

50376
1986
177

50376
1986
177

N° D'ORDRE : 11

T H E S E

PRÉSENTÉE À

L'INSTITUT INDUSTRIEL DU NORD

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR INGENIEUR

PAR

C. PRZYBYLSKI

INGÉNIEUR IDN

Maître en mathématiques

SUR LA REDUCTION STRUCTURELLE
DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES
A COEFFICIENTS PRESQUE PERIODIQUES



SOUTENUE LE 16 AVRIL 1986 DEVANT LE JURY D'EXAMEN :

J.C. GENTINA	: PRÉSIDENT
J.P. RICHARD	: RAPPORTEUR
P. BORNE	: EXAMINATEUR
G. DAUPHIN-TANGUY	: EXAMINATEUR
L. POVY	: EXAMINATEUR
M. TURPIN	: INVITÉ

à Edouard

à François Laurent

AVANT - PROPOS

—

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'IDN, sous la direction de Monsieur J.P. RICHARD.

Nous tenons tout particulièrement à saluer la mémoire du Professeur François LAURENT, Directeur du Laboratoire de Systématique de l'Université de Lille I et Professeur à l'IDN, qui sut faire naître notre goût profond pour la recherche en Automatique et qui fut l'inspirateur de cette thèse. Qu'elle lui soit un dernier témoignage de reconnaissance.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur GENTINA, Directeur de l'IDN, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'être Président du jury de thèse.

Nous sommes particulièrement reconnaissante envers Monsieur J.P. RICHARD, Docteur d'Etat, Maître de Conférences à l'IDN, Rapporteur sur ce mémoire, qui a su entretenir en nous l'enthousiasme que nous avait communiqué François LAURENT. Son extrême compétence, le temps et l'intérêt qu'il a bien voulu nous consacrer et l'amitié qu'il nous a toujours accordée nous ont permis de surmonter les périodes d'inquiétude et d'achever dans les meilleures conditions les travaux entrepris.

Tous nos remerciements vont à Madame G. DAUPHIN, Docteur d'Etat, à Monsieur le Professeur P. BORNE et à Monsieur le Professeur L. POVY, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à notre travail et pour avoir accepté de le juger.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur M. TURPIN, Directeur du Centre d'Etudes et Recherches de Charbonnages de France, pour l'extrême attention avec laquelle il a envisagé nos travaux de recherche. Il nous a témoigné sa confiance en acceptant de participer à notre jury ; sa présence nous a profondément touchée.

Nous sommes également reconnaissante envers Mademoiselle S. PERRENOT, Madame M.C. BUCK et tout le personnel de la bibliothèque du CERCHAR, qui nous ont apporté avec beaucoup de gentillesse une aide précieuse et fructueuse dans nos travaux de recherches bibliographiques.

Nous tenons enfin à remercier Madame M. BIRCK dont la cordialité, la générosité et les conseils éclairés ont permis la réalisation et la présentation matérielle de ce mémoire, ainsi que Madame FERRAR et toutes les personnes qui se sont fort aimablement chargées de son impression.

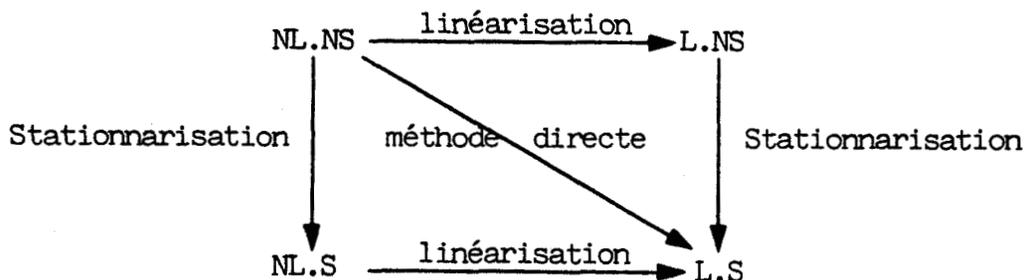
SOMMAIRE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A LA NOTION DE REDUCTION STRUCTURELLE D'UN SYSTEME

- I - RAPPEL DES NOTIONS RELATIVES AUX SYSTEMES ETUDIES
- II - STABILITE D'UN ENSEMBLE ET D'UN POINT D'EQUILIBRE
- III - CARACTERISATION DE LA PROXIMITE DE DEUX TRAJECTOIRES
- IV - TRANSFORMATIONS ALGEBRIQUES DE L'EQUATION D'ETAT PRESERVANT LA PROXIMITE DES TRAJECTOIRES
 - IV.1. - Transformations du vecteur état (changement de variables)
 - IV.1.1. - Cas des systèmes linéaires non stationnaires (théorie de Floquet)
 - IV.1.2. - Généralisation aux systèmes non linéaires non stationnaires
 - IV.2. - Transformations de la fonction d'état (changement de structure)
 - IV.2.1. - 1re méthode de Lyapunov
 - IV.2.1.a. - $A(t)$ constante
 - IV.2.1.b. - $A(t)$ non constante
 - IV.2.2. - Méthode de centrage
 - IV.2.3. - Systèmes pseudo-majorants d'ordre q
- V - METHODOLOGIE POUR LA REDUCTION DES SYSTEMES

Méthodes de réduction préservant la proximité topologique
ou Méthodes de réduction par comparaison des propriétés de
stabilité, selon le schéma suivant :

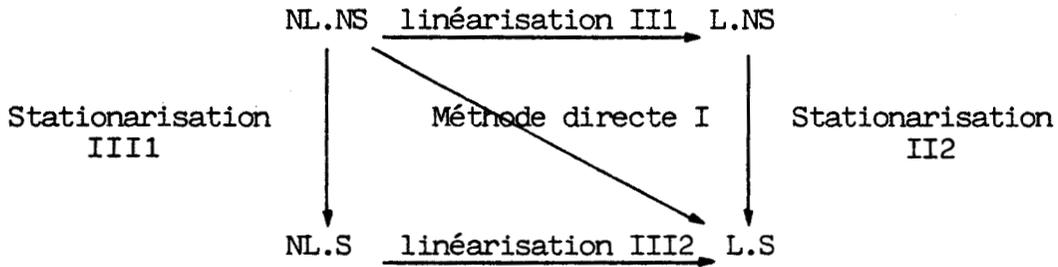


ANNEXE I

ANNEXE II

CHAPITRE 2

LES METHODES DE REDUCTION EXISTANTES



I - LES METHODES DIRECTES

I.1. - Réduction préservant la proximité topologique
Systèmes pseudo-majorants d'ordre q - critère pratique
de Borne et Gentina

I.2. - Réduction par comparaison des propriétés de stabilité

I.2.1. - 2e méthode de Lyapunov

I.2.2. - Fonctions de Lyapunov vectorielles

I.2.3. - Méthode de Cook

I.2.4. - Méthode de Nagaraja et Chalam

II - LINEARISATION PUIS STATIONARISATION

II.1. - Réduction préservant la proximité topologique

II.1.1. - Linéarisation : 1re méthode de Lyapunov

II.1.2. - Stationarisation :

II.1.2.a. - Théorie de Floquet-Lyapunov

II.1.2.b. - Cas des systèmes
presque-périodiques

II.2. - Réduction par comparaison des propriétés de stabilité

II.2.1. - Linéarisation

II.2.2. - Stationarisation : méthode de Jones et Robe

III - STATIONARISATION PUIS LINEARISATION

III.1. - Réduction préservant la proximité topologique

III.1.1. - Stationarisation : théorème de centrage
changement de variable de Meerkov

III.1.2. - Linéarisation : 1re méthode de Lyapunov

III.2. - Réduction par comparaison des propriétés de stabilité

III.2.1. - Stationarisation

III.2.2. - Linéarisation : la conjecture du linéaire

CHAPITRE 3

CAS PARTICULIER DES SYSTEMES PERIODIQUES LINEARISES : APPLICATION DE LA THEORIE DE FLOQUET-LYAPUNOV

I - THEORIE DE FLOQUET-LYAPUNOV

I.1. - Rappel du théorème de Floquet-Lyapunov

I.2. - Méthodes numériques

I.3. - Méthodes analytiques ; la commutativité

I.4. - Réponse impulsionnelle ; réponse échantillonnée

II - PROGRAMME INFORMATIQUE DE DETERMINATION DE $V = \exp(MT)$

III - EXEMPLES D'APPLICATIONS

III.1. - Equation de Mathieu (linéaire-non stationnaire)

III.1.1. - Méthodes de réduction non numériques

III.1.1.a. - Cook

III.1.1.b. - Nagaraja et Chalam

III.1.1.c. - Jones et Robe

III.1.1.d. - Wu

III.1.1.e. - Méthode de centrage

III.1.2. - Méthode numérique ; conclusion

III.2. - Moteur possédant une charge périodique
(non linéaire - non stationnaire)

III.2.1. - Méthodes de réduction non numériques

III.2.1.a. - Méthodes directes :

Nagaraja-Chalam

III.2.1.b. - Stationnarisation puis
linéarisation : méthode de
centrage

III.2.1.c. - Linéarisation puis stationnarisation : Jones et Robe et Cook

III.2.2. - Méthode numérique

IV - CONCLUSION

ANNEXE

CHAPITRE 4

APPLICATION DE LA METHODE DE CENTRAGE A LA SYNTHESE DES SYSTEMES DE TYPE LURIE-POSTNIKOV

I - THEOREME DE CENTRAGE APPLIQUE A UN SYSTEME DE TYPE LURIE-POSTNIKOV

Théorème I
Théorème II
Théorème III
Démonstrations

II - EXEMPLE D'UN SYSTEME DE TYPE LURIE-POSTNIKOV D'ORDRE 3 SANS INTEGRATEUR

II.1. - Réduction préservant la proximité topologique. Méthode de
centrage

II.1.1. - Linéarisation puis stationnarisation

II.1.2. - Stationnarisation puis majoration par le
critère de Borne et Gentina

II.2. - Réduction par comparaison des propriétés de stabilité

II.2.1. - Méthode de Cook

II.2.2. - Méthode de Nagaraja et Chalam

II.2.3. - Majoration : critère pratique de
Borne et Gentina

II.3. - Comparaison des différentes méthodes

III - APPLICATION A LA SYNTHESE D'UN SYSTEME DE TYPE LURIE-POSTNIKOV D'ORDRE 3 AVEC INTEGRATEUR

IV - CONCLUSION

INTRODUCTION

—

SUR LA REDUCTION STRUCTURELLE
DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES
A COEFFICIENTS PRESQUE-PERIODIQUES

INTRODUCTION GENERALE

La conception d'une commande en temps réel d'un système automatique se heurte souvent à une difficulté d'analyse qui s'accroît avec la dimension et la complexité des processus mis en jeu.

Différentes études ont été consacrées au problème de la réduction de dimension, et recourent, en général, à des décompositions en sous-systèmes interconnectés orientées en fonction de la nature des sous-systèmes ou de la possibilité de séparer leur dynamique.

Le travail présenté dans ce mémoire concerne un autre aspect de la simplification de modèles, visant à réduire la complexité structurelle liée à la présence de composants non linéaires ou non stationnaires dans le processus considéré.

Notre étude portera essentiellement sur les systèmes continus dont les paramètres non stationnaires suivent des lois d'évolution de type périodique ou presque-périodique. Contrairement au cas linéaire stationnaire, la résolution analytique de tels systèmes est impossible.

La démarche adoptée consiste donc à libérer directement ou progressivement un modèle initial non linéaire (NL) et non stationnaire (NS) de ses termes non constants, de manière à obtenir un modèle plus simple, linéaire (L) ou stationnaire (S).

.../

Deux objectifs doivent alors être pris en compte :

- d'une part, il peut être souhaitable d'éviter une réduction trop complète, qui ne pourrait refléter toute la richesse dynamique du système initial.
En ce sens, une réduction progressive de structure s'avère préférable, l'utilisateur pouvant alors choisir le degré de réduction qui lui convient.
- d'autre part, il importe que le système réduit obtenu soit aussi simple que possible à étudier, le cas idéal selon cet objectif étant celui d'un modèle linéaire stationnaire.

Il est donc essentiel de disposer de critères liés au premier objectif et de méthodes respectant le second.

Dans le 1er chapitre, nous définissons de façon rigoureuse les critères que nous emploierons pour évaluer la proximité de deux trajectoires correspondant par exemple à celles du système initial et du système qui lui est associé par réduction.

La théorie de la proximité que nous proposons est directement inspirée des définitions usuelles de stabilité.

Le 2e chapitre est consacré à un recensement de différentes méthodes de réduction structurelle des systèmes non linéaires à coefficients presque-périodiques (techniques de majoration, méthode directe de Lyapunov, méthode de Cook, la 1re méthode de Lyapunov, théorie de Floquet, centrage de Bogolioubov).

Le 3e chapitre développe la théorie de Floquet (systèmes L.NS) en proposant différentes approches analytiques et numériques conduisant au calcul d'un modèle de type L.S.

En association avec la notion de la conjecture du linéaire, ceci nous permet de juger de la qualité des conclusions obtenues par des méthodes spécifiques aux systèmes non linéaires.

.../

Dans le 4e chapitre, des résultats originaux sont présentés, qui concernent l'application du théorème de centrage de Bogolioubov et Mitropolsky à des modèles pratiques non linéaires de type Lurié-Postnikov.

Ces résultats s'obtiennent en adoptant un changement de variable proposé par Meerkov dans le cas de systèmes linéaires.

Ils permettent d'envisager la stabilisation de systèmes non linéaires à partir d'une commande à gain périodique.

Tout au long de ce travail, des exemples d'applications et des simulations viendront illustrer de manière concrète nos résultats.

CHAPITRE I

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A LA NOTION DE REDUCTION STRUCTURELLE D'UN SYSTEME

De nombreux travaux concernant la simplification des systèmes automatiques complexes font intervenir soit des réductions de structure, consistant à remplacer le système initial par un modèle plus simple, mais souvent du même ordre, soit des réductions d'ordre d'un modèle donné en conservant sa structure.

Nous limiterons volontairement notre étude en ne considérant pas les réductions d'ordre. Pour plus de détails concernant ce domaine, on pourra se référer à des études récentes comportant une importante bibliographie (Dauphin 1983, Iung 1981).

Notre démarche s'inscrit plutôt dans le premier type de simplifications. Elle consiste à libérer progressivement un système non linéaire et non stationnaire de ses termes non constants, pour aboutir finalement à un modèle plus simple, si possible linéaire et stationnaire, dont l'étude doit permettre de dégager certaines informations relatives au système initial.

Il est nécessaire, pour cela, d'éviter une réduction trop restrictive, où toute la richesse dynamique du système complexe nous échapperait.

Nous tentons au contraire de définir un modèle qui coïncide le mieux possible avec le système qui nous intéresse, de telle manière que leurs trajectoires restent proches, ou que leurs comportements soient semblables, au moins sur le plan de la stabilité.

Dans un premier temps, nous aurons à résoudre le problème de la définition rigoureuse et de l'évaluation du concept de proximité topologique.

.../

Nous présenterons ensuite quelques transformations sur l'équation d'état qui préservent la proximité des trajectoires originales et des trajectoires transformées et qui constituent le matériau principal des méthodes de réduction que nous proposerons.

I - RAPPELS DES NOTIONS RELATIVES AUX SYSTEMES ETUDIES

Les systèmes considérés dans cette étude sont de type continus non linéaires et non stationnaires (NL.NS) régis par l'équation d'état suivante :

$$(I.1) \quad \frac{d}{dt}x(t; x_0, t_0) = \dot{x}(t) = f(x, t) \quad (x \in X, t \in T)$$

où $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une fonction continue.

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{R}^q / \|x\| < k\} \\ T &= [t_0, +\infty[, t_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nous supposons que pour toutes conditions initiales $(x_0, t_0) \in X \times T$, le système possède une unique solution notée $x(t; x_0, t_0)$, définie pour tout t , vérifiant $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$.

Parmi les systèmes non stationnaires au sens large, nous nous intéresserons plus particulièrement à ceux dont les termes non stationnaires sont presque périodiques, c'est-à-dire que (Bass, 1971) :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad (\delta(\epsilon) \text{ longueur d'inclusion}) \quad \text{tel que} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists T \in [\alpha, \alpha + \delta(\epsilon)[\quad \forall x, t \quad \|f(x, t + T) - f(x, t)\| < \epsilon \end{aligned}$$

Nous privilégierons à l'intérieur de cette classe l'ensemble des systèmes périodiques pour lesquels il existe un réel T , appelé période, tel que :

$$(I.2) \quad \forall (x, t) \in X \times T \quad f(x, t + T) = f(x, t)$$

Pour la plupart des systèmes non linéaires non stationnaires, la résolution analytique intégrale est impossible. Notre étude consiste alors à préciser le comportement du système, en priorité sur le plan de ses trajectoires, sinon sur le plan de la stabilité.

.../

Le concept de stabilité tend à étudier si, lorsqu'un système a une première réponse (nominale) pour un ensemble donné de paramètres ou de conditions initiales, une autre réponse, obtenue pour de petites variations des paramètres ou des conditions initiales, est proche de la réponse nominale.

D'autre part, le but de cette étude est d'associer à un système complexe un autre système, plus simple, dont la réponse, pour les mêmes conditions initiales, est très proche de celle du système original.

L'unification des concepts de stabilité et de proximité semble donc particulièrement intéressante. Nous nous inspirerons, dans cette optique, des notions de stabilité introduites par Lyapunov (1892) et de leur formulation présentée par Bhatia et Szegö (1970).

II - STABILITE D'UN ENSEMBLE ET D'UN POINT D'EQUILIBRE

Pour toute condition initiale (x_0, t_0) on définit l'ensemble $\Omega(x_0, t_0)$ appelé ensemble limite, de la manière suivante :

$$\Omega(x_0, t_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^q / \exists (t_n)_n \text{ séquence avec } t_n \rightarrow +\infty \right. \\ \left. \text{telle que } x(t_n; x_0, t_0) \rightarrow y \right\}$$

M étant un sous-ensemble non vide de l'espace \mathbb{R}^q , on peut associer une région d'attraction $A(M)$ définie par :

$$A(M) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^q / \exists t_0 \in \mathbb{R} \quad \Omega(x_0, t_0) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \Omega(x_0, t_0) \subset M \}$$

Toute trajectoire issue de la région d'attraction de M revient donc dans M au bout d'un temps infini.

.../

On dit alors que :

- U est un voisinage de M si chaque point de M peut être le centre d'une boule ouverte incluse dans U.
- M est stable si chaque voisinage U de M contient un voisinage V de M tel que si l'état initial x_0 se trouve dans V à un instant t_0 , l'état ultérieur $x(t; x_0, t_0)$ se trouve dans U.
- M est attractif si sa région d'attraction $A(M)$ est un voisinage de M.

Ces définitions présentent un grand intérêt dans le cas particulier où M est réduit à un point unique, le point d'équilibre (ou point critique) x_e du système ($\forall t \in \mathbb{R} \quad x_e = x(t; x_e, t_0)$).

Elles s'énoncent alors plus simplement sous la forme :

- l'équilibre x_e est stable (ou $\{x_e\}$ est un ensemble stable au sens de Bhatia et Szegö) si et seulement si :

$$\forall \epsilon \in]0, +\infty[\quad \forall t_0 \in \mathbb{T} \quad \exists \delta(t_0, \epsilon) \in]0, +\infty[\\ \|x_0 - x_e\| < \delta(t_0, \epsilon) \implies \forall t \in [t_0, +\infty[\quad \|x - x_e\| < \epsilon$$

- l'équilibre x_e est attractif si et seulement si la région d'attraction $A(\{x_e\})$ est un voisinage de x_e :

$$\forall t_0 \in \mathbb{T} \quad \exists \Delta(t_0) > 0 \quad \forall x_0 \in X \quad \text{tel que} \quad \|x_0 - x_e\| < \Delta(t_0) \\ \text{on a} \quad \forall \rho > 0 \quad \exists \tau(t_0, x_0, \rho) \quad \forall t > t_0 + \tau \quad \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \rho$$

- l'équilibre x_e est asymptotiquement stable si et seulement si, il est à la fois stable et attractif.

.../

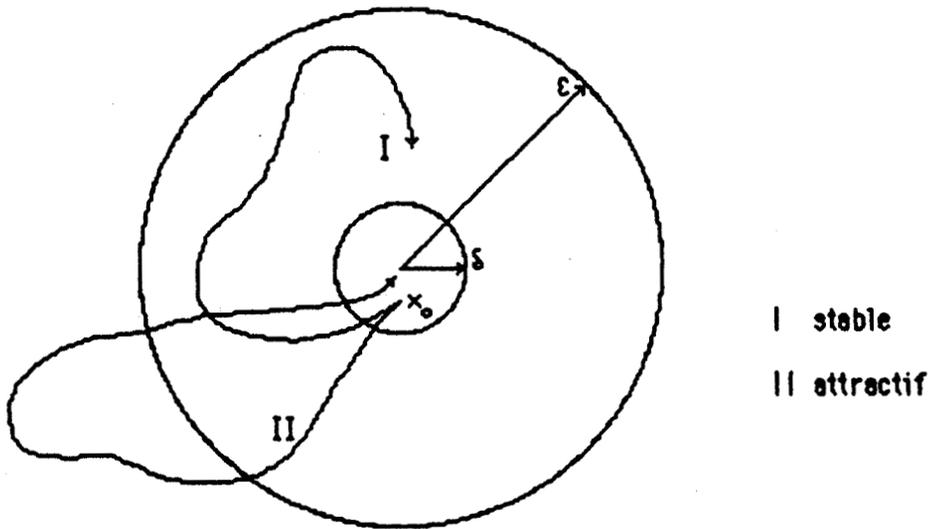


FIGURE I.1

Dans le cas des systèmes non stationnaires, ces propriétés de stabilité peuvent être vérifiées non plus pour tout instant initial t_0 de T mais uniquement pour un sous-ensemble T_0 de conditions initiales temporelles.

Cette influence de t_0 a été mieux spécifiée par Grujić (1975) qui définit de manière rigoureuse le concept de domaine de stabilité, et la stabilité ou l'attractivité par rapport à un ensemble d'instant initial.

Signalons cependant que ce problème ne se pose pas dans notre étude en raison du fait que les systèmes non stationnaires que nous considérons sont pour la plupart périodiques ; dans ce cas, en effet, la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre est nécessairement uniforme (HAHN, 1963).

Les définitions données ci-dessus sont courantes dans le cas de la stabilité d'un système au voisinage d'un point d'équilibre, mais elles sont également transposables pour caractériser la proximité de deux trajectoires. Il suffit pour cela de prendre pour ensemble M les points de la trajectoire de référence.

III - CARACTERISATION DE LA PROXIMITE DE DEUX TRAJECTOIRES

Soient $x(t; x_0, t_0)$ et $y(t; y_0, t_0)$ deux trajectoires dans l'espace \mathbb{R}^q , associées à des systèmes qui peuvent être différents.

Nous nous plaçons au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} du premier système qui, par définition, est un ensemble invariant, c'est-à-dire (Bhatia et Szegö), une courbe fermée vérifiant :

$$\forall x_0 \in \hat{x} \quad \forall t_0 \in T \quad \forall t > t_0 \quad x(t; x_0, t_0) \in \hat{x}$$

(\hat{x} peut être réduite à un point d'équilibre).

En définissant la distance $d(x_0, \hat{x}) = \inf_{x \in \hat{x}} \|x_0 - x\|$, nous dirons que x et y sont :

- Définition 1 : à écart maximal η si :

$$\forall x_0 \in X \quad \forall t_0 \in T \quad \forall t \geq t_0 \quad \|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\| < \eta$$

- Définition 2 : proches au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} de x si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \in T \quad \exists \delta(t_0, \epsilon) \text{ tel que } \forall (x_0, t) \in X \times T \\ d(x_0, \hat{x}) < \delta(t_0, \epsilon) \implies \forall t > t_0 \quad \|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\| < \epsilon$$

- Définition 3 : proches si elles sont proches au voisinage de toute trajectoire d'équilibre de x .

- Définition 4 : attractives au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} de x si :

$$\forall t_0 \in T \quad \exists \Delta(t_0) > 0 \text{ tel que } \forall x_0 \in X \\ d(x_0, \hat{x}) < \Delta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\| = 0$$

.../

- Définition 5 : attractives si elles sont attractives au voisinage de toute trajectoire d'équilibre \hat{x} de x .

- Définition 6 périodiquement topologiquement égales si :

$$\exists T \forall t_0 \in T \forall x_0 \in X \exists t_1 > t_0 \exists y_0 \in X \text{ tels que}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x(t_1 + nT; x_0, t_0) = y(t_1 + nT; y_0, t_0)$$

- Définition 7 : presque-périodiquement topologiquement égales si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists T \in [\alpha, \alpha + \delta(\epsilon)[$$

$$\forall (x_0, t_0) \in X \times T \exists t_1 > t_0 \exists y_0 \in X \text{ pour lesquels}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x(t_1 + nT; x_0, t_0) - y(t_1 + nT; y_0, t_0)\| < \epsilon$$

Nous verrons par la suite que l'égalité topologique (presque-)périodique de deux trajectoires est liée à la notion algébrique d'équivalence topologique de deux représentations matricielles (Markus 1955, Langenhop 1960, Harris et Miles 1981, Shokoohi et Al 1983).

Enfin, il peut être intéressant de comparer la stabilité de deux modèles au voisinage de leurs trajectoires d'équilibre respectives :

- Définition 8 : on suppose que le système représenté par $x(t; x_0, t_0)$ possède une unique trajectoire d'équilibre \hat{x} pour $x_0 \in X$.

Soit $y(t; y_0, t_0)$ une trajectoire dans l'espace \mathbb{R}^p qui vérifie

$$\dot{y} = g(y, t) \quad (y, t) \in Y \times T$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^p / \|y\| < k\}$$

et possédant elle-aussi une unique trajectoire d'équilibre \hat{y} pour $y_0 \in Y$.

Nous dirons que le système représenté par x présente une stabilité comparable à celle du système représenté par y si :

\hat{y} asymptotiquement stable pour $y \implies \hat{x}$ asymptotiquement stable pour x .

.../

Nous pouvons d'emblée déduire plusieurs constatations :

Remarque 1 : si on remplace, dans les définitions précédentes :

$\|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\|$ par $d(x(t); x_0, t_0, \hat{x})$, on obtient des énoncés permettant de caractériser la stabilité (définition 2) ou l'attractivité (définition 4) d'une trajectoire d'équilibre.

Remarque 2 : si, au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} , les trajectoires x et y sont proches, alors \hat{x} est aussi une trajectoire d'équilibre \hat{y} pour le système représenté par y .

Il suffit, pour montrer cela, de prendre x_0 sur \hat{x} (la démonstration complète est donnée dans l'annexe 1).

Remarque 3 : si, au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} , les trajectoires x et y sont attractives, alors \hat{x} contient l'ensemble limite des trajectoires y initialisées sur \hat{x} (voir la démonstration dans l'annexe 1).

