

THÈSE

présentée à

L UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Mathématiques appliquées

par

Hassane SADOK



ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE SUITES PAR UTILISATION DES TRANSFORMATIONS COMPOSITES

Soutenue le 11 Septembre 1986 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

C. BREZINSKI
B. GERMAIN BONNE
P. SABLONNIERE

Président et Rapporteur
Examineur
Examineur

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M. FOURET René	Physique
M. GABILLARD Robert	I.F.E.A.
M. MONTREUIL Jean	Biologie
M. PARREAU Michel	Mathématiques
M. TRIDOT Gabriel	Chimie
M. VIVIER Emile	Biologie
M. WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M. BACCHUS Pierre	Mathématiques
M. BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M. BIAYS Pierre	G.A.S.
M. BILLARD Jean (dét.)	Physique
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BOIS Pierre	Mathématiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOUGHON Pierre	Mathématiques
M. BOURIQUET Robert	Biologie
M. BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M. CELET Paul	Sciences de la Terre
M. CHAMLEY Hervé	Biologie
M. COEURE Gérard	Mathématiques
M. CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M. DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M. DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M. ESCAIG Bertrand	Physique
M. FAURE Robert	Mathématiques
M. FOCT Jacques	Chimie
M. GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M. GRUSON Laurent	Mathématiques
M. GUILLAUME Jean	Biologie
M. HECTOR Joseph	Mathématiques
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LACOSTE Louis	Biologie
M. LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M. LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LOMBARD Jacques	S.E.S.
M. LOUCHEUX Claude	Chimie
M. LUCQUIN Michel	Chimie
M. MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M. MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M. PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M. PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M. SALMER Georges	I.E.E.A.
M. SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M. SIMON Michel	S.E.S.
M. STANKIEWICZ François	S.E.S.
M. TILLIEU Jacques	Physique
M. VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mlle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mlle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNAL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mlle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel

S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël

I.P.A.

M. DUVEAU Jacques

S.E.S.

M. HOF Lack Jean

I.P.A.

M. LATOUCHE Serge

S.E.S.

M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis

S.E.S.

M. NAVARRE Christian

I.P.A.

M. OPIGEZ Philippe

S.E.S.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Claude BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I, qui m'a proposé ce sujet, dont il a constamment suivi l'évolution avec intérêt. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour ses encouragements et conseils précieux.

Je le remercie une fois de plus de m'avoir honoré par sa présidence du jury.

Je remercie très vivement Monsieur Bernard GERMAIN-BONNE, Maître de Conférences et Directeur de Recherches à l'Université de Lille I et Monsieur Paul SABLONNIERE, Professeur à l'Université de Rennes d'avoir voulu s'intéresser à ce travail et de le juger.

Que ma mère, ma soeur Zhor et Christine soient assurées de ma plus vive reconnaissance pour leur compréhension et leur aide.

Mes remerciements vont également à Madame Françoise TAILLY, pour sa gentillesse et pour le soin avec lequel elle a dactylographié ce travail et à Monsieur Henri GLANC qui l'a imprimé.

A la mémoire de mon père,

A ma mère et A ma soeur Zhor,

A toute ma famille,

A Christine et sa famille,

A tous les amis.

TABLE DES MATIÈRES

	pages
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : ETUDE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS COMPOSITES DE RANG DEUX (CAS SCALAIRE)	4
A - LA TRANSFORMATION R_1 .	
1 - Notations, définitions.	5
2 - Présentation des transformations composites de suites.	6
3 - Théorème d'accélération de la convergence.	8
B - LA TRANSFORMATION R_α .	
1 - Définition.	11
2 - Etude de la transformation R_α .	15
3 - Estimation de la suite $\{\alpha_n\}$ dans le cas de deux suites de point fixe.	22
C - LA TRANSFORMATION U.	
1 - Définitions.	33
2 - Exemples.	35
3 - Application des transformations R_α et U à l'accélération de la méthode des trapèzes et de la méthode de Simpson.	41
4 - Etude de la transformations U.	60
CHAPITRE II : APPLICATION DE QUELQUES TRANSFORMATIONS COMPOSITES À LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.	71
1 - Rappel et notations.	74
2 - Cas où la racine est simple.	75
3 - Cas où la racine est multiple.	80
a - Méthode de type-sécante.	82
b - Méthode de type-Steffensen.	87
CHAPITRE III : ALGORITHMES RÉPÉTÉS D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE.	93
A - ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE QUELQUES SUITES A CONVERGENCE LINEAIRE.	
1 - Principe de la méthode.	96
2 - Accélération de la méthode des trapèzes.	103
3 - Accélération des suites de point fixe.	112

B - ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE QUELQUES
SUITES A CONVERGENCE LOGARITHMIQUE.

- 1 - Théorème 121
- 2 - Accélération des suites de point fixe. 123
- 3 - Accélération d'une autre famille de suites à
convergence logarithmique. 132

C - RESUME DES RESULTATS OBTENUS POUR LES
TRANSFORMATIONS R_1 et U. 135

CHAPITRE IV : TRANSFORMATIONS COMPOSITE DE DEUX TRANSFORMATIONS
VECTORIELLES. 139

A - PREMIERE GENERALISATION 141

- 1 - Interprétation d'une transformation composite
de rang deux dans le cas scalaire. 142
- 2 - Généralisation au cas vectoriel. 143
- 3 - Un algorithme de calcul de $T_p^{(n)}$. 147
- 4 - Etude de la convergence. 149
- 5 - Programmation du H-algorithme pour le calcul de $T_p^{(n)}$. 152
- 6 - Application à la résolution des systèmes d'équations
non linéaires. 154
 - a - La méthode de la sécante. 155
 - b - Méthode d'Ulm. 159
 - c - Première généralisation de la méthode Regula-Falsi. 164

B - SECONDE GENERALISATION. 167

- 1 - Interprétation dans le cas scalaire. 167
- 2 - Généralisation au cas vectoriel. 168
- 3 - Deux algorithmes pour le calcul de $S_p^{(n)}$. 171
- 4 - Etude du noyau de $S_p^{(n)}$. 172
- 5 - Etude de la convergence. 173
- 6 - Programmation du C.R.P.A. pour le calcul de $S_p^{(n)}$. 174
- 7 - Application à la résolution des systèmes d'équations non
linéaires. 176
 - a - Méthode d'Henrici. 177
 - b - Seconde généralisation de la méthode Regula-Falsi. 179

RÉFÉRENCES 189

INTRODUCTION

-

Une transformation composite consiste à combiner deux où plusieurs transformations. Cette notion a été définie par Brezinski.

Le but de ce travail est d'étudier en détail les transformations composites de rang deux c'est à dire celles qui combinent deux transformations.

Généralement, la transformation composite définie par Brezinski n'accélère pas la convergence de la meilleure des deux transformations qui la composent. C'est pourquoi on propose dans le premier chapitre une nouvelle transformation, dépendante d'un paramètre, que l'on étudie en détail (noyau, propriétés de convergence et d'accélération). L'étude de suite de point fixe nous permet d'estimer ce paramètre et d'introduire une nouvelle transformation que l'on note U . On applique ensuite ces deux dernières transformations à l'accélération des méthodes des trapèzes et de Simpson. A la fin de ce chapitre on se livre à une étude théorique de la transformation U .

Le second chapitre est consacré à l'application des transformations composites à la résolution des équations non linéaires. Dans le cas où la racine est simple on propose une nouvelle méthode d'ordre trois basée sur la transformation de Germain-Bonne. Et si la racine est multiple on propose deux nouvelles méthodes l'une de type sécante et l'autre de type Steffensen.

Le troisième chapitre est consacré à l'application répétée des transformations composites. Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première on s'intéresse au cas des suites à convergence linéaire et en particulier à la méthode des trapèzes et aux suites de point fixe.

On propose une modification du procédé d'Aitken itéré qui donne des résultats comparables à ceux de la méthode de Romberg.

Dans la seconde partie on étudie les suites de point fixe à convergence logarithmique, on donne des résultats d'accélération en ce qui concerne la première colonne du θ -algorithme et la transformation de Germain-Bonne.

Le quatrième chapitre est une introduction aux transformations composites de suites de vecteurs. En se basant sur deux interprétations différentes des transformations composites dans le cas scalaire, on propose deux généralisations au cas vectoriel. Ces généralisations nécessitent des inversions de matrices qui sont évitées en utilisant le H-algorithme où le C.R.P.A.

En appliquant ces deux nouvelles transformations à la résolution des systèmes d'équations non linéaires, on obtient deux généralisations de la méthode Regula-Falsi.

CHAPITRE I.

ETUDE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS COMPOSITES DE RANG DEUX

(Cas scalaire).

INTRODUCTION.

A partir de quelques exemples, on montre que dans le cas où une des deux transformations accélère la convergence de l'autre, la transformation composite de rang deux définie dans [8], n'accélère pas la convergence de la meilleure des deux transformations qui la composent en général.

C'est pourquoi on va proposer et étudier une autre transformation qui sous certaines hypothèses accélère la convergence des deux transformations.

Enfin pour les applications on s'intéresse aux suites de point fixe et à deux suites utilisées en quadrature numérique.

A - LA TRANSFORMATION R_1

1 - NOTATIONS, DEFINITIONS.

On désigne par $S = \{S_n\}$ une suite de nombres réels supposée convergente vers S^* . $\{S_n\}$ désigne le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite $\{S_n\}$. ΔS_n désigne la différence entre deux termes consécutifs de la suite $\{S_n\}$:

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n.$$

DEFINITION 1. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites réelles de limite nulle.

Si $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tel que :

$$\forall n > N \text{ on ait } |v_n| < \varepsilon |u_n|$$

On écrit alors $v_n = o(u_n)$.

DEFINITION 2. Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ deux suites réelles de limite nulle

Si $\exists N$ et $c > 0$

$$\forall n > N \text{ on a } |v_n| < c |u_n|$$

On écrit alors $v_n = O(u_n)$.

2 - PRESENTATION DES TRANSFORMATIONS COMPOSITES DE SUITES [8].

Soit $S = \{S_n\}$ une suite que l'on veut accélérer : considérons p transformations de suites $(t_k) : k \in \{1, \dots, p\}$ ($p \geq 2$)

$$t_k : \{S_n\} \rightarrow \{t_k^{(n)}\}$$

DEFINITION 3.

La transformation T définie par :

$$T : \{S_n\} \rightarrow \{T_n\}$$

où $\forall n$

$$T_n = \sum_{k=1}^p a_k^{(n)} t_k^{(n)}$$

est appelée transformation composite de rang p des transformations t_k .

Dans toute la suite on s'intéresse au cas où $p=2$.

T_n devient :

$$T_n = a_1^{(n)} t_1^{(n)} + a_2^{(n)} t_2^{(n)}$$

DEFINITION 4.

Soit t une transformation

$$t : \{S_n\} \rightarrow \{t_n\}$$

Le noyau de la transformation t est défini par

$$N_t = \{\{S_n\} / \exists N, \forall n \geq N : t_n = S^*\}.$$

Si on désire que le noyau de la transformation T contienne le noyau de t_1 et le noyau de t_2 , on doit avoir $a_1^{(n)} = 1 - a_2^{(n)}$ d'où

$$T_n = (1 - a_2^{(n)}) t_1^{(n)} + a_2^{(n)} t_2^{(n)}$$

Un choix possible de $a_2^{(n)}$ a été donné par Brezinski dans [8]

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_2^{(n)} = - \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}} & \text{si } \Delta t_2^{(n)} \neq \Delta t_1^{(n)} \\ = 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

DEFINITION 5. On définit la transformation R_1 par :

$$R_1 : \{S_n\} \rightarrow \{R_1^{(n)}\}$$

où

$$R_1^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) \Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}}$$

pour $n \geq 0$.

Rappelons un théorème concernant l'accélération de la convergence voir [8].

THEOREME 1.

$$\text{Si } \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a + a_n \quad \text{avec } a \neq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\text{Et si } \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b + b_n \quad \text{avec } b \neq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

alors $R_1^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$. Si de plus $a \neq 0$ alors $R_1^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$.

Ce théorème ne nous renseigne pas, dans le cas où $a = 0$, sur la limite du rapport $(R_1^{(n)} - S^*) / (t_2^{(n)} - S^*)$.

3 - THEOREME D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

On va donner deux exemples pour montrer que dans le cas où $a = 0$, on ne peut pas conclure sur l'accélération de R_1 par rapport à t_2 .

Exemple 1.a :

Si l'on prend

$$\begin{cases} t_1^{(n)} = S^* + n\lambda^n \\ t_2^{(n)} = S^* + \lambda^n \end{cases} \quad \text{avec } 0 < |\lambda| < 1$$

$$\frac{t_2^{(n)} - S}{t_1^{(n)} - S} = \frac{1}{n} = a_n \quad a = 0$$

Vérifions la seconde hypothèse du théorème

$$\frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \lambda + \frac{\lambda}{n} \quad b = \lambda \text{ et } b_n = \frac{1}{n}$$

On a :

$$R_1^{(n)} = S^* + \frac{\lambda^{n+1}}{n\lambda - n + 1}$$

$$\frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{\lambda}{n(n\lambda - n + 1)} \quad \text{donc } R_1^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$$

$$\frac{R_1^{(n)} - S}{t_2^{(n)} - S} = \frac{\lambda}{n\lambda - n + 1} \quad \text{donc } R_1^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$$

Dans cet exemple, on voit que R_1 accélère la convergence de t_1 et de t_2 .

Exemple 2.a. : On prend maintenant :

$$t_1^{(n)} = S^* + \lambda^n$$

$$\text{avec } 0 < |\mu| < |\lambda| < 1$$

$$t_2^{(n)} = S^* + \mu^n$$

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \quad a = 0$$

La seconde hypothèse

$$\frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \lambda \quad b_n = 0 \text{ et } b = \lambda$$

$$R_1^{(n)} = S^* + \frac{(\lambda\mu)(\lambda-\mu)}{\lambda^n(\lambda-1)-\mu^n(\mu-1)}$$

On a $R_1^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda-1}\right)$ et donc R_1 n'accélère pas la convergence de t_2 .

Dans le cas où $a = 0$; on va donner un théorème qui va nous renseigner sur la limite de $(R_1^{(n)} - S^*) / (t_2^{(n)} - S^*)$.

THEOREME 2 :

$$\text{Si } \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a_n \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b + b_n \quad \text{avec } b \neq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

Si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = b \left(\frac{1-c}{b-1}\right)$$

Preuve.

$$\frac{\frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*}}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} = \frac{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} - 1}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1}$$

$$t_2^{(n)} - S^* = a_n(t_1^{(n)} - S^*) \text{ donc } \Delta t_2^{(n)} = a_{n+1}(t_1^{(n+1)} - S^*) - a_n(t_1^{(n)} - S^*)$$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{a_{n+1}(t_1^{(n+1)} - S^*) - a_n(t_1^{(n)} - S^*)}{(t_1^{(n+1)} - S^*) - (t_1^{(n)} - S^*)}$$

Posons $f_n = b + b_n$.

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{a_{n+1} f_n - a_n}{f_n - 1}$$

$$\frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = \frac{[\frac{a_{n+1}}{a_n} f_n - 1] / (f_n - 1) - 1}{[(a_{n+1} f_n - a_n) / (f_n - 1)] - 1}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = b \frac{(c-1)}{(1-b)}.$$

□

Ce théorème nous permet d'affirmer que $R_1^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$.
Quand $c = 1$ où quant $b = 0$.

Dans l'exemple 1.a

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{1}{n} = a_n$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ c'est pourquoi on a eu accélération.

Dans l'exemple 2.a

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n = a_n$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ et comme $b = \lambda$, on a obtenu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = \left(\frac{\mu - \lambda}{1 - \mu}\right).$$

Le problème que l'on se pose maintenant est : comment modifier R_1 pour avoir l'accélération de la convergence par rapport aux deux transformations t_1 et t_2 avec des hypothèses similaires à celles faites dans le théorème 2.

B - LA TRANSFORMATION R_α

1 - DEFINITION.

On peut toujours écrire S^* sous la forme

$$S^* = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} - 1}$$

Une idée consiste à remplacer $\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*}$ par $\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}}$ et dans ce cas on

obtient $R_1^{(n)}$ puisque :

$$R_1^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_1^{(n)} - t_1^{(n)})}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1}$$

Si l'on reprend l'exemple 2.a

$$\frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n$$

par contre

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{(\mu-1)}{(\lambda-1)} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n$$

On a alors

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - s^*}{t_2^{(n)} - s^*} = \frac{(\mu-1)}{(\lambda-1)}$$

C'est pourquoi on n'a pas eu accélération de la convergence

DEFINITION 6.

Soit $\alpha = \{\alpha_n\}$ une suite. On définit la transformation R_α par :

$$R_\alpha : \{S_n\} \rightarrow \{R_\alpha^{(n)}\}$$

où

$$R_\alpha^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1}$$

Dans l'exemple 2.a, on pose $\alpha_n = \frac{\lambda-1}{\mu-1} \quad \forall n \geq 0$, on a alors $R_\alpha^{(n)} = s^* \quad \forall n \geq 0$.

Pour l'exemple 1.a

$$\begin{cases} \frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} = \frac{1}{n} \end{cases}$$

et

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{(\lambda-1)\lambda^n}{(n+1)\lambda^{n+1} - n\lambda^n}$$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{(\lambda-1)}{n(\lambda-1)+\lambda} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dans cet exemple $\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}}$ est une bonne approximation de $\frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*}$, c'est pourquoi R_1 accélère la convergence de t_1 et de t_2 .

Exemple 3.a.

$$\begin{cases} t_1^{(n)} = s^* + \frac{1}{n} \\ t_2^{(n)} = s^* + \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$$\frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n+1)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} = 1.$$

Donc la seconde hypothèse du théorème 2 n'est pas vérifiée

$$R_1^{(n)} = s^* + \frac{1}{-n^2 + n + 1}$$

$$R_1^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = -1$$

Donc R_1 n'accélère pas la convergence de t_2 , essayons de comprendre pourquoi.

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors que

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{1}{n}$$

Pour avoir une transformation qui accélère la meilleure de ces deux transformations, il faut prendre :

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1$$

et donc

$$R_\alpha^{(n)} = S^* + \frac{1}{n(2n^2-1)}$$

R_α accélère la convergence de t_1 et de t_2 .

Si on avait pris

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \geq 1$$

On aurait eu $R_\alpha^{(n)} = S^* \quad \forall n \geq 1$

2 - ETUDE DE LA TRANSFORMATION R_α .

. Etude du noyau.

THEOREME 3. S'il existe N tel que $\forall n \geq N$

$$\alpha_n = \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} \cdot \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}}$$

alors $R_\alpha^{(n)} = S^* \quad \forall n \geq N$

Preuve.

$$R_\alpha^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\alpha_n \cdot \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1}} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} - 1} = S^* \quad \forall n \geq N$$

□

Ce théorème nous donne une condition suffisante, mais non nécessaire.

Pour avoir une condition nécessaire et suffisante on va définir une nouvelle suite $\beta = \{\beta_n\}$.DEFINITION 7. On suppose que $\forall n \quad t_2^{(n)} \neq t_1^{(n)}$. Dans ce cas la suite $\beta = \{\beta_n\}$ est définie par : $\beta_0 \neq 0$ quelconque.

$$\beta_{n+1} = \frac{(\alpha_n \Delta t_2^{(n)} - t_1^{(n+1)} + t_2^{(n)})}{(t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)})} \beta_n.$$

THEOREME 4. Si on suppose que $\forall n \quad \beta_n (t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) \neq 0$.
alors :

$$\forall n \quad R_\alpha^{(n)} = S^* \iff \exists c \quad \forall n \quad t_1^{(n)} = S^* + c \beta_n (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})$$

Preuve.

Comme

$$R_{\alpha}^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) \Delta t_1^{(n)}}{\alpha_n \Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}}$$

par définition de la suite $\{\beta_n\}$:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)}) = \alpha_n \Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)} + (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})$$

donc $R_{\alpha}^{(n)}$ devient :

$$R_{\alpha}^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{\beta_n \Delta t_1^{(n)} (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\beta_{n+1} (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)}) - \beta_n (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}$$

Si on pose $a_n = t_1^{(n)}$ et $b_n = \beta_n (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})$.

Dans ce cas

$$R_{\alpha}^{(n)} = a_n - \frac{\Delta a_n b_n}{\Delta b_n} = f(a_n, b_n)$$

f est la fonction qui définit la procédure θ voir [5] et donc le théorème 4 est une application du théorème 1, p. 139 de [5].

□

Donnons maintenant deux exemples.

Exemple 1.b. On pose $t_1^{(n)} = S_n$; $t_2^{(n)} = S_{n+1}$ et $\alpha_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}}$

$$R_{\alpha}^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} \cdot \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1} = S_{n+1} + \frac{\Delta x_n}{\frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta S_{n+1}} - \frac{\Delta x_n}{\Delta S_n}}$$

$$R_{\alpha}^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)}$$

où $\varepsilon_2^{(n)}$: est la seconde colonne de la première généralisation de l' ε -algorithme voir [3].

Donnons la suite $\{\beta_n\}$:

$$(S_{n+2} - S_{n+1}) \beta_{n+1} = \left(\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}} \cdot \Delta S_{n+1} \right) \beta_n$$

donc

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n+1}}$$

Si l'on pose

$$\beta_0 = \frac{1}{\Delta x_0}$$

alors

$$\forall n \quad \beta_n = \frac{1}{\Delta x_n}$$

D'après le théorème 4

$$R_{\alpha}^{(n)} = S^* \Leftrightarrow \exists c \quad S_n = S^* + \frac{c}{\Delta x_n} \Delta S_n$$

Posons

$$d_n = S_n - S^*$$

$$a_0 = 1 \text{ et } a_1 = -c$$

$$R_{\alpha}^{(n)} = S^* \Leftrightarrow a_0 \Delta x_n d_n + a_1 \Delta d_n = 0$$

$$\Leftrightarrow d_{n+1} = d_0 \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_0}{a_1} \Delta x_i \right)$$

Et ainsi on a une condition nécessaire et suffisante pour que $\varepsilon_2^{(n)} = S^*$

$$\varepsilon_2^{(n)} = S^* \Leftrightarrow S_n = S^* + a \prod_{i=0}^n \lambda_i$$

avec $\lambda_i = 1 + c \Delta x_i$

Exemple 2.b.

$$t_1^{(n)} = S_{n+1} ; t_2^{(n)} = S_{n+2} ; \alpha_n = \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta^2 S_{n+1}} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$$

$$R_{\alpha}^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta^2 S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}$$

$\theta_2^{(n)}$: est la première étape du θ -algorithme [4].

Donnons la suite $\{\beta_n\}$:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \left(\frac{\Delta^2 S_n}{\Delta^2 S_{n+1}} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \Delta S_{n+2} \right) / \Delta S_{n+2} = \frac{\Delta^2 S_n}{\Delta^2 S_{n+1}} \cdot \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} .$$

Si on pose

$$\beta_0 = \frac{\Delta S_0}{\Delta^2 S_0}$$

$$\text{alors } \forall n \quad \beta_n = \frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_n} .$$

D'après le théorème précédent :

$$R_{\alpha}^{(n)} = S^* \Leftrightarrow S_{n+1} = S^* + c \frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_n} \Delta S_{n+1} .$$

Posons $d_n = S_n - S^*$

$$R_{\alpha}^{(n)} = S^* \Leftrightarrow \exists c \quad d_{n+1} = c \frac{\Delta d_{n+1}}{\Delta^2 d_n} \Delta d_n$$

où

$$\Delta\left(\frac{d_n}{\Delta d_n}\right) = 1-c$$

C'est la condition (E) donnée page 390 de [10].

On va maintenant donner des résultats de convergence et d'accélération.

THEOREME 5. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = S^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = S^*$

et si $\exists x, y \quad x < 1 < y \quad \exists N \quad \alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \notin [x, y] \quad \forall n \geq N$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_\alpha^{(n)} = S^*.$$

Preuve.

$$R_\alpha^{(n)} - S^* = t_1^{(n)} - S^* - \frac{((t_2^{(n)} - S^*) - (t_1^{(n)} - S^*))}{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1}$$

□

Exemple d'application de ce théorème.

$\alpha_n = \alpha^*$ une constante quelconque non nulle

$$t_1^{(n)} = S^* + \lambda^n \quad 0 < |\lambda| < 1$$

$$t_2^{(n)} = S^* + \mu^n \quad 0 < |\mu| < 1$$

$$|\mu| \neq |\lambda|$$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{(\mu-1)}{(\lambda-1)} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n$$

$$\alpha^* \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \alpha^* \frac{(\mu-1)}{(\lambda-1)} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n$$

donc

$$\forall \alpha^* \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{\alpha}^{(n)} = S^*$$

car si $|\mu| < |\lambda|$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = 0$$

$|\mu| > |\lambda|$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \alpha^* \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \right| = +\infty$$

Dans les deux cas les hypothèses du théorème 5 sont vérifiées.

On va s'intéresser maintenant aux résultats d'accélération de la convergence.

$$\frac{R_{\alpha}^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*}}{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} \quad (1)$$

et

$$\frac{R_{\alpha}^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = (\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} - 1) / (\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1) \quad (2)$$

THEOREME 6. Si

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a + a_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Si

$$\frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b + b_n \quad \text{avec } b \neq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha^* \text{ avec } \alpha^* a \neq 1$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{\alpha}^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{(\alpha^* - 1)a}{\alpha^* a - 1}$$

Si de plus $a \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{\alpha}^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = \frac{(\alpha^* - 1)}{\alpha^* a - 1}.$$

Dans le cas où $a \neq 0$, il faut choisir $\{\alpha_n\}$ telle que $\alpha^* = 1$.

Preuve.

Le fait que

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} &= b \neq 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = a$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a$$

On a appliqué le théorème 12 de [3].

D'après la formule (1) on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{\alpha}^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{\alpha^* a - a}{\alpha^* a - 1} = \frac{a(\alpha^* - 1)}{\alpha^* a - 1}$$

□

THEOREME 7. Si

$$\exists u, v \quad u < 1 < v \quad \alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \notin [u, v]$$

et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = 1$$

alors

$$R_\alpha^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$$

Preuve.

On utilise la formule (2). □

Ce théorème sera surtout utilisé quand $t_2^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$.

La transformation R_α dépend d'un paramètre (la suite $\{\alpha_n\}$), on va montrer comment remplacer la suite $\{\alpha_n\}$ par des termes des deux suites $\{t_1^{(n)}\}$ et $\{t_2^{(n)}\}$ et pour cela on va tout d'abord se placer dans le cas où les deux suites $\{t_1^{(n)}\}$ et $\{t_2^{(n)}\}$ sont deux suites de point fixe.

3 - ESTIMATION DE LA SUITE $\{\alpha_n\}$ DANS LE CAS OU $\{t_1^{(n)}\}$ ET $\{t_2^{(n)}\}$ SONT DEUX SUITES DE POINT FIXE.

Etudions tout d'abord un exemple.

Exemple 1,c.

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation suivante :

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Cette équation peut s'écrire

$$x = \frac{x^2}{6} + \frac{8}{6} \quad \text{où} \quad x = \frac{x^2}{5} - \frac{x}{5} + \frac{8}{5}$$

d'où l'idée pour résoudre cette équation, d'utiliser une méthode des approximations successives.

Par exemple

$$t_1^{(n+1)} = \frac{1}{6} \cdot (t_1^{(n)})^2 + \frac{8}{6} \quad t_1^{(0)} \text{ donné}$$

où

$$t_2^{(n+1)} = \frac{1}{5} \{ (t_2^{(n)})^2 - (t_2^{(n)}) + 8 \} \quad t_2^{(0)} \text{ donné}$$

. Supposons que $t_1^{(0)}$ est tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = 2$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n+1)} - 2}{t_1^{(n)} - 2} = \frac{2}{3}$$

$\{t_1^{(n)}\}$ est une suite à convergence linéaire.

. Supposons que $t_2^{(0)}$ est tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = 2.$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n+1)} - 2}{t_2^{(n)} - 2} = \frac{3}{5}$$

$\{t_2^{(n)}\}$ est une suite à convergence linéaire.

$$\text{Or } \Delta t_2^{(n)} = \frac{1}{5} (t_2^{(n)} - 2)(t_2^{(n)} - 4) \text{ et } \Delta t_1^{(n)} = \frac{1}{6} (t_1^{(n)} - 2)(t_1^{(n)} - 4)$$

D'après le théorème 3. Si

$$\alpha_n = \frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} : \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}}$$

alors $R_{\alpha}^{(n)} = S^*$

$$\frac{t_2^{(n)} - 2}{t_1^{(n)} - 1} \cdot \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}} = \frac{5}{6} \frac{(t_1^{(n)} - 4)}{(t_2^{(n)} - 4)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{5}{6}$$

APPLICATION NUMERIQUE.

Si $t_1^{(0)} = 3,5$ et $t_2^{(0)} = 3,5$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = 2 \text{ et } \alpha_n = \frac{5}{6} \quad \forall n$$

Pour les résultats numériques voir page 32 .

On voit que $\{R_{5/6}^{(n)}\}$ converge plus vite que les deux suites $\{t_1^{(n)}\}$ et $\{t_2^{(n)}\}$

alors que $\{R_1^{(n)}\}$ ne converge pas plus vite que $\{t_2^{(n)}\}$. On va expliquer pourquoi :

On a

$$\frac{t_2^{(n+1)} - 2}{t_1^{(n+1)} - 2} = \frac{6}{5} \cdot \frac{(t_2^{(n)} + 1)}{(t_1^{(n)} + 2)} \cdot \frac{t_2^{(n)} - 2}{t_1^{(n)} - 2}$$

Si on pose

$$a_n = \frac{t_2^{(n)} - 2}{t_1^{(n)} - 2}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9}{10} < 1$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Comme $c = \frac{9}{10} \neq 1$, R_1 n'accélère pas la convergence de t_2 . D'après le théorème 2, on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - 2}{t_2^{(n)} - 2} = b \frac{(1-c)}{(b-1)} = -\frac{1}{5}$$

car $b = \frac{2}{3}$ et $c = \frac{9}{10}$.

Par contre ces deux suites vérifient les hypothèses du théorème 7

$$\alpha_n = \frac{5}{6} \quad \forall n ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = 0.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - 2}{t_2^{(n)} - 2} = 1$$

c'est pourquoi :

$$R_{5/6}^{(n)} - 2 = o(t_1^{(n)} - 2) \text{ et } R_{5/6}^{(o)} - 2 = o(t_2^{(n)} - 2).$$

Cas général.

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation $\phi(x) = 0$ où :

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Pour cela on peut proposer deux schémas itératifs de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1^{(o)} \text{ donné} \\ t_1^{(n+1)} = F(t_1^{(n)}) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_2^{(o)} \text{ donné} \\ t_2^{(n+1)} = G(t_2^{(n)}) \end{array} \right.$$

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad \qquad \qquad G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

On suppose qu'il existe un voisinage V de S^* tel que F et G soient continûment dérivables dans V .

On suppose aussi que $\phi(S^*) = 0$ et que $F(S^*) = G(S^*) = S^*$, $t_1^{(0)}$ et $t_2^{(0)}$ sont choisis telsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = S^*$$

$$t_1^{(n+1)} - t_1^{(n)} = F(t_1^{(n)}) - F(S^*) - (t_1^{(n)} - S^*)$$

d'après la formule de Taylor-Maclaurin

$$\Delta t_1^{(n)} = (F'(\xi_n) - 1)(t_1^{(n)} - S^*)$$

avec $\xi_n = S^* + \theta_n^1(t_1^{(n)} - S^*)$ $0 < \theta_n^1 < 1$.

De même :

$$\Delta t_2^{(n)} = (G'(\eta_n) - 1)(t_2^{(n)} - S^*)$$

avec $\eta_n = S^* + \theta_n^2(t_2^{(n)} - S^*)$ $0 < \theta_n^2 < 1$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{G'(\eta_n) - 1}{F'(\xi_n) - 1} \cdot \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{1}{\rho_n} \cdot \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} \quad \text{où } \rho_n = \frac{F'(\xi_n) - 1}{G'(\eta_n) - 1}$$

donc

$$\frac{R^{(n)}}{\rho} = S^* \quad \forall n \geq 1.$$

Le problème qui se pose dans la pratique est la connaissance de ξ_n et de η_n .

Comme ξ_n est compris entre $t_1^{(n)}$ et S^* , η_n est compris entre $t_2^{(n)}$ et S^* et on ne connaît pas S^* une idée consiste à remplacer ξ_n par $t_1^{(n)}$ et η_n par $t_2^{(n)}$, ρ_n devient donc $\tilde{\rho}_n$:

$$\tilde{\rho}_n = \frac{F'(t_1^{(n)}) - 1}{G'(t_2^{(n)}) - 1}.$$

On note $R^* = R_\rho^*$.

D'où la définition suivante :

DEFINITION 8.

Soient F et G deux fonctions dérivables. Si les deux transformations t_1 et t_2 sont définies par :

$$t_1 : \{S_n\} \rightarrow \{t_1^{(n)}\} \quad \text{et} \quad t_2 : \{S_n\} \rightarrow \{t_2^{(n)}\}$$

avec

$$\begin{cases} t_1^{(n+1)} = F(t_1^{(n)}) & t_1^{(0)} \text{ donné} \\ t_2^{(n+1)} = G(t_2^{(n)}) & t_2^{(0)} \text{ donné} \end{cases}$$

On définit la transformation R_* par :

$$R_* : \{S_n\} \rightarrow \{R_*^{(n)}\}$$

et

$$R_*^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\frac{F'(t_1^{(n)}) - 1}{G'(t_2^{(n)}) - 1} \cdot \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} \quad n \geq 0$$

Avant de donner un résultat d'accélération de la convergence, étudions le cas où F et G sont linéaires.

$$F(x) = S^*(1-b) + bx \quad \text{et} \quad G(x) = S^*(1-c) + cx \quad b \neq c$$

$$F'(x) = b \quad \text{et} \quad G'(x) = c$$

$$\Delta t_2^{(n)} = (1-c)(S^* - t_2^{(n)}) \quad \text{et} \quad \Delta t_1^{(n)} = (1-b)(S^* - t_1^{(n)})$$

et donc :

$$R_*^{(n)} = S^* \quad \forall n \geq 1.$$

THEOREME 8.

Soient F et G deux fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$.

On suppose

- 1 $\exists s^* \in [a, b] : F(s^*) = G(s^*) = s^*$
- 2 $|F'(s^*)| \neq |G'(s^*)|$
- 3 $F'(s^*) \neq 1$ et $G'(s^*) \neq 1$
- 4 $t_1^{(0)} \in [a, b] \quad t_1^{(n+1)} = F(t_1^{(n)})$
 $t_2^{(0)} \in [a, b] \quad t_2^{(n+1)} = G(t_2^{(n)})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = s^*$$

Alors

$$R_*^{(n)} - s^* = o(t_1^{(n)} - s^*)$$

et

$$R_*^{(n)} - s^* = o(t_2^{(n)} - s^*)$$

Preuve.

Par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = s^*$$

On pose

$$a_n = \frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*}$$

Or $t_1^{(n+1)} - s^* = F(t_1^{(n)}) - s^* = F'(\xi_n)(t_1^{(n)} - s^*)$ avec

$$\xi_n = s^* + \theta_n^1(t_1^{(n)} - s^*) \quad 0 < \theta_n^1 < 1$$

$$t_2^{(n+1)} - s^* = G'(\eta_n)(t_2^{(n)} - s^*) \text{ avec}$$

$$\eta_n = s^* + \theta_n^2(t_2^{(n)} - s^*) \quad 0 < \theta_n^2 < 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{G'(\eta_n)}{F'(\eta_n)} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{G'(s^*)}{F'(s^*)} \right|$$

Premier cas. $|G'(s^*)| < |F'(s^*)|$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On est dans le cas où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{F'(t_1^{(n)}) - 1}{G'(t_2^{(n)}) - 1}$$

Vérifions les hypothèses du théorème 7

$$\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - s}{t_2^{(n)} - s} = \frac{F'(t_1^{(n)}) - 1}{G'(t_2^{(n)}) - 1} \cdot \frac{G'(\eta_n) - 1}{F'(\xi_n) - 1}$$

$$\text{Car } \Delta t_2^{(n)} = (t_2^{(n+1)} - s^*) - (t_2^{(n)} - s^*) = (G'(\eta_n) - 1)(t_2^{(n)} - s^*)$$

donc

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - s^*}{t_2^{(n)} - s^*} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - s^*}{t_2^{(n)} - s^*} &= \frac{G'(s^*) - 1}{F'(s^*) - 1} \\ \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - s^*}{t_1^{(n)} - s^*} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = 0$$

et donc $R_{\star}^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$ et $R_{\star}^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$

Second cas : $|G'(S^*)| > |F'(S^*)|$

On pose

$$v_n = \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \frac{|F'(S^*)|}{|G'(S^*)|} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n)} - S}{t_2^{(n)} - S} = 0$$

Ecrivons $R_{\alpha}^{(n)}$ d'une autre façon :

$$R_{\alpha}^{(n)} = t_2^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{1 - \frac{1}{\alpha_n} \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}}}$$

On a démontré dans le premier cas que $\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} \alpha_n$ converge vers 1, ce résultat reste valable dans ce second cas.

