N° d'ordre 40

THESE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PAR

JEAN D'ALMEIDA

COURBES DE L'ESPACE PROJECTIF :
SERIES LINEAIRES INCOMPLETES ET MULTISECANTES.

Membres du Jury : Président : L. GRUSON, Professeur à LILLE I
Rapporteurs : A. HIRSCHOWITZ, Professeur à NICE
C. PESKINE, Professeur à OSLO

Soutenue le 3 juin 1986

Courbes de l'espace projectif:

Séries linéaires incomplètes et multisécantes

§ 0 . Introduction

Soit X une courbe de P^3 (espace projectif de dimension 3 sur $\mathbb{C}$) lisse connexe non plane de degré d et de genre g;on note J_X l'idéal de $\mathcal{O}_{P^3}$ définissant X et $H^i(J_X(n))$ le ième $\mathbb{C}$-espace vectoriel de de cohomologie ,de dimension $h^i(J_X(n))$. On a $h^1(J_X(n)) = 0$ pour $n \geqslant d-2$, $h^2(J_X(n)) = 0$ pour $n > d/2 - 2$ ([2]) .Le nombre de surfaces de degré n linéairement indépendantes contenant X est égal à $h^0(J_X(n))$ .En géométrie classique on définit la série linéaire "découpée"sur X par les surfaces de degré n;cette série est cmoplète si et seulement si $H^1(J_X(n))$ est nul.Pour n voisin de la borne de Castelnuovo il semble que la condition $h^1(J_X(n))>0$ est équivalente à l'existence d'une droite (n+2)-sécante à X .Ceci est démontré pour n=d-3 dans [4] . Le résultat principal de ce travail est le suivant:

Théorème 0.1 : Soit $X \subset P^3$ une courbe lisse non plane de degré$\geqslant 6$, de genre g .On suppose que $(d,g) \notin \{(7,0) ; (7,1) ; (8,0)\}$. Alors $H^1(J_X(d-4))$ est non nul si et seulement si X a une (d-2)-sécante .

On pose $M = \Omega^1_P(1) \otimes \mathcal{O}_X$. Si $h^1(J_X(n))>0$ pour un entier n ,on a $h^1(\Lambda^2 M \otimes A)>0$ pour tout $\mathcal{O}_X$ -module inversible A de degré n+g ([4] Prop 1.2) .Supposons $n > 2/3\ d - 1$; on montre que si $h^1(J_X(n))>0$ et s'il n'existe pas de droite au moins (n+2)-sécante alors il existe un sous-fibré de rang deux de M de degré

supérieur à $2(n+1-d)$ dont tout quotient de rang 1 a un degré $>(n+1-d)$
L'interprétation géométrique est la suivante : X a une $(n+2)$-sécante ou X est tracée sur une surface réglée de degré $< 2(d-n-1)$.
La normalisée $\tilde{S}$ de S est lisse et le conducteur de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ dans $\mathcal{O}_S$ est l'idéal d'une courbe Γ (lieu singulier de S).
Pour que $h^1(J_X(n))$ soit nul ilsuffit que $h^1(L(s-n-4)) = 0$ (où s est le degré de S) et que $h^1(J_X \otimes \mathcal{O}_\Gamma(n)) = 0$. Pour $n = d-4$, cette méthode s'applique pour $d > 9$.
On se ramène à l'étude des lieux singuliers des surfaces réglées quartiques rationnelles ou quintiques elliptiques,"éventuellement dégénérées"
Soit S une surface réglée quartique rationnelle de $\mathbb{P}^3$ (de duale semi-stable) : on la regarde comme donnée par un fibré quotient (de rang deux et de degré quatre) du fibré trivial de rang quatre sur $\mathbb{P}^1$. On étend cette donnée à $\mathbb{P}^2$ par l'intermédiaire du plongement de Véronèse de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$
On obtient ainsi une congruence de droites de $\mathbb{P}^3$, de bidegré $(1,1)$ où $1 \leq 3$, contenant les génératrices de S.
On peut classer ces congruences et la détermination du lieu singulier de S en résulte.
Soit maintenant S une surface réglée quintique elliptique de duale stable; on la regarde comme donnée par un plongement arithmétiquement normal de degré 5 d'une courbe elliptique C dans la grassmannienne G des droites de $\mathbb{P}^3$ (identifiée à une hyperquadrique de $\mathbb{P}^5$)
Soit H l'hyperplan de $\mathbb{P}^5$ engendré par C. On étudie la transformation de Semple attachée à C . C'est une transformation de Cremona entre H et un espace projectif H' de dimension quatre dans laquelle les hyperplans de H' correspondant aux quadriques de H contenant C . De façon précise on démontre qu'il existe un isomorphisme

entre l'éclatement de C dans H et l'éclatement d'une surface réglée quintique T de H',isomorphe à la variété $Div_2(C)$ des diviseurs de degré deux sur C.

A la quadrique $G \cap H$ de H est associé un hyperplan de H',dont l'intersection avec T s'identifie au lieu singulier de S.

Ce lieu singulier est donc une quintique elliptique lisse isomorphe (non canoniquement)à C ou la réunion d'une droite et d'une biquadratique,selon que H n'est pas ,ou est tangent à G.Il reste à étudier les courbes de degré inférieur à neuf.

Ceci se fait en utilisant une variante plus simple de la méthode générale.Ceci permet de traiter les cas où $d > 6$ et $g \geqslant 2$.

On identifie enfin les exceptions signalées dans le théorème 0.1 et on montre que les courbes elliptiques de degré huit ne sont pas des exceptions.

Je tiens à remercier L.Gruson qui m'a suggéré ce travail et qui,par ses multiples conseils ,m'a permis de le réaliser.

§1. La méthode

Dans tout le texte on désigne par X une courbe lisse irréductible non plane de $\mathbb{P}^3$, de degré d et de genre g. On notera J_X l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ définissant X. Soient $\tilde{X}$ la normalisée de X et $p:X \to \mathbb{P}^3$ l'application naturelle. Posons $M = p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1)$

Proposition 1.1: Soit X une courbe ayant les propriétés ci-dessus. Soit n un entier $n > \frac{2}{3}d-1$ ($\geqslant$ si $g \leq 2$) tel que $h^1(J_X(n)) > 0$. On suppose qu'il n'existe pas de droite au moins (n+2)-sécante à X. Il existe alors un sous-fibré N de rang 2 de M de degré $> 2(n+1-d)$ dont tout fibré quotient de rang 1 est de degré $> (n+1-d)$.

Démonstration: Montrons que M n'est pas semi-stable: d'après [4] il suffit de voir que $h^1(\Lambda^2 M \otimes A)=0$ pour au moins un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module inversible A de degré (n+g) si par l'absurde on suppose que M est semi-stable. Comme $\chi(\Lambda^2 M \otimes A) = 3(n+1)-2d$ ceci résulte de [8] 1.6.3 et 1.7.4, compte tenu des hypothèses faites sur n. Supposons qu'il existe une suite exacte $0 \to B \to M \to Q \to 0$ telle que Q soit un fibré de rang 2 et que $h^1(B \otimes Q \otimes A)=0$ pour un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module inversible A, de degré (n+g), assez général. Posons $b=\deg(B^\vee)$. On sait que $h^1(\Lambda^2 M \otimes A) = 0$ ([4] prop 1.2) La suite exacte $0 \to B \otimes Q \to \Lambda^2 M \to \Lambda^2 Q \to 0$ induit un isomorphisme $H^1(\Lambda^2 M \otimes A) \xrightarrow{i} H^1(\Lambda^2 Q \otimes A)$ donc $\chi(\Lambda^2 Q \otimes A) = -d+b+n+1 < 0$.

Montrons (en suivant [4] p.502 "case 1") qu'il existe une droite (d-b)-sécante à X. Notons $p:\tilde{X} \to \mathbb{P}^3$ le morphisme d'image X, $\Gamma \subset \tilde{X} \times \mathbb{P}^3$ le graphe de p, $\pi:\tilde{X} \times \mathbb{P}^3 \to \tilde{X}$, $f:\tilde{X} \times \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ les projections. On a la suite exacte ([4] p.495) :

$$0 \to \pi^*(\Lambda^3 M) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)) \to \pi^*(\Lambda^2 M) \otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)) \to \pi^*(M) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathcal{O}_{\tilde{X} \times \mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_\Gamma \to 0$$

. Si on prend l'image par $R^i f_*$ on obtient pour i=0,1 les complexes:

$$C_i: 0 \to H^i(A(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to H^i(\Lambda^2 M \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to H^i(M \otimes A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to H^i(A) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

Notons que $h^1(M \otimes A)=0$ (car $h^1(B \otimes Q \otimes A)=0$) implique $h^1(M \otimes A) = 0$

puisque $B^{\vee}$ est engendré par ses sections, et $h^1(B\otimes A)=0$ car $\chi(B\otimes A) = n+1-b \geqslant 0$ et A assez général. Par ailleurs l'aboutissement de la suite spectrale d'hyperimage directe par f d'une résolution de $\pi^*A \otimes \mathcal{O}_{\Gamma}$ est $R^i p_* A$ (i=0,1) et l'on a $R^1 p_* A=0$ puisque p est fini. En notant $u: H^0(M\otimes A)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\to H^0(A)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ la flèche de droite de C_0, on a une suite exacte:

$$H^0(A(-1))\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\to H^0(\Lambda^2 M\otimes A)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\to \operatorname{coker} u \to p_*A \to 0$$

D'autre part le conoyau de la flèche composée:

$$H^1(A(-1))\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\longrightarrow H^1(\Lambda^2 M\otimes A)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\xrightarrow{\ i\ } H^1(\Lambda^2 Q\otimes A)\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$$

est $K=R^1 f_*((\pi^*(\Lambda^2 Q\otimes A)\otimes \mathcal{O}_Y)$ où Y est l'hypersurface de $\tilde{X}\times \mathbb{P}^3$ ayant pour équation la section de $\pi^*(B^{\vee})\otimes f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ déduite de l'inclusion $B\subset M$. On a $Y=\mathrm{Proj}_{\tilde{X}}\, E$ où E est le fibré de rang trois sur X, conoyau de la flèche $B\to V\otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}} = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))\otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Notons l'interprétation suivante de la trace sur Y de la fibre $f^{-1}(x)$ (identifiée à $\tilde{X}$) d'un point x de $\mathbb{P}^3$: si $q: \tilde{X}\to \mathbb{P}^3$ est le morphisme de degré b défini par la transposée $V^{\vee}\otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}\to B^{\vee}$ de l'inclusion ci-dessus, $f^{-1}(x)\cap Y$ est l'image réciproque par q du plan de $\check{\mathbb{P}}_3$ défini par x. Ainsi supp(K) est la variété linéaire de $\check{\mathbb{P}}_3$ engendrée par l'image de q; comme $b>0$, on a $\dim(L)\leqslant 1$.

Si $\dim(L)\leqslant 0$ la suite exacte $0\to K\to \operatorname{coker} u \to p_*A \to 0$ montre que $J_X/\mathrm{ann}(\operatorname{coker} u)$ est de longueur finie; comme $\mathrm{ann}(\operatorname{coker} u)$ est (n+1)-régulier on a $h^1(J_X(n))=0$ contrairement à l'hypothèse.

Si $\dim(L)=1$, l'image de q est la droite orthogonale de L et q est de degré b; L est donc une (d-b)-sécante à X.

Si la filtration de Harder-Narasimhan de M est $0\to B\to M\to Q\to 0$ avec $rg(B)=1$ et si $h^1(B\otimes Q\otimes A)>0$ pour tout A de degré (n+g), on a $\chi(B\otimes Q\otimes A)=-d+\deg(B)+2(n+1)<0$. Ceci est impossible car $\deg(B)>-\frac{d}{3}$; on est dans le cas ci-dessus.

