N° d'ordre : 1336

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

Le grade de Docteur de 3ème cycle
en MECANIQUE

par

Nasser KADRI

SUR LA THEORIE DE LA DIFFUSION D'ONDES ELASTIQUES DANS LES DOMAINES EXTERIEURS.

Membres du Jury : Messieurs les Professeurs R. FAURE, Président.
F. PARSY, Rapporteur.
H. JOULAK, Examinateur.

Soutenue le 25 Juin 1986

A mes parents,

A ma femme Fouzia,

A mes frères et soeurs.

REMERCIEMENTS

Monsieur le Professeur Fernand PARSY m'a confié ce passionnant sujet de recherche. Il a guidé mon travail sans discontinuer, ses conseils et ses remarques sont à la base de ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur R. FAURE qui s'est intéressé à ma thèse et qui me fait l'honneur de présider le jury.

Monsieur le Professeur JOULAK a consenti à juger mon travail et à participer au jury. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie vivement Madame Françoise PÉTIAUX pour la rapidité et la compétence avec lesquels elle a assuré la mise en page, par delà elle, je remercie tout le personnel de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de Lille I pour le soin, la rapidité et la qualité apportés à la réalisation matérielle de cette thèse.

INTRODUCTION

Ce travail a pour origine un article de M. C. H. WILCOX [18] apparu en 1975 dans lequel il formulait le problème physique du scattering des ondes acoustiques par des obstacles rigides bornés Γ immergés dans un fluide homogène infini. Il est supposé qu'une perturbation de petite amplitude du fluide existe au temps $t = 0$ (due, par exemple aux forces agissant durant $t < 0$). Le problème physique basique est de prédire l'évolution de l'onde acoustique résultante durant $t > 0$. Ce problème est résolu pour des conditions initiales arbitraires ayant une énergie finie et une classe d'obstacles avec surfaces irrégulières (non-lisses). Un des résultats principaux de son analyse est que toute onde ayant une énergie finie est asymptotiquement égale pour $t \to \infty$ à une onde sphérique divergente. En outre, il est montré que le profil de cette onde peut être calculé à partir de l'état initial. Ces résultats sont alors utilisés pour calculer la distribution asymptotique de l'énergie pour $t \to \infty$.

Sur les conseils de M. PARSY [11], nous prolongeons cet article pour des ondes élastiques. Un problème de diffraction (ou de dispersion) d'ondes par des obstacles bornés est tout d'abord un problème hyperbolique mixte. Le problème suivant : trouver $v(x,t)$ vérifiant

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \Delta^* v - v_{tt} = h(x)\, e^{-ikt} & \text{dans } B_e \,,\ t > 0 \\ v(x,0) = f(x) \,,\quad v_t(x,0) = g(x) & \text{dans } B_e \\ v(x,t) = 0 & x \in B \,,\ t > 0 \end{cases}$$

où $\Delta^* = (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\,div} - \mu\,\mathrm{rot\,rot}$ est l'opérateur de LAMÉ, h à support borné et B_e un domaine de complémentaire B_i borné, de frontière B bornée, est celui de la diffraction, par B_i, des ondes engendrées, dans B_e, par des forces harmoniques de densité $h(x)\, e^{-ikt}$ agissant à partir de l'instant $t = 0$ dans un milieu élastique au repos. Cette solution est en général unique.

Or, très souvent, on cherche directement $v(x;t)$ sous la forme :

$$v(x;t) = v(x)e^{-ikt}$$

ce qui amène à chercher $v(x)$ solution de

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \Delta^* v + k^2 v = 0 & \text{dans } B_e, \quad v = u + u_0 \text{ où} \\ & u_0 \text{ solution donnée .} \\ v_{|B} = 0 \end{cases}$$

On a ainsi remplacé le problème hyperbolique (I) par le problème aux limites élliptiques (II). Ce faisant, on perd l'unicité de la solution. Cette unicité est, depuis SOMMERFELD, rétablie en imposant une condition de radiation.

Pour chercher à les formuler dans le chapitre III, on a procédé à peu près comme suit :

D'après les récents résultats de P. LAX et R. PHILLIPS [5] on peut montrer que, localement et relativement à la norme

$$|v|^2_{EL} = \int \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \| D_j f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 \right\} dx$$

$t \longrightarrow \infty$ la solution du problème (I) "tend vers" une fonction de la forme $v e^{-ikt}$ où v est solution de (II) vérifiant certaine condition à l'infini (En fait v est solution ζ - rayonnante de $\Delta^* v - \zeta^2 v = 0$).

On voit que le problème revient à caractériser $v(x)$. Plus particulièrement son unicité nécessite l'étude du système (II) où $h=0$.

Or, dans ce cas

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \Delta^* u + k^2 u = 0 & \text{équivaut au système} \\ u = u_1 + u_2 \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} u_1 + \tau^2 u_1 = 0 \; ; & (\lambda + 2\mu)\tau^2 = \mu \omega^2 = k^2 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} u_2 - \omega^2 u_2 = 0 \end{cases}$$

On établit ensuite que $v(x)$ est la somme de deux fonctions d'ondes rayonnantes v_0 et v_1 .

Le chapitre 0 donne quelques préliminaires sur les espaces fonctionnels utilisés. Dans le chapitre I nous étudions le comportement asymptotique lorsque $t \to \infty$, des solutions d'énergie finie des équations de LAMÉ dans $\mathbb{R}^n$. Dans le chapitre II, on se propose de généraliser au problème mixte suivant :

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta^* u = 0 & t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \\ T_\nu(u) = \mu D_\nu u + (\lambda+\mu)\left[\sum_{i=1}^{n} \nu_i D_i u_i + \sum_{1 \le i \le j \le n} (\nu_i D_j u_i + \nu_j D_i u_j)\right] & \\ \quad = \mu D_\nu u + (\lambda+\mu)\left[\nu \operatorname{Div} u + \operatorname{grad}(u\cdot\nu)\right] = 0 & t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = f(x) \qquad D_0 u(x,0) = g(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (est un domaine arbitraire) la méthode qui a permis de construire les solutions d'énergie finie (dans I). Dans le chapitre III on considère des forces dépendant harmoniquement du temps.

$$\text{(V)} \qquad h(x,t) = e^{-ikt} h(x) \qquad , k \geq 0$$

et on cherche les solutions de

$$\text{(VI)} \qquad u_{tt} - \Delta^* u = h(x,t) \qquad t \in \mathbb{R} \ , x \in \Omega$$

de la forme

$$\text{(VII)} \qquad u(x,t) = e^{-ikt} v(x)$$

C'est le problème de diffraction harmonique dans des domaines extérieurs pour les équations de l'Elastodynamique. Dans le chapitre IV la théorie du scattering est développée pour la paire d'opérateurs $A^{1/2}$ et $A_0^{1/2}$ où

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} D(A_0) = L^2(\Delta^*; \mathbb{R}^n)^n = L^2(\mathbb{R}^n)^n \cap \{u \,/\, \Delta^* u \in L^2(\mathbb{R}^n)^n\} \\ A_0 u = -\Delta^* u \qquad\qquad u \in D(A_0) \end{cases}$$

et

$$\text{(IX)} \quad \begin{cases} D(A) = H^N(\Delta^*, \Omega) \qquad \text{(cf. chapitre II)} \\ A u = -\Delta^* u \qquad\qquad u \in D(A) \end{cases}$$

Les opérateurs d'ondes pour cette paire sont définis et leurs propriétés basiques sont formulées. Dans le chapitre V deux familles de fonctions propres généralisées pour A sont construites et leur état complet est trouvé. Physiquement, les fonctions propres généralisées sont des ondes acoustiques de l'état solide qui sont produites quand une onde plane est dispersée par un obstacle $\Gamma = \mathbb{R}^n - \Omega$. Leur construction est basée sur le théorème d'absorption limite III. Les expressions des valeurs propres définissent deux représentations spectrales pour A . Ceci fournit des constructions explicites des solutions dans $L_2(\Omega)$ et solutions d'E.F. de l'équation de l'élasticité qui est le point de départ pour les analyses asymptotiques des chapitres VI et VII. Dans le chapitre VI la solution dans $L_2(\Omega)$ est construite par le moyen du développement des fonctions propres du chapitre V et son comportement asymptotique pour $t \to \infty$ est calculé. Le résultat principal dans ce chapitre est le théorème qui énonce que toute solution dans $L_2(\Omega)$ est asymptotiquement égale à une onde libre dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Comme un corollaire, l'existence des opérateurs d'ondes $W_\pm$ est prouvée et une représentation explicite dérive pour eux. Les résultats exhibent les relations précises entre la théorie de scattering stationnaire des chapitres III et V. et la théorie de scattering dépendant du temps du chapitre IV. Dans le chapitre VII, les résultats obtenus dans le chapitre VI sont utilisés pour construire des fonctions d'ondes asymptotiques pour des solutions dans des sous-ensembles bornés et non bornés de Ω .

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRES, PARSY [11]

Soit un milieu élastique indéfini, anisotrope rapporté au repère orthonormé (O , e_1 , e_2 , e_3) ou Ox_1, x_2, x_3 .

Si $u(x,t) = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i$ $(i = 1, 2, 3)$ désigne le vecteur déplacement au point (de coordonnées x_1 , x_2 , x_3) et à l'instant t , on définit le tenseur (linéaire) des déformations par ses composantes : ε_{ij} :

$$(0.1) \qquad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

dans le cas tridimensionnel (ou $2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}$ dans le cas plan $\alpha , \beta = 1 , 2$). La notation "$,j$" désigne la dérivation partielle $\partial / \partial x_j$.

Le milieu est caractérisé par les relations suivantes entre le tenseur des contraintes (σ_{ij}) symétrique et le tenseur (ε_{ij}) :

$$(0.2) \qquad \sigma_{ij}(x,t) = c_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(x,t) \qquad (i,j,k,l = 1,2,3)$$

où l'on a utilisé la convention de l'indice muet.

Les coefficients d'élasticité $c_{ijkl}(x)$ sont caractéristiques du matériau et satisfont aux relations de symétrie :

$$(0.3) \qquad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$$

On dira que le milieu est homogène si les c_{ijkl} sont indépendants du point x , qu'il est homogène à l'infini si

$$\lim_{|x|\to\infty} c_{ijkl}(x) = \overset{\circ}{c}_{ijkl} \quad \text{uniformément en } \frac{x}{|x|} .$$

Si $f(x,t)$ désigne la densité volumique de forces et $\rho(x)$ la densité au point x, la loi fondamentale de la dynamique entraîne :

$$\sigma_{ki,i} + f_k = \rho\, u_{k,tt} \tag{0.4}$$

soit, par (0.2) :

$$(c_{kilj}\, u_{l,j})_{,i} + f_k = \rho\, u_{k,tt}$$

Système que l'on peut condenser sous la forme matricielle :

$$(A_{ij}(x)\, u_{,j})_{,i} + f(x,t) = \rho(x)\, u_{,tt} \tag{0.5}$$

où $A_{ij}(x)$ est une matrice 3×3 d'éléments

$$a_{kl} = c_{kilj}(x) \tag{0.6}$$

En outre, les conditions (0.3) entraînent

$$^{t}A_{ij} = (a'_{kl} = a_{lk} = c_{likj} = c_{kjli}) = A_{ji} \tag{0.7}$$

Cas particulier d'un milieu isotrope

Dans ce cas : $c_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

où $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sont les coefficients de LAMÉ.

Il est alors aisé de vérifier que :

$$A_{11} = \mathrm{Diag}(\lambda+2\mu, \mu, \mu) \quad , \quad A_{22} = \mathrm{Diag}(\mu, \lambda+2\mu, \mu),$$

$$A_{33} = \mathrm{Diag}(\mu, \mu, \lambda+2\mu)$$

$$A_{12} = {}^tA_{21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad A_{23} = {}^tA_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} \quad ,$$

$$A_{31} = {}^tA_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si λ et μ sont constants (milieu homogène) on retrouve le système classique

(0.7)' $$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Cas plan

Dans ce cas, on suppose u_3 et f_3 identiquement nuls, u_1 , u_2 , f_1 et f_2 n'étant fonction que de x_1, x_2 et t .

Si l'on fait l'hypothèse que les C_{ijkl} ne sont fonction que de x_1 et x_2 avec :

$$c_{3122} = c_{3111} = c_{3112} = c_{3211} = c_{3212} = c_{3222} = 0$$

(milieu transversalement isotrope pour la direction Ox_3 : milieu stratifié par exemple), les équations du mouvement s'écrivent (les indices grecs ne prenant que les valeurs 1, 2) :

$$(c_{\gamma\alpha\delta\beta}\, u_{\delta,\beta})_{,\alpha} + f_\gamma = \rho\, \ddot{u}_\gamma$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

où $A_{\alpha\beta} = (a_{\gamma\delta} = c_{\gamma\alpha\delta\beta})$ est une matrice 2×2 vérifiant (0.7). Les équations conservent la même forme, le cas isotrope donnant :

$$A_{11} = \mathrm{Diag}(\lambda + 2\mu, \mu) \quad , \quad A_{22} = \mathrm{Diag}(\mu, \lambda + 2\mu)$$

$$A_{12} = {}^tA_{21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{vmatrix}.$$

Hypothèse d'ellipticité

Il existe une constante α positive telle que, pour tout tenseur symétrique (ε_{ij}) :

(0.8) $$c_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, \bar{\varepsilon}_{kl} \geqslant \alpha\, \varepsilon_{ij}\, \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ ou } 1, 2)$$

En particulier si ε_{ij} est défini par (0.1) on obtient aisément :

(0.9) $$c_{kilj}\, \varepsilon_{ki}\, \bar{\varepsilon}_{lj} = c_{kilj}\, u_{k,i}\, \bar{u}_{l,j} = A_{ij}\, \bar{u}_{,j} \cdot u_{,i} \geqslant \alpha\, \varepsilon_{ij}(u) \cdot \overline{\varepsilon_{ij}(u)}$$

qui, dans le cas isotrope, donne :

$$\lambda\, |\mathrm{div}\, u|^2 + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(u) \cdot \overline{\varepsilon_{ij}(u)} \geqslant 2\mu\, \varepsilon_{ij}(u)\, \overline{\varepsilon_{ij}(u)}.$$

Une conséquence de (0.8) est le théorème suivant :

Théorème 0.1

Si (0.8) a lieu, on a

(0.10) $$c_{kilj}\, \xi_i\, \xi_j\, \eta_l\, \bar{\eta}_k > 0 \qquad (i,j,k,l = 1,2,3 \text{ ou } 1,2)$$

pour tout ξ *non nul de* $\mathbb{R}^n$ *et tout* η *non nul de* $\mathbb{C}^n$ ($n = 2$ *ou* 3). *Pour tout* ξ *non nul de* $\mathbb{R}^n$, *la matrice*

(0,10)' $$A(x;\xi) = A_{ij}\,\xi_i\,\xi_j$$ *est symétrique définie positive.*

Démonstration

Dans (0.8) on prend :

$$\varepsilon_{ij} = \xi_i\,\bar{\eta}_j + \xi_j\,\bar{\eta}_i = \varepsilon_{ji} \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_{kl} = \xi_k\,\eta_l + \xi_l\,\eta_k$$

ce qui donne, compte tenu de (0.3) :

$$c_{ijkl}\,\xi_i\,\xi_k\,\bar{\eta}_j\,\eta_l > 0 \qquad (\text{nul si } \xi = 0 \text{ et } \eta = 0)$$

Si l'on note que (0.10) s'écrit

$A(x,\xi)\eta\cdot\bar{\eta} > 0$, on voit que la matrice $A(x,\xi)$ est définie positive (et symétrique donc hermitienne).

Corollaire 0.1 : Les valeurs propres de $A(x;\xi)$ sont positives.

$A(x,\xi)$ est diagonalisable et si η est un de ses vecteurs propres, le théorème (0.1) donne le résultat.

Les valeurs propres seront notés : $c_j^2(x;\xi)$ $(c_j > 0)$ avec $c_1^2 \geqslant c_2^2 \geqslant c_3^2$ (ou $c_1^2 \geqslant c_2^2$ dans le cas plan) et le vecteur unitaire propre correspondant $e_j(x,\xi)$: on sait qu'il en existe toujours trois formant une base orthonormale.

<u>Remarque 0.1</u> : Si l'on pose $\xi = \rho w$, $|w| = 1$, on a :

$$A(x;\xi) = \rho^2 A(x;w)$$

d'où l'on déduit aisément que : $c_j^2(x;\xi) = \rho^2 c_j(x;w)$, $e_j(x;w)$ étant un vecteur propre de $A(x;\xi)$ et $A(x;w)$.

<u>*Cas d'un milieu isotrope*</u> :

$c_1^2(x;w) = \lambda + 2\mu$; $c_2^2 = c_3^2 = \mu$ (c_1^2 , c_2^2 dans le cas plan)
$e_1(x;w) = w$ $[e_2(x;w) = e_3 \wedge w$ dans le cas plan] .

On introduit ici l'espace dans lequel seront prises les données initiales du problème suivant :

$$(0.11) \quad \begin{cases} u_{tt} - (A_{ij}u_{,j})_{,i} = f(x,t) \\ u(x,o) = g_1(x) \quad ; \quad u_t(x;o) = g_2(x) \end{cases}$$

<u>*Définition 0.1*</u> - *ESPACE DE BEPPO-LEVI*

On appelle espace de Beppo-Levi associé aux équations de l'élasticité, le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ *pour la norme :*

$$(0.12) \quad \|f\|_{EL}^2 = \sum_{i,j=1}^{3} |\varepsilon_{ij}(f)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad (n = 2 \text{ ou } 3)$$

On le notera $EL(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ *(ou* $BL(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ *notation de DENY-LIONS [2]).*

On va dans une suite de Lemmes établir (ou rappeler) quelques propriétés de cet espace.

<u>*Lemme 0.1*</u> : *Si* $f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ *on a* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ *et*

$$(0.13) \quad \int_{|x|\leq r} |f(x)|^2 dr \leq r^2 \|f\|_{EL}^2$$

La démonstration se trouve dans la thèse de M. PARSY [11]. Muni du produit scalaire

$$(0.14) \qquad ((f,g))_{EL} = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon_{ij}(f)\,\varepsilon_{ij}(\bar{g})\,dx \qquad (n=2,3)$$

$EL(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ est un espace de Hilbert (sur $\mathbb{C}$). La démonstration se trouve en fait dans DENY-LIONS [2]. Dans le cas $n=3$, il résulte de (0.13) que si $\|f\|_{EL}=0$, f est nulle p.p. sur tout ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^3$ et même sur toute boule fermée $\{|x|\leq n\}$ $n\in\mathbb{N}$.

L'inégalité (0.13) montre que $EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ est contenu dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$: c'est donc un espace de distributions (c'est-à-dire qu'il est contenu dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)$.

Pour définir $EL(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ il est utile de partir d'une définition plus générale : comme dans DENY-LIONS [2, p. 308-309] et de retrouver $EL(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ éventuellement (dans le cas $n=3$).

Soit $\mathcal{D}'_e(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ l'espace des $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ telles que :

$$\varepsilon_{ij}(T) = \frac{1}{2}(D_iT_j + D_jT_i) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,n.$$

cet espace étant muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications : $T\longmapsto \varepsilon_{ij}(T)$ de $\mathcal{D}'_e(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cet espace n'est pas séparé car l'adhérence de 0 soit W n'est pas réduite à $\{0\}$: en effet :

$\varepsilon_{ij}(T)=0 \qquad i,j=1,\ldots,n$ entraîne (au sens des distributions)

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} = 0 \quad (i,j,k=1,2,3)$$

d'où $\mathbb{R}^n$ étant connexe : $T\in W \Rightarrow T = Sx + c$ où S est une matrice $n\times n$ constante réelle et antisymétrique et c un vecteur constant. Si $T \in \mathcal{D}'_e(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ on pose :

$$\|T\|_e^2 = (A_{ij} T,_i\, T,_j)_{L^2(\mathbb{R}^n;\, \mathbb{C}^n)} \quad \text{équivalent à} \quad \sum_{i,j=1}^{n} |\varepsilon_{ij}(T)|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

L'espace vectoriel topologique quotient $\dot{D}'_e$ de D'_e par W est un espace de HILBERT.

Si $\dot{T} \in \dot{D}'_e$ on a : $\dot{T} = \{T + Sx + c$, S antisymétrique, $c \in \mathbb{R}^n\}$.

Théorème

Soit alors $\dot{D}$ l'image de $D(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ dans $\dot{D}_e$ par l'application canonique (de D'_e sur $\dot{D}'_e$) et D_e l'adhérence de $\dot{D}$ dans $\dot{D}'_e$.

On a : $\dot{D}'_e = \dot{D}_e \oplus \dot{H}$

où $\dot{H} = \{\dot{T} \in \dot{D}'_E \;/\; T \in \dot{T} \;,\; A_{ij} T,_{ij} = 0\}$

Démonstration :

En effet $\dot{T} \in \dot{H} \iff ((T, \phi))_E = 0 \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ et $\forall T \in \dot{T}$ or $((T, \phi))_E = 0 \longrightarrow \langle A_{ij} T,_{ij}\, , \bar{\phi} \rangle = 0$ (équivalent à $A_{ij} T,_{ij} = 0$).

Comme dans [DENY-LIONS 2, p. 318] les difficultés se présentent dans l'interprétation de $\dot{D}_e$.

Si $EL(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ est un espace de distributions, il résulte de ce qui précède que :

Théorème

Toute distribution $T \in D'_e(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ admet une décomposition unique :
$T = u + h$ *où*

u *est alors l'unique élément de* $EL(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ *d'image* $\dot{u}$ *dans* *l'isomorphisme de* $EL(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ *sur* $\dot{D}_e$. *Dans ces conditions :*

$$h = T - u \in \dot{h} \qquad \text{donc} \qquad A_{ij}\, h_{,ij} = 0 .$$

et $\|T\|_e^2 = \|u\|_e^2 + \|h\|_e^2$

Preuve

En effet, on a pour $\dot{T} \in \dot{\mathcal{D}}'_e$, $\dot{T} = \dot{u} + \dot{h}$, $\dot{u} \in \dot{\mathcal{D}}_e$, $\dot{h} \in \dot{H}$. u est alors l'unique élément de $EL(\mathbb{R}^n ; \mathbb{C}^n)$ d'image $\dot{u}$ dans l'isomorphisme de $EL(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ sur $\dot{D}_e$. Dans ces conditions :

$$h = T - u \in \dot{h} \qquad \text{donc} \qquad A_{ij}\, h_{,ij} = 0 .$$

En outre $\|\dot{T}\|_e^2 = \|\dot{u}\|_e^2 + \|\dot{h}\|_e^2$ entraîne

$$\|T\|_e^2 = \|u\|_e^2 + \|h\|_e^2$$

Conclusion

L'inégalité $\|f\|^2_{EL} \geqslant \frac{1}{2} \|f\|^2_{BL}$ valable pour $n = 2, 3$ entraîne que la structure préhilbertienne définie par $(u , v)_{EL}$ est équivalente à celle définie par : $(u, v)_1 = \sum (u_{,i}, v_{,i})_{L^2}$ en particulier il résulte de l'étude de [DENY-LIONS 2, p. 320-322] que pour $n \geqslant 3$ $EL(\mathbb{R}^n ; \mathbb{C}^n)$ est un espace de distributionsalors que ceci est faux pour $n = 1$ ou 2 .

En conséquence, dans le cas $n = 2$, on prendra pour espace de données initiales [LIONS 6, p. 29-30] $E(\mathbb{R}^2 ; \mathbb{C}^2)$ complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ pour la norme

$$\|\varphi\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ |\varphi|^2 + \sum_{i,j=1}^{2} |\varepsilon_{ij}(\varphi)|^2 \right\} dx$$

0.2. DECOMPOSITION DE $EL(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ EN SOMME DIRECTE $n=2,3$

Lemme 0.2

1) si $f\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ $n=2$ ou 3 et $A_{ij}f, ij=0$ alors $f=0$

2) si $f\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ $n=2$ ou 3, $\operatorname{Div} f=0$ et $\operatorname{rot} f=0$ alors $f=0$

3) si f, $\operatorname{Rot} f\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ et si $\operatorname{Div} f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $\varepsilon_{ij}(f)\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)(i,j=1,2$ ou $3)$; en outre, si g satisfait aux mêmes hypothèses.

$$\int \varepsilon_{ij}(f)\,\varepsilon_{ij}(\bar g)\,dx = \int \operatorname{div} f \operatorname{div}\bar g\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{rot} f \operatorname{rot}\bar g\,dx$$

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \bar g}{\partial x_i}\,dx = \int \operatorname{div} f \operatorname{div}\bar g\,dx + \int \operatorname{rot} f\,\overline{\operatorname{rot} g}\,dx$$

Lemme 0.3

On a la décomposition suivante de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ en sous-espaces fermés orthogonaux :

$$L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n) = L^2_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)\oplus L^2_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)\ (n=2 \text{ ou } 3)$$

où $L^2_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n) = \{f \,/\, f\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n), \operatorname{rot} f=0\}$

= adhérence dans $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ de $\{\operatorname{grad}\phi, \phi\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$

$L^2_1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n) = \{f \,/\, f\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n), \operatorname{div} f=0\}$

= adhérence dans $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ de $\{\operatorname{rot}\psi ; \psi\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)\}$.

Ces deux lemmes se vérifient facilement à l'aide de la transformation de FOURIER et de l'identité vectorielle $|\xi|^2 \hat{f} = \xi(\xi\cdot\hat{f}) + \xi\wedge(\xi\wedge\hat{f})$.

Lemme 0.4

1) Si $f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ et $A_{ij} f_{,ij} = 0$ alors $f = 0$.

2) Si $f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, $\operatorname{div} f = 0$ et $\operatorname{rot} f = 0$ alors $f = 0$.

3) Si $f, g \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$

$(f,g)_{EL} = (\operatorname{div} f, \operatorname{div} g)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2}(\operatorname{rot} f, \operatorname{rot} g)_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)}$

4) En outre si $f \in EL(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, elle vérifie 1) et 2) ainsi que

5) En ce sens que : $\sum (\varepsilon_{ij}(f)\cdot\varepsilon_{ij}(g))_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (\operatorname{div} f, \operatorname{div} g)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$

$+ \frac{1}{2}(\operatorname{rot} f, \operatorname{rot} g)_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

Remarque

On vient de voir que $f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ entraîne $\operatorname{rot} f \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.

Compte tenu de la définition de EL on voit que :

$f \in BL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ complété de $D(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$

pour la norme $\|f\|^2_{BL} = \int \sum_{i,j=1}^{3} |f_{i,j}|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} dx$.

La réciproque étant évidente. C'est l'espace qu'ont étudié MM. DENY et LIONS [2].

Des lemmes qui précèdent on peut déduire la décomposition de $f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ en la somme d'un gradient et d'un rotationnel plus précisément on a le :

Lemme 0.5

On a la décomposition suivante :

$$EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) = EL_0(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) \oplus EL_1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$$

où $EL_0(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ = adhérence dans EL de $S_0 = \{\operatorname{grad}\varphi, \varphi \in D(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)\}$

$= \{f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) ; \operatorname{rot} f = 0\}$

et $EL_1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ = adhérence dans EL de $S_1 = \{\operatorname{rot}\psi ; \psi \in D(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)\}$

$= \{f \in EL(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) ; \operatorname{div} f = 0\}$.

Ce lemme s'étend à $EL(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$.

La démonstration des lemmes 0.4 et 0.5 se trouve dans la thèse de M. PARSY [11].

DIFFRACTION D'ONDES ELASTIQUES
PAR DES OBSTACLES BORNES

I.- EQUATIONS DE L'ELASTICITE DYNAMIQUE DANS $\mathbb{R}^n$.

Dans ce chapitre nous allons étudier le comportement asymptotique, lorsque $t \longrightarrow \infty$, des solutions d'énergie finie des équations de LAME dans $\mathbb{R}^n$.

