Numéro d'ordre : 387

Année 1986

50376
1986
21

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

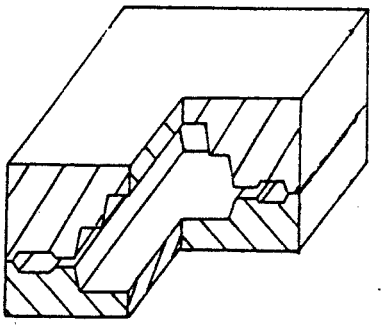
en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTEUR - INGENIEUR

SPECIALITE : M E C A N I Q U E D E S S O L I D E S

par

Philippe COURTOIS



TITRE : **Application des Elements Cinematiques au calcul du forgeage de pieces en deformations planes ou axisymetriques**

Soutenue le: 25 AVRIL 1986

devant la Commission d'Examen

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

Président	:	F. PARSY
Rapporteur	:	Y. RAVALARD
Examinateur	:	J. OUDIN
Invité	:	J.C. MASSON

Bien que nous ne puissions avoir des démonstrations certaines de tout,
Nous devons néanmoins prendre parti
Et embrasser les opinions qui nous paraissent les plus vraisemblables,
Touchant toutes les choses qui viennent en usage,
Afin que, lorsqu'il est question d'agir,
Nous ne soyons pas irrésolus.
Car il n'y a que la seule irrésolution
Qui cause les regrets et les repentirs.

DESCARTES

Et la vie elle-même m'a dit ce secret : "Vois, dit-elle, je suis ce qui doit toujours se surmonter soi-même".

Zarathoustra (Du surpassement de soi)

NIETZSCHE

A mes Parents,
A mes Amis....

Les travaux, dont la présente étude rend compte, furent effectués au Laboratoire de Génie Mécanique de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J. OUDIN de m'avoir accueilli dans son laboratoire, ainsi qu'à Monsieur le Professeur Y. RAVALARD qui m'a dirigé dans ce travail avec une extraordinaire présence et un souci permanent pour que cette étude aboutisse et constitue la meilleure formation possible.

Je remercie Monsieur J.C. MASSON, Chargé de la Communication Technique dans la Société Informatique Internationale du groupe C.I.S.I., pour m'avoir conseillé amicalement et pour m'avoir apporté ses fructueuses remarques et suggestions pendant la réalisation de ce travail. Je le remercie aussi pour sa participation au Jury.

Monsieur le Professeur F. PARSY, par sa participation au Jury me fait l'honneur de juger ce travail ; je le remercie vivement.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des personnes du Laboratoire de Génie Mécanique qui m'ont, à un moment ou à un autre, soutenu ou aidé pour la réalisation de mes travaux.

Enfin, je tiens également à remercier Mesdemoiselles C. VICO et C. ISRAEL pour le soin qu'elles ont aimablement apporté à la dactylographie, ainsi que leurs sympathiques contributions à chaque sollicitation.

Résumé

La méthode des éléments cinématiques est une méthode d'analyse des écoulements plastiques rencontrés en forgeage plan et axisymétrique. Elle consiste en une modélisation des grandeurs cinématiques obtenues par une discrétisation du volume de la pièce en quelques dizaines d'éléments de formes typiques, à bases rectangulaires, trapézoïdales ou triangulaires. La recherche du champ de vitesses licite se fait en minimisant la fonction puissance dissipée dans le volume et à la surface du volume. Cette fonctionnelle est exprimée à partir des variables surfaciques que sont les vitesses aux frontières des éléments constitutifs. Le calcul de la puissance dissipée est fait pour des comportements isotropes, isothermes et non écrouissables.

D'autre part, une méthode de prévision de la contrainte normale à l'interface outil-matière, associant champ de vitesses cinématiquement admissible et champ de contraintes statiquement admissible, a été développée.

Une analyse des méthodes mises au point, du logiciel associé et des performances, a été réalisée avec différentes applications de difficultés croissantes. Ces tests permettent de répondre aux préoccupations des industriels de la mise en forme qui peuvent trouver dans ces formulations une méthode de calcul rapide, simple d'utilisation fournissant une solution fiable sur la puissance à mettre en oeuvre, le flux de matière et la distribution de contraintes aux interfaces outil-matière.

MOTS CLES : *Forgeage, Déformation plastique, Champ de vitesses, Champ de contraintes, Logiciel, Distribution de contraintes, Puissance, Prévision numérique.*

Abstract

The kinematic element method is used to analyse plastic flows encountered in plane and axisymetric forging processes. The work piece is divided in typical elements (rectangular, trapezoïdal or triangular elements). Kinematic variables are then flow velocities through each boundary. The search for the licit velocity field uses the minimization of the power dissiped at the surface and in the volume enduring plastic deformation. The dissipated power function is expressed starting from surface variables, the boundary velocities of constituant elements, and can be calculated for materials which are isotropic, isothermal and rigid perfectly plastic.

On the other hand, a method was developped to predict the value of normal stress on tool-piece interface taking account of velocity and stress fields satisfing respectively to kinematic and static conditions.

Various applications of growing difficulties were used to analyse both the elaborated method, the software and their performances. These tests will be very usefull for people in charge of industrial forming processes who will find in the kinematic element method an easy way to calculate in a short time a reliable solution for the necessary power, the plastic flow and the stress distribution on tool-piece interface.

KEYS WORDS : *Forging, Plastic strain, Velocity field, Stress field, Software, Stress distribution, Power, Numerical prediction.*

TABLE DES MATIERES

Pages

PREMIERE PARTIE

Aspects Théoriques et Formulations Mathematiques

CHAPITRE I : Introduction et aspects bibliographiques 1

I.1 Le calcul dans le domaine du forgeage 1

I.2 Etat actuel des applications utilisant la méthode de borne supérieure 4

I.3 Conclusion 9

CHAPITRE II : Méthode de la borne supérieure 10

II.1 Principe du travail maximal 10

1.1 Principe de travail maximal 10

1.2 Hypothèses principales 10

1.3 Méthode de la borne supérieure 11

CHAPITRE III : Formulation mathématique des éléments cinématiques 13

III.1 Formulation en déformations planes 14

1.1 Elément cinématique rectangulaire plan 14

1.2 Eléments cinématiques triangulaires plans 17

1.3 Eléments cinématiques trapézoïdaux plans 21

III.2 Formulation en déformations axisymétriques 32

2.1 Elément cinématique rectangulaire axisymétrique 32

2.2 Eléments cinématiques triangulaires axisymétriques 43

III.3 Formulation spécifique pour le barreling 48

CHAPITRE IV : Méthode du calcul simpliciale 53

IV.1 Introduction 53
IV.2 Généralités 54
IV.3 Application de la méthode simpliciale 56
3.1 Généralisation 57

CHAPITRE V : Détermination des contraintes à l'interface pièce-outil 59

V.1 Méthodes de prévision 59
1.1 Principe de la méthode de KIUCHI-CHRISTENSEN 60
1.2 Détermination de la pression de contact 60

V.2 Méthode L.G.M. 63
2.1 Principe de la méthode 63
2.2 Détermination de la pression sur les interfaces mobiles 63
2.3 Problèmes à flux complexes 66
2.4 Comparaison de la distribution de contraintes sur les interfaces 68

V.3 Conclusion 70

DEUXIEME PARTIE

Progiciel GALOPIN

CHAPITRE I : Pré-processeur du programme GALOPIN 71

I.1 Présentation du programme 71
1.1 Objectifs 71
1.2 Définition de la structure 71
1.3 Langage orienté 71
1.4 Structure de langage 72

I.2 Présentation générale des modules 72
2.1 Commandes 73

I.3 Hiérarchie du langage utilisé par le pré-processeur 74

I.4 Visualisation du maillage et des outillages 75

I.5 Définition des caractéristiques de l'essai 75

I.6 Définition des outillages 76

I.7 Exemple d'un fichier de données 77

I.8 Conclusion 78

CHAPITRE II : Programme GALOPIN 79

II.1 Présentation du programme 79

1.1 Objectifs 79

1.2 Structure du programme informatique 79

1.3 arbre programmatique du programme GALOPIN 81

II.2 Séquence CEDE 82

2.1 Ecriture des conditions cinématiques 82

2.2 Relation d'incompressibilité 82

2.3 Ordre des conditions de vitesses 83

II.3 Séquence CONSMA 83

3.1 Equation de la puissance dissipée interne 83

3.2 Contraintes dûes à la puissance dissipée par frottements 84

II.4 Séquence AMENA 85

4.1 Simplification de la matrice des conditions cinématiques 85

4.2 Introduction des conditions cinématiques dans la matrice des contraintes 86

4.3 Préparation du tableau simplicial 88

II.5 Séquence SIMPLEXE 90

II.6 Séquence SORTIE 90

6.1 Détermination des vitesses 91

6.2 Calcul des vitesses V_{3k} 92

6.3 Calcul de la puissance dissipée totale 93

6.4 Impression 93

II.7 Séquence POSTPRO 94

7.1 Déplacement des outillages 94

7.2 Modification des coordonnées des points de la matière 94

II.8 Modification des sous-programmes pour les cas axisymétriques 95

8.1 Séquence CONSMA 95

I.2 Séquence SORTIE 96

II.9 Conclusion 97

CHAPITRE III : Post-processeur du programme GALOPIN 98

III.1 Présentation du programme 98

1.1 Objectifs 98

III.2 Présentation générale des modules 98

2.1 Commandes 99

2.2 Exemples 99

III.3 Conclusion 100

TROISIEME PARTIE

TESTS

CHAPITRE I : Exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations planes 102

I.1 Compression simple en état plan de déformation 103

1.1 Schéma 103

1.2 Résultats 104

1.3 Etude de la distribution de contrainte sur l'interface outil mobile 104

1.4 Conclusion 106

I.2 Extrusion avant en déformations planes 106

2.1 Schéma du processus 106

2.2 Résultats 107

I.3 Extrusion arrière en déformations planes 108

3.1 Schéma du processus 109

3.2 Résutlats 109

3.3 Conclusion 113

I.4 Test de Mamalis 113
4.1 Etude 114
4.2 Conclusion 116

I.5 Résultats obtenus par mixage d'éléments cinématiques triangulaire, rectangulaires et trapézoïdaux 116
5.1 Test retenu 116
5.2 Conclusions 117

I.6 Test de LYPUNOV-KOBAYASHI 121
6.1 Schéma du processus 121
6.2 Résultats 121
6.3 Conclusion 125

CHAPITRE II : Exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations axisymétriques 126

II.1 Compression de cylindre 127
1.1 Schéma de base 127
1.2 Etude de la stabilité de la solution 127
1.3 Etude de la distribution de contrainte sur l'interface mobile 128
1.4 Conclusion 130

II.2 Compression d'anneau 130
1.1 Résultats 130
1.2 Conclusion 131

II.3 Filage 131
3.1 Filage avant 134
3.2 Filage arrière 137

II.4 Test d'ALTAN 139
4.1 Shéma du processus 139
4.2 Résultats 140
4.3 Conclusion 142

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale 143

Bibliographie 148

TABLE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

Conventions :

$x_{i,j}$: Désigne la dérivée partielle de x_i par rapport à x_j, $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$

x_{ii} : Convention d'indice muet $x_{ii} = \sum_i x_{ii}$

$(*)$: Désigne le caractère virtuel d'un champ de vecteurs ou de tenseurs.

Symboles :

$f(\sigma)$: Fonction de charge

k : Contrainte d'écoulement en cisaillement pur

$\bar{m}$: Coefficient de frottement de couche moyen de Tresca

$\bar{p}_m$: Contrainte normale moyenne de forgeage à l'interface outil rigide - pièce en grande déformation

V_o : Vitesse de déplacement des outils rigides

$[\overset{\circ}{\varepsilon}]$: Tenseur des vitesses de déformation

$\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}$: Vitesse de déformation équivalente

$[\sigma]$: Tenseur des contraintes

$\bar{\sigma}$: Contrainte équivalente

σ_o : Contrainte d'écoulement

Notations

σ_{ij}, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$: Désigne les composantes dans la base $\{e_i\}$ du tenseur des contraintes et du tenseur des vitesses de déformation

V_1, V_2, V_3, V_4 : Composantes normales des vitesses sur les faces des éléments cinématiques.

Première Partie

ASPECTS THEORIQUES ET FORMULATIONS MATHEMATIQUES

CHAPITRE I : *Introduction et aspects bibliographiques*

CHAPITRE II : *Méthode de la borne supérieure*

CHAPITRE III : *Formulation mathématique des éléments cinématiques*

CHAPITRE IV : *Méthode du calcul simplicial*

CHAPITRE V : *Détermination des contraintes à l'interface pièce-outil*

C H A P I T R E I

INTRODUCTION ET ASPECTS BIBLIOGRAPHIQUES

I.1 LE CALCUL DANS LE DOMAINE DU FORGEAGE

L'évolution rapide des Techniques de Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur (C.F.A.O.) est en train de révolutionner toutes les techniques de calcul, d'étude et de méthode dans les entreprises de mécanique. La réalisation de systèmes plus intégrés (le nouveau système DN 3000 de APOLLO Computer offre une puissance de travail importante pour un prix qui devient faible devant celui du logiciel), conjuguée à l'accroissement des séries permet aux constructeurs de proposer des systèmes de CAO toujours plus performants à des prix en décroissance rapide.

Cette croissance de l'offre va mettre à la portée des PMI les services de la CAO. Rapidement les entreprises du secteur Formage par Déformation vont être concernées par cette évolution (les plus importantes s'engagent d'ores et déjà dans ce processus telles la SAFE ou les Forges de Courcelles, par exemple, Fig. I.1).

Les systèmes disponibles à l'heure actuelle sont équipés de logiciels de CAO à 2 ou 3 dimensions et de codes de calcul par Eléments Finis (au moins en élasticité linéaire pour des éléments à 2, voire 3 dimensions). Les logiciels de FAO se développent rapidement. Pour

rendre complètement intégrés ces systèmes pour le Forgeage, il manque actuellement de logiciels de calcul des écoulements plastiques. Pour répondre aux besoins des industriels, trois stratégies de calcul se dégagent aujourd'hui :

1. Stratégie "Appel d'offres" : l'objectif est de pouvoir répondre rapidement à un appel d'offres en termes de faisabilité de l'opération de forgeage (ce qui demande la capacité à la décomposer en une séquence de forgeage compatible avec les machines disponibles) et de coûts (ce qui demande un minimum d'informations comptables connectées avec celles de la production) ;

2. Stratégie "Etude de pièce courante" : l'objectif est, après obtention d'une commande, de vérifier la validité de la séquence de forgeage définie dans l'étape précédente et la tenue des outillages en calculant leur distribution de contraintes ; ces calculs doivent rester rapides et ne pas entraîner de surcroît trop important pour des pièces dont la complexité est moyenne et qui sont généralement réalisées avec des métaux courants ;

3. Stratégie "Etude de pièce critique" : dans le cas d'une pièce difficile où les risques encourus dans la définition des outillages sont grands ou dont la valeur est élevée il peut être nécessaire d'étudier avec une grande finesse (c'est-à-dire, sans se préoccuper du temps de calcul nécessaire) l'écoulement plastique de la pièces et les contraintes élastiques dans les outillages.

Pour répondre aux besoins impliqués par ces stratégies, différentes méthodes de calcul sont aujourd'hui disponibles même si leur adaptation aux moyens de calcul les plus modernes reste encore à faire.

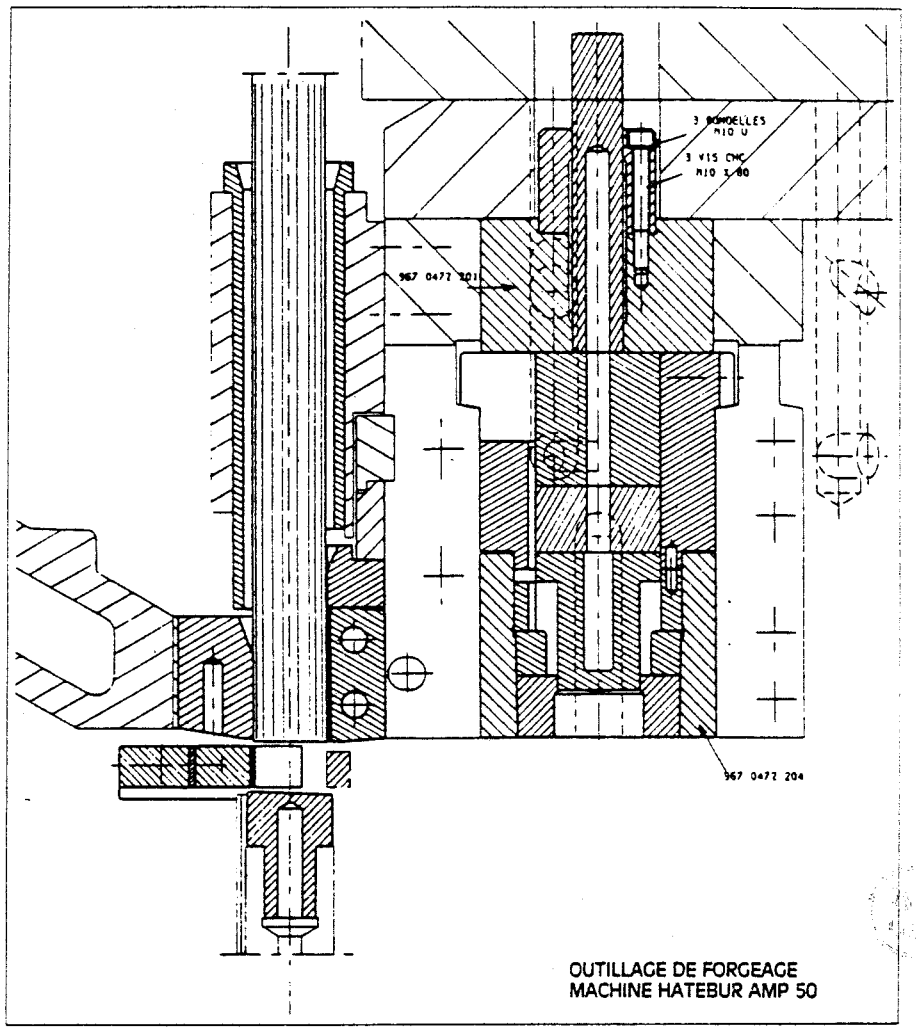


Fig. I.1 - Application de la CAO à la Société des Aciers Fins de l'Est SAFE.

La stratégie "Appel d'offres" peut être résolue en informatisant les règles empiriques utilisées par la profession avec ou sans exploitation par un système expert. Des travaux sont en cours dans cette optique [23] [31].

La Stratégie "Etude de pièce cubique" nécessite les méthodes les plus fines. Dans cette optique il sera fait essentiellement appel à la Méthode des Eléments Finis. De nombreux programmes sont en cours de développement pour répondre à cette stratégie. Au Laboratoire de

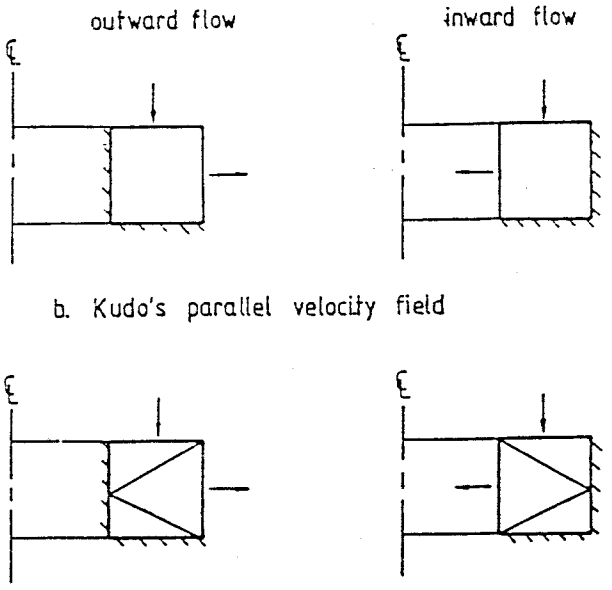
Génie Mécanique de l'Université de Valenciennes, le programme ASTRID, développé à partir des résultats de la thèse de Jean-Claude GELIN, est en cours d'implantation sur un mini ordinateur et permet d'étudier les grandes Transformations impliquées dans le forgeage [38].

La stratégie "Etude de pièce courante" peut être résolue en s'appuyant sur des approches plus approximatives en recherchant un temps de réponse rapide. Les méthodes de borne supérieure sont bien adaptées à ce problème. Curieusement il n'y a que très peu d'équipes qui se consacrent à cette approche. Signalons les travaux réalisés par BRAMLEY dans le développement du programme UBET [13] et OUDIN et RAVALARD [20]

I.2 ETAT ACTUEL DES APPLICATIONS UTILISANT LA METHODE DE BORNE SUPERIEURE

L'introduction de la théorie de la plasticité a permis durant les dernières décennies de réaliser des méthodes de bornes supérieures pour de nombreux procédés de formage. Le précurseur en la matière fut JOHNSON [3] sur les problèmes en déformations planes. Indépendamment de modèles spécialisés KUDO [4] fut le premier à proposer une méthode de modélisation systématique basée sur l'utilisation de régions rectangulaires unitaires possédant une face de matière entrante et une face de matière sortante perpendiculaire à la première exclusivement.

Une table de régions permettait de choisir, parmi de nombreux champs de vitesses cinématiquement admissibles à discontinuités de vitesses composées uniquement de cellules triangulaires, celui qui conduisait à la puissance dissipée la plus faible. Pour faciliter la manipulation de puissance dissipée, le frottement pouvait être défini comme lisse



b. Kudo's parallel velocity field

c. Kudo's triangular velocity field

Fig. I.2 - Régions de KUDO

($\bar{m}$ = 0) ou rugueux ($\bar{m}$ = 0.5). Malheureusement l'approche de KUDO nécessite la connaissance de l'écoulement plastique. L'étude d'une pièce complexe amène à formuler un grand nombre d'hypothèses ce qui rend cette méthode difficile à manier.

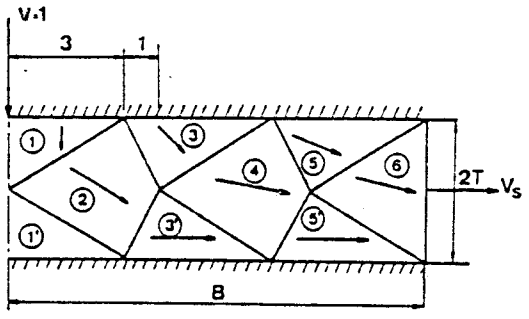


Fig. I.3 - Exemple de pièce découpée en régions unitaires généralisées de KUDO

BRAMLEY et MAC-DERMOTT [13] ont proposé une méthode désignée sous le vocable de UBET (Upper Bound Elemental Technic) également basée sur la méthode de borne supérieure. Ils ont décomposé la pièce à partir

de huit types de régions comportant un champ de vitesse entrant et un champ de vitesse sortant. Le processus de forgeage prend fin lorsque l'énergie utilisée pour déformer la bavure est supérieure à celle nécessitée pour déformer la pièce. Il n'y a pas d'incrémentation des calculs en fonction de l'avance de l'outil ; cette méthode ne convient que pour les forgeages par chocs.

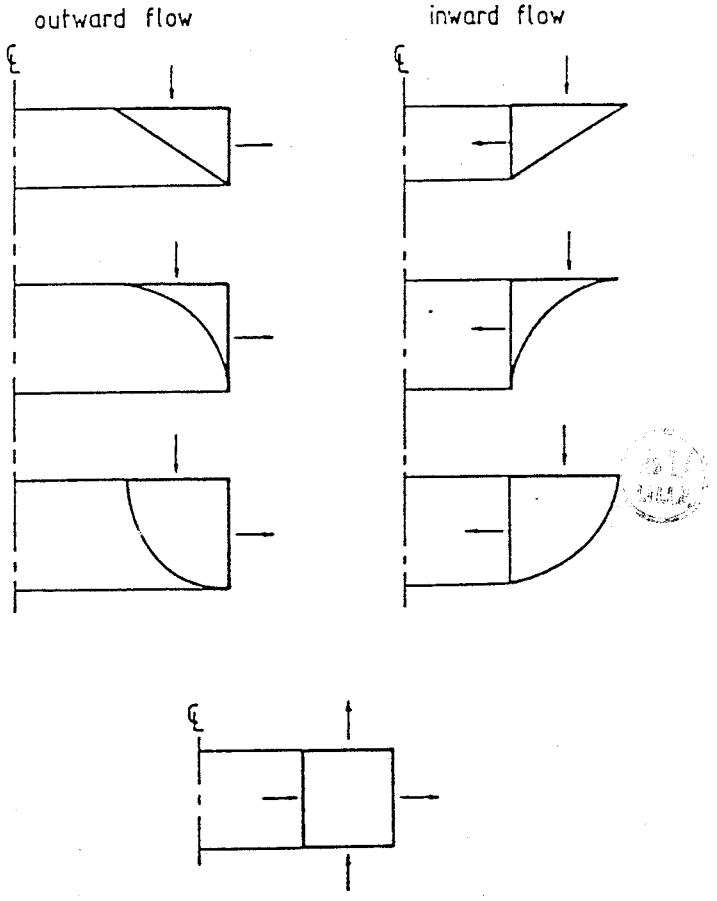


Fig. I.4 - Table des régions proposées par Bramley et Mac-Dermott

BRAMLEY et CRAMPHORN [15] furent les premiers à présenter un découpage automatique de la pièce. Le nombre d'éléments utilisés fut réduit à trois par élimination des régions à frontières courbes, celles-ci étant remplacées par des lignes brisées. Ensuite BRAMLEY et ses collègues [21, 24] ont défini une approche plus souple du problème et ils ont introduit le concept de déformation incrémentale pour le forgeage en continu. D'autre part, ils mettent l'accent sur l'optimisation des vitesses aux frontières des régions, chacunes pouvant être traversées par un flux entrant ou sortant. Cette approche conduit à optimiser des fonctions non linéaires qui peuvent être définies par un nombre important de variables. Les procédures numériques de traitement s'avèrent longues et délicates.

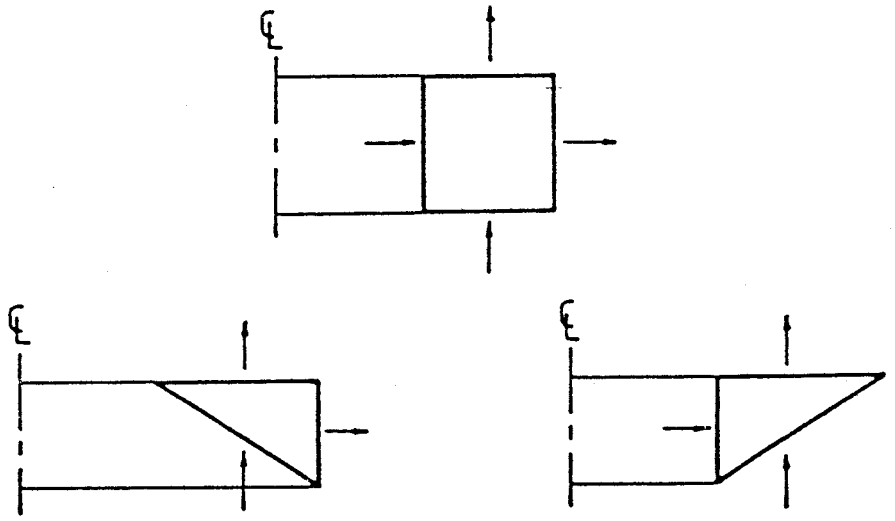


Fig. I.5 - Table des régions finalement retenues dans UBET

OUDIN et RAVALARD [20, 27] après avoir informatisé la méthode de KUDO (programme CAFOL), ont repris l'idée de base de BRAMLEY en utilisant une région rectangulaire analogue pour modéliser les écoulements plastiques plans.

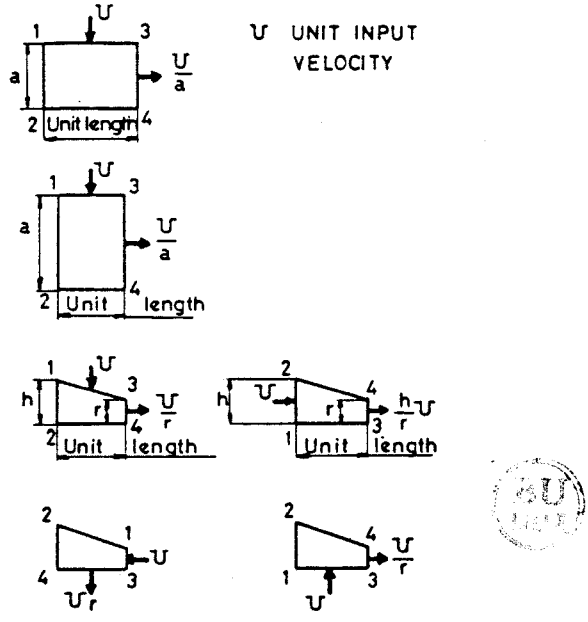


Fig. I.6 - Table des régions unitaires utilisées par le programme CAFOL

En conclusion de ce bref survol bibliographique des développements de la Méthode de Borne Supérieure, il apparaît que :

- le programme CAFOL développé par OUDIN et RAVALARD ne permet pas un maniement assez souple de la notion de région unitaire et ne peut donc pas être mis dans les mains de techniciens de l'industrie;

- le programme UBET développé par BRAMLEY et al. est spécialisé dans les écoulements axisymétriques et utilise une procédure de calcul non-linéaire qui n'est peut être pas optimale.

Il reste donc place pour une méthode qui pallie aux limitations citées ci-dessus et puisse déboucher sur la réalisation d'un programme de qualité industrielle.

I.3 CONCLUSION

En fonction de ces différentes remarques notre travail s'est orienté vers la définition d'une formulation de la Méthode de Borne Supérieure originale (nous l'avons baptisée Méthode des Eléments Cinématiques) et vers la promotion d'un programme de calcul de qualité (sur proposition de Monsieur MASSON, de la Société Informatique Internationale, ce programme a été baptisé GALOPIN en signe de jeunesse d'esprit sans doute !).

La méthode des éléments cinématiques que nous avons développée reprend les différents résultats obtenus par Oudin et Ravalard et les généralise de manière à permettre une décomposition de pièce en éléments rectangulaires, triangulaires et trapézoïdaux pour des écoulements plans (soit en déformations planes, soit en déformations axisymétriques).

Plus générale que la solution développée par Bramley (spécialisée dans les écoulements axisymétriques) elle repose aussi sur le choix d'une procédure d'optimisation par mise en oeuvre de simplexe et non par optimisation de fonction non-linéaire. L'objectif visé dans ce choix est de rechercher la procédure de calcul la plus performante pour obtenir des temps de calcul faibles.

La présente thèse présente donc successivement :

- les développements nécessaires à la compréhension de la méthode des éléments cinématiques (Première Partie) ;

- la présentation des différentes structures informatiques choisies pour élaborer un programme de calcul facile d'emploi (Deuxième Partie);

la présentation des différents tests de validation du programme qui ont été effectués (Troisième Partie).

CHAPITRE II

METHODE DE LA BORNE SUPERIEURE

II.1. PRINCIPE DU TRAVAIL MAXIMAL

1.1 Principe du travail maximal

Le principe du travail maximal est en fait un principe local fondé sur une propriété physique des cristaux métalliques :

- la résistance au glissement le long d'un plan de glissement dépend très peu de la contrainte normale exercée sur ce plan. Soit un élément polycristallin en déformation plastique à la vitesse de déformation $[\dot{\varepsilon}]$ sous la contrainte $[\sigma]$ quel que soit un autre état de contrainte $[\sigma^*]$ plastiquement admissible, c'est à dire tel-que $f(\sigma^*) \leq 0$ (f : fonction de charge) alors

$$[\sigma^*]\,[\dot{\varepsilon}] \leq [\sigma]\,[\dot{\varepsilon}] \qquad (1.1.1)$$

Ceci signifie donc que le tenseur des contraintes réelles rend maximum la puissance de déformation

$$[\sigma]\,[\dot{\varepsilon}] = \text{Max}\,\{[\sigma^*]\,[\dot{\varepsilon}] \;/\; f(\sigma^*) \leq 0\} \qquad (1.1.2)$$

1.2 Hypothéses principales

Rappelons les principales hypothéses utilisées pour les méthodes extremales.

* Hypothèse des petites pertubations $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})$
* Les forces volumiques et d'accélération massiques sont négligées : $\sigma_{ij,j} = 0$
* Les déformations élastiques sont négligées
* Le matériau déformé est isotrope et entièrement plastifié
* Le matériau déformé obéit au principe du travail maximal
* L'écoulement plastique vérifie le critère de Von Mises
* Les conditions de frottement à l'interface matériau déformé-outillage ne dépendant pas de la contrainte normale
* La contrainte d'écoulement σ_o est constante à l'intérieur du volume déformé à un moment donné de la compression.

1.3 Méthode de la borne supérieure

Soit un champ de vitesse admissible et licite virtuel V vérifiant les conditions aux limites et les conditions d'incompressibilité. Le principe du travail maximal implique que :

$$\int_{S_v} \sigma_{ij}\, n_j\, V_i\, dS_v \leq \int_V \sigma_{ij} \overset{\circ}{\varepsilon}{}^*_{ij}\, dV - \int_{S_f} \sigma_{ij}\, n_j\, V_i^*\, dS_f \qquad (1.3.1)$$

Dans la mesure ou on néglige la pression extérieure sur les surfaces libres

$$\int_{S_f} \sigma_{ij} n_j V_i^* dS_f = - \int_{S_f} \overline{m}\, \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} (V_i^*, \ell_i)\, dS_f \qquad (1.3.2)$$

avec ℓ_i = vecteur tangent à la direction d'écoulement au contact de l'outillage

$\overline{m}$ coefficient de frottement

$$\int_{S_v} \sigma_{ij}\, n_j\, V_i\, dS_v = S_v \,.\, P_m \,.\, V_o \qquad \text{où} \qquad (1.3.3)$$

P_m est la pression moyenne de forgeage.

Il vient donc :

$$P_m . V_o . S_v \leq \underbrace{\int_V \sigma_{ij}\ \dot{\varepsilon}^*_{ij}\ d\,V}_{(a)} + \bar{m}\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \underbrace{\int_{S_f} (V_i^*,\ \ell_i)\ dS_f}_{(b)} \qquad (1.3.4)$$

(a) représente la puissance dissipée au sein de la matière

(b) représente la puissance dissipée par frottement au contact des outillages

Compte tenu du fait que nos considérons la contrainte d'écoulement constante sur le domaine V

$$P_m . V_o . S_v \leq \sigma_o \int_V \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}^*\ dV + \bar{m}\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_{S_f} (V_i^*,\ \ell_i)\ dS_f \qquad (1.3.5)$$

Par le rapport caractéristique de l'essai nous avons :

$$\frac{Pm}{\sigma_o} \leq \frac{1}{V_o S_v}\left[\int_V \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}^*\ dV + \frac{\bar{m}}{\sqrt{3}} \int_{S_f} (V_i^*,\ \ell_i)\ dS_f\right] \qquad (1.3.6)$$

Nous devons donc trouver une minimisation de la fonctionnelle π telle que

$$\pi = \frac{1}{V_o S_v}\left[\int_V \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}^* dV + \frac{\bar{m}}{\sqrt{3}} \int_{S_f} (V_i^*,\ \ell_i)\ dS_f\right] \qquad (1.3.7)$$

Dans notre étude, la répartition de la cission de frottement à l'interface outil-matériau est du type de couche limite de Tresca :

$$\tau = -\bar{m}\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \qquad (1.3.8)$$

La valeur de la contrainte de cisaillement est constante sur tout l'interface, et pour toute valeur du taux de réduction, ceci correspond à l'existance d'une couche limite de cisaillement à l'interface outil-matériau.

S_f : Partie de surface limitant un domaine où les efforts sont imposés.

S_v : Partie de surface limitant le domaine où les vitesses sont imposées.

C H A P I T R E III

FORMULATIONS MATHEMATIQUES DES ELEMENTS CINEMATIQUES

La modélisation des grandeurs cinématiques proposée ici est obtenue par une discrétisation assez forte du volume concerné par les grandes déformations en quelques dizaines d'éléments de formes typiques, à bases rectangulaires, trapézoïdales ou triangulaires. La recherche du champ de vitesses licite se fait en minimisant la fonctionnelle puissance dissipée dans le volume et à la surface du volume. Cette fonctionnelle est exprimée à partir de variables surfaciques que sont les vitesses aux frontières des éléments constitutifs. Le calcul de la puissance dissipée est fait pour des comportements isotropes, isothermes et non écrouissables.

Dans ce chapitre nous étudierons les éléments rectangulaire, triangulaires et trapézoïdaux en état plan de déformation ainsi que les éléments rectangulaire et triangulaires en déformations axisymétriques. Nous obtiendrons l'expression élémentaire des puissances dissipées dans l'élément et à la surface de l'élément. le traitement de la fonctionnelle puissance dissipée sera fait par la méthode du simplexe.

La figure III.1 illustre la décomposition d'une pièce axisymétrique en éléments rectangulaires et triangulaires (1 triangulaire, 10 rectangulaires). Il est à noter que nous avons développé pour les processus en état plan de déformation les éléments trapézoïdaux afin de diminuer le nombre d'éléments nécessaires à la décomposition et par là même de diminuer le nombre de variables surfaciques.

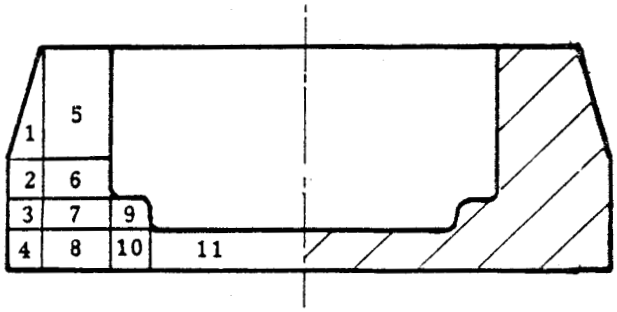


Fig. III.1 - Décomposition d'une pièce axisymétrique

III.1 FORMULATIONS EN DEFORMATIONS PLANES

1.1 Elément cinématique rectangulaire plan

1.1.1 Paramétrage

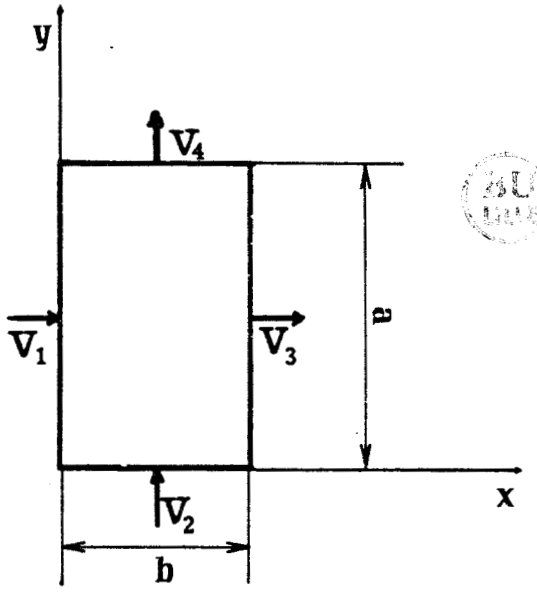


Fig. III.2 - Elément cinématique rectangulaire plan.

