50376
1986
59

N° D'ORDRE 1239

50376
1986
89.

THESE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures

par

MOKRI TAHAR

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

VARIETES TUBULAIRES DE TYPE H^{∞} .

Membres du Jury : ANTOINE Philippe, Président
COEURÉ Gérard, Rapporteur
BOICHU Daniel, Examinateur
LOEB Jean-Jacques, Examinateur

Soutenue le 23 mai 1986

PLAN

INTRODUCTION

CHAPITRE 0 -
RAPPELS SUR LES ENVELOPPES D'HOLOMORPHIE 1

CHAPITRE I -
VARIETES TUBULAIRES ETALEES SUR $\mathbb{C}^n$. 7

CHAPITRE II -
DOMAINES DE TYPE H^∞. 39

BIBLIOGRAPHIE 52

INTRODUCTION

Etant donnée une variété X étalée sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ et S une famille non vide de fonctions holomorphes sur X, X est dite de type S si le morphisme d'extension de X à l'enveloppe d'holomorphie de S est un isomorphisme.

Dans le chapitre 0, nous étudions quelques propriétés essentielles de l'enveloppe d'holomorphie de S ; lorsque X est de type S, nous obtenons une autre caractérisation de X.

Dans le chapitre I, X est muni d'un homomorphisme continu $y \to \tau_y$ de $\mathbb{R}$ dans les automorphismes de X qui se projettent sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ en les translations d'amplitude iy le long du dernier facteur $\mathbb{C}$; nous appelons alors X variété tubulaire.

Dans la proposition 3, nous montrons qu'en chaque $x \in X$ il passe un tube maximal T_x qui s'identifie par projection à une bande de C parallèle aux imaginaires pures ; nous munissons X de la relation d'équivalence xRx' si $T_x = T_{x'}$, la relation R est ouverte mais l'espace quotient $X_{/R}$ n'est pas toujours séparé. Lorsque la séparation a lieu, on dit que X est une variété de Hartogs. On montre que si X est de Stein, X est une variété de Hartogs (théorème 2) et qu'une variété X de Hartogs est isomorphe à $(Y, r_-, r_+) = \{(y,z) \in Y \times \mathbb{C} / r_-(y) < \operatorname{Re} z < r_+(y)\}$ où Y est une variété étalée sur $\mathbb{C}^n$ (théorème 1).

Dans le théorème 3 et le corollaire 1, nous établissons que l'enveloppe d'holomorphie $\tilde{X}$ d'une variété tubulaire X est une variété tubulaire X est une variété tubulaire de Hartogs ; ainsi $\tilde{X} = (\tilde{Y},\tilde{r}_-,\tilde{r}_+)$, les fonctions $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ étant plurisousharmoniques sur $\tilde{Y}$. En particulier, nous obtenons que si $X = (Y,r_-,r_+)$ $\tilde{Y}$ est l'enveloppe d'holomorphie de Y, et si Y est de Stein $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ sont les plus grandes minorantes plurisousharmoniques de r_- et $-r_+$, respectivement ; ce qui n'est pas vrai si Y n'est pas de Stein.

Dans le chapitre II, nous établissons, plus généralement, que si la famille S est invariante par la translation τ, l'enveloppe d'holomorphie $\tilde{X}$ de S reste une variété de Hartogs, donc $\tilde{X} = (\tilde{Y},\tilde{r}_-,\tilde{r}_+)$ à un isomorphisme près, où $\tilde{Y}$ est de Stein et les fonctions $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ sont plurisousharmoniques sur $\tilde{Y}$.

On étudie plus particulièrement le cas où $S = H^\infty(X)$, espace des fonctions holomorphes bornées sur X et on caractérise le type H^∞ de $X = (Y,r_-,r_+)$ par l'appartenance r_- et $-r_+$ à une classe $P(Y)$ de fonctions plurisousharmoniques introduite par N. Sibony [12].

CHAPITRE O

RAPPELS SUR LES ENVELOPPES D'HOLOMORPHIE

****

Soit (X,p) une variété connexe étalée sur $\mathbb{C}^n$, la fonction distance sur X est définie par :

$d(x) = \text{Sup}\{\rho > 0,$ il existe un voisinage $B(x,\rho)$ de x homéomorphe par p à la boule $B(p(x),\rho)$ de $\mathbb{C}^n\}$.

On notera par p_x^{-1} l'inverse de p défini sur $B(p(x),d(x))$ par $p_x^{-1} \circ p$ = identité. On désignera par $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur X ; si $f \in \mathcal{O}(X)$ le germe de f au point x sera noté par f_x et le rayon de convergence du développement taylorien de $f \circ p_x^{-1}$ au voisinage de $p(x)$ par $\rho(f)(x)$.

Soit S une partie non vide de $\mathcal{O}(X)$, une S extension de X est un morphisme $X \xrightarrow{u} Y$ de variété étalée tel que le morphisme u^* de restriction : $f \in \mathcal{O}(Y) \longmapsto f \circ u \in \mathcal{O}(X)$ ait une image contenant S, c'est-à-dire : toute fonction f de S se prolonge à Y en une fonction unique de $\mathcal{O}(Y)$ notée $u^*(f)$.

Deux S extensions $X \xrightarrow{u} Y$ et $X \xrightarrow{v} Z$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de variété étalée $Y \xrightarrow{w} Z$ tel que $v = w \circ u$. Une S extension $X \xrightarrow{j} E_S(X)$ est appelée une S enveloppe d'holomorphie si tout autre S extension $X \xrightarrow{u} Y$ se factorise à travers j, c'est-à-dire s'il existe un morphisme $Y \xrightarrow{v} E_S(X)$ tel que $j = v \circ u$. On sait [11] qu'il existe une S enveloppe d'holomorphie unique à un isomorphisme près ; $d_{E_S}(x)$ est alors l'infinimum des rayons de convergence au point $p(x)$ des développements tayloriens de $f \circ p_x^{-1}$ lorsque f décrit $j^*(S)$ où p est l'étalement de E_S sur $\mathbb{C}^n$.

Lorsque $S = \mathcal{O}(X)$ une $\mathcal{O}(X)$ enveloppe d'holomorphie sera appelée un domaine d'holomorphie.

Soit $X \xrightarrow{j} E_S(X)$ une S enveloppe d'holomorphie et $\sum$ une partie non vide de $\mathcal{O}(E_S(X))$ contenant $j^*(S)$, alors $E_{\sum}(E_S(X))$ est une autre S enveloppe d'holomorphie qui est donc isomorphe à $E_S(X)$, en particulier si on prend $\sum = \mathcal{O}(E_S(X))$ on constate qu'une S enveloppe d'holomorphie est un domaine d'holomorphie particulier et par conséquent une variété étalée de Stein.

Définition.-

X est dite de type S si une (et alors toute) S enveloppe d'holomorphie $X \xrightarrow{j} E_S(X)$ est un isomorphisme.

Il est clair que $E_S(X)$ est de type $j^*(S)$. Si X est de type S, X est un domaine d'holomorphie ; la réciproque était évidemment fausse en général : on prend pour X un domaine de $\mathbb{C} - \{0\}$ et pour S la restriction à X de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

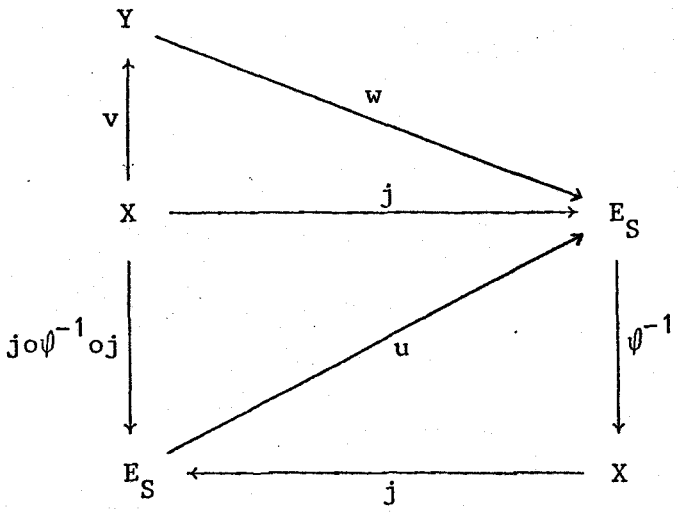
Proposition 1.-

Soit $j : X \longrightarrow E_S(X)$ une S enveloppe d'holomorphie et supposons que X soit isomorphe à $E_S(X)$ par un morphisme ψ, j est alors un isomorphisme et, par conséquent, X est de type S si et seulement si il existe un isomorphisme v de $E_S(X)$ tel que

$$\psi^*(S) = (v \circ j)^*(S).$$

Démonstration :

a) Supposons l'existence de v, en substituant $v \circ j$ à j on peut supposer que $\psi^*(S) = j^*(S)$, il en résulte que $g = j^*(f) \circ \psi$ est dans S et l'on a $j^*(g) \circ j = g$, ainsi $j^*(g) \circ j \circ \psi^{-1} = j^*(f)$ ce qui signifie que $j \circ \psi^{-1}$ est une S extension ; d'autre part, tout autre S extension Y se factorise à travers j et, par conséquent, à travers $j \circ \psi^{-1} \circ j$. Il en résulte que $j \circ \psi^{-1} \circ j$ est une S enveloppe d'holomorphie, il existe donc un isomorphisme u de $E_S(X)$ tel que $u \circ j \circ \psi^{-1} \circ j = j$, ce qui signifie $u \circ j = \psi$ et enfin $j = u^{-1} \circ \psi$.



b) Réciproquement, supposons que j soit un isomorphisme $v = \phi \circ j^{-1}$ est alors un isomorphisme de E_S qui vérifie la condition énoncée dans la proposition.

Remarque :

La proposition 1 s'applique aux deux cas importants suivants

$S = \mathcal{O}(X)$ ou

$S = H^\infty(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes bornées sur X.

En effet, pour toute $H^\infty(X)$ extension $X \xrightarrow{u} Y$ on a $u^*(H^\infty(X)) = H^\infty(Y)$ car l'évaluation $\hat{y} : f \in H^\infty(X) \hookrightarrow u^*(f)(y)$ en un point y de Y des fonctions de $H^\infty(X)$ est un caractère sur cette algèbre de Banach. Il est par conséquent continu, on a donc

$$|u^*(f)(y)| \leqslant ||f||_\infty \qquad \forall\, f \in H^\infty(X),\ \forall\, y \in Y.$$

Ainsi $u^*(f)$ est dans $H^\infty(Y)$ et si Y est l'enveloppe d'holomorphie de X relativement à $H^\infty(X)$, alors Y est de type $H^\infty(Y)$.

Proposition 2.-

X est de type S si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

a) si $x' \neq x''$ et $p(x') = p(x'')$ il existe $f \in S$ tel que $f_{x'} \neq f_{x''}$.

b) Pour toute suite x_n de X telle que $d_X(x_n) \longrightarrow 0$, il existe une suite f_n de S telle que $\rho(f_n)(x_n) \to 0$.

Démonstration :

1°) Supposons que X soit de type S, soit $X \xrightarrow{j} E_S(X)$ une S-enveloppe d'holomorphisme de X. Rappelons brièvement la construction de $E_S(X)$ [11].

On pose $E_z = \{a \in \prod_{f \in S} (\mathcal{O}_z)_f$ tel que $\rho(a) = \inf_{f \in S} \rho(a_f)(z) > 0\}$

où $\mathcal{O}_z$ est l'anneau des germes en z de fonctions holomorphes et $a = (a_f)_{f\in S}$.

On pose $E = \bigcup_{z\in C^n} E_z$; muni d'une topologie appropriée E est un espace séparé. L'application $E \xrightarrow{\Pi} C^n$ définie par $\Pi(a) = z$ si $a \in E_z$ est un étalement sur E ; on définit un morphisme de variété étalée de X dans E par $j(x) = \{f \circ p_x^{-1}\}_{f\in S}$. $E_S(X)$ est alors la composante connexe de $j(X)$ dans E. X étant de type S, j est un isomorphisme d'où a).

Soit x_n une suite de X telle que $d_X(x_n) \to 0$, on a

$$d_X(x_n) = d_{E_S}(j(x_n)) = \inf_{f\in j^*(S)} \rho(f, j(x_n)) = \inf_{f\in S} \rho(f, x_n) .$$

Ainsi $\inf_{f\in S} \rho(f,x_n)$ tend vers zéro et donc pour tout entier n il existe $f_n \in S$ telle que $\rho(f_n, x_n) \longrightarrow 0$.

2°) Supposons les conditions a) et b) vérifiées. Par construction, j est injectif d'après a). Soit x_o un point frontière de $j(X)$ dans $E_S(X)$, il existe une suite x_n de X telle que $j(x_n) \to x_o$ et donc $d_X(x_n) \to 0$.

Pour toute suite f_n de S, on a $\rho(f_n, x_n) = \rho(f_n \circ j^{-1}, j(x_n))$. Comme $\rho(f_n \circ j^{-1}, x_o) \geq a > 0$ et $j(x_n) \to x_o$, on a $\rho(f_n, x_n) \geq a > 0$ pour tout entier, ce qui contredit la condition b). Ainsi $j(X) = E_S(X)$.

Proposition 3.-

Soit X une variété étalée de type S où S est un espace de Frechet ayant une topologie plus fine que la topologie de la convergence compacte, il existe alors une fonction f appartenant à S telle que $E_S(X) = E_f(X)$.

Démonstration :

a) Posons $E_{x,x'} = \{f \in S,\ \dot{f}_x = \dot{f}_{x'}\}$ pour tout $(x,x') \in X \times X - \Delta$ où Δ est la diagonale de $X \times X$. La topologie de S étant plus fine que la topologie de la converge compacte $E_{x,x'}$ est un sous-espace fermé de S qui est différent de S d'après la proposition 2. Soit (x_n,x'_n) une suite dense de $X \times X - \Delta$. Quel que soit f appartenant au complémentaire de $E_1 = \bigcup_{n\geq 0} (E_{x_n,x'_n})$ et pour tout (x,x') dans $X \times X - \Delta$ on a $\dot{f}_x \neq \dot{f}_x$.

b) Pour $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, posons

$$E_{\varepsilon,x} = \{f \in S,\ \rho(f,x) \geq d(x) + \varepsilon\}.$$

$E_{\varepsilon,x}$ est un sous-espace fermé de S, il diffère de S car X est une extension maximale pour les fonctions de S.