Si la filtration de Harder-Narasimhan de M est $0\to N\to M\to B\to 0$ ($rgB=1$)

on a $h^1(\Lambda^2 N\otimes A)=0$ (car $\deg N > \frac{-2d}{3} \geqslant -n-1$) donc $h^1(B\otimes N\otimes A) > 0$ et alors $\chi(B\otimes N\otimes A) = -\deg N+2(n+1-d) < 0$, d'où la proposition dans ce cas (puisque N est semi-stable). Enfin, si les quotients successifs de la filtration de Harder-Narasimhan de M sont trois modules de rang un (B_i) $i=1,2,3$ de degrés respectifs $b_1 > b_2 > b_3$ et si l'on n'est pas dans le cas ci-dessus on a $h^1(B_1\otimes B_3\otimes A) > 0$ pour tout A de degré $(n+g)$ donc $\chi(B_1\otimes B_3\otimes A) = -b_2 \cancel{-d+n}+1 < 0$ d'où la proposition. C.Q.F.D

Application:

On prend $n=d-4$. Les hypothèses sont $h^1(J_X(d-4))>0$, $d>9$ ($\geqslant 9$ si $g\leq 2$)
Il faut montrer qu'il existe une droite $(d-2)$-sécante à X. Si ce n'est pas le cas, il existe d'après la proposition 1.1, un fibré de rang deux N de degré $\geqslant -5$ dont tout quotient de rang 1 est de degré $\geqslant -2$.
On pose $V=H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, $E=V\otimes\mathcal{O}_{\tilde{X}}/N$, $S=\mathrm{Proj}_{\tilde{X}}(E)$; on note $\pi:\tilde{S}\longrightarrow\tilde{X}$ la projection et $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$ le $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$-module inversible tautologique quotient de π^*E. Le composé $V\otimes\mathcal{O}_{\tilde{S}}\longrightarrow\pi^*E\longrightarrow\mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$ définit un morphisme $q:\tilde{S}\longrightarrow\mathbb{P}^3$ de degré ≤ 5; l'application $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-linéaire $E\longrightarrow\mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$ définit une section non nulle du $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$-module inversible $(\Lambda^2E^{\vee}(1))\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\mathcal{O}_{\tilde{S}}(1)$ dont la courbe des zéros est isomorphe à $\tilde{X}$ par π; la restriction de q à cette courbe est isomorphe par π au morphisme $p:\tilde{X}\longrightarrow\mathbb{P}^3$. Autrement dit la courbe X est tracée sur la surface réglée S de $\mathbb{P}^3$, image de $\tilde{S}$ par q. La donnée de q est équivalente à celle d'un morphisme $\bar{q}$ de $\tilde{X}$ dans la grassmannienne G des droites de $\mathbb{P}^3$: pour tout point x de $\tilde{X}$, $\bar{q}(x)$ est le point de G attaché à la droite $\pi^{-1}(x)\subset\tilde{S}$ plongée par q dans $\mathbb{P}^3$.
Le morphisme composé de $\bar{q}$ et de l'inclusion de G dans $\mathbb{P}^5$ est défini par l'application $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-linéaire naturelle de $\Lambda^2V\otimes\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ sur Λ^2E; il est de degré (deg E).

Supposons que $\bar{q}$ ne soit pas une application birationnelle de X sur son image; celle-ci est alors une conique (elle ne peut être une droite car X n'est pas plane).

Si le plan de cette conique est contenu dans G, S est un cône du second degré dont une génératrice générale coupe X en deux points ;

on vérifie alors que X est ,selon la parité de d,intersection complète ou liée à une droite sur S,donc arithmétiquement Cohen-Macaulay Ceci est évidemment exclu;si le plan de $\bar{q}(\tilde{X})$ n'est pas contenu dans G S est une quadrique lisse dont une famille de génératrices (correspon--dant à la conique $\bar{q}(\tilde{X})$)est formée de bisécantes à X(puisque $\bar{q}:\tilde{X} \longrightarrow q(\tilde{X})$ est un revètement ramifié double);l'autre famille est donc formée de $(d-2)$-sécantes à X.On suppose maintenant que $\bar{q}$ est une application birationnelle de X sur son image .Si $\bar{q}(\tilde{X})$ est plane,S est un cône de degré≤ 5 ou une quadrique selon que le plan de $\bar{q}(\tilde{X})$ est contenu dans G ou pas.Dans le premier cas X(supposée lisse et birationnelle à $\bar{q}(\tilde{X})$) est de degré≤ 6,ce qui est exclu;dans le second cas une famille de génératrices de la quadrique est formée de $(d-1)$-sécantes à X.
Si $\bar{q}(\tilde{X})$ n'est plane ,on a $g\leq 2$(puisque le degré de $\bar{q}(\tilde{X})\leq 5$).On vérifie qu'un fibré de rang 2 et de degré 5 ayant au moins quatre sections indépendantes sur une courbe de genre 2 est instable.
Ceci permet d'éliminer le cas où X est de genre 2:en effet si $N^{\vee}$ est de degré 5,Il est stable.Il faut maintenant examiner les cas $g=0$ et $g=1$.

Supposons que $\tilde{X}$ est rationnelle;on a $\deg(E)\leq 4$ (car $N^{\vee}$ n'est pas stable; si $\deg(E)< 4$ on vérifie facilement que X a une $d-1$ sécante On peut supposer que $\deg(E)=4$.On a alors $N=\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(-2)$après identification de $\tilde{X}$ à $\mathbb{P}^1$.Ce sera l'objet du paragraphe 2.
Supposons $\tilde{X}$ elliptique;on a $\deg(E)\geq 4$,car $\bar{q}(\tilde{X})$ n'est pas plane.
Il faut donc examiner les cas suivants:$\deg(E)=4$ et $N^{\vee}$ semi-stable; $\deg(E)=5$ et $N^{\vee}$ stable.Ce sera l'objet du paragraphe 3

<u>Proposition 1.2:</u> Soient S une surface de $\mathbb{P}^3$ dont la normalisée $\tilde{S}$ est lisse, J_{Γ} l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$,image réciproque du conducteur $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\tilde{S}},\mathcal{O}_S)$, la courbe (non nécéssairement réduite) de $\mathbb{P}^3$ d'idéal J_{Γ}, $\tilde{X}$ une courbe tracée sur $\tilde{S}$,section d'un $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ module inversible L.On suppose que l'image X de $\tilde{X}$ dans $\mathbb{P}^3$ n'a pas de composante commune avec Γ .Notons J_X l'idéal de X dans $\mathbb{P}^3$
Pour que $h^1(J_X(n)=0)$ il suffit que $h^1(L(s-n-4))=0$(où s est le degré

de S et $h^1(J_X(n)\otimes \mathcal{O}_\Gamma)=0$

Démonstration: On a $J_\Gamma=\omega_{\tilde S}\otimes\omega_S^\vee$ où $\omega_{\tilde S}$ et ω_S désignent les faisceaux canoniques. La proposition résulte alors de la suite exacte

$0\to J_\Gamma\otimes L^\vee\to J_X\longrightarrow J_X\otimes\mathcal{O}_\Gamma\longrightarrow 0$ en tenant compte des isomorphismes.

$\omega_S=\mathcal{O}_S(s-4)$ et $H^1(L(s-n-4))=(H^1(L^\vee\otimes\omega_{\tilde S}(n+4-s))^\vee$. C.Q.F.D

La proposition 1.2 sera utilisée en supposant que la surface est réglée. On utilisera les notations suivantes: soient $\tilde X$ une courbe lisse, E un $\mathcal{O}_{\tilde X}$-module localement libre de rang 2 et de degré s, $\tilde S=\mathrm{Proj}_{\tilde X}(E)$, $\pi:\tilde S\longrightarrow\tilde X$ la projection, $\mathcal{O}_{\tilde S}(1)$ le quotient inversible de π^*E. L'application $(A,k)\longrightarrow A\otimes\mathcal{O}_{\tilde S}(k)$ identifie $\mathrm{Pic}(\tilde X)\oplus\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Pic}(\tilde S)$, donc $\mathbb{Z}^2$ et le quotient $\mathrm{Num}(\tilde S)$ de $\mathrm{Pic}(\tilde S)$ par l'équivalence numérique. La matrice de la forme bilinéaire d'intersection est $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & s\end{pmatrix}$, le $\mathcal{O}_{\tilde S}$-module canonique $\omega_{\tilde S}$ est isomorphe à $(\omega_{\tilde X}\otimes\Lambda^2E)\otimes\mathcal{O}_{\tilde S}(-2)$ sa classe dans $\mathrm{Num}(\tilde S)$ est $\begin{pmatrix}2g-2+s\\ -2\end{pmatrix}$.

Il faut maintenant voir comment la proposition 1.2 se traduit dans ce contexte. On s'intéresse à l'isomorphisme:

$H^1(L(s-n-4))\simeq(H(L^\vee\otimes\omega_{\tilde S}(n+4-s)))^\vee$. La suite spectrale $H^pR^q\pi_*F\longrightarrow H^nF$ dégénère ici (du fait que $\tilde X$ et les fibres de π sont de dimension 1) en une suite exacte:

$0\to H^0(R^1\pi_*(L(s-n-4))\longrightarrow H^1(L(s-n-4))\to H^1(\pi_*(L(s-n-4))\longrightarrow 0$

Supposons que $L=A\otimes\mathcal{O}_S(1)$. Le terme de gauche est égal à $H^0(A\otimes(\Lambda^2E)^\vee\otimes\mathrm{Sym}_{n+1-s}(E^\vee))$ d'après [6] III ex 8.4. Le terme de droite est nul pour $n\geqslant s-2$.

Le corollaire suivant est la traduction de la proposition 1.2 dans le cas où S est réglée.

<u>Corollaire 1.2.1:</u> Soit X une courbe non plane de degré d de $\mathbb{P}^3$, de normalisée $\tilde X$. On suppose que les hypothèses de la proposition 1.2 sont satisfaites. On suppose que $\tilde S=\mathrm{Proj}_{\tilde X}(E)$, où E est localement libre

de rang 2 et de degré s . On suppose enfin que $h^1(J_X(d-4)) > 0$, $d > 9$ ($\geqslant 9$ si $g \leq 2$). Alors on a $h^0(((\Lambda^2 E)^{\otimes 2}) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1) \otimes \mathrm{Sym}_{d-3-s}(E^v)) > 0$ ou $h^1(J_X \otimes \mathcal{O}_\Gamma(d-4)) > 0$

Démonstration : Il suffit de prendre $A = \Lambda^2 E^v \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$. On a évidemment $d-4 \geqslant s-2$ C.Q.F.D.

On devra donc s'interesser à l'intersection de X et de Γ. Sur $\tilde{S}$ on peut "calculer" le nombre d'intersection de Γ et de X, i-e le degré du schéma (de dimension zéro) d'idéal $J_X + J_\Gamma$

Proposition 1.3:

Soient S une surface de $\mathbb{P}^3$ dont la normalisée $\tilde{S}$ est lisse, J_Γ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ image réciproque du "conducteur" $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\tilde{S}}, \mathcal{O}_S) \subset \mathcal{O}_S$, la courbe (non nécéssairement réduite) de $\mathbb{P}^3$ d'idéal J_Γ, $\tilde{X}$ une courbe tracée sur $\tilde{S}$, section d'un $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$-module inversible L.

On suppose que l'image X de $\tilde{X}$ dans $\mathbb{P}^3$ n'a pas de composante commune avec Γ . Alors le nombre d'intersection des diviseurs associés à $\tilde{X}$ et à l'image réciproque de Γ sur $\tilde{S}$ est égal au degré du schéma (de dimension 0) d'idéal $J_X + J_\Gamma$

Démonstration:

Soient R l'anneau de S, $\bar{R}$ l'anneau de $\tilde{S}$, I le conducteur de $\bar{R}$ dans R et f une équation de X dans S. La courbe X étant lisse on a:

$$\frac{R}{R \cap fR} = \frac{\bar{R}}{f\bar{R}} \qquad \text{Il en résulte} \qquad \frac{R}{(I + (R \cap f\bar{R}))} = \frac{\bar{R}}{(I + f\bar{R})}$$

On a donc : $$\mathrm{long}\ \frac{R}{(I + (R \cap f\bar{R}))} = \mathrm{long}\ \frac{\bar{R}}{I + f\bar{R}}$$

§2. Courbes rationnelles

Soit X une courbe non plane de $\mathbb{P}^3$, lisse rationnelle de degré d, image d'un morphisme p: $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ (isomorphisme de $\mathbb{P}^1$ sur X).

Si $h1(J_X(d-4)) > 0$ alors, ou bien $M = p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1)$ admet un sous-fibré N de rang 2 isomorphe à $\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(-2)$. On pose $E = \dfrac{V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}{N}$ où $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$

Comme S n'est pas un cône (X lisse) on a $E = \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(2)$ ou $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$

Appliquons le corollaire 1.2.1. , on a $((\Lambda^2 E)^{\otimes 2})^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-8)$ $((n+1-s) = d-7)$. Par ailleurs $H^0(\mathrm{Sym}_{d-7}(E)^{\vee})(d-8)) = 0$ car la décomposition de $\mathrm{Sym}_{d-7}(E)^{\vee}$ en somme directe de modules inversibles ne fait intervenir que des modules de degré $\leq -(d-7)$. On voit donc que $H^1(J_X \otimes \mathcal{O}_{\Gamma}(d-4)) \neq 0$ où Γ est le lieu singulier de S .

Il s'agit de montrer que ceci implique que l'une des composantes de Γ est une droite (d-2)-sécante à X. On devra donc procéder à la description du singulier de S et étudier son intersection avec X.

La donnée de l'inclusion $N \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ est équivalente (après choix d'un isomorphisme $N \cong \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(-2)$ et d'une base de V) à celle d'une matrice $(q_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq 3 \\ j=0,1}}$ où $q_{ij} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$.

Identifions $\mathbb{P}^2$ et $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)))$; (ceci revient à plonger $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ par le morphisme de Véronèse.)