Les vitesses étant constantes sur les faces de l'élément et pour décrire simplement un champ de vitesses admissible nous avons retenu une évolution des vitesses linéaires $u = u(x)$, $v = v(y)$.

1.1.2 détermination d'un champ de vitesse admissible

L'écriture de la condition d'incompressibilité locale nous donne :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

et l'écriture de la condition d'incompressibilité globale nous amène à la relation suivante :

$$\int_S \vec{V}.\vec{n}.dS = 0 \quad dS = 1 \times d\ell \quad \text{d'où } -V_1 a - V_2 b + V_3 a + V_4 b = 0 \qquad (1.1.1)$$

Soit le champ de vitesses linéaires suivant :

$$u(x) = \frac{V_3 - V_1}{b} x + V_1$$

$$v(y) = \frac{V_4 - V_2}{a} y + V_2 \qquad (1.1.2)$$

Il satisfait les conditions cinématiques sur les frontières. D'après (1.1.1) et (1.1.2) le champ de vitesses s'écrit :

$$u(x) = \frac{V_2 - V_4}{a} x + V_1$$

$$v(y) = \frac{V_4 - V_2}{a} y + V_3 \qquad (1.1.3)$$

1.1.3 Puissance dissipée dans un élément cinématique rectangulaire

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_2 - V_4}{a}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V_4 - V_2}{a}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

la puissance interne vaut : $\dot{W}_i = \int_V \sigma_o \dot{\bar{\varepsilon}}\, dV$ or $\dot{\bar{\varepsilon}} = (\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2}$

$$\dot{W}_i = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} b \, |V_2 - V_4| \qquad (1.1.4)$$

Puissance dissipée aux interfaces :

L'expression de la puissance dissipée à l'interface de deux régions élémentaires (ou bien à l'interface d'une région et d'un outil), fait intervenir le calcul de fonctions E_i nommées "Fonctions puissances".

$$E_i = \int_{S_f} \bar{m} \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \cdot V_t \cdot dS \qquad (1.1.5)$$

La puissance dissipée aux interfaces vaut :

$$\dot{W}_f = \bar{m} \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_{S_f} |V_k(s) - V_j(s)| dS$$

avec $V_k(s)$ vitesse de glissement sur l'interface de la région k

$V_j(s)$ vitesse de glissement sur l'interface de la région j

La valeur absolue à l'intérieur de l'intégrale est gênante. Comme on cherche un minimum pour l'énergie nous prendrons :

$$\dot{W}_f = \bar{m} \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left| \int_{S_f} (V_k(s) - V_j(s)) dS \right| \quad \text{car} \quad \left| \int_S f(s) dS \right| \leq \int_S |f(s)| dS$$

d'où $\dot{W}_f = |E_k - E_j|$ (1.1.6)

Pour la face 1 $\quad E_1 = \bar{m}_1 \, k \, a \, (\frac{V_2+V_4}{2})$

Pour la face 2 $\quad E_2 = \bar{m}_2 \, k \, b \left[V_1 + \frac{V_2-V_4}{2a} b \right]$

Pour la face 3 $\quad E_3 = \bar{m}_3 \, k \, a \, (\frac{V_2+V_4}{2})$

Pour la face 4 $\quad E_4 = \bar{m}_4 \, k \, b \left[V_1 + \frac{V_2-V_4}{2a} b \right]$

1.2 Eléments cinématiques triangulaires plans

1.2.1 Paramétrage

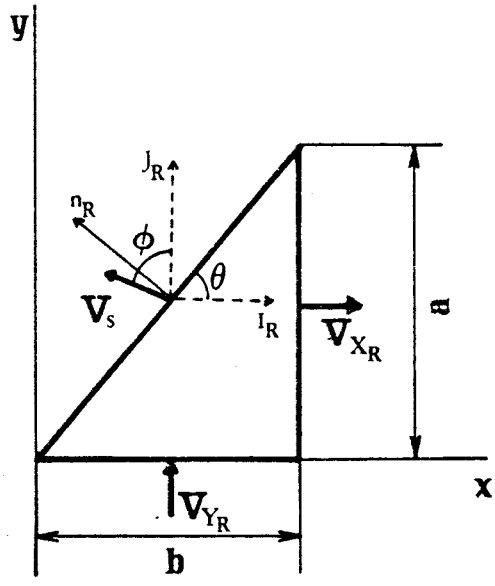


Fig. III.3 - Elément de référence pour les éléments triangulaires

$\vec{n}$: vecteur normal sortant de la face inclinée

$\vec{t}$: vecteur tangentiel à la face inclinée $/(\widehat{t,n}) = \pi/2$

$\vec{s}$: vecteur unitaire portant V_S

$\vec{W}$: vitesse de l'écoulement à travers la face inclinée.

θ : est l'angle d'inclinaison de la face

ϕ : est l'angle d'inclinaison de $\vec{V}$ avec la verticale

$\vec{W} = \vec{V} + \vec{V}_t = V.\vec{s} + V_t.\vec{t}$

$\vec{V}_t$: vitesse de glissement de la matière sur l'outil

$\vec{V}$: vitesse de l'écoulement de la matière sortant de la face inclinée

Pour le calcul on pose $A = \cos\theta$ $B = \sin\theta$

$C = \cos\phi$ $D = \sin\phi$

1.2.2 Détermination d'un champ de vitesses admissible

Soit $\vec{W}$ la vitesse d'écoulement à travers la face inclinée.

$$\vec{W} = u.\vec{i}_R + v.\vec{j}_R = V_t.\vec{t} + V_s.\vec{s}_R$$

En multipliant scalairement par $\vec{n}_R$ cette expression on obtient :

$$vA - uB = V_s(AC+BD) \qquad (1.2.1)$$

Cette égalité doit être vérifiée sur la face inclinée.

La condition d'incompressibilité locale impose que le champ des vitesses vérifie la relation div $\vec{V}=0$. Or en analyse tensorielle nous savons que :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} T_{ijk} n_\ell \, d\sigma = \int_{\mathcal{D}} T_{ijk,\ell} \, dv \qquad (1.2.2)$$

Si $\mathcal{D}$ est un domaine connexe ou non, de frontière $\partial\mathcal{D}$ lisse par morceaux et sur lequel peut être défini en tout point régulier le vecteur unité de la normale extérieure. La frontière $\partial\mathcal{D}$ peut comprendre des arêtes ou des sommets. L'équation (1.2.2) nous amène au théorème de la divergence en prenant $k=\ell$ et en sommant sur l'indice répété.

$$\int_{\partial\mathcal{D}} T_{ijk} \, n_k d\sigma = \int_{\mathcal{D}} T_{ijk,k} \, dV$$

Dans le cas qui nous intéresse nous pouvons écrire $\int_S \vec{V}.\vec{n}dS = 0$

d'où $V_s(AC+BD) + V_{x_R} B - V_{y_R} A = 0 \qquad (1.2.3)$

Champ de vîtesse licite

Un champ de vitesse constant $u = V_{x_R}$, $v = V_{y_R}$ vérifie les conditions d'incompressibilité locale et globale ainsi que l'égalité (1.2.1). Si on exprime le champ de vitesses en fonction de V_y et de V_s nous obtenons :

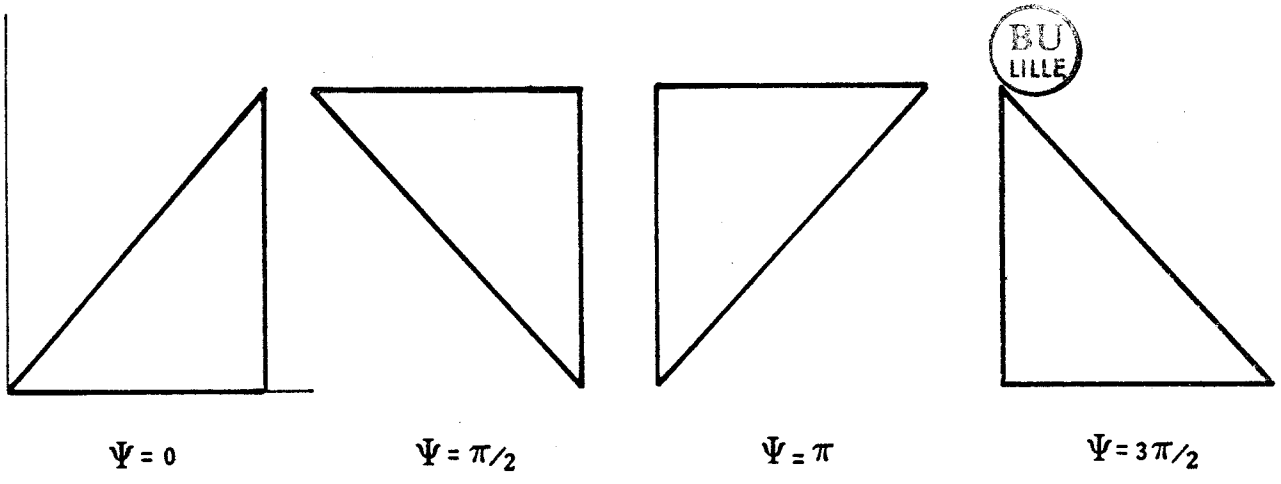
$$\begin{cases} u = + V_y \frac{b}{a} - V_s \, (AC+BD) \, \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \\ \\ v = V_y \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

L'expression de la vitesse $||V_t||$

$$||V_t|| = V_x A + V_y B - V_s (BC-AD) \qquad (1.2.5)$$

1.2.3 Généralisation des équations

Les différents triangles qui peuvent être pris en compte par le programme sont :



BU LILLE

Fig. III.4 - Eléments cinématiques triangulaires

Nous définissons une matrice de passage $[P] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$

Les trois autres éléments cinématiques triangulaires sont obtenus par rotation du triangle de référence d'un angle ψ de 90°, 180° ou 270°. En ce qui concerne la puissance dissipée ou la formulation des champs de vitesses, nous les obtenons par multiplication des grandeurs vectorielles et de la matrice [P]

$$(1.2.1) \Rightarrow -uB(\cos\psi + \sin\psi) + vA(\cos\psi - \sin\psi) = V_S(AC+BD) \qquad (1.2.6)$$

$$(1.2.3) \Rightarrow V_s(AC+BD)\sqrt{a^2+b^2} + V_x a(\cos\psi+\sin\psi) + V_y b\,(\sin\psi-\cos\psi) \qquad (1.2.7)$$

$$(1.2.4) \Rightarrow \begin{cases} u = -V_y \dfrac{b}{a}\dfrac{\sin\psi-\cos\psi}{\cos\psi+\sin\psi} - V_S(AC+BD)\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}/(\cos\psi+\sin\psi) \\ v = V_y \end{cases} \qquad (1.2.8)$$

$$(1.2.5) \Rightarrow ||V_t|| = V_x A(\cos\psi - \sin\psi) + V_y B(\cos\psi + \sin\psi) - V_S(BC-AD) \qquad (1.2.9)$$

1.2.4 Puissance dissipée dans un élément cinématique triangulaire plan

Quel que soit l'élément cinématique triangulaire considéré les vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}_{xx}$, $\dot{\varepsilon}_{yy}$, $\dot{\varepsilon}_{xz}$ sont nulles. De ce fait la puissance dissipée interne est nulle.

En ce qui concerne la puissance dissipée aux interfaces, nous définissons de la même manière qu'au 1.1.3 les fonctions puissances E_i. Pour le triangle, pour lequel Φ est nul, nous avons :

$$E_2 = \bar{m}_2\, k\, b \left[V_4\left(\frac{b}{a}C+D\right) + \frac{b}{a} V_2 \right]$$

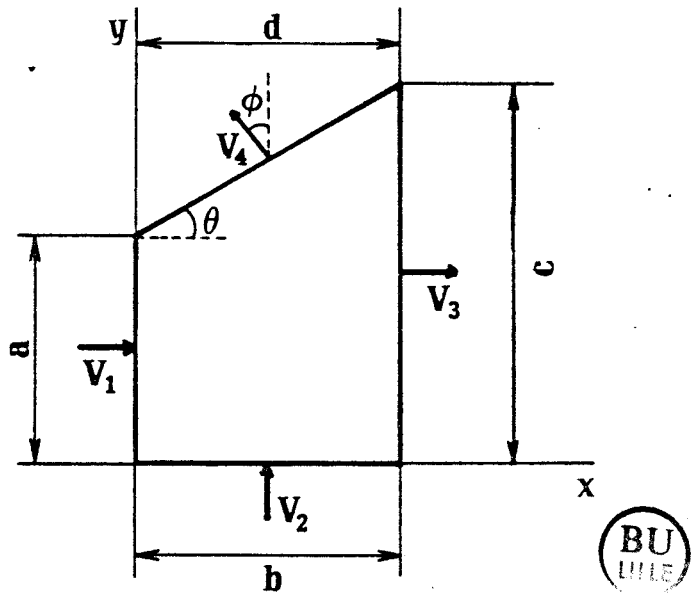
$$E_3 = \bar{m}_3\, k\, b\, V_2\, a \qquad \text{avec } k = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$$

$$E_4 = \bar{m}_4\, k\, \left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)(V_2 - V_4\, C)$$

E_4 représente la fonction puissance sur la face inclinée.

1.3 Eléments cinématiques trapézoïdaux plans

1.3.1 Paramétrage



BU LILLE

Fig. III.5 - Elément cinématique trapézoïdal n° 4

$\vec{n}$: vecteur normal sortant de la face inclinée

$\vec{t}$: vecteur tangentiel à la face inclinée /(t,n) = $\frac{\pi}{2}$

$\vec{s}$: vecteur portant $\vec{V}_u$

$\vec{w}$: vitesse de l'écoulement à travers la face inclinée

θ : angle d'inclinaison de la face

ϕ : angle d'inclinaison de $\vec{V}_4$ avec la verticale

Pour le calcul on pose $A = \cos\theta$ $\quad B = \sin\theta$

$C = \cos\phi$ $\quad D = \sin\phi$

$b=d \quad A = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}} \quad B = \dfrac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}$

1.3.2 Détermination d'un champ de vitesses admissible

Nous reprenons la même méthodologie qu'au paragraphe II.1.2.2

Ainsi sur la droite inclinée d'équation $y = a + \frac{B}{A} x$ nous devons vérifier l'égalité suivante :

$$vA - uB = V_4(AC+BD) \tag{1.3.1}$$

nous cherchons un champ de vitesses de la forme suivante :

$u = u(x)$

$v = v(x,y)$

La condition d'incompressibilité locale impose $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$. On obtient après intégration :

$$v(x,y) = -u'(x).y+f(x) \tag{1.3.2}$$

avec comme condition aux limites

$$\text{en } y = 0 \quad v(x,y) = V_2 \tag{1.3.3}$$

$$x = 0 \quad u(x) = V_1 \tag{1.3.4}$$

$$x = b \quad u(x) = V_3 \tag{1.3.5}$$

Pour la condition d'incompressibilité globale nous obtenons la relation :

$$-V_1 a - V_2 b + V_3 c + V_4 \left(\frac{AC+BD}{A}\right) b = 0 \qquad (1.3.6)$$

Les équations (1.3.1), (1.3.2), (1.3.4) nous permettent d'écrire :

$$-u'(x) \left(\frac{B}{A} x + a\right) + u(x) \left(-\frac{B}{A}\right) = V_4 \left(\frac{AC+BD}{A}\right) - V_2$$

Nous résolvons l'équation différentielle sans second membre

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\left(-\frac{B}{A}\right)}{\frac{B}{A} x+a} \Rightarrow \quad u(x) = \frac{K}{\frac{B}{A} x + a}$$

Nous rechercherons une solution particulière de la forme $g(x)=\lambda$ avec λ = cte

$$\begin{cases} \lambda = \frac{A}{B} V_2 - DV_4 - \frac{AC}{B} V_4 \\ u(x) = \frac{K}{\frac{B}{A} x + a} + \lambda \end{cases} \qquad (1.3.7)$$

En utilisant la condition (1.3.4), K est déterminé

$$K = a\left(V_1 - \frac{A}{B} V_2 + DV_4 + \frac{AC}{B} V_4\right)$$

Il est aisé de montrer que la condition (1.3.5) est vérifiée. Le champ de vitesses admissible est le suivant :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{a(V_1 - \frac{A}{B} V_2 + DV_4 + \frac{AC}{B} V_4)}{\frac{B}{A} x + a} + \frac{A}{B} V_2 - DV_4 - \frac{AC}{B} V_4 \\ v(x,y) = \dfrac{a(\frac{B}{A} V_1 - V_2 + \frac{DB}{A} V_4 + CV_4)}{(\frac{B}{A} x + a)^2} \cdot y + V_2 \end{cases} \qquad (1.3.8)$$

1.3.3 Puissance dissipée dans l'élément cinématique trapézoïdal n° 4

Puissance dissipée interne

On pose $X = a$, $Y = b$, $Z = c$, $U = C$, $V = D$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{c-a}{b} = \frac{Z-X}{Y} = K$$

Pour simplifier l'écriture du champ de vitesse nous introduisons

$$K' = X(V_1 - V_2 \frac{Y}{Z-X} + V_4 (V + U \frac{Y}{Z-X}))$$

$$I = V_2 - V_4 (\frac{Z-X}{Y} \cdot V + U)$$

$$u(x) = \frac{K'}{(Kx+X)} + \frac{I}{K}$$

$$v(x,y) = \frac{KK'}{(Kx+X)^2} \cdot y + V_2$$

Les vitesses de déformation ont pour valeur :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-KK'}{(Kx+X)^2} \; ; \; \dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{KK'}{(Kx+X)^2} \; ; \; \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{-K'K^2}{(Kx+X)^3} \cdot y$$

La vitesse de déformation généralisée

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \left(\frac{2}{3}\ \varepsilon_{ij}\ \ \varepsilon_{ij}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{|KK'|}{|(Kx+X)^3|}\ \sqrt{(Kx+X)^2 + K^2y^2}$$

La puissance dissipée interne

$$\overset{\circ}{W}_i = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}}\ |KK'|\ \int_V \frac{\sqrt{(Kx+X)^2+K^2y^2}}{|(Kx+X)^3|}\ dxdy$$

1) Cas où $\theta \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[$, $K > 0$

On procède au changement de variable $\theta_1 = Kx+X$

$$\overset{\circ}{W}_i = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}}\ |K'|\ \int_V \frac{(\theta_1^2 + K^2y^2)^{1/2}}{\theta_1^3}\ d\theta_1 dy$$

$$= \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}}\ |K'|\ \int_X^{KY+X} \left(\int_0^{Z_1} \frac{(\theta_1^2 +K^2y^2)^{1/2}}{\theta_1^3}\ dy\right) d\theta_1 \text{ avec } Z_1 = Kx+X = \theta_1$$

Calculons $J = \int_0^{Z_1} \frac{(\theta_1^2+K^2y^2)^{1/2}}{\theta_1^3}\ dy$

$J = \frac{1}{\theta_1^2}\ \int_0^{Z_1} (1 + (\frac{Ky}{\theta_1})^2)^{1/2}\ dy$, considérons le changement de variable

$\frac{Ky}{\theta_1} = \text{sh } \alpha$, nous obtenons $J = \frac{1}{2\theta_1 K}\ [\frac{1}{2} \text{ sh } 2\alpha_1 + \alpha_1]$ avec $\alpha_1 = \text{Argsh } K$.

d'où

$$\overset{\circ}{W}_i = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}\ \frac{|K'|}{K}\ [\frac{1}{2} \text{ sh } (2 \text{ Argsh } K) + \text{Argsh } K]\ \int_X^{KY+X}\ \frac{d\theta_1}{\theta_1}$$

$$\overset{\circ}{W}_i = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}\ \frac{|K'|}{K}\ (\text{Log } \frac{Z}{X})\ (K\sqrt{K^2+1} + \text{Log } (K + \sqrt{1+K^2}))$$

Posons $S = \frac{1}{K} \left(\text{Log } \frac{Z}{X}\right) \left(K\sqrt{K^2+1} + \text{Log } (K + \sqrt{1+K^2})\right)$

$\overset{\circ}{W}_i$ est une fonction linéaire de V_1. V_2; V_4

$$\overset{\circ}{W}_i = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} S|K'| = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} SX \left|V_1 - \frac{Y}{Z-X} V_2 + \left(V + \frac{UY}{Z-X}\right) V_4\right| \qquad (1.3.9)$$

2) Cas où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. $K < 0$

$$\overset{\circ}{W}_i = -\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} S|K'| = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} SX \left|V_1 - \frac{Y}{Z-X} V_2 + \left(V + U\frac{Y}{Z-X}\right)V_4\right| \qquad (1.3.10)$$

Puissance dissipée aux interfaces

Les fonctions puissance dissipée aux interfaces sont les suivantes :

$$E_1 = \bar{m}_1 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[\frac{X}{2} \cdot \frac{Z-X}{Y} V_1 + \frac{X}{2} V_2 + \frac{X}{2} \left(U + V \cdot \frac{Z-X}{Y}\right)V_4\right]$$

$$E_2 = \bar{m}_2 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[\frac{YX}{Z-X} \text{Log } \frac{Z}{X} V_1 + \frac{Y}{Z-X} \left(Y - \frac{YX}{Z-X} \text{Log } \frac{Z}{X}\right)V_2 + \left(V + \frac{Y}{Z-X} U\right)\right.$$

$$\left.\left(\frac{XY}{Z-X} \text{Log } \frac{Z}{X} - Y\right)V_4\right]$$

$$E_3 = \bar{m}_3 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[\frac{Z-X}{Y} \cdot \frac{X}{2} V_1 + \left(Z - \frac{X}{2}\right)V_2 + \frac{Z-X}{Y} \cdot \frac{X}{2} \left(V + \frac{Y}{Z-X} U\right)V_4\right]$$

$$E_4 = \bar{m}_4 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[X \text{ Log } \frac{Z}{X} \left(\frac{Y}{Z-X} + \frac{Z-X}{Y}\right)V_1 + \left(Y\left(\frac{Y}{Z-X} + \frac{Z-X}{X}\right) - X \text{ Log } \frac{Z}{X}\right.\right.$$

$$\left.\left[\left(\frac{Y}{Z-X}\right)^2 + 1\right]\right)V_2 + \left(\frac{Y}{Z-X} + \frac{Z-X}{Y}\right)\left(X \text{ Log } \frac{Z}{X} \left(V + \frac{Y}{Z-X} U\right) - YU\right)V_4$$

1.3.4 Généralisation de l'expression du champ de vitesses.

Comme pour les triangles nous voulons passer d'un champ de vitesses pour l'élément cinématique trapézoïdal n° 4 à un autre champ de vitesses

d'un autre élément cinématique trapézoïdal au moyen d'une opération matricielle. Il suffit pour celà d'affecter les notations des côtés a, b, c, d toujours aux mêmes côtés d'un trapèze. C'est-à-dire a et c pour les bases du trapèze, b et d pour les autres côtés.

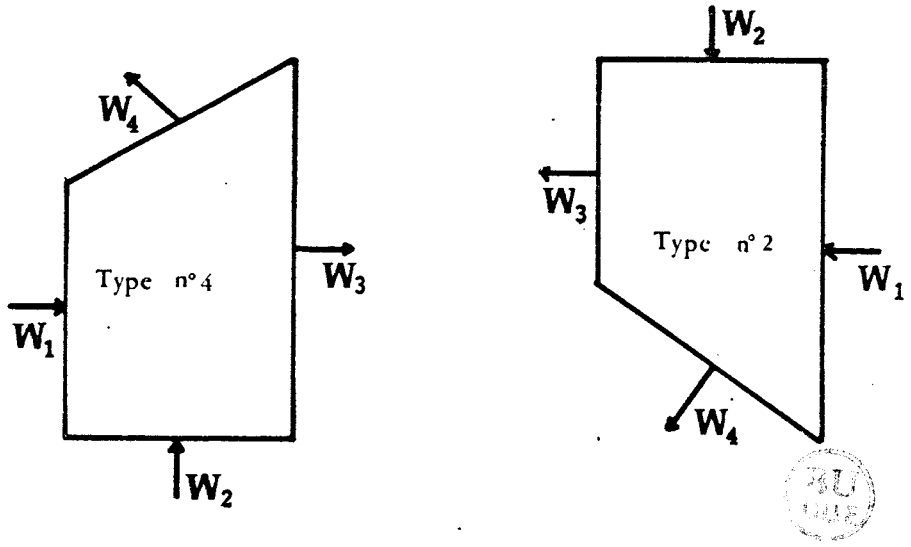


Fig. III.6

Soit [V] le champ de vitesses généralisé $[V] = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$

Soit [W] le champ de vitesses local $[W] = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix}$

Les indices des vitesses V_i correspondant aux indices des faces. Les vitesses W_i seront comme les côtés a, b, c, d affectées aux mêmes côtés quel que soit le type d'élément cinématique trapézoïdal étudié.

Soit [M] la matrice de passage $[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Pour passer du trapèze de type 4 à celui de type 2 nous avons la relation :

$$[V] = [M]^2 \; [W]$$

Expression générale du champ de vitesses

Nous pouvons exprimer le champ des vitesses en fonction des variables X, Y, Z, U, V. X, Y, Z prendront les valeurs de trois des grandeurs géométriques a, b, c, d suivant le type de trapèze (trois grandeurs géométriques sont suffisantes pour caractériser un trapèze rectangle).

U, V prendront les valeurs de $\cos \Phi$ ou $\sin \Phi$.

S_1, S_2, S_3 prendront les valeurs de V_1, V_2, V_4. Trois vitesses sont suffisantes pour caratériser les conditions limites aux frontières d'un élément du fait de l'incompressibilité.

Le tableau suivant nous permet de connaître le rôle des fonctions a(s,t) ; b(s) et les variables X, Y, Z, U, V et des vitesses S_1, S_2, S_3.

	trapeze 4	trapeze 2
a(s,t)	v(x,y)	v(x,y)
b(s)	u(x)	u(x)
X	a	-a
Y	b	b
Z	c	c
S_1	V_1	V_1
S_2	V_2	V_4
S_3	V_4	V_2
U	C	C
V	D	D

Ainsi le champ de vitesses s'écrit sous sa forme généralisée :

$$a(s,t) = \frac{X(S_1 \frac{Z-X}{Y} - S_2 + S_3 (V \frac{Z-X}{Y} + U))}{(\frac{Z-X}{Y} s + X)^2} \cdot t + S_2$$

$$b(s) = \frac{X(S_1 - \frac{Y}{Z-X} S_2 + S_3 (V + U \frac{Y}{Z-X}))}{\frac{Z-X}{Y} s + X} + \frac{Y}{Z-X} S_2 - S_3 (V + U \frac{Y}{Z-X})$$

1.3.5 Généralisation du calcul de la puissance dissipée

Dans l'hypothèse que nous avons retenue, nous supposons que le processus de forgeage est monoaxial. De ce fait seuls les éléments cinématiques trapézoïdaux de type 2 et 4 ont été retenus.

$$S(X,Y,Z) = \frac{Y}{Z-X} \text{Log } (\frac{Z}{X}) \left[\frac{Z-X}{Y} (1+(\frac{Z-X}{Y})^2)^{1/2} + \text{Log}(\frac{Z-X}{Y} + (1+(\frac{Z-X}{Y})^2)^{1/2}) \right]$$

$$F_1(X,Y,Z,U,V) = 2X\ S(X,Y,Z)$$

$$F_2(X,Y,Z,U,V) = -\ 2X \frac{Y}{Z-X} S(X,Y,Z)$$

$$F_3(X,Y,Z,U,V) = 2X\ S(X,Y,Z)(V + \frac{Y}{Z-X} U)$$

$$F_4(X,Y,Z,U,V) = X \frac{Z-X}{Y}$$

$$F_5(X,Y,Z,U,V) = 2Z-X$$

$$F_6(X,Y,Z,U,V) = X(U + \frac{Z-X}{Y} V)$$

BU LILLE

$$F_7(X,Y,Z,U,V) = 2X \frac{Y}{Z-X} \text{Log } \frac{Z}{X}$$

$$F_8(X,Y,Z,U,V) = 2 \frac{Y^2}{Z-X} (1 - \frac{Y}{Z-X} \text{Log } \frac{Z}{X})$$

$$F_9(X,Y,Z,U,V) = 2Y\ (V + \frac{Y}{Z-X} U)(-1 + \frac{X}{Z-X} \text{Log } \frac{Z}{X})$$

$$F_{10}(X,Y,Z,U,V) = 2X \text{ Log } (\frac{Z}{X}) (\frac{Y}{Z-X} + \frac{Z-X}{Y})$$

$$F_{11}(X,Y,Z,U,V) = -2X \text{ Log } (\frac{Z}{X})(1 + (\frac{Y}{Z-X})^2) + 2Y(\frac{Y}{Z-X} + \frac{Z-X}{Y})$$

$$F_{12}(X,Y,Z,U,V) = 2\ (\frac{Y}{Z-X} + \frac{Z-X}{Y})(X(V + \frac{Y}{Z-X} U) \text{ Log } \frac{Z}{X} - YU)$$

$$F_{13}(X,Y,Z,U,V) = X$$

Pour passer d'un trapèze de type 4 à un de type 2 nous permuttons les rôles des vitesses V_1, V_2, V_4 et nous faisons une similitude sur les faces homologues des trapèzes ce qui donne :

Pour un élément cinématique de type 4

$X=a,\ Y=b,\ Z=c,\ U=C,\ V=D$

$$\dot{W}_i = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_1 V_1 + F_2 V_2 + F_3 V_4|$$

$$E_1 = \bar{m}_1 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_4 V_1 + F_{13} V_2 + F_6 V_4|$$

$$E_2 = \bar{m}_2 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_7 V_1 + F_8 V_2 + F_9 V_4|$$

$$E_3 = \bar{m}_3 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_4 V_1 + F_5 V_2 + F_6 V_4|$$

$$E_4 = \bar{m}_4 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_{10} V_1 + F_{11} V_2 + F_{12} V_4|$$

Pour un élément cinématique de type 2

$X=-a,\ Y=b,\ Z=-c,\ U=C,\ V=D$

BU LILLE

$$\dot{W}_i = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_1 V_1 - F_3 V_2 + F_2 V_4|$$

$$E_1 = -\bar{m}_1 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_4 V_1 - F_6 V_2 + F_{13} V_4|$$

$$E_2 = \bar{m}_2 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_{10} V_1 - F_{12} V_2 + F_{11} V_4|$$

$$E_3 = -\bar{m}_3 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_4 V_1 - F_6 V_2 + F_5 V_4|$$

$$E_4 = \bar{m}_4 \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |F_7 V_1 - F_9 V_2 + F_8 V_4|$$

III.2 FORMULATION EN DEFORMATIONS AXISYMETRIQUES

2.1 Elément cinématique rectangulaire axisymétrique

2.1.1. Paramétrage

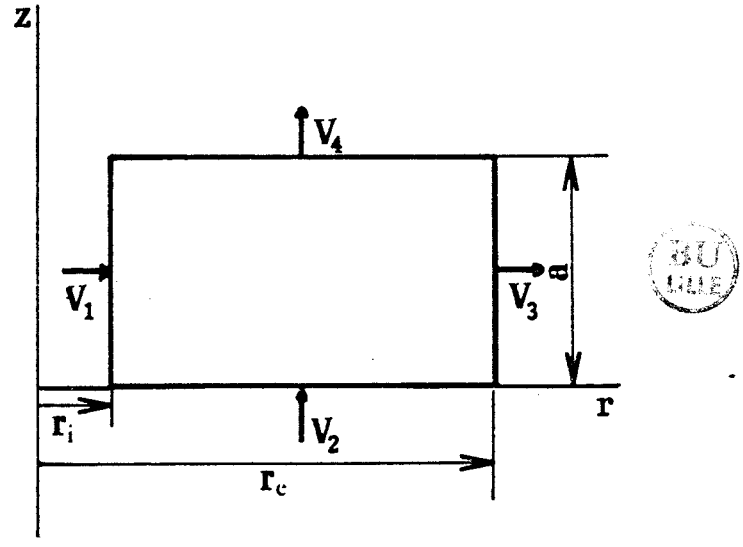


Fig. III.7 - Elément cinématique rectangulaire axisymétrique

2.1.2 Détermination d'un champ de vitesses admissible

En axisymétrique la condition d'incompressibilité locale s'exprime par :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

d'où $v = -u'z - \frac{u}{r}z + f(r)$ (2.1.1)

avec les conditions aux frontières en $z = o$ $v = V_2$

en $z = a$ $v = V_4$

$$\Rightarrow V_4 = -u'a - \frac{ua}{r} + V_2 \Rightarrow u' + \frac{u}{r} = \frac{V_2 - V_4}{a} \quad (2.1.2)$$

La résolution de l'équation différentielle (2.1.2) donne la solution

$$\begin{cases} u = \dfrac{V_4-V_2}{2ar} r_i^2 + V_1 \dfrac{r_i}{r} + \dfrac{V_2-V_4}{2a} r \\ \\ v = \dfrac{V_4-V_2}{a} z + V_2 \end{cases} \qquad (2.1.3)$$

2.1.3 Puissance dissipée dans un élément cinématique rectangulaire axisymétrique

Les fonctions puissances dissipées aux interfaces ont pour valeur :

$$E_1 = \pi \bar{m}_1 \, k \, r_i a \, (V_4+V_2)$$

$$E_2 = \pi \frac{\bar{m}_2 k}{a} \, (r_e-r_i)(2a \, V_1 r_i + (V_4-V_2)(\frac{2r_i^2 - r_e^2 - r_i r_e}{3})$$

$$E_3 = \pi \bar{m}_3 \, k \, r_e \, a(V_4+V_2)$$

$$E_4 = \pi \bar{m}_4 \frac{k}{a} \, (r_e-r_i)(2a \, V_1 r_i + (V_4-V_2)(\frac{2r_i^2 - r_e^2 - r_i r_e}{3})$$

avec $k = \dfrac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$

Puissance dissipée interne

On pose $K_1 = V_1 r_i + (\dfrac{V_4-V_2}{2a}) r_i^2$ $\qquad b = \dfrac{r_i}{r_e}$

$$K_2 = \frac{V_2-V_4}{2a}$$

Le champ de vitesse (2.1.3) s'écrit alors :

$$\begin{cases} u = \dfrac{K_1}{r} + K_2 r \\ \\ v = 2zK_2 + V_2 \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

Les vitesses de déformation valent :

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{K_1}{r^2} + K_2$$

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \frac{K_1}{r^2} + K_2$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} = -2K_2 \qquad \text{et } \dot{\varepsilon}_{rz} = 0$$

La vitesse de déformation généralisée $\dot{\bar{\varepsilon}} = \left(\frac{2}{3}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)^{1/2}$

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{K_1^2 + 3K_2^2\,r^4}}{r^2}$$

La puissance dissipée interne $\dot{W}_i = \sigma_o \int_V \dot{\bar{\varepsilon}}\, dV$ avec $dV = 2\pi r dr dz$

$$\dot{W}_i = \sigma_o \int_0^a dz \int_{r_i}^{r_e} \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{K_1^2 + 3K_2^2\,r^4}}{r^2}\,2\pi r dr \qquad (2.1.5)$$

BU LILLE

En faisant les changements de variable adéquates nous trouvons

$$\dot{W}_i = \frac{2\pi a\,\sigma_o}{\sqrt{3}}\,|K_1|\left\{\sqrt{1+3r_e^4\,\frac{K_2^2}{K_1^2}} - \sqrt{1+3r_i^4\,\frac{K_2^2}{K_1^2}} + \text{Log}\left(\frac{r_i^2}{r_e^2}\left(\frac{-1+\sqrt{1+3r_e^4K_2^2/K_1^2}}{-1+\sqrt{1+3r_i^4K_2^2/K_1^2}}\right)\right)\right\} \qquad (2.1.6)$$

L'équation (2.1.6) est vraie si $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, $r_i \neq 0$

Si $K_1=0$ $$\dot{W}_i = \pi\sigma_o(r_e^2 - r_i^2)\,|V_2-V_4| \qquad (2.1.7)$$

Si $K_2=0$ $$\dot{W}_i = \frac{4\pi a\,\sigma_o}{\sqrt{3}}\,\text{Log}\left(\frac{r_e}{r_i}\right)|V_1| \qquad (2.1.8)$$

Si $r_i=0$ $$\dot{W}_i = \pi\sigma_o r_e^2\,|V_2-V_4| \qquad (2.1.9)$$

2.1.4 Linéarisation de la puissance dissipée interne par des droites d'approximation

L'équation (2.1.6) fait apparaître que la puissance dissipée interne n'est pas une fonction linéaire de V_1, V_2, V_4. Afin de linéariser cette puissance nous allons déterminer les différentes asymptotes, minima et tangentes associées à (2.1.6).