Soit $(x_n,\varepsilon_n) \in X \times R_+^*$ une suite telle que $d_X(x_n) \to 0$ et $\varepsilon_n \to 0$. Pour toute fonction f appartenant au complémentaire de $E_2 = \bigcup_n E_{\varepsilon_n x_n}$, on a $\rho(f,x_n) \to 0$.

$E_1 \cup E_2$ est maigre ; d'après le théorème de Baire $S \neq E_1 \cup E_2$. Ainsi $E_S(X) = E_f(X)$ pour tout f appartenant au complémentaire dans S de $E_1 \cup E_2$, d'après la proposition 2.

CHAPITRE I

VARIETES TUBULAIRES ETALEES SUR $\mathbb{C}^n$.

****

Définition.-

Une variété étalée (X,Π) sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ est dite tubulaire s'il existe $\tau \in C(X \times \mathbb{R},X)$ qui vérifie :

$\tau(x,0) = x$ et $\Pi \circ \tau(x,y) = (\Pi_1(x),\Pi_2(x) + iy)$ pour tout x dans X et tout y réel.

On a noté $\Pi(x) = (\Pi_1(x),\Pi_2(x)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Dans la suite, (X,Π) désignera une variété étalée tubulaire ; on notera par d la fonction distance de X.

Remarque :

Si (X',Π') est une autre variété étalée isomorphe à (X,Π), alors (X',Π') est aussi tubulaire. En effet, soit $h : X \to X'$ un isomorphisme de variété étalée, posons :

$\theta = h \circ \tau \circ (h^{-1} \times id_{\mathbb{R}})$, $\theta \in C(X' \times \mathbb{R}, X')$ et

$\Pi' \circ \theta = \Pi' \circ h \circ \tau \circ (h^{-1} \times id_{\mathbb{R}})$; comme $\Pi = \Pi' \circ h$,

$$\Pi' \circ \theta(x',y) = \Pi \circ \tau(h^{-1}(x'),y) = (\Pi_1(h^{-1}(x')),\Pi_2(h^{-1}(x')) + iy)$$
$$= (\Pi'_1(x'),\Pi'_2(x') + iy)$$

pour tout x' dans X' et y réel.

Pour tout y réel, notons par τ_y l'application holomorphe de X dans X, définie par $\tau_y(x) = \tau(x,y)$.

Proposition 4.-

L'application $y \longrightarrow \tau_y$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans Aut X.

Preuve :

Soit $(x,y) \in X \times \mathbb{R}$ et $E = \{h \in \mathbb{R} / \tau_h \circ \tau_y(x) = \tau_{h+y}(x)\}$.

E n'est pas vide car 0 appartient à E ; E est fermé par continuité.

Si V est une carte locale de $\tau_{h+y}(x)$ avec $h \in E$, alors $\tau_{h+k} \circ \tau_y(x)$ et $\tau_{h+k+y}(x)$ sont aussi dans V pour k assez petit.

On vérifie facilement que $\Pi[\tau_{h+k} \circ \tau_y(x)] = \Pi[\tau_{h+k+y}(x)]$, donc $\tau_{h+k+y}(x) = \tau_{h+k} \circ \tau_y(x)$, ainsi $h + k \in E$ pour k assez petit ; ce qui montre que E est ouvert et $E = \mathbb{R}$ car E est aussi fermé.

Proposition 5.-

La fonction distance sur (X,Π) est invariante par τ c'est-à-dire :

$$d[\tau(x,y)] = d(x) \qquad \forall (x,y) \in X \times \mathbb{R}.$$

Démonstration :

Soit $\rho < d(x)$; désignons par $B(x,\rho)$ la partie de X contenant x, homéomorphe par Π à $B(\Pi(x),\rho)$.

Pour tout y de $\mathbb{R}$, Π est injective sur $\tau(B(x,\rho),y)$ car étant donnés (x',x'') dans $B(x,\rho) \times B(x,\rho)$ tels que :

$\Pi \circ \tau(x',y) = \Pi \circ \tau(x'',y) = (\Pi_1(x'),\Pi_2(x') + iy) = (\Pi_1(x''),\Pi_2(x'') + iy)$,

alors $\Pi(x') = \Pi(x'')$, ce qui entraîne $x' = x''$. Comme $\tau(B(x,\rho),y)$ est une partie connexe contenant $\tau(x,y)$, on a $d(\tau(x,y)) \geq d(x)$; en substituant $\tau(x,-y)$ à x, on obtient le résultat cherché.

Proposition 6.-

Pour tout x de X, il existe une partie de X notée T_x qui contient x et qui est homéomorphe par Π à $\{\Pi_1(x)\} \times T'_x$ où T'_x est un ouvert tubulaire de $\mathbb{C}$.

T_x sera appelé tube de X contenant x.

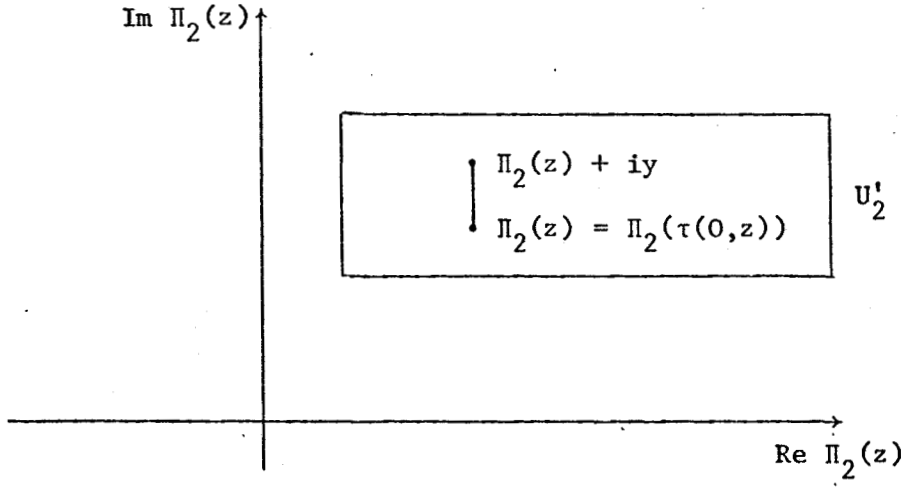
Démonstration :

Soit U_x une carte locale contenant x homéomorphe par $\Pi = (\Pi_1,\Pi_2)$ à $U'_1 \times U'_2$ où U'_2 est un voisinage rectangulaire ouvert de $\Pi_2(x)$ dans $\mathbb{C}$. Posons :

$$\tilde{U}_x = \bigcup_{z \in U_x} \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \tau(y,z)$$ et montrons que Π est injective sur l'ouvert $\tilde{U}_x$.

Notons par $[0,y]$ l'intervalle réel fermé d'extrémités 0 et y.

Si $\Pi_2(z) + iy \in U_2'$ pour $z \in U_x$ et y réel, alors $\Pi_2(z) + it \in U_2'$, $\forall\, t \in [0,y]$ car U_2' est un voisinage rectangulaire de $\Pi_2(z)$ dans $\mathbb{C}$.



Donc $\tau([0,y],z) \in \Pi^{-1}(U_1' \times U_2')$ mais $\tau([0,y],z)$ est connexe et contient $z \in U_x$.

Comme U_x est la composante connexe de $\Pi^{-1}(U_1' \times U_2')$ contenant x, on a :

$$\tau([0,y],z) \subset U_x \quad \text{si} \quad \Pi_2(z) + iy \in U_2'$$

pour $z \in U_x$ et y réel, en particulier $\tau(y,z) \in U_x$.

Par conséquent :

$z' = \tau(y,z)$ est équivalent à :

$$\{\Pi_1(z') = \Pi_1(z) \quad \text{et} \quad \Pi_2(z') = \Pi_2(z) + iy\} \quad \forall\, (z,z') \in U_x \times U_x.$$

Ainsi :

$$\Pi(\tau(y,z)) = \Pi(\tau(y',z')) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Pi_1(z') = \Pi_1(z) \\ \Pi_2(z') = \Pi_2(z) + i(y-y') \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad z' = \tau(y-y',z) \quad \forall (z,z') \in U_x \times U_x .$$

On a donc :

$$\tau(y',z') = \tau(y',\tau((y-y'),z)) = \tau(y,z).$$

Ce qui prouve l'injectivité de Π sur $\tilde{U}_x$ qui est donc homéomorphe par Π à $U_1' \times (U_2' + i\mathbb{R})$.

Il suffit maintenant pour réaliser les conditions de la proposition de prendre :

$$T_x = \Pi^{-1}\{\{\Pi_1(x)\} \times (U_2' + i\mathbb{R})\} \cap \tilde{U}_x .$$

L'intersection de deux tubes T_x^1 et T_x^2 contenant x est connexe, la restriction de Π à leur réunion $T_x^1 \cup T_x^2$ est donc un homéomorphisme et forme un nouveau tube contenant x.

Il existe donc un tube ouvert contenant x dans X maximal pour la relation d'inclusion, on le notera $\tilde{T}_x$. Il se projette sur $\mathbb{C}$ par Π_2 suivant un tube dont les abscisses inférieures et supérieures seront notées $r_-(x)$ et $r_+(x)$.

$\tilde{T}_x$ est la composante connexe contenant x de

$$\Pi^{-1}(\{\Pi_1(x)\} \times \{r_-(x) < \mathrm{Re}\ z < r_+(x)\}).$$

Il est clair que $\tilde{T}_{x'} = \tilde{T}_x$, $\forall\, x' \in \tilde{T}_x$.

Proposition 7.-

Les fonctions $r_-(x)$ et $r_+(x)$ sont respectivement semi-continues supérieurement et inférieurement.

Preuve :

Pour $x_o \in X$, soit Π_o la restriction de Π à $\tilde{T}_{x_o}$, et considérons $[\alpha,\beta]$ contenu dans $]r_-(x_o), r_+(x_o)[$. Quel que soit $z \in [\alpha,\beta]$, il existe une section f_z de Π^{-1} au-dessus de $U_z^1 \times U_z^2$ qui coïncide avec Π_o^{-1} sur $\{\{\Pi_1(x_o)\} \times (]r_-(x_o), r_+(x_o)[\cap U_z^2)\}$ où U_z^1 est une boule centrée en $\Pi_1(x_o)$ et U_z^2 une boule centrée en z. Pour z et z' dans $[\alpha,\beta]$, f_z et $f_{z'}$ coïncident sur l'intersection connexe de leurs domaines de définition car ce sont des prolongements de Π_o^{-1}. Par compacité, on en déduit l'existence d'une section f de Π^{-1} au-dessus de $U_1 \times U_2$ qui coïncide avec Π_o^{-1} sur $\{\pi_1(x)\} \times [\alpha,\beta]$, où U_1 est un voisinage de $\Pi_1(x)$ et U_2 un voisinage de $[\alpha,\beta]$. Comme dans la démonstration de la proposition précédente, on pose $U = f(U_1 \times U_2)$ et on montre que Π est un homéomorphisme de :

$$\bigcup_{x \in U} \bigcup_{y \in R} \tau(y,x) \quad \text{sur} \quad U_1 \times \{U_2 + i\mathbb{R}\}.$$

Par conséquent : $r_-(x) < \alpha$ et $r_+(x) > B \quad \forall x \in U$, ce qui prouve la propriété annoncée.

Introduisons, à présent, la relation d'équivalence suivante sur X : $x \mathcal{R} x'$ si et seulement si $\tilde{T}_x = \tilde{T}_{x'}$.

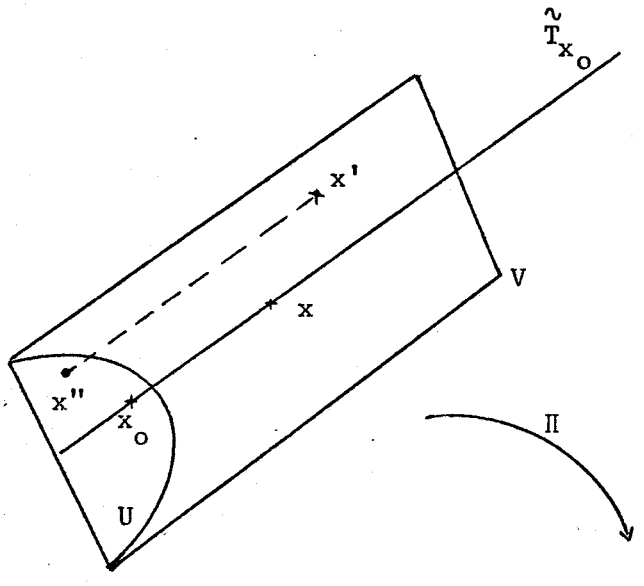
Proposition 8.-

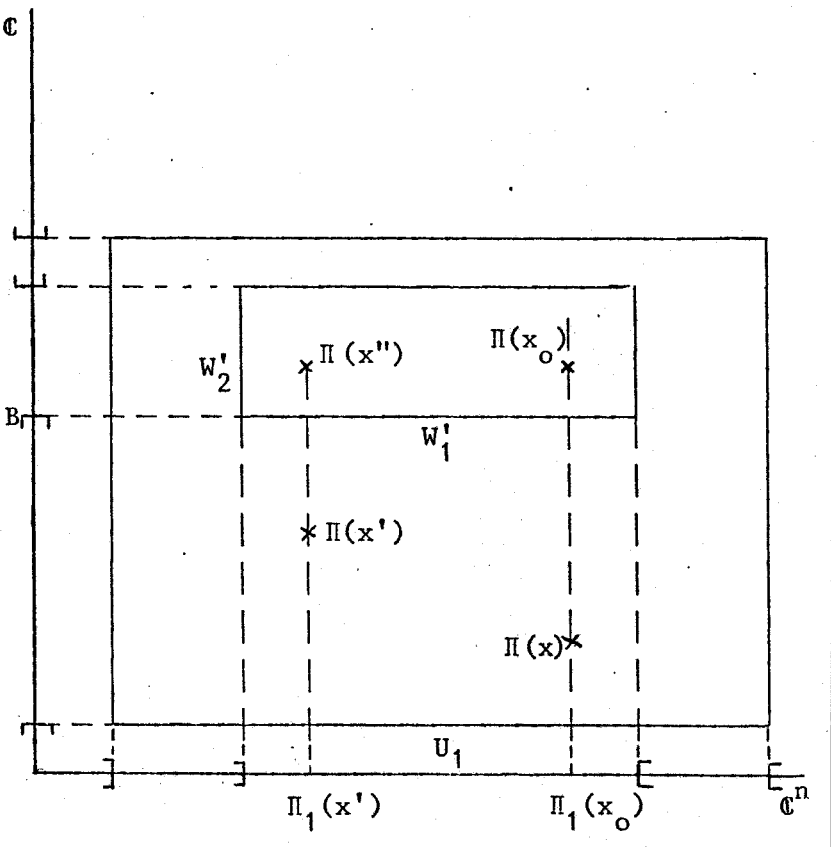
La relation R est ouverte.

