THESE

présentée à

L'Université des Sciences et Techniques de Lille

pour obtenir

Le Grade de Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Mathématiques pures

Option : Géométrie Algébrique

par

Rachid GHALIM

Singularités elliptiques des plans doubles ramifiés le long d'une sextique.

Membres du Jury :

Président et Rapporteur : L. GRUSON. Professeur à l'Université de Lille I

Examinateurs
- G. COEURE. Professeur à l'Université de Lille I
- ?R ELLIA Chargé de recherche au CNRS Université de NICE

SOUTENUE le 24 JUIN 1986.

EXEMPLAIRE PROVISOIRE

Chapitre I

Soit f l'équation d'un germe de courbe ayant en 0 un point triple.

Soit S la surface d'équation locale

$$z^2 = f(x, y)$$

S presente une singularité double à l'origine

On appelle singularité simple d'une courbe une singularité du type A.D.E.

D'après la classification d'Artin[2] des points doubles rationnels, on peut énoncer la proposition suivante:

<u>Proposition</u>

Pour que le point double de S ne soit pas rationnel il faut et il suffit que le point triple de f ne soit pas une singularité simple.

c'est à dire que:

- le point triple admet une seule tangente.
- la transformée propre de la courbe d'équation f dans l'éclatement de 0 admet un point triple.

En supposant que la droite $x=0$ est tangente

On peut écrire f sous la forme

$$f(x,y) = x^3 e(x,y) + x^2 y^2 \varphi_1(y) + x y^3 \varphi_2(y) + y^4 \varphi_3(y)$$

avec $e(0,0) \neq 0$

Pour éclater le point 0 on pose:

$$x = uy .$$

la transformée propre de f a pour équation

$$\bar{f}(u,y) = u^3 \bar{e}(u,y) + u^2 y \varphi_1(y) + u y \varphi_2(y) + y \varphi_3(y)$$

avec $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = 0$

ceci d'après la deuxieme condition imposée à f.

Donc f prend la forme suivante:

$$f(x,y) = x^3 e(x,y) + x^2 y^2 \varphi_1(y) + x y^4 \varphi_2(y) + y^6 \varphi_3(y)$$
$$e(0,0) \neq 0 .$$

Soit R l'anneau local de

$$\operatorname{Spec} S = \mathbb{C}\{x,y,z\} / z^2 - f(x,y) \quad \text{en } (0,0,0).$$

<u>Proposition</u>

L'éclatement de l'idéal maximal de R est normal.

<u>Démonstration</u> :

On montre qu'il vérifie (R_1) et (S_2).

(S_2) est clair

Si X est l'éclatement de l'idéal (x, y, z) dans $\mathbb{C}\{x, y, z\}$, l'éclatement considéré est la composante irréductible de l'image réciproque de la surface d'équation $z^2 = f$ autre que le plan exceptionnel.

Il est donc localement défini par une équation dans une variété lisse, donc il vérifie (S_2).

- Pour vérifier (R_1) il faut voir que $\mathcal{O}_{\tilde{S},p}$ est un anneau de valuation discrète aux idéaux p de $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ de hauteur un.

Si p est différent de l'idéal du diviseur exceptionnel

$$\mathcal{O}_{\tilde{S},p} = \mathcal{O}_{S,q}$$

où q est l'image de p dans S.

Sinon on procède comme suit :

L'éclatement $\tilde{S} \longrightarrow S$ se factorise par l'éclatement S_1 de l'idéal (x, y) et

$\tilde{S} \longrightarrow S_1$ est fini.

Cela résulte du fait que l'idéal (x, y, z) est entier sur l'idéal (x, y)

En effet : montrons que si l'idéal J contient et est entier sur l'idéal I l'éclatement de J factorise celui de I.

Si X est l'éclatement de J alors $J\mathcal{O}_X$ est inversible il s'agit de voir que $I\mathcal{O}_X$ est inversible localement

R $\quad JR$ principal et entier sur IR

alors $\quad JR = IR$.

On a un morphisme fini de degré deux de S_1 dans l'éclatement de (x,y) dans $\mathbb{C}\{x,y\}$.

Soit V l'anneau local de ce dernier éclatement au point générique de la droite exceptionnelle.

C'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal engendré par une uniformisante π (qui peut être n'importe quelle courbe lisse passant par 0).

On a $\quad f = \pi^3 u$

où u est un élément inversible de V

L'anneau semi-local de S_1 au(x) point(s) générique de la fibre exceptionnelle est

$$R_1 = V[z] \Big/ z^2 - f$$

et celui de S est l'éclatement de l'idéal maximal (π, z) dans R_1. 5

Introduisons d'autre part.

$$R_2 = V[y]/y^2 - \pi v$$

et l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \longrightarrow & R_2 \\ z & \longmapsto & \pi y \end{array}$$

R_2 est l'éclatement de (π, z) dans R_1

En effet: il le contient car $(\pi, z) R_2 = \pi R_2$

$$\text{Long } R_2/R_1 = 1$$

enfin l'idéal (π, z) n'étant pas principal, il n'est pas inversible dans R_1.

D'autre part R_2 est un anneau de valuation (Eisenstein).

Donc l'anneau local de $\hat{S}$ au point générique de la fibre exceptionnelle est un anneau de valuation. c.q.f.d.

On suppose que la droite $x=0$ est la tangente à la singularité de la courbe plane d'équation $f(x,y)=0$

$$z^2 - f(x,y) = 0 \qquad \text{l'équation de } S$$

On pose $\quad z = y z_1 \qquad x = y x_1$

Donc la transformée propre de S a pour équation :

$$z_1^2 - y\left[x_1^3 \bar{e}(x_1,y) + x_1^2 y \varphi_1(y) + x_1 y^2 \varphi_2(y) + y^3 \varphi_3(y)\right] = 0$$

Donc $\tilde{S}$ a un point double du type:

$$z^2 - \varphi(x,y) = 0 \qquad \text{avec } e(\varphi) = 4.$$

<u>Proposition:</u>

L'éclatement de l'idéal maximal du nouveau point singulier n'est pas normal.

En effet: en reprenant la démonstration précédente on a :

$$\varphi = \pi^4 u$$

$$R_2 = V[v] \Big/ v^2 - \pi^2 u$$

R_2 n'est pas un anneau de valuation discrète car son idéal maximal (π, v) n'est pas principal.

Notons cet éclatement

$$S_2 \longrightarrow \tilde{S}$$

Soit $\bar{S} \longrightarrow S_2$ la normalisation de S_2

<u>Théorème</u> : $\bar{S}$ a au plus des points doubles rationnels.

En supposant que f est l'équation d'une sextique B ayant un point triple vérifiant les conditions de la page 1.

<u>Démonstration</u> :

En éclatant deux fois le point triple de la sextique B dans $\mathbb{P}^2$, la singularité de la transformée propre de B est simple.

Sinon, la transformée propre de B présente un point triple qui, par éclatement, donne un nouveau point triple

donc $\delta \geq 12$

c'est le cas où la sextique a trois branches sur osculatrices.