2.1.4.1 Calcul des asymptotes

a) Calcul de l'asymptote lorsque V_1 tend vers $-\infty$ (V_2,V_4 sont bloquées)

l'équation de l'asymptote est :

$$y_1 = -\frac{4\pi a \sigma_0}{\sqrt{3}} r_i V_1 \operatorname{Log} \frac{1}{b} + \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} r_i^2 (V_2-V_4) \operatorname{Log} \frac{1}{b} \qquad (2.1.10)$$

b) Calcul de l'asymptote lorsque V_1 tend vers $+\infty$

On obtient :

BU LILLE

$$y_1' = \frac{4\pi a\sigma_0}{\sqrt{3}} r_i V_1 \operatorname{Log} \frac{1}{b} - \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} r_i^2 (V_2-V_4) \operatorname{Log} \frac{1}{b} \qquad (2.1.11)$$

On s'aperçoit que $y_1 = -y_1'$. Les asymptotes se ramènent donc à une seule équation

$$Y_1 = \left|\frac{4\pi a \sigma_0}{\sqrt{3}} r_i V_1 \operatorname{Log} \frac{1}{b} - \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{3}} r_i^2 (V_2- V_4) \operatorname{Log} \frac{1}{b}\right| \qquad (2.1.12)$$

c) Calcul de l'asymptote lorsque V_2 tend vers $-\infty$

$$y_2 = \frac{\pi\sigma_0 r_i^2}{\sqrt{3}} H (V_4-V_2) + \frac{2\pi a \sigma_0}{\sqrt{3}} V_1 r_i \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{r_i^4 + 3r_e^4} - r_i^2}{r_e^2}\right) \qquad (2.1.13)$$

avec $H = \sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 2 + \operatorname{Log} \left(b^2\left(-1 + \sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}}\right)\right)$

d) Calcul de l'asymptote lorsque V_2 tend vers + ∞

On montre que $y_2' = -Y_2$. Les asymptotes se ramènent à l'équation

$$Y_2 = \left| \frac{\pi \sigma_o r_i^2}{\sqrt{3}} H (V_4 - V_2) + \frac{2\pi a \sigma_o}{\sqrt{3}} V_1 r_i \operatorname{Log} \left(\frac{\sqrt{r_i^2 + 3r_e^4} - r_i^2}{r_e^2} \right) \right| \quad (2.1.14)$$

e) Asymptotes quand V_4 tend vers ± ∞

Etant donné que W_i peut être écrit sous la forme $f(V_2 - V_4)$, on devine aisément que les asymptotes quand V_4 tend vers ±∞ seront les mêmes que celles obtenues quand V_2 tend vers ± ∞

Y_2 est donc l'équation des asymptotes quand V_2 et V_4 tendent vers ±∞

2.1.4.2 Calcul des minima

a) Calcul de la dérivée partielle de W_i par rapport à V_1

$$\frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial V_1} = \frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial K_1} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial V_1} + \frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial K_2} \cdot \frac{\partial K_2}{\partial V_1}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial V_1} = r_i \qquad \frac{\partial K_2}{\partial V_1} = 0$$

BU LILLE

Si $|K_1| = K_1$ alors

$$\frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial V_1} = \frac{2\pi a \sigma_o r_i}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} \left(b^2 \frac{-1 + \sqrt{1 + 3r_e^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}}}{-1 + \sqrt{1 + 3r_i^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}}} \right) \quad (2.1.15)$$

Si $|K_1| = -K_1$, $\frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial V_1}$ est l'opposé de l'expression précédente.

b) Calcul de la dérivée partielle de W_i par rapport à V_2

$$\frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial V_2} = \frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial K_1} \cdot \frac{\partial K_1}{\partial V_2} + \frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial K_2} \cdot \frac{\partial K_2}{\partial V_2}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial V_2} = -\frac{r_i^2}{2a} \qquad \frac{\partial K_2}{\partial V_2} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{\partial \overset{\circ}{W}_i}{\partial V_2} = \frac{\pi\sigma_o}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{|K_1|}{K_2} \left(\sqrt{1+3r_e^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}} - \sqrt{1+3r_i^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}} \right) - r_i^2 \operatorname{Log} \left(b^2 \frac{-1+\sqrt{1+3r_e^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}}}{-1+\sqrt{1+3r_i^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}}} \right) \right\}$$

(2.1.16)

c). Dérivée partielle de W_i par rapport à V_4

On s'aperçoit que $\frac{\partial K_1}{\partial V_4} = -\frac{\partial K_1}{\partial V_2}$ et $\frac{\partial K_2}{\partial V_4} = -\frac{\partial K_2}{\partial V_2}$

On en déduit que $\frac{\partial W_i}{\partial V_4} = -\frac{\partial W_i}{\partial V_2}$

BU LILLE

d) Annulation des dérivées partielles

On montre que le minimum en fonction de V_1 est donné par

$K_1 = 0$ et $K_2 \neq 0$

La valeur de $\overset{\circ}{W}_i$ en $K_1 = 0$ a été calculé au paragraphe 2.1.3

$$m_1 = \overset{\circ}{W}_i \ (K_1=0) = \pi\sigma_o |V_2 - V_4| (r_e^2 - r_i^2) \qquad (2.1.17)$$

Pour le minimum de W_i en fonction de V_2 nous nous sommes aperçus que la résolution de cette équation ne donne pas une réponse linéaire en fonction de V_2. Nous avons préféré chercher une droite approximant au mieux le minimum

de V_2. Pour celà, nous remarquons que le minimum de la fonction possédait une abscisse voisine de celle obtenue en résolvant $y_2 = 0$ avec y_2 asymptote de la courbe en fonction de V_2.

$$y_2 = 0 \Rightarrow V_2' = V_4 + \frac{2aV_1}{r_i H} \operatorname{Log}\left(\frac{\sqrt{r_i^4 + 3r_e^4 - r_i^2}}{r_e^2}\right) \qquad (2.1.18)$$

Le minimum correspond donc à la valeur de W_i pour cette abscisse V_2'

$$m_2 = \overset{\circ}{W}_i(V_2') = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} a \sigma_o r_i |V_1| \left(1 - \frac{1}{H} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{r_i^4 + 3r_e^4 - r_i^2}}{r_e^2}\right) * \left(\sqrt{1+3r_e^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}} - \sqrt{1+3r_i^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}} + \operatorname{Log}\left(b^2 \frac{-1+\sqrt{1+3r_e^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}}}{-1+\sqrt{1+3r_i^4 \frac{K_2^2}{K_1^2}}}\right)\right) \qquad (2.1.19)$$

BU LILLE

2.1.4.3 Calcul des tangentes

Le tracé des asymptotes et des minima nous donne une approximation de W_i qui s'avère être bonne pour des valeurs de vitesse éloignée de l'intersection des deux asymptotes y_1 et y_2. Par conséquent, nous essayons d'introduire deux nouvelles droites qui permettront d'augmenter la précision au voisinage de ces intersections.

Dans une étude préalable, nous avons déterminé les équations de Y_1 et Y_2 (cf. (2.1.12), (2.1.14)). Pour trouver l'intersection de Y_1 et Y_2 deux études doivent être menées du fait des valeurs absolues.

1ère étude : $y_1 = y_2$

$$V_1' = \frac{(V_2-V_4)r_i \; H}{2a \; \mathrm{Log}\left(\sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_e^4}} - 1\right)} \qquad (2.1.20)$$

V_1' représente l'abscisse du point d'intersection

a) $V_2-V_4 > 0$ On a donc $|K_1| = K_1$

La tangente au point V_1' est une droite de pente égale à la dérivée de la courbe en ce point et d'ordonnée à l'origine égale à la valeur de $\overset{\circ}{W}_i$ au point V_1'. D'où l'équation de la tangente.

$$y=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} a\sigma_o r_i \mathrm{Log}\frac{r_i^2\left(-1+\sqrt{1+3r_e^4\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right)}{r_e^2\left(-1+\sqrt{1+3r_i^4\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right)} \; V_1 + \frac{\pi\sigma_o r_i^2(V_2-V_4)}{\sqrt{3}\,\mathrm{Log}\left(\sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 1\right)} * \left\{\left(\sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 2\right)\right.$$

$$\left.\left(\sqrt{1+3r_e^4\frac{K_2^2}{K_1^2}} - \sqrt{1+3r_i^4\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right) - \mathrm{Log}\left(\sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} -1\right) \mathrm{Log}\left(\frac{r_i^2\left(-1+\sqrt{1+3r_e^4\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right)}{r_e^2\left(-1+\sqrt{1+3r_i^4\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right)}\right)\right\}$$

(2.1.21)

b) $V_2-V_4 < 0$ On a $|K_1| = -K_1$

On montre que l'équation de cette tangente est l'opposée de celle calculée pour le cas $V_2-V_4 > 0$. Nous regrouperons les deux écritures en une seule en prenant la valeur absolue de l'équation (2.1.21)

$$T_1 = |y| \text{ avec } \frac{K_2^2}{K_1^2} = \left[\frac{\text{Log}\left(\sqrt{1+3\,\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 1\right)}{r_i^2\left(\sqrt{1+3\,\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 2\right)} \right]^2 \qquad (2.1.22)$$

2ème étude : $y_1 = -y_2$

Nous faisons la même démarche que pour la première étude

$$V_1'' = \frac{r_i(V_2-V_4)\left(2\,\text{Log}\,\frac{r_e}{r_i} - H\right)}{2a\,\text{Log}\,\frac{r_e^4}{r_i^4\left(\sqrt{1+3\,\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 1\right)}}$$

BU LILLE

d'où l'équation de la tangente T_2

$$T_2 = \left| \frac{2\pi a}{3}\,\sigma_o r_i\,\text{Log}\left(\frac{r_i^2\left(-1+\sqrt{1+3r_e^4\,K_2^2/K_1^2}\right)}{r_e^2\left(-1+\sqrt{1+3r_i^4 K_2^2/K_1^2}\right)}\right) V_1 - \frac{\pi\sigma_o\, r_i^2\,(V_2-V_4)}{\sqrt{3}\left(\text{Log}\,\frac{1+\sqrt{1+3\,\frac{r_e^4}{r_i^4}}}{3}\right)} \right.$$

$$* \left\{ \left(\sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} - 2\right)\left(\sqrt{1+3r_e^4\,\frac{K_2^2}{K_1^2}} - \sqrt{1+3r_i^4\,\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right) + \text{Log}\left(\frac{\sqrt{1+3\,\frac{r_e^4}{r_i^4}}+1}{3}\right) \right.$$

$$\left. \left. \cdot\,\text{Log}\left(\frac{r_i^2\left(-1+\sqrt{1+3r_e^4\,\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right)}{r_e^2\left(-1+\sqrt{1+3r_i^4\,\frac{K_2^2}{K_1^2}}\right)}\right) \right\} \right| \qquad (2.1.23)$$

$$\text{avec } \frac{K_2^2}{K_1^2} = \left[\frac{\text{Log}\left(\frac{\sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} + 1}{3} \right)}{r_i^2 \left(2 - \sqrt{1+3\frac{r_e^4}{r_i^4}} \right)} \right]^2$$

Pour illustrer la linéarisation de la puissance dissipée interne par des droites d'approximation nous avons construit la figure suivante :

COMPARAISON DE LA PUISSANCE DISSIPEE INTERNE ET DE SES DROITES D'APPROXIMATION (ASYMPTOTES, MINIMUMS, TANGENTES)

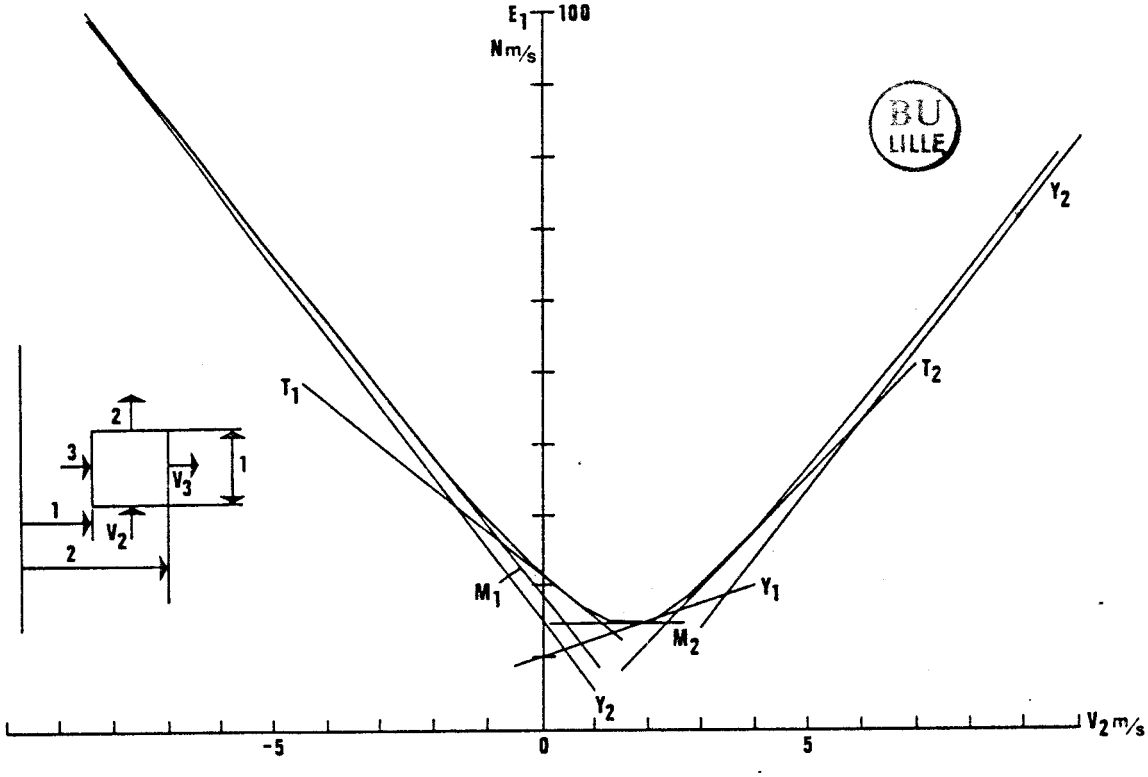
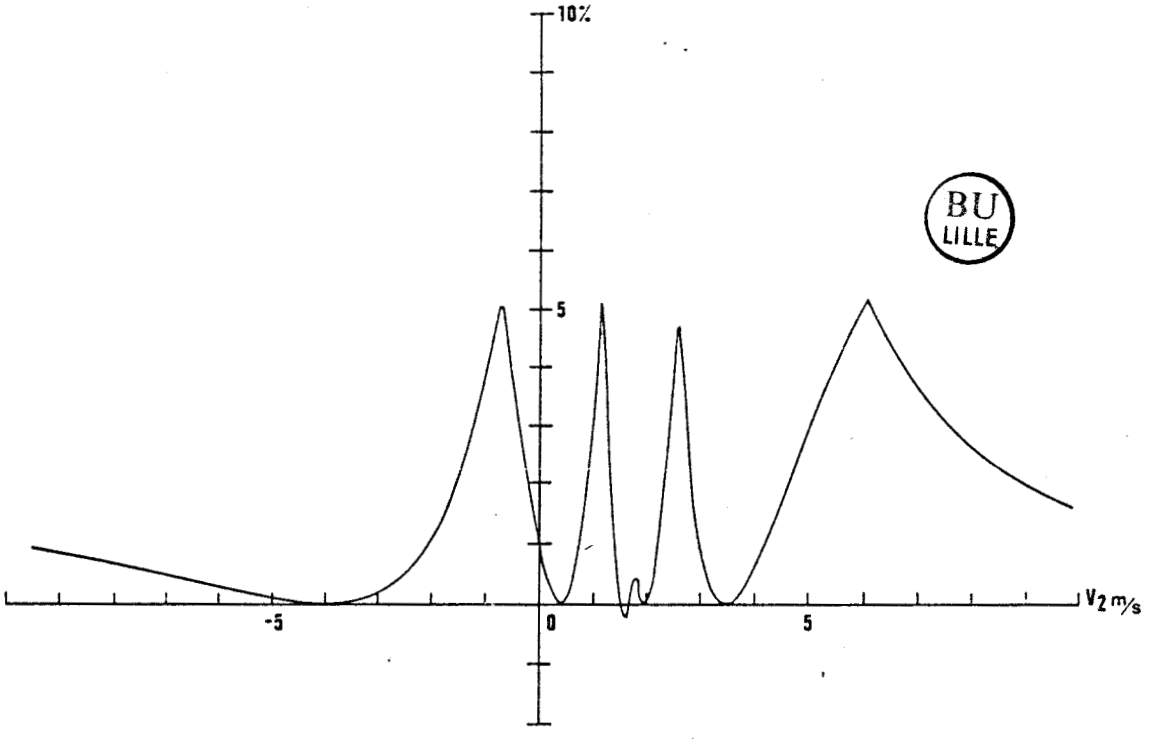


Fig. III.8

D'autre part il est intéressant de vérifier la validité de l'approximation de la puissance dissipée interne. C'est pourquoi nous avons établi la courbe d'erreur.

ECART RELATIF EN % ENTRE LA PUISSANCE DISSIPEE INTERNE ET LES DROITES D'APPROXIMATION



BU LILLE

Fig. III.8.1

Quelle que soit la géométrie de l'élément, l'erreur commise par approximation est largement inférieure à 10 %. La linéarisation de la puissance dissipée interne est de ce fait acceptable.

2.2 Eléments cinématiques triangulaires axisymétriques

2.2.1 Paramétrage

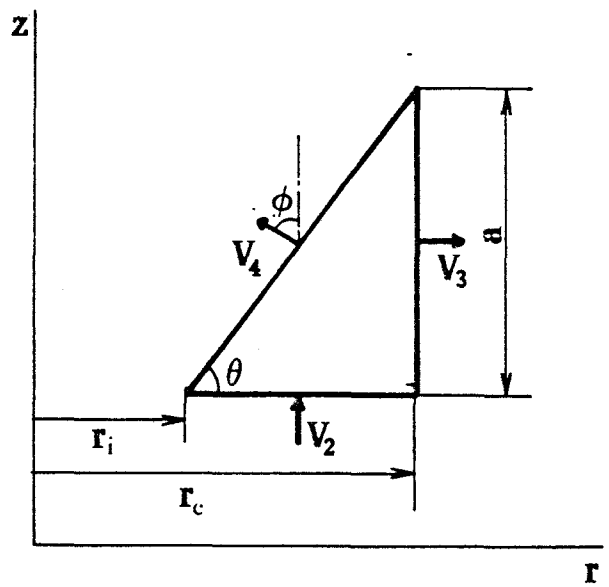


Fig. III.9 - Elément de référence pour les éléments triangulaires axisymétriques

2.2.2 Détermination d'un champ de vitesses admissible

La méthodologie employée est identique à l'étude des éléments cinématiques triangulaires plans. Nous nous bornerons à donner le résultat.

. Condition de continuité sur la face inclinée

$$v \cos\theta - u \sin\theta = V_4 \cos(\theta - \phi) \qquad (2.2.1)$$

. Condition d'incompressibilité locale

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Posons $v = zf(r) + g(r)$. Nous en déduisons un champ de vitesses suivant :

$$\begin{cases} u = \dfrac{V_3 r_e}{r_e+r_i} \cdot \dfrac{r+r_i}{r} \\ \\ v = -zV_3 \dfrac{r_e}{(r_e+r_i)r} + V_2 \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

avec comme condition d'incompressibilité globale

$$V_3 = \frac{(r_e+r_i)}{2r_e}\left[V_2 - V_4 \frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\theta}\right]\frac{b}{a} \qquad (2.2.3)$$

2.2.3 Puissance dissipée dans l'élément cinématique triangulaire axisymétrique de référence

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-V_3\, r_e r_i}{(r_e+r_i)r^2}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = V_3 \frac{r_e}{r_e+r_i}\left(\frac{r+r_i}{r^2}\right)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} = -V_3 \frac{r_e}{(r_e+r_i)r}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{2} r_e \frac{V_3}{r_e+r_i} \cdot \frac{z}{r^2}$$

La vitesse de déformation généralisée est égale à

$$\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}} = \left(\frac{2}{3}\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r_e}{r_e+r_i} V_3 (r_i^2+r^2+r_i r)^{1/2} \left(1 + \frac{z}{2\sqrt{r_i^2+r^2+r_i r}}\right)^{1/2}$$

BU LILLE

La puissance dissipée interne vaut donc

$$\mathring{W}_i = \int_V \sigma_o dV \qquad \text{avec} \qquad dV = r dr d\theta dz$$

$$\mathring{W}_i = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} \pi \frac{b}{a} \left[V_2 - V_4 \frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\theta} \right] \int_{r_i}^{r_e} \frac{r_i^2 + r_i r + r^2}{r} \left[M\sqrt{1+M^2} + \text{Log}(M + \sqrt{1+M^2}) \right] dr \tag{2.2.4}$$

avec $$M = \frac{a(r-r_i)}{2b\sqrt{r_i^2 + r r_i + r^2}}$$

L'expression de la puissance dissipée interne est linéaire par rapport aux vitesses aux frontières. De ce fait elle n'a pas besoin d'être approximée. Elle comporte une intégrale géométrique qui est évaluée par une technique d'intégration numérique.

Les fonctions puissances dissipées aux interfaces valent :

$$E_2 = \bar{m}_2 k \frac{r_e}{r_e + r_i} V_3 \pi (r_e - r_i)(r_e - 3r_i)$$

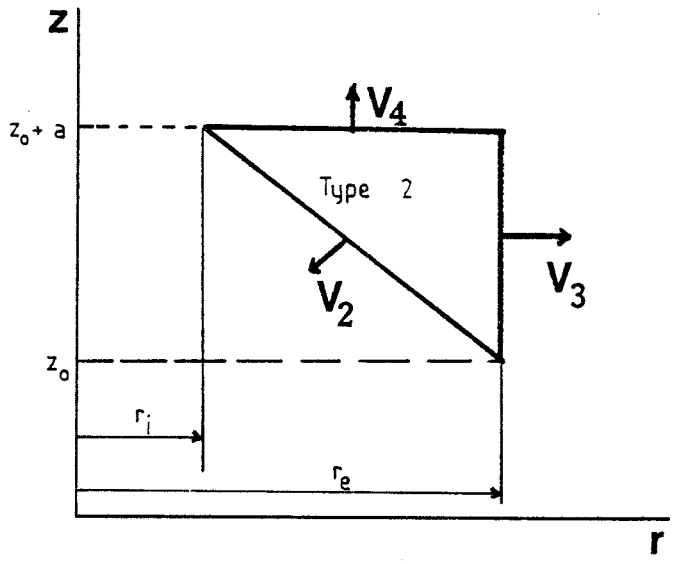
$$E_3 = \bar{m}_3 k \frac{\pi a}{2} \left[(r_i + 3r_e) V_2 + b V_4 \frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\theta} \right]$$

$$E_4 = \bar{m}_4 k \pi \left[V_2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{b^3}{a} - ab + \frac{4b^2}{a} r_i \right) + a(r_i + r_e) - \right. \right.$$

$$\left. \left. V_4 \frac{1}{\cos\theta} \left(\frac{1}{2} \cos(\theta-\phi) \left(\frac{b^3}{a} - ab + \frac{4b^2}{a} r_i \right) + b(r_i + r_e) \sin(\theta-\phi) \right) \right] \right]$$

avec $$k = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}$$

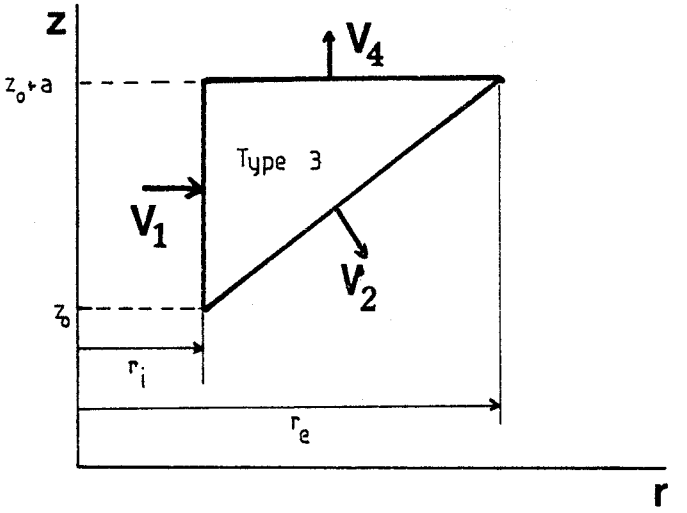
2.2.4 Autres éléments cinématiques traingulaires axisymétriques



le champ de vitesse associé à cet élément (type 2) est :

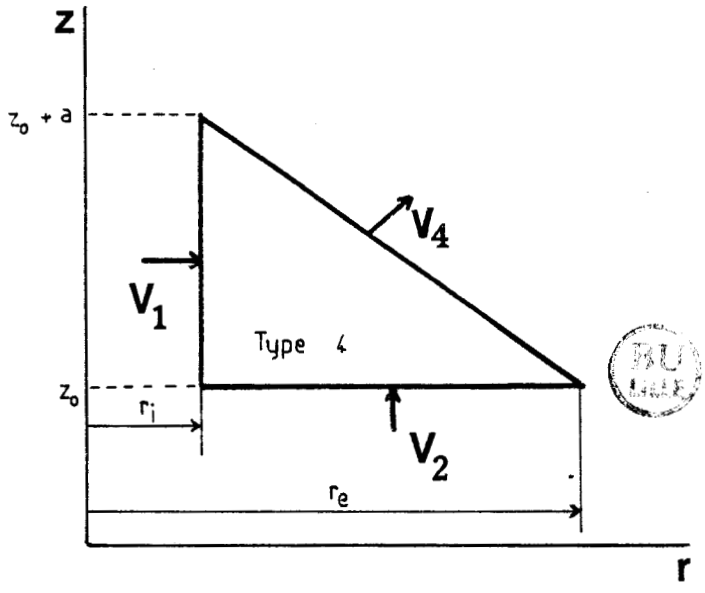
$$\begin{cases} u = V_3 \dfrac{r_e}{r_e + r_i}\left(1 + \dfrac{r_i}{r}\right) \\ v = -(z - z_o - a)\dfrac{r_e V_3}{(r_e + r_i)r} + V_4 \end{cases}$$

BU LILLE



le champ de vitesses associé à l'élément de type 3 est

$$\begin{cases} u = V_1 \dfrac{r_i}{r_i+r_e}\left(1 + \dfrac{r_e}{r}\right) \\ \\ v = -(z-z_o-a)V_3 \dfrac{r_i}{(r_i+r_e)r} + V_4 \end{cases}$$



le champ de vitesses associé à l'élément de type 4 est :

$$\begin{cases} u = V_1 \dfrac{r_i}{r_e+r_i}\left(1+ \dfrac{r_e}{r}\right) \\ \\ v = -(z-z_o)\ V_1 \dfrac{r_i}{r(r_i+r_e)} + V_2 \end{cases}$$

III.3 FORMULATION SPECIFIQUE POUR LE BARRELING*

Pour prendre en compte le phénomène de barreling intervenant lors de la compression d'éprouvette cylindrique [25], il nous est apparu qu'une amélioration du champ de vitesses était nécessaire. En effet la compression de cylindre est un cas typique de forgeage où la forme extérieure du lopin n'est pas imposée par les outillages ; il s'agit en fait d'un écoulement instationnaire. On peut imaginer un écoulement homogène sur la hauteur du lopin avec glissement important sur les tas de la presse (figure III.10.1) ou bien un écoulement hétérogène avec apparition d'un bombé (barreling) et un faible glissement (figure III.10.2)

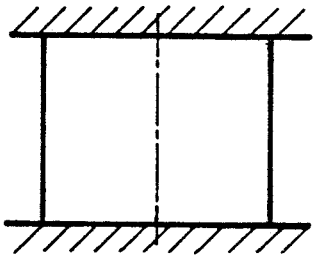


Fig. III.10.1

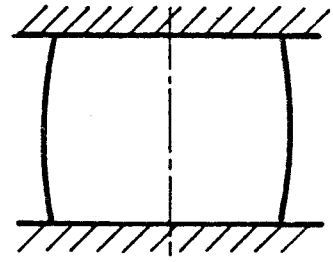


Fig.III.10.2

Pour faire apparaître numériquement ce bombé, nous avons introduit dans le champ de vitesses d'un élément cinématique rectangulaire plan une vitesse de déformation angulaire $\dot{\varepsilon}^{\circ}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$. D'où l'étude d'un élément cinématique rectangulaire plan amélioré.

* Barreling: forme de tonneau.

$$\text{Soit } u = \frac{V_3-V_1}{b}\, x + V_1 + x(x-b)f(y) \tag{3.1}$$

La condition d'incompressibilité locale nous impose

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{V_3-V_1}{b} + (2x-b)f(y) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.2}$$

$$\text{La vitesse } v = \frac{V_4-V_2}{a}\, y + V_2 + y(y-a)g(x) \tag{3.3}$$

satisfait aux conditions aux limites sur les faces 2 et 4.

Afin que u et v satisfassent au conditions d'incompressibilité locale et globale il faut que :

$$\begin{aligned} f(y) &= K(2y-a) \\ g(x) &= -K(2x-b) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous obtenons un champ de vitesses suivant :

$$\begin{aligned} u &= \frac{V_2-V_4}{a}\, x + V_1 + Kx(x-b)(2y-a) \\ v &= \frac{V_4-V_2}{a} y + V_2 - Ky(y-a)(2x-b) \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} &= K\,[x(x-b)-y(y-a)] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si $V_3 = V_1$ ou $V_4 = V_2$ la région ne subit pas de distorsions. La constante K est donc facteur de (V_2-V_4).

Posons $K = \bar{k}\ (\frac{V_2-V_4}{a})$

$$u = V_1 + \frac{V_2-V_4}{a} x\ (1 + \bar{k}(x-b)(2y-a))$$

$$v = V_2 + \frac{V_4-V_2}{a} y\ (1 + \bar{k}(y-a)(2x-b)) \qquad (3.6)$$

Calcul de la puissance dissipée interne

$$\overset{\circ}{W}_i = \int_V \sigma_o \overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}\, dV$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_2-V_4}{a}\ (1 + \bar{k}(2y-a)(2x-b))$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V_4-V_2}{a}\ (1 + \bar{k}(2y-a)(2x-b))$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} = \frac{V_2-V_4}{a}\ \bar{k}(x(x-b)-y(y-a))$$

$$\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{V_2-V_4}{a}\right)^2 [1+2k(2y-a)(2x-b)+\bar{k}^2((2y-a)^2(2x-b)^2+x^2(x-b)^2ry^2(y-a)^2 -2xy(x-b)(y-a))]$$

L'inégalité de Schwarz nous permet d'avoir une borne supérieure de la puissance interne.

$$\overset{\circ}{W}_i \leq \left(\int_V \overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}^2 dV\right)^{1/2} \cdot \left(\int_V \sigma_o^2\, dV\right)^{1/2}$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\overset{\circ}{W}_i \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\ \sigma_o\ |V_2-V_4|\ b \sqrt{1+\bar{k}^2\ \left(\frac{a^4+b^4}{30} + \frac{a^2b^2}{9}\right)} \qquad (3.7)$$

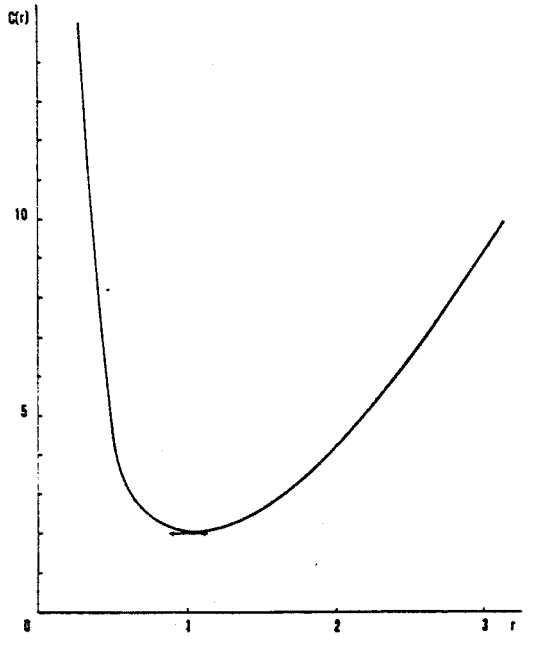
Lorsque $\bar{k} = 0$, c'est-à-dire que l'on suppose pas de $\overset{\circ}{\varepsilon}_{xy}$ on retrouve la valeur de la puissance dissipée interne trouvée au paragraphe II.1.1. Afin d'être homogène avec la puissance $\bar{k}$ doit être de dimension $[L]^{-2}$

Posons $\bar{k} = \frac{\alpha}{ab}$ avec a et b dimensions du rectangle (3.8)

$$\overset{\circ}{W}_i \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_o \, |V_2 - V_4| \, b \sqrt{1+\alpha^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{30}\left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\right)} \qquad (3.9)$$

avec $r = \frac{b}{a}$

Nous constatons que la puissance dissipée interne dépend fortement de la fonction $C(r) = \frac{1}{r^2} + r^2$ (figure III.11)



BU LILLE

Fig. III.11 - Evolution de la fonction C(r)

Fonctions puissances dissipées aux interfaces

$$E_1 = \bar{m}_1 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[V_2 \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) + V_4 \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \right]$$

$$E_2 = \bar{m}_2 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[V_1 b + V_2 \frac{b^2}{2a}\left(1 + \frac{1}{3}\alpha\right) - V_4 \frac{b^2}{2a}\left(1 + \frac{1}{3}\alpha\right) \right]$$

$$E_3 = \bar{m}_3 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[V_2 \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) + V_4 \frac{a}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \right]$$

$$E_4 = \bar{m}_4 \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left[V_1 b + V_2 \frac{b^2}{2a}\left(1 - \frac{1}{b}\alpha\right) - V_4 \frac{b^2}{2a}\left(1 - \frac{1}{3}\alpha\right) \right]$$

α a été choisi de façon à obtenir un champ de vitesses en concordance avec l'expérimentation sans pour autant être pénalisé par la puissance dissipée interne.

$$\alpha^2 = 10^{-4}/(\frac{1}{9} + \frac{1}{30}\ (\frac{1}{r^2} + r^2))$$

Nous avons remarqué que l'augmentation de α^2 entraînait, en plus de l'accroissement de l'énergie dissipée, une instabilité du champ de vitesses sur la face libre.

Test de compression

Un tel champ de vitesses fait apparaître un très faible barreling au détriment de la puissance dissipée. Cette dualité augmente lorsqu'on s'écarte du minimum de la fonction C(r). Les éléments cinématiques rectangulaires, prenant en compte $\overset{\circ}{\varepsilon}_{xy}$, sont donc d'une utilisation limitée.

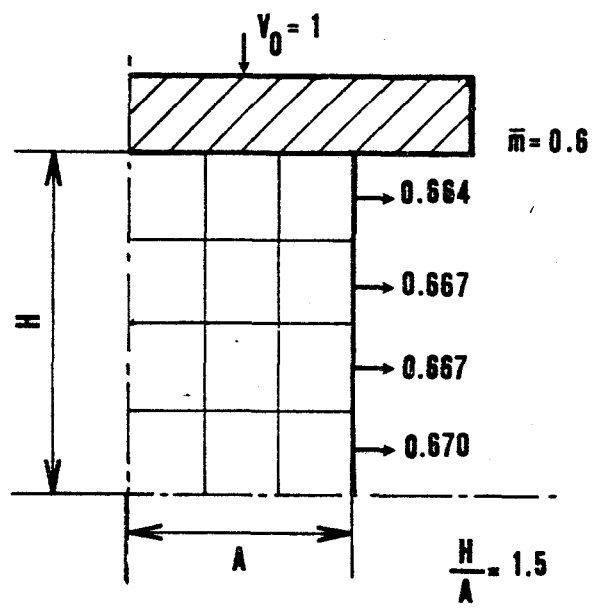


Fig. III.12 - Compression en déformations planes avec barreling

CHAPITRE IV
METHODE DU CALCUL SIMPLICIAL

IV.1 INTRODUCTION

La programmation linéaire s'intégre dans la dynamique de la Recherche Opérationnelle puisqu'il s'agit d'optimiser sous contrainte. La constitution du programme linéaire reposera, avant sa résolution technique :

- sur la formalisation des contraintes au moyen d'inégalités
- sur la formalisation de la formation économique.

La programmation linéaire constitue un cas particulier de la programmation mathématique, domaine d'étude plus général aux origines plus anciennes. L'apport majeur fut constitué par la formulation de l'algorithme du simplexe en 1948.

L'attribution, en 1975, du prix Nobel d'économie à Hoopmans et Kantorovith prouve l'importance du phénomène.

Depuis, l'intérêt des chercheurs s'est poursuivi dans différents pays. Electricité de France a joué en FRANCE le rôle de pionnier avec Massé, Gibrat, Boiteux et Abadie.

Les instruments de la programmation linéaire :

1) les variables :

- réelles
- non négatives.

2) les relations :

- linéaires : un lien de proportionnalité simple existe entre les effets et les causes ; de même, les variables sont homogénes, c'est à dire additives ;

- formalisées par des équations ou des inéquations appelées contraintes

3) une fonction économique :

- Il s'agit de maximiser ou de minimiser l'ensemble des variables selon un critère.

Les hypothèses de la programmation linéaire :

1) convexité du domaine délimité par les contraintes,

2) continuité des variables,

3) aspect synchronique de l'optimisation : les conditions sont celles qui sont exprimées par les contraintes et celles-la seulement.

IV.2 GENERALITES

Un modéle linéaire est décrit par un vecteur $x = (x_1, x_2, .., x_p)$ de variables dites "principales". Ces variables sont soumises à un nombre fini de contraintes du type

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \quad \lesseqgtr \quad b_i \qquad i = 1,2,..,m \qquad (2.1)$$

Un vecteur x° satisfaisant (2.1) est appelé solution réalisable . Nous noterons E l'ensemble des solutions de (2.1). Pour comparer les éléments de E, le modéle linéaire propose d'évaluer x par une forme linéaire du type

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \qquad (2.2)$$

Selon les cas, il conviendra de maximiser ou de minimiser Z(x)

Pour pouvoir appliquer les résultats de l'algébre linéaire au programme linéaire définie par (2.1) nous transformerons (2.1) en un systéme d'équations linéaires. On montre que l'on peut associer à

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

avec $s_i \geq 0$

Les variables s_i ainsi formulées sont appellées "Variable d'écart". Il est souhaitable que toute variable soit soumise à une contrainte de positivité. Pour cela nous utiliserons l'artifice suivant. Soit x_j une variable de signe quelconque, nous opérons le changement de variable

$$x_j = x'_j - x''_j \quad \text{avec} \quad x'_j \geq 0 \quad \text{et} \quad x''_j \geq 0$$

Grace à cet artifice tout programme linéaire peut-être formulé de la manière suivante

$$PL^\circ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ OPT\ Z(x) = cx \end{cases} \qquad (2.3)$$

avec

$$c = (c_1,\ldots,c_p, \vdots\ 0,\ldots\ldots,0) \qquad (2.4)$$

$$x = (\underbrace{x_1,\ldots,x_p}_{\text{var.principales}}, \vdots\ \underbrace{s_i,\ldots\ldots,s_k}_{\text{var.d'écart}}) \qquad (2.5)$$

Nous supposerons que le rang de la matrice A est égal au nombre de lignes de A. S'il n'en n'était pas ainsi, certaines contraintes seraient redondantes et donc inutiles.

IV.3 APPLICATION DE LA METHODE SIMPLICIALE

Dans ce paragraphe nous montrons comment nous pouvons passer à une formulation simpliciale à partir du concept de puissance dissipée fonction linéaire des vitesses aux frontières des éléments constitutifs. Nous ferons notre application avec des éléments cinématiques rectangulaires en déformations planes.