On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}} \cdot \frac{1}{\alpha_n} = 1 \\ \text{de plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}} = 0$$

et comme :

$$\frac{R_{\alpha}^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \frac{1 - \frac{1}{\alpha_n} \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} \cdot \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}}}{1 - \frac{1}{\alpha_n} \frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)}}}$$

donc $R_{*}^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$ et $R_{*}^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$.

□

Reprenons l'exemple précédent :

$$F(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{8}{6} \quad F'(x) = \frac{1}{3} x$$

$$G(x) = \frac{x^2 - x + 8}{5} \quad G'(x) = \frac{2}{5} x - \frac{1}{5}$$

Si l'on prend $t_1^{(0)} = t_2^{(0)} = 3,5$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = 2.$$

$[a, b] = [1; 3,5]$. $F'(2) = \frac{2}{3}$ et $G'(2) = \frac{3}{5}$.

Donc les hypothèses du théorème 8 sont satisfaites :

$$R_{*}^{(n)} - 2 = o(t_1^{(n)} - 2) \text{ et } R_{*}^{(n)} - 2 = o(t_2^{(n)} - 2)$$

Les résultats numériques sont donnés dans la page suivante.

Exemple 1.c.



n	$t_1^{(n)}$	$t_2^{(n)}$	$R_1^{(n-1)}$	$R_{5/6}^{(n-1)}$	$R_{*}^{(n-1)}$	U_{n-2}
0	3.50000000000000	3.50000000000000				
1	3.37500000000000	3.35000000000000	3.50000000000000	3.50000000000000	3.50000000000000	
2	3.23177083333333	3.17450000000000	3.4859586830213	4.5603448275861	3.6408839779006	3.8640167364018
3	3.0740571198640	2.98059005000000	3.4813104723737	5.5609616173529	3.3904783239327	3.5408402961059
4	2.9083045293644	2.7806653992318	3.5274219107071	21.2729052115777	3.0547258352419	3.1692310804587
5	2.7430392059203	2.5902869326506	3.7482759343936	-2.2797857288847	2.6951020332843	2.7709219913605
6	2.5873773475360	2.4238598921620	4.9517991227685	1.3420975996244	2.3968281849562	2.4412607468116
7	2.4490869230904	2.2902473769339	-2.2465981010044	1.7482048180001	2.2011472688349	2.2265331166866
8	2.3330044594754	2.1909971341238	1.3536589310790	1.8966051813381	2.0937060940592	2.1083144524981
9	2.2404849679887	2.1218942615229	1.7719309076986	1.9569085595659	2.0413112779606	2.0494865270130
10	2.1699621486305	2.0761081991122	1.9023908925438	1.9820998010598	2.0175854164866	2.0219001896705
11	2.1181226210815	2.0468234110617	1.9542494199619	1.9926248392957	2.0073211659291	2.0094565819535
12	2.0810739063229	2.0285325330017	1.9772991275743	1.9969859719989	2.0030049709345	2.0040042924285
13	2.0551447672630	2.0172823408889	1.9882639397666	1.9987763162360	2.0012221881921	2.0016698692481
14	2.0372700024014	2.0104291403947	1.9937395124399	1.9995055799601	2.0004941757095	2.0006883871079
15	2.0250781771141	2.0062792376307	1.9965783519660	1.9998009046167	2.0001990557523	2.0002813992686
16	2.0168236039040	2.0037754283435	1.9980944190745	1.9999200099426	2.0000799836595	2.0001143398028
17	2.0112629082107	2.0022681077779	1.9989232291895	1.9999679113469	2.0000320876235	2.0000462622773
18	2.0075297476574	2.0013618935293	1.9993847080113	1.9999871402524	2.0000128595822	2.0000186621582
19	2.0050292812882	2.0008175070684	1.9996453500148	1.9999948497456	2.0000051502279	2.0000075125366
20	2.0033570698038	2.0004906379046	1.9997941993970	1.9999979382362	2.0000020617596	2.0000030197224
21	2.0022399248555	2.0002944308879	1.9998799408833	1.9999991748597	2.0000008251396	2.0000012125120
22	2.0014941194476	2.0001766758706	1.9999296644948	1.9999996698301	2.0000003301698	2.0000004864854
23	2.0009964516972	2.0001060117653	1.9999586543787	1.9999998679022	2.0000001320978	2.0000001950768
24	2.0006644666175	2.0000636093069	1.9999756281048	1.9999999471531	2.0000000528469	2.0000000781906
25	2.0004430513310	2.0000381663933	1.9999856005531	1.9999999788592	2.0000000211408	2.0000000313299
26	2.0002954002697	2.0000229001273	1.9999914761284	1.9999999915431	2.0000000084569	2.0000000125502
27	2.0001969480567	2.0000137401813	1.9999949460089	1.9999999966171	2.0000000033829	2.0000000050264
28	2.0001313051692	2.0000082441465	1.9999969992081	1.9999999986468	2.0000000013532	2.0000000020127
29	2.0000875396530	2.0000049465015	1.9999982161526	1.9999999994587	2.0000000005413	2.0000000008058
30	2.0000583610459	2.0000029679058	1.9999989384726	1.9999999997835	2.0000000002165	2.0000000003226

C - LA TRANSFORMATION U.

1° - Définitions.

L'inconvénient de la transformation R_* , c'est l'évaluation à chaque itération de F , G , F' et G' . De plus, cette transformation n'est pas applicable à deux suites quelconques (en général les deux suites n sont pas générées par 2 fonctions) pour remédier à cela on va faire des approximations,

On a vu que pour $R_*^{(n)}$ on a,

$$\alpha_n = \frac{F'(t_1^{(n)}) - 1}{G'(t_2^{(n)}) - 1}.$$

Comme

$$\frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_1^{(n-1)}} = \frac{F(t_1^{(n)}) - F(t_1^{(n-1)})}{\Delta t_1^{(n-1)}} = F'(t_1^{(n)}) - \frac{F''(\xi_n)}{2} \Delta t_1^{(n-1)}$$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_2^{(n-1)}} = G'(t_2^{(n)}) - \frac{G''(\eta_n)}{2} \Delta t_2^{(n-1)}$$

d'où l'idée de remplacer α_n par :

$$\frac{\frac{\Delta t_1^{(n)}}{\Delta t_1^{(n-1)}} - 1}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_2^{(n-1)}} - 1} = \frac{\Delta^2 t_1^{(n-1)}}{\Delta^2 t_2^{(n-1)}} \times \frac{\Delta t_2^{(n-1)}}{\Delta t_1^{(n-1)}}$$

$$\text{où } \Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n.$$

DEFINITION 9.

Soient t_1 et t_2 deux transformations avec

$$t_1 : \{s_n\} \rightarrow \{t_1^{(n)}\} \text{ et } t_2 : \{s_n\} \rightarrow \{t_2^{(n)}\}$$

On définit la suite $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_n\}$ par :

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\Delta^2 t_1^{(n-1)}}{\Delta^2 t_2^{(n-1)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(n-1)}}{\Delta t_1^{(n-1)}}$$

pour $n \geq 1$.

A partir de cette suite $\{\tilde{\alpha}_n\}$ on va définir la transformation U

DEFINITION 10.

On définit la transformation U par :

$$U : \{s_n\} \rightarrow \{U_n\}$$

avec pour $n \geq 1$.

$$U_{n-1} = R_{\tilde{\alpha}}^{(n)} \text{ Si } \Delta^2 t_1^{(n-1)} \Delta t_2^{(n-1)} \Delta t_2^{(n)} \neq \Delta^2 t_2^{(n-1)} \cdot \Delta t_1^{(n)} \Delta t_1^{(n-1)}$$

$$U_{n-1} = t_1^{(n)} \text{ Si } \Delta t_2^{(n-1)} \neq 0 \text{ et } \Delta^2 t_1^{(n-1)} \cdot \Delta t_2^{(n)} \Delta t_2^{(n-1)} \neq \Delta^2 t_2^{(n-1)} \cdot \Delta t_1^{(n-1)} \cdot \Delta t_1^{(n)}$$

$$U_{n-1} = t_2^{(n)} \text{ Si } \Delta t_2^{(n-1)} = 0.$$

Si les dénominateurs sont tous non nuls $\forall n \geq 0$, on a :

$$U_n = t_1^{(n+1)} - \frac{(t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)}) \Delta^2 t_2^{(n)} \Delta t_1^{(n)} \Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta^2 t_1^{(n)} \cdot \Delta t_2^{(n)} \cdot \Delta t_2^{(n+1)} - \Delta^2 t_1^{(n)} \cdot \Delta t_1^{(n)} \Delta t_1^{(n+1)}}$$

Cette transformation sera étudiée en détail à la fin de ce chapitre.

On va donner quelques exemples pour pouvoir faire la comparaison entre

U_n ; $R_*^{(n)}$ et $R_1^{(n)}$ pour les suites de point fixe. On montrera ensuite comment la transformation U peut être utilisée pour accélérer la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson.

2 - Exemples.

On reprend encore une fois l'exemple 1.c. :

$$t_1^{(n+1)} = \frac{t_1^{(n)^2}}{6} + \frac{8}{6} ; \quad t_2^{(n+1)} = \frac{1}{5} (t_2^{(n)^2} - t_2^{(n)} + 8)$$

$$t_1^{(0)} = t_2^{(0)} = 3,5$$

$$|U_{28} - 2| \approx 3.10^{-10} \qquad |R_1^{(29)} - 2| \approx 1,04.10^{-6}$$

$$|t_2^{(30)}| \approx 2.9.10^{-10} \qquad |R_{\frac{5}{9}}^{(29)} - 2| \approx 2,165.10^{-10}$$

$$|R_*^{(29)} - 2| \approx 2.165.10^{-10}$$

Les résultats numériques sont donnés page 32.

Exemple 2.c.

Dans les hypothèses du théorème 8 on a supposé que $F'(S^*) \neq 1$ et $G'(S^*) \neq 1$.

Montrons que même si $F'(S^*) = 1$ et $G'(S^*) = 1$ on peut avoir accélération par rapport aux deux transformations t_1 et t_2 :

$$\begin{cases} t_1^{(n+1)} = F(t_1^{(n)}) & t_1^{(0)} \text{ donné, tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = 3 \\ F(x) = x^2 - 5x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2^{(n+1)} = G(t_2^{(n)}) & t_2^{(0)} \text{ donné, tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = 3 \\ G(x) = (x^2 - 4x + 9)/2 \end{cases}$$

$\{t_1^{(n)}\}$ et $\{t_2^{(n)}\}$ sont deux suites à convergence logarithmique.

Etude de R_* .

$$\alpha_n = \frac{F'(t_1^{(n)}) - 1}{G'(t_2^{(n)}) - 1} = 2 \frac{(t_1^{(n)} - 3)}{(t_2^{(n)} - 3)}$$

$$\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3} \quad n \geq 1.$$

Donc d'après le théorème 3, on a :

$$R_*^{(n)} = 3 \quad \forall n \geq 1.$$

Etude de U et de R_1 .

$$\alpha_n \sim \frac{\Delta^2 t_1^{(n-1)}}{\Delta^2 t_2^{(n-1)}}, \frac{\Delta t_2^{(n-1)}}{\Delta t_1^{(n-1)}}$$

On a :

$$\Delta^2 t_2^{(n-1)} = \frac{1}{2} \Delta t_2^{(n-1)} (t_2^{(n)} + t_2^{(n-1)} - 6)$$

$$\Delta^2 t_1^{(n-1)} = \Delta t_1^{(n)} (t_1^{(n)} + t_1^{(n-1)} - 6)$$

Posons

$$a_n = \frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(t_2^{(n)} - 1)}{(t_1^{(n)} - 1)}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ page 54 de [16].

On pose $x_n = 3 - t_1^{(n)}$ et $y_n = 3 - t_2^{(n)}$,

On a :

$$x_{n+1} = x_n(1-x_n) \text{ et } y_{n+1} = y_n(1 - \frac{y_n}{2})$$

Posons $a = 1$, $b = 1/2$.

D'après le lemme [16] p. 54 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3} = 2$$

Cherchons maintenant la limite de $\{\tilde{\alpha}_n\}$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{2 \left(\frac{t_1^{(n)} - 3}{t_1^{(n-1)} - 3} + 1 \right) (t_1^{(n-1)} - 3)}{\left(\frac{t_2^{(n)} - 3}{t_2^{(n-1)} - 3} + 1 \right) (t_2^{(n-1)} - 3)}$$

comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n)} - 3}{t_1^{(n-1)} - 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - 3}{t_2^{(n-1)} - 3} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3} = 2$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n = 1.$$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3} \right)^2 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = 2$$

$$\frac{R_1^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3} = \frac{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - \left(\frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3}\right)}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} R_1^{(n)} - 3 = o(t_1^{(n)} - 3) \\ R_1^{(n)} - 3 = o(t_2^{(n)} - 3) \end{cases}$$

$$\frac{U_{n-1} - 3}{t_1^{(n)} - 3} = \frac{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - \left(\frac{t_2^{(n)} - 3}{t_1^{(n)} - 3}\right)}{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} U_{n-1} - 3 = o(t_1^{(n)} - 3) \\ U_{n-1} - 3 = o(t_2^{(n)} - 3) \end{cases}$$

Application numérique. (voir page suivante).

Avec $t_1^{(0)} = t_2^{(0)} = 2,5$

$$|R_1^{(29)} - 3| \approx 1.866, 10^{-3}$$

$$R_*^{(n)} = 3 \quad \forall n \geq 1$$

$$|U_{28} - 3| = 2.9.10^{-5}$$

On a montré que R_1 et U accélèrent la convergence de t_1 et de t_2 .

$\{U_n\}$ converge mieux que $\{R_1^{(n)}\}$

n	$t_1^{(n)}$	$t_2^{(n)}$	$R_1^{(n-1)}$	$R_*^{(n-1)}$	U_{n-2}
0	2.50000000000000	2.50000000000000			
1	2.75000000000000	2.62500000000000	2.50000000000000	2.50000000000000	
2	2.81250000000000	2.69531250000000	3.75000000000000	3.00000000000000	2.8846153846154
3	2.84765625000000	2.7417297363281	3.1783536585366	3.00000000000000	2.9799794661191
4	2.8708648681641	2.7750815008767	3.0900275927833	3.00000000000000	2.9917711954352
5	2.8875407504383	2.8003756665006	3.0562001712535	3.00000000000000	2.9957096514960
6	2.9001878332503	2.8203006037632	3.0390117701408	3.00000000000000	2.9974465161472
7	2.9101503018816	2.8364465402671	3.0288978118889	3.00000000000000	2.9983442548099
8	2.9182232701336	2.8498214073624	3.0223757790449	3.00000000000000	2.9988594747656
9	2.9249107036812	2.8610982122057	3.0178955089543	3.00000000000000	2.9991781283696
10	2.9305491061029	2.8707450655319	3.0146711909699	3.00000000000000	2.9993866354430
11	2.9353725327660	2.8790984845741	3.0122661108088	3.00000000000000	2.9995292222420
12	2.9395492422871	2.8864070727902	3.0104202519654	3.00000000000000	2.9996302563430
13	2.9432035363951	2.8928587493463	3.0089702529976	3.00000000000000	2.9997039734586
14	2.9464293746731	2.8985983731421	3.0078089452539	3.00000000000000	2.9997590964667
15	2.9492991865711	2.9037395181068	3.0068634780148	2.99999999999999	2.9998011864797
16	2.9518697590534	2.9083725582940	3.0060828296735	3.00000000000000	2.9998339097705
17	2.9541862791470	2.9125703523308	3.0054303475773	3.00000000000000	2.9998597538764
18	2.9562851761654	2.9163923239766	3.0048791181710	3.00000000000000	2.9998804491874
19	2.9581961619883	2.9198874457216	3.0044089980564	3.00000000000000	2.9998972259764
20	2.9599437228608	2.9230964563981	3.0040046553355	2.99999999999999	2.9999109759918
21	2.9615482281990	2.9260535339073	3.0036542449361	3.00000000000000	2.9999223568211
22	2.9630267669537	2.9287875738311	3.0033484928129	3.00000000000000	2.9999318608888
23	2.9643937869156	2.9313231786516	3.0030800503212	2.99999999999999	2.9999398621159
24	2.9656615893258	2.9336814315468	3.0028430310025	3.00000000000000	2.9999466480246
25	2.9668407157734	2.9358805078077	3.0026326729500	3.00000000000000	2.9999524422566
26	2.9679402539038	2.9379361624472	3.0024450891533	2.99999999999999	2.9999574205968
27	2.9689680812236	2.9398621224131	3.0022770804695	3.00000000000000	2.9999617225649
28	2.9699310612065	2.9416704045734	3.0021259938243	3.00000000000000	2.9999654598597
29	2.9708352022867	2.9433715754247	3.0019896135207	2.99999999999999	2.9999687226751
30	2.9716857877123	2.9449749646596	3.0018660770730	3.00000000000000	2.9999715843743

Exemple 3.c.

$$\begin{cases} t_1^{(n+1)} = F(t_1^{(n)}) & t_1^{(0)} = 2,7 \\ F(x) = x^2 - 5x + 9 & F'(3) = 1. \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = 3$$

$$\begin{cases} t_2^{(n+1)} = G(t_2^{(n)}) & t_2^{(0)} = 3,9 \\ G(x) = \sqrt{6x-9} & G'(3) = 1 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = 3$$

n	$t_1^{(n)}$	$t_2^{(n)}$	$R_1^{(n-1)}$	$R_*^{(n-1)}$	U_{n-2}
2	2.83410	3.71058	3.13548	2.98377	2.96168
5	2.89499	3.53685	3.04156	2.99239	2.98866
10	2.93333	3.37880	3.01239	2.99655	2.99575
15	2.95077	3.29149	3.00527	2.99802	2.99773
20	2.96085	3.23641	3.00265	2.99872	2.99858
25	2.96746	3.19862	3.00146	2.99910	2.99903
30	2.97214	3.17113	3.00084	2.99933	2.99929

Exemple 4.c.

$$\begin{cases} t_1^{(n+1)} = F(t_1^{(n)}) & t_1^{(0)} = 2,5 \\ F(x) = x^2 - 5x + 9 & F'(3) = 1 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = 3$$

$$\begin{cases} t_2^{(n+1)} = G(t_2^{(n)}) & t_2^{(0)} = 2,5 \\ G(x) = x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{48}{5} & G'(3) = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = 3$$



n	$t_1^{(n)}$	$t_2^{(n)}$	$R_1^{(n-1)}$	$R_*^{(n-1)}$	U_{n-2}
2	2.81250	2.90250	3.37500	3.37500	3.13636
5	2.88754	2.96243	3.18884	3.09442	3.10601
10	2.93055	2.98942	3.05054	3.01789	3.01922
15	2.94930	2.99668	3.01667	3.00472	3.00499
20	2.95994	2.99893	3.00606	3.00142	3.00148
25	2.96684	2.99965	3.00229	3.00045	3.00046
30	2.97169	2.99989	3.00087	3.00014	3.00015



3 - APPLICATION DES TRANSFORMATION R_α et U A L'ACCELERATION DE LA METHODE DES TRAPEZES ET DE LA METHODE DE SIMPSON.

Soit à calculer $I = \int_a^b f(x)dx.$

$$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

On va rappeler les deux méthodes [20].

. Méthode des trapèzes (formules 6,25 de [20]).

$$T(h) = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)] \quad \text{où } h = \frac{b-a}{n}$$

de plus

$$I = T(h) - \frac{nh^3}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

si f est 2 fois continûment dérivable sur $[a,b]$.

. Méthode de Simpson (formule 6.26 de [20])

$$S(h) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \dots + 2f(a+(n-2)h) + 4f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

avec n pair et $h = \frac{b-a}{n}$. Si f est 4 fois continûment dérivable sur $[a,b]$, on a

$$S(h) = I + \frac{nh^5}{180} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a,b].$$

A partir de ces formules on peut définir deux suites :

$\{T(h_n)\}$ et $\{S(h_n)\}$ avec $\{h_n\}$ une suite telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$.

On va montrer comment choisir dans ce cas la suite $\{\alpha_n\}$ pour que la suite $\{R_\alpha^{(n)}\}$ converge plus vite que les suites $\{T(h_n)\}$ et $\{S(h_n)\}$.

On va distinguer deux cas. Dans le premier, on supposera que f est 8 fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et dans le second cas on supposera que f est seulement continu sur $[a, b]$ car l'estimation de $I - T(h_n)$ et de $I - S(h_n)$ n'est pas la même dans les deux cas.

a) Cas où f est huit fois continûment dérivable sur $[a, b]$.

D'après [12] formules 18 p88.

$$I - T(h_n) = A_T h_n^2 + B_T h_n^4 + C_T h_n^6 + O(h_n^8)$$

$$I - S(h_n) = A_S h_n^2 + B_S h_n^4 + O(h_n^6)$$

On suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot f'(a) \neq f'(b) \text{ donc } A_T \neq 0 \\ \cdot \text{ la suite } \{h_n\} \text{ est décroissante} \end{array} \right.$$

$$\frac{I - S(h_n)}{I - T(h_n)} = \frac{A_S}{A_T} h_n^2 + O(h_n^4)$$

$$\frac{S(h_{n+1}) - S(h_n)}{T(h_{n+1}) - T(h_n)} = \frac{A_S}{A_T} (h_{n+1}^2 + h_n^2) + O(h_n^4)$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1^{(n)} = S(h_n) \text{ et } t_2^{(n)} = T(h_n) \quad n \geq 1 \\ \text{et} \\ \alpha_n = \frac{h_{n+1}^2 + h_n^2}{h_n^2} \end{array} \right.$$

Pour faciliter l'étude, chaque fois qu'on utilisera la suite $\{h_n\}$, on supposera que

$$\begin{cases} h_0 = b - a \\ h_{n+1} = \frac{h_n}{2} \end{cases}$$

Avec cette hypothèse on a :

$$\alpha_n = \frac{5}{4} \quad \forall n \geq 1$$

On va s'intéresser aux transformations $R_{5/4}$ et U .

Avant de démontrer que la suite $\{R_{5/4}^{(n)}\}$ converge plus vite que les deux suites $\{S(h_n)\}$ et $\{T(h_n)\}$, exprimons $\{R_{5/4}^{(n)}\}$ en fonction de $T(h_{n-1})$; $T(h_n)$ et $T(h_{n+1})$.

Comme $h_0 = b-a$ et $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$ on a :

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$T(h_n) = \frac{h_n}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^n f(a+ih_n) + f(b) \right]$$

$$S(h_n) = \frac{h_n}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=1}^n f(a+(2i-1)h_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih_n) + f(b) \right]$$

Posons

$$A_n = \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a+(2i-1)h_n) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih_n)$$

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} f(a+ih_n) = \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a+(2i-1)h_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih_n)$$

$$= A_n + B_n$$

Avec ces notations on obtient :

$$\begin{cases} t_2^{(n)} = T(h_n) = \frac{h_n}{2} [f(a) + 2A_n + 2B_n + f(b)] \\ t_1^{(n)} = S(h_n) = \frac{h_n}{3} [f(a) + 4A_n + 2B_n + f(b)] \end{cases}$$

Remarques.

1°) $B_{n+1} = A_n + B_n$ pour $n \geq 1$ en effet :

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^n f(a + 2ih_{n+1}) = \sum_{i=1}^n f(a + ih_n) = A_n + B_n.$$

2°) Il faut sensiblement le même nombre d'opérations pour calculer $T(h_n)$ et $S(h_n)$.

3°) Si $n \geq 2$; à chaque itération n , on fait 2^{n-1} évaluations de fonctions.

Notations.

On pose

$$T_1 = \frac{h_0}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$T_{n+1} = T(h_n) \quad n \geq 1.$$

Avec cette notation on a :

$$S(h_n) = \frac{4}{3} T_{n+1} - \frac{1}{3} T_n.$$

C'est un résultat connu : $\{S(h_n)\}$ est la première colonne de la méthode de Romberg.

Exprimons $R_{5/4}^{(n)}$ en fonction de T_n ; T_{n+1} et T_{n+2} .

LEMME 1.

$$R_{5/4}^{(n)} = T_n - \frac{4(T_{n+2} - T_n)\Delta T_n}{T_{n+2} - 5T_{n+1} + 4T_n}$$

Preuve.

$$S(h_{n+1}) - S(h_n) = \frac{4T_{n+2} - 5T_{n+1} + T_n}{3}$$

$$T(h_n) - S(h_n) = -\left(\frac{T_{n+1} - T_n}{3}\right)$$

Or

$$R_{5/4}^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} \text{ pour } n \geq 1.$$

$$= S(h_n) - \frac{(T(h_n) - S(h_n))(S(h_{n+1}) - S(h_n))4}{5(T(h_{n+1}) - T(h_n)) - 4(S(h_{n+1}) - S(h_n))} = S(h_n) - \frac{4X_n}{Y_n}$$

$$Y_n = -\frac{(T_{n+2} - 5T_{n+1} + 4T_n)}{3}$$

et

$$X_n = -\left(\frac{T_{n+1} - T_n}{3}\right) \left(\frac{4T_{n+2} - 5T_{n+1} + T_n}{3}\right)$$

d'où le résultat

$$R_{5/4}^{(n)} = T_n - \frac{4(T_{n+2} - T_n)(T_{n+1} - T_n)}{T_{n+2} - 5T_{n+1} + 4T_n} \quad \square$$

On donne maintenant une estimation de $R_{5/4}^{(n)} - I$.

THEOREME 9.

Si f est huit fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et si $f'(a) \neq f'(b)$ alors

$$R_{5/4}^{(n)} - I = \left(C_T - \frac{B_T^2}{A_T} \right) h_n^6 + O(h_n^8)$$

Ce théorème est un cas particulier d'un autre théorème qui sera démontré dans le chapitre III (théorème 4).

On va comparer $R_{5/4}$ à deux autres transformations. On va commencer par le Δ^2 -d'Aitken [3] appliqué à la suite $\{T_n\}$:

$$\varepsilon_2^{(n)} = T_{n+1} - \frac{\Delta T_n \Delta T_{n+1}}{\Delta^2 T_n}$$

THEOREME 10

Si f est huit fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et si $f'(a) \neq f'(b)$ alors :

$$\varepsilon_2^{(n)} - I = B_T h_n^4 + O(h_n^6).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} T_n = T(h_{n-1}) &= I + A_T h_{n-1}^2 + B_T h_{n-1}^4 + C_T h_{n-1}^6 + O(h_{n-1}^8) \\ &= I + 16 A_T h_{n+1}^2 + 256 B_T h_{n+1}^4 + 4096 C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8) \end{aligned}$$

$$T_{n+1} = T(h_n) = I + 4 A_T h_{n+1}^2 + 16 B_T h_{n+1}^4 + 64 C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$T_{n+2} = I + A_T h_{n+1}^2 + B_T h_{n+1}^4 + C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$\Delta^2 T_n = 9A_T h_{n+1}^2 + 225 B_T h_{n+1}^4 + 3969 C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$\Delta T_n = -12 A_T h_{n+1}^2 - 240 B_T h_{n+1}^4 - 4032 C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$\Delta T_{n+1} = -3 A_T h_{n+1}^2 - 15 B_T h_{n+1}^4 - 63 C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

d'où

$$\varepsilon_2^{(n)} = I + \frac{144 A_T B_T h_{n+1}^4 + O(h_{n+1}^6)}{9 A_T + 255 B_T h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4)}$$

$$= I + 16 B_T h_{n+1}^4 + O(h_{n+1}^6)$$

or $2 h_{n+1} = h_n$

$$= I + B_T h_n^4 + O(h_n^6). \square$$

Montrons maintenant que le Δ^2 -d'Aitken et R_1 coïncident dans ce cas et comme $R_1^{(n)} = I + B_T h_n^4 + O(h_n^6)$ d'après le théorème 10 : Si $A_T \neq 0$ et $B_T \neq 0$ alors $\{R_1^{(n)}\}$ ne converge pas plus vite que la suite $\{S(h_n)\}$.

LEMME 2

$$R_1^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)} \quad \forall n \geq 1.$$

Preuve.

Par définition

$$R_1^{(n)} = T(h_n) - \frac{(T(h_{n+1}) - T(h_n))(S(h_n) - T(h_n))}{\Delta S(h_n) - \Delta T(h_n)}$$

On a vu dans la démonstration du lemme 1 que

$$S(h_{n+1}) - S(h_n) = \frac{4T_{n+2} - 5T_{n+1} + T_n}{3}$$

$$T(h_{n+1}) - T(h_n) = \Delta T_{n+1}$$

donc

$$\Delta S(h_n) - \Delta T(h_n) = \frac{\Delta^2 T_n}{3}$$

et comme

$$S(h_n) - T(h_n) = \frac{\Delta T_n}{3}$$

On a donc

$$R_1^{(n)} = T_{n+1} - \frac{\Delta T_n \Delta T_{n+1}}{\Delta^2 T_n} = \epsilon_2^{(n)}$$

[

Une autre méthode qui utilise T_n ; T_{n+1} ; T_{n+2} est la seconde colonne de l'algorithme de Romberg [20] :

$$\begin{cases} S_0^{(n)} = T_n & n \geq 1, \\ S_{k+1}^{(n)} = \frac{4^{k+1} S_k^{(n+1)} - S_k^{(n)}}{4^{k+1} - 1} & n \geq 1 ; k \geq 0 \end{cases}$$

On pose :

$$V_n = S_2^{(n)} \quad n \geq 1.$$

Remarques.

1°) Pour calculer V_n il faut connaître T_n , T_{n+1} et T_{n+2} .

2°) On a vu précédemment que ; $S(h_n) = S_1^{(n)}$ donc

$$V_n = \frac{16}{15} S(h_{n+1}) - \frac{1}{15} S(h_n) \quad n \geq 1$$

$$3^\circ) \underline{A_S = -4 B_T \quad \text{et} \quad B_S = -20 C_T}$$

En effet :

$$S(h_n) = \frac{4T_{n+1} - T_n}{3} = I - 4 B_T h_n^4 - 20 C_T h_n^6 + O(h_n^8).$$

Donc

$$A_S = -4 B_T \quad \text{et} \quad B_S = -20 C_T.$$

$$4^\circ) \underline{V_n = I + C_T h_n^6 + O(h_n^8)}.$$

D'après le théorème 9 et si $A_T \neq 0$; $C_T \neq 0$ et $C_T \neq \frac{B_T^2}{A_T}$ alors $\{R_{5/4}^{(n)}\}$ converge comme $\{V_n\}$.

Avant de donner deux exemples numériques, on va s'intéresser à la transformation U.

On rappelle que :

$$\begin{cases} t_1^{(n)} = S(h_n) & \text{et} \quad t_2^{(n)} = T(h_n) \\ U_{n-1} = R_{\alpha}^{(n)} \end{cases}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{\Delta^2 S(h_{n-1})}{\Delta^2 T(h_{n-1})} \quad \frac{\Delta T(h_{n-1})}{\Delta S(h_{n-1})}$$

Avant de donner une estimation de $U_{n-1} - I$ on va tout d'abord montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{5}{4} ; \text{ cela fera l'objet du lemme 3.}$$

LEMME 3.

Si f est huit fois continûment dérivable sur [a,b] et si

f'(a) \neq f'(b) et f'''(a) \neq f'''(b) alors :

$$\alpha_n = \frac{5}{4} + \left(\frac{21}{16} \frac{C_T}{B_T} - \frac{25}{16} \frac{B_T}{A_T} \right) h_n^2 + O(h_n^4)$$

Preuve.

On a vu que $S(h_n)$ s'écrit de la manière suivante :

$$S(h_n) = I + A_S h_n^4 + B_S h_n^6 + O(h_n^8)$$

$$\Delta^2 S(h_{n-1}) = 225 A_S h_{n+1}^4 + 3969 B_S h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$\Delta^2 T(h_{n-1}) = 9 A_T h_{n+1}^2 + 225 B_T h_{n+1}^4 + 3969 C_T h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$\frac{\Delta^2 S(h_{n-1})}{\Delta^2 T(h_{n-1})} = 25 \frac{A_S}{A_T} h_{n+1}^2 \left\{ 1 + \left(\frac{441}{25} \frac{B_S}{A_S} - 25 \frac{B_T}{A_T} \right) h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4) \right\}$$

$$\frac{\Delta T(h_{n-1})}{\Delta S(h_{n-1})} = \frac{A_T}{20 A_S h_{n+1}^2} \left\{ 1 + \left(20 \frac{B_T}{A_T} - \frac{336}{20} \frac{B_S}{A_S} \right) h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4) \right\}$$

donc

$$\alpha_n = \frac{5}{4} + \left(\frac{21}{20} \frac{B_S}{A_S} - \frac{25}{4} \cdot \frac{B_T}{A_T} \right) h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4).$$

Or $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$ et $B_S = -20 C_T$ et $A_S = -4 B_T$ donc

$$\frac{B_S}{A_S} = 5 \frac{C_T}{B_T}$$

On obtient alors le résultat demandé. $\square$

THEOREME 11.

Si f est huit fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et si $f'(a) \neq f'(b)$
 $f'''(a) \neq f'''(b)$ alors :

$$U_{n+1} - I = 4 \left(\frac{B_T^2}{A_T} - 5 C_T \right) h_n^6 + O(h_n^8)$$

Preuve.

D'après le lemme 3 on a :

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{5}{4} + \left(\frac{21}{20} \cdot \frac{B_S}{A_S} - \frac{25}{4} \frac{B_T}{A_T} \right) h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4)$$

et comme :

$$\frac{\Delta T(h_n)}{\Delta S(h_n)} = \frac{A_T}{5A_S h_{n+1}^2} \{ 1 + (5 \cdot \frac{B_T}{A_T} - \frac{21}{5} \frac{B_S}{A_S}) h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4) \}$$

et donc :

$$(\tilde{\alpha}_n \frac{T(h_n)}{S(h_n)} - 1)^{-1} = \frac{4A_S}{A_T} h_{n+1}^2 \{ 1 + 4 \frac{A_S}{A_T} h_{n+1}^2 + O(h_{n+1}^4) \}$$

$$T(h_n) - S(h_n) = 4 A_T h_{n+1}^2 + \{ 64(B_T - A_S) \} h_{n+1}^4 + 64 (C_T - B_S) \cdot h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

et

$$S(h_n) - U_{n-1} = 16 A_S h_{n+1}^4 + 64 B_T \frac{A_S}{A_T} h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

d'où

$$U_{n-1} = I + 64(B_S - (B_T/A_T)A_S)h_{n+1}^6 + O(h_{n+1}^8)$$

$$\text{or } B_S = -20 C_T, A_S = -4 B_T \text{ et } h_n^6 = 64 h_{n+1}^6.$$

On obtient donc le résultat cherché. $\square$

Récapitulons les estimations obtenues dans ce paragraphe.