En effet : la sextique a au moins deux branches

<u>Cas des deux branches</u>

Soient C_1 et C_2 les deux branches de B. δ_1 et δ_2 leurs δ respectifs au point O, m la multiplicité d'intersection de C_1 et C_2 en O

alors $\delta = \delta_1 + \delta_2 + m$

1) C_1 : quintique , C_2 : droite

$\delta_1 \leq 6$. $\delta_2 = 0$ $m \leq 5$

2) C_1 : quartique . C_2 : conique

$\delta_1 \leq 3$. $\delta_2 = 0$ $m \leq 8$

3) C_1 : cubique C_2 : cubique

$\delta_1 \leq 1$ $\delta_2 \leq 1$ $m \leq 9$

<u>Cas des Trois branches</u>

Soient C_1, C_2 et C_3 les trois branches de $\mathcal{B}$

on a $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + m_{12} + m_{13} + m_{23}$

avec m_{ij} la multiplicité d'intersection de C_i et C_j en O

Comme O est un point triple pour $\mathcal{B}$ les trois branches passent simplement par O

donc $\delta_i = 0$ $i = 1, 2, 3$.

$$\delta = m_{12} + m_{13} + m_{23}.$$

1) C_1 : quartique C_2 : droite C_3 : droite

Ce cas ne se présente pas car $\mathcal{B}$ a une seule tangente en O.

2) C_1 : cubique C_2 : conique, C_3 : droite

$$m_{12} + m_{13} + m_{23} \leq 11$$

3) C_1 : conique C_2 : conique C_3 : conique

$$m_{ij} \leq 4$$

Pour que δ soit égal à 12 il faut et il suffit que :

$$m_{12} = m_{13} = m_{23} = 4$$

c'est à dire les trois coniques sont surosculatrices

Ce cas est traité par Epema [5] (prop 3.1, cas ii $g = 2$)

la surface est birationnellement reglée sur une courbe elliptique.

Donc en écartant le cas où les trois branches sont surosculatrices, la singularité de la transformée propre de B est simple.

et $\overline{S}$ possède au plus des points doubles rationnels.

$$\begin{array}{ccccc} \bar{S} & \longrightarrow & \tilde{S} & \longrightarrow & S \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \tilde{\tilde{\mathbb{P}}}^2 & \xrightarrow{\sigma_2} & \tilde{\mathbb{P}}^2 & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

avec $\tilde{\mathbb{P}}^2$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ au point triple de la sextique.

$\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}^2$ l'éclatement de $\tilde{\mathbb{P}}^2$ au point triple de la transformée propre de la sextique.

L'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point est la surface reglée F_1 : $\tilde{\mathbb{P}}^2 = F_1$

Soit f_0 la génératrice de F_1 passant par le point singulier de la transformée stricte de B, notée $\tilde{B}$

$$f_0^2 = 0 \qquad [6, V \text{ prop } 2.3]$$

La transformée propre $\tilde{f}_0$ de f_0 dans $\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}^2$ s'écrit :

$$\tilde{f}_0 = \sigma_2^* f_0 - E_2 \qquad [6, V \text{ prop } 3.6]$$

avec E_2 le diviseur exceptionnel du deuxieme éclatement.

Calculons la self intersection de $\tilde{f}_0$

$$\tilde{f}_0^2 = (\sigma_2^* f_0 - E_2)(\sigma_2^* f_0 - E_2)$$
$$= (\sigma_2^* f_0)^2 - 2(\sigma_2^* f_0)E_2 + E_2^2 = -1$$

$\tilde{f}_0$ ne rencontre pas le lieu de ramification

$$\tilde{\tilde{B}} + \hat{E}_1$$

avec $\tilde{\tilde{B}}$ la transformée propre de $\tilde{B}$

$\hat{E}_1$ la transformée propre du diviseur exceptionnel E_1 du premier éclatement.

en effet $\hat{E}_1 = \sigma_2^* E_1 - E_2$

$$\tilde{\tilde{B}} = \sigma_2^* \tilde{B} - 3 E_2$$

car le point est triple.

$$\tilde{f}_0 \cdot (\tilde{\tilde{B}} + \hat{E}_1) = (\sigma_2^* f_0 - E_2)(\sigma_2^* \tilde{B} + \sigma_2^* E_1 - 4 E_2)$$

$$= (\sigma_2^* f)(\sigma_2^* \tilde{B}) + (\sigma_2^* f_0)(\sigma_2^* E_1) + 4 E_2^2$$

$$= \quad 3 \quad + \quad 1 \quad - \quad 4 \quad = 0$$

Soit f l'image reciproque de $\tilde{f}_0$ dans $\bar{S}$

$$f = \pi_2^{-1} \tilde{f}_0$$

la restriction de π_2 à f définit un morphisme de degré deux non ramifié

$$\pi_2|_f : f \longrightarrow \tilde{f}_0$$

D'apres la formule d'Hurwitz

$$2g_f - 2 = 2(2g_{\tilde{f}_0} - 2) + \deg R$$

On en deduit que f est réductible

$$f = f_1 + f_2$$

avec $f_1^2 = f_2^2 = -1 \qquad f_1 \cdot f_2 = 0$

f_1 et f_2 ne rencontrent pas le lieu de ramification dans $\overline{S}$.

D'après le théorème de Castelnuovo, on peut contracter $\tilde{f}_0$

On aura la surface reglée F_2

$\tau : \widetilde{\widetilde{\mathbb{P}}}^2 \longrightarrow F_2$ la contraction de $\tilde{f}_0$

La courbe de self-intersection -2 dans F_2 est $\tau(\widetilde{E}_1)$.

en effet $\widetilde{E}_1 \cdot \tilde{f}_0 = 0$ et $\widetilde{E}_1^2 = -2$

$$\Big(\widetilde{E}_1 \cdot \tilde{f}_0 = (\sigma_2^* E_1 - E_2) \cdot (\sigma_2^* f_0 - E_2)$$
$$= (\sigma_2^* E_1) \cdot (\sigma_2^* f_0) + E_2^2 = 1 - 1 = 0$$
$$\widetilde{E}_1^2 = (\sigma_2^* E_1 - E_2)^2 = (\sigma_2^* E_1)^2 + E_2^2 = -1 - 1 = -2\Big).$$

$$(\tau(\widetilde{E}_1))^2 = -2.$$

$$\tau(\widetilde{E}_1)\,\tau(\widetilde{\widetilde{B}}) = \widetilde{E}_1 \cdot \widetilde{\widetilde{B}} = 0.$$

Le centre d'éclatement de F_2 n'est pas sur $\tau(\widetilde{E}_1 + \widetilde{\widetilde{B}})$.

car $(\widetilde{E}_1 + \widetilde{\widetilde{B}})\, \tilde{f}_0 = 0$.

On considère le revêtement double de F_2 ramifié le long de $\tau(\widetilde{E}_1 + \widetilde{\widetilde{B}})$

$$\varphi : Z \longrightarrow F_2$$

Le fait de contracter $\hat{f}_0$ donne un morphisme birationnel entre $\overline{S}$ et Z qui n'est autre chose que la contraction de f_1 et f_2.