Démonstration :

Soit $x_o \in X$ et $x \in \tilde{T}_{x_o}$. Pour que R soit ouverte, il suffit de trouver $\mathcal{F}$, système fondamental de voisinages de x_o, tel que pour tout U de $\mathcal{F}$, il existe V voisinage de x, dont tout élément z est équivalent à un élément de U.

On a vu précédemment qu'il existe un tube ouvert B de $\mathbb{C}$ contenant $\Pi_2(x_o)$ et $\Pi_2(x)$, un voisinage U_1 de $\Pi_1(x) = \Pi_1(x_o)$, un voisinage $\tilde{V}$ de x_o tel que la restriction de Π à $\tilde{V}$ soit un homéomorphisme sur $U_1 \times B$.





Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ des voisinages U de x_o, contenus dans $\tilde{V}$ et homéomorphes par Π à un système fondamental de voisinages élémentaires $w'_1 \times w'_2$ de $\Pi(x_o)$.

$(\Pi|_{\tilde{V}})^{-1}(w'_1 \times B)$ est un voisinage V de x et x_o. Soit x' dans V et x" dans U se projetant par Π_1 en $\Pi_1(x')$.

$\tilde{T}_{x'}$ et $\tilde{T}_{x''}$ ne sont pas disjoints car ils contiennent $(\Pi|_{\tilde{V}})^{-1}\left[\{\Pi_1(x')\} \times B\right]$, on a donc $\tilde{T}_{x'} = \tilde{T}_{x''}$ soit $x' \mathcal{R} x''$. Ce qui termine la démonstration.

Remarque :

La relation R n'est pas en général fermée ; il suffit pour le voir de prendre $X = \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{(0,t)/\mathrm{Re}\, t = 0\}$. Aussi introduit-on la définition suivante :

Définition.-

Une variété tubulaire étalée est dite de Hartogs si la relation R définie précédemment est fermée.

Théorème 1.-

Toute variété tubulaire de Hartogs étalée sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ est isomorphe à un ouvert tubulaire Ω de $Y \times \mathbb{C}$, de la forme $\{(y,z) \in Y \times \mathbb{C} \; ; \; r_-(y) < \mathrm{Re}\, z < r_+(y)\}$ où Y est une variété étalée sur $\mathbb{C}^n$ et r_- et $-r_+$ sont des fonctions semi-continues supérieurement sur Y.

Démonstration :

a) Comme la relation R est ouverte et fermée, l'espace topologique quotient $X/_R$ est séparé pour la topologie quotient. On prend pour Y l'espace topologique $X_{/R}$ et on pose $\dot{\Pi}_1(\dot{x}) = \Pi_1(x)$ pour tout $\dot{x} \in X_{/R}$. Montrons que $(Y,\dot{\Pi}_1)$ est étalée sur $\mathbb{C}^n$. Désignons par P l'application canonique de X dans $X_{/R}$. Etant donné W un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $\dot{\Pi}_1^{-1}(W) = P\left[\Pi_1^{-1}(W)\right]$ est ouvert car P est une application ouverte. Ainsi Π_1 est continue. $\dot{\Pi}_1$ est ouverte : $\dot{\Pi}_1(\dot{O}) = \Pi_1\left[P^{-1}(O)\right]$ pour tout ouvert $\dot{O}$ de $X_{/R}$; comme Π_1 est ouverte et P continue $\dot{\Pi}_1$ est ouverte.

Soit $x_o \in X$, il existe un voisinage W de x_o homéomorphe par Π à $W_1' \quad (W_2' + iR)$ où W_1' est un voisinage de $\Pi_1(x_o)$ et W_2' un voisinage rectangulaire de $\Pi_2(x_o)$.

$\dot{W}$ est un voisinage de $\dot{x}_o$ sur lequel $\dot{\Pi}_1$ est injectif, en effet :

si $\dot{\Pi}_1(x') = \dot{\Pi}_1(x'')$ pour $(x',x'') \in \dot{W} \times \dot{W}$

on :

$\Pi_1(x') = \Pi_1(x'')$. De plus, $\tilde{T}_{x'}$ et $\tilde{T}_{x''}$ contiennent

$$(\Pi|_W)^{-1}(\{\Pi_1(x')\} \times (W_2' + iR)),$$

donc $\tilde{T}_{x'} = \tilde{T}_{x''}$ c'est-à-dire $\dot{x}' = \dot{x}''$. Ainsi $\dot{W}$ est une carte locale pour $\dot{\Pi}_1$ et

$Y = X_{/R}$ est une variété étalée par $\dot{\Pi}_1$ sur $\mathbb{C}^n$.

b) Considérons l'application h de X dans $X_{/R} \times \mathbb{C}$ définie par :

$$h(x) = (\dot{x}, \Pi_2(x)) \quad ;$$

h est un morphisme pour les structures de variétés étalées. De plus, h est injective car $h(x') = h(x'')$ entraîne

$\tilde{T}_{x'} = \tilde{T}_{x''}$ et $\Pi_2(x') = \Pi_2(x'')$ ce qui implique $x' = x''$ car Π est injective sur $\tilde{T}_{x'} = \tilde{T}_{x''}$.

h est donc un isomorphisme sur son image.

L'image par Π_2 de T_x est le tube de C défini par $\{r_-(x) < \mathrm{Re}\ z < r_+(x)\}$. De plus, $r_+(x)$ et $r_-(x)$ ne dépendent que de $\tilde{T}_x$ donc que de $\dot{x}$.

r_- et r_+ sont donc respectivement semi-continues supérieurement et inférieurement sur $X_{/R}$ par définition de la topologie quotient et la proposition 4.

Notation :

La variété $\{(y,z) \in Y \times \mathbb{C},\ r_-(y) < \mathrm{Re}\ t < r_+(y)\}$ sera notée par (Y, r_-, r_+) ; on a donc $X = (Y, r_-, r_+)$ à un isomorphisme près.

Théorème 2.-

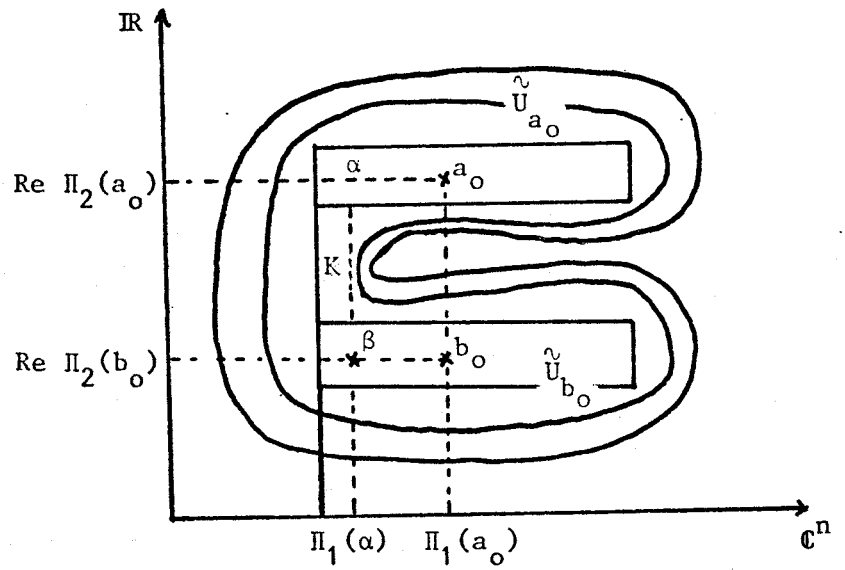
Toute variété tubulaire étalée (X, Π) qui est de Stein est isomorphe à une variété de Hartogs.

Démonstration :

D'après le théorème 1, on est conduit à vérifier la fermeture de la relation R, c'est-à-dire à montrer que l'ensemble

$$c = \{(a,b) \in X \times X / \tilde{T}_a = \tilde{T}_b\} \text{ est fermé dans } X \times X.$$

Considérons $(a_o,b_o) \in \bar{C}$, par continuité de Π on a $\Pi_1(a_o) = \Pi_1(b_o)$



$\tilde{U}_{a_o}$ et $\tilde{U}_{b_o}$ sont des voisinages respectifs de a_o et de b_o invariant par les translations $\tau(y,x)$ et homéomorphes par Π à des voisinages élémentaires de la forme $\omega_o \times (I + i\mathbb{R})$ où ω_o et I sont compacts dans respectivement $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}$. On suppose ω_o est connexe (cf. la proposition 3).

Il existe $(\alpha,\beta) \in \tilde{U}_{a_o} \times \tilde{U}_{b_o}$ tel que $\tilde{T}_\alpha = \tilde{T}_\beta$, aussi α et β sont dans un tube à base K compacte et connexe.

Par continuité de la fonction distance d, il existe deux constantes positives ε_1 et ε_2 telles que :

$$K \cup \tilde{U}_{a_o} \cup \tilde{U}_{b_o} \subset \{x \in X,\ d(x) > \varepsilon_1 > \varepsilon_2\}.$$

Soit χ une fonction de $\mathcal{D}_+(\mathbb{R})$ normalisée par :

$\int_{\mathbb{C}^{n+1}} \chi(|z|^2) d\lambda(z) = 1$ où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Pour $\eta > 0$, posons :

$$\chi_\eta(z) = \chi\left(\frac{|z|^2}{\eta^2}\right) \times \frac{1}{\eta^{2(n+1)}} \quad \text{et pour } x \text{ tel que } d(x) > \varepsilon_2 :$$

$$\psi_\eta(x) = \int - \operatorname{Log} d\left[\Pi_x^{-1}(\Pi(x)+z)\right] \chi_\eta(z)\, d\lambda(z)$$

$\Pi(x) + z \in B(\Pi(x), d(x))$ si $|z| < \varepsilon_2$ et donc

$\Pi_x^{-1}(\Pi(x)+z)$ est bien définie sur $\{x \in X / d(x) > \varepsilon_2\}$.

Comme X est de Stein, on sait que la fonction $-\operatorname{Log} d$ est plurisousharmonique sur X [9]. Les régularisées ψ_η de $-\operatorname{Log} d$ forment une suite décroissante de fonctions C^∞ et plurisousharmoniques qui convergent vers $-\operatorname{Log} d$.

D'après le théorème de Dini, la convergence a lieu uniformément sur tout compact de

$$\{x \in X / d(x) > \varepsilon_2\} \ ;$$

d est invariante par $\tau(y,\cdot)$ $\forall\, y \in \mathbb{R}$ d'après la proposition 5, il en est donc de même pour les fonctions ψ_η.

Puisque $K \cup \tilde{U}_{a_o} \cup \tilde{U}_{b_o}$ est invariant par τ et est à base compacte par construction, il existe η_o tel que $\psi_{\eta_o} < -\operatorname{Log} \varepsilon_2$ sur $K \cup \tilde{U}_{a_o} \cup \tilde{U}_{b_o}$. On posera $\psi = \psi_{\eta_o}$ et

$$\Psi = \frac{1}{-\operatorname{Log} \varepsilon_2 - \psi} + \left[\operatorname{Re} \Pi_2\right]^2 .$$

Sur l'ensemble $\{x/\psi(x) < -\operatorname{Log} \varepsilon_2\}$ Ψ est C^∞ et sa restriction à $\tilde{T}_x$ est strictement sousharmonique à cause de la présence du terme $\left[\operatorname{Re} \Pi_2(x)\right]^2$. Ψ est enfin invariante par les translations $\tau(y,\cdot)$ pour tout y réel.

Posons $E_x = \tilde{T}_x \cap \{\psi < -\operatorname{Log} \varepsilon_2\}$ et $\operatorname{Re} z = \Pi^{-1}(\Pi_1(z), \operatorname{Re} \Pi_2(z))$ pour $z \in E_x$; comme $z \in T_x$ on a aussi $\operatorname{Re} z = \Pi_z^{-1}\left[\Pi_1(x), \operatorname{Re} \Pi_2(z)\right]$.

On a maintenant besoin du lemme suivant :

Lemme.-

Ψ est d'exhaustion sur $\operatorname{Re} E_x$.

On admet provisoirement ce lemme. Notons par Γ_t^1 la composante connexe de :

$$\tilde{T}_{\Pi_{a_o}^{-1}(t, \operatorname{Re} \Pi_2(a_o))} \cap \{x/\psi(x) < -\operatorname{Log} \varepsilon_2\}$$

contenant le point $\Pi_{a_o}^{-1}(t, \mathrm{Re}\ \Pi_2(a_o))$ pour $t \in \omega_o$ et par Γ_t^2 la composante connexe obtenue en remplaçant a_o par b_o.