La deuxième remarque nous permet alors d'énoncer la proposition suivante (démontrée dans l'annexe 1) :

Remarque 4 : si, au voisinage de l'origine, point d'équilibre d'un système, un autre système lui est proche et attractif, alors les deux systèmes sont à stabilité comparable, c'est-à-dire :

définition 2 + définition 4 \longrightarrow définition 8

En revanche, l'égalité topologique (presque périodique) des trajectoires ne permet pas de conclure que les deux systèmes sont à stabilité comparable.

On peut remarquer d'autre part que deux modèles à stabilité comparable n'ont pas systématiquement la même dimension. On parle alors de modèle de comparaison.

.../

Remarque 5 : Il est possible de montrer sans difficulté que les relations de proximité et d'attractivité sont des relations d'équivalence.

L'égalité topologique (périodique ou presque-périodique) par contre ne l'est pas systématiquement car cette propriété de proximité est liée à l'instant initial t_1 et à la (pseudo-) période T .

On peut illustrer toutes ces définitions sur quelques exemples :

. 1er exemple : Soit le système d'ordre 2 défini par :

$$(I.3) \quad \dot{X} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} X$$

Les valeurs propres du systèmes sont $-\lambda+j$ et $-\lambda-j$.

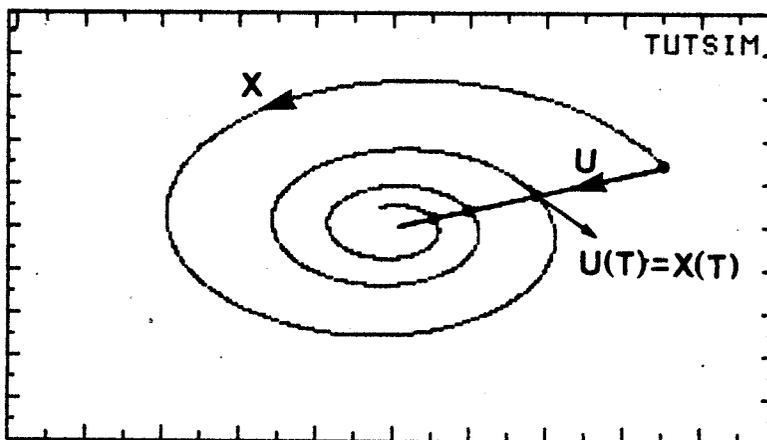
Effectuons le changement de variable $U = P(t)X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Alors $\dot{U} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} U$, c'est-à-dire que $U = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et

$$X = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} u_0 \cos t - v_0 \sin t \\ u_0 \sin t + v_0 \cos t \end{pmatrix}$$

Dans l'espace d'état, les trajectoires coïncident à chaque période : elles sont périodiquement topologiquement égales :



.../

FIGURE I.2

De plus, $\forall t > t_0 \quad \|U-X\| < e^{-\lambda t} \sqrt{2} (|u_0| + |v_0|)$

Donc, si $\lambda > 0$, les trajectoires sont proches et attractives, et par conséquent à stabilité comparable.

. 2e exemple : Cas du pendule amorti dont l'angle vérifie l'équation différentielle

$$(I.4) \quad J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$\forall k \in \mathbb{Q}$, au voisinage de $\theta = 2k\pi$, les trajectoires sont attractives et proches de celles du système

$$(I.5) \quad J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + mgl (\theta - 2k\pi) = 0$$

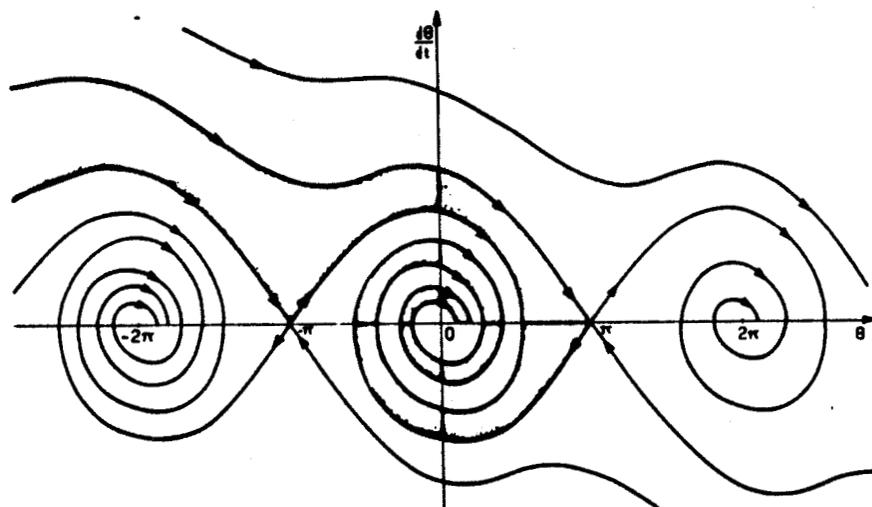


FIGURE I.3

Considérons à présent deux systèmes différents dont les trajectoires, pour des conditions initiales identiques, sont voisines. A la similitude topologique des trajectoires, il devrait être possible d'associer une similitude de certaines propriétés algébriques des équations d'état des deux systèmes.

Inversement, il existe des transformations d'une équation d'état qui ont peu d'influence sur certains invariants algébriques du système associé, et préservent ainsi la proximité des trajectoires respectives du système original et du système transformé.

.../

IV - TRANSFORMATIONS ALGEBRIQUES DE L'EQUATION D'ETAT PRESERVANT LA PROXIMITE DES TRAJECTOIRES

Pour un système représenté par l'équation d'état $\dot{x} = f(x,t)$ les transformations possibles portent sur le vecteur état x , ou sur la fonction d'état f .

IV.1. - Transformations du vecteur état (changement de variable)

IV.1.1 - Cas des systèmes linéaires non stationnaires : le concept de similitude cinématique par changement de variable portant sur le vecteur état a son origine dans les travaux de Floquet (1883) ou de Lyapunov (1892) et à été développé par Markus (1955) et Langenhop (1960) dans le cas des systèmes linéaires non stationnaires représentés par $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Une représentation $\bar{A}(t)$ est dite algébriquement équivalente à $A(t)$ ($\bar{A} \sim A$) s'il existe une matrice $P(t)$:

- . continue différentiable
- . non singulière $\forall t$

telle que, par la transformation $x = P(t)u$, on se ramène au système $\dot{u}(t) = \bar{A}(t)u(t)$.

Si de plus $P(t)$ est telle que P , P^{-1} et \dot{P} sont continus et bornées sur \mathbb{R}^+ (respectivement sur \mathbb{R}), alors \bar{A} est topologiquement équivalente (respectivement complètement topologiquement équivalente) à A (d'après Shokohi, Silverman et Van Dooren, 1983) au sens algébrique.

Certains auteurs (Harris et Miles, 1981) adoptent plutôt l'appellation " \bar{A} (complètement) cinématiquement semblable à A ".

Après transformation, la relation entre A et \bar{A} s'écrit :

$$(I.6) \quad \bar{A}(t) = P^{-1}(t) A(t) P(t) - P^{-1}(t) \dot{P}(t)$$

et il est facile de vérifier que l'équivalence algébrique et l'équivalence topologique sont effectivement des relations d'équivalence.

.../

Dans les cas où $P(t)$ est une matrice constante, la relation d'équivalence est appelée équivalence statique, cas particulier d'équivalence cinématique.

Le fait que le changement de variable $P(t)$ varie avec le temps signifie que la nouvelle base de coordonnées est en mouvement par rapport aux coordonnées initiales.

Ainsi, comme le fait remarquer Markus, si la condition P et P^{-1} bornées n'est pas imposée, il est possible de transformer toute matrice A en la matrice nulle. Il suffit pour cela que $P(t)$ soit la solution de $\dot{P} = AP$, c'est-à-dire que par rapport au système de coordonnées initial, la vitesse relative des nouvelles coordonnées est nulle.

Donc, en imposant les conditions P et P^{-1} bornées, on préserve la structure uniforme de l'espace d'état, et la stabilité a dans ce cas une signification invariante.

Plus précisément, sur le plan de la similitude des propriétés des systèmes associés par la transformation :

- il a été montré (Harris et Miles 1981, Shokoohi et Al. 1983) que :

- . les propriétés entrées-sorties des systèmes sont invariantes par équivalence algébrique. Cependant, les propriétés internes changent, par exemple la stabilité et le caractère borné des coefficients des matrices.
- . par ailleurs, avec l'équivalence topologique, la stabilité interne (et le caractère borné des matrices) est préservée et les exposants caractéristiques et leur multiplicité sont invariants.

.../

- nous pouvons affirmer que deux systèmes (algébriquement) topologiquement équivalents sont proches et attractifs, et donc à stabilité comparable, à la condition que l'un des deux soit asymptotiquement stable.

En effet, dans les définitions 2 et 4, si les trajectoires $u(t)$ sont asymptotiquement stables, on peut rendre aussi petite que l'on veut la différence $\|x(t)-u(t)\| = \|P(t)-Id\| \times \|u\|$.

Du point de vue de la réduction structurelle des systèmes, il devient alors particulièrement intéressant de mettre en évidence des matrices qui soient topologiquement égales à des matrices constantes.

Théorie de Floquet (matrices $A(t)$ périodiques ou presque-périodiques)

Le théorème de Floquet nous permet d'affirmer que les matrices périodiques sont réductibles à des matrices constantes par équivalence topologique (c'est-à-dire que le système $\dot{x} = A(t)x$ où $A(t)$ est une matrice périodique peut être ramené, par un changement de variable périodique $P(t)$, au système linéaire constant $\dot{u} = Mu$).

Les matrices presque-périodiques ne le sont pas nécessairement ; Langenhop (1960) a cependant proposé des conditions suffisantes pour que de telles matrices soient complètement topologiquement équivalentes à des matrices constantes par l'intermédiaire d'un changement de variable $P(t)$ presque-périodique.

L'équivalence topologique de deux systèmes garantit une similitude de comportement des trajectoires ; en effet :

- pour les matrices périodiques le changement de variable $P(t)$ est périodique (de période T). Ainsi, si $P(0) = Id$, pour des conditions initiales identiques $x_0 = u_0$, les trajectoires $x(t; x_0, t_0)$ et $u(t; x_0, t_0)$ vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \quad x(t_0 + nT; x_0, t_0) = u(t_0 + nT; x_0, t_0)$ et sont donc périodiquement topologiquement égales, quel que soit l'instant initial t_0 .

.../

- pour les matrices presque-périodiques le changement de base est presque-périodique et les trajectoires associées par la transformation sont presque-périodiquement topologiquement égales.

IV.1.2. - Généralisation aux systèmes non linéaires non stationnaires

Les transformations précédemment décrites ne peuvent s'appliquer directement aux systèmes non-linéaires.

Une généralisation du théorème de Floquet est cependant proposée par Lochak (1981).

Si $\dot{x} = f(x,t)$ est un système périodique non linéaire, soit $x(t; x_0, t_0)$ une solution issue de x_0 à l'instant t_0 , alors il existe une famille de transformations :

$$g(t, t_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x_0 \longmapsto g(t, t_0)(x_0) = x(t; x_0, t_0)$$

que l'on peut composer par la loi \circ et telles que :

$$(I.7) \quad \begin{cases} \cdot g(t', t) \circ g(t, t_0) = g(t', t_0) \\ \cdot g(t+T, T) = g(t, 0) \\ \cdot g(t+nT, t_0) = g(t, t_0) \circ g(T, 0)^n \end{cases}$$

Contrairement au cas du linéaire, ces transformations ne vérifient pas :

$$(I.8) \quad g(t+s, 0) = g(t, 0) \circ g(s, 0) = g(s, 0) \circ g(t, 0) \quad \forall t, s$$

.../

ce qui signifie en pratique qu'une trajectoire, partant d'une même position x_0 a un comportement différent suivant l'instant initial choisi ($g(t+s, s) \neq g(t, 0)$).

Mais, s'il est possible de définir des transformations $g^*(t, t_0)$ solutions du système qui approchent $x(t, t_0)$ et vérifient la relation (I.8), alors le changement de variable dans le théorème de Floquet généralisé devient $P(t) = g^*(t, t_0) \circ g(-t, t_0)$ et pour $u = P(t)x = g^*(t, t_0)(x_0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(t+s) - u(t)}{s} \\
 \text{(I.9)} \quad &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[g^*(t+s, t_0) - g^*(t, t_0)](x_0)}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g^*(s, 0) - g^*(t_0, t_0)}{s} \circ g^*(t, t_0)(x_0)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire le système non linéaire $\dot{u} = f^*(u)$.

La possibilité de déterminer $g^*(t, t_0)$ à partir de $g(t, t_0)$ est appelée "réductibilité canonique". C'est une extension non linéaire du théorème de Floquet et par là-même de l'équivalence topologique. La mise en oeuvre pratique reste cependant délicate.

IV.2. - Transformations de la fonction d'état (changement de structure)

IV.2.1. - 1re méthode de Lyapunov

On considère le système $\dot{x} = f(x, t)$ possédant 0 comme point critique pour $t \geq t_0$. S'il est possible d'écrire $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$ où, pour x petit, $f_2(x, t)$ est négligeable devant $f_1(x, t)$, (c'est-à-dire $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que $\forall (x, t) \in X \times T$

$$\|x\| < \delta \implies \|f_2(x, t)\| < \epsilon \|f_1(x, t)\| \quad)$$

alors définissons le système $y = f_1(y, t)$ appelé la 1re approximation du système initial (Lyapunov 1892, Lefschetz 1957). .../

On peut s'attendre à ce qu'au voisinage de 0, les deux systèmes soient dans une certaine mesure proches. Cependant, sous cette forme générale, il est très difficile de comparer leur comportement.

En revanche, si f_1 est une fonction linéaire de x , c'est-à-dire $f_1(x,t) = A(t)x$, la comparaison devient plus aisée.

IV.2.1.a. - Si $A(t)$ est constante, le système s'écrit $\dot{x} = Ax + q(x,t)$ avec $q(x,t)$ continue pour : $\|x\| < r$ et $t > \tau$

La condition " f_2 négligeable devant f_1 " s'exprime ici par $q(x,t) = o(\|x\|)$ uniformément en t c'est-à-dire que :

$$(I.10) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \|x\| < \delta \implies \|q(x,t)\| < \varepsilon \|x\|$$

On peut montrer (cf. annexe 2) que, dans ces conditions, et si A est asymptotiquement stable en 0 :

- 1) le système $\dot{x} = Ax + q(x,t)$ est asymptotiquement stable en 0,
- 2) les trajectoires (pour des conditions initiales identiques) du système et de sa première approximation sont attractives et proches (et donc à stabilité comparables).

IV.2.1b - Si $A(t)$ n'est pas constante mais périodique ou presque-périodique.

Contrairement à ce qui se passe quand A est constante, la stabilité asymptotique de la 1re approximation n'entraîne pas automatiquement la stabilité du système original. Une condition supplémentaire est requise, qui est l'existence d'une fonction de Lyapunov "forte" pour la 1re approximation, ou, d'une manière équivalente, que celle-ci remplisse les conditions de Perron ou celles de Persidskii (Lefschetz, 1957).

..../

Par contre, d'après les travaux de Lyapunov, on peut conclure sur la proximité des trajectoires, suivant la démarche décrite figure I.4 :

Par le théorème de Floquet (éventuellement généralisé au cas presque-périodique) on transforme le système $\dot{x} = A(t)x + q(x, t)$ en un second représenté par $\dot{y} = My + P(t)q(x, t)$ avec $y = P(t)x$ et $M = P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t)$.

$P(t)$ est bornée, donc $P(t)q(x, t)$ est une fonction de y , négligeable devant $\|y\|$ quand celle-ci tend vers 0.

D'après les propriétés vues pour la 1re approximation de Lyapunov, les trajectoires y du système $\dot{y} = My + P(t)q(x, t)$ et celles de sa 1re approximation $\dot{v} = Mv$ sont attractives et proches.

D'autre part, en effectuant le changement de variable $v = P(t)u$ où $P(t)$ est périodique (respectivement presque-périodique), les trajectoires u et v sont périodiquement (respectivement presque-périodiquement) topologiquement égales.

Et finalement, x et u , trajectoires associées au système original et à sa 1re approximation, sont périodiquement (respectivement presque-périodiquement) attractives et proches (c'est-à-dire que les trajectoires échantillonnées périodiquement sont attractives et proches).

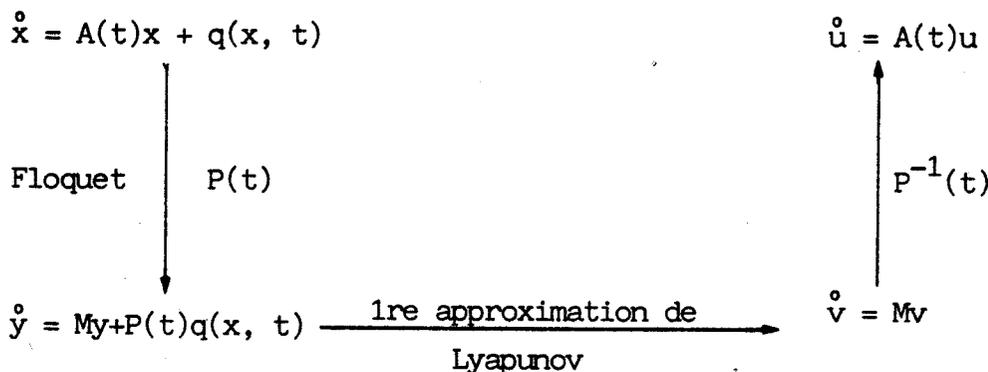


FIGURE I.4

IV.2.2. - Méthode de centrage (Bogolioubov-Mitropolsky 1961)

On traite ici un système non linéaire presque-périodique où la pseudo-période est très petite, sous la forme standard :

$$(I.11) \quad \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, \tau) \quad \text{avec } \varepsilon \text{ petit}$$

f presque-périodique

Au système sous forme standard est associé un système centré (ou moyenné) représenté par :

$$(I.12) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon f_0(\xi)$$

$$\text{avec } f_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, \xi) d\tau$$

(respectivement $\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, \xi) d\tau$ si f est périodique de période T).

Les théorèmes de centrage de Bogolioubov établissent des relations qui lient l'état x et son approximation centrée ξ (voir Bogolioubov et Mitropolsky 1961, Sanchez-Palencia 1975, Balbi 1982) :

Théorème : Si f , définie sur $X \times T$ (X domaine compact de \mathbb{R}^q) vérifie :

$$f : X \times T \longrightarrow \mathbb{R}^q \text{ bornée et continue}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} : X \times T \longrightarrow \mathbb{R}^q \text{ bornée et continue}$$

Alors :

1. La différence entre les trajectoires du système standard et du système centré partant des mêmes conditions initiales tend vers 0 avec ε , pour τ appartenant à un intervalle de temps fini de la forme $[\tau_0, L/\varepsilon[$:

$$\forall \rho, \eta > 0 \quad \forall L > 0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ pour lequel}$$

si $\xi(\tau)$ est une solution de l'équation centrée définie sur $[\tau_0, +\infty[$ et telle que $\{x \in \mathbb{R}^q / \exists \tau \ \|x - \xi(\tau)\| < \rho\} \subset X$

alors :

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\quad \forall \tau \in [\tau_0, L/\varepsilon[\quad \|x(\tau) - \xi(\tau)\| < \eta$$

2. Si $\xi(\tau)$ est asymptotiquement stable, l'intervalle de temps de validité est infini : $[\tau_0, +\infty[$, ce qui signifie que :

$\forall \eta > 0 \exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,
 les trajectoires du système réel et du système centré sont à écart maximal η .

Ainsi, les trajectoires du système standard et du système centré sont d'autant plus voisines que la pseudo-période est plus petite.

Plus explicitement, elles sont à écart maximal $\eta(\varepsilon)$, avec $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (définition 1). On ne peut cependant affirmer, dans le cas général, ni qu'elles soient proches, ni qu'elles soient attractives, car leur position relative dépend de la pseudo-période ε .

IV.2.3. - Systèmes pseudo-majorants d'ordre q

Pour le système (I.13) $\dot{x} = A(x,t)x$, on définit :

- . $p(x)$ une norme vectorielle de x de dimensions $k \leq q$
- . D^+ la dérivée à droite de Rosenbrock.

L'équation d'état (I.14) $\dot{y} = M(x,t)y$ représente un système pseudo-majorant de (I.13) si et seulement si l'inégalité (I.15) est vérifiée composante par composante :

$$(I.15) \quad D^+ p(x) \leq M(x,t)p(x)$$

Pour rechercher la plus petite matrice pseudo-majorante, Grujić et Al. (1976) distinguent trois cas de figure, selon que $M(x,t)$ est :

- . non linéaire non stationnaire $M(x,t)$
- . linéaire non stationnaire $M(t)$,
- . constante M ,

et montrent que la réduction de complexité de $M(x,t)$ entraîne une diminution dans la précision de la majoration : $M(x,t) \leq M(t) \leq M$.

Ainsi, le système (I.13) présente une stabilité comparable à $M(x,t)$ qui est elle-même comparable à $M(t)$, comparable quant à elle à M .

..../

Le cas particulier où $k = q$ s'avère être particulièrement intéressant puisque, les systèmes de comparaison étant du même ordre, la méthode de majoration permet alors de préserver la proximité des trajectoires.

Proposition : Soit $M(\cdot)$ une matrice représentant un système pseudo-majorant d'ordre q de (I.13) ($M(\cdot)$ est égale à M , $M(t)$ ou $M(x,t)$).

Alors :

- . si $M(\cdot)$ est stable, les trajectoires de (I.13) et de $\dot{y} = M(\cdot)y$ sont proches,
- . si $M(\cdot)$ est asymptotiquement stable, les trajectoires sont aussi attractives.

Démonstration :

. l'attractivité est évidente, car x et y convergent vers 0,

. proximité : $y(t; x_0, t_0) \leq p(x(t; x_0, t_0)) \quad \forall (x_0, t) \in X \times T$.

La stabilité de $y = 0$ implique que $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \in T$

$\exists \delta(t_0, \varepsilon) \quad \|x_0\| < \delta(t_0, \varepsilon) \implies \|y(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon/2$

$p(x) \leq y \quad -y \leq -x \leq y$ et :

$$\|y-x\| \leq 2\|y\| < \varepsilon$$

V - METHODOLOGIE POUR LA REDUCTION DES SYSTEMES

Il existe dans la littérature beaucoup d'autres transformations garantissant la proximité des systèmes associés par réduction.

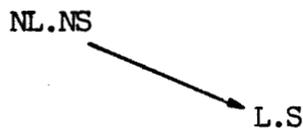
Certaines sont applicables uniquement aux systèmes linéaires non stationnaires (Floquet 1883, Campbell 1955, Burgat et Mira 1970, Jones et Robe 1973, Berkey 1976, Sinha et Al. 1979, Corral 1979, Wu 1981), d'autres permettent simplement de linéariser un système complexe (Lyapunov 1892, Aizermann 1949, Pliss 1958, Richard 1981), d'autres encore traitent en même temps les perturbations engendrées par les termes non linéaires et non stationnaires (Lyapunov 1892, Lurié 1951, Brockett 1966, Popov 1973, Nagaraja Chalam 1977, Grujić et Al. 1978, Cook 1979).

.../

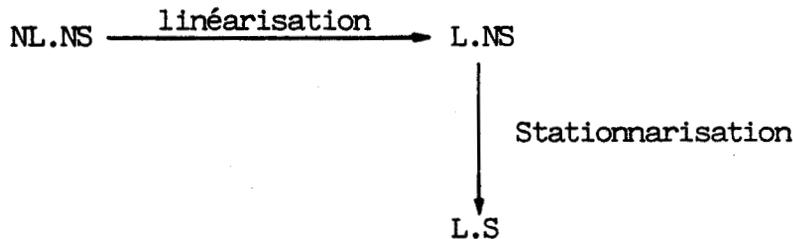
Toutes en tout cas tendent à extraire du système complexe un système libéré des non linéarités et/ou des non stationnarités.

Ces transformations, que nous appelons "méthodes de réduction préservant la proximité topologique" s'insèrent à l'intérieur de l'une des trois procédures envisageables :

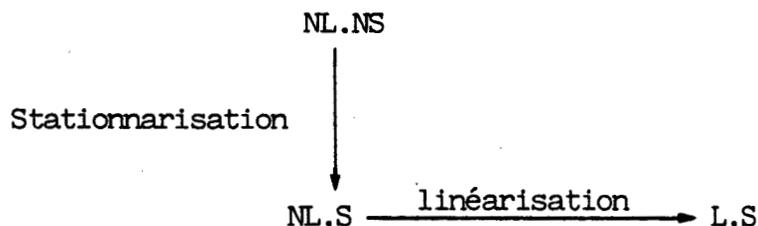
- 1) procédure directe en associant au système non linéaire et non stationnaire (NL.NS) un système linéaire et stationnaire (L.S) qui lui soit proche :



- 2) procédure par linéarisation (II.1) puis par stationnarisation (II.2)



- 3) procédure symétrique : par stationnarisation (III.1) puis par linéarisation (III.2)



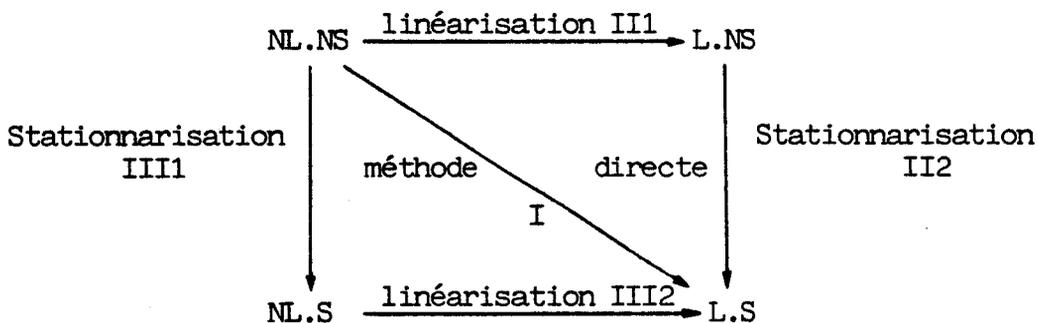
Dans les cas les plus complexes, il est rare que les méthodes préservant la proximité des systèmes aboutissent.

Nous devons alors recourir à des méthodes de comparaison permettant tout au moins de préciser le comportement du système sur le plan de la stabilité.

.../

Des exemples typiques de ce que nous appelons "méthodes de réduction par comparaison des propriétés de stabilité" sont la 2e méthode de Lyapunov ou le principe de comparaison mettant en oeuvre des matrices pseudo-majorantes ou minorantes d'ordre $k < q$.

De la même manière que précédemment, ces méthodes de réduction peuvent être classées suivant l'étape qu'elles représentent à l'intérieur d'une procédure :



CONCLUSION

L'originalité de la méthodologie proposée tient au fait que nous proposons non pas plusieurs techniques de réduction, aussi performantes soient-elles, mais plutôt une méthode systématique d'investigation (réduction directe, linéarisation puis stationnarisation, ou stationnarisation puis linéarisation) dont l'objectif essentiel est de comparer les résultats respectifs des techniques de réduction dont nous disposons et de minimiser ainsi l'écart entre le système réel et les modèles simplifiés correspondants.