Etant donné l'opérateur de LAMÉ :

(1.1) $$\begin{aligned} \Delta^* u &= (\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, u \\ &= \mu \Delta u + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u \\ &= \mu(D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2)u + (\lambda+\mu)\sum_{i=1}^{n} e_i D_i\Big(\sum_{k=1}^{n} D_k (e_k \cdot u)\Big) \end{aligned}$$

(où $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\Delta u = u_{j,jj}$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(x \cdot y)$ le produit scalaire usuel), on peut définir :

(1.2) $$L^2(\Delta^*; \mathbb{R}^n) = [L^2(\mathbb{R}^n)]^n \cap \{u \,;\, \Delta^* u \in [L^2(\mathbb{R}^n)]^n\}$$

On associe à Δ^* , l'opérateur A_0 défini sur $[L^2(\mathbb{R}^n)]^n$, de domaine de définition

(1.3) $$D(A_0) = L^2(\Delta^*; \mathbb{R}^n) \qquad (= L^2(\Delta; \mathbb{R}^n))$$

et tel que :

(1.4) $$A_0 u = -\Delta^* u \quad \text{pour tout } u \in D(A_0).$$

<u>*Théorème 1.1*</u> : *A_0 est un opérateur anto-adjoint non négatif de $[L^2(\mathbb{R}^n)]^n$.*

<u>*Démonstration*</u> :

Si $\hat{u}(\xi)$ désigne la transformée de FOURIER de $u(x)$ [où $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$] on a :

$$\widehat{A_o u}(\xi) = \mu |\xi|^2 \hat{u}(\xi) + (\lambda+\mu)\xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi))$$

d'où

$$(A_o u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = (\widehat{A_o u}, \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = \mu|\xi|^2(\hat{u}\cdot\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} + (\lambda+\mu)(\xi\cdot\hat{u})_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}(\xi\cdot\hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$$

$$= (\hat{u}, \widehat{A_o v})_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = (u, A_o v)_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$$

et : $(A_o u, u) = \mu|\xi|^2|\hat{u}|^2 + (\lambda+\mu)|(\xi\cdot\hat{u})|^2 \geq 0$.

Il s'en suit que A_o admet une famille spectrale $\{\Pi_o(\gamma)\}$ et la représentation spectrale :

$$(1.5) \quad A_o = \int_0^\infty \gamma \, d\Pi_o(\gamma)$$

On sait alors définir (cf. RIESZ-NAGY [14]), étant donné une fonction ψ à valeurs dans $\mathbb{C}$,

$$(1.6) \quad \psi(A_o) = \int_0^\infty \psi(\gamma) \, d\Pi_o(\gamma)$$

en particulier, on peut définir :

$$A_o^{1/2} = \int_0^\infty \gamma^{1/2} \, d\Pi_o(\gamma) \quad \text{de domaine} \quad \left\{u : \int_0^\infty \gamma \, d\|\Pi_o(\gamma)u\|^2 < \infty\right\}$$

qui vérifie le :

<u>*Corollaire 1.2*</u> : *A_o admet une seule "racine carrée" non négative $A_o^{1/2}$, de domaine :*

(1.7) $$D(A_o^{1/2}) = EL(\mathbb{R}^n)^n$$ et

(1.8) $$\| A_o^{1/2} u \|^2 = \mu \sum_{j=1}^{n} \| D_j u \|^2 + (\lambda+\mu) \| \operatorname{div} u \|^2$$

Si $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$ on a : $-\int \Delta u . \bar{v}\, dx = -\iint u_{,ii} \bar{v}\, dx = \iint u_{,i} \bar{v}_{,i}\, dx$

(1.9) $$(A_o u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^* u \cdot \bar{v}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\mu D_i u . D_i \bar{v} + (\lambda+\mu) \operatorname{Div} u . \operatorname{Div} \bar{v})\, dx$$

<u>*Définition*</u> $$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} [\lambda \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} \bar{v} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(u) . \varepsilon_{ij}(\bar{v})]\, dx$$

où $$2\, \varepsilon_{ij}(u) = D_i u_j + D_j u_i$$

On peut noter que :

$$a(u,v) \geq 2\mu \sum_{i,j=1}^{n} (\varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(\bar{v}))_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$$

et

$$a(u,v) \geq \mu \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v)_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} .$$

L'opérateur A_o est associé à la forme sesquilinéaire $a(u,v)$ défnie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$ dense dans $EL(\mathbb{R}^n)^n$ (complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$ pour $\sum_{i=1}^{n} \| D_i u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$).
En outre a est borné inférieurement sur $L_2(\mathbb{R}^n)$ $(a \geq \mu)$ et fermée; d'après le second théorème de représentation (T. KATO [4] p. 331) on a :

(1.10) $$a(u,v) = (A_o^{1/2} u, A_o^{1/2} v) \qquad u, v \in D(a) = D(A_o^{1/2}) = EL(\mathbb{R}^n)^n$$

Les équations de l'élasticité dynamique peuvent s'écrire :

(1.11) $$D_0^2 u_o + A_o u_o = 0 \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \left(D_o = \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$u_o : \mathbb{R} \ni t \longmapsto u_o(\cdot; t) \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$$ et, $$u_o(\cdot; 0) = f,\ D_o u_o(\cdot; 0) = g$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$. On peut alors écrire :

$$(1.12) \qquad u_0(\cdot\,;t) = \cos(tA_0^{1/2})f + (A_0^{-1/2}\sin(tA_0^{1/2}))g$$

où

$$\cos(tA_0^{1/2}) = \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\gamma})\,d\Pi_0(\gamma) \quad \text{et} \quad A_0^{-1/2}\sin(tA_0^{1/2}) = \int_0^\infty \frac{\sin(t\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}}\,d\Pi_0(\gamma)$$

sont des opérateurs bornés de $L_2(\mathbb{R}^n)^n$.

Une autre façon de représenter $u_0(x;t)$ s'obtient par la transformation de FOURIER F_n définie sur $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ par :

$$(1.13) \quad \begin{cases} \hat{f}(\xi) = (\phi_n f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \\ f(x) = (\phi_n^{-1} f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi \end{cases}$$

formules définies pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$. ϕ_n est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ c'est-à-dire que, en particulier :

$$(1.14) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n} \quad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n.$$

En outre ϕ_n fournit une représentation spectrale pour tous les opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants sur $[L^2(\mathbb{R}^n)]^n$ en vertu de :

$$(1.15) \quad \phi_n(D_j f)(\xi) = i\,\xi_j(\phi_n f)(\xi) \qquad (j = 1,\dots,n)$$

qui est valable si f et $D_j f$ sont dans $[L^2(\mathbb{R}^n)]^n$. Si l'on pose $\xi = \rho\,\omega$ où $\|\omega\| = 1$, ϕ_n appliquée à (1.11) donne :

(1.16) $\qquad D_0^2\,\hat{u}_0(\xi,t) + \rho^2\,\hat{A}_0(w)\,\hat{u}(\xi,t) = 0$

où $\rho^2\hat{A}_0(w)\,\hat{u} = \mu\rho^2\hat{u} + (\lambda+\mu)\xi(\xi\cdot\hat{u}) = \rho^2\left[\mu\hat{u} + (\lambda+\mu)w(w\cdot\hat{u})\right]$
définit un opérateur linéaire sur le complexifié de $\mathbb{R}^n$, symétrique (donc hermitique) défini positif, donc à valeurs propres réelles positives, de vecteurs propres associés formant une base orthonormale : $c_1^2(w) = \lambda+2\mu$, $e_1(w) = w$; $c_2^2(w) = \dots = c_n^2(w) = \mu$; $e_2, \dots, e_n$ étant orthogonaux à w .
Si l'on pose $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ (resp. $\hat{g} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2$) où $\hat{f}_1, \hat{g}_1 = \lambda w$, $\hat{g}_2\cdot w = 0 = \hat{f}_2\cdot w$ on obtient aisément $(\hat{f}_{1j} = \hat{f}_1\cdot e_j(w))$

(1.17) $$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}_1(\xi)\cos c_1 t\rho + \frac{\hat{g}_1(\xi)}{\rho c_1}\sin\rho c_1 t + \hat{f}_2(\xi)\cos c_2 t\rho + \frac{\hat{g}_2(\xi)}{\rho c_2}\sin\rho c_2 t$$

d'où

(1.18) $$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\,\hat{u}(\xi,t)\,d\xi$$

Il est clair que (1.12) et (1.18) ne définissent pas des solutions classiques en général. Toutefois si f , $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)^n$ il existe toujours une solution distribution unique, représentée par (1.12) et (1.18) si f , $g \in [L^2(\mathbb{R}^n)]^n$.

L'application $t \longmapsto u_0(t)$ étant continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$.

Si $f \in EL(\mathbb{R}^n)^n$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ alors, (1.12) entraîne que $u_0(t) \in EL(\mathbb{R}^n)^n$ et $D_0 u_0(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$; les applications : $t \longmapsto D_j u_0(t)$; $(j = 0, \dots, n)$ étant continues de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$. Dans ce cas, l'énergie de u_0 :

$$(1.19) \quad \begin{cases} E(u_0 ; \mathbb{R}^n , t) = \int_{\mathbb{R}^n} \{ \sum_{j=1}^{n} \| D_j f(x) \|^2 + \| g(x) \|^2 \} dx \\ \qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \{ \| \xi \|^2 \| \hat{f}(\xi) \|^2 + \| \hat{g}(\xi) \|^2 \} d\xi \end{cases}$$

est finie : u_0 est dite "solution d'énergie finie dans $\mathbb{R}^n$ "(solution d'E.F. dans $\mathbb{R}^n$) des équations de LAMÉ.

Si $f \in D(A_0)$ et $g \in D(A_0^{1/2}) = EL(\mathbb{R}^n)^n$, u_0 aura ses dérivées premières et secondes dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et vérifiera les équations de LAMÉ ainsi que les données initiales : u_0 est alors "solution d'énergie finie au sens strict" (solution stricte d'E.F.).

<u>*Théorème 1.3*</u> *: Soient f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. et $g \in D(A_0^{-1/2})$ on définit :*

$$(1.19) \qquad h = f + i A_0^{-1/2} g \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

Alors la solution dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ définie par (2.12) satisfait

$$(2.20) \qquad u_0(\cdot ; t) = Re(v_0(\cdot ; t))$$

où $v_0(t ; x)$ est la solution à valeurs complexes de l'équation définie par :

$$(2.21) \qquad v_0(\cdot ; t) = e^{itA_0^{1/2}}(f + i A_0^{-1/2} g) = e^{itA_0^{1/2}} h$$

Démonstration

(1.12) s'écrit encore :

$$(1.22) \qquad u_0(\cdot\,;t) = \frac{1}{2} v_0(\cdot\,;t) + \frac{1}{2} w_0(\cdot\,;t)$$

où $v_0(\cdot\,;t) = e^{itA_0^{1/2}}(f + iA_0^{-1/2} g)$ et $w_0(\cdot\,;t) = e^{-itA_0^{1/2}}(f - itA_0^{-1/2} g)$

f, g étant à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D(A_0^{-1/2})$.

On a (A_0 étant un opérateur à coéfficients réels).

$$(1.23) \qquad \overline{w_0}(\cdot\,;t) = e^{itA_0^{1/2}}(f + iA_0^{-1/2} g) = v_0(\cdot\,;t)$$

(1.23) et (1.22) donnent (1.20).

Le théorème 1.3 montre que le comportement asymptotique de $u_0(x;t)$ est déterminé par celui de $v_0(x;t)$. En outre

$$A_0 u_0 = Re(A_0 v_0) = -D_0^2 u_0 = -Re(D_0^2 v_0)$$

d'où $D_0^2 v_0 + A_0 v_0 = 0$. Or, comme $\widehat{A_0 u}(\xi)\cdot\hat{u} = |\xi|^2 [c_1^2 |\hat{u}_1|^2 + c_2^2 |\hat{u}_2|^2]$ ($c_1^2 = \lambda + 2\mu$, $c_2^2 = \mu$; $\hat{u}_1 = \hat{u}\cdot w$, $\hat{u}_2 = \hat{u}\cdot e_2$ où $e_2\cdot w = 0$ et $\hat{u} = \hat{u}_1\cdot w + \hat{u}_2\cdot e_2$), on en déduit (compte tenu de (1.10)).

$$(1.24) \qquad \widehat{A_0^{1/2} u} = \rho c_1 \hat{u}_1 + \rho c_2 \hat{u}_2 \qquad \text{où} \quad \rho = |\xi| .$$

On déduit de ce qui précède :

$$(1.25) \qquad \widehat{e^{itA_0^{1/2}} h} = e^{i\rho c_1 t}\hat{h}_1 + e^{i\rho c_2 t}\hat{h}_2$$

(définition de l'exponentielle d'un opérateur) où $\hat{h}_2\cdot w = 0$ et $\hat{h}_1 = \|\hat{h}_1\| w$.

Compte tenu de (1.25) on a donc :

$$(1.26)\quad \begin{cases} v_0(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho(x.w - c_1 t)} \hat{h}_1(\xi)\,d\xi \\ \qquad + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho(x.w - c_2 t)} \hat{h}_2(\xi)\,d\xi \\ \qquad = v_0^{(1)}(x;t) + v_0^{(2)}(x;t) \end{cases}$$

avec

$$v_0^{(j)}(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\rho(x.w - c_j t)} \hat{h}_j(\xi)\,d\xi \quad (j=1,2)$$

$$\xi = \rho w \quad , \ |w| = 1$$

et

$$(1.27)\quad \hat{h}_j(\xi) = \hat{f}_j(\xi) + i\,\frac{\hat{g}_j(\xi)}{\rho\, c_j} \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad j=1,2 .$$

Le comportement asymptotique de $v_0(x;t)$ est d'abord étudié pour $h \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)^n = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n \cap \{\hat{h}(\xi) \,;\, \hat{h}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq a$, $a = a(\hat{h}) > 0\}$ qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En fait, si l'on a :

$$(1.28)\quad \operatorname{Supp} \hat{h} \subset \{\xi : a \leq |\xi| \leq b\}$$

alors

$$(1.29)\quad v_0^{(j)}(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{a \leq |\xi| \leq b} e^{i|\xi|(x.w - c_j t)} \hat{h}_j(\xi)\,d\xi \quad (j=1,2)$$

Soit en introduisant : $\xi = \rho w$, $w \in S^{n-1}$, $d\xi = \rho^{n-1} d\rho\, dw$

(1.30) $$v_0^{(j)}(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_a^b V_j(x;\rho)\, e^{-it\rho c_j} \rho^{n-1} d\rho \quad (j=1,2)$$

où

(1.31) $$V_j(x;\rho) = \int_{S^{n-1}} e^{i\rho x\cdot w}\, \hat{h}_j(\rho w)\, dw \qquad (j=1,2)$$

On voit immédiatement que $V_j(x;\rho)$ est une solution de l'équation de HELMOLTZ.

(1.32) $$(\Delta + \rho^2) V_j(x;\rho) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Afin d'obtenir le comportement de $v_0(x;t)$ pour $t \to \infty$, on va étudier celui des $V_j(x;\rho)$ pour $|x| \to \infty$. Or, (1.31) suggère l'utilisation de la méthode de la phase stationnaire qui a été développée par W. LITTMAN [8] et M. MATSUMURA [10]. Leurs résultats (établis dans le cas d'une variété lisse de dimension $n-1$) donnent pour (1.31) le

Théorème 1.4 : Soit $h \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (1.28), on pose :

(1.33) $$\left\{ \begin{aligned} V_j(x;\rho) = {} & \left(\frac{2\pi}{i\rho|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{i\rho|x|}\, \hat{h}_j(\rho w) \\ & + \left(\frac{2\pi}{-i\rho|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-i\rho|x|}\, \hat{h}_j(-\rho w) + q_0^{(j)}(x;\rho) \quad (j=1,2) \end{aligned} \right.$$

il existe une constante $M_0 = M_0(h)$ telle que :

$$(1.34)\quad \begin{cases} |q_0^{(j)}(x;\rho)| \leqslant \dfrac{M_0}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} & \text{pour tout} \quad |x|>0, \\ a \leqslant \rho \leqslant b & \text{et} \quad w \in S^{n-1} \end{cases}$$

Remarques :

1) La majoration (1.34) est uniforme pour $\rho \in [a, b]$ et $w \in S^{n-1}$.

2) Dans (1.33) les "racines carrées", s'il y en a, sont définies par la convention suivante : si $z = \pm i|z|$, $z^{1/2} = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}|z|^{1/2}$, $|z|^{1/2} \geqslant 0$.

La substitution de (1.33) dans (1.30) donne :

$$(1.35)\quad v_0^j(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} G_1^j\left(|x|-c_jt;\frac{x}{|x|}\right)+|x|^{\frac{1-n}{2}} G_2^j\left(|x|+c_jt;\frac{x}{|x|}\right)+q_j(x;t)$$

où $G_1^j(r;w)$ et $G_2^j(r;w)$ sont définies sur $\mathbb{R}\times S^{n-1}$ par :

$$(1.36)\quad G_1^j(r;w) = (2\pi)^{-1/2}\int_a^b e^{ir\rho}\,\hat{h}_j(\rho w)(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}}\,d\rho$$

$$(1.37)\quad G_2^j(r;w) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-b}^{-a} e^{ir\rho}\,\hat{h}_j(\rho w)(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}}\,d\rho$$

et

$$(1.38)\quad q_j(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_a^b e^{-ic_jt\rho}\, q_0^{(j)}(x;\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho$$

Il est à noter que (1.38) et (1.34) entraînent

$$(1.39)\quad \| q_j(x;t)\| \leqslant \frac{M_1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{pour tout } |x|>0,\ t\in\mathbb{R} \text{ et } w\in S^{n-1}.$$

avec $M_1 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\dfrac{(b^n-a^n)M_0}{n}$

Remarque : Le premier terme du second membre (1.35) est une onde sphérique divergente. Comme l'on montrera que les autres termes tendent vers zéro dans $L_2(\mathbb{R}^n)^n$ quand $t \longrightarrow \infty$, il en résultera qu'asymptotiquement $u_0(x;t)$ est la somme de deux ondes sphériques divergentes.

Auparavant, il convient d'étendre les applications $h_j \longrightarrow G^j$, définies par (1.36), à tout $h = h_1 + h_2 \in L_2(\mathbb{R}^n)^n$.

Pour cela on remarque que, si $h_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, $G_1^j \in L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n$, car

$$(1.40) \quad \| G_1^j \|^2_{L_2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} = \int_{a \leq |\xi| \leq b} | \hat{h}_j(\xi)|^2 d\xi = \| \hat{h}_j \|^2 = \| h_j \|^2 \quad (j = 1,2)$$

Remarque

De plus, comme $L_2(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n$ admet la décomposition

$$L_2(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n = L_2^{(1)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n \oplus L_2^{(2)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n$$

où $L_2^{(1)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n = \{ k(\rho w) / k = \alpha w \}$ et $L_2^{(2)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n = \{ k / k.w = 0 \}$

(Cf. PARSY [11]), il est immédiat de vérifier que :

$$G_k^1 \in L_2^{(1)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n \quad \text{et} \quad G_k^2 \in L_2^{(2)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n \quad (k = 1,2)$$

de même que $\quad h_j \; (\hat{h}_j) \in L_2^{(j)}(\mathbb{R}^n)^n \quad (j = 1,2)$

où $\quad L_2(\mathbb{R}^n)^n = L_2^{(1)}(\mathbb{R}^n)^n \oplus L_2^{(2)}(\mathbb{R}^n)^n$

$$L_2^{(1)}(\mathbb{R}^n)^n = \{ f / f \in L_2(\mathbb{R}^n)^n \, , \; \mathrm{Rot}\, f = 0 \}$$

$$L_2^{(2)}(\mathbb{R}^n)^n = \{ f / f \in L_2(\mathbb{R}^n)^n \, , \; \mathrm{Div}\, f = 0 \}$$

(1.40) s'établit en notant que la transformée de Fourier en r de $G_1^j(r,w)$ est $(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}}\ \hat{h}_j(\rho w)\chi_{(a,b)}(\rho)$ ($\chi_{(a,b)}(\rho)$ fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$) la formule de Parseval donne alors :

$$(1.41)\qquad \int_{\mathbb{R}^n} |G_1^j(r,w)|^2 dr = \int_a^b |\hat{h}^j(\rho w)|^2 \rho^{n-1} d\rho \qquad \text{pour tout} \quad w \in S^{n-1}$$

et (1.40) s'en déduit par intégration sur S^{n-1}. C'est (1.40) qui permet d'étendre la définition de $\hat{h} \longrightarrow G$ de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ à $L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n$ puisque $\{h \,/\, h \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)^n\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$.

<u>*Remarque*</u>

- Si $G \in L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n$, le théorème de FUBINI entraîne

$$(1.42)\qquad \|G\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{S^{n-1}} |G(r,w)|^2 dw \right) dr = \int_{\mathbb{R}} \|G(r,\cdot)\|^2_{L^2(S^{n-1})^n}\, dr$$

égalité qui implique que $L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n$ est isomorphe, en tant qu'espace de HILBERT à $L^2(\mathbb{R}\,;\,L^2(S^{n-1})^n)$: par la suite on identifiera ces deux espaces.

On définit la transformée de Fourier de $G(r;\cdot) \in L^2(\mathbb{R}\,;\,L^2(S^{n-1})^n)$ par :

$$(1.43)\qquad \hat{G}(\rho,w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\rho r} G(r,w)\, dr$$

$$(1.44)\qquad G(r,w) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ir\rho}\, \hat{G}(\rho,w)\, d\rho$$

En outre

(1.45) $$\|\hat{G}\|_{L^2(IR\times S^{n-1})^n} = \|G\|_{L^2(IR\times S^{n-1})^n} \quad \text{pour tout} \quad G\in L^2(IR\times S^{n-1})^n$$

Comme pour tout $h \in L^2(IR^n)^n$

(1.46) $$\|h\|^2 = \|\hat{h}\|^2 = \int_{IR^n} |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} |(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \hat{h}(\rho w)|^2 dw \right) d\rho$$

il s'en suit que :

(1.47) $$\begin{cases} \hat{G}(\rho; w) = (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \hat{h}(\rho w) & , \rho \geq 0 \\ \quad = 0 & , \rho < 0 \end{cases}$$

appartient à $L^2(IR\times S^{n-1})^n$. [C'est la transformée de Fourier au sens de (1.43) de $G(r; w)$ définie par (1.44)].

Définition 1.5

A tout $h \in L^2(IR^n)^n$, *on associe le profil d'onde* $G \in L^2(IR\times S^{n-1})^n$ *défini par (1.47) et (1.44). En outre, l'onde asymptotique* $v_0^\infty(x; t)$ *associée à*

(1.48) $$v_0(x; t) = e^{-itA_0^{1/2}} h(x) \qquad , h \in L^2(IR^n)^n$$

est définie par

(1.49) $$v_0^\infty(x; t) = v_{0,1}^\infty(x; t) + v_{0,2}^\infty(x; t)$$

où

(1.50) $$\begin{cases} v_{0,j}^\infty(x; t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} G_1^j(|x| - c_j t; \frac{x}{|x|}) \\ x \in IR^n - \{0\} \quad , t \in IR \end{cases}$$

G^j *étant le profil d'onde de* h_j $(j = 1, 2)$.

Il est à noter que $G_1^j \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n$ (car $h_j \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}^n)^n$) $v^\infty_{0,1}$ (resp. $v^\infty_{0,2}$) sera l'onde asymptotique longitudinale (resp. transversale) associée à $v_0^{(1)}$ (resp. $v_0^{(2)}$). Les ondes asymptotiques définies par (1.50) vérifient le :

Théorème 1.6 : *Si* $H_j \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n$ $(j = 1,2)$, *soit*

(1.51) $w_j^\infty(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} H_j(|x| - c_j t; \frac{x}{|x|})$, $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $t \in \mathbb{R}$

On a :

(1.52) $w_j^\infty(\cdot\,;t) \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}^n)^n$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *en outre les applications* $w_j^\infty \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, L^2_{(j)}(\mathbb{R}^n)^n)$.

(1.53) $\| w_j^\infty(\cdot\,;t) \|$ *est fonction croissante de* t .

(1.54) $\lim\limits_{t\to\infty} \| w_j^\infty(\cdot\,;t)\| = \| H_j \|_{L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n}$

(1.55) $\lim\limits_{t\to-\infty} \| w_j^\infty(\cdot\,;t)\| = 0$

Démonstration

(1.51) et le théorème de FUBINI entraînent que $w_j^\infty(\cdot\,;t) \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}^n)^n$ et

(1.56) $$\| w_j^\infty(\cdot\,;t)\|^2 = \int_0^\infty dr \int_{S^{n-1}} | H_j(r - c_j t; w)|^2 dw$$
$$= \int_{-c_j t}^\infty dr \int_{S^{n-1}} | H_j(r; w)|^2 dw$$

qui implique (1.53), (1.54) et (1.55).

Pour établir (1.52) il suffit de voir que pour $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$, compte tenu de ce que la transformée de Fourier (en r) de $H_j(r - c_j t, w)$ dans $L^2(\mathbb{R}; L^2(S^{n-1})^n)$ est $e^{-ic_j t\rho} \hat{H}_j(\rho, w)$,

$$(1.57)\quad \begin{cases} \| w_j^\infty(\cdot\,; t) - w_j^\infty(\cdot\,;\tau)\|^2 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{S^{n-1}} |H_j(r - c_j t; w) - H_j(r - c_j\tau; w)|^2 dw \\ \qquad = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{S^{n-1}} |e^{ic_j t\rho} - e^{ic_j\tau\rho}|^2 |\hat{H}_j(\rho; w)|^2 dw \end{cases}$$

Comme $|e^{ic_j t\rho} - e^{ic_j\tau\rho}|^2 \leqslant 4$ pour tout $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$ et tout ρ et que $\lim\limits_{t\to\tau} |e^{ic_j t\rho} - e^{ic_j\tau\rho}|^2 = 0$ pour ρ fixé et que $H_j \in L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n$, la dernière intégrale de (1.57) tend vers zéro quand $t \longrightarrow \tau$ en vertu du théorème de la convergence dominée; (1.57) entraine donc (1.52).

On va établir enfin le résultat principal de ce chapitre.

<u>*Théorème 1.7*</u> : *Si* $h = h_1 + h_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$

$$(1.58)\quad \lim_{t\to\infty} \| v_0(\cdot\,; t) - v_0^\infty(\cdot\,; t)\| = 0$$

Ce résultat étant vrai pour $v_0^{(j)}(\cdot\,; t)$ *et* $v_{0,j}^\infty(\cdot\,; t)$, $j = 1, 2$.

On établit ce résultat pour $\hat{h} \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$, le cas général étant alors établi à l'aide d'un argument de densité.

Le cas $\hat{h} \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ est basé sur le :

<u>*Lemme 1.8*</u> : *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine extérieur (c'est-à-dire de complémentaire borné) et* $u(x; t)$ *telle que :*

$$(1.59)\quad u(\cdot\,; t) \in L^2(\Omega)^n \qquad \textit{pour tout } t > t_0 \textit{ donné.}$$

(1.60) $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(t;\cdot)\|_{L^2(K\cap\Omega)} = 0$ pour tout compact de $\mathbb{R}^n$.

(1.61) $|u(x;t)| \leqslant M|x|^{-\frac{n+1}{2}}$ pour tout $|x| > r_0$ donné, M constant.

Ces conditions entraînent

(1.62) $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(\cdot;t)\|_{L^2(\Omega)^n} = 0$.

Démonstration : r_0 est tel que $\partial\Omega \subset B(r_0) = \{x / |x| < r_0\}$. Pour tout $r > r_0$ et $t > t_0$ on a aisément :

(1.63) $\|u(\cdot;t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leqslant \|u(\cdot;t)\|^2_{L^2(\Omega\cap B(r))^n} + \dfrac{M^2\,\omega_{n-1}}{r}$

où ω_{n-1} = aire de S^{n-1}. Faisons alors tendre t vers ∞, r fixé, (1.60) entraîne :

(1.64) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \|\bar{u}(\cdot;t)\|^2_{L^2(\Omega)^n} \leqslant \dfrac{M^2\,\omega_{n-1}}{r}$ pour tout $r > r_0$,

qui à son tour entraîne (1.62) puisque $\|u(\cdot;\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)^n}$ est indépendant de r.

