$$

$$\text{avec } L' = (E^{q-1} \dots \dots E^1) L^{-1}$$

d) La factorisation de Cholesky

Si B est une matrice symétrique définie positive, on peut décomposer B en un produit de matrices:

$$B = LDL^T$$

Nous allons calculer les matrices L et D par identification et voir ensuite la politique à suivre si la matrice B est creuse.

$$\text{on a } B_{ij}^j = \sum_{k=1}^n L_{ik}^k D_k (L_{kj}^j)^T = \sum_{k=1}^n L_{ik}^k D_k L_{kj}^k \quad \text{pour } i \leq j$$

$$\text{donc } B_{ij}^j = \sum_{k=1}^i L_{ik}^k D_k L_{kj}^k \quad \text{avec } i \leq j$$

on calcule les d_1^k et D_1 colonne par colonne. Pour la 1^{ère} colonne, on a:

$$\text{et } \begin{cases} D_1^1 = B_{11}^1 \\ L_{11}^1 = 1 \\ L_{11}^1 = \frac{B_{11}^1}{D_1^1} \end{cases}$$

on détermine maintenant la j^{ième} colonne:

$$\text{on a } B_{ij}^j = \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}^k D_k L_{kj}^k + D_j$$

$$\text{donc } \begin{cases} D_j = B_{jj}^j - \sum_{k=1}^{j-1} L_{1k}^k D_k L_{kj}^k \end{cases}$$

$$\text{et } B_{ji} = \sum_{k=1}^{j-1} L_j^k D_k L_1^k + D_j L_1^j$$

$$\text{d'où } \left| L_1^j = \frac{1}{D_j} \left(B_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_j^k D_k L_1^k \right) \right.$$

On voit qu'à chaque détermination d'une colonne on ajoute à l'élément B_{ji} , le produit des lignes L_j et L_1 déjà déterminées. Si on veut conserver le creux de la matrice, il faut commencer la factorisation par les lignes les plus vides pour que le nombre d'éléments non nuls du produit $L_1.L_j$ soit le plus faible possible. On retrouve ici la même idée que pour la factorisation LU.

3) Equilibrage des matrices.

Les solutions des systèmes linéaires décrits au début de ce chapitre sont obtenus après une suite d'opérations dont les résultats dépendent les uns des autres. On essaye de minimiser l'erreur finale en choisissant un ordre de résolution qui évite les valeurs trop faibles ou trop grandes comme on l'a vu lors du choix du pivot. Ce choix ne peut que limiter la dispersion des valeurs, il ne peut pas la réduire. Une technique permettant avant tout calcul de diminuer la dispersion des valeurs des nombres traités ne fera qu'augmenter la précision des solutions obtenues donc la stabilité numérique de l'algorithme. Cette idée d'équilibrer les coefficients entre eux a été développée par Curtis et Reid [6]. Il consiste à résoudre un problème des moindres carrés.

Si A est une matrice (m,n) , on cherche l'élément de \mathbb{R}^N minimisant la fonction φ définie par:

$$\varphi = \sum_{(i,j)} (f_{ij} - l_i - c_j)^2$$

avec $L_1 =$ partie entière de $\langle \bar{l}_1 + 0.5 \rangle$
 $C_j =$ partie entière de $\langle \bar{c}_j + 0.5 \rangle$

Ce calcul de B permet d'obtenir une matrice équilibrée qui a la même mantisse en machine que A on effectue donc les calculs sans perdre de précision.

4) Le calcul des matrices B^k ; la méthode B.F.G.S.

On veut que la suite de matrices $\{B^k, k \in \mathbb{N}\}$ soit une suite de matrices symétriques définies positives et qu'elles constituent une approximation du Hessien du Lagrangien. Pour cela nous allons utiliser une procédure d'actualisation basée sur la méthode BFGS [31].

Nous allons d'abord définir une actualisation et étudier ses propriétés.

Soit H une matrice symétrique définie positive de rang n, s et y deux éléments de \mathbb{R}^n . On pose:

$$\bar{H} = \left\{ I - \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right\} H \left\{ I - \frac{y \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right\} + \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle}$$

on reconnaît l'actualisation de type BFGS de l'inverse du Hessien.