Dans cette optique, une première difficulté a été levée en construisant un ensemble de notions qui sont représentatives du concept intuitif de proximité de deux systèmes, et qui peuvent fournir des critères précis de comparaison entre les différents modèles simplifiés d'un même système réel.

Dans un deuxième temps, la recherche et la mise en oeuvre des techniques de réduction constituent la partie pratique du problème, dont la solution n'est pas nécessairement définitive.

Ce sont les méthodes de réduction disponibles à l'heure actuelle que nous allons présenter maintenant.

ANNEXE 1

DEMONSTRATIONS RELATIVES AUX DEFINITIONS
CARACTERISANT LA PROXIMITE DE DEUX TRAJECTOIRES

1 - DEMONSTRATIONS DE LA REMARQUE 2

Si, au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} , les trajectoires x et y sont proches, alors \hat{x} est aussi une trajectoire d'équilibre pour le système représenté par y .

Démonstration. \hat{x} est une trajectoire d'équilibre pour x , donc :

$$\forall x_0 \in \hat{x} \quad \forall t_0 \in T \quad \forall t > t_0 \quad x(t; x_0, t_0) \in \hat{x}$$

Soit x_0 un point quelconque de \hat{x} , et t_0 un réel quelconque ; x et y sont proches au voisinage de \hat{x} , donc, d'après la définition 2 :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \in T \quad \forall t > t_0 \quad \|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon .$$

Supposons qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $y(t_1; x_0, t_0) \notin \hat{x}$, alors

$$\|x(t_1; x_0, t_0) - y(t_1; x_0, t_0)\| = \varepsilon_1 > 0$$

ce qui est impossible.

Donc $\forall x_0 \in \hat{x} \quad \forall t_0 \in T \quad \forall t > t_0 \quad y(t; x_0, t_0) \in \hat{x}$
et \hat{x} est trajectoire d'équilibre pour y .

2 - DEMONSTRATION DE LA REMARQUE 3

Si, au voisinage d'une trajectoire d'équilibre \hat{x} , les trajectoires x et y sont attractives, alors \hat{x} contient l'ensemble limite des trajectoires y initialisées sur \hat{x} .

Démonstration. Soit x_0 un point quelconque de \hat{x} , et t_0 un réel quelconque. Alors $\forall t > t_0 \quad x(t; x_0, t_0) \in \hat{x}$. x et y sont attractives au voisinage de \hat{x} , donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\| = 0$.

.../

Soit y_1 un point quelconque de $\Omega_y(x_0, t_0)$ ensemble limite des trajectoires y initialisées en x_0 , à l'instant t_0 . Alors $\exists (t_n)_n$ séquence avec $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ telle que $y(t_n; x_0, t_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y_1$.

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x(t_n; x_0, t_0) - y_1\| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x(t_n; x_0, t_0) - y(t_n; x_0, t_0)\| + \|y(t_n; x_0, t_0) - y_1\|$$

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x(t_n; x_0, t_0) - y_1\| = 0.$$

Alors, de la même manière que précédemment, on peut montrer par l'absurde que $y_1 \in \hat{x}$, d'où $\forall x_0 \in \hat{x} \quad \forall t_0 \in T \quad \Omega_y(x_0, t_0) \subset \hat{x}$.

3 - DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Définition 2 + Définition 4 \longrightarrow Définition 8.

Démonstration. Soit un système représenté par les trajectoires x , possédant l'origine comme point d'équilibre. On suppose que le système représenté par y lui est proche et attractif.

Alors :

a) d'après la remarque 2, l'origine est aussi un point d'équilibre pour y .

b) supposons que $\forall (x_0, t_0) \quad \forall t > t_0 \quad x(t; x_0, t_0)$ soit asymptotiquement stable.

Alors :

a - Stabilité de y en 0 : écrivons les définitions de :

. la stabilité de x en 0 :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \exists \delta_1(t_0, \epsilon) \quad \|x_0\| < \delta_1(t_0, \epsilon) \implies \forall t \quad \|x(t; x_0, t_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

.../

. la proximité de x et y au voisinage de 0 :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \exists \delta_2(t_0, \epsilon) \quad \|x_0\| < \delta_2(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t; x_0, t_0) - y(t; x_0, t_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

en prenant $\delta(t_0, \epsilon) = \min(\delta_1(t_0, \epsilon), \delta_2(t_0, \epsilon))$,

on obtient

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \exists \delta(t_0, \epsilon) \quad \|x_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow$$

$$\forall t \quad \|y(t; x_0, t_0)\| < \|x(t; x_0, t_0)\| + \|x(t) - y(t)\| < \epsilon$$

y est stable en 0.

b - Attractivité de y en 0 : écrivons les définitions de :

. l'attractivité de x en 0 :

$$\forall t_0 \in T \quad \exists \Delta_1(t_0) \quad \forall x_0 \quad \|x_0\| < \Delta_1(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

. l'attractivité de x et y au voisinage de 0 :

$$\forall t_0 \in T \quad \exists \Delta_2(t_0) \quad \forall x_0 \quad \|x_0\| < \Delta_2(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - y(t)\| = 0$$

avec $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$, on montre de la même manière que précédemment que y est attractive en 0.

Donc :

x asymptotiquement stable en 0 \longrightarrow y asymptotiquement stable en 0.

L'implication inverse se montre de la même manière.

ANNEXE 2

DEMONSTRATION DE LA PROXIMITE ET DE L'ATTRACTIVITE
DES TRAJECTOIRES D'UN SYSTEME ET DE SA 1re APPROXIMATION LINEAIRE

1 - DEMONSTRATION DU 1er THEOREME DE LYAPUNOV

1) Soit $y(t; y_0, t_0)$ une solution de $\dot{y} = Ay$.

Alors $y(t; y_0, t_0) = Y(t-t_0)y_0$ avec $Y(t) = e^{At}$, et comme :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t Y(t-u)q(x(u), u) du \right)$$

$$= Y(t-t)q(x(t), t) + \int_{t_0}^t AY(t-u)q(x(u), u) du$$

La solution de $\dot{x} = Ax + q(x, t)$ s'écrit sous la forme :

$$x(t; x_0, t_0) = Y(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t Y(t-u)q(x(u), u) du.$$

D'autre part, puisque A est asymptotiquement stable, $\exists \gamma > 0$ et $\exists \lambda > 0$ tels que $\|Y(u)\| < \gamma e^{-\lambda t} \quad \forall t > 0$.

Soit α tel que $\alpha < \lambda/\gamma$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0, t_0)\| &\leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\| + \int_{t_0}^t \gamma e^{-\lambda(t-u)} \|q(x(u), u)\| du \\ &\leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\| + \gamma \alpha e^{\lambda t} \int_{t_0}^t e^{-\lambda u} \|x(u)\| du. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $z(t) = e^{\lambda t} x(t; x_0, t_0)$ vérifie :

$$\|z(t)\| \leq \gamma \|z_0\| + \gamma \alpha \int_{t_0}^t \|z(u)\| du$$

donc $\|z(t)\| \leq \gamma \|z_0\| e^{\gamma \alpha (t-t_0)}$, ou encore

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| e^{-(\lambda - \gamma \alpha)(t-t_0)}$$

Le système non linéaire est donc asymptotiquement stable.

.../

2 - DEMONSTRATION DE LA PROXIMITE ET DE L'ATTRACTIVITE

2) Pour $x_0 = y_0$, par un raisonnement analogue,

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0, t_0) - y(t; y_0, t_0)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t Y(t-u) q(x(u), u) du \right\| \\ &\leq \gamma \alpha e^{-\lambda t} \int_{t_0}^t e^{\lambda u} \|x(u)\| du. \end{aligned}$$

Le système $\dot{x} = Ax + q(x, t)$ étant asymptotiquement stable en 0,
 $\forall \epsilon > 0 \exists T \in \mathbb{T}$ tel que :

$$\forall t > T \quad \|x(t; x_0, t_0)\| < \epsilon.$$

Donc pour $t > T$,

$$\begin{aligned} \|x(t; x_0, t_0) - y(t; y_0, t_0)\| &\leq \gamma \alpha \epsilon \frac{e^{\lambda(t-t_0)}}{\lambda} e^{-\lambda t} \\ &\leq \epsilon e^{-\lambda t_0}. \end{aligned}$$

a) Proximité :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \forall t_0 \quad \|x_0\| < \epsilon / e^{-\lambda t_0} &\implies \|x(u)\| < \frac{\gamma \epsilon}{e^{-\lambda t_0}} \\ \text{donc } \|x-y\| &\leq \gamma \alpha \frac{\epsilon}{e^{-\lambda t_0}} \cdot \frac{e^{\lambda(t-t_0)}}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} < \epsilon \end{aligned}$$

b) Attractivité : $\forall t_0 \in \mathbb{T} \quad \|x-y\| \leq \|x_0\| \gamma e^{(\gamma\alpha-\lambda)t} e^{(\lambda-2\gamma\alpha)t_0}$

la limite de $\|x-y\|$ est donc nulle quand $t \rightarrow +\infty$.

CHAPITRE II

—

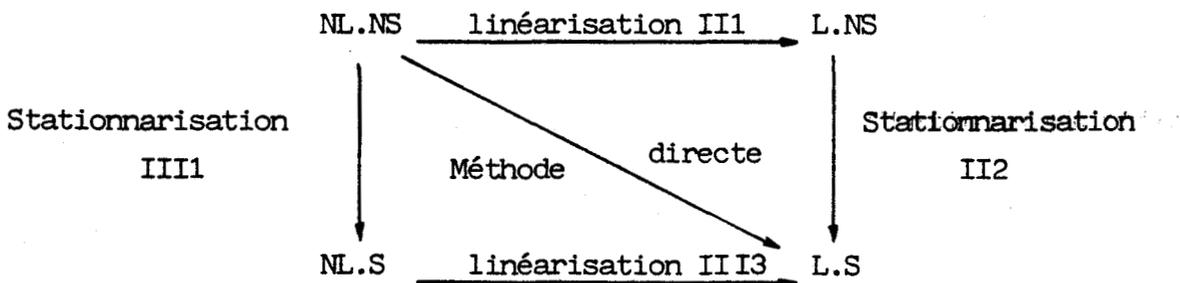
CHAPITRE 2

METHODES DE REDUCTION STRUCTURELLE

Cette partie concerne les principales méthodes de réduction proposées dans la littérature, pour un système non linéaire et non stationnaire représenté par $\dot{x} = f(x,t)$ (où f est presque-périodique en t).

Quelques unes ont été rapidement évoquées dans le chapitre précédent en tant qu'exemples de transformations préservant, lors de la réduction, certaines propriétés des systèmes.

Elles seront présentées étape par étape selon le schéma de réduction suivant :



Pour chaque méthode nous étudierons plus particulièrement son intérêt pratique, c'est-à-dire la facilité de sa mise en oeuvre et la qualité de ses résultats.

.../

I - LES METHODES DIRECTES

NL.NS

L.S



I.1. - Méthodes de réduction directe préservant la proximité topologique

Une méthode de réduction directe garantissant la proximité topologique a été présentée au chapitre I, § IV.2.3. : s'il est possible de déterminer pour le système (II.1) $\dot{x} = A(x,t)x$ un système du même ordre (II.2) $\dot{y} = M(x,t)y$ vérifiant (composante par composante) :

$$(II.3) \quad D^+p(x) \leq M(x,t)p(x)$$

avec $p(x)$: norme vectorielle de x de dim q
 D^+ : dérivée à droite

Alors la stabilité asymptotique de (II.2) garantit la proximité et l'attractivité des trajectoires x et y (Grujic, Gentina, Borne 1976).

Dans la pratique, une norme vectorielle d'ordre q couramment employée est $p(x) = (|x_i|)_i$.

Ainsi : une matrice pseudo-majorante :

. non linéaire non stationnaire $M(x,t)$ s'obtient en remplaçant dans $A(x,t)$ les termes hors diagonaux par leur valeur absolue.

. linéaire non stationnaire $M(t)$ est composée des valeurs maximales de chaque composante de $M(x,t)$ quand x décrit X .

. linéaire stationnaire est déterminée de la même manière à partir de $M(t)$ quand t décrit T .

Ces trois matrices pseudo-majorantes vérifient dans l'ordre :

$$M(x,t) \leq M(t) \leq M$$

.../

Une condition de stabilité asymptotique de M peut être facilement calculée par le critère de Kotelianski par exemple (Gantmacher, 1959).

Dans le cas particulier où les termes non constants de $M(x,t)$ sont regroupés dans une seule ligne ou une seule colonne, les conditions obtenues par le critère pratique de Borne et Gentina (Gentina et Borne, 1972) sont souvent moins restrictives :

Critère pratique de Borne et Gentina :

Soit le système (II.1) décrit par une matrice $A(x,t)$ dont les termes non constants sont regroupés dans une seule ligne (ou une seule colonne) et soit $M(x,t)$ une matrice pseudo-majorante déduite de $A(x,t)$ en remplaçant tous les termes hors diagonaux par leur valeur absolue.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique de (II.1) est alors donnée par le lemme de Kotelianski appliqué à $M(x,t)$.

Cette méthode est limitée lors d'une réduction directe, particulièrement quand les termes non stationnaires et non linéaires sont complexes. Nous verrons au chapitre IV qu'elle est en revanche très efficace quand elle est appliquée à un système préalablement stationnarisé.

Il est possible aussi de recourir à une méthode numérique (de type Runge-Kutta par exemple) pour construire les trajectoires du système à partir de l'équation différentielle associée.

Suivant la dimension du système $\dot{x} = f(x,t)$ et le degré de complexité de la fonction $f(x,t)$, les schémas numériques peuvent être plus ou moins sophistiqués et convergent plus ou moins rapidement.

La principale réserve que l'on puisse formuler à propos de ces méthodes numériques est que le système et son modèle ne peuvent alors être observés en temps réel. De plus, l'étude de l'influence des paramètres de synthèse sur les trajectoires se fait à partir d'applications numériques : on ne peut donc envisager de traiter la stabilité absolue du système par de telles méthodes.

.../

I.2. - Méthodes de réduction directe par comparaison des propriétés de stabilité

La plupart des méthodes permettant de préciser la stabilité d'un système NL/NS sont basées sur la génération de fonctions de Lyapunov adéquates.

I.2.1. - 2e méthode de Lyapunov

Le système de comparaison est d'ordre 1 : il met en oeuvre une fonction réelle $v(x,t)$ et sa dérivée totale $\dot{v}(x,t)$. Le signe de $\dot{v}(x,t)$, comparé à celui de $v(x,t)$, permet alors de conclure sur la stabilité du système (Lyapunov 1892, Hahn 1963).

La difficulté majeure consiste à trouver une fonction de Lyapunov adéquate ; elle est dans la plupart des cas de type quadratique (Lyapunov 1892, Wazewski 1950, Krasovki 1959, Aizermann 1964, Brockett 1966) ou de type quadratique-plus-intégral (Lurie 1951, Yakoubovitch 1962, Kalman 1963, Lefschetz 1965, Popov 1973, Grujić 1978).

D'autres travaux utilisent des fonctions candidates qui sont la projection du vecteur état sur un vecteur à composantes positives (Gentina et Borne 1972).

Les critères de stabilité associés sont souvent pratiques à mettre en oeuvre et conduisent dans certains cas à des conditions comparables à celles des systèmes linéaires exprimées dans le domaine fréquentiel.

Ils peuvent s'appliquer à beaucoup de systèmes non linéaires et non stationnaires mais s'avèrent moins performants lorsque la complexité des termes non stationnaires s'accroît.

.../

I.2.2. - Fonctions de Lyapunov vectorielles

L'introduction du principe de comparaison (Wazewski, 1950) et des systèmes pseudo-majorants (ou pseudo-minorants) d'ordre $k < q$ permet de construire des fonctions de Lyapunov vectorielles adaptées au système $\dot{x} = f(x,t)$. Ce type de fonction permet également de conserver une éventuelle décomposition du modèle en sous-systèmes interconnectés, tout en réduisant la dimension ou la complexité (Bellmann 1962, Matrosov 1962, Roberts 1963, Grujić et al. 1978, Shaaban et Grujić 1986).

Il a été montré qu'il existe une relation entre les propriétés de monotonie de $f(x,t)$ et certaines classes de fonctions de Lyapunov : Spiteri (1975) a par exemple étudié le cas où f est H-monotone ; si $M_f(t)$ est une matrice pseudo-majorante du système, on sait qu'il existe une matrice diagonale $D(t)$ dont les coefficients sont tous positifs, telle que :

$$V(x,t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \quad \|M_f(t)x, D(t)x\| \leq -\beta \|x\| \quad (\beta > 0)$$

Sous l'hypothèse que $V(x,t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \quad \|x, \frac{dD}{dt}x\| \leq \gamma \|x\|$
avec $0 \leq \gamma \leq 2\beta$, alors la fonction :

$$v(x,t) = \|p(x), D(t)p(x)\|$$

est une fonction de Lyapunov ($p(x)$ norme vectorielle), et l'origine est asymptotiquement stable.

Des conditions inverses permettent de déterminer l'instabilité du système.

Ces méthodes sont également très utiles pour des systèmes de grande dimension, mais encore une fois, n'aboutissent que rarement pour des systèmes à non-stationnarités complexes.

.../

I.2.3. - Méthode de Cook

On choisit d'écrire le système $\dot{x} = f(x,t)$ sous la forme $\dot{x} = Ax + b(x,t)$ où A est une matrice constante. Cette démarche ressemble à celle de la 1re méthode de Lyapunov, mais les perturbations $b(x,t)$ ne sont pas nécessairement négligeables devant $\|x\|$ quand la trajectoire se situe au voisinage de 0.

Dans cet esprit, Cook s'est inspiré des travaux de Rosenbrock et Desoer et a pu formuler une approche originale de la réduction :

Soient :

. Λ une matrice semblable à A (c'est-à-dire qu'il existe une matrice W sur laquelle on peut jouer, telle que $AW = W\Lambda$).

. pour toute matrice M, $\# M = \frac{M + M^T}{2}$ et $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$

. $\Sigma = \# \Lambda$

. $b(x,t) = B(x,t)x$ et $\beta(x,t) = \frac{\partial b}{\partial x}$

Alors des conditions suffisantes de stabilité asymptotique globale de l'origine peuvent être énoncées de plusieurs manières :

1) Si les parties réelles des valeurs propres de A sont négatives, alors l'origine est globalement asymptotiquement stable si :

$$(II.4) \quad \sup_{x,t} \|(\Sigma^{-1}W^{-1}B(x,t)W)\| \leq 1$$

$$\text{ou bien si } \sup_{x,t} \|(\Sigma^{-1}W^{-1}\beta(x,t)W)\| \leq 1$$

.../

2) Si les parties réelles des valeurs propres de A sont inférieures à $-\alpha$ (α constante positive), alors l'origine est globalement asymptotiquement stable si :

$$(II.5) \quad \sup_{x,t} \|B(x,t)\| \leq \frac{\alpha}{T\Theta W}$$

ou bien si $\sup_{x,t} \|\beta(x,t)\| \leq \frac{\alpha}{T\Theta W}$

avec $T\Theta W = \|W\| \cdot \|W^{-1}\|$

Ainsi, si le système linéaire stationnaire représenté par A est suffisamment stable et si les perturbations apportées par les non-linéarités et les non-stationnarités sont suffisamment faibles, le système NL.NS est stable.

Le système LS peut être considéré comme une approximation du système NL.NS mais on ne peut en aucun cas conclure que leur trajectoires sont proches ni attractives.

1.2.4. - Méthode de Nagaraja et Chalam (1977)

Cette méthode permet de construire des fonctions de Lyapunov quadratiques des coordonnées du vecteur état $(x_i)_{i \leq q}$.

On utilise pour cela l'équation différentielle vérifiée par chaque coordonnée x_i :

$$(II.6) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}(t) x_j$$

Soit : $l_i = \dot{x}_i - \sum_{j=1}^q a_{ij}(t) x_j$ défini pour tout i.
 Bien entendu, l_i est nul, donc les moments

$$(II.7) \quad m_{ij} = \int l_i x_j dt \quad \text{et} \quad n_{ij} = \int l_i \dot{x}_j dt$$

sont nuls quels que soient i et j.

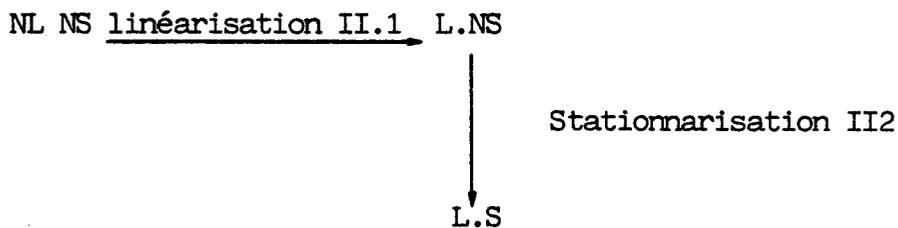
.../

En procédant à des intégrations judicieuses, on peut décomposer chaque moment d'une part en termes quadratiques des coordonnées x_i , d'autre part en une somme intégrale de termes quadratiques des x_i .

En combinant le premier type de termes (quadratiques), on définit une fonction V dont la dérivée \dot{V} sera la même combinaison, mais cette fois-ci du 2e type de termes (intégrales de quadratiques). On sait ainsi immédiatement si V vérifie effectivement les propriétés d'une fonction de Lyapunov.

Cette méthode est un guide pour la recherche de fonctions de Lyapunov, mais il semble que des fonctions quadratiques à coefficients constants ne permettent pas de conclure pour la plupart des systèmes périodiques (même s'ils sont linéaires).

II - LINEARISATION PUIS STATIONARISATION



II.1. - Réduction préservant la proximité topologique

II.1.1. - Linéarisation NL.NS $\xrightarrow{\text{II1}}$ L.NS

Pour le cas périodique, une remarque essentielle de Lefschetz (1957) met en évidence le fait que la connaissance d'une solution périodique permet de ramener au voisinage de l'origine le système non-linéaire périodique à un système linéaire périodique : en effet, si $\xi(t)$ est une solution périodique de $\dot{x} = f(x,t)$ (avec f périodique), alors la transformation $y = x - \xi$ conduit au système $\dot{y} = A(t)y$ ($A(t)$ périodique).

.../

Les systèmes linéaires à coefficients périodiques apparaissent donc comme des systèmes de variation des solutions périodiques d'un système périodique général.

C'est pourquoi depuis Poincaré la recherche de telles solutions périodiques présente un grand intérêt (Malkin 1956 , Minorsky 1962).

D'autre part, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, nous pouvons appliquer la 1re méthode de Lyapunov de la même manière que pour les systèmes stationnaires : si le système non stationnaire périodique peut être présenté par $\dot{x} = A(t)x + q(x,t)$ avec

- (II.8) . $q(x,t)$ continue pour $\|x\| < r$ et $t \geq \tau$
 . $q(0,t) = 0$
 . $q(x,t) = o(\|x\|)$ uniformément par rapport à t

Alors, d'après le théorème de Floquet-Lyapunov, il existe une matrice de changement de variable bornée $P(t)$ telle que le nouveau vecteur état $y = P(t,x)$ vérifie $\dot{y} = My + P(t)q(x,t)$.

Soit v la 1re approximation de $y(\dot{v} = Mv)$, et $u = P^{-1}(t)v$.

On peut montrer par un calcul rapide que $\dot{u} = A(t)u$ et que u est donc la 1re approximation d'une trajectoire $x(t)$ du système initial $\dot{x} = A(t)x + q(x,t)$.

Ainsi, (cf. ch. I, § IV.2.1.b), si $A(t)$ est asymptotiquement stable,

- . le système initial est asymptotiquement stable en 0,
- . les trajectoires $x(t; x_0, t_0)$ et $u(t; x_0, t_0)$ du système initial et de sa 1re approximation sont périodiquement (ou presque périodiquement) attractives et proches, c'est-à-dire que les trajectoires échantillonnées périodiquement sont attractives et proches.

.../

II.1.2. - Stationarisation

L.NS



II2

L.S

II.1.2.a. - Théorie de Floquet-Lyapunov

Un théorème fondamental pour la stationarisation des systèmes linéaires périodiques a été énoncé par Floquet en 1883, parallèlement à Lyapunov en 1892.

Lefschetz l'appelle "la théorie de Floquet" ; nous conserverons cette appellation.

Ce théorème affirme qu'il existe une famille de transformations de Lyapunov périodiques $p(t)$ qui ramènent le système linéaire périodique $\dot{x} = A(t)x$ à un système linéaire constant $\dot{u} = Mu$.

Dans la continuité de ces travaux, fut développée par Markus et Langenhop la théorie de l'équivalence topologique (voir ch. I, § IV.1.1) qui intègre le théorème de Floquet sans rien lui enlever de sa puissance ni de son élégance.

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la théorie de Floquet est une méthode typique de réduction préservant la proximité (et même l'égalité périodique) topologique des trajectoires. Pour citer un exemple intéressant, la transformation de Park utilisée pour des systèmes électrotechniques rotatifs peut être interprétée comme une transformation spécifique de Floquet (Richard, 1983).

En dépit de nombreuses études, la matrice constante M associée à $A(t)$ reste impossible à expliciter analytiquement dans le cas général.

On sait uniquement (Goursat 1927) que la trace de M est la moyenne temporelle de la trace de $A(t)$, à un multiple de $2i\pi/T$ près ($T =$ période).

.../

Toutefois, le développement des calculateurs numériques et analogiques a permis de mieux cerner les exposants caractéristiques de M , et, par là-même, les domaines de stabilité du système réel.

Toutes les méthodes basées sur le théorème de Floquet-Lyapunov (Campbell 1955, Blanck 1960, Tamir 1962, Burgat et Mira 1970, Mammeri 1971, Sinha et al. 1979, Wu 1980, Richard 1983) constituent des matériaux essentiels dans l'étape de stationnarisation d'un système linéaire périodique, puisqu'elles minimisent la perte d'information sur le système réel.

Elles seront pour cette raison approfondies et appliquées sur quelques exemples dans le chapitre III.

II.1.2.b. - Cas des systèmes presque-périodiques

Dans le cas où les termes non-stationnaires ne sont plus périodiques, mais presque-périodiques, l'utilisation directe du théorème de Floquet n'est plus possible mais un théorème similaire a pu être établi (Berkey 1976) :

Soit $B(t)$ la partie de $A(t)$ non-stationnaire et de moyenne nulle. On écrira $A(t)$ sous la forme $A(t) = A_0 + B(t)$.

Rappelons que si $B(t)$ est périodique (validité du théorème de Floquet) une matrice résolvante du système s'écrit $x(t) = Q(t)e^{Mt}$, avec $Q(t)$ périodique et M constante.

Une écriture semblable d'une matrice résolvante peut être donnée, dans certaines conditions, quand $B(t)$ est presque périodique.

Théorème (Berkey) :

Soient $(\lambda_k)_{k \leq q}$ les valeurs propres de A_0 , supposées telles que $\text{Re}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \quad \forall i \neq j$.

.../

Alors, pour $\|B\|$ "suffisamment petite", le système $\dot{x} = [A_0 + B(t)]x$ possède q solutions indépendantes x_k de la forme :

$$(II.9) \quad x_k(t) = q_k(t) \exp \left(\lambda_k t + \int_0^t v_k(u) du \right)$$

où $q_k(t)$ et $v_k(t)$ sont des fonctions presque-périodiques.