Notons h_{ij} l'image de q_{ij} dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ identifié à $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$

Le sous-schéma de $\mathbb{P}^2$ défini par les 2-mineurs de la matrice (h_{ij}) est de dimension $\leq$ zéro : en effet il ne rencontre pas l'image C du plongement de Véronèse v: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ (car N est un sous-fibré de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$). Considérons le complexe d'Eagon-Northcott

$$0 \to \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^2}(-3) \to \mathcal{O}^4_{\mathbb{P}^2}(-2) \to \mathcal{O}^4_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^2}(1) \to 0$$

(construit sur la matrice (h_{ij}); son homologie est de support fini.

Notons F, R, R' le conoyau, l'image, le noyau de la flèche de droite .

Par décalage, on voit que $H^1(R) \simeq H^2(R') = 0$; comme les lignes de (h_{ij}) sont indépendantes (sur le corps de base $\mathbb{C}$, car S n'est pas un cone), on a $h^0(F) \leq 2$, donc F est de longueur ≤ 2.

On distingue les cas suivants:

(a) F=0

(b) F=k(x) $x \in \mathbb{P}^2$

$F=k(x_1)\oplus k(x_2) \qquad x_1 \neq x_2$

$F=\mathcal{O}_x/(t,u^2)$ où (t,u) est un système de générateurs de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$.

Parmi les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules de longueur 2 figure aussi $k(x)\oplus k(x)$ où x est un point de $\mathbb{P}^2$; mais ce cas ne peut se présenter ici: il correspond au cas où toutes les droites (h_{ij}) passent par x; dans ce cas l'inclusion $N \hookrightarrow V\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ est invariante par l'involution de C des couples de points alignés avec x de sorte que S est une quadrique double.

Etude du cas (a):

Ce cas est (abstraction faite de la position de C dans $\mathbb{P}^2$) uniquement déterminé à automorphisme près de $\mathbb{P}^2$, plus précisément:

Proposition 2.1

Soit $(h_{ij})_{\substack{0\le i\le 3\\ j=0,1}}$ une matrice à coefficients dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ dont les mineurs maximaux sont sans zéro commun dans $\mathbb{P}^2$. Soit E le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module localement libre de rang 2, conoyau de l'application linéaire $u: \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathcal{O}^4_{\mathbb{P}^2}$ définie par cette matrice. Notons $\pi: P=\mathrm{Proj}(E) \to \mathbb{P}^2$ la projection et $\mathcal{O}_P(1)$ le quotient inversible tautologique de π^*E. Le composé $\mathcal{O}^4_P \to \pi^*E \to \mathcal{O}_P(1)$ définit un morphisme $q: P \to \mathbb{P}^3$ qui identifie P à l'éclatement d'une cubique gauche Y de $\mathbb{P}^3$. Cette cubique gauche se décrit comme suit: si l'on note (T_0,T_1,T_2) les coordonnées de $\mathbb{P}^2$ et si l'on pose $h_{ij}=\sum_0^2 h_{ijk}T_k$ et $H_{jk}=\sum_0^3 h_{ijk}X_i$, Y est la variété des zéros des 2-mineurs de la matrice (H_{jk}) $j=0,1$ $k=0,1,2$

Démonstration:

Soit x un point de $\mathbb{P}^3$ de coordonnées $(x_0, \quad ,x_3)$. Un antécédent de x par q s'identifie à un couple $(t,x)\in \mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3$ où les coordonnées (t_0,t_1,t_2) de t sont solution du système $(\sum_{i,k} x_i h_{ijk} t_k = 0)_{j=0,1}$.

Par suite t est unique si et seulement ce système est de rang 2, i.e si et seulement si x n'est pas un zéro commun aux 2-mineurs de la matrice (H_{jk}); pour montrer que Y est une cubique gauche, il suffit

de voir qu'elle est lisse. Soit x un point de Y; par changement de coordonnées on peut supposer $x(0,0,0,1)$; comme h_{30} et h_{31} sont proportionnels on peut (en transformant élémentairement la matrice (h_{ij})) supposer que $h_{31}=0$. On a supposé que les 2-mineurs de (h_{ij}) sont sans zéro commun, donc les h_{i1} $i=0,1,2$ sont indépendants sur C et par transposition les (H_{1k}) $k=0,1,2$ sont indépendants.
D'autre part, toujours parce que les 2-mineurs de (h_{ij}) sont sans zéro commun, on a $h_{30}\neq 0$, donc les H_{0k} ne s'annulent pas tous en x; les plans tangents en x aux quadriques contenant Y ont pour équations les combinaisons linéaires des 2-mineurs de la matrice:

$$\begin{pmatrix} H_{00}(x) & H_{01}(x) & H_{02}(x) \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \end{pmatrix}$$

On voit facilement que ceux-ci forment une famille de rang deux, d'où l'assertion. Pour vérifier que q est l'éclatement de Y dans $\mathbb{P}^3$ on utilise la description de P comme sous-variété de $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3$ définie par le système d'équations $\sum_{i,k} x_i h_{ijk} t_k=0$ $(j=0,1)$. L'assertion résulte alors du fait que la résolution de $\mathcal{O}_Y$ s'écrit :

$$0\to \mathcal{O}^2(-3) \xrightarrow{{}^tH_{jk}} \mathcal{O}^3(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\to \mathcal{O}_Y \to 0$$

Remarque 2.1.1:

On peut décrire géométriquement le diviseur exceptionnel de P comme l'ensemble des couples (t,x) tels qu'il existe une droite "sauteuse" L pour E passant par t telle que x soit le point de $\mathrm{Proj}(E_t)$ défini par la section de $E_L(-2)$.
En effet si x est un point de Y de coordonnées (x_0,x_1,x_2,x_3), si L est la droite définie par les équations (proportionnelles)

$\sum_{i,k} x_i h_{ijk} T_k = 0$,on voit que (x_0,x_1,x_2,x_3) est une relation entre les colonnes de la matrice de l'application $H^0(\mathcal{O}_L^4) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_L^2(1))$ induite par ${}^t(h_{ij})$.La situation décrite dans la proposition 2.1 est unique à choix de bases près;voici un exemple de bases:la matrice (H_{jk}) est $\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ et par suite h_{ij} $\begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ t_1 & t_0 \\ t_2 & t_1 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$

On peut utiliser la représentation paramétrique $(t,u) \rightarrow (t^3,t^2u,tu^2,u^3$ de Y;l'équation de la droite sauteuse attachée au point de Y de paramètre (t,u) est $t^2T_0+tuT_1+u^2T_2=0$. Ainsi l'enveloppe de ces droites est une conique. Notons aussi que l'image par q d'une "droite" (fibre d'un point de $\mathbb{P}^2$ par π) est une bisécante à Y,et inversement; en utilisant les bases ci-dessus l'image de la droite $\pi^{-1}(t)$,où t est un point de $\mathbb{P}^2$ de coordonnées $(t_0\ t_1\ t_2)$,a pour système d'équations
$t_0X_0 + t_1X_1 + t_2X_2 = 0$, $t_0X_1 + t_1X_2 + t_2X_3 = 0$
Ses points d'intersection avec Y ont pour paramètres les solutions de l'équation $t^2T_0 + tuT_1 + u^2T_2 = 0$ .Notons enfin que le morphisme $\bar{q}:\mathbb{P}^2 \longrightarrow G$ (grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$)attachée à q, composé avec le plongement de G dans $\mathbb{P}^5$ est le plongement de Véronèse usuel.

Il est défini par les 2-mineurs de (h_{ij}) qui forment une base de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$. On le voit en utilisant la résolution d'Eagon-Northcott de l'idéal de ces mineurs ou en utilisant les bases ci-dessus.

Revenons au cas (a).

On vient de voir que $\bar{q}(C)$ est une section hyperplane de $\bar{q}(\mathbb{P}^2)$.
En d'autres termes la surface réglée S peut être décrite comme l'ensemble des bisécantes à Y appartenant à un certain complexe linéaire (éventuellement singulier). En particulier ,le lieu singulier de S(qui est de degré 3) est égal à Y.

En effet $S=q(\pi^{-1}(C))$;comme C est section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ et comme

$q_*\Pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = J_Y(2)$ S est une section de $J_Y^2(4)$, d'où l'assertion.
On remarque que E est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ selon que l'hyperplan de $\mathbb{P}^5$ contenant $\overline{q}(C)$ est ou non tangent à la grassmannienne G. L'image réciproque de Y dans $\tilde{S}$ est une section de $\omega_{\tilde{S}}^{\vee} = \mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{-2}{2}$. D'autre part X est section de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{d-4}{1}$. Le nombre d'intersection de ces 2 diviseurs est $(-2,2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\binom{d-4}{1} = 2d-2$

Par suite $J_X \otimes \mathcal{O}_\Gamma(d-4)$ est un $\mathcal{O}_\Gamma$-module de degré $(d-10)$; donc $h^1(J_X \otimes \mathcal{O}_\Gamma(d-4))=0$ pour $d \geq 9$. La série est donc complète dès que $d \geq 9$

Etude du cas (b)

Le conoyau de ${}^t(h_{ij})$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module de longueur un, de support un point 0 de $\mathbb{P}^2$.

<u>Proposition 2.2:</u> La matrice (h_{ij}) est équivalente à $\begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ T_1 & T_0 \\ 0 & T_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$

où (T_0, T_1, T_2) est une base de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ dans laquelle les coordonnées de 0 sont (0 0 1).

Démonstration: Quitte à remplacer (h_{ij}) par une matrice équivalente on peut supposer $h_{ij}(0)=0$ pour $(i,j) \neq (3,1)$, car $(h_{ij}(0))$ est de rang 1. La famille (h_{i0}) est de rang 2 sinon on pourrait supposer $h_{i0}=0$ pour $i=1,2$; l'idéal des mineurs de (h_{ij}) serait alors contenu dans (h_{00}, h^2_{30}) et le conoyau de (h_{ij}) ne serait pas de longueur 1
Par suite on peut supposer $h_{30}=0$. Les mineurs de $(h_{ij})_{i=0,1,2}$ sont sans facteur commun, sinon l'idéal des mineurs de (h_{ij}) serait contenu dans $\mathfrak{m}_0 \cap (q, h_{31})$ où q est le facteur commun, et le conoyau de (h_{ij}) ne serait pas de longueur 1.

Les h_{ij} $i=0,1,2$ $j=0,1$ sont des éléments homogènes de degré un de $R= \mathbb{C}[u,v]$ où (u,v) est une base de $H^0(\mathfrak{m}_0(1))$.

Comme les mineurs maximaux de la matrice (h_{ij}) $i=0,1,2$ $j=0,1$ sont sans facteur commun, cette matrice est une présentation de $\mathfrak{m}^2$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal (u,v) de R, et par suite sa transposée est une présentation de $\mathrm{Ext}^2_R(R/\mathfrak{m}^2, R)$. Ce dernier module, tensorisé par $R/\mathfrak{m}$, est canoniquement isomorphe au dual du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; Il apparait ainsi une base naturelle de R^2 par la surjection $R^2 \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_R(R/\mathfrak{m}^2, R)$. On remplace (u,v) par cette base qu'on note (T_0, T_1)

On voit alors que les sous-modules de R^2, images respectives des matrices ${}^t(h_{ij})\ i=0,1,2\ j=0,1$ et $\begin{pmatrix} T_0 & T_1 & 0 \\ 0 & T_0 & T_1 \end{pmatrix}$ sont égaux; par suite

quitte à multiplier $(h_{ij})\ i=0,1,2\ j=0,1$ par un élément de $GL_3(\mathbb{C})$ on peut supposer que ces matrices sont égales.

En posant $h_{31}=T_2$, (nécéssairement indépendant de T_0 et T_1) on obtient le lemme. Comme dans le cas (a), on forme la sous-variété de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ définie par les équations ($\sum_{i,k} X_i h_{ijk} T_k = 0$) $j=0,1$; on note P cette variété (singulière) et $q : P \longrightarrow \mathbb{P}^3$ la seconde projection.

q est alors l'éclatement de l'idéal des 2-mineurs de $\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$

La variété Y définie par cet idéal est réunion de la droite L d'équations $X_0=0=X_1$ et de la conique Q d'équations $X_0X_2-X_1^2=0=X_3$ qui se coupent en ω de coordonnées $(0\ 0\ 1\ 0)$. Soit $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ l'éclatement de 0 dans $\mathbb{P}^2$. On sait que $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ est isomorphe à $\mathrm{Proj}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$

L'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ est noté $\mathcal{O}\binom{0}{1}$ et le diviseur exceptionnel $\mathcal{O}\binom{-1}{1}$. Le transformé propre sur $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ du conoyau de $\begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$

est isomorphe à $\mathcal{O}\binom{1}{0}$

Par suite si $\tilde{E}$ est le transformé propre sur $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ du conoyau de (h_{ij}): $\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ il existe une suite exacte localement scindée

$$0 \to \mathcal{O}\binom{0}{-1} \to \mathcal{O}^2 \oplus \mathcal{O}\binom{1}{0} \to \tilde{E} \to 0$$

On pose alors $\tilde{P}=\mathrm{Proj}(\tilde{E})$ et on note $q : \tilde{P} \longrightarrow \mathbb{P}^3$ le composé du morphisme évident de $\tilde{P}$ dans P et de q.