Γ_t^1 et Γ_t^2 sont homéomorphes par Π_2 à un tube de $\mathbb{C}$; Ψ étant strictement sousharmonique sur $\tilde{T}_x$, et invariante par τ, $\Psi \circ \Pi_2^{-1}$ est strictement convexe sur $\mathrm{Re}\ \Pi_2\ \Gamma_t^1$ et $\mathrm{Re}\ \Pi_2\ \Gamma_t^2$. Comme Ψ est d'exhaustion sur chacun de ces intervalles, d'après le lemme ci-dessus, Ψ atteint son minimum sur chacun d'eux en deux points $m_1(t)$ unique sur $\mathrm{Re}\ \Pi_2\ \Gamma_t^1$ et $m_2(t)$ unique sur $\mathrm{Re}\ \Pi_2\ \Gamma_t^2$. Montrons que $\Pi_2^{-1} m_1(t)$ et $\Pi_2^{-1} m_2(t)$ sont continues sur ω_o. En effet, si $\frac{\partial}{\partial \xi}(\Psi \circ \Pi^{-1})$ est la dérivée de $\Psi \circ \Pi^{-1}$ par rapport à la partie réelle de la deuxième coordonnée, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Psi \circ \Pi^{-1})(\Pi_1(t), \Pi_2 \tilde{m}) = \frac{\partial}{\partial \xi}\ \Psi \circ \Pi_2^{-1}(\tilde{m}) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\Psi \circ \Pi^{-1})(\Pi_1(t), \Pi_2(\tilde{m})) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\ \Psi \circ \Pi_2^{-1}(\tilde{m}) > 0$$

à cause de la stricte plurisousharmonicité.

Si $\tilde{m}$ est le minimum sur $\mathrm{Re}\ \Gamma_t^1$. Le théorème des fonctions implicites assure que $\tilde{m} = \Gamma_2^{-1}(m_1(t))$ où $m_1(t)$ est une fonction continue sur Γ_t^1, connexe.

On montre de la même façon que $m_2(t)$ est continue sur Γ_t^2. Soit :

$$\omega_1 = \{t \in \omega_o,\ \Gamma_t^1 = \Gamma_t^2\} \quad \text{et supposons que} \quad \tilde{T}_{a_o} \neq \tilde{T}_{b_o}.$$

ω_1 est ouvert d'après la proposition 5 et contient $m_1(\alpha)$; comme $\Pi_1(a_o)$ n'appartient pas à ω_1 et que ω_o est connexe, il existe t_o dans ω_o, qui appartient à la frontière de ω_1.

On a :

$\Gamma^1_{t_o} \cap \Gamma^2_{t_o} = \{\emptyset\}$ et donc les points $m_1(t_o)$ et $m_2(t_o)$ sont différents.

D'autre part, il existe une suite (t_n) de points de ω_1 qui converge vers t_o ; on a :

$$m_1(t_n) = n_2(t_n).$$

Par continuité des fonctions m_1 et m_2, on déduit :

$m_1(t_o) = m_2(t_o)$, ce qui contredit $\tilde{T}_{a_o} \neq \tilde{T}_{b_o}$.

On a donc $(a_o, b_o) \in C$.

Il reste à montrer le lemme précédemment admis à savoir que Ψ est d'exhaustion sur $\mathrm{Re}\, E_n$, c'est-à-dire que

$V_M = \{y \in \mathrm{Re}\, E_x / \Psi(y) < M\}$ est relativement compact dans $\mathrm{Re}\, E_x$ pour toute constante M.

Soit (y_n) une suite d'éléments de V_M. On a $\Pi_1(y_n) = \Pi_1(x)$ pour tout n car $y_n \in \tilde{T}_x$.

Puisque $\Psi(y_n) < M$, on a aussi $[\Pi_2(y_n)]^2 < M$ et donc $\Pi_2(y_n)$ converge dans $\mathbb{R}$ vers y_o.

Pour n assez grand $(\Pi_1(x),y_o) \in B(\Pi(y_n),\varepsilon_1)$; comme $\varepsilon_1 < d(y_n)$ il existe un voisinage de y_n dans X qu'on note par $B(y_n,\varepsilon)$ homéomorphe par Π à $B[\Pi(y_n),\varepsilon_1]$.

Soit $\tilde{y}_o$ l'unique élément de $B(y_n,\varepsilon_1)$ tel que $\Pi(y_o) = (\Pi_1(x),y_o)$ et montrons que $\tilde{y}_o \in \tilde{T}_x$. Si ω_{y_n} désigne un voisinage élémentaire de $\Pi_2(y_n)$ dans $\mathbb{C}$, on a $y_o \in \omega_{y_n}$ pour n assez grand. Posons :

$$\tilde{U}_{y_n} = \bigcup_{y\in R} \bigcup_{x\in B(y_n,\varepsilon_1)} \tau(y,x) \quad \text{et} \quad T_{y_n} = \tilde{U}_{y_n} \cap \Pi^{-1}[\{\Pi_1(y_n)\} \times (\omega_{y_n} + i\mathbb{R})]$$

on sait d'après la proposition 6 que T_{y_n} est homéomorphe par Π à $\{\Pi_1(y_n)\} \times T'_{y_n}$ où T'_{y_n} est un tube de C et on a $\tilde{y}_o \in T_{y_n}$. Par maximalité de $\tilde{T}_x$, $T_{y_n} \subset \tilde{T}_x$, soit $\tilde{y}_o \in \tilde{T}_x$.

D'autre part de l'inégalité $d(y_n) > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$, on déduit par continuité de d, que $d(\tilde{y}_o) > \varepsilon_1$. Ainsi les fonctions ψ et Ψ sont bien définies en $\tilde{y}_o$.

De $\Psi(y_n) < M$, il vient $\psi(y_n) < -\operatorname{Log} \varepsilon_2 - \frac{1}{M}$ et $\Psi(\tilde{y}_o) < -\operatorname{Log} \varepsilon_2$ car Ψ est continue en $\tilde{y}_o$.

Ainsi $\tilde{y}_o \in \operatorname{Re} E_x$ et E_M est relativement compact dans $\operatorname{Re} E_x$.

Théorème 3.-

Si (X,Π) est une variété connexe tubulaire étalée, alors son enveloppe d'holomorphie est aussi une variété tubulaire étalée.

Démonstration :

Notons $(\tilde{X},\tilde{\Pi})$ l'enveloppe d'holomorphie de (X,Π) ; nous utiliserons le résultat suivant [5] dont nous rappelerons la démonstration, une partie d'entre elle se trouvant difficilement dans la littérature.

Proposition 9.-

Pour tout φ de $\mathcal{O}(X,X)$, il existe une unique fonction $\tilde{\varphi}$ dans $\mathcal{O}(\tilde{X},\tilde{X})$ telle que (1) $\tilde{\varphi} \circ u = u \circ \varphi$ où u est le morphisme d'extension de X dans $\tilde{X}$. De plus, l'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Le théorème 3 est une conséquence facile de cette proposition. En effet, soit $y \hookrightarrow \tau_y$ l'application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{O}_c(X,X)$ qui définit la propriété tubulaire, l'application $y \hookrightarrow \tilde{\tau}_y$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{O}_c(\tilde{X},\tilde{X})$ d'après la proposition ci-dessus. De plus, $\tilde{\Pi} \circ \tilde{\tau}_y$ et $(\tilde{\Pi}_1,\tilde{\Pi}_2 + iy)$ coïncident sur $u(X)$ d'après (1) et donc sur tout $\tilde{X}$.

Ainsi $y \hookrightarrow \tilde{\tau}_y$ fait de $\tilde{X}$ une variété tubulaire.

Démontrons maintenant la proposition :

Les ensembles de la forme $\{g \in \mathcal{O}(X,X)/g(K) \subset U\}$ constituent une base d'ouverts de $\mathcal{O}(X,X)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, lorsque K et U décrivent respectivement les compacts et les ouverts de X. L'indice c dans $\mathcal{O}_c$ désignera cette topologie.

L'application $f \in \mathcal{O}_c(X) \hookrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{O}_c(\tilde{X})$ est continue par le

graphe fermé, où $\tilde{f}$ est le prolongement de f à $\tilde{X}$.

L'application $f \in \mathcal{O}_c(X) \longrightarrow f \circ \widetilde{\psi} \in \mathcal{O}_c(\tilde{X})$ est continue comme composée d'applications continues et donc l'application :

$f \hookrightarrow \widetilde{f \circ \psi}(\tilde{x})$ est un caractère de $\mathcal{O}_c(X)$ pour $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

D'après [5], il existe $\tilde{\psi}(\tilde{x}) \in \tilde{X}$ tel que :

(1) $\widetilde{f \circ \psi}(\tilde{x}) = \tilde{f}[\tilde{\psi}(\tilde{x})]$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$;

On obtient ainsi la construction de $\tilde{\psi}$, de plus pour tout compact $\tilde{K}$ de $\tilde{X}$, il existe un compact K de X tel que :

$$\left|\left|\widetilde{f \circ \psi}\right|\right|_{\tilde{K}} = \left|\left|\tilde{f} \circ \tilde{\psi}\right|\right|_{\tilde{K}} \leq M||f||_K.$$

En remplaçant f par f^n, puis en élevant à la puissance $\frac{1}{n}$, pour tout entier n, on obtient $M = 1$, ainsi :

$|\tilde{f}(\tilde{\psi}(\tilde{x}))| \leq ||f||_K$ pour $\tilde{x} \in \tilde{K}$ et donc

$\tilde{\psi}(\tilde{x})$ est dans l'enveloppe holomorphiquement convexe $\widehat{u(K)}$ de u(K) dans $\tilde{X}$; ce qui montre que $\tilde{\psi}(\tilde{K})$ reste dans un compact de $\tilde{X}$.

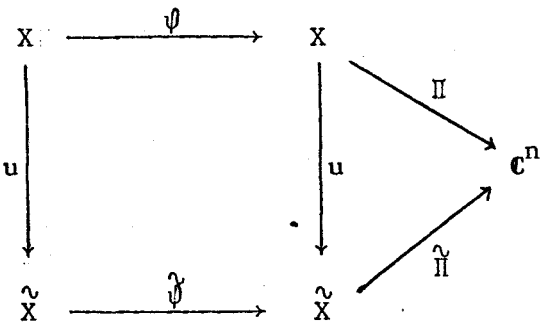
Montrons que $\tilde{\psi}$ est continue :

Soit $(\tilde{x}_n)$ une suite d'éléments de $\tilde{X}$ qui converge vers $\tilde{a}$. La suite $\{\tilde{\psi}(\tilde{x}_n)\}$ est donc relativement compacte dans $\tilde{X}$ et il existe une sous-suite extraite convergente vers $\tilde{b} \in \tilde{X}$.

Soit $(\psi(x_m))_n$ une telle sous-suite.

D'après l'égalité (1) $f \circ \psi(\tilde{a}) = \tilde{f}(\tilde{b})$ pour tout f dans

$\mathcal{O}_c(X)$; on déduit que : $\tilde{\psi}(\tilde{a}) = \tilde{b}$; ce qui montre que $\tilde{\psi}$ est continue.



Il reste à voir que l'applicatio $\psi \hookrightarrow \tilde{\psi}$ est continue de $\mathcal{O}_c(X,X)$ dans $\mathcal{O}_c(\tilde{X},\tilde{X})$.

Soit $V = \{\psi \in \mathcal{O}_c(X,X) / \tilde{\psi}(K) \subset \tilde{U}\}$ où $\tilde{K}$ est un compact de $\tilde{X}$, $\tilde{U}$ un ouvert de $\tilde{X}$.

Si $\psi_o \in V$, il suffit de montrer que V est un voisinage de ψ_o ou, pour toute suite ψ_n d'éléments de $\mathcal{O}_c(X,X)$ convergente vers ψ_o, on a $\psi_n \in V$ pour n assez grand, la topologie de $\mathcal{O}_c(X,X)$ étant à base dénombrable.

Raisonnons par l'absurde, il existe donc une suite $(\tilde{x}_n)$ d'éléments de $\tilde{K}$ telle que $\tilde{\psi}_n(\tilde{x}_n) \notin \tilde{U}$, pour tout entier n.

Comme $\tilde{\psi}_n(\tilde{x}_n) \in \tilde{\psi}_n(\tilde{K})$, on a vu qu'il existe un compact K de X tel que $\tilde{\psi}_n(\tilde{x}_n) \in \widehat{U(K)}$.

Ainsi, il existe un compact Q de X tel que $\tilde{\psi}_n(\tilde{K}) \subset Q$ pour tout entier n, on peut donc extraire une sous-suite $\{\tilde{\psi}_p(\tilde{x}_p)\}$ de $\{\psi_n(\tilde{x}_n)\}$ convergente vers $b \in Q$, et une sous-suite $\{\tilde{x}_m\}$ de $\{\tilde{x}_n\}$ convergente vers $a \in \tilde{K}$ car $\tilde{x}_n \in \tilde{K}$, $\forall n$; on peut donc extraire une sous-suite de $\{\tilde{\psi}_p(\tilde{x}_p)\}$ qu'on notera encore par $\{\tilde{\psi}_p(x_p)\}$

pour ne pas alourdir les notations, telle que : $\tilde{x}_p$ converge vers a et $\tilde{\psi}_p(\tilde{x}_p)$ converge vers $b \in Q$.

D'après l'égalité (1), $\widetilde{f \circ \psi_o}(a) = f(b) \quad \forall f \in \mathcal{O}(X)$; ainsi $b = \tilde{\psi}_o(a)$, donc $b \in \tilde{\psi}_o(K) \subset \tilde{U}$; mais $\tilde{\psi}_n(\tilde{x}_n) \notin \tilde{U}$, $\forall n$, et donc $b \notin \tilde{U}$ car $\tilde{U}$ est ouvert. D'où la contradiction. Ce qui montre que l'application $\psi \longrightarrow \tilde{\psi}$ est continue.

Théorème 4.-

Soit $Y = (X, r_-, r_+)$ une variété tubulaire étalée de Hartogs. Y est de Stein si et seulement si :

a) X est de Stein.

b) les fonctions r_- et $-r_+$ sont plurisousharmoniques.

Démonstration :

1°) Supposons les conditions a) et b) vérifiées ; il suffit d'après un résultat dû à Grauert-Docquier [8] de montrer que Y est localement de Stein.

Pour $x_o \in X$ et $\rho < d(x_o)$, posons $\omega = B(x_o,\rho) \times \mathbb{C}$ et

$$\phi(x,t) = \max\left[r_-(x) - \operatorname{Re} t, \operatorname{Re} t - r_+(x)\right] \quad \text{pour} \quad (x,t) \in \omega.$$

ϕ est plurisousharmonique sur ω.