Proposition

Si H est définie symétrique positive alors \bar{H} est symétrique et vérifie $\bar{H}y = s$. De plus \bar{H} est définie positive si et seulement si $\langle y, s \rangle$ est positif.

preuve

Si H est symétrique, \bar{H} est symétrique. En effet:

$$\bar{H}^T = \left\{ I - \frac{y \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right\}^T H^T \left\{ I - \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right\}^T + \left(\frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right)^T$$

$$\bar{H}^T = \left\{ I - \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right\} H \left\{ I - \frac{y \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right\} + \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} = \bar{H}$$

calculons $\bar{H}y$:

$$\bar{H}y = \left\{ I - \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right\} H \left\{ I - \frac{y \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right\} y + \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} y$$

$$\bar{H}y = \left\{ I - \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right\} H (y - y) + s = s$$

. si H est définie positive et $\langle y, s \rangle$ est positif, on a:

$$x^T \bar{H}x = x^T \left\{ I - \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right\} H \left\{ I - \frac{y \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right\} x + \frac{x^T s s^T x}{\langle y, s \rangle}$$

on pose $v = \left\{ I - \frac{y s^T}{\langle y, s \rangle} \right\} x$ et on a:

$$x^T \bar{H}x = v^T H v + \frac{\langle x^T s, x^T s \rangle}{\langle y, s \rangle}$$

les deux termes de la somme sont positifs ou nuls donc \bar{H} est certainement semi-définie positive.

Si $x^T s$ est non nul alors $x^T \bar{H}x$ est strictement positif à cause du deuxième terme; sinon $x^T - \frac{x^T s y^T}{\langle y, s \rangle} = x^T$ donc $x^T \bar{H}x$ est strictement positif à cause du premier terme donc \bar{H} est définie positive.

. si H et \bar{H} sont définies positives, on a:

$$y^T \bar{H}y = y^T s = \langle y, s \rangle > 0$$

Proposition

Soit H une matrice symétrique définie positive et B son inverse. On définit \bar{H} par (4.10). Si $\langle y, s \rangle$ est strictement positif, $\bar{B} = \bar{H}^{-1}$ existe, est symétrique définie positive et on a:

$$\bar{E} = B + \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{B s s^T B}{\langle s, B s \rangle} \quad (4.11)$$

et $\bar{E}s = y$

preuve

Soit H une matrice symétrique définie positive. on note B son inverse. Si \bar{H} est définie par (4.10) et si $\langle y, s \rangle$ est strictement positif alors \bar{H} est aussi symétrique définie positive donc son inverse \bar{E} existe et l'est aussi.

. Montrons maintenant que:

$$\bar{H} \left\{ B + \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{B s s^T B}{\langle s, B s \rangle} \right\} = I$$

ce qui donnera l'expression de \bar{E} d'après l'unicité de l'inverse. On calcule:

$$A = \bar{H} \left\{ B + \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{B s s^T B}{\langle s, B s \rangle} \right\}$$

$$A = \left[\left(I - \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right) H \left(I - \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right) + \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right] \left[B + \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{B s s^T B}{\langle s, B s \rangle} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{on a: } \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} &= \left[B + \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{B s s^T B}{\langle s, B s \rangle} \right] = \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} B + \frac{s s^T y y^T}{\langle y, s \rangle^2} - \frac{s s^T B s s^T B}{\langle y, s \rangle \langle s, B s \rangle} \\ &= \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} B + \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} B = \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \end{aligned}$$

$$\text{donc } A = \left(I - \frac{s \cdot s^T}{\langle y, s \rangle} \right) H \left(I - \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} \right) \left(B + \frac{y \cdot y^T}{\langle y, s \rangle} - \frac{B s s^T B}{\langle s, B s \rangle} \right) + \frac{s \cdot y^T}{\langle y, s \rangle}$$