Soit G la courbe reduite $\varphi^{-1}(\tau(\hat{E}_1))$

on a $\varphi^*(\tau(\hat{E}_1)) = 2G$

D'après la formule de projection :

$$\varphi^*(\tau(\hat{E}_1)).G = \tau(\hat{E}_1).\varphi_*(G)$$

$$2G.G = \tau(\hat{E}_1).\tau(\hat{E}_1)$$

Donc $G^2 = -1$.

$\tau(\hat{E}_1)$ est rationnel, non singulier et de self intersection -2.

sa contraction dans F_2 donne le cône quadratique de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ de sommet l'image de $\tau(\hat{E}_1)$.

φ induit une application de degré un non ramifiée entre G et $\tau(\hat{E}_1)$.

Donc d'après la formule d'Hurwitz.

$$g_G = 0$$

G est rationnel et de self intersection -1

la contraction de G donne le revêtement double du cône quadratique ramifié le long de l'image de $\tau(\hat{B})$ et du sommet du cône.

On va montrer que ce revêtement ainsi obtenu est la surface de Del Pezzo de degré un.

On le note X.

<u>Proposition</u> : X est la surface de Del Pezzo de degré un eventuellement degenerée.

<u>Démonstration</u> :

Il s'agit de voir d'après [4] que l'image de $\tau(\tilde{\tilde{B}})$ est une sextique ne passant pas par le sommet du cône.

En effet : Soit $\ell = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, $\hat{E}_1$, E_2 une base du groupe de Picard de $\hat{\hat{\mathbb{P}}}^2$, muni de la forme d'intersection :

$$\ell^2 = 1, \quad \hat{E}_1^2 = -2, \quad E_2^2 = -1$$

$$\hat{E}_1 E_2 = 1 \qquad \ell \hat{E}_1 = \ell E_2 = 0$$

$$\tilde{\tilde{B}} = a\ell + b\hat{E}_1 + c E_2$$

avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{B}} . \ell = 6 \\ \tilde{\tilde{B}}\, \hat{E}_1 = 0 \\ \tilde{\tilde{B}} . E_2 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 6 \\ -2b + c = 0 \\ b - c = 3 \end{cases}$$

$$a = 6 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -6$$

$$\tilde{\tilde{B}} = 6\ell - 3\tilde{E}_1 - 6E_2 .$$

$\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}^2$ est l'éclatement de F_2 en un point dont le diviseur exceptionnel est $\tilde{f}_0$

comme $\quad \tilde{f}_0 \cdot \tilde{\tilde{B}} = 0$

$$\tau^*(\tau(\tilde{\tilde{B}})) = \tilde{\tilde{B}}$$

Ecrivons $\tau(\tilde{\tilde{B}})$ dans la base du groupe de Picard de F_2 $\quad C_0 , f$

avec $\quad C_0^2 = -2 \, , \; f^2 = 0 \quad C_0 . f = 1 .$

$$\tau(\tilde{\tilde{B}}) = aC_0 + bf .$$

$$\tau^*(\tau(\tilde{\tilde{B}})) = a\,\tau^*(C_0) + b\,\tau^*(f)$$

$$\tau^*(C_0) = \hat{E}_1 \qquad \text{et} \qquad \tau^*(f) = E_2 + \tilde{f}_0$$

Il reste à écrire $\tilde{f}_0$ dans la base $\ell , \hat{E}_1 , E_2$.

$$\tilde{f}_0 = a\ell + b\hat{E}_1 + cE_2$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_0 \cdot \ell = 1 \\ \tilde{f}_0 \cdot \hat{E}_1 = 0 \\ \tilde{f}_0 \cdot E_2 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 1 \\ -2b + c = 0 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

$$a = 1 \quad , b = -1 , \quad c = -2$$

$$\tilde{f}_0 = \ell - \hat{E}_1 - 2E_2$$

$$\tilde{\hat{B}} = a\tilde{\hat{E}}_1 + b\left(E_2 + \ell - \hat{E}_1 + 2E_2\right)$$

$$6\ell - 3\tilde{\hat{E}}_1 - 6E_2 = b\ell + (a-b)\hat{E}_1 - bE_2 .$$

$$a = 3 \qquad \text{et} \quad b = 6$$

$$\tau(\hat{\hat{B}}) = 3C_0 + 6f .$$

$$\tau(\hat{\hat{B}}) = 3\left[C_0 + 2f\right]$$

D'autre part le système $|C_0 + 2f|$ plonge F_2 dans $\mathbb{P}^3$ comme un cône quadratique c'est à dire définit un plongement en dehors de C_0 et contracte C_0 sur le sommet du cône.

donc l'image de $\tau(\hat{\hat{B}})$ est une sextique.

Comme $\tau(\hat{\hat{B}}) . \tau(\hat{E}_1) = 0$

la sextique ne passe pas par le sommet du cône.

Par ailleurs en contractant d'abord dans $\bar{S}$ l'image réciproque de $\hat{E}_1$, on obtient une surface Y qui est éclatement de deux points de la surface de Del Pezzo de degré un.

Cette contraction factorise le morphisme $\bar{S} \longrightarrow S$.

En effet il est clair que l'application de $Y - \{P\}$ (P l'image du diviseur contracté) dans S qui coincide avec la precedente se prolonge en une application continue $Y \longrightarrow S$. Comme Y est lisse au point P cette application est un morphisme (th de prolongement de Riemann).

D'autre part, on sait [4] que la surface de Del Pezzo de degré un eventuellement dégénérée est l'éclatement de huit points de $\mathbb{P}^2$ en position presque générale.

c'est à dire si on note $\Sigma_8 = \{P_1, .. P_8\}$

- pour $i = 1, .. 8$ le point P_i de $\mathbb{P}^2(\Sigma_{i-1})$ n'appartient à aucune composante irreductible des diviseurs $E_1, .. E_{i-1}$ qui ne sont pas des E_j.

• Aucune droite de $\mathbb{P}^2$ ne passe par quatre points de Σ_8.

• Aucune conique irréductible de $\mathbb{P}^2$ ne passe par sept points de Σ_8.

Puis la contraction des cycles fondamentaux.

Les points singuliers de la surface de Del Pezzo sont des points doubles rationnels.

Soit X la surface de Del Pezzo dégénérée de degré un, revêtement double du cône quadratique C ramifié le long d'une sextique.