Démonstration du théorème 1.7

(i) $\underline{\hat{h} \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)}$

On a, d'après (1.35) et (1.50)

(1.65) $V_0^{(j)}(x;t) - V_{0,j}^{\infty}(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}}\, G_2^j\left(|x| + c_j t; \dfrac{x}{|x|}\right) + q_j(x;t)$

Les deux termes du premier membre appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)^n$

($v_o^{(j)}$ par hypothèse et $v_{o,j}^{\infty}$ d'après le théorème 1.6) donc le deuxième membre aussi appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)^n$: il vérifie donc (1.59).

(1.60) est vérifiée par $v_o^{(j)}$ et $v_{o,j}^{\infty}$ séparément; en effet, d'après (1.29)

$$(1.66) \qquad v_o^{(j)}(x;t) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{i c_j t} \int_{a \leqslant |\xi| \leqslant b} e^{-ic_j t \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ e^{i\rho(x.w)} \hat{h}_j(\rho w) \right\} \rho^{n-2} d\rho \, dw$$

Ce qui entraîne, l'intégrant étant uniformément borné en t,

$$(1.67) \qquad |v_o^{(j)}(x;t)| \leqslant \frac{C}{|t|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \neq 0 : \; v_o^{(j)}$$

vérifie (1.59). Comme

$$\| v_{o,j}^{\infty}(\cdot;t) \|^2_{L^2(B_R)^n} = \int_0^R \int_{S^{n-1}} | G_1^{(j)}(r - c_j t; w) |^2 \, dw \, dr$$

$$= \int_{-c_j t}^{R - c_j t} \int_{S^{n-1}} | G_1^{(j)}(r'; w) |^2 \, dw \, dr'$$

et que $G_1^{(j)} \in L^2(\mathbb{R} \times S_{n-1})^n$, il s'en suit que, pour R fixé, (1.68) tend vers zéro lorsque $t \to \infty$: $v_{o,j}^{\infty}$ vérifie donc (1.60) et le second membre aussi de (1.65) en vertu de l'inégalité triangulaire.

Reste à montrer que le second membre de (1.65) vérifie (1.61). Pour $q_j(x;t)$ c'est (1.39) déjà établi. Pour $|x|^{\frac{1-n}{2}} G_2^{(j)}(|x| + c_j t; \frac{x}{|x|})$, on commence par voir qu'une intégration par parties dans (1.37) entraîne une estimation de la forme :

$$(1.69) \qquad | G_2^{(j)}(r; w) | \leqslant \frac{C}{|r|} \qquad \forall r \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ et } w \in S^{n-1}$$

d'où

$$(1.70)\begin{cases} \left| |x|^{\frac{1-n}{2}} G_2^j\left(|x|+c_j t\,;\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant \dfrac{C}{|x|^{\frac{n-1}{2}}(|x|+c_j t)} \leqslant \dfrac{C}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \\ \text{pour } |x|>0 \quad , t>0 \quad \text{et} \quad w\in S^{n-1}. \end{cases}$$

Il résulte de (1.69) et (1.70) que le second membre de (1.65) vérifie (1.61) et, les hypothèses du lemme 1.8 étant vérifiées, le théorème 1.7 est établi pour $\hat{h} \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$.

(ii) <u>Cas général</u> :

Si l'on pose :

$$(1.71)\quad v_0(\cdot\,;t) = U_0(t)\,h \qquad \text{où} \qquad U_0(t) = e^{-itA_0^{1/2}}$$

On définit un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)^n$; d'après le théorème 1.6 et (1.53), (1.54) :

$$(1.72)\quad v_0^\infty(\cdot\,;t) = U_0^\infty(t)\,h \qquad , \quad h\in L^2(\mathbb{R}^n)^n \ .$$

définit encore un opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ qui vérifie

$$(1.73)\quad \|U_0^\infty(t)\| \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } t\in\mathbb{R} \ .$$

Soit alors $\{h_m\}$ une suite de $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ convergeant vers $h\in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ telle que $h_m\in\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ pour tout $m\in\mathbb{N}$.

On a :

$$(1.74)\begin{cases} \|v_0(\cdot\,;t) - v_0^\infty(\cdot\,;t)\| = \|U_0(t)\,h - U_0^\infty(t)\,h\| \\ \leqslant \|(U_0(t)-U_0^\infty(t))h_m\| + \|(U_0(t)-U_0^\infty(t))(h-h_m)\| \\ \leqslant \|U_0(t)h_m - U_0^\infty(t)h_m\| + 2\|h-h_m\| \qquad \text{pour tout} \quad t>0 \quad \text{et} \quad m\in\mathbb{N} \end{cases}$$

On fixe et on fait $t \to \infty$, puisque $\hat{h}_m \in \mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^n)$ on obtient :

$$(1.75) \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \| v_o(\cdot\,; t) - v_o^\infty(\cdot\,; t)\| \leqslant 2\|h - h_m\| \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

qui implique (1.58) puisque le premier membre est indépendant de m .

Remarque

Il est clair, d'après le théorème 1.5 et (1.53), (1.54) que ceci est vrai pour $v_o^{(j)}(\cdot\,;t) - v_{o,j}^\infty(\cdot\,;t)$ dans $L^2_{(j)}(\mathbb{R}^n)^n$ $(j=1,2)$. Le théorème 1.7 va permettre de définir les ondes asymptotiques pour les solutions dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et les solutions d'énergie finie du problème de Cauchy de l'Elasticité dynamique.

Théorème 1.9 : *(Ondes asymptotiques pour les solutions dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$).*

Soient f et g à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$ et $g \in D(A_o^{-1/2})$, $u_o(x;t)$ la solution correspondante dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$ des équations de LAMÉ, donnée par (1.17) et (1.18).

Les ondes asymptotiques associées à u_o sont définies par :

$$(1.76) \quad u_o^\infty(x;t) = u_{o,1}^\infty(x;t) + u_{o,2}^\infty(x;t)$$

où

$$(1.77) \quad u_{o,j}^\infty(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} F_j\left(|x| - c_j t; \frac{x}{|x|}\right), x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, t \in \mathbb{R}, \ (j=1,2)$$

avec

(1.78) $$F_j(r;w) = Re\left\{ G_1^j(r;w) \right\}$$

où $G_1^j(r;w)$ *est le profil d'onde (à valeurs complexes) dans* $L^2_{(\omega)}(\mathbb{R}\times S^{n-1})^{n-1}$ *défini par (1.47) avec* $h = h_1 + h_2 = f + i A_0^{-1/2} g \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$.

Alors

(1.79) $$\lim_{t\to\infty} \| u_0(\cdot;t) - u_0^\infty(\cdot;t)\| = \lim_{t\to\infty} \| u_0^j(\cdot;t) - u_{0,j}^\infty(\cdot;t)\| = 0$$

Démonstration : On a de manière évidente

(1.80) $$u_{0,j}^\infty(x;t) = Re\left\{ v_{0,j}^\infty(x;t) \right\}$$

puis

$$u_0^j(x;t) - u_{0,j}^\infty(x;t) = Re\left\{ v_0^j(x;t) - v_{0,j}^\infty(x;t) \right\}$$

d'où

(1.81) $$\| u_0^j(x;t) - u_{0,j}^\infty(x;t)\| \leqslant \| v_0^j(x;t) - v_{0,j}^\infty(x;t)\|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le théorème (1.7) donne le résultat.

Corollaire 1.10 : *Le profil d'onde asymptotique est donné par les formules :*

$$\hat{F}(\rho;w) = \hat{F}_1(\rho;w) + \hat{F}_2(\rho;w)$$

où

(1.82) $$\begin{cases} \hat{F}_j(\rho;w) & = \frac{1}{2}(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \times \begin{cases} \hat{h}_j(\rho w) & , \rho>0 \\ \overline{\hat{h}_j(-\rho w)} & , \rho<0 \end{cases} \\ & = \frac{1}{2}(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \hat{f}_j(\rho w) + \dfrac{i\,\hat{g}_j(\rho w)}{\rho c_j} \right\} \end{cases} \qquad (j=1,2)$$

Démonstration :

Si $F(r;w)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, sa transformée de FOURIER $\hat{F}(\rho;w)$ a la propriété suivante :

$$(1.83) \qquad \hat{F}(\rho;w) = \overline{\hat{F}(-\rho;w)} \qquad \text{pour tout } \rho \in \mathbb{R} \text{ et } w \in S^{n-1}.$$

La première égalité de (1.82) provient de (1.47) et (1.83). Quant à la dernière égalité (1.82), elle se déduit de la première, de la définition de h_j et des propriétés : $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, $\hat{g}(-\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}$.

Etude du comportement asymptotique des solutions d'Energie finie

Si les données initiales $f \in EL(\mathbb{R}^n)^n$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$, la solution correspondante $u_o(\cdot;t)$ admet une énergie finie constante pour tout $t \in \mathbb{R}$. En outre, $u_o(\cdot;t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; L^2(\mathbb{R}^n)^n)$. On obtient alors aisément des représentations :

$$(1.84) \quad D_o u_o^j(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{2} \left\{ -c_j \rho \hat{f}_j(\xi) \sin \rho c_j t + \hat{g}_j(\xi) \cos \rho c_j t \right\} e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

(où $\xi = \rho w$, $w \in S^{n-1}$, $\rho = |\xi|$; $d\xi = \rho^{n-1} d\rho\, dw$)

et

$$(1.85) \quad D_k u_o^j(x;t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \left\{ \sum_{j=1}^{2} \rho \hat{f}_j(\xi) \cos c_j \rho t + \frac{\hat{g}_j(\xi)}{c_j} \sin c_j \rho t \right\} i w_k \, d\xi$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui est équivalent, d'après la représentation spectrale de A_o, à :

$$(1.86)\qquad D_0 u_0(\cdot\,;t) = (\cos tA_0^{1/2})g - (\sin tA_0^{1/2})A_0^{1/2} f$$

et

$$(1.87)\qquad D_k u_0(\cdot\,;t) = (\cos tA_0^{1/2})D_k f + (\sin tA_0^{1/2})D_k g$$

où

$$(1.88)\qquad \widehat{D_k f(\xi)} = i\,\xi_k \hat{f}(\xi) \;;\; \widehat{D_k g(\xi)} = i w_k \hat{g}(\xi) \quad (\xi_k = \rho w_k\,;\ k=1,2,\dots,n)$$

(1.86) et (1.87) montrent que les dérivées premières d'une solution d'énergie finie sont aussi des solutions dans $L^2(\mathbb{R}^n)^n$; leur comportement asymptotique (qui se déduit alors du théorème 1.9) est énoncé dans le :

<u>*Théorème 1.11*</u>

Soient $f \in D(A_0^{1/2}) = EL(\mathbb{R}^n)^n$ *et* $g \in L^2(\mathbb{R}^n)^n$, $u_0(x;t)$ *la solution d'énergie finie correspondante. Les ondes asymptotiques définies par :*

$$(1.89)\qquad u_{0,j}^{k,\infty}(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} F_{k,1}^{j}\left(|x|-c_j t\,;\,\frac{x}{|x|}\right) \;;\; x\in\mathbb{R}^n-\{0\}\,;\, t\in\mathbb{R}\,;\,(j=1,2)$$

où

$$(1.90)\qquad F_{k,1}^{j}(r;w) = Re\left\{G_{k,1}^{j}(r;w)\right\}$$

avec

$$(1.91)\qquad \hat{G}_{k,1}^{j}(\rho;w) = \begin{cases} (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}}\,\hat{h}_{k,j}(\rho w) & ,\ \rho>0 \\ 0 & ;\ \rho<0 \end{cases}$$

et

$$(1.92)\quad \begin{cases} \hat{h}_{o,j}(\xi) = -i c_j \rho \hat{f}_j(\xi) + \hat{g}_j(\xi) \\ \hat{h}_{k,j}(\xi) = i \xi_k \hat{f}_j(\xi) - \dfrac{w_k \hat{g}_j(\xi)}{c_j} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, .., n \end{cases}$$

vérifient :

$$(1.93)\quad \lim_{t \to \infty} \| D_k u_o^j(\cdot ; t) - u_{o,j}^{k\infty}(\cdot ; t) \| = 0 \qquad k = 0, 1, .., n.$$

Démonstation

En comparant (1.12) et (1.86), on voit que le théorème (1.9) s'applique à $D_o u_o(x;t)$ si $(f, A_o^{-1/2} q)$ est remplacé par $(q_j - A_o^{1/2} f)$ respectivement, d'où (1.93) pour $k = 0$. De même le théorème 1.9 s'applique à $D_k u_o^j(x;t)$ $(k = 1, .., n)$ $\hat{f}_j$ et $A_o^{-1/2} \hat{q}_j$ étant respectivement remplacés par $i \xi_k \hat{f}_j$ et $\dfrac{- w_k \hat{g}_j}{c_j}$ respectivement d'où (1.93).

II.- EQUATIONS DE L'ELASTICITE DYNAMIQUE DANS DES DOMAINES ARBITRAIRES

Dans cette partie, on se propose de généraliser au problème mixte suivant :

$$(2.1)\quad D_o^2 u - \Delta^* u = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega$$

(2.2) $T_\nu(u) = \mu D_\nu u + (\lambda+\mu)\left[\sum_{i=1}^{n} \nu_i D_i u_i + \sum_{1\leq i \leq j \leq n} (\nu_i D_j u_i + \nu_j D_i u_j)\right]$

$$= \mu D_\nu u + (\lambda+\mu)\left[\nu \cdot \mathrm{Div}\, u + \mathrm{grad}(u\cdot\nu)\right] = 0,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\partial\Omega$$

(2.3) $u(x,0) = f(x)$, $D_0 u(x,0) = g(x)$ pour $x\in\Omega$

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine arbitraire).

La méthode qui a permis de construire les solutions d'énergie finie (dans I), dans le cas de domaines arbitraires.

<u>*Remarque*</u> : Comme $\Delta^* u$ peut s'écrire $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_i D_j u$ où

(2.4) $A_{ij} = \mu \mathbb{I}_n \delta_{ij} + (\lambda+\mu) E_{ij}$

est une matrice $n\times n$, $\mathbb{I}_n$ la matrice unité $n\times n$, E_{ij} la matrice $n\times n$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j : il en résulte que

$$A_{ii} = \mathrm{Diag}(\mu, \dots, \mu, \underbrace{\lambda+2\mu}_{i}, \mu, \dots, \mu)$$

$$A_{ij} = {}^{T}A_{ji}$$

Avec ces notations :

(2.5) $T_\nu(u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \nu_i D_j u$ où $\nu = \nu_i e_i$ est un vecteur unitaire.

<u>*Notations*</u> :

(2.6) $$\begin{cases} L^2(\Omega)^n,\ H^m(\Omega)^n,\ H(\Delta^*;\Omega) = L^2(\Omega)^n \cap \{u / \Delta^* u \in L^2(\Omega)^n\} \\ H^1(\Delta^*;\Omega) = H^1(\Omega)^n \cap H(\Delta^*;\Omega) \end{cases}$$

sont des espaces de HILBERT pour les produits scalaires respectifs :

(2.7) $(u,v) = \int_{\Omega} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx \quad ; \quad (u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$

(2.8) $(u,v)_{\Delta^*} = (u,v) + (\Delta^* u, \Delta^* v)$ et $(u,v)_{1,\Delta^*} = (u,v)_1 + (\Delta^* u, \Delta^* v)$.

La formulation de la condition (2.2) pour des domaines arbitraires Ω est motivée par la formule

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} \Big\{ \Delta^* u \cdot v + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u \cdot D_i v \Big\} dx = \int_{\partial\Omega} T_\nu(u) \cdot v \, dS$$

valable pour $\partial\Omega$, u et v suffisamment régulières. Si $T_\nu(u) = 0$ ce qui précède suggère la définition suivante :

Définition 2.1 :

$u \in H^1(\Delta^*;\Omega)$ vérifie la condition de Newmann généralisée si

$$(2.10) \quad \int_{\Omega} \Big\{ (\Delta^* u) v + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u \cdot D_i v \Big\} dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^1(\Omega)^n.$$

Cette définition a un sens pour des domaines arbitraires Ω et l'on peut définir le sous espace fermé de $H^1(\Delta^*;\Omega)$:

$$(2.11) \quad H^N(\Delta^*;\Omega) = H^1(\Delta^*;\Omega) \cap \{ u \,/\, u \text{ vérifie } (2.10) \}$$

Si la frontière de Ω est suffisamment lisse, les $v \in H^1(\Omega)$ admettent une trace sur $\partial\Omega$ ainsi que $A_{ij} D_j u$ $(u \in H^1(\Delta^*;\Omega))$ d'après LIONS-KAGENES [7] et (2.9) est valable : on en déduit :

(2.12) $$\int_{\partial\Omega} A_{ij} D_j u \cdot D_i v \, dS = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad v \in H^1(\Omega)^n$$

ce qui implique (2.2). Si le problème mixte admet une et une seule solution dans Ω arbitraire il suivra de la remarque précédente que cette solution coïncidera avec la solution classique chaque fois qu'elle existera.

On définit l'opérateur linéaire $A : L^2(\Omega)^n \longrightarrow L^2(\Omega)^n$ par :

(2.13) $$D(A) = H^N(\Delta^*; \Omega)$$

(2.14) $$A u = -\Delta^* u \qquad \text{pour tout} \quad u \in D(A).$$

A possède la propriété importante suivante :

<u>*Théorème 2.2*</u> : A *est un opérateur auto-adjoint non négatif sur* $L^2(\Omega)^n$.

<u>*Démonstration*</u>

a) $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)^n$: en effet $\mathcal{D}(\Omega)^n$ est dense dans $L^2(\Omega)^n$ et contenu dans $D(A)$.

b) <u>$A^* = A$ sur $L^2(\Omega)^n$</u>

Par définition, si $u \in D(A)$ et $v \in L^2(\Omega)^n$

$$(Au, v) = (u, A^* v)$$

Or, pour tout $u \in D(A)$ et tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)^n$ on a :

(2.15) $$\begin{cases} (Au, v) = -\int_\Omega A_{ij} u_{,ij} \cdot v \, dx = \int_\Omega (A_{ij} D_j u \cdot D_i v) dx = -\int_\Omega (u \cdot A_{ji} D_j D_i v) dx \\ \\ = (u, Av) \end{cases}$$

comme $\mathcal{D}(\Omega)^n$ est dense dans $D(A)$ pour la topologie de $L^2(\Omega)^n$, la relation précédente vaut pour tout $v \in D(A)$. Autrement dit $A^* = A$ sur

$D(A)$ et $D(A) \subset D(A^*)$.

ce qui, symboliquement, est noté $A \subset A^*$.

si $u = v \in D(A)$

(2.16) $$(u, Au) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} A_{ij}\, u_{,j} \cdot \bar{u}_{,i}\, dx = (\hat{u}, \widehat{Au}) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \xi_i \xi_j |\hat{u}|^2 \geqslant 0 \qquad \forall u \in D(A)$$

ce qui équivaut à $A \geqslant 0$.

$D(A)$ étant dense dans $L^2(\Omega)^n$; A est symétrique donc admet une extension fermée, (KATO, p. 269 [4]), qui est A^*.

KATO introduit l'ensemble $\Theta(A) = \{(Au, u)\ ;\ u \in D(A)\}$ qui, d'après ce qui précède, est la demi droite $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{C}$: son complémentaire Δ dans $\mathbb{C}$ est donc convexe. Il résulte alors de [KATO [4] p. 268 Th. 3.2] que :

$\mathrm{Ker}\,(A - \zeta) = \{0\}$, pour tout ζ non réel $\geqslant 0$ et que :

$\mathrm{codim}\, \mathrm{Im}\,(A - \zeta)$ est constante pour $\zeta \notin \mathbb{R}^+$. (en particulier pour $\zeta = -1$) ...

pour appliquer le [th. 3.16 de KATO, p. 271] , il suffit de montrer que :

(2.17) $\mathrm{codim}\ \mathrm{Im}\,(A+1) = 0 \ (\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(A+1) = L^2(\Omega)^n)$ pour affirmer que A est auto-adjoint sur $L^2(\Omega)^n$. Or (2.17) équivaut à :

(2.18) $\forall f \in L^2(\Omega)^n$, $\exists u \in D(A) = H^N(\Delta^*; \Omega)$ tel que $u + Au = f$

et

(2.19) $(u,v) + (Au,v) = (f,v)$ pour tout $v \in EL(\Omega;\mathbb{C}^n)$

Or, puisque $u \in H^N(\Delta^*;\Omega)$ c'est-à-dire vérifie (2.10), (2.19) implique :

(2.20) $(u,v)_{EL} = \int_\Omega [\bar{u}\cdot v + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j\bar{u}\cdot D_i v]dx = \int_\Omega \bar{f}\cdot v\,dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)^n$

Il suffit alors d'établir que (2.20) a une solution $u \in EL(\Omega)^n$ pour tout $f \in L^2(\Omega)^n$ et de montrer alors que (2.20) implique $u \in H^N(\Delta^*;\Omega)$ et $u + Au = f$. Soit $f \in L^2(\Omega)^n$, on a :

(2.21) $|(f,v)| \leqslant \|f\|\|v\| \leqslant \|f\|\|v\|_{EL}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)^n \subset EL(\Omega)^n$

Le théorème de représentation de RIESZ dans $EL(\Omega)^n$ implique l'existence d'un $u \in EL(\Omega)^n$ tel que (2.20) ait lieu. Pour montrer enfin que $\Delta^* u \in L^2(\Omega)^n$ et que $\Delta^* u = u - f$, il suffit de noter qu'au sens des distributions :

(2.22) $\langle \Delta^*\bar{u}, v\rangle = -\int_\Omega A_{ij}\,\bar{u}_{,i}\cdot v_{,j}\,dx$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)^n$

Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, (2.20) donne, si $v \in \mathcal{D}(\Omega)^n$

(2.23) $\int_\Omega A_{ij} D_j\bar{u}\cdot D_i v\,dx = \int_\Omega (\bar{f} - \bar{u})\cdot v\,dx$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)^n$

(2.22) et (2.23) entraînent donc :

$$\langle \Delta^* \bar{u}, v\rangle = \int_\Omega (-\bar{f} + \bar{u})\cdot v\, dx \qquad \text{pour tout} \qquad v \in \mathcal{D}(\Omega)^n .$$

donc

$$\Delta^* u = u - f \in L^2(\Omega)^n$$

(2.23) et cette dernière égalité entraînent,

$$\int_\Omega \Big(\bar{u}\cdot v + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \bar{u}_{,j}\cdot v_{,i}\Big)\, dx = \int_\Omega (\bar{u} - \Delta^* \bar{u})\cdot v\, dx \qquad v \in EL(\Omega)^n$$

qui est équivalente à (2.10) c'est-à-dire $u \in H^N(\Delta^*; \Omega)$.

Comme dans I, on en déduit le :

Corollaire 2.3 : A *admet une seule "racine carrée" non négative* $A^{1/2}$ *de domaine* $D(A^{1/2}) = EL(\Omega)^n$ *et*

$$\| A^{1/2} u \|_{EL}^2 = \mu \sum_{i=1}^{n} \| D_i u\|^2 + (\lambda + \mu) | \operatorname{div} u |^2 \tag{2.24}$$

On peut alors, à l'aide de l'opérateur A, construire diverses classes de solution du problème mixte hyperbolique. Tout d'abord ce problème se reformule comme suit : trouver $u : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\Omega)^n$ telle que :

$$D_0^2 u + Au = 0 \qquad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.25}$$

$$u(0) = f \qquad \text{et} \quad D_0 u(0) = g \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^n . \tag{2.26}$$

A l'aide du théorème spectral appliqué à A.

$$A = \int_0^\infty \gamma \, d\Pi(\gamma) \tag{2.27}$$

et du calcul opérationnel associé on construit la solution généralisée :

$$(2.28) \qquad u(t) = (\cos t A^{1/2}) f + (A^{-1/2} \sin t A^{1/2}) g$$

où les coéfficients sont des opérateurs bornés ce qui implique que $u(t)$ est définie pour tout $(f, g) \in L^2(\Omega)^{2n}$ et que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)^n)$. Ses propriétés de différentiabilité dépendent de celles de f et g. Trois cas seront envisagés :

<u>Cas I</u> : f et $g \in L^2(\Omega)^n$: solutions dans $L^2(\Omega)^n$.

Dans ce cas $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)^n)$ et $u(0) = f$, mais en général u ne sera pas différentiable, (2.25) et $D_0 u(0) = g$ ne seront pas vérifiées.

$u(t)$ est la "solution généralisée dans $L^2(\Omega)^n$ ".

<u>Cas II</u> : $f \in D(A^{1/2})$, $g \in L^2(\Omega)^n$: solutions d'énergie finie.

Dans ces conditions

$$(2.29) \qquad u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega)^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}; EL(\Omega)^n)$$

(conséquence faible du théorème spectral et du corollaire 2.3). Alors u vérifie les conditions initiales (2.26) mais (2.25) n'est pas forcément vérifiée. u coïncide avec la solution A.E.F. étudiée, dans un cas plus général, par EZIN [3'] qui en a étudié l'unicité et l'existence pour des domaines arbitraires Ω et des états initiaux $f \in H^1(\Omega)^n$ et $g \in L^2(\Omega)^n$.

<u>Cas III</u> : $f \in D(A) = H^N(\Delta^*; \Omega)$, $g \in D(A^{1/2}) = EL(\Omega)^n$: solutions d'énergie finie au sens strict.

Dans ce cas :

(2.30) $$u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}\,;H^N(\Delta^*;\Omega)) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\,;EL(\Omega)^n) \cap \mathscr{C}^2(\mathbb{R}\,;L^2(\Omega)^n)$$

et vérifie (2.25) et (2.26). Leur existence a été détaillée pour des domaines Ω arbitraires, $f \in H^N(\Delta^*;\Omega)$ et $g \in EL(\Omega)^n$ par EZIN.

Le corollaire 2.3 entraîne que l'énergie d'une solution d'énergie finie peut s'écrire :

(2.31) $$\begin{cases} E(u,\Omega,t) = \|D_0 u(t)\|^2 + \mu \sum_{k=1}^{n} \|D_k u(t)\|^2 + (\lambda+\mu)\|\operatorname{div} u(t)\|^2 \\ \qquad = \|D_0 u(t)\|^2 + \|A^{1/2} u(t)\|^2 = \|D_0 u(t)\|^2 + (A_{ij}\overline{D_j u}\cdot D_i u) \end{cases}$$

et

(2.32) $$E(u,\Omega,t) = E(u,\Omega,0) = \|g\|^2 + (A_{ij}\, D_j \overline{f}\cdot D_i f)$$

provient de (2.28) qui entraîne :

(2.33) $$\begin{cases} D_0 u = -A^{1/2}(\sin tA^{1/2})f + (\cos tA^{1/2})g \quad \text{et} \\ A^{1/2}u = A^{1/2}(\cos tA^{1/2})f + (\sin tA^{1/2})g \end{cases}$$

d'où (2.32) à l'aide de (2.33) et (2.31).

Afin d'étudier le comportement de $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$, on aura besoin du résultat suivant (l'analogue de (1.23) et (1.22) avec démonstration analogue).