Soit un élément cinématique rectangulaire la puissance dissipée totale est :

$$\dot{W}_T = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left(2b|V_2-V_4| + (\bar{m}_4+\bar{m}_2)\left|V_1 b + \frac{V_2-V_4}{2a}b^2\right| + (\bar{m}_1+\bar{m}_3)\frac{a}{2}|V_2+V_4| \right) \tag{3.1}$$

Pour obtenir une forme simpliciale à partir de (3.1) il faut procéder à l'élimination des valeurs absolues. Considérons la première partie de l'équation (3.1) qui correspond à la puissance dissipée interne dans l'élément

$$\dot{W}_i = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} 2b \ |V_2-V_4| \tag{3.2}$$

Nous définissons une variable auxiliaire α telle que :

$$W_i = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} 2b \ (V_2-V_4) + \alpha \tag{3.3}$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned} &\alpha \geq 0 \quad \text{si} \quad V_2-V_4 \geq 0 \\ &\alpha + 4b \ \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} (V_2-V_4) \geq 0 \quad \text{si} \quad V_2-V_4 \leq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

La première condition ($\alpha \geq 0$) est implicitement contenue dans la formulation simpliciale. D'autre part nous procédons de la même façon pour les puissances dissipées aux interfaces.

3.1 Généralisation

Pour une pièce découpée en N éléments rectangulaires, la puissance dissipée totale est de la forme :

$$\overset{\circ}{W} = \sum_{k=1}^{N} G_k \sum_{\ell=1}^{5} \sum_{j=1,2,4} x_{j\ell} V_{jk} + \alpha_{\ell k} \qquad (3.1.1)$$

avec k : indice d'une région

ℓ : indice de décomposition de la formule (3.1) en puissance dissipée interne et par frottement sur chaque face

j : indice de vitesse

G_k : coefficient constant pour chaque région

$x_{j\ell}$: coefficient des vitesses V_{jk}

$\alpha_{\ell k}$: variable auxiliaire

et $\overset{\circ}{W}$ doit être minimisée avec 5 contraintes par élément de la forme générale

$$\alpha_{\ell k} + \sum_{j=1,2,4} 2x_{j\ell} V_{jk} \geq 0 \qquad (3.1.2)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions de vitesses imposées par la géométrie de l'outillage, la continuité de l'écoulement entre éléments adjacents et la prise en compte de l'incompressibilité du matériau.

Les conditions de vitesses peuvent se formuler sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{j\ell} V_j = b_\ell \qquad (3.1.3)$$

En introduisant ces dernières dans les contraintes (3.1.2) nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{8N} c_{sr} V_s \geq d_r \qquad (3.1.4)$$

avec $V_s = V_{jk}$ pour $s = 8(k-1) + j$, $j = 1, 2, 4$

ou $V_s = \alpha_{\ell k}$ pour $s = 8(k-1) + p + 3$, $\ell \in [1,5]$

Les coefficients c_{sr} définissant une matrice C de coefficient de contraintes et d_r une matrice D des seconds membres.

De la même manière la puissance dissipée totale peut s'écrire sous la forme :

$$\overset{\circ}{W} = \sum_{s=1}^{8N} e_s V_s \qquad (3.1.5)$$

où e_s sont les coefficients de puissance dissipée définissant la fonction à minimiser.

Nous avons à cet instant tous les instruments nécessaires à la programmation linéaire.

C H A P I T R E V

DETERMINATION DES CONTRAINTES A L'INTERFACE PIECE-OUTIL

V.1 METHODES DE PREVISION

Différents travaux menés par KIUCHI [26] et CHRISTENSEN [35] sur la détermination de la pression de contact reposent sur une extension de la méthode de UBET et de la méthode des tranches.

Comme pour la méthode des tranches l'objectif est de calculer, en tenant compte des frottements, une valeur approchée de la distribution de pression au contact des outils. On découpe par la pensée le matériau en tranche respectant la symétrie du problème. Ces tranches peuvent être des parallélépipèdes, des disques, des anneaux, etc..., elles sont infiniment minces selon une direction. A la différence de la méthode des tranches où l'on fait un bilan de l'ensemble des forces appliquées à une tranche afin d'en déduire l'équation d'équilibre, KIUCHI et CHRISTENSEN font un bilan énergétique pour garder le critère de champ de vitesses licite. La raison de ce choix s'explique par le fait que l'on considère presque impossible d'analyser les contraintes et/ou les pressions dans un processus de formage par une méthode de borne supérieure car la solution découlant de cette dernière est obtenue grâce à un champ de vitesses cinématiquement admissible et qui n'est pas compatible avec des conditions limites de forces ou d'équilibre de contraintes.

Dans un premier temps nous exposerons le principe des méthodes utilisées par Kiuchi et Christensen puis nous exposerons notre méthode.

1.1 Principe de la méthode de KIUCHI-CHRISTENSEN

Dans un premier temps la déformation subie par une tranche imaginaire est analysée par une méthode de champ de vitesses licite pour en déduire la puissance dissipée totale. Dans cette phase la surface de l'outillage en contact avec la pièce à une vitesse uniforme $\mathring{U}$. Dans un second temps la vitesse sur l'interface outil-tranche imaginaire subit un incrément fini $\Delta\mathring{U}^*$, la vitesse partout ailleurs sur la surface de contact reste égale à $\mathring{U}$. Après optimisation, la puissance dissipée totale est $\mathring{W}$.

Toute l'analyse qui suit repose sur l'interprétation de la différence des puissances trouvées dans les deux cas.

1.2. Détermination de la pression de contact.

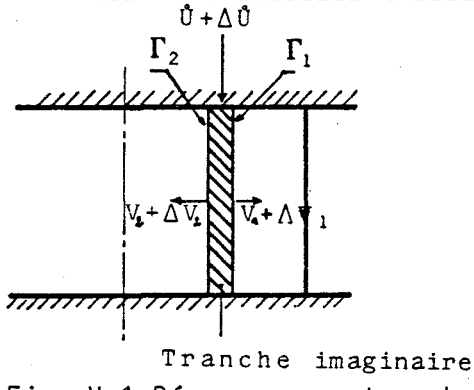


Fig. V.1 Découpage en tranche imaginaire.

Sur l'interface entre outil et tranche imaginaire on suppose qu'il y ait un incrément de vitesse $\Delta\mathring{U}$. Ailleurs la surface en contact à une vitesse $\mathring{U}$.

Comme pour la métode des tranches ; Kiuchi suppose que le frottement de l'outil se traduit par une cission τ et que cette cission ne perturbe pas les contraintes dans la tranche imaginaire. De ce fait les pertes par cission sur les surfaces Γ_1 et Γ_2 sont négligées.

La puissance totale $\tilde{\dot{W}}$ peut être exprimée comme la somme de la puissance dissipée totale sur la tranche imaginaire ($\dot{W}^*_E$) laquelle inclut l'énergie interne et la puissance dissipée par frottement sur l'interfacxe outil, la puissance totale sur la zone 1 ($\dot{W}_1$) et la puissance totale sur la zone 2 ($\dot{W}_2$).

$$\tilde{\dot{W}} = \dot{W}_E + \dot{W}_1 + \dot{W}_2 \qquad (1.2.1)$$

Quand les vitesses à travers les surfaces Γ_1 et Γ_2 sont respectivement V_1 et V_2 dans le cas d'un processus régulier et $V_1 + \Delta V_1$, $V_2 + \Delta V_2$ autrement la différence de la puissance dissipée totale $\Delta \dot{W}$ s'exprime en fonction de $\Delta \dot{W}_E$ donné par l'incrément de vitesse $\Delta \dot{U}^*$, de $\Delta \dot{W}_1$ et de $\Delta \dot{W}_2$ donné respectivement par les incréments de vitesse ΔV_1 et ΔV_2.

$$\Delta \dot{W} = \tilde{\dot{W}} - \dot{W} = \Delta \dot{W}_E + \Delta \dot{W}_1 + \Delta \dot{W}_2 \qquad (1.2.2)$$

La condition d'incompressibilité fournit l'équation suivante :

$$\Delta \dot{U}^* S^* = \Delta V_1 \cdot \Gamma_1 + \Delta V_2 \cdot \Gamma_2 \qquad (1.2.3)$$

où S* est la surface de contact entre l'outil et la tranche imaginaire. La différence de la puissance totale $\dot{W}$ peut s'exprimer comme étant la pression p* travaillant sur l'interface outil-tranche imaginaire.

$$p^* S^* \Delta \dot{U}^* = \Delta \dot{W}^*_E + \Delta \dot{W}_1 + \Delta \dot{W}_2 \qquad (1.2.4)$$

En général les vitesses V_1 et V_2 ont la même direction sauf lorsque la tranche imaginaire est définie dans un plan neutre du champ de vitesses. Pour KIUCHI cependant les incréments de vitesses ΔV_1 et ΔV_2 peuvent usuellement satisfaire les conditions suivantes :

$$\Delta V_1 = 0, \Delta V_2 \neq 0 \qquad (1.2.5)$$
$$\Delta V_1 \neq 0, \Delta V_2 = 0$$

$$p^* = \frac{\Delta \overset{\circ}{W}^*_E}{\Delta \overset{\circ}{U}^* S^*} + \frac{\Delta \overset{\circ}{W}_1 + \Delta \overset{\circ}{W}_2}{\Delta V_1 \Gamma_1 + \Delta V_2 \Gamma_2} \qquad (1.2.6)$$

A partir des conditions exprimées en (1.2.5) nous obtenons :

$$\frac{\Delta \overset{\circ}{W}_1 + \Delta \overset{\circ}{W}_2}{\Delta V_1 \Gamma_1 + \Delta V_2 \Gamma_2} = \frac{\Delta \overset{\circ}{W}_1}{\Gamma_1 \Delta V_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \overset{\circ}{W}_2}{\Gamma_2 \Delta V_2} \qquad (1.2.7)$$

$\frac{\Delta \overset{\circ}{W}_1}{\Gamma_1 \Delta V_1}$ représente la pression p_1^* travaillant sur la surface Γ_1

l'équation (1.2.6) devient $p^* = \frac{\Delta \overset{\circ}{W}_E}{\Delta \overset{\circ}{U}^* S^*} + (p_1^* \text{ ou } p_2^*)$ (1.2.8)

$\frac{\Delta \overset{\circ}{W}_E}{S^* . \Delta U^*}$ est équivalent à la contrainte d'écoulement de la tranche imaginaire σ_o d'où $p^* - (p_1^* \text{ ou } p_2^*) = \sigma_o$ (1.2.9)

Cette équation coïncide avec le critère de TRESCA.

En déplaçant cette tranche imaginaire et en répétant la procédure décrite ci-dessus la distribution de pression entre la pièce et l'outillage est obtenue.

La méthode qu'utilise CHRISTENSEN diffère, sur le calcul de $\Delta \overset{\circ}{W}_E$. En effet la différence $+\Delta \overset{\circ}{U}^*$ introduite sur une tranche imaginaire perturbe le champ de vitesse et de par là même les pertes par cission sur les surfaces Γ_1 et Γ_2 ne sont pas négligeables. Pour remédier à cet inconvénient, CHRISTENSEN applique la méthode de KIUCHI avec un incrément $+\Delta \overset{\circ}{U}^*$, puis une seconde fois avec $-\Delta \overset{\circ}{U}^*$. Le $\overset{\circ}{W}$ pris en compte est la moyenne obtenue avec $\pm \Delta \overset{\circ}{U}^*$. CHRISTENSEN observe que les pertes par cission sur les surfaces Γ_1 et Γ_2 sont alors négligeables.

La limitation de ces méthodes est d'avoir à recalculer, pour chaque tranche imaginaire, une optimisation de la puissance dissipée. Nous arrivons vite à un accroissement du temps de calcul. D'où notre méthode.

V.2 METHODE L.G.M.

2.1 Principe de la méthode

Notre objectif est de calculer de façon directe, la distribution de pression de contact en utilisant les résultats obtenus par notre méthode de champ de vitesses licite. De ce fait nous avons couplé la méthode de borne supérieure avec un concept étendu de la méthode des tranches.

Nous utilisons le maillage de la pièce pour définir des colonnes dans lesquelles nous calculons une vitesse moyenne sur chaque face. Connaissant les vitesses à l'intérieur de la matière, il nous est facile de déterminer la puissance dissipée dans une colonne. Cette puissance fait intervenir la puissance dissipée interne, ainsi que les puissances dissipées par frottement sur l'interface outil-matière et les puissances dûes aux discontinuités de vitesses (cission entre éléments cinématiques). L'analyse que nous faisons, consiste à déterminer un champ de contraintes à partir de ces données.

2.2 Détermination de la pression sur les interfaces mobiles.

Soit un champ de vitesses $\vec{u}$ à l'instant t, nous savons qu'il n'est pas possible à priori d'associer un champ de contraintes unique. D'où l'inégalité suivante liée au théorème du travail maximal où théorème de la borne inférieure.

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \geq \sum_{i,j} \sigma^*_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \qquad (2.2.1)$$

Au cours d'une déformation le travail des contraintes admissibles $[\sigma^*]$ est maximal pour l'état des contraintes $[\sigma]$ associé au champ de vitesses $\vec{u}$.

Notre méthode de détermination peut être expliquée comme suit, en se référant à un processus plan de déformations (cf. Figure V.2).

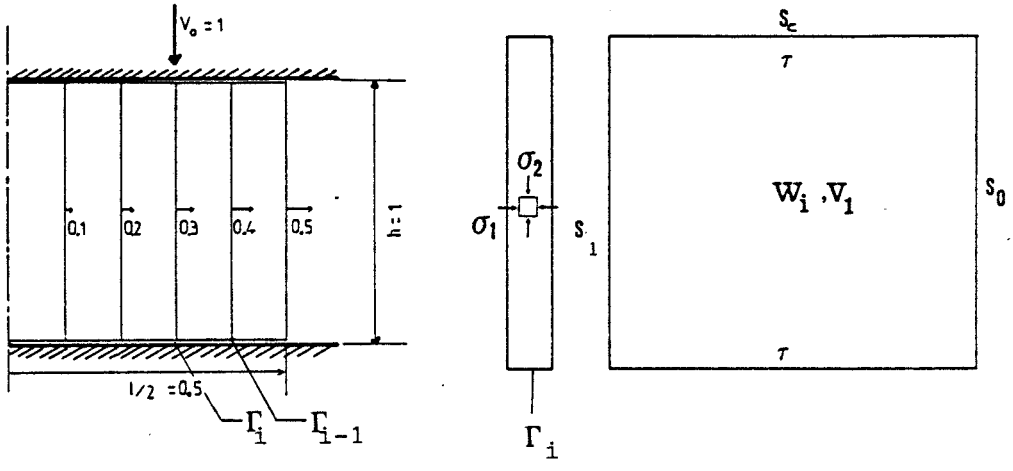


Fig. 2 - Calcul "L.G.M." de la pression.

Pour un souci de clarté nous avons choisi un maillage tel que nous avons les colonnes déjà définies. Les valeurs des vitesses ont été obtenues par notre méthode de champ de vitesse licite.

V_1 représente le volume plastique séparant la colonne traitée de la surface S_0 de référence (par exemple surface libre). S_c est la surface de contact d'une colonne avec l'outil rigide ($\tau = \bar{m}k$).

Le bilan énergétique sur une colonne est le suivant :

$$\mathring{W}_T = \mathring{W}_i + \int_{S_o} \vec{T}.\vec{u} + \int_{S_c} \bar{m}k\vec{t}\vec{u}dS = \int_{S_1} \vec{T}.\vec{u} + \int_{S_2} \vec{T}.\vec{u}dS \qquad (2.2.2)$$

D'après l'équation (2.2.1) nous obtenons l'inégalité :

$$\mathring{W}_T \geq \int_{S_1} \vec{T}^* \vec{u}dS + \int_{S_2} \vec{T}^* \vec{u}dS \qquad (2.2.3)$$

avec $\vec{u}$: champ de vitesses
$\vec{T}$: vecteur contrainte associé à $\vec{u}$
$\vec{T}^*$: vecteur contrainte admissible

Nous faisons comme hypothèse que $\vec{T}^*$ est constant sur la frontière Γ_i. Nous avons une condition statique aux limites avec la colonne voisine.

Dans notre cas nous obtenons une formule récurrente de la contrainte σ_1

$$\sigma_1^{*(i)} u^{(i)}.S_i + V_o \int_{S_c} \sigma_2^{*(i)} dS = \mathring{W}+2\bar{m}k \int_{S_c} udS + \sigma_1^{*(i-1)} u^{(i-1)} S_{i-1} \qquad (2.2.3)$$

$u^{(i)}$: vitesse moyenne sur la frontière Γ_i
$u^{(i-1)}$: vitesse moyenne sur la frontière Γ_{i-1}
S_c : surface de contact d'une colonne avec l'outil rigide
$\sigma_2^* = \sigma_o + \sigma_1^*$ (critère de TRESCA).
S_i : surface de la frontière Γ_i

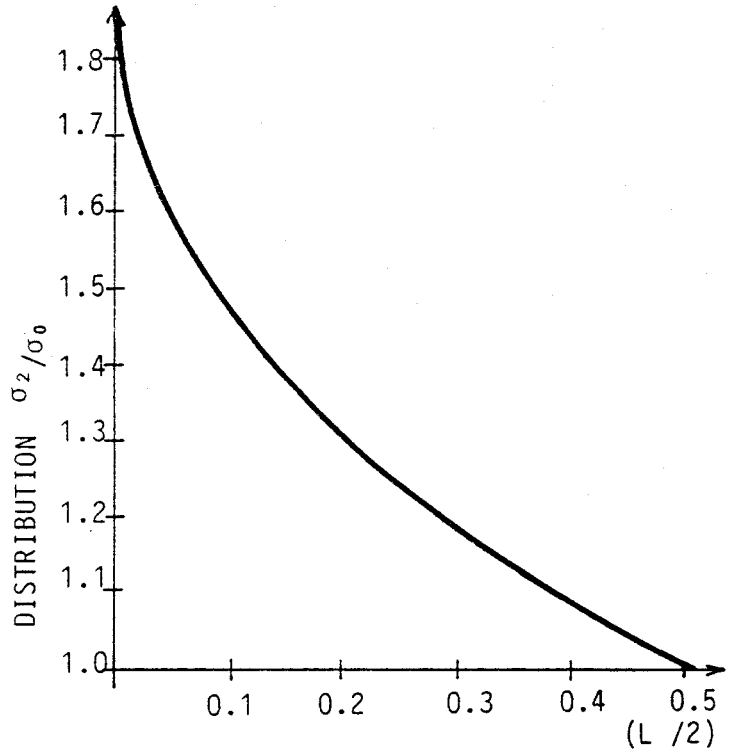
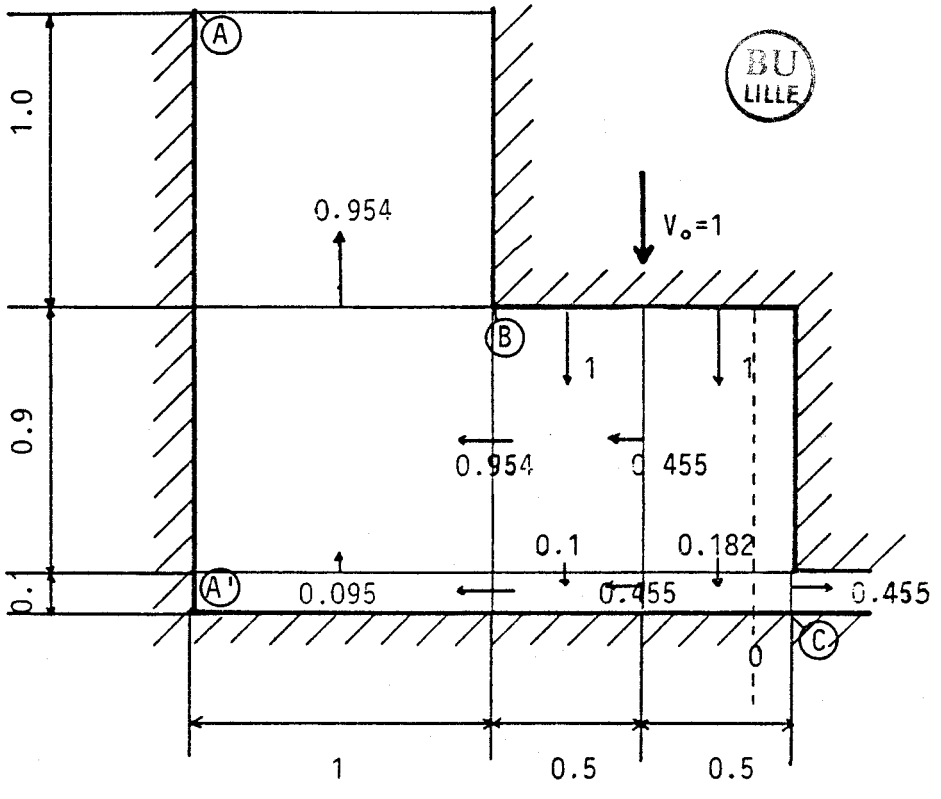


Fig. V.3 - Distribution de σ_2/σ_0 par la méthode LGM

2.3 Problèmes à flux complexes

Nous avons étendu le principe du calcul des contraintes pour des pièces plus élaborées faisant intervenir des flux de matière complexes.

Prenons l'exemple de pièce suivant en déformations planes.



BU LILLE

Fig. 4 - Filage mixte

La stratégie du calcul est de commencer par la surface libre de contrainte repérée par la lettre A. Nous déterminons σ_1 et σ_2 par la formule (2.2.3) en intervertissant le rôle de σ_1 et σ_2. Nous obtenons une distribution de contraintes sur la surface AA'.

Ensuite nous calculons un σ_1 moyen sur la frontière située entre BB'. Cette valeur de la contrainte σ_1 est cohérente par rapport à la puissance dissipée dans les éléments 1, 2 et 3. Ayant une valeur initiale de σ_1 nous pouvant utiliser la formule (2.2.3) du point B vers le point C.

Si entre les points B et C nous notons un changement dans la direction du flux de matière pour une colonne alors :

1) Nous déterminons le point O tel que sur la frontière parallèle à Oy et passant par O la vitesse soit nulle.

2) Nous en déduisons sur cette frontière un σ_1 et un σ_2.

3) Nous recherchons une autre face libre (ici représentée par le point C) pour reprendre le calcul des contraintes entre C et O.

Les résultats obtenus avec l'exemple défini figure V.4 sont les suivants

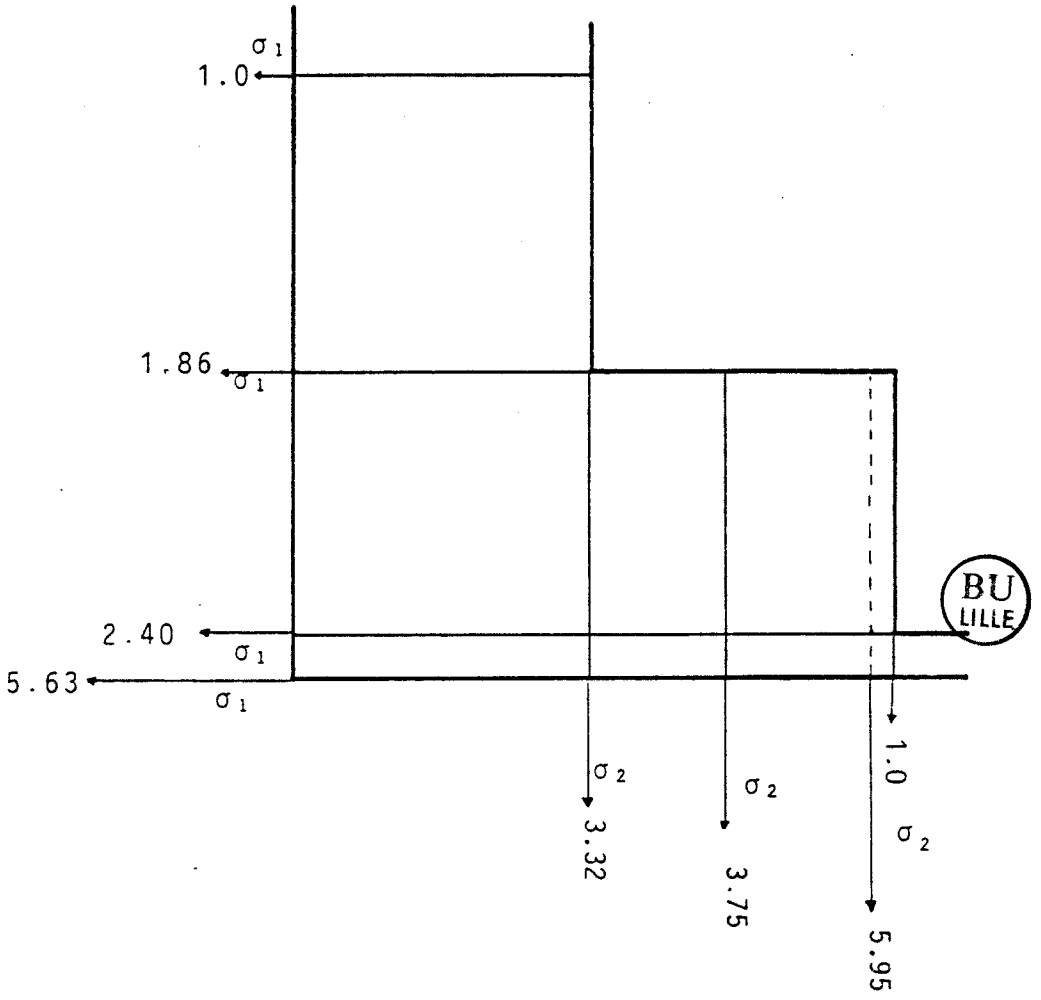


Fig. V.5 - Distribution des contraintes sur les outillages

2.4 Comparaison de la distribution de contraintes sur les interfaces

2.4.1 Déformations planes

Nous avons repris le test de compression simple en état plan de déformation et nous l'avons comparé avec la méthode des lignes de glissement et la méthode des tranches. Les résultats sont excellents.

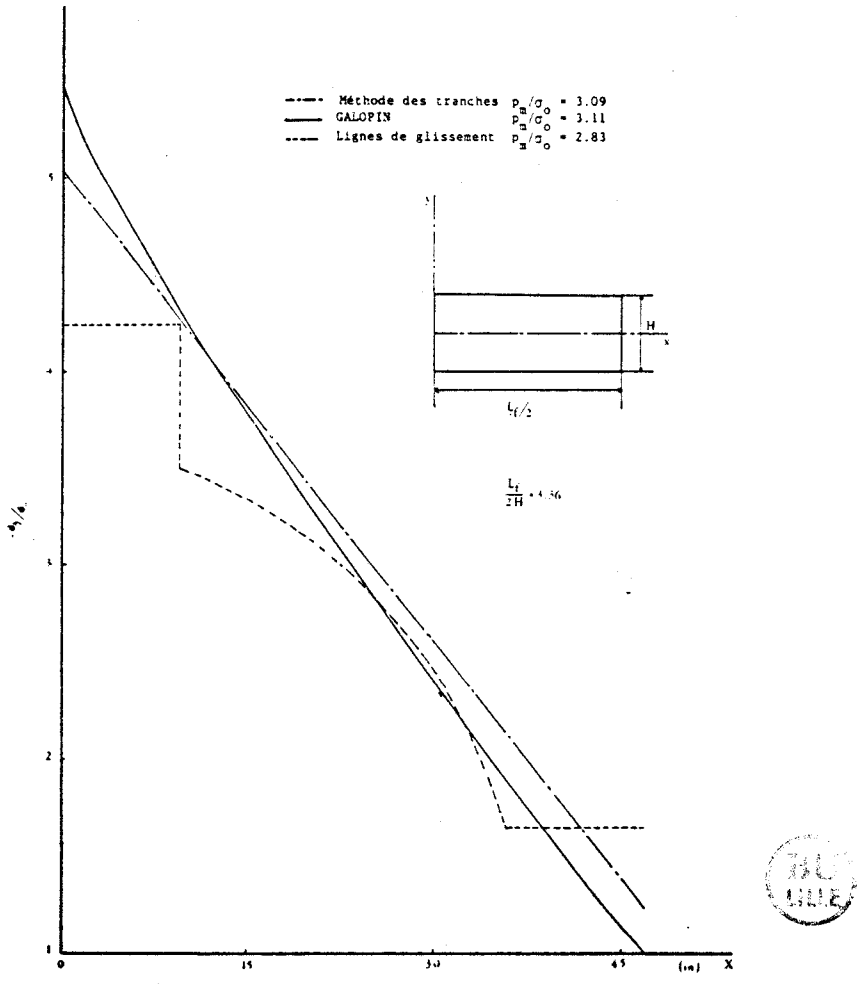


Fig. V.6 - Comparaison de la distribution de $-\sigma_y/\sigma_o$

2.4.2 Déformations axisymétriques

KIUCHI ayant testé sa méthode sur la compression de cylindre pour différentes valeurs du coefficient de frottement $\bar{m}$, il nous est apparu intéressant de reprendre cette étude. Les résultats sont les suivants :

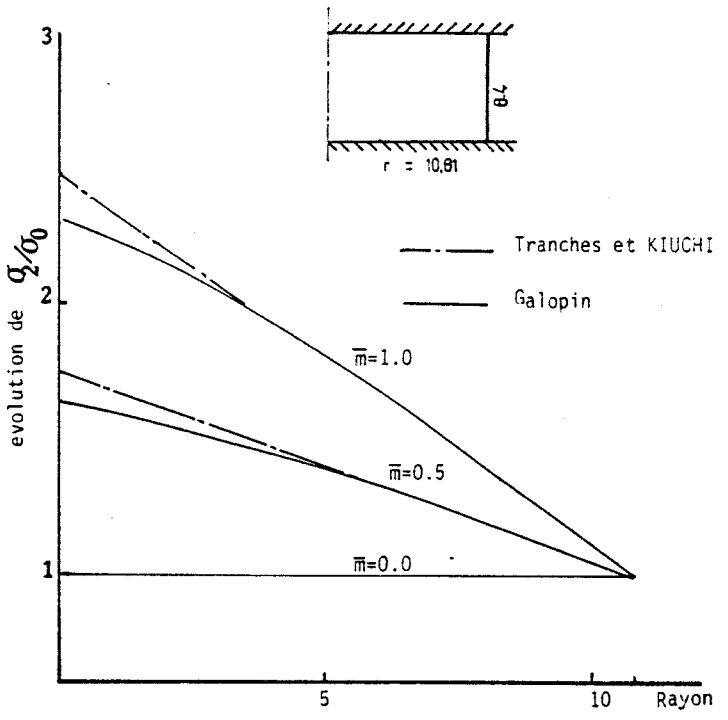


Fig. V.7 - Evolution de σ_2/σ_0 sur l'interface mobile.

Par rapport à la méthode de KIUCHI nous faisons apparaître une colline de pression. Ce phénomène est constaté expérimentalement et nous permet de valider notre méthode.

V.3 CONCLUSION

La nouveauté de notre méthode est d'utiliser séquentiellement une méthode de champ de vitesses licite et une méthode de champ de contraintes licite. Le fait de ne pas recalculer un ou deux champs de vitesses par colonne traitée, nous épargne un temps de calcul précieux.

Bien que nous ne puissions pas nous situer clairement par rapport à la solution exacte, les exemples tests pris en V.2.4 montrent que nous avons une bonne approximation de la distribution de contraintes sur les interfaces outil-matière.

Deuxième Partie

P R O G I C I E L G A L O P I N

CHAPITRE I : *Pré-processeur du programme GALOPIN*

CHAPITRE II : *Programme GALOPIN*

CHAPITRE III : *Post-processeur du programme GALOPIN*

CHAPITRE I

PRE-PROCESSEUR DU PROGRAMME GALOPIN

I.1 PRESENTATION DU PROGRAMME

1.1 Objectifs

PRE-GALOPIN est un programme nécessaire à l'élaboration des fichiers de données utilisés par le programme GALOPIN. Il est inspiré des structures utilisées dans les mailleurs de programmes de calcul par éléments finis. Il se présente comme un langage orienté doté d'une structure hiérarchisée propre.

1.2 Définition de la structure.

Afin d'être un produit assimilable par un grand nombre d'utilisateurs une approche syntaxique du type "maillage en éléments finis" a été adoptée. Ainsi une structure est discrétisée en un nombre fini de mailles reliées entre elles par leurs noeuds.

1.3 Le langage orienté

Le fonctionnement général du pré-processeur est le suivant :

- un module de gestion général interprète une commande indiquant une opération à effectuer ; il passe alors le controle au processeur correspondant ;
- ce processeur exécute l'opération demandée ; pour cela il interprète éventuellement les informations qui lui sont necessaires ;
- lorsque l'opération est terminée, le processus renvoie le contrôle au module de gestion général ; ce dernier peut alors analyser la commande suivante.

1.4 Structure de langage

Le langage orienté du processus est séquentiel. Il est en format libre, c'est à dire que les informations qu'il comporte sont mentionnées sans aucune contrainte de cadrage. Il suffit que les éléments (labels ou nombres) soient séparés. Le langage du système PRE-GALOPIN est structuré. Il comporte deux types d'informations : des commandes et des données.

I.2 PRESENTATION GENERALE DES MODULES

La structure dont nous voulons étudier le comportement doit-être préalablement modélisée. Cette modélisation consiste à décrire la nature (géométrie et physique) de la structure ainsi que les actions (liaisons, déplacements) qui lui sont appliquées. Les étapes logiques de cette modélisation sont les suivantes :

. Description de la topologie de la structure
. Fixation de la structure dans l'espace (appuis)
. Description de l'outillage
. Description des caractéristiques de l'essai.

Cette modélisation est réalisée par des procédures spécialisées correspondant à chaque étape.

2.1 Commandes

L'ensemble des procédures décrites correspond aux commandes principales suivantes :

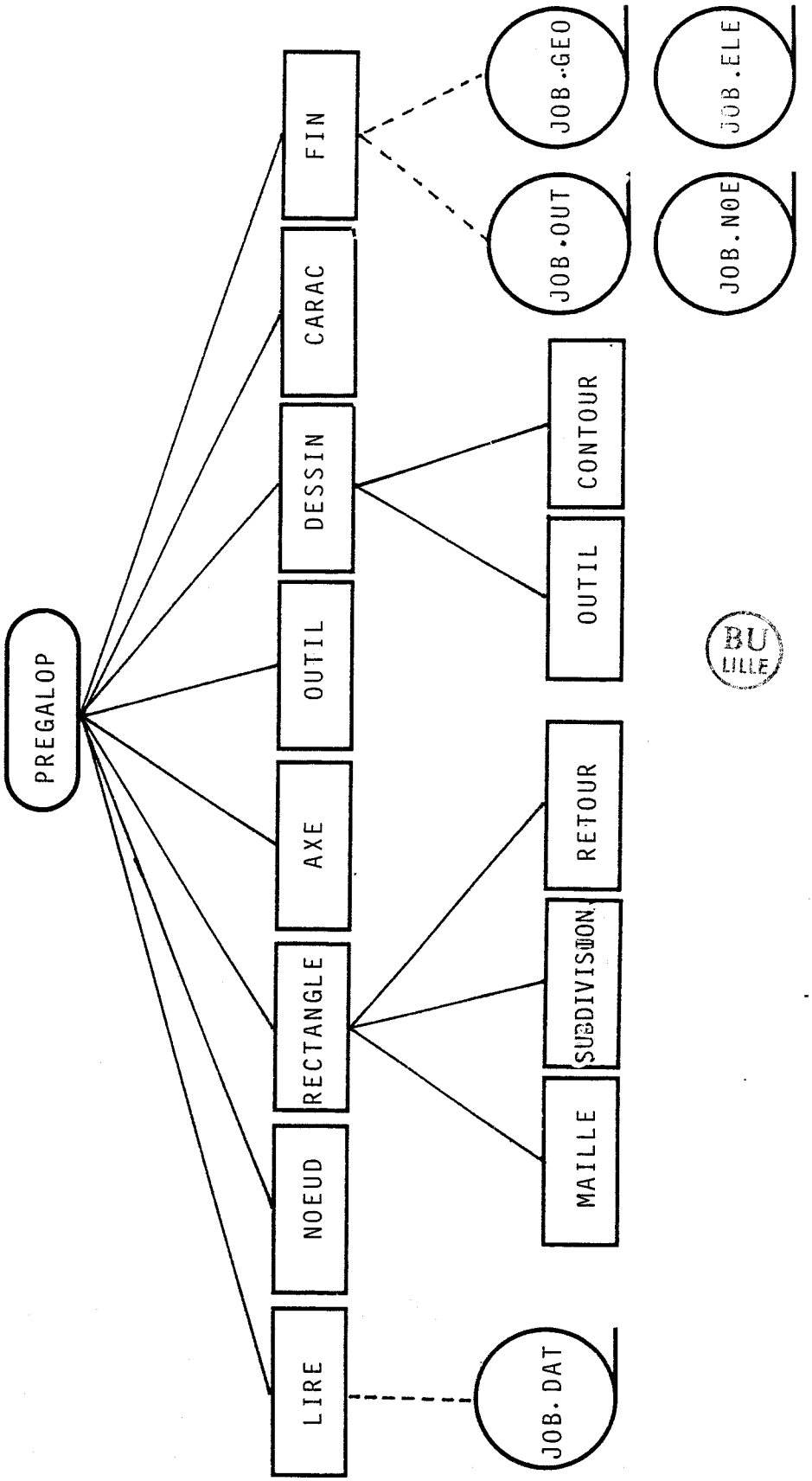
NOEUDS RECTANGLE TRIANGLE TRAPEZE RETOUR	Génération du maillage
DESSIN	Visualisation du maillage
AXE OUTIL CARACTERISTIQUE	Définition des outils, axes neutres, caractéristiques
FIN	Génération des fichiers utiles au programme GALOPIN

Une commande RETOUR doit OBLIGATOIREMENT clore l'ensemble des commandes générant le maillage. L'ordre des commandes peut être quelconque après la génération du maillage. Cependant la commande FIN clôture la séquence de commandes et de ce fait termine l'éxécution du programme.

Toute commande non reconnue fait apparaître un message d'erreur sur l'écran mais redonne la main à l'utilisateur.

Il existe une commande LIRE qui permet de lire un ensemble de commandes stockées sur un fichier. Cette commande permet de mettre au point un fichier de données.

I.3 HIERARCHIE DU LANGAGE UTILISEE PAR LE PRE-PROCESSEUR



BU LILLE

I.4 VISUALISATION DU MAILLAGE ET DES OUTILLAGES

L'objectif de notre pré-processeur est d'être un outil souple et conversationnel. Nous avons donc développé un module graphique appelé par la commande DESSIN. Il permet, après avoir défini une structure et son environnement, de la visualiser afin de vérifier le résultat de la modélisation.

Les caractéristiques et commandes du module graphique sont les suivantes :

Le cadre rectangulaire servant de support au dessin est repéré par un système d'axe ayant pour origine le coin inférieur gauche. Le calcul des échelles pour passer du système d'unité utilisateur à celui du traceur est effectué automatiquement par le programme de tracé.