<u>Proposition</u> $\quad p^* \mathcal{O}_C(1) = (\omega_X^{\vee})^{\otimes 2}$

<u>Démonstration</u>:

$$p : X \longrightarrow C$$

soit $\mathcal{L}$ le fibré en droite sur C vérifiant

$$\mathcal{L}^{\otimes 2} = \mathcal{O}_C(3)$$

$$\omega_X = p^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}) \qquad [3 \quad \mathrm{I} \quad A.1]$$

Le diviseur canonique du cône est

$$\omega_C = \mathcal{O}_C(-2) \qquad [6 \quad p\ 183]$$

Donc $\omega_X^{\otimes 2} = p^*\left(\omega_C^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2}\right)$

$$= p^*\left(\mathcal{O}_C(-4) \otimes \mathcal{O}_C(3)\right)$$

$$\omega_X^{\otimes 2} = p^*\,\mathcal{O}_C(-1)$$

d'où $p^*\,\mathcal{O}_C(1) = \left(\omega_X^{\vee}\right)^{\otimes 2}$

qu'on note $\mathcal{O}_X(2)$

Maintenant on va écrire $\mathcal{O}_C(1)$ dans la base ℓ, $\widetilde{E}_1$ et E_2 du groupe de Picard de $\widetilde{\mathbb{P}^2}$.

$$\mathcal{O}_C(1) = a\ell + b\widetilde{E}_1 + cE_2$$

$\mathcal{O}_C(1)$ ne coupe ni $\widetilde{E}_1$ ni $\widehat{\ell}_0$ mais coupe E_2 en un point.

$$\mathcal{O}_C(1)\cdot\widetilde{E}_1 = -2b + c = 0$$

$$\mathcal{O}_C(1)\cdot\widehat{\ell}_0 = \left(a\ell + b\widetilde{E}_1 + cE_2\right)\left(\ell - \widetilde{E}_1 - 2E_2\right)$$

$$\mathcal{O}_C(1)\,\widehat{\ell}_0 = a + c = 0$$

$$\mathcal{O}_C(1)\cdot E_2 = b - c = 1.$$

$$\begin{cases} -2b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ b - c = 1 \end{cases}$$

d'où $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$.

$$\mathcal{O}_C(1) = 2\ell - \widehat{E}_1 - 2E_2$$

$$2\ell = \mathcal{O}_C(1) + \widehat{E}_1 + 2E_2$$

$$p^*(2\ell) = p^*\mathcal{O}_C(1) + p^*\widehat{E}_1 + 2p^*E_2$$

Comme $\widehat{f}_0 = \ell - \widehat{E}_1 - 2E_2$

$$p^*2\ell = \mathcal{O}_X(2) + p^*\ell - p^*\widehat{f}_0$$

d'où $$p^*\ell = \mathcal{O}_X(2) - p^*\widehat{f}_0 .$$

Le système linéaire est donc représenté sur $\mathbb{P}^2$ par les sextiques passant deux fois par les huit points et une fois par deux points de $\mathbb{P}^2$

Chapitre II

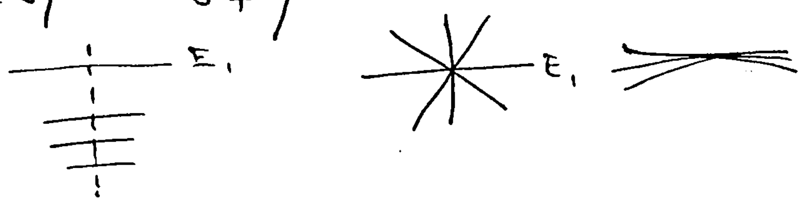
Dans ce chapitre on va donner une description d'exemples des singularités étudiées dans le chapitre I.
On donnera l'aspect du graphe et la configuration des dix points de $\mathbb{P}^2$
On identifiera ces singularités à des singularités données par Laufer [7 p 1290] et Arnold [1. p 248]

1) $E\ell$ J_{20}

la sextique à trois branches simplement tangente

Exemple : $x^3 + y^6$

$x = vy$ $\quad v^3 + y^3$



le graphe de la singularité est une courbe elliptique

On obtient cette situation en éclatant dix points $(P_1 \dots P_{10})$ sur une cubique lisse Γ de $\mathbb{P}^2$ tels que

$$\mathcal{O}_{\Gamma}(2P_1 + \dots + 2P_8 + P_9 + P_{10}) = \mathcal{O}_{\Gamma}(6).$$

Les traits continus représentent des diviseurs appartenant au lieu de ramification.
Les pointillés représentent les diviseurs n'appartenant pas au lieu de ramification.

2) No $J_{2,i}$

la sextique a une branche simple separée en deux éclatements plus un point double.

Soit P un point qui n'est pas un point d'inflexion d'une cubique de $\mathbb{P}^2$.

S : éclatement de six points consecutifs à P.

S est une surface de Del Pezzo degenerée de degré 3.

on a $\omega_S(1) = \omega_S^\vee$

Le module $\mathcal{O}_S(2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ est engendré par ses sections

car il est orthogonal aux racines effectives

en effet: si $E_1, \dots E_6$ designent les diviseurs provenant des éclatements des six points consecutifs; les racines effectives sont : $r_1 = E_1 - E_2, \dots \quad r_5 = E_5 - E_6$.

un element de $\mathcal{O}_S(2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ est
$5E_0 - 2E_1 - \dots - 2E_6$.

$r_i \cdot (5E_0 - 2E_1 - \dots - 2E_6) = 0 \quad \forall i = 1, \dots 5.$

une section generale est une quintique C avec $\delta = 6$.

En ajoutant la tangente on aura une sextique à trois branches avec $\delta = 10$.

Soit l'une section generale mais tangente à E_6
c'est une quintique unibranche avec $\delta = 6$
on prend la tangente et on aura une sextique
à deux branches avec $\delta = 10$.

3) C_0 E_{12}

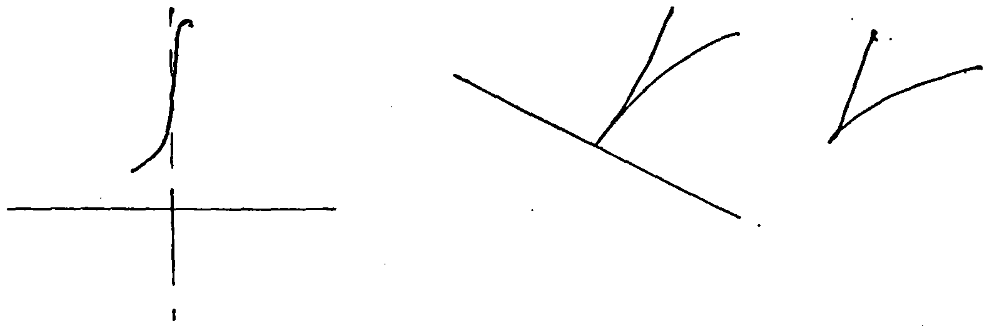
la sextique a une branche désingularisée en deux éclatements.