Comme $\tilde{E}$ est un quotient localement libre de rang 2 de $\mathcal{O}^4_{\mathbb{P}^2}$, il lui correspond un morphisme $\bar{q} : \tilde{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow G$ dont l'image est une surface cubique($\Lambda^2 \tilde{E}_r \simeq \mathcal{O}\binom{1}{1}$ donc $c_1^{\,2}(E)=3$). On voit (cf cas (a) que cette surface est l'adhérence de l'ensemble des droites rencontrant L et Q en des points distincts de S. S est évidemment une section de $J_Y^{\,2}(4)$; par contre $\bar{q}(C)$ n'est plus une section hyperplane de $\bar{q}\ (\tilde{\mathbb{P}}^2)$

Comme Y est un lieu double ,le nombre d'intersection de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{0}{1}$ et de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(L)$ (resp $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(Q)$)est deux (resp quatre);de même le nombre d'intersection de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{1}{0}$ et de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(L)$ (resp $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(Q)$) est un.

On en déduit $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(L) = \mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{-2}{1}$ et $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(Q) = \mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{0}{1}$. L est donc une (d-2)-sécante à X.L'image réciproque de L dans $\tilde{S}$ est lisse (resp décomposée en une génératrice section de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{1}{0}$ et une section exceptionnelle de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{-3}{1}$.) selon que E est isomorphe à $\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(2)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$.Dans le premier cas , par un point général de L passent 2 génératrices ,dans le second cas une seule.

Etude des cas (c) et (d)

Le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module conoyau de ${}^t(h_{ij})$ est de longueur 2.La sous-variété Z de $\mathbb{P}^2$ définie par les 2-mineurs de (h_{ij}) est de degré 2.

Le complexe d'Eagon-Northcott s'écrit :

$$0 \to \mathcal{O}^3_{\mathbb{P}^2}(-4) \to \mathcal{O}^8_{\mathbb{P}^2}(-3) \to \mathcal{O}^6_{\mathbb{P}^2}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$$

Il est acyclique à l'extérieur de Z . Les 2-mineurs engendrent un sous-espace vectoriel dedimension 4 de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$.

A l'extérieur de Z,le conoyau de (h_{ij}) est un fibré de rang deux quotient de $\mathcal{O}^4_{\mathbb{P}^2}$,induisant un morphisme $\bar{q} : \mathbb{P}^2_{-Z} \longrightarrow G$ qui , composé avec l'inclusion de G dans $\mathbb{P}^5$ est précisément défini par les six sections (h_{ij}) de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$.

L'image de $\bar{q}$ admet donc pour adhérence $G \cap V$ où V est une sous-variété linéaire de dimension 3 de $\mathbb{P}^5$ .C'est une quadrique lisse ou un cone selon que Z est constituée de deux points ou d'un point double.

Dans le premier cas la restriction à $G \cap V$ du fibrétautologique de G est isomorphe à $\mathcal{O}(1,0) \oplus \mathcal{O}(1,0)$.(Les notations proviennent de l'identification de la quadrique lisse $G \cap V$ et de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$);sous ces hypothèses ,$\bar{q}(C)$ est une quartique à point double.

La droite de $\mathbb{P}^5$ conjuguée de V par rapport à G coupe G en 2 points distincts correspondant à 2 droites L_1 et L_2 rencontrées par toute droite provenant d'un point de $G \cap V$.

Sur $\tilde{S}$ l'image réciproque de chacune de ces droites est une section de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{-2}{1}$ de sorte que chacune de ces droites est une (d-2)-sécante à X. On remarque que dans ce cas E est toujours isomorphe à $\mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(2)$

Dans le second cas (i-e le cas (d)) le modèle non singulier du cone du second degré $G \cap V$ est $\mathrm{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$

L'image réciproque sur cette surface du fibré tautologique de G est un module E.

Il existe une suite exacte non scindée $0 \to \mathcal{O}\binom{-1}{1} \to E \to \mathcal{O}\binom{1}{0} \to 0$

La quartique $\bar{q}(C)$ est sur cette surface section d'un diviseur qui est section ,soit de $\mathcal{O}\binom{0}{2}$,soit de $\mathcal{O}\binom{2}{1}$;dans le premier cas on obtient une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to N \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \to 0$;dans le second cas on a une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to N \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3) \to 0$ contrairement aux hypothèses.

La droite de $\mathbb{P}^5$ conjuguée de V par rapport à G est tangente à G en un point auquel correspond une droite L .

On peut représenter géométriquement $G \cap V$ comme l'ensemble des droites bisécantes à la courbe "doublée" le long d'une quadrique lisse contenant L(plus précisément on se donne une certaine correspondance (1,1) entre L et la droite orthogonale dans $\mathbb{P}^{3\vee}$,et l'on considère l'ensemble des droites L' coupant L telles que le point d'intersection de L et L' ,et le point d'intersection de leurs orthogonales dans $\mathbb{P}^{3\vee}$ se correspondent.)

L'image réciproque de L dans $\tilde{S}$ est une section de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\binom{-2}{1}$ et L est une (d-2)-sécante à X,.

§3. Courbes elliptiques

Compte tenu des résultats établis au chapitre 1, il faut maintenant examiner les situations suivantes :

1°) $\tilde{X}$ est elliptique, deg(E)=4 , N^V est semi-stable

2°) $\tilde{X}$ est elliptique, deg(E)=5 , N^V est stable.

Dans le premier cas la courbe $\overline{q}(X)$ est une quartique elliptique tracée sur G, nécéssairement contenue dans une variété linéaire V de dimension 3, et les considérations du chapitre 2(cas (c) et (d)) se répètent.

On obtient alors deux (d-2)-sécantes "distinctes ou confondues".

On suppose maintenant que N^V est stable de degré 5.

On va décrire une transformation birationnelle qu'on appliquera ensuite à l'étude du lieu singulier de la surface réglée

<u>La transformation de Semple</u>

Soit $\tilde{X}$ une courbe elliptique munie d'un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module inversible de degré 5 noté $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$, $V=H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(1))$, $P_V=\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\,V)$.

Soit : $p: \tilde{X} \longrightarrow P_V$ le morphisme déduit de la flèche évidente $V\otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$ .Notons X l'image de $\tilde{X}$ par p et J_X l'idéal de X dans P_V, $W=H^0(J_X(2))$, $P_W=\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\,W)$.

La transformation de Semple est une correspondance birationnelle entre P_V et P_W ([9])

La suite exacte $0 \to J_X/J_X^2 \to \Omega^1_{P_V} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$ (déduite du choix d'un isomorphisme $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$) tensorisé par $\mathcal{O}_X(2)$,donne un isomorphisme $\Lambda^3((J_X/J_X^2)(2)) \simeq \mathcal{O}_X(1)$, complètement déterminé à multiplication près par un scalaire. On en déduit par passage aux sections une application $\mathbb{C}$-linéaire $\Lambda^3 W \to V$ donc un élément de $\Lambda^2 W \otimes V$ .Si l'on choisit des bases $(T_0, \quad , T_4)$ de V et $(X_0, \quad , X_4)$ de W, cet élément s'écrit $\sum_{\substack{0\le i\le 4\\ 0\le j<k\le 4}} a_{ijk}(X_j\wedge X_k)\otimes T_i$ où les a_{ijk} sont des scalaires;

On pose $a_{ijj}=0$ et $a_{ikj}=-a_{ijk}$ $(j>k)$

$A = (\sum_{0 \leq i \leq 4} T_i \, a_{ijk})$ $0 \leq j,k \leq 4$. A est une matrice 5×5 alternée àcoefficients dans V.On pose $K = \left(J_X/J_X^2(2)\right)$. K est un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang 3 ; $H^0(K) = W$;montrons que K est stable . K étant engendré par ses sections il suffit de montrer que $H^1(K) = 0$ et qu'il n'existe pas de sous-fibré L de K de rang 1 et de degré 2.

Si $H^1(K) \neq 0$ il existe une application surjective $J_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2)$; son noyau est l'idéal d'une courbe X_2 de degré 10 tracée sur quatre quadriques et de même support que X;la composante contenant X de l'intersection de ces quadriques est une surface de degré inférieur ou égal à deux,d'où une contradiction.

Si $H^1(K) = 0$ et s'il existe un sous-fibré L de K de rang un et de degré deux,l'image réciproque de $H^0(L)$ dans $H^0(J_X(2))$ est un pinceau de quadriques de P_W tangentes le long de X.

La réunion des lieux singuliers de ces quadriques est une réunion finie de variétés linéaires de P_W, distinctes de P_W .

Elle doit contenir X,d'où une contradiction.

Proposition 3.1 :

Le complexe $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{P_V}(-5) \longrightarrow W^\vee \otimes \mathcal{O}_{P_V} \xrightarrow{A} W \otimes \mathcal{O}_{P_V} \longrightarrow \mathcal{O}_{P_V} \longrightarrow 0$

définit une résolution graduée libre minimale du (Sym V)-module gradué $\bigoplus H^0(\mathcal{O}_X(n))$ (les flèches non notées proviennent de l'inclusion $W \subset H^0(\mathcal{O}_{P_V}(2))$

Démonstration:

X est arithmétiquement normale ; de plus l'image par le foncteur Hom(, $\mathcal{O}_{P_V}(-5)$) d'une résolution minimale de $\mathcal{O}_X$ est une résolution de $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ nécéssairement isomorphe à la première.

L'assertion est donc numériquement vraie i-e que les classes d'isomorphisme de modules gradués libres formant une résolution minimale de $\bigoplus H^0(\mathcal{O}_X(n))$ sont celles que donne l'énoncé

L'application $\mathbb{C}$-linéaire $W \longrightarrow H^0(J_X/J_X^2(2))$ est bijective;de plus le conoyau de l'application $\mathcal{O}_X$-linéaire u: $W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \left(\frac{J_X}{J_X^2}\right)(2)$ est nul

Le complexe d'Eagon-Northcott construit sur u s'écrit :

$$0 \rightarrow (J_X/J_X^2)^\vee(-3) \xrightarrow{{}^t u} W^\vee \otimes \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{A} W \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{u} J_X/J_X^2(2) \rightarrow 0$$

(cf [7]) compte tenu de l'isomorphisme $\Lambda^3\left(\frac{J_X}{J_X^2}(2)\right) \simeq \mathcal{O}_X(1)$. Ce complexe est acyclique . L'application $\mathbb{C}$-linéaire $H^0(J_X(3)) \to H^0\left(\frac{J_X}{J_X^2}(3)\right)$ est bijective. De l'exactitude du complexe ci-dessus on déduit l'exactitude de la suite $0 \to W^\vee \to H^0(W \otimes \mathcal{O}_X(1)) \to H^0\left(\frac{J_X}{J_X^2}(3)\right) \to 0$ qui est isomorphe à la suite:

$$0 \to W^\vee \to H^0(W \otimes \mathcal{O}_{P_V}(1)) \longrightarrow H^0(J_X(3)) \to 0$$

Ainsi W^v est l'espace des relations de degré un liant une base de générateurs de degré deux de J_X.

La proposition résulte alors de sa conséquence numérique mentionnée plus haut. C.Q.F.D

On identifie $\mathrm{Pic}(P_V \otimes P_W)$ à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en convenant que $\mathcal{O}(1,0)$ (resp $\mathcal{O}(0,1)$) est l'image réciproque de $\mathcal{O}_{P_V}(1)$ (resp $\mathcal{O}_{P_W}(1)$) par la 1ère projection (resp 2ème).

On note P la sous-variété de $P_V \times P_W$ définie par les équations

$$\sum T_i a_{ijk} X_k = 0 \quad (0 \leq j \leq 4).$$

La famille de ces équations est une section de $W \otimes \mathcal{O}(1,1)$ dont l'image dans $H^0(\mathcal{O}(1,2))$ est $\sum T_i a_{ijk} X_j X_k = 0$ car la matrice A est alternée .

Autrement dit P est une section du $\mathcal{O}_{P_V \times P_W}$-module (localement libre de rang 4) $L = \mathcal{O}_{P_V}(1) \otimes \Omega^1_{P_W}(2)$ .La restriction a $f: P \longrightarrow P_V$ de la 1ére projection est l'éclatement de X.