$$\begin{aligned}
A &= H.B + \frac{Hy.y^T}{\langle y,s \rangle} - \frac{HBss^T B}{\langle s, Bs \rangle} - \frac{sy^T HB}{\langle y,s \rangle} - \frac{sy^T Hyy^T}{\langle y,s \rangle^2} + \frac{sy^T HBss^T B}{\langle y,s \rangle \langle s, Bs \rangle} \\
&\quad - \frac{Hys^T B}{\langle y,s \rangle} - \frac{Hys^T yy^T}{\langle y,s \rangle^2} + \frac{Hys^T Bss^T B}{\langle y,s \rangle \langle s, Bs \rangle} + \frac{sy^T Hys^T B}{\langle y,s \rangle^2} + \frac{sy^T Hys^T yy^T}{\langle y,s \rangle^3} \\
&\quad - \frac{sy^T Hys^T Bss^T B}{\langle y,s \rangle^2 \langle s, Bs \rangle} + \frac{s.y^T}{\langle y,s \rangle} \\
A &= I + \frac{Hy.y^T}{\langle y,s \rangle} - \frac{ss^T B}{\langle s, Bs \rangle} - \frac{sy^T}{\langle y,s \rangle} - \frac{sy^T Hyy^T}{\langle y,s \rangle^2} + \frac{ss^T B}{\langle s, Bs \rangle} \\
&\quad - \frac{Hys^T B}{\langle y,s \rangle} - \frac{Hyy^T}{\langle y,s \rangle} + \frac{Hys^T B}{\langle y,s \rangle} + \frac{sy^T Hys^T B}{\langle y,s \rangle^2} + \frac{sy^T Hyy^T}{\langle y,s \rangle^2} \\
&\quad - \frac{sy^T Hys^T B}{\langle y,s \rangle^2} + \frac{s.y^T}{\langle y,s \rangle} = I
\end{aligned}$$

donc l'inverse \bar{E} de \bar{H} vérifie (4.11).

on a
$$\bar{B}s = Bs + \frac{yy^T s}{\langle y,s \rangle} - \frac{Bss^T Bs}{\langle s, Bs \rangle} = y$$

On peut maintenant construire une suite de matrices $\{B^k, k \in \mathbb{N}\}$ symétriques définies positives associée aux suite de points $\{x^k, k \in \mathbb{N}\}$, $\{u^k, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{v^k, k \in \mathbb{N}\}$ en posant:

$$B^0 = I$$

$$B^{k+1} = B^k + \frac{y^k y^{kT}}{\langle y^k, s^k \rangle} - \frac{B^k s^k s^{kT} B^k}{\langle s^k, B^k s^k \rangle} \quad \text{si } \langle y^k, s^k \rangle > 0$$

$$B^{k+1} = I \quad \text{sinon}$$

avec $s^k = x^{k+1} - x^k$

$$\begin{aligned}
\text{et } y^k &= \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) - u^{k+1} [\nabla h(x^{k+1}) - \nabla h(x^k)] \\
&\quad - v^{k+1} [\nabla g(x^{k+1}) - \nabla g(x^k)]
\end{aligned}$$

$$y^k = \nabla_x L(x^{k+1}, u^{k+1}, v^{k+1}) - \nabla_x L(x^k, u^{k+1}, v^{k+1})$$

De plus on a: $Bs^k = y^k$ c'est à dire:

$$B(x^{k+1}-x^k) = \nabla_x L(x^{k+1}, u^{k+1}, v^{k+1}) - \nabla L(x^k, u^{k+1}, v^{k+1})$$

donc ces matrices sont une approximation du Hessien du Lagrangien.

CHAPITRE V

Résultats numériques

I - Les problèmes étudiés et leur simplification.

Les problèmes qui ont été utilisés pour obtenir les résultats présentés dans ce chapitre sont tous d'origine réelle. Il s'agit en effet d'une modélisation du fonctionnement de l'usine de Noyelles-Godault de la société Penarroya. Cette usine comporte une fonderie de plomb et une fonderie de zinc qui utilisent un ensemble de minerais de provenance multiples. La question à laquelle nous avons répondu est de choisir les tonnages de minerais comptables avec le fonctionnement métallurgique qui maximisent le gain de l'entreprise sur une année.

Pour obtenir des résultats exploitables plusieurs difficultés ont dû être surmontées. Les premières d'entre elles ont été de trouver une forme agréable pour écrire les équations, de pouvoir fournir un ensemble de minerais avec leurs caractéristiques et enfin de traduire cet ensemble en un ensemble de données utilisables par un programme d'optimisation. L'objet de cette première partie du chapitre sera d'exposer la solution retenue.