Exemple $(x-y^2)^3 + xy^5$

$x = uy$ $(u-y)^3 + uy^3$

$T = u-y$ $T^3 + (T+y)y^3$

$T = vy$ $v^3 + (v+1)y$



Le graphe de la singularité est une courbe rationnelle avec un cusp : 

On éclate dix points non singuliers sur une cubique irréductible ayant un point de rebroussement avec la condition

$$O_\Gamma(2P_1 + \dots + 2P_8 + P_9 + P_{10}) = O_\Gamma(6).$$

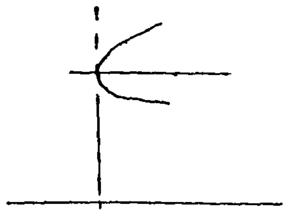
4) T_2 E_{13}

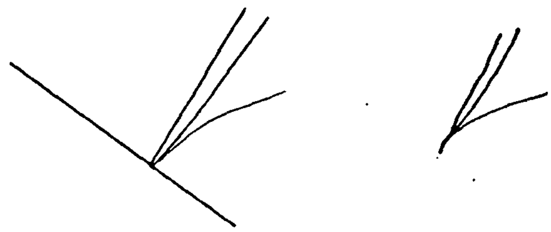
la sextique a deux branches séparées en trois éclatements
la branche double est désingularisée en deux éclatements

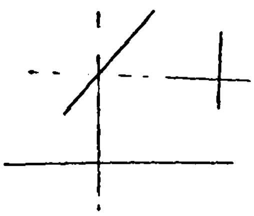
Exemple: $x^3 + x y^5$

$x = uy$ $\quad u^3 + u y^3$

$u = vy$ $\quad v^3 + v y$







Le graphe de la singularité : 

On obtient cette situation, en éclatant dix points $P_1, \dots P_{10}$ sur une cubique décomposée en une conique et une droite simplement tangentes avec $P_1, \dots P_6$ sur la conique.

P_7, P_8, P_9, P_{10} sur la droite.

5) Tr E_{14}

la sextique a une seule branche desingularisée en trois éclatement

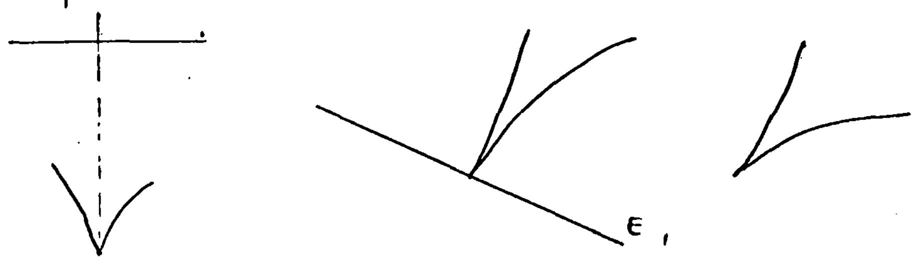
Exemple. $(x-y^2)^3 + x^2 y^4 = 0$

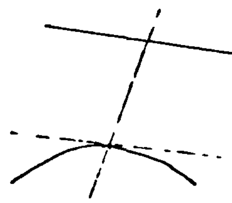
$x = uy$ $\quad (u-y)^3 + u^2 y^3 = 0$

on pose $T = u - y$ $\quad T^3 + (T+y)^2 y^3 = 0$

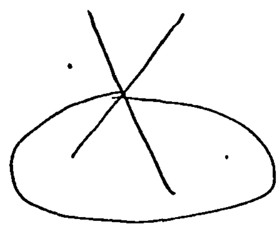
$T = vy$ $\quad v^3 + (v+1)^2 y^2 = 0$

et enfin $y = zv$ $\quad v + (v+1)^2 z^2 = 0$



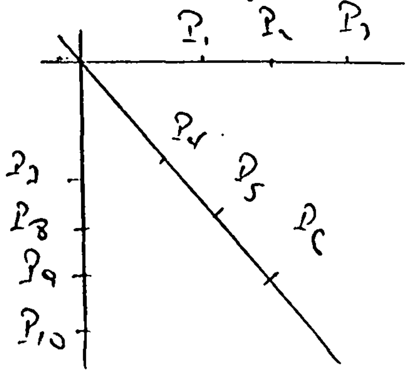


le graphe de la singularité



le graphe dual

la configuration des dix points



$\Gamma_1 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3$

$\Gamma_2 = E_0 - E_4 - E_5 - E_6$

$\Gamma_3 = E_0 - E_7 - E_8 - E_9 - E_{10}$

$\Gamma_{ij} = 1 \quad i \neq j$.

6) $A_{1,*,*,*,*}$ $\qquad J_{3,0}$

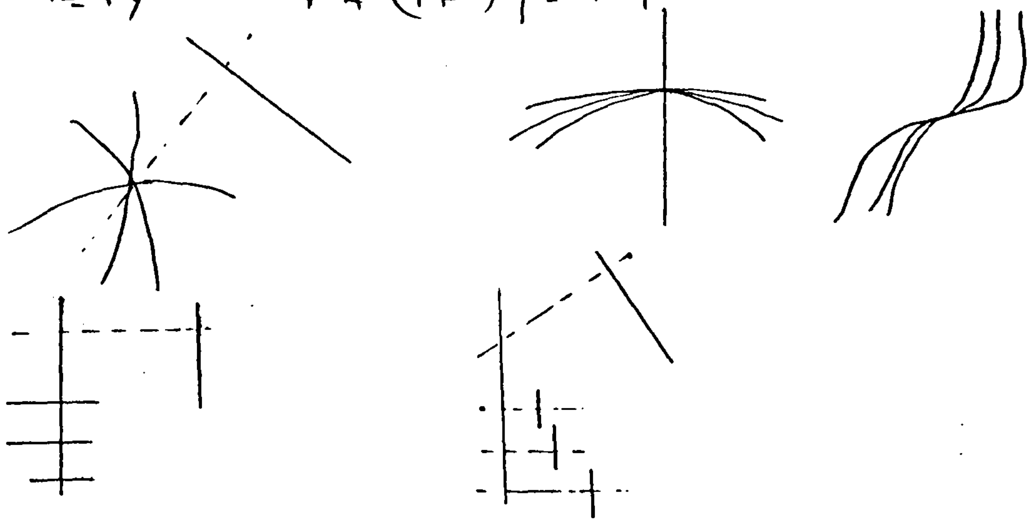
La sextique à trois branches osculatrices

Exemple : $(x-y^2)^3 + x^4 y = 0$

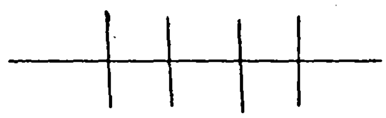
$x = uy \qquad (u-y)^3 + u^4 y^2 = 0$

$T = u - y \qquad T^3 + (T+y)^4 y^2 = 0$

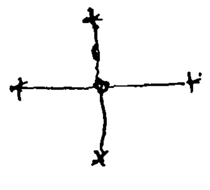
$T = vy \qquad v^3 + (v+1)^4 \cdot y^3 = v^3 + y^3 + \dots$



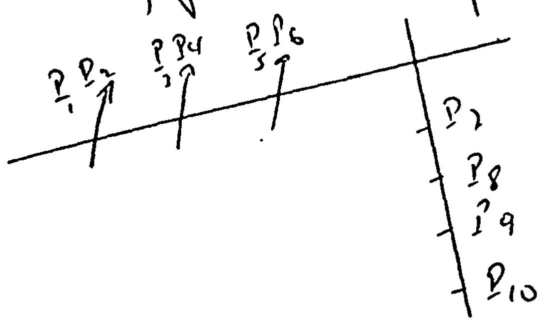
Donc le graphe de la singularité :



Le graphe dual



La configuration des points.