On a :

$$\omega \cap Y = \{(x,t) \in B(x_o,\rho) \times \mathbb{C} / \phi(x,t) < 0\}.$$

$\omega \cap Y$ est homéomorphe par $\Pi \times id_{\mathbb{C}}$ à

$$V = \{(z,t) \in B(\Pi(x_o),\rho) \times \mathbb{C}, \tilde{\phi}(z,t) < 0\}$$

où $\tilde{\phi}(z,t) = \phi(\Pi_{x_o}^{-1}(z),t)$. Comme ϕ est plurisousharmonique sur $B(\Pi(x_o),\rho) \times \mathbb{C}$, V est un domaine pseudo-convexe de $B(\Pi(x_o),\rho) \times \mathbb{C}$, ce qui entraîne que $\omega \cap Y$ est de Stein.

2°) Supposons que Y est de Stein. Soit $x_o \in X$ et $t_o \in \mathbb{C}$ tel que $(x_o,t_o) \in Y$.

Posons $r'_+(x) = r_+(x) - \operatorname{Re} t_o$ et $r'_-(x) = r_-(x) - t_o$ on a $r'_+(x_o) > 0$ et $r'_-(x_o) < 0$.

Comme les fonctions $-r'_+$ et r'_- sont semi-continues supérieurement, il existe un voisinage $U(x_o)$ de x_o dans X tel que : $r'_+(x) > 0$ et $r'_-(x) < 0$ pour tout $x \in U(x_o)$. Posons $Y' = (X,r'_-,r'_+)$.

X' est de Stein comme image de Y par la translation $(x,t) \hookrightarrow (x,t-t_o)$. Les homothéties $(x,t) \hookrightarrow (x,n.t)$ transforment pour tout n Y' en Y'_n qui est de Stein ; on a $Y'_n = (X,nr'_-,nr'_+)$. Soit d'_n la fonction distance sur Y'_n définie par :

$$d'_n(n,t) = \operatorname{Sup}\{\rho > 0,\ B(x,\rho) \times]\operatorname{Re} t-\rho, \operatorname{Re} t+\rho[\subset Y'_n\} .$$

Si (x,t) est dans Y'_n avec x dans $U(x_o)$, on a pour $\rho < d'_n(x,t)$:

$$(n+1)r'_-(x) < nr'_-(x) < \operatorname{Re}t-\rho < \operatorname{Re}t+\rho < nr'_+(x) < (n+1)r'_-(x) .$$

On en déduit que la suite de fonctions $\{d'_n(x,t)\}_n$ est croissante pour $x \in U(x_o)$ et majorée par $d(x)$, d étant la fonction distance sur X.

Comme $\lim_{n\to+\infty} nr_-(x) = \lim_{n\to+\infty} (-nr_+(x)) = -\infty$, on a $d'(x,t) = d(x)$ pour n assez grand et x dans $U(x_o)$ et $\lim_{n\to+\infty} -\text{Log } d'_n(x,t) = -\text{Log } d(x)$.

Ainsi la fonction $-\text{Log } d(x)$ est plurisousharmonique comme limite décroissante d'une suite de fonctions plurisousharmoniques, X est donc de Stein.

Montrons, à présent que les fonctions r_- et $-r_+$ sont plurisousharmoniques. Notons par $\tilde{Y}$ l'image de Y par la transformation

$$(x,t) \hookrightarrow (x,e^t),\ \tilde{Y} = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{C} / \exp r_-(x) < |\lambda| < \exp r_+(x)\}\ .$$

Pour que r_- et $-r_+$ soient plurisousharmoniques, il suffit de montrer que Y est de Stein d'après [10].

Comme X est de Stein, il existe une fonction ψ continue et plurisousharmonique sur X, qui est d'exhaustion. Posons

$$\phi(x,t) = \max\{-\text{Log } d(x,t), \psi(x), [\text{Re } t]^2\}.$$

ϕ est plurisousharmonique et d'exhaustion sur Y. En effet : soit (x_n,t_n) une suite d'éléments de $V_c = \{(x,t) \in Y | \phi(x,t) < C\}$. Comme ψ est d'exhaustion sur X, il existe une sous-suite $\{x_m\}$ extraite de $\{x_n\}$ convergente vers $x_o \in X$. Puisque $[\text{Re } t_n]^2 < c$ il existe une autre sous-suite $\{\text{Re } t_p\}_p$ qu'on note encore par $\{\text{Re } t_m\}_m$ extraite de $\{\text{Re } t_n\}_n$ convergente vers $t_o \in \mathbb{R}$.

$\phi(x_o,y_o) \in Y$ car $e^{-c} < d(x_n, \text{Re } t_n)$ pour tout n. Comme (x,t) ne dépend pas de la partie imaginaire de t, la fonction définie par $\tilde{\phi}(x,\lambda) = \phi(x,\text{Log } \lambda)$ est bien définie sur $\tilde{Y}$, car elle ne dépend pas de la détermination du logarithme.

$\tilde{\phi}$ est plurisousharmonique sur $\tilde{X}$ comme composée d'une fonction plurisousharmonique avec une fonction localement holomorphe. Il suffit de montrer que $\tilde{\phi}$ est d'exhaustion sur $\tilde{Y}$. Soit

$$\tilde{V}_c = \{(x,\lambda) \in \tilde{X} / \phi(x,\lambda) < C\}$$

et (x_n,λ_n) une suite d'éléments de $\tilde{V}_c$; $(x_n,\text{Log } \lambda_n)$ est une suite de Y, pour une détermination quelconque du logarithme $\{(x_n,\text{Log } \lambda_n)\}$ est une suite de V_c car $\phi(x_n,\text{Log } \lambda_n) < C$; comme ϕ est d'exhaustion sur Y, il existe une sous-suite extraite $(x_m,\text{Log } \lambda_m)$ qui converge vers $(x_o,\theta_o) \in \bar{V}_c$. Ainsi (x_m,λ_m) converge vers $(x_o,e^{\theta_o}) \in \tilde{Y}$, ce qui montre que $\tilde{\phi}$ est d'exhaustion sur $\tilde{Y}$, qui est donc de Stein.

Corollaire 1.-

a) L'enveloppe d'holomorphie d'une variété tubulaire Y, étalée sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, est à un isomorphisme près de variété étalée, une variété tubulaire de Hartogs, qu'on note par

$$\tilde{Y} = (\tilde{X}, \tilde{r}_-, \tilde{r}_+) \quad \text{où}$$

1°) $\tilde{X}$ est une variété étalée de Stein ;

2°) Les fonctions $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ sont plurisousharmoniques sur $\tilde{X}$;

b) En particulier si $Y = (X,r_-,r_+)$ est une variété tubulaire de Hartogs, alors

- $\tilde{X}$ est l'enveloppe d'holomorphie de X ,
- Si X est de Stein, les fonctions $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ sont respectivement les plus grandes minorantes plurisousharmoniques de r_- et de $-r_+$. L'enveloppe d'holomorphie de Y est, par conséquent, univalente au-dessus de Y.

Démonstration :

a) D'après les théorèmes 3 et 2, $\tilde{Y}$ est une variété tubulaire étalée de Hartogs, ainsi on peut écrire $\tilde{Y} = (\tilde{X}, \tilde{r}_-, \tilde{r}_+)$. Les affirmations 1°) et 2°) découlent du théorème 4.

b) si p et $\tilde{p}$ désignent les étalements de X et $\tilde{X}$ sur $\mathbb{C}^n$, si $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ désigne le morphisme d'extension de Y vers $\tilde{Y}$, on a $\tilde{p} \circ \tilde{u}_1(x,t) = p(x)$ et $\tilde{u}_2(x,t) = t$. Il en résulte que $\tilde{u}_1$ ne dépend pas de la variable t et que $\tilde{u}$ se met sous la forme $\tilde{u}(x,t) = (u(x),t)$ où u est un morphisme de variété étalée de X vers $\tilde{X}$. Puisque $\tilde{X}$ est de Stein, il reste à vérifier que u est un morphisme de prolongement pour $\mathcal{O}(X)$ pour conclure que $\tilde{X}$ est l'enveloppe d'holomorphie de X.

Etant donné f dans $\mathcal{O}(Y)$, on peut le considérer comme élément de $\mathcal{O}(X)$; si $\tilde{f}$ désigne son prolongement à $\tilde{X}$, on a $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} = \widetilde{\frac{\partial f}{\partial t}} = 0$; ainsi $\tilde{f}$ peut être considéré comme un élément de $\mathcal{O}(\tilde{X})$ qui vérifie $\tilde{f} \circ u = f$.

Il est clair que $\tilde{r}_- \circ u$ et $-\tilde{r}_+ \circ u$ minorent r_- et $-r_+$ respectivement. Désignons par r_-^* et $-r_+^*$ les plus grandes minorantes plurisousharmoniques de r_- et $-r_+$; si Y est de Stein, le morphisme u est l'identité, on a donc

$$Y \subset Y^* = (X, r_-^*, r_+^*) \subset \tilde{Y} \quad ;$$

Y^* est une variété de Stein d'après le théorème 4 et $\tilde{Y}$ est l'enveloppe d'holomorphie de Y, il en résulte que $\tilde{Y} = Y^*$.

Remarque :

Si Y n'est pas de Stein, les restrictions à Y de $\tilde{r}_-$ et de $\tilde{r}_+$ ne sont pas en général les plus grandes minorantes plurisousharmoniques de r_- et de $-r_+$ comme le montre l'exemple suivant :

Posons $\Delta_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1-x_2| < \varepsilon\}$ et

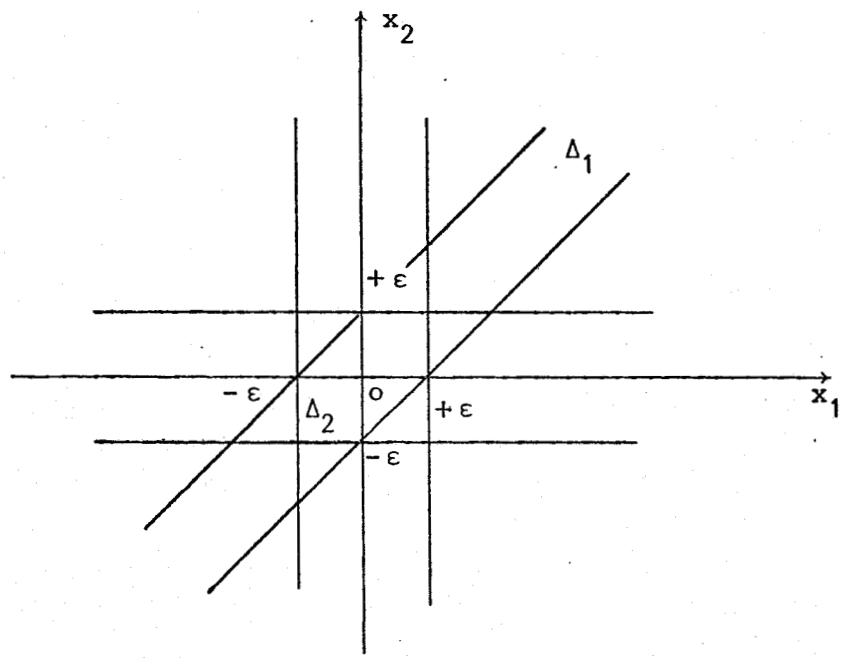
$$\Delta_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / |x_1| < \varepsilon \text{ ou } |x_2| < \varepsilon\} .$$

On considère dans $\mathbb{C}^3$ le domaine invariant par les translations le long de $i\mathbb{R}^3$ dont la projection sur $\mathbb{R}^3$ est définie par :

$$(x_1,x_2) \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ et } x_3 < 1 \text{ si } (x_1,x_2) \in \Delta_2 \ ;$$

$$x_3 < \mathrm{Inf}\left[1,2 - |x_1+x_2|\right] \text{ si } (x_1,x_2) \in \Delta_1 .$$

Pour ε assez petit $\mathrm{Inf}\left[1,2 - |x_1+x_2|\right]$ et 1 coïncident sur $\Delta_1 \cap \Delta_2$.



Par rapport aux notations précédentes du corollaire 1, $y = (z_1, z_2)$ avec $x_1 = \mathrm{Re}\, z_1$, $x_2 = \mathrm{Re}\, z_2$, $t = z_3$ avec $\mathrm{Re}\, z_3 = x_3$. $Y = (\Delta_1 \cup \Delta_2) \oplus i\mathbb{R}^2$. On a donc $r_+(y) = 1$ si $(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Re}\, z_2) \in \Delta_2$ et $r_+(y) = \mathrm{Inf}\left[1, 2 - |x_1 + x_2|\right]$ si $(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Re}\, z_2) \in \Delta_2$, $r_-(y) = -\infty$.

D'après le théorème de Bochner [1], l'enveloppe d'holomorphie de X est l'enveloppe convexe de X et, par conséquent, $\tilde{r}_+ \equiv 1$. Ainsi $\tilde{r}_+$ est strictement supérieure à r_+ ; pourtant $-r_+$ est plurisousharmonique comme fonction convexe de y indépendante de la partie imaginaire de y.

Corollaire 2.-

Soit $f \in \mathcal{O}(Y)$ où $Y = (X, r_-, r_+)$ est une variété tubulaire de Hartogs. Pour chaque x de X, considérons la bande maximale $\{\theta_-(x) < \mathrm{Re}\, t < \theta_+(x)\}$ à laquelle $f(x,.)$ se prolonge. Désignons par θ_+^* et θ_-^* les régularisés semi-continues inférieurement et semi-continues supérieurement de θ_+ et θ_-. Alors :

a) $(X, \theta_-^*, \theta_+^*)$ est à X fixée la variété tubulaire maximale de Hartogs à laquelle f se prolonge analytiquement.

b) $-\theta_+^*$ et θ_-^* sont plurisousharmoniques sur X.