Si $B(t)$ avait été périodique, on aurait eu

$$x_k(t) = q_k(t) \exp (\lambda_k + N_k)t$$

avec : $q_k(t)$ périodique

$\lambda_k + N_k$ exposant caractéristique du système.

Enfin, si $B(t)$ est presque constant, Bellmann (1953) a montré que si A a des valeurs propres simples et $\|B(t)\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, à chaque valeur propre λ correspond une solution x_λ du système vérifiant :

$$(II.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|x_\lambda(t)\|}{t} = \operatorname{Re} \lambda$$

D'autres théorèmes plus complexes, portant sur la décomposition $A(t) = A(t, \delta) = A_0 + \sum_k A_k(t) \delta^k$ sont présentés par Harris et Miles (1980).

Nous constatons malheureusement que la plupart des systèmes presque-périodiques sont délicats à traiter (les termes $\int v_k(u) du$ sont en particulier impossibles à déterminer en pratique) et qu'en tout cas, nous sommes loin de disposer d'une méthode de réduction générale préservant la proximité topologique.

On peut simplement affirmer que si $\|B\|$, ou encore si tous les termes $\int v_k(u) du$ (T multiple de la pseudo-période) sont suffisamment petits, alors les solutions du système $\dot{x} = [A_0 + B(t)]x$ sont presque-périodiquement attractives et proches.

.../

avec : $\int_0^t \left(\frac{q}{p}\right) dt$ est bornée inférieurement $\forall t$

• $p_0 r_0 - q_0 = C > 0$

• $p > m_1 > 0 \quad \forall t \geq 0$

Dans ce cas, $\dot{V} = -u^2 \left(\dot{x} + \frac{q}{p}x\right)^2$

En pratique, on utilise plutôt le corollaire suivant :

L'origine est stable s'il existe une fonction f telle que :

$$\int_0^t f dt \text{ est bornée inférieurement } \forall t$$

$$(II.12) \quad 2a - 4f + \frac{\frac{d}{dt}(f^2 - af + b - \dot{f})}{f^2 - af + b - \dot{f}} \geq 0 \quad \forall t$$

$$\frac{e^{2\int_0^t f dt}}{f^2 - af + b - \dot{f}} > m_1 > 0 \quad \forall t$$

f est égale ici à $\frac{q}{p}$ et

$$V = \frac{e^{2\int_0^t f dt}}{f^2 - bf + a - \dot{f}} \left[\dot{x}^2 + 2fx\dot{x} + x^2(2f^2 - af + b - \dot{f}) \right]$$

Nous verrons sur quelques exemples que la méthode de génération de fonctions de Lyapunov que nous venons de présenter ainsi que celle de Nagaraja et Chalam sont très faciles à mettre en oeuvre et peuvent conduire à des résultats intéressants.

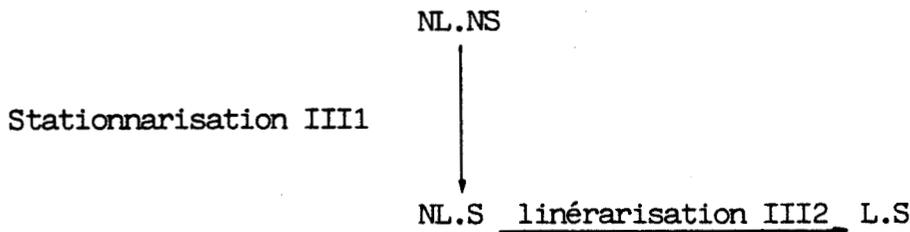
Remarquons enfin que, suivant la théorie de Floquet, puisqu'une fonction de Lyapunov quadratique à coefficients constants V(u) permet de conclure sur la stabilité du système stationnaire $\dot{u} = Mu$, alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique W(x) à coefficients périodiques qui détermine complètement la stabilité du système linéaire périodique $\dot{x} = A(t)x$.

.../

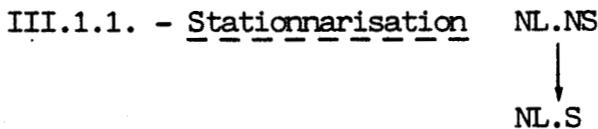
En effet, $V(u) = u^T Q u$ et $u = P(t)x$ conduisent à $W(x) = V(u) = x^T (P^T(t) Q P(t))x$.

En d'autres termes, les systèmes linéaires à coefficients périodiques vérifient la propriété du théorème converse (Hahn, 1963) : leur stabilité assure l'existence d'une fonction de Lyapunov adéquate.

III - STATIONNARISATION PUIS LINEARISATION



III.1. - Réduction préservant la proximité topologique



L'outil principal pour cette étape est sans conteste la méthode de centrage développée à partir des travaux de Bogolioubov-Mitropolski et Krylov-Bogolioubov (1950) et appliquée plus récemment par Meerkov (1980).

Pour utiliser cette méthode, il est nécessaire que le système initial non linéaire non stationnaire puisse se ramener à un système écrit sous la forme standard $\frac{dx}{d\tau} = \epsilon f(x, \tau)$ où ϵ est un paramètre petit.

Cette condition traduit le fait que les perturbations apportées par les termes non-stationnaires sont très rapides comparées à l'échelle des temps du système. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas.

Pour les systèmes linéaires, Meerkov a proposé une méthode, basée sur des changements de variable successifs, pour trouver un système standard intéressant. Nous appliquerons cette démarche dans le chapitre III et l'adapterons aux systèmes non linéaires dans le chapitre IV.

Dans le chapitre I au paragraphe IV.2.2, nous avons rappelé le principe de la méthode de centrage. Au système standard :

$$(II.13) \quad \frac{dx}{d\tau} = \epsilon f(x, \tau)$$

est associé le système centré :

$$(II.14) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \epsilon f_0(\xi)$$

non linéaire et stationnaire, qui coïncide d'autant mieux (au sens de l'écart maximum défini dans le chapitre I) que ϵ est plus petit.

En général, $f_0(\xi)$ est la moyenne temporelle de $f(x, \tau)$:

(II.15)

$$f_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, \tau) d\tau \quad \text{pour } f \text{ presque-périodique}$$
$$f_0(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, \tau) d\tau \quad \text{si } f \text{ périodique de période } T$$

mais dans certains cas, la moyenne temporelle de f n'existe pas ou n'est pas intéressante. On peut alors généraliser la méthode de centrage en substituant à la moyenne de f une fonction plus adéquate (Balbi 1982).

Nous verrons en traitant certains exemples, que, malgré certains inconvénients (choix d'une pseudo-période très petite) et des calculs laborieux (intégration de f), cette méthode conduit à des résultats satisfaisants et permet de stabiliser des systèmes non-linéaires délicats.

.../

Dans l'étape de stationnarisation d'un système NL.NS une généralisation du théorème de Floquet a été proposée par Lochak (voir chapitre I, § IV.1.2). Il définit une classe de systèmes "canoniquement réductibles à un système stationnaire" parmi lesquels se trouvent les systèmes hamiltoniens périodiques représentés par :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t)$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t)$$

$$H(q,p,t+T) = H(q,p,t)$$

mais comme pour le théorème de Floquet, on ne peut accéder en pratique à l'équation d'état du système non-linéaire stationnaire obtenu.

III.1.2 - Linéarisation NL.S $\xrightarrow{\text{III2}}$ L.S

Les méthodes présentées aux paragraphes I.1 et II.1.1. sont applicables encore pour le cas stationnaire et en particulier la 1re méthode de Lyapunov, ou l'utilisation de systèmes pseudo-majorants d'ordre q .

Rappelons que dans le cas stationnaire, si la 1re approximation est asymptotiquement stable, alors les trajectoires (pour des conditions initiales identiques) du système et de la 1re approximation sont attractives et proches (cf. chapitre I § IV.2.1). La conclusion est identique (cf. ch. I, § IV.2.3) si le système associé par réduction est un système pseudo-majorant asymptotiquement stable.

.../

Pliss (1958) a montré que cette conjecture n'était pas vérifiée pour tous les systèmes.

Le même type de proposition où le gain équivalent est remplacé par la dérivée de la non-linéarité a été aussi mis en défaut.

On peut ainsi distinguer une classe importante de systèmes vérifiant la conjecture du linéaire, c'est-à-dire pour lesquels "le fait que tous les modèles linéaires tangents (c'est-à-dire linéarisés autour de tous les points de fonctionnement) soient asymptotiquement stables entraîne que le système initial non linéaire soit globalement asymptotiquement stable".

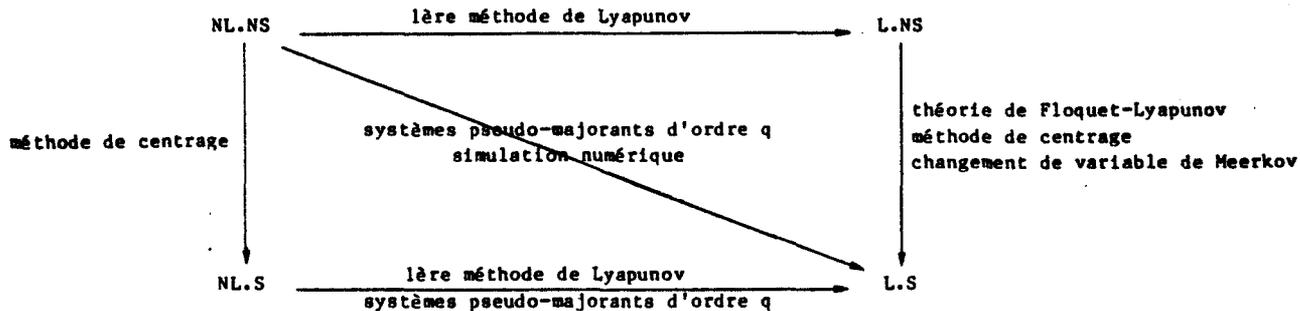
Dans cette classe de systèmes se trouvent par exemple les systèmes représentés par :

- . les matrices $A(x,t)$ symétriques
- . les matrices où les termes non constants sont regroupés dans une seule rangée, et où les termes hors diagonaux sont tous positifs ou nuls.

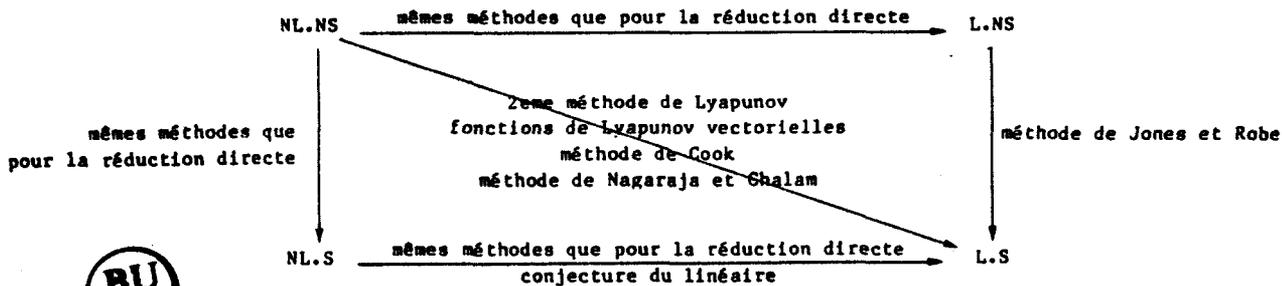
Le critère de Borne et Gentina présenté au paragraphe I.1 est dans ce dernier cas très pratique pour déterminer la stabilité du système.

La perte d'information qui se produit pendant la linéarisation est alors nulle sur le plan des conditions de stabilité absolue. Cette méthode est spécialement facilitée si on utilise une représentation en flèche des matrices et la théorie du polynôme symbolique (Richard 1984).

Méthodes de réduction préservant
la proximité topologique



Méthodes de réduction par comparaison
des propriétés de stabilité

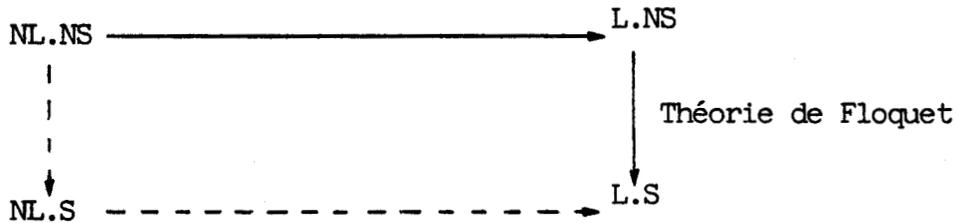


CHAPITRE III

111

CHAPITRE 3

CAS PARTICULIER DES SYSTEMES PERIODIQUES LINEARISES :
APPLICATION DE LA THEORIE DE FLOQUET-LYAPUNOV



Parmi les procédures de réduction structurelle d'un système non linéaire et non stationnaire, les méthodes de stationnarisation du modèle linéarisé basées sur la théorie de Floquet-Lyapunov sont particulièrement intéressantes en pratique si l'on dispose de moyens de calcul numérique.

Elles permettent en effet de dessiner les contours des domaines de stabilité du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

Ces domaines, en général, mènent à des conditions beaucoup moins restrictives que celles obtenues par les méthodes de réduction directe sans étape de linéarisation, telles que la 2e méthode de Lyapunov.

I - THEORIE DE FLOQUET-LYAPUNOV

I.1. - Rappel du théorème de Floquet-Lyapunov

Floquet (1883) et Lyapunov (1892) ont montré l'existence d'une famille de transformations de Lyapunov périodiques qui ramènent tout système linéaire périodique à un système linéaire constant.

De manière plus explicite :

.../

THEOREME : Soit le système linéaire d'équation d'état

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

où $A(t)$ est une matrice à coefficients périodiques de période T .

Alors il existe un changement de variable $P(t)$, borné et régulier pour tout t , ($P^{-1}(t)$ existe et est bornée pour tout t), périodique de période T , ramenant le système initial au système linéaire constant :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= M u(t) \\ \text{avec } \begin{cases} u(t) = P(t)x(t) \\ M = P(t)A(t)P^{-1}(t) + \dot{P}(t)P^{-1}(t) \end{cases} \end{aligned}$$

En dépit de nombreuses études la matrice constante M associée à $A(t)$, ainsi que le changement de variable $P(t)$, restent impossibles à expliciter dans le cas général.

On sait simplement (Goursat, 1927) que la trace de M est la moyenne temporelle de la trace de $A(t)$ à un multiple de $\frac{2i\pi}{T}$ près.

La difficulté d'obtenir des renseignements sur les valeurs propres de M (appelées aussi exposants caractéristiques) ou sur les matrices de changement de base $P(t)$ a ainsi incité certains auteurs à développer des méthodes d'approximation valables dans certains cas particuliers.

Ce sont ces méthodes que nous allons présenter.

I.2. - Méthodes numériques

La détermination des exposants caractéristiques et des domaines de stabilité peut se faire de différentes manières :

.../

- à l'aide de fractions continues (Blanck 1960, Tamir 1962), de déterminants infinis (Schäfke et Schmidt 1966, Wagenführer 1980) ou d'autres développements en série (Malkin, 1956) appliqués le plus souvent aux équations de Mathieu et de Hill.

- on peut associer au système périodique un système représenté par un ensemble d'équations récurrentes obtenues en approchant les termes périodiques par des fonctions en escalier dans chaque intervalle de temps élémentaire (Burgat et Mira 1970, Mammeri 1971).
Dans le paragraphe II est présenté un programme informatique que nous avons élaboré selon ce principe et qui est ensuite appliqué au 2e exemple du paragraphe III.

- cette dernière méthode s'intègre par ailleurs dans le cadre plus général où les termes périodiques sont approchés dans chaque intervalle élémentaire de la période par une fonction polynomiale du temps : Sinha, Chou et Denmann (1979) ont traité complètement le cas de l'équation de Mathieu en utilisant une approximation par une constante, par une fonction linéaire ou par une fonction quadratique du temps (dans chaque intervalle de la période) et ont constaté que l'approximation d'ordre 2 (par une fonction quadratique) donne d'excellents résultats.

I.3. - Méthodes analytiques ; la commutativité

Lorsqu'on cherche une résolution intégrale d'un système linéaire à coefficients périodiques représenté par $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, on se heurte à des complications dues essentiellement au fait que $A(t)$ et $\int_{t_0}^t A(u)du$ ne commutent pas systématiquement.

En effet, cette propriété est une condition nécessaire pour que la dérivée de $\exp(\int_{t_0}^t A(u)du)$ soit $A(t)\exp(\int_{t_0}^t A(u)du)$; la solution du système se détermine alors très simplement sous la forme $x(t; x_0, t_0) = \exp(\int_{t_0}^t A(u)du)x_0$.

.../

Mais si cette propriété de commutativité n'est pas vérifiée, la résolution analytique intégrale du système résiste aux méthodes d'investigation connues.

Dans ce sens, Wu (1980) a montré que la "commutativité" d'un système linéaire n'est pas une propriété intrinsèque, mais plutôt une propriété de représentation.

Ainsi, chaque système linéaire et périodique peut être transformé en un système linéaire périodique commutatif, ou linéaire invariant, et les solutions sont alors facilement déterminées. Mais cette transformation, à son tour, ne peut être déterminée de façon générale.

Dans le même article, l'auteur met en évidence une autre classe de matrices $A(t)$ pour lesquelles la résolution analytique du système est possible, c'est-à-dire celles qui vérifient :

il existe une matrice constante A_1 et une fonction scalaire dérivable non nulle $h(t)$ telles que :

$$\forall t \quad A_1 A(t) - A(t) A_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{A(t)}{h(t)} \right)$$

I.4. - Réponse impulsionnelle - réponse échantillonnée

D'autres méthodes analytiques peuvent être utilisées si on a accès à la réponse impulsionnelle d'un système linéaire périodique (Corrall, 1979).

Si à l'instant t , $h(t, \xi)$ est cette réponse à une impulsion appliquée à l'instant ξ , elle peut être considérée comme paramétrique en t ou bien en ξ ; on définit donc deux transformées de Laplace de $h(t, \xi)$, paramétriques l'une en t , l'autre en ξ .

Corrall montre alors que ces deux transformées de Laplace ont des pôles identiques qui sont aussi les valeurs propres de M à un multiple de $\frac{2i\pi}{T}$ près.

.../

Dans le même esprit, mais par une démarche différente, on peut déterminer les exposants caractéristiques de M en mesurant les réponses échantillonnées du système $A(t)$ (Richard et Laurent, 1983).

En effet, si $\mathcal{X}(t)$ est une matrice intégrale, $\mathcal{X}(t+T)$ l'est aussi. Donc il existe une matrice constante V telle que $\forall t \quad \mathcal{X}(t+T) = \mathcal{X}(t)V$. On peut d'ailleurs montrer que $V = \exp(MT)$.

Les solutions, échantillonnées avec une période T , répondent donc à une équation récurrente qui de plus est indépendante du premier instant d'échantillonnage.

Cette équation de récurrence conduit aux exposants caractéristiques.

Il est intéressant de rappeler que c'est l'existence de cette même matrice V qui a permis de démontrer le théorème de Floquet-Lyapunov.

Cependant, dans ces deux dernières méthodes, l'objectif essentiel n'est pas de déterminer V , mais plutôt de procéder à une identification du système à partir de la connaissance expérimentale d'une solution $x(t)$, alors qu'on ignore peut-être la matrice d'évolution $A(t)$.

II - PROGRAMME INFORMATIQUE DE DETERMINATION DE $V = \exp(MT)$

L'avantage des méthodes basées sur la détermination de V à partir de la connaissance de la matrice d'évolution $A(t)$ est qu'elles conduisent à une procédure facilement informatisable permettant d'identifier directement les valeurs propres de la matrice constante associée M et, par là-même, de conclure à l'aide de conditions nécessaires et suffisantes, à la stabilité du modèle linéarisé périodique $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

.../

La méthode dont nous nous inspirons a été évoquée au paragraphe I.2. (Burgat et Mira, 1970) et consiste à substituer à la matrice $A(t)$ une fonction matricielle en escalier $A_n(t)$, constante sur chaque intervalle élémentaire $[t_{k-1}, t_k[$ $k=1, \dots, n$ de la période T ($\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad t_k - t_{k-1} = \frac{T}{n}$).

L'instant initial n'influe pas sur le polynôme caractéristique de V . Nous avons donc choisi arbitrairement, pour $t \in [t_{k-1}, t_k[$, d'approcher $A(t)$ par $A_n(t) = A(t_{k-1})$.

On définit alors $x_n(t_k)$ par :

$$x_n(t_k) = V_{k-1} x_n(t_{k-1}) \text{ avec } V_{k-1} = \exp A(t_{k-1}) \cdot \frac{T}{n} \text{ et par conséquent :}$$

$$x_n(t_0+T) = V_{n-1} \cdot V_{n-2} \dots V_1 \cdot V_0 \cdot x_n(t_0).$$

On peut alors montrer (Burgat et Mira 1970, Volterra 1887, Gantmacher 1966) que V est semblable à la matrice \bar{V} définie par :

$$\bar{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\text{Id} + \frac{T}{n} A(t_0 + \frac{(n-1)}{n} T) \right] \left[\text{Id} + \frac{T}{n} A(t_0 + \frac{(n-2)}{n} T) \right] \dots \left[\text{Id} + \frac{T}{n} A(t_0) \right]$$

Après calcul de V , les valeurs propres de M sont les valeurs propres de $\frac{1}{T} \ln V$, et déterminent complètement la stabilité du système.

.../

III - EXEMPLES D'APPLICATION

Sur l'exemple de l'équation de Mathieu qui a été abondamment étudiée dans la littérature, nous avons vérifié que notre programme informatique détermine correctement les domaines de stabilité.

Le programme, ainsi validé, a été ensuite appliqué à un second exemple, et les conditions de stabilité obtenues ont été comparées à celles provenant des autres méthodes de réduction que nous avons présentées au chapitre II.

III.1. - Equation de Mathieu (linéaire-non stationnaire)

Considérons le système linéaire périodique de Mathieu représenté par l'équation d'état :

$$(III.1) \quad \overset{\circ}{\underset{\circ}{x}}(t) + (p-2q \cos 2t)x(t) = 0.$$

La difficulté à traiter ce système par les méthodes de réduction par stationnarisation présentées au chapitre II provient du fait que la plupart de ces méthodes mènent à des conditions de stabilité asymptotiques.

Or, si le système de Mathieu est stable, il est tout juste stable, puisque la trace du système linéaire constant associé est nulle.

III.1.1. - Méthodes de réduction non numériques

III.1.1.a. - La méthode de Cook (cf. ch. II § I.2.3) : ne peut s'appliquer ici car elle donne des conditions de stabilité asymptotique.

III.1.1.b. - La méthode de Nagaraja et Chalam (cf. ch. II § I.2.4) :

On prend pour vecteur état $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

.../

Le système est donc représenté par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(p-2q \cos 2t)x_1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} l_1 = \dot{x}_1 - x_2 = 0 \\ l_2 = \dot{x}_2 + (p-2q \cos 2t)x_1 = 0 \end{cases}$$

Les moments m_{ij} et n_{ij} définis par $m_{ij} = \int_0^t x_i l_j dt$ et $n_{ij} = \int_0^{t_0} x_i l_j dt$ sont nuls, ce qui nous donne :

$$m_{11} : \frac{x_1^2}{2} = \int x_1 x_2 dt$$

$$m_{12} : x_1 x_2 = \int x_2^2 dt - \int (p-2q \cos 2t) x_1^2 dt$$

$$m_{21} : x_1 x_2 = \int x_1 \dot{x}_2 dt + \int x_2^2 dt$$

$$m_{22} : \frac{x_2^2}{2} = -\int x_1 x_2 (p-2q \cos 2t) dt$$

$$n_{12} : \frac{x_2^2}{2} + (p-2q \cos 2t) \frac{x_1^2}{2} = \int 4q \sin 2t \frac{x_1^2}{2} dt$$

$$n_{22} : 0 = \int \dot{x}_2^2 dt + \int (p-2q \cos 2t) x_1 \dot{x}_2 dt$$

Si une fonction de Lyapunov V est une combinaison linéaire des membres de gauche, \dot{V} est la même combinaison linéaire de l'intérieur des intégrales des membres de droite.

.../

Mais il ne semble pas possible de déterminer une combinaison linéaire adéquate, et cette méthode ne convient donc pas dans le cas de l'équation de Mathieu.

III.1.1.c. - Méthode de Jones et Robe (cf. ch. II, § II.2.2) : on essaie de trouver f telle que :

$$\int_0^t f dt \text{ est bornée inférieurement } \forall t$$

$$2a - 4f + \frac{\frac{d}{dt}(f^2 - af + b - \dot{f})}{f^2 - af + b - \dot{f}} \geq 0 \quad \forall t$$

$$\frac{e^{2\int_0^t f dt}}{f^2 - af + b - \dot{f}} > m_1 > 0 \quad \forall t$$

Jones et Robe ont réussi à traiter le système $\ddot{x} = (a_0 + Ae^{-pt} \sin \omega t) x = 0$, mais uniquement pour $p > 0$.

Leur méthode ne semble pas applicable à l'équation de Mathieu.

III.1.1.d. - Méthode de Wu (cf. ch. III, § I.3) : là encore, aucun résultat.

III.1.1.e. - Méthode de centrage (cf. ch. II, § III.1.1) : dans le système (III.1), on effectue le changement d'échelle $t = \frac{\omega \theta}{2}$. On obtient alors le système :

$$(III.2) \quad \frac{d^2 x}{d\theta^2} + (b + \beta \cos \omega \theta) x = 0$$

$$\text{où } b = \frac{p\omega^2}{4} \text{ et } \beta = -\frac{q\omega^2}{2}.$$

Avec le vecteur $X(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ \frac{dx}{d\theta}(\theta) \end{pmatrix}$ on a l'équation d'état :

$$\frac{dX}{d\theta}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(b + \beta \cos \omega \theta) & 0 \end{bmatrix} X(\theta)$$

.../

. De façon à calculer le système centré, effectuons un 2e changement d'échelle $\tau = \omega\theta$ associé au changement de variable $Y(\tau) = X(\theta)$.

D'où :

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \frac{dX}{d\theta} = \epsilon \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\beta\epsilon \cos\tau & 0 \end{array} \right] Y$$

A C(\tau)

avec $\epsilon = \frac{1}{\omega}$

. Soit $G(\tau)$ une primitive par rapport à τ de $C(\tau)$, de moyenne nulle, on a :

$$G(\tau) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\beta\epsilon \sin\tau & 0 \end{array} \right]$$

. 3e changement de variable : $Y = (I+G)u$

Alors le système sous forme standard a pour équation d'état :

$$\frac{du}{d\tau} = (I+G)^{-1} \left[\frac{dG}{d\tau} \cdot G + \epsilon A(I+G) \right] u$$

$$= \epsilon \left[\begin{array}{cc} -\beta\epsilon \sin\tau & 1 \\ -b - (\beta\epsilon \sin\tau)^2 & \beta\epsilon \sin\tau \end{array} \right] u$$

. le système centré associé est alors représenté par l'équation d'état :

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \epsilon \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -b - \frac{1}{2}\beta^2\epsilon^2 & 0 \end{array} \right] \xi$$

.../

et son équation différentielle associée en θ :

$$(III.3) \quad \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + (b + \frac{1}{2} \beta^2 \varepsilon^2) \xi = 0$$

Le théorème de centrage (cf. ch. II § III.1.1) s'applique généralement quand les parties réelles des valeurs propres du système sont strictement inférieures à 0, ce qui permet de comparer les trajectoires du système réel et du système centré sur un intervalle de temps infini.