En effet $A : W^v \otimes \mathcal{O}_{P_V} \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{P_V}(1)$ est une présentation de $J_X(3)$; comme P est la variété des zéros de la composée $W^v \otimes \mathcal{O}_{P_V \times P_W} \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{P_V}(1) \otimes \mathcal{O}_{P_W} \to \mathcal{O}(1,1)$,on voit que $P = \mathrm{Proj}_{P_V}(\mathrm{Sym}\, J_X)$; X étant localement intersection complète cette dernière variété coincide avec l'éclatement de J_X.

On vérifie que $J_X \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_P(-2,1)$.

On peut en choisissant une base de $\Lambda^5 W$ identifier $\Lambda^i W^v$ et $\Lambda^{5-i} W$;(comme SL(W)-modules)

L'élevation au carré (divisée par deux) est une application SL(W)-linéaire $W \to \mathrm{Sym}_2(\Lambda^3 W)$.

Posons $\mathbb{P} = \mathrm{Proj}\,(\mathrm{Sym}\,\Lambda^3 W)$. On note v la composée :
$W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \mathrm{Sym}_2\,(\Lambda^3 W)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)$. La transposition de la multiplication de Λ $W^{\vee}$ induit une application SL(W)-linéaire $W^{\vee} \to W\otimes\Lambda^3 W$; on note A la composée :

$$W^{\vee}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to W\otimes\Lambda^3 W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$$

Formons la séquence d'applications $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-linéaires :

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-5)\xrightarrow{{}^t v} W^{\vee}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3)\xrightarrow{A} W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)\xrightarrow{v}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\to\mathcal{O}_G\to 0$$

Si on choisit une base de W (et si on munit les $\Lambda^i W$ des bases correspondantes) la matrice de cette séquence est le complexe de Buchsbaum-Eisenbud ([1] prop 6.1 n=2)

Cette séquence définit donc une résolution graduée libre minimale du $\mathrm{Sym}(\Lambda^3 W)$-module gradué $\bigoplus H^0(\mathcal{O}_G(n))$. G désigne indifféremment la grassmannienne des droites de ${P_W}^{\vee}$ ou la grassmannienne des plans de P_W.

Le quotient tautologique de $W^{\vee}\otimes\mathcal{O}_G$ (réalisant G comme grassmannienne des droites de ${P_W}^{\vee}$) est par construction l'image de $A\otimes\mathcal{O}_G(3)$; donc le quotient tautologique (de rang trois) de $W\otimes\mathcal{O}_G$ est $\mathrm{coker}(A\otimes\mathcal{O}_G(2)) \simeq (J_G/J_G^2)(2)$.

Il faut enfin noter qu'on a $X = G\cap P_V$. Cela résulte du fait que la résolution de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{O}_{P_V}$ est le produit tensoriel par $\mathcal{O}_{P_V}$ de la résolution de $\mathcal{O}_G$

Considérons maintenant la restriction $g : P \to P_W$ de la deuxième projection. On pose $Z = \mathrm{Proj}_X(K)$. Z est identifié à la sous-variété de P d'idéal $J_X\,\mathcal{O}_P$. Soit $\bar{Z}$ l'image de Z par g ,autrement dit l'image du morphisme de Z dans P_W défini par $W\otimes\mathcal{O}_X \to K$.
$\bar{Z}$ est une hypersurface de degré 5 de P_W

<u>Proposition 3.2 :</u> Z est la normalisée de $\bar{Z}$

Démonstration : On doit démontrer que la restriction de g à Z est un morphisme fini birationnel sur son image .Soit x un point de X;comme K est stable, $H^1(K(-x)) = 0$ et g induit un plongement de la fibre de x dans Z,dans P_W.

Si x et y sont deux points distincts de X, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K(-x-y) \longrightarrow K(-x) \oplus K(-y) \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

Comme K est stable , $h^1(K(-x-y)) = 1$;ceci montre que les plans de P_W images des fibres dans Z de x et de y respectivement se coupent en un point .Par suite l'ensemble des points de la fibre de x dans Z,dont la fibre par g a (ensemblistement) au moins deux points est au plus de dimension un (en fait c'est une cubiquè lisse ,isomorphe à X); g induit donc un morphisme birationnel de Z sur $\bar{Z}$.

Enfin ,si x,y,z sont trois points ,deux à deux distincts de X,on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow K(-x-y-z) \to K(-x-y) \oplus K(-y-z) \oplus K(-x-z) \to K(-x) \oplus K(-y) \oplus K(-z) \to K \to 0$$

Le noyau de la flèche de droite est $K \otimes Q$ où

$Q = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{O}(-x) \oplus \mathcal{O}(-y) \oplus \mathcal{O}(-z) \to \mathcal{O}_x)$ est stable; par suite $K \otimes Q$ est semi-stable de degré -1 et $h^1(K \otimes Q) = 0$, donc $H^0(K(-x) \oplus K(-y) \oplus K(-z)) \to H^0(K)$ est surjectif,donc les plans de P_W images respectives des fibres de x,y,z dans Z n'ont pas de point commun.

Les fibres de la restriction de g à Z ont (ensemblistement) au plus deux points: $g_{/Z}$ est un morphisme fini.

<u>Proposition 3.3:</u> g est l'éclatement du lieu singulier de $\bar{Z}$

Démonstration: P est défini par l'annulation de l'application composée: $\mathcal{O}_{P_V} \otimes (\Omega^1_{P_W}(2))^\vee \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{P_V} \otimes \mathcal{O}_{P_W} \to \mathcal{O}(1,0)$

où $B: (\Omega^1_{P_W}(2))^\vee \longrightarrow V \otimes P_W$ provient de la matrice $(\sum_k a_{ijk} X_k)_{i,j}$

On a donc $P = \mathrm{Proj}_{P_W}(\mathrm{Sym}(\mathrm{coker}\, B))$. On va montrer que $\mathrm{coker}\, B = J(3)$ où J est l'idéal de $\mathcal{O}_{P_W}$ image réciproque du conducteur de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$ .De la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_P(-2,1) \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_Z \to 0$ on déduit la suite exacte :

$$0 \to g_*\mathcal{O}_P \longrightarrow g_*\mathcal{O}_Z \longrightarrow R^1 g_* \mathcal{O}_P(-2,1) \longrightarrow R^1 g_* \mathcal{O}_P$$

Les $R^n g_* \mathcal{O}_P(a,b)$ sont l'aboutissement de la suite spectrale d'hyperimage directe,par la projection $p_W : P_V \times P_W \longrightarrow P_W$ de la résolution de Koszul du $\mathcal{O}_{P_V \times P_W}$-module $\mathcal{O}_P$,qui s'écrit:

$$0 \to \Lambda^4 L^v(a,b) \to \Lambda^3 L^v(a,b) \to \Lambda^2 L^v(a,b) \longrightarrow L^v(a,b) \to \mathcal{O}(a,b) \to 0$$

On a $\Lambda^q L^v(a,b) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}(a-q) \otimes \Lambda^{4-q}(\Omega^1_{\mathbb{P}_W}(b+5-2q))$ donc

$R^p p_{W*}(\Lambda^q L^v(a,b)) = H^p(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}(a-q)) \otimes \Lambda^{4-q}(\Omega^1_{\mathbb{P}_W}(b+5-2q))$.

Pour $a \geqslant 0$,(resp $a < 0$),la suite spectrale dégénère en l'image du complexe de Koszul par p_{W*}(resp $R^4 p_{W*}$); ainsipour $a=0=b$,le seul terme non nul est celui d'indices $(0,0)$ qui est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_W}$,d'où les relations $g_* \mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_V}$ et $R^1 g_* \mathcal{O}_P = 0$.

Pour $(a,b) = (-2,1)$ on obtient la suite exacte :

$$0 \to V^v \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_W}(-2) \to \Omega^1_{\mathbb{P}_W} \to R^1 g_* \mathcal{O}_P(-2,1) \to 0$$

dont la flèche de gauche est la transposée de B par dualité.

La restriction de g à Z étant un morphisme fini ,la relation $R^1 g_* \mathcal{O}_P(-2,1) = g_* \mathcal{O}_Z/\mathcal{O}_{\bar{Z}}$ montre que l'annulateur du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_W}$module $R^1 g_* \mathcal{O}_P(-2,1)$ est l'image réciproque du conducteur de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$ Le conducteur étant de codimension 2 (coker ${}^tB$) est aussi de codimension 2 et B est une présentation de $(\mathrm{Ann}(\mathrm{coker}({}^tB)(3))$ c'est à dire de $J(3).(c_1(\Omega^1_{\mathbb{P}_W}(2)) = 3)$.

Il faut maintenant montrer que le lieu double de $\bar{Z}$ est localement intersection complète. Ceci entrainera ,comme plus haut,que g est l'éclatement de J. Il suffira pour cela de montrer que le lieu triple de $\bar{Z}$ est vide. Ce lieu est défini par les 3-mineurs de la matrice $(\sum_k a_{ijk} X_k)_{i,j}$. S'il contenait un point x de coordonnées $(x_0, \quad ,x_4)$ le système d'équations $\sum_{i,k} T_i a_{ijk} x_k \quad (0 \leq j \leq 4)$ définirait une variété linéaire $V_x \subset V$,de dimension $\geqslant 2$ telle que $V_x \times (x)$ soit contenue dans P,ce qui implique $J_x \mathcal{O}_{V_x} = \mathcal{O}_{V_x}(-2)$ Par suite V_x serait un plan contenant une composante de X de degré deux,ce qui est absurde.

La transformation de Semple est la transformation birationnelle entre P_V et P_W de graphe P.

Etudions maintenant le lieu double de $\bar{Z}$. Calculons la classe dans Pic(Z) du conducteur de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$;comme $\bar{Z}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^4$,son module canonique est trivial,donc la classe du conducteur est celle de ω_Z (degré Z = 5). Notons $\pi : Z \longrightarrow X$ la projection naturelle ;la suite exacte :

$0 \longrightarrow \Omega^1_{Z/X} \longrightarrow \pi^* K \otimes \mathcal{O}_Z(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$ et l'isomorphisme $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ montrent que $\omega_Z \simeq (\pi^* \mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_Z(-3)$

On a en particulier $H^0(\omega_Z(3)) \simeq V$. On se propose de "globaliser" la description de l'intersection du lieu double et de la fibre $\pi^{-1}(t)$ d'un point t de X,vue comme un plan de P_W . Les équations définissant le plan attaché à la fibre de t sont les éléments de $H^0(K(-t)) \subset H^0(K)$. On est donc amené à regarder le sous-fibré de K(-t) engendré par $H^0(K(-t))$.On constate que c'est un fibré trivial de rang 2 (car K(-t) est stable); notons $p_i : X \times X \longrightarrow X$ (i=1,2) les projections et Δ la diagonale de $X \times X$; il résulte de ce qui précède que $p_2^* p_{2*}((p_1^* K)(-\Delta))$ est un sous-fibré de $(p_1^*K)(-\Delta)$,de la forme $K'(-\Delta)$ où K' est un sous-fibré de rang deux de p_1^*K.

Proposition 3.4 : Le $\mathcal{O}_{X\times X}$-module inversible p_1^*K/K' est isomorphe à $(p_1^* \mathcal{O}_X(1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_X(1))(-2\Delta)$

Démonstration :

On travaille dans l'anneau de Chow de $X \times X$ .Soit $L = p_{2*}p_2^*K$ le $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 2. On applique la formule de Porteous ([3] th 14.4) au morphisme de fibrés $(p_2^*E)(\Delta) \longrightarrow p_1^*K$ qui est partout localement scindé sur $X \times X$ (le cycle de dégénérescence est le cycle vide). La deuxiéme classe de Chern du "fibré virtuel" $p_1^*K - ((p_2^*E)(\Delta))$ est donc nulle,ce qui se traduit dans l'anneau de Chow de $X \times X$ par la relation ;

$(3\Delta)(p_2^*(c_1E)) - (p_1^*(c_1K)).(p_2^*(c_1E)+2\Delta) = 0$

En prenant l'image directe de cette relation par p_1 et p_2 respectivement on trouve les égalités :

$3c_1E - (\deg(c_1E)).c_1K - 2c_1K = 0$; $3c_1E - (\deg(c_1K)).c_1E - 2c_1K = 0$

Comme $\deg(c_1K)=5$,ces relations impliquent $2(c_1E + c_1K) = 0$ puis $\deg(c_1E) = -5$, puis $3(c_1E + c_1K) = 0$ et finalement $c_1E = -c_1K$

La proposition est donc établie. C.Q.F.D

Le degré(self-intersection) du $\mathcal{O}_{X\times X}$-module inversible $p_1^* K_{/K'}$

est dix, donc (Riemann-Roch) sa caractéristique d'Euler est cinq; comme $h^i(p_1^*K/K') = 0$ pour $i=1,2$ l'application linéaire composée $W \to H^0(p_1^*K) \longrightarrow H^0(p_1^*K/K')$ est un isomorphisme.