Démonstration :

a) Montrons que f se prolonge analytiquement à $(X, \theta_-^*, \theta_+^*)$. Soit K un compact de $(X, \theta_-^*, \theta_+^*)$; on peut recouvrir K par un nombre fini de domaines de la forme

$K_\rho = \{(x,t)\ \ a < \mathrm{Re}\, t < A,\ x \in B(x_o, \rho)\}$ avec

$$a = \max_{x\in B(x_o,\rho)} \theta_-^*(x), \qquad A = \operatorname{Inf}_{x\in B(x_o,\rho)} \theta_+^*(x) \quad .$$

On choisit ρ assez petit pour que

$$b = \max_{x\in B(x_o,\rho)} \tau_-(x) < \operatorname{Inf}_{x\in B(y,\rho)} \tau_+(x) = B \quad .$$

Ce qui est possible car les fonctions r_- et $-r_+$ sont semi-continues supérieurement.

On a $a \leqslant b < B \leqslant A$.

f est holomorphe dans la bande $\{(x,t),\ b < \mathrm{Re}\, t < B,\ x \in B(x_o,\rho)\}$. Pour tout y fixé dans $B(y_o,\rho)$, $f(y,.)$ se prolonge analytiquement à la bande $a < \mathrm{Re}\, t < A$. D'après un théorème de Hartogs, f se prolonge analytiquement à K_ρ est donc au vosinage de K, pour tout compact K de $(X,\theta_-^*,\theta_+^*)$.

Il en résulte que $(X,\theta_-^*,\theta_+^*)$ est la variété maximale tubulaire de Hartogs à laquelle se prolonge f analytiquement pour X fixé.

b) Considérons l'enveloppe d'holomorphie de $(X,\theta_-^*,\theta_+^*)$, d'après le corollaire 2, elle est de la forme $(\tilde{X},\rho_-,\rho_+)$ où ρ_- et $-\rho_+$ sont des fonctions plurisousharmoniques et $\tilde{X}$ est l'enveloppe d'holomorphie de X. Si u désigne le morphisme de X dans son enveloppe d'holomorphie X, on a :

$\rho \circ u \leqslant \theta_-^* < \theta_+^* \leqslant \rho_+ \circ u$. Il en résulte alors de la maximalité de $(X,\theta_-^*,\theta_+^*)$ que :

$\theta_-^* = \rho_- \circ u$ et $\theta_+^* = \rho_+ \circ u$, ce qui établit la plurisous-harmonicité des fonctions θ_-^* et $-\theta_+^*$.

On donne maintenant une autre démonstration de la plurisous-harmonicité des fonctions θ_-^* et θ_+^* intervenant dans le corollaire 2, qui a l'intérêt d'être constructive ; toutefois, on est amené à faire l'hypothèse supplémentaire suivant : $\forall x \in X$, il existe un voisinage V de x et deux réels a et b tels que :

$$\theta_+^* - a > a - \theta_-^* > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \theta_+^* - b < b - \theta_-^* \quad \text{sur } V.$$

Cette condition est vérifiée lorsque θ_+^* et θ_-^* sont continues. Bochner dans [1] a traité le cas des demi-plans ($\theta_+^* \equiv +\infty$ (resp. $\theta^* \equiv -\infty$)). On remarquera que l'hypothèse faite ici suppose θ_-^* à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Lemme [1].-

Désignons, pour $r > s$, par $E(r)$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{(r - \frac{1}{r})^2} < \frac{1}{4} .$$

Notons $R_n(z) = t^n + t^{-n}$ où t est l'une des racines de l'équation $z = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$; R_n est un polynôme. Alors

a) $|R_n(z)| \leqslant 2r^n \quad \forall z \in E(r)$;

b) Toute fonction holomorphe sur $E(r)$ se développe en série absolument et uniformément convergente sur tout compact de $E(r)$ sous la forme :

(1) $\quad f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n R_n(z)$ où

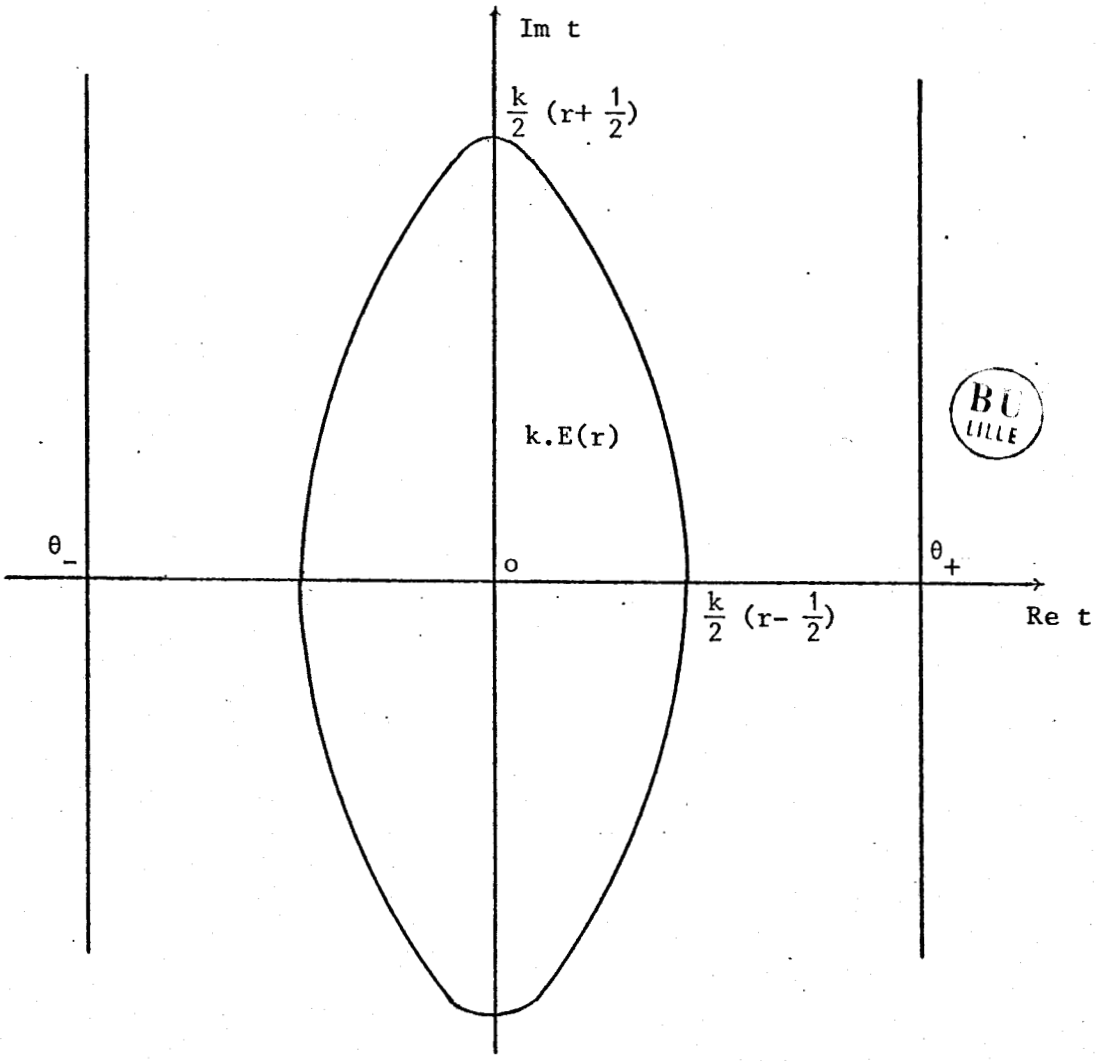
(2) $\quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E(\rho)} f(\tau) \frac{\tau}{\tau^2-1} \cdot \frac{1}{2\tau^n} d\,, \qquad 1 < \rho < r.$

Il en résulte que si l'on suppose $R = \frac{1}{\lim\limits_{n} \sqrt[n]{|a_n|}} > 1,$

R est le supremum des r pour lesquels f se prolonge analytiquement aux ellipses E(r).

On étudie la plurisousharmonicité de θ_-^* sur V ; après la translation $t \rightsquigarrow t - a$, on peut supposer :

$$\theta_-^*(x) < 0 < \theta_-^*(x) \quad \text{et} \quad |\theta_-^*(x)| < \theta_+^*(x) \quad \text{sur} \quad V.$$



BU LILLE

Quelque soit $k > 0$, f est holomorphe sur $V \times k \times E(r)$, pour r assez voisin de 1 ; on peut donc poser : $r_k(x)$ le supremum des r tel que $f(x,.)$ se prolonge analytiquement à $k.E(r)$. D'après (1) et (2), on a :

$$(3) \quad - \operatorname{Log} r_k(x) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \operatorname{Log} |a_n^k(x)|$$

$$(4) \quad a_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E(\rho)} f(x, \frac{i}{2k} r \cdot \frac{\tau}{\tau^2-1} \cdot \frac{1}{2\tau^n} d\tau.$$

La fonction $f(x,(.))$ se prolonge analytiquement à la réunion des ellipses $k.E(r_k(x))$. Il en résulte que :

$$(5) \quad \theta_-(x) \leq \lim_{k \to +\infty} \left[- \frac{k}{2} (r_k(x) - \frac{1}{r_{k(x)}}) \right] .$$

D'autre part, quel que soit l'entier $k > 0$, il existe $r > 1$ tel que $- \frac{k}{2} (r - \frac{1}{r}) = \theta_-^*(x)$; l'ellipse $k.E(r)$ est alors contenue dans la bande $\{\operatorname{Re} t \in [\theta_-^*(x), \theta_+^*(x)]\}$ et, par conséquent $f(x,.)$ est holomorphe sur $k.E(r)$; il en résulte que :

$$r_k(x) \geq r \quad \text{et} \quad - \frac{k}{2} (r_k(x) - \frac{1}{r_{k(x)}}) \leq \theta_-^*(x).$$

On a donc :

$$(6) \quad \overline{\lim_{k \to +\infty}} - \frac{k}{2} \left[r_k(x) - \frac{1}{r_{k(x)}} \right] \leq \theta_-^*(x).$$

La conjonction de (5) et (6) fait que

$$\theta_-(x) \quad \lim_{k \to +\infty} - \frac{k}{2} \left[r_k(x) - \frac{1}{r_{k(x)}} \right] \leq \overline{\lim_{k \to +\infty}} - \frac{k}{2} \left[r_k(x) - \frac{1}{r_{k(x)}} \right]$$

$$\leq \theta_-^*(x)$$

et donc

$$\theta_-^*(x) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \left[-\frac{k}{2} \left(r_k(x) - \frac{1}{r_{k(x)}} \right) \right]^*$$

et $\theta_-^*(x) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{2} (e^{u_k} - e^{-u_k}) = \overline{\lim_{k\to\infty}} k.u_k$ car $\theta_-^*(x)$ étant fini, la plus grande valeur d'adhérence de la suite $\frac{k}{2} (e^{u_k} - e^{-u_k})$ ne peut être obtenue que par une sous-suite u_k tendant vers 0. Il en résulte donc la plurisousharmonicité de θ_-^* d'après le résultat de P. Lelong. Une démonstration analogue conduit à la propriété voulue pour $-\theta_+^*$.

Nous donnons maintenant une autre démonstration du théorème 3 qui a l'avantage de s'appliquer aux enveloppes d'holomorphies d'une famille quelconque de fonctions holomorphes.

Théorème 5.-

Soit S une famille de fonctions holomorphes sur une variété tubulaire X telle que S soit invariante par la translation τ, alors la S-enveloppe d'holomorphie $\tilde{X}$ de X est une variété de Stein qui est de plus tubulaire.

Démonstration :

$\tilde{X}$ est la composante connexe de $j(X)$ dans $\bigcup_{z\in\mathbb{C}^n\times C} E_z$ défini au chapitre 0 et $j(x) = \{f_x\}_{f\in S}$ pour tout $x \in X$. p et $\tilde{p}$ sont les applications d'étalement de X et $\tilde{X}$ respectivement.

Si $z = (a,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, on note par $z+iy$ le point $(a,t+iy)$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Pour y fixé par $\tilde{\tau}_y$ l'application de $\tilde{X}$ dans $\bigcup_{z\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}} E_z$ définie par

$$\tilde{\tau}_y(\tilde{x}) = \left\{a(f)_{\tilde{p}(\tilde{x})+iy}\right\}_{f\in S} \overset{\text{déf}}{=\!=} (f\circ\tau_y)_{\tilde{x}} \quad f\in S .$$

Soit $\tilde{X}_\varepsilon = \{\tilde{x}\in X / \tilde{d}(\tilde{x}) > \varepsilon\}$ où $\tilde{d}$ est la distance sur $\tilde{X}$.

Pour $|y| < \varepsilon$, les applications $\tilde{\tau}_y$ et $\tilde{x} \to \left\{(f)_{\tilde{p}_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{p}(\tilde{x})+iy)}\right\}_{f\in S}$ sont analytiques sur $\tilde{X}_\varepsilon$ et coïncident sur $j(X)$. Elles coïncident donc sur la composante connexe $\tilde{Y}_\varepsilon$ de $j(x_o)$ dans $\tilde{X}_\varepsilon$ où $x_o \in X$. Comme $\tilde{X} = \bigcup_{\varepsilon>0} \tilde{X}_\varepsilon$, ces applications coïncident partout. On a :

$$(1) \qquad \tilde{\tau}_y(\tilde{x}) = \left\{(\tilde{f})_{\tilde{p}_x^{-1}(\tilde{p}(\tilde{x})+iy)}\right\}_{f\in S} \quad \text{pour } |y| < \tilde{d}(\tilde{x}) .$$

Il en résulte la continuité de $\tilde{\tau}$ sur un voisinage de $\{0\}\times\tilde{X}$. On a, d'autre part : $\tilde{\tau}_y \circ j = j \circ \tau_y$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$, ce qui entraîne :

$$(2) \qquad \tilde{\tau}_y \circ \tilde{\tau}_{y'} = \tilde{\tau}_{y+y'} \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}_{y=0} = \text{identité}.$$

Par construction, on a :

$$(3) \qquad \tilde{p} \circ \tilde{\tau}_y = \tilde{p} + iy.$$

Des résultats (1), (2) et (3), on déduit la continuité de $\tilde{\tau}$ sur $\mathbb{R}\times\tilde{X}$.