Dans le cas de l'équation de Mathieu, cette condition n'est pas vérifiée, mais les conditions d'application du théorème de centrage de Bogolioubov-Mitropolsky (1962) sur un intervalle de temps fini sont remplies (cf. ch. II, § III.1.1), si b et β sont bornées.

Ainsi, les solutions du système initial sont à écart maximal $\eta(\omega)$ (avec $\eta(\omega) \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow +\infty$) sur tout intervalle fini arbitrairement grand des solutions du système centré, qui seront stables, oscillantes et bornées (valeurs propres imaginaires pures) à la condition que :

$$(III.4) \quad b + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\omega^2} < 0 \quad (\text{et } b \text{ et } \beta \text{ bornées})$$

Les conditions de stabilité (III.4) exprimées par rapport à (III.1) deviennent :

$$\begin{cases} p, q \text{ petits} \\ 2p + q^2 > 0 \end{cases} \quad (\omega \gg 1)$$

ou

$$\begin{cases} q = 0 \\ p > 0 \end{cases} \quad (p \text{ arbitrairement grand})$$

.../

Deux cas sont à envisager :

. si $p < 0$:

$$q^2 > -2p$$

et $q^2 + 2p = \frac{4}{\omega^2} \left[\frac{\beta^2}{\omega^2} + 2b \right]$ très petit car $\omega \gg 1$

q^2 est supérieur, mais très proche de $-2p$.

. si $p > 0$:

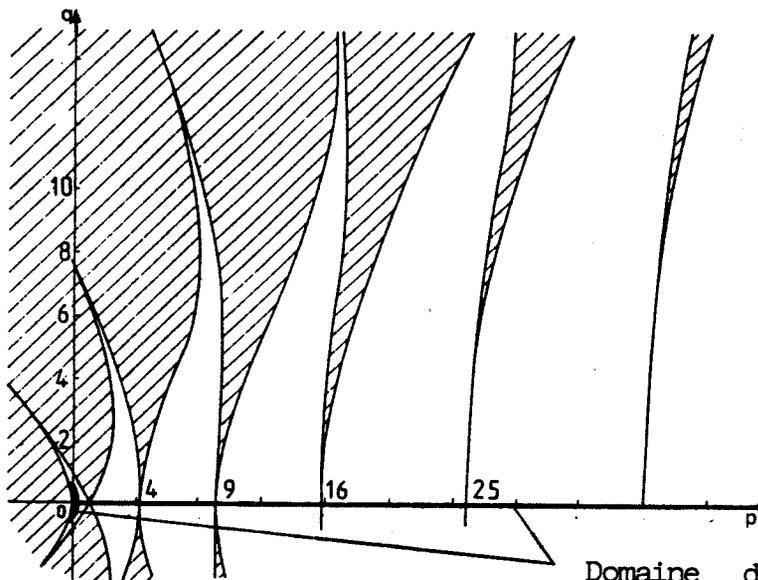
$2p > -q^2$ est toujours vérifié (mais p et q petits).

Finalement, dans le cas particulier de l'approche de l'équation de Mathieu par des méthodes analytiques, seule la méthode de centrage donne des conditions de stabilité.

Nous allons cependant constater que le domaine de stabilité ainsi déterminé est très réduit par rapport au domaine de stabilité réel.

III.1.2. - Méthode numérique ; conclusion

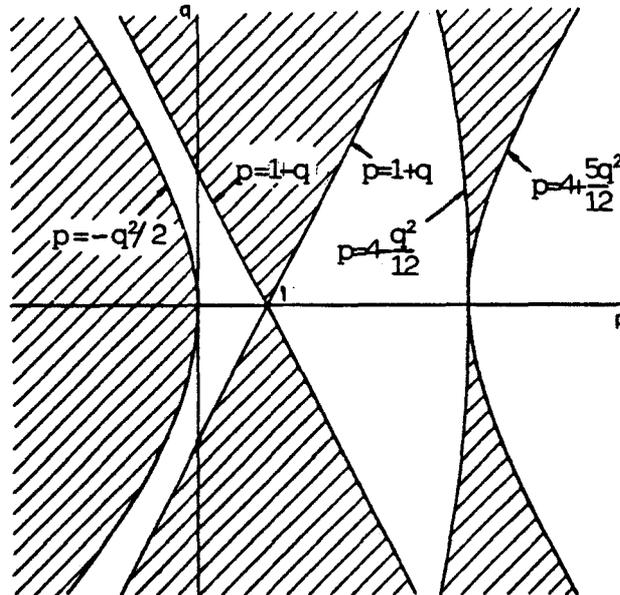
Nous avons bien retrouvé, à l'aide de notre programme informatique, le domaine de stabilité de l'équation de Mathieu obtenu par d'autres auteurs (Campbell, 1955).



Domaine de stabilité par la méthode de centrage.

On constate ainsi que ce domaine est beaucoup plus vaste que ce qui peut être déterminé par les méthodes de réduction analytiques.

La méthode de centrage permet de retrouver le contour du domaine de stabilité au voisinage de $p = 0 = q$.



Elle est cependant limitée dans son efficacité en raison du fait que la période du système de Mathieu est forcée à la valeur π .

Les autres méthodes analytiques ne permettent pas de conclure pour l'équation de Mathieu.

III.2. - Moteur possédant une charge périodique (non linéaire-non stationnaire)

Nous étudions à présent la stabilité d'un système de contrôle d'un moteur avec une charge périodique dans le temps, dont la dynamique est donnée par :

$$(1 + m \cos \omega t) \ddot{\theta} + (\alpha - m \omega \sin \omega t) \dot{\theta} + k\theta = -f(\dot{\theta})$$

avec $0 < m < 1$

$J(t) = J_0(1 + m \cos \omega t)$ inertie périodique

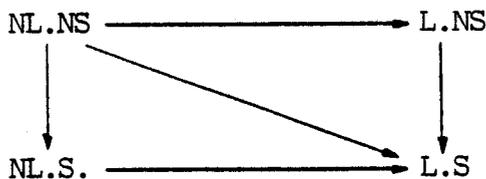
$f(\dot{\theta})$ = friction de Coulomb.

Cet exemple a été cité et traité par Nagaraja et Chalam (1974).. /

III.2.1. - Méthodes de réduction non numériques

Contrairement à l'exemple précédent de l'équation de Mathieu, nous avons à traiter un système à la fois périodique et non-linéaire.

Toutes les procédures possibles de réduction présentées dans le chapitre II seront donc employées.



III.2.1.a. - Méthodes directes

La méthode la plus efficace est celle de Nararaja et Chalam (cf. ch. II § I.2.4) : en posant $x_1 = \theta$ et $x_2 = \overset{\circ}{x}_1$, on se ramène au système :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x}_1 = x_2 \\ \overset{\circ}{x}_2 = -\frac{\alpha - m \sin \omega t}{1 + m \cos \omega t} x_2 - \frac{k}{1 + m \cos \omega t} x_1 - \frac{f(x_2)}{1 + m \cos \omega t} \end{cases}$$

Les moments périodiques permettent alors d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{aligned} m_{11} &: \frac{x_1^2}{2}(1+m \cos \omega t) = -\int \frac{x_1^2}{2} m \sin \omega t \, dt + \int x_1 \overset{\circ}{x}_1 (1+m \cos \omega t) \, dt \\ m_{12} &: \frac{x_1^2}{2}(\alpha - m \sin \omega t) = -\int (1+m \cos \omega t) x_1 \overset{\circ}{x}_2 \, dt - \int \frac{x_1^2}{2} m \omega^2 \cos \omega t \, dt - \int k x_1^2 \, dt - \int x_1 f(x_2) \, dt \\ m_{21} &: -x_1 x_2 (1+m \cos \omega t) = -\int (1+m \cos \omega t) \overset{\circ}{x}_1^2 \, dt - \int (1+m \cos \omega t) x_1 \overset{\circ}{x}_2 \, dt - \int x_1 \overset{\circ}{x}_1 m \sin \omega t \, dt \\ m_{22} &: k \frac{x_1^2}{2} = -\int \overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2 (1+m \cos \omega t) \, dt - \int x_2 f(x_2) \, dt - \int x_1^2 (\alpha - m \sin \omega t) \, dt \\ n_{21} &: \frac{x_2^2}{2}(1+m \cos \omega t) = \int \overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2 (1+m \cos \omega t) \, dt - \int \frac{x_1^2}{2} m \sin \omega t \, dt \\ n_{22} &: \frac{x_2^2}{2}(\alpha - m \sin \omega t) + \int_0^{x_2} f(x_2) \, dx_2 = -\int x_2^2 (1+m \cos \omega t) \, dt - \int \frac{x_1^2}{2} m \omega^2 \cos \omega t \, dt - \int k x_1 \overset{\circ}{x}_2 \, dt \end{aligned}$$

.../

En combinant m_{22} et n_{21} , on obtient :

$$\begin{cases} V = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} (1 + m \cos \omega t) \\ \dot{V} = -x_2 f(x_2) - \dot{x}_1^2 \left[\alpha - \frac{m\omega}{2} \sin \omega t \right] \end{cases}$$

Alors, si $\begin{cases} k > 0 \\ 0 < m < 1 \\ \text{et } x_2 f(x_2) > 0 \quad \forall x_2 \end{cases}$

la stabilité asymptotique du système en 0 est assurée si :

$$\alpha \geq \frac{m\omega}{2}$$

Nagaraja et Chalam font remarquer que cette condition est moins restrictive que celle donnée par Blodgett et Young qui avaient fait l'étude précédemment.

L'hypothèse $x_2 f(x_2)$ n'est pas nécessairement vérifiée. La méthode de Nagaraja et Chalam conduit alors aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} k > 0 \\ 0 < m < 1 \\ \alpha + \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{m\omega}{2} \end{cases}$$

III.2.1.b. Stationnatisation puis linéarisation : en appliquant la méthode de centrage (cf. ch. II § III.1.1)

Pour le système représenté par :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k}{1 + m \cos \omega t} x_1 - \frac{\alpha - m\omega \sin \omega t}{1 + m \cos \omega t} x_2 - \frac{f(x_2)}{1 + m \cos \omega t}$$

.../

nous effectuons le changement d'échelle $\tau = \omega t$ ($\varepsilon = \frac{1}{\omega}$) :

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon x_2$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -\frac{k\varepsilon}{1+m\cos\tau} x_1 - \frac{\alpha - m\varepsilon\sin\tau}{1+m\cos\tau} \varepsilon x_2 - \frac{\varepsilon f(x_2)}{1+m\cos\tau}$$

Pour plus de commodité d'écriture, nous posons $f(x_2) = f^* \cdot x_2$, tout en gardant à l'esprit que le système n'a pas été en fait linéarisé, et que f^* dépend de x_2 .

L'équation d'état se formule alors de manière plus simple :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \frac{-k}{1+m\cos\tau} \varepsilon & -\frac{\alpha+f^*(x_2)-m\varepsilon\sin\tau}{1+m\cos\tau} \varepsilon \end{bmatrix} X \\ &= \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -(\alpha+f^*(x_2)) \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k\varepsilon\cos\tau}{1+m\cos\tau} & \frac{m\varepsilon\sin\tau}{1+m\cos\tau} + \varepsilon \frac{(\alpha+f^*)\cos\tau}{1+m\cos\tau} \end{bmatrix} X \\ &\qquad\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad C(\tau) \end{aligned}$$

Soit $G(\tau)$ une primitive de $C(\tau)$. On obtient, en posant :

$$I = \int \frac{m\cos\tau}{1+m\cos\tau} d\tau = \frac{-2}{\sqrt{1-m^2}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-m}{1+m}} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} + \tau$$

$$J = \int \frac{m\sin\tau}{1+m\cos\tau} d\tau = -\operatorname{Ln}(1+m\cos\tau)$$

$$G(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k\varepsilon I & J + (\alpha+f^*)\varepsilon I \end{bmatrix} \dots/$$

On définit un nouveau vecteur état $v = (I+G)^{-1}X$, qui vérifie :

$$\frac{dv}{dt} = (I+G)^{-1} \left[\overset{\circ}{G} G + \varepsilon A(I+G) \right] v$$

dont il faut ensuite prendre la moyenne pour obtenir le système centré, ce qui semble impossible analytiquement.

On peut constater sur cet exemple la difficulté à mettre en oeuvre la méthode de centrage, spécialement quand les termes périodiques sont des fonctions difficiles à intégrer.

III.2.2. - Linéarisation puis stationnarisation

. La méthode de Jones et Robe (cf. ch. II, § II.2.2) conduit au même résultats que la méthode de Nagaraja et Chalam, puisque la fonction de Lyapunov générée est la même.

Le système cependant a été préalablement linéarisé, c'est-à-dire que la condition $\overset{\circ}{\theta} f(\overset{\circ}{\theta}) > 0$ doit être remplacée par $f^* > 0$ (avec $f^* = \frac{f(\overset{\circ}{\theta})}{\overset{\circ}{\theta}}$) pour $\overset{\circ}{\theta}$ voisin de 0.

C'est-à-dire, que les conditions de stabilité que nous avons obtenues pour les modèles linéarisés sont aussi des conditions de stabilité pour le système réel.

. La méthode de Cook (cf. ch. II, § I) consiste à décomposer la matrice d'état :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{1+m\cos\omega t} & \frac{-a}{1+m\cos\omega t} + \frac{m\omega\sin\omega t}{1+m\cos\omega t} - \frac{f(\overset{\circ}{\theta})/\overset{\circ}{\theta}}{1+m\cos\omega t} \end{bmatrix}$$

.../

en

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\alpha \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k m \cos \omega t}{1+m \cos \omega t} & \frac{\alpha m \cos \omega t}{1+m \cos \omega t} - \frac{f(\dot{\theta})/\dot{\theta}}{1+m \cos \omega t} + \frac{m \sin \omega t}{1+m \cos \omega t} \end{bmatrix}}_F$$

Si W est la matrice de passage permettant de diagonaliser A , et Σ la matrice des parties réelles des valeurs propres de A , la condition $\sup_{x,t} \| \Sigma^{-1} W^{-1} F W \| < 1$

conduit à :

$$\sup_t \frac{1}{\alpha(1+m \cos \omega t)} \left\{ |\alpha m \cos \omega t - f^* + m \sin \omega t| + \sqrt{\frac{4((k m \cos \omega t)^2 - \alpha(\alpha m \cos \omega t - f^* + m \sin \omega t) + k(\alpha m \cos \omega t - f^* + m \sin \omega t)^2)}{4k - \alpha^2}} \right\} < 1$$

ce qui est impossible à expliciter en pratique.

III.2.3. - Méthode numérique

Le programme numérique que nous avons décrit au paragraphe II s'applique au système linéarisé (autour de 0) dont l'équation d'état :

$$(1 + m \cos \omega t) \ddot{\theta} + (\alpha + f^*(\dot{\theta}) - m \sin \omega t) \dot{\theta} + k \theta = 0$$

dépend des paramètres $\omega, m, k, \alpha + f^*$.

Nous avons construit, pour $\omega = 2\pi$, le domaine de stabilité dans l'espace de coordonnées $(m, k, \alpha + f^*)$ pour $m \in]0, 1[$, k et $\alpha + f^*$ positifs, en procédant de la manière suivante :

Pour chaque valeur de k choisie, on détermine les zones de stabilité dans le plan $(m, \alpha + f^*)$. En général pour les valeurs de m petites, la condition $\alpha + f^* > 0$ suffit.

On approche donc d'abord la première valeur de m pour laquelle $\alpha + f^*$ "décolle" de la droite $\alpha + f^* = 0$. Ensuite, pour des valeurs de m choisies arbitrairement, $\alpha + f^*$ est ajustée de manière à être sur la limite de stabilité.

.../

Nous avons ainsi obtenu les résultats décrits figure n° 1:

domaine obtenu par la méthode
de Nagaraja et Chalam :

$$\begin{aligned} k &> 0 \\ 0 &< m < 1 \\ \alpha + f^* &> m\omega/2 \end{aligned}$$

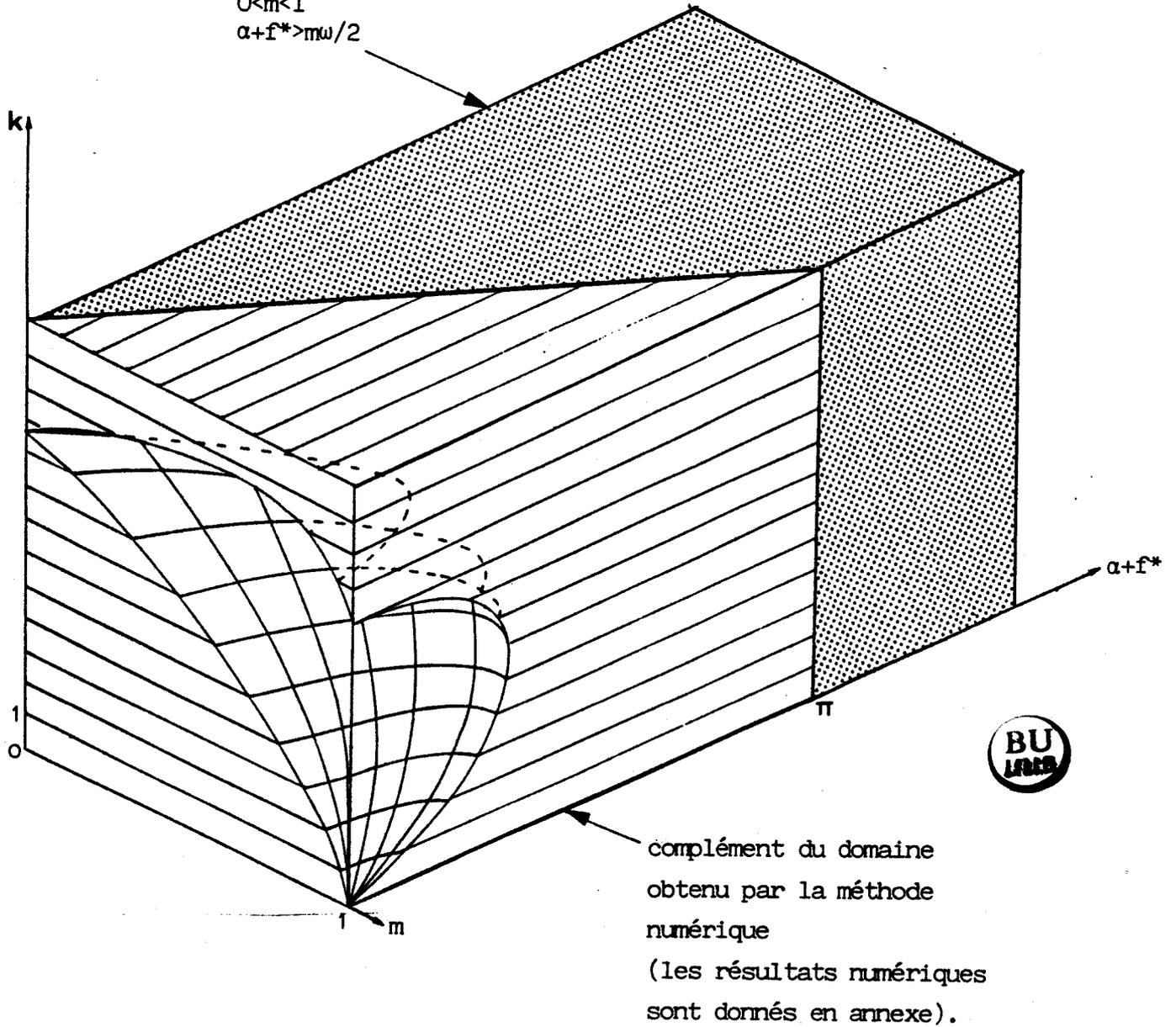


FIGURE I

Sur cet exemple, on peut dégager deux conclusions importantes :

- 1) le domaine de Nagaraja et Chalam (méthode sans linéarisation) est aussi le domaine de Jones et Robe (avec linéarisation) et est inclus dans le domaine obtenu par la méthode numérique (aussi avec linéarisation).

A l'intérieur de cette zone, la stabilité des modèles linéaires tangents est équivalente à celle du modèle réel.

La particularité de cet exemple nous incite à définir, dans le même esprit que la conjecture du linéaire, la notion de conjecture du linéaire non stationnaire :

Nous dirons alors qu'un système non linéaire et non stationnaire vérifie la conjecture du linéaire non stationnaire si le fait que tous les modèles linéarisés (pour chaque état x) et non stationnaires soient asymptotiquement stables entraîne que le système réel est globalement asymptotiquement stable.

Ainsi, dans le domaine de Nagaraja et Chalam, la conjecture du linéaire non stationnaire est vérifiée.

- 2) La partie complémentaire du domaine de Nagaraja et Chalam dans le domaine numérique est relativement vaste, et concerne des valeurs intéressantes de $\alpha + f^*$ (inférieures à $\frac{m\omega}{2}$).

Il faut cependant garder à l'esprit que cette zone détermine uniquement la stabilité asymptotique de l'origine par linéarisation dans son voisinage, et qu'on ne peut en aucun cas affirmer que la conjecture du linéaire non stationnaire y est vérifiée.

Au contraire même, pour la non-linéarité :

$$f(\hat{\theta}) = - \hat{\theta}_{\max} \left(1000, \frac{\sqrt{|\hat{\theta}|}}{|\hat{\theta}|} \right) \times 0,0005$$

.../

il est possible de choisir des valeurs pour les constantes α , m et k telles que le triplé $(m, \alpha + f^*(\dot{\theta}), k)$ reste à l'intérieur du domaine de stabilité asymptotique déterminé par la méthode numérique, alors que le système réel associé n'est pas stable (cf. figure 2).

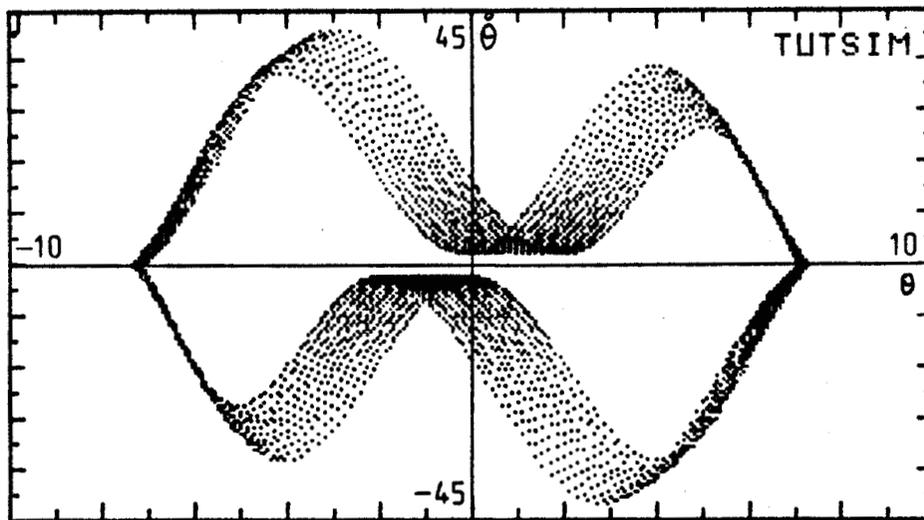


FIGURE 2



.../

IV - CONCLUSION

Nous avons tenté, dans ce chapitre, de souligner l'intérêt de la théorie de Floquet-Lyapunov, spécialement lorsqu'on dispose de moyens de calculs numériques performants.

Pour le système de Mathieu, qui est déjà linéaire, la seule méthode non numérique qui aboutisse est la méthode de centrage ; cependant, les conditions de stabilité qu'elle détermine sont beaucoup plus restrictives que celles de la méthode numérique.

Sur l'exemple non linéaire d'un moteur dont la charge est périodique, la méthode directe de Nagaraja et Chalam mène à des conditions de stabilité retrouvées par Jones et Robe après linéarisation autour de l'origine.

La conjecture du linéaire non stationnaire est vérifiée dans le domaine correspondant.

La méthode numérique, d'autre part, après linéarisation autour de l'origine, conduit à des conditions moins restrictives, et à un domaine de stabilité qui englobe le domaine précédent. Le système non linéaire non stationnaire peut y être stable pour certaines fonctions non linéaires $f(\overset{\circ}{\theta})$, mais il est possible de construire des contre-exemples de non-linéarités $f(\overset{\circ}{\theta})$ qui déstabilisent le système complexe.

Il semble donc que la méthode numérique soit un bon test pour la stabilité absolue, car elle permet d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité pour des modèles linéaires non stationnaires, qui constituent par conséquent les conditions optimales que nous puissions obtenir dans le problème de la détermination des domaines de stabilité absolue du système réel.

DETERMINATION DU DOMAINE DE STABILITE APRES LINEARISATION

RESULTATS DE LA METHODE NUMERIQUE

k	valeur de m où $\alpha+f^*$ décolle de 0	valeurs de $\alpha+f^*$ pour $m=0,1$ $m=0,2$ $m=0,3$ $m=0,4$ $m=0,5$ $m=0,6$ $m=0,7$ $m=0,8$ $m=0,9$ $m=0,99$	valeur de m où $\alpha+f^*$ revient à 0
0,01			
1	0,975	0,327	
2	0,935	0,653	
3	0,860	0,532 0,848	
4	0,785	0,875 0,975	
5	0,685	0,242 0,805 1,055 0,995	
6	0,585	0,755 1,085 1,145 1,045	
7	0,485	0,715 0,945 1,105 1,165 0,975	
8	0,325	0,435 0,675 0,865 1,014 1,115 1,115 0,795	
8,9		0,010	0,99
9	0,175		
9,9	0,005		
10	0,025	0,305 0,585 0,815 0,855	0,955
10,1	0,045		
11	0,275		0,875
11,5	0,465		0,775
12 < k < 20			



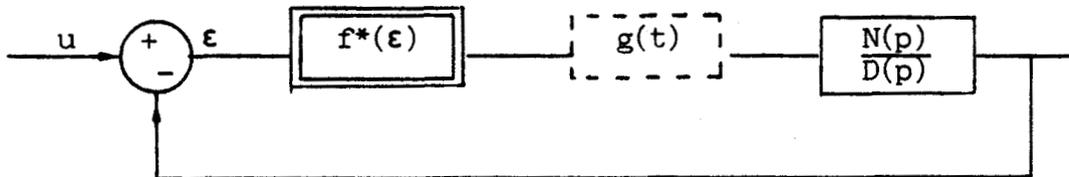
CHAPITRE IV

—

CHAPITRE 4

APPLICATION DE LA METHODE DE CENTRAGE
A LA SYNTHESE DES SYSTEMES DE TYPE LURIE-POSTNIKOV

Nous allons considérer à présent la classe importante des systèmes de type Lurie-Postnikov monovariabiles représentés par la structure de rétroaction suivante :



Le gain $g(t)$ est ici non stationnaire, périodique.