$\Gamma_1 = E_1 - E_2 \quad \Gamma_2 = E_3 - E_4 \quad \Gamma_3 = E_5 - E_6$

$\Gamma_4 = E_0 - E_7 - E_8 - E_9 - E_{10}$

$\Gamma_5 = E_0 - E_1 - E_3 - E_5$

$\Gamma_5 \, \Gamma_i = 1 \quad i = 1,2,3,4$

$\Gamma_i . \Gamma_j = 0$ pour $i, j \neq 5$.

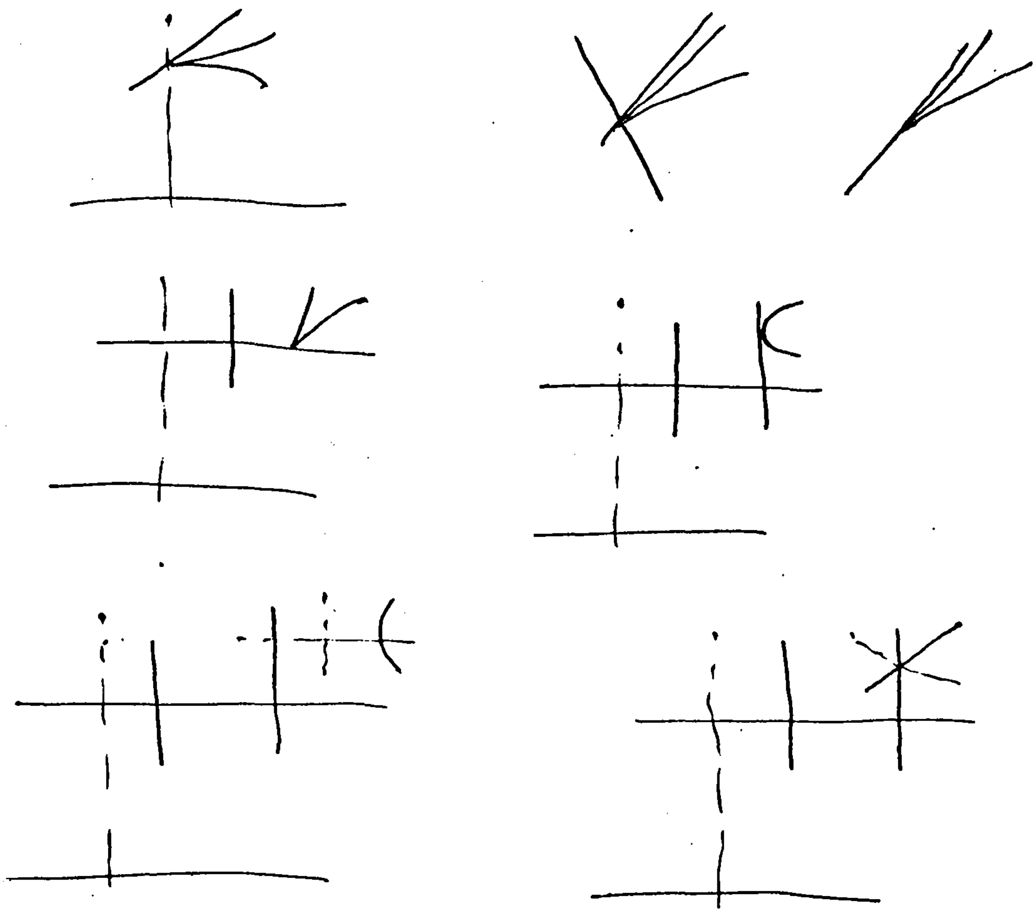
7) $A_{n,*,*,*,*}$ $\quad J_{3,i}$

On va étudier le cas

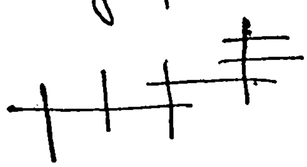
$A_{4,*,*,*,*}$ $\quad J_{3,3}$

la sextique a deux branches, une simple séparée en trois éclatement, une double désingularisée en quatre éclatement.

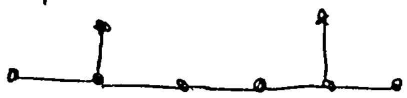
Exemple : $(x-y^2)^3 + x^3(3y-4y^3) - 6x^2y^3 + 3xy^5 + x^6$



le graphe de la singularité :



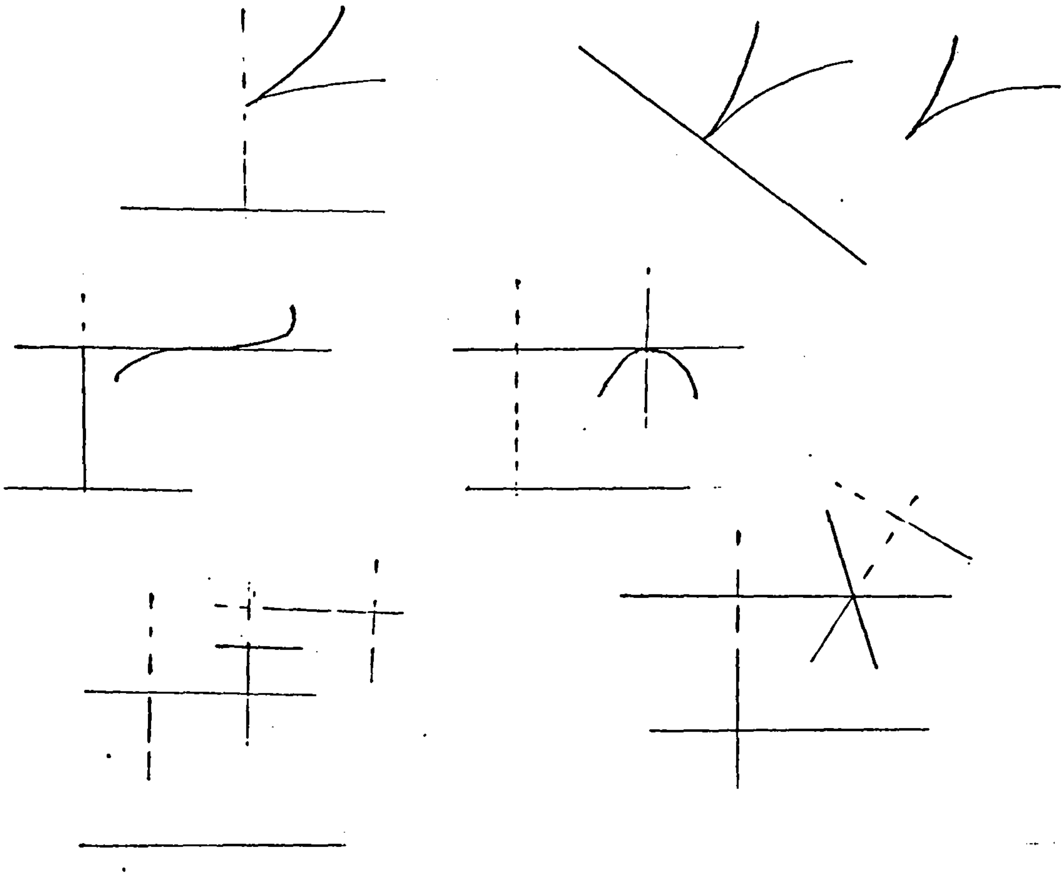
Le graphe dual :



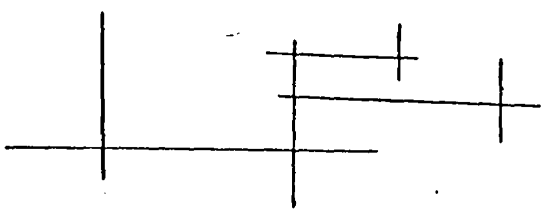
8) $D_{4,*,*,*}$. E_{18}

la sextique a une seule branche avec $\delta = 9$

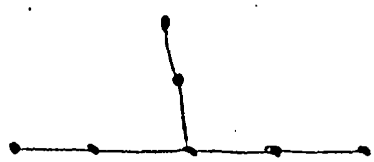
Exemple : $(x-y^2)^3 + x^3\left[\frac{3}{2}x - 3y - y^3\right] + x^2y^2\left[6y - \frac{3}{2}y^2\right] - 3xy^5$.