Une autre difficulté a été la précision des calculs pendant l'optimisation car l'usine utilise des minerais contenant plus de 50% de plomb ou de zinc mais aussi quelque grammes d'or, d'argent ou de germanium. Ces quelques grammes sont importants pour le résultat économique. Il ne faut donc pas les "perdre" dans les erreurs de calcul. Ceci a été notre souci constant dans les chapitres précédents c'est pourquoi nous n'en parlerons pas ici.

Revenons aux problèmes d'écriture du modèle, c'est à dire de l'ensemble des équations, pour donner les principes qui ont été suivis.

- 1°) - Dissocier la partie comprenant les équations métallurgiques qui régissent le fonctionnement technique de l'usine et la partie liée aux minerais choisis pour constituer la charge.
- 2°) - Utiliser le découpage de l'usine en ateliers pour constituer des cellules presque indépendantes avec des flux de matière en entrée et en sortie.
- 3) - Autoriser une écriture simple des variables et des équations. Traduire les équations écrits sous la forme habituelle en un tableau de nombres et les dériver sera l'affaire d'un programme et non de l'utilisateur.

Les avantages liés à ces principes d'écriture sont les suivant :

- les équations métallurgiques ne sont fonction que des installations et des capacités des ateliers. Chacun a son groupe d'équation, sa partie de fonction économique, ses flux d'entrée et de sortie. Cet éclatement facilite la vérification et la maintenance des équations qui doivent traduire le mieux possible la réalité. Si un atelier est modifié, seul ses équations sont modifiés..

- Les minerais sont regroupés sous forme de flux dont la composition et le tonnage sont calculés en fonction du mélange fait. Ce sont ces flux qui interviennent dans les équations métallurgiques.

En résumé, on a une écriture lisible des équations qui permet à chacun de pouvoir les lire, les comprendre et les corriger. Cette correction sera automatiquement prise en compte lors de l'utilisation suivante du modèle et sera traduite dans les données fournies à l'optimiseur sans nécessiter de nombreuses et savantes interventions.

Ces avantages ont leur contrepartie à savoir:

- analyser les équations écrite puis les traduire et les dériver. Ce travail est effectué par un programme qui reprend les idées développées par Krjesaj [22].

- Construire les équations donnant la composition des flux contenant les minerais.

- Réduire si possible le nombre de variables et d'équations car diviser l'usine en cellules ayant chacune ses flux d'entrées et de sortie multiplie les variables et les équations permettant de les déterminer.

Donnons quelques précisions sur cette élimination. Si une égalité linéaire s'écrit :

$$x_p - \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i - \alpha_0 = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geq 0 \quad i=0, \dots, q$$

Toutes les variables sont positives car elles représentent des flux de matière. x_p s'écrit donc dans ce cas comme une combinaison linéaire positive des x_i , $i = 0, \dots, q$. Si cette variable n'est pas bornée supérieurement, on peut alors substituer la variable x_p par la combinaison linéaire des x_i . On a ainsi réalisé une élimination formelle qui ne modifie en rien le problème mais on a une variable et une égalité linéaire en moins. Nous verrons que cette élimination formelle diminue sensiblement la taille des problèmes à optimiser donc la place et le temps nécessaire.

Les modèles présentés ci-dessous correspondent aux parties suivantes de l'usine de Moyelles-Godault :

RAFHYDRO : partie raffinage plus hydrométallurgie de la fonderie de zinc.

PLOMB : fonderie de plomb en entier
ZINC : fonderie de zinc en entier
N.G. : ensemble de l'usine

Nombre	Modèle	RAFHYDRO	PLOMB	ZINC	N.G.
de variables avant élimination			476	693	1193
d'égalités linéaires après élimination			731	1057	1610
de variables après élimination		26	93	117	258
d'égalités linéaires après élimination		92	213	420	575
d'inégalités linéaires		14	37	46	83
d'égalités non linéaires		54	94	66	160
d'inégalités non linéaires		0	2	1	3
de gradients linéaires		442	1186	6366	5786
de gradients non linéaires		955	700	637	1424

Remarque: Les nombres de gradients linéaires ou non dépend du nombre de minerais choisis: ils peuvent donc être très différents selon les modèles.