Exemple n° 1.d.

n	$T(h)_n$	$S(h)_n$	$R_1^{(n-1)}$	$R_{5/4}^{(n-1)}$	U_{n-2}
1	.7083333333333333	.6944444444444444	.692810457516340	.693167305236271	.693145698510085
2	.697023809523809	.693253968253968	.693120208723806	.693147714636858	.693147145504710
3	.694121850371850	.693154530654531	.693145338421515	.693147190817899	.693147179917350
4	.693391202207527	.693147652819419	.693147062422373	.693147180730664	.693147180549400
5	.693208208269249	.693147210289823	.693147173126339	.693147180562658	.693147180559778
6	.693162438883403	.693147182421455	.693147180094549	.693147180559987	.693147180559942
7	.693150995228108	.693147180676342	.693147180530845	.693147180559944	.693147180559942
8	.693148134232442	.693147180567220	.693147180558126	.693147180559942	.693147180559938
9	.693147418978410	.693147180560399	.693147180559828	.693147180559931	.693147180559928
10	.693147240164580	.693147180559971	.693147180559930	.693147180559931	.693147180559958
11	.693147195461100	.693147180559940	.693147180559929	.693147180559918	
12	.693147184285224	.693147180559932			
13	.693147181491245	.693147180559919			

table n°1

Exemple n° 2.d

n	$T(h)_n$	$S(h)_n$	$R_1^{(n-1)}$	$R_{5/4}^{(n-1)}$	U_{n-2}
1	26.227916909338000	18.138872710800500	3.170249101367662	9.398684489798330	4.126234046807940
2	14.404444284628510	10.463286743058700	3.716525350453690	6.442494729001960	4.399825461241102
3	8.790916724469401	6.919740871083031	4.142670390474310	5.206592021185101	4.542428910867000
4	6.24817322111334	5.400592053325312	4.420590217265320	4.763837896388834	4.597421808644160
5	5.184848821385870	4.830407354810712	4.557356236982670	4.641129293410400	4.612291101725220
6	4.790230017632510	4.658690416381390	4.603481717064620	4.617943820862190	4.614855534921460
7	4.663469507061290	4.621216003537550	4.613547752484620	4.615126791666011	4.615106799157220
8	4.627653195257430	4.615714424656140	4.614970732178181	4.615120660943332	4.615120097560660
9	4.618287205019900	4.615165208274060	4.615109324762170	4.615120519420680	4.615120507970623
10	4.615914413027092	4.615123482362823	4.615119775213260	4.615120516883040	4.615120516686882
11	4.615319132197854	4.615120705254780	4.615120469734210	4.615120516841644	4.615120516838490
12	4.615170179549524	4.615120528666750			
13	4.615132933073040	4.615120517580880			

$$R_{5/4}^{(n)} = I + (C_T - \frac{B_T^2}{A_T}) h_n^6 + O(h_n^8) \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } A_T \neq 0$$

$$\epsilon_2^{(n)} = I + B_T h_n^4 + O(h_n^6) = R_1^{(n)} \quad n \geq 1 \text{ et } A_T \neq 0$$

$$V_n = I + C_T h_n^6 + O(h_n^8) \quad n \geq 1$$

$$U_{n-1} = I + 4((B_T^2/A_T) - 5 C_T) h_n^6 + O(h_n^8) \quad n \geq 1 \quad A_T \neq 0 \text{ et } B_T \neq 0$$

$$S(h_n) = I - 4B_T h_n^4 - 20 C_T h_n^6 + O(h_n^8) \text{ et } T(h_n) = I + A_T h_n^2 + B_T h_n^4 + C_T h_n^6 + O(h_n^8)$$

Exemple n° 1, d.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \text{Log } 2 = 0.693 \ 147 \ 180 \ 559 \ 453 \ \dots$$

Les résultats numériques pour $S(h_n)$, $T(h_n)$, $R_1^{(n)}$, $R_{5/4}^{(n)}$ et U_{n-1} sont donnés dans la table n° 1.

n	V_n
1	.693174603174603
2	.693147901481235
3	.693147194297078
4	.693147180787850
5	.693147180563563
6	.693147180560002
7	.693147180559945
8	.693147180559944
9	.693147180559942
10	.693147180559938
11	.693147180559931
12	.693147180559918

$R_{5/4}^{(7)}$ a 15 chiffres exacts

U_6 a 14 chiffres exacts

V_7 a 15 chiffres exacts

$\{R_{5/4}^{(n)}\}$ et $\{V_n\}$ ont sensiblement le même comportement puisque :

$$R_{5/4}^{(n)} \approx V_n \quad n = 7, 8, \dots, 12$$

$\{R_1^{(n)}\}$ ne converge pas plus vite que $\{S(h_n)\}$.

Exemple n° 2.d.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x+0.01} = 4,615\ 120\ 516\ 841\ 26\dots$$

Les résultats numériques pour $S(h_n)$, $T(h_n)$, $R_1^{(n)}$, $R_{5/4}^{(n)}$ ainsi que U_{n-1} sont donnés dans la table n° 2.

n	v_n
1	9.951581011875900
2	6.683504479617990
3	5.299315465474800
4	4.792395041576410
5	4.647242620486102
6	4.618717709347960
7	4.615347652730711
8	4.615128593848590
9	4.615120700635410
10	4.615120520114240
11	4.615120516894212
12	<u>4.615120516841820</u>

$R_{5/4}^{(12)}$ a 12 chiffres exacts.

U_{11} a 10 chiffres exacts.

V_{12} a 12 chiffres exacts.

$\{R_1^{(n)}\}$ converge comme $\{S(h_n)\}$.



b) Cas où f est continu sur $[a,b]$.

Si on suppose seulement que f est continue sur $[a,b]$ alors l'expression de $T(h_n) - I$ n'est plus en h_n^2 , de même celle de $S(h_n) - I$ n'est plus en h_n^4 et donc les estimations données dans le premier cas ne sont plus valables. Sur deux cas particuliers on va montrer comment choisir la suite $\{\alpha_n\}$ pour que $\{R_{\alpha}^{(n)}\}$ converge plus vite que $\{T(h_n)\}$ et $\{S(h_n)\}$.

i - Soit à calculer $I = \int_0^1 \sqrt{x} g(x) dx.$

Où g est fonction analytique sur $[0,1]$. D'après [12] on a les estimations suivantes :

$$\begin{cases} I - T(h_n) = A_T h_n^{3/2} + B_T h_n^2 + C_T h_n^{5/2} + D_T h_n^{7/2} + O(h_n^4) \\ I - S(h_n) = A_S h_n^{3/2} + B_S h_n^{5/2} + C_S h_n^{7/2} + O(h_n^4) \end{cases}$$

Vérifions que $\{T(h_n)\}$ et $\{S(h_n)\}$ vérifient les hypothèses du théorème 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I - S(h_n)}{I - T(h_n)} = \frac{A_S}{A_T}$$

Montrons que si $A_T \neq 0$ alors $\frac{A_S}{A_T} \notin \{0, 1\}$

$$S(h_n) = \frac{4T(h_n) - T(h_{n-1})}{3}$$

$$I - T(h_{n-1}) = I - T(2h_n) = 2\sqrt{2} A_T h_n^{3/2} + 4B_T h_n^2 + O(h_n^{5/2})$$

$$I - T(h_n) = A_T h_n^{3/2} + B_T h_n^2 + O(h_n^{5/2}).$$

Donc

$$A_S = \left(\frac{4-2\sqrt{2}}{3}\right) A_T$$

$$\frac{A_S}{A_T} = \left(\frac{4-2\sqrt{2}}{3}\right) \notin \{0, 1\}$$

De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T(h_{n+1}) - I}{T(h_n) - I} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 1.$$

Posons $t_2^{(n)} = S(h_n)$ et $t_1^{(n)} = T(h_n)$.

Donc les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées et on a alors :

$$R_1^{(n)} - I = o(S(h_n) - I) \text{ et } R_1^{(n)} - I = o(T(h_n) - I).$$

Donc pour avoir accélération de R_α par rapport à t_1 et t_2 il faut choisir $\{\alpha_n\}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1.$$

Montrons que la suite $\{\tilde{\alpha}_n\}$ qui caractérise U vérifie cette condition.

$$S(h_{n+1}) - S(h_n) = -A_S h_n^{3/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) + O(h_n^{5/2})$$

$$\Delta^2 S(h_{n-1}) = -A_S h_n^{3/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1 \right) (1 - 2\sqrt{2}) + O(h_n^{5/2})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta^2 S(h_{n-1})}{\Delta S(h_{n-1})} = \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

De même

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta^2 T(h_{n-1})}{\Delta T(h_n)} = \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

car $T(h_n) = I - A_T h_n^{3/2} + O(h_n^2)$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n = 1 \text{ puisque } \tilde{\alpha}_n = \frac{\Delta^2 S(h_{n-1})}{\Delta^2 T(h_{n-1})} \cdot \frac{\Delta T(h_{n-1})}{\Delta S(h_{n-1})}. \square$$

Posons $t_1^{(n)} = S(h_n)$ et $t_2^{(n)} = T(h_n)$. D'après le théorème 6, on a :

$$U_{n-1} - I = o(S(h_n) - I) \text{ et } U_{n-1} - I = o(T(h_n) - I).$$

Application numérique.

Exemple n° 3.d.

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}$$

$$g(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

Les résultats numériques sont donnés dans la table n° 3. $\{R_1^{(n)}\}$ ainsi que $\{U_n\}$ convergent plus vite que $\{T(h_n)\}$ et $\{S(h_n)\}$. $\{R_{5/4}^{(n)}\}$ converge comme $\{T(h_n)\}$.

ii) Soit à calculer $I_3 = \int_0^1 x \operatorname{Log} x g(x) dx$.

g une fonction analytique sur $[0,1]$.

D'après [12]

$$\begin{cases} I - T(h_n) = A_T h_n^2 \operatorname{Log} h_n + B_T h_n^2 + C_T h_n^3 + D_T h_n^4 \operatorname{Log} h_n + O(h_n^4) \\ I - S(h_n) = A_S h_n^2 + B_S h_n^3 + C_S h_n^4 \log h_n + O(h_n^4) \end{cases}$$

il est facile de voir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S(h_n) - I}{T(h_n) - I} = 0$$

avec les notations du théorème 2,

$$a_n \sim \frac{A_S}{A_T} \cdot \frac{1}{\operatorname{Log} h_n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\operatorname{Log} h_n}{\operatorname{Log} \frac{h_n}{2}} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I - T(h_{n+1})}{I - T(h_n)} = b = \frac{1}{4} \neq 1.$$

Donc les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées on a alors :

$$R_1^{(n)} - I = o(S(h_n) - I) \text{ et } R_1^{(n)} - I = o(T(h_n) - I).$$

On peut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n = 1$$

et donc

$$U_{n-1} - I = o(T(h_n) - I) \text{ et } U_{n-1} - I = o(S(h_n) - I)$$

Application numérique.

Exemple 4.d

$$I_4 = \int_0^1 -x \log x dx = 0,25$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \log x \text{ si } x \in]0,1] \\ f(0) = 0 \end{array} \right. \quad \forall x \in [0,1] \quad g(x) = -1.$$

Les résultats numériques sont données dans la table N° 4.

Exemple 3.d

n	$T(h)_n$	$S(h)_n$	$R_1^{(n-1)}$	$R_{5/4}^{(n-1)}$	U_{n-2}
1	.173286795139986	.231049060186648	.251606346907307	.246402077891955	.249949994396780
2	.227227183724695	.245207313252932	.250336262342375	.249089016307332	.249988543399745
3	.243405266789150	.248797961143968	.250070561863433	.249770156794388	.249997655675614
4	.248125746251773	.249699239405981	.250015069938958	.249942152365780	.249999530896543
5	.249475032071861	.249924794011890	.250003279567777	.249985464983119	.249999905358724
6	.249854656150785	.249981197510426	.250000725311814	.249996352024093	.249999980599633
7	.249960138524345	.249995299315532	.250000162536991	.24999770711384	.249999995957975
8	.249989153249838	.249998824825002	.250000036816367	.24999942557186	.249999999145449
9	.249997067966965	.249999706206008	.250000008413423	.24999985613804	.249999999817020
10	.249999211905356	.249999926551486	.2500000001936952	.24999996397992	.249999999960381
11	.249999789204741	.249999981637869	.2500000000448733	.249999999098310	.249999999991331
12	.249999943858283	.249999995409464	.2500000000104512		
13	.249999985103840	.249999998852359			



Table n° 3

Exemple 4.d

n	$T(h)_n$	$S(h)_n$	$R_1^{(n-1)}$	$R_{5/4}^{(n-1)}$	U_{n-2}
1	.603553390593274	.638071187457698	.668014371343284	.658484196373433	.666479606708538
2	.643283046242747	.656526264792571	.666989411481856	.663754596181349	.666617686640689
3	.658130221624454	.663079280085024	.666743446959054	.665632538756629	.666654626970463
4	.663581196877228	.665398188628153	.666685106026353	.666299980459138	.666663740949910
5	.66558936278942	.666218182746180	.666671143512466	.666536771601765	.666665953045929
6	.666270811378507	.666508103078362	.666667762975738	.666620681492092	.666666491547327
7	.666525657296826	.666610605936265	.666666936801257	.666650393825205	.666666623470065
8	.666616548976528	.666646846203095	.666666733518170	.666660909770071	.666666655969980
9	.666648881549951	.666659659074426	.666666683260884	.6666664630415315	.666666664010466
10	.666660362218982	.666664189108659	.666666667079485	.6666665946525185	.666666666005764
11	.666664433592967	.666665790717629	.666666667694979	.6666666412004131	.6666666666501964
12	.666665876127173	.666666356971909			
13	.666666386911558	.666666557173020	.6666666666923082	.6666666576616402	

Table n° 4

4 - ETUDE DE LA TRANSFORMATION U.

$$\text{Quand } t_1^{(n)} = s_n \text{ et } t_2^{(n)} = s_{n+1} \text{ alors } \begin{cases} R_1^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)} \\ \text{et} \\ U_n = \theta_2^{(n)} \end{cases}$$

$\{\theta_2^{(n)}\}$ étant la première étape du θ -algorithme [4]. On sait que le noyau du Δ^2 -d'Aitken est inclu dans le noyau de la première étape du θ -algorithme.

On va généraliser ce résultat.

On appelle hypothèse (H) l'hypothèse suivante

$$(H) : \left\{ \begin{array}{l} \Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n+1)} \\ \text{ou} \\ \Delta t_k^{(n)} = \Delta t_k^{(n+1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \{t_k^{(n)} = t_k^{(n+1)} = s^*\} \quad k = 1, 2$$

THEOREME 12.

Sous l'hypothèse (H) et s'il existe N et $\exists \beta_1, \beta_2$ tel que : $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ et $\forall n \geq N : \beta_1(t_1^{(n)} - s^*) + \beta_2(t_2^{(n)} - s^*) = 0$ alors $U_n = s^* \quad \forall n \geq N$.

Preuve.

Supposons que $\beta_1 \neq 0$ et $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$.

On a pour $n \geq N$ $\beta_1(t_1^{(n)} - s^*) + \beta_2(t_2^{(n)} - s^*) = 0$ alors

$$\beta_1 \Delta t_1^{(n)} = -\beta_2 \Delta t_2^{(n)}$$

pour $n \geq N$

$$\text{et} \quad \beta_1 \Delta^2 t_1^{(n)} = -\beta_2 \Delta^2 t_2^{(n)}$$

$$\Delta^2 t_1^{(n)} \Delta t_2^{(n)} \Delta t_2^{(n+1)} - \Delta^2 t_2^{(n)} \Delta t_1^{(n)} \Delta t_1^{(n+1)} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} \left(1 + \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \Delta^2 t_2^{(n)} \Delta t_2^{(n)} \Delta t_2^{(n+1)}$$

Notons $A_k = \{n \in \mathbb{N} / t_k^{(n)} = t_k^{(n+1)} \text{ ou } \Delta t_k^{(n)} = \Delta t_k^{(n+1)}\}$

$$\frac{\Delta^2 t_1^{(n)}}{\Delta^2 t_2^{(n)}} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \frac{\Delta t_2^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n+1)}} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{t_2^{(n+1)} - s^*}{t_1^{(n+1)} - s^*}$$

pour $n \geq N$ et $n \notin (A_1 \cup A_2)$ et donc $U_n = s^*$ pour $n \geq N$ et $n \notin (A_1 \cup A_2)$.

Si $n \in A_1 \cup A_2$ par hypothèse pour $n \geq N$ on a $U_n = S^*$.

. On suppose que $\beta_1 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$

$$\beta_1(t_1^{(n)} - S^*) + \beta_2(t_2^{(n)} - S^*) = \beta_2(t_2^{(n)} - S^*) = 0$$

donc $\forall n \geq N \Delta t_2^{(n)} = 0$ et par définition de U on a $U_n = S^* \forall n \geq N$.

. Si $\beta_1 \neq 0$ et $\beta_2 = 0$ alors $\beta_1(t_1^{(n)} - S^*) = 0 \cdot \Delta t_1^{(n)} = 0$ pour $n \geq N$

pour $n \geq N$ on a par définition de U

$$\begin{cases} U_n = t_1^{(n+1)} & \text{si } \Delta t_2^{(n)} \neq 0 \\ U_n = t_2^{(n+1)} & \text{si } \Delta t_2^{(n)} = 0 \end{cases}$$

et donc par hypothèse $U_n = S^* \quad n \geq N$.

□

Or d'après le théorème 1 de []

$$\exists N \quad n \geq N \quad R_1^{(n)} = S^* \iff \begin{cases} \exists \beta_1, \beta_2 \quad \beta_1 + \beta_2 \neq 0 \quad \exists N \\ n \geq N \quad \beta_1(t_1^{(n)} - S^*) + \beta_2(t_2^{(n)} - S^*) = 0 \end{cases}$$

On vient donc de démontrer que le noyau de la transformation R_1 est inclu dans le noyau de la transformation U .

Mais le noyau de U est différent de celui de R_1 donnons un exemple :

$$t_1^{(n)} = S^* + \lambda^n \quad t_2^{(n)} = S^* + \mu^n, \lambda \neq \mu \neq 0$$

$$U_n = S^* \quad \forall n \geq 1$$

alors que

$$R_1^{(n)} = S^* + \frac{(\lambda\mu)^n (\lambda - \mu)}{\lambda^n (\lambda - 1) - \mu^n (\mu - 1)}$$

Utilisons maintenant le théorème 5 pour donner un résultat de convergence pour la transformation U.

THEOREME 13.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = S^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = S^*$ et si $\exists x, y -x < 1 < y$

$\exists N \quad n > N \quad \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} \notin [x, y]$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = z, z \notin \{0, 1\}$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = S^*$$

Preuve.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = z \\ \text{et } \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} \notin [x, y] \end{array} \right\}$$

alors d'après le théorème 12 de [3]
on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta^2 t_2^{(n)}}{\Delta^2 t_1^{(n)}} = z$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n = 1$ puisque $z \neq 0$ et

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \frac{\Delta^2 t_1^{(n)}}{\Delta^2 t_2^{(n)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_{n+1} \frac{\Delta t_2^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n+1)}} = z$$

donc d'après le théorème 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = S^*.$$

On va examiner le cas où $z = 0$.

THEOREME 14.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = S^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)}. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} = w \text{ et } \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = z_n$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = d \text{ et si } wd \neq 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = S^*.$$

Preuve.

$$\Delta t_2^{(n)} = z_n \Delta t_1^{(n)}$$

$$\Delta^2 t_2^{(n)} = z_{n+1} \Delta t_1^{(n+1)} - z_n \Delta t_1^{(n)}$$

donc

$$\frac{\Delta^2 t_1^{(n)}}{\Delta^2 t_2^{(n)}} = \frac{\Delta t_1^{(n+1)} - \Delta t_1^{(n)}}{z_{n+1} \Delta t_1^{(n+1)} - z_n \Delta t_1^{(n)}}$$

$$\frac{\Delta^2 t_1^{(n)}}{\Delta^2 t_2^{(n)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{((\Delta t_1^{(n+1)} / \Delta t_1^{(n)}) - 1)}{(\frac{z_{n+1}}{z_n} \cdot \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_{n+1} = \frac{w-1}{wd-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_{n+1} \frac{\Delta t_2^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n+1)}} = 0$$

Or

$$U_n = t_1^{(n+1)} - \frac{(t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)})}{\alpha_{n+1} \frac{\Delta t_2^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n+1)}} - 1}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = S^*$. $\square$

Examinons maintenant le problème de l'accélération de la convergence.

THEOREME 15.

Si $\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a + a_n$ avec $a \notin \{0, 1\}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,

Et si $\frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b + b_n$ avec $b \notin \{-1, 0, 1\}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ alors

$$U_n - S^* = o(t_1^{(n+1)} - S^*) \text{ et } U_n - S^* = o(t_2^{(n+1)} - S^*)$$

Preuve.

Par hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b$; $b \notin \{-1 ; 0 ; 1\}$ et alors d'après

le théorème 1 p. 218 de [11]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} = b$$

et comme

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b \neq 1 \end{array} \right\} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = a$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = a$$

de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} = b$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta t_1^{(n+1)}}{\Delta t_1^{(n)}} = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta^2 t_2^{(n)}}{\Delta^2 t_1^{(n)}} = a$$

comme $a \neq 1$ et $a \neq 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_{n+1} = 1$ et d'après le théorème 6. On a

$$U_n - S^* = o(t_1^{(n+1)} - S^*) \text{ et } U_n - S^* = o(t_2^{(n+1)} - S^*)$$

□

Donnons maintenant un résultat quand $a = 0$.

THEOREME 16.

$$\text{Si } \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a_n \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \text{ Si } \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b + b_n \text{ avec } b \neq 1$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ avec $cb \neq 1$. Alors :

$$U_{n-1} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*) \text{ et } U_{n-1} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$$

Preuve.

Posons $f_n = b + b_n$.

$$t_2^{(n)} - S^* = a_n (t_1^{(n)} - S^*)$$

$$\Delta t_2^{(n)} = a_{n+1} (t_1^{(n+1)} - S^*) - a_n (t_1^{(n)} - S^*)$$

et

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{a_{n+1} \cdot f_{n+1} - a_n}{f_{n+1} - 1}$$

$$\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = \frac{a_{n+2} f_n f_{n+1} - 2a_{n+1} f_n + a_n}{f_{n+1} f_n - 2f_n + 1}$$

Or

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\Delta t_1^{(n-1)}}{\Delta t_2^{(n-1)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(n-1)}}{\Delta t_1^{(n-1)}}$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1} - 1\right) (f_n f_{n-1} - 2f_{n-1} + 1)}{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} f_n f_{n-1} + 1 - 2f_{n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) (f_{n-1} - 1)}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n = \frac{(cb-1)(b^2-2b+1)}{(c^2b^2-2cb+1)(b-1)} = \frac{(b-1)}{(cb-1)}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = 0$$

$$\tilde{\alpha}_n \cdot \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - s^*}{t_2^{(n)} - s^*} = \tilde{\alpha}_n \frac{a_{n+1} f_n - a_n}{f_n - 1} \cdot \frac{1}{a_n}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\alpha}_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \frac{t_1^{(n)} - s^*}{t_2^{(n)} - s^*} = 1$$

Toutes les hypothèses du théorème 7 sont vérifiées

$$U_{n-1}^{-s^*} = o(t_2^{(n)} - s^*) \text{ et } U_{n-1}^{-s^*} = o(t_1^{(n)} - s^*)$$

□

Ce théorème est à comparer avec le théorème 2. Puisque sous les mêmes hypothèses que le théorème 16 on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = \frac{b(1-c)}{(b-1)}$$

et donc

$$U_{n-1} - S^* = o(R_1^{(n)} - S^*).$$

Donnons un exemple d'applications du théorème 16.

$$\begin{cases} t_1^{(n)} = S^* + \lambda^n + \lambda^{2n} & 0 < |\lambda| < 1 \\ t_2^{(n)} = S^* + \mu^n + \mu^{2n} & 0 < |\mu| < 1 \text{ et } |\lambda| > |\mu| \end{cases}$$

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \frac{(1+\mu^n)}{(1+\lambda^n)} = a_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b = \lambda$$

de plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

$$cb = \lambda \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \mu \neq 1 \text{ et donc } U_{n-1} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*) \text{ et } U_{n-1} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$$

Pour clore ce paragraphe donnons quelques résultats numériques

$$t_1^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n)} \quad \varepsilon\text{-algorithme [4]}$$

$$t_2^{(n)} = \rho_{2k}^{(n)} \quad \rho\text{-algorithme [4] avec } x_n = n.$$

Exemple 1 e.

$$S_n = \sum_{i=0}^n (i+1)^{-2}$$

$$S = \frac{\pi^2}{6} = 1.644934066846559...$$

k	$\rho_{2k}^{(n)}$	$\epsilon_{2k}^{(2)}$	$R_1^{(1)}$	U_0
1	1.6458333333333333	1.5347222222222222	1.6423611111111114	1.643999173336
2	1.644929792429820	1.584826136024883	1.644962976362080	1.644941794849
3	1.644934091730040	1.606777428773880	1.644933790416594	1.644934007499
4	1.64493406688670	1.618467679095253	1.644934069415294	1.644934067314
5	1.644934066854680	1.625464892953690	1.644934066904190	1.644934066858
6	1.644934066895062	1.629996485932750	1.644934067296720	1.644934066857
7	1.644934066849180	1.633103869577470	1.644934066807744	1.644934066839
8	1.644934066845911	1.635330544537670	1.644934066751414	1.644934066846
9	1.644934066847190	1.637007540616854	1.644934066832650	1.644934066847

Exemple 2 e.

$$S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i / (i+1) \quad S = 0.6931471805599453...$$

k	$\rho_{2k}^{(2)}$	$\epsilon_{2k}^{(2)}$	$R_1^{(1)}$	U_0
1	.8055555555555555	.6944444444444444	.6927083333333333	.6932146774356
2	.787954534845727	.693169396907104	.693133826924077	.6931485879876
3	.775619209418097	.693147656940760	.693146794165632	.6931472102809
4	.766410728061683	.693147191942373	.693147169428296	.6931471812170
5	.759230980584211	.693147180848933	.693147180238375	.6931471805750
6	.753451775242173	.693147180567563	.693147180550625	.6931471805600
7	.748684989322128	.693147180560151	.693147180559675	.6931471805590
8	.744676565022898	.693147180559951	.693147180559937	.6931471805590
9	.741252539094031	.693147180559945	.693147180559945	.6931471805590



Exemple 3 e.

$$S_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i 2^{i+1} / (i+1)$$

{S_n} diverge

$$\log 3 = 1.098612288668110...$$

k	$\rho_{2k}^{(2)}$	$\epsilon_{2k}^{(2)}$	$R_1^{(1)}$	U_0
	0.3589743590D+01	1.128205128205130	1.090909090909090	1.0998738435660
	0.5271743319D+01	1.099724517906340	1.098081222870672	1.0986792722670
	0.8317629957D+01	1.098666666666670	1.098576412686510	1.0986158249660
	0.1386097067D+02	1.098615315413884	1.098609839146580	1.0986124827930
	0.2401938643D+02	1.098612469988410	1.098612119550530	1.0986122997480
	0.4276055841D+02	1.098612300037760	1.098612276892390	1.0986122893210
	0.7754579613D+02	1.098612289402980	1.098612287843030	1.0986122887070
	0.1424553863D+03	1.098612288716630	1.098612288610013	1.0986122886700
	0.2641452292D+03	1.098612288671360	1.098612288663990	1.0986122886680

Exemple 4 e.

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}$$

$$S = 0.604898643421630$$

k	$\rho_{2k}^{(2)}$	$\epsilon_{2k}^{(2)}$	$R_1^{(1)}$	U_0
1	.842379443002658	.606311465502868	.604429932020599	.604983411550179
2	.822942310233980	.604919103539320	.604886270766848	.604900264372895
3	.808234142223254	.604899048027621	.604898309847316	.604898676391271
4	.796527853080643	.604898652647302	.604898634199751	.604898644139874
5	.786883087749464	.604898643648918	.604898643162302	.604898643438114
7	.778733869476443	.604898643427498	.604898643414255	.604898643422023
8	.771714475876952	.604898643421786	.604898643421419	.604898643421640
9	.765575688607626	.604898643421634	.604898643421624	.604898643421630
10	.760140514364839	.604898643421630	.604898643421630	.604898643421630

Exemple 5 e.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ avec } a_0 = 1$$

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \text{Log} \left(\frac{k}{k+1} \right) \quad k > 0$$

$$S = \gamma = 0.577215664901533$$



k	$\rho_{2k}^{(n)}$	$\epsilon_{2k}^{(2)}$	$R_1^{(1)}$	U_0
1	.577068451255870	.637053711734656	.577534691184966	.577461839070535
2	.577217594624652	.609392274211582	.577195686083806	.577211364846648
3	.577215664330227	.597439642919274	.577215634945090	.577215657745565
4	.577215664328322	.591140500367822	.577215664670297	.577215664389150
5	.577215664933491	.587400857367068	.577215665170040	.577215664916729
6	.577215664903386	.584994803740377	.577215664902571	.577215664903282
7	.577215664901242	.583353868941425	.577215664880555	.577215664903269
8	.577215664901398	.582184731807998	.577215664884369	.577215664900946
9	.577215664901399	.581317917389558	.577215664901679	.577215664901429

CHAPITRE II

APPLICATION DE QUELQUES TRANSFORMATIONS COMPOSITES

A

LA RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES.

INTRODUCTION.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution des équations non linéaires. On envisage deux cas selon que la racine est simple ou multiple.

1er Cas : racine simple.

Si on utilise une transformation qui a été définie par Germain-Bonne [13] page 12, pour la résolution des équations non linéaires dans le même contexte que l'utilisation du Δ^2 -d'Aitken pour obtenir la méthode de Steffensen, on obtient une méthode d'ordre 2 qui utilise trois évaluations de fonctions à chaque itération, son indice d'efficacité est donc $\sqrt[3]{2}$ alors que celui de la méthode de Steffensen est $\sqrt{2}$.

En se basant sur le fait que la transformation de Germain-Bonne peut être interprétée comme une transformation composite de rang deux avec t_1 et t_2 définies comme suit :

$$\begin{cases} t_1^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)} & \text{Le } \Delta^2 \text{ d'Aitken} \\ t_2^{(n)} = s_n \end{cases}$$

On montrera comment modifier cette méthode pour qu'elle devienne d'ordre 3.

2ème Cas : racine multiple.

Il s'agit de deux applications de la transformation U qui a été définie dans le chapitre précédent. La première application va nous fournir une méthode de type sécante qui est d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la seconde application va nous fournir une méthode qui est en fait basée sur l'utilisation de la première étape du θ -algorithme. On montrera qu'elle est d'ordre deux.

1 - RAPPEL ET NOTATIONS.

Soit $S = \{S_n\}$ une suite. Si on pose $t_1^{(n)} = S_n$ et $t_2^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n^2}{\Delta^2 S_n} = \epsilon_2^{(n)}$

alors

$$R_1^{(n)} = S_n + \frac{S_n - \epsilon_2^{(n)}}{\frac{\Delta \epsilon_2^{(n)}}{\Delta S_n} - 1}$$

La transformation R_1 ainsi définie n'est autre que la transformation définie par Germain-Bonne [13] p. 12, pour accélérer la convergence de certaines suites à convergence logarithmique.

Ordre de convergence d'une suite de point fixe.

DEFINITION 1.

Soit $S = \{S_n\}$ une suite itérative qui converge vers S^* .

Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|S_{n+1} - S^*|}{|S_n - S^*|^r} = C$$

ou $C \in]0, +\infty[$ et $r \geq 1$, alors on dira que r est l'ordre de convergence de la suite $\{S_n\}$

Indice d'efficacité d'une méthode.

DEFINITION 2.

Soit (M) une méthode destinée à résoudre une équation non linéaire $x = F(x)$. On suppose que la méthode (M) est définie par une suite $\{x_n\}$. Soit r l'ordre de convergence de cette suite $\{x_n\}$ et soit p ($p \in \mathbb{N}^*$) le nombre total des évaluations de fonctions au cours d'une itération.

Si $r > 1$ on pose :

$$I(M) = r^{1/p}$$

$I(M)$ est appelé indice d'efficacité de la méthode (M) .

2 - CAS OU LA RACINE EST SIMPLE.

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation non linéaire :

$$f(x) = 0 \quad \text{où} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Posons $F(x) = x - f(x)$.

On fait les hypothèses suivantes :

- . S^* est solution de l'équation ; $f(S^*) = 0$
- . f est suffisamment dérivable dans un voisinage de S^* .
- . $|F'(S^*)| < 1$.

On peut par exemple, utiliser la méthode de Steffensen, qui est basée sur le Δ^2 -d'Aitken.

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ un réel donné} \\ \text{pour } n \geq 0 \quad v_0 = x_n \text{ et } v_{i+1} = F(v_i) \quad i = 0, 1 \\ \text{puis prendre :} \\ \quad x_{n+1} = \varepsilon_2^{(0)} = v_0 - \frac{(v_1 - v_0)^2}{v_2 - 2v_1 + v_0} \end{array} \right.$$

On démontre que la suite $\{x_n\}$ est d'ordre 2 et, comme elle nécessite deux évaluations de fonctions par itération, l'indice d'efficacité de cette méthode est donc : $\sqrt{2} \approx 1,414...$

Si au lieu d'utiliser le Δ^2 -d'Aitken on utilise la transformation de Germain-Bonne on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} x_0 \text{ un réel donné} \\ \text{pour } n \geq 0 \quad v_0 = x_n \text{ et } v_{i+1} = F(v_i) \quad i = 0, 1, 2 \\ \quad x_{n+1} = R_1^{(0)} = v_0 - \frac{(\varepsilon_2^{(0)} - v_0)}{\frac{\Delta \varepsilon_2^{(0)}}{v_1 - v_0} - 1} \end{array} \right.$$

Achakir ([1] p. 117-118) a démontré que cette suite est d'ordre 2 et que l'indice d'efficacité de la méthode définie par la suite $\{x_n\}$ est donc :

$$\sqrt[3]{2} \approx 1,26$$

DEFINITION 3.

On appelle méthode (M_I) la méthode définie par la suite $\{x_n\}$
 x_0 réel arbitraire

$$n \geq 0 \quad v_0 = x_n \quad \text{et} \quad v_{i+1} = F(v_i) \quad i = 0, 1, 2.$$

$$\varepsilon_2^{(i)} = v_i - \frac{(\Delta v_i)^2}{\Delta^2 v_i} \quad i = 0, 1$$

et

$$x_{n+1} = v_0 - \frac{(\varepsilon_2^{(0)} - v_0)}{\frac{\Delta \varepsilon_2^{(0)}}{v_2 - v_0} - 1}$$

Expliquons comment cette méthode a été obtenue.

$$v_0 = x_n \quad \text{et} \quad v_1 = F(x_n)$$

$$v_1 - S^* = K e_n + L e_n^2 + M e_n^3 + N e_n^4 + o(e_n^4)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = F'(S^*), \quad L = \frac{F''(S^*)}{2}, \quad M = \frac{F'''(S^*)}{6}, \quad N = \frac{F^{(4)}(S^*)}{24} \\ \text{et} \\ e_{n+i} = v_i - S \quad \text{pour } i = 0, 1, 2 \end{array} \right.$$

$$v_2 - S^* = K e_{n+1} + L e_{n+1}^2 + M e_{n+1}^3 + N e_{n+1}^4 + o(e_{n+1}^4)$$

$$\varepsilon_2^{(0)} - S^* = \bar{K} e_n^2 + \bar{L} e_n^3 + \bar{M} e_n^4 + o(e_n^4)$$

où

$$\bar{K} = (1-K)^{-1} [L(-K)]$$

$$\bar{L} = ([1-K]^{-2}) [L^2(-K^2-1) + M(K^3-K)]$$

$$\bar{M} = ([1-K]^{-3}) [L^3(-K^4-K^3-K^2-K) + ML(2K^5-K^4+K-2K)]$$

Ces résultats ont été pris de [15] p. 720.

Or

$$\epsilon_2^{(1)} - S^* = \bar{K} K^2 e_n^2 + (\bar{L} K^3 + 2K\bar{K}L) e_n^3 + o(e_n^3)$$

donc

$$\Delta \epsilon_2^{(o)} = -\epsilon_2^{(1)} - \epsilon_2^{(o)} = \bar{K}(K^2-1)e_n^2 + (\bar{L}(K^3-1) + 2K\bar{K}L)e_n^3 + o(e_n^3)$$

et

$$\Delta e_n = (K-1)e_n + L e_n^2 + M e_n^3 + o(e_n^3)$$

donc

$$\frac{\Delta \epsilon_2^{(o)}}{\Delta e_n} = (1+K)\bar{K} e_n + [\bar{L}(K^2+K+1) + \bar{K}L] e_n^2 + o(e_n^2)$$

On sait que

$$\frac{\epsilon_2^{(o)} - S^*}{e_n} = \bar{K} e_n + \bar{L} e_n^2 + o(e_n^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_2^{(o)} - S^*}{e_n} \cdot \frac{\Delta v_o}{\Delta \epsilon_2^{(o)}} = \frac{1}{1+K}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_2^{(o)} - S^*}{e_n} \frac{v_2 - v_o}{\Delta \epsilon_2^{(o)}} = 1$$

□

THEOREME 1.

La suite $\{x_n\}$ qui définit la méthode (M_I) est d'ordre trois.

Preuve.

$$v_2 - S^* = e_{n+2} = K^2 e_n + L(K^2 + K) e_n^2 + [L^2(2K) + M(K^3 + K)] e_n^3 + o(e_n^3)$$

$$v_2 - v_0 = (K^2 - 1) e_n + L(K^2 + K) e_n^2 + [L^2(2K) + M(K^3 + K)] e_n^3 + o(e_n^3).$$

On a :

$$\frac{\Delta \varepsilon_2^{(0)}}{v_2 - v_0} = \bar{K} e_n + \{(\bar{L}(K^2 + K + 1) - \bar{K}KL)/(K + 1)\} e_n^2 + o(e_n^2)$$

$$= \bar{K} e_n + K_1 e_n^2 + o(e_n^2)$$

$$(v_0 - \varepsilon_2^{(0)}) = e_n - \bar{K} e_n^2 - \bar{L} e_n^3 - \bar{M} e_n^4 + o(e_n^4)$$

et donc :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - S^* &= e_n - \{e_n - \bar{K} e_n^2 - \bar{L} e_n^3 - \bar{M} e_n^4 + o(e_n^4)\} \{1 + \bar{K} e_n + (K_1 + \bar{K}) e_n^2 + o(e_n^2)\} \\ &= (\bar{L} - K_1) e_n^3 + o(e_n^3) \end{aligned}$$

donc

$$x_{n+1} - S^* = (\bar{L} - K_1) (x_n - S^*)^3 + o(x_n - S^*)^3$$

et alors :

la suite $\{x_n\}$ est d'ordre trois.