Il peut exister de manière naturelle dans la chaîne d'action du système. Mais, en général, c'est un organe de commande que l'on introduit dans le but d'obtenir une meilleure synthèse de l'asservissement.

Sous d'autres aspects, le principe d'asservissement par coefficients périodiques a été déjà envisagé (Meerkov 1973, Pillet, Richard et al. 1982, Vidal 1983). L'originalité majeure de l'étude proposée dans ce chapitre réside dans la simplicité de la forme du modèle choisi, qui convient à de nombreux asservissements rencontrés dans la pratique.

Nous constaterons que le terme $g(t)$, bien qu'introduisant une complexité supérieure dans l'analyse du système, peut permettre d'améliorer les propriétés dynamiques de l'asservissement.

Notre objectif sera donc, dans un premier temps, de lever la difficulté rencontrée dans l'analyse de tels systèmes, qui constituent un cas particulier de ceux que nous avons rencontrés jusqu'à présent.

.../

Cette difficulté réside essentiellement dans le fait que la non-linéarité $f^*(\epsilon)$ et la non-stationnarité $g(t)$ sont couplées sous forme de produit : la plupart des méthodes de réduction conduisant à des majorations des termes non constants $|f^*(\epsilon) \times g(t)|$ reviennent à majorer $|f^*(\epsilon)| \times \max |g(t)|$; le système est alors traité comme si on remplaçait le terme non stationnaire $g(t)$ par un gain constant $\max |g(t)|$, ce qui, d'une part, nous ramène à un système trop éloigné du système réel, d'autre part, ne résout par notre problème de synthèse d'un système de type Lurii-Postnikov non linéaire.

Nous proposons donc de montrer que l'utilisation préalable d'une méthode de stationnarisation respectant la proximité des systèmes associés par réduction s'avère plus performante qu'une simplification directe.

Nous appliquerons, dans ce but, la méthode de centrage aux systèmes de type Lurii-Postnikov de dimension quelconque vérifiant $d^0N(p) \leq d^0D(p) - 2$, et pour lesquels la fonction de transfert ne présente pas de simplification d'un pôle par un zéro.

La comparaison des résultats de la méthode de centrage et de ceux des autres méthodes dont nous disposons sera établie ensuite dans le cas particulier de système d'ordre 3, avec ou sans intégrateur.

I - THEOREME DE CENTRAGE APPLIQUE A UN SYSTEME DE TYPE LURIE POSTNIKOV

Théorème I : Soit le système décrit en figure (IV.1), où :

- $\frac{N(p)}{D(p)}$ est une fonction de transfert non dégénérée, d'ordre q , avec :
 - $D(p)$ normalisé (coefficient de degré q égal à 1)
 - $N(p)$ de degré au plus $q-2$, $a(N)$ étant son coefficient de degré $q-2$.
 - $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t)$ est périodique de période T , décomposable sous la forme :
 - $g(t) = g_0 + g_1(\omega t)$ où
 - g_0 est la moyenne de $g(t)$
 - $g_1(\omega t)$ est une fonction intégrable de moyenne nulle
 - $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- .../

- . $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$, $f(\epsilon)$ est une fonction deux fois dérivable de ϵ , à dérivées première et seconde continues et bornées pour ϵ borné, vérifiant $f(0) = 0$.

Son gain équivalent est noté $f^*(\epsilon) = \frac{f(\epsilon)}{\epsilon}$.

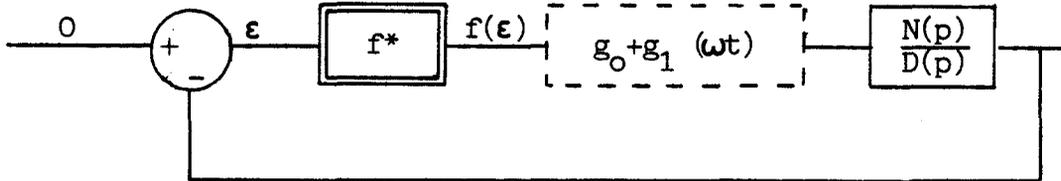


FIGURE IV.1

Alors :

- . Un système centré résultant du théorème de Bogolioubov est donné par la figure IV.2 ($G_1(\tau)$ est la primitive de g_1 de moyenne nulle).
- . L'approximation du système réel par le système centré est valable si ce dernier est asymptotiquement stable.
- . Leurs trajectoires respectives sont à écart maximal η qui tend vers 0 quand la pulsation ω augmente.

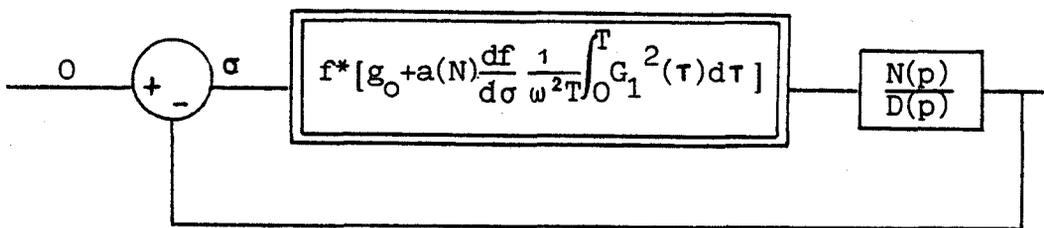


FIGURE IV.2

Théorème II : Si le système vérifie les hypothèses du théorème I, sauf celles concernant la dérivée seconde $\frac{d^2 f}{d\varepsilon^2}$

(existence, continuité ou majoration).

Alors, un système centré résultant du théorème de Bogolioubov est donné par la figure IV.3.

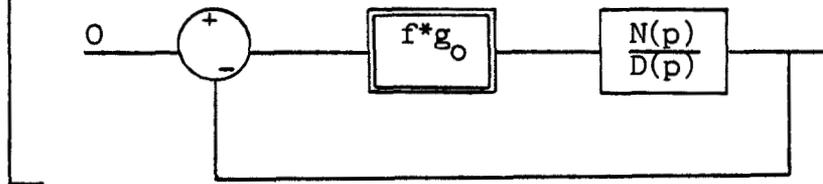


FIGURE IV.3

Remarque : Le système centré du théorème II coïncide avec celui du théorème I lorsque $a(N) = 0$, c'est-à-dire lorsque $N(p)$ est de degré au plus égal à $q-3$.

Théorème III : Si le système vérifie les hypothèses du théorème I, sauf celles concernant $f(\varepsilon)$ qui est simplement supposée localement bornée et lipschitzienne, et si, de plus $g_0 = 0$ et $\frac{N(p)}{D(p)}$ asymptotiquement stable.

Alors, les trajectoires du système initial et celles du système centré décrit figure IV.3 (qui est le système initial en boucle ouverte), sont à écart maximal η qui tend vers 0 lorsque la pulsation ω augmente.

DEMONSTRATIONS

. Démonstration du théorème I

La fonction de transfert est non dégénérée. Ainsi, en appliquant la théorie du polynôme symbolique (Richard, 1984), il est possible de choisir une représentation du système particulièrement intéressante en donnant à la matrice une forme en flèche mince.

.../

Etape 1 : Le vecteur état x est choisi de manière à ce que sa dernière composante soit ϵ .

Le système en régime libre peut alors être représenté sous une forme simple où tous les termes non constants sont regroupés dans une seule colonne (ou une seule ligne) de la matrice d'évolution :

$$(IV.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bf^*(\epsilon).g(t)c^T x(t)$$

avec A : matrice constante qxq

b : vecteur colonne $qx1$

c^T : vecteur ligne $1xq$ de la forme $(0 \dots 0 1)$

$$\epsilon = c^T x$$

Comme $d^0N \leq d^0D - 2$, la trace de la matrice d'évolution est constante et l'intersection de la diagonale avec la dernière colonne ne contient pas de termes non constants. La dernière composante de b est nulle, c'est-à-dire $c^T b = 0$.

Nous proposons alors la forme en flèche suivante :

$$(IV.2) \quad A + bf^*(\epsilon)g(t)c^T = \left[\begin{array}{cccc} -\lambda_1 & & & \delta_1 + \beta_1 f^*(\epsilon)g(t) \\ & -\lambda_2 & & \delta_2 + \beta_2 f^*(\epsilon)g(t) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \delta_i + \beta_i f^*(\epsilon)g(t) \\ & & & \vdots \\ & & & \delta_{q-1} + \beta_{q-1} f^*(\epsilon)g(t) \\ & & & -\gamma \end{array} \right]$$

$\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & -\lambda_{q-1} \\ & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{q-1} \end{array}$

.../

- où : . $\forall i \alpha_i, \beta_i, \delta_i, \lambda_i$ et γ sont des constantes réelles
 . $\forall i, j \lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$
 . le polynôme symbolique de $A+bf^*(\epsilon)g(t)c^T$ est égal à :

$$(IV.3) \quad P(\lambda) = D(\lambda) + f^*(\epsilon).g(t) N(\lambda)$$

ce qui représente un ensemble de $2q-1$ relations entre les $4q-3$ coefficients de la matrice.

. le choix arbitraire de $2q-2$ coefficients (par exemple les termes α_i et $\lambda_i \forall i$) permet alors de déterminer complètement les autres coefficients.

lemme préliminaire : la somme $-\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \beta_i$ est égale au coeffi-

cient de degré $q-2$ $a(N)$ du polynôme $N(\lambda)$

$$(IV.4) \quad \left(-\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \beta_i = a(N) \right)$$

démonstration du lemme :

$$P(\lambda) = D(\lambda) + f^*(\epsilon)g(t)N(\lambda)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda + \lambda_1 & 0 & -(\delta_1 + \beta_1 f^* g(t)) \\ 0 & \lambda + \lambda_i & -(\delta_i + \beta_i f^* g(t)) \\ -\alpha_1 & -\alpha_i & \lambda + \gamma \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } N(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + \lambda_1 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & \lambda + \lambda_i & -\beta_i \\ -\alpha_1 & -\alpha_i & 0 \end{bmatrix}$$

.../

D'après la formule de Schur (Gantmacher, 1959),

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } N(\lambda) &= \left\{ (\lambda + \lambda_1) \dots (\lambda + \lambda_i) \dots (\lambda + \lambda_{q-1}) \right\} x - \left\{ \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(-\alpha_i)(-\beta_i)}{\lambda + \lambda_i} \right\} \\ &= \lambda^{q-2} \left(- \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \beta_i \right) + R(\lambda) \end{aligned}$$

$R(\lambda)$ polynôme en λ de degré $q-3$.

donc $- \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \beta_i$ est le coefficient de degré $q-2$ de $N(\lambda)$.

Etape 2 : On a $g(t) = g_0 + g_1(\omega t)$

avec :

. $g_1(\omega t)$ périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, intégrable et de moyenne nulle :

$$\frac{1}{T} \int_0^T g_1(\omega t) dt = 0$$

. g_0 moyenne sur une période de $g(t)$:

$$g_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$$

La matrice d'évolution du système peut être décomposée sous la forme :

$$A = [A + bf^*(\epsilon)g_0c^T] + bf^*(\epsilon)g_1(\omega t)c^T$$

Par un changement d'échelle des temps $\tau = \omega t$, l'équation d'état est remplacée par :

$$(IV.5) \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\omega} [A + bf^*(\epsilon)g_0c^T] x + \frac{b}{\omega} f^*(\epsilon)g_1(\tau)c^T x$$

.../

Etape 3 : On introduit un changement de variable inspiré de celui qu'utilise Meerkov pour les systèmes linéaires : si $G_1(\tau)$ est la primitive de $g_1(\tau)$ de moyenne nulle, et

$$(IV.6) \quad G(x, \tau) = \frac{1}{\omega} b G_1(\tau) f(\epsilon)$$

(ϵ dernière composante de x),

on définit un second vecteur état :

$$(IV.7) \quad v = x - G(x, \tau)$$

v est bien un vecteur état, car la matrice :

$[\text{Id} - \frac{1}{\omega} b G_1(\tau) f^*(\epsilon) c^T]$ est une matrice inversible, bornée et dérivable.

Signalons, en outre, que la dernière composante de $G(x, \tau)$ étant nulle, celle de v est donc ϵ , et on a : $G(v, \tau) = G(x, \tau)$.

Etape 4 : calcul de $\frac{dv}{d\tau}$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{dx}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}(G(x, \tau)) \\ &= \frac{1}{\omega} [A + b f^*(\epsilon) g_0 c^T] x + \frac{b}{\omega} f^*(\epsilon) g_1(\tau) c^T x - \frac{1}{\omega} b [f(\epsilon) g_1(\tau) + \frac{df}{d\epsilon}(\epsilon) \frac{d\epsilon}{d\tau} G_1(\tau)] \\ &= \frac{1}{\omega} [A + b f^*(\epsilon) g_0 c^T] x - \frac{1}{\omega} b [\frac{df}{d\epsilon}(\epsilon) G_1(\tau) \frac{d\epsilon}{d\tau}] \end{aligned}$$

or $\frac{d\epsilon}{d\tau} = c^T \frac{A}{\omega} x$

donc
$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{\omega} [A + b f^*(\epsilon) g_0 c^T - b \frac{df}{d\epsilon}(\epsilon) G_1(\tau) c^T \frac{TA}{\omega}] x \\ &= \frac{1}{\omega} [A + b f^*(\epsilon) g_0 c^T - b \frac{df}{d\epsilon}(\epsilon) G_1(\tau) c^T \frac{TA}{\omega}] (v + G(v, \tau)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(IV.8) \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\omega} [A + b f^*(\epsilon) g_0 c^T] v - \frac{1}{\omega} b \frac{df}{d\epsilon}(\epsilon) G_1(\tau) c^T \frac{TA}{\omega} G(v, \tau) + \underbrace{\frac{1}{\omega} [A + b f^*(\epsilon) g_0 c^T] G(v, \tau) - \frac{1}{\omega} [b \frac{df}{d\epsilon}(\epsilon) G_1(\tau) c^T \frac{TA}{\omega}] v}_{\text{termes de moyenne nulle}}$$

.../

Ce système est sous la forme standard :

$$(IV.9) \quad \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \phi(v, \tau).$$

Etape 5 : Les conditions d'application du théorème de centrage de Bogolioubov pour le système standard :

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \phi(v, \tau) \text{ sont (voir ch.I, § IV.2.) :}$$

- . $\phi(v, \tau)$ est bornée et continue en v et τ
 - . $\frac{\partial \phi}{\partial v}(v, \tau)$ est bornée et continue en v et τ
- sur $\Gamma \times \mathbb{R}$, avec Γ domaine compact de \mathbb{R}^q contenant 0.

. la moyenne :

$$(IV.10) \quad \phi_0(v) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(v, \tau) d\tau$$

existe uniformément par rapport à v .

D'après les équations (IV.8) et (IV.9), $\phi(v, \tau)$ est liée à $f(\varepsilon)$ et à $g(\tau)$, et les conditions sur $\phi(v, \tau)$ que nous venons d'explicitier sont vraies si :

1) la fonction $f(\varepsilon)$ vérifie sur tout domaine compact de \mathbb{R} contenant 0 :

- . f est bornée et continue
- . $\frac{df}{d\varepsilon}$ bornée et continue
- . $\frac{d^2f}{d\varepsilon^2}$ bornée et continue

2) la fonction $g_1(\tau)$ est telle que :

- . g_1 périodique, intégrable de moyenne nulle
- . $G_1(\tau)$ primitive de $g_1(\tau)$ de moyenne nulle
- . $G_1(\tau)$ bornée et continue.

Ces propriétés sont vérifiées par hypothèse.

.../

Alors au système standard (IV.9) on associe le système centré :

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \phi_0(\xi) \text{ ou encore } \frac{d\xi}{d\tau} = \phi_0(\xi)$$

où ϕ_0 vérifie l'équation (IV.10), et :

. la différence des deux trajectoires $x(t)$ et $\xi(t)$ partant des mêmes conditions initiales tend vers 0 quand ω devient très grand, sur un intervalle de temps fini.

. si $\xi(t)$ est asymptotiquement stable, l'intervalle de temps de validité est infini.

En intégrant sur une période les termes du membre de droite de l'équation (IV.8), dont les deux derniers d'ailleurs ont une moyenne nulle (car $G(u, \tau)$ et $G_1(\tau)$ ont une moyenne nulle), on obtient le système centré suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{1}{\omega} [A + bf^*(\sigma)g_0 c^T] \xi - \frac{1}{\omega^2} b \frac{df}{d\sigma}(\sigma) c^T A \frac{1}{T} \int_0^T G_1(\tau) G(\xi, \tau) d\tau \\ \text{(IV.11)} \quad \frac{d\xi}{d\tau} &= \left[\frac{1}{\omega} A + bf^*(\sigma)g_0 c^T \right] \xi - \frac{1}{\omega^2} \frac{df}{d\sigma}(\sigma) \frac{f(\sigma)}{\omega} bc^T Ab \frac{1}{T} \int_0^T G_1^2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

où $\sigma = c^T \xi$ est la dernière composante de ξ .

Le développement du deuxième terme de IV.11 fait intervenir l'expression $f^* \frac{df}{d\sigma} bc^T Abc^T$ où :

$$bc^T Abc^T = \begin{bmatrix} 0 & \text{---} & 0 & \beta_1 (\sum_i \alpha_i \beta_i) \\ | & & | & | \\ 0 & & 0 & \beta_{q-1} (\sum_i \alpha_i \beta_i) \\ 0 & \text{---} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après le lemme, $a(N) = \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \beta_i$, donc :

.../

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\omega} [A + bf^*(\sigma)g_0c^T] \xi + \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T G_1^2(\tau) d\tau \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & a(N)\beta_1 f^* \frac{df}{d\sigma} \\ & & | \\ & & a(N)\beta_{q-1} f^* \frac{df}{d\sigma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi$$

et finalement :

$$(IV.12) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \left[A + bf^*(\sigma)g_0c^T + ba(N)f^*(\sigma) \frac{df}{d\sigma} \frac{1}{\omega^2 T} \int_0^T G_1^2(\tau) d\tau c^T \right] \xi$$

Au système initial non linéaire non stationnaire est associé le système non linéaire centré représenté en figure IV.2.

Par exemple, avec $g_1(\omega t) = \sin \omega t$ ou $g_1(\omega t) = \cos \omega t$, on obtient le système centré :

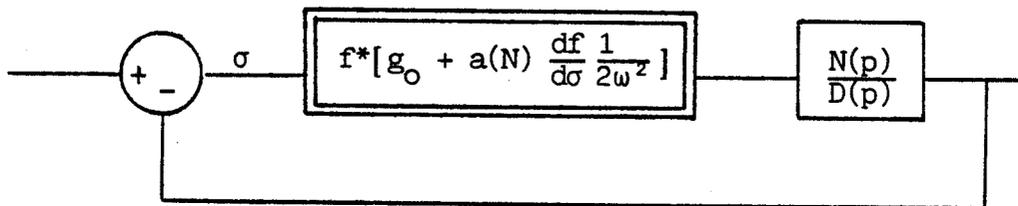


FIGURE IV.4

Remarque : Dans le cas où le polynôme $N(p)$ est au plus de degré $q-3$, on a $a(N) = 0$.

Le système centré est alors identique au système non linéaire de départ dans lequel $g_1(\omega t) = 0$.

Centrer le système correspond ici à remplacer directement dans le schéma bloc le terme non stationnaire par sa moyenne (figure IV.3).

.../

. démonstration du théorème II

Si les conditions du théorème de Bogolioubov ne sont pas vérifiées il est cependant possible d'appliquer le théorème de centrage au système (IV.5) avant changement de variables, à la condition que :

- . $g_1(\tau)$ périodique, de moyenne nulle,
- . f et $\frac{df}{d\varepsilon}$ bornées et continues sur tout domaine compact de \mathbb{R} contenant 0.

On associe alors au système initial de la figure IV.1 le système représenté figure IV.3 qui est en fait le système limite, quand ω devient très grand, du système non linéaire obtenu quand les hypothèses du théorème de centrage sont vérifiées.

. démonstration du théorème III

Si $\frac{df}{d\varepsilon}$ n'est plus continue (en particulier à l'origine) on dispose

alors d'un théorème similaire au théorème de centrage (Vidal 1983) :

Soit un système faiblement non linéaire sous forme standard :

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon Ax + \varepsilon h(x, \tau)$$

où :

1) $h(x, \tau)$ est une fonction :

- . continue sur $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$
- . périodique de τ uniformément par rapport à x dans tout compact de \mathbb{R}^q
- . de moyenne nulle par rapport à τ
- . localement bornée et k -lipschitzienne, c'est-à-dire que :

.../

$\forall \rho_0 > 0 \exists M(\rho_0), k(\rho_0)$ tels que
 $\|h(x, \tau)\| < M(\rho_0)$
 et $\|h(x', \tau) - h(x'', \tau)\| \leq k(\rho_0) \|x' - x''\|$
 $\forall \tau \in \mathbb{R} \forall x, x', x'' \in \{x / \|x\| < \rho\} \forall \rho \ 0 < \rho < \rho_0$

et où :

2) les parties réelles des valeurs propres de A sont toutes strictement négatives.

Alors $\forall \eta \ 0 < \eta < \rho \exists \omega_0 > 0$ tel que $\forall \omega > \omega_0$

les solutions $x(\tau)$ (système réel) et $\xi(\tau)$ (système centré) vérifient pour une même condition initiale située dans B_{ρ_0} :

$$\|x(\tau) - \xi(\tau)\| < \eta \quad \forall \tau \geq \tau_0$$

Ainsi, si $g_0 = 0$, si A est asymptotiquement stable et $f(\varepsilon)$ localement bornée et lipschitzienne, les trajectoires du système centré et du système réel sont à écart maximal η (avec $\eta(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$)

L'originalité de ces résultats (notamment de ceux du théorème I) provient de l'utilisation combinée de la représentation en flèche et d'un changement de variable inspiré de celui que propose Meerkov dans le cas de systèmes linéaires.

Il est intéressant en outre de signaler que plus la pulsation ω augmente, plus le système réel se rapproche du système dans lequel on a immédiatement pris la moyenne du coefficient non stationnaire.

Ainsi, du point de vue de l'intérêt de ce théorème pour la synthèse des systèmes,

. ω doit être choisi suffisamment grand pour que le théorème de Bogolioubov conduise à des trajectoires centrées peu différentes des trajectoires réelles,

. ω doit aussi être suffisamment faible pour que la commande prenne effectivement en compte l'effet du gain $g(t)$ dans la rétroaction (boucle fermée) .

Une simulation s'avère donc être un complément intéressant à la synthèse d'un système périodique. .../

II - EXEMPLE D'UN SYSTEME DE TYPE LURIE-POSTNIKOV D'ORDRE 3 SANS INTEGRATEUR

Nous allons à présent étudier un système de type Lurié-Postnikov d'ordre 3 représenté par la figure IV.5, avec $\mu = 0$.

Les simulations seront effectuées pour $\beta = 4$ et $\mu = 3$.

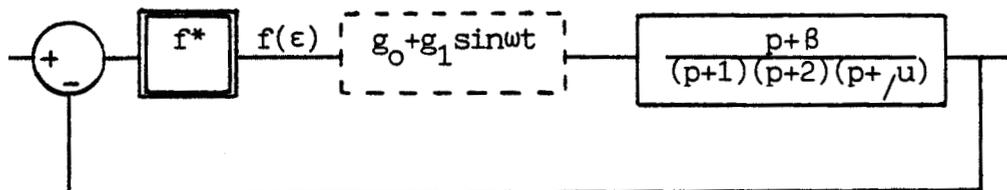


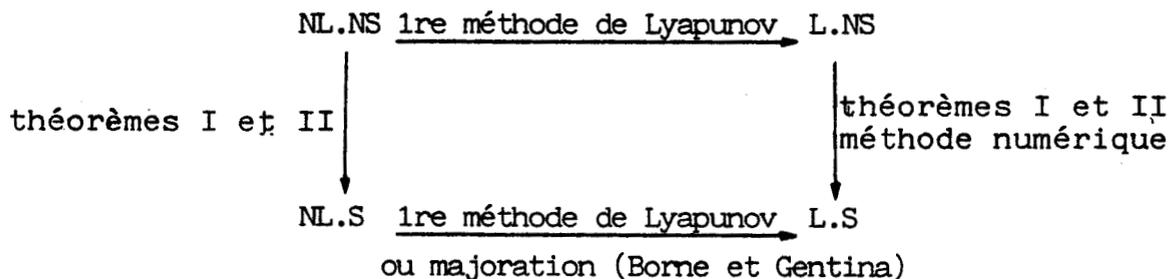
FIGURE IV.5

Nous comparerons les résultats obtenus par la méthode de centrage présentée en I à ceux des autres méthodes recensées dans ce mémoire, en particulier des méthodes de réduction par comparaison des propriétés de stabilité.

La matrice d'évolution que nous utilisons est :

$$(IV.13) \begin{bmatrix} -1 & 0 & (1-\beta)f^*(g_0+g_1 \sin \omega t) \\ 0 & -2 & (\beta-2)f^*(g_0+g_1 \sin \omega t) \\ 1 & 1 & -\mu \end{bmatrix}$$

II.1. - Réduction préservant la proximité topologique. Méthode de centrage



.../

II.1.1. - Linéarisation puis stationarisation : au voisinage de $\epsilon = 0$, on a :

$$f(\epsilon)_{/\epsilon=0} = f^*(0) \cdot \epsilon \quad \text{avec} \quad f^*(0) \text{ constant}$$

$$\text{et} \quad \frac{df}{d\epsilon}_{/\epsilon=0} = f^*(0)$$

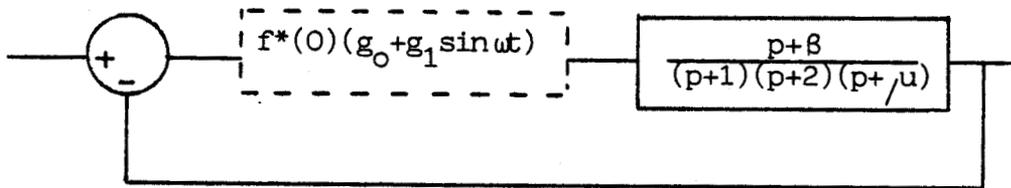


FIGURE IV.6

l'application du théorème I (énoncé précédemment) quand f vérifie les conditions requises permet d'associer au système linéarisé non stationnaire de la figure IV.6 le système linéaire stationnaire :

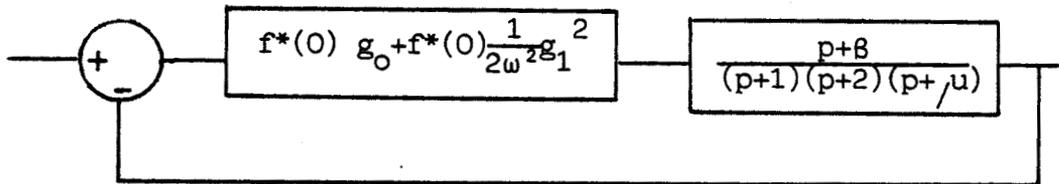


FIGURE IV.7

d'équation d'état :

$$\dot{\bar{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & (1-\beta)f^*(0) \left[g_0 + f^*(0)g_1^2 \frac{1}{2\omega^2} \right] \\ 0 & -2 & (\beta-2)f^*(0) \left[g_0 + f^*(0)g_1^2 \frac{1}{2\omega^2} \right] \\ 1 & 1 & -\mu \end{bmatrix} \bar{X}$$

.../

La stabilité asymptotique de ce système est assurée à l'origine si (conditions de Routh) :

$$\begin{cases} 3 + \mu > 0 \\ 3\mu^2 + 9\mu + 6 + (3 + \mu - \beta) \left[g_0 + f^*(0)g_1 \frac{1}{2\omega^2} \right] f^*(0) > 0 \\ 2\mu + \beta f^*(0) \left[g_0 + f^*(0)g_1 \frac{1}{2\omega^2} \right] > 0 \end{cases}$$

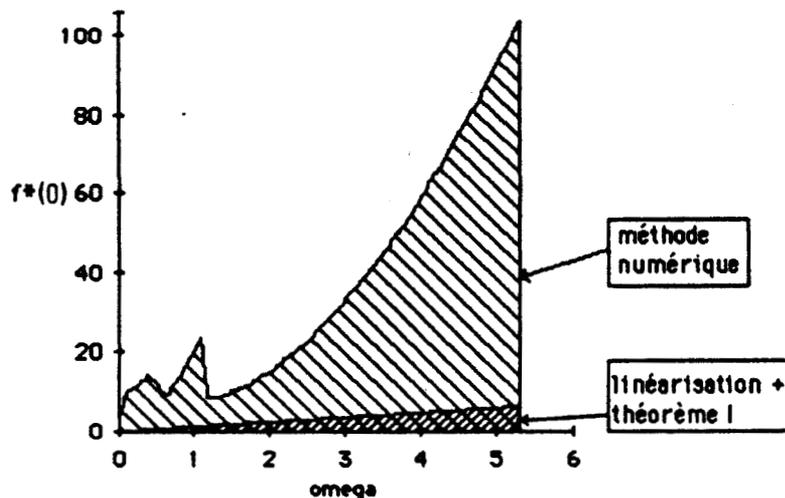
et pour $\mu = 3, \beta = 4$:

$$(IV.14) \quad f^*(0) \left(g_0 + f^*(0)g_1 \frac{1}{2\omega^2} \right) > \frac{-3}{2}$$

Le domaine de stabilité ne peut cependant être précisé par cette méthode qui est, en ce sens, limitée d'un point de vue pratique.

La méthode numérique présentée au chapitre III peut être directement appliquée au système figure IV.6 pour les valeurs particulières $\mu=3, \beta=4, g(t)=\sin(\omega t)$ que nous avons choisies.

On pourra constater encore ici la qualité des résultats qu'elle fournit:



II.1.2. - Stationnarisation puis majoration par le critère de Borne et Gentina

On obtient par le théorème I appliqué directement au système non linéaire non stationnaire : .../

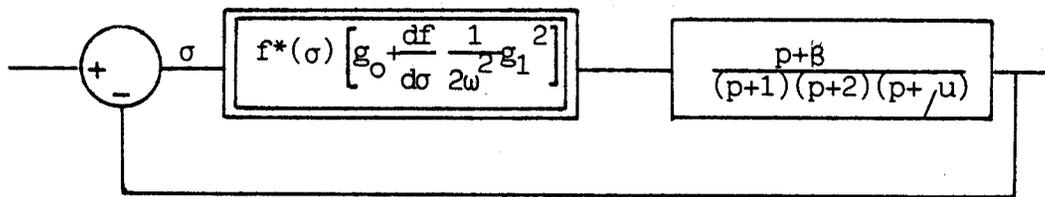


FIGURE IV.8

c'est-à-dire l'équation d'état :

$$(IV.15) \quad \dot{\xi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & (1-\beta)f^*(\sigma) \left[g_0 + \frac{df}{d\sigma} \frac{1}{2\omega^2} g_1^2 \right] \\ 0 & -2 & (\beta-2)f^*(\sigma) \left[g_0 + \frac{df}{d\sigma} \frac{1}{2\omega^2} g_1^2 \right] \\ 1 & 1 & -\mu \end{bmatrix} \xi$$

On peut en toute rigueur appliquer la 1re méthode de Lyapunov (linéarisation autour de l'origine). Les résultats sont alors les mêmes que ceux obtenus en II.1.1. et présentent par conséquent les mêmes limitations.

Une majoration, associée au critère pratique de Borne et Gentina à l'aide du système représenté par l'équation d'état :

$$(IV.16) \quad \dot{\psi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & |(1-\beta)f^*(\sigma)(g_0 + \frac{df}{d\sigma} \frac{1}{2\omega^2} g_1^2)| \\ 0 & -2 & |(\beta-2)f^*(\sigma)(g_0 + \frac{df}{d\sigma} \frac{1}{2\omega^2} g_1^2)| \\ 1 & 1 & -\mu \end{bmatrix} \psi$$

fournit des conditions simples de stabilité absolue :

$$(IV.17) \quad -2\mu + (|\beta-2| + 2|1-\beta|) |f^*(\sigma)| \left| g_0 + \frac{df}{d\sigma} \frac{1}{2\omega^2} g_1^2 \right| < 0$$

.../

Il est intéressant de remarquer que nous aurions pu utiliser le système centré suivant (théorème II)

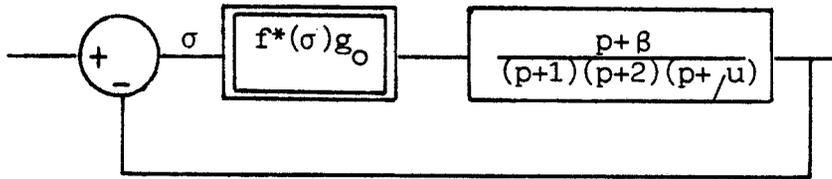


FIGURE IV.9

et obtenir des conditions suffisantes de stabilité asymptotique pour le système réel moins restrictives :

$$(IV.18) \quad -2/\mu + (|\beta-2| + 2|1-\beta|) |f^*(\sigma)| |g_0| < 0$$

Mais il faut rappeler que le système centré ne permet de conclure sur le système réel que lorsque ω est supérieur à une certaine valeur ω_0 qui n'est pas nécessairement la même pour les deux modèles schématisés figures IV.8 et IV.9.

La condition (IV.16) nous donne tout de même une indication sur la valeur minimale de ω pour laquelle le système centré, donc le système réel, est asymptotiquement stable.

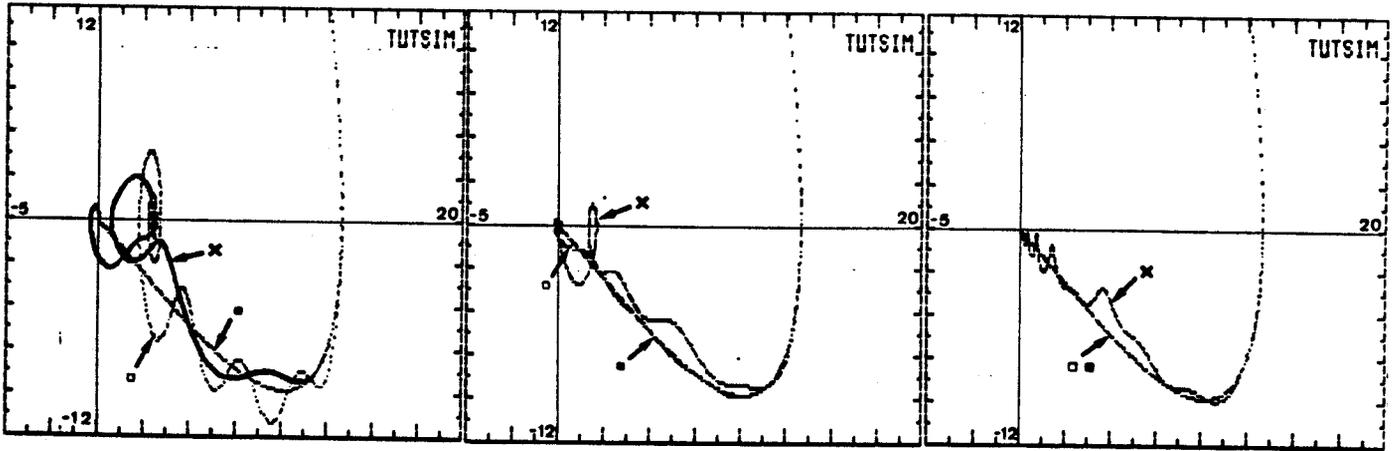
De plus, des simulations numériques opérées pour :

- $\beta = 4, \mu = 3$
- $g_0 = 0$ et $g_1 = 1$
- $f(\epsilon) = 10 \sin \epsilon$ (figures IV.10)
- ou $f(\epsilon) = 10 \epsilon \sin \epsilon$ (figures IV.11)
- ou $f(\epsilon) = 10 \epsilon^3$ (figures IV.12)

montrent que le système centré (figure IV.8) où $\frac{df}{d\sigma} \frac{1}{2\omega^2} g_1^2$ intervient est plus proche du système réel que le système de la figure IV.9.

.../

Figures IV.10 : $f(\epsilon) = 10\sin\epsilon$



$\omega=1$

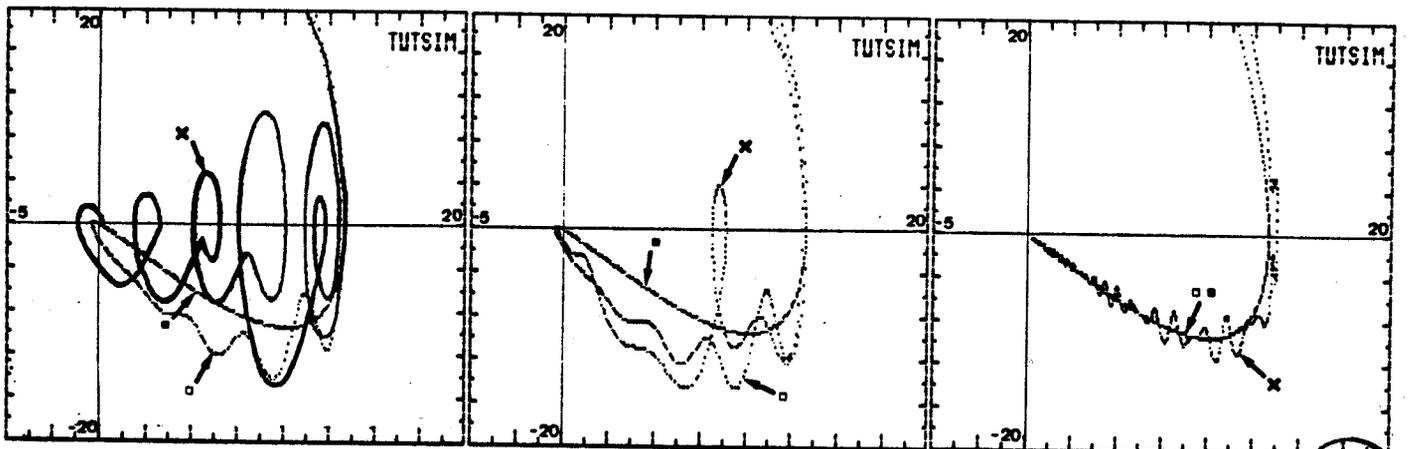
$\omega=4$

$\omega=10$

- x système réel
- théorème I
- théorème II

Quel que soit ω , on note peu de différence entre les résultats du théorème I (système figure IV.8) et du théorème II (système figure IV.9).

Figures IV.11 : $f(\epsilon) = 10\epsilon\sin\epsilon$



$\omega=2$

$\omega=6$

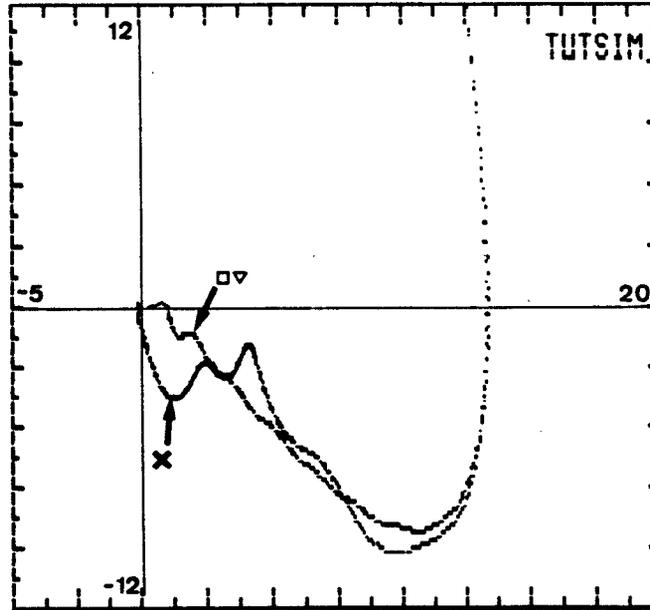
$\omega=50$

- x système réel
- théorème I
- théorème II



.../

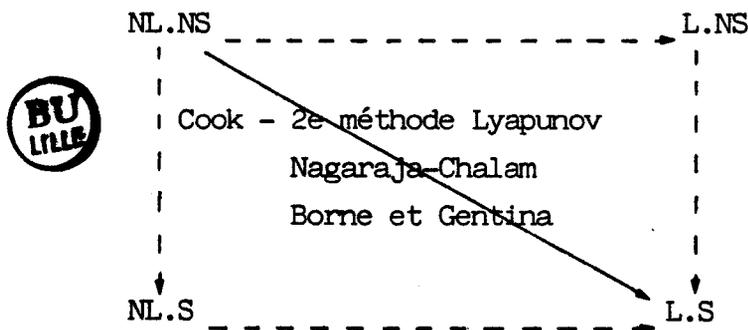
Figures IV.13 : Le théorème I semblant donner des résultats plus fiables, on compare pour $f(\epsilon) = 10 \sin \epsilon$, les trajectoires du système réel et celles du système majoré (IV.15) après application du théorème I.



$\omega = 5$

x système réel
∇ théorème I +
majoration

II.2. - Réduction par comparaison des propriétés de stabilité

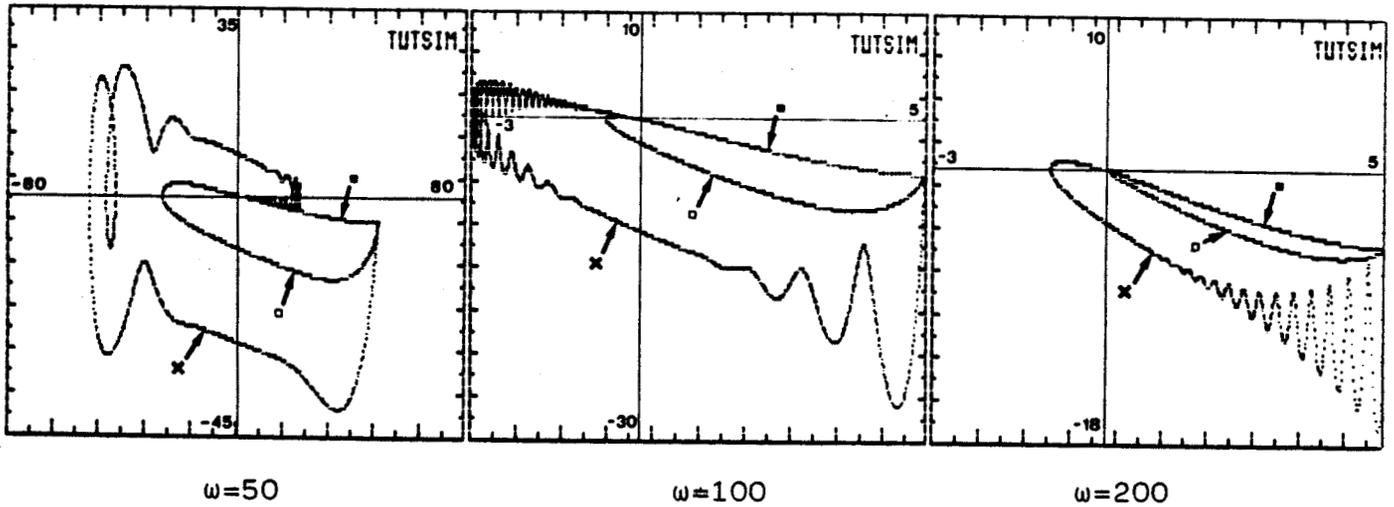


.../

Le système obtenu par le théorème I est nettement plus représentatif du système réel que celui obtenu par le théorème II.

La différence entre les résultats des deux théorème diminue après $\omega = 30$.

Figures IV.12 : $f(\epsilon) = 10\epsilon^3$



- x système réel
- théorème I
- théorème II



Le théorème I donne ici encore des trajectoires plus précises.

.../

II.2.1. - Méthode de Cook (cf. ch. II, § I.2.3)

On décompose le système (IV.13) de la manière suivante :

$$(IV.19) \quad X = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}}_A X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\beta)f^*g(t) \\ 0 & 0 & (\beta-2)f^*g(t) \\ 1 & 1 & -(\mu-\delta) \end{bmatrix}}_F X$$

avec A asymptotiquement stable ($\delta > 0$).

On prend $W = Id$ et $\Sigma = \frac{A+A^T}{2} = A$.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique est donnée par :

$$\sup_t \left\| \frac{A^{-1}F}{\delta} \right\| < 1$$

c'est-à-dire

$$\sup_t \left\| \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1-\beta)f^*g(t) \\ 0 & 0 & -\frac{\beta-2}{2}f^*g(t) \\ -1/\delta & -1/\delta & (\mu-\delta)/\delta \end{bmatrix} \right\| < 1$$

La norme matricielle est ici le plus grand des modules des valeurs propres de la matrice. La condition s'écrit donc :

$$(IV.20) \quad \sup_t \left\{ \frac{|\mu-\delta|}{2\delta} + \frac{\sqrt{\left(\frac{\mu-\delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\beta-2}{2}f^*g(t)\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} + (1-\beta)f^*g(t)\right)^2}}{2} \right\} < 1$$

avec $\beta = 4$, $\mu = 3$, $g_0 = 0$ et $g_1 = 1$

$$\sup_t \left\{ \frac{|3-\delta|}{2\delta} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3-\delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} + f^*\sin\omega t\right)^2 + \left(\frac{1}{\delta} - 3f^*\sin\omega t\right)^2} \right\} < 1$$

.../

La valeur maximale de $|f^* \sin \omega t|$ s'obtient pour $\delta = 3$:

$$(IV.21) \quad |f^*(\epsilon)| < 0,552$$

II.2.2. - Méthode de Nagaraja et Chalam (cf. ch. II, § I.2.4)

L'intégration des moments $\int x_i l_j$ et $\int \dot{x}_i l_j$ avec

$$\begin{cases} l_1 = \dot{x} + x - (1-\beta)f(\epsilon)g(t) \\ l_2 = \dot{y} + 2y - (\beta-2)f(\epsilon)g(t) \\ l_3 = \dot{\epsilon} - x - y + \mu \epsilon \end{cases}$$

conduit à la fonction de Lyapunov :

$$(IV.22) \quad V(x, y, \epsilon) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{\mu}$$



(IV.23)

$$\dot{V} = X^T \begin{bmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{\mu} + (1-\beta)f^*g(t) \\ 0 & -2 & \frac{1}{\mu} + \frac{\beta-2}{2}f^*g(t) \\ (1-\beta)f^*g(t) + \frac{1}{\mu} & \frac{\beta-2}{2}f^*g(t) + \frac{1}{\mu} & -2 \end{bmatrix} X$$

V est définie négative si et seulement si :

$$(IV.24) \quad \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} + (1-\beta)f^*g(t)\right)^2 + \left(\frac{\beta-2}{2}f^*g(t) + \frac{1}{\mu}\right)^2} < 2$$

qui est une condition équivalente à celle donnée par Cook.

II.2.3. - Majoration - Critère pratique de Borne et Gentina

Le système étant représenté sous la forme (IV.13), une matrice majorante est :

.../

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & |1-\beta| |f^*g(t)| \\ 0 & -2 & |\beta-2| |f^*g(t)| \\ 1 & 1 & -\gamma u \end{bmatrix}$$

et une condition suffisante de stabilité asymptotique est donnée par :

$$(IV.25) \quad -2\gamma u + (|\beta-2| + 2|1-\beta|) |f^*| |g(t)| < 0$$

c'est-à-dire pour $\gamma u = 3$, $\beta = 4$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$

$$(IV.26) \quad |f^*| < \frac{3}{4}$$

II.3. - Comparaison des différentes méthodes

Pour notre cas particulier ($\gamma u = 3$, $\beta = 4$, $g_0 = 0$, $g_1 = 1$), les conditions suffisantes de stabilité asymptotique obtenues par les différentes méthodes que nous venons d'appliquer sont :

- | | | |
|---|-------------------------------------|---|
| [| . théorème I +
Borne et Gentina | (IV.17) $ f^*(\sigma) \left \frac{df}{d\sigma} \right < \frac{3\omega^2}{2}$ et ω grand |
| | . théorème II +
Borne et Gentina | (IV.18) $-6 < 0$ et ω grand |
| | . Cook | (IV.21) $ f^*(\epsilon) < 0,552$ |
| | . Nagaraja-Chalam | idem |
| | . Borne et Gentina | (IV.26) $ f^*(\epsilon) < 0,75$ |

On peut conclure sur cet exemple :

- 1 - Le théorème II conduit dans tous les cas à un système réduit moins proche du système réel que le système centré obtenu par le théorème I.

.../

En outre, la valeur minimale de la pulsation pour laquelle l'écart entre le système réel et le système centré devient petite est différente, selon que l'on utilise le théorème I ou le théorème II.

Cependant, il existe une valeur de ω à partir de laquelle les deux systèmes centrés coïncident.

2 - Les méthodes de Cook, Nagaraja et Chalam et Borne et Gentina appliquées directement au système conduisent à des conditions de majoration de $|f^*g(t)|$, dont de $|f^*|$, ce qui revient à perdre toute information sur les oscillations de $g(t)$.

Le critère de Borne et Gentina, qui limite de manière la moins restrictive le domaine de stabilité, impose tout de même :

. pour $f^*(\epsilon) = 10 \frac{\sin \epsilon}{\epsilon}$ $|\epsilon| > 12$

. pour $f^*(\epsilon) = 10 \sin \epsilon$ $|\epsilon| < 0,075$

. pour $f^*(\epsilon) = 10 \epsilon^2$ $|\epsilon| < 0,27$

3 - En revanche, l'application du théorème I avant celle du critère pratique de Borne et Gentina permet, pour des conditions initiales de ϵ choisies arbitrairement de donner une indication sur la valeur de la pulsation requise pour assurer la stabilité du système réel :

. pour $f^*(\epsilon) = 10 \frac{\sin \epsilon}{\epsilon}$ ($f^* \frac{df}{d\epsilon} = 100 \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon}{\epsilon}$) et pour toute condition initiale ϵ , ω doit être supérieur à 8,2

. pour $f^*(\epsilon) = 10 \sin \epsilon$ ($f^* \frac{df}{d\epsilon} = 100 \sin \epsilon (\sin \epsilon + \epsilon \cos \epsilon)$)
 $\{ \epsilon / |\epsilon| < 10 \}$ est un domaine de stabilité pour $\omega > 18$

. pour $f^*(\epsilon) = 10 \epsilon^2$ ($f^* \frac{df}{d\epsilon} = 300 \epsilon^4$)
 $\{ \epsilon / |\epsilon| < 5 \}$ est un domaine de stabilité pour $\omega > 350$

.../

Ces remarques confirment de manière évidente l'efficacité de la réduction par application du théorème I et ensuite du critère pratique de Borne et Gentina pour des systèmes de type Lurie-Postnikov où la non-stationnarité et la non-linéarité sont couplées.

III - APPLICATION A LA SYNTHÈSE D'UN SYSTEME DE TYPE LURIE-POSTNIKOV D'ORDRE 3 AVEC INTEGRATEUR

Soit le système :

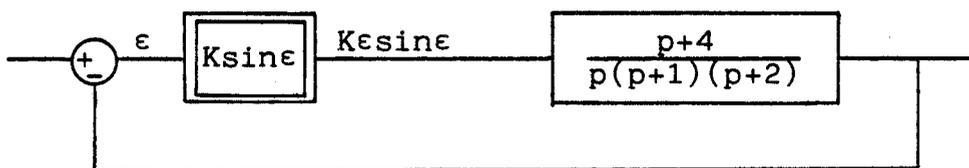


FIGURE IV.14

supposé instable, que nous allons stabiliser en insérant après la non-linéarité un gain périodique $g(t)$ de valeur maximale 1 et de moyenne nulle (par exemple , $g(t) = \sin \omega t$).

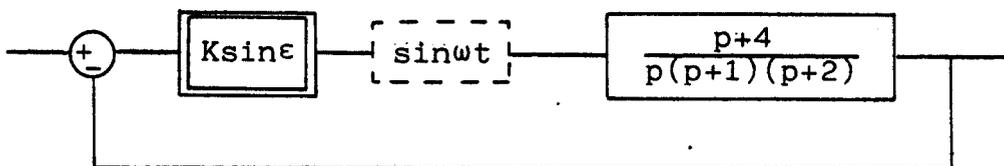


FIGURE IV.15

Pour simplifier la présentation de la synthèse du système non linéaire et non stationnaire IV.15, nous ne reprendrons pas toutes les méthodes de réduction citées dans ce mémoire.

Les résultats du paragraphe II nous ont enseigné en effet que la réduction en stationnarisant d'abord par le théorème I est à la fois la méthode la plus précise et la plus pratique.

Le système réduit que nous obtenons alors est décrit figure IV.16

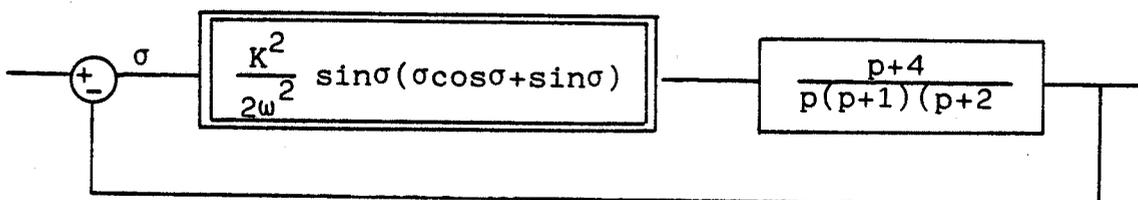


FIGURE IV.16

.../

et nous choisissons de traiter la stabilité de ce système non linéaire par l'intermédiaire du critère de Popov (Popov, 1973) :

Dans le plan complexe, la fonction :

$$F(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{j\omega+4}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

a pour parties réelles et imaginaires :

$$\text{Re}(F(j\omega)) = - \frac{10+\omega^2}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

$$\text{Im}(F(j\omega)) = - \frac{8-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

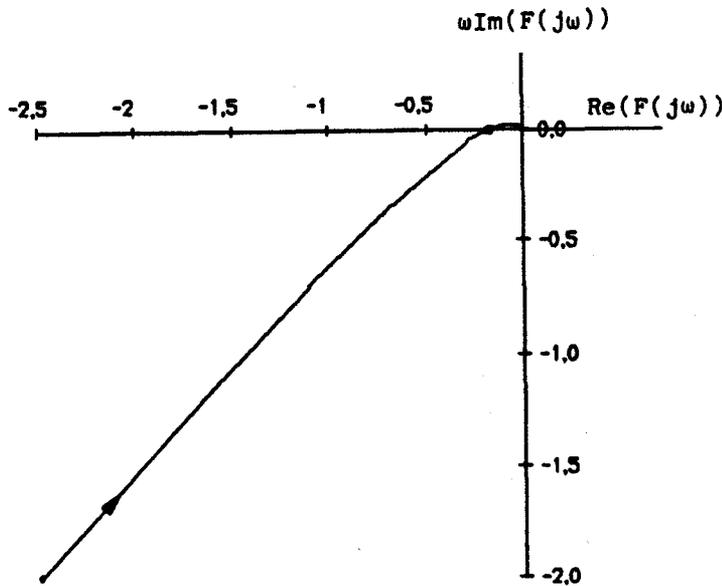


FIGURE IV.17

La courbe, avec un gain $K=1$, coupe l'axe des parties réelles au point $(-\frac{1}{6}, 0)$ pour $\omega = \pm 2\sqrt{2}$.

La valeur maximale du gain de la non-linéarité assurant la stabilité du système (IV.16) par ce critère est 6, donc :

$$(IV.27) \quad \left| \frac{K^2}{2\omega^2} \sin\sigma(\sigma\cos\sigma + \sin\sigma) \right| < 6 \quad \dots/$$

Avec $K=20$, le système (IV.14), non stabilisé par un coefficient périodique, est instable (cf. figure IV.18).

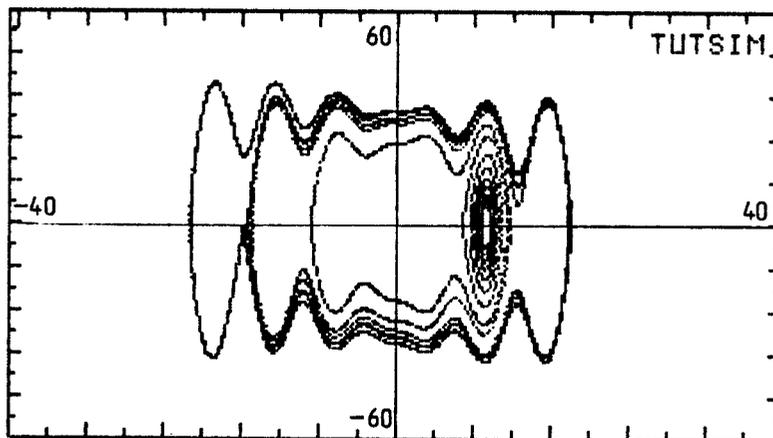
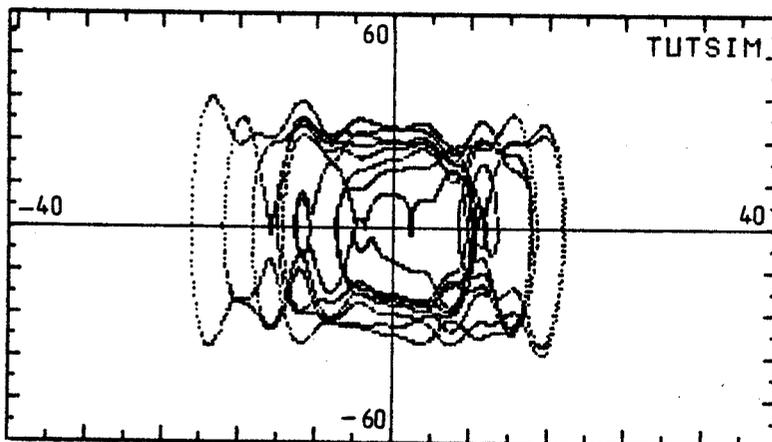


FIGURE IV.18

Après introduction d'un correcteur périodique $\sin \omega t$ (figure IV.15), l'équilibre $x=0$ devient localement asymptotiquement stable. Si on considère une majoration de $|\sigma|$ par 10, la condition (IV.27) s'écrit :

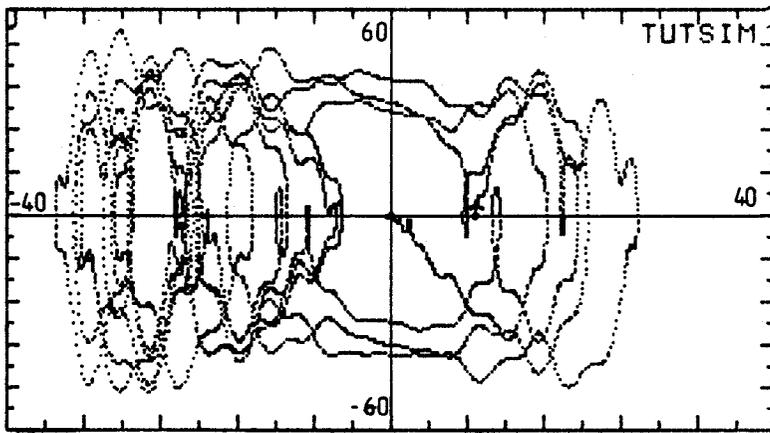
$$(IV.28) \quad \omega > \sqrt{\frac{5}{12}} K = 12,9$$

Les simulations effectuées pour une condition initiale σ proche de 10 confirment cette stabilisation (figures IV.19). Pour $\omega=13$, la convergence est très lente. Pour $\omega=15$ et $\omega=30$, la dynamique est nettement améliorée. Pour $\omega=12$, il y a divergence.

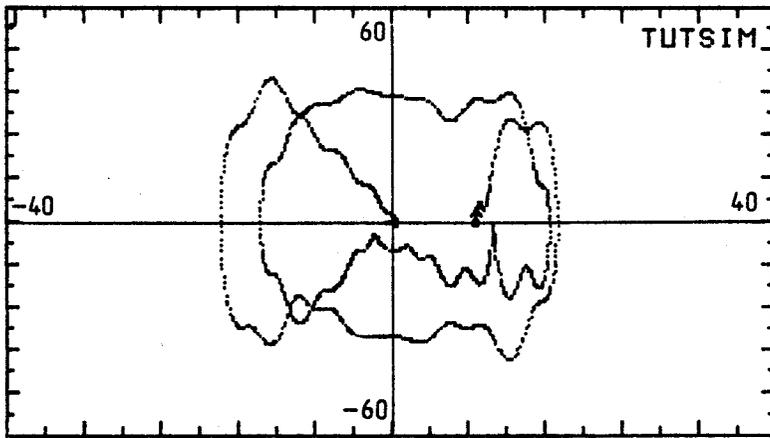


$\omega=12$

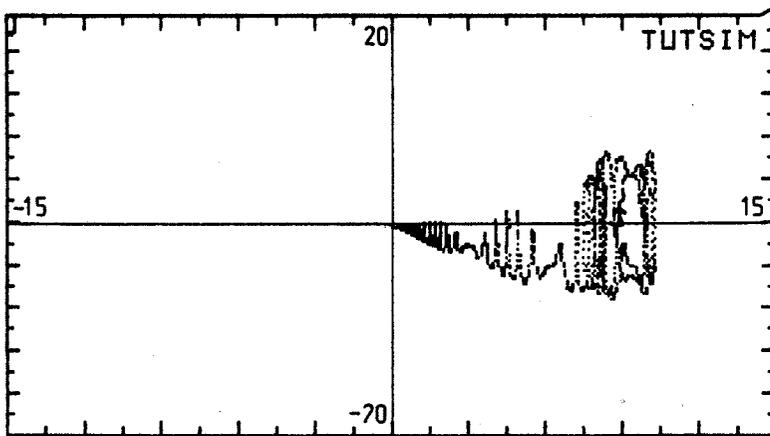
.../



$\omega=13$



$\omega=15$



$\omega=30$

FIGURES IV.19

.../

IV - CONCLUSION

L'étude de la stabilisation des systèmes de type Lurii-Postnikov par un gain périodique nous permet de dégager deux conclusions importantes :

- la synthèse que nous proposons, basée sur une réduction progressive dont la première étape est une stationnarisation par le théorème I, s'avère être efficace, essentiellement en raison du fait qu'elle prend en compte les oscillations et la pulsation du gain périodique, contrairement aux autres méthodes.
- la comparaison entre les différents systèmes associés par réduction au système initial met en lumière l'efficacité du théorème I : les trajectoires du système centré par ce théorème suivent correctement les variations, même les plus complexes, du système initial et s'en écartent peu.

Cette dernière remarque montre l'avantage des méthodes respectant la proximité topologique globale, c'est-à-dire grâce auxquelles les trajectoires des systèmes associés par réduction sont à écart maximale borné ou (presque-)périodiquement topologiquement égales, par rapport aux méthodes respectant la proximité topologique locale, c'est-à-dire garantissant la proximité ou l'attractivité.

Enfin, il nous semble tout à fait intéressant de poursuivre ce travail et d'étudier plus largement le problème de la précision de l'asservissement quand la consigne d'entrée n'est pas nulle, problème lié à la possibilité de caractériser l'influence d'un gain périodique sur le gain statique.

CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

Les critères utilisés dans ce mémoire en vue de tester la validité des différentes méthodes de réduction structurelle sont de trois types :

- soit de type topologique, quand ils sont associés à des définitions telles que celles de la proximité, l'attractivité, l'égalité topologique (presque-)périodique ou l'écart maximum de deux trajectoires,
- soit de type comparatif lorsqu'on attend surtout du modèle simplifié qu'il permette de conclure sur la stabilité du système initial,
- soit de type "visuel" à partir d'une observation directe des trajectoire simulées numériquement.

Le défaut de cette dernière solution est qu'elle nécessite qu'on fixe numériquement tous les paramètres du modèle. Par contre, les deux premiers types de critères peuvent être testés sur des modèles non complètement spécifiés sur le plan de leur structure ou de leurs conditions initiales.

En respectant cette classification, nous avons proposé et rappelé un grand nombre de méthodes conduisant à des réductions de structure, chacune d'entre elles s'intégrant plus particulièrement dans certaines étapes de simplification progressive.

. Parmi celles-ci, les techniques de majoration semblent convenir à toutes les étapes mais leurs résultats sont limités lors de l'étape de stationnarisation, pour laquelle on préférera la méthode de centrage ou, si le système est linéaire, celle de Floquet.

La méthode de centrage, en effet, est particulièrement efficace lorsque les termes non stationnaires du système standard sont facilement intégrables ; la méthode de Floquet, quant à elle, associée à la 1re méthode de Lyapunov, constitue un bon test pour juger de la qualité des domaines de stabilité absolue obtenus par d'autres méthodes.

.../

Elles nécessitent toutefois toutes deux une complète spécification des termes non constants, ce qui n'est pas le cas de méthodes de majoration.

. La 1^{re} méthode de Lyapunov constitue une très bonne première approche de linéarisation, mais devient bien sûr très imprécise lorsque les variables d'état s'écartent du point de fonctionnement.

. Les résultats basés sur la méthode directe de Lyapunov, comme ceux de Cook, s'avèrent intéressants pour une étude de comparaison des propriétés de stabilité, mais restent difficilement exploitables en ce qui concerne la proximité des trajectoires.

Nous avons pu enfin confirmer l'intérêt des coefficients périodiques dans la stabilisation des asservissements non linéaires de type Lurié-Postnikov monovariabiles.

Le secteur de variations admissibles pour le gain non linéaire se trouve par exemple agrandi proportionnellement à la pulsation d'un gain sinusoïdal que l'on a ajouté dans la chaîne d'action.

Une extension des résultats exposés au chapitre IV peut être envisagée dans l'étude des problèmes de précision d'asservissement pour les systèmes que nous avons traités, ainsi que de leur interconnection.

C'est dans cette voie que nous entendons poursuivre nos travaux ainsi que dans celle de l'intégration éventuelle de méthodes de réduction structurelle dans un système de modélisation et de synthèse d'asservissement assistées par ordinateur.

BIBLIOGRAPHIE

—

B I B L I O G R A P H I E

AIZERMAN A.M. : 1949

"Problèmes en relation avec la stabilité "globale" des systèmes dynamiques"

Usp. Math. Nauk., 4(1), en russe

AIZERMAN A.M., GANTMACHER F.R. : 1964

"Absolute stability of regulator systems"

San-Francisco, Holden-Day (traduction du russe 1963)

BALBI J.H. : 1982

"Averaging and Reduction"

Int. J. non linear mechanics, Vol. 17, n°5/6, pp 343-353

BASS J. : 1971

"Cours de mathématiques T₃"

Masson - Paris

BELLMAN R. : 1953

"Stability theory of differential equations"

McGraw-Hill, New-York

BELLMANN R. : 1962

"Vector Lyapunov functions"

J.SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, n°1

BERKEY D.D. : 1976

"An asymptotic Floquet theorem for linear almost periodic systems"

SIAM J. Math. Anal., Vol. 7, n° 6, Nov. 1976

BHATIA N.P., SZEGO G.P. : 1970

"Stability theory of dynamical systems"

Springer - Verlag Berlin - Heidelberg - New-York

BLANCK G. : 1968

"Mathieu functions"

Handbook of mathematical functions

Ed. by Abramowitz and Stegun. Dover Publications, Inc. New-York

BOGOLIOBOV N.N., MITROPOLSKY Y.A. : 1962

"Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires"

Gauthiers Villars - Paris (traduit du russe 1948)

BORNE P., GENTINA J.C., LAURENT F. : 1972

RAIRO Automatique S.A.C., mai 72, n° 5.2, pp 96-105

BROCKETT R.W. : 1966

"The status of stability theory for deterministic systems"

IEEE Trans. on Autom. Control, July 1966, pp. 596-606

.../

BURGAT C. MIRA C. : 1970

"Sur une méthode de détermination des exposants caractéristiques d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques"

CRAS t271 (9 nov. 1970) - Série A, pp 965-968

CAMPBELL R. : 1955

"La théorie de l'équation de Mathieu"

Masson - Paris

CARTAN H. : 1979

"Cours de calcul différentiel"

Collection "Méthodes" - Hermann - Paris

COOK P.A. : 1979

"Modal structure and stability of non-linear systems"

Int. J. Systems Sci., Vol. 10, n°5, pp 579-587

CORRALL D.R. : 1979

"On the stability of periodically time varying systems"

Int. J. Control, Vol. 29, n°3, pp 497-504

DAUPHIN-TANGUY G. : 1983

"Sur la représentation multimodèle des systèmes singulièrement perturbés. Applications à l'analyse et à la synthèse"

Thèse de Docteur ès Sciences Physiques, Lille, n° 600

DECOSTER M., VAN CAUWENBERGHE A.R. : 1976

. "A comparative study of different reduction methods" I

Journal A, Vol.17, n° 2, April 1976, pp 68-74

. "A comparative study of different reduction methods" II

Journal A, Vol.17, n° 3, July 1976, pp 125-134

DIMSTER S. : 1985

"Aide informatique à la modélisation de systèmes non-linéaires"

Thèse de Docteur 3e cycle, Université des Sciences et Techniques, Lille

DIMSTER S., ROTELLA F., RICHARD J.P. : 1984

"Interactive software for analysis of non-linear systems"

Actes AI'84, Innsbruck, Février 1984, pp 96-103

FLOQUET G. : 1883

"Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques"

Annales scienti. de l'Ecole Norm. Sup., t.XII, 47

GANTMACHER F.M. : 1959

"Theory of matrices"

New-York, Chelsea, 1959

"Théorie des matrices"

Dunod - Paris, 1966, tomes 1 et 2

GENTINA J.C., BORNE P. : 1972

"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non-linéaires"

C.R.A.S., Paris, t. 275, 16 août 1972, série A, pp 401-403

.../

GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J., GRUJIC L.T : 1979
"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes vectorielles"

RAIRO Automatique S.A.C., Vol.13, n° 1, pp 57-75

GILLE J.C., DECAULNE P., PELEGRIN M. : 1975

"Systèmes asservis non linéaires"

Dunod - Paris

GILLE J.C. : 1977

"Introduction aux systèmes asservis non linéaires"

Dunod - Paris

GOURSAT E. : 1927

"Cours d'analyse mathématique"

5th Ed., Vol.2, Paris, Gauthiers Villars

GRUJIC L.T. : 1975

. Novel development of Lyapunov stability of motion"

Int. J. Control, Vol.22, n° 4, pp 525-549

. "Uniform practical and finite-time stability of large scale systems"

Int. J. Control, Vol.6, n° 2, pp 181-195

GRUJIC L.T., GENTINA J.C., BORNE P. : 1976

"General aggregation of large-scale systems by vector Lyapunov functions and vector norms"

Int. J. Control, Vol.24, n° 4, pp 529-550

GRUJIC L.T. : 1978

"Solutions for the Lur'ie-Postnikov and Aizermann problems"

Int. J. Syst. Sci., Vol.9, n° 12, pp 1359-1372

HAHN W. : 1963

"Theory and Application of the Lyapunov's direct method"

Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey

HARRIS C.J., MILES J.F. : 1980

"Some aspects of kinematic similarity and the stability of linear systems"

Third IMA Conference on Control Theory. Sheffield - England

9-11 sept. 1980, pp 89-114 (1981), Academic Press. London

IUNG C. : 1981

"Contribution à la simplification et à la simulation de modèles complexes - Application à des procédés électromécaniques"

Thèse de Docteur es sciences, Institut National Polytechnique de Lorraine

JONES S.E., ROBE T.R. : 1973

"A procedure for investigating the Lyapunov Stability of non-autonomous linear second-order systems"

Journal of Applied Mechanics, Dec. 1973, pp 1103-1106

Trans. of the ASME

.../

KALMAN R.E. : 1963

"Lyapunov functions for the problem of Lur e in automatic"
Proc. Nat. Acad. Sci., USA, Vol. 49, n  3, pp 200-205

KRASOVSKII N.N. : 1959

"Some problems in the theory of stability of motion"
Moscou 1959 - Traduction anglaise - Stanford Univ. Press. 1963

KRYLOV N., BOGOLIOUBOV N.N. : 1937

"Introduction to non-linear mechanics"
Kiev (1937) - Annals Math. Studies n  11
Princeton University Press. Princeton NJ (1947)

LANGENHOP C.E. : 1960

"On bounded matrices and kinematic similarity"
Trans. Am. Math. Soc., 97, p. 317

LAPIDUS L. : 1969

"Applied mathematics"
Ind. and Eng. Chem., Vol.61, n  12, Dec. 1969, pp 43-54

LASALLE J.P., LEFSCHETZ S. : 1961

"Stability by Lyapunov's direct method with applications"
RIAS Baltimore Maryland Academic Press - New-York and London

LEFSCHETZ S. : 1957"

Differential equations : geometric theory"
2nd edition, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New-York

LOCHAK G. : 1981

"A non-linear generalization of the Floquet theorem and an adiabatic theorem for dynamical systems with hamiltonian periodic in time"
Hadronic Journal 4, pp 1105-1126

LURIE A.I. : 1951

"On some non-linear problems in the theory of automatic control"
H.M. Stationery Office, Londres

LURIE A.I., POSTNIKOV. V.N. : 1944

"Concerning the stability of regulating systems"
Prickl. Mat.i Mekh., Moscou, Vol.8, pp 246-248 (en russe)

LYAPUNOV A.M. : 1892

"Problème général de la stabilité du mouvement"
1907 - Annales Fac. Sciences, Toulouse, 9, pp. 203-474

LYAPUNOV A.M., PLISS V.A., BASOV V.P. : 1966

"Stability of motion"
Academic Press

MALKIN I.G. : 1956

"Some problems in the theory of non-linear oscillations"
Traduit du Russe (1956) dans Translation Series, Physics & Math.,
A.E.C, Tr. 3766, US

MAMMERI B. : 1971

"Sur une méthode simple de calcul des valeurs propres de l'équation de Mathieu"
CRAS - Paris - t.272 (14 juin 1971) - pp 1578-1581

.../

MARKUS L. : 1955

"Continuous matrices and the stability of differential systems"
Math. Zeitschrift Bd 62, pp 310-319

MATROSOV V.M. : 1962

Prikl. Mat. Mekh., 26, 992

MEERKOV S.M. : 1980

"Principle of vibrational Control Theory and Applications"
IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC25, n° 4, Aug. 1980, pp 755-762

MEERKOV S.M. : 1973

"Averaging of trajectories of slow dynamic systems"
Differential equations, Vol. 9, pp 1239-1245

MINORSKI N. : 1962

"Non-linear oscillations"
Van Nostram Comp., Princeton, New-Jersey

NAGARAJA T., CHALAM V.V. : 1974

. "On the improved Lyapunov functions for periodic systems"
Proceedings of the IEEE, Vol.65, n° 9, sept. 1977, pp 1418-1420
. "Generation of Lyapunov functions. A new approach"
Int. J. Control, 1974, Vol.19, n° 4, pp 781-787

PILLET E., POLOUJADOFF M., LAURENT F., RICHARD J.P. : 1982

"Determination of time-varying systems asymptotically stable without verifying the linear stability conditions"
Actes MECO 82, Tunis, pp 251-254

PILLET E., POLOUJADOFF M., CHASSANDE J.P. : 1979

"Time constants of unsymmetrical short circuits of synchronous machines"
IEEE Transactions on PAS, Vol.PAS-98, n° 6, Nov/Dec 79

PLISS V.A. : 1958

"Certain problem of the theory of the stability of motion in the whole"
Annales Leningrad Univ. (en russe)

POPOV V.M. : 1973

"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"
Dunod 1973 - Traduit d'un ouvrage publié en 1966

PRZYBYLSKI C., RICHARD J.P. : 1986

"On structural model reductions for continuous non-linear periodical time-varying systems"
à paraître, Congrès IMACS, Lille, juin 1986

RICHARD J.P. : 1981

"Sur la mise en équations d'état de systèmes continus non linéaires par une méthode de calcul symbolique : définition d'un invariant de représentation"
Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 259, Lille

.../

RICHARD J.P., EL MOUDNI A., BORNE P. : 1981

"On the determination of a linear model for a locally stable non-linear process"

Actes Congrès Modelling, Simulation and Development, Dacos, pp 41-44

RICHARD J.P., LAURENT F. : 1983

"Identification of the dynamical properties of a linear process with periodical coefficients"

Congrès ACI 83, Iasted Copenhagen, Vol.1, pp 8/7-8/11

RICHARD J.P., LAURENT F. : 1984

"On the majoration and minoration of the characteristic multipliers of a periodical coefficients system by analogic simulation"

Int. J. of Modelling and Simulation, Vol.4, n° 3

RICHARD J.P. : 1984

"Définition d'invariants polynomiaux adaptés à la modélisation et à l'étude des systèmes non-linéaires et non-stationnaires"

Thèse de docteur es Sciences, Université des Sciences et Techniques de Lille

ROBERTS A.P. : 1963

"The optimum principle"

Control - Juillet-Août 1963

SANCHEZ-PALENCIA E. : 1975

"Méthode de centrage et comportement des trajectoires dans l'espace des phases".

CRAS Paris, T. 280 (20 janvier 1975), série A, p. 105

SCHAFKE F.W., SCHMIDT D. : 1966

"Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieuschen Differentialgleichung"

III Numer Math. 8, pp 68-71

SHAABAN, GRUJIC L.T. : 1986

"The decomposition-aggregation method applied to multimachine power system"

A paraitre - Large scale systems journal

SHOKOOHI S., SILVERMAN L.M., VAN DOOREN D.M. : 1983

"Linear time variable systems : balancing and model reduction"

IEEE Trans. on Autom. Control. Vol.AC-28, n° 8, August 1983

SINHA S.C., CHOU C.C., DENMANN H.H. : 1979

"Stability analysis of systems with periodic coefficients : an approximate approach"

Journal of Sound and Vibration 64.4, pp 515-527

SPITERI P. : 1975

"Critères de stabilité ou d'instabilité au sens de Lyapunov pour une classe de grands systèmes différentiels se décomposant en sous-systèmes"

CRAS, T. 281, 22 septembre 1975, pp. 483-486

.../

STOCKER J. :

Loc. cit., pp. 209-213

TAMIR T. : 1962

Characteristic exponents of Mathieu equations

Math. Comp., pp 16-17

VIDAL O. : 1983

"Contribution à l'étude de la stabilisation des systèmes par perturbations"

Thèse de Docteur-Ingénieur, Université des Sciences et Techniques, Lille

VOLOSOV : 1962

"Averaging in systems of ordinary differential equations"

USP Matem. Nauk. 17, n° 6 (108)

WAGENFURHER E. : 1980

"Die Determinantenmethode zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der endlichen Hillschen Differentialgleichung"

Numer Math. 35, pp 405-420

WAZEWSKI T. : 1950

"Systèmes d'équations et inégalités différentielles ordinaires aux seconds membres monotones et leurs applications"

Ann. Soc. polon. Math., 23, 112

WU M.Y. : 1980

. "Stability and representation of linear-time varying systems"

Int. J. Control 1980, Vol.31, n° 5, pp. 937-945

. "Solutions of certain classes of linear-time varying systems"

Int. J. Control 1981, Vol.31, n° 1, pp 11-20

YAKOUBOVITCH V.A. : 1962

"La solution de quelques inégalités matricielles rencontrées dans la théorie du réglage automatique" (russe)

Doklady RN SSSR, Tome 143, n° 6



R E S U M E

Le travail présenté concerne un aspect de la simplification de modèles visant à réduire la complexité structurelle liée à la présence de composants non linéaires ou non stationnaires dans le processus considéré.

L'étude porte essentiellement sur les systèmes continus dont les paramètres non stationnaires suivent des lois d'évolution de type périodique ou presque-périodique.

La méthodologie proposée consiste à libérer progressivement un système non linéaire non stationnaire de ses termes non constants, pour aboutir finalement à un modèle plus simple, linéaire et/ou stationnaire, dont l'étude doit permettre de dégager certaines informations relatives au système initial.

Dans un premier temps, des critères sont définis de manière rigoureuse, qui permettent d'évaluer la proximité de deux trajectoires correspondant par exemple à celles du système initial et de son modèle réduit.

Dans un second temps, différentes méthodes de réduction structurales sont rappelées (techniques de majoration, 1^{re} et 2^e méthodes de Lyapunov, méthode de Cook, théorie de Floquet, méthode de centrage).

Un 3^e volet développe la théorie de Floquet en proposant plusieurs approches analytiques et numériques conduisant au calcul d'un modèle de type linéaire stationnaire.

Dans le 4^e chapitre, des résultats originaux concernent l'application du théorème de centrage à des modèles pratiques d'asservissement non linéaires de type Lurié-Postnikov.

Ils permettent d'envisager la stabilisation de systèmes non linéaires à partir d'une commande à gain périodique.

Des simulations et des exemples d'application viennent illustrer les résultats proposés.

Mots clés :

Système non linéaire ; système non stationnaire ; coefficient(s) périodique(s) ; système presque périodique ; modélisation ; équation différentielle ; équation (d')état ; méthode réduction ; stabilité ; proximité ; linéarisation ; méthode Lyapunov ; théorie Floquet ; méthode centrage.