Pour donner une idée du temps nécessaire pour passer des données écrites en clair par l'utilisateur aux données et programmes utilisées par l'optimiseur il faut 40 minutes sur un HP 9000 pour le modèle N.G. Ce temps comprend la création des équations utilisant un choix de 185 minerais, l'élimination de 935 égalités linéaires et l'écriture en FORTRAN 1424 dérivées partielles.

Cet ensemble de programme a permis de passer rapidement des équations écrites par l'utilisateur aux essais d'optimisation et le libère totalement des opérations de transcription donc lui autorise facilement toutes les mises à jour qu'il veut faire.

II - LE Programme MINOS/AUGMENTED.

1°) Introduction.

MINOS/AUGMENTED a été écrit et mis au point par P.A. MURTAGH et M.A. SAUNDERS [26]. Il résoud des programmes non linéaires de grande taille du type :

$$\begin{aligned} \min f^0(x) \\ f(x) = 0 \\ x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

La méthode utilisée, est basée sur l'algorithme de ROBINSON [29] qui consiste à obtenir une solution (5.1) en résolvant une suite de problèmes linéaires qui s'écrivent :

$$\text{PL}(x^k, \lambda^k) \left\{ \begin{array}{l} \min f^0(x) - \langle \lambda^k, f(x) - f'(x^k, x) \rangle \\ f'(x^k, x) = f(x^k) + J(x^k)^T (x - x^k) = 0 \\ x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \end{array} \right.$$

avec $J(x^k)$ qui est la Jacobienne en x^k .

La suite (x^k, λ^k) converge avec une vitesse quadratique vers la solution (x^*, λ^*) de (5.1) si le point de départ (x^0, λ^0) est assez près de la solution. Comme cela n'est pas toujours le cas, Rosen [30] a proposé un algorithme en deux phases. La première consiste à résoudre le problème.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f^0(x) - 1/2\rho \langle f(x), f(x) \rangle. \\ \text{sous } x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \end{array} \right.$$

pour un ρ donné. La seconde consiste à utiliser la méthode de Robinson. L'efficacité de cette méthode est liée au choix du ρ . Si il est trop petit, la phase 1 va être courte mais on peut être encore fort loin de l'optimum donc la phase 2 risque de ne pas converger. Si il est trop grand, la phase 1 va être inutilement longue car elle ne donnera qu'une valeur approchée de la solution.

Murtagh et Saunder ont aussi choisi un algorithme en deux phases mais la première phase consiste à résoudre un problème de lagrangien augmenté :

$$\begin{array}{l} \min f^0(x) - \langle \lambda^k, f(x) - f'(x^k, x) \rangle + 1/2\rho \langle f(x) - f'(x^k, x), f(x) - f'(x^k, x) \rangle \\ \text{sous } f'(x^k, x) = f(x, k) + J(x^k)^T (x - x^k) = 0 \\ x_{\text{inf}} \leq x \leq x_{\text{sup}} \end{array}$$

La seconde phase utilise toujours l'algorithme de Robinson c'est à dire la résolution d'une suite de problèmes identiques à celui qui est ci-dessus avec $\rho = 0$.

Le problème du choix de ρ reste toujours important. Le programme commence avec un ρ donné qui peut être augmenté si on semble ne pas converger vers une solution. Dans un deuxième temps, il est mis à 0 pour profiter de la convergence quadratique de l'algorithme de Robinson.

2.3) - Le code MINOS/AUGMENTED.

MINOS/AUGMENTED, résout un problème qu'on peut écrire sous une forme standard.

$$\begin{array}{l} \min f^0(x) + c \cdot x + d \cdot y \\ \text{sous } f_1^1(x) + A_1^1 y = b_1 \quad i = 1, \dots, m_1 \\ \quad \quad \quad A_1^2 x + A_1^3 y = b_1 \quad i = m_1 + 1, \dots, m \quad (5.2) \\ x \leq \bar{x} \end{array}$$

$$| \underline{y} \ll y \ll \bar{y}$$

La variable x est appelée "variable non linéaire" car elle intervient dans les parties non linéaires de la fonction objectif et des contraintes ce qui n'est pas le cas pour y .