<u>Théorème 2.4</u> : *Si* $f \in L^2(\Omega ; \mathbb{R}^n)$ *et* $g \in D(A^{-1/2})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, *et si l'on pose :*

(2.34) $$h = f + i A^{-1/2} g \in L^2(\Omega ; \mathbb{C}^n)$$

la solution (2.28) dans $L^2(\Omega ; \mathbb{C}^n)$ *vérifie*

(2.35) $$u(x;t) = \mathrm{Re}\{v(x;t)\}$$

où

(2.36) $$v(\cdot\,;t) = e^{-itA^{1/2}} h .$$

CHAPITRE III

DIFFRACTION D'ONDES HARMONIQUES PAR DES DOMAINES BORNES ET PRINCIPE D'ABSORPTION LIMITE

Dans le cas où les forces données dépendent harmoniquement du temps :

$$(3.1) \qquad f(x;t) = e^{-ikt} f(x) \qquad , \; k \geqslant 0 \; ;$$

On cherche les solutions de

$$(3.2) \qquad D_0^2 u - \Delta^* u = f(x;t) \qquad , t \in \mathbb{R} \, , \, x \in \Omega$$

de la forme

$$(3.3) \qquad u(x;t) = e^{-ikt} \, v(x)$$

C'est le problème de diffraction harmonique dans des domaines extérieurs pour les équations de l'Elastodynamique.

$v(x)$ sera la solution du problème suivant

$$\begin{cases} (3.4) & \Delta^* v + k^2 v = - f(x) & x \in \Omega \\ (3.5) & A_{ij} D_i v \, n_j = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $\quad A_{ij} = \mu \, \mathrm{I}_n \delta_{ij} + (\lambda + \mu) E_{ij}$

(cf. 2.4).

Remarques

1) Dans le problème (3.1), (3.2), les conditions initiales n'ont pas été indiquées puisque l'on ne sait celles qu'il faut imposer pour que u ait la forme (3.3).

2) (3.4) et (3.5) équivalent formellement à : $(A - k^2)v = f$ où $A = -\Delta^*$ est l'opérateur auto-adjoint introduit en chapitre II $A \geqslant 0$ implique que le spectre de A est inclus dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. En fait, on montrera que $\sigma(A) = \overline{\mathbb{R}}_+$: il s'en suit que (3.4), (3.5) ne peut avoir de solutions dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$:

On les cherchera dans un espace "plus grand" mais alors l'unicité ne sera assurée que si l'on impose des conditions à l'infini du type "condition de radiation de SOMMERFELD" qui, physiquement, signifient que (3.3) se comporte, lorsque $|x| \longrightarrow \infty$, comme la somme de deux ondes sphériques divergentes, l'une longitudinale, l'autre transversale.

3) (3.6) $(A - \zeta)v = f$ admettra une et une seule solution dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pour tout $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ si $\zeta \notin \sigma(A)$ (en particulier pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$). La méthode (ou le principe) d'absorption limite revient à chercher la solution de (3.4), (3.5) avec $k \in \mathbb{R}$ comme limite :

(3.7) $$v(x;k) = \lim_{\zeta \to k^2} v(x;\zeta)$$

La limite étant prise au sens de la topologie d'un espace "plus grand" que $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Physiquement, $v(x;\zeta)$ avec $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ est une onde permanente dans un milieu élastique produisant ou absorbant de l'énergie (si $\operatorname{Im} \zeta < 0$ ou $\operatorname{Im} \zeta > 0$), le coéfficient de perte ou d'absorption étant proportionnel à $\operatorname{Im} \zeta$.

La validité de cette méthode sera établie essentiellement à l'aide du théorème de sélection de RELLICH [12] .

Pour ce faire suivant C.H. WILCOX on est amené à préciser les frontières $\partial\Omega$ des obstacles.

On aura besoin des espaces fonctionnels suivants (localement ce sont ceux introduits en chapitre II).

(3.8) $\left[L^2_{loc}(\bar{\Omega})\right]^n = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega)^n, u \in L^2(K\cap\Omega; \mathbb{R}^n)$ pour tout compact de

(3.9) $H^m_{loc}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) = \{ u \,/\, D_\alpha u \in L^2_{loc}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq m \}$

(3.10) $H_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega}) = \{ u \,/\, u$ et $\Delta^* u \in L^2_{loc}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \}$

(3.11) $H^1_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega}) = H^1_{loc}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap H_{loc}(\Delta^*; \Omega, \mathbb{R}^n)$

Ce sont des espaces de Fréchet dès lors qu'on les munit des semi-normes respectives :

pour $L^2_{loc}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$: (3.12) $P_K(u) = \int_{K\cap\Omega} |u(x)|^2 dx$, K compact de $\mathbb{R}^n$

pour $H^m_{loc}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$: (3.13) $P_K(u) = \int_{K\cap\Omega} \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u(x)|^2 dx$, K compact de $\mathbb{R}^n$

pour $H_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$: (3.14) $P_K(u) = \int_{K\cap\Omega} [|u(x)|^2 + |\Delta^* u(x)|^2] dx$, K compact de $\mathbb{R}^n$

De même pour $H^1_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$:

(3.15) $P_K(u) = \int_{K\cap\Omega} \left[|u(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij} D_j u(x)|^2 + |\Delta^* u(x)|^2 \right] dx$

K compact de $\mathbb{R}^n$.

On utilisera aussi les notations :

(3.16) $\mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega}) = L^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

(3.17) $\mathcal{E}'^1_{L^2}(\bar{\Omega}) = H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$

($\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et à support compact SCHWARTZ [15] YOSIDA [19]).

Définition 3.1

$u \in H^1_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ *vérifie la "condition de frontière libre généralisée" pour* Ω *si, et seulement si,*

$$\int_\Omega \left[\Delta^* u \cdot v + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j u \cdot D_i v \right] dx = 0 \tag{3.18}$$

Remarque

Cette condition et (3.18) sont équivalentes pour tout $u \in H^1(\Delta^*;\bar{\Omega})$ et (3.18) est valable pour des Ω arbitraires, se réduit à la condition classique pour $\partial\Omega$ suffisemment régulière. (3.18) permet de défnir le sous-espace fermé de $H^1_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$ suivant :

$$H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega}) = H^1_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega}) \cap \{u \,;\, u \text{ vérifie (3.18)}\} \tag{3.19}$$

qui est donc également un espace de FRECHET. C'est dans ce dernier espace que l'on cherchera la solution du problème de diffraction harmonique. Si l'on pose :

$$\Omega_{R_0} = \Omega \cap \{x \,;\, |x| < R_0\} \tag{3.20}$$

$L^2(\Omega_{R_0};\mathbb{R}^n)$ s'identifie au sous-espace des éléments de $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ qui sont à support dans Ω_R. En particulier $f\ \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ si, et seulement si, $f \in L^2(\Omega_{R_0};\mathbb{R}^n)$ pour un R_0 (dépendant de f).

Soit alors $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$, et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$ solution de :

(3.21) $\Delta^* u + k^2 u = -f \in L^2(\Omega_{R_0})$ où $k \geqslant 0$;

vérifie donc (au sens des distributions)

(3.22) $\Delta^* u(x) + k^2 u(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| > R_0$:

ce qui entraîne pour u d'être analytique (pour $|x| > R_0$). C'est à une telle solution que l'on peut appliquer les conditions de radiation de SOMMERFELD.

Avant de les définir, on note que le système suivant

$$(3.23) \quad \begin{cases} u = u_1 + u_2 & \text{où} \quad \operatorname{rot} u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} u_2 = 0 \\ \Delta\theta + \tau^2\theta = 0 & \text{où} \quad \theta = \operatorname{div} u = \operatorname{div} u_1 \quad \text{et} \quad (\lambda+2\mu)\tau^2 = k^2 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } |x| > R \\ \Delta\alpha - \sigma^2\alpha = 0 & \text{où} \quad \alpha = \operatorname{rot} u = \operatorname{rot} u_2 \quad \text{et} \quad \mu\sigma^2 = k^2 \end{cases}$$

est équivalent aux équations (3.22). Donc, le théorème suivant dû à RELLICH [13].

Théorème : Soit $u(x)$ *une solution de :*

(3.24) $\Delta u + k u = 0$ *pour* $|x| > R$, $k > 0$.

Alors ou bien $u(x) \equiv 0$ *pour* $|x| > R$ *ou bien pour toute paire de nombres réels tels que* $R < R_0 < R_1$ *il existe une constante* $M = M(u, R_0, R_1, k) > 0$ *telle que :*

(3.25) $$\int_{R_0 \leqslant |x| \leqslant r} |u(x)|^2 dx \geqslant M r \qquad \textit{pour tout} \qquad r \geqslant R_1$$

est appliquable séparément pour u_1 et u_2 et sachant que :

$$\mathcal{D}'(\Omega)^n = \mathcal{D}'_1(\Omega)^n \oplus \mathcal{D}'_2(\Omega)^n \qquad \text{(PARSY [11])}$$

Le théorème de Rellich est appliquable à u^* .

<u>*Définition 3.2*</u> : *Une solution u de (3.22) satisfait les conditions de radiation de SOMMERFELD sortante (resp. entrante) si, et seulement si,*

$$(3.26)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial |x|} \frac{x_j}{|x|} - iku = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\right) \\ \\ \left(\text{resp.} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial |x|} \frac{x_j}{|x|} + iku = o\left(\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\right)\right) \end{cases}$$

$$(3.27)\quad u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\right) \qquad \text{pour} \qquad |x| \to \infty .$$

Les limites dans (3.26) et (3.27) sont uniformes dans la direction $\dfrac{x}{|x|}$.

La classe de solutions du problème de scattering de l'état solide est décrite par :

<u>*Définition 3.3*</u> : $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *($n = 2$ ou 3) est une solution rayonnante du problème de diffraction harmonique par le domaine Ω et pour la fréquence $k > 0$ si, et seulement si,*

$$(3.28)\quad u \in H^N_{loc}(\Delta^* ; \bar{\Omega})$$

$$(3.29)\quad \Delta^* u + k^2 u = -f \quad \text{dans } \Omega , \; f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$$

et

(3.30) u *satisfait les conditions de radiation sortante (resp. entrante).*

En échangeant des signes + et - dans (3.26), on définit une solution anti-rayonnante.

De plus, si $k = 0$, on a : $\tau = \sigma = 0$ (3.28) (3.29) et (3.30) sont complétée par (3.27).

On commence par établir l'unicité des solutions rayonnantes.

<u>*Théorème 3.4*</u> : *Soit Ω un domaine extérieur arbitraire, le problème de diffraction harmonique relatif à Ω , $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ et $k \geq 0$ admet au plus une solution.*

<u>*Démonstration*</u> : Il suffit d'établir que $f(x) = 0$ dans Ω entraîne $u(x) = 0$ dans Ω . Lorsque $\partial\Omega$ est régulière.

On introduit une fonction $\phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \phi_1'(\tau) \geq 0 & \text{pour} \quad \tau \in \mathbb{R} \\ \phi_1(\tau) \equiv 0 & \text{pour} \quad \tau \leq 0 \\ \phi_1(\tau) \equiv 1 & \text{pour} \quad \tau \geq 1 \end{cases}$$

Il s'en suit que $0 \leq \phi_1(\tau) \leq 1$ pour $\tau \in \mathbb{R}$. On définit la fonction :

$$(3.31) \qquad X_{r,\delta}(x) = \phi_1\left(\frac{r - |x|}{\delta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n ; \ \delta > 0 , \ r > 0.$$

Alors

$$\begin{cases} X_{r,\delta}(x) = 1 & \text{pour} \quad |x| \leq r - \delta \\ X_{r,\delta}(x) = 0 & \text{pour} \quad |x| \geq r \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lim_{\delta \to 0} X_{r,\delta}(x) = X_r(x) = \text{fonction caractéristique de} \\ \{ x \ ; \ |x| < r \} \end{cases}$$

En outre $X_{r,\delta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour $\delta > 0$. Ainsi u est une solution de (3.22) et (3.26) alors $v(x) = X_{r,\delta}(x)\,\bar{u}(x) \in \mathcal{E}'^{1}_{L^2}(\bar{\Omega})$ et (3.18) tient avec ce choix de v . Maintenant par substitution dans (3.18) on a :

$$(3.22)\quad \int_{\Omega} \Big\{ (\Delta^* u)\,\bar{u}\, X_{r,\delta} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, D_j u \left[X_{r,\delta}\, D_i \bar{u} + \bar{u}\, D_i X_{r,\delta} \right] \Big\} dx = 0$$

En faisant la soustraction de la conjuguée de (3.32) et de (3.32) on obtient :

$$(3.33)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} (u\, \Delta^* \bar{u} - \bar{u}\, \Delta^* u) X_{r,\delta}\, dx + \int_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, D_j \bar{u}\cdot D_i u - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, D_j u \cdot D_i \bar{u} \Big) X_{r,\delta}\, dx \\ \displaystyle + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \left(D_j \bar{u}\; D_i X_{r,\delta}\, u - D_j u\; D_i X_{r,\delta}\, \bar{u} \right) dx = 0 \end{cases}$$

En outre les deux intégrales sur la gauche de (3.33) sont nulles respectivement car $\Delta^* u + k^2 u = 0$ dans Ω et $A_{ij} = {}^{T}A_{ji}$ respectivement.

Ainsi (3.33) devient :

$$(3.34)\quad \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \left(D_j \bar{u}\, u - D_j u\, \bar{u} \right) D_i X_{r,\delta}\, dx = 0$$

Aussi

$$D_i X_{r,\delta} = D_i \phi_1 \left(\frac{r - |x|}{\delta} \right) \left(\frac{-x_i}{\delta\, |x|} \right)$$

En introduisant les coordonnées sphériques :

$$x = |x| \eta \quad , \quad |\eta| = 1$$

On obtient :

$$\text{(3.35)} \quad \int_{r-\delta}^{r} \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \left(D_j \bar{u}\, u - D_j u\, \bar{u} \right) D_i \phi_1 \left(\frac{r-|x|}{\delta} \right) \left(\frac{-x_i}{\delta |x|} \right) |x|^{n-1} d|x| d\eta$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, le calcul de la limite dans l'intégrale (3.35) est classique, puisque $u \in C^{\infty}(\Omega)$ on a :

$$\text{(3.36)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{|x|=r} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \left(D_j \bar{u}\, u - D_j u\, \bar{u} \right) dS = 0 \\ \text{pour tout} \quad r > R \end{cases}$$

où $\partial\Omega \subset \Omega_R$. En substituant (3.26) et (3.27) dans (3.36) on obtient puisque : $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u}{\partial |x|} \dfrac{\partial |x|}{\partial x_j} = \dfrac{\partial u}{\partial |x|} \dfrac{x_j}{|x|}$

$$\text{(3.37)} \quad \int_{|x|=r} \left\{ u(x) \left(\mp ik \bar{u}(x) \right) - \bar{u}(x) \left(\pm ik u(x) \right) + o\left(\frac{1}{|x|^{n-1}} \right) \right\} dS = 0$$

Il s'en suit d'après l'uniformité de (3.26) et (3.27) dans $\eta = \dfrac{x}{|x|}$ que :

$$\text{(3.38)} \quad (\pm 2ik) \int_{|x|=r} |u(x)|^2 dS = o(1) \quad , \quad r \to \infty$$

ce qui est équivalant à $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 dS = 0$ quand $k \neq 0$ et ceci complète la preuve dans ce cas.

<u>*Le cas* $k = 0$:</u>

Dans ce cas (3.32) tient avec $\Delta^* u = 0$.

$$(3.39)\quad \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, D_i \bar{u}\, X_{r,\delta}\, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, D_i X_{r,\delta}\, \bar{u}\, dx = 0$$

En outre, $u(x)$ est analytique dans Ω (régularité elliptique) et ainsi par passage à la limite $\delta \to 0$ on a :

$$(3.40)\quad \int_{\Omega_r} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, D_i \bar{u}\, dx - \int_{|x|=r} \bar{u} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, dS = 0 \quad \text{pour tout } r > R.$$

En substituant $\bar{u}$ et $\frac{\partial u}{\partial |x|}$ dans (3.26) et (3.27) avec $k=0$ dans la dernière intégrale on a puisque : $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial |x|} \frac{x_j}{|x|}$.

$$(3.41)\quad \int_{|x|=r} \bar{u} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, dS = \int_{|x|=r} o\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right) dS = o(1) \qquad r \to \infty$$

et en faisant tendre $r \to \infty$ dans (3.40) cela donne

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, D_i \bar{u}\, dx = 0 \qquad \text{mais}$$

$$n^2 \mu \, \| \nabla u \|^2 \leqslant \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, D_i \bar{u}\, dx \leqslant n^2(\lambda + 2\mu) \| \nabla u \|^2$$

où $\nabla u = \operatorname{grad} u$ ce qui implique que $\nabla u = 0$ et ainsi $u(x) = cste$. Mais alors (3.27) implique que $C = 0$ ce qui achève la démonstration.

Les résultats présentés sont vrais pour un domaine extérieur arbitraire Ω. La plus part des résultats présentés dans la suite du travail sont basés sur le théorème de compacité locale pour Ω qui est vrai seulement pour une classe restreinte de domaines. Le théorème énonce que si $S \subset H^1_{loc}(\bar{\Omega}\,;\, \mathbb{R}^n)$ est un ensemble de fonctions dont les restrictions à Ω_R sont bornées dans $H^1(\Omega_R)$ alors elles sont précompactes dans $L_2(\Omega_R)$. Ceci est le fameux "théorème de sélection de F. RELLICH. Une formulation précise est basée sur :

Définition : *Un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *a la propriété de compacité locale si, et seulement si, pour chaque ensemble de fonctions* $S \subset H^1_{loc}(\bar{\Omega}\,;\mathbb{R}^n)$ *et chaque* $R>0$ *la condition.*

(3.42) $\|u\|_{H^1(\Omega_R)} \leqslant C(R)$ *pour tout* $u = v_{|\Omega_R}$ *avec* $v \in S$

implique que $\{u = v_{|\Omega_R}\ ;\ v \in S\}$ *est précompact dans* $L_2(\Omega_R)$ *; c'est-à-dire, chaque suite* $\{v_n\}$ *dans* S *admet une sous-suite* $\{\tilde{v}_n\}$ *telle que* $u_n = \tilde{v}_{n|\Omega_R}$ *converge dans* $L_2(\Omega_R)$. *La classe de domaines ayant la propriété de compacité locale sera désignée par* L.C.

Le théorème de sélection original de Rellich affirme que des domaines bornés avec frontières lisses sont dans la classe L.C. La version utilisée ici est due, essentiellement, à S. AGMON [1] qui prouve le théorème pour des domaines ayant la propriété du segment [1 , théorème 3.8]. Un domaine à "la propriété du segment" s'il existe un ensemble fini d'ouverts recouvrant $\partial\Omega$.

(3.43) $$\partial\Omega \subset O_1 \cup \cdots \cup O_N$$

et correspondant à des vecteurs non-nuls $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}$ tel que le segment $\{x = x_0 + t\,x^{(j)}\ :\ 0 < t < 1\} \subset \Omega$ pour tout $x_0 \in \bar{\Omega} \cap O_j$. Cette propriété définit plutôt une classe large de domaines qui surgissent en application. Quoi qu'il en soit il y a quelques exceptions. Pour exemple, le disque (3.44) $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$ et $x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ n'admet pas la propriété du segment. Ceci est parce que des ensembles ouverts O_j recouvrent nécessairement le bord du disque. L'auteur a observé que le théorème de compacité locale peut être étendu à une classe de domaine plus large, la démonstration d'Agmon se conserve en modifiant la propriété du segment. Le premier pas est de remplacer les ensembles ouverts O_j par des ensembles compacts.

On suppose qu'il existe un ensemble ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$, des ensembles compacts $K_1, \ldots, K_n \subset \mathbb{R}^n$ et des vecteurs non nuls $x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ tels que :

(3.45) $\partial\Omega \subset O$

(3.46) $O \cap \Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} K_j$

(3.47) $\{x = x_0 + t\,x^{(j)} : 0 < t < 1\} \subset \Omega$ pour tout $x_0 \in \Omega \cap K_j$.

Alors la preuve d'Agmon tient entièrement comme avant avec les ensembles K_j à la place des ensembles O_j. La classe de domaines ainsi définie contient le cas (3.44). Ainsi, pour (3.44) il suffit de choisir $N = 2$, $x^{(1)} = (0,0,1)$, $x^{(2)} = (0,0,-1)$, $K_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 1\}$, $K_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \ ; \ -1 \leq x_3 \leq 0\}$ et $O = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 3/2, \ -1/2 < x_3 < 1/2\}$. On note que la condition du théorème de compacité locale est "intrinsèque"; qui est, indépendante du système de coordonnées utilisé pour décrire Ω. En outre (3.47) est dépendante des coordonnées. La condition (3.47) peut être généralisée comme suit :

(3.48) $\left\{\begin{array}{l}\text{Chaque ensemble } K_j \text{ consiste à coordonner } O_j \text{ tel que (3.47) tient} \\ \text{quand } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ sont les coordonnées correspondantes.}\end{array}\right.$

Il est supposé, désormais, que le tenseur métrique dans chaque coordonnée est borné et uniformément positif. Alors Agmon fait la démonstration quand les coordonnées appropriées sont utilisées dans chaque K_j.

Les points les plus importants autour des propriétés (3.45), (3.46) et (3.47) sont, premièrement, un voisinage de $\partial\Omega$ est complètement recouvert par les ensembles K_j, deuxièmement, chaque $\Omega \cap K_j$ est recouvert par un paquet de segments. La situation fait penser à recouvrir la "surface" $\partial\Omega$ par un ensemble fini d'ensembles K_j. Ceci suggère la terminologie suivante :

<u>Définition</u> : Un domaine extérieur Ω a la propriété de couverture finie si les propriétés (3.45), (3.46) et (3.47) tiennent pour un ensemble O convenanble ouvert, des ensembles compacts K_j et des pièces de coordonnées O_j.

L'extension suivante du théorème de Rellich et Agmon est vraie.

<u>Théorème 3.5</u> : Si Ω est un domaine extérieur ayant la propriété de couverture finie alors $\Omega \in L.C.$

Les détails de la preuve peuvent être fondus sur le livre d'Agmon et ne sont pas reproduits ici.

Le théorème d'absorption limite sera maintenant formulé et prouvé. Les notations suivantes sont utilisées. A est l'opérateur auto-adjoint dans $L_2(\Omega)$ construit dans le chapitre II.

$$(3.49) \qquad R(z) = (A - z)^{-1}$$

est l'opérateur résolvant. Il est commode d'introduire les deux surfaces de Riemann pour la fonction $\sqrt{z}$ désignées par $\mathbb{C}_{1/2}$ et :

$$(3.50) \qquad \mathbb{C}^{+}_{1/2} = \mathbb{C} \cap \{ z : 0 < \arg \sqrt{z} < \pi \}$$

désignera souvent "la première surface". Le fait que $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ implique que $R(z)$ est défini, comme un opérateur de $L_2(\Omega)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^{+}_{1/2}$ et définit alors une fonction analytique. Le théorème d'absorption limite donné avec les valeurs frontières de $R(z)$ sur les frontières de $\mathbb{C}^{+}_{1/2}$ dans $\mathbb{C}_{1/2}$.

Théorème 3.6 : Soit Ω *un domaine extérieur arbitraire tel que* $\Omega \in L.C$ *et soit* $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ *. Alors :*

(3.51) $$R(z) f \in H^N_{loc}(\Delta^* ; \bar{\Omega}) \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^+_{1/2} .$$

(3.52) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{L'application } T : z \longrightarrow R(z) f \in H^N_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega}) \\ \textit{est continue sur } \mathbb{C}^+_{1/2} . \end{array} \right.$

(3.53) $\left\{ \begin{array}{l} T \textit{ admet une extension continue sur } \bar{\mathbb{C}}^+_{1/2} \textit{, la cloture de } \mathbb{C}^+_{1/2} \textit{ dans} \\ \mathbb{C}_{1/2} . \end{array} \right.$

On désigne les points sur les bords "inférieur" et "supérieur" de la frontière de $\bar{\mathbb{C}}^+_{1/2}$ par $\xi - i0$ et $\xi + i0$, respectivement, où $\xi \geqslant 0$. En outre, on pose $u^{\pm}_k = R(k^2 \pm i0) f$, $k \geqslant 0$, désignent les limites dont l'existence est impliquée par (3.53).

Alors :

(3.54) $$u^{\pm}_k = R(k^2 \pm i0) f \in H^N_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$$

(3.55) $$(\Delta^* + k^2)\, u^{\pm}_k = -f \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

(3.56) $\left\{ \begin{array}{l} u^+_k \text{ (resp. } u^-_k \text{) satisfont aux conditions de radiation} \\ \text{sortante (resp. entrante).} \end{array} \right.$

<u>Corollaire 3.7</u> : Si Ω *est un domaine extérieur et* $\Omega \in L.C$ *alors le problème de scattering stationnaire admet une solution unique pour tout* $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ *et toute fréquence* $k \geqslant 0$.

Démonstration du corollaire 3.7 : (3.54) à (3.56) affirment que $\mathcal{U}_k^+$ (resp. $\mathcal{U}_k^-$) satisfont les propriétés définissant (3.28) (3.29). L'unicité est démontrée comme le théorème (3.4).

La preuve du théorème (3.6) est basée sur deux lemmes qui sont d'intérêt indépendant. Le premier est :

Lemme 3.8 : *Soit* Ω *un domaine extérieur et* $\Omega \in L.C.$ *On suppose que* $\partial\Omega \subset B(r_0)$ *et on pose* $I = [a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ $\beta_0 > 0$, $r > r_0$ *et* $r' > r$. *Alors il existe une constante* $M = M(I, \beta_0, r, r') > 0$ *telle que :*

$$(3.57) \qquad \| R(\xi \pm i\beta) f \|_{H^1(\Delta^*;\Omega_{r'})} \leqslant M \| f \|_{L_2(\Omega_r)}$$

pour tout $\lambda \in I$, $0 < \beta \leqslant \beta_0$ *et tout* $f \in L_2(\Omega_r)$.

Démonstration : Démonstration par l'absurde. Si le lemme est faux alors il existe une suite $\{\xi_m\}$ dans I, $\{\beta_m\}$ dans $(0, \xi_0]$, $\{f_m\}$ dans $L_2(\Omega_r)$ telles que :

$$(3.58) \qquad \| f_m \|_{L_2(\Omega_r)} = 1 \qquad m = 1,2,3,\dots$$

et

$$(3.59) \qquad \| R(\xi_m \pm i\beta_m) f_m \|_{H^1(\Delta^*;\Omega_{r'})} > m, \quad m = 1,2,\dots$$

il s'en suit qu'il existe une sous suite $\{\xi_m \pm i\beta_m\}$ qui converge. On désigne la sous suite par le même indice et on écrit $\lim(\xi_m \pm i\beta_m) = \xi \pm i\beta$. Alors β est nécessairement nul, parce que $R(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}^+_{1/2}$ dans la topologie de l'opérateur uniforme. Ainsi si $\beta \neq 0$ $\| R(\xi_m \pm i\beta_m) \|$

aura une limite quand $m \to \infty$ qui contredit (3.59). Ainsi

(3.60) $$\lim_{m\to\infty} (\xi_m \pm i\beta_m) = \xi \in I .$$

Maintenant on définit

(3.61) $$u_m = \frac{R(\xi_m \pm i\beta_m) f_m}{\| R(\xi_m \pm i\beta_m) f_m \|_{H^1(\Delta^*; \Omega_r')}}$$

et

(3.62) $$F_m = \frac{f_m}{\| R(\xi_m \pm i\beta_m) f_m \|_{H^1(\Delta^*; \Omega_r')}}$$

On note que les dénominateurs dans (3.61) et (3.62) ne sont pas nuls d'après (3.59).