Ainsi $\tilde{X}$ est une variété tubulaire pour la translation $\tilde{\tau}$.

CHAPITRE II

DOMAINE DE TYPE H^∞.

****

(X,p) désigne une variété étalée et $H^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions holomorphes, bornées sur X. On appellera variété de type H^∞ une variété étalée X sur $\mathbb{C}^n$ de type $H^\infty(X)$ au sens de la définition du chapitre 0. D'après la proposition 1, cette notion est invariante par les isomorphismes de variété étalée et la $H^\infty(X)$ enveloppe d'holomorphie est de type H^∞ ; si X est de type H^∞, X est l'enveloppe d'holomorphie d'une fonction f de $H^\infty(X)$ d'après la proposition 3, les domaines de type H^∞ sont étudiés par N. Sibony [12] et D. Catlin [3]. Nous nous proposons de caractériser les variétés tubulaires de type H^∞. Au préalable, nous rappelons les propriétés générales mises en évidence par N. Sibony.

Théorème.-

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\overset{\circ}{\bar{\Omega}} = \bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega}$ admette un système fondamental de voisinages pseudoconvexes, Ω est alors de type H^∞.

Démonstration :

Soient $x \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, on a $B(x,d(x)+\varepsilon) \cap (\bar{\Omega})^c \neq \{\emptyset\}$ car $\bar{\Omega} = \mathring{\bar{\Omega}}$. Pour $a \in B(x,d(x)+\varepsilon) \cap (\bar{\Omega})^c$, il existe un ouvert ω d'holomorphie contenant $\bar{\Omega}$ et disjoint de a. D'après un théorème de I. Cnop, il existe n fonctions $u_a^1,\ldots,u_a^n$ holomorphes sur ω qui vérifient :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)u_a^i(z) = 1 \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Comme $\bar{\Omega}$ est un compact de ω, $u_a^i \in H^\infty(\bar{\Omega})$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Parmi les fonctions $u_a^1, u_a^2,\ldots,u_a^n$ il en existe au moins une, notée u_a^i, a un développement taylorien de rayon de convergence $\rho(u_a^i)(x)$ au point x qui vérifie $\rho(u_a^i)(x) < d(x) + \varepsilon$, sinon la relation serait vraie pour $z = a$, ce qui est impossible.

Soient (x_n) une suite de points de Ω telle que $d(x_n) \to 0$, (ε_n) une suite de réels strictement positifs et (a_n) une suite d'éléments de $(\bar{\Omega})^c$ telle que $a_n \in B(x_n,d(x_n) + \varepsilon_n) \cap (\bar{\Omega})^c$. D'après le raisonnement précédent il existe une suite (u_n) de fonctions de $H^\infty(\Omega)$ qui vérifient $\rho(u_n)(x_n) < d(x_n) + \varepsilon_n$. Ainsi la condition b) de la proposition 3 du chapitre 0 est vérifiée, la condition a) de cette même proposition l'étant trivialement, Ω est de type H^∞.

Il en résulte que dans $\mathbb{C}$, tout ouvert borné qui est l'intérieur de son adhérence est de type H^∞. Cette propriété n'est plus vraie en dimension supérieure ; toutefois, dans $\mathbb{C}^n$, si la frontière d'un ouvert pseudoconvexe est de classe C^∞, Ω est de type H^∞ d'après un résultat de D. Catlin [3]. Cette hypothèse sur la régularité de la frontière est essentielle, comme le montre l'exemple suivant [12].

Soient D le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$ et (a_p) une suite discrète d'éléments de D telle que tout point du cercle unité soit limite non tangentielle d'une sous-suite extraite. Pour $z \in D$, posons :

$\psi(z) = \sum_p \lambda_p \operatorname{Log} \left|\frac{z-a_p}{2}\right|$ où les λ_p forment une suite sommable de nombres réels positifs ; ψ est une fonction sousharmonique dans D comme limite décroissante de la suite de fonctions $\psi_N(z) = \sum_{p=0} \lambda_p \operatorname{Log} \left|\frac{z-a_p}{2}\right|$, sous-harmoniques dans D ; ψ est négative ou nulle et vaut $-\infty$ sur la suite (a_p). Comme (a_p) est discrète, il existe $c \geq 0$ qui dépend de $z \in D$ telle que $|\psi(z)| = -\psi(z) \leq c.\sum_p \lambda_p < +\infty$; ainsi ψ n'est pas identiquement égale à $-\infty$. Posons $v(z) = \exp \psi(z)$, on a $0 \leq V \leq 1$ et V est une fonction sousharmonique et continue dans D car la série est uniformément convergente dans $\bar{\mathbb{R}}_-$, sur tout compact de D. Soit $\Omega = \{(z,w) \in D \times \mathbb{C} / |w| < \exp - V(z)\}$.

Proposition.-

Ω est un domaine d'holomorphie strictement inclus dans D^2, égal à l'intérieur de son adhérence et non de type H^∞.

Démonstration :

Ω est inclus dans D^2 car $0 \leq V \leq 1$; comme ψ n'est pas identiquement égale à $-\infty$, cette inclusion est stricte. La continuité de la fonction V entraîne $\Omega = \overset{\circ}{\bar{\Omega}}$.

Ω est l'ensemble des points (z,w) de D^2 qui vérifient $|w| \exp V(z) < 1$ ou encore $\exp(V(z) + \operatorname{Log} |w|) < 1$; la fonction $V(z) + \operatorname{Log} |w|$ est plurisousharmonique dans D^2, il en est donc de même pour la fonction $\exp(V(z) + \operatorname{Log} |w|)$; Ω est ainsi pseudo-convexe donc d'holo-

morphie. Montrons que toute fonction de $H^\infty(\Omega)$ se prolonge à D^2. Soit $g \in H^\infty(\Omega)$, on peut supposer que $||g||_\infty \leq 1$; g admet un développement en série de la forme :

(1) $$g(z,w) = \sum_{n\geq 0} h_m(z)w^m \qquad \text{avec}$$

(2) $$h_m(z) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(z,r(\exp -V(z))e^{i\theta})d\theta}{r^m \exp(-m\,V(z))\exp im\theta} \quad , \quad \text{pour} \quad r < 1.$$

$|h_m(z)| \leq r^{-m}\exp(mV(z))$; comme r est arbitrairement proche de 1, on a, pour tout $z \in D$:

$|h_m(z)| \leq \exp(mV(z))$, donc $h_m \in H^\infty(D)$ pour tout entier m. La limite non tangentielle $h_m^*(e^{i\theta}) = \lim_{a_p \to e^{i\theta}} h_m(a_p)$ existe presque partout d'après le théorème de Fatou sur les valeurs au bord des fonctions holomorphes bornées. On a donc

(3) $$|h_m^*(e^{i\theta})| \leq 1 \quad \text{presque partout.}$$

D'autre part :

(4) $$h_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_m^*(e^{i\theta})P(z,e^{i\theta})d\theta \quad , \quad \forall\, z \in D \quad \text{où} \quad P(z,w) \quad \text{est le noyau}$$

de Poisson attaché au disque unité. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au 2ème membre de (4) considéré comme intégrale du produit $h_m^*(e^{i\theta}).1$ pour la mesure positive de masse unité : $\frac{1}{2\pi}P(z,e^{i\theta})d\theta$, on obtient :

$$|h_m(z)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_m^*(e^{i\theta})|^2 P(z,e^{i\theta}) d\theta \leq 1 \quad \text{d'après (3).}$$

Cette inégalité entraîne que la série (1) converge uniformément sur tout compact de D^2 ; g se prolonge donc à D^2 et Ω n'est pas de type H^∞.

En général, l'image réciproque par une application holomorphe, d'un ouvert de type H^∞ dans un ouvert de type H^∞ n'est pas de type H^∞.

Exemple [12].

Soit Ψ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\Psi(z,u) = (z,u.z)$; posons $\Delta = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 / |w| < |z| < 1\}$.

Montrons que Δ est de type H^∞. Soit (z_o,w_o) un point frontière de Δ avec $z_o \neq 0$ et (z_n,w_n) une suite de Δ qui converge vers (z_o,w_o). Le point $(z_o, \frac{w_o}{z_o})$ appartient à la frontière de D^2. Comme D^2 est de type H^∞ selon le théorème 1 par exemple, il existe une suite (f_n) de $H^\infty(D^2)$ telle que $\rho(f_n)(z_n, \frac{w_n}{z_n}) \to 0$. Posons $g_n = f_n \circ \phi$ où ϕ est l'application holomorphe définie sur Δ à valeurs dans D^2 par $\phi(z,w) = (z, \frac{w}{z})$. La suite (g_n) est dans $H^\infty(\Delta)$; il suffit de montrer que $\rho(g_n)(z_n,w_n)$ tend vers zéro ; dans le cas contraire, g_n serait holomorphe au voisinage de (z_o,w_o) et $f_n = g_n \circ \Psi$ aurait un prolongement analytique au voisinage de $(z_o,\frac{w_o}{z_o})$. Ainsi g_n est singulière sur une partie dense de la frontière de Δ, il en résulte que Δ est de type H^∞.

D'autre part, $\Psi^{-1}(\Delta) = \{(z,u) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ 0 < |z| < 1, \ |u| < 1\}$

n'est pas de type H^∞ car toute fonction holomorphe sur $\Psi^{-1}(\Delta)$ bornée au voisinage d' l'hyperplan $\{z = 0\}$ se prolonge à D^2.

Théorème [12].-

Soient X et Y deux variétés étalées, X étant de type H^∞. Soit φ une application holomorphe de X dans Y ; l'image réciproque par φ d'un ouvert U de type H^∞ dans Y est de type H^∞ lorsque φ est de rang maximum en tout point d'un ensemble dense de la frontière de $\varphi^{-1}(U)$.

Démonstration :

Posons $V = \varphi^{-1}(U)$. Il suffit, d'après la proposition 2 de montrer que pour toute suite (x_n) de V convergente vers $x_o \in \partial V$, il existe une suite (f_n) dans $H^\infty(V)$ telle que $\rho(f_n)(x_n) \to 0$. Par densité, on peut supposer que φ est de rang maximum en x_o et il existe $\tilde{\varphi}$ holomorphe au voisinage de $\varphi(x_o)$ tel que $\varphi \circ \tilde{\varphi} = id_Y$. Ainsi $\varphi(x_o)$ appartient à la frontière de U, comme U est de type H^∞, il existe une suite (g_n) dans $H^\infty(U)$ telle que $\rho(g_n)(\varphi(x_n)) \to 0$. La fonction $f_n = g_n \circ \varphi$ est dans $H^\infty(V)$ pour tout n. Supposons que $\rho(f_n)(x_n)$ ne tende pas vers zéro, ainsi il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \rho(f_n)(x_n)$ et $x_o \in B(x_n, \varepsilon)$ pour n assez grand. Donc on aurait aussi $\varepsilon < \rho(f_n)(x_o)$ et f_n admettrait un prolongement $\tilde{f}_n$ au voisinage de x_o tel que $\tilde{f}_n \circ \tilde{\varphi} = g_n$, d'où

$$\lim_n \rho(g_n)(\varphi(x_n)) = \lim_n \rho(\tilde{f}_n \circ \tilde{\varphi})(\varphi(x_n)) > 0, \quad \text{ce qui est impossible.}$$

Une classe de fonctions plurisousharmoniques.

Soit V une fonction plurisousharmonique sur une variété X analytique complexe et connexe ; suivant Sibony [12], nous noterons par V_1 la fonction plurisousharmonique définie sur X par :

$$V_1(z) = (\sup_{i\in I} C_i \operatorname{Log}|f_i|)^*(z)$$

est le sup est pris sur les couples (c_i,f_i) avec $c_i > 0$, f_i holomorphe sur X et $c_i \operatorname{Log}|f_i| \leq V$; l'étoile désigne la régularisée semi-continue supérieurement. On a $V_1 \leq V$; on désigne par $P(X)$ le cône des fonctions plurisousharmoniques qui vérifient $V_1 = V$.

Donnons un exemple de fonction plurisousharmonique dans D qui n'est pas dans $P(D)$, où D est le disque unité de $\mathbb{C}$.

Soit (a_p) une suite discrète de D telle que tout point du cercle unité soit limite non tangentielle d'une sous-suite extraite ; posons $\psi(z) = \sum_p \lambda_p \operatorname{Log}\left|\frac{z-a_p}{2}\right|$ où (λ_p) est une suite sommable de nombres positifs et $V = \exp \psi$; V est plurisousharmonique dans D et s'annule seulement sur la suite (a_p). Les fonctions f_i définissant V_1 sont bornées sur D, et leurs valeurs au bord de D, par limite non tangentielle, ont, d'après le théorème de Fatou, un module inférieur à 1. Il en résulte $V_1 \equiv 0$ et, par conséquent, $V_1 \neq V$.

Proposition [12].-

Soit Ω un domaine d'holomorphie borné de $\mathbb{C}^n$ tel que $\bar{\Omega}$ admette une base de voisinages d'holomorphie, soit V une fonction plurisousharmoni-

que continue au voisinage de $\bar{\Omega}$, alors il existe une suite (c_k) dans $\mathbb{R}_+$ et une suite (f_k) dans $H^\infty(\bar{\Omega})$ tel que :

$$V = \sup_k (c_k \operatorname{Log}|f_k|). \quad \text{En particulier } V \in P(\Omega).$$

Proposition 10.-

Soit (λ_n) une suite dans $]0,1[$ et V une fonction de $P(X)$, il existe une suite (p_n,f_n) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{O}(X)$ telle que

$$V = (\overline{\lim_n} \frac{1}{p_n} \operatorname{Log}|f_n|)^* = (\sup \frac{1}{p_n} \operatorname{Log}|f_n|)^* \quad \text{et} \quad \sum_n \lambda_n^{p_n} < +\infty .$$

Démonstration :

D'après un lemme de G. Choquet [2], il existe une suite (c_n,f_n) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{O}(X)$ telle que :

$$V = (\sup_n c_n \operatorname{Log}|f_n|)^* .$$

Etant donnée une suite (u_n) dans $\mathbb{R}$, on a $\sup u_n = \overline{\lim}(u_o,u_1,u_o,u_1,u_2,u_o,\ldots)$. On peut donc supposer :

$$V = \overline{\lim}\, c_n \operatorname{Log}|f_n|)^* = (\sup c_n \operatorname{Log}|f_n|)^* .$$

En remplaçant (c_n,f_n) par $(\frac{c_n}{N_n}, f_n^{N_n})$ avec N_n assez grand pour que $\sum_n \lambda_n^{p_n} < +\infty$ où $p_n = \frac{N_n}{c_n}$, on obtient le résultat.