□

Chaque itération nécessite trois évaluations de fonctions donc $p=3$.

L'ordre de la suite $\{x_n\}$ est trois, l'indice d'efficacité de la méthode (M_1) est :

$$I(M_1) = 3^{1/3} \approx 1,442...$$

Donnons maintenant deux exemples numériques.

Exemple n° 1.

L'équation à résoudre est $x - e^{-x} = 0$. $f(x) = x - e^{-x}$

$$f(x) = x - e^{-x}$$

$$F(x) = e^{-x}$$

$$S^* = 0.567\ 143\ 290\ 409\ 784...$$

en partant de $x_0 = 0$ on a obtenu les résultats suivants :

k	x_k
1	0.565828727712364
2	0.567143290398347
3	0.567143290409784
4	0.567143290409784



Exemple n° 2.

L'équation à résoudre est $x^2 - \frac{31}{5}x + \frac{48}{5} = 0$

$$f(x) = x^2 - \frac{31}{5}x + \frac{48}{5}$$

$$F(x) = x^2 - \frac{26}{5}x + \frac{48}{5}$$

$$S^* = 3$$

$$x_0 = 2,5$$

k	x_k
1	0.297769729317575D+01
2	0.299989817106428D+01
3	0.299999999998650D+01
4	0.300000000000000D+01

3 - CAS OU LA RACINE EST MULTIPLE.

Soit

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(S^*) &= 0 \end{aligned}$$

une équation non linéaire, soit S^* une racine de f :

On suppose que S^* est une racine multiple de f c'est à dire :

$$\begin{cases} f^{(m)}(S^*) \neq 0 & m \geq 2 \\ f^{(i)}(S^*) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

Avec ces hypothèses, f s'écrit sous la forme :

$$f(x) = (x - S^*)^m g(x) \quad \text{avec } g(S^*) \neq 0.$$

On définit aussi la fonction F :

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \\ F(x) &= x - f(x) \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $F(S^*) = S^*$ et $F'(S^*) = 1$

$$F^{(i)}(S^*) = -f^{(i)}(S^*) \quad i > 1$$

DEFINITION 4.

On définit la fonction H par :

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x) = - \frac{f(x) \cdot f(x - f(x))}{f(x - f(x)) - f(x)}$$

LEMME 1.

Avec les hypothèses citées précédemment on a :

$$H(S^*) = 0$$

$$H'(S^*) = \frac{1}{m}$$

$$H''(S^*) = \frac{f''(S^*)}{m^2} [1-2m] - \frac{2}{m^2} \frac{g'(S)}{g(S)}$$

Preuve.

Posons

$$G(x) = \frac{-f(x) \quad f(x)}{f(x-f(x))-f(x)}$$

et

$$K(x) = \frac{f(x-f(x))}{f(x)}$$

On va utiliser quelques résultats obtenus par King dans [14] p. 323

$$\begin{cases} G(S^*) = 0 \\ G'(S^*) = \frac{1}{m} \\ G''(S^*) = -\frac{2}{m} \frac{g'(S^*)}{g(S^*)} + \frac{1}{m^2} f''(S^*) \end{cases}$$

On fait un développement limité de $f(x-f(x))$

$$f(x-f(x)) = f(x) - f'(x)f(x) + \frac{1}{2} [f(x)]^2 f''(x) + \dots + \frac{(-1)^i}{i!} [f(x)]^i f^{(i)}(x) + \dots$$

donc

$$K(x) = 1 - f'(x) + \frac{1}{2} [f(x)] f''(x) + \dots + \frac{(-1)^i}{i!} [f(x)]^{i-1} f^{(i)}(x) + \dots$$

$$H(S^*) = K(S^*) \cdot G(S^*) = 0$$

$$H'(x) = K'(x)G(x) + G'(x)K(x)$$

$$H'(S^*) = G'(S^*) K(S^*) = \frac{1}{m}$$

$$H''(x) = K''(x) G(x) + 2K'(x) \cdot G'(x) + G''(x) \cdot K(x)$$

$$K'(S^*) = -f''(S^*)$$

$$H''(S^*) = -\frac{2}{m} f''(S^*) + \frac{1}{m^2} f''(S) - \frac{2}{m^2} \frac{g'(S^*)}{g(S^*)}$$

□

a - Méthode de type sécante.

DEFINITION 5.

On appelle méthode (M_{II}) la méthode définie par la suite $\{x_n\}$:
 x_0 et x_1 deux réels donnés
 pour $n \geq 1$ $t_1^{(0)} = x_n$ $t_2^{(n)} = x_{n-1}$

$$t_1^{(i+1)} = F(t_1^{(i)}) \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

$$t_2^{(i+1)} = F(t_2^{(i)}) \quad \text{pour } i = 0, 1.$$

On prend $x_{n+1} = U_0$.

Cette méthode nécessite deux évaluations de fonctions à chaque itération (sauf la première qui nécessite quatre évaluations).

On va simplifier l'écriture de U_0 , et pour cela on va utiliser la fonction H qui a été définie précédemment.

LEMME 2.

La suite $\{x_n\}$ qui définit la méthode (M_{II}) peut s'écrire :
 x_0, x_1 2 réels donnés
 $n \geq 1$

$$x_{n+1} = F(x_n) - \frac{(F(x_{n-1}) - F(x_n)) H(x_n)}{H(x_{n-1}) - H(x_n)}$$

Preuve.

$$t_1^{(1)} = x_n - f(x_n)$$

$$t_1^{(2)} = F(x_n - f(x_n)) = x_n - f(x_n) - f(x_n - f(x_n))$$

$$\Delta t_1^{(1)} = -f(x_n - f(x_n))$$

$$\Delta t_1^{(0)} = -f(x_n)$$

$$\Delta^2 t_1^{(0)} = f(x_n) - f(x_n - f(x_n))$$

Or :

$$U_0 = t_1^{(1)} - \frac{(t_2^{(1)} - t_1^{(1)})}{\frac{\Delta^2 t_1^{(0)}}{\Delta^2 t_2^{(0)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(0)}}{\Delta t_1^{(0)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(1)}}{\Delta t_2^{(1)}} - 1}$$

$$\frac{\Delta^2 t_1^{(0)}}{\Delta^2 t_2^{(0)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(0)}}{\Delta t_1^{(0)}} \cdot \frac{\Delta t_2^{(1)}}{\Delta t_1^{(1)}} = \frac{H(x_{n-1})}{H(x_n)}$$

□

Théorème 2.

La suite qui définit la méthode (M_{II}) est de l'ordre $(1+\sqrt{5})/2$.

Preuve.

On pose

$$e_n = x_n - S^*$$

D'après le lemme 1

$$H(x_n) = H'(S^*) e_n + \sum_{i=2}^{m+1} A_i e_n^i + o(e_n^{m+1}) \text{ avec } A_i = \frac{H^{(i)}(S^*)}{i!}$$

$$F(x_n) - S^* = e_n - e_n^m g(x_n) = e_n - e_n^m g(S^*) - e_n^{m+1} g'(S^*) + o(e_n^{m+1})$$

et d'après le lemme 2 on a :

$$x_{n+1} - S^* = \frac{(F(x_n) - S^*) H(x_{n-1}) - (F(x_{n-1}) - S^*) H(x_n)}{H(x_{n-1}) - H(x_n)}$$

$$H(x_{n-1}) - H(x_n) = -H'(S^*) (e_n - e_{n-1}) - \sum_{i=2}^{m+1} A_i (e_n^i - e_{n-1}^i) + o(e_n^{m+1}) + o(e_{n-1}^{m+1})$$

$$H(x_{n-1}) - H(x_n) = -H'(S^*) [e_n - e_{n-1}] \left\{ 1 + \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} [e_n + e_{n-1}] + o(e_n) + o(e_{n-1}) \right\}$$

Posons

$$X_n = (F(x_n) - S^*) H(x_{n-1})$$

$$Y_n = (F(x_{n-1}) - S^*) H(x_n)$$

$$\begin{aligned}
x_n &= (e_n - e_n^m g(S^*) + o(e_n^m)) (H'(S^*) e_{n-1} + \sum_{i=2}^m A_i e_{n-1}^i + o(e_{n-1}^m)) \\
&= H'(S^*) e_n \cdot e_{n-1} + \sum_{i=2}^m A_i e_n e_{n-1}^i - H'(S^*) g(S^*) e_n^m e_{n-1} - \sum_{i=2}^m A_i g(S^*) e_n^m e_{n-1}^i \\
&\quad + o(e_n^m) e_{n-1} + e_n o(e_{n-1}^m)
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
y_n &= H'(S) e_{n-1} e_n + \sum_{i=2}^m A_i e_n^i e_{n-1} - g(S^*) H'(S^*) e_{n-1}^m e_n - \sum_{i=2}^m A_i g(S^*) e_{n-1}^m e_n^i \\
&\quad + e_{n-1} o(e_n^m) + e_n o(e_{n-1}^m)
\end{aligned}$$

$$x_n - y_n = A_2 e_n e_{n-1} (e_{n-1} - e_n) - g(S^*) H'(S^*) e_n e_{n-1} (e_n^{m-1} - e_{n-1}^{m-1}) + \tilde{L} e_n e_{n-1} (e_{n-1}^2 - e_n^2) + \dots$$

$$\text{Si } m = 2 \quad x_n - y_n = [-A_2 e_n \cdot e_{n-1} - g(S^*) H'(S^*) e_n e_{n-1}] (e_n - e_{n-1}) + \tilde{L} e_n e_{n-1} (e_{n-1}^2 - e_n^2) + \dots$$

$$\text{Si } m > 2 \quad x_n - y_n = [-A_2 e_n \cdot e_{n-1}] (e_n - e_{n-1}) + \tilde{L} e_n e_{n-1} (e_{n-1}^2 - e_n^2) + \dots$$

On pose

$$\alpha_2 = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} + g(S^*)$$

$$\alpha_m = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} \quad \text{pour } m \geq 3$$

$$e_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{H(x_{n-1}) - H(x_n)}$$

En ne gardant que les termes prépondérants on a :

$$e_{n+1} \approx \alpha_m e_n \cdot e_{n-1}$$

et donc la suite $\{x_n\}$ est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$. $\square$

Remarques.

$$1^{\circ}) \quad \frac{e_n - e_{n-1}}{H(x_n) - H(x_{n-1})} = m - mH''(S^*) (e_n + e_{n-1}) + \dots$$

donc la suite $\{\beta_n\}$ converge vers m .

$$\beta_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{H(x_n) - H(x_{n-1})}$$

2°) La suite $\{x_n\}$ est d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et la méthode nécessite deux évaluations de fonctions à chaque itération, son indice d'efficacité est :

$$I(M_{II}) \approx 1,272 \dots$$

3°) On peut démontrer que, quand $m=1$ la méthode est aussi d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Avant de donner quelques exemples numériques, on va rappeler la méthode proposée par King [14] pp. 321-325.

La méthode de King est la méthode définie par la suite $\{y_n\}; y_0, y_1$ deux réels donnés pour $n \geq 1$

$$y_{n+1} = y_n - (y_{n-1} - y_n) \cdot \frac{G(y_n)}{G(y_{n-1}) - G(y_n)}$$

avec
$$G(x) = \frac{-[f(x)]^2}{f(x-f(x)) - f(x)}$$

King a démontré que la suite $\{y_n\}$ est aussi d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Si on pose $f_n = y_n - S^*$ alors

$$f_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{G''(S)}{G'(S)} f_n \cdot f_{n-1}$$

De plus si on définit la suite $\{m_n\}$ par :

$$m_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{G(y_n) - G(y_{n-1})} \quad n \geq 1$$

alors la suite $\{m_n\}$ converge vers m .

Pour les résultats numériques, on va donner pour la méthode proposée, quelques termes des suites $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ et $\{\beta_n\}$ et pour la méthode de King on donnera quelques termes des suites $\{y_n\}$, $\{f(y_n)\}$ et $\{m_n\}$.

Exemple n° 1.

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x} \quad f(0) = 0 \quad m = 2 \quad \bar{s} = 0$$

Pour les deux méthodes on a pris : $x_0 = 0.8 = y_0$ et $x_1 = 0.9 = y_1$

n	x_n	$f(x_n)$	β_n
2	0.303541315345700D-01	0.178845946848530D-02	-0.951602023608769D-
3	0.556673750337650D-01	0.587089592126636D-02	-0.891349905458096D-
4	-0.928832318891737D-03	0.172706310526448D-05	0.250065021700249D-
5	0.273460971032990D-04	0.149557715536136D-08	0.229590983592812D-
6	0.126872853452424D-07	0.321934416227510D-15	0.199549810909399D-
7	0.129719719908896D-08	0.336544139763426D-17	0.200004180850035D-

Pour la méthode de King :

n	y_n	$f(y_n)$	m_n
2	0.245908291627214D+00	0.970711701613886D-01	0.763289598268633D+
3	0.945232148350627D-01	0.163260824835073D-01	0.939947783916649D+
4	0.192539433870590D-01	0.727422912331657D-03	0.140729361742776D+
5	0.215579652994115D-02	0.927492251124804D-05	0.172697404582790D+
6	0.592997736788814D-04	0.703250929052232D-08	0.193872772390092D+
7	0.190771763531293D-06	0.727877176351898D-13	0.199338855769573D+

Exemple n° 2.

$$f(x) = -(50 + e^x) \cdot (1-x)^3$$

$$f(1) = 0 \quad m = 3 \quad \bar{s} = 1$$

$$x_0 = y_0 = 0.8 \quad x_1 = y_1 = 1,2$$

n	x_n	$f(x_n)$	β_n
2	0.100141796574950D+01	0.150310819959476D-06	-0.819366653047442D-
3	0.100098849623420D+01	0.509223515736304D-07	-0.791380017063816D-
4	0.999999775846648D+00	-0.593740882438631D-18	0.300156706664690D-
5	0.999999775846648D+00	-0.593740882438631D-18	0.300102700232968D-

Pour la méthode de King :

n	y_n	$f(y_n)$	m_n
2	0.100223425104412D+01	0.588040504359798D-06	0.112301719730291D+01
3	0.100139414196218D+01	0.142860933990586D-06	0.112778777538133D+01
4	0.100000054265571D+01	0.842431106484572D-17	0.299859752545099D+01
5	0.100000054265571D+01	0.842431106484572D-17	0.299859752545067D+01

b - Méthode de type Steffensen



Définition 8.

On appelle méthode (M_{III}) la méthode définie par la suite $\{x_n\}$: x_0 réel donné

$$\begin{aligned} \text{pour } n \geq 0 \quad & t_1^{(0)} = x_n \quad t_2^{(0)} = F(x_n) \\ & t_1^{(i+1)} = F(t_1^{(i)}) \quad t_2^{(i+1)} = F(t_2^{(i)}) \quad \text{pour } i=0,1 \\ & x_{n+1} = U_0 \end{aligned}$$

Rappelons tout d'abord la définition de la première étape du θ -algorithme [4] p. 102. Soit $\{v_i\}$ une suite,

$$\varepsilon_2^{(i)} = v_{i+1} - \frac{\Delta v_i \Delta v_{i+1}}{\Delta^2 v_i}$$

On pose

$$\theta_2^{(i)} = v_{i+1} + \frac{v_{i+1} - \varepsilon_2^{(i)}}{\frac{\Delta \varepsilon_2^{(i)}}{\Delta v_{i+1}} - 1}$$

Lemme 3.

La suite $\{x_n\}$ qui définit la méthode (M_{III}) peut s'écrire : x_0 réel donné

pour

$$v_0 = x_n$$

$$v_{i+1} = F(v_i)$$

pour $i = 0, 1, 2,$

$$x_{n+1} = \theta_2^{(0)}$$

Preuve.

Si dans la méthode précédente on note $v_0 = t_1^{(0)}$; $v_1 = t_1^{(1)}$;
 $v_2 = t_1^{(2)}$; $v_3 = t_2^{(2)}$ alors

$$v_1 = t_1^{(1)} = t_2^{(0)}$$

$$v_2 = t_1^{(2)} = t_2^{(0)}, \text{ de plus } v_0 = x_n, \text{ et}$$

$$v_{i+1} = F(v_i) \text{ pour } i = 0, 1, 2 ;$$

on a donc

$$U_0 = \theta_2^{(0)}.$$

□

Ecrivons x_{n+1} en fonction de x_n , F et H :

$$x_{n+1} = F(x_n) - \frac{(F(F(x_n)) - F(x_n)) H(x_n)}{H(F(x_n)) - H(x_n)}$$

Théorème 3.

La suite $\{x_n\}$ qui définit la méthode (M_{III}) est d'ordre deux.

Preuve.

On pose $e_n = x_n - S^*$ pour $n \geq 0$

$$H(x_n) = H'(S^*) e_n + \sum_{i=2}^{m+1} A_i e_n^i + o(e_n^{m+1})$$

où $A_i = H^{(i)}(S^*)/i!$

$$H(F(x_n)) = H'(S^*) (F(x_n) - S^*) + \sum_{i=2}^{m+1} A_i (F(x_n) - S^*)^i + o(e_n^{m+1})$$

Or

$$F(x) = x - f(x) = x - (x - S^*)^m g(x) = x - (x - S^*)^m \{g(S^*) + g'(S^*) e_n + o(e_n)\}$$

$$F(x_n) - S^* = e_n - e_n^m g(S^*) - e_n^{m+1} g'(S^*) + o(e_n^{m+1})$$

$$H(F(x_n)) = H'(S^*)e_n - H'(S^*)g(S^*)e_n^m - H'(S^*)g'(S^*)e_n^{m+1} + \sum_{i=2}^{m+1} A_i e_n^i - 2A_2 e_n^{m+1} g(S^*) + o(e_n^{m+1})$$

On a aussi :

$$e_{n+1} = \frac{H(F(x_n)) - H(x_n)}{H(F(x_n)) - H(x_n)}$$

$$H(F(x_n)) - H(x_n) = -H'(S^*)g(S^*)e_n^m \left[1 + \left\{ \frac{g'(S^*)}{g(S^*)} + \frac{H''(S^*)}{H'(S^*)} \right\} e_n + o(e_n) \right]$$

$$F(F(x_n)) - S^* = e_n - 2e_n^m g(S^*) - 2g'(S^*)e_n^{m+1} + m[g(S^*)]^2 e_n^{2m-1} + o(e_n^{m+1})$$

$$H(F(x_n)) - H(x_n) = -A_2 g(S^*)e_n^{m+2} + H'(S^*)[g(S^*)]^2 (1-m)e_n^{2m} + o(e_n^{m+2})$$

d'où

$$e_{n+1} = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} e_n^2 + (m-1)g(S^*)e_n^{2m-2} + o(e_n^2)$$

On pose :

$$\alpha_2 = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} + g(S^*)$$

$$\alpha_m = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} \quad \text{si } m > 2$$

donc

$$e_{n+1} = \alpha_m e_n^2 + o(e_n^2)$$

de suite $\{x_n\}$ est d'ordre 2. $\square$

Remarques.

1°) A chaque itération on fait trois évaluation de fonctions donc, l'indice d'efficacité de cette méthode est :

$$I(M_{III}) = \sqrt[3]{2} \approx 1,26...$$

$$F(x_n) = x_n - e_n^m g(x_n) \text{ donc } F(x_n) - x_n = -e_n^m g(x_n).$$

Si on définit la suite $\{\gamma_n\}$ par :

$$\gamma_n = \frac{F(x_n) - x_n}{H(F(x_n)) - H(x_n)}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = m$$

De la même façon on peut définir la suite $\{\delta_n\}$ par :

$$\delta_n = \frac{F(F(x_n)) - F(x_n)}{H(F(x_n)) - H(x_n)}$$

comme $F(F(x_n)) - F(x_n) = -e_n^m g(S^*) + o(e_n^m)$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = m.$$

Dans les exemples numériques on donnera pour chaque exemple quelques termes des suites $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$, $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$.

Exemples numériques.

Dans tous les exemples que l'on a testé on a remarqué que dès que $|f(x_n)| < 10^{-12}$ les résultats numériques des deux suites $\{\gamma_n\}$ et $\{\delta_n\}$ se dégradent et la pression de $\{x_n\}$ ne s'améliore plus, et même dans certains cas elle se dégrade aussi.

Exemple N° 1.

$$f(x) = -(50 + e^x) \cdot (1-x)^3$$

$$S^* = 1 \quad \text{et} \quad m=3 \quad x_0 = 0.9$$

n	x_n	$f(x_n)$	γ_{n-1}	δ_{n-1}
1	0.948100985D+00	-0.733334905D-02	-0.882236049D+01	-0.891601773D+00
2	0.103150853D+01	0.164479397D-02	0.963116572D+01	0.603628537D+01
3	0.995871911D+00	-0.371470710D-05	0.426098381D+01	0.361366273D+01
4	0.100000730D+01	0.205287210D-13	0.301613039D+01	0.300785719D+01

Exemple N° 2.

$$f(x) = +5 x^2$$

$$S^* = 0 \quad m = 2 \quad x_0 = 0.3$$

n	x_n	$f(x_n)$	γ_{n-1}	δ_{n-1}
1	-0.203225806D+00	0.206503642D+00	0.141935484D+01	0.354838710D+00
2	-0.649086911D-01	0.210656909D-01	0.309735632D+00	0.125900605D+01
3	-0.844010638D-02	0.356176979D-03	0.902118745D+00	0.158269099D+01
4	-0.171157761D-03	0.146474896D-06	0.176893034D+01	0.192138020D+01
5	-0.731890511D-07	0.267831860D-13	0.199487497D+01	0.199829082D+01

Exemple N° 3.

$$f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

$$S^* = 0 \quad m = 2 \quad x_0 = 0.9$$

n	x_n	$f(x_n)$	γ_{n-1}	δ_{n-1}
1	0.484723650D-01	0.448189242D-02	-0.510157045D+02	-0.256360324D+00
2	-0.118199732D-02	0.279754200D-05	0.254612207D+01	0.210604918D+01
3	-0.698569332D-06	0.975998905D-12	0.198821276D+01	0.199764087D+01

CHAPITRE III

ALGORITHME REPETES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

INTRODUCTION.

Ce chapitre se compose de deux parties :

Dans la première, on s'intéresse aux suites à convergence linéaire, et en particulier à l'accélération de la méthode des trapèzes, on montre comment modifier le Δ^2 -d'Aitken itéré pour avoir sous certaines hypothèses une erreur comparable à celle obtenue par la méthode de Romberg.

On donne aussi un algorithme pour accélérer les suites de point fixe.

Dans la seconde partie, on s'intéresse aux suites à convergence logarithmique. On commence par donner un théorème d'accélération de la convergence, qu'on applique aux suites de point fixe pour montrer que la première étape du θ -algorithme ainsi que la transformation de Germain-Bonne accélèrent la convergence.

Et pour finir on compare ces deux transformations.

A - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE QUELQUES SUITES À CONVERGENCE LINÉAIRE.

1 - PRINCIPE DE LA METHODE

Définition 1.

On dit que la suite $\{s_n\} \in \text{LIN}$ si et seulement si

1°) $\{s_n\}$ est une suite convergente vers s^* .

2°) i) $\exists \rho \neq 1 ; 0 \leq |\rho| \leq 1$

ii) Il existe une suite $\{c_n\}$ convergente vers zéro avec

$$\frac{s_{n+1} - s^*}{s_n - s^*} = \rho + c_n$$

Définition 2.

Soit $\{s_n\}$ une suite convergente. On définit les transformations μ_k et v_k par

$$\mu_k : \{s_n\} \rightarrow \{\mu_k^{(n)}\} \text{ et } v_k : \{s_n\} \rightarrow \{v_k^{(n)}\}$$

où $v_n :$

$$\mu_k^{(n)} = \mu_k(s_n) = x_k s_n + (1-x_k) s_{n+1}$$

$$v_k^{(n)} = v_k(s_n) = y_k s_n + (1-y_k) s_{n+1}$$

avec 1°) x_k et y_k sont des termes indépendants de n

2°) $\forall k \in \mathbb{N}$

$$x_k \neq y_k$$

On va appliquer la transformation R_1 aux deux transformations μ_0 et v_0 .

Lemme 1.

Si on pose $t_1 = \mu_0$ et $t_2 = v_0$ alors :

$$v_n R_1^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)} = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n}$$

Preuve.

$$v_0^{(n)} - \mu_0^{(n)} = (x_0 - y_0) \Delta s_n$$

$$\Delta v_0^{(n)} - \Delta \mu_0^{(n)} = (x_0 - y_0) \Delta^2 s_n$$

et comme $x_0 \neq y_0$ alors :

$$R_1^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)} = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n}.$$

□

Si la constante y_0 est choisie de telle façon que la suite $\{v_0^{(n)}\}$ converge plus vite que la suite $\{\mu_0^{(n)}\}$, on va comparer $\{\varepsilon_2^{(n)}\}$ et $\{v_0^{(n)}\}$.

Théorème 1.

Soit $\{s_n\}$ une suite appartenant à LIN et $t_1 = \mu_0$; $t_2 = v_0$. On suppose que $x_0 + (1-x_0)\rho \neq 0$ alors

$$R_1^{(n)} - s^* = o(\mu_0^{(n)} - s^*)$$

Si de plus $y_0 + (1-y_0)\rho \neq 0$ alors $R_1^{(n)} - s^* = o(v_0^{(n)} - s^*)$.

Preuve.

On va appliquer le théorème 1 du chapitre I.

$$\{s_n\} \in \text{LIN} \text{ donc } \frac{s_{n+1} - s^*}{s_n - s^*} = \rho + c_n$$

$$\frac{v_o^{(n)} - S^*}{\mu_o^{(n)} - S^*} = \frac{y_o + (1-y_o)\rho + (1-y_o)c_n}{x_o + (1-x_o)\rho + (1-x_o)c_n}$$

Or

$$\begin{cases} x_o \neq y_o \Rightarrow x_o + (1-x_o)\rho \neq y_o + (1-y_o)\rho \\ \text{et} \\ \rho \neq 1 \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_o^{(n)} - S^*}{\mu_o^{(n)} - S^*} = \frac{y_o + (1-y_o)\rho}{x_o + (1-x_o)\rho} \neq 1.$$

de même

$$\frac{\mu_o^{(n+1)} - S^*}{\mu_o^{(n)} - S^*} = \frac{x_o + (1-x_o)\rho + (1-x_o)c_{n+1}}{x_o + (1-x_o)\rho + (1-x_o)c_n} \quad \{\rho + c_n\}$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_o^{(n+1)} - S^*}{\mu_o^{(n)} - S^*} = \rho$$

et donc d'après le théorème 1 du chapitre I on a :

$$R_1^{(n)} - S^* = o(\mu_o^{(n)} - S^*)$$

Si de plus $y_o + (1-y_o)\rho \neq 0$ alors

$$R_1^{(n)} - S^* = o(v_o^{(n)} - S)$$

□

On fait maintenant les hypothèses suivantes :

- La constante ρ est connue.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = d$ et $x_o + (1-x_o)\rho \neq 0$; $y_o + (1-y_o)\rho = 0$

Théorème 2.

Soit $\{s_n\}$ une suite appartenant à LIN. On pose :

$$t_1^{(n)} = \mu_o^{(n)} = x_o s_n + (1-x_o) s_{n+1}.$$

$$t_2^{(n)} = v_o^{(n)} = \frac{\rho s_n - s_{n+1}}{\rho - 1}$$

On suppose que $x_o \neq \frac{\rho}{\rho-1}$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = d,$$



alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S}{v_o^{(n)} - S} = \rho \frac{(1-d)}{(\rho-1)}$$

Preuve.

On note

$$a_n = \frac{(1-y_o) c_n}{x_o + (1-x_o)\rho + (1-x_o)c_n}$$

et

$$f_n = \left(\frac{x_o + (1-x_o)\rho + (1-x_o)c_{n+1}}{x_o + (1-x_o)\rho + (1-x_o)c_n} \right) (\rho + c_n)$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = d$$

Posons aussi $b_n = f_n - \rho$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \quad \text{et} \quad b = \rho$$

D'après le théorème 2 du chapitre I on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{v_o^{(n)} - S^*} = \rho \frac{(1-d)}{(\rho-1)}.$$

□

et donc pour que R_1 accélère la convergence de v_0 il suffit que le nombre d soit égal à 1.

Donnons deux applications de ce théorème.

Exemple 1.

Soit $\{S_n\}$ une suite telle que :

$$S_n \sim S^* + (-1)^n \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{(n+\beta_i)^i} \text{ avec } \gamma_1 \neq 0.$$

$\rho = -1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = d = 1, \quad v_0^{(n)} = \frac{S_n + S_{n+1}}{2}$$

et donc $\forall x_0 \in \mathbb{R} - \{1/2\}$ on a

$$\varepsilon_2^{(n)} - S^* = o(\mu_0^{(n)} - S^*)$$

et

$$\varepsilon_2^{(n)} - S^* = o(v_0^{(n)} - S^*).$$

Exemple 2.

Prenons maintenant la suite $\{S_n\}$ telle que :

$$S_n = S^* + \lambda^n + \delta^n \quad \text{où } 1 > \lambda > \delta > 0$$

$\rho = \lambda$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\delta}{\lambda}$$

Si on prend $x_0 \neq \frac{\lambda}{\lambda-1}$ et $v_0^{(n)} = \frac{\lambda S_n - S_{n+1}}{\lambda-1}$

On a :

$$v_0^{(n)} = S^* + \delta^n \frac{(\lambda-\delta)}{\lambda-1}$$

d'après le théorème précédent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S^*}{v_0^{(n)} - S^*} = \frac{\lambda-\delta}{\lambda-1}$$

et donc :

$$\varepsilon_2^{(n)} \sim S^* + \frac{(\lambda - \delta)^2}{(\lambda - 1)} \delta^n$$

et dans ce cas $\{\varepsilon_2^{(n)}\}$ converge comme $\{v_o^{(n)}\}$.

On va maintenant chercher une suite $\{\alpha_n\}$ pour que R_α accélère la convergence de v_o .

On a vu que $\frac{v_o^{(n)} - S^*}{\mu_o^{(n)} - S^*} = \frac{(1 - y_o) c_n}{x_o + (1 - x_o) \rho + (1 - x_o) c_n}$, quand $y_o = \frac{\rho}{\rho - 1}$ et comme,

$$\Delta v_o^{(n)} = \frac{c_{n+1} (\rho + c_n) - c_n}{1 - \rho} (S_n - S^*)$$

et

$$\Delta \mu_o^{(n)} = \{x_o (\rho - 1 + c_n) + (1 - x_o) (\rho + c_n) (\rho + c_{n+1} - c_n)\} (S_n - S^*)$$

Posons

$$\delta_n = \frac{v_o^{(n)} - S^*}{\mu_o^{(n)} - S^*} \cdot \frac{\Delta \mu_o^{(n)}}{\Delta v_o^{(n)}}.$$

Si on suppose que $d\rho \neq 1$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \frac{\rho - 1}{d\rho - 1}.$$

Théorème 3.

Soit $\{s_n\}$ une suite appartenant à LIN. On pose $t_1^{(n)} = \mu_o^{(n)} = x_o s_n + (1 - x_o) s_{n+1}$ avec $x_o \neq \frac{\rho}{\rho - 1}$

$$t_2^{(n)} = v_o^{(n)} = \frac{s_n - s_{n+1}}{\rho - 1}$$

et

$$\alpha_n = \frac{\rho - 1}{\rho d - 1} \quad \forall n \quad d\rho \neq 1$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = d$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_\alpha^{(n)} - S^*}{v_o^{(n)} - S^*} = 0$$

Preuve.

On utilise le théorème 7 du chapitre I.

$$\frac{\rho-1}{d\rho-1} \frac{\Delta v_o^{(n)}}{\Delta \mu_o^{(n)}} = \frac{-1}{d\rho-1} \cdot \frac{\{c_{n+1}(\rho+c_n)-c_n\}}{\{x_o[(\rho-1)+c_n]+(1-x_o)(\rho+c_n)(\rho+c_{n+1}-1)\}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} = 0 \neq 1.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = 1.$

□

Notons

$$\begin{cases} s_o^{(n)} = s_n & c_o^{(n)} = c_n \\ s_1^{(n)} = R_\alpha^{(n)} & \text{avec } \alpha_n = \frac{\rho-1}{d\rho-1} \end{cases}$$

Si on suppose que la suite $\{s_1^{(n)}\}$ appartient à LIN, on sait qu'il existe ρ_1 et $c_1^{(1)}$ avec :

$$\frac{s_1^{(n+1)} - S^*}{s_1^{(n)} - S^*} = \rho_1 + c_1^{(n)}$$

Si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_1^{(n+1)}}{c_1^{(n)}} = d_1$ avec $\rho_1 d_1 \neq 1$

On peut appliquer la transformation μ_1 à $\{s_1^{(n)}\}$ on obtient :

$$\mu_1^{(n)} = x_1 s_1^{(n)} + (1-x_1) s_1^{(n+1)} \quad \text{et } x_1 \neq \frac{\rho_1}{\rho_1-1}$$

de même

$$v_1^{(n)} = y_1 s_1^{(n)} + (1-y_1) s_1^{(n+1)} \quad \text{et } y_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1-1}.$$

Posons $t_1 = \mu_1$ et $t_2 = v_1$ et $\alpha_n = \frac{\rho_1-1}{d_1 \rho_1-1}$ $\forall n$ on a :

$$t_2^{(n)} - S^* = \alpha(t_1^{(n)} - S^*) \quad R_\alpha^{(n)} - S^* = o(s_1^{(n)} - S^*)$$

et on recommence le raisonnement avec $S_2^{(n)} = R_\alpha^{(n)}$ et ainsi de suite...

On obtient donc un algorithme qui s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 S_0^{(n)} = S_n \\
 \text{pour } p \geq 0 \quad \mu_p^{(n)} = x_p S_p^{(n)} + (1-x_p) S_p^{(n+1)} \\
 \\
 v_p^{(n)} = \frac{\rho_p S_p^{(n)} - S_p^{(n+1)}}{\rho_p - 1} \\
 \\
 w_p = \frac{\rho_p - 1}{d_p \rho_p - 1} \\
 \\
 \text{et} \quad S_{p+1}^{(n)} = \mu_p^{(n)} - \frac{(v_p^{(n)} - \mu_p^{(n)})}{w_p \frac{\Delta v_p^{(n)}}{\Delta \mu_p^{(n)}} - 1}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Cet algorithme peut être considéré comme une généralisation du Δ^2 -d'Aitken itéré [4] p. 191, en effet si on prend $d_p = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}$ on retrouve le Δ^2 -d'Aitken itéré.

2 - ACCELERATION DE LA METHODE DES TRAPEZES.

Supposons que l'on cherche une valeur numérique approchée de l'intégrale définie :

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

où $a < b$ et où f est une fonction $4p+8$ fois continûment différentiable sur $[a, b]$ ($p \in \mathbb{N}$, p fixé). Pour donner une valeur approchée de cette intégrale, on peut utiliser la méthode des trapèzes : on pose :

$$h = \frac{b-a}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$T(h) = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

On définit la suite $\{h_n\}$ par :

$$h_0 = b-a$$

$$h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$$

On obtient une suite $\{T(h_n)\}$ que l'on note $\{S_n\}$:

$$S_0 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$S_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a + i \frac{b-a}{2^n}) + f(b)]$$

On sait que si f est $2m+2$ fois continûment différentiable sur $[a,b]$ (voir par exemple [2] p. 46) on a :

$$S_n = I + z_1 h_n^2 + z_2 h_n^4 + \dots + z_m h_n^{2m} + \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) h_n^{2m+2}$$

$$\xi \in [a,b]$$

B_n : nombres de Bernouilli [2] p. 44.