En outre,

(3.63) $$\left\{ \begin{aligned} \| u_m \|^2_{H^1(\Delta^*; \Omega_r')} &= \| u_m \|^2_{L_2(\Omega_r')} + \sum_{i,j=1}^{n} \| A_{ij} D_j u_m \|^2_{L_2(\Omega_r')} \\ &+ \| \Delta^* u_m \|^2_{L_2(\Omega_r')} = 1 \end{aligned} \right.$$

(3.64) $$\| F_m \|_{L_2(\Omega_r)} < \frac{1}{m}$$

et

(3.65) $$(\Delta^* + (\xi_m \pm i\beta_m)) u_m = - F_m \quad \text{dans } \Omega$$

pour $m = 1, 2, \ldots$. Maintenant l'ensemble $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\} \subset$

$H^N(\Delta^*, \Omega) \subset H^1_{loc}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et satisfait :

(3.66) $\qquad \| u_m \|_{H^1(\Omega_{r'})} \leqslant 1$ pour $m = 1, 2, \ldots$ d'après (3.63). En outre, il est supposé que $\Omega \in L.C.$ Ainsi le théorème (3.4) est appliquable et implique que $\{u_m\}$ admet une sous suite qui converge dans $L_2(\Omega_{r'})$ on garde le même indice. Ainsi il sera montré que $\{u_m\}$ converge dans $H^N_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$. Pour le prouver on choisit un rayon r'' tel que $r < r'' < r'$. La preuve sera constituée de deux pas. Le premier pas est la preuve que $\{u_m\}$ converge dans $H^1(\Delta^*; \Omega_{r''})$. La deuxième partie est la preuve que $\{u_m\}$ converge dans $H^1(\Delta^*; \Omega_R - \Omega_{r''})$ pour tout $R \geqslant r''$.

<u>Pas 1</u> :

On note que $\operatorname{Supp} F_m \subset \Omega_r \subset \Omega_{r'}$, et ainsi, $\lim_{m\to\infty} F_m = 0$ dans $L_2(\Omega_{r'})$ d'après (3.64). Il s'en suit d'après (3.60), (3.65) et la convergence de $\{u_m\}$ dans $L_2(\Omega_{r'})$ que $\{\Delta^* u_m\}$ converge dans $L_2(\Omega_{r'})$. Pour compléter la preuve du pas 1 il faudra montrer que $\nabla u_m = (D_1 u_m, \ldots, D_n u_m)$ converge dans $L_2(\Omega_{r''})$. On définit :

(3.67) $\qquad \psi(x) = X_{r', r'-r''}(x) \qquad , x \in \mathbb{R}^n$

où $X_{r,\delta}$ est définie par (3.3).

$$\begin{cases} \psi(x) \equiv 1 & \text{pour} \quad |x| \leqslant r'' \\ \psi(x) \equiv 1 & \text{pour} \quad |x| \geqslant r' \end{cases}$$

Maintenant nous appliquons la condition de Newmann généralisée (3.18), à $u = u_\ell - u_m = u_{\ell m}$ et $v = \psi \bar{u}_{\ell m}$. Le résultat est (cf. (3.32)):

$$(3.68)\quad \int_{\Omega_{r'}} \Big\{ (\Delta^* u_{1m}) \bar{u}_{1m} \psi + \psi \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \bar{u}_{1m} + \bar{u}_{1m} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \psi \Big\} dx = 0$$

Ceci implique les estimations suivantes :

$$(3.69)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_{r''}} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \bar{u}_{1m} dx \leqslant \int_{\Omega_{r'}} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \bar{u}_{1m} \psi dx \\ \displaystyle\leqslant - \int_{\Omega_{r'}} \Big\{ (\Delta^* u_{1m}) \bar{u}_{1m} \psi + \bar{u}_{1m} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \psi \Big\} dx \\ \displaystyle\leqslant M_1 \Big\{ \|u_{1m}\|_{r'} \|\Delta^* u_{1m}\|_{r'} + \|u_{1m}\|_{r'} \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} \Big\|_{r'} \Big\} \\ \displaystyle\leqslant M_1 \Big\{ \|\Delta^* u_{1m}\|^2_{r'} + \|u_{1m}\|^2_{r'} + \delta \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} \Big\|^2_{r'} + \frac{1}{\delta} \|u_{1m}\|^2_{r'} \Big\} \end{cases}$$

où $M_1 \geqslant 1$ est une borne pour $|\nabla \psi|$, $\delta > 0$ est arbitraire et $\|u\|_{r'}$ désigne $\|u\|_{L_2(\Omega_{r'})}$.

On choisit $\delta = \varepsilon / M_1$ et on écrit $M_\varepsilon = M_1 \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) = M_1 + \frac{M_1^2}{\varepsilon}$

Alors (3.69) devient :

$$(3.70)\quad \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \bar{u}_{1m} \Big\|_{r''} \leqslant \varepsilon \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} \Big\|^2_{r'} + M_\varepsilon \Big\{ \|\Delta^* u_{1m}\|^2_{r'} + \|u_{1m}\|^2_{r'} \Big\}$$

Maintenant $\Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} \Big\|_{r'} \leqslant 1$ pour $m = 1, 2, \cdots$ d'après (3.63) ainsi, (3.70) implique

$$(3.71)\quad \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{1m} D_i \bar{u}_{1m} \Big\|_{r''} \leqslant 4\varepsilon + M_\varepsilon \Big\{ \|\Delta^* u_1 - \Delta^* u_m\|^2_{r'} + \|u_1 - u_m\|^2_{r'} \Big\}$$

En faisant tendre $l, m \to \infty$ dans (3.71) on obtient

$$(3.72) \quad \overline{\lim_{l,m\to\infty}} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_{lm} D_i \bar{u}_{lm} \right\|_{r''} \leq 4\varepsilon$$

parce que $\{u_m\}$ et $\{\Delta^* u_m\}$ convergent dans $L_2(\Omega_{r'})$. Ceci prouve que $\{\nabla u_m\}$ converge dans $L_2(\Omega_{r''})$ puisque ε est arbitraire et parce que

$$n^2 \mu \|\nabla u\|^2_{r''} \leq \left\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u D_i \bar{u} \right\|_{r''} \leq n^2(d+2\mu) \|\nabla u\|^2_{r''}$$

ce qui complète le pas 1.

Pas 2 :

La fonction de Green, ou le noyau résolvent, pour l'opérateur A_0 du chapitre I est utilisée dans ce pas. Il est donné par :

$$(3.73) \quad G_0(x, x', z) = \frac{i}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi R} \right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{2} R) \quad , \quad R = |x - x'|$$

où $z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$ et $H^{(1)}_p$ est la fonction de Hankel de 1ère espèce.
Il a la propriété que $(A_0 - z)u = f$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si,

$$(3.74) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x, x', z) f(x') dx'$$

En particulier, ceci implique que G_0 comme distribution satisfait :

$$(3.75) \quad (\Delta^*_x + z) G_0(x, x', z) = -\delta(x - x')$$

On note que chaque $u_m(x) \in C^\infty(\Omega - \Omega_r)$ parce que (3.65) tient avec $\operatorname{Supp} F_m \subset \Omega_r$. On choisit un rayon r''' tel que $r < r''' < r''$ et on applique le théorème de Green par rapport à

$u_m(x')$ et $v_m(x') = G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m)$ dans la région $\Omega_R - \Omega_{r''}$ avec $r'' \leq |x| < R$. Si $S_r = \{x : |x| = r\}$ le résultat peut s'écrire :

$$
(3.76)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_m(x) = & \int_{S_{r'''}} \Big\{ u_m(x') \frac{\partial G_0(x, x', \xi_m \mp i\beta_m)}{\partial |x'|} \\
& - \frac{\partial u_m(x')}{\partial |x'|} G_0(x, x', \xi_m \mp i\beta_m) \Big\} dS' \\
& - \int_{S_R} \Big\{ u_m(x') \frac{\partial G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m)}{\partial |x'|} \\
& - \frac{\partial u_m(x')}{\partial |x'|} G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m) \Big\} dS' \\
= & \; u_m^{(1)}(x) + u_m^{(2)}(x)
\end{aligned}
\right.
$$

où $u_m^{(1)}$ et $u_m^{(2)}$ représentent les intégrales sur $S_{r'''}$ et S_R, respectivement. On note que $u_m^{(2)}(x)$ est en effet indépendant de R puisque $u_m(x)$ et $u_m^{(1)}(x)$ le sont.

Ainsi, elle a une continuation analytique en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et satisfait :

$$(3.77)\quad (\Delta^* + (\xi_m \pm i\beta_m)^2) u_m^{(2)}(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n$$

d'après (3.75). On rappelle que $u_m \in L_2(\Omega)$ d'après (3.61). En outre

$u_m^{(1)}(x) \in L_2(\Omega - \Omega_{r''})$ parce que $G_0(x, x', \xi_m \mp i\beta_m)$ tend vers zéro exponentiellement quand $|x'| = r'''$ et $|x| \to \infty$. Il s'en suit que $u_m^{(2)} = u_m - u_m^{(1)} \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Mais ceci est possible uniquement si $u_m^{(2)}(x) \equiv 0$ parce que A_0 n'admet pas de vecteurs propres dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi (3.76) implique que $u_m = u_m^{(1)}$ ou

$$(3.78) \quad \left\{ \begin{aligned} u_m(x) = \int_{S_{r''}} \Big\{ u_m(x') \frac{\partial G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m)}{\partial |x'|} & \qquad \text{pour tout } |x| \geq r'' \\ - \frac{\partial u_m(x')}{\partial |x'|} G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m) \Big\} dS' & \end{aligned} \right.$$

Après, on note que $\{u_m\}$ et $\{\nabla u_m\}$ convergent dans $L_2(S_{r'''})$. Pour voir ceci on note que puisque $\{u_m\}$ et $\{\Delta^* u_m\}$ convergent dans $\Omega_{r'} - \Omega_r$ les estimations standards de la théorie elliptique impliquent que $\{D^\alpha u_m\}$ converge dans $L_2(\Omega_{r'-\delta} - \Omega_{r+\delta})$ pour $|\alpha| \leq 2$ [Cf. Agruon, Ch. 6]. On choisit δ tel que les rayons soient rangés comme suit :

$$(3.79) \quad r_0 < r < r + \delta < r''' < r'' < r' - \delta < r' < R .$$

Alors le théorème de plongement de Sobolev [Cf. Agmon] implique que $\{u_m\}$ et $\{\nabla u_m\}$ convergent dans $L_2(S_{r'''})$. On note que l'intégrale dans (3.78) peut être différentiée sous le signe intégral pour tout $|x| \geq r''$. Ainsi :

$$(3.80) \quad \left\{ \begin{aligned} D^\alpha u_m(x) = \int_{S_{r'''}} \Big\{ u_m(x') \frac{\partial D^\alpha (G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m))}{\partial |x'|} \\ - \frac{\partial u_m(x')}{\partial |x'|} D^\alpha G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m) \Big\} dS' \end{aligned} \right.$$

pour tous multi-indices α .

La représentation (3.80) implique que chaque $D^{\alpha} u_m(x)$ converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\Omega - \Omega_{r''}$. Ceci s'en suit facilement d'après la convergence de $\{u_m\}$ et $\{\nabla u_m\}$ dans $L_2(S_{r'''})$ et le fait que $D^{\alpha}(G_0(x, x', \xi_m \pm i\beta_m))$ et sa dérivée normale convergent uniformément pour $x \in \Omega_R - \Omega_{r''}$ et $x' \in S_{r'''}$. En particulier $\{u_m\}$ converge dans $H^1(\Delta^*, \Omega_R - \Omega_{r''})$ ce qui complète le pas 2.

La preuve que $\{u_m\}$ converge dans $H^N_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$ peut maintenant être complété. D'après les pas 1 et 2, $\{u_m\}$ converge dans $H^1(\Delta^*; \Omega_{r''})$ et $H^1(\Delta^*; \Omega_R - \Omega_{r''})$ pour tout $R \geqslant r''$. Ainsi, $\{u_m\}$ converge dans $H^1(\Delta^*, \Omega_R)$ pour tout $R > r''$ qui implique la convergence dans $H^1_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega})$. Finalement, chaque $u_m \in H^N_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega})$ qui est un sous-espace fermé de $H^1_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega})$.

<u>LA CONTRADICTION</u> :

Pour compléter la preuve du lemme (3.8) il faut montrer en plus que la convergence de $\{u_m\}$ dans $H^N_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$ conduit à une contradiction. Pour montrer ceci soit :

$$(3.81) \qquad u = \lim_{m \to \infty} u_m \in H^N_{loc}(\Delta^*; \bar{\Omega})$$

Alors (3.65) implique :

$$(3.82) \qquad (\Delta^* + \xi) u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

puisque $F_m \longrightarrow 0$ dans $[L^2_{loc}(\bar{\Omega})]^n$. En outre, par passage à la limite dans (3.78) on a pour tout $|x| \geqslant r''$,

$$
(3.83) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x) = \int_{S_{r'''}} \Big\{ & u(x') \frac{\partial G_0(x, x', \xi \pm i0)}{\partial |x'|} \\ & - \frac{\partial u(x')}{\partial |x'|} G_0(x, x', \xi \pm i0) \Big\} dS' \end{aligned} \right.
$$

qui implique que $u(x)$ satisfait les conditions de radiation sortante et entrante. Il s'en suit d'après le théorème d'unicité que $u(x) \equiv 0$ dans Ω. D'une autre part, le passage à la limite dans (3.63) donne

$$
(3.84) \qquad \| u \|_{H^1(\Delta^*; \Omega_{r'})} = 1
$$

qui est clairement une contradiction.

Le second Lemme réclamé pour la preuve du théorème d'absorption est :

Lemme 3.9 : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C.$ *Soit* $I = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, $\beta_0 > 0$ *et* $f \in L_2(\Omega_r)$. *Alors l'application* $T: z \longmapsto R(z) f \in H^N_{loc}(\Delta^*, \overline{\Omega})$ *est uniformément continue sur l'ensemble* $\{ z = \xi \pm i\beta : \xi \in I, 0 < \beta \leqslant \beta_0 \}$.

Démonstration : La preuve est de nouveau donnée par contradiction. On note en premier qu'il est possible de supposer que $\partial\Omega \subset B(r)$ puisque $r < r'$ implique $L_2(\Omega_r) \subset L_2(\Omega_{r'})$. Maintenant si le lemme est faux il existe nécessairement $r' > r$, un $\varepsilon > 0$ et des suites $\{\xi_m\}$, $\{\nu_m\}$ et $\{\beta_m\}$, $\{\tau_m\}$ dans $(0, \beta_0]$ tels que :

$$
(3.85) \qquad |\xi_m - \nu_m| < \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad |\beta_m - \tau_m| < \frac{1}{m} \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots
$$

et

$$(3.86)\quad \begin{cases} \| R(\xi_m \pm i\beta_m) f - R(\nu_m \pm i\tau_m) f \|_{H^1(\Delta^*, \Omega_{r'})} \geqslant \varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Il s'en suit qu'il existe des sous suites, qui seront désignées par le même indice, telles que,

$$(3.87)\quad \zeta_m = \xi_m \pm i\beta_m \to \xi \;,\; \mu_m = \nu_m \pm i\tau_m \to \xi \quad \text{quand} \quad m \to \infty,$$

où $\xi \in I$. Les deux limites sont nécessairement semblables d'après (3.85). La limite est réelle parce que $u_2 = R(2)f$ est continue dans $H^1(\Delta^*, \Omega_{r'})$ en tout point non réel. La preuve de cet énoncé est basée sur la continuité de u_2 et $\Delta^* u_2 = -2u_2 - f$ dans $L_2(\Omega)$. La continuité de ∇u_2 peut être prouvé par les mêmes arguments utilisés dans la preuve du Lemme (3.8) pas 1, pour prouver la convergence de $\{\nabla u_m\}$.

Maintenant le lemme (3.8) implique qu'il existe une constante $M = M_0(I, \beta_0, r', r)$ telle que :

$$(3.88)\quad \begin{cases} \| R(\zeta_m) f \|_{H^1(\Delta^*, \Omega_{r'})} \leqslant M \| f \|_{L_2(\Omega_r)} \\ \| R(\mu_m) f \|_{H^1(\Delta^*, \Omega_{r'})} \leqslant M \| f \|_{L_2(\Omega_r)} \end{cases}$$

pour $m = 1, 2, \dots$. Ainsi le théorème de compacité locale est applicable pour les suites $\{R(\zeta_m) f\}$ et $\{R(\mu_m) f\}$. Ainsi, il existe des sous suites, désignées encore par $\{\zeta_m\}$, $\{\mu_m\}$, telles que les limites

$$(3.89)\quad \begin{cases} \lim_{m\to\infty} R(\zeta_m) f = u_\lambda \quad \text{et} \quad \lim R(\mu_m) f = v_\lambda \\ \text{existent dans} \quad H^N_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega}) \end{cases}$$

En outre, les limites satisfont en plus :

$$(3.90) \quad (\Delta^*+\lambda)u_\lambda = -f \qquad \text{et} \quad (\Delta^*+\lambda)v_\lambda = -f \quad \text{dans } \Omega .$$

et les conditions de radiation entrante et sortante, puisque chacune admet la représentation (3.83). Mais alors $u_\lambda = v_\lambda$ dans Ω d'après le théorème d'unicité et ainsi $\lim_{m\to\infty} R(\zeta_m) f = u_\lambda = \lim_{m\to\infty} R(\nu_m) f$ dans $H^N_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega})$ ce qui contredit (3.86).

Démonstration du théorème 3.6 :

Pour prouver (3.51) on note que $\mathbb{C}^+_{1/2}$ est contenu dans l'ensemble résolvant de A . Pour prouver (3.52) on note que $u_z = R(z) f$ et $\Delta^* u_z = -z u_z - f$ sont continues dans $L_2(\Omega)$ pour $z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$. La preuve que ∇u_z est continue dans $L_2(\Omega)$ s'en suit de la condition de Newmann généralisée (3.18) avec $u = v = u_z - u_{z'}$. Ainsi $R(z) f$ est continue dans $H^N(\Delta^*, \Omega) \subset H^N_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega})$ pour tout $z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$. La preuve de (3.53), l'existence d'une extension continue de T sur $\mathbb{C}^+_{1/2}$ est une conséquence immédiate du lemme (3.9) et du fait que $H^N_{loc}(\Delta^*, \bar{\Omega})$ est complet. Les conclusions (3.54) et (3.55) s'en suivent aussi d'après la complexité. Finalement (3.56) s'en suit parce que $u^{\pm}_k$ admettent une représentation de la forme (3.83).

CHAPITRE IV

THEORIE DE DIFFUSION DEPENDANT DU TEMPS DANS DES DOMAINES EXTERIEURS

Dans cette partie la théorie de diffusion est développée pour la paire d'opérateurs $A_0^{1/2}$ et $A^{1/2}$. Les opérateurs d'onde pour cette paire sont définis et leurs propriétés basiques sont formulées. Les relations de ces opérateurs d'onde par rapport à la théorie de diffusion pour les équations d'élasticité dans Ω sont discutées dans la fin de cette partie et les parties V et VI. La partie commence avec quelques résultats préliminaires sur les spectres de A_0 et A et sur le comportement asymptotique des fonctions d'onde dans les ensembles compacts.

La forme de la famille spectrale pour A_0 , est donnée par (I.15) (Chapitre I), implique que A_0 est continue absolument spectralement[KATO, Ch. X]. En effet,

$$(4.1)\quad \begin{cases} \|f\|^2 = \|F_n^{-1} f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ \text{pour tout} \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

En outre, un calcul court donne pour tout $\mu > 0$.

$$(4.2)\quad \frac{d}{d\mu}\|f\|^2 = \frac{d}{d\mu}\int_{|\xi|\leq\mu} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2}\mu^{\frac{n-2}{2}}\int_{S^{n-1}} |\hat{f}(\sqrt{\mu}\,\eta)|^2 d\eta \quad , \mu>0$$

Il est clair que pour $\mu > 0$ cette quantité est positive pour un choix souhaitable de f , il s'en suit que le spectre de A_0 est $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{\lambda : \lambda \geqslant 0\}$: $\sigma(A_0) = \overline{\mathbb{R}}_+$. Quant à A ; la positivité $A \geqslant 0$ implique que $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. L'égalité $\sigma(A) = \overline{\mathbb{R}}_+$ est prouvée dans la fin du chapitre.

Le théorème de F. Rellich pour les solutions de $\Delta u + k^2 u = 0$, $k \neq 0$ dans des domaines extérieurs implique :

Théorème 4.1 : *L'opérateur auto-adjoint* A *correspondant à un domaine extérieur arbitraire n'a pas de valeurs propres.*

Démonstration : On suppose que $u \in D(A)$ et $Au = \lambda u$ avec $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On montrera que u est nécessairement nulle.

En premier lieu on suppose que $\lambda \neq 0$. Alors le théorème de Relleich est appliquable et si $u(x) \not\equiv 0$ pour $|x| > R$ l'inégalité

$$\int_{R_0 \leq |x| \leq r} |u(x)|^2 dx \geq M r \qquad \text{(th. de Rellich)}$$

tient, ceci est impossible puisque $u \in L^2(\Omega)$. Ainsi $u(x) \equiv 0$ pour tout $|x| > R$. Ceci implique que $u \equiv 0$ dans $L^2(\Omega)$, puisque $u(x)$ est nécessairement analytique dans Ω. Finalement, si $\lambda = 0$ alors $u \in H^N(\Delta^*; \Omega)$ et $\Delta^* u = 0$ dans Ω. Ainsi (2.18) tient avec $v = \bar{u}$ et $\Delta^* u = 0$; ceci implique

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u \, D_i \bar{u} \, dx = 0$$

Mais $$n^2 \mu \|\nabla u\|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u \, D_i \bar{u} \, dx \leq n^2 (\lambda + 2\mu) \|\nabla u\|^2$$

Ainsi, $u(x) = C$, une constante, et par suite $u(x) \equiv 0$ puisque $u \in L^2(\Omega)$.

Le théorème 4.1 implique la continuité de la famille spectrale $\{\pi(\mu)\}$ pour A.

(4.3) $\| \pi(\nu) f \|^2 = (\pi(\nu) f, f) \in C(\mathbb{R})$ pour tout $f \in L_2(\Omega)$

Une preuve peut être fournie dans le livre de KATO (Ch. X). Maintenant, on écrit $\pi(I) = \pi(b) - \pi(a)$ où $I = (a, b)$, et on définit :

(4.4) $m_f(I) = \| \pi(I) f \|^2 = (\pi(I) f, f)$, $f \in L_2(\Omega)$

Ainsi, $m_f(I)$ définit une mesure sur l'anneau des intervalles I et de là une extension de la mesure $m_f(S)$ sur le σ - anneau des boréliens de $\mathbb{R}$. Il est connu que KATO

(4.5) $m_f(S) = \| \pi(S) f \|^2$ pour tout borélien S où $\pi(S)$ est une projection orthogonale sur $L_2(\Omega)$. On définit les sons ensembles :

(4.6) $H^{ac}(A) = L_2(\Omega) \cap \{ f : m_f(S)$ est absolument continue $\}$.

(4.7) $H^{sc}(A) = L_2(\Omega) \cap \{ f : m_f(S)$ est singulairement continue $\}$

où absolue et singulière continuité sont définies dans KATO (Ch. X) et se réfèrent à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. KATO a montré (Ch. X).

<u>*Théorème 4.2*</u> : $H^{ac}(A)$ *et* $H^{sc}(A)$ *sont des sous espaces fermés de* $L_2(\Omega)$ *qui sont orthogonaux et réduisent l'opérateur* A . *En outre*

$$L_2(\Omega) = H^{ac}(A) + H^{sc}(A) .$$

KATO a appelé $H^{ac}(A)$ et $H^{sc}(A)$ les sous espaces de continuité absolue et de continuité singulière pour A , respectivement.

Théorème 4.3 : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C.$ *Alors* :

$$(4.9) \qquad L_2(\Omega) = H^{ac}(A)$$

c'est-à-dire, $m_f(S)$ *est continue absolument pour tout* $f \in L_2(\Omega)$.

La preuve du théorème (4.3) est basée sur le théorème d'absorption limite du chapitre III et le théorème suivant connu de M.H. STONE [KATO].

Théorème 4.4 : *Soit* H *un espace de Hilbert abstrait et* K *un opérateur auto-adjoint sur* H *avec famille spectrale* $\{\Pi(\gamma)\}$ *et résolvant* $R(z) = (K-z)^{-1}$ *Soit* (a,b) *n'importe quel intervalle fini. Alors*

$$(4.10) \quad \begin{cases} (f, [\Pi(b) + \Pi(b_-) - \Pi(a) - \Pi(a_-)]g) \\ \quad = \lim\limits_{\beta \to 0^+} \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_a^b (f, [R(\xi + i\beta) - R(\xi - i\beta)]g)\, d\xi \end{cases}$$

Démonstration du théorème 4.3

Soit $I = (a,b)$ un intervalle quelconque et soit $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$.
On applique (4.10) avec $g = f$. Le résultat peut être écrit, d'après (1.3), comme

$$m_f(I) = (f, \Pi(I) f)$$
$$= \lim_{\beta \to 0^+} \frac{1}{2i\pi} \int_I (f, [R(\xi + i\beta) - R(\xi - i\beta)] f)\, d\xi$$

Maintenant l'intégrant de cette intégrale est une fonction continue de $(\xi, \beta) \in I \times [0, \beta_0]$ d'après le théorème (3.6) (on rappelle que $\mathrm{Supp}\, f$ est compact). Ainsi il est uniformément continue (cf. Lemme 3.9) et (4.11) implique que :

$$(4.12) \quad m_f(I) = \frac{1}{2i\pi} \int_I (f, [R(\xi+i0) - R(\xi-i0)]f)\, d\xi$$

où l'intégrant est continue pour tout $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\Omega)$ et $\xi \in \mathbb{R}$. Il s'en suit que l'extension de BOREL correspondant à $m_f(I)$ satisfait :

$$(4.13) \quad m_f(S) = \frac{1}{2i\pi} \int_S (f, [R(\xi+i0) - R(\xi-i0)]f)\, d\xi, \quad f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$$

En particulier, si $|S|$ désigne la mesure de Borel de S alors $|S| = 0$ implique $m_f(S) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$. Pour étendre ce résultat pour $f \in L_2(\Omega)$ arbitraire on rappelle que $H^{ac}(A)$ est un sous espace fermé (théorème 4.2). En outre $\mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ est dense dans $L_2(\Omega)$ et on vient juste de montrer que $\mathcal{E}'_{L^2}(\Omega) \subset H^{ac}(A)$. L'équation (4.9) s'en suit immédiatement.

Maintenant, on considère les solutions à valeurs complexes de l'équation d'élasticité qui ont été introduits en chapitre II.

$$(4.14) \qquad v(t;\cdot) = e^{-itA^{1/2}} h \quad , \quad h \in L_2(\Omega)$$

<u>On montrera que le théorème 4.3 implique</u> :

Théorème 4.5 : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C.$ *Alors* $v(t;\cdot)$ *tend vers* 0 *dans* $[L^2_{loc}(\bar{\Omega})]^n$ *pour tout* $h \in L_2(\Omega)$ *; i.e.*

$$(4.15) \quad \lim_{t\to\infty} \int_{K\cap\Omega} |v(t;x)|^2 dx = 0 \qquad \text{pour chaque borné } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Le théorème 4.5 est utilisé dans le Chapitre VI pour construire les opérateurs d'onde pour $A_0^{1/2}$ et $A^{1/2}$.

Démonstration du théorème 4.5 :

$Q_k : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ désigne la projection orthogonale définie par $X_k(x)\,u(x) = Q_k\,u(x)$ où $X_k(x)$ est la fonction caractéristique de K . Alors (4.15) est équivalent à

$$(4.16) \quad \lim_{t\to\infty} \| Q_k\, e^{-itA^{1/2}} h \| = 0 \qquad \text{pour chaque borné}$$

$K \subset \mathbb{R}^n$. La preuve de (4.16) est basée sur un théorème abstrait donné dans [18, WILCOX] . Il énonce que (4.16) tient pour tout $h \in H^{ac}(A^{1/2})$ si Q_k est $A^{1/2}$. Compact (cf. KATO) pour chaque borné K . On note que le théorème (4.3) implique que $L_2(\Omega) = H^{ac}(A^{1/2})$, d'après le théorème spectral. Ainsi, la preuve sera achevée quand il sera montré que Q_k est $A^{1/2}$. compact. Ceci signifie que tout ensemble $S \subset L_2(\Omega)$ borné pour la norme du graphe de $A^{1/2}$ a nécessairement la propriété que $Q_k S$ est pré-compact dans $L_2(\Omega)$. Maintenant $D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ et la norme du graphe de $A^{1/2}$ est $\{ \|A^{1/2}u\|^2 + \|u\|^2 \}^{1/2}$. Ainsi la $A^{1/2}$. compacité s'en suit du théorème (3.4).