On peut maintenant montrer que le morphisme composé $X \times X \longrightarrow Z \longrightarrow P_W$ se factorise par le quotient $Div_2(X)$ de $X \times X$ par l'involution $(t,u) \longrightarrow (u,t)$ de $X \times X$. Soit L un $\mathcal{O}_{X \times X}$ module inversible de degré deux ; le $\mathcal{O}_{X \times X}$ -module $\underline{L} = (p_1^*L \otimes p_2^*L)(-\Delta)$ a une section dont la courbe des zéros (ensemblistement égale à l'ensemble des (t,u) tels que $L \simeq \mathcal{O}_X((t)+(u))$ est isomorphe à X par l'une des projections.

Comme le nombre d'intersection de $\underline{L}$ et de p_1^*K/K' est deux, le morphisme considéré induit un revêtement d'ordre deux de la courbe des zéros de la section de $\underline{L}$ sur son image (qui est une droite de P_W).

En particulier si $L = \mathcal{O}_X((t)+(u))$, (t,u) et (u,t) ont même image dans P_W. En effet L est la 1ère projection de l'intersection des classes de $\underline{L}$ et p_1^*K/K' dans l'anneau de Chow de $X \times X$:

$$\underline{L}.(p_1^*K/K') = p_1^*\mathcal{O}_X(1).p_2^*L + p_2^*\mathcal{O}_X(1).p_1^*L - \Delta.(p_1^*L^{\otimes 2}(1) + p_2^*L^{\otimes 2}(1))$$

Comme la restriction de $i: X \times X \longrightarrow Z$ à la fibre $p_1^{-1}(t)$ d'un point de X est un plongement plan de degré trois de X, on déduit du calcul de la classe de l'image réciproque dans Z du lieu double de $\overline{Z}$, que i est un isomorphisme de $X \times X$ sur cette image réciproque.

On sait que $Div_2(X)$ est une surface réglée ayant pour base une courbe X' isomorphe (non canoniquement) à X; le morphisme de $X \times X$ dans P_W définit un morphisme de degré cinq de $Div_2(X)$ dans P_W dont la restriction à chaque droite de $Div_2(X)$ est de degré un ; ce morphisme est déduit d'un fibré stable de rang deux et de degré cinq Q quotient de $W \otimes \mathcal{O}_X$. W s'identifie à l'espace des sections et le morphisme est donc un plongement de $Div_2(X)$ dans P_W.

<u>Remarque:</u> Transformation de Semple duale

On est parti d'une application $\mathbb{C}$-linéaire surjective $\Lambda^3 W \longrightarrow V$.

Notons W' le dual de W et V' le conoyau de la tranposée: $V^v \longrightarrow (\Lambda^3 W)^v \simeq \Lambda^3 W'$. On a dim V' = dim W' = 5. On a vu que X est l'intersection de P_W et de G_W (grassmannienne des plans de P_W)

La famille des plans de réunion $\widetilde{Z}$ est paramétrée par X. On constate qu'un point de $P_{V'} \cap G_{W'}$ correspond à une droite de P_W rencontrant tous les plans de P_W paramétrés par X. Une telle droite est évidemment une génératrice du lieu singulier de $\widetilde{Z}$. Autrement dit $P_{V'} \cap G_{W'}$ est naturellement isomorphe à X' et paramètre le volume réglé en plans dual de la surface réglée de P_W, lieu double de $\widetilde{Z}$.
Cette situation donne naissance à une transformation de Semple qu'il est naturelle d'appeler duale de la première.
On va maintenant appliquer cette construction à l'étude du lieu singulier de la surface réglée quintique elliptique.
La situation est la suivante : X est une courbe elliptique munie d'un fibré vectoriel T stable de rang 2 et de degré 5 ($T = N^{\vee}$ si l'on veut garder les notations de la proposition 1.1) . On pose $W = H^0(T)^{\vee}$, et $K = W \otimes \mathcal{O}_X / T^{\vee}$; K est un fibré de rang trois.
Il est clair que K est engendré par ses sections et que $H^1(K) = 0$; s'il n'est pas stable ,il est isomorphe à $L_1 \oplus L_2$ où L_1 est de rang 1 et de degré 2 ,L_2 stable de rang 2 et de degré 3.
On en déduit $W = (H^0(L_1) \oplus H^0(L_2))$ puis $T = (H^0(L_1) \otimes \mathcal{O}_X) \cap T \oplus (H^0(L_2) \otimes \mathcal{O}_X) \cap T$ d'ou une contradiction. Posons $\mathcal{O}_X(1) = \Lambda^3 K$ et $V = H^0(\mathcal{O}_X(1))$
On a dim(V)=5; montrons que l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\Lambda^3 W \longrightarrow V$ déduite par passage aux sections de $\Lambda^3 u$,où $u : W \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow K$ est le passage au quotient, est surjective. Si Ker $\Lambda^2 u$,on a une suite exacte $0 \longrightarrow \Lambda^2 T^{\vee} \longrightarrow R \longrightarrow T^{\vee} \otimes K \longrightarrow 0$;montrons que $H^0(R) = 0$;comme T est stable $\Lambda^2 T^{\vee}$ est semi-stable donc $H^0(\Lambda^2 T^{\vee}) = 0$;de même comme T et K sont stables , $H^0(T^{\vee} \otimes K) = \mathrm{Hom}(T,K) = 0$,doù l'assertion.
Comme $\Lambda^2 K$ est semi-stable de degré 10 ,$h^0(\Lambda^2 K) = 10$ donc on déduit de la suite exacte $0 \longrightarrow R \longrightarrow \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \Lambda^2 K \longrightarrow 0$ un isomorphisme $\Lambda^2 W \simeq H^0(\Lambda^2 K)$ puis une suite exacte :
$0 \longrightarrow H^1(R) \longrightarrow H^1(\Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\Lambda^2 K) \longrightarrow 0$ c'est à dire par transposition un isomorphisme $H^0(R^{\vee}) \simeq \Lambda^3 W$.
En dualisant la suite exacte $0 \longrightarrow \Lambda^2 T^{\vee} \longrightarrow R \longrightarrow T^{\vee} \otimes K \longrightarrow 0$ on trouve la suite exacte $0 \longrightarrow K^{\vee} \otimes T \longrightarrow R^{\vee} \longrightarrow \Lambda^2 T \longrightarrow 0$

puis $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(K,T) \longrightarrow \Lambda^3 W \longrightarrow V \longrightarrow 0$ (par passage aux sections compte tenu de $H^1(K^v \otimes T) = 0$).

Le morphisme $u : W \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow K$ définit un morphisme $\bar{q} : X \longrightarrow G$ où $G \subset \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\, \Lambda^3 W)$ est la grassmannienne des plans de P_W.

On doit vérifier que $\bar{q}$ est un isomorphisme de X sur $G \cap P_V$, où P_V est identifié à une variété linéaire (de dimension 4) de $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\,\Lambda^3 W)$ par l'application $\mathbb{C}$-linéaire surjective $\Lambda^3 W \longrightarrow V$.

Il faut aussi s'assurer que K est canoniquement isomorphe à $(J_X/J_X^2)(2)$ où J_X est l'idéal de X dans P_V.

On avait vu en utilisant la résolution minimale de G que le quotient tautologique de $W \otimes \mathcal{O}_G$ était isomorphe à $(J_G/J_G^2)(2)$.

Dans le contexte actuel le quotient K de $W \otimes \mathcal{O}_X$ est l'image réciproque par le morphisme $\bar{q} : X \longrightarrow G$ du quotient tautologique de $W \otimes \mathcal{O}_G$

Comme P_V est la variété linéaire engendrée par $\bar{q}(X)$, $\bar{q}$ est un isomorphisme de X sur $G \cap P_V$ et les quotients K et $(J_X/J_X^2)(2)$ de $W \otimes \mathcal{O}_X$ sont égaux.

La surface réglée S n'est intervenue jusqu'à présent que par l'intermédiaire de T, i-e du plongement normal de sa duale.

Faisons maintenant intervenir le plongement de S dans $\mathbb{P}^3$, par l'intermédiaire d'une section h de K, ne s'annulant en aucun point de X

On pose $W_h = W/\mathbb{C}.h$ de sorte que $H = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}\, W_h)$ est un hyperplan de P_W tel que $S = H \cap \bar{Z}$, où $\bar{Z}$ est l'image du morphisme de $\mathrm{Proj}_X K$ dans P_W défini par le quotient K de $W \otimes \mathcal{O}_X$.

L'hypothèse selon laquelle h ne s'annulle en aucun point de X traduit le fait que H ne contient aucun plan de $\bar{Z}$.

La normalisée de S est $\tilde{S} = \mathrm{Proj}_X E$ où $E = W_h \otimes \mathcal{O}_X / T^v = K/h\mathcal{O}_X$

Etudions l'application composée $\Lambda^2 W_h \longrightarrow \Lambda^3 W \longrightarrow V$ (la flèche de gauche est déduite de la multiplication extérieure par h)

Le noyau de cette application s'identifie à $\mathrm{Hom}(T,E)$:

en effet la suite exacte $0 \longrightarrow T^v \longrightarrow W_h \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow 0$ montre que si $R = \mathrm{Ker}(\Lambda^2 W_h \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \Lambda^2 E)$ on a une suite exacte $0 \longrightarrow \Lambda^2 T^v \longrightarrow R \longrightarrow T^v \otimes E \longrightarrow 0$, donc une application injective $H^0(R) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T,E)$.

D'autre part E est engendré par ses sections et n'a pas de facteur direct trivial. Deux cas peuvent se produire :

(a) E est stable : il existe alors un isomorphisme de T sur E , formant une base de Hom(T,E);

(b) E est décomposable en somme directe de fibrés de rang un ,de degrés respectifs deux et trois;dans ce cas il existe un morphisme de rang un de T dans E,d'image le sous-fibré de rang un et de degré trois de E; il forme une base de Hom(T,E);

Comme $H^0(R) = \mathrm{Ker}(\Lambda^2 W_h \twoheadrightarrow V)$, on a $h^0(R) \geqslant 1$ par suite $H^0(R) = \mathrm{Hom}(T,E)$ et l'application $\Lambda^2 W_h \longrightarrow V$ est surjective.

Montrons que l'image de h par l'isomorphisme $W \simeq H^0(J_X(2)) \subset \mathrm{Sym}_2 V$ est l'image dans $\mathrm{Sym}_2 V$ d'une équation (élément de $\mathrm{Sym}_2(\Lambda^2 W_h)$) de la grassmannienne des droites de H.

En transposant le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_2(\Lambda^2 W) & \longrightarrow & \Lambda^4 W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sym}_2(\Lambda^2 W_h) & \longrightarrow & \Lambda^4 W_h \end{array}$$

(lignes:élevation au carré)

(colonnes:passage au quotient)

et en utilisant la dualité de l'algèbre extérieure ,on trouve un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}_2(\Lambda^2 W_h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & \mathrm{Sym}_2(\Lambda^3 W) \end{array}$$

(colonnes:multiplication par h)

dont la première ligne est une équation de la grassmannienne des droites de H et la seconde ligne est l'isomorphisme $W \simeq H^0(J_G(2))$.

On obtient l'assertion en effectuant la restriction à G.

On s'intéresse maintenant à l'étude du lieu singulier de S;il est défini par le conducteur de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ dans $\mathcal{O}_S$,c'est à dire l'image réciproque sur S du conducteur $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$;il s'identifie donc à $D \cap H$ où D est le lieu double de $\bar{Z}$.

Selon qu'on est dans le cas (a) ou (b) ci-dessus , $D \cap H$ est lisse ou contient une droite.

En effet ,pour qu'un élément non nul de Hom(T,E) soit de rang un,il faut et il suffit que l'élément de $\bigwedge^2 W_h$ qui lui correspond soit décomposable. Si k est le corps des fractions rationnelles de X, la matrice par blocs de la forme alternée que définit cet élément sur $W_h^\vee \otimes k = (N \otimes k) \oplus (E^\vee \otimes k)$ s'écrit $\begin{pmatrix} * & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ où a est l'élément correspondant de Hom(T,E); cette matrice est de rang 2 si et seulement si a est de rang 1.

Donc il faut et il suffit qu'il existe un élément non nul de $\mathrm{Ker}(\bigwedge^3 W \longrightarrow V)$ de la forme $h \wedge h' \wedge h''$.

L'assertion résulte alors du fait que dans la transformation de Semple duale, le point de $P^\vee$ correspondant à un élément décomposable non nul $h_1 \wedge h_2 \wedge h_3$ de $\mathrm{Ker}(\bigwedge^3 W \rightarrow V)$ est transformé en le plan de $P_W^\vee$ orthogonal à la droite d'équations (h_1, h_2, h_3) de P_W.

Dans le cas (a) où E est stable, la courbe $H \cap D$ est une quintique elliptique lisse de H, dont l'image réciproque sur $\tilde{S}$ est de classe $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{Num}(\tilde{S})$.