On va appliquer l'algorithme défini précédemment à la suite $\{S_n\}$. Posons $S_0^{(n)} = S_n$, cherchons la valeur de ρ et de d .

$$S_{n+1}^{-I} = z_1 \frac{h_n^2}{4} + z_2 \frac{h_n^4}{16} + z_3 \frac{h_n^6}{64} + \dots$$

Supposons que $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$.

$$\frac{S_{n+1}^{-I}}{S_n^{-I}} = \frac{1}{4} (1 + \frac{z_2}{z_1} \frac{h_n^2}{4} + \frac{z_3}{z_1} \frac{h_n^4}{16} + \dots) / (1 + \frac{z_2}{z_1} h_n^2 + \frac{z_3}{z_1} h_n^4 + \dots)$$

et donc $\rho = \frac{1}{4}$ et $d = \frac{1}{4}$ donc $w_0 = \frac{4}{5}$

On pose $x_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

On a donc $\mu_o^{(n)} = S_o^{(n+1)}$ et $v_o^{(n)} = \frac{4}{3} S_o^{(n+1)} - \frac{S_o^{(n)}}{3}$ et

$$S_1^{(n)} = \mu_o^{(n)} - \frac{(v_o^{(n)} - \mu_o^{(n)})}{\frac{4}{5} \frac{\Delta v_o^{(n)}}{\Delta \mu_o^{(n)}} - 1}$$

On va démontrer plus loin qu'avec les hypothèses qu'on a faites c'est à dire $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$ on a :

$$S_1^{(n)} = I + A_1 h_n^6 + B_1 h_n^8 + \dots$$

De la même façon si $A_1 \neq 0$ et $B_1 \neq 0$ on a

$$\rho_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{ et } d_1 = \frac{1}{4}$$

et donc

$$w_1 = (1 - (1/2)^6) / (1 - (1/2)^8)$$

on obtient donc $S_2^{(n)}$.

$$S_o^{(n)} = I + z_1 h_n^2 + z_2 h_n^4 + \dots$$

$$S_1^{(n)} = I + A_1 h_n^6 + B_1 h_n^8 + \dots$$

$$S_2^{(n)} = I + A_2 h_n^{10} + B_2 h_n^{12} + \dots$$

Par récurrence $S_k^{(n)} = I + A_k h_n^{4k+2} + B_k h_n^{4k+4} + \dots$ si $A_k \neq 0$ et $B_k \neq 0$

$$\rho_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2} \text{ et } d_k = \frac{1}{4}$$

L'algorithme précédent devient avec ces notations

$$S_o^{(n)} = S_n$$

pour $k \geq 0$

$$\mu_k^{(n)} = S_k^{(n+1)}$$

$$v_k^{(n)} = S_k^{(n)} - \frac{\Delta S_k^{(n)}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1} - 1}$$

$$w_k = \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{2k+1} - 1 \right] / \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{2k+1} - 1 \right]$$

$$S_{k+1}^{(n)} = \mu_k^{(n)} = \frac{(v_k^{(n)} - \mu_k^{(n)})}{w_k \frac{\Delta v_k^{(n)}}{\Delta \mu_k^{(n)}} - 1}$$

Pour simplifier cet algorithme, on va exprimer $S_{k+1}^{(n)}$ en fonction de $S_k^{(n)}$; $S_k^{(n+1)}$ et $S_k^{(n+2)}$.

Lemme 2.

$$S_0^{(n)} = S_n$$

$$S_{k+1}^{(n)} = S_k^{(n+1)} - \frac{(4^{2k+2} - 1)}{(4^{2k+1} - 1)} \frac{\Delta S_k^{(n)} \Delta S_k^{(n+1)}}{\Delta S_k^{(n+1)} - 4 \Delta S_k^{(n)}}$$

Preuve.

L'opérateur Δ porte sur les indices supérieurs.. Pour simplifier les calculs on pose $z = 4^{2k+2}$, $\mu_k^{(n)} = S_k^{(n+1)}$ et on a :

$$v_k^{(n)} = \frac{z S_k^{(n+1)} - 4 S_k^{(n)}}{z - 4}$$

$$(z-4) \Delta v_k^{(n)} - (z-1) \Delta \mu_k^{(n)} = \Delta S_k^{(n+1)} - 4 \Delta S_k^{(n)}$$

or

$$S_{k+1}^{(n)} = S_k^{(n+1)} - \frac{(v_k^{(n)} - S_k^{(n+1)}) (z-1) \Delta S_k^{(n+1)}}{(z-4) \Delta v_k^{(n)} - (z-1) \Delta S_k^{(n+1)}}$$

et

$$v_k^{(n)} - S_k^{(n+1)} = 4 \frac{\Delta S_k^{(n)}}{z-4}$$

et

$$z = 4^{2k+2} \quad (z-1) = 4^{2k+2} - 1$$

et

$$\left(\frac{z}{4} - 1 \right) = 4^{2k+1} - 1$$

et

$$S_{k+1}^{(n)} = S_k^{(n+1)} - \frac{(z-1) \Delta S_k^{(n)} \Delta S_k^{(n+1)}}{(\frac{z}{4} - 1) (\Delta S_k^{(n+1)} - 4\Delta S_k^{(n)})}$$

□

On va donner maintenant un théorème, pour montrer que sous certaines hypothèses l'erreur est comparable à celle obtenue par la méthode de Romberg.

Ce théorème généralise le théorème 9 du chapitre I puisque

$$S_1^{(n)} = S_{n+1} - \frac{15}{3} \frac{\Delta S_n \Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n+1} - 4\Delta S_n} = S_n - \frac{4(S_{n+2} - S_n) \Delta S_n}{S_{n+2} - 5S_{n+1} + 4S_n}$$

et d'après le lemme 1 (chapitre I) on a $S_1^{(n)} = R_{5/4}^{(n+1)}$

Théorème 4.

Si f est $4p+8$ fois continûment différentiable sur $[a, b]$ et si

$$S_k^{(n)} = I + h_n^{4k} \sum_{\ell=1}^{2(p-k)+3} \alpha_k^{(\ell)} h_n^{2\ell} + O(h_n^{4p+8}) ; k \in \{0, \dots, p-1\}$$

$$\alpha_k^{(1)} \neq 0$$

alors

$$S_{k+1}^{(n)} = I + h_n^{4k+4} \sum_{\ell=1}^{2(p-k)+1} \alpha_{k+1}^{(\ell)} h_n^{2\ell} + O(h_n^{4p+8})$$

Preuve.

$$S_k^{(n)} = I + h_n^{4k} \sum_{\ell=1}^{2(p-k)+3} \alpha_k^{(\ell)} h_n^{2\ell} + O(h_n^{4p+8})$$

$S_k^{(n)}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S_k^{(n)} = I + \alpha_k^{(1)} h_n^{4k+2} + \alpha_k^{(2)} h_n^{4k+4} + \alpha_k^{(3)} h_n^{4k+6} + u_k(h_n, \alpha)$$

avec

$$u_k(h, \alpha) = h^{4k} \sum_{\ell=4}^{2(p-k)+3} \alpha_k^{(\ell)} h^{2\ell} + O(h^{4p+8})$$

par définition de la suite $\{h_n\}$ on a : $h_n = 4 h_{n+2}$ et $h_{n+1} = 2h_{n+2}$.

$$S_k^{(n+2)} = I + \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} + \alpha_k^{(2)} H^{4k+4} + \alpha_k^{(3)} H^{4k+6} + u_k(H, \alpha)$$

Posons $X = \Delta S_k^{(n+1)} - 4\Delta S_k^{(n)}$ et

$$a_k^{(\ell)} = \alpha_k^{(\ell)} (1 - 5 \cdot 2^{2\ell+4k} + 4^{2\ell+4k+1})$$

$$C_r = (1-4^r) \quad r \in \mathbb{N}^*$$

alors :

$$X = \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1} C_{2k+2} + \alpha_k^{(2)} H^{4k+4} C_{2k+2} C_{2k+3} + \alpha_k^{(3)} H^{4k+6} C_{2k+3} C_{2k+4} + u_k(H, a)$$

Comme $\alpha_k^{(1)} \neq 0$ par hypothèse notons

$$\beta_k^{(1)} = \frac{\alpha_k^{(2)}}{\alpha_k^{(1)}}, \quad \beta_k^{(2)} = \frac{\alpha_k^{(3)}}{\alpha_k^{(1)}}, \quad A_k = \frac{C_{2k+3}}{C_{2k+1}} \text{ et } B_k = A_k \frac{C_{2k+4}}{C_{2k+2}}$$

$$v_k(H, b) = \sum_{\ell=4}^{2(p-k)+3} b_k^{(\ell)} H^{2\ell-2} + O(H^{4(p-k)+6})$$

$$X = \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1} C_{2k+2} (1 + A_k \beta_k^{(1)} H^2 + B_k \beta_k^{(2)} H^4 + v_k(H, b))$$

avec :

$$b_k^{(\ell)} = \frac{a_k^{(\ell)}}{C_{2k+1} C_{2k+2} \alpha_k^{(1)}}$$

Posons aussi

$$e_k^{(\ell)} = \frac{\alpha_k^{(\ell)}}{2^{4k+2\ell-4}} \text{ et } f_k^{(\ell)} = C_{2k+\ell} \alpha_k^{(\ell)}$$

$$\Delta S_k^{(n)} = \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1} \cdot 4^{2k+1} + \alpha_k^{(2)} H^{4k+4} C_{2k+2} \cdot 4^{2k+2} + \alpha_k^{(3)} H^{4k+6} C_{2k+3} \cdot 4^{2k+3} + u_k(H, e)$$

$$= \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1} \cdot 4^{2k+1} (1 + 4\beta_k^{(1)} D_k H^2 + 16\beta_k^{(2)} A_k H^4 + v_k(H, g))$$

où :

$$D_k = \frac{C_{2k+2}}{C_{2k+1}} \text{ et } g_k^{(\ell)} = \frac{e_k^{(\ell)}}{C_{2k+1} 4^{2k+1} \alpha_k^{(1)}}$$

$$\Delta S_k^{(n+1)} = \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1} + \alpha_k^{(2)} H^{4k+4} C_{2k+2} + \alpha_k^{(3)} C_{2k+3} H^{4k+6} + u_k(H, f)$$

$$= \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1} (1 + \beta_k^{(1)} D_k H^2 + \beta_k^{(2)} A_k H^4 + v_k(H, i))$$

avec

$$i_k^{(\ell)} = \frac{f_k^{(\ell)}}{C_{2k+1} \alpha_k^{(1)}}$$

$$Y = \Delta S_k^{(n)} \cdot \Delta S_k^{(n+1)} = (\alpha_k^{(1)} H^{4k+2} C_{2k+1})^2 4^{2k+1} (1 + 5 \beta_k^{(1)} D_k H^2 + H^4 (17 \beta_k^{(2)} A_k + 4 (\beta_k^{(1)} D_k)^2) + v_k(H, j))$$

$$\frac{C_{2k+2} Y}{C_{2k+1} X} = 4^{2k+1} \alpha_k^{(1)} H^{4k+2} \{ 1 + (5 \beta_k^{(1)} D_k - A_k \beta_k^{(1)}) H^2 + [17 \beta_k^{(2)} A_k + 4 (\beta_k^{(1)} D_k)^2 + A_k^2 (\beta_k^{(1)})^2 - \beta_k^{(2)} B_k - 5 A_k D_k (\beta_k^{(1)})^2] H^4 + v_k(H, m) \}$$

$$\text{Or } 17 A_k - B_k = \frac{16 C_{2k} C_{2k+3}}{C_{2k+1} C_{2k+2}} \text{ et } 5 D_k - A_k = 4$$

$$A_k^2 + 4 D_k^2 - 5 A_k D_k = 9 \cdot \frac{4^{2k+2}}{(C_{2k+1})^2}$$

$$\frac{C_{2k+2} Y}{C_{2k+1} X} = (2H)^{4k+2} \alpha_k^{(1)} + (2H)^{4k+4} \alpha_k^{(2)} + 4^{2k+1} H^{4k+6} \alpha_k^{(3)} \cdot \frac{16 C_{2k} C_{2k+3}}{C_{2k+1} C_{2k+2}} + 9 \frac{4^{2k+2} \cdot (\alpha_k^{(2)})^2}{C_{2k+1}^2 \alpha_k^{(1)}} + 4^{2k+1} H^{4k+2} \alpha_k^{(1)} v_k(H, m)$$

$$\text{On sait qu'il existe } s_k^{(\ell)} : u_k(H, s) = -4^{2k+1} H^{4k+2} \alpha_k^{(1)} v_k(H, m)$$

$$S_{k+1}^{(n)} = I + (2H)^{4k+6} \left[\left(1 - \frac{C_{2k} C_{2k+3}}{C_{2k+1} C_{2k+2}} \right) \alpha_k^{(3)} - \frac{9 \cdot 4^{2k} (\alpha_k^{(2)})^2}{(C_{2k+1})^2 \alpha_k^{(1)}} \right] + u_k(H, s) + u_k(2H, \alpha)$$

$$\text{Or } u_k(H, s) + u_k(2H, \alpha) = u_k(4H, z) \text{ et}$$

$$1 - \frac{C_{2k} C_{2k+3}}{C_{2k+1} C_{2k+2}} = 45 \cdot \frac{4^{2k}}{C_{2k+1} C_{2k+2}}$$

$$S_{k+1}^{(n)} = I + \frac{h_n^{4k+6}}{64} \cdot \frac{9}{C_{2k+1}} \left[\frac{5}{C_{2k+2}} \alpha_k^{(3)} - \frac{1}{C_{2k+1}} \frac{(\alpha_k^{(2)})^2}{\alpha_k^{(1)}} \right] + u_k(h_n, z)$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha_{k+1}^{(1)} = \frac{9}{64 C_{2k+1}} \left[\frac{5}{C_{2k+2}} \alpha_k^{(3)} - \frac{1}{C_{2k+1}} \frac{(\alpha_k^{(2)})^2}{\alpha_k^{(1)}} \right] \\ \alpha_{k+1}^{(i+1)} = z_k^{(3+i)} \quad i = 1, \dots, 2(p-k) + 1. \end{cases}$$

□

Ce théorème généralise le théorème 9 du chapitre I en effet :

si $k = 0$

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{9}{64 C_1} \left[\frac{5}{C_2} \alpha_0^{(3)} - \frac{\alpha_0^{(2)2}}{C_1 \alpha_0^{(1)}} \right]$$

$$C_1 = 3 \quad \text{et} \quad C_2 = 15$$

et si on écrit $S_0^{(n)}$ sous la forme suivante :

$$S_0^{(n)} = I + A_T h_{n-1}^2 + B_T h_{n-1}^4 + C_T h_{n-1}^6 + O(h_{n-1}^8)$$

$$S_0^{(n)} = I + 4A_T h_n^2 + 16 B_T h_n^4 + 64 C_T h_n^6 + O(h_n^8)$$

et donc :

$$\alpha_0^{(1)} = 4A_T \quad \alpha_0^{(2)} = 16 B_T \quad \alpha_0^{(3)} = 64 C_T.$$

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{3}{64} \left[\frac{64}{3} C_T - \frac{16 \times 4 \times 4}{3 \times 4 A_T} \times B_T^2 \right] = C_T - \frac{B_T^2}{A_T}.$$

Donnons maintenant un exemple numérique.

On veut calculer I avec la méthode qu'on vient de décrire :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+0.01} = 4.615 \ 120 \ 516 \ 841 \ 26 \dots$$

$s_1^{(n)}$	$s_2^{(n)}$	$s_3^{(n)}$	$s_4^{(n)}$	$s_5^{(n)}$	$s_6^{(n)}$
3. 398584489798334 3. 4224547. 5331560 5. 206392021185104 4. 763037656368443 4. 641129232410400 4. 5. 754266000000150 4. 615236307511373 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	5. 045910391700920 4. 714434311151820 4. 6304242660030143 4. 615304610842000 4. 615186020911401 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 624666409570760 4. 615309267091721 4. 615153047163744 4. 615121130491031 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 615137080391601 4. 615120801472541 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040

$T_2^{(n)}$	$T_4^{(n)}$	$T_6^{(n)}$	$T_8^{(n)}$	$T_{10}^{(n)}$	$T_{12}^{(n)}$
3. 951581011875900 5. 683504479617990 5. 299315465474800 4. 792395041576410 4. 647242620486102 4. 618717705347960 4. 615347851730711 4. 615128535848590 4. 615120700635410 4. 615120520114240 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	5. 272033285644150 4. 7824153569854690 4. 644391907636053 4. 618160330310800 4. 615282509677504 4. 615124453809571 4. 615120557536990 4. 615120517020992 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 644223365908534 4. 618128309423471 4. 615278999368880 4. 615124261359210 4. 615120552813642 4. 615120516972414 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 615278781364170 4. 615124249335533 4. 615120552530873 4. 615120516969683 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 615120552513200 4. 615120516969513 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040	4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040 4. 615120516983040



Donnons les résultats obtenus par l'algorithme qu'on vient de décrire :

$$\begin{cases} S_0^{(n)} = S_n \\ S_{k+1}^{(n)} = S_k^{(n+1)} - \frac{(4^{2k+2}-1)}{4^{2k+1}-1} \frac{\Delta S_k^{(n)} \Delta S_k^{(n+1)}}{\Delta S_k^{(n+1)} - 4\Delta S_k^{(n)}} \end{cases}$$

et à titre de comparaison on donnera les résultats obtenus par l'utilisation de l'algorithme de Romberg :

$$\begin{aligned} T_0^{(n)} &= S_n \\ T_{k+1}^{(n)} &= \frac{2^{2k+1} T_k^{(n+1)} - T_k^{(n)}}{2^{2k+2} - 1} \\ R_8^{(o)} &= \underline{4.615 \ 120 \ 516 \ 841 \ 320 \ \dots} \\ T_{16}^{(o)} &= \underline{4.615 \ 120 \ 516 \ 840 \ 750 \ \dots} \end{aligned}$$

3 - ACCELERATION DES SUITES DE POINT FIXE

Soit $\{S_n\}$ une suite de nombres réels donnée par $S_{n+1} = \phi(S_n)$ $n \geq 0$ où est une fonction analytique dans un intervalle centré en S^* ; S^* étant le seul point de cet intervalle vérifiant : $S^* = \phi(S^*)$.

On suppose que : 1°) $S_0 - S^*$ est choisi suffisamment voisin de zéro,

$$2^\circ) \ 0 < |\phi'(S^*)| < 1$$

3°) ϕ est analytique dans un voisinage de S^* .

$$S_{n+1} = \phi(S_n) = \phi(S^* + S_n - S^*) = \phi(S^*) + \phi'(S^*) (S_n - S^*) + \dots + \frac{\phi^{(p)}(S^*)}{p!} (S_n - S^*)^p + \dots$$

Notons $e_n = S_n - S^*$ comme $\phi(S^*) = S^*$ on a :

$$e_{n+1} = z_1 e_n + z_2 e_n^2 + \dots + z_p e_n^p + \dots$$

où

$$z_i = \frac{\phi^{(i)}(S^*)}{i!}$$

$$0 < |\phi'(S^*)| < 1 \Leftrightarrow 0 < |z_1| < 1$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = z_1 + z_2 e_n + \dots + z_p e_n^{p-1} + \dots = z_1 + c_n$$

Si on suppose que $z_2 \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = z_1 = d$ de plus $z_1 = \rho$ donc

$$v_o^{(n)} = \frac{z_1 S_n - S_{n+1}}{z_1 - 1}$$

On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N} \ x_k = 1$$

donc $\mu_o^{(n)} = S_n$ et $w_o = \frac{z_1 - 1}{z_1^2 - 1} = \frac{1}{z_1 + 1}$ et donc

$$S_1^{(n)} = S_n - \frac{(v_o^{(n)} - S_n)}{\frac{1}{1+z_1} \Delta S_n - 1}$$

La suite $\{S_n\}$ vérifie les hypothèses du théorème 3 et donc $S_1^{(n)} - S^* = o(v_o^{(n)} - S^*)$ or

$$v_o^{(n)} = S^* + z_2 e_n^2 + o(e_n^2)$$

$$S_1^{(n)} - S^* = A_1 e_n^3 + B_1 e_n^4 + o(e_n^4).$$

$$\frac{S_1^{(n+1)} - S^*}{S_1^{(n)} - S^*} = \frac{z_1^3 + (3z_1^2 z_2 + \frac{B_1}{A_1} (z_1 - 1) z_1^3) e_n + o(e_n)}{z_1^3 + c_1^{(n)}} \quad \text{si } A_1 \neq 0.$$

Si on suppose de plus que $3z_1^2 z_2 + \frac{B_1}{A_1} (z_1 - 1) z_1^3 \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1^{(n+1)}}{c_1^{(n)}} = z_1.$$

$$\rho_1 = z_1^3 \text{ donc}$$

$$w_1 = \frac{z_1^3 - 1}{z_1^4 - 1}$$

$$\mu_1^{(n)} = S_1^{(n)}$$

et

$$v_1^{(n)} = \frac{z_1^3 s_1^{(n)} - s_1^{(n+1)}}{z_1^3 - 1} = s^* + o(e_n^3)$$

Avec les hypothèses que l'on a fait on a :

$$s_2^{(n)} - s^* = o(v_1^{(n)} - s^*)$$

$$s_2^{(n)} - s^* = A_2 e_n^5 + B_2 e_n^6 + o(e_n^6)$$

En résumé :

$$s_0^{(n)} - s^* = e_n$$

$$s_1^{(n)} - s^* = A_1 e_n^3 + o(e_n^3)$$

$$s_2^{(n)} - s^* = A_2 e_n^5 + o(e_n^5)$$

Par récurrence supposons que $s_k^{(n)} - s^* = A_k e_n^{2k+1} + B_k e_n^{2k+2} + o(e_n^{2k+2})$

$$\frac{s_k^{(n+1)} - s^*}{s_k^{(n)} - s^*} = z_1^{2k+1} + [(2k+1) z_2 + \frac{B_k}{A_k} z_1 (z_1 - 1)] z_1^{2k} e_n + o(e_n) \text{ si } A_k \neq 0$$

$\rho_k = z_1^{2k+1}$ et si on suppose que $(2k+1) z_2 + \frac{B_k}{A_k} z_1 (z_1 - 1) \neq 0$ alors $d_k = z_1$ et donc

$$w_k = \frac{z_1^{2k+1} - 1}{z_1^{2k+2} - 1}$$

Supposons que la constante z_1 est connue alors l'algorithme devient :

$$s_0^{(n)} = s_n$$

pour $k \geq 0$

$$\mu_k^{(n)} = s_k^{(n)}$$

$$v_k^{(n)} = \frac{z_1^{2k+1} s_k^{(n)} - s_k^{(n+1)}}{z_1^{2k+1} - 1}$$

$$w_k = (z_1^{2k+1} - 1) / (z_1^{2k+2} - 1)$$

$z_1 = \phi'(S^*)$, or en général on ne connaît pas z_1 , d'où l'idée de remplacer z_1^i par $\frac{\Delta S_{n+i}}{\Delta S_n}$. On a $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = z_1 + z_2(1+z_1)e_n + o(e_n)$

$$\frac{\Delta S_{n+i}}{\Delta S_n} = \prod_{j=1}^i \frac{\Delta S_{n+j}}{\Delta S_{n+j-1}} = z_1^i + o(1)$$

$\{w_k\}$ devient une suite qui dépend de n , on la notera $\{w_k^{(n)}\}$

$$w_k^{(n)} = \frac{\Delta S_{n+2k+1} - \Delta S_n}{\Delta S_{n+2k+2} - \Delta S_n}$$

et

$$s_{k+1/2}^{(n)} = v_k^{(n)} = s_k^{(n)} - \frac{\Delta S_k^{(n)} \Delta S_n}{\Delta S_{n+2k+1} - \Delta S_n}$$

L'algorithme s'écrit

$$(A) \quad \left[\begin{array}{l} s_0^{(n)} = s_n \\ \text{pour } k \geq 0 \quad s_{k+1/2}^{(n)} = s_k^{(n)} - \frac{\Delta S_k^{(n)} \Delta S_n}{\Delta S_{n+2k+1} - \Delta S_n} \\ s_{k+1}^{(n)} = s_k^{(n)} - \frac{(s_{k+1/2}^{(n)} - s_k^{(n)}) \Delta S_k^{(n)} (\Delta S_{n+2k+1} - \Delta S_n)}{(\Delta S_{n+2k+2} - \Delta S_n) \Delta S_{k+1/2}^{(n)} - (\Delta S_{n+2k+1} - \Delta S_n) \Delta S_k^{(n)}} \end{array} \right.$$

Le calcul de $s_{k+1}^{(n)}$ nécessite la connaissance de $s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+2k+3}$. Pour calculer $s_{k+1}^{(n)}$ il faut connaître $s_k^{(n)}, s_k^{(n+1)}$ et $s_k^{(n+2)}$.

On place les quantités $s_k^{(n)}$ dans une table à double entrée. Dans cette table l'indice inférieur désigne une colonne, et l'indice supérieur désigne une diagonale descendante.

s_0 s_1 s_2 $s_3 \quad s_1^{(0)}$ $s_4 \quad s_1^{(1)}$ $s_5 \quad s_1^{(2)} \quad s_2^{(0)}$

On va comparer cet algorithme avec le procédé GBW qui a été obtenu et étudié par B. GERMAIN BONNE [13] et par J. WIMP [22] :

$$\text{GBW} \quad \begin{cases} T_0^{(n)} = s_n \\ T_{k+1}^{(n)} = \frac{\Delta s_n T_k^{(n+1)} - \Delta s_{n+k+1} T_k^{(n)}}{\Delta s_n - \Delta s_{n+k+1}} \end{cases}$$

Le calcul de $T_{k+1}^{(n)}$ nécessite la connaissance de $s_n, \dots, s_{n+k+2}$.

Le calcul de $T_{2k+2}^{(n)}$ nécessite la connaissance de $s_n, \dots, s_{n+2k+3}$.

On va comparer $s_{k+1}^{(n)}$ et $T_{2k+2}^{(n)}$.

Exemple 1.

La suite $\{s_n\}$ est définie par :

$$s_0 = 0,5 \text{ et } s_{n+1} = 0,1 s_n^2 + 0,9 s_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0 \quad s^* = 0$$

$\{s_n\}$ est une suite à convergence linéaire. Les résultats numériques sont donnés dans les tables 1.II et 2.II.

En utilisant 32 termes de la suite, le meilleur résultat atteint par le procédé GBW est $0.9.10^{-7}$ alors qu'avec l'algorithme (A) on a atteint $0.1.10^{-11}$.

Exemple 2.

La suite $\{S_n\}$ est définie par :

$$S_0 = 0 \qquad S_{n+1} = e^{-S_n}$$

$$S = 0.567 \ 143 \ 290 \ 409 \ 784 \ \dots$$

Les résultats sont donnés dans les tables 3.II et 4.II.

Pour cet exemple le procédé GBW est meilleur que l'algorithme (A).



n	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n-2)}$	$S_3^{(n-4)}$	$S_4^{(n-6)}$	$S_5^{(n-8)}$	$S_6^{(n-10)}$	$S_7^{(n-12)}$
0	0.35216D+00						
1	0.31594D+00						
2	0.25971D+00	-0.46676D+00					
3	0.20769D+00	0.65434D-01					
4	0.16297D+00	0.36772D-01	0.24213D+00				
5	0.12601D+00	0.19350D-01	-0.48602D-02				
6	0.96288D-01	0.10025D-01	-0.19488D-02	-0.61038D-01			
7	0.72894D-01	0.51900D-02	-0.88242D-03	0.92239D-04			
8	0.54778D-01	0.27017D-02	-0.39374D-03	-0.71544D-04	0.97992D-02		
9	0.40927D-01	0.14184D-02	-0.17337D-03	-0.31281D-04	-0.12954D-03		
10	0.30440D-01	0.75206D-03	-0.75614D-04	0.12882D-04	-0.22347D-05	-0.10505D-02	
11	0.22559D-01	0.40292D-03	-0.32731D-04	0.52487D-05	-0.45103D-06	-0.12688D-04	
12	0.16672D-01	-0.21810D-03	-0.14082D-04	-0.21190D-05	-0.16266D-06	-0.71290D-08	0.77878D-04
13	0.12295D-01	-0.11923D-03	-0.60290D-05	-0.84545D-06	-0.65633D-07	-0.11446D-07	-0.79952D-06
14	0.90503D-02	0.65785D-04	-0.25725D-05	0.33249D-06	-0.27049D-07	-0.25378D-08	-0.65881D-08
15	0.66527D-02	0.36605D-04	-0.10957D-05	0.12856D-06	-0.11217D-07	-0.85736D-09	-0.20179D-09
16	0.48847D-02	-0.20523D-04	-0.46674D-06	-0.48853D-07	-0.43878D-08	-0.36020D-09	0.26178D-08
17	0.35832D-02	-0.11585D-04	-0.19926D-06	-0.18079D-07	-0.20586D-08	-0.82593D-09	-0.19152D-09

Procédé A

Table 1 II

n	$T_2^{(n)}$	$T_4^{(n-1)}$	$T_6^{(n-4)}$	$T_8^{(n-6)}$	$T_{10}^{(n-8)}$	$T_{12}^{(n-10)}$	$T_{14}^{(n-12)}$
0	0.65689D+03						
1	0.63443D+02						
2	0.17198D+02	0.60370D+06					
3	0.66992D+01	0.15994D+05					
4	0.31475D+01	0.16359D+04	0.94738D+08				
5	0.16566D+01	0.29034D+03	0.11266D+07				
6	0.94013D+00	0.70394D+02	0.58549D+05	0.41403D+10			
7	0.56256D+00	0.20875D+02	0.57668D+04	0.27247D+08			
8	0.34996D+00	0.71220D+01	0.82853D+03	0.83647D+06			
9	0.22419D+00	0.26924D+01	0.15314D+03	0.51180D+05	0.66097D+11		
10	0.14692D+00	0.11001D+01	0.33894D+02	0.47535D+04	0.26991D+09		
11	0.98023D-01	0.47750D+00	0.85835D+01	0.58656D+03	0.53494D+07	0.45460D+12	
12	0.66341D-01	0.21746D+00	0.24121D+01	0.88985D+02	0.21819D+06	0.12367D+10	
13	0.45421D-01	0.10295D+00	0.73600D+00	0.15790D+02	0.13869D+05	0.16761D+08	0.15015D+13
14	0.31394D-01	0.50309D-01	0.23997D+00	0.31670D+01	0.11973D+04	0.47783D+06	0.28534D+10
15	0.21869D-01	0.25239D-01	0.82607D-01	0.70060D+00	0.12944D+03	0.21625D+05	0.27516D+08
16	0.15333D-01	0.12942D-01	0.29743D-01	0.16785D+00	0.16627D+02	0.13501D+04	0.56692D+06
17	0.10809D-01	0.67603D-02	0.11119D-01	0.42945D-01	0.24468D+01	0.10698D+03	0.18792D+05
					0.40174D+00	0.10190D+02	0.86927D+03

Procédé GBW

Table 2 II

n	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$
0	.570691175138838	.567144324670922	.567143286964027	.56714328211898
1	.566559427673623	.567143298454859	.567143275600333	.56714329041703
2	.567253924271367	.567143293735270	.567143290408353	.56714329040978
3	.567123584000260	.567143290293342	.567143290409855	.56714329040978
4	.567146928160769	.567143290419824	.567143290409783	.56714329040978
5	.567142631510979	.567143290409288	.567143290409784	.56714329040978
6	.567143411075349	.567143290409816	.567143290409784	.56714329040978
7	.567143268447086	.567143290409782	.567143290409784	.56714329040978
8	.567143294421322	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
9	.567143289678515	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
10	.567143290543238	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
11	.567143290385444	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
12	.567143290414224	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
13	.567143290408974	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
14	.567143290409932	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
15	.567143290409757	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
16	.567143290409789	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
17	.567143290409783	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978

Table 3 II.



Procédé GBW

n	$T_2^{(n)}$	$T_4^{(n)}$	$T_6^{(n)}$	$T_8^{(n)}$
0	.567598911354532	.567144303059276	.567143290565629	.56714329040978
1	.567125697984516	.567143238917480	.567143290406668	.56714329040978
2	.567154518830576	.567143293699965	.567143290409839	.56714329040978
3	.567141939865033	.567143290224390	.567143290409783	.56714329040978
4	.567143614056528	.567143290420924	.567143290409784	.56714329040978
5	.567143238997599	.567143290409138	.567143290409784	.56714329040978
6	.567143300596719	.567143290409822	.567143290409784	.56714329040978
7	.567143288633881	.567143290409782	.567143290409784	.56714329040978
8	.567143290742343	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
9	.567143290350003	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
10	.567143290420781	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
11	.567143290407787	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
12	.567143290410149	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
13	.567143290409717	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
14	.567143290409796	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
15	.567143290409782	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
16	.567143290409784	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978
17	.567143290409784	.567143290409784	.567143290409784	.56714329040978

Table 4 II

B - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE QUELQUES SUITES À CONVERGENCE LOGARITHMIQUE.

Soit $\{S_n\}$ une suite que l'on veut accélérer ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S^*$.

Soit t_1 et t_2 deux transformations : $t_1 : \{S_n\} \rightarrow \{t_1^{(n)}\}$

$$t_2 : \{S_n\} \rightarrow \{t_2^{(n)}\}$$

On va envisager le cas où $\{t_1^{(n)}\}$ est une suite à convergence logarithmique.

I - THEOREME DE L'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

Théorème 5.

$$\text{Si } \frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a + a_n \quad a \neq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = 1 + b_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$\text{et si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta a_n}{b_n} = 0$$

alors :

$$R_1^{(n)} - S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$$

Si de plus $a \neq 0$

$$R_1^{(n)} - S^* = o(t_2^{(n)} - S^*)$$

Preuve.

$$t_2^{(n)} - S^* = a(t_1^{(n)} - S^*) + a_n(t_1^{(n)} - S^*)$$

$$t_2^{(n)} - t_1^{(n)} = \{(a-1) + a_n\} (t_1^{(n)} - S^*)$$

comme

$$t_1^{(n+1)} - S^* = (t_1^{(n)} - S^*) (1 + b_n)$$

on a :

$$\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)} = \{\Delta a_n + (a-1)b_n + a_{n+1}b_n\} (t_1^{(n)} - S^*)$$

$$\frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = 1 - \frac{(t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) / (t_1^{(n)} - S^*)}{\frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} - 1} = 1 - \frac{[(a-1) + a_n]}{\frac{\Delta a_n}{b_n} + (a-1) + a_{n+1}}$$

et donc $R_1^{(n)} = S^* = o(t_1^{(n)} - S^*)$.

Si de plus $a \neq 0$

$$\frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} = \frac{R_n^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} \cdot \frac{t_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*}$$

□

2 - ACCELERATION DES SUITES DE POINT FIXE.

Définition 2.

On dit que la suite $\{s_n\} \in A_F^{(p)}(S^*)$ si et seulement si : $s_{n+1} = F(s_n)$ ou F est une fonction vérifiant les propriétés :

1°) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un voisinage v de s^* ou s^* est le seul point fixe de F .

2°) F est analytique dans v .

3°) $F'(S^*) = 1$

4°) $\exists p \geq 2$ tel que $\begin{cases} F^{(i)}(S^*) = 0 & i = 2, \dots, p-1 \\ F^{(p)}(S^*) = c \neq 0 \end{cases}$

avec les conditions p impair et c positif non réalisées simultanément.

Kowalewski dans [16] propriété 17, p. 47, montre que si $\{s_n\} \in A_F^{(p)}(S^*)$ alors il existe un sous-ensemble ouvert $V' \subset V$, tel que si $s_0 \in V'$ alors la suite $\{s_n\}$ converge vers S^* .

Dans le cas où $p \in \{2 ; 3\}$ Sablonnière a défini et étudié des algorithmes répétés qui accélèrent la convergence des suites de $A_F^{(p)}(S)$ pour plus de détails voir [18].

En utilisant le théorème 5, on montre que la transformation de Germain-Bonne [13] p. 12, ainsi que la première étape du θ -algorithme [4] p. 16, accélèrent toute suite de $A_F^{(p)}(S^*)$.

a - Transformation de Germain-Bonne.

On note T_1 la transformation R_1 quand : $t_1^{(n)} = S_n$ et $t_2^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n^2}{\Delta^2 S_n} = \epsilon_2^{(n)}$.

$$T_1^{(n)} = S_n - \frac{\Delta S_n (\epsilon_2^{(n)} - S_n)}{\Delta \epsilon_2^{(n)} - \Delta S_n}$$

Théorème 6.

Si $\{S_n\} \in A_F^{(p)}(S^*)$ alors

et

$$T_1^{(n)} - S^* = o(S_n - S^*)$$

$$T_1^{(n)} - S^* = o(\epsilon_2^{(n)} - S^*)$$

Preuve.

On va appliquer le théorème 5. Soit $\{S_n\}$ une suite appartenant à $A_F^{(p)}(S^*)$.

Posons $\begin{cases} f(x) = x - F(x) \\ \text{et } f^{(0)} = f \end{cases}$. On a $f^{(i)}(S^*) = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, p-1$. f peut donc

s'écrire $f(x) = (x - S^*) g(x)$ avec $g(S^*) \neq 0$. Rappelons la définition de la fonction G qui a été utilisée dans le chapitre II.