Le théorème (4.5) montre que les solutions dans $L_2(\Omega)$ de l'équation d'élasticité tendent vers zéro dans tout voisinage de $\Gamma = \mathbb{R}^n - \Omega$. Ceci suggère que chaque onde (4.14) devrait être asymptotiquement égale à une onde libre $v_0(x;t)$

dans $\mathbb{R}^n$; c'est-à-dire :

(4.17) $$\lim_{t\to\infty} \| e^{-itA^{1/2}} h - e^{-itA_0^{1/2}} h_0 \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

où h_0 est une fonction souhaitable dans $L_2(\Omega)$. On note que, puisque (4.16) tient pour A_0, (4.17) est équivalente à la condition :

(4.18) $$\lim_{t\to\infty} \| J_\Omega e^{-itA^{1/2}} h - e^{-itA_0^{1/2}} h_0 \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

où

$J_\Omega : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ est définie par

(4.19) $$J_\Omega u(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Maintenant (4.18) est équivalente à :

(4.20) $$\lim_{t\to\infty} \| e^{itA_0^{1/2}} J_\Omega e^{-itA^{1/2}} h - h_0 \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

parce que $e^{-itA_0^{1/2}}$ est un opérateur unitaire dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Finalement (4.20) peut être formulée sans référence par rapport à la fonction inconnue h_0.

(4.21) $$W_+ = W_+(A_0^{1/2}, A^{1/2}, J_\Omega) = s\text{-}\lim_{t\to\infty} e^{itA_0^{1/2}} J_\Omega e^{-itA^{1/2}}$$ limite forte.

devrait exister. W_+ est appelé l'opérateur d'onde pour le triplet $A_0^{1/2}$, $A^{1/2}$, J_Ω . Une construction de l'opérateur d'onde sera donnée en chapitre VI basée sur l'expression des valeurs propres développée en chapitre V.

Théorème 4.6 : *Si Ω est un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C$ *alors l'opérateur d'onde :*

$$(4.22) \qquad W_+ : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

existe et est unitaire. En outre, il applique la famille spectrale de A_0 *sur celle de* A ; *c'est-à-dire,*

(4.23) $\Pi(\gamma) = W_+^* \, \Pi_0(\gamma) \, W_+$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ où $W_+^* = W_+^{-1}$.

Corollaire 4.7 : *Les opérateurs* A *et* A_0 *sont équivalents unitairement. En particulier*

$$(4.24) \qquad \sigma(A) = \sigma(A_0) = \overline{\mathbb{R}}_+$$

Le théorème (4.6) s'en suit du théorème (6.2) du Chap tre VI.

CHAPITRE V

THEORIE DE DIFFUSION STATIONNAIRE ET EXPRESSION DES FONCTIONS PROPRES POUR A

Dans cette partie deux familles de fonctions propres généralisées pour A sont construites et leur état complet est prouvé. Physiquement, les fonctions propres généralisées sont les ondes acoustiques de l'état solide qui sont produites quand une onde plane est dispersée par un obstacle $\Gamma = \mathbb{R}^n - \Omega$. Leur construction est basée sur le théorème d'absorption limite de III. Les expressions des valeurs propres définissent deux représentations spectrales pour A . Ceci fournit des constructions explicites des solutions dans $L_2(\Omega)$ et solutions d'E.F. de l'équation de l'élasticité qui est le point de départ pour les analyses asymptotiques des Chapitres VI et VII.

Une expression des fonctions propres généralisées pour l'opérateur A_o est prouvée d'après la théorie de Plancherel de la transformée de Fourier. Les fonctions :

$$(5.1) \qquad w_o(x;\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{ix\cdot p} a \quad , x \in \mathbb{R}^n, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

où a est un vecteur constant de norme 1, satisfont :

$$(5.2a) \qquad \left(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)\,|\xi\cdot a|^2 \right) w_o(x;\xi) = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ou encore :

$$(5.2b) \qquad \left(\Delta^* + (\lambda+2\mu)\,|\xi\cdot a|^2 - \mu\, \xi\wedge(\xi\wedge a)\cdot a \right) w_o(x;\xi) = 0$$

Ainsi, formellement,

$$A_o w_o(x;\xi) = \left[(\lambda+2\mu)|\xi\cdot a|^2 - \mu\,\xi\wedge(\xi\wedge a)\cdot a\right]w_o = \left[\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2\right]w_o$$

et $w_o(x;\xi)$ est une fonction propre généralisée de A_o puisque $w_o(x;\xi) \notin L_2(\mathbb{R}^n)$. La forme de l'expression des fonctions propres pour A_o est donnée par les formules de Plancherel (1.16, Chapitre I) qui peuvent s'écrire

$$(5.3) \qquad \hat{f}(\xi)a = (F_n f)(\xi)a = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{w_o(x;\xi)}\, f(x)\,dx$$

$$(5.4) \qquad f(x)a = (F_n^{-1}\hat{f})(x)a = \int_{\mathbb{R}^n} w_o(x;\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

L'équation (1.18, Chapitre I) peut s'écrire :

$$-k^2\hat{u}(\xi) + \mu|\xi|^2\hat{u}(\xi) + (\lambda+\mu)\,\xi\cdot(\xi\cdot\hat{u}(\xi)) = 0 =$$

$$\left[-k^2 a + \mu|\xi|^2 a + (\lambda+\mu)\,\xi\cdot(\xi\cdot a)\right]\hat{u} =$$

$$\left[-k^2 + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2\right]\int_{\mathbb{R}^n}\overline{w_o(x;\xi)}\,u(x)\,dx$$

La seconde équation est obtenue en multipliant scalairement par a : mais (5.2a) entraîne :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-k^2 - \Delta^*)\,\overline{w}_o(x;\xi)\,u(x)\,dx = 0$$

Soit

$$(5.5) \qquad k^2\int_{\mathbb{R}^n}\overline{w}_o(x;\xi)\,u(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} A_o\,\overline{w}_o(x;\xi)\,u(x)\,dx$$

ce qui montre que (5.3) définit une représentation spectrale pour A_o. Cette représentation est généralisée après pour l'opérateur A dans un domaine extérieur arbitraire ayant la propriété de couverture finie.

La fonction $w_o(\xi ; x)$ est une solution de l'équation de LAMÉ de l'état solide qui représente une onde plane se propageant dans la direction ξ si la dépendance du temps $e^{-ic_j|\xi|t}$ est supposée comme dans (3.3). Les fonctions propres correspondant à A sont définies comme étant des ondes $w(x;\xi)$ de l'état solide qui sont produites quand l'obstacle Γ est immergé dans le plan de l'onde $w_o(x;\xi)$.

Mathématiquement, ceci signifie que $w(x;\xi)$ doit satisfaire :

$$(5.6)\quad \left(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2\right) w(x;\xi) = 0 \qquad x\in\Omega$$

$$(5.7)\quad A_{ij} D_i w n_j = 0 \qquad x\in\partial\Omega$$

En outre, si $w'(x;\xi)$ est définie par :

$$(5.8)\quad w(x;\xi) = w_o(x;\xi) + w'(x;\xi) \quad \text{pour} \quad |x|\geq r_o$$

alors $w'(x;\xi)$ devra satisfaire la condition de radiation de Sommerfeld sortante. Physiquement, ceci est dû au fait que l'onde totale $w(x;\xi)$ est la superposition de "l'onde incidente" $w_o(x;\xi)$ et d'une "onde diffusée" sortante $w'(x;\xi)$. Les fonctions propres de cette forme seront appelées "ondes planes distordues". Une seconde famille d'ondes planes distordues est obtenue en se rappelant que $w'(x;\xi)$ doit satisfaire la condition de radiation entrante. Il sera montré en Chapitre VI que les deux familles sont utiles pour l'étude des solutions de l'équation de LAMÉ.

Les ondes planes distordues sortante et entrante seront désignées par

$w_+(x;\xi)$ et $w_-(x;\xi)$ respectivement. Pour des domaines avec frontières régulières (5.7) peut être remplacée par la condition de Newmann généralisée. Ceci suggère les définitions suivantes :

<u>Définition</u> : Soit Ω un domaine extérieur. Alors les ondes planes distordues $w_+(x;\xi)$ sortante (resp. $w_-(x;\xi)$ entrante) pour Ω et $\xi \in \mathbb{R}^n$ sont les fonctions caractérisées par les conditions.

(5.9) $$w_\pm(\cdot\,;\xi) \in H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$$

(5.10) $$(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\, w_\pm(x;\xi) = 0$$
$$= (\Delta^* + (\lambda+2\mu)|\xi\cdot a|^2 - \mu\,\xi\wedge(\xi\wedge a)\cdot a)\, w_\pm(x;\xi)$$

(5.11) *La fonction $w_+(x;\xi) - w_0(x;\xi)$ (resp. , $w_-(x;\xi) - w_0(x;\xi)$) satisfait à la condition de radiation sortante (resp. entrante).*

On note que les fonctions $w_+(x;\xi)$ et $w_-(x;\xi)$ sont uniques si elles existent, parce que la différence de deux telles fonctions doit satisfaire (5.9), (5.10) et la condition de radiation sortante ou entrante et ainsi doit être nulle dans Ω d'après le théorème d'unicité. Il sera montré après que l'existence des ondes planes distordues s'ensuit d'après le théorème d'absorption limite quand Ω a la propriété de couverture finie.

La construction de $w_\pm(x;\xi)$ fait intervenir la fonction

(5.12) $$j(x) = \phi_1(|x| - r_0), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où $\phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction introduite en Chapitre III et r_0 et choisi tel que

(5.13) $\Gamma = \mathbb{R}^n - \Omega \subset B(r_0)$

clairement $j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant j(x) \leqslant 1$ et

(5.14) $$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad |x| \leqslant r_0 \\ 1 & \text{pour} \quad |x| \geqslant r_0 + 1 \end{cases} .$$

En particulier, $j(x)$ est nulle dans un voisinage de Γ. Les fonctions propres seront cherchées pour avoir la forme

(5.15) $w_\pm(x;\xi) = j(x)\, w_0(x;\xi) + w_\pm'(x;\xi)$

Pour trouver un chemin de construction de $w_\pm'(x;\xi)$ on note que (5.10) et (5.15) impliquent que :

(5.16) $$(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi.a|^2)\, w_\pm'(x;\xi) = - (\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi.a|^2)\, j(x)\, w_0(x;\xi)$$

Le membre à droite de (5.16) peut être désigné par :

(5.17) $M(x;\xi) = -(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi.a|^2) j(x) w_0 \;, x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$

On note que :

(5.18) $M(x;\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

et

$$\operatorname{Supp} M(\cdot\,;\xi) \subset \{x : r_0 \leqslant |x| \leqslant r_0+1\} \qquad \text{pour tout} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

En particulier,

$$(5.19)\quad M(\cdot\,;\xi) \in L_2(\Omega_{r_0+1}) \subset \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega}) \qquad \text{pour tout} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

ceci suggère que $w'_\pm(x;\xi)$ soit définie par

$$(5.20)\quad w'(\cdot\,,\xi,z) = -R(z)M(\cdot\,;\xi) \quad , \xi \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$$

et

$$(5.21)\quad \begin{cases} w'_\pm(\cdot\,;\xi) = w'(\cdot\,,\xi,\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 \pm i0) \\ \qquad = -R(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 \pm i0)M(\cdot\,;\xi) \quad , \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $R(z) = (A-z)^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$ et les limites (5.21) existent dans $H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$ d'après le théorème d'absorption limite. La notation

$$(5.22)\quad w(x,\xi,z) = j(x)w_0(x;\xi)+w'(x,\xi,z) \quad , z \in \mathbb{C}^+_{1/2},$$

sera aussi utilisée, telle que :

$$(5.23)\quad w_\pm(\cdot\,;\xi) = w(\cdot\,,\xi,\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 \pm i0) \in H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$$

Les résultats de cette construction sont résumés dans :

<u>*Théorème 5.1*</u> : *Soit* Ω *un domaine extérieur arbitraire tel que* $\Omega \in L.C.$ *Alors pour chaque* $\xi \in IR^n$ *il existe une unique onde plane distordue sortante* $w_+(x;\xi)$ *et une unique onde plane distordue entrante* $w_-(x;\xi)$.

<u>*Démonstration*</u> : L'unicité de $w_\pm(x;\xi)$ s'en suit d'après le théorème d'unicité, comme remarqué au-dessus. L'existence est basée sur la construction définie par (5.15), (5.20) et (5.21). Il est nécessaire de vérifier que $w_\pm$ satisfasse (5.9), (5.10) et (5.11). On note que $j(\cdot)\,w_o(\cdot\,;\xi) \in H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$ d'après le théorème 3.4. Ainsi $w_\pm$ satisfont (5.9). Aussi, le théorème 3.4 implique que

(5.24) $(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (d+\mu)|\xi\cdot a|^2)w'_\pm(\cdot\,;\xi) = M(\cdot\,;\xi)$ dans Ω.

En combinant ceci avec (5.17) et (5.15) cela donne (5.10). Finalement $w_\pm(x;\xi) - w_o(x;\xi) = w'_\pm(x;\xi)$ pour $|x| \geqslant r_o+1$ et $w'_\pm(\cdot\,;\xi)$ satisfait la condition de radiation sortante (+) et entrante (-) d'après le théorème (3.6). Ceci complète la preuve du théorème 5.1.

On note que w_+ et w_- sont uniques, comme énoncé dans le théorème 5.1, toutefois w'_+ et w'_- ne sont pas uniques puisqu'elles dépendent du choix de la fonction $j(x)$. Le comportement de $w_\pm(x;\xi)$ à une grande distance de la frontière est décrit par :

<u>*Corollaire 5.2*</u> : *Sous les hypothèses du théorème 5.1, il existe des fonctions* $\theta_\pm(\eta;\xi) \in C^\infty(S^{n-1}\times IR^n - \{0\})$ *telles que :*

$$(5.25)\quad \left\{ \begin{aligned} w_\pm(x;\xi) = w_o(x;\xi) + \frac{e^{\pm i|\xi||x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\,\theta_\pm\left(\frac{x}{|x|};\xi\right)a \\ + q_\pm(x;\xi) \end{aligned} \right.$$

où

$$(5.26)\qquad q_{\pm}(x;\xi) = O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}\right) \quad , \quad |x| \to \infty$$

uniformément pour $\eta = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ *et* ξ *dans n'importe quel ensemble compact de* $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Démonstration : Puisque $w_{\pm}(x;\xi) - w_0(x;\xi) = w'_{\pm}(x;\xi)$ pour $|x| \geq r_0 + 1$ il suffit de considérer $w'_{\pm}$. Maintenant, l'application de la formule de Green et la condition sur la frontière comme dans la preuve du Lemme 3.8, donne une représentation

$$(5.27)\quad \left\{ \begin{aligned} w'_{\pm}(x;\xi) = \int_{S_r} \Big\{ & w'_{\pm}(x';\xi) \frac{\partial G_0(x,x',\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 \pm i0)}{\partial |x'|} \\ & - \frac{\partial w'_{\pm}(x';\xi)}{\partial |x'|} G_0(x,x',\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 \pm i0) \Big\} dS \end{aligned} \right.$$

vraie pour $|x| > r > r_0 + 1$. L'application du développement asymptotique classique pour la fonction de Hankel MAGNUS, W.; F. OBERHETLINGER and SONI [9] par rapport à G_0 donne les résultats (5.25), (5.26). Cette procédure donne une formule explicite pour $\theta_{\pm}(\eta;\xi)$ comme une intégrale sur S_r ce qui implique que $\theta_{\pm} \in C^{\infty}(S^{n-1} \times \mathbb{R}^n - \{0\})$. Cette formule ne sera pas donnée ici.

Physiquement, le corollaire 5.2 énonce que $w_{\pm}(x;\xi)$ se comportent pour tout $|x|$ grand comme la superposition d'une onde plane $w_0(x;\xi)$ (l'onde incidente) et une onde divergente (+) ou convergente (-) sphérique (l'onde diffusée par Γ). En acoustique $\theta_{\pm}(\eta;\xi)$ est appelée " amplitude du champ-loin".

Il sera montré après que chacune des deux familles $\{w_+(\cdot\,;\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$ et $\{w_-(\cdot\,;\xi);\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$ est un ensemble complet de fonctions propres généralisées pour A. L'expression des fonctions propres dérivera de la famille spectrale $\{\Pi(\gamma)\}$ pour A. Le dernier sera construit par le moyen du théorème de Stone. Puisque A est spectralement continu, l'équation (4.10) prend la forme :

$$(5.28)\quad (f, \Pi(I)g) = \lim_{\beta \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_I (f, [R(\gamma+i\beta) - R(\gamma-i\beta)]g)\,d\gamma$$

où $I = (a, b)$ est un intervalle quelconque et $f, g \in L_2(\Omega)$.
Pour calculer le membre de droite de (5.28) on note que l'identité

$R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2)\, R(z_1)\, R(z_2)$, implique que si $\operatorname{Im} z \neq 0$ alors :

$$(5.29)\quad \begin{cases} (f, [R(z) - R(\bar{z})]g) = 2i \operatorname{Im} z\, (R(z)f, R(z)g) \\ \qquad = 2i \operatorname{Im} z \displaystyle\int_\Omega \overline{R(z) f(x)}\, R(z) g(x)\, dx \end{cases}$$

La mesure spectrale (5.28) est calculée en premier pour les fonctions $f, g \in \mathcal{E}'_{L^2}(\Omega)$. On note que pour de telles fonctions, on a :

$$(5.30)\quad \begin{cases} |(1 - j^2(x))\, \overline{R(z) f(x)}\, R(z) g(x)| \\ \leq |R(z) f(x)|\, |R(z) g(x)|\, \chi_{r_0+1}(x) \end{cases}$$

où χ_{r_0+1} est la fonction caractéristique de Ω_{r_0+1}, parce que $0 \leq j(x) \leq 1$ et $j(x) \equiv 1$ pour $|x| \geq r_0 + 1$.
Maintenant $R(z)f$ et $R(z)g$ convergent dans $L_2(\Omega_{r_0+1})$ d'après le théorème d'absorption limite. Ainsi,

$$(5.31)\quad \begin{cases} \operatorname{Im} z \displaystyle\int_{\Omega} (1 - j^2(x))\, \overline{R(z) f(x)}\, R(z) g(x)\, dx = o(1) \\ \operatorname{Im} z \to 0 \end{cases}$$

où $o(1)$ est une fonction de z qui tend vers zéro quand $\operatorname{Im} z \to 0$. En outre, la convergence est uniforme pour $\operatorname{Re} z \in I$, d'après le lemme 3.9. En combinant

(5.29) et (5.31) cela donne

$$(5.32)\quad \begin{cases} (f\, ,\, [R(z) - R(\bar{z})]\, g) = \\ \qquad 2i \operatorname{Im} z \displaystyle\int_{\Omega} \overline{j(x) R(z) f(x)}\; j(x) R(z) g(x)\, dx + o(1) \end{cases}$$

On pose :

(5.33) $$J : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

l'opérateur linéaire défini par :

$$(5.34)\quad (Jf)(x) = \begin{cases} j(x) f(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

et on note que J est borné. En fait, en prenant $\operatorname{Supp} f \subset \{x : j(x) = 1\}$ ceci montre que $\| J \| = 1$. Alors (5.32) implique :

$$(5.35)\quad \begin{cases} (f,\ [R(z)-R(\bar{z})]g) = \\ 2i\,\mathrm{Im}\,z\,(JR(z)f\,,\,JR(z)g)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(1) = \\ 2i\,\mathrm{Im}\,z\,((JR(z)f)^{\wedge},(JR(z)g)^{\wedge})_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(1) \end{cases}$$

Dans la dernière équation $(JR(z)f)^{\wedge}$ désigne la transformée de Fourier de $JR(z)f$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ et l'équation s'en suit d'après la formule de Parseval. L'équation (5.35) sera substituée dans (5.28). Pour ceci on définit :

$$(5.36)\quad \hat{f}(\xi,z) = \int_{\Omega} \overline{w(x,\xi,\bar{z})}\, f(x)\,dx \quad , f\in \mathcal{E}'_{L_2}(\Omega), \mathrm{Im}\,z\neq 0$$

où $w(x,\xi,z)$ est définie par (5.20), (5.22). On note que pour $\xi\in\mathbb{R}^n$ et $z\in\mathbb{C}^+_{1/2}$ fixés l'intégrale dans (5.36) converge ponctuellement. La connextion avec (5.35) est donnée par :

<u>*Lemme 5.3*</u> : *Pour tout* $f\in\mathcal{E}'_{L^2}(\Omega)$ *et* $z\in\mathbb{C}^+_{1/2}$,

$$\hat{f}(\xi,z)/(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - z) \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

et

$$(5.37)\quad \hat{f}(\xi,z) = (\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - z)(JR(z)f)^{\wedge}(\xi)$$

<u>*Démonstration*</u> :

Une preuve historique peut être basée sur l'observation que, formellement,

$$(5.38)\begin{cases} (A-z)w(x,\xi,z) = (A-z)j(x)\,w_0(x,\xi) + (A-z)w'(x,\xi,z) \\ \qquad = M(x;\xi) + (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - z)j(x)w_0(x;\xi) \\ \qquad\quad - M(x;\xi) \\ \qquad = (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - z)j(x)w_0(x;\xi) \end{cases}$$

et ainsi

$$(5.39)\begin{cases} \hat{f}(\xi,z) = \int_\Omega \overline{R(\bar z)(A-\bar z)w(x,\xi,\bar z)}\,f(x)\,dx \\ \qquad = \int_\Omega \overline{(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - \bar z)j(x)w_0(x,\xi)}\,R(z)f(x)\,dx \\ \qquad = (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - z)\int_\Omega \overline{w_0(x,\xi)}\,j(x)\,R(z)f(x)\,dx \\ \qquad = (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 - z)\,(JR(z)f)^\wedge(\xi) \end{cases}$$

Cet argument n'est pas rigoureux parce que $w(\cdot,\xi,z)$ n'est pas dans $L_2(\Omega)$. Une preuve rigoureuse peut être donnée comme suit. (5.20), (5.22) et (5.36) impliquent que si $f \in L_2(\Omega_r) \subset \mathcal{E}'_{L^2}(\Omega)$ alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$.

(5.40)
$$\left\{\begin{aligned}\hat{f}(\xi, z) &= \int_{\Omega_r} \overline{w_0(x,\xi)} j(x) f(x)dx + \int_{\Omega_r} \overline{w'(x,\xi,\bar{z})}\, f(x)dx \\ &= (Jf)^{\wedge}(\xi) - \int_{\Omega_r} \overline{R(\bar{z})\, M(x,\xi)}\, f(x)dx \\ &= (Jf)^{\wedge}(\xi) - \int_{\Omega_{r_0+1}} R(z)\, \overline{M(x,\xi)}\, f(x)dx \\ &= (Jf)^{\wedge}(\xi) + \\ &\int_{\Omega_{r_0+1}} \overline{(\Delta^* + \nu|\xi|^2 + (\lambda+\nu)|\xi\cdot a|^2\}\{j(x) w_0(x,\xi)\}}\,. \\ &\qquad\qquad R(z) f(x)\, dx\end{aligned}\right.$$

Le dernier pas s'en suit de la définition (5.17) de $M(x;\xi)$. Le prochain et dernier pas est vrai parce que $M(\cdot;\xi) \in L_2(\Omega_{r_0+1}) \subset L_2(\Omega)$ et $f \in L_2(\Omega_r) \subset L_2(\Omega)$. Pour déduire (5.37) de (5.40) il est nécessaire d'intégrer par partie dans la dernière intégrale. Pour ceci on introduit les fonctions locales :

(5.41) $$\phi_m(x) = \phi_1(m - |x|) \quad , x \in \mathbb{R}^n$$

qui satisfait $\phi_m(x) \equiv 0$ pour $|x| \geqslant m$ et $\phi_m(x) \equiv 1$ pour $|x| \leqslant m-1$. Si $m-1 \geqslant r_0+1$ alors $\phi_m(x) \equiv 1$ sur Ω_{r_0+1} et aussi :

(5.42)
$$\left\{\begin{aligned}\hat{f}(\xi, z) &= (Jf)^{\wedge}(\xi) \\ &\quad + \int_{\Omega} \overline{(\Delta^* + \nu|\xi|^2 + (\lambda+\nu)|\xi\cdot a|^2)\{j(x) w_0(x;\xi)\}}\, \phi_m(x) R(z) f(x)dx\end{aligned}\right.$$

Maintenant $R(z)f \in H^N(\Delta^*;\bar{\Omega})$ ce qui implique $\phi_m R(z) f \in \mathcal{E}'^{1}_{L_2}(\bar{\Omega})$. En outre $j(x)\, w_o(x;\xi) \in H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$ parce que c'est une fonction qui s'annulle dans un voisinage de $\partial\Omega$. Ainsi la condition de Newmann généralisée implique en prenant $u = j(x)\,\overline{w_o(x;\xi)}$ et $v = \phi_m(x)\, R(z) f(x)$ que :

$$(5.43)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Delta^*\{j(x)\,\overline{w_o(x;\xi)}\}\,\phi_m(x)\,R(z)f(x)\,dx = \\ \displaystyle\qquad -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, D_j\{j(x)\,\overline{w_o(x;\xi)}\}\, D_i(\phi_m(x)\,R(z)f(x))\,dx \end{cases}$$

On note que $j(x)\, w_o(x;\xi) \in H^1(\Omega_{m+1})$ et $\phi_m R(z) f \in H^N(\Delta^*, \Omega_{m+1})$ parce que $\phi_m(x) \equiv 0$ près de $\{x : |x| = m+1\}$. Ainsi une seconde application de (3.18) implique en échangeant les rôles de u et v, puisque $A_{ij} = {}^T A_{ji}$:

$$(5.44)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Delta^*\{j(x)\,\overline{w_o(x;\xi)}\}\,\phi_m(x)\,R(z)f(x)\,dx = \\ \displaystyle\int_\Omega j(x)\,\overline{w_o(x;\xi)}\;\Delta^*\{\phi_m(x)\,R(z)f(x)\}\,dx \end{cases}$$

Aussi, les règles de différentiabilité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ impliquent, puisque $A_{ij} = {}^T A_{ji}$.

$$(5.45)\quad \begin{cases} \Delta^*\{\phi_m(x)\,R(z)f(x)\} = \Delta^*\phi_m(x)\cdot R(z)f(x) + \\ \displaystyle 2\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, D_j\phi_m(x)\cdot D_i R(z) f(x) + \phi_m(x)\,\Delta^* R(z) f(x) \end{cases}$$

En combinant (5.42), (5.44), (5.45) et l'équation $R(z)f = -f - zR(z)f$ cela donne :

(5.46)
$$\begin{cases} \hat{f}(\xi, z) = (Jf)^\wedge(\xi) \\ + \int_\Omega j(x)\overline{w_o(x;\xi)}\,(\Delta^* + \nu|\xi|^2 + (d+\nu)|\xi\cdot a|^2)\{\phi_m(x)R(z)f(x)\}dx \\ = (Jf)^\wedge(\xi) + \int_\Omega j(x)\overline{w_o(x;\xi)}\,\{\Delta^*\phi_m\,R(z)f \\ \quad + 2\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\,D_j\phi_m(x)\,D_iR(z)f - \phi_m f - (z - \nu|\xi|^2 - (d+\nu)|\xi\cdot a|^2)\cdot \\ \qquad \phi_m(x)R(z)f\}\,dx \\ = (Jf)^\wedge(\xi) - \int_\Omega \overline{w_o(x;\xi)}\,j(x)\,\phi_m(x)\,f(x)dx \\ \quad + (\nu|\xi|^2 + (d+\nu)|\xi\cdot a|^2 - z)\int_\Omega \overline{w_o(x;\xi)}\,j(x)\phi_m(x)R(z)f(x)dx \\ \quad + \int_\Omega \overline{w_o(x;\xi)}\,j(x)\,\{\Delta^*\phi_m\cdot R(z)f(x) \\ \qquad + 2\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\,D_j\phi_m(x)\,D_iR(z)f(x)\}\,dx \end{cases}$$

On note que $\phi_m(x) \equiv 1$ sur $\operatorname{Supp} f$ quand $m-1 \geqslant r$. Ainsi, les deux premiers termes du membre de droite de (5.46) s'annulent et ainsi :

$$
(5.47)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\hat{f}(\xi,z)}{(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)} = \int_{\Omega_0} \overline{w_0(x;\xi)}\,\phi_m(x) j(x) R(z) f(x) dx \\
&+ \frac{1}{(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)} \int_{\Omega} \overline{w_0(x;\xi)} \{\Delta^* \phi_m \cdot j(x) R(z) f(x) \\
&+ 2\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j \phi_m \cdot j(x) D_i R(z) f(x)\} dx = \Phi_n(\phi_m J R(z) f) \\
&+ \frac{1}{(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)} \Phi_n(\Delta^* \phi_m J R(z) f + 2\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j \phi_m \cdot J D_i R(z) f),
\end{aligned}
\right.
$$

où Φ_n désigne la transformée de Fourier dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Il est clair de la forme (5.47) que $\hat{f}(\xi,z)/(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ puisque $(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)^{-1}$ est bornée et mesurable sur $\mathbb{R}^n$ quand $\operatorname{Im} z \neq 0$. En outre $J R(z) f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et $J D_i R(z) f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ parce que $R(z) f \in H^N(\Delta^*;\Omega)$ et $\operatorname{Supp} \Delta^* \phi_m \cup \operatorname{Supp} D_j \phi_m \subset \{x : m-1 \leqslant |x| \leqslant m\}$ $\forall j = 1,\dots,n$.
Il s'en suit d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\phi_m J R(z) f \to J R(z) f$ et $\Delta^* \phi_m J R(z) f + 2\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j \phi_m \cdot J D_i R(z) f \to 0$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ quand $m \to \infty$. Finalement, en faisant tendre $m \to \infty$ dans (5.47) cela donne (5.37) parce que Φ_n est continue dans $L_2(\mathbb{R}^n)$.