Dans le cas (b) où E est décomposable la courbe $H \cap D$ est réunion d'une droite A et d'une biquadratique B, se coupant en un point ω (avec tangentes distinctes). En effet le résiduel de A dans l'intersection de H et D est soit une biquadratique, soit la réunion d'une génératrice de D (pouvant coïncider avec A) et d'une cubique plane lisse; le plan de cette cubique couperait toutes les génératrices de D et serait donc contenue dans $\bar{Z}$ (transformation de Semple duale), ce qu'on a exclu.

Les classes dans $\mathrm{Num}(\tilde{S})$ des images réciproques respectives de A et B sur $\tilde{S}$ sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le point ω est l'image commune des 2 points d'intersection de ces images réciproques.

Soit maintenant C une courbe de degré d, tracée sur S, unisécante aux génératrices de S. Montrons que dans les cas (a) et (b) on a $h^1(J_C(d-4)) = 0$ pour $d \geq 8$. D'après le corollaire 1.2.1 on doit vérifier que $h^0(\mathrm{Sym}_{d-8}(E)^\vee \otimes L) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L de degré (d-10) (L est ici $\mathcal{O}_X(-2)$ tensorisé par $\mathcal{O}_C(1)$ au moyen de la projection (isomorphisme) de C sur X), d'une part, $h^1(J_C \otimes \mathcal{O}_{D \cap H}(d-4)) = 0$

d'autre part . Le degré de $Sym_{d-8}E^{\vee}\otimes L$ est $(d-7)(10-\frac{3}{2}d)<0$.
Si E est stable ,ce fibré est semi-stable et n'a donc pas de section.
Si E est décomposable en somme directe de fibrés de rang un ,ce fibré se décompose en somme directe de fibrés dont le dont le degré maximum est $(6-d)<0$;il n'a donc pas de section.
Dans le cas (a) où $D\cap H$ est une quintique elliptique lisse,C coupe $D\cap H$ selon un diviseur de degré $(3d-5)$:en effet les classes de C (resp $D\cap H$) dans $Num(\tilde{S})$ sont $\begin{pmatrix} d-5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$). La forme bilinéaire d'intersection est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.Par conséquent $\mathcal{O}_{D\cap H}\otimes J_C(d-4)$ est un module inversible de degré $(2d-15)$ sur $D\cap H$,donc $h^1(\mathcal{O}_{D\cap H}\otimes J_C(d-4))$ est nul compte tenu des hypothèses faites sur d.
Dans le cas (b),C coupe A (resp B)selon un diviseur de degré (d-3) (resp 2d-2) . On a une suite exacte $0\to\mathcal{O}_B(-\omega)\to\mathcal{O}_{D\cap H}\to\mathcal{O}_A\to 0$
d'où par tensorisation avec $J_C(d-4)$ une suite exacte:

$$0\to\mathcal{O}_B(-\omega)\otimes J_C(d-4)\to\mathcal{O}_{D\cap H}\otimes J_C(d-4)\to\mathcal{O}_A\otimes J_C(d-4)\to 0$$

Le terme de gauche est un $\mathcal{O}_B$-module de degré (2d-15),le terme de droite est un $\mathcal{O}_A$-module de degré -1;donc $h^1(\mathcal{O}_{D\cap H}\otimes J_C(d-4))=0$

§4. Courbes de degré inférieur à 9

On a $d \geqslant 3$ car X n'est pas plane. Si $d \leqq 6$ l'équivalence du théorème 0.1 s'obtient par des arguments élémentaires sauf si $(d,g) = (5,2)$. Dans ce dernier cas la courbe a des trisécantes mais $h^1(J_X(1)) = 0$.

On suppose donc que $7 \leq d \leq 9$. On va adapter le raisonnement de [4] 2.1

On suppose que X a un genre $g \geqslant 2$ et on considère un fibré inversible positif "général" A de degré $(g-2)$ sur $\tilde{X}$.

On a la résolution suivante :

$$0 \to \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^3}(-4) \oplus \mathcal{O}^{\alpha}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to \mathcal{O}^{\beta}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus \mathcal{O}^{\gamma}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathcal{O}^{d-5}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to p_*A \to 0$$

Si $\beta = 0$ on montre comme dans [4] que J_X est $(d-3)$-régulier donc $H^1(J_X(d-4)) = 0$. Si $\beta \neq 0$ on transpose avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)$; on obtient alors

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \oplus \mathcal{O}^{d-5}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to \mathcal{O}^{\gamma}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}^{\beta}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathcal{O}^{\alpha}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^3} \to (p_*A)^{\vee}\omega_X \to 0$$

De cette résolution on déduit la composition :

$$\mathcal{O}^{\beta}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_0 \cdots \\ H_1 \cdots \end{pmatrix}} \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{(s_0, s_1)} (p_*A)^{\vee}\omega_X \to 0$$

H_0 et H_1 sont des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$, s_0 et s_1 sont 2 sections indépendantes de $(p_*A)^{\vee}\omega_X$; on a $s_0H_0 + s_1H_1 = 0$. Il en résulte que $L = H_0 \cap H_1$ est une $(d-g)$-sécante à X.

Si X est hyperelliptique, le diviseur positif "général" de degré $(g-2)$ sur $\tilde{X}$ a pour complémentaire relativement à $\omega_{\tilde{X}}$ le composé du $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module inversible de degré deux à deux sections et d'un diviseur positif de degré $(g-2)$ formé de points fixes. Les plans H_0 et H_1 se coupent donc en une $(d-2)$-sécante à X.

Si X n'est pas hyperelliptique, $A^{\vee} \otimes \omega_{\tilde{X}}$ est engendré par ses 2 sections. Notons Y le quotient de $\tilde{X}^{g-2}$ par l'action du groupe des permutations des facteurs, $\bar{A}$ le $\mathcal{O}_{Y \times \tilde{X}}$-module inversible "naturel" dont la restriction à la fibre de la classe de $(x_1, \qquad x_{g-2})$ est $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(x_1 + \ldots + x_{g-2})$, $p_Y : Y \times \tilde{X} \to Y$, $p_X : Y \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ les projections

Par hypothèse la restriction à la fibre de tout point de Y du $\mathcal{O}_{Y \times \tilde{X}}$-module $\bar{A}^{\vee} \otimes p_X^*(M \otimes \omega_{\tilde{X}})$ a des sections non nulles, autrement dit $p_{Y*}(A^{\vee} \otimes p_X^*(M \otimes \omega_{\tilde{X}}) = 0$

D'autre part $p_{Y*}(A \otimes p_X^* \omega_{\tilde{X}})$ est un $\mathcal{O}_Y$-module sans torsion de rang

deux ,et $H^0(M^\vee)$ contient le dual de $V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$.
Il existe donc un ouvert non vide U de Y et au dessus de U une application linéaire surjective de $V^\vee \otimes \mathcal{O}_Y$ dans $p_{Y*}(A^\vee \otimes p_{\tilde{X}}^*(\omega_{\tilde{X}}))$. Ceci définit un morphisme de U dans la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$ dont l'interprétation est de transformer un diviseur effectif de degré (g-2) "assez général" D, en une droite rencontrant X selon un diviseur D' de degré d-g tel que $\omega_{\tilde{X}}(-D+D') \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$. Comme $d \geqslant 7$ ceci ne peut se produire pour $g \geqslant 4$ (lemme des trisécantes): en effet(si U est assez petit)le morphisme de U dans G est ensemblistement injectif donc l'adhérence de l'image de U est de dimension g-2. Ceci implique $4-(d-g) \geqslant g-2$ d'après le lemme des trisécantes ($g-2 \geqslant 2$) donc $d \leq 6$. Supposons maintenant que g=3 .Soit s le degré de la surface réglée adhérence de l'image de U dans G.
Cette surface est une composante de toute surface de degré (d-4)contenant X car elle est formée de (d-3)-sécantes.Comme $h^0(\mathcal{O}_X(d-4)) = d(d-4)-2$ ona l'inégalité $\binom{d-1}{3} \leq \binom{d-1-s}{3} + d(d-4)-2$ .Ceci est impossible car la surface réglée est de genre 3 donc $s \geqslant 4$;ce raisonnement suppose que la courbe X est tracée sur une surface de degré (d-4). c'est évidemment le cas compte tenu de nos hypothèses ($g=3, d \geqslant 7$).Enfin dans le cas g=2 on trouve une (d-2)-sécante.
Compte tenu de la proposition 1.1 il faut maintenant considérer les courbes rationnelles et elliptiques de degré 7 et 8.

Courbe rationnelle de degré 7

On considère la décomposition de M .Si M a un facteur direct de degré -1 il y a une 6-sécante [4] ;sinon $M = \mathcal{O}^2(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)$ et la courbe est sur une surface réglée de degré 4 . Si le lieu double de cette surface est une cubique gauche on est dans un cas d'exception .Si le lieu double n'est pas une cubique gauche on a une 5-sécante.

Courbe elliptique de degré 7

On a $H^1(J_X(3)) \neq 0$ pour la courbe eliptique générale de degré 7.Montrons qu'une telle courbe n'a pas de 5-sécante.
Le plongement normal a lieu dans $\mathbb{P}^6$ .X est donc l'image d'une courbe $\bar{X}$ normale elliptique de degré 7, $\bar{X}$,par une projection de sommet $H \simeq \mathbb{P}^2$.

X a une 5-sécante si et seulement si H est contenu dans un sous-espace projectif de dimension 4 de $\mathbb{P}^6$, L, rencontrant $\bar{X}$ en 5 points.
Les plans H vérifiant cette hypothèse constituent une variété de dimension 5 + 6 = 11
La grassmannienne des plans de $\mathbb{P}^6$ est de dimension 12.
On voit donc que la courbe elliptique générale de degré 7 de $\mathbb{P}^3$ n'a pas de sécante . C'est donc à nouveau un cas d'exception.

Courbe rationnelle de degré 8

On considère la décomposition de M. Si M a un facteur de degré -1, X a une 7-sécante .Sinon $M = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(-3)$ ou $M = \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)$
Dans le premier cas la filtration de Harder-Narasimhan est $0 \to B \to M \to Q \to 0$ avec $B = \mathcal{O}(-2)$ et $Q = \mathcal{O}(-3)$. On a $h^1(B \otimes Q \otimes A) = 0$ et l'argument de la fin de la démonstration de la proposition 1.1 montre que X admet une 6-sécante si $h^1(J_X(4)) > 0$. Dans le second cas X est tracée sur une surface réglée rationnelle de degré 4.
Si le lieu double de cette surface est une cubique gauche ,celle -ci coupe X en 14 points et $h^1(J_X(4)) = 1$.
On est alors dans un cas d'exception .Sinon on a une 6-sécante.

Courbe elliptique de degré 8

On se propose de montrer que l'assertion du théorème 0.1 est vérifiée dans ce cas.Commençons d'abord par établir un lemme probablement bien connu mais dont nous n'avons pas trouvé de démonstration.

Lemme 4.1:

Soit $S \subset \mathbb{P}^2$ un groupe de points de degré d. Soit $k = \sup(n, H^1(J_S(n)) \neq 0)$
Supposons que $d \leq 2k + 2$ .Alors ,ou bien S est l'intersection d'une conique et d'une courbe de degré k+1 ,ou bien il existe une droite L telle que $\deg(S \cap L) = k+2$.

Démonstration : On remarque d'abord que $d \geq k+2$,l'égalité ayant lieu si et seulement si S est sur une droite.En effet soit L une droite ne rencontrant pas S. On a la suite exacte :

$$0 \to H^0(J_S(l)) \to H^0(J_S(l+1)) \to H^0(\mathcal{O}_L(l+1)) \to H^1(J_S(l)) \to H^1(J_S(l+1)) \to 0 \quad (l \geqslant -2)$$

Comme $\oplus\, H^0(\mathcal{O}_L(l))$ est un quotient de $\oplus\, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n))$ on voit que si $H^0(J_S(l+1)) \to H^0(\mathcal{O}_L(l+1))$ est surjectif pour un $l_0 \geqslant -1$, il l'est pour tout $l \geqslant l_0$. Mais il ne peut l'ètre pour $l = k$,car $H^1(J_S(k)) \neq 0$ et $H^1(J_S(k+1)) = 0$.

La suite $h^1(J_S(l))$ $-1 \leq l \leq k+1$ est strictement décroissante.Comme $h^1(J_S(-1)) = d$,on a $k \leq d-2$. Si S n'est pas sur une droite , $h^1(J_S(1)) = d-3$ et $k \leq d-3$. Dans tous les cas $d \geqslant k+2$.Soit m le plus petit entier $\geqslant k+1$ tel que $J_S(m)$ soit engendré par ses sections.
On a $m = k+1$ ou $k+2$ car $h^1(J_S(l)) = 0$ pour $l \geqslant k+1$.