Caractérisation des variétés tubulaires de type H^∞.

Théorème 6.-

Soit $Y = (X, r_-, r_+)$ une variété tubulaire de Hartogs ; si X est de type H^∞ alors il suffit que r_- et $-r_+$ soient dans $P(X)$ pour que Y soit de type H^∞.

Démonstration :

Soit $\tilde{Y}$ la H^∞-enveloppe d'holomorphie de Y. On a déjà remarqué que $\tilde{Y}$ est de Stein et de type H^∞ (chapitre 0) ; d'après le théorème 5 $\tilde{Y}$ est tubulaire ; de plus $\tilde{Y}$ est une variété de Hartogs de la forme $(\tilde{X}, \tilde{r}_-, \tilde{r}_+)$ d'après les théorèmes 1 et 2. Le même raisonnement que celui utilisé au corollaire 1 page 30 montre que $\tilde{X}$ est une $H^\infty(X)$-extension de X. Puisque X est de type H^∞, $X = \tilde{X}$ à un isomorphisme près et $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ minorent respectivement r_- et $-r_+$. Le raisonnement qui suit utilise une idée de N. Sibony [12]. Soit (λ_n) une suite de $]0,1[$ convergente vers 1 ; d'après la proposition 10, il existe des suites (p_n, f_n) et (q_n, g_n) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{O}(X)$ telles que :

$$-r_+ = (\overline{\lim} \frac{1}{p_n} \operatorname{Log}|f_n|)^* = (\sup \frac{1}{p_n} \operatorname{Log}|f_n|)^* \quad \text{et} \quad \sum \lambda_n^{p_n} < +\infty$$

$$r_- = (\overline{\lim} \frac{1}{q_n} \operatorname{Log}|g_n|)^* = (\sup \frac{1}{q_n} \operatorname{Log}|g_n|)^* \quad \text{et} \quad \sum \lambda^{q_n} < +\infty .$$

Considérons les séries

$$h_1(x,t) = \sum \lambda_n^{q_n} g_n(x) e^{-q_n \cdot t}$$

$$h_2(x,t) = \sum \lambda_n^{p_n} f_n(x) e^{p_n \cdot t} .$$

Pour x fixé soit $t \in \mathbb{C}/\theta_-(x) < \mathrm{Re}\, t < \theta_+(x)\}$ la bande maximale dans laquelle les fonctions $h_1(x,.)$ et $h_2(x,.)$ restent holomorphes.

D'après la formule de Cauchy-Hadamard, on a :

$$-\theta_+ = \overline{\lim}(\mathrm{Log}\ \lambda_n + \frac{\mathrm{Log}|f_n|}{p_n}) = \overline{\lim}\ \frac{\mathrm{Log}|f_n|}{p_n} \leq -r_+$$

$$\theta_- = \overline{\lim}(\mathrm{Log}\ \lambda_n + \frac{\mathrm{Log}|g_n|}{p_n}) \leq r_-$$

De plus, $|g_n| \leq e^{q_n \cdot r_-}$ et $|f_n| \leq e^{-p_n r_+}$; aussi

$|h_1(x,t)| \leq \sum \lambda_n^{q_n} < +\infty$ et $|h_2(x,t)| \leq \sum \lambda_n^{p_n} < +\infty$ sur Y. Les fonctions h_1 et h_2 sont donc dans $H^\infty(Y)$; d'après le corollaire 2 du théorème 4 $(X, \theta_-^*, -(-\theta_+)^*)$ est à X fixé le domaine de Hartogs maximal auquel les fonctions h_1 et h_2 de $H^\infty(X)$ se prolongent ; comme $(-\theta_+)^* = -r_+$ et $\theta_-^* = r_-$, les fonctions r_- et $-r_+$ majorent r_- et $-r_+$ et on a $\tilde{Y} = Y$ ce qui termine la démonstration.

Le résultat suivant établit une réciproque du théorème précédent.

Théorème 7.-

Soit $Y = (X, r_-, r_+)$ une variété tubulaire de Hartogs telle que r_- et r_+ soient bornées sur X. Alors :

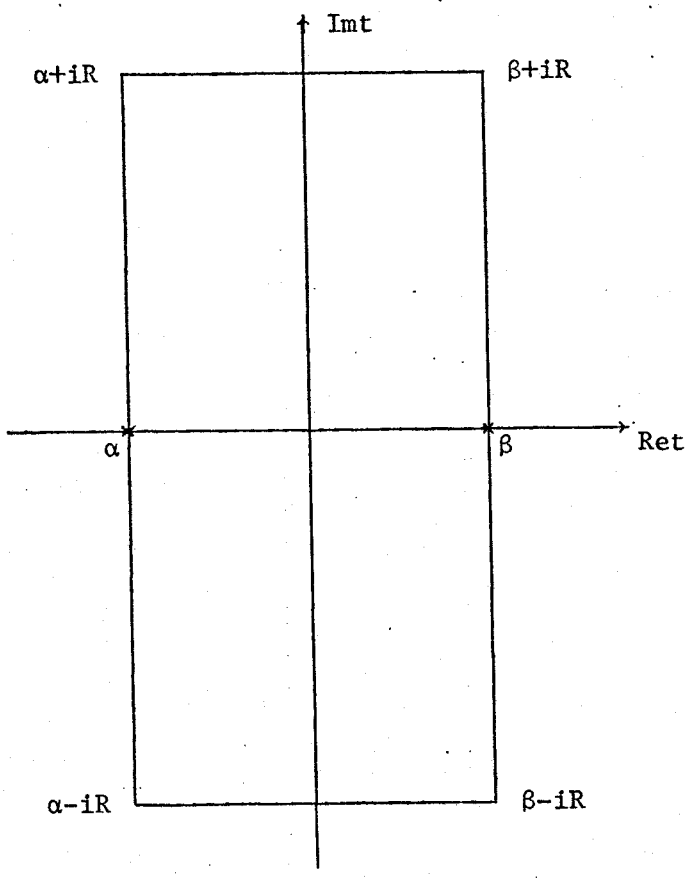
Toute fonction de $H^\infty(Y)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $Y_1 = (X, (r_-)_1, -(-r_+)_1)$. En particulier si Y est de type H^∞, les fonctions r_- et $-r_+$ sont dans $P(X)$.

Démonstration :

Soit $f \in H^\infty(Y)$, on peut supposer que $||f||_\infty \leq 1$. Posons $g(x,t) = f(x,t)e^{t^2}$ et, pour $\alpha \in]r_-(x), r_+(x)[$

(1) $$G(x,u) = \int_{Ret=\alpha} e^{-ut} g(x,t)dt \quad ; \quad G \text{ est holomorphe sur } X \times \mathbb{C}.$$

On a $\int_\gamma e^{-ut} g(x,t)dt = 0$ où γ est le contour du rectangle ci-contre



où $\beta \in]r_-(x), r_+(x)[$. Lorsque R tend vers l'infini la restriction de l'intégrale précédente aux côtés horizontaux du rectangle tend vers zéro ; ainsi G ne dépend pas de α.

L'intégrale (1) s'écrit aussi :

$$G(x,u) = i\, e^{-u\alpha}\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-ui\zeta} g(x,\alpha+i\zeta)d\zeta = ie^{-u\alpha}\widehat{g(x,\alpha,.)}(u)$$

$\widehat{g(x,\alpha,.)}$ étant la transformée de Fourier de $g(x,\alpha,.)$; on a donc

$$\widehat{g(x,\alpha,.)}(u) = \frac{1}{u} e^{u\alpha} G(x,u), \quad \forall\, \alpha \in]r_-(x), r_+(x)[.$$

Comme $g(x,\alpha,.)$ est dans $C^\infty \cap L^2$, on obtient à partir de la transformation de Fourier inverse :

$$(2) \qquad g(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{uz} G(x,u)du \quad \text{pour} \quad r_-(x) < \operatorname{Re} z < r_+(x).$$

Soit $a > 0$, notons $g_1^a(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-a} e^{uz} G(x,u)du,$

$$g_2^a(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} e^{uz} G(x,u)du,$$

$$\text{et} \qquad g_3^a(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{+\infty} e^{uz} G(x,u)du.$$

Il est clair que la fonction $z \rightsquigarrow g_2^a(x,z)$ est entière ; posons $V_a(x) = \sup_{u<-a} \frac{\operatorname{Log}|G(x,u)|}{-u}$. L'intégrale qui exprime $g_1^a(x,z)$ est uniformément convergente pour $V_a(x) < \operatorname{Re} z$, g_1^a est donc holomorphe si $V_a(x) < \operatorname{Re} z$.

En posant :

$W_a(x) = \sup_{u>a} \frac{\text{Log}|G(x,u)|}{u}$, on montre de la même façon que g_3 est holomorphe si $\text{Re } z < - W_a(x)$. Comme $g = g_1 + g_2 + g_3$, g est holomorphe dans le domaine

$$Y' = \{(x,z) \in X \times \mathbb{C} / V_a(x) < \text{Re } z < - W_a(x)\}.$$

L'égalité (1) s'écrit aussi

$$G(x,u) = i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(\alpha+i\zeta)} . e^{(\alpha+i\zeta)^2} f(x,\alpha+i\zeta) d\zeta$$

et $|G(x,u)| \leqslant c\, e^{-u\alpha+\alpha^2}$ où c est une constante positive. On déduit :

$\frac{\text{Log}|G(x,u)|}{-u} \leqslant r_-(x) + \frac{m}{a}$, pour tout $u < -a$, où m est une constante indépendante de x et de a.

Il en résulte que :

$$V_a^* \leqslant (r_- + \tfrac{m}{a})_1 = (r_-)_1 + \tfrac{m}{a} .$$

On démontre de la même façon

$$W_a^* \leqslant (-r_+ + \tfrac{m}{a})_1 = (-r_+)_1 + \tfrac{m}{a} .$$

Comme a peut être choisi arbitrairement grand, le résultat énoncé est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER S. and MARTIN W. - Several Complex variables, Princeton University Press, 1948.

[2] BRELOT M. et CHOQUET G. - Journal Madras Univ., 1957

[3] CATLIN D. - Boundary behavior of holomorphic functions on pseudo-convex domains, J. Differential Geometry 15 (1980), p. 605-625.

[4] COEURÉ G. - Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques, Ann. Inst. Fourier 20 (1), 1970, p. 361-432.

[5] COEURÉ G. - Analytic functions and manifolds in infinite dimensional spaces, North Holland, Studies, 11, 1974.

[6] CHAFI B. - Principe du minimum pour les fonctions plurisousharmoniques, Thèse de 3ème cycle, Université de Lille Flandres Artois, juin 1983.

[7] GUNNING-ROSSI - Analytic functions of several complex variables, Printice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J. (1965).

[8] DOCQUIER F. and GRAUERT H. - Levisches problem and Rungeschen satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeinten, Math. Ann. 238, 39-49, (1978).

[9] HORMANDER L. - An introduction to complex analysis in several variables,
Van Nostrand, Cny, 1966.

[10] LELONG P. - Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables),
Montréal, Presses de l'Université, 1968.

[11] MALGRANGE B. - Lecture on the theory of functions of several complex variables,
Bombay, Tata Institute (1958).

[12] SIBONY N. - Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées,
Séminaire P. Lelong (Analyse) 13e année, 1972-73.

[13] VLADIMIROV V.S. - Les fonctions de plusieurs variables complexes,
Dunod, 1967.

RESUME

On étudie les enveloppes d'holomorphie des variétés connexes X, étalées sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, munies d'un homomorphisme continu $y \rightsquigarrow \tau_y$, de $\mathbb{R}$ dans les automorphismes de X qui se projettent sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ en les translations d'amplitude iy le long du dernier facteur $\mathbb{C}$. De telles variétés seront dites tubulaires. Il passe par chaque x de X un tube maximal T_x qui s'identifie par projection à une bande de $\mathbb{C}$ parallèle aux imaginaires pures. On considère sur X la relation d'équivalence R : "$T_x = T_{x'}$ ". L'espace quotient n'est pas en général séparé ; lorsque la séparation a lieu on dit que X est une variété de Hartogs, on démontre que c'est le cas lorsque X est de Stein et qu'une variété de Hartogs est isomorphe à $(y, r_-, r_+) = \{(y,z) \in Y \times \mathbb{C}, r_-(y) < \mathrm{Re}\, z < r_+(y)\}$ où Y est étalée sur $\mathbb{C}^n$.

On établit que l'enveloppe d'holomorphie d'une famille de fonctions holomorphes sur une variété tubulaire X, invariante par la translation τ, est une variété de Hartogs $\tilde{X} = (\tilde{Y}, r_+, r_-)$ où $\tilde{Y}$ est de Stein, $\tilde{r}_-$ et $-\tilde{r}_+$ sont plurisousharmoniques sur $\tilde{Y}$; ce qui caractérise les variétés de Hartogs qui sont de Stein.

X est dite de type S, si le morphisme d'extension de X vers l'enveloppe d'holomorphie de S est un isomorphisme. On étudie plus particulièrement le cas où $S = H^\infty(X)$, espace des fonctions holomorphes bornées sur X: Lorsque $X = (Y, r_-, r_+)$ et Y est de type H^∞, on caractérise le type H^∞ de X par l'appartenance de r_- et $-r_+$ à une classe de fonctions plurisousharmoniques introduite par N. Sibony dans l'étude des domaines de Hartogs circulaires.

MOTS CLES : Variétés complexes ;
Enveloppes d'holomorphie.

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE SECTION DE SCIENCES LILLE