En combinant (5.35) et (5.37) cela donne :

$$(5.48)\quad \begin{cases} (f\,,\ [R(z)-R(\bar{z})g]) \\ = 2i\,\mathrm{Im}\,z\,\big((\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)^{-1}\hat{f}(\xi,z), \\ \qquad (\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)^{-1}\hat{g}(\xi,z)\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + o(1) \\ = 2i\,\mathrm{Im}\,z \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{\hat{f}(\xi,z)}\,\hat{g}(\xi,z)}{|\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z|^2}\,d\xi \quad + o(1) \end{cases}$$

En outre, le terme $o(1)$ tend vers zéro uniformément pour $\gamma = \mathrm{Re}\,z \in I$ et $\beta = \mathrm{Im}\,z \to 0$ (Lemme 3.9). Ainsi, par intégration dans (5.48) cela donne :

$$(5.49)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_I (f\,,\ [R(\gamma+i\beta)-R(\gamma-i\beta)]g\,d\gamma \\ = \displaystyle\int_I\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\beta}{\pi}\,\frac{\overline{\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)}\,\hat{g}(\xi,\gamma\pm i\beta)}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\,d\xi\,d\gamma \quad + o(1) \\ = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{\beta}{\pi}\int_I \frac{\overline{\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)}\,\hat{g}(\xi,\gamma\pm i\beta)}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\,d\gamma\Big)\,d\xi \quad + o(1) \end{cases}$$

La seconde équation s'en suit d'après la première forme du théorème de Fubini. On note que le lemme 5.3 implique que $\hat{f}(\xi,z)/(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2-z)$ est une fonction continue de $z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$.

On note aussi que (5.49) représente deux équations correspondant au choix du signe $\pm$. Les deux sont obtenues de (5.48) par substitution de $z=\gamma\pm i\beta$.

Le théorème de Stone (5.28) et (5.49) seront maintenant combinés pour obtenir une représentation de la mesure spectrale ($f,\Pi(I)g$). La limite quand $\beta\to 0^+$ de l'intégrale intérieure dans (5.49) peut être évaluée par le moyen d'une propriété bien connue du noyau de Poisson. La formulation suivante est due à E.C. TITCHMARSH [16].

Lemme 5.4 : *Soit* $\phi(\gamma)$, $\gamma\in\mathbb{R}$ *une fonction à valeur complexe telle que* $\phi(\gamma)/(1+\gamma^2)\in L_1(\mathbb{R})$ *et on suppose que les limites* $\phi(a_+)$ *et* $\phi(a_-)$ *existent. Alors :*

$$(5.50)\quad \lim_{\beta\to 0^+}\frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(\gamma)}{(\gamma-a)^2+\beta^2}\,d\gamma = \frac{1}{2}\left[\phi(a_+)+\phi(a_-)\right]$$

Pour appliquer ce résultat à (5.49) quelques informations concernant la continuité ponctuelle de $\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)$ sont nécessaires. On note que pour chaque $\xi\in\mathbb{R}^n$ fixé l'application $\gamma\pm i\beta\to w(\cdot,\xi,\gamma\pm i\beta)\in\left[L^2_{Loc}(\bar{\Omega})\right]^n$ est continue pour $\gamma\in I$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$ d'après le lemme (3.9). En particulier pour chaque $f\in\mathcal{E}'_{L_2}(\bar{\Omega})$ les limites :

$$(5.51)\quad \hat{f}(\xi,\gamma\pm i0) = \int_{\Omega}\overline{w(x,\xi,\gamma\mp i0)}\,f(x)\,dx$$

existent pour chaque $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$. Le résultat suivant sera prouvé.

Lemme 5.5 : *Pour chaque* $f\in\mathcal{E}'_{L_2}(\bar{\Omega})$

$$(5.52)\quad \begin{cases} \hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta) \text{ est continue pour tout } \xi\in\mathbb{R}^n, \\ \gamma\in\mathbb{R} \text{ et } \beta\geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration

En vue de la définition (5.36) de $\hat{f}(\xi, z)$ il sera suffisant de montrer que l'application $(\xi, \gamma \pm i\beta) \mapsto w(\cdot, \xi, \gamma \pm i\beta)\ L^2_{loc}(\bar{\Omega})^n$ est uniformément continue pour $\xi \in K$, $\gamma \in I$ et $0 < \beta \leq \beta_0$ où $K \subset IR^n$ est un ensemble compact, $I = [a, b]$ et $\beta_0 > 0$. En outre, dans la définition (5.22) de $w(x, \xi, z)$ le terme $j(x) w_0(x; \xi)$ est indépendant de z et est continue pour $(x, \xi) \in IR^n \times IR^n$ ce qui implique $\xi \mapsto j(\cdot)\, w_0(\cdot\, \xi) \in L_2^{loc}(\bar{\Omega})^n$ est uniformément continue. On considère maintenant $w'(\cdot, \xi, z) = -R(z) M(\cdot; \xi)$. La continuité de $M(x; \xi)$ sur $IR^n \times IR^n$ implique que $\xi \mapsto M(\cdot, \xi) \in L_2(\Omega_{r_0+1})$ est uniformément continue pour $\xi \in K$. En outre, si m est une constante positive le lemme 3.8 implique qu'il y a $N = N(I, \beta_0, m) > 0$ telle que :

$$
(5.53) \quad \begin{cases} \| w'(\cdot, \xi, \gamma \pm i\beta) - w'(\cdot, \xi', \gamma' \pm i\beta') \|_{L_2(\Omega_m)} \\[2ex] \qquad \leq N \, \| M(\cdot\,; \xi) - M(\cdot\,; \xi') \|_{L_2(\Omega_{r_0+1})} \end{cases}
$$

pour tous $\xi, \xi' \in IR^n$, $\gamma \in I$ et $0 < \beta \leq \beta_0$. En combinant ceci et l'inégalité triangulaire on a :

$$
(5.54) \quad \begin{cases} \| w'(\cdot, \xi, \gamma \pm i\beta) - w'(\cdot, \xi', \gamma' \pm i\beta') \|_{L_2(\Omega_m)} \\ \leq \| w'(\cdot, \xi, \gamma \pm i\beta) - w'(\cdot, \xi', \gamma \pm i\beta) \|_{L_2(\Omega_m)} \\ + \| w'(\cdot, \xi', \gamma \pm i\beta) - w'(\cdot, \xi', \gamma' \pm i\beta') \|_{L_2(\Omega_m)} \\[1ex] \leq N \, \| M(\cdot\,; \xi) - M(\cdot\,; \xi') \|_{L_2(\Omega_{r_0+1})} \\ \quad + \| w'(\cdot, \xi'; \gamma \pm i\beta) - w'(\cdot, \xi', \gamma' \pm i\beta') \|_{L_2(\Omega_m)} \end{cases}
$$

pour tous $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, γ et γ' dans I et $0 < \beta, \beta' \leq \beta_0$.
Ainsi l'uniforme continuité de $(\xi, \gamma \pm i\beta) \mapsto w(\cdot, \xi, \gamma \pm i\beta) \in L_2^{loc}(\bar{\Omega})$ pour $\xi \in K$, $\gamma \in I$, $0 < \beta \leq \beta_0$ s'en suit de l'uniforme continuité de $\xi \longmapsto M(\cdot\,; \xi) \in L_2(\Omega_{r_0+1})$ pour $\xi \in K$ et du lemme 3.9.

Le lemme 5.5 implique que les fonctions $\hat{f}_+(\xi)$ et $\hat{f}_-(\xi)$ définies par

$$(5.55) \quad \hat{f}_\pm(\xi) = \hat{f}(\xi, \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2 \mp i0), \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Une comparaison avec (5.23) montre que

$$(5.56) \quad \hat{f}_\pm(\xi) = \int_\Omega \overline{w_\pm(x;\xi)}\, f(x)\,dx \quad , \ f \in \mathcal{E}'_{L_2}(\bar{\Omega})$$

Ces fonctions seront utilisées pour calculer la limite du membre de droite de (5.49) pour $\beta \to 0^+$. La limite de l'intégrale intérieure est donnée par :

<u>*Lemme 5.6*</u> : *Pour tout* $f \in \mathcal{E}'_{L_2}(\bar{\Omega})$

$$(5.57) \begin{cases} \lim\limits_{\beta\to 0^+} \dfrac{\beta}{\pi} \displaystyle\int_I \dfrac{\overline{\hat{f}(\xi, \gamma \pm i\beta)}\ \hat{g}(\xi, \gamma \pm i\beta)}{(\gamma - \mu|\xi|^2 - (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2 + \beta^2}\, d\gamma \\ = \chi_I(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\ \overline{\hat{f}_\mp(\xi)}\ \hat{g}_\mp(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où

$$(5.58) \qquad \chi_I(\gamma) = \begin{cases} 1 & , \ a < \gamma < b \\ 1/2 & , \ \gamma = a \ \text{ et } \ \gamma = b \\ 0 & , \ \gamma < 0 \ \text{ et } \ \gamma > b \end{cases}$$

Démonstration : On fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ et on écrit, pour brièveté,

$$(5.59) \quad F_\pm(\gamma,\beta) = \chi_I(\gamma)\,\overline{\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)}\,\hat{g}(\xi,\gamma\pm i\beta)$$

Ainsi

$$(5.60) \quad F_\pm(\gamma,0) = \chi_I(\gamma)\,\overline{\hat{f}(\xi,\gamma\pm i0)}\,\hat{g}(\xi,\gamma\pm i0)$$

et

$$(5.61) \quad F_\pm(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2,0) = \chi_I(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\,\overline{\hat{f}_\mp(\xi)}\,\hat{g}_\mp(\xi)$$

Maintenant le lemme 5.5 implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon) > 0$ telle que

$$(5.62) \quad \begin{cases} |F_\pm(\gamma,\beta) - F_\pm(\gamma,0)| \leqslant \varepsilon \\ \text{pour tout } \gamma \in I \text{ et } 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 \end{cases}$$

En outre,

$$(5.63) \quad \begin{cases} \dfrac{\beta}{\pi}\displaystyle\int_I \frac{F_\pm(\gamma,\beta)\,d\gamma}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2} \\ = \dfrac{\beta}{\pi}\displaystyle\int_I \frac{F_\pm(\gamma,\beta)-F_\pm(\gamma,0)}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\,d\gamma + \frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{F_\pm(\gamma,0)\,d\gamma}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2} \\ = I_1(\beta) + I_2(\beta) \end{cases}$$

Notation évidente. Maintenant (5.62) implique que

$$\text{(5.64)}\quad \begin{cases} I_1(\beta) \leqslant \dfrac{\beta}{\pi} \displaystyle\int_I \dfrac{|F_\pm(\gamma,\beta) - F_\pm(\gamma,0)|}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\, d\gamma \\ \leqslant \varepsilon\Big(\dfrac{\beta}{\pi}\displaystyle\int_I \dfrac{d\gamma}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2+\beta^2}\Big) = \varepsilon \end{cases}$$

pour tout $\beta \leqslant \beta_0(\varepsilon)$; c'est-à-dire, $\lim_{\beta\to 0} I_1(\beta) = 0$. En outre, le lemme 5.4 implique que $\lim_{\beta\to 0^+} I_2(\beta) = F_\pm(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2, 0)$. Ce résultat avec (5.63), impliquent (5.57).

Le lemme 5.6, l'équation (5.49) et le théorème de Stone suggèrent :

Théorème 5.7 : *Pour tout* f *et* $g \in \mathcal{E}'_{L_2}(\Omega)$ *et tout intervalle borné* $I \subset \mathbb{R}$

$$\text{(5.65)}\quad (f, \pi(I)g) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_I(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\,\overline{\hat{f}_\pm(\xi)}\,\hat{g}_\pm(\xi)\,d\xi .$$

Démonstration : On note que l'intégrale sur le membre de droite de (5.65) est finie par ce que $\hat{f}_\pm$ et $\hat{g}_\pm$ sont continues et $\chi_I(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)$ a un support compact. En outre, (5.65) s'en suit de (5.49) et (5.57) si le passage à la limite sous le signe intégral est vrai. Cà sera déduit à partir du théorème de convergence dominée de Lebesgue et l'estimation suivante.

Lemme 5.8 : *Pour tout* $f \in \mathcal{E}'_{L_2}(\Omega)$ *la fonction* $\hat{f}(\cdot, \gamma\pm i\beta) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $\gamma \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \geqslant 0$. *En outre, pour tout intervalle borné* $I \subset \mathbb{R}$ *et* $\beta_0 > 0$ *il existe une constante* $C = C(f, I, \beta_0)$ *telle que*

$$\text{(5.66)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi, \gamma\pm i\beta)|^2\, d\xi \leqslant C \\ \text{pour tout} \quad \gamma \in I \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 \end{cases}$$

Démonstration : Le commencement est l'équation (5.40) au-dessus qui peut s'écrire :

$$(5.67)\quad \hat{f}(\xi, z) = (Jf)^{\wedge}(\xi) + g(\xi, z) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{C}^+_{1/2}$$

où (5.68)
$$g(\xi, z) = -\int_{\Omega_{r_0+1}} \overline{M(x;\xi)}\, R(z) f(x)\, dx$$

Ce qui implique que :

$$(5.69)\quad |\hat{f}(\xi, z)|^2 \leqslant 2\left(|(Jf)^{\wedge}(\xi)|^2 + |g(\xi, z)|^2\right)$$

En outre,

$$(5.70)\quad \int_{\mathbb{R}^n} |(Jf)^{\wedge}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |Jf(x)|^2\, dx \leqslant \|f\|^2$$

Ainsi, il sera suffisant de prouver (5.66) avec $\hat{f}$ remplacée par g . Maintenant,

$$\begin{aligned}(5.71)\quad -M(x;\xi) &= \Delta^* j(x) w_0 + 2i \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\, D_k j(x)\, D_\ell(w_0(x;\xi)) \\ &= \left(\Delta^* j(x) + 2i \sum_{k,l=1}^{n} \xi_\ell A_{kl}\, D_k j(x)\right) w_0(x;\xi)\end{aligned}$$

car, en effet en utilisant (5.2a) et (5.17) on a :

$$\begin{aligned}-M(x;\xi) &= (\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\, j(x)\, w_0 \\ &= j(x)\Delta^* w_0 + w_0 \Delta^* j(x) + 2i \sum_{k,l=1}^{n} A_{kl}\, \xi_\ell\, D_k j(x)\, w_0(x;\xi) \\ &\quad + (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\, j(x)\, w_0\end{aligned}$$

Ainsi

(5.72) $$g(\xi, z) = \sum_{k,l=0}^{n} g_{k,l}(\xi, z)$$

où

(5.73) $$g_{0,0}(\xi, z) = \int_{\Omega} \overline{w_0(x;\xi)}\, \Delta^* j(x)\, R(z) f(x)\, dx$$

et

(5.74) $$g_{k,l}(\xi, z) = -2i A_{kl}\, \xi_l \int_{\Omega} \overline{w_0(x,\xi)}\, D_k j(x) R(z) f(x) dx \qquad k,l = 1,\dots,n$$

La formule de Parseval et le lemme (3.8) impliquent que :

(5.75) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |g_{0,0}(\xi, \gamma \pm i\beta)|^2 d\xi = \|(\Delta^* j) R(\gamma \pm i\beta) f\|^2_{L_2(\Omega_{r_0+1})} \\ \leqslant C^2 \|R(\gamma \pm i\beta) f\|^2_{L_2(\Omega_{r_0+1})} \leqslant C^2 M^2 \|f\|^2_{L_2(\Omega_r)} \end{cases}$$

Pour tout $\gamma \in I$, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ et C est une borne pour $|\Delta^* j(x)|$ et $M = M(I, \beta_0, r_0+1, r)$ est la constante du lemme 3.8. Pour trouver une estimation similaire pour $g_{k,l}(\xi, z)$ avec $k, l = 1, 2, \dots, n$, on note que :

(5.76) $$i\, \xi_l\, w_0(x;\xi) D_k j(x) = D_l\big(w_0(x;\xi) D_k j(x)\big) - w_0(x;\xi) D^2_{k,l}\, j(x)$$

où $D^2_{k,l} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_l\, \partial x_k}$.

En substituant dans (5.74) cela donne

$$(5.77)\quad \begin{cases} g_{k,l}(\xi,z) = 2A_{kl}\displaystyle\int_\Omega D_\ell(\overline{w_0(x;\xi)}\,D_k j(x))R(z)f(x)dx \\ \qquad - 2A_{kl}\displaystyle\int_\Omega \overline{w_0(x;\xi)}\,D^2_{k,l}j(x)\,R(z)\,f(x)\,dx \\ \qquad = g^1_{kl}(\xi,z) + g^2_{k,l}(\xi,z) \end{cases}$$

On note que pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé la fonction $\overline{w_0(x;\xi)}\,D_k j(x)$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$. En outre, $R(z)f \in H^N(\Delta^*,\Omega)$, et ainsi les dérivées $D_\ell R(z) f \in L_2(\Omega)$. Ainsi, la définition de la distribution dérivée implique :

$$(5.78)\quad g^1_{kl}(\xi,z) = -2A_{kl}\int_\Omega \overline{w_0(x;\xi)}\,D_k j(x)\,D_\ell(R(z)f(x))dx$$

En procédant comme dans le cas de $g_{0,0}(\xi,z)$ cela donne :

$$(79)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |g^1_{k,l}(\xi,\gamma\pm i\beta)|^2 d\xi = \|2A_{kl}D_k j(x)\,D_\ell R(\gamma\pm i\beta)f\|^2_{L^2(\Omega_{r_0+1})} \\ \leqslant C^2_{k,l}\,\|D_\ell R(\gamma\pm i\beta)f\|^2_{L^2(\Omega_{r_0+1})} \\ \leqslant C^2_{k,l}\,\|R(\gamma\pm i\beta)f\|^2_{H^1(\Delta^*,\Omega_{r_0+1})} \\ \leqslant C^2_{k,l}\,M^2\,\|f\|^2_{L_2(\Omega_r)} \end{cases}$$

pour tout $\gamma \in I$, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$ où $C_{kl} = \max|2A_{kl}D_k j(x)|$. Finalement, $g^2_{k,l}(\xi,z)$ admet la forme semblable à $g_{0,0}(\xi,z)$ et satisfait ainsi à l'estimation voulue (5.75). En combinant ces résultats cela donne l'estimation (5.66).

<u>*Preuve du théorème 5.7*</u> : On note qu'il suffit de prouver (5.65) dans le cas où $g = f$. Le cas général s'en suit. Ainsi seul le cas où $g = f$ sera considéré.

La limite du membre de gauche de l'équation (5.49) pour $\beta \to 0_+$ est $(f, \Pi(I) f)$ quand $g = f$, d'après le théorème de Stone, et le terme $o(1)$ tend vers zéro avec β.

L'intégrale sur la droite a la forme :

$$(5.80) \quad \int_{\mathbb{R}^n} I(\xi,\beta)\,d\xi = \int_{|\xi|\leqslant m} I(\xi,\beta)\,d\xi + \int_{|\xi|\geqslant m} I(\xi,\beta)\,d\xi$$

où

$$(5.81) \quad I(\xi,\beta) = \frac{\beta}{\pi} \int_I \frac{|\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)|^2}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\,d\gamma \,, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \ \beta>0$$

On choisit m dans (5.80) assez grand de sorte que $|\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2| \geqslant 1$ pour tout $|\xi|\geqslant m$ et ainsi $\chi_I(\mu|\xi|^2+(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)=0$ pour $|\xi|\geqslant m$. Après on note que la continuité de $\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)$, prouvée dans le lemme 5.5, implique qu'il existe une constante C_0 telle que :

$$(5.82) \quad \begin{cases} |f(\xi,\gamma\pm i\beta)|^2 \leqslant C_0 \\ \text{pour tout } \ |\xi|\leqslant m \,, \ \gamma\in I \,, \ 0<\beta\leqslant\beta_0 \end{cases}$$

Ainsi, pour $|\xi|\leqslant m$, $0<\beta\leqslant\beta_0$,

$$(5.83) \quad I(\xi,\beta) \leqslant C_0\Big(\frac{\beta}{\pi}\int_I \frac{d\gamma}{(\gamma-\mu|\xi|^2-(\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\Big) \leqslant C_0 .$$

Il s'en suit d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et du Lemme 5.6 que

$$(5.84)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\beta\to 0^+} \displaystyle\int_{|\xi|\leq m} I(\xi,\beta)\, d\xi = \int_{|\xi|\leq m} \chi_I(\nu|\xi|^2+(d+\nu)|\xi\cdot a|^2)|\hat{f}_{\mp}(\xi)|^2 d\xi \\ \qquad = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \chi_I(\nu|\xi|^2+(d+\nu)|\xi\cdot a|^2)|\hat{f}_{\mp}(\xi)|^2 d\xi \end{cases}$$

parce que $\chi_I(\nu|\xi|^2+(d+\nu)|\xi\cdot a|^2)\equiv 0$ pour $|\xi|\geq m$. Après, on note que :

$$(5.85)\quad 0 < \frac{\beta}{\pi}\,\frac{1}{(\gamma-\nu|\xi|^2-(d+\nu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2} \leq \frac{\beta}{\pi} \quad \text{pour}$$

tout $|\xi|\geq m$ et ainsi d'après le lemme 5.8.

$$(5.86)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{|\xi|\geq m} I(\xi,\beta)\, d\xi \\ = \displaystyle\int_I \int_{|\xi|\geq m} \left(\frac{\beta}{\pi}\,\frac{1}{(\gamma-\nu|\xi|^2-(d+\nu)|\xi\cdot a|^2)^2+\beta^2}\right)|\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)|^2 d\xi\, d\gamma \\ \leq \dfrac{\beta}{\pi}\displaystyle\int_I \int_{|\xi|\geq m} |\hat{f}(\xi,\gamma\pm i\beta)|^2 d\xi\, d\gamma \\ \leq \dfrac{|I|\, C\, \beta}{\pi} \end{cases}$$

où C est la constante du lemme 5.8 et $|I|$ est la longueur de I. Il s'en suit que :

$$(5.87)\qquad \lim_{\beta\to 0^+} \int_{|\xi|\geq m} I(\xi,\beta)\,d\xi = 0$$

En combinant (5.80), (5.84) et (5.87) on a :

$$(5.88)\qquad \lim_{\beta\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} I(\xi,\beta)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_I(\mu|\xi|^2+(1+\mu)|\xi\cdot a|^2)\,|\hat{f}_\pm(\xi)|^2\,d\xi$$

Ce qui complète la preuve du théorème 5.7.

Le théorème 5.7 fournit la clef de la relation qui existe entre la famille spectrale $\{\pi(\nu)\}$ de A et les fonctions propres généralisées $w_+(x;\xi)$ et $w_-(x;\xi)$. Il sera utilisé pour développer une analogie complète de la théorie de Plancherel pour des domaines extérieurs ayant la propriété de couverture finie. Les fonctions $\hat{f}_+(\xi)$ et $\hat{f}_-(\xi)$, données par (5.56) où $f\in \mathcal{E}'_{L_2}(\bar{\Omega})$, jouent le rôle des transformées de Fourier généralisées. Il sera montré après qu'elles sont toujours dans $L_2(\mathbb{R}^n)$.

<u>*Lemme 5.9*</u> : *Pour tout* $f\in\mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ *les fonctions* $\hat{f}_\pm(\xi)\in L_2(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$(5.89)\qquad \|\hat{f}_\pm\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

<u>*Démonstration*</u> : On applique le théorème 5.7 avec $g=f$ et $I=(-1,\gamma)$. Alors $\pi(I)=\pi(\gamma)$, puisque $\sigma(A)\subset\bar{\mathbb{R}}_+$, et ainsi puisque $\pi(\gamma)^*=\pi(\gamma)=\pi(\gamma)^2$,

$$(5.90)\qquad \|\pi(\gamma)f\|^2_{L_2(\Omega)} = (f,\pi(\gamma)f)_{L_2(\Omega)} = \int_{|\xi|\leq\sqrt{\gamma}} |\hat{f}_\pm(\xi)|^2\,d\xi$$

pour tout $\gamma \geqslant 0$. Maintenant on fait $\gamma \longrightarrow +\infty$. Le membre de gauche de (5.90) converge vers $\| f \|^2$ d'après une propriété basique des familles spectrales. Ainsi, le membre de droite admet une limite finie, ce qui prouve que $\hat{f}_\pm \in L_2(\mathbb{R}^n)$, et la forme limite de (5.90) est (5.89).

Le problème après, est d'étendre la définition de $\hat{f}_\pm$ de $\mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ sur tout $L_2(\Omega)$. Ceci est donné par

<u>Lemme 5.10</u> : *pour tout* $f \in L_2(\Omega)$ *les limites*

$$(5.91) \quad \hat{f}_\pm(\xi) = L_2(\mathbb{R}^n)\text{-}\lim_{M\to\infty} \int_{\Omega_M} \overline{w_\pm(x;\xi)}\, f(x)\, dx$$

existent et, avec cette définition étendue de $\hat{f}_\pm$, *l'équation (5.89) tient pour tout* $f \in L_2(\Omega)$.