Si on note $L(x, y, x^k, \lambda^k, \rho)$ le lagrangien augmenté en (x^k, λ^k) :

$$L(x, y, x^k, \lambda^k, \rho) = f^0(x) + c \cdot x + d \cdot y - \langle \lambda^k, f(x) - f'(x^k, x) \rangle \\ + 1/2\rho \langle f(x) - f'(x^k, x), f(x) - f'(x^k, x) \rangle$$

On peut écrire le problème à contraintes linéaires issu du problème (5.2).

$$\begin{array}{l} \min L(x, y, x^k, \lambda^k, \rho) \\ \text{PL}(x^k) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1^1(x^k, x) + A_1^1 y = b_1 \quad i = 1, \dots, m_1 \\ A_1^2 x + A_1^3 y = b_1 \quad i = m_1 + 1, \dots, m \\ \underline{x} \ll x \ll \bar{x} \\ \underline{y} \ll y \ll \bar{y} \end{array} \right. \quad (5.3) \end{array}$$

MINOS/AUGMENTED va donc effectuer une suite d'itérations majeures qui vont consister à résoudre un problème linéaire $\text{PL}(x^k)$.

Ceci va nous donner l'algorithme suivant proposé par Murtagh et Saunders [25] :

Pas 0. $k = 0$. Choix d'un point de départ x^0 , y^0 et de λ^0 . Choix d'un paramètre de pénalisation $\rho > 0$ et d'un critère de convergence $\epsilon_c > 0$.

Pas 1. (a). Si on a x^k , y^k , λ^k et ρ , on résoud le problème à contraintes linéaires $\text{PL}(x^k)$ avec le code **MINOS**. On obtient donc x^{k+1}, y^{k+1} et π (multiplicateurs de Lagrange de $\text{PL}(x^k)$ au point x^{k+1}).

(b). On pose $\lambda^{k+1} =$ les m_1 premières composante de π .

- Pas 2.**
- (a) Test de convergence. Si on a l'optimum : fin.
 - (b) Si $\|f(x^{k+1}) + A^1 y^{k+1} - b\| / \langle 1 + \|x^{k+1}, y^{k+1}\| \rangle \ll \varepsilon_c$ et $\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| / \langle 1 + \|\lambda^{k+1}\| \rangle \ll \varepsilon_c$ alors $\rho = 0$ (phase 2).
Si $\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| > M$ alors on augmente ρ .
 - (c) Relinéarisation des contraintes en x^{k+1} .
 - (d) $k = k+1$, et aller au pas 1.

Au pas 2.b, on modifie la valeur de ρ soit en l'annulant assez près de la solution donc dans le rayon de convergence de l'algorithme de Robinson (théorème 1 et 2 de [25]) soit en l'augmentant pour obtenir la convergence de l'algorithme.

On remarquera que le calcul de λ^{k+1} est assez simple puisqu'il reprend la valeur de $\bar{\lambda}$ qui est le multiplicateur problème linéaire qu'on vient de résoudre.

Le pas 1.a est résolu en utilisant MINOS qui est un code de résolution de problème à contraintes linéaires dont nous allons dire quelques mots.

3^e) - Le code MINOS.

MINOS est adapté à la résolution de problème de grande taille à contraintes linéaires et fonction économique non linéaire. Soit FL un tel problème :

$$\begin{array}{l}
 \text{FL} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \min f^0(x) = cx + dy \\
 \text{sous } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\
 x_{\text{inf}} \ll x \ll x_{\text{sup}} \\
 y_{\text{inf}} \ll y \ll y_{\text{sup}}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

MINOS est basée sur la notion de contraintes actives. On partitionne donc A sous la forme :

$$A = [B|S|N] \quad \text{et} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_S \\ x_N \end{pmatrix}$$

les colonnes de N étant celles hors base c'est à dire telle que $x_N = x_{\text{inf}}$ ou x_{sup} . La matrice B est carrée et régulière. Elle est faite des colonnes dites de base.

Les colonnes de S sont dites superbasiq. Si on note :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} B & S & N \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

on a :

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x_B \\ x_S \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b_N \end{pmatrix}$$

avec $b_N = x_{\text{sup}}$ ou x_{inf} .