La commande DESSIN est suivie de sous commandes qui sont :

.. MAILLAGE : Tracé du maillage

.. OUTIL : Tracé des outillages (contour avec hachures internes)

.. NUMERO : Numéro des noeuds et des mailles

.. CONTOUR : Tracé du contour

.. RETOUR : Pour revenir au module de gestion général.

I.5 DEFINITION DES CARACTERISTIQUES DE L'ESSAI

Dans cette procédure, l'utilisateur pourra définir non seulement les caractéristiques du matériau qui compose la structure mais aussi les caractéristiques de l'essai. Soit :

- la vitesse des outils
- l'inclinaison des outils
- les coefficents de frottement de couche limite de Tresca
- la contrainte d'écoulement du matériau (R.P.P.)

I.6 DEFINITION DES OUTILLAGES

Le chargement de la structure se fait par déplacement de certains noeuds. Ces noeuds que l'on appelera "noeuds esclaves" sont en contact avec des outils qui ont éventuellement une vitesse et une inclinaison propre. Pour modéliser ces outils nous utiliserons des contours fermés, représentés par des mailles pouvant avoir jusqu'à 8 noeuds. Les noeuds appartenant aux mailles outils sont des "noeuds maîtres". les noeuds appartenant aux mailles matières sont des "noeuds esclaves".

L'avantage de ce formalisme : noeuds maîtres, noeuds esclaves est le suivant. Tout noeud esclave appartenant au segment formé par deux noeuds maîtres subit le même déplacement que ces derniers. Il n'est pas necessaire de définir tous les noeuds en contact avec l'outillage pour leur imposer les caractéristiques de l'essai. La figure I.1 présente un exemple illustrant cette notion. La maille outil est définie par quatre noeuds 4, 5, 6, 7. Automatiquement les noeuds matières 4, 110, 111, 3, subiront le même déplacement que le segment défini par (4, 5).

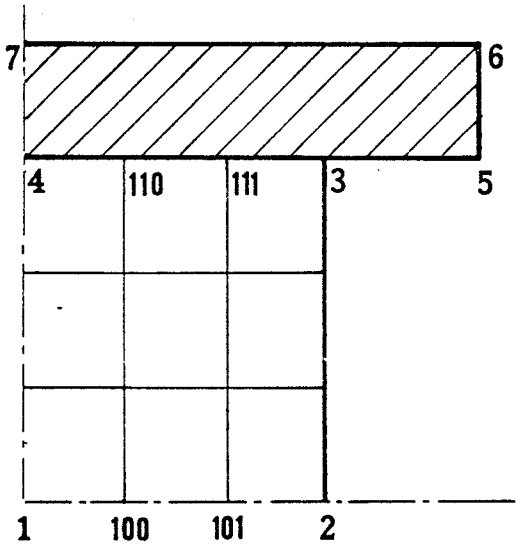


Fig. I.1. Exemple de définition d'un outil

BU LILLE

I.7 EXEMPLE D'UN FICHIER DE DONNEES

Pour définir le processus de formage illustré par la figure I.1 nous avons établi le fichier de données suivant :

```
NOEUDS
1/ 0  0
2/10  0
3/10 10
4/ 0 10
5/15 10
6/15 12
7/ 0 12 ;
RECTANGLE
MAILLE
1/1 2 3 4 ;
SUBDIVISION
1/3 3 ;
RETO
RETO
```

Définition de la géométrie de la pièce

```
AXE
X/1 2                          Définition des axes neutres
                               ou axes de symétrie
Y/1 4 ;
OUTIL
OM 1
1/4 5 6 7 ;                    Définition des outils
RETO
CARACTERISTIQUE
VDO 1
1
SIGMAO                         Définition des caractéristiques de
                               l'essai.
1                              VDO1 = vitesse de descente de l'outil 1
                               F 1 = coefficient de frottement de cou-
F 1                                  che limite de Tresca
                               SIGMAO = contrainte d'écoulement
0.3
RETO
FIN                            Génération du fichier de données néces-
                               saires à GALOPIN.
```

I.8 CONCLUSION

Grâce à son langage orienté doté d'une structure hierarchisée propre, ainsi que la notion "d'appartenance", nous avons à notre disposition un pré-processeur interactif et graphique performant et simple d'utilisation.

Dans la majorité des cas, il y a contrôle des données avant l'exécution d'une autre commande et possibilité de correction par l'utilisateur. En ce qui concerne le traitement des cas plans ou axisymétriques, c'est par un indicateur que l'on agit au début du programme. Il n'intervient que pour la génération du fichier de données ; son action est transparente pour l'utilisateur.

C H A P I T R E II

PROGRAMME GALOPIN

II.1 PRESENTATION DU PROGRAMME

1.1 Objectifs

Le but du programme GALOPIN est de calculer la puissance dissipée lors du forgeage de produits plans ou axisymétriques. Dans ce chapitre nous exposerons principalement le programme pour les cas plans. Nous donnerons par la suite les modifications qui existent avec le programme traitant les cas axisymétriques.

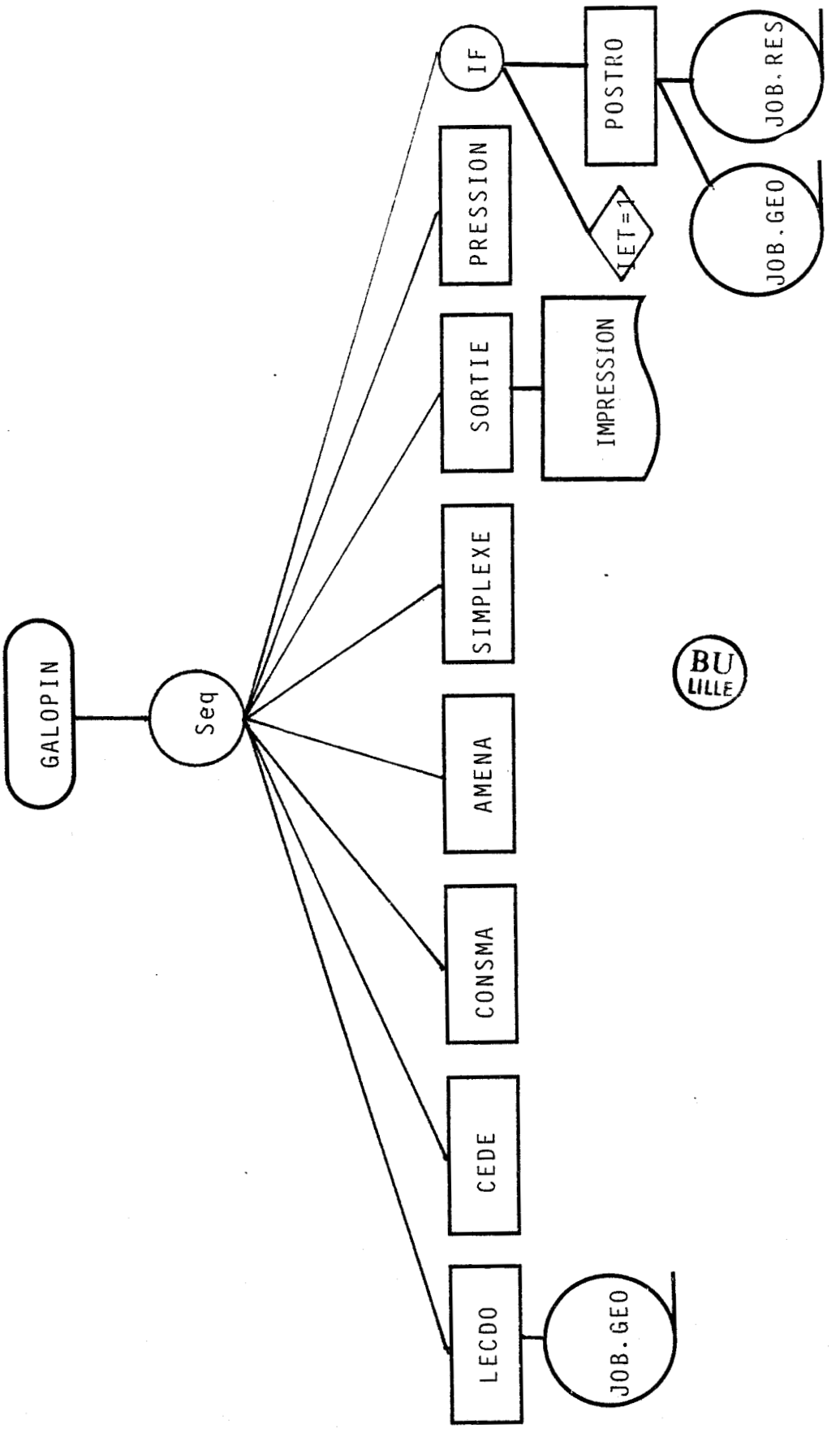
Le calcul de cette puissance dissipée fait appel à une modélisation de l'écoulement de la matière. Cette dernière a été traitée dans le chapitre II - Première partie. Les équations de puissances dissipées sont introduites dans un simplexe dont les inconnues sont les vitesses sur les faces des régions. Ainsi, outre la puissance dissipée totale, nous connaîtrons l'hodographe des vitesses à l'intérieur de la matière.

1.2 Structure du programme informatique.

Le programme principal GALOPIN réalise l'initialisation d'un certain nombre de variables et appelle successivement les sous-programmes :

- LECDO : Lecture du fichier de données généré par le PRE-PROCESSEUR ;
- CEDE : calcul des coefficients de vitesses intervenant dans les conditions cinématiques ;
  celles-ci expriment la continuité de la composante normale des vitesses sur chaque face ;
- CONSMA : calcul et affectation dans la matrice de travail des coefficients des contraintes dûes aux puissances dissipées par déformations internes et par frottement ainsi que la participation de ces vitesses dans l'expression de la puissance totale dissipée qui sera à minimiser ;
- AMENA : cette séquence répond à 3 exigences :
  1) utiliser les ressources offertes par les conditions cinématiques pour leur propre simplification ;
  2) utiliser ces mêmes conditions simplifiées pour alléger la matrice des contraintes ;
  3) préparer le tableau simplicial optimisé pour son utilisation directe dans la séquence suivante ;
- SIMPLEXE : recherche du minimum de la puissance dissipée totale par la méthode simpliciale ;
- SORTIE : mise en forme des résultats bruts venants du sous-programme précédent ;
- PRESSION : calcul des pressions s'exerçant sur les interfaces mobiles ;
- POSTPRO : redimensionnement de la géométrie pour enchaîner un autre calcul ; l'évolution de la pièce pendant sa déformation peut ainsi être suivie.

1.3 Arbre programmatique du programme GALOPIN



BU LILLE

II.2 SEQUENCE CEDE

2.1 Ecriture des conditions cinématiques

Cette séquence a pour objectif le calcul des coefficients des vitesses intervenant dans les conditions cinématiques.

En effet, tout ensemble de régions qui constitue une pièce en cours de forgeage, présente des particularité permettant d'écrire un nombre INC de conditions sur les vitesses d'écoulement de la matière à travers les faces des régions.

Plusieurs conditions apparaissent :

- des conditions exprimant le cas de contact permanent outil-pièce ou encore le cas de contact avec un axe neutre (ce sont les conditions limites) ;
- des conditions exprimant le contact entre deux régions.

Soit V_{ik} la vitesse à travers la face i de la région k. On peut avoir successivement :

$$V_{ik} = C^{te} \text{ (cas de contact avec Axe Neutre ou outillage)} \qquad (2.1.1)$$

ou

$$V_{ik} - V_{j\ell} = 0 \text{ (cas de contact région/région)} \qquad (2.1.2)$$

2.2 Relation d'incompressibilité

En général, la condition d'incompressibilité V_{3k} est exprimée en fonction des autres vitesses de la région k.

Les conditions (2.1.1) s'écrivent alors :

$$\beta_{1k}V_{1k} + \beta_{2k}V_{2k} + \beta_{4k}V_{4k} = Cte \qquad (2.2.1)$$

et les conditions (2.1.2)

$$V_{1k} - \beta_{1\ell} V_{1\ell} - \beta_{2\ell} V_{2\ell} - \beta_{4\ell} V_{4\ell} = 0 \qquad (2.2.2)$$

2.3 Ordre des conditions de vitesses

Il y a 4 types de conditions de vitesses d'ordre 1, 2, 3 ou 4, c'est-à-dire comportant 1, 2, 3 ou 4 inconnues vitesses.

- condition d'ordre 1 : $V_{ik} = C^{te}$
- condition d'ordre 2 : $V_{ik} - V_{j\ell} = 0$
- condition d'ordre 3 : $\beta_{1k} V_{1k} + \beta_{2k} V_{2k} + \beta_{4k} V_{4k} = K$
- condition d'ordre 4 : $V_{1k} - \beta_{1\ell} V_1 - \beta_{2\ell} V_{2\ell} - \beta_{4\ell} V_4 = 0$

Les conditions de vitesses peuvent se formuler sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{j\ell} V_j = b_\ell \qquad (2.3.1)$$

Des simplifications seront effectuées en introduisant dans les conditions d'ordre 3 et 4 les conditions d'ordre 1 et 2.

II.3 SEQUENCE CONSMA

3.1 Equations de la puissance dissipée interne

Nous avons vu dans le chapitre II - Première partie, que la puissance dissipée par déformation interne est une expression du type :

$$\mathring{W} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} |f(V_1, V_2, V_4)| \qquad (3.1.1)$$

Pour obtenir une forme simpliciale à partir de (3.1.1) il faut procéder à l'élimination des valeurs absolues.

Nous définissons une variable "annexe" α

$$\mathring{W} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} f(V_1, V_2, V_4) + \alpha \qquad (3.1.2)$$

avec les conditions

$$\alpha \geq 0 \text{ si } f(V_1, V_2, V_4) \geq 0 \qquad (3.1.3)$$

$$\alpha + 2 f(V_1, V_2, V_4) \geq 0 \text{ si } f(V_1, V_2, V_4) \leq 0 \qquad (3.1.4)$$

Chercher le minimum de $\mathring{W}$ revient à rechercher le minimum de $\frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} f(V_1, V_2, V_4) + \alpha$ avec les contraintes associées sur α. Toutefois, la méthode du simplexe imposant que toute variable soit positive ou nulle, la contrainte (3.1.3) est inutile.

3.2 Contraintes dûes à la puissance dissipée par frottements

L'expression de la puissance dissipée par frottements est linéaire par rapport aux vitesses de la région, quel que soit le type de frottement (région/région, région/outil). Elle est du type :

$$\mathring{W}_{k\ell} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left| f(V_{1k}, V_{2k}, V_{4k}, V_{1\ell}, V_{2\ell}, V_{4\ell}) \right| \qquad (3.2.1)$$

Pour un contact entre une région k et une région ℓ, avec f fonction linéaire. On procède comme au §(3.1) en introduisant une variable annexe α

En définitive, pour une région découpée en N éléments cinématiques plans, la puissance dissipée totale est de la forme :

$$\mathring{W} = \sum_{k=1}^{N} G_k \sum_{\ell=1}^{5} \sum_{j=1,2,4} x_{jk} V_{jk} + \alpha_{\ell k} \qquad (3.2.2)$$

avec k : indice de région

j : indice de vitesse

G_k : coefficient constant pour chaque région

$x_{j\ell}$: coefficient des vitesses V_{jk}

$\alpha_{\ell k}$: variable annexe

$\overset{\circ}{W}$ doit être minimisée avec 5 contraintes par région de forme générale.

$$\alpha_{\ell k} + \sum_j 2x_{j\ell} V_{jk} \geq 0 \qquad (3.2.3)$$

II.4 SEQUENCE AMENA

En réunissant les informations dûes à la séquence CEDE et celle provenant de CONSMA nous allons préparer un tableau simplicial optimisé pour une utilisation directe dans la séquence suivante.

4.1 Simplification de la matrice des conditions cinématiques

A l'issue de la séquence CEDE, les conditions de vitesses du problème sont réunies sous la forme d'une matrice comportant autant de colonnes que d'équations et de lignes que de vitesses limites pour chaque région. Pour chaque région, l'une d'elles a été exprimée en fonction des autres en utilisant la propriété d'incompressibilité.

4.1.1 Compactage de la matrice des conditions de vitesses

En premier lieu, un compactage de cette matrice sera fait en éliminant les lignes correspondant aux vitesses éliminées par la relation d'incompressibilité.

4.1.2 Introduction des conditions de vitesses d'ordre 1 dans les ordres supérieurs et classement des colonnes par ordre croissant

Chaque ordre (cf. chapitre II.2), devant subir par la suite un traitement particulier, la matrice des conditions de vitesses sera classée par ordre croissant. Auparavant, une simplification de cette matrice en vue d'abaisser au maximum l'ordre des conditions cinématiques sera effectuée.

Les conditions de vitesses rassemblées dans le groupe d'ordre 1 permettent une simplification aisée en affectant une valeur connue d'une vitesse dans les ordres supérieurs, afin de diminuer l'ordre de celles d'ordres 2, 3, 4.

Chaque condition de vitesse dont l'ordre aura été abaissé sera reportée dans le nouveau groupe d'ordre auquel il se rattache. Après traitement, aucun terme non nul dans les ordres supérieurs à 1 ne pourra apparaître en correspondance avec les colonnes des termes non nuls de chaque condition de vitesse d'ordre -1.

4.2 Introduction des conditions cinématiques dans la matrice des contraintes

4.2.1 Simplification par introduction des cdv d'ordre 1

Afin de réduire le nombre d'inconnues du problème simplicial, on procède à l'introduction des ordres 1 dans la matrice des contraintes. On procédera comme ceci :

- soit une condition cinématique d'ordre 1

$$a_{ij}\ V_i = b_j \Rightarrow V_i = \frac{b_j}{a_{ij}}$$

- soit une contrainte faisant intervenir V_i

$$AC_{ik}\ V_i + \text{---} \gtrless AS_k \Rightarrow \text{---} \gtrless AS_k - AC_{ik}\ \frac{b_j}{a_{ij}} = AS_k^*$$

4.2.2 Introduction des conditions d'ordre 2 dans la matrice des contraintes

L'introduction d'une cdv d'ordre 2 permet l'abaissement d'une unité du nombre d'inconnues dans la résolution simpliciale. Afin d'optimiser la réduction du nombre de ces inconnues, on procède à l'élaboration de "chaîne d'introduction"- dont chaque maillon est une condition de vitesse d'ordre 2. On peut par exemple avoir la configuration suivante pour 3 conditions de vitesse.

$$\begin{cases} V_{ik} - V_{j\ell} = 0 \\ V_{\rho q} - V_{mn} = 0 \\ V_{j\ell} - V_{mn} = 0 \end{cases} \qquad (4.2.2.1)$$

Trois équations de ce type permettent de réaliser la réduction du nombre d'inconnues de 3. Mais, la construction d'une chaîne permet de réduire ce nombre à 5. En effet il existe dans notre exemple au moins une variable de chaque condition de vitesse qui apparaît dans l'une des deux autres.

Dans cet exemple, on exprimera V_{pq} en fonction de V_{mn}, $V_{j\ell}$ en fonction de $V_{j\ell}$ et enfin V_{jk} en fonction de V_{ik}, ce qui permet de ne conserver qu'une inconnue à partir des 6 au début. L'exploitation complète du groupe des conditions de vitesses d'ordre 2 de la matrice des conditions de vitesses permet la construction de chaînes simples (1 seul maillon) ou de chaînes multiples qui réalisent la réduction maximale du nombre d'inconnues principales du problème.

4.3 Préparation du tableau simplicial

4.3.1 Changement de variables

Le fait d'utiliser la méthode du simplexe, nous oblige à n'utiliser que des variables positives. Or certaines vitesses d'écoulement peuvent-être négatives. Nous réalisons pour assurer le traitement, un changement de variable égal à la plus grande valeur négative susceptible d'être atteinte. Nous désignons par VMAX, la valeur absolue de cette vitesse. Pour toute variable nous posons :

$$V'_j = V_j + VMAX \qquad (4.3.1.1)$$

Les contraintes doivent être aménagées. Leur forme générale est la suivante :

$$\sum_j a_{j\ell} V_j \geq b_j \qquad (4.3.1.2)$$

Après le changement de variable nous avons :

$$\sum_j a_{j\ell} (V'_j - VMAX) \geq b_\ell = \sum_j a_{j\ell} V'_j \geq b_\ell + \sum_j a_{j\ell} VMAX \qquad (4.3.1.3)$$

A la suite de ce changement de variable, les seconds membres de contraintes de type $\geq$ peuvent être de signe positif ou négatif.

La résolution simpliciale impose que le second membre soit positif. Il importe de transformer les contraintes de type $\geq$ avec second membre négatif en contrainte $\leq$ avec second membre positif par inversion des signes des coefficients de la contrainte ainsi que celui du second membre.

4.3.2 Elimination des contraintes superflues

Afin de réduire encore la dimension du tableau du simplexe, il est utile de faire une analyse des contraintes de chaque groupe ($\geq$, $\leq$, =) pour éliminer celles qui n'apportent pas d'informations utiles pour la résolution.

a) Contrainte de type α

Soient les deux contraintes suivantes :

- $0.4\ V_1 + 0.8\ V_2 + \alpha_1 \geq 4.25$

  $0.4\ V_1 + 0.8\ V_2 + \alpha_2 \geq 4.25$

La fonction économique est du type : $F = \alpha_1 + \alpha_2 + f(V_i, \alpha_j)$

Les deux contraintes indiquent que α_1 et α_2 doivent être supérieures ou égales à la même valeur. La participation de ces variables dans la fonction économique étant positive, le simplexe tendant à minimiser celle-ci et ces contraintes étant les seules à mettre en jeu α_1 et α_2, ces deux variables ne peuvent être qu'identiques.

Le traitement consistera à supprimer une de ces contraintes sans oublier d'augmenter la participation de la variable restant dans la fonction économique.

Nous avons ainsi :

$0.4\ V_1 + 0.8\ V_2 + \alpha \geq 4.25$

$F = 2\alpha + f(V_i, \alpha_j)$

Un raisonnement similaire est appliqué aux contraintes $\leq$

b) Contraintes auto-redondantes

Les contraintes $\leqslant$ dont tous les coefficients des vitesses sont nuls sont dites auto-redondantes. Elles sont de la forme :

$-\alpha \leqslant b \Rightarrow \alpha \geqslant -b$

α étant toujours positif, de même que b, ces contraintes sont automatiquement superflues.

II.5 SEQUENCE SIMPLEXE

Pour la résolution simpliciale du problème le lecteur se rapportera aux ouvrages de références cités dans la bibliographie : [42, 39, 40, 41].

La transformation de la recherche d'un maximum en la recherche d'un minimum dans le simplexe se fait simplement en changeant les signes des coefficients de la fonction économique.

II.6 SEQUENCE SORTIE

Cette séquence a pour but d'assurer :

- la détermination des vitesses qui auront été éliminées par l'introduction des conditions de vitesses.
- le calcul des vitesses V_{3k} éliminées par la condition d'incompressibilité
- le calcul de la puissance dissipée.

6.1 Détermination des vitesses

Ce traitement est divisé en deux phases distinctes. La première phase consiste à rechercher les vitesses qui auront été déterminées par les conditions d'ordre 1. On obtiendra directement :

$$V_j = b_\ell / a_{j\ell} \qquad (6.1.1)$$

La deuxième phase concerne les vitesses qui auront été déterminées par le simplexe. Cette phase n'est relative qu'aux variables principales. Nous leur faisons subir un changement de variable.

$$V_j = V'_j - VMAX \qquad (6.1.2)$$

A la suite de ce changement de variable, la valeur de V_j est fixée définitivement. Sa connaissance permet de simplifier la configuration de la matrice des conditions de vitesses en reportant dans le second membre de cette même matrice la valeur changée de signe du produit de la valeur de la vitesse déterminée V_j par le coefficient de cette variable dans la condition de vitesse considérée.

La ième condition de vitesse s'écrit :

$$\sum_i a_{i\ell} V_i = b_\ell \qquad (6.1.3)$$

Si V_j a été déterminé, on obtient

$$\sum_{i, i\neq j} a_{i\ell} V_i = b_\ell - a_{j\ell} V_j \qquad (6.1.4)$$

A ce niveau du traitement, il est intéressant de rechercher si la variable V_j est une variable qui fait partie d'une chaîne d'introduction des conditions de vitesses d'ordre 2 dont on a mémorisé les caractéristiques au cours de leur création.

Ainsi, si V_j est lié à V_k puis V_k à V_m... etc, la connaissance de V_j permet le calcul de V_k, V_m.

Le maillon de la chaîne qui permet de déterminer V_k à partir de V_j est défini de telle manière que la ligne de la condition de vitesse dans la matrice des conditions de vitesses, qui unit ces deux vitesses est connu.

Le maillon s'écrit :

$$a_{j\ell}\ V_j + a_{k\ell}\ V_k = b_\ell \qquad (6.1.5)$$

d'où $V_k = (b_\ell - a_{j\ell}\ V_j)/a_{k\ell}$

Ainsi l'exploitation de la chaîne dont fait partie V_j permet de calculer toutes les vitesses qui font partie de cette chaine.

Deux cas peuvent donc se présenter pour cette phase :

- la vitesse V_j déterminée par le simplexe est une vitesse qui fait partie d'une chaine d'introduction de conditions d'ordre 2 auquel cas, sa connaissance entraine la détermination de toutes les vitesses faisant partie de la chaine.
- la vitesse déterminée par le simplexe est une vitesse qui ne fait pas partie d'une chaine. La vitesse V_j est alors une vitesse qui apparaît dans les conditions d'ordre 2, 3 ou 4 et qui est indépendante vis-à-vis des vitesses apparaissant dans les conditions d'ordre 2.

A la suite de cette deuxième phase, nous sommes certains que toutes les vitesses V_{ik} seront déterminées.

6.2 Calcul des vitesses V_{3k}

Les vitesses éliminées par la condition d'incompressibilité ne sont pas encore connues à ce stade.

Pour les régions dont la face 3 est libre, nous utiliserons cette condition pour les recalculer.

Pour celles dont la face 3 est en contact avec la face 1 d'une région, on écrira simplement l'égalité des vitesses des deux faces.

Pour celles dont la face 3 est en contact avec un axe neutre ou un outil fixe nous écrirons $V_{3k} = 0$.

6.3 Calcul de la puissance dissipée totale

Ayant conservé la matrice des contraintes avant compactage c'est-à-dire à la fin de la séquence CONSMA et connaissant l'ensemble des vitesses du problème nous n'avons plus qu'à multiplier les coefficients de cette matrice par les valeurs des vitesses correspondantes et de sommer.

$$\overset{\circ}{W} = \sum_k G_k \sum_{\ell} \sum_j x_{j\ell} \, V_{jk} \qquad (6.3.1)$$

6.4 Impression

Nous imprimons toutes les informations que nous venons de calculer dans la séquence SORTIE pour conserver une trace de l'hodographe des vitesses dans la matière ainsi que la puissance à fournir pour obtenir un tel hodographe.

Le fichier sur lequel nous stockons toutes ces résultats se nommera JOB.IMP avec JOB nom générique de l'étude en cours (CF. Chapitre I.2.2).

Accessoirement nous calculons dans cette même séquence les surfaces en contact avec les différents outillages.

Tous les résultats sont donnés sans unité. A l'utilisateur de faire attention au système d'unité dans lequel il travaille.

II.7 SEQUENCE POSTPRO

Cette séquence a pour but :

- De déplacer les outillages dans le temps (Δt).
- De remailler la structure en fonction des flux de sortie.
- De préparer un nouveau fichier pour un calcul à l'instant $t + \Delta t$

7.1 Déplacement des outillages

Comme nous l'avons vu dans le pré-processeur, les noeuds appartenant à l'outillage sont des noeuds maîtres. Ils se déplacent sans contrainte en fonction des paramètres vitesse et inclinaison de l'outillage par rapport à la verticale. Ce traitement consistera à calculer des incréments de déplacement

Dans une seconde phase, nous recherchons si un noeud secondaire appartient simultanément à un outil et à une face libre. Si c'est le cas, nous combinons ces deux appartenances afin que le noeud reste en contact avec l'outillage.

7.2 Modification des coordonnées des points de la matière

Connaissant les vitesses de sorties sur les faces libres, nous définissons des vitesses moyennes opérant sur ces dernières. Nous modifions les coordonnées des points appartenant à ces faces libres. Ensuite si la face libre est une face 1 ou 3 nous modifions tous les noeuds appartenant à une droite parallèle à x et passant par le noeud de la face libre du delta y de ce noeud Inversement si la face libre est une face 2 ou 4 nous modifions tous les noeuds appartenant à une droite parallèle à y et passant par le noeud de la face libre du delta x de ce noeud.

Une fois que nous avons calculé les déplacements de tous les noeuds de l'essai, il faut vérifier la conservation de volume de la pièce à la fin du pas de temps choisi. Si nous n'obtenons pas cette conservation nous adaptons les vitesses moyennes de sorties en fonction de l'écart relatif entre le volume initial et le volume intermédiaire et recalculons de nouveau les déplacements de chaque noeud jusqu'à l'obtention d'une conservation de volume.

La vérification de la pénétration éventuelle d'un noeud "matière" dans les outillages est effectuée par un algorithme d'intersection de droites paramétrées. Si un noeud est "rentré" dans l'outillage nous définissons un nouvel incrément de temps tel que le noeud incriminé soit ramené en contact avec l'outillage. Cette dernière étape s'avère utile lorsque les outillages sont de géométrie complexe et réorientent une partie du flux matière.

II.8 MODIFICATIONS DES SOUS-PROGRAMMES POUR LES CAS AXISYMETRIQUES

8.1 Séquence CONSMA

Pour les éléments cinématiques rectangulaires axisymétriques, l 'expression de la puissance dissipée par déformation interne n'est pas linéaire par rapport aux vitesses. Elle a donc été approximée par 6 hyperplans (asymptotes, minimes, tangentes) pour les six zones de vitesses, dont les équations sont linéaires par rapport aux vitesses de la région. (cf. § III.2 Première Partie).

Pour chaque élément, on considère la puissance dissipée par déformation interne $\overset{\circ}{W}_i$ comme une inconnue supplémentaire, et sa minimisation apportera 6 contraintes du type :

$$\overset{\circ}{W}_i - Y_k \geq 0 \qquad (8.1.1)$$

où Y_k est une des 6 équations des hyperplans de linéarisation.

De plus, les équations Y_k sont de la forme :

$$Y_k = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} f|(V_1, V_2, V_4)| \qquad (8.1.2)$$

Ainsi, pour chaque élément, nous aurons 12 contraintes du type :

$$W_i + \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} f(V_1, V_2, V_4) \geq 0 \qquad (8.1.3)$$

ou

$$W_i - \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} f(V_1, V_2, V_4) \geq 0$$

avec $\overset{\circ}{W}_i$ à minimiser.

En ce qui concerne l'expression de la puissance dissipée par frottements, celle-ci est linéaire par rapport aux vitesses de l'élément, quel que soit le type de frottement (région/région, région/outil fixe ou mobile). Il n'y a donc pas de changement par rapport au cas en déformations planes.

8.2 Séquence SORTIE

La modification apportée concerne le calcul de la puissance dissipée, En effet nous ne pouvons récupérer la matrice des contraintes avant compactage du fait de l'introduction d'équations supplémentaires pour la détermination de l'énergie dissipée interne dans les éléments rectangulaires.

Nous calculons directement les coefficients associés aux vitesses pour les énergies dissipées (internes et par frottement). Nous n'avons plus alors qu'à multiplier ces coefficients par les valeurs des vitesses correspondantes et à les sommer.

II.9 CONCLUSION

Dès à présent nous disposons d'un outil de calcul numérique simple, déterminant les grandes déformations subies par un matériau lors de sa mise en forme, ainsi que la puissance à mettre en oeuvre avec des temps de calcul faibles. Ce logiciel de calcul étant constitué de modules spécifiques il sera possible à tout moment de le modifier pour incorporer de nouvelles régions. Ce code de calcul comporte, dans la version déformations planes, 11000 instructions indépendantes du pré et post processeurs. Comme pour le pré-processeur la programmation s'est effectuée en Fortran 77 standard.

CHAPITRE III
POST-PROCESSEUR DU PROGRAMME GALOPIN

III.1 PRESENTATION DU PROGRAMME

1.1 Objectifs

Le post-processeur permet d'exploiter les résultats de calcul provenant du programme GALOPIN par une visualisation graphique des différentes étapes d'un processus de formage. Nous pouvons suivre, étape par étape, l'évolution géométrique de la pièce, l'écoulement de matière, l'environnement externe (c'est à dire la position des outils).

Comme pour le pré-processeur, le post-processeur se présente comme un langage orienté doté d'une structure hiérarchisée propre.

III.2 PRESENTATION GENERALE DES MODULES

Le processus que nous voulons visualiser peut l'être avec plus ou moins de détails. Les différents éléments à visualiser sont :

. Maillage de la pièce

. Description des outillages

. Hodographe des vitesses

D'autre part lors d'un processus, il est interessant de visualiser soit une étape, soit une série d'étapes où d'enchaîner de manière séquentielle les étapes avec le même contexte de visualisation.

Pour cela nous avons une serie de commandes correspondant à l'ensemble des procédures décrites ci-dessus.

2.1 Commandes

MAILLAGE CONTOUR	Visualisation du maillage
OUTIL	Visualisation des outils
VITESSES	Visualisation de l'hodographe des vitesses au barycentre des mailles
CARTE I_1,... I_n	Sélection des différentes étapes à visualiser
SUITE J	Cette commande permet de conserver le contexte de visualisation défini precedemment pour l'étape de calcul J.

BU LILLE

2.2 Exemples

a) CONTOUR OUTIL CARTE 1 4 5 7 SORT

Cette commande permet de visualiser le contour de la pièce et les outils aux étapes 1, 4, 5, 7.

b) Utilisation de la commande suite

Soit un groupe de commande à l'étape i

MAILL OUTIL NUMERO CARTE i SORT

Après visualisation si nous tapons

SUITE J

nous avons le même résultat que si nous avions retapé les commandes MAILL OUTIL NUMERO CARTE J SORT.

Il est à souligner que les commandes sont interprétées quel que soit leur ordre d'introduction.

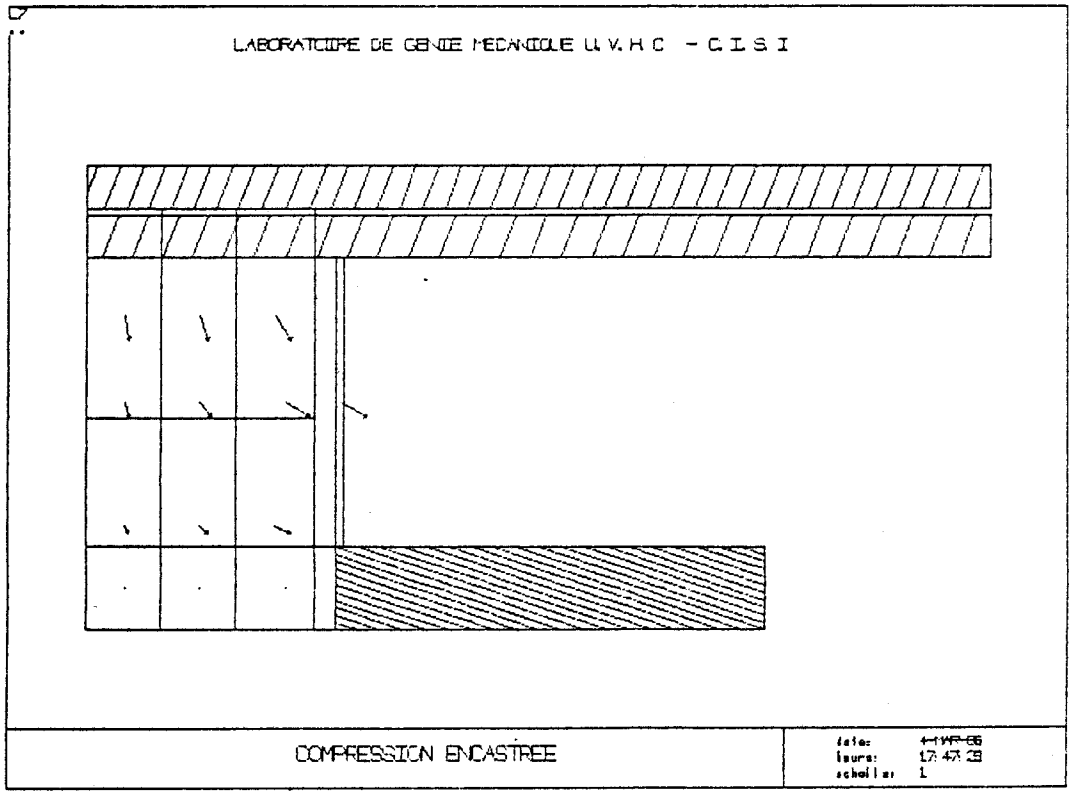


Fig. III.1. Exemple de Visualisation.

III.3 CONCLUSION

La visualisation des vitesses, de la géométrie de la pièce permet, lors de la superposition des différentes étapes de calcul, de mieux comprendre le mécanisme de déformations du matériau et d'entrevoir une possible optimisation de la forme des outillages.

Cette visualisation est rendue aisée par la souplesse d'utilisation du post-processeur. L'opérateur peut-être guidé à tout moment par une commande "HELP" ce qui facilite l'apprentissage des commandes. D'autre part le fait de visualiser n'importe quelle étape et dans n'importe quel ordre, contribue à dépouiller aisement les résultats du programme GALOPIN.

Troisième Partie

T E S T S

CHAPITRE I : *Exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations planes.*

CHAPITRE II : *Exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations axisymétriques.*

CHAPITRE I

EXEMPLES TYPES D'UTILISATION DES ELEMENTS CINEMATIQUES EN DEFORMATIONS PLANES

Dans ce chapitre nous présentons les différentes applications, faites en déformations planes avec les éléments cinématiques, de difficulté croissante. Pour chaque test nous donnerons des mesures de performance du programme, c'est à dire :

- précision de la solution obtenue,
- rapidité de mise en oeuvre,
- temps de calcul,
- influence de la modélisation sur les résultats,

afin de valider l'efficacité de la formulation et du logiciel correspondant.

Les exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations planes sont :

1 - Compression simple en état plan de déformation

2 - Extrusion avant en déformations planes

3 - Extrusion arrière en déformations planes

4 - Test de MAMALIS (forgeage d'un carré suivant sa diagonale)

5 - Mixage d'éléments pour un processus de forgeage latéral

6 - Test de LYAPUNOV - KOBAYASHI

I.1 COMPRESSION SIMPLE EN ETAT PLAN DE DEFORMATION

L'objectif de ce test est de valider la formulation utilisée par notre élément cinématique rectangulaire, ainsi que le logiciel GALOPIN mettant en oeuvre nos méthodes de prevision.