Montrons qu'il existe une courbe réduite irréductible section de $J_S(m)$ Posons $h^0 = h^0(J_S(m)), h^0 = \binom{m+2}{2} - d$. Comme $J_S(m)$ est engendré par ses sections ,celles ci sont les images des sections hyperplanes d'un morphisme de l'éclatement $\tilde{\mathbb{P}}^2$ de S dans $\mathbb{P}^2$,dans un espace projectif $\mathbb{P}^{h_0-1}$; si l'image de ce morphisme est une surface ,le théorème de Bertini assure l'existence de la courbe cherchée.

Sinon l'image est une courbe intègre de $\mathbb{P}^{h_0-1}$,non dégénérée,donc de degré $\delta \geqslant h^0-1$. Une section générale de $J_S(m)$ admet δ composantes irréductibles de degré $\geqslant 1$ chacune , donc $\delta \leq m$ i-e $\binom{m+2}{2} - d - 1 \leq m$.
Ceci n'est possible que pour $m = k+1, 0 \leq m \leq 3$,donc $0 \leq k \leq 2$ et donc $d \leq 6$
Ce cas a déjà été traité.

Soit donc C une courbe intègre (réduite et irréductible)de degré m contenant S. Notons $J_{S/C}$ l'idéal de S dans C. On a $h^0(\check{J}_{S/C}(m-k-3)) \neq 0$
En effet $h^0(\check{J}_{S/C}(m-k-3)) = h^1(J_{S/C}(k))$. Par ailleurs la suite exacte $0 \to H^1(J_S(k)) \to H^1(J_{S/C}(k)) \to H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-m)) \to 0$ montre que $H^1(J_{S/C}(k)) \neq 0$

Comme C est intègre la transposée $J_{S/C}(k+3-m) \to \mathcal{O}_C$ d'une section non nulle de $\check{J}_{S/C}(m-k-3)$ définit un groupe de points de degré $d-m(k+3-m)$. Si $m=k+1$ ce degré est nul car $d \leq 2k+2$. Donc $d=2k+2$ et $J_{S/C} = \mathcal{O}_C(-2)$. S est donc l'intersection complète de C et d'une conique .

Considérons maintenant le cas $m = k+2$. Le groupe de points S' section de $J_{S/C}^{\vee}(m-k-3)$ est de degré $d-k-2 \leq k$. Par suite $h^1(J_{S'}(k-1)) = 0$.

La suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k-2) \to J_{S'} \to J_{S'/C} \to 0$ donne

$$0 \to H^1(J_{S'}(k-1)) \to H^1(J_{S'/C}(k-1)) \to H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) = \mathbb{C}$$

On a alors $h^1(J_{S'/C}(k-1)) = h^1(J_{S/C}(k)) = h^1(J_S(k)) = 1$

Soit $0 \to \bigoplus \mathcal{O}(-n_{a_j}) \xrightarrow{M} \bigoplus \mathcal{O}(-n_{b_i}) \to J_S \to 0$ la résolution de J_S. Les n_{a_j} sont $\leq k+3$ et l'égalité est atteinte pour un seul; les n_{b_i} sont $\leq k+2$ et l'un au moins est égal à $k+2$.

On peut donc construire un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus \mathcal{O}(-n_{a_j}) & \longrightarrow & \bigoplus \mathcal{O}(-n_{b_i}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}(-k-3) & \xrightarrow{L} & \mathcal{O}(-k-2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

où L est une droite . En restreignant ce diagramme à L on voit que $L \cap S$ est de degré $\geq k+2$ C.Q.F.D

Exemple: si $d=8$ et $h^1(J_S(3)) \neq 0$ S est sur une conique ou contient 5 points alignés; si $h^1(J_S(4)) \neq 0$, S contient 6 points alignés.

Voyons maintenant comment ce lemme peut être utilisé.

Soit C une courbe elliptique de degré 8. Si C est sur une surface cubique celle-ci n'a que des singularités isolées et on trouve facilement la 6-sécante. On suppose donc que C n'est pas sur une cubique. On a $h^1(J_C(k)) = 4,6,4$ pour $k=1,2,3$

a) Supposons que $h^1(J_C(4)) \geq 2$. Il existe alors (au moins) un plan H tel que la multiplication $H^1(J_C(3)) \xrightarrow{H} H^1(J_C(4))$ ne soit pas surjective

En effet si l'on choisit des bases de $H^1(J_C(3))$ et $H^1(J_C(4))$, la matrice de la multiplication par H s'écrit $(l_{ij}(H))$ $0 \leq i \leq h^1(J_C(4))$, $0 \leq j \leq 4$ où les l_{ij} sont des fontions linéaires homogènes de H, et la variété des mineurs maximaux de cette matrice est non vide puisque $h^1(J_C(4)) \geq 2$

Soit H un tel plan ; la suite exacte $H^1(J_C(3)) \xrightarrow{H} H^1(J_C(4)) \to H^1(J_{C\cap H}(4))$ montre que $H^1(J_{C\cap H}(4)) \neq 0$ donc H contient une 6-sécante à C d'après le lemme.

b) [illegible]

b) Supposons que $h^1(J_C(4))=1$ et que $H^1(J_C(3)) \xrightarrow{H} H^1(J_C(4))$ est l'application nulle pour un plan H;comme dans a)on obtient $H^1(J_{C\cap H}(4))\neq 0$ donc H contient une 6-sécante.

c) Supposons maintenant que $h^1(J_C(4)) = 1$ et $H^1(J_C(3)) \xrightarrow{H} H^1(J_C(4))$ n'est nul pour aucun H. Soit C' la liée de C par 2 quartiques(nécéssairement intègres). Le module de Horrocks-Hartshorne-Rao $\bigoplus H^1(J_{C'}(n))$ est le dual (relativement à $\mathbb{C}$) de $\bigoplus H^1(J_C(n+4))$.

En particulier on a $h^1(J_{C'}(n))=1,4,6,4,0$ pour $n=0,1,2,3,4$ et l'application $H^1(J_{C'})\otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \longrightarrow H^1(J_{C'}(1))$ est bijective.

Notons que $H^0(\mathcal{O}_{C'})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre finie de rang 2,donc isomorphe à $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{C}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2=0$

1) $H^0(\mathcal{O}_{C'}) = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$

$C' = C'_1 \cup C'_2$ où C'_1 et C'_2 sont des courbes disjointes.L'idéal de C'_i dans C' est engendré par un idempotent e_i de $H^0(\mathcal{O}_{C'})$.L'image de e_i dans $H^0(\mathcal{O}_{C'_i})$ est non nulle donc $e_iH^1(J_{C'_i})\otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \longrightarrow H^1(J_{C'}(1))$ est injectif.Le lemme du serpent permet alors de dire que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{C'_i}(1))$ est surjectif donc bijectif.

La courbe C n'étant pas sur une surface cubique on a $H^1(\mathcal{O}_{C'}(1))= 0$

Donc on a $H^1(\mathcal{O}_{C'_i}(1))= 0$ et donc $\chi(\mathcal{O}_{C'_i}(1))=4$ i.e $d_i-g_i=3$.

Par ailleurs $H^0(\mathcal{O}_{C'_i})=\mathbb{C}$ donc $g_i\geqslant 0$ .Puisque $d_1+d_2 = 8$ les deux possibilités sont:

-- $d_1=3$ $g=0$ $d_2=5$ $g=2$

-- $d_1=d_2=4$ $g_1=g_2=1$

Supposons que $d_1=3$ et $d_2=5$. On a alors $h^0(J_{C'_1}(2))\geqslant 3$ et $h^0(J_{C'_2}(2))\geqslant 1$ ($H^0(\mathcal{O}_{C'}(2)=0)$ .Comme $h^0(J_{C'}(4))=3$,on a nécéssairement $h^0(J_{C'_1}(2))=3$ et $h^0(J_{C'_2}(2))=1$ et toute quartique contenant C' est produit de deux quadriques contenant C'_1 et C'_2 respectivement.

Ceci est impossible puisque C' est contenue dans l'intersection de deux quartiques intègres.Si maintenant $d_1=d_2=4$ on a $h^0(J_{C'_i}(2))\geqslant 2$.

Comme $h^0(J_{C'}(4))=3$ on obtient une contradiction en tenant compte du lemme suivant:

Lemme 4.2 (Clifford)

Soient U,V,W 3 $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimensions respectives u,v,w. Soit $f:U\otimes V \to W$ une application linéaire .On suppose que $f(x\otimes y)\neq 0$ pour $x\neq 0$ et $y\neq 0$ .Alors $w \geq u+v-1$;si $w=u+v-1$ alors tout élément non nul z de W s'écrit $z=f(x\otimes y)$ pour un couple (x,y) convenable.

2) $H^0(\mathcal{O}_{C'})= \mathbb{C}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2=0$

Notons C'_1 la courbe définie dans C' par l'idéal Ann(ε) dans $\mathcal{O}_{C'}$ et C'_2 la courbe définie par Ann(Ann(ε)).Notons I l'idéal Ann(Ann(ε))

On a une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{C'_1} \xrightarrow{\varepsilon} I \to F \to 0$ où F est un module de support fini.Soit d_i le degré de C'_i;on a $d_1+d_2=8$.

On note g_i le genre arithmétique de C'_i.Comme l'image de ε dans $H^1(J_{C'})$ est non nulle,$H^0(I(1)) \to H^1(J_{C'}(1))$ est injective;de plus $H^1(I(1))=0$ car $H^1(\mathcal{O}_{C'_2}(1))=0$.(C' n'est pas sur une cubique)

Il en résulte que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_{C'}(1))$ est bijective (lemme du serpent). (C'_1 n'est pas plane du fait que $C'_2\subset C'_1$)

Comme précédemment on obtient $d_i-g_i=3$;la suite exacte

$0 \to H^0(I) \to H^0(\mathcal{O}_{C'}) \to H^0(\mathcal{O}_{C'_1}) \to H^1(I) \to H^1(\mathcal{O}_{C'}) \to H^1(\mathcal{O}_{C'_1}) \to 0$

donne $\chi(\mathcal{O}_{C'_1}) = h^1(I)-1$ et $-1\leq \chi(\mathcal{O}_{C'_1})\leq 1$;donc $0 \leq g_1 \leq 2$

Par ailleurs ,d_1=4 ou 5 ($d_2 \leq d_1$) .Si $d_1=4(g_1=1)$ on a $h^0(J_{C'_1}(2)) \geq 2$

Comme $J_{C'} \supset J_{C'_1}^2$ on obtient une contradiction en utilisant le lemme de Clifford.Si $d_1 = 5(g_1=2)$ on a $h^0(J_{C'_1}(2))=1$ (sinon on a encore une absurdité).Le lemme de Castelnuovo montre que $J_{C'_1}$ est engendré par $h^0(J_{C'_1}(3))$,donc C'_1 est liée à une droite par une quadrique et une surface cubique.

C'_1 est donc arithmétiquement Cohen-Macaulay ,en particulier $h^0(\mathcal{O}_{C'_1})=1$

On a $h^0(\mathcal{O}_{C'_2}) \leq h^0(I) = 1$ donc $g_2\geq 0$.Comme $h^1(\mathcal{O}_{C'_2}(2))=0$, on obtient $h^0(J_{C'_2}(2))\geq 3$. Ainsi toute quartique contenant C' est produit de la quadrique contenant C'_1 et d'une quadrique contenant C'_2

On a encore une contradiction.

La courbe elliptique de degré 8 n'est donc pas une exception.

Bibliographie

[1] D.Buchsbaum et D.Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension three. Amer.Jour of Math Vol 99, n°3, pp.447-485

[2] G.Castelnuovo, Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica.
Rend.Cir Mat, Palermo 7 (1893)

[3] W.Fulton, Intersection Theory
Springer-Verlag

[4] L.Gruson, R.Lazarsfeld, C.Peskine On a theorem of Castelnuovo and the Equations defining space curves
Inv Math n°72 1983.

[5] G.Harder, M.S.Narasimhan, On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves.
Math Ann Vol 212, 1975

[6] R.Hartshorne, Algebraic Geometry
Springer-Verlag - New-York

[7] D.Northcott, Finite free resolutions.
Cambridge tract 71, App C.

[8] M.Raynaud, Sections des fibrés vectoriels sur une courbe
Bull.Soc.Math.France, 110, 1982.

[9] J.G.Semple, L.Roth, Introduction to Algebraic Geometry

J.d'Almeida
Université des Sciences
et Techniques de Lille
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

RÉSUMÉ

Soit X une courbe lisse, complète, gauche de degré d et de genre g de $\mathbb{P}^3$ (espace projectif de dimension trois sur $\mathbb{C}$).

On montre que la série linéaire "découpée" sur X par les surfaces de degré (d-4) est incomplète si et seulement si X a une (d-2)-sécante sauf dans trois cas où l'on a $d = 7$, $g = 0$; $d = 7$, $g = 1$; $d = 8$, $g = 0$.

MOTS CLES : Série linéaire ; Sécante ; Fibré vectoriel ; Eclatement ; Surface réglée ; Lien singulier.