<u>*Démonstration*</u> : On note que (5.91) coïncide avec (5.56) quand $f \in \mathcal{E}'_{L_2}(\bar{\Omega})$ et fournit ainsi une extension de la définition. Pour prouver l'existence de la limite (5.91) quand $f \in L_2(\Omega)$ on définit :

$$(5.92) \quad f_M(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \in \Omega_M = \Omega \cap \{x : |x| < M\} \\ 0 & , \ x \in \Omega - \Omega_M \end{cases}$$

et on note que $\lim_{M\to\infty} f_M = f$ dans $L_2(\Omega)$. On applique (5.89) pour $f_M - f_N \in \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$.

$$(5.93) \quad \| \hat{f}_{M\pm} - \hat{f}_{N\pm} \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \| f_M - f_N \|_{L_2(\Omega)}$$

pour tous M et N finies. Le membre de droite tend vers zéro quand

$M, N \to \infty$ dans tout chemin parce que $\{f_M\}$ est convergente dans $L_2(\Omega)$. Ainsi $\{\hat{f}_{M\pm}\}$ est une suite de Cauchy dans $L_2(IR^n)$ et ainsi converge vers $\hat{f}_\pm \in L_2(IR^n)$ car $L_2(IR^n)$ est complet. Ceci prouve (5.91) parce que :

$$(5.94) \qquad \hat{f}_{M\pm}(\xi) = \int_{\Omega_M} \overline{w_\pm(x;\xi)}\, f(x)\, d\xi$$

Finalement, (5.89) est étendue pour f arbitraire dans $L_2(\Omega)$ en faisant $N = 0$ dans (5.93); c'est-à-dire, $f_N = 0$, $\hat{f}_{N\pm} = 0$, et en faisant $M \to \infty$.

<u>*Corollaire 5.11*</u> : *La représentation (5.65) de la mesure spectrale Π (I) tient pour tous f et g dans $L_2(\Omega)$ et tout $I \subset IR$.*

<u>*Démonstration*</u> : Ecrire (5.65) pour f_M et g_M et faire $M \to \infty$.

<u>*Corollaire 5.12*</u> : *Pour tout $f \in L_2(\Omega)$ et tout $\gamma \in IR$*

$$(5.95) \qquad \Pi(\gamma) f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{|\xi| \leq \sqrt{\gamma}} w_\pm(x,\xi)\, \hat{f}_\pm(\xi)\, d\xi & , \gamma \geq 0 \\ 0 & , \gamma < 0 \end{cases}$$

dans $L_2(\Omega)$. En particulier, le membre de droite de (5.95) définit une fonction dans $L_2(\Omega)$ pour tout $\gamma \in IR$.

<u>*Démonstration*</u> : On note en premier que $w_\pm(x;\xi) = j(x) w_0(x;\xi) + w'_\pm(x;\xi)$ où $(\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi \cdot a|^2) w'_\pm(x;\xi) = M(x;\xi)$ pour tout $x \in \Omega$, $\xi \in IR^n$. Maintenant $M(x;\xi) \in C^\infty(IR^n \times IR^n)$ et

$\mathrm{Supp}\, M(\cdot\,;\xi) \subset \{x : r_0 \leqslant |x| \leqslant r_0+1\}$ est disjoint avec $\Gamma = \mathbb{R}^n - \Omega$. Il s'en suit facilement d'après la théorie de régularité standard pour Δ^* que $w_\pm(x;\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Aussi, $\hat{f}_\pm \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et ainsi $\hat{f}_\pm \in L_1(K)$ où K est un compact quelconque. Ainsi le membre de droite de (5.95) est fini pour tout $x \in \Omega$. Pour prouver l'équation (5.95) on note que (5.65) avec $f \in L_2(\Omega)$, $g \in D(\Omega)$ et $I = (-1, \gamma)$ implique

$$\text{(5.96)} \quad \begin{cases} (g, \Pi(\gamma) f) = \displaystyle\int_{|\xi| \leqslant \sqrt{\gamma}} \overline{\hat{g}_\pm(\xi)}\, \hat{f}_\pm(\xi)\, d\xi \\[2ex] \qquad = \displaystyle\int_{|\xi| \leqslant \sqrt{\gamma}} \left(\int_\Omega w_\pm(x;\xi)\, \overline{g(x)}\, dx \right) \hat{f}_\pm(\xi)\, d\xi \\[2ex] \qquad = \displaystyle\int_\Omega \overline{g(x)} \left(\int_{|\xi| \leqslant \sqrt{\gamma}} w_\pm(x;\xi)\, \hat{f}_\pm(\xi)\, d\xi \right) dx , \end{cases}$$

où le dernier pas s'en suit d'après le théorème de Fubini, (5.96) implique que les membres de droite et de gauche de (5.95) coïncident comme distributions dans $D'(\Omega)$. En particulier, le membre de droite de (5.95) coïncide avec une distribution dans $L_2(\Omega)$.

Le corollaire (5.12) implique que tout $f \in L_2(\Omega)$ admet une fonction propre étendue dans $L_2(\Omega)$.

<u>*Corollaire 5.13*</u> : *Pour tout* $f \in L_2(\Omega)$

$$\text{(5.97)} \quad f(x) = L_2(\Omega) - \lim_{M \to \infty} \int_{|\xi| \leqslant M} w_\pm(x;\xi)\, \hat{f}_\pm(\xi)\, d\xi \;.$$

Ceci s'en suit immédiatement d'après (5.95) et une propriété basique de la famille spectrale. On note que (5.97) définit deux représentations de f , une avec $w_+(x;\xi)$ et l'autre avec $w_-(x;\xi)$.

Il est remarqué en chapitre II que la transformée de Fourier définit un opérateur $\Phi : L_2(IR^n) \longrightarrow L_2(IR^n)$ par $\Phi f = \hat{f}$ (l'indice n sera suspendu dans ce qui suit) et que Φ est unitaire et fournit une représentation spectrale pour l'opérateur A_0 . Ce résultat sera généralisé pour des domaines extérieurs $\Omega \in L.C$. Pour ceci on définit les opérateurs

(5.98) $$\Phi_\pm : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(IR^n)$$

par

(5.99) $$\Phi_\pm(f) = \hat{f}_\pm \qquad \text{pour tout} \qquad f \in L_2(\Omega)$$

Alors la généralisation suivante de la théorie de Plancherel tient.

<u>*Théorème 5.14*</u> : *Les opérateurs* Φ_+ *et* Φ_- *sont unitaires;*

(5.100) $$\| \Phi_\pm f \|_{L_2(IR^n)} = \| f \|_{L_2(\Omega)} \qquad \text{pour tout} \qquad f \in L_2(\Omega)$$

et

(5.101) $$\Phi_\pm L_2(\Omega) = L_2(IR^n)$$

ou, équivalement,

(5.102) $$\Phi_\pm^* \Phi_\pm = 1 \qquad \text{et} \qquad \Phi_\pm \Phi_\pm^* = 1$$

Théorème 5.15 : *Soit* $\psi(\gamma)$ *bornée, fonction mesurable au sens de Lebesgue de* $\gamma \geq 0$. *Alors* $\psi(A)$ *définie par le théorème spectral, est un opérateur borné sur* $L_2(\Omega)$ *et*

$$(5.103) \qquad \Phi_{\pm}\, \psi(A) = \psi(\nu|\cdot|^2 + (d+\nu)|\cdot\cdot a|^2)\, \Phi_{\pm}$$

où $\psi(\nu|\cdot|^2 + (d+\nu)|\cdot\cdot a|^2)$ *désigne l'opérateur de multiplicité par* $\psi(\nu|\xi|^2 + (d+\nu)|\xi\cdot a|^2)$ *dans* $L_2(IR^n)$.

Le théorème 5.15 sera prouvé en premier et alors utilisé pour la preuve du théorème 5.14.

Démonstration du théorème 5.15 : On note en premier qu'il sera suffisant de montrer que

$$(5.104) \qquad (\Phi_{\pm} A u)(\xi) = (\nu|\xi|^2 + (d+\nu)|\xi\cdot a|^2)(\Phi_{\pm} u)(\xi)$$

pour tout $u \in D(A)$. L'équation (5.103) s'en suit par des méthodes standards d'approximation; [voir KATO, pp. 530-531]. Après il suffit de montrer (5.104) pour toute fonction dans un "core" de A; c'est-à-dire, un ensemble $D \subset D(A)$ telle que $\{(u, Au) : u \in D\}$ soit dense dans le graphe de A . Il sera montré que

$$(5.105) \qquad D = D(A) \cap \mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$$

Pour ceci soit $u \in D(A)$ et on définit $u_m = \phi_m u$ où $\phi_m(x) = \phi_1(m - |x|)$ est la fonction (5.41) utilisée dans la preuve du lemme 5.3. Il sera montré que $u_m \in D$ pour $m > r_0 + 1$

et $u_m \to u$ pour la norme du graphe de A. On rappelle que $\phi_m(x) \equiv 0$ pour $|x| \geq m$, $\phi_m(x) \equiv 1$ pour $|x| \leq m-1$, $0 \leq \phi_m(x) \leq 1$ et $\phi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi :

$$\Delta^* u_m = \phi_m \Delta^* u + 2 \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j \phi_m D_i u + u \Delta^* \phi_m \tag{5.106}$$

ce qui implique que $u_m \in H^1(\Delta^*, \Omega)$. En outre, u_m satisfait la condition de Newmann généralisée (3.18) parce que u satisfait (3.18) et $\phi_m(x) \equiv 1$ au voisinage de $\partial\Omega$ (près de $\partial\Omega$). Pour voir ceci on note que si $w \in H^1(\Omega)$ alors (5.106) implique, après quelques réarrangements de termes,

$$\left\{\begin{aligned} &\int_\Omega \Big\{(\Delta^* u_m) w + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u_m D_i w\Big\}\, dx \\ &\quad = \int_\Omega \Big\{(\Delta^* u)\phi_m w + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_j u\, D_i(\phi_m w)\Big\}\, dx \\ &\quad + \int_\Omega \Big\{(u w)\Delta^* \phi_m + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_i(u w) D_j \phi_m\Big\}\, dx \end{aligned}\right. \tag{5.107}$$

<u>*Démonstration de (5.107)*</u> :

$$\int_\Omega \Big\{ (\Delta^* u_m) w + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j u_m D_i w \Big\} dx =$$

$$\int_\Omega \Big\{ \phi_m w \Delta^* u + 2w \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_i\phi_m D_j u + (uw)\Delta^*\phi_m$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (u D_j \phi_m + \phi_m D_j u) D_i w \Big\} dx$$

$$= \int_\Omega \Big\{ (\Delta^* u)\phi_m w + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j u D_i(\phi_m w) \Big\} dx$$
$$+ \int_\Omega \Big\{ (uw)\Delta^*\phi_m + w \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j\phi_m D_i u + u \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j \phi_m D_i w \Big\} dx$$

$$= \int_\Omega \Big\{ (\Delta^* u)\phi_m w + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j u D_i(\phi_m w) \Big\} dx$$

$$+ \int_\Omega \Big\{ (uw)\Delta^*\phi_m + \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_j \phi_m D_i(uw) \Big\} dx$$

Maintenant, le premier terme sur la droite dans (5.107) est nul parce que u satisfait (3.18) et $\phi_m w \in H'(\Omega)$. Le second terme peut s'écrire :

$$(5.108) \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \int_\Omega \left(uw\, D^2_{j,i}\phi_m + D_i(uw) D_j\phi_m \right) dx$$

Or, d'après la définition de la dérivée dans la théorie des distributions on a : pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \{ (uw)\, D^2_{j,i}\, \psi + D_i(uw)\, D_j \psi \} \, dx = 0 .$$

Ainsi, la dernière intégrale dans (5.107) s'annule parce que $\phi_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{Supp} \nabla \phi_m$ est un ensemble compact de Ω. Finalement, le fait que $u_m \to u$ et $A u_m = -\Delta^* u_m \to Au = -\Delta^* u$ est évident d'après (5.106) et les propriétés de ϕ_m.

Après (5.104) sera vérifiée pour $u \in D$. Pour ceci on note finalement que :

$$(5.109) \quad \begin{cases} (\Phi_{\pm} Au)(\xi) = \displaystyle\int_{\Omega} \overline{w_{\pm}(x;\xi)}\, Au(x)\, dx \\[2ex] \qquad = \displaystyle\int_{\Omega} \overline{\phi_m(x)\, w_{\pm}(x;\xi)}\, Au(x)\, dx \end{cases}$$

où m est choisie telle que $\phi_m(x) \equiv 1$ sur $\operatorname{Supp} u$. Maintenant $w_{\pm}(\cdot\,;\xi) \in H^N_{loc}(\Delta^*;\bar{\Omega})$ et ainsi $\phi_m w_{\pm}(\cdot\,;\xi) \in H^N(\Delta^*,\Omega) = D(A)$ d'après les arguments donnés au-dessus. En outre,

$$(5.110) \quad \begin{cases} A(\phi_m(x)\, w_{\pm}(x;\xi)) = -\Delta^*(\phi_m(x)\, w_{\pm}(x;\xi)) \\[1ex] = -\phi_m(x)\, \Delta^* w_{\pm}(x;\xi) - 2 \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, D_j \phi_m\, D_i w_{\pm}(x;\xi) \\[1ex] - w_{\pm}(x;\xi)\, \Delta^* \phi_m(x) = -\Delta^* w_{\pm}(x;\xi) \quad \text{pour tout } x \in \operatorname{Supp} u \end{cases}$$

parce que $\phi_m(x) \equiv 1$ sur $\operatorname{supp} u$. Aussi,

$$\Delta^* w_\pm + (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2) w_\pm = 0$$

Ainsi (5.109) implique :

$$(5.111)\quad \begin{cases} (\Phi_\pm Au)(\xi) = (\phi_m w_\pm(\cdot;\xi), Au)_{L_2(\Omega)} \\ \qquad = (A(\phi_m w_\pm(\cdot;\xi)), u)_{L_2(\Omega)} \\ \qquad = (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2) \int_\Omega \overline{w_\pm(x;\xi)}\, u(x)\,dx \\ \qquad = (\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)(\Phi_\pm u)(\xi) \end{cases}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Finalement, en remplaçant u par u_m dans (5.111) et en faisant tendre $m \to \infty$ cela donne (5.104) parce que $u_m \to u$ et $Au_m \to Au$ dans $L_2(\Omega)$ et $\Phi_\pm$ est continue.

Démonstration du théorème 5.14 : L'équation (5.100) énonce que l'équation (5.89) tient pour tout $f \in L_2(\Omega)$ et est prouvée dans le lemme 5.10. Il est aussi équivalent à la première équation des équations (5.102). L'équation (5.101) est équivalente à la seconde équation de (5.102). Ce n'est pas la même chose pour le théorème spectral pour A. La preuve de ceci, donnée au-dessous, est basée sur le théorème 5.15 et les deux lemmes suivants :

Lemme 5.16: $\Phi_{\pm}\Phi_{\pm}^{*} = 1$ *si, et seulement si,*

(5.112) $$N(\Phi_{\pm}^{*}) \equiv \{ h : \Phi_{\pm} h = 0 \} = \{0\}$$

Lemme 5.17 : *Pour tout* $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

(5.113) $$\Phi_{\pm}^{*} h(x) = L_2(\Omega)\text{-}\lim_{M \to \infty} \int_{|\xi| \leq M} w_{\pm}(x;\xi) h(\xi) d\xi .$$

Démonstration du lemme 5.16 : Il est clair que $\Phi_{\pm}\ \Phi_{\pm}^{*} = 1$ implique (5.112). Pour prouver la réciproque soit $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et on définit

(5.114) $$h = (\Phi_{\pm}\ \Phi_{\pm}^{*} - 1) f \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

En appliquant $\Phi_{\pm}^{*}$ à (5.114) et en utilisant la première équation de (5.102) cela donne :

(5.115) $$\Phi_{\pm}^{*} h = ((\Phi_{\pm}^{*}\ \Phi_{\pm})\ \Phi_{\pm}^{*} - \Phi_{\pm}^{*}) f = (\Phi_{\pm}^{*} - \Phi_{\pm}^{*}) f = 0$$

Ainsi (5.112) implique que $h = 0$; c'est-à-dire $(\Phi_{\pm}\ \Phi_{\pm}^{*} - 1) f = 0$ pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et ainsi $\Phi_{\pm}\ \Phi_{\pm}^{*} = 1$.

Démonstration du lemme 5.17 : Soit $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et on définit

(5.116) $$h_M(\xi) = \begin{cases} h(\xi) & , |\xi| \leq M \\ 0 & , |\xi| > M \end{cases}$$

Alors si $f \in \mathcal{E}'_{L^2}(\Omega)$ la définition de $\Phi_{\pm}^{*}$ implique que

(5.117) $$(f, \Phi_\pm^* h_M)_{L_2(\Omega)} = (\Phi_\pm f, h_M)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

En écrivant (5.117) sous forme intégrale et en substituant la représentation (5.56) pour $\Phi_\pm f = \hat{f}_\pm$ cela donne :

(5.118) $$\begin{cases} (f, \Phi_\pm^* h_M)_{L_2(\Omega)} = \displaystyle\int_{|\xi|\leq M} \left(\int_\Omega w_\pm(x;\xi) \overline{f(x)}\, dx \right) h(\xi) d\xi \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega \left(\int_{|\xi|\leq M} w_\pm(x;\xi) h(\xi) d\xi \right) dx \end{cases}$$

d'après le théorème de Fubini. Ce qui implique que

(5.119) $$\Phi_\pm^* h_M(x) = \int_{|\xi|\leq M} w_\pm(x;\xi) h(\xi) d\xi \in L_2(\Omega)$$

puisque $\mathcal{E}'_{L^2}(\bar{\Omega})$ est dense dans $L_2(\Omega)$. On note, qu'en particulier, ceci prouve que le membre de droite de (5.119) est dans $L_2(\Omega)$. Finalement, si $M \to \infty$ alors $h_M \to h$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ et ainsi $\Phi_\pm^* h_M \to \Phi_\pm h$, puisque $\Phi_\pm^*$ est bornée. Ainsi (5.119) implique (5.113).

<u>*Démonstration du théorème (5.14) (Fin)*</u> : D'après le lemme (5.16) il suffira de vérifier (5.112). Pour cette fin soit $h \in N(\Phi_\pm^*)$; c'est-à-dire $h \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et

(5.120) $$\Phi_\pm^* h = 0$$

Il s'en suit que si $\psi(\gamma)$ est une fonction mesurable au sens de Lebesgue bornée sur $\gamma \geq 0$ quelconque alors :

(5.121) $$h'(\xi) = \psi(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\,h(\xi) \in N(\Phi_\pm^*)$$

En effet, si $f \in L_2(\Omega)$ alors le théorème 5.15 implique que :

(5.122) $$\left\{\begin{aligned} (f, \Phi_\pm^* h')_{L_2(\Omega)} &= (\Phi_\pm f, h')_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{f}_\pm(\xi)\,\psi(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\,h(\xi)}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\bar{\psi}(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2)\hat{f}_\pm(\xi)}\,h(\xi)\,d\xi \\ &= (\bar{\psi}(\mu|\cdot|^2 + (\lambda+\mu)|\cdot\,\cdot a|^2)\,\Phi_\pm f, h)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ &= (\Phi_\pm \bar{\psi}(A) f, h)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (\bar{\psi}(A) f, \Phi_\pm^* h)_{L_2(\Omega)} \overset{=0}{} \end{aligned}\right.$$

d'après (5.120). En choisissant $f = \Phi_\pm^* h'$ dans (5.122) cela donne (5.121).

Maintenant, soit $0 < M < M'$ et on définit

(5.123) $$\psi(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2) = e^{-itA_0^{1/2}}\,\chi_{(M,M')}(\xi) \quad , t \in \mathbb{R}$$

De plus $e^{-itA_0^{1/2}} h = e^{-i|\xi|c_1 t} h_1 + e^{-i|\xi\cdot a|c_2 t} h_2$ (Définition de l'exponentielle d'un opérateur où $h_2\cdot w = 0$ et $h_1 = \|h_1\|\,w$).

Ainsi (5.121) et le lemme (5.17) impliquent que :

(5.124) $$(\Phi_\pm h')(x) = \int_{M \le |\xi| \le M'} w_\pm(x;\xi)\,e^{-itA_0^{1/2}}\,h(\xi)\,d\xi = 0$$

dans $L_2(\Omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in \mathbb{R}_+$ avec $M' > M$.

Si la décomposition (5.25) pour $W_\pm(x,\xi)$, prouvée dans le corollaire 5.2, est subsituée dans (5.124) l'équation peut s'écrire :

$$(5.125) \quad \begin{cases} j(x)\, u_0(x;t) + u_1(x;t) + u_2(x;t) = 0 \\ \text{dans} \quad L_2(\Omega) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où, en utilisant les notations du chapitre II,

$$(5.126) \quad \begin{cases} u_0(x;t) = u_0^{(1)}(x;t) + u_0^{(2)}(x;t) \quad \text{avec} \\ u_0^{(1)}(x;t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} e^{i(x\cdot\xi - t c_1 |\xi|)} h_1(\xi)\, d\xi\, a, \\ u_0^{(2)}(x;t) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} e^{i(x\cdot\xi - t c_2 |\xi\cdot a|)} h_2(\xi)\, d\xi\, a, \end{cases}$$

$$(5.127) \quad \begin{cases} u_1(x;t) = u_1^{(1)}(x;t) + u_1^{(2)}(x;t) \quad \text{avec} \\ u_1^{(1)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} e^{i(\pm|x| - c_1 t)|\xi|}\, \theta_\pm^{(1)}\!\left(\frac{x}{|x|};\xi\right) h_1(\xi)\, d\xi \\ u_1^{(2)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} e^{i(\pm|x||\xi| - c_2 |\xi\cdot a| t)}\, \theta_\pm^{(2)}\!\left(\frac{x}{|x|},\xi\right) h_2(\xi)\, d\xi \end{cases}$$

et

$$(5.128) \quad \begin{cases} u_2(x;t) = u_2^{(1)}(x;t) + u_2^{(2)}(x;t) \quad \text{avec} \\ u_2^{(1)}(x;t) = \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} q_\pm^{(1)}(x;\xi)\, e^{-it c_1 |\xi|}\, h_1(\xi)\, d\xi \\ u_2^{(2)}(x;t) = \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} q_\pm^{(2)}(x;\xi)\, e^{-it c_2 |\xi\cdot a|}\, h_2(\xi)\, d\xi \end{cases}$$

Dans 5.126 à 128 on a $h = h_1 + h_2$, $q_\pm = q_\pm^{(1)} + q_\pm^{(2)}$ et $\theta_\pm = \theta_\pm^{(1)} + \theta_\pm^{(2)}$.

On note que :

$$(5.129) \quad u_0(\cdot\,;t) = e^{-itA_0^{1/2}} \mathring{h}_{M,M'} \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

où

$$(5.130) \quad \mathring{h}_{M,M'} = \Phi^* \chi_{M,M'}(|\cdot|)\, h$$

et Φ est la transformée de Fourier dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi,

$$(5.131) \quad \begin{cases} \|u_0(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathring{h}_{M,M'}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ \qquad = \|\chi_{M,M'}(|\cdot|)h\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \displaystyle\int_{M \leq |\xi| \leq M'} |h(\xi)|^2\, d\xi \end{cases}$$

Ce qui complète la preuve du théorème (5.14), il sera montré que :

$$(5.132) \quad \lim_{t \to \mp\infty} \|u_0(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

En combinant (5.131) et (5.132) cela donne

$$(5.133) \quad \int_{M \leq |\xi| \leq M'} |h(\xi)|^2\, d\xi = 0 \qquad \text{pour tous} \qquad 0 < M < M'$$

ce qui implique clairement que $h = 0$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ et ainsi (5.112).

Pour prouver (5.132) on note en premier que :

$$(5.134) \quad u_1^{(1)}(x;t) = \frac{F_\pm^1(\pm|x| - c_1 t;\, x/|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}$$

où

$$(5.135)\quad \begin{cases} F_\pm^1(r,\eta) = \displaystyle\int_{M\leq|\xi|\leq M'} e^{ir|\xi|}\,\theta_\pm^1(\eta,\xi)h_1(\xi)\,d\xi \\ r\in\mathbb{R},\ \eta\in S^{n-1} \end{cases}$$

En outre, $F_\pm^1 \in L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})$. Pour vérifier ceci on note que $F_\pm^1$ s'écrivent en introduisant les coordonnées sphériques $\xi = \rho w$, $\rho \geqslant 0$ et $w \in S^{n-1}$.

$$(5.136)\quad F_\pm^1(r,\eta) = \int_M^{M'} e^{ir\rho}\Big(\int_{S^{n-1}} \theta_\pm^1(\eta,\rho w)h_1(\rho w)\rho^{n-1}dw\Big)d\rho$$

On rappelle que $\theta_\pm^1(\eta,\xi) \in C^\infty(S^{n-1}\times\mathbb{R}^n-\{0\})$, d'après le corollaire 5.2. Une application de la formule de Parseval et du théorème de Fubini donne :

$$(5.137)\quad \begin{cases} \|F_\pm^1\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = 2\pi\displaystyle\int_M^{M'}\int_{S^{n-1}} \cdot \\ \Big(\displaystyle\int_{S^{n-1}} |\theta_\pm^1(\eta,\rho w)\rho^{\frac{n-1}{2}}|^2 d\eta\Big)|h_1(\rho w)\rho^{\frac{n-1}{2}}|^2 dw\,d\rho \end{cases}$$

Maintenant $|\theta_\pm^1(\eta;\xi)|\xi|^{\frac{n-1}{2}}| \leqslant C$ pour $x \in S^{n-1}$ et $M \leqslant |\xi| \leqslant M'$ d'après le corollaire 5.2 où $C = C(M,M')$ est une constante convenable. Ainsi (5.137) implique

$$(5.138)\quad \|F_\pm^1\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} \leqslant 2\pi|S^{n-1}|C^2\|h_1\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

La représentation (5.134), ensemble avec (5.138) et le théorème (I-5 du Chapitre I) impliquent que :

$$(5.139)\quad \lim_{t\to\mp\infty} \|u_1^{(1)}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Pour montrer que $\lim_{t\to\mp\infty} \| u_1^{(2)}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$. On note tout d'abord que $\theta_\pm^2$ a les mêmes propriétés que $\theta_\pm^1$. De plus, en posant :

$\xi = \rho w$, $\pm|x| - c_2 t = r$ et $x/|x| = h$

On a :

$$u_1^{(2)}(x;t) = \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_{M\leq|\xi|\leq M'} e^{i(r + c_2 t(1-|w.a|))|\xi|} \theta_\pm^2(h;\xi) h_2(\xi) d\xi$$

D'où :

$$\| u_1^{(2)}(x;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_{M\leq|\xi|\leq M'} e^{ir|\xi|} |\theta_\pm^2(h;\xi) h_2(\xi)| d\xi$$
$$= \frac{F_\pm^2(r;h)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}$$

Notation évidente. Ainsi, $\lim_{t\to\pm\infty} \| u_1^{(2)}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$ pour les mêmes raisons qu'au dessus et par suite $\lim_{t\to\pm\infty} \| u_1(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$ s'en suit d'après l'inégalité triangulaire.

Finalement, le lemme (I.7) sera utilisé ici pour prouver que :

$$(5.140) \quad \lim_{t\to\mp\infty} \| u_2(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Pour vérifier les hypothèses de ce lemme, on note en premier que (5.125) implique $u_2(\cdot\,;t) \in L_2(\Omega)$ parce que $u_0(\cdot\,;t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ et $u_1(\cdot\,;t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. En outre, (5.125) implique aussi

$$(5.141) \quad \lim_{t\to\mp\infty} \| u_2(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega_r)} = 0$$

pour tout $r > 0$, parce que $u_0(\cdot\,;t)$ a cette propriété d'après le théorème (4.5) et

$$(5.142)\quad \| u_1^{(j)}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(\Omega_r)} \leqslant \int_{-c_jt}^{r-c_jt}\int_{S^{n-1}} |F^j(r';\eta)|^2 d\eta\, dr',$$

qui tend vers 0 quand $|t| \to \infty$. Ainsi $u_2(x;t) = u_2^{(1)}(x;t) + u_2^{(2)}(x;t)$ satisfait (2.69) et (2.70). Finalement l'estimation(5.26) pour $q_\pm(x;\xi)$ et le corollaire 5.2 impliquent :

$$(5.143)\quad |u_2(x;t)| \leqslant \int_{M\leqslant|\xi|\leqslant M'} |h(\xi)|d\xi \Big/ |x|^{\frac{n+1}{2}} = \frac{C'(M,M',h)}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $|x| \geqslant r_0$ et donc $u_2(x;t)$ vérifie (2.71). Ceci complète la preuve de (5.141).

Finalement, pour prouver (5.132) on note que si $r > r_0 + 1$