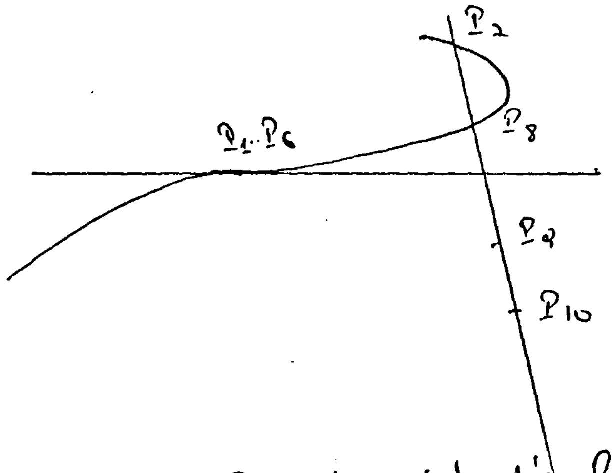
Le graphe de la singularité :



Le graphe dual :



On obtient cette situation en éclatant les dix points :



On éclate six fois le point d'inflexion

$E_1, \dots E_{10}$ les diviseurs exceptionnels

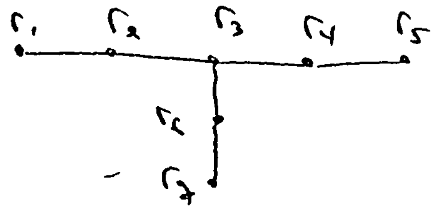
les racines effectives sont :

$r_1 = E_1 - E_2$, $r_2 = E_2 - E_3$, $r_3 = E_3 - E_4$, $r_4 = E_4 - E_5$, $r_5 = E_5 - E_6$

$r_6 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3$, $r_7 = E_0 - E_7 - E_8 - E_9 - E_{10}$

$r_i \, r_{i+1} = 1 \qquad i = 1, \dots 4$

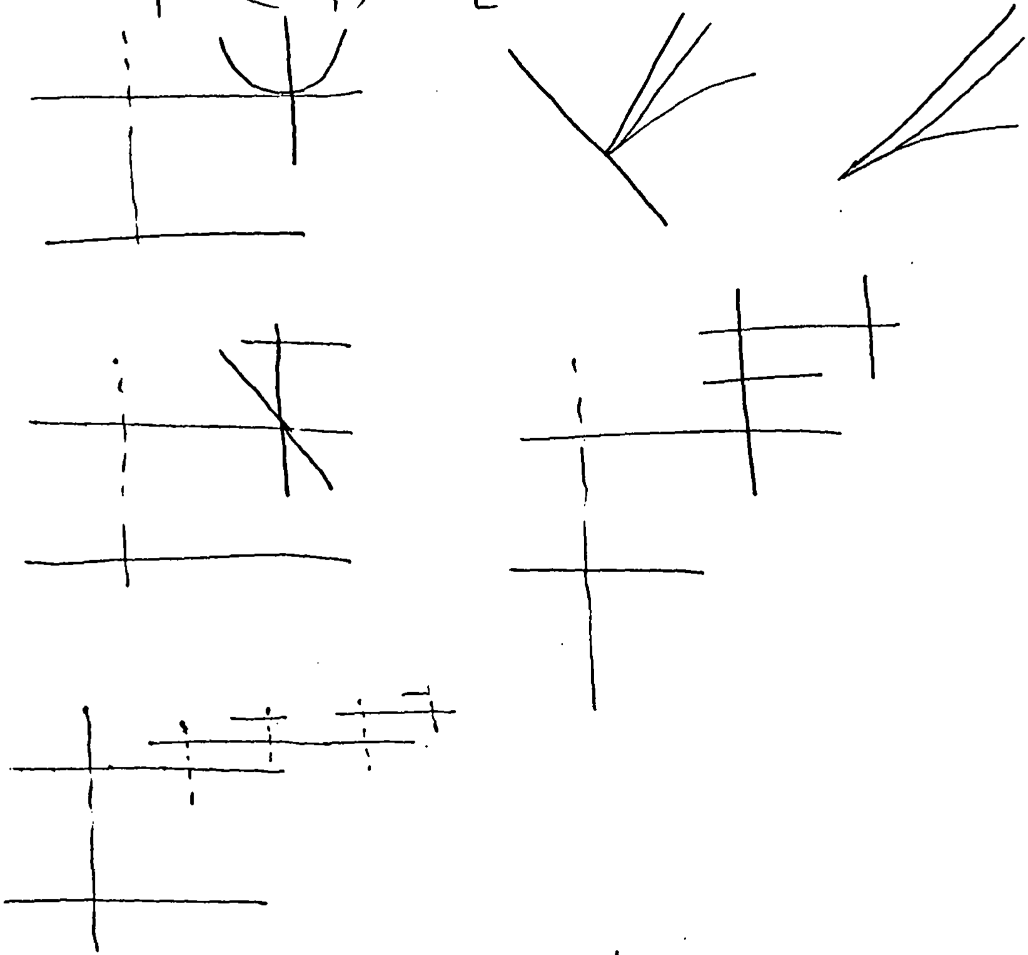
$r_3 \cdot r_6 = 1 \qquad r_6 \cdot r_7 = 1$



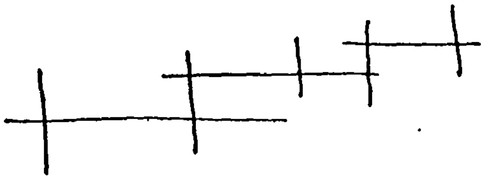
9) $E_{6,*,*}$, E_{19}

la sextique a deux branches ($\delta=10$) séparées en quatre éclatements.

Exemple: $(x-y^2)^3 + x^3\left[3x-3y-3xy-3y^2+2y^3\right]+6x^2y^3-3xy^5$.