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G(x) = \frac{[f(x)]^2}{f(x) - f(x-f(x))}$$

King [14] p. 323, a démontré que :

$$G(S^*) = 0 ; G'(S^*) = \frac{1}{p} \text{ et } G''(S^*) = \frac{-2}{p} \frac{g'(S^*)}{g(S^*)} + \frac{1}{2} f''(S^*).$$

Posons $e_n = S_n - S^*$ on a

$$\epsilon_2^{(n)} - S^* = e_n - G(S_n)$$

$$\varepsilon_2^{(n)} - s^* = (1 - \frac{1}{p})e_n - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{G^{(i)}(s^*)}{i!} e_n^i + o(e_n^{p+1})$$

et

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - s^*}{s_n - s^*} = (1 - \frac{1}{p}) - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{G^{(i)}(s^*)}{i!} e_n^{i-1} + o(e_n^p)$$

donc

$$a = 1 - \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad a_n = - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{G^{(i)}(s^*)}{i!} e_n^{i-1} + o(e_n^p)$$

$$\Delta a_n = - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{G^{(i)}(s^*)}{i!} \Delta e_n^{i-1} + o(e_n^p)$$

Or

$$\Delta e_n = -g(s^*) e_n^p + o(e_n^p)$$

$$\Delta^2 e_n = e_n(e_n + e_{n+1})$$

$$\begin{aligned} \Delta(e_n^k) &= \Delta e_n \left(\sum_{j=0}^{k-1} e_n^{k-j-1} e_{n+1}^j \right) \quad k = 1, \dots, p \\ &= o(e_n^p) \end{aligned}$$

donc

$$\Delta a_n = o(e_n^p).$$

Donnons maintenant b_n :

$$\frac{s_{n+1} - s^*}{s_n - s^*} = 1 - g(s^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1}) \quad \text{donc} \quad b_n = -g(s^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1})$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta a_n}{b_n} = 0$$

□

b - Première étape du θ -algorithme.

On note T_2 la transformation R_1 quand : $t_1^{(n)} = s_{n+1}$ et $t_2^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)}$

$$T_2^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1} (\varepsilon_2^{(n)} - S_{n+1})}{\Delta \varepsilon_2^{(n)} - \Delta S_{n+1}}$$

Théorème 7.

Si $\{s_n\} \in A_F^{(p)}(s^*)$ alors :

et

$$T_2^{(n)} - s^* = o(S_{n+1} - s^*)$$

$$T_2^{(n)} - s^* = o(\varepsilon_2^{(n)} - s^*)$$

Preuve.

On va appliquer le théorème 5. Posons $f(x) = x - F(x)$ rappelons la définition de la fonction H qui a été définie dans le chapitre II.

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto H(x) = \frac{f(x) f(x-f(x))}{f(x) - f(x-f(x))}$$

On a vu lemme 1 chapitre II que :

$$H(s^*) = 0 ; H'(s^*) = \frac{1}{p} ; H''(s^*) = \frac{1}{p^2} [1 - 2p] f''(s^*) - \frac{2}{p} \frac{g'(s^*)}{g(s^*)}$$

$$f(x) = (x - s^*) g(x) \text{ avec } g(s^*) = 0$$

$$\varepsilon_2^{(n)} - s^* = e_{n+1} - H(S_n)$$

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - s^*}{e_{n+1}} = (1 - \frac{1}{p}) - \sum_{i=2}^p \frac{H^{(i)}(s^*)}{i!} e_n^{i-1} - H'(s^*) g(s^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1})$$

$$\text{donc } a = 1 - \frac{1}{p} \text{ et } a_n = - \sum_{i=2}^p \frac{H^{(i)}(s^*)}{i!} e_n^{i-1} - H'(s^*) g(s^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1})$$

$$\text{donc } \Delta a_n = o(e_n^{p-1}) \text{ et comme } b_n = -g(s^*) e_{n+1}^{p-1} + o(e_{n+1}^{p-1}) = -g(s^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1})$$

d'où

$$\frac{\Delta a_n}{b_n} = \frac{o(e_n^{p-1})}{-g(s^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1})} = o(1)$$

□

c - Comparaison de la transformation de Germain-Bonne avec le θ_2 -algorithme.

On compare T_1 avec T_2 . La première étape du θ -algorithme sera appelée le θ_2 -algorithme.

On a vu que
$$\epsilon_2^{(n)} = S_n - G(S_n)$$

$$\epsilon_2^{(n)} = S_{n+1} - H(S_n)$$

donc :

$$T_1^{(n)} = S_n - \frac{G(S_n) \Delta S_n}{G(S_{n+1}) - G(S_n)} \quad \text{et} \quad T_2^{(n)} = S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1} H(S_n)}{H(S_{n+1}) - H(S_n)}$$

Théorème 8.

Soit $\{S_n\}$ une suite de $A_F^{(2)}(S_n)$ avec $F(x) = x - (x - S^*)^2 g(x)$ alors

si $[g(S^*)]^2 = g'(S^*)$ on a $T_1^{(n)} - S^* = o(T_2^{(n)} - S^*)$

si $[g(S^*)]^2 = -g'(S^*)$ on a $T_2^{(n)} - S^* = o(T_1^{(n)} - S^*)$

si $[g(S^*)]^2 \neq |g'(S^*)|$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_2^{(n)} - S^*}{T_1^{(n)} - S^*} = \frac{-g(S^*)^2 - g'(S^*)}{g(S^*)^2 - g'(S^*)}$

Preuve.

$$T_1^{(n)} - S^* = e_n - \frac{G(S_n) \Delta e_n}{G(S_{n+1}) - G(S_n)}$$

$$G(S_n) \Delta e_n = G'(S^*) \Delta e_n (e_n + K e_n^2 + L e_n^3 + o(e_n^3)) \quad \text{avec}$$

$$K = \frac{G''(S^*)}{2G'(S^*)} \quad \text{et} \quad L = \frac{G'''(S^*)}{6G'(S^*)}$$

et

$$G(S_{n+1}) - G(S_n) = G'(S^*) \Delta e_n (1 + K(e_n + e_{n+1}) + L(e_n^2 + e_n e_{n+1} + e_{n+1}^2) + o(e_n^2))$$

$$\frac{G(S_n) \Delta e_n}{G(S_{n+1}) - G(S_n)} = e_n - K e_n e_{n+1} + 2(K^2 - L) e_n^3 + o(e_n^3)$$

or $e_{n+1} = e_n - g(S^*) e_n^p + o(e_n^p)$ donc :

$$\frac{G(S_n) \Delta e_n}{G(S_{n+1}) - G(S_n)} = e_n - K e_n^2 - K g(S^*) e_n^{p+1} + 2(K^2 - L) e_n^3 + o(e_n^p)$$

d'où

$$T_1^{(n)} - S^* = K e_n^2 + (2L - 2K^2) e_n^3 + K g(S^*) e_n^{p+1} + o(e_n^{p+1})$$

et

$$T_1^{(n)} - S^* = \frac{G''(S^*)}{2G'(S^*)} e_n^2 + 2\left(\frac{G''(S^*)}{6G'(S^*)} - \left[\frac{G'(S^*)}{2G'(S^*)}\right]^2\right) e_n^3 + \frac{G''(S^*)}{2G'(S^*)} e_n^{p+1} + o(e_n^3)$$

On retrouve le fait que $T_1^{(n)} - S^* = o(e_n)$.

$$T_2^{(n)} - S^* = e_{n+1} - \frac{\Delta e_{n+1} H(S_n)}{H(S_{n+1}) - H(S_n)}$$

Posons

$$\bar{K} = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)}$$

$$\bar{L} = \frac{H''(S^*)}{6H'(S^*)}$$

$$H(S_{n+1}) - H(S_n) = H'(S^*) \Delta e_n (1 + \bar{K}(e_n + e_{n+1})) + \bar{L}(e_n^2 + e_n e_{n+1} + e_{n+1}^2) + o(e_n^2)$$

$$\frac{H(S_n) \Delta e_{n+1}}{H(S_{n+1}) - H(S_n)} = \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} (e_n - \bar{K} e_n e_{n+1} + 2(\bar{K} - \bar{L}) e_n^3 + o(e_n^3))$$

$$\text{Or } \frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = 1 - p g(S^*) e_n^{p-1} + o(e_n^{p-1})$$

$$\begin{aligned} T_2^{(n)} - S^* &= \bar{K} e_n e_{n+1} + (p-1) g(S^*) e_n^p + o(e_n^3) \\ &= \bar{K} e_n^2 + (p-1) g(S^*) e_n^p + o(e_n^3) \end{aligned}$$

$$** \quad T_2^{(n)} - S^* = \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} e_n^2 + (p-1) g(S^*) e_n^p + o(e_n^3)$$

On retrouve le fait que $T_2^{(n)} - S^* = o(e_n)$.

Comme $p = 2$ $T_1^{(n)} - S^* = \frac{G''(S^*)}{2G'(S^*)} e_n^2 + o(e_n^2)$

et

$$T_2^{(n)} - S^* = \left[\frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} + g(S^*) \right] e_n^2 + o(e_n^2)$$

$$f''(S^*) = 2g'(S^*)$$

$$\frac{G''(S^*)}{2G'(S^*)} = \frac{1}{2} \left(\frac{g(S^*)^2 - g'(S^*)}{g(S^*)} \right)$$

et

$$\frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} + g(S^*) = -\frac{1}{2} \left[\frac{g(S^*)^2 + g'(S^*)}{g(S^*)} \right]$$

donc si $g(S^*)^2 = g'(S^*)$ $T_1^{(n)} = o(e_n^2) + S^*$ et $T_2^{(n)} = S^* + o(e_n)$

et si $g(S^*)^2 \neq g'(S^*)$ $T_1^{(n)} - S^* = o(e_n)$ et $T_2^{(n)} - S^* = o(e_n^2)$.

□

Donnons un résultat quand $p \geq 3$.

Théorème 9.

Soit $\{s_n\}$ une suite de $A_F^{(p)}(S^*)$ ($p \geq 3$) avec $F(x) = x - (x - S^*)^p g(x)$

Si $g'(S^*) \neq 0$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_1^{(n)} - S^*}{T_2^{(n)} - S^*} = 1$$

Preuve. $p \geq 3$ $f''(S^*) = 0$

$$\frac{G''(S^*)}{2G'(S^*)} = -\frac{g'(S^*)}{2pg(S^*)} \quad \frac{H''(S^*)}{2H'(S^*)} = -\frac{g'(S^*)}{g(S^*)}$$

d'après * et ** voir la preuve du théorème 8 on a

$$T_1^{(n)} - S^* = -\frac{g'(S^*)}{g(S^*)} e_n^2 + o(e_n^2) \quad \text{et} \quad T_2^{(n)} - S^* = -\frac{g'(S^*)}{g(S^*)} e_n^2 + o(e_n^2)$$

□

Application numérique.Exemple n° 1.

$$F(x) = x - x^2(1+x-x^2) = x - x^2g(x)$$

$$g(0) = 1 \quad g'(0) = 1 \quad s^* = 0$$

Comme $g(0)^2 = g'(0)$, d'après le théorème 8, la transformation de Germain-Bonne converge plus vite que le θ_2 -algorithme (table 1.2).

Exemple n° 2.

$$F(x) = x - x^2(2-4x-x^2) = x - x^2g(x)$$

$$g(0) = 2 \quad g'(0) = 4 \quad s^* = 0$$

Comme $g(0)^2 = -g'(0)$, d'après le théorème 8 le θ_2 -algorithme converge plus vite que la transformation de Germain-Bonne (table 2.2).

Exemple n° 3.

$$F(x) = x - x^2(2-x-x^2) = x - x^2g(x)$$

$$g(0) = 2 \quad g'(0) = -1 \quad s^* = 0$$

D'après le théorème 8 on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_2^{(n)}}{T_1^{(n)}} = -0.6$$

Si on pose $\gamma_n = \frac{T_2^{(n)}}{T_1^{(n)}}$. Les résultats numériques que l'on a obtenus confirment le fait que $\{\gamma_n\}$ converge vers -0.6.

Les résultats numériques sont donnés dans la table 3.2.



n	S_{n+2}	$T_1^{(n-1)}$	$T_2^{(n-1)}$	S_{n+2}	$T_1^{(n-1)}$	$T_2^{(n-1)}$	S_{n+2}	$T_1^{(n-1)}$	$T_2^{(n-1)}$
1	0.165D-01	0.846D-02	0.171D-01	0.242D+00	0.413D+00	0.386D+00	0.919D-01	0.462D-01	-0.611D-01
2	0.162D-01	0.279D-04	-0.288D-03	0.185D+00	0.341D+00	0.279D+00	0.758D-01	0.192D-01	-0.190D-01
3	0.160D-01	0.265D-04	-0.279D-03	0.143D+00	0.206D+00	0.161D+00	0.648D-01	0.113D-01	-0.946D-02
4	0.157D-01	0.252D-04	-0.269D-03	0.114D+00	0.925D-01	0.859D-01	0.567D-01	0.757D-02	-0.586D-02
5	0.155D-01	0.240D-04	-0.260D-03	0.944D-01	0.443D-01	0.442D-01	0.505D-01	0.548D-02	-0.404D-02
6	0.152D-01	0.228D-04	-0.252D-03	0.800D-01	0.257D-01	0.228D-01	0.455D-01	0.417D-02	-0.297D-02
7	0.150D-01	0.217D-04	-0.244D-03	0.693D-01	0.169D-01	0.124D-01	0.415D-01	0.328D-02	-0.229D-02
8	0.148D-01	0.207D-04	-0.236D-03	0.610D-01	0.120D-01	0.721D-02	0.381D-01	0.266D-02	-0.182D-02
9	0.145D-01	0.198D-04	-0.229D-03	0.545D-01	0.901D-02	0.448D-02	0.352D-01	0.220D-02	-0.149D-02
10	0.143D-01	0.189D-04	-0.222D-03	0.492D-01	0.700D-02	0.295D-02	0.328D-01	0.186D-02	-0.124D-02
11	0.141D-01	0.181D-04	-0.215D-03	0.449D-01	0.560D-02	0.203D-02	0.307D-01	0.159D-02	-0.105D-02
12	0.139D-01	0.173D-04	-0.209D-03	0.412D-01	0.458D-02	0.145D-02	0.288D-01	0.137D-02	-0.901D-03
13	0.137D-01	0.166D-04	-0.203D-03	0.381D-01	0.382D-02	0.107D-02	0.272D-01	0.120D-02	-0.783D-03
14	0.135D-01	0.159D-04	-0.197D-03	0.354D-01	0.323D-02	0.815D-03	0.257D-01	0.106D-02	-0.686D-03
15	0.133D-01	0.152D-04	-0.191D-03	0.331D-01	0.277D-02	0.632D-03	0.244D-01	0.940D-03	-0.607D-03
16	0.132D-01	0.146D-04	-0.186D-03	0.310D-01	0.240D-02	0.500D-03	0.233D-01	0.841D-03	-0.541D-03
17	0.130D-01	0.140D-04	-0.181D-03	0.292D-01	0.210D-02	0.402D-03	0.222D-01	0.757D-03	-0.485D-03
18	0.128D-01	0.134D-04	-0.176D-03	0.276D-01	0.185D-02	0.328D-03	0.212D-01	0.685D-03	-0.437D-03
19	0.126D-01	0.129D-04	-0.171D-03	0.262D-01	0.165D-02	0.271D-03	0.203D-01	0.624D-03	-0.397D-03
20	0.125D-01	0.124D-04	-0.167D-03	0.249D-01	0.147D-02	0.226D-03	0.195D-01	0.570D-03	-0.361D-03
21	0.123D-01	0.119D-04	-0.162D-03	0.237D-01	0.132D-02	0.191D-03	0.188D-01	0.523D-03	-0.331D-03
22	0.122D-01	0.115D-04	-0.158D-03	0.226D-01	0.120D-02	0.163D-03	0.181D-01	0.481D-03	-0.304D-03
23	0.120D-01	0.111D-04	-0.154D-03	0.217D-01	0.109D-02	0.140D-03	0.174D-01	0.444D-03	-0.280D-03
24	0.119D-01	0.107D-04	-0.150D-03	0.208D-01	0.994D-03	0.121D-03	0.168D-01	0.412D-03	-0.259D-03
25	0.117D-01	0.103D-04	-0.147D-03	0.199D-01	0.911D-03	0.105D-03	0.162D-01	0.383D-03	-0.240D-03
26	0.116D-01	0.990D-05	-0.143D-03	0.192D-01	0.838D-03	0.920D-04	0.157D-01	0.357D-03	-0.223D-03
27	0.115D-01	0.955D-05	-0.140D-03	0.185D-01	0.773D-03	0.811D-04	0.152D-01	0.333D-03	-0.208D-03
28	0.113D-01	0.922D-05	-0.136D-03	0.178D-01	0.716D-03	0.718D-04	0.148D-01	0.312D-03	-0.195D-03
29	0.112D-01	0.890D-05	-0.133D-03	0.172D-01	0.665D-03	0.638D-04	0.143D-01	0.293D-03	-0.183D-03

Table 1,2

Table 2.2

Table 3.2

3 - ACCELERATION D'UNE AUTRE FAMILLE DE SUITES A CONVERGENCE LOGARITHMIQUE.

Définition 5.

$\{s_n\} \in L(\theta)$ si et seulement si

$$\exists N \quad n \geq N \quad \Delta s_{n-1} = n^\theta (\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots)$$

avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\theta < -1$.

D'après Wimp [22] page 19.

$$e_n = s_n - s^* \sim \frac{n^{\theta+1}}{\theta+1} (\alpha_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots)$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \sim \left(\frac{n+1}{n}\right)^\theta \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} \sim 1 + \frac{\theta+1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donnons maintenant

$$\frac{\Delta e_{n+1}}{\Delta e_n} = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n}$$

$$\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} \sim 1 + \frac{\theta}{n+1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Si on écrit s^* sous la forme : $s^* = s_n - \frac{\Delta s_n}{\frac{s_{n+1} - s^*}{s_n - s^*} - 1}$ et si l'on remplace

$\frac{s_{n+1} - s^*}{s_n - s^*}$ par $\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n}$ on obtient le Δ^2 -d'Aitken :

$$\epsilon_2^{(n)} = s_n - \frac{\Delta s_n}{\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - 1}$$

Si $\{S_n\} \in L(\theta)$ on sait que le Δ^2 -d'Aitken n'accélère pas la convergence de $\{S_n\}$ voir Wimp [22] p. 149.

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par contre si on remplace $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ par $(1 + \frac{1}{n+1}) \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ on fait une erreur ξ_n :

$$\xi_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} - (1 + \frac{1}{n+1}) \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On obtient donc la transformation suivante :

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{(1 + \frac{1}{n+1}) \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}$$

T est la première étape de l'algorithme u de Levin [22] p. 193 et donc d'après le théorème 3 [22] p. 194, il existe un entier $m \geq 1$ tel que :

$$T_n - S^* \sim C n^{\theta+1-m}$$

donc $\{T_n\}$ converge plus vite que $\{S_n\}$ si $\{S_n\} \in L(\theta)$.

Remarque. T accélère la convergence de toute suite à convergence linéaire.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \rho \quad \text{avec } 0 < |\rho| < 1$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n - S^*}{S_n - S^*} = 1 - \frac{\rho-1}{\rho-1} = 0$$

□

Supposons que $T_n - S^* \sim C n^\theta$ ($m = 1$). T_n fait intervenir S_n , S_{n+1} et S_{n+2} .
Or

$$\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Si on note $T_1^{(n)} = T_n$.

$$\frac{T_1^{(n+1)} - S^*}{T_1^{(n)} - S^*} - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où l'idée de pose

$$T_2^{(n)} = T_1^{(n)} - \frac{\Delta T_1^{(n)}}{\frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} - 1}$$

. Supposons que $T_k^{(n)} - S^* \sim K_k n^{\theta+1-k}$ $k \geq 0$

$$\frac{T_k^{(n+1)} - S^*}{T_k^{(n)} - S^*} \sim 1 + \frac{\theta+1-k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1-k}{n+1}\right) \frac{\Delta S_{n+k+1}}{\Delta S_{n+k}} = 1 + \frac{\theta+1-k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et on obtient donc l'algorithme suivant

$$\begin{cases} T_0^{(n)} = S_n \\ T_{k+1}^{(n)} = T_k^{(n)} - \frac{\Delta T_k^{(n)}}{\left(1 + \frac{1-k}{n}\right) \frac{\Delta S_{n+k+1}}{\Delta S_{n+k}} - 1} \end{cases}$$

Exemples numériques.

Exemple n° 1.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \quad S^* = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\{S_n\} \in L(-2)$$

Les résultats numériques sont donnés dans la table n° 1.3. Si $k \geq 7$ les résultats se dégradent.

n	S_n	$T_1^{(n)}$	$T_2^{(n)}$	$T_3^{(n)}$
0	1.0000000000000000	1.7500000000000000	1.623015873015871	1.642954403983822
1	1.2500000000000000	1.6944444444444443	1.636574074074080	1.644599152443940
2	1.3611111111111111	1.6736111111111112	1.640883838383820	1.644864201455210
3	1.4236111111111111	1.6636111111111110	1.642670940170972	1.644921633665770
4	1.4636111111111111	1.6580555555555560	1.643543083900210	1.644935523406272
5	1.4913888888888890	1.654654195011340	1.644018690809690	1.644938517303400
6	1.511797052154200	1.652422052154200	1.644299894909192	1.644938597802513
7	1.527422052154200	1.650878842277650	1.644476725875530	1.644937963278940
8	1.539767731166540	1.649767731166540	1.644593458798611	1.644937246488100
9	1.549767731166540	1.648941284885550	1.644673608117940	1.644936618077240
10	1.558032193976460	1.648309971754244	1.644730455354040	1.644936107908843
11	1.564976638420902	1.647816875107280	1.644771890535450	1.644935705032340
12	1.570893798184220	1.647424410429130	1.644802802646040	1.644935389609250
13	1.575995839000542	1.647106950111650	1.644826331424980	1.644935142635371
14	1.580440283444990	1.646846533445003	1.644844556183262	1.644934948461640
15	1.584346533444990	1.646630270469200	1.644858891246800	1.644934794846250
16	1.587806741057443	1.646448716366071	1.644870321435893	1.644934672455600
17	1.590893160810530	1.646294822860380	1.644879546865530	1.644934574217343
18	1.593663243913023	1.646163243913011	1.644887074530661	1.644934494777144
19	1.596163243913023	1.646049865228220	1.644893277708462	1.644934430058934
20	1.598430817609170	1.645951478766233	1.644898435360852	1.644934376981970
21	1.600496933311650	1.645865553349474	1.644902758811130	1.644934333150020
22	1.602387292479890	1.645790070257670	1.644906410127140	1.644934296702073
23	1.604123403591000	1.645723403591020	1.644909515011000	1.644934266268400
24	1.605723403591000	1.645664231993292	1.644912171982711	1.644934240643691
25	1.607202693531830	1.645611472681330	1.644914458984713	1.644934218932831

BU
LILLE

n	$T_4^{(n)}$	$T_5^{(n)}$	$T_6^{(n)}$	$T_7^{(n)}$
0	1.644599152443940	1.644855861873570	1.644913288735190	1.644929251030980
1	1.644950163296700	1.644957256176120	1.644948169307470	1.644942312910073
2	1.644957256176120	1.644945776058110	1.644939150455481	1.644936396865202
3	1.644948043735740	1.644939150455481	1.644935827941590	1.644934727935080
4	1.644942031878290	1.644936377117440	1.644934727935080	1.644934273061980
5	1.644938713795480	1.644935189858841	1.644934337659343	1.644934137498652
6	1.644936881907780	1.644934648859840	1.644934186809380	1.644934093213700
7	1.644935838056970	1.644934386009702	1.644934123788290	1.644934077013660
8	1.644935220689932	1.644934250690502	1.644934095285000	1.644934071710291
9	1.644934842174600	1.644934177237120	1.644934082151684	1.644934067987041
10	1.644934602268180	1.644934135751280	1.644934074878593	1.644934068755750
11	1.644934445686380	1.644934111076550	1.644934071961340	1.644934066233020
12	1.644934340664020	1.644934096265610	1.644934069414440	1.644934067583320
13	1.644934268611460	1.644934086723854	1.644934068651030	1.644934066981820
14	1.644934218046704	1.644934080672260	1.644934067995760	1.644934066918782
15	1.644934181911930	1.644934076658470	1.644934067596220	1.644934064294630
16	1.644934155636940	1.644934073936670	1.644934066435000	1.644934073179620
17	1.644934136228621	1.644934071793541	1.644934068690400	1.644934061513333
18	1.644934121627110	1.644934070948180	1.644934066402722	1.644934060255542
19	1.644934110648022	1.644934069764750	1.644934064530742	1.644934099266663
20	1.644934102163792	1.644934068459750	1.644934074657832	1.644934015188244
21	1.644934095451564	1.644934069942431	1.644934058027433	1.644934073012610
22	1.644934090568161	1.644934067203150	1.644934062053884	1.644934189647760
23	1.644934086261890	1.644934066063633	1.644934095047720	1.644933843474424
24	1.644934082672881	1.644934072246503	1.644934032350940	1.644934230838660
25	1.644934080884381	1.644934064031830	1.644934080090621	1.644934028002280

Table 1.3

Exemple n° 2.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \text{Log} \frac{i-1}{i} \quad \text{avec } S_1 = 1$$

$$S^* = \gamma = 0.577 \ 215 \ 664 \ 901 \ 532 \ \dots$$

n	$T_1^{(n)}$	$T_2^{(n)}$	$T_3^{(n)}$	$T_4^{(n)}$
27	.577117730369624	.577217219111490	.577215675754865	.577215664125000
28	.577124114118244	.577217073248832	.577215674299923	.577215664714365
29	.577129893488496	.577216945076693	.577215673137225	.577215663727212
30	.577135142427389	.577216831998380	.577215672029522	.577215665192155
31	.577139923910040	.577216731845479	.577215671247737	.577215663786474
32	.577144291835702	.577216642836546	.577215670418393	.577215665620974
33	.577148292554602	.577216563450721	.577215669899600	.577215663842477
34	.577151966100453	.577216492437501	.577215669261869	.577215664622493
35	.577155347197481	.577216428706882	.577215668785965	.577215664896028



C - RESUME DES RESULTATS OBTENUS POUR LES TRANSFORMATIONS R_1 et U .

$$\frac{t_2^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = a + a_n \quad \text{et} \quad \frac{t_1^{(n+1)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} = b + b_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

I - LA TRANSFORMATION R_1

		$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} :$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_1^{(n)} - S^*}{t_2^{(n)} - S^*} :$
$a \neq 0$ et $a \neq 1$	$b \neq 1$	0	0
$a = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$	$b \neq 1$	0	$\frac{b(1-c)}{(b-1)}$
$a \neq 0$ et $a \neq 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta a_n}{b_n} = 0$	$b = 1$	0	0

2 - LA TRANSFORMATION U.

		$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n - S^*}{t_1^{(n)} - S^*} :$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n - S^*}{t_1^{(n)} - S^*}$
$a \neq 0 \text{ et } a \neq 1$	$b \notin \{-1, 0, 1\}$	0	0
$a = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ $cb \neq 1$	$b \neq 1$	0	0



CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS COMPOSITE DE DEUX TRANSFORMATIONS VECTORIELLES.

INTRODUCTION.

Ce chapitre se compose de deux parties, chacune des parties est consacrée à l'étude d'une transformation composite de deux transformations vectorielles ; on étudie chacune de ces deux transformations (convergence, noyau, ...). On montre que la première peut se calculer avec le H-algorithme [9] et que la seconde peut se calculer soit avec le R.P.A., soit avec le C.R.P.A. [6].

Chaque partie contient comme application, la résolution des systèmes d'équations non linéaires ; on montre comment la première transformation généralise la méthode de la sécante [17] (on donne quelques exemples).

Et à la fin de chaque partie, on propose une généralisation de la méthode Regula-Falsi au cas vectoriel.

A - PREMIERE GENERALISATION.

En s'inspirant d'une interprétation d'une transformation composite de rang deux dans le cas scalaire [8], on définit une transformation vectorielle et on utilise le H-algorithme pour mettre en oeuvre cette transformation. On donne ensuite un théorème de convergence et un théorème d'accélération.

A partir de cette transformation, on donne un algorithme général pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires, on montre qu'en particulier, cet algorithme généralise la méthode de la sécante [17] et comme application on donne des exemples numériques pour la méthode d'Henrici et pour la méthode d'Ulm [21].

On propose ensuite une généralisation de la méthode Regula-Falsi. Les résultats numériques indiquent que cette méthode a un ordre voisin de $(1+\sqrt{5})/2$

1 - INTERPRÉTATION D'UNE TRANSFORMATION COMPOSITE DE RANG DEUX DANS LE CAS SCALAIRE.

Soit $\{s_n\}$ une suite ; $s_n \in \mathbb{R}$ considérons deux transformations de suites t_1 et t_2 .

$$t_1 : \{s_n\} \longrightarrow \{t_1^{(n)}\}$$

$$t_2 : \{s_n\} \longrightarrow \{t_2^{(n)}\}$$

Dans le chapitre I on a défini la transformation R_1 par :

$$R_1 : \{s_n\} \longrightarrow \{R_1^{(n)}\} \text{ où}$$

$$R_1^{(n)} = t_1^{(n)} - \frac{\Delta t_1^{(n)} (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_n^{(n)}}$$

Interprétation.

On se donne une application affine f :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = ax + b$$

et on cherche a et b tels que

$$\begin{cases} f(t_1^{(n)}) = t_2^{(n)} \\ f(t_1^{(n+1)}) = t_2^{(n+1)} \end{cases}$$

On obtient alors le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} at_1^{(n)} + b = t_2^{(n)} \\ at_1^{(n+1)} + b = t_2^{(n+1)} \end{cases}$$

donc

$$a = \frac{t_2^{(n+1)} - t_2^{(n)}}{t_1^{(n+1)} - t_1^{(n)}} = \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}}$$

et

$$b = t_2^{(n)} - \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} \cdot t_1^{(n)}$$

Cherchons maintenant le point fixe de f (qui existe si $a \neq 1$)

$$x = ax + b \quad \text{donc} \quad x = \frac{b}{1-a}$$

$$\begin{aligned} x &= \left(t_2^{(n)} - \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}} t_1^{(n)} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_1^{(n)}}} \\ &= t_2^{(n)} - \frac{\Delta t_2^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}} (t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) \\ &= R_1^{(n)} \end{aligned}$$

On obtient donc la transformation composite de rang deux.

2 - GÉNÉRALISATION AU CAS VECTORIEL.

Soit $\{S_n\}$ une suite, $S_n \in \mathbb{R}^P$. On se donne une fonction $F : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}^P$ où

$$F(x) = Ax + b$$

A est une matrice carrée (p,p)

b est un vecteur de $\mathbb{R}^P$ et x est un vecteur de $\mathbb{R}^P$. On cherche A et b de manière que :

$$F(t_1^{(n+i)}) = t_2^{(n+i)} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, p.$$

Donc

$$A t_1^{(n+i)} + b = t_2^{(n+i)} \text{ pour } i = 0, \dots, p$$

$$A \Delta T_1^{(n)} = \Delta T_2^{(n)}$$

où $\Delta T_1^{(n)}$ est une matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le vecteur $t_1^{(n+i)} - t_1^{(n+i-1)}$ pour $i = 1, \dots, p$

$\Delta T_2^{(n)}$ est une matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le vecteur $t_2^{(n+i)} - t_2^{(n+i-1)}$ pour $i = 1, \dots, p$.

Si la matrice $\Delta T_1^{(n)}$ est inversible alors

$$A = \Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1}$$

$$b = -\Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1} \cdot t_1^{(n)} + t_2^{(n)}$$

Cherchons maintenant le point fixe de F (quand $I-A$ est une matrice inversible, I étant la matrice unité).

$$x = (I-A)^{-1}b.$$

Posons $x = T_p^{(n)}$ alors

$$T_p^{(n)} = t_1^{(n)} + (I - \Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1})^{-1} (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})$$

Si $I - \Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1}$ est inversible

$$T_p^{(n)} = t_1^{(n)} \text{ sinon.}$$

Si $p = 1$.

$$S_n \in \mathbb{R} \quad t_1^{(n)} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad t_2^{(n)} \in \mathbb{R}.$$

$$T_1^{(n)} = R_1^{(n)}.$$

Remarque.

$$t_n^{(n)} = S_n \quad t_{v_n} = (\langle y, \Delta S_n \rangle, \dots, \langle y, \Delta S_{n+p-1} \rangle)$$

$$v_n \in \mathbb{R}^p \quad S_n \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad t_2^{(n)} = S_n + v_n$$

$\langle a, b \rangle$: produit scalaire $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^p$ alors :

$$T_p^{(n)} = e_p(S_n)$$

ε -algorithme topologique [4].

$T_p^{(n)}$: peut se mettre sous la forme d'un rapport de deux déterminants.

Rappelons d'abord l'identité de Magnus [7]

$$\begin{matrix} \circ \\ x \end{matrix} \in \mathbb{R}^p \quad u \in \mathbb{R}^p \quad A \text{ une matrice } (p,p)$$

Posons $x^t = (x^1, \dots, x^p)$ $x^i \in \mathbb{R}^p$

Soit y un vecteur de $\mathbb{R}^p$

$$y^t = (y_1, \dots, y_p) \quad y \in \mathbb{R}^p$$

$$y_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, p$$

On note $X * y = y_1 x^1 + \dots + y_p x^p$ et $|A|$ = déterminant de A .

Identité de Magnus :

$$\frac{\begin{vmatrix} \circ & & \\ x & & X \\ & u & A \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\circ}{x} - X * A^{-1}u$$

Notons $(z)_i = \langle z, e^i \rangle$ pour $i = 1, \dots, p$ avec :

$\{e^1, \dots, e^p\}$ base conique de $\mathbb{R}^p$.

la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\Delta T_1^{(n)}$ est :

$$(\Delta T_1^{(n)})_i = ((\Delta t_1^{(n)})_i, \dots, (\Delta t_1^{(n+p-1)})_i)$$

Posons :

$$x = t_1^{(n)}$$

$$x^i = [\Delta T_1^{(n)}]_i t$$

$$X = \Delta T_1^{(n)}$$

$$u = t_2^{(n)} - t_1^{(n)}$$

et

$$A = \Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}$$

D'après l'identité de Magnus et sachant que $T_p^{(n)}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} T_p^{(n)} &= t_1^{(n)} - \Delta T_1^{(n)} (\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)})^{-1} (t_2^{(n)} - t_1^{(n)}) \\ &= x - X.A^{-1} u \end{aligned}$$

On a :

$$T_p^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{(n)} & \Delta t_1^{(n)} & \Delta t_1^{(n+p-1)} \\ (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_1 & (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_1 & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_1 \\ \hline (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_p & (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_p & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_1 & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_1 \\ \hline (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_p & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_p \end{vmatrix}}$$

Le déterminant du numérateur est développable suivant la première ligne.

On remplace chaque colonne par sa somme avec la précédente on obtient :

$$T_p^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{(n)} & t_1^{(n+1)} & \cdots & t_1^{(n+p)} \\ (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_1 & (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)})_1 & \cdots & (t_2^{(n+p)} - t_1^{(n+p)})_1 \\ \hline (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_p & (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)})_p & \cdots & (t_2^{(n+p)} - t_1^{(n+p)})_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_1 & (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)})_1 & \cdots & (t_2^{(n+p)} - t_1^{(n+p)})_1 \\ \hline (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_p & (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)})_p & \cdots & (t_2^{(n+p)} - t_1^{(n+p)})_p \end{vmatrix}}$$



3 - UN ALGORITHME DE CALCUL DE $T_p^{(n)}$.

Posons $g_i^{(n)} = (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_i$ pour $i = 1, \dots, p$

$$N_k^{(n)} = \begin{vmatrix} g_i^{(n)} \in \mathbb{R}. \\ t_1^{(n)} & t_1^{(n+1)} & \cdots & t_1^{(n+k)} \\ g_1^{(n)} & g_1^{(n+1)} & \cdots & g_1^{(n+k)} \\ \hline g_k^{(n)} & g_k^{(n+1)} & \cdots & g_k^{(n+k)} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_k^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1^{(n)} & g_1^{(n+1)} & \cdots & g_1^{(n+k)} \\ \hline g_k^{(n)} & g_k^{(n+1)} & \cdots & g_k^{(n+k)} \end{vmatrix}$$

et

$$H_k^{(n)} = \frac{N_k^{(n)}}{D_k^{(n)}}$$

$$N_{k,i}^{(n)} = \begin{vmatrix} g_i^{(n)} & \cdots & g_i^{(n+k)} \\ g_1^{(n)} & \cdots & g_1^{(n+k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_k^{(n)} & \cdots & g_k^{(n+k)} \end{vmatrix} \quad \text{pour } i > k$$

Notons

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{N_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}}$$

On applique pour $N_{k,i}^{(n)}$ et $D_k^{(n)}$, l'identité de Sylvester et de même l'identité de Sylvester généralisée [7] pour $N_k^{(n)}$. On obtient l'algorithme suivant :

$$H_0^{(n)} = t_1^{(n)} \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i^{(n)}$$

$$H_k^{(n)} = \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)} H_{k-1}^{(n)} - g_{k-1,k}^{(n)} H_{k-1}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}}$$

pour $i > k$.