Une fois fixé ces ensembles, on peut trouver une direction réalisable d en posant :

$$Z^T G Z d_s = -Z^T g \quad \text{et} \quad r = E d_s$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} -B^{-1}S \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

g le gradient de la fonction objectif et G sont Hessien.

Si le gradient réduit $Z^T g$ est non nul et si le Hessien réduit $Z^T G Z$ est défini positif alors cette direction d est une direction de descente qui diminue la fonction objectif.

On peut calculer π , σ les multiplicateurs de Lagrange pour cet ensemble de contraintes actives :

$$\begin{bmatrix} B^T & 0 \\ S^T & 0 \\ N^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_B \\ g_S \\ g_N \end{bmatrix}$$

La valeur de σ nous indique si il est nécessaire de relâcher des variables de leur base. Si c'est le cas alors des colonnes passent de N dans S et on continue l'optimisation avec la nouvelle partition. Dans le cas contraire, on a l'optimum du problème P.L.

La détermination de π nous donnera la valeur de λ dans MINOS/AUGMENTED.

Une programmation adaptée de cet algorithme qui utilise la factorisation des matrices creuses permet à l'ensemble MINOS, MINOS/AUGMENTED d'être un code performant comme l'indiquent les résultats obtenus. Cependant le choix du point de départ et du domaine associé est important pour obtenir l'optimum global.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Armijo L.**
 "Minimization of function having Lipschitz continuous first partial derivatives".
 Pacific Journal of Mathematics 16 (1966) p. 1-3.
- [2] **Berge C.**
 "Espaces Topologiques et fonctions multivoques".
 (1966).
- [3] **Caroll C.W.**
 "The created reponse surface technique for optimizing nonlinear restrained systems".
 Operation Res. J. 9 (1961) p. 169-184.
- [4] **Courant R.**
 "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration".
 Bull. of American Mathematic Society 49 (1943) p. 1-23.
- [5] **Curtis R. R. et Reid J.K.**
 Rapport AERE R. 6844 (1971).
- [6] **Curtis R.R. et Reid J.F.**
 "The solution of large sparse unsymmetric systems of linear equations".
 J. of Ins. of Mathematics and its Appl. 8 (1971) p. 344-354.
- [7] **Di Pillo G. et Grippo L.**
 "A new class of Augmented Lagrangians in nonlinear programming".
 SIAM J. Control 17 (1979) p. 618-626.
- [8] **Di Pillo G., Grippo L. et Lampariello F.**
 "A class of algorithms for the solution of optimization problems with inequalities".
 CNR Inst di Anal. Dei Sistemi. ed Inf. Report R18 (1981).
- [9] **Fletcher R.**
 "A class of methods for nonlinear programming with termination and convergence properties".
 Integer and Nonlinear Programming (1970) Ed J. Abadie North Holland.
- [10] **Fletcher R.**
 "An ideal penalty function for constrained optimization".

Journal Inst. Math. Applications 7 (1975) p. 76-91.

- [11] **Fletcher R.**
 "Practical Methods of Optimization".
 Vol 2, Constrained Optimization (1981), John Wiley, Chichester.
- [12] **Fletcher R.**
 "Penalty Functions".
 Mathematical Programming. The State of the Art. Bonn (1982) 87-114.
- [13] **Frisch K.R.**
 "The logarithmic potential method of convex programming".
 Mem. Univ. Inst. of Economics, Oslo Mai 1955.
- [14] **Garcia-Palomares D.M. et Mangasarian O.L.**
 "Superlinearly convergent quasi-Newton algorithms for nonlinearly
 constrained optimization problems".
 Mathematical Programming 11 (1975) p. 1-13.
- [15] **Gastinel N.**
 Analyse Numérique linéaire.
 1966.
- [16] **Goldfarb D.**
 "Matrix factorization in optimization of nonlinear function subject
 to linear constraints".
 Mathematical Programming 10 (1975) p. 1-31.
- [17] **Goldfarb D. et Idani A.**
 "A numerical stable dual method for solving strictly convex
 Quadratic Programs".
 Mathematical Programming 27 (1983) p. 1-33.
- [18] **Han S.P.**
 "A globally convergent method for nonlinear programming".
 J. of Optimization Theory and Applications 22 (1977) p. 297-309.
- [19] **Han S.P. et Mangasarian O.L.**
 "Exact penalty functions in nonlinear programming".
 Mathematical Programming 17 (1979) p. 251-269.
- [20] **Han S.P. et Mangasarian O.L.**
 "A dual differentiable exact penalty function".
 Mathematical Programming 25 (1983) p. 293-306.
- [21] **Hestenes M.R.**

"Multiplier and gradient methods".
 J. Opt. Theo et Applic. 4 (1969) p. 303-320.