1.1 Schéma

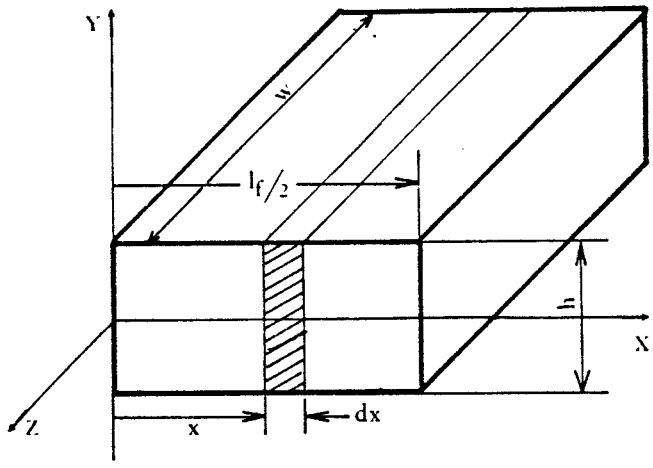


Figure I.1 Compression simple en état plan de déformation

Nous comparons les résultats obtenus par notre formulation avec ceux de KUDO [4] et avec les tests de forgeage effectués sur une presse d'essai TESTATRON avec de la plasticine Les conditions de déformations planes sont obtenues avec un barreau d'une longueur de 300 mm et l'outillage permet de garder cette longueur constante durant toute l'opération de forgeage. Afin de visualiser le flux de manière, l'éprouvette est marqué dans sa section avec des points de 0.3 mm de diamètre espacés de 2.5 mm. Après chaque incrément de forgeage la section marquée est photographiée. Les autres dimensions des lopins de plasticine sont de 30 x 30 mm.

1.2 Résultats

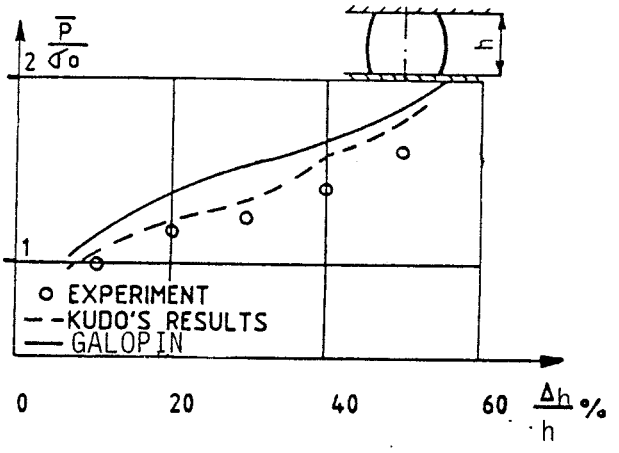


Fig. I.2 Rapport de la pression moyenne durant une compression simple

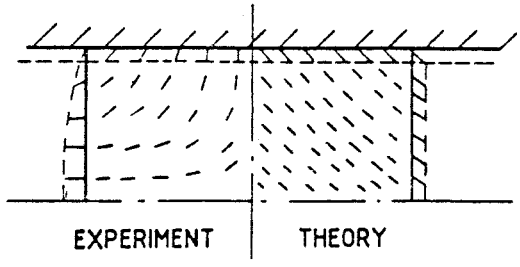


Fig. I.3 Lignes d'écoulement au début de la compression

Les écarts enregistrés entre les résultats obtenus par notre méthode et les résultats expérimentaux sont inférieurs de 10 %. Si à première vue les résultats obtenus avec les cellules de KUDO sont meilleurs, c'est au détriment de la rapidité. En effet nous avions maillé notre test avec 4 éléments rectangulaires, et chaque pas de calcul ne necessitait que 4 secondes de temps CPU. En quelques minutes nous avons à notre disposition tout le processus pour une variation du $\Delta h/h$ de 0 à 70 %. Nous avons constaté lors de ce test, qu'il n'était pas necessaire de mailler "finement" la pièce étudiée car nous obtenons toujours la même solution sur les vitesses de sorties des faces libres ainsi que sur la puissance dissipée totale.

1.3 Etude de la distribution de contrainte sur l'interface mobile

ayant développé une nouvelle méthode de détermination des contraintes sur les interfaces, il nous apparu nécessaire de confronter les résultats avec des méthodes comme :

a) la méthode des tranches

b) la méthode des lignes de glissement.

Pour la méthode des tranches nous avons :

$$Pm = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} \left(1 + \overline{m} \frac{\ell f}{4h} \right) \qquad (1.3.1)$$

$$+ \frac{\sigma_y}{\sigma_o} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\overline{m}}{h} \left(\frac{\ell f}{2} - x \right) + 1 \qquad (1.3.2)$$

La figure I.4 illustre la comparaison effectuée. Nous constatons une bonne approximation de la distribution de contrainte - σ_y sur l'interface mobile.

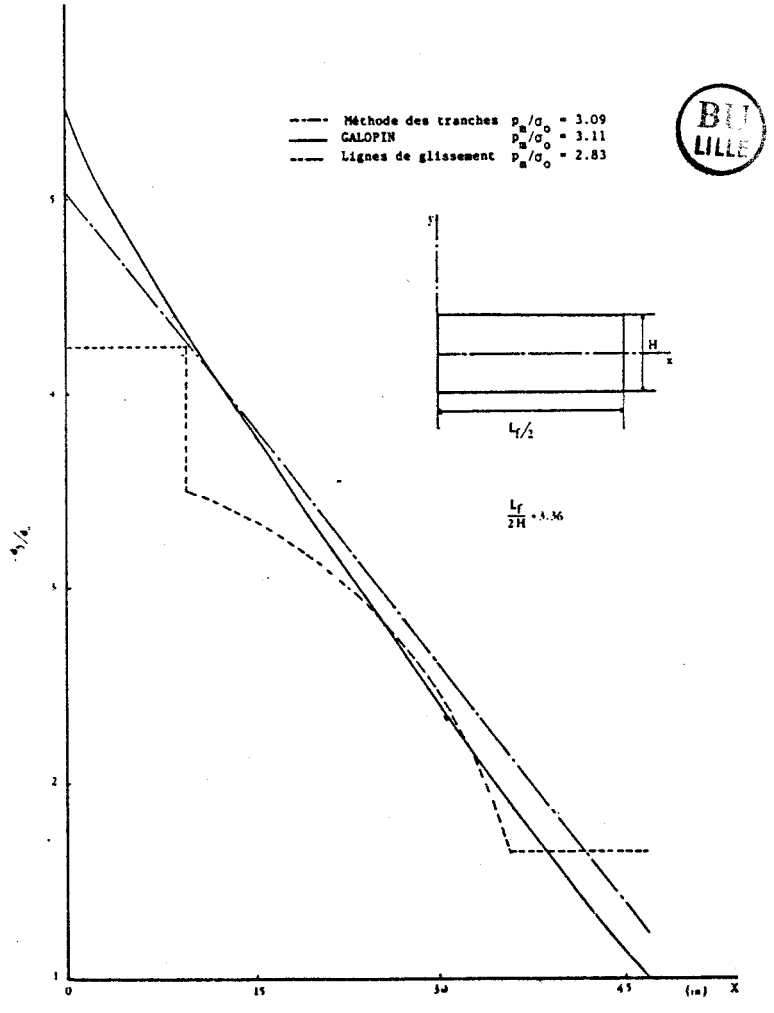


Fig. I.4. Evaluation de - σ_y/σ_o sur l'outillage

1.4 Conclusion

Ce test nous a permis :

a) valider la formulation de l'élément cinématique rectangulaire

b) valider notre méthode de détermination des contraintes sur les interfaces

c) de constater qu'il n'était pas utile de mailler finement la pièce

d) rapidité du logiciel

I.2 EXTRUSION AVANT EN DEFORMATIONS PLANES

Nous avons retenu le test d'extrusion avant en déformations planes afin de compléter la validation de notre élément rectangulaire pour des processus présentant des zones mortes. L'objectif de ce test est de comparer les solutions obtenues par KUDO [4] avec ces cellules, les résultats obtenus par JOHNSON [5] avec la méthode des lignes de glissement et ceux obtenus par GALOPIN.

2.1 Schéma du processus

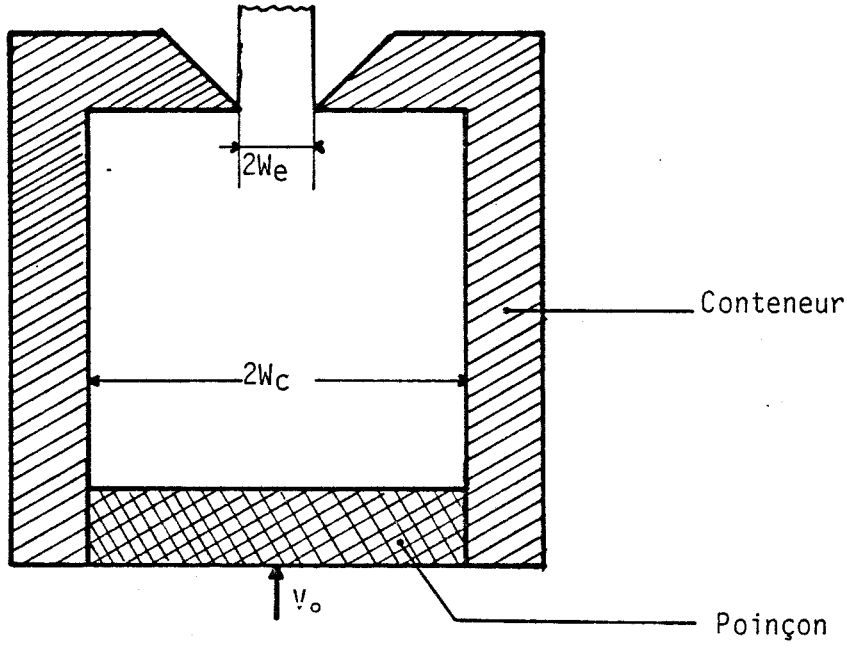


Fig. I.15 : Extrusion avant

Les conditions de frottement aux interfaces outil-matière sont :

$\overline{m}$ = 0.5 pour le conteneur

$\overline{m}$ = 0.5 pour l'outil mobile

Nous définissons le rapport d'extrusion $R = 1 - W_c / W_e$

2.2 Resultats

La figure I.6 illustre la comparaison entre KUDO, JOHNSON et GALOPIN. La différence enregistrée, entre les résultats obtenus avec notre méthode et ceux de JOHNSON, est généralement inférieure à 20 %. Cette différence maximale est obtenue au début du processus, dès que le rapport $\frac{T}{W_c} \leq 0.5$ cette différence est de moins de 10 %.

A partir de $\frac{T}{W_c} = 0.5$ nous obtenons une solution comparable à KUDO à quelques pourcent près.

En ce qui concerne le temps de calcul, pour une pièce maillée avec 7 éléments, nous balayons la plage de valeurs $\frac{T}{W_c}$ comprises entre 1. et 0.2 en moins de 2 minutes de temps CPU.

Vu les bons résultats obtenus et la rapidité de calcul nous pouvons affirmer que la formulation adoptée pour l'élément cinématique rectangulaire est excellente.

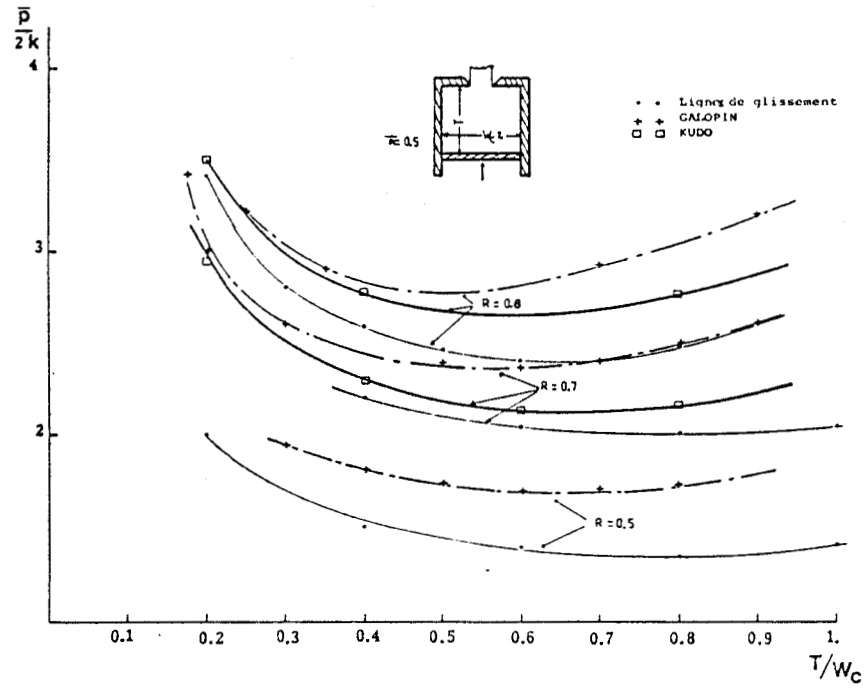


Fig. I.6 Pression moyenne pour différents rapports d'extrusion.

I.3 EXTRUSION ARRIERE EN DEFORMATIONS PLANES

Ayant testé notre élément cinématique rectangulaire, dans les deux tests précedents, nous nous sommes interessés à un processus faisant intervenir un élément cinématique triangulaire. Ce premier test de validation pour l'élément triangulaire a été orienté vers la possibilité ou non de faire apparaître des zones mortes dans le processus.

Pour cela nous avons utilisé les résultats obtenus par BIWAS et VIDYASAGAR [33, 34]. Ces deux auteurs ayant simulé le processus d'extrusion avec de la plasticine, nous avons à notre disposition les grilles déformées d'où une comparaison possible entre l'expérience et le calcul.

Les résultats suivants seront comparés sur la plan qualitatif.

3.1 Schéma du processus

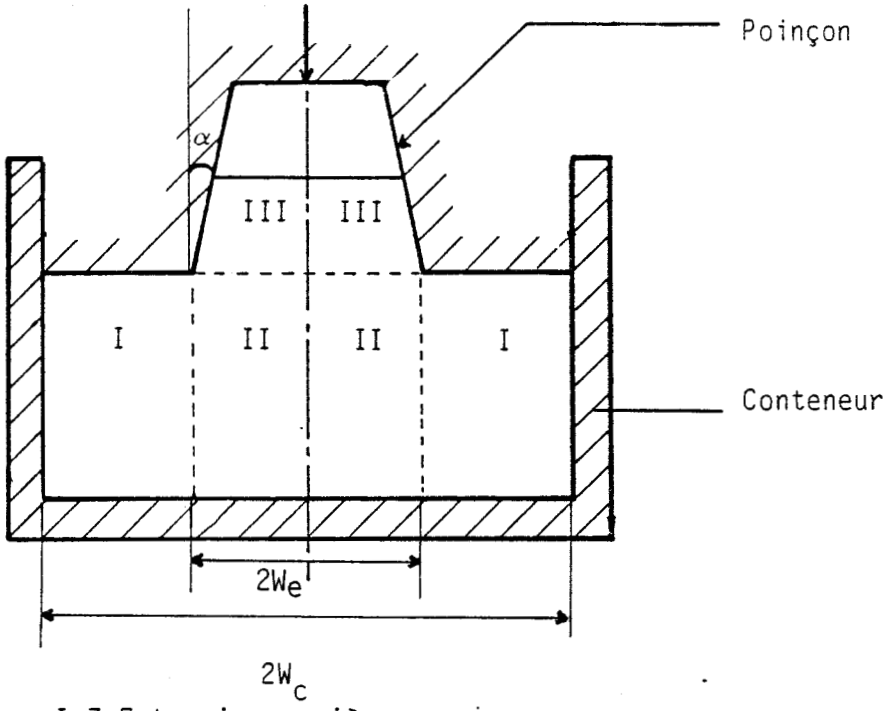


Fig. I.7 Extrusion arrière.

Les dimensions initiales de la pièce sont les suivantes.

H_o = 30 mm	2 W_c = 53.40 mm	$\overline{m}$ = 0.2 pour la conteneur
2 W_e = 13.40 mm	α = 10°	$\overline{m}$ = 0.2 pour le poinçon

La figure I.8 représente la grille déformée du processus pour un ΔH de 5. Il apparaît dans cette photographie qu'il y a 3 zones de flux distinctes. Dans la zone I, le flux est principalement latéral. La direction du flux change lorsqu'on s'approche de la zone II. La variation de l'angle d'un élément rectangulaire de la grille, indique que nous sommes en présence d'une cission pure. Lorsque nous nous approchons de l'axe de symétrie, cette déformation angulaire disparaît. Dans la zone III nous avons l'effet de cisaillement qui intervient dans le déplacement vertical des lignes horizontales. Pour compléter cette description, nous constatons une zone morte se situant au fond du conteneur où il n'y a pas eu apparition d'un cisaillement .

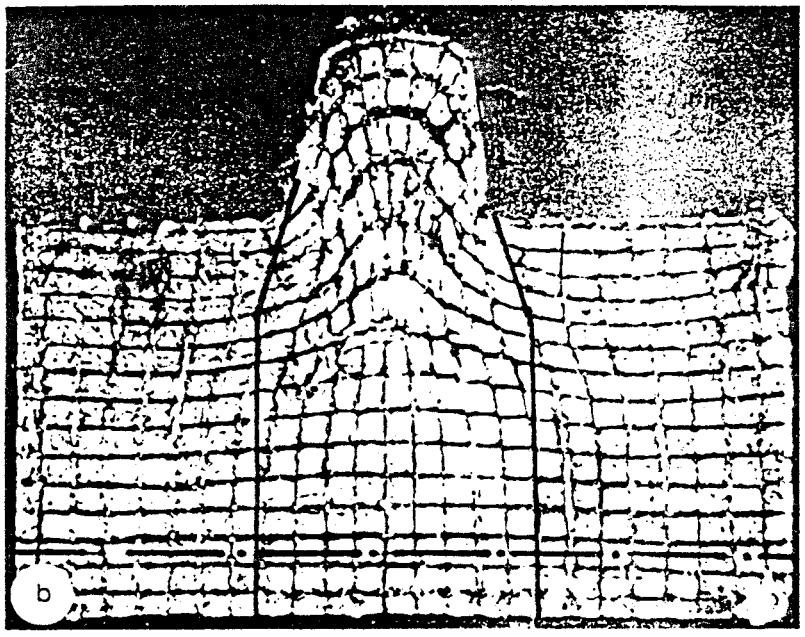


Fig. I.8 Grille déformée (H_o = 30, H = 25)

3.2 Résultats

Afin d'étudier cet écoulement et de faire apparaître la zone morte au fond du conteneur nous avons maillé la structure de la façon suivante :

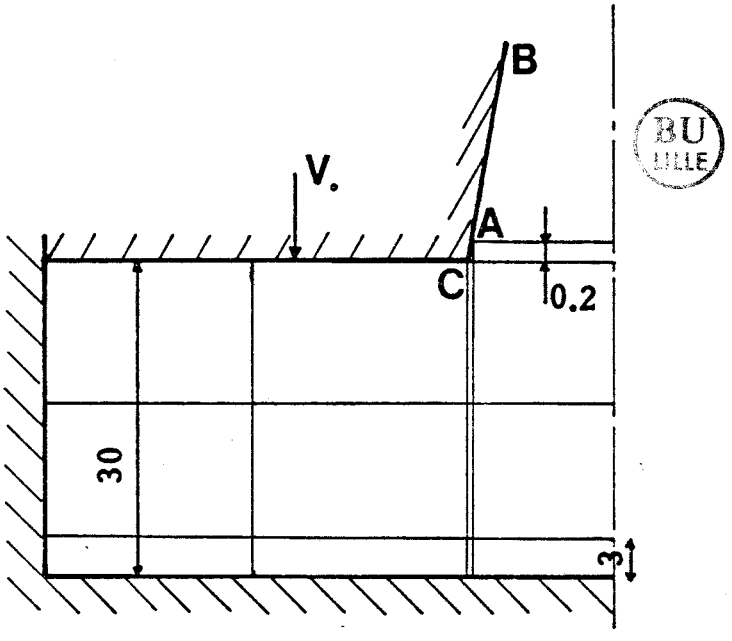
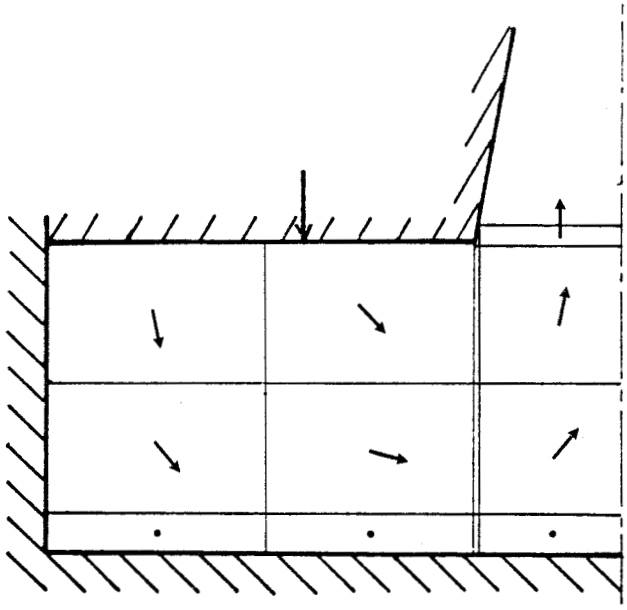


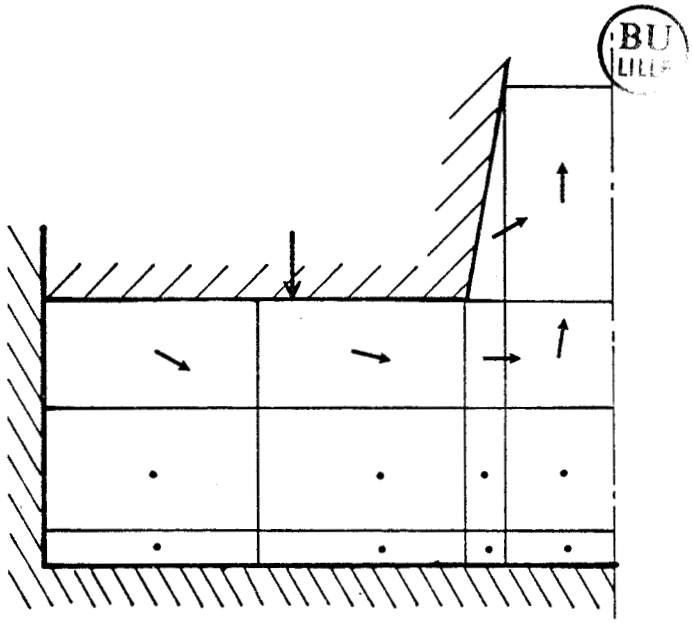
Fig. I.9 Maillage utilisé

BU LILLE

Pour une variation de hauteur de 5 mm, nous obtenons l'hodographe suivant :



Flux initial



Flux pour $\Delta H=5$

Fig. I.10 Représentation du flux de matière

Le temps de calcul corespondant à une variation de hauteur de 5 mm et pour 14 éléments a été de 3 mn 12 s. Les problèmes rencontrés pour mailler la structure se situent uniquement sur la détermination des coordonnées du noeuds A.

Pour ne pas avoir de problème lors du redimensionnement il est nécessaire que le noeud A appartienne au segment outil défini par les noeuds "maîtres" B et C.

L'observation de la grille déformée et de l'hodographe, obtenus avec notre méthode de champs de vitesses cinématiquement admissible, montre la grande concordance entre l'expérimentation et le calcul pour toutes les zones. L'approche du processus par GALOPIN ne nous permet pas de visualiser le gonflement de la zone III puisque par hypothèses nous gardons un rectangle tout au long de la déformation.

Remarques :

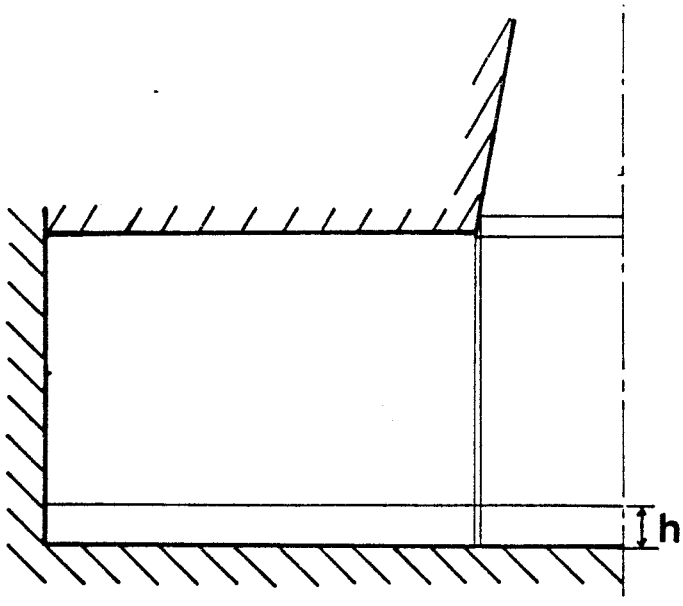


Fig. I.11 : Maillage initial

Si nous faisons le maillage qu'illustre la figure I.11, nous ne faisons jamais apparaître de zone morte dans le fond du conteneur et ceci quelque soit la valeur du paramètre h.

3.3 Conclusion

Ce test nous a permis de :

a) valider l'élément cinématique triangulaire,

b) montrer que pour des processus complexes nous ne pouvions pas nous contenter d'un maillage trop grossier.

I.4 TEST DE MAMALIS [29]

Les tests présentés jusqu'à présent, ont permis de valider :

1) les éléments cinématiques rectangulaires et triangulaires,

2) la méthode de champ de vitesses licite,

3) la rapidité du calcul,

4) la facilité de mise en oeuvre.

Il nous paraît important maintenant de nous tourner vers des applications industrielles puisque l'objectif de notre méthode est d'être un outil efficace pour les industries du formage.

Pour cela nous avons retenu le test de MAMALIS qui est le forgeage d'un carré suivant sa diagonale (cf. Fig. I.11).

Grâce aux résultats expérimentaux très détaillés, nous avons pu mettre en oeuvre un maillage complexe et tester notre séquence de redimensionnement automatique du fait de l'évolution très rapide de la forme de la pièce.

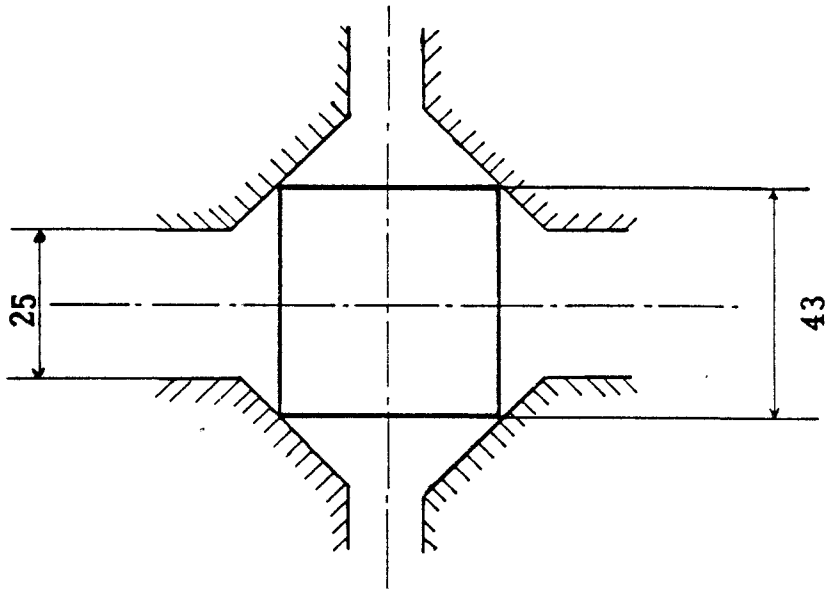


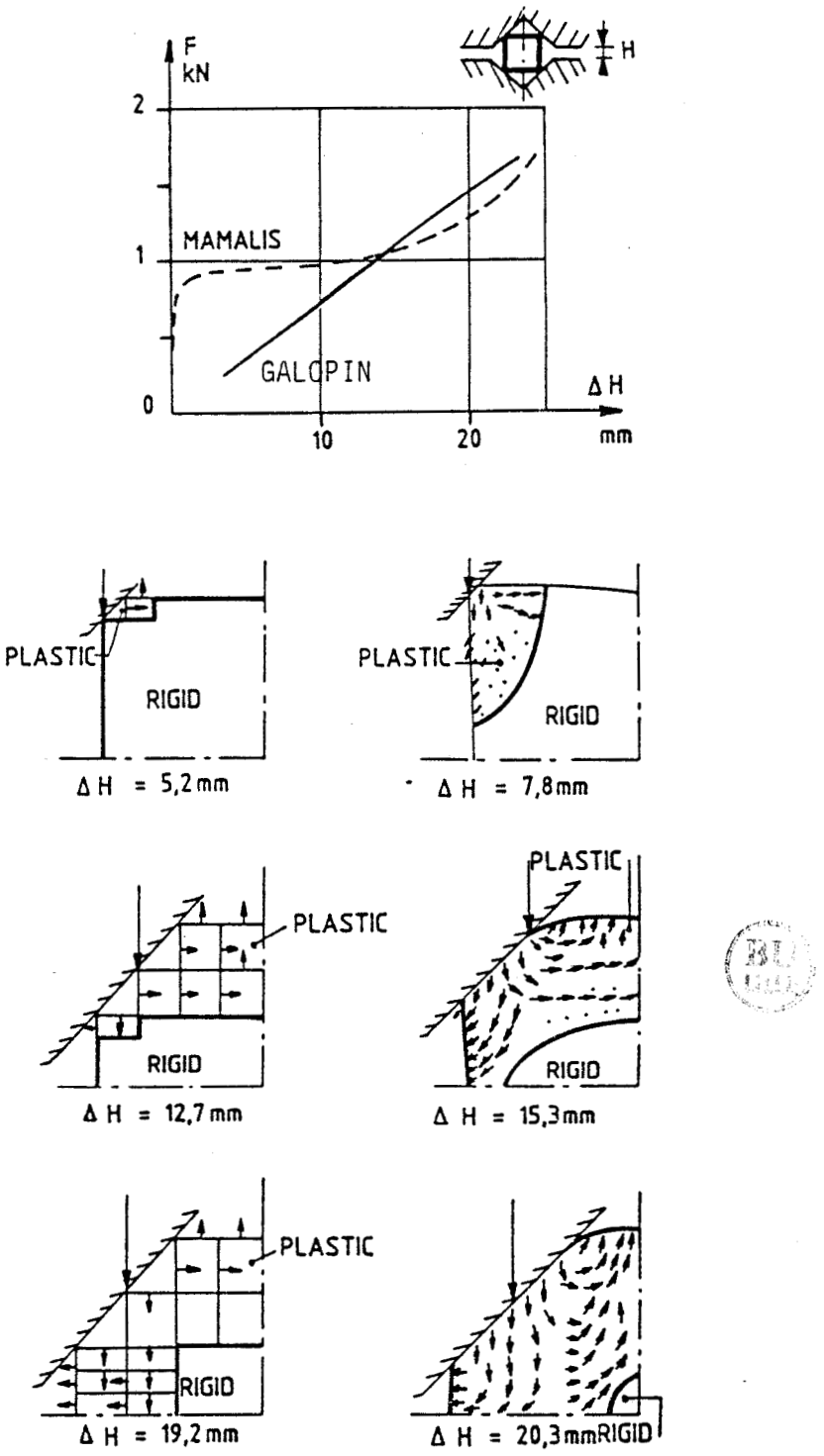
Fig. I.12 Forgeage d'un carré suivant sa diagonale.

La section du carré est de 43 x 43 mm et sa longueur est de 100 mm. L'angle de la matrice est de 90°. L'essai est effectué avec de la plasticine à la température ambiante. Pour observer le flux de matière durant le processus, une grille fut imprimée sur une fâce et les lignes d'écoulement ont été déterminées à partir d'une série de photos.

4.1 Etude

La comparaison a été effectuée avec un spécimen pour lequel les champs de vitesses sont définis à 3 étapes. La comparaison des trois champs de vitesses obtenus par MAMALIS et par le programme GALOPIN est excellente. Quand à la zone restant rigide, la prévision est conforme à l'expérience.

En ce qui concerne la force à mettre en oeuvre, nous observons des différences importantes pour des ΔH plus petits que 15 mm. Ceci est peut-être du à l'influence de la friction sur les plaques de perspex utilisées pour maintenir un état plan de déformations.



Resultats GALOPIN Resultats MAMALIS

Fig. I.13 Comparaisons entre les résultats de MAMALIS et ceux obtenus avec GALOPIN

4.2 Conclusion

Chronologiquement ce test fut le premier de nature industrielle. Il nous a confortés dans la capacité du code à prendre en compte des écoulements complexes et à redimensionner automatiquement le maillage. De plus les temps de calcul sont très faibles. De l'ordre de 10 s CPU par étape pour un maillage effectué avec 11 éléments.

I.5 RESULTATS OBTENUS PAR MIXAGE D'ELEMENTS CINEMATIQUES TRIANGULAIRES, RECTANGULAIRES ET TRAPEZOIDAUX DANS LE CAS D'UN FORGEAGE LATERAL.

Ayant à notre disposition plusieurs types d'éléments cinématiques, il nous est apparu qu'une confrontation des résultats obtenus par association des différents éléments était nécessaire pour connaître l'influence de ces derniers sur l'hodographe des vitesses, sur la puissance dissipée et la pression.

5.1 Test retenu

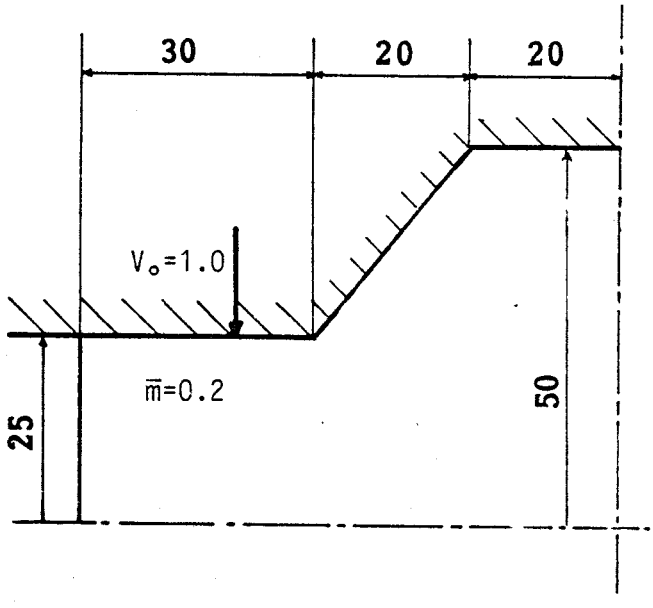


Fig. I.14 Test pour les associations d'éléments

Pour ce test nous avons fait 6 maillages différents qui sont :

1) TRIANGLE 1 : 1 élément cinématique triangulaire et 6 rectangulaires

2) TRIANGLE 2 : 2 éléments cinématiques triangulaires et 15 rectangulaires

3) TRAPEZE 1 : 1 élément cinématique trapezoïdal et 7 rectangulaires

4) TRAPEZE 2 : 2 éléments cinématiques trapézoïdaux et 8 rectangulaires

5) TRIANGLE-TRAPEZE : 1 élément triangulaire, 1 trapézoïdal et 12 rectangulaires

6) TRAPEZE-TRIANGLE : 1 élément trapézoïdal, 1 triangle et 11 rectangles.

5.2 Conclusions

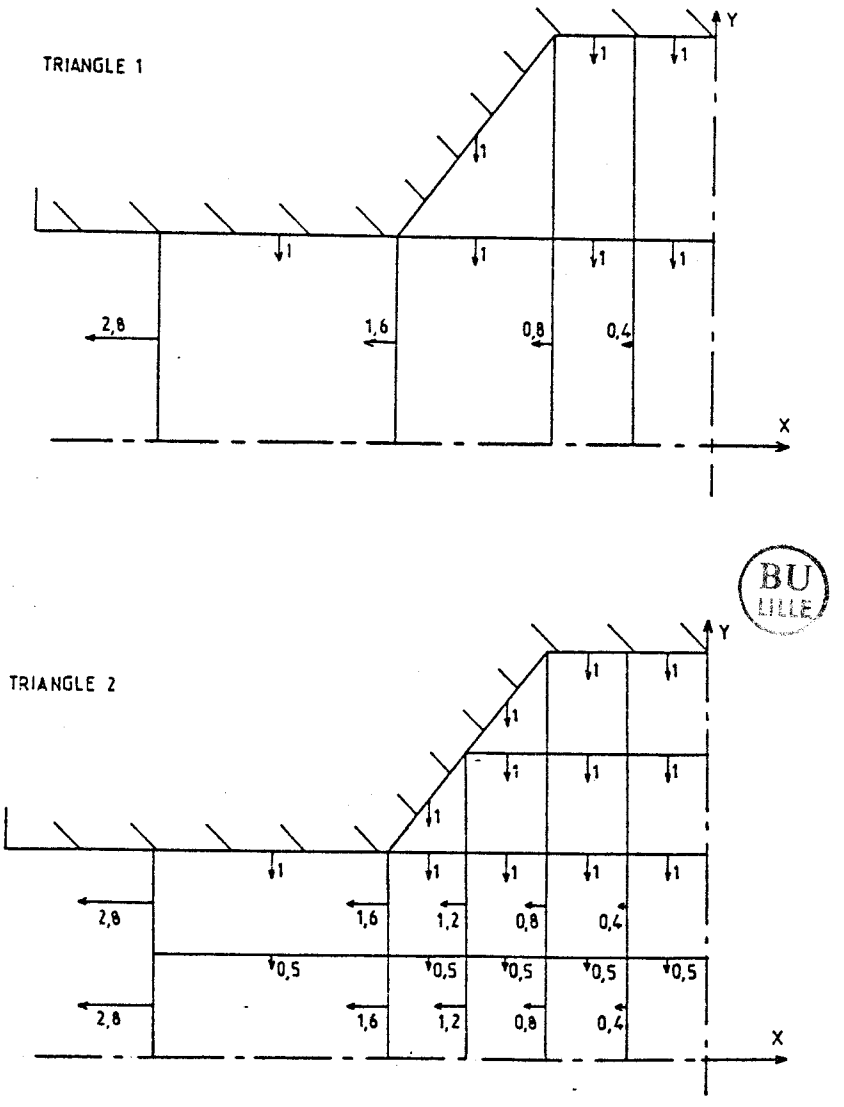
Les figures I.15, I.16, I.17 montrent l'hodographe des vitesses pour chacun de ces maillages, et la figure I.18 la distribution de pression. Nous constatons :

a) L'incorparation d'élément cinématique triangulaire rigidifie le processus ;

b) Les éléments trapezoïdaux permettent d'obtenir des écoulements complexes mais, en contre partie, l'énergie à fournir est plus importante ;

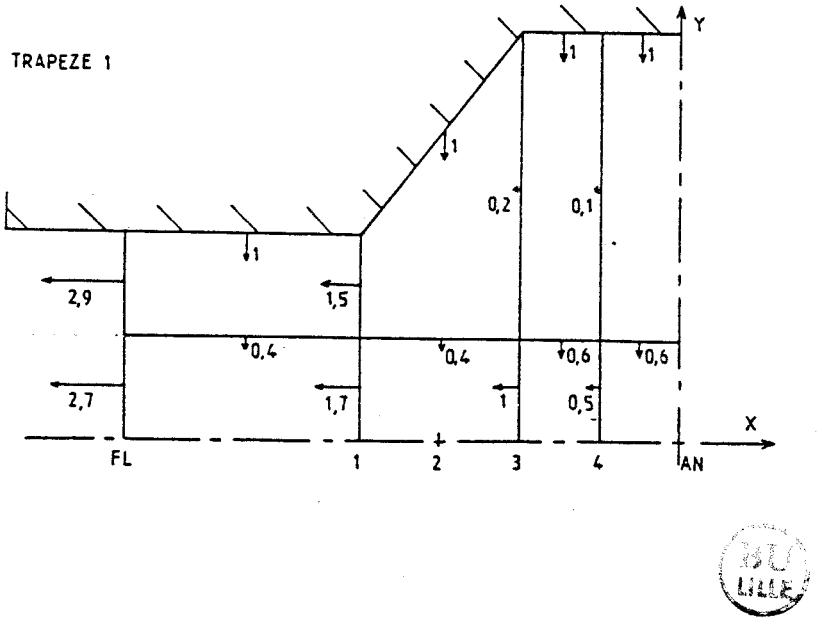
c) Nous obtenons le même hodographe des vitesses lorsque nous augmentons le nombre de régions pour un mixage donné (ex : TRIANGLE 1 et TRIANGLE 2) donc stabilité de la solution simpliciale ;

d) La différence observée sur la distribution de contrainte à l'interface mobile provient du cisaillement engendré par les discontinuités de vitesses.