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{g_{k-1,i}^{(n)} g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}}$$

On a le résultat suivant :

$$\text{Si } g_i^{(n)} = (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \text{ alors}$$

$$T_p^{(n)} = H_p^{(n)}$$

Cet algorithme ($H_k^{(n)}$) s'appelle le H-algorithme [9]. La différence entre cet algorithme et le E-algorithme vectoriel [9] est que :

pour le H-algorithme : $H_k^{(n)} \in \mathbb{R}^p$ et $g_{k,i}^{(n)} \in \mathbb{R}$ alors que pour le E-algorithme :

$$E_k^{(n)} \in \mathbb{R}^p \text{ et } g_{k,i}^{(n)} \in \mathbb{R}^p.$$

Donnons maintenant un théorème de convergence pour $T_p^{(n)}$. Ce théorème est analogue au théorème 2 de [8].

4 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE.

Etant donné une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^p$. On définit une norme matricielle associée à la norme $||\cdot||$ par :

Soit A une matrice carrée (p,p)

$$||A|| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^p \\ x \neq 0}} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Théorème 1.

- . Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_2^{(n)} = S^*$
- . Si pour tout n la matrice $\Delta T_1^{(n)}$ est inversible
- . Si $B_n = \Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1}$ et si $\exists \gamma \quad \exists N. \quad n > N \quad ||B_n|| < \gamma < 1$.

alors

$$1^\circ) \Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)} \text{ est inversible pour } n > N$$

$$2^\circ) \lim_{n \rightarrow +\infty} T_p^{(n)} = S^*$$

Preuve.

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant voir page 45 de [17].

Lemme de perturbation.

Soit A et C deux matrices carrées $p \times p$, supposons que A est inversible et que $||A^{-1}|| \leq \alpha$

si $||A-C|| \leq \beta$ et que $\alpha\beta < 1$ alors

1°) C est inversible

2°) $||C^{-1}|| \leq \alpha/(1-\alpha\beta)$

1°) Prenons $A = I$ I : étant la matrice unité $||I|| = 1 = \alpha$. Prenons $C = I - E$
 $A - C = B_n$ et on a $||A - C|| = ||B_n|| < \gamma$ $n > N$ $\gamma = \beta$ et comme $\gamma < 1$ donc d'après
 le 1°) du lemme $I - \Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1}$ est inversible.

De plus :

$$[\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}] = [\Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1} - I] \Delta T_1^{(n)}$$

donc

$\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}$ est inversible pour $n > N$.

$T_p^{(n)}$ est donc bien définie pour $n > N$.

2°)

$T_p^{(n)} - S^* = t_1^{(n)} - S^* - (B_n - I)^{-1} (t_2^{(n)} - S^* - (t_1^{(n)} - S^*))$ d'après 2
 du lemme on a

$$|| (B_n - I)^{-1} || \leq \frac{1}{1-\gamma} \quad n > N$$

pour $n > N$

$$||T_p^{(n)} - S^*|| \leq ||t_1^{(n)} - S^*|| + \frac{1}{1-\gamma} [||t_2^{(n)} - S^*|| + ||t_1^{(n)} - S^*||]$$

On passe à la limite quand n tend vers l'infini on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_p^{(n)} = S^*.$$

□

Supposons que $\{t_1^{(n)}\}$ et $\{t_2^{(n)}\}$ convergent plus vite que $\{S_n\}$, donnons une condition
 pour que $\{T_p^{(n)}\}$ converge plus vite que $\{S_n\}$.

Le résultat que l'on va donner est analogue au théorème 5 (quand $a = b$) de [8].

Théorème 2.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{||t_1^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{||t_2^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||} = 0$$

Si pour tout n la matrice $\Delta T_1^{(n)}$ est inversible et si $\exists \gamma \exists N ||B_n|| < \gamma < 1 \quad n > N$ avec

$$B_n = \Delta T_2^{(n)} \cdot \Delta T_1^{(n)-1}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{||T_p^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||} = 0$$

Preuve.

$$\text{Posons } A_n = (B_n - I)^{-1}.$$

$$T_p^{(n)} = t_1^{(n)} - A_n(t_2^{(n)} - t_1^{(n)})$$

$$T_p^{(n)} - s^* = (I + A_n)(t_1^{(n)} - s^*) - A_n(t_2^{(n)} - s^*).$$

D'après le lemme de perturbation

$$||A_n|| \leq \frac{1}{1-\gamma} \quad \text{et} \quad ||I + A_n|| \leq 1 + \frac{1}{1-\gamma}$$

$$\frac{||T_p^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||} \leq \left(\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\right) \frac{||t_1^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||} + \frac{1}{1-\gamma} \frac{||t_2^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||}$$

On pose à la limite quand n tend vers l'infini on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{||T_p^{(n)} - s^*||}{||s_n - s^*||} = 0$$

□

Remarques.

. Les hypothèses du théorème 1 comme celles du théorème 2 sont difficilement vérifiables dans la pratique.

. De plus $T_p^{(n)}$ est calculé en fonction de $t_1^{(n)}, \dots, t_1^{(n+p)}$ et $t_2^{(n)}, \dots, t_2^{(n+p)}$ il serait intéressant de donner des résultats d'accélération de la convergence par rapport à $\{t_2^{(n+p)}\}$ et à $\{t_1^{(n+p)}\}$.

5 - PROGRAMMATION DU H-ALGORITHME POUR LE CALCUL DE $T_p^{(N)}$.

n étant fixé. On suppose que l'on connaît $t_1^{(n)}, t_1^{(n+1)}, \dots, t_1^{(n+p)}$ et $t_2^{(n)}, \dots, t_2^{(n+p)}$ et que l'on veut calculer $T_p^{(n)}$.

Posons $M = p$.

. Soit G un tableau à deux dimensions défini par :

$$G(k,i) = [t_2^{(n+i-1)} - t_1^{(n+i-1)}]_k \text{ pour } i = 1, \dots, M+1 \\ k = 1, \dots, M$$

G a : M lignes et M+1 colonnes.

. Soit T un tableau à deux dimensions défini par :

$$T(k,i) = [t_1^{(n+i-1)}]_k \quad i = 1, \dots, M+1 \\ k = 1, \dots, M$$

Donnons maintenant un sous-programme qui calcule $T_p^{(n)}$

```

SUBROUTINE HALGOR(G,T,M,IA)
DOUBLE PRECISION G(IA,1),T(IA,1),ALPHA
IF(M.EQ.1) GOTO 50
DO 10 K=1,M-1
  LL=M-K+1
  DO 20 L=1,LL
    ALPHA=G(K,L)/(G(K,L+1)-G(K,L))
    DO 30 I=1,M
      T(I,L)=T(I,L)-ALPHA*(T(I,L+1)-T(I,L))
30    CONTINUE
    DO 40 I=K+1,M
      G(I,L)=G(I,L)-ALPHA*(G(I,L+1)-G(I,L))
40    CONTINUE
20  CONTINUE
10  CONTINUE
50  ALPHA=G(M,1)/(G(M,2)-G(M,1))
    DO 60 I=1,M
60  T(I,1)=T(I,1)-ALPHA*(T(I,2)-T(I,1))
RETURN
END

```

A la sortie, le vecteur $T^{(n)}$ est contenu dans le tableau $T(.,1)$. On a eu besoin de $2(M+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^M$.

Calcul du nombre d'opérations arithmétiques.

* Pour K fixé dans la boucle 10

$(M+1-K)$	soustractions
$(M+1-K)$	divisions
$2M(M+1-K)$	soustractions
$M(M+1-K)$	multiplications
$2(M-K)(M+1-K)$	soustractions
$(M-K)(M+1-K)$	multiplications

* fin de la boucle 10.

$(1+2M)$	soustractions
M	multiplications
1	division

Divisions.

$$\sum_{k=1}^M (M+1-K) = \sum_{\ell=1}^M \ell = M(M+1)/2$$

Multiplications.

$$\left[\sum_{k=1}^M M(M+1-k) \right] + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{M-1} (M-k)(M+1-k) \right]}_B = \frac{M^2(M+1)}{2} + \frac{M^3-M}{3}$$

Soustractions.

$$\sum_{k=1}^M (M+1-k) + 2 \sum_{k=1}^M M(M+1-k) + B = \frac{M}{2} (M+1) + M^2(M+1) + \frac{2}{3}(M^3-M)$$

Il faut ajouter à ces calculs le calcul de $t_2^{(n+i-1)} - t_1^{(n+i-1)}$ soit $M(M+1)$ soustractions. Au total :

$$\frac{5}{3} M^3 + \frac{5}{2} M^2 + \frac{5}{6} M \quad \text{soustraction}$$

$$\frac{5}{6} M^3 + \frac{M^2}{2} - \frac{M}{3} \quad \text{multiplications}$$

$$\frac{M}{2} (M+1) \quad \text{divisions}$$

6 - APPLICATION À LA RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

On peut résoudre $F(x) = 0$

ou $G(x) = x$

On suppose qu'il existe $\bar{x}$ tel que $F(\bar{x}) = 0$; $G(\bar{x}) = \bar{x}$

$$F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

On se donne un entier naturel ℓ et des fonctions arbitraires $A_{i,\ell}$ et $B_{i,\ell}$ où :

$$A_{i,\ell} : (\mathbb{R}^p)^{\ell+1} \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{pour } i = 0, \dots, p$$

$$B_{i,\ell} : (\mathbb{R}^p)^{\ell+1} \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{pour } i = 0, \dots, p$$

On suppose que $A_{i,\ell}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x}$

$$B_{i,\ell}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p.$$

On propose l'algorithme général suivant :

$$(I) \left[\begin{array}{l} \text{Initialisation : soit } \ell \text{ un entier fixé } x^{-\ell}, \dots, x^0 \text{ donnés} \\ \text{Itération } k+1. \\ \begin{array}{l} t_1^{(i)} = A_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \\ t_2^{(i)} = B_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \end{array} \\ \text{On pose } x^{k+1} = T_p^{(0)} \end{array} \right. \quad i = 0, \dots, p$$

On suppose que $A_{i,\ell} \neq B_{i,\ell}$ pour $i = 0, \dots, p$. Montrons que cet algorithme généralise la méthode de la sécante [17].

a - La méthode de la sécante.

Commençons par donner quelques notations :

$L(\mathbb{R}^p)$: ensemble des matrices carrées $p \times p$.

Soit $H \in L(\mathbb{R}^p)$ $H = (h^1, \dots, h^p)$

$h^1, \dots, h^p$ sont les colonnes de H , on a $\begin{cases} h^i = H \cdot e^i \\ \{e^1, \dots, e^p\} \text{ base canonique de } \mathbb{R}^p \end{cases}$

Soit $D \subset \mathbb{R}^p$; on définit une application J :

$$J : D \times L(\mathbb{R}^p) \longrightarrow L(\mathbb{R}^p)$$

$$J(x, H) = (F(x+h^1) - F(x), \dots, F(x+h^p) - F(x+h^{p-1})) \hat{H}^{-1}$$

et

$$\hat{H}^{-1} = (h^1, h^2 - h^1, \dots, h^p - h^{p-1})$$

La méthode de la sécante est définie :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F(x^k)$$

avec

$$H_k = (x^{k,1} - x^k, \dots, x^{k,p} - x^k)$$

$$x^{k,i} \in \mathbb{R}^p \text{ pour } i = 1, \dots, p$$

Pour chaque choix des vecteurs $x^{k,i}$ on a une méthode (des exemples seront donnés plus loin).

Montrons que cette méthode est un cas particulier de l'algorithme (I)

$$\text{Posons } F(x) = x - G(x) \text{ comme } F(x^{k,i}) = x^{k,i} - G(x^{k,i})$$

$$J(x^k, H_k) = (x^{k,1} - x^k - (G(x^{k,1}) - G(x^k)), \dots, x^{k,p} - x^k - (G(x^{k,p}) - G(x^k))) H_k^{-1}$$

et

$$\hat{H}_k = (x^{k,1}, \dots, x^{k,p} - x^k)$$

On pose :

$$x^{k,0} = x^k = A_{0,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k)$$

$$x^{k,i} = A_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \quad \text{pour } i = 1, \dots, p$$

$$B_{i,\ell} = G \circ A_{i,\ell} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p$$

Comme

$$\begin{cases} t_1^{(i)} = A_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \\ t_2^{(i)} = B_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p$$

$$\text{On a } \hat{H}_k = \Delta T_1^{(0)} \text{ et } J(x^k, H_k) = (\Delta T_1^{(0)} - \Delta T_2^{(0)}) \Delta T_1^{(0)-1} \text{ donc}$$

$$x^{k+1} = t_1^{(0)} - \Delta T_1^{(0)} (\Delta T_2^{(0)} - \Delta T_1^{(0)})^{-1} (t_2^{(0)} - t_1^{(0)})$$

donc cette méthode est bien un cas particulier de l'algorithme (I). $\square$

On voit que cette méthode dépend des choix des $x^{k,i}$, plusieurs choix sont possibles: voir pour plus de détails le chapitre 7 de [17]. On va donner quelques exemples.

1°) Prenons $\ell = 1$ et notons $x_i^k = \langle x^k, e^i \rangle$ la $i^{\text{ème}}$ composante de x_k .

$$x^{k,i} = x^k + (x_i^{k-1} - x_i^k) e^i \quad i = 1, \dots, p$$

est une méthode de la sécante à deux points. Cette méthode est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$. La démonstration est donnée dans [17] p. 362 (théorème 11.2.8).

Cette méthode nécessite $p+1$ évaluation de fonctions à chaque itération.

2°) $\ell = 1$ $x^{k,i} = x^k + \sum_{j=1}^i (x_j^{k-1} - x_j^k) e^j$ pour $i = 1, \dots, p$.

C'est une méthode de la sécante à deux points.

Cette méthode est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$, la démonstration est donnée dans [17] p. 362 (théorème 11.2.8).

Cette méthode nécessite p évaluations de fonctions à chaque itération.

3°) $\ell = p$ $x^{k,i} = x^{k-i}$ pour $i = 0, \dots, p$

C'est une méthode de la sécante à $(p+1)$ points, son ordre est la racine positive de l'équation : $t^{p+1} - t^p - 1 = 0$, pour la démonstration voir [17] p. 373.

Cette méthode nécessite une évaluation de fonctions à chaque itération autre que la première.

4°) $\ell = 0$ $x^{k,i} = x^k + \langle F(x^k), e^i \rangle e^i \quad i = 1, \dots, p$

C'est une méthode de type Steffensen, cette méthode est d'ordre 2, la démonstration est donnée dans [17] p. 361-362. Cette méthode nécessite $p+1$ évaluations de fonctions à chaque itération.

5°) $\ell = 0$ $x^{k,i} = x^k + \sum_{j=1}^i \langle F(x^k), e^j \rangle e^j$

C'est une méthode de type Steffensen, elle est d'ordre 2 et nécessite $p+1$ évaluations de fonctions ([17] p. 361-362).

6°) $\ell = 0$ $x^{k,0} = x^k$ et $x^{k,i} = G(x^{k,i-1}) \quad i = 1, \dots, p$

C'est la méthode d'Henrici voir [17] p. 200, cette méthode est d'ordre 2 (voir 17 p. 373 {Résultat 11.3.5 pour la suite (10)}). Cette méthode nécessite $p+1$ évaluations de fonctions à chaque itération.

En utilisant le H-algorithme, on va donner quelques exemples numériques d'application de la méthode d'Henrici.

Exemple n° 1.

On veut résoudre le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 = -(2x_1 + x_2)^3 + 0.127 \\ x_2 = -0,5 (x_1 + 3x_2)^5 + 0.10512 \end{cases}$$

$$x_1^* = 0,1$$

et

$$x_2^* = 0,1$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.000000000000000D+00	0.000000000000000D+00
1	0.985160632208935D-01	0.996949519037894D-01
2	0.999985061141446D-01	0.999997293994396D-01
3	0.999999999984966D-01	0.99999999997366D-01
4	0.100000000000000D+00	0.100000000000000D+00

12 évaluations de fonctions

Exemple n° 2.

$$\begin{cases} x_1 = \sin(x_1 x_2) - \frac{x_2}{2\pi} \\ x_2 = 2\pi x_1 - (\pi - \frac{1}{4})(e^{2x_1 - 1} - 1) \end{cases}$$

$$x_1^* = 0,5$$

$$x_2^* = \pi$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.600000000000000D+00	0.300000000000000D+01
1	0.500274538404692D+00	0.314284030517675D+01
2	0.499999923173333D+00	0.314159258016174D+01
3	0.499999999999998D+00	0.314159265358979D+01
4	0.500000000000000D+00	0.314159265358979D+01

Exemple n° 3.

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1x_2 - x_1^2 \\ x_2 = x_1^2 - 2,9(x_2 - 1) \end{cases} \quad \begin{matrix} * \\ x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \end{matrix}$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.105000000000000D+01	0.950000000000000D+00
1	0.101940906372917D+01	0.101021270628348D+01
2	0.100369451100727D+01	0.100183008714995D+01
3	0.999998923857362D+00	0.999995347117618D+00
4	0.999999114017442D+00	0.999999544331111D+00
5	0.1000000000001663D+01	0.1000000000000833D+01
6	0.100000000000010D+01	0.100000000000005D+01
7	0.100000000000007D+01	0.100000000000004D+01

b - Méthode d'Ulm.

On va montrer que les deux variantes proposées par Ulm dans [21] peuvent être mises en oeuvre par le H-algorithme.

Posons $G_i(x) = \langle G(x), e^i \rangle$

$G_i(x)$ est donc la $i^{\text{ème}}$ composante de $G(x)$

et $G(x) = x - F(x)$

i - Première variante.

$$\ell = 0 \quad \begin{cases} x^{k,i} = x^{k,i-1} + \langle G(x^k), e^i \rangle e^i & i = 1, \dots, p \\ \text{et} \\ x^{k,0} = x^k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta T_1^{(0)} &= (x^{k,1} - x^k, \dots, x^{k,p} - x^{k,p-1}) \\ &= \text{diag} (G_1(x^k) - x_1^k, \dots, G_p(x^k) - x_p^k) \end{aligned}$$

où

$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_p)$: matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les a_i $i = 1, \dots, p$.

On a $t_1^{(i)} = x^{k,i}$ et $t_2^{(i)} = G(x^{k,i})$ donc :

$$\Delta T_2^{(o)} - \Delta T_1^{(o)} = \left[\left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^k)}{G_1(x^k) - x_1^k} \right), \dots, \left(\frac{G(x^{k,p}) - G(x^{k,p-1})}{G_p(x^k) - x_p^k} \right) - I \right] \Delta T_1^{(o)}$$

d'où

$$\Delta T_1^{(o)} (\Delta T_2^{(o)} - \Delta T_1^{(o)})^{-1} = \left[\left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^k)}{G_p(x^k) - x_1^k} \right), \dots, \left(\frac{G(x^{k,p}) - G(x^{k,p-1})}{G_p(x^k) - x_p^k} \right) - I \right]^{-1}$$

$$x^{k+1} = x^k + \left[(I - \left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^k)}{G_1(x^k) - x_1^k} \right), \dots, \left(\frac{G(x^{k,p}) - G(x^{k,p-1})}{G_p(x^k) - x_p^k} \right)) \right]^{-1} (G(x^k) - x^k)$$

On va s'intéresser maintenant au cas où $p = 2$.

Notons $x_1 = u$ et $x_2 = v$ $x^t = (u, v)$

$$G_1(x) = G_1(u, v) = \phi_1(u, v)$$

$$G_2(x) = G_2(u, v) = \phi_2(u, v)$$

Par définition des $x^{k,i}$ on a :

$$x_1^{k,1} = \phi_1(u^k, v^k) \quad \text{et} \quad x_2^{k,1} = v^k$$

$$x_1^{k,2} = \phi_1(u^k, v^k) \quad \text{et} \quad x_2^{k,1} = \phi_2(u^k, v^k)$$

Si on pose

$$C(u^k, v^k) = \left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^k)}{G_1(x^k) - x_1^k}, \frac{G(x^{k,2}) - G(x^{k,1})}{G_2(x^k) - x_2^k} \right)$$

On aura :

$$C(u^k, v^k) = \begin{bmatrix} \frac{\phi_1(\phi_1(u^k, v^k), v^k) - \phi_1(u^k, v^k)}{\phi_1(u^k, v^k) - u^k} & \frac{\phi_1(\phi_1(u^k, v^k), \phi_2(u^k, v^k)) - \phi_1(\phi_1(u^k, v^k), v^k)}{\phi_2(u^k, v^k) - v^k} \\ \frac{\phi_2(\phi_1(u^k, v^k), v^k) - \phi_2(u^k, v^k)}{\phi_1(u^k, v^k) - u^k} & \frac{\phi_2(\phi_1(u^k, v^k), \phi_2(u^k, v^k)) - \phi_2(\phi_1(u^k, v^k), v^k)}{\phi_2(u^k, v^k) - v^k} \end{bmatrix}$$

$[I - C(u^k, v^k)] (x^{k+1} - x^k) = G(x^k) - x^k$. On obtient la relation (35), p. 164 de [21].

Remarques.

- 1 Cette méthode nécessite $p+1$ évaluation de fonctions à chaque itération.
- 2 La méthode est sous certaines hypothèses d'ordre 2, la démonstration est donnée pp. 162-163 (relation 32) [21]

En utilisant le H-algorithme, on va donner quelques exemples numériques d'application de cette méthode.

On reprend les trois exemples de la page 158.

Exemple n° 1.

$$x_1^* = 0.1 \quad \text{et} \quad x_2^* = 0.1$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.0000000000000000D 00	0.0000000000000000D 00
1	0.879539218444049D-01	0.972857089361041D-01
2	0.997777572971217D-01	0.999545023536564D-01
3	0.999999194834622D-01	0.999999842467055D-01
4	0.999999999999895D-01	0.99999999999980D-01
5	0.1000000000000000D+00	0.1000000000000000D+00

15 évaluations de fonctions

Exemple n° 2.

$$x_1^* = 0.5$$

$$x_2^* = \pi$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.7000000000000000D 00	0.3000000000000000D+01
1	0.430699509494526D+00	0.300892228233238D+01
2	0.516180856864839D+00	0.316354839765484D+01
3	0.499542255930393D+00	0.314088118100883D+01
4	0.499999712860287D+00	0.314159221401471D+01
5	0.5000000000000000D+00	0.314159265358467D+01

Exemple n°3.

$$x_1^* = 0.95$$

$$x_2^* = 0.975$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.1050000000000000D+00	0.9500000000000000D+00
1	0.910938772952310D+00	0.957018863194837D+00
2	0.940092720237246D+00	0.970001710342501D+00
3	0.948561196481478D+00	0.974281004474960D+00
4	0.949960914655094D+00	0.974980456732737D+00
5	0.949999969685450D+00	0.974999984959140D+00
6	0.9500000000000728D+00	0.9750000000000364D+00
7	0.9500000000000713D+00	0.9750000000000350D+00
8	0.9499999999998454D+00	0.9749999999999454D+00
9	0.9500000000000017D+00	0.9750000000000001D+00
10	0.9500000000000007D+00	0.9750000000000005D+00

ii) Seconde variante.

$$l = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{k,0} = G(x^k) \\ \text{et} \\ x^{k,i} = x^{k,i-1} + \langle x^k - G(x^k), e^i \rangle e^i \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

On a :

$$t_1^{(i)} = x^{k,i} \quad \text{et} \quad t_2^{(i)} = G(x^{k,i}) \quad \text{pour } i = 0, \dots, p.$$

donc :

$$\begin{aligned}\Delta T_1^{(0)} &= (x^{k,1} - x^{k,0}, \dots, x^{k,p} - x^{k,p-1}) \\ &= \text{diag } (x_1^k - G_1(x^k), \dots, x_p^k - G_p(x^k))\end{aligned}$$

$$\Delta T_2^{(0)} - \Delta T_1^{(0)} = \left[\left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^{k,0})}{x_1^k - G_1(x^k)} \right), \dots, \left(\frac{G(x^{k,p}) - G(x^{k,p-1})}{x_p^k - G_p(x^k)} \right) - I \right] \Delta T_1^{(0)}$$

avec $G^{(2)} = G \circ G$

d'où

$$x^{k+1} = G(x^k) + \left[I - \left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^{k,0})}{x_1^k - G_1(x^k)}, \dots, \frac{G(x^{k,p}) - G(x^{k,p-1})}{x_p^k - G_p(x^k)} \right) \right]^{-1} G^{(2)}(x^k) - G(x^k)$$

On s'intéresse au cas où $p=2$.

Notons $x^t = (u, v)$

$$G_1(x) = \phi_1(u, v) \text{ et } G_2(x) = \phi_2(u, v).$$

Par définition des $x^{k,i}$ $i = 1, 2$.

$$\begin{cases} x_1^{k,0} = \phi_1(u^k, v^k) \\ x_2^{k,0} = \phi_2(u^k, v^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{k,1} = u^k \\ x_2^{k,1} = \phi_2(u^k, v^k) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1^{k,2} = u^k \\ x_2^{k,2} = v^k \end{cases}$$

Posons

$$D(u^k, v^k) = \left(\frac{G(x^{k,1}) - G(x^{k,0})}{x_1^k - G_1(x^k)}, \frac{G(x^{k,2}) - G(x^{k,1})}{x_2^k - G_2(x^k)} \right)$$

$$D(u^k, v^k) = \begin{bmatrix} \frac{\phi_1(u^k, \phi_2(u^k, v^k)) - \phi_1(\phi_1(u^k, v^k), \phi_2(u^k, v^k))}{u^k - \phi_1(u^k, v^k)} & \frac{\phi_1(u^k, v^k) - \phi_1(u^k, \phi_2(u^k, v^k))}{v^k - \phi_2(u^k, v^k)} \\ \frac{\phi_1(u^k, \phi_2(u^k, v^k)) - \phi_2(\phi_1(u^k, v^k), \phi_2(u^k, v^k))}{u^k - \phi_1(u^k, v^k)} & \frac{\phi_2(u^k, v^k) - \phi_2(u^k, \phi_2(u^k, v^k))}{v^k - \phi_2(u^k, v^k)} \end{bmatrix}$$

et

$$[I - D(u^k, v^k)] (x^{k+1} - x^k) = G^{(2)}(x^k) - G(x^k).$$

D'après (5") p. 120 de [21] ce système peut s'écrire :

$$[I - D(u^k, v^k)] (x^{k+1} - x^k) = G(x^k) - x^k.$$

On obtient la relation (37) p. 164 de [21].

Remarque.

Comme la première variante, cette méthode nécessite $p+1$ évaluations de fonctions.

c) - Première généralisation de la méthode Regula-Falsi.

Reprenons l'algorithme (I) et fixons $\ell = 1$

$$\begin{aligned} A_{i,1} &: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \\ B_{i,1} &: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad i = 0, \dots, p$$

Soit $(y, z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$.

Notons $G^{(0)} = \text{Id}$ et $G^{(i)} = G(G^{(i-1)})$ et posons

$$\begin{cases} A_{i,1}(y, z) = G^{(i)}(y) \\ B_{i,1}(y, z) = G^{(i)}(z) \end{cases} \quad i = 0, \dots, p$$

Exemple n° 1.

$$x_1^* = 0.1$$

$$x_2^* = 0.1$$

k	x_1^k	x_2^k	e^k	$\frac{e^k}{e^{k-1}}$
-1	0.1000000000000000D-02	0.1000000000000000D-02		
0	0.0000000000000000D+00	0.0000000000000000D+00	0.14E+00	0.10E+00
1	0.994004849651773D-01	0.100073142165053D+00	0.60E-03	0.43E-00
2	0.100028141173879D+00	0.999965352652528D-01	0.28E-04	0.47E-00
3	0.999999854248914D-01	0.100000000080007D+00	0.15E-07	0.51E-00
4	0.999999999996320D-01	0.99999999999751D-01	0.37E-12	0.25E-00
5	0.1000000000000000D+00	0.1000000000000000D+00	0.14E-16	

pour obtenir x^5 on a effectué 12 évaluations de fonctions.

Exemple n° 2.



$$x_1^* = 0.5$$

$$x_2^* = \pi$$

k	x_1^k	x_2^k	e^k	$\frac{e^k}{e^{k-1}}$
-1	0.6000000000000000D+00	0.3000000000000000D+01		
0	0.5500000000000000D+00	0.3010000000000000D+00	0.28E+01	0.16E+02
1	0.525853043692905D+00	0.307580315665274D+01	0.71E-01	0.25E-01
2	0.526599016152488D+00	0.313131241118434D+01	0.29E-01	0.40E+00
3	0.500705308024814D+00	0.314063427818201D+01	0.12E-02	0.42E-01
4	0.500010469730345D+00	0.314164973228032D+01	0.58E-04	0.49E-01
5	0.499999986718196D+00	0.314159262683142D+01	0.30E-07	0.51E-03
6	0.499999999999707D+00	0.314159265358917D+01	0.69E-12	0.23E-04
7	0.5000000000000000D+00	0.314159265358979D+01	0.11E-15	

Exemple n° 3.

$$x_1^* = 1$$

$$x_2^* = 1$$

k	x_1^k	x_2^k	e^k	$\frac{e^k}{e^{k-1}}$
-1	0.1050000000000000D+01	0.9500000000000000D+00		
0	0.1600000000000000D+01	0.9400000000000000D+00	0.60E+00	0.85E+01
1	0.102435408463708D+01	0.970599269573722D+00	0.38E-01	0.63E-01
2	0.101329941741878D+01	0.983416623555611D+00	0.21E-01	0.56E+00
3	0.100309989906124D+01	0.999629241755710D+00	0.31E-02	0.15E+00
4	0.100240483821892D+01	0.100113357411628D+01	0.27E-02	0.85E+00
5	0.100207030054171D+01	0.100105894798874D+01	0.23E-02	0.87E+00
6	0.100008972030230D+01	0.100004499475457D+01	0.10E-03	0.43E-01
7	0.100000384849449D+01	0.100000161210390D+01	0.42E-05	0.42E-01
8	0.100000000839374D+01	0.100000000064220D+01	0.84E-08	0.20E-02
9	0.100000000000095D+01	0.999999999999378D+00	0.11E-11	0.14E-03
10	0.100000000000003D+01	0.100000000000000D+01	0.28E-13	

B - SECONDE GENERALISATION.

En s'inspirant d'une interprétation d'une transformation composite de rang deux dans le cas scalaire, autre que celle de la première partie, on définit une nouvelle transformation vectorielle. On utilise le R.P.A. où le C.R.P.A. pour mettre en oeuvre cette transformation, on étudie le noyau et on donne un théorème de convergence.

A partir de cette transformation on donne un algorithme général pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires ; on montre qu'en particulier, cet algorithme généralise la méthode d'Henrici. On propose ensuite une seconde généralisation de la méthode Régula Falsi, on montre que son ordre est $(1+\sqrt{5})/2$.

Et pour finir, on donne quelques exemples numériques.

1 - INTERPRÉTATION DANS LE CAS SCALAIRE.

$\{S_n\}$ une suite ; $S_n \in \mathbb{R}$.

$$t_1 : \{S_n\} \rightarrow \{t_1^{(n)}\} \text{ et } t_2 : \{S_n\} \rightarrow \{t_2^{(n)}\}$$

On cherche une fonction affine f telle que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow ax+b$$

avec

$$\begin{cases} f(t_1^{(n)}) = t_1^{(n+1)} \\ f(t_2^{(n)}) = t_2^{(n+1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} at_1^{(n)} + b = t_1^{(n+1)} \\ at_2^{(n)} + b = t_2^{(n+1)} \end{cases}$$

donc

$$a = \frac{t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)}}{t_2^{(n)} - t_1^{(n)}} .$$

$$b = \frac{t_1^{(n+1)} t_2^{(n)} - t_1^{(n)} t_2^{(n+1)}}{t_2^{(n)} - t_1^{(n)}}.$$

Cherchons maintenant le point fixe de f qui existe si $a \neq 1$.

$$ax + b = x \text{ si } a \neq 1, x = \frac{b}{1-a}$$

$$a-1 = \frac{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}}{t_2^{(n)} - t_1^{(n)}}$$

donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{t_2^{(n+1)} t_1^{(n)} - t_1^{(n+1)} t_2^{(n)}}{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}} \\ &= t_1^{(n)} - \frac{\Delta t_1^{(n)} (t_2^{(n)} - t_1^{(n)})}{\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)}} = R_1^{(n)}. \end{aligned}$$

On obtient la transformation composite de rang deux.

2 - GÉNÉRALISATION AU CAS VECTORIEL.

On cherche une fonction affine F

$$F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x \mapsto Ax+b$$

$$A \in L(\mathbb{R}^p) \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}^p$$

(On rappelle que $L(\mathbb{R}^p)$ désigne l'ensemble des matrices carrées (p,p) telle que F vérifie les conditions suivantes

$$(I) \quad \begin{cases} F(t_1^{(n+i)}) = t_1^{(n+i+1)} \\ F(t_2^{(n+i)}) = t_2^{(n+i+1)} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p-1.$$

$t_1^{(n+i)} \in \mathbb{R}^P$ et $t_2^{(n+i)} \in \mathbb{R}^P$ donc

$$\text{II} \quad \begin{cases} At_1^{(n+i)} + b = t_1^{(n+i+1)} \\ At_2^{(n+i)} + b = t_2^{(n+i+1)} \end{cases} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p-1$$

d'où $A(t_2^{(n+i)} - t_1^{(n+i)}) = t_2^{(n+i+1)} - t_1^{(n+i+1)}$ pour $i = 0, \dots, p-1$.

On définit une matrice $T_1^{(n)} \in L(\mathbb{R}^P)$:

$$T_1^{(n)} \cdot e^{i+1} = t_1^{(n+i)} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p-1.$$

de même une matrice $T_2^{(n)} \in L(\mathbb{R}^P)$

$$T_2^{(n)} \cdot e^{i+1} = t_2^{(n+i)} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p-1$$

$\{e^1, \dots, e^p\}$ base canonique de $\mathbb{R}^P$.

$$\text{II} \Rightarrow A(T_2^{(n)} - T_1^{(n)}) = (T_2^{(n+1)} - T_1^{(n+1)})$$

Si $(T_2^{(n)} - T_1^{(n)})$ est inversible alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (T_2^{(n+1)} - T_1^{(n+1)}) \cdot (T_2^{(n)} - T_1^{(n)})^{-1} \\ \text{et donc} \\ b = t_1^{(n+1)} - (T_2^{(n+1)} - T_1^{(n+1)}) (T_2^{(n)} - T_1^{(n)})^{-1} \cdot t_1^{(n)} \end{array} \right.$$

I : matrice unité.

$$I-A = -[\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}] (T_2^{(n)} - T_1^{(n)})^{-1}$$

et

$$b = \Delta t_1^{(n)} - (\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}) (T_2^{(n)} - T_1^{(n)})^{-1} t_1^{(n)}$$

le point fixe de F existe et est unique quand $I-A$ est inversible et on a :

$$\begin{aligned} x &= (I-A)^{-1} b \\ x &= -[(T_2^{(n)} - T_1^{(n)}) (\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)})^{-1} (\Delta t_1^{(n)} - (\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}) (T_2^{(n)} - T_1^{(n)})^{-1} t_1^{(n)})] \\ &= S_P^{(n)} \end{aligned}$$

On a donc une nouvelle transformation

$$S_p^{(n)} = t_1^{(n)} - (T_2^{(n)} - T_1^{(n)}) (\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)})^{-1} \cdot t_1^{(n)}$$

Montrons que $S_p^{(n)}$ peut se mettre sous la forme d'un rapport de deux déterminants.

Posons $x = t_1^{(n)}$ et $u = \Delta t_1^{(n)}$

$$A = \Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}$$

la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $(T_2^{(n)} - T_1^{(n)})$ est :

$$(T_2^{(n)} - T_1^{(n)})_i = ((t_2^{(n)} - t_1^{(n)})_i, \dots, (t_2^{(n+p-1)} - t_1^{(n+p-1)})_i).$$

On rappelle que si $y \in \mathbb{R}^p$ y_i : $i^{\text{ème}}$ composante de y . Posons aussi :

$$x^i = [T_2^{(n)} - T_1^{(n)}]_i^t \quad x^i \in \mathbb{R}^p$$

et

$$x = (x^1, \dots, x^p)^t$$

Avec ces notations on a : $S_p^{(n)} = x - x \cdot A^{-1} u$ donc d'après l'identité de Magnus :

$$S_p^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{(n)} & t_2^{(n)} - t_1^{(n)} & \dots & t_2^{(n+p-1)} - t_1^{(n+p-1)} \\ (\Delta t_1^{(n)})_1 & (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_1 & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_1 \\ \hline (\Delta t_1^{(n)})_p & (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_p & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_2 & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_1 \\ \hline (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_p & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_p \end{vmatrix}}$$

3 - DEUX ALGORITHMES POUR LE CALCUL DE $s_p^{(n)}$.

$$\text{Posons } y = \begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_1^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad x^i = \begin{bmatrix} t_2^{(n+i-1)} - t_1^{(n+i-1)} \\ t_2^{(n+i)} - t_1^{(n+i)} \end{bmatrix}$$

$$y \in \mathbb{R}^{2p} \quad \text{et } x^i \in \mathbb{R}^{2p} \quad v \in \mathbb{R}^{2p}$$

Soit $z^i \in \mathbb{R}^{2p}$ tel que :

$$\langle z^i, v \rangle = (v_2 - v_1)_i$$

$$\begin{cases} z_j^i = 0 & \text{si } j \neq i \text{ ou } j \neq i+p \\ z_i^i = -1 & z_{i+p}^i = 1 \end{cases}$$

$\langle, \rangle$: produit scalaire dans $\mathbb{R}^{2p}$.