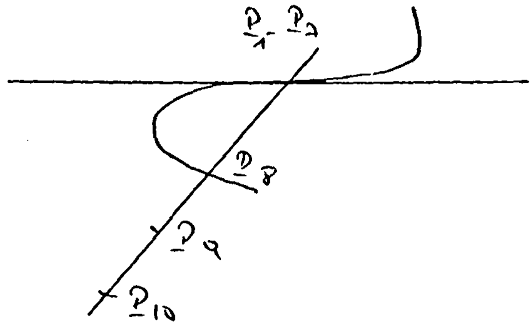


le graphe de la singularité :



le graphe dual :

On éclate les dix points comme suit:



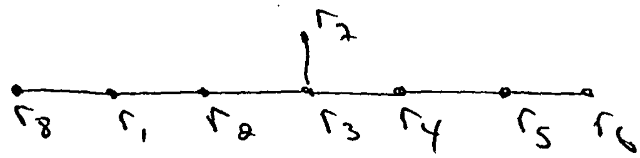
On éclate sept fois de suite le point d'inflexion.

les racines effectives :

$r_1 = E_1 - E_2, \dots, r_6 = E_6 - E_7$

$r_7 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3$

$r_8 = E_0 - E_1 - E_8 - E_9 - E_{10}$



10) $E_{8,*}$ E_{20}

la sextique est rationnelle i.e une branche avec $\delta = 10$ desingularisée en 4 éclatement.

Exemple: $(x-y^2)^3 + x^5 y$

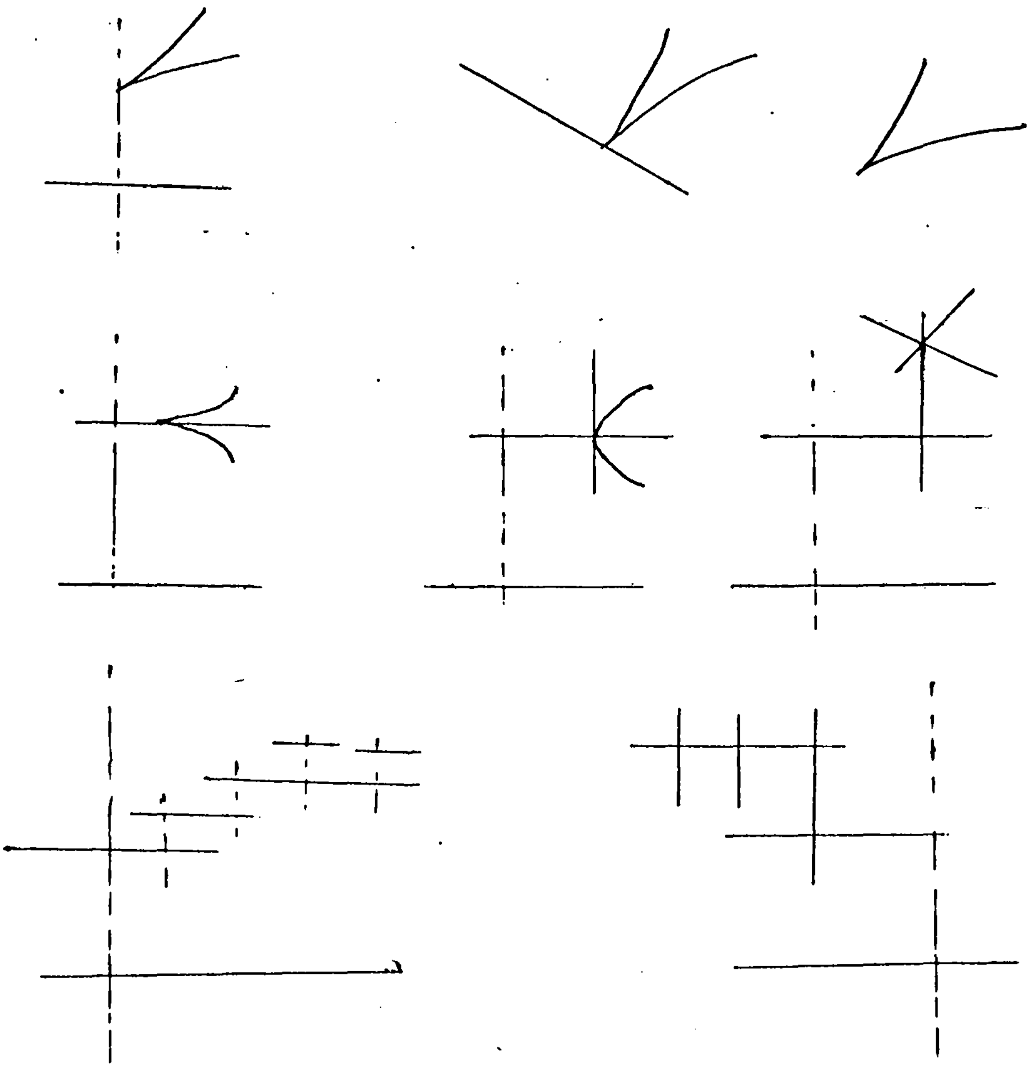
$x = uy$ $(u-y)^3 + u^5 y^3$

$T = u - y$ $T^3 + (T+y)^5 y^3$

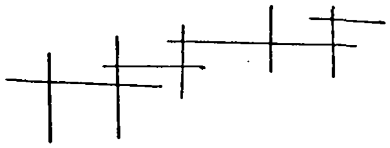
$T = vy$ $v^3 + (v+1)^5 y^5$

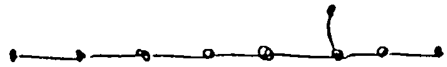
$v = wy$ $w^3 + (wy+1)^5 y^2$

$y = zw$ $w + (zw^2+1)^5 w^2$



Le graphe de la singularité est :



Le graphe dual : 

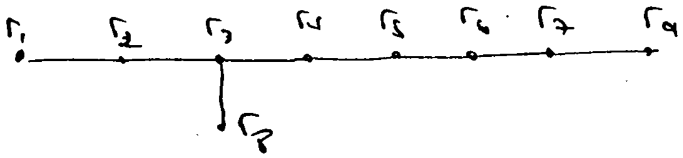
On éclate huit fois de suite un point d'inflexion

$E_1, \dots E_8$ les diviseurs exceptionnels.

puis on éclate deux points sur E_8

$\Gamma_1 = E_1 - E_2, \dots . \Gamma_7 = E_7 - E_8, \; \Gamma_8 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3$

$\Gamma_9 = E_8 - E_9 - E_{10}$



Bibliographie

[1] V. I. Arnold S.M Gusein-Zade A.N Varchenko
"Singularities of differentiable maps" Volume I
Birkhäuser 1985

[2] M Artin "On isolated rational singularities of surfaces"
Am. J. Math 88 1966 pp 129-136.

[3] W Barth. C Peters. A Van de Ven. "Compact Complex surfaces" Springer Verlag 1984

[4] M Demazure "Surfaces de Del Pezzo" (Séminaire sur les singularités des surfaces). Lecture Note in Math n° 777 Springer

[5] D. Epema "Surfaces with canonical hyperplane sections" These Leiden

[6] R. Hartshorne "Algebraic geometry"
Springer Verlag - New York.

[7] H.B. Laufer "On minimally elliptic singularities"
Am J Math Vol 99 1977 pp 1257-1295.