BU LILLE

Fig. I.15



BU LILLE

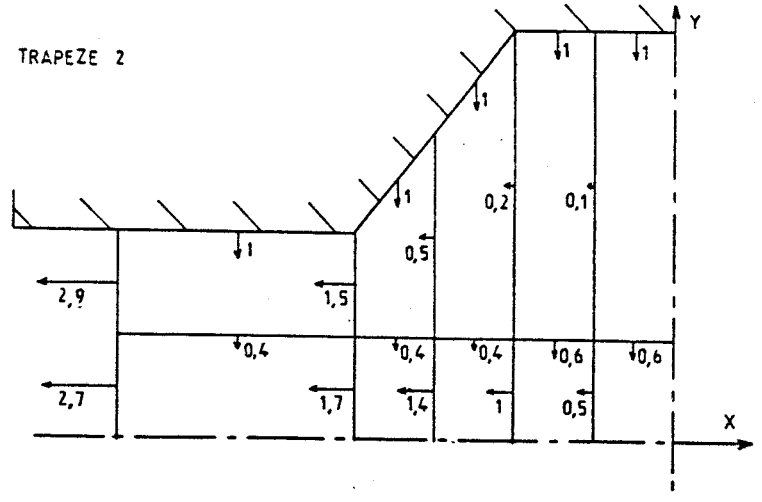
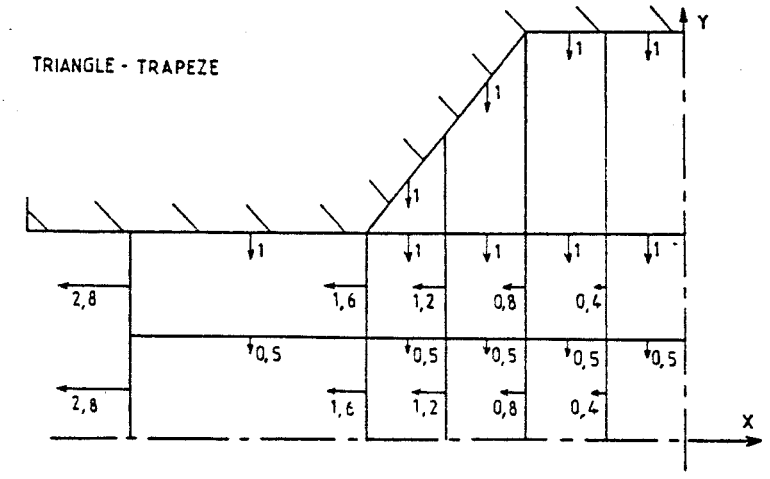


Fig. I.16



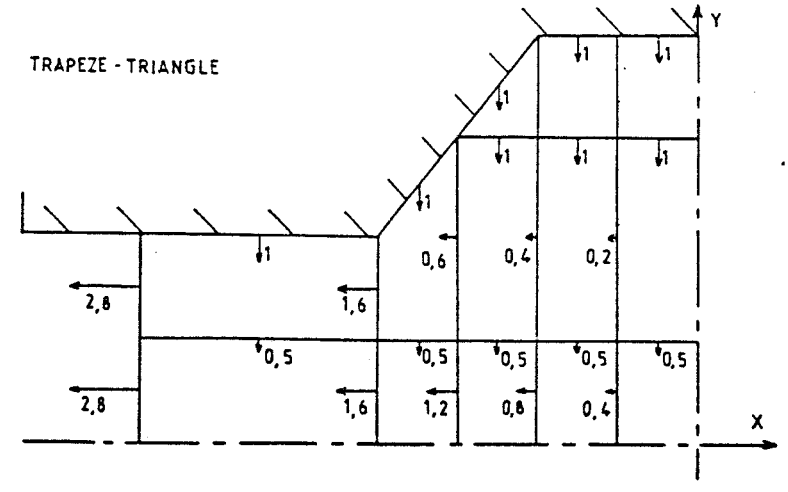


Fig. I.17

BU
LILLE

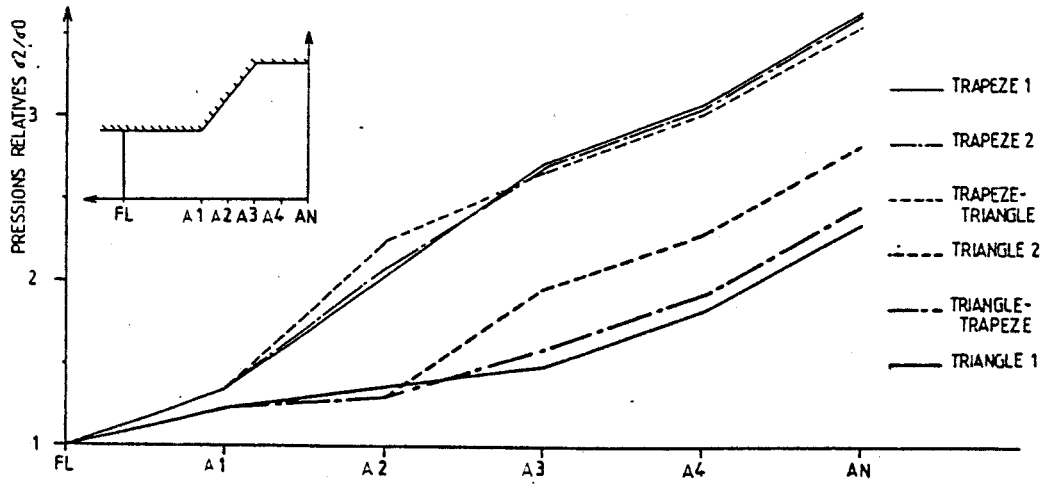


Fig. I.18

I.6 TEST DE LYAPUNOV - KOBAYASHI

Le test de LYAPUNOV - KOBAYASHI a été retenu pour observer le flux de matière durant la compression ainsi que pour tester les possibilités de remaillages dans les cas extrêmes. Ici il est interessant d'observer la prise en compte par le programme de l'environnement dû aux outillages, et sa répercussion sur l'évolution de la géométrie de la pièce.

6.1 Schéma du processus

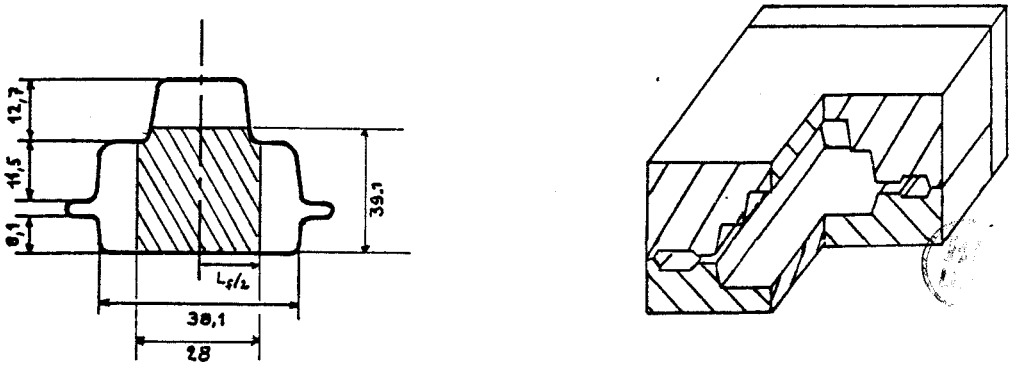


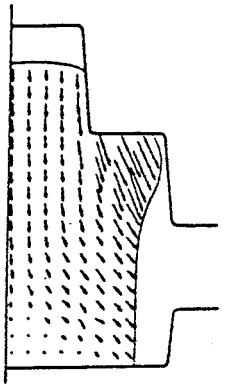
Fig. I.19 Forgeage complexe

L'expérimentation a été effectuée avec de la plasticine à température ambiante. La vitesse de l'outillage est très lente (1.27 mm/mn), le coéfficient de frottement sur les outillages $\overline{m}$ est égal à 0.3.

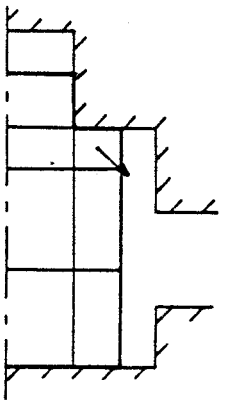
6.2 Résultats

Nous avons modélisé les outillages sans tenir compte des angles de dépouilles. La comparaison est faite par 3 étapes du processus (cf. Fig. I.20). Il nous est apparu utile de regarder les variations de la hauteur au centre et de la largeur moyenne. (cf Fig.I.21). Le temps CPU de calcul pour cette modélisation (8 éléments) a été de 1 mn 21 s. Ceci comprend l'ensemble des étapes.

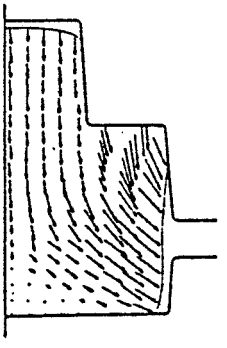
Fig. I.20 - Hodographes



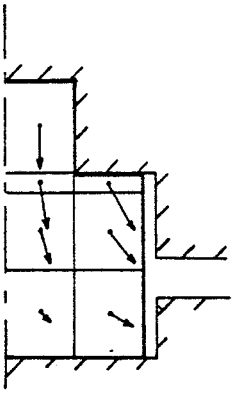
ΔH=6 mm



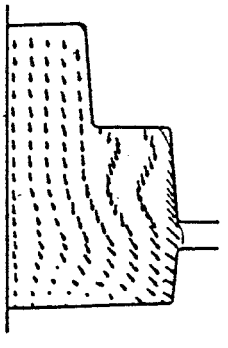
ΔH=6mm



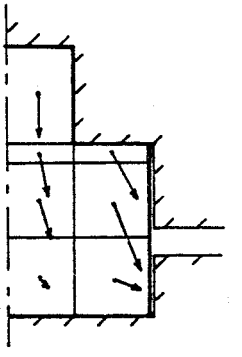
ΔH=12mm



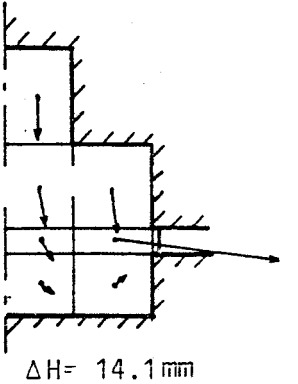
ΔH=12mm



Δ H=14 mm



ΔH=14 mm



ΔH= 14.1mm

Experience avec plasticine

Galopin

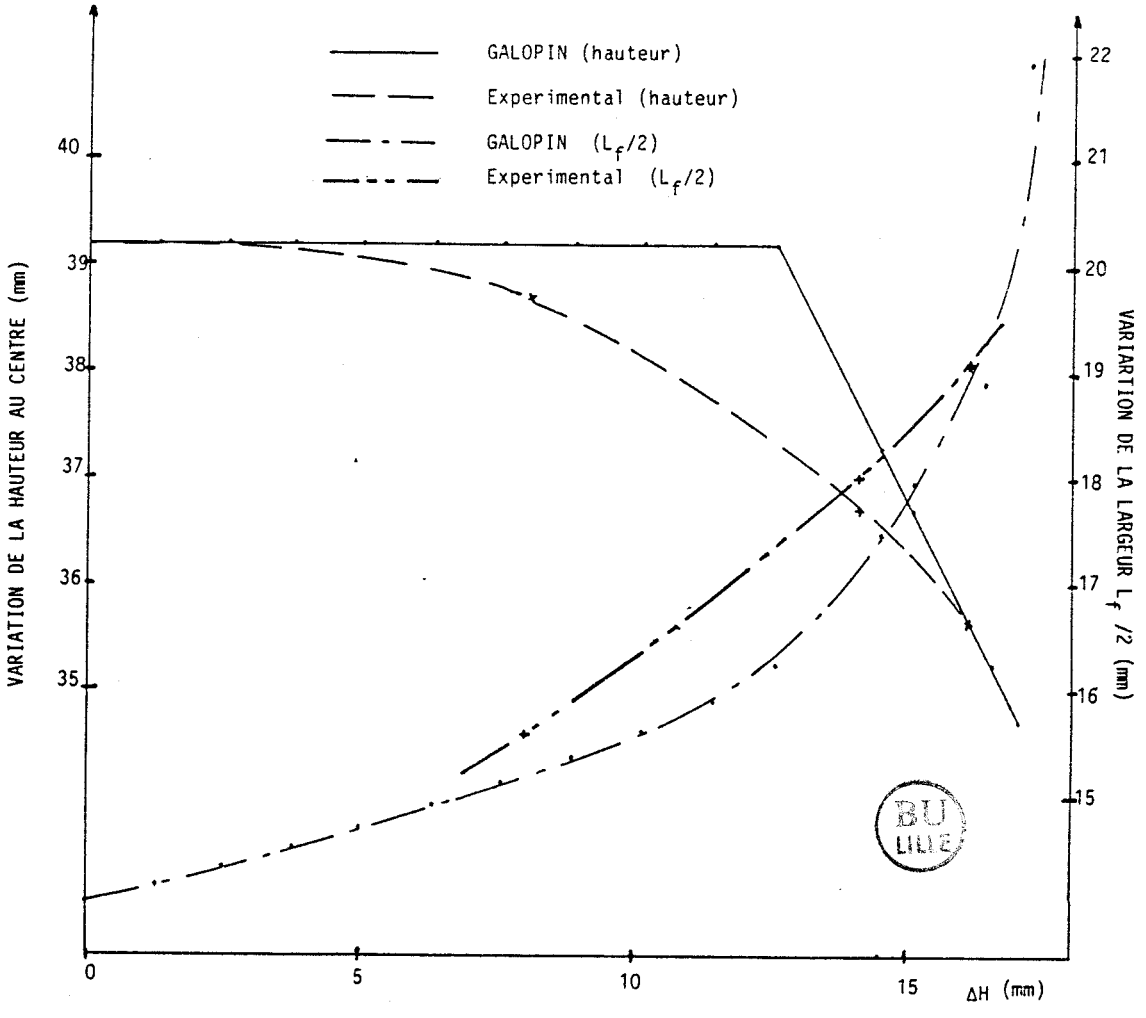


Fig. I.21 - Evolution de la hauteur et de la largeur

Si nous modélisons les outillages avec les angles de dépouilles, nous obtenons une meilleure approximation du flux de matière et donc des variations de la hauteur au centre et de la largeur moyenne. (cf Fig.22,23). Le temps CPU pour 11 régions a été de 5 mn pour l'ensemble des étapes.

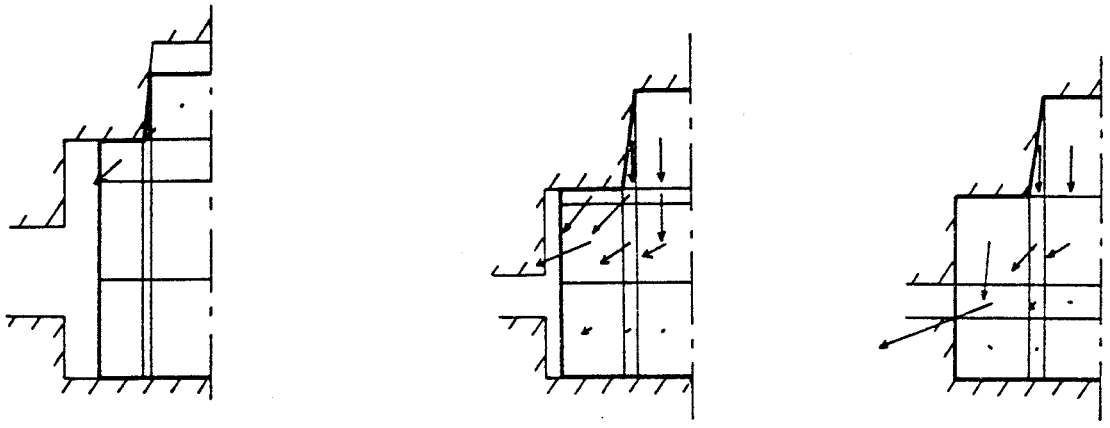


Fig.I.22

BU LILLE

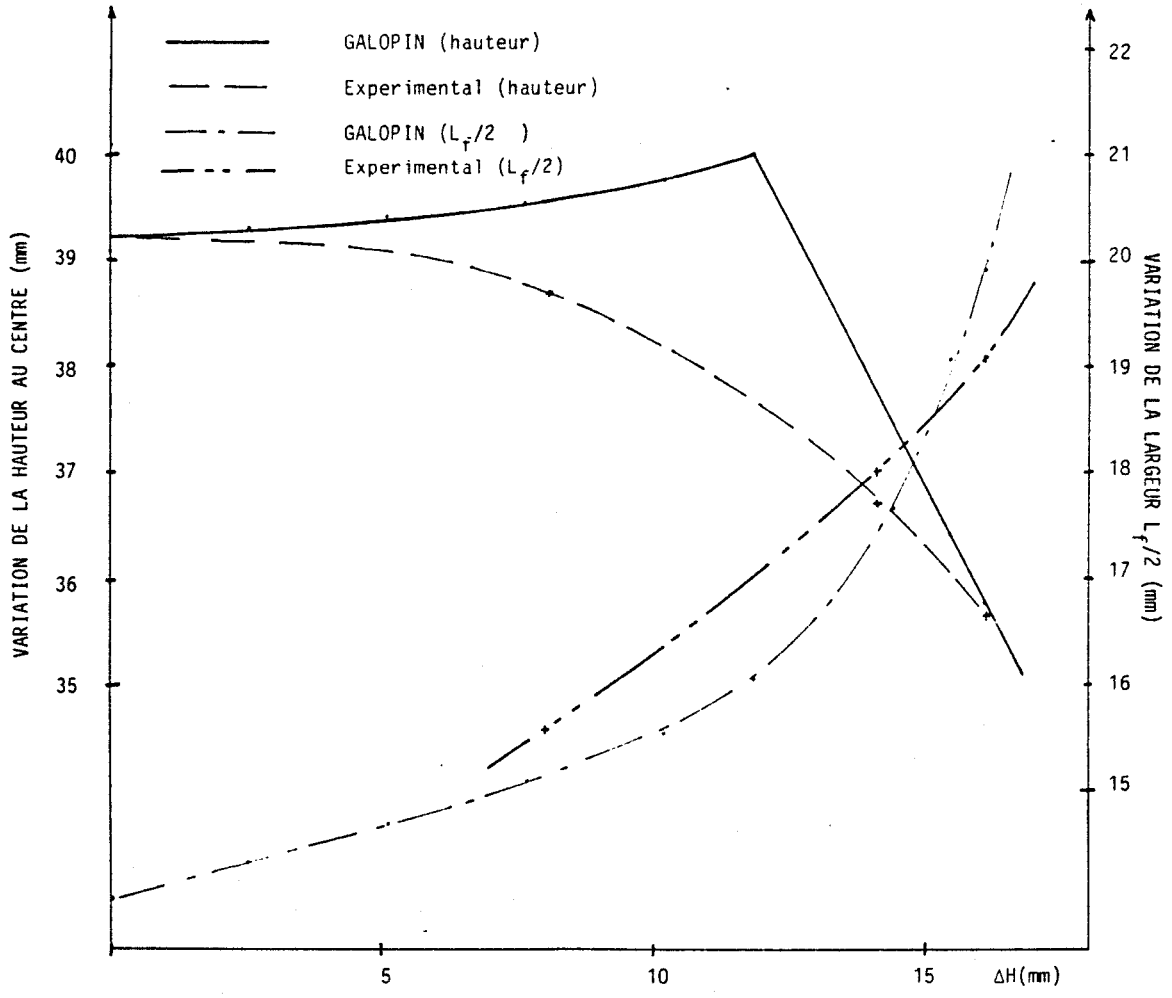


Fig.I.23

6.3 Conclusion

Ce test industriel nous a permis de valider notre séquence de remaillage automatique.

Il est à constater que pour un cas de forgeage complexe comme celui-ci il ne faut au maximum que 5 mn de temps CPU pour analyser tout le processus.

Nous venons dans ce chapitre de valider l'efficacité de notre formulation de champ de vitesse licite et du logiciel correspondant pour les déformations planes.

C H A P I T R E II

EXEMPLES TYPES D'UTILISATION DES ELEMENTS CINEMATIQUES EN DEFORMATIONS AXISYMETRIQUES

Comme pour le chapitre I, nous présentons les différentes applications des éléments cinématiques faites pour des problèmes en déformations axisymétriques de difficulté croissante. Pour chaque test nous donnerons des mesures de performance du programme, c'est-à-dire :

- précision de la solution obtenue,
- rapidité de mise en oeuvre,
- temps de calcul,
- influence de la modélisation sur les résultats ;

afin de valider l'efficacité de la formulation et du logiciel correspondant.

Les exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations axisymétriques sont :

1- Compression de cylindre.

2- Compression d'anneau.

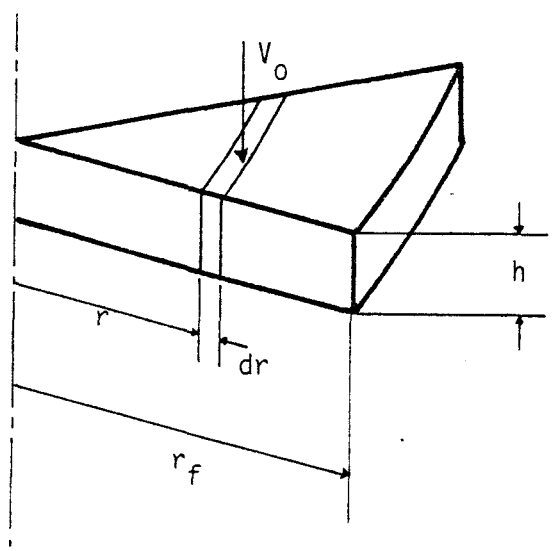
3- Filage avant, Filage arrière.

4- Test d'ALTAN.

II.1 COMPRESSION DE CYLINDRE

L'objectif de ce test est de valider la formulation employée pour un élément cinématique rectangulaire axisymétrique. Nous rappelons que l'utilisation de la méthode simpliciale nous a amenés à linéariser la puissance dissipée interne. Il est important de connaître l'influence de la modélisation sur les résultats.

1.1 Schéma de base



r_i = 5 mm

h = 10 mm

σ_o = 1N/mm^2

V_o = 1 mm/s

Fig. II.1 - Compression de barre

1.2 Etude de stabilité de la solution

Nous avons modélisé ce processus avec 2, 4, 9 éléments et pour une étape de calcul nous avons obtenu :

Nombre d'éléments	Temps CPU	$\dot{W}_T$ (puissance en Nmm/s
2	6 s	86.650
4	10 s	86.658
9	5 mm, 21 s	86.649

Les premières constatations que nous pouvons en tirer sont :

a- Stabilité de la solution quel que soit le nombre d'éléments.

b- Accroissement exponentiel du temps de calcul lors de l'augmentation du nombre d'éléments.

Ce test permet de valider la linéarisation de la puissance dissipée interne d'un élément rectangulaire. En contre partie cette linéarisation augmente le nombre de contraintes à traiter par le simplexe d'où une pénalisation du temps de calcul.

1.3 Etude de la distribution de contrainte sur l'interface mobile

Comme dans le § I.1.3 nous confrontons les résultats obtenus avec notre méthode de détermination de contraintes et ceux obtenus par des méthodes comme celles de :

a) KIUCHI et MURATA [26]

b) Méthode des tranches.

Pour la méthode des tranches nous avons la relation suivante

$$-\frac{\sigma_z}{\sigma_0} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\bar{m}}{h}(r_f - r) \ .$$

Pour KIUCHI, l'introduction d'un incrément de vitesse $+\Delta V$ sur une tranche imaginaire en contact avec l'outillage permet de déterminer la pression sur celle-ci. La technique employée a été exposée dans le chapitre V première partie. La figure II.2.2 illustre la comparaison effectuée, pour différentes valeurs du coefficient de frottement $\bar{m}$

Nous obtenons, vis-à-vis de ces méthodes, de très bons résultats puisque nous arrivons à simuler une colline de contraintes. Ce phénomène existe expérimentalement, comme nous le montre la figure II.2.1.

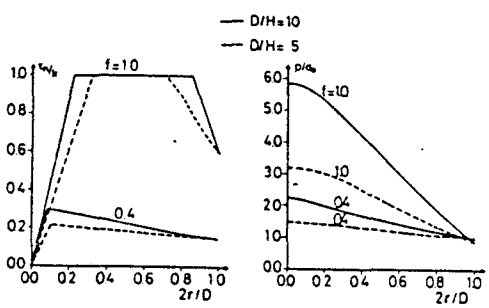


Fig. II.2.1 Distribution de la contrainte normale sur l'interface matière-outil pour des rapports D/H=5 et 10 et pour 2 coefficients de frottement f=0.4 et f=1.0. ($f=\bar{m}$)

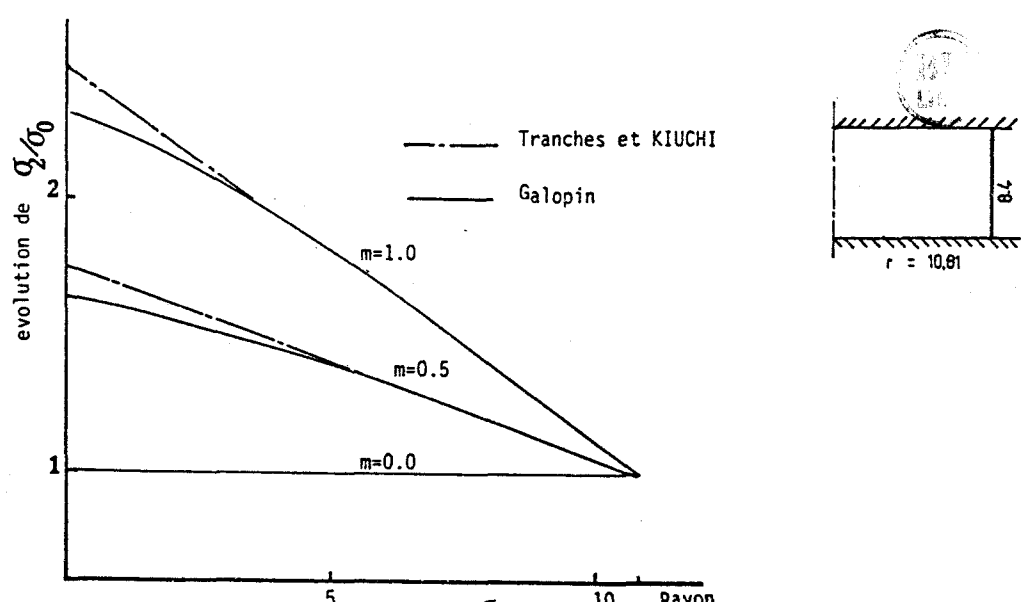


Fig.II.2.2 - Evolution de $-\frac{\sigma_z}{\sigma_0}$ sur l'interface mobile

1.4 Conclusion

Ce test a permis de constater :

a- la stabilité de la solution, ce qui valide la linéarisation de la puissance interne ;

b- la validation de notre méthode de détermination des contraintes en déformations axisymétriques ;

c- que le temps CPU est une fonction exponentielle du nombre de régions ;

il faudra donc optimiser le maillage pour ne pas être pénalisé par le temps de calcul.

II.2 COMPRESSION D'ANNEAU

Notre objectif est de montrer que notre formulation et le logiciel correspondant peuvent prendre en compte deux flux de matière de directions opposées et que d'autre part la forme finale dépend des conditions de frottement imposées entre les plateaux et le produit.

1.1 Résultats

Dans l'hypothèse d'un frottement nul, l'anneau se déforme de la même façon qu'un cylindre plein, chaque élément s'écoulant vers l'extérieur d'une quantité proportionnelle à sa distance de l'axe, en particulier les éléments constituants le cercle intérieur de l'anneau.

Si le frottement augmente, ce déplacement diminue et à partir d'une certaine valeur du coefficient de frottement on obtient un écoulement vers l'extérieur et un écoulement vers l'intérieur.

Des analyses théoriques fournissent des résultats équivalents (HAWKYARD et JOHNSON [8], BURGDOFF [9] en accord avec les expériences qui ont été effectuées par DEPIERRE et MALE [10]). La figure II.3 associe les résultats obtenus avec GALOPIN, les résultats théoriques de JOHNSON et BURGDOFF et les résultats expérimentaux de MALE.

1.2 Conclusion

La méthode des éléments cinématiques permet de donner des résultats cohérents lorsqu'il y a apparition de flux de matière de directions opposées. D'autre part la variation du diamètre intérieur est bien fonction du frottement et les résultats de GALOPIN sont conformes aux résultats expérimentaux.

II.3 FILAGE

Dans ce paragraphe nous comparons les résultats obtenus par BRAMLEY et OSMAN [28] c'est-à-dire provenant du programme UBET et ceux obtenus par GALOPIN pour les processus de filage. Ce test nous permet en outre de tester notre élément triangulaire en déformations axisymétriques. Nous traiterons deux types de filage.

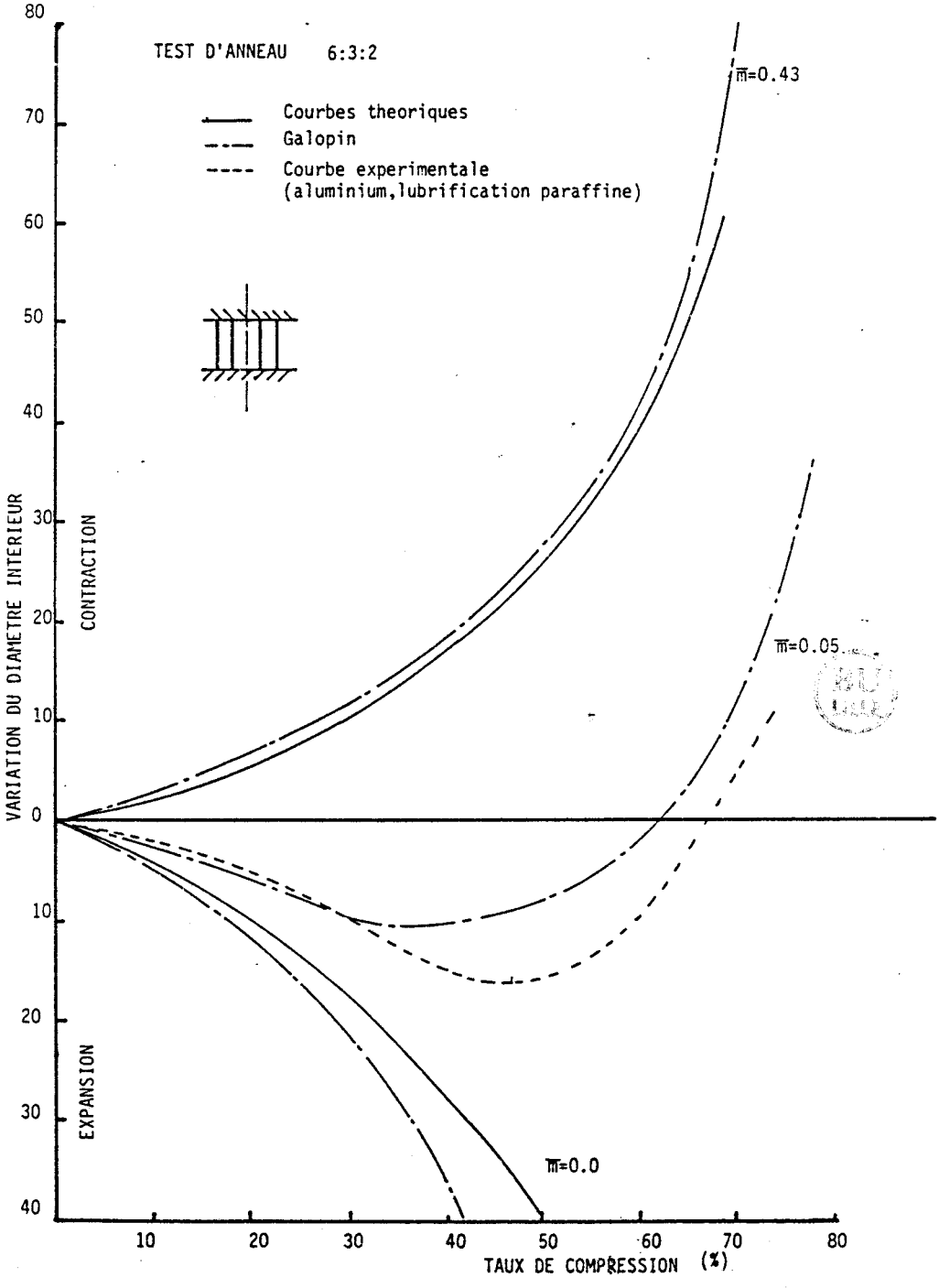


Fig. II.3 - Variation du diamètre intérieur d'un cylindre lors d'une compression

a) Filage avant. La filière par laquelle la matière doit sortir se situe dans le fond opposé au poinçon.

b) Filage arrière. La filière est portée par le poinçon.

Il existe un troisième type de filage, que nous ne traiterons pas, c'est le filage latéral pour lequel la filière est sur la paroi latérale du conteneur.

A un autre point de vue, la filière peut être ronde, carrée, polygonale. Les parois de la cavité qui succèdent à la filière peuvent être cylindriques mais aussi être en dépouille, c'est-à-dire conique (cf. Fig. II.5).

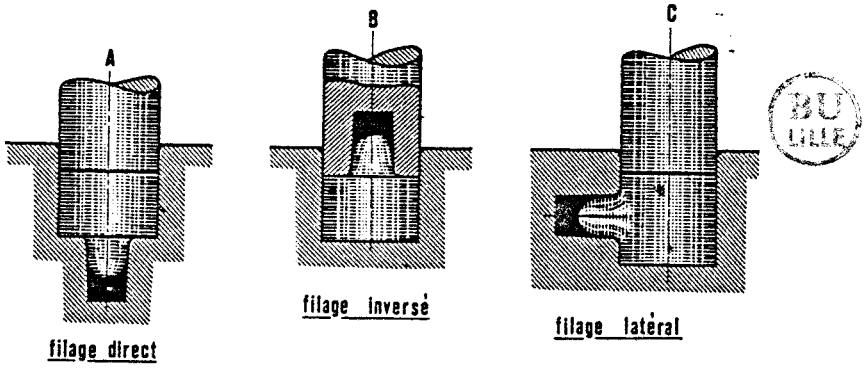


Fig. II.4 - Les différents filages.

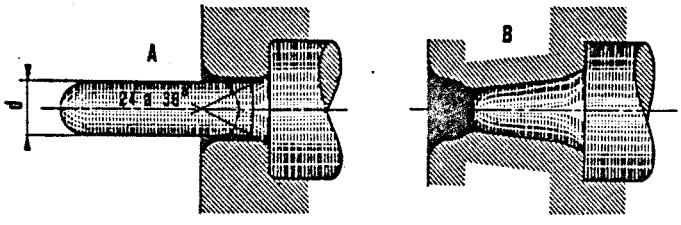


Fig. II.5

3.1. Filage avant

Nous allons étudier ce processus pour des parois cylindriques (α=0°) ou coniques (α =60°). Nous avons fait pour chacun de ces tests deux maillages. Les conditions des essais sont les suivants :

- le coefficient de frottement sur le poinçon est de : 1 :
- le coefficient de frottement sur les parois du conteneur est de : 0.1.

a) Parois coniques (α=60°)

Le champ de vitesses obtenu par notre méthode que ce soit pour 8 ou 13 éléments est identique à celui obtenu par Osman (cf. Fig. II.6). En ce qui concerne les discontinuités de vitesses, elles apparaissent seulement là où il y a une discontinuité géométrique. Avant, comme après, cette discontinuité les éléments sont rigides. C'est typiquement ce que l'on observe dans la réalité.