[22] **Krjesaj M.**

"Modelisation et résolution de problèmes d'optimisation non linéaire de grande taille".
 Thèse 3° cycle, Université de Lille I 1985.

[23] **Loostma F.A.**

"A survey of Methods for solving constrained minimization problems via unconstrained minimization".
 Numerical Methods for Nonlinear Optimization. Ed. F.A. Loostma, Academic Press (1972).

[24] **McCormick G.P.**

"Second order conditions for constrained minima".
 SIAM Journal on Applied Mathematics 15 (1967) p. 641-652.

[25] **Mangasarian O.L. et Fromovitz S.**

"the Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality constraints".
 Journal of Mathematical Analysis and Applications 12 (1967) p. 34-47.

[26] **Murtagh B.A. et Saunders M.A.**

"A projected Lagrangian Algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints".
 Stanford University California, Report SOL 80-IR (1981).

[27] **Powell M.J.D.**

"A method for nonlinear constraints in minimization problems".
 Optimization (1969) ed. R. Fletcher, Academic Press London.

[28] **Powell M.J.D.**

"Algorithms for nonlinear constraints that use Lagrangian functions".
 Mathematical Programming 14 (1977) p. 224-246.

[29] **Powell M.J.D.**

"Variable Metric Methods for Constrained Optimization".
 Mathematical Programming. The state of the Art. Bonn 1982 p. 288-311.

[29'] **Robinson S.M.**

"A quadratically convergent algorithm for general nonlinear programming problems".
 Mathematical Programming 3 (1972) p. 145-156

[30] **Rockafellar R.T.**

"A dual Approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization".
Mathematical Programming 5 (1973) p. 354-373.

[30'] **Rosen J.B.**

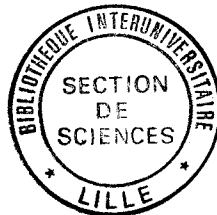
"Two-phase algorithm for nonlinear constraints problems"
Nonlinear Programming 3 (1976), O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson p. 97-124

[31] **Roux J.**

"De la méthode de Newton à la méthode BFGS : théorie et pratique".
Bulletin des Etudes et Recherche EDF 1984 (2) et 1985 (2).

[32] **Wilson R.B.**

"A simplicial method for convex programming".
Ph. D. Thesis Harvard University, Cambridge, Mass. (1963).



RESUME.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes.

Dans un premier temps nous résumons les principales méthodes exposées dans la littérature. L'idée principale qui se dégage est de transformer ce problème avec contraintes en un problème sans contraintes mais en intégrant celles-ci dans la fonction économique. Ce sont les méthodes de pénalisation. Nous nous intéresseront principalement à un type particulier de fonctions :

les fonctions de pénalisation exacte non différentiables. Nous donnerons un ensemble de résultats et une technique permettant de trouver une solution : la Programmation Quadratique Séquentielle Métrique Variable.

Dans un deuxième temps, nous étudierons deux algorithmes : le premier résout un problème non linéaire avec contraintes en utilisant la solution d'une suite de problèmes quadratiques à contraintes linéaires. Cet algorithme fournit un point stationnaire sous des hypothèses classiques de régularité du domaine. Le deuxième algorithme résout des problèmes quadratiques en utilisant une approche duale.

Enfin dans une troisième partie, nous donnerons une réponse aux différents problèmes qui se posent lors de la résolution de problèmes de grande taille. Nous donnerons pour terminer des résultats qui sont issus de la modélisation de l'usine de Noyelle Godault de la société Penarroya.

Mots clés.

Optimisation non linéaire.
Fonctions de pénalisation.
Métrique variable.
Problème quadratique.
Méthode duale.
Problèmes de grande taille.
Élimination formelle.