Dans ce cas $S_p^{(n)}$ est le vecteur dont les composantes sont les p premières composantes de E_p . $S_p^{(n)} \in \mathbb{R}^p$.

$$\text{R.P.A. [6]} \quad \begin{cases} E_0 = y & \text{et } g_{0,i} = x^i \text{ pour } i \geq 1 \\ E_k = E_{k-1} - \frac{(E_{k-1})_{p+k} - (E_{k-1})_k}{(g_{k-1,k})_{p+k} - (g_{k-1,k})_p} g_{k-1,k} & k > 0 \\ g_{k,i} = g_{k-1,i} - \frac{(g_{k-1,i})_{p+k} - (g_{k-1,i})_k}{(g_{k-1,k})_{p+k} - (g_{k-1,k})_k} g_{k-1,k} & i > k > 0 \end{cases}$$

$$\text{C.R.P.A. [6]} \quad \begin{cases} e_0^{(0)} = y & e_0^{(i)} = x^i \quad i \geq 1 \\ e_k^{(i)} = e_{k-1}^{(i)} - \frac{(e_{k-1}^{(i)})_{p+k} - (e_{k-1}^{(i)})_k}{(e_{k-1}^{(i)})_{p+k} - (e_{k-1}^{(i+1)})_k} e_{k-1}^{(i+1)} \end{cases}$$

Dans ce cas $(S_p^{(n)})_i = (e_p^{(0)})_i$ pour $i = 1, \dots, p$. Pour les exemples numériques on a choisi de calculer $S_p^{(n)}$ avec le C.R.P.A.

4 - ÉTUDE DU NOYAU DE $s_p^{(n)}$.

Théorème 3.

Si $t_1^{(n)} = s + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (t_2^{(n+i)} - t_1^{(n+i)})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et si :

la matrice $\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$S_p^{(n)} = S^* \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Preuve.

$$\Delta t_1^{(n)} - S^* = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (t_2^{(n+i)} - t_1^{(n+i)})$$

donc

$$t_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (\Delta t_2^{(n+i)} - \Delta t_1^{(n+i)})$$

donc :

$$(\Delta t_1^{(n)})_j = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i (\Delta t_2^{(n+i)} - \Delta t_1^{(n+i)})_j \quad \text{pour } j = 1, p$$

Les α_i sont solutions d'un système linéaire et comme

$$S^* = t_1^{(n)} - \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (t_2^{(n+i)} - t_1^{(n+i)})$$

S^* peut s'écrire donc :

$$S^* = \frac{\begin{vmatrix} t_1^{(n)} & t_2^{(n)} - t_1^{(n)} & \dots & t_2^{(n+p-1)} - t_1^{(n+p-1)} \\ (\Delta t_1^{(n)})_1 & (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_1 & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_1 \\ \hline (\Delta t_1^{(n)})_p & (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_p & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_1 & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_1 \\ \hline (\Delta t_2^{(n)} - \Delta t_1^{(n)})_p & \dots & (\Delta t_2^{(n+p-1)} - \Delta t_1^{(n+p-1)})_p \end{vmatrix}} = S_p^{(n)}$$

□

Ce résultat est encore valable si :

$$t_1^{(n+i)} \in \mathbb{C}^p$$

$$t_2^{(n+i)} \in \mathbb{C}^p \quad \text{pour } i = 0, \dots, p$$

5 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE.

Théorème 4.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_1^{(n)} = S^*$. Si pour tout n $T_2^{(n)} - T_1^{(n)}$ est inversible et si on pose :

$$B_n = [T_2^{(n)} - T_1^{(n)}] \cdot [T_2^{(n+1)} - T_1^{(n+1)}]^{-1}$$

et $\exists \gamma > 0 \quad \exists N \quad n > N \quad ||B_n|| < \gamma < 1$ alors

1°) $\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}$ est inversible pour $n > N$

2°) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_p^{(n)} = S^*$

Preuve.

1°) On applique le lemme de Perturbation avec $A = I$ et $C = I - B_n$. $||I|| = 1 = \alpha$

donc $I-B_n$ est inversible donc $\Delta T_2^{(n)} - \Delta T_1^{(n)}$ est inversible.

2°) D'après 2°) du lemme de perturbation

$$|| (I-B_n)^{-1} || \leq \frac{1}{1-\gamma}$$

$$S_p^{(n)} - S^* = t_1^{(n)} - S^* + (I-B_n)^{-1} \Delta t_1^{(n)}$$

donc

$$|| S_p^{(n)} - S^* || \leq || t_1^{(n)} - S^* || + \frac{1}{1-\gamma} || \Delta t_1^{(n)} ||$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_p^{(n)} = S^*$$

□

On va s'intéresser maintenant à la programmation du C.R.P.A. pour le calcul de $S_p^{(n)}$.

On suppose que n est fixé donc on dispose de $t_1^{(n)}, \dots, t_1^{(n+p)}$ et $t_2^{(n)}, \dots, t_2^{(n+p)}$.

6 - PROGRAMMATION DU C.R.P.A. POUR LE CALCUL DE $S_p^{(n)}$.

n est fixé.

On pose $M = p$.

Soit C un tableau à deux dimensions défini par :

$$\begin{cases} C(i,1) = (t_1^{(n)})_i \\ C(i+p,1) = (t_1^{(n+1)})_i \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, p$$

$$\begin{cases} C(i,k) = (t_2^{(n+k-2)} - t_1^{(n+k-2)})_i \\ C(i+p,k) = (t_2^{(n+k-1)} - t_1^{(n+k-1)})_i \end{cases} \quad \begin{matrix} k=2, \dots, p+1 \\ \text{pour } i = 1, \dots, p \end{matrix}$$

C a $2M$ lignes et $(M+1)$ colonnes.

* Nombre d'opérations pour le remplissage de C :

M(M+1) soustractions

* Supposons que l'on dispose du tableau C, on va donner un sous-programme tel qu'à la sortie $C(i,1) = (S_p^{(n)})_i$ pour $i = 1, \dots, p$.

```

SUBROUTINE CRPAH(C, IA, M)
DOUBLE PRECISION C(IA,1), C1, C2, C3
IF (M.EQ.1) GOTO 50
DO 10 K=1, M-1
    DO 20 L=1, M+1-K
        C1=C(K+M, L)-C(K, L)
        C2=C(K+M, L+1)-C(K, L+1)
        C3=C1/C2
        DO 30 I=1, 2*M
            C(I, L)=C(I, L)-C3*C(I, L+1)
30      CONTINUE
20      CONTINUE
10      CONTINUE
50      C1=C(M+M, 1)-C(M, 1)
        C2=C(M+M, 2)-C(M, 2)
        C3=C1/C2
        DO 40 I=1, M
40      C(I, 1)=C(I, 1)-C3*C(I, 2)
        RETURN
END

```

Calcul du nombre d'opérations arithmétiques.

. Pour K fixé dans la boucle 10 ($K \leq M-1$)

- . (M+1-K) divisions
- 2(M+1-K) soustractions
- . 2M(M+1-K) soustractions
- 2M(M+1-K) multiplications

fin de la boucle 10

- . 2 soustractions
- 1 divisions
- M soustractions
- M multiplications

Divisions.

$$\sum_{K=1}^M (M+1-K) = \frac{M}{2} (M+1)$$

Multiplications.

$$\left[\sum_{K=1}^{M-1} 2M(M+1-K) \right] + M = M^2(M+1) - M$$

Soustractions.

$$2 \sum_{K=1}^M (M+1-K) + 2M \sum_{K=1}^{M-1} (M+1-K) + M = M^3 + 2M^2$$

le remplissage de la matrice a nécessité $M(M+1) = M^2 + M$ en tout : $M^3 + 3M^2 + M$ soustractions.

Pour n fixé le calcul de $S_p^{(n)}$ par le C.R.P.A. nécessite au total

$$M^3 + 3M^2 + M \quad \text{soustractions}$$

$$M^3 + M^2 - M \quad \text{multiplications}$$

$$M(M+1)/2 \quad \text{divisions}$$

Donnons maintenant quelques applications.

7 - APPLICATIONS À LA RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

On veut résoudre $F(x) = 0$ ou $G(x) = x$

On suppose qu'il existe $\bar{x}$ tel que $F(\bar{x}) = 0$, $G(\bar{x}) = \bar{x}$

$$F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

On se donne un entier ℓ et des fonctions arbitraires $A_{i,\ell}$ et $B_{i,\ell}$ avec :

$$A_{i,\ell} : (\mathbb{R}^p)^{\ell+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

et

pour $i = 0, \dots, p$

et on propose l'algorithme général suivant :

(II) $\left[\begin{array}{l} \text{Initialisation } \ell \text{ un entier fixé} \\ \quad x^{-\ell}, \dots, x^0 \text{ donnés} \\ \\ \text{Itération } k+1 \\ \quad t_1^{(i)} = A_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \\ \quad t_2^{(i)} = B_{i,\ell}(x^{k-\ell}, \dots, x^k) \quad \text{pour } i = 0, \dots, p \\ \\ \text{et on pose} \\ \quad x^{k+1} = S_p^{(0)} \end{array} \right.$

On suppose que $A_{i,\ell} \neq B_{i,\ell}$ pour $i = 0, \dots, p$.

Montrons que cet algorithme généralise la méthode d'Henrici.

a - Méthode d'Henrici.

On note $G^{(0)} = \text{Id}$ $\text{Id} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ $\text{Id}(x) = x$

et

$$G^{(i)} = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{i \text{ fois}} \quad i \geq 1$$

On pose $\ell = 0$

$$A_{i,0} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad B_{i,0} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

et

$$A_{i,0} = G^{(i)} \quad \text{et} \quad B_{i,0} = G^{(i+1)} \quad \text{pour } i = 0, \dots, p.$$

$$(T_2^{(0)} - T_1^{(0)}) \cdot e^i = G^{(i)}(x^k) - G^{(i-1)}(x^k) \quad \text{pour } i = 1, \dots, p. \text{ et}$$

$$(\Delta T_2^{(0)} - \Delta T_1^{(0)}) \cdot e^i = G^{(i+1)}(x^k) - 2 G^{(i)}(x^k) + G^{(i-1)}(x^k) \quad i = 1, \dots, p.$$

Posons $y^{(0)} = x^k$ et $y^{(i)} = G^{(i)}(x^k)$.

Avec ces notations :

$$T_2^{(0)} - T_1^{(0)} = (y^{(1)} - y^{(0)}, \dots, y^{(p)} - y^{(p-1)})$$

Notons $T_2^{(0)} - T_1^{(0)} = H$ et $\Delta T_2^{(0)} - \Delta T_1^{(0)} = S$.

On a $S = (y^{(2)} - 2y^{(1)} + y^{(0)}, \dots, y^{(p+1)} - 2y^{(p)} + y^{(p-1)})$

Dans ce cas x^{k+1} s'écrit comme suit :

$$x^{k+1} = y^{(o)} - H.S^{-1}(G(y^{(o)} - y^{(o)})).$$

On obtient la méthode d'Henrici voir [17] p. 200, NR 7-2-3.

Comme on l'a vu précédemment, cette méthode nécessite $p+1$ évaluations de fonctions, et est d'ordre 2 sous certaines hypothèses voir [17] p. 373 (Résultat 11.3.5 pour la suite (10) qui est la méthode d'Henrici).

En utilisant le C.R.P.A., on va donner quelques exemples numériques d'application de la méthode d'Henrici. On reprend les trois exemples de la page 158.

Exemple n° 1.

$$x_1^* = 0,1 \quad \text{et} \quad x_2^* = 0.1$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.0000000000000000D+00	0.0000000000000000D+00.
1	0.985160632208935D-01	0.996949519037894D-01
2	0.999985061141446D-01	0.999997293994396D-01
3	0.999999999984966D-01	0.99999999997367D-01
4	0.1000000000000000D+00	0.1000000000000000D+00

12 évaluations de fonctions

Exemple n° 2.

$$x_1^* = 0.5 \quad \text{et} \quad x_2^* = \pi$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.6000000000000000D+00	0.3000000000000000D+01
1	0.500274538404692D+00	0.314284030517675D+01
2	0.499999923173333D+00	0.314159258016174D+01
3	0.499999999999997D+00	0.314159265358979D+01
4	0.5000000000000000D+00	0.314159265358979D+01

Exemple n° 3.

$$x_1^* = 1 \quad \text{et} \quad x_2^* = 1$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0.1050000000000000D+01	0.9500000000000000D+00
1	0.101940906372917D+01	0.101021270628348D+01
2	0.100369451100727D+01	0.100183008714995D+01
3	0.999998923857271D+00	0.999995347117574D+00
4	0.999999114017527D+00	0.999999544331156D+00
5	0.1000000000001688D+01	0.1000000000000844D+01
6	0.9999999999999931D+00	0.999999999999966D+00
7	0.9999999999999879D+00	0.999999999999939D+00
8	0.1000000000000025D+01	0.1000000000000013D+01

b - Seconde généralisation de la méthode Regula-Falsi.

Revenons à l'algorithme II. avec $\ell = 1$ donc :

$$A_{i,1} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$B_{i,1} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad i = 0, \dots, p$$

$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ on pose $A_{i,1}(y, z) = G^{(i)}(z)$ pour $i = 0, \dots, p$

$$B_{i,1}(y, z) = G^{(i)}(y)$$

où $G^{(0)}(y) = y$ et $G^{(i)} = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{i \text{ fois}}$

Dans ce cas l'algorithme II devient :

x^{-1} et x^0 deux vecteurs donnés
itération k+1 $t_1^{(0)} = x^k$ et $t_2^{(0)} = x^{k-1}$

$$t_1^{(i+1)} = G(t_1^{(i)}) \text{ et } t_2^{(i+1)} = G(t_2^{(i)}) \text{ pour } i = 0, \dots, p-1$$

$$\text{et } x^{k+1} = S_p^{(0)}$$

$$T_2^{(0)} - T_1^{(0)} = (x^{k-1} - x^k, \dots, G^{(p-1)}(x^{k-1}) - G^{(p-1)}(x^k))$$

et

$$\begin{aligned} \Delta T_2^{(0)} - \Delta T_1^{(0)} &= (G(x^{k-1}) - G(x^k) - x^{k-1} + x^k, \dots, G^{(p)}(x^{k-1}) - G^{(p)}(x^k) \\ &\quad - G^{(p-1)}(x^{k-1}) + G^{(p-1)}(x^k)) \end{aligned}$$

Posons

$$C(x, y) = (y - x, G(y) - G(x), \dots, G^{(p-1)}(y) - G^{(p-1)}(x))$$

$C(x, y)$ est une matrice de $L(\mathbb{R}^p)$; $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^p$ posons aussi :

$$F(x) = x - G(x)$$

et $H(x, y) \in L(\mathbb{R}^p)$

$$H(x, y) = (F(y) - F(x), F(G(y)) - F(G(x)), \dots, F(G^{(p-1)}(y)) - F(G^{(p-1)}(x)))$$

Avec ces notations on a :

$$\underline{P_I : x^{k+1} = x^k - C(x^k, x^{k-1})^{-1} H(x^k, x^{k-1}) \cdot F(x^k)}$$

Montrons que quand $p=1$ on obtient la méthode Regula-Falsi classique.

$$C(x^k, x^{k-1}) = (x^k - x^{k-1})$$

$$H(x^k, x^{k-1}) = F(x^k) - F(x^{k-1})$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{(x^k - x^{k-1}) F(x^k)}{F(x^k) - F(x^{k-1})}$$

On retrouve la méthode Regula-Falsi.

On va montrer que sous certaines hypothèses cette méthode est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$.

On note

$$C_1(x, y) = \left(\frac{y-x}{\|y-x\|}, \dots, \frac{G^{(p-1)}(y) - G^{(p-1)}(x)}{\|G^{(p-1)}(y) - G^{(p-1)}(x)\|} \right)$$

Pour montrer que cette méthode est d'ordre $(1+5)/2$ on a besoin de trois lemmes :

Soit $F : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \subset D$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Lemme 1.

Si F est continûment différentiable dans un convexe D_0 de D et si $\exists \alpha, \forall u, v \in D_0$

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq \alpha \|u-v\|$$

alors $\forall x, y \in D_0$

$$\|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\| \leq \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2$$

voir [17] Résultat 3.2.12 p. 73.

Lemme 2.

Soit A une matrice qui a pour colonnes $a^i, i = 1, \dots, p$

$$A = (a^1, a^2, \dots, a^p)$$

alors $\exists \eta \|A\| \leq \eta \sum_{i=1}^p \|a^i\|$.

Voir [17] Résultat 2.2 p. 43.

Lemme 3.

Soit $F : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. F est continûment différentiable dans un ouvert D , telle que : $\exists \alpha \forall (x, y) \in D \times D \|F'(x) - F'(y)\| \leq \alpha \|x-y\|$. Soit D_0 un convexe de D tel que :

si $x \in D_0$ alors $G^{(i)}(x) \in D_0$ pour $i = 1, \dots, p-1$ et si

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall (x, y) \in D_0 \times D_0 \quad ||C_1(x, y)^{-1}|| \leq \gamma$$

alors $\forall (x, y) \in D_0 \times D_0$ on a :

$$||H(x, y) \cdot C(x, y)^{-1} - F'(x)|| \leq \left(\frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\right) \left(\sum_{i=0}^{p-1} ||G^{(i)}(x) - G^{(i)}(y)||\right)$$

(η : constante du lemme 2).

Preuve.

Soit $h \in \mathbb{R}^p$. On pose $\Gamma(h) = F(x+h) - F(x) - F'(x) \cdot h$.

D'après le lemme 1 $||\Gamma(h)|| \leq \frac{1}{2}\alpha ||h||^2$ si $x \in D_0$ et $x+h \in D_0$.

$$\begin{aligned} ||H(x, y) C(x, y)^{-1} - F'(x)|| &= ||(H(x, y) - F'(x) C(x, y)) C(x, y)^{-1}|| \\ &= ||(\Gamma(y-x), \dots, \Gamma(G^{(p-1)}(x) - G^{(p-1)}(y))) C(x, y)^{-1}|| \end{aligned}$$

On note :

$\text{diag}(z_1, \dots, z_p)$ = matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont z_i , $i = 1, \dots, p$.

$$||H(x, y) C(x, y)^{-1} - F'(x)|| = ||\Gamma(y-x), \dots, \Gamma(G^{(p-1)}(x) - G^{(p-1)}(y)) \cdot E(x, y)||$$

et

$$E(x, y) = \text{diag}(|y-x|, \dots, |G^{(p-1)}(x) - G^{(p-1)}(y)|)^{-1} \cdot C_1(x, y)^{-1}$$

$$||H(x, y) C(x, y)^{-1} - F'(x)|| \leq \gamma \left| \frac{\Gamma(y-x)}{|y-x|}, \dots, \frac{\Gamma(G^{(p-1)}(x) - G^{(p-1)}(y))}{|G^{(p-1)}(x) - G^{(p-1)}(y)|} \right|$$

Par hypothèse $x \in D_0$ alors $G^{(i)}(x) \in D_0$ pour $i = 1, \dots, p-1$.

et

$y \in D_0$ alors $G^{(i)}(y) \in D_0$ pour $i = 1, \dots, p-1$

et d'après le lemme 1 et le lemme 2.

$$||H(x, y) C(x, y)^{-1} - F'(x)|| \leq \frac{1}{2}(\gamma\alpha\eta) \left(\sum_{i=0}^{p-1} ||G^{(i)}(x) - G^{(i)}(y)||\right)$$

Théorème 5.

Soit $F : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. F est continûment différentiable dans un ouvert D . On pose $G(x) = x - F(x)$. On suppose que

$$a) \exists \bar{x} \quad G(\bar{x}) = \bar{x}$$

b) $I - G'(\bar{x})$ est inversible.

$$c) \forall (x, y) \in D \times D \quad \|G'(x) - G'(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

On note $S(\bar{x}, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - \bar{x}\| \leq \beta\}$

On suppose de plus que :

$$d) \forall x, y \in S(\bar{x}, \beta) \quad \|G(x) - G(y)\| \leq \|x - y\|.$$

$$e) \exists \gamma > 0 \quad \forall x, y \in S(\bar{x}, \beta) \quad \|C_1(x, y)\| \leq \gamma$$

$$f) \quad (\eta \text{ est une constante du lemme 1}) \\ (3\alpha\beta + 2 \cdot \alpha \cdot \eta \cdot p \cdot \beta) \quad \|I - G'(\bar{x})\| < 1.$$

Si $x^{-1} \in S(\bar{x}, \beta)$ et $\bar{x} \in S(\bar{x}, \beta)$ alors :

1°) La suite $\{x^k\}$ définie par (P_I) est bien définie, $x^k \in S(\bar{x}, \beta)$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = \bar{x}.$$

2°) La suite $\{x^k\}$ est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$.

Preuve.

On pose $D_0 = S(\bar{x}, \beta)$. Montrons que si $x \in D_0$ alors
$$\begin{cases} G^{(i)}(x) \in D_0 \\ \text{pour } i = 1, \dots, p \end{cases}$$

$$\|G(x) - \bar{x}\| = \|G(x) - G(\bar{x})\| \leq \|x - \bar{x}\| \leq \beta$$

par récurrence $\|G^{(i)}(x) - \bar{x}\| \leq \beta \quad \forall x \in D_0.$

Si $x \in D_0$ et $y \in D_0$ d'après le lemme 3 on a :

$$||H(x,y) \cdot C(x,y)^{-1} - F'(x)|| \leq \alpha \eta \cdot \frac{\gamma}{2} \left(\sum_{i=0}^{p-1} ||G^{(i)}(x) - G^{(i)}(y)|| \right)$$

$$P_{II} : \quad ||H(x,y) \cdot C(x,y)^{-1} - F'(x)|| \leq \alpha \cdot \eta \cdot \frac{\gamma}{2} \cdot p (||x - \bar{x}^*|| + ||y - \bar{x}^*||)$$

car :

$$\begin{aligned} (||G^{(i)}(x) - G^{(i)}(y)||) &\leq (||G^{(i)}(x) - \bar{x}^*|| + ||G^{(i)}(y) - \bar{x}^*||) \\ &\leq ||x - \bar{x}^*|| + ||y - \bar{x}^*|| \end{aligned}$$

$$||H(x,y) C(x,y)^{-1} - F'(\bar{x}^*)|| \leq ||H(x,y) C(x,y)^{-1} - F'(x)|| + ||F'(x) - F'(\bar{x}^*)||$$

$$F'(x) = I - G'(x)$$

$$||F'(x) - F'(\bar{x}^*)|| = ||G'(x) - G'(\bar{x}^*)|| \leq \alpha ||x - \bar{x}^*|| \leq \alpha \cdot \beta$$

donc

$$P_{III} : \quad ||H(x,y) C(x,y)^{-1} - F'(\bar{x}^*)|| \leq \alpha \cdot \eta \cdot \frac{\gamma}{2} p(2\beta) + \alpha \cdot \beta$$

$$\text{Posons } a = ||F'(\bar{x}^*)^{-1}|| = ||(I - G'(\bar{x}^*))^{-1}||$$

$$a(\alpha \cdot \eta \cdot \gamma \cdot p \cdot \beta + \alpha \cdot \beta) \leq a(\alpha \cdot \eta \cdot \gamma \cdot p \cdot \beta + \alpha \cdot \beta) + \frac{a}{2} \cdot \alpha \cdot \beta$$

or par hypothèse :

$$2a(\alpha \cdot \eta \cdot \gamma \cdot p \cdot \beta + \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot \beta) < 1.$$

Posons :

$$A = F'(\bar{x}^*) \quad \text{et} \quad \gamma = H(x,y) \cdot C(x,y)^{-1}.$$

D'après le lemme de perturbation γ est inversible et :

$$||\gamma^{-1}|| \leq \frac{a}{1 - a(\alpha \cdot \eta \cdot \gamma \cdot p \cdot \beta + \alpha \cdot \beta)}$$

et comme

$$0 < a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \alpha.\beta) \leq a(\alpha.\eta.p.\gamma.\beta + \frac{3}{2}\alpha.\beta) < \frac{1}{2}$$

alors :

$$-\frac{1}{2} < -a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \frac{3}{2}\alpha.\beta) \leq -a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \alpha.\beta) < 0$$

$$\frac{1}{2} < 1 - a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \frac{3}{2}\alpha.\beta) \leq 1 - a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \alpha.\beta) < 1$$

donc

$$\frac{1}{1 - a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \alpha.\beta)} \leq \frac{1}{1 - a(\alpha.\eta.\gamma.p.\beta + \frac{3}{2}\alpha.\beta)}$$

$h = \alpha B(a.\eta.\gamma.p + \frac{3}{2}a)$ et donc :

$$||\tilde{C}^{-1}|| \leq \frac{a}{1-h} \quad \forall (x,y) \in D_0 \times D_0.$$

P_{IV} : donc si $x \in D_0$ et $y \in D_0$ $Z = x - C(x,y).H(x,y)^{-1}F(x)$ existe

$$Z - \tilde{x} = x - \tilde{x} - C(x,y) H(x,y)^{-1} F(x)$$

donc

$$Z - \tilde{x} = \tilde{C}^{-1} (H(x,y) C(x,y)^{-1} (x - \tilde{x}) - F(x))$$

On a :

$$||Z - \tilde{x}|| \leq ||\tilde{C}^{-1}|| [||H(x,y) C(x,y)^{-1} - F'(x)|| + ||F'(x) - F'(\tilde{x})||] ||x - \tilde{x}|| + \\ \{ ||F(x) - F(\tilde{x}) - F'(\tilde{x})(x - \tilde{x})|| \}$$

$$P_V : ||Z - \tilde{x}|| \leq \frac{a}{1-h} [\frac{\alpha}{2} . \eta . \gamma . p (||x - \tilde{x}|| + ||y - \tilde{x}||) + \alpha ||x - \tilde{x}||] ||x - \tilde{x}|| + \frac{\alpha}{2} ||x - \tilde{x}||^2 \frac{2}{1-h}$$

Pour obtenir P_V on a utilisé la relation P_{II} , le fait que F' soit Lipshitzienne, et le lemme 1.

1°) Montrons que $\{x^k\}$ est bien définie et que $x^k \in S(x^*, \beta)$.

Par hypothèse, x^{-1} et x^0 appartiennent à $S(x^*, \beta)$.

D'après ce qui précède $H(x^0, x^{-1}) C(x^0, x^{-1})^{-1}$ est inversible donc x^1 est bien défini.

D'après P_V :

$$\|x^1 - x^*\| \leq \frac{a}{1-h} \left[\frac{\alpha}{2} \cdot \eta \cdot \gamma \cdot p (\|x^0 - x^*\| + \|x^{-1} - x^*\|) + \alpha \|x^0 - x^*\| \|x^0 - x^*\| \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2} \|x^0 - x^*\|^2 \right] \frac{a}{1-h}$$

donc

$$\|x^1 - x^*\| \leq \frac{a}{1-h} \{ \alpha \cdot \eta \gamma \cdot p \beta + \frac{3}{2} \alpha \beta \} \beta = \frac{h}{1-h} \beta.$$

Par hypothèse $h < \frac{1}{2}$ donc $\frac{h}{1-h} < 1$ d'où $\|x^1 - x^*\| \leq \beta$.

Si $x^1 \in S(x^*, \beta)$ on a montré que $G^{(i)}(x^1) \in S(x^*, \beta)$ $i = 1, \dots, p-1$.
Donc $\|x^1 - x^*\| \leq \beta$ et $\|G^{(i)}(x^1) - x^*\| \leq \beta$ $i = 1, \dots, p-1$.

Par récurrence $\|x^k - x^*\| \leq \beta$.

. Montrons que $\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = x^*$.

D'après P_V

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{a}{1-h} \left(\alpha \cdot \eta \gamma \cdot p \beta + \frac{3}{2} \alpha \beta \right) \|x^k - x^*\|$$

et

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{h}{1-h} \|x^k - x^*\|. \text{ Comme } \frac{h}{1-h} = L < 1$$

donc

$$\|x^k - x^*\| \leq \left(\frac{h}{1-h} \right)^k \|x^0 - x^*\| \text{ et donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = x^*.$$

2°) La suite $\{x^k\}$ est d'ordre $(1+\sqrt{5})/2$.

D'après P_V

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq \frac{a}{1-h} \left[\left(\frac{\alpha}{2} \eta \gamma \cdot p + \frac{3\alpha}{2} \right) ||x^k - x^*|| + \frac{\alpha}{2} \eta \gamma p ||x^{k-1} - x^*|| \right] ||x^k - x^*||$$

et donc

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq (\alpha_1 ||x^k - x^*|| + \beta_1 ||x^{k-1} - x^*||) ||x^k - x^*||$$

et d'après [19] p. 147 théorème 1.

La suite est d'ordre z avec z positif et $z = 1 + \frac{1}{z}$. Donc $z = (1+\sqrt{5})/2$.

□

Remarque.

Chaque itération nécessite p évaluations de fonctions sauf la première. Donnons maintenant quelques exemples pour illustrer la convergence de cette méthode. On reprend les trois exemples de la page 158 pour les résultats numériques voir la page suivante.

1°) La première généralisation semble meilleure que la seconde.

2°) Les résultats numériques confirment la conclusion du théorème 5.

Exemple n° 1.

$x_1^* = 0.1$

$x_2^* = 0.1$

k	x_1^k	x_2^k	e^k	$\frac{e^k}{e^{k-1}}$
-1	0.1000000000000000D-02	0.1000000000000000D-02		
0	0.0000000000000000D+00	0.0000000000000000D+00	0.14E+00	0.10E+01
1	0.116908861423731D+00	0.103871889481457D+00	0.17E-01	0.12E+00
2	0.995919294625176D-01	0.998096039056295D-01	0.45E-03	0.26E-01
3	0.998370638001617D-01	0.999654164088605D-01	0.17E-03	0.37E+00
4	0.999996947373127D-01	0.999999233462515D-01	0.31E-06	0.19E-02
5	0.100000000366790D+00	0.100000000073549D+00	0.37E-09	0.12E-02
6	0.1000000000000000D+00	0.1000000000000000D+00	0.56E-16	0.15E-06

Exemple n° 2.

$x_1^* = 0.5$

$x_2^* = \pi$

k	x_1^k	x_2^k	e^k	$\frac{e^k}{e^{k-1}}$
-1	0.5000000000000000D+00	0.3000000000000000D+01		
0	0.5500000000000000D+00	0.3010000000000000D+00	0.28E+01	0.16E+02
1	0.696328969427464D+00	0.333060430149064D+01	0.27E+00	0.96E-01
2	0.104934518001607D+01	0.391521170979684D+01	0.95E+00	0.35E+01
3	0.538258289573773D+00	0.309412575676948D+01	0.61E-01	0.64E-01
4	0.505527948085033D+00	0.305229213925533D+01	0.89E-01	0.15E+01
5	0.499450599738169D+00	0.313542666735911D+01	0.62E-02	0.69E-01
6	0.499956887245955D+00	0.314150097962158D+01	0.10E-03	0.16E-01
7	0.500000046020800D+00	0.314159249662848D+01	0.16E-06	0.16E-02
8	0.5000000000009649D+00	0.314159265360670D+01	0.19E-10	0.12E-03
9	0.5000000000000000D+00	0.314159265358979D+01	0.46E-15	0.24E-04

Pour obtenir x on a effectué 20 évaluations de fonctions

Exemple n° 3.

$x_1^* = 0.95$

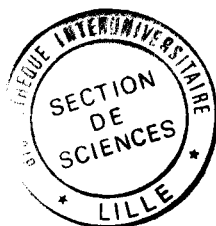
$x_2^* = 0.975$

k	x_1^k	x_2^k	e^k	$\frac{e^k}{e^{k-1}}$
-1	0.1050000000000000D+01	0.9500000000000000D+00		
0	0.1600000000000000D+01	0.9400000000000000D+00	0.65D+00	0.63D+01
1	0.966318114302724D+00	0.971431211109540D+00	0.17D-01	0.26D-01
2	0.954597448676674D+00	0.975624076094147D+00	0.46D-02	0.28D+00
3	0.952224691360161D+00	0.976075879208661D+00	0.25D-02	0.53D+00
4	0.950213932429835D+00	0.975101824384335D+00	0.24D-03	0.96D-01
5	0.949990952504829D+00	0.974995463371114D+00	0.10D-04	0.43D-01
6	0.950000038444684D+00	0.975000019219006D+00	0.43D-07	0.42D-02
7	0.9500000000006961D+00	0.975000000003481D+00	0.78D-11	0.18D-03
8	0.949999999999996D+00	0.97499999999998D+00	0.45D-14	0.57D-03

RÉFÉRENCES

- [1] S. ACHAKIR
Connexion entre les méthodes de point fixe et d'accélération de la convergence,
Thèse de 3e cycle, Univ. Lille 1, 1982.
- [2] C. BREZINSKI
Analyse Numérique Discrète.
U9, Publication du laboratoire de Calcul de Lille.
- [3] C. BREZINSKI
Accélération de la convergence en analyse numérique.
LNM 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [4] C. BREZINSKI
Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique.
Technip, Paris, 1978.
- [5] C. BREZINSKI
Some new convergence acceleration methods.
Math. Comp., 39 (1982), 133-145.
- [6] C. BREZINSKI
Recursive interpolation, extrapolation and projection.
J. Comput. Appl. Math. 9 (1983), 369-376.
- [7] C. BREZINSKI
Some determinantal identities in a vector space, with applications,
in "H. Werner Ed., Padé Approximation and its applications, Lecture
Note in Math. 1071, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [8] C. BREZINSKI
Composite sequence transformations,
Numer. Math., 46 (1985), pp. 311-321.
- [9] C. BREZINSKI
Convergence acceleration methods : the past decade.
Journal of Computational and Applied Mathematics 12 & 13, (1985), 19-36.
- [10] F. CORDELLIER
*Caractérisation des suites que la première étape du θ -algorithme trans-
forme en suites constantes.*
C.R. Acad. Sci. Paris, 284 A (1977), 389-392.
- [11] J.P. DELAHAYE
Théorie des transformations de suites en analyse numérique. Applications
Thèse, Université de Lille, 1982.

- [12] L. FOX
Romberg integration for a class of singular integrands.
Comput. J. 10, (1967), 87-93.
- [13] B. GERMAIN-BONNE
Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de convergence.
Thèse, Université de Lille 1, 1978.
- [14] R.F. KING
A secant method for multiple roots.
BIT 17 (1977), pp. 321-328.
- [15] R.F. KING
An extrapolation method of order four for linear sequences.
SIAM J. Numer. Anal., 16, (1979), pp. 719-725.
- [16] C. KOWALEWSKI
Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique.
Thèse 3e cycle, Université de Lille 1, 1984.
- [17] J.M. ORTEGA, W.C. RHEIMBOLDT.
Iterative solution of non linear equations in several variables.
Academic Press, New-York, 1970.
- [18] P. SABLONNIERE
Convergence acceleration of logarithmic fixed point sequences.
Congrès de Luminy (14-18 oct. 1985). A paraître dans J. of Compt. & Applied. Math.
- [19] J. SCHMIDT
Rate of convergence of the Regula-Falsi and Steffensen processus in a Banach space.
Z. Angew. Math. Mech., 46, (1966), pp. 146-148.
- [20] M. SIBONY et J. C. MARDON
Approximation et équations différentiables.
Analyse Numérique II, Hermann, Paris, 1982.
- [21] S. YU. ULM
Extension of Steffensen's method for solving non linear operator equations.
USSR Comp. Math. Phys., 4 (1964), pp. 159-165.
- [22] J. WIMP
Sequences transformations and their applications.
Academic Press, New-York, 1981.



ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE SUITES PAR UTILISATION DES TRANSFORMATIONS COMPOSITES.

RÉSUMÉ.

Un outil d'accélération de la convergence est l'utilisation des transformations composites de suites définies par C. Brezinski. Une étude systématique de ses transformations conduit à définir des procédés accélérant la convergence des procédés initiaux.

Ces procédés serviront en particulier à :

- 1°) - Accélérer la convergence des suites de point fixe.
- 2°) - Accélérer la convergence d'une méthode de quadrature numérique.
- 3°) - Définir de nouvelles méthodes de résolution des équations non linéaires.
- 4°) - Définir des algorithmes répétés d'accélération de la convergence.

Des généralisations au cas vectoriel sont proposées et appliquées à la résolution des systèmes d'équations non linéaires.

MOTS CLÉS.

Accélération de la convergence.
Algorithmes d'accélération.
Convergence logarithmique.
Convergence linéaire.
Equations non linéaires.
Systèmes d'équations non linéaires.
Méthode des trapèzes
Transformations composites.