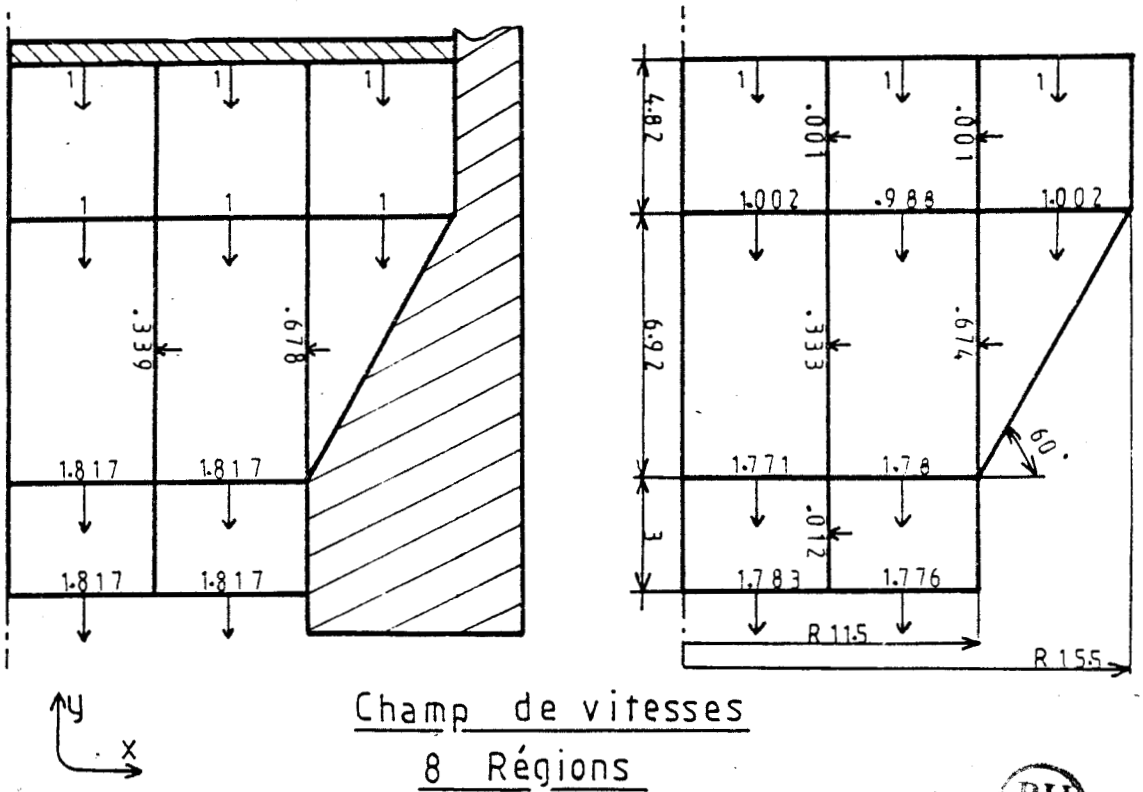
Au niveau du temps de calcul nous avons mis pour :

8 régions : 1mn42s

13 régions : 18mn

b) Parois cylindriques (α=0°)

Avec le programme GALOPIN nous n'obtenons pas le même champ de vitesses (cf. Fig. II.7) qu'Osman-Bramley. Quel que soit la finesse du maillage, nous récupérons un champ de vitesses homogène suivant les droites // à l'axe Oz. Ce phénomène est probablement dû à la linéarisation de la puissance dissipée interne. Pour 14 régions le temps CPU est de : 42mn.



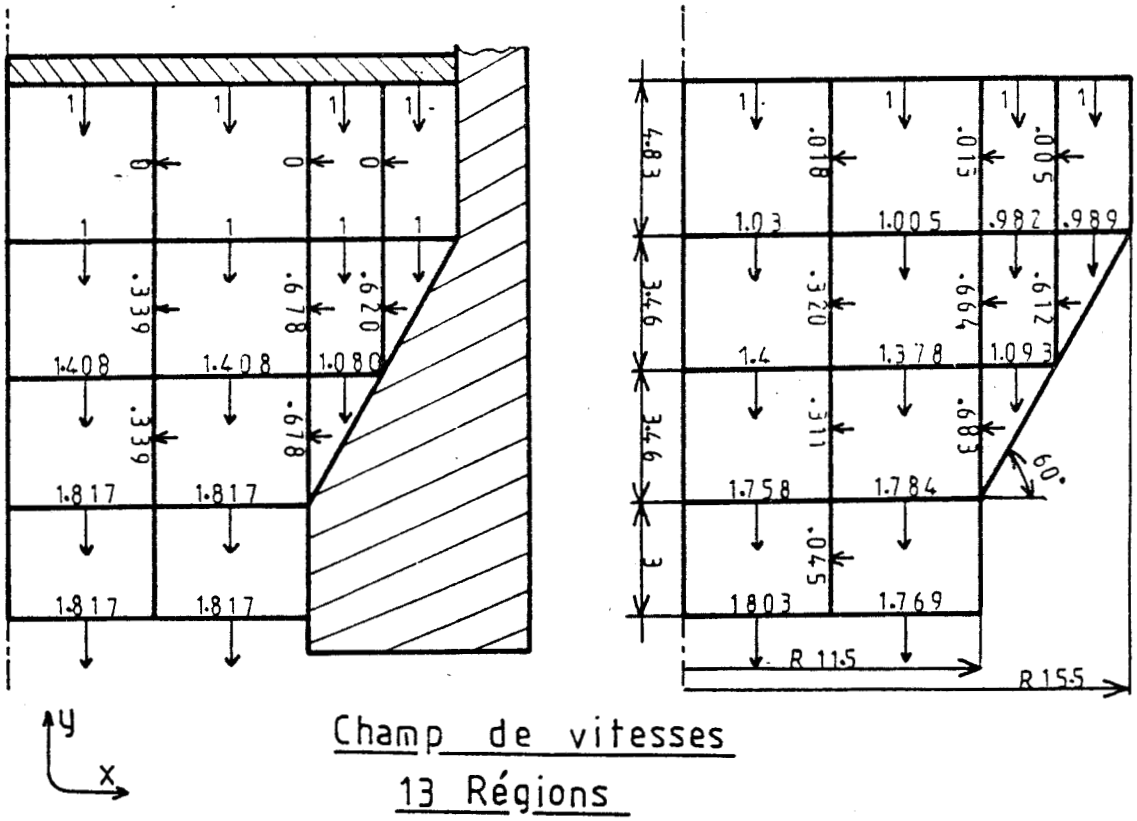
Champ de vitesses

8 Régions

BU LILLE

G A L O P I N

O S M A N - B R A M L E Y



Champ de vitesses

13 Régions

Fig. II.6 - Filage avant - avec parois côniques.

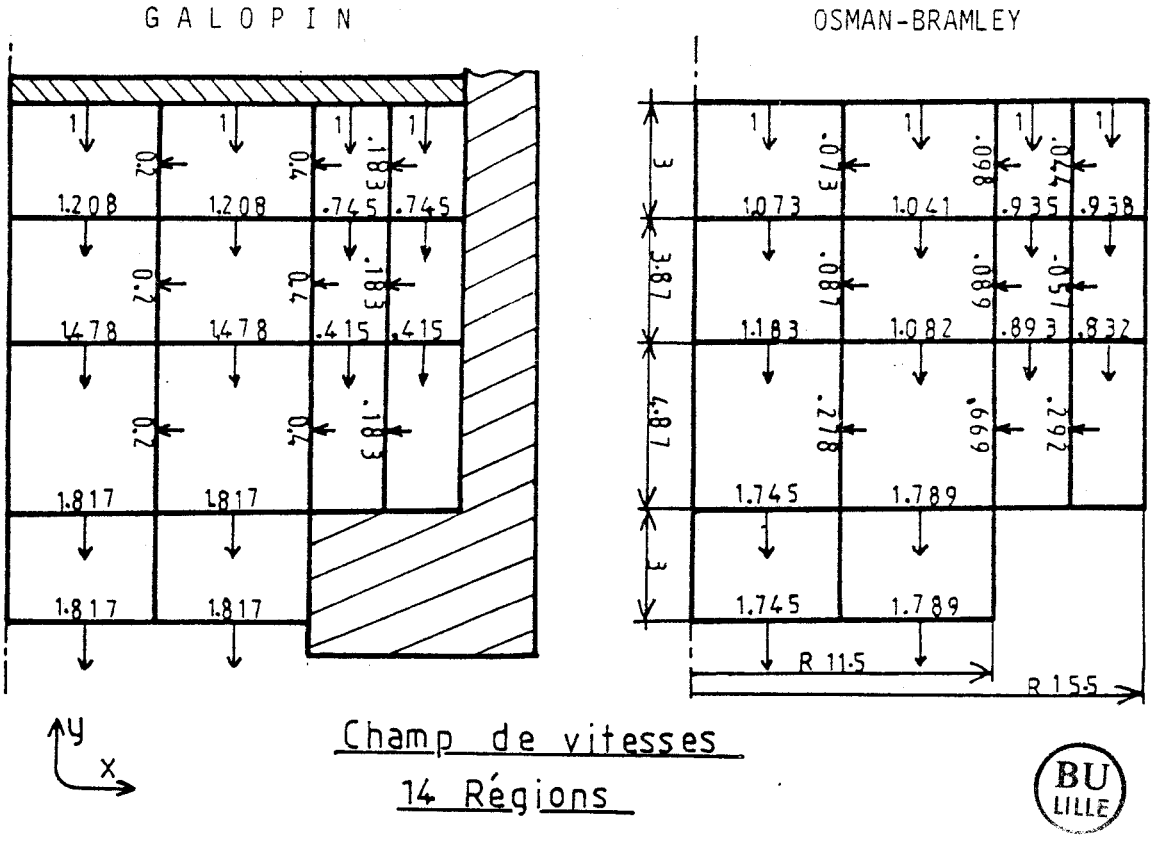


Fig. II.7 - Filage avant avec parois cylindriques.

Conclusion

Ce test de filage avant nous a permis :

a) de valider l'élément cinématique triangulaire ;

b) de situer GALOPIN vis-à-vis d'un logiciel de calcul utilisant une borne supérieure généralisée et de constater que les résultats concordaient dans leur ensemble ;

c) de montrer que la finesse du maillage n'avait pas d'influence dans ce cas sur les résultats ;

d) de constater l'augmentation importante du temps de calcul dans le cas où le maillage est trop fin.

3.2 Filage arrière

Dans cette étude nous allons nous préoccuper du champ de vitesses ainsi que de la distribution de contrainte sur les outillages. Nous avons comparé nos résultats avec ceux de KIUCHI et MURATA [26] et ceux de CHRISTENSEN [35].

Nous avons comme conditions d'essai, des frottements rugueux sur les outillages mobile et fixe ($\bar{m}$=1.0) et une vitesse de descente de l'outil égale à 1.

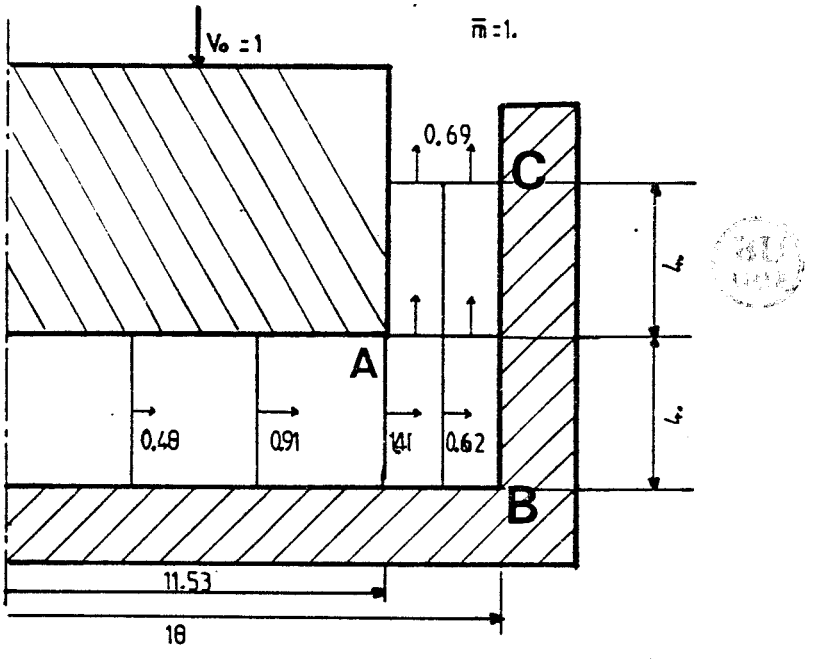


Fig. II.8 - Maillage utilisé et hodographe des vitesses.

Conclusion

. Les résultats que nous obtenons sur la distribution de contrainte sur les outillages sont excellents. ils sont très proches de ceux de CHRISTENSEN et semblent bien appréhender la réalité. Ce test, associé à ceux effectués précédemment, valide notre méthode de détermination des contraintes sur les outillages.

II.4 TEST D'ALTAN

Nous avons voulu tester notre code avec les expériences réalisées par T. ALTAN [12] sur un problème industriel de forgeage en matrice fermée. Ce test est comparable à celui de LYAPUNOV-KOBAYASHI en déformations planes.

Les conditions expérimentales sont les suivantes :

- lopin initial : ø 76.2 x 42.93 (en mm) ;
- matière : plomb ;
- vitesse de descente de l'outil : 33.87 mm/s ;
- lubrification.

Pour notre calcul nous avons pris :

- une contrainte d'écoulement : σ_o = 5 daN/mm ;
- un coefficient de frottement pièce/outil de 0.1.

4.1 Schéma du processus

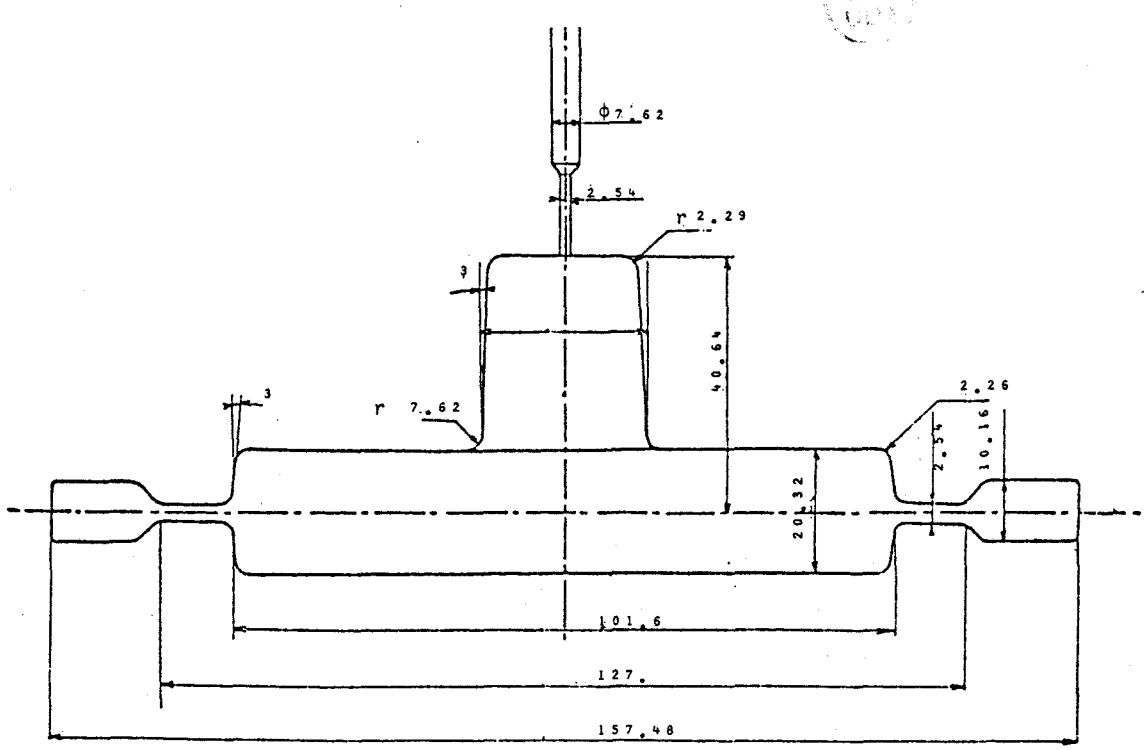


Fig. II.11 - Test d'ALTAN.

4.2 Résultats

Pour étudier ce test nous avons effectué le maillage suivant :

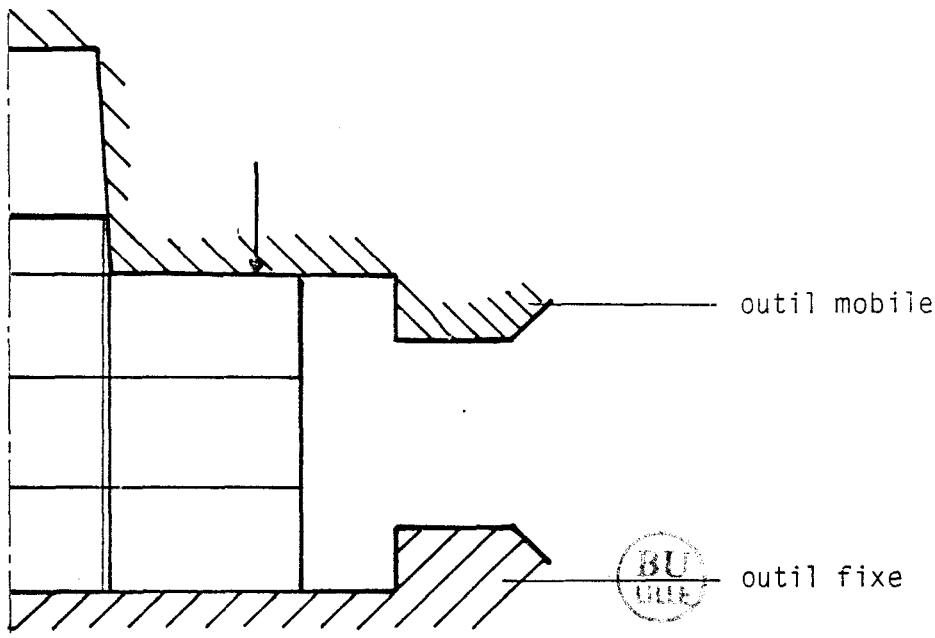


Fig. II.12 - Maillage de la pièce du test d'ALTAN.

Compte tenu des résutlats expérimentaux, nous nous sommes attachés à étudier les évolutions des dimensions géométriques ainsi que la force à mettre en oeuvre.

Pour obtenir l'ensemble du processus (jusqu'à écoulement de la matière dans la bavure) il nous a fallu environ 2 heures de temps CPU. Par rapport au test de LYAPUNOV-KOBAYASHI nous avons un rapport de 20.

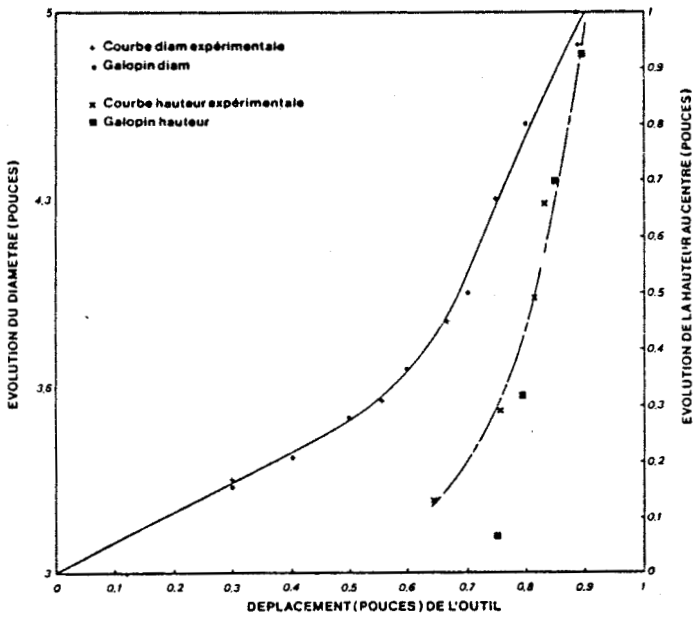
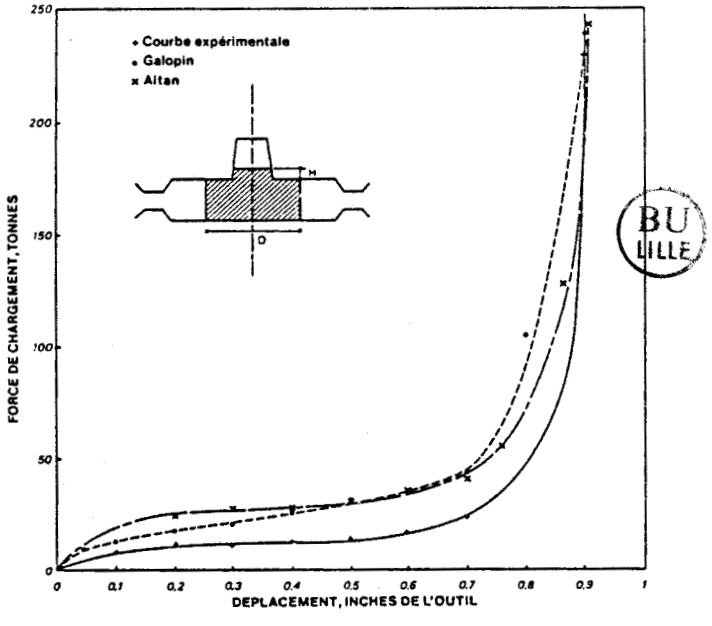


Fig. II.13 - Evolution des dimensions géométriques.



BU LILLE

Fig. II.14 - Evolution de la force.

Nous observons une bonne prévision des écoulements et des chargements grâce au programme GALOPIN. Nous avons noté cependant, que l'obtention de résultats précis était subordonnée à de faibles incréments de temps. Si on choisit des pas de temps importants nous obtenons une augmentation du diamètre au détriment de la hauteur au centre. Il faut donc privilégier le nombre de pas de calcul plutot que le nombre d'éléments.

Pour la courbe force déplacement, les différences observées entre l'expérimentation et la courbe obtenue par GALOPIN proviennent de la loi du matériau (R.P.P.). Dans l'avenir une prise en compte de l'écrouissage permettra d'affiner le résultat sur la force.

4.3 Conclusion

Ce test industriel nous a permis de montrer l'importance du pas de temps sur l'évolution des dimensions géométriques.

CONCLUSION GENERALE

Nous venons de présenter dans ce mémoire, une méthode de calcul de champ de vitesses cinématiquement admissible afin d'étudier les écoulements plastiques en déformations planes ou axisymétriques et son logiciel informatique associé destinés aux entreprises de formage répondant aux critères suivants :

a) simplicité de mise en oeuvre,

b) rapidité du calcul,

c) bonne corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux.

Ce travail nous a conduit à définir des éléments cinématiques de formes rectangulaires, triangulaires ou trapézoïdales afin de prendre en compte les géométries complexes d'une section de pièce.

D'autre part, nous avons mis au point une méthode de prévision de la contrainte normale à l'interface outil-matière associant champ de vitesses cinématiquement admissible et champ de contraintes statiquement admissible.

Nous avons proposé, dans la première partie, les aspects théoriques et les formulations mathématiques, que nous avons présentés en 5 chapitres:

CHAPITRE I : Introduction et aspects bibliographiques,

CHAPITRE II : Méthode de la borne supérieure.

CHAPITRE III : Formulation mathématiques des éléments cinématiques.

CHAPITRE IV : Méthode de calcul simplicial.

CHAPITRE V : Détermination des contraintes à l'interface pièce-outil.

Nous avons montré la faisabilité d'une formulation d'un champ de vitesses admissible pour l'élément dépendant seulement des vitesses aux frontières et l'obtention d'une forme linéaire de la puissance dissipée dépendante des vitesses aux frontières. De ce fait nous avons pu mettre en oeuvre un algorithme du simplexe et obtenir, outre la minimisation de la puissance dissipée, l'hodographe des vitesses dans la section de la pièce. Nous avons montré aussi la bonne prévision de la contrainte sur l'interface outil-matière par notre méthode de détermination.

Dans la second partie, nous nous sommes attachés à la mise en oeuvre de nos méthodes de calcul. Le choix que nous avons fait est de développer indépendamment un pré-processeur, un processeur de calcul et un post-processeur. Les aspects structure et architecture du progiciel GALOPIN furent définis dans 3 chapitres :

CHAPITRE I : Pré-processeur du programme GALOPIN.

CHAPITRE II : Programme GALOPIN.

CHAPITRE IV : Post-processeur du programme GALOPIN.

Dans les chapitres I et III, nous avons adopté une approche syntaxique du type "code d'éléments finis" afin de proposer un produit assimilable par un grand nombre d'utilisateurs. De plus, grâce à un langage orienté doté d'une structure hiérarchisée propre nous pouvons introduire très facilement de nouvelles commandes sans avoir à modifier celles existantes. En ce qui concerne le chapitre II nous présentons les algorithmes généraux permettant le calcul simplicial ainsi que le remaillage de la pièce au cours de la déformation. Le langage informatique utilisé est le FORTRAN 77 standard permettant une portabilité maximale du produit. Seuls quelques sous programmes graphiques sont spécifiques de la bibliothèque graphique utilisée.

Une analyse des performances, des méthodes mises au point par nos soins et du logiciel associé, est proposée dans la troisième partie qui se compose de deux chapitres :

CHAPITRE I : Exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations planes.

CHAPITRE II : Exemples types d'utilisation des éléments cinématiques en déformations axisymétriques.

Ces tests ont montré :

a) une bonne validation des formulations employées pour les différents éléments cinématiques ;

b) une rapidité excellente dans le calcul en déformations planes mais celle-ci se dégrade sensiblement pour les processus en déformations axisymétriques ; cet état de fait est dû à la linéarisation de la puissance dissipée interne qui augmente le nombre de contraintes à traiter par le simplexe ;

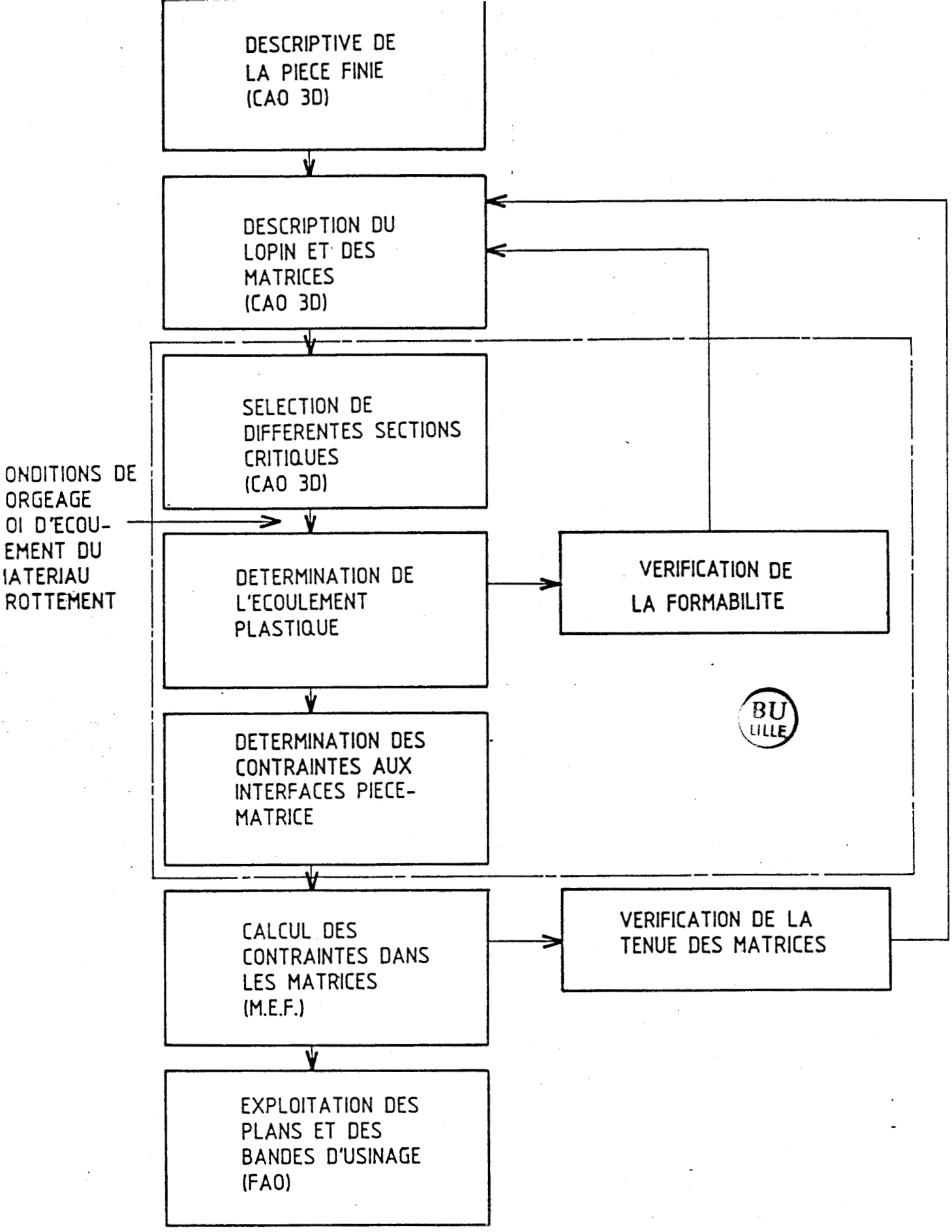
c) un bon fonctionnement du redimensionnement automatique qui permet l'étude en continu d'un processus de formage et par là même une modélisation optimisée des matrices de forgeage ;

d) une grande facilité d'utilisation du progiciel GALOPIN.

Ces tests permettent de répondre aux préoccupations des industriels de la mise en forme qui peuvent trouver dans nos formulations via le logiciel GALOPIN une méthode de calcul rapide, simple d'utilisation, applicable à un grand nombre de cas réels, et fournissant une solution acceptable sur la puissance à mettre en oeuvre, les flux de matière et sur la distribution de contraintes aux interfaces outil-matière.

Les travaux présentés ont fait l'objet de publications internationales et nationales [32, 36, 37] , et le système GALOPIN fera l'objet d'une diffusion chez notre partenaire industriel Informatique Internationale (groupe C.I.S.I.).

Pour le futur proche il est envisagé de prendre en compte l'écrouissage du matériau élément par élément et de faire une représentation graphique de l'évolution de la contrainte sur l'interface. L'objectif à moyen terme est de définir : en amont un interface entre un logiciel de CAO et le programme GALOPIN ; en aval un interface avec un code d'éléments finis. Grâce à ces interfaces nous obtiendrons l'organigramme de la CFAO appliquée au forgeage tel que nous le concevons au Laboratoire de Génie Mécanique de Valenciennes. Actuellement seule la partie en trait mixte indique la procédure développée par nos soins. (Cf. Fig. Concl. I).



BU LILLE

ORGANIGRAMME DE LA CFAO APPLIQUEE AU FORGEAGE

Figure Concl. I

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES ET ETUDES GENERALES EN MISE A FORME DES METAUX

[1] R. HILL

"A variational principe of maximum plastic work in classical plasticity".
Q. Jour. Mech. Appl. Math., pp. 1,18 (1948).

[2] D.C. DRUCKER, W. PRAGER

"Soil mechanics and plastic analysis for limit design".
Q. Appl. Math. 10, pp. 157-165 (1952).

[3] W. JOHNSON

"Estimation of upper bound loads for extrusion and coing operations".
Proc. Inst. Mech. Eng. Vol. 173, pp. 61-72 (1959).

[4] H. KUDO

"An upper bound approach to plain strain forging and extrusion".
Int. Jour. Mech. Sci., pp. 57-83 and pp. 229-252 (1960).

[5] W. JOHNSON, H. KUDO

"The Mechanics of metal extrusion".
Manchester University Press. (1962).

[6] R. HILL

"A general method of analysis for metal working process".
J. of Mech. and Phy. Solids, vol. 11, pp. 305-326 (1963).

[7] S. KOBAYASHI, YANK, THOMSEN

"Mechanics of plastic deformations in metal processing".
Mc Millan Edit. (1965).

[8] J.B. HAWKYARD, W. JOHNSON

"An analysis of changes in geometry of a short hollow cylinder during axial compression".
Int. J. Mech. Scien., Vol. 9, pp. 163-182 (1967).

[9] M. BURGDOF

"Uber dier Ermittlung des Reibwertes für Verfahren des Massivumformung durch den Ringstauchversuch".
Industrie Anzeiger 89 jg - Nr 39 V. 16-5, pp. 799-804 (1967).

[10] A.T. MALE - V. DEPIERRE

"The use of the ring compression test for defining realistic processing parameters".
USAF Mat. Labo. Rapp. N° AFML - TR - 70-129 (1970).

[11] J. MANDEL

"Cours de science des matériaux".
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (1970).

[12] T. ALTAN

"Computer simulation to predict load, stress, and metal flow in an axisymmetric closed Die Forging".
Metal forming interrelation between theory and pratice,
Pelnum Press, pp. 249-273 (1971).

[13] R.P. Mc DERMOTT, A.N. BRAMLEY

"An elemental upper bound technique for general use in forging analysis".
Proc. Fifteenth MTDR, pp. 437-443 (1974).

[14] A.H. SHABAIK

"Finite difference method for the complete analysis of plain strain extrusion".
Proc. Third North American metal Working Research Conference pp. 127-142 (1975).

[15] CRAMPHORN, A.N. BRAMLEY

"Computer aided forging design with UBET"
Proc. Eighteenth MTDR, pp. 51-59 (1977).

[16] LVAPUNOV, KOBAYASHI

"Metal flow in plane-strain closed die forging"
MARC, pp. 114-121 (1977).

[17] A.N. BRAMLEY, J.T. THORNTON

"Prediction of flow in forging and extrusion using UBET"
NAMRC, pp. 96-102 (1978).

[18] K. ROLL

"Comparaison of different numerical methods for the calculation of metal forming process".
Annals of the CIRP Vol. 28/1, pp. 141-145 (1979).

[19] H. KUDO, S. MATSUBARA

"Joint examination project of validity of various numerical methods for the analysis of metal forming processes".
Metal Forming Plasticity, pp. 378-403 (1979).

[20] J. OUDIN, Y. RAVALARD

"A general method for computing plane strain plastic flows"
20th International Mach. Tool. Design and Research Conf.
pp. 211-216. (1979).

[21] OSMAN, A.N. BRAMLEY

"Metal flow prediction in forging and extrusion using UBET".
Proc. Twenteeth MTDR, pp. 51-59 (1979).

[22] J.P. MOUTON

"Combined numerical an algebraic computer processing applied to plasticity problems".
Annals of the CIRP Vol. 28/1, pp. 131-134 (1979).

[23] P.V. MARSAL

"Knowledge engineering and artifical intelligence"
Adv. Topics and New Developments in Finite Element Analysis, MARC (1979).

[24] J.T. THORNTON, A.N. BRAMLEY

"An approximate method for predicting metal flow in forging and extrusion operations".
Proc. Inst. Mech. Eng. Vol. 194 n° 2, pp. 9-15 (1980).

[25] J.C. GELIN

"Contribution à la détermination des lois d'écoulements et limites de ductilité des métaux par essai de compression".
Thèse de Docteur-Ingénieur en Génie Mécanique (1980).

[26] M. KIUCHI, Y. MURATA

"Simulation of contact pressure distribution on tool surface by UBET".
21th MTDR Conf. Swansea, pp. 13-20 (1980).

[27] J. OUDIN, Y. RAVALARD

"An upper bound method for computing loads and flow-patterns in plane strain forging process".
Int. J. Mech. Tool. Des. Res., pp. 237-250 (1981).

[28] F.H. OSMAN

"Computerized simulation of forging processes"
Thèse de Ph. D. Mecanical Engineering University of LEEDS (1981).

[29] MAMALIS, K. ISOBE, W. JOHNSON

"Closed die forging of rectangular billets with diamond shaped dies".
Annals of the CIRP 30-1, pp. 147-152 (1981).

[30] M. SHAHAF, M. BERCOVIER, D. GUEZ, I. BLADES

"Interactive simulation of a forging process for blades".
Numerical Methods in Industrial Forming Processes, pp. 343-350 (1982).

[31] S. TICHKIEWITCH, P. TRAU

"Contribution à la conception assistée par ordinateur de pièces estampées".
Actes du 6è Congrès Français de Mécanique, pp. 24.5-24.8 (1983).

[32] P. COURTOIS, J.C. GELIN, J. OUDIN, Y. RAVALARD

"Linear optimisation of plane plastic flow".
Advanced Technology of Plasticity, Vol. II, pp. 1106-1110 (1984).

[33] S.K. BISWAS, K. MALLIKARJUNARAO

"Flow of metal in contrained plane-strain extrusion-forging : Part I".
Journal of Mechanical Working Technology, 9, pp. 161-179 (1984).

[34] S.K. BISWAS, A. VIDYASAGAR

"Flow of metal incontrained plane strain extrusion-forging : Part II"
J. of Mech. Work. Techn., 11, pp. 139-149 (1985).

[35] P. CHRISTENSEN, N. BAY

"Calculation of local surface stress in drop forging using UBET".
Rapport interne Inst. of Manufacturing Engineering, Technical University of Denmark - Sept. (1985).

[36] P. COURTOIS, J. OUDIN, Y. RAVALARD

"Vers le calcul automatique des matrices de forgeage"
Acte du 7è Congrès Français de Mécanique, pp. 94-95 (1985).

[37] P. COURTOIS, J. OUDIN, Y. RAVALARD, J.C. GELIN

"Application de la méthode des éléments cinématiques aux procédés de forgeages plans et axisymétriques"
Rapport GRECO Grandes Déformations et Endommagement, pp. 1-35 (1986).

[38] J.C. GELIN

"Remarques sur l'implémentation numériques des équations constitutives incrémentales en calcul non linéaire de structures".
Communication CLub SAP du 20/03/85.

OUVRAGES ET ETUDES GENERALES SUR LA METHODE DU SIMPLEXE

[39] G.B. DANTZIG

"Computational algorithm of the revised simplex method"
R.M. 1266, The Rand Corp. Oct. (1953).

[40] G.B. DANTZIG

"Composite simplex-dual algorithm"
R.M. 1274, The Rand Corp. Avril (1954).

[41] G.B. DANTZIG, A. ORDEN, P. WOLFE

"The generalised simplex method of minimizing a linear form under inequality restraints"
R.M. 1264, The Rand Corp. Avril (1954).

[42] W. ORCHARD-HAYS

"Bachground, development and extensions of the revised simplex method"
R.M. 1433, The Rand Corp. (1954).

[43] F.P. FISHER

"Speed-up the solution to linear programming problems".
The journal of Industrial Engineering, Vol. XII, n° 6 (1961).

[44] P. CHRETIENNE

"Determination rapide d'une solution initiale en programmation linéaire continue".
RAIRO, Revue verte pp. 113-118, Janv. (1975).

[45] P. CHRETIENNE, Y. PESQUEUX, J.C. GRANDJEAN

"Algorithmes et pratique de programmation linéaire".
Edition Technip (1980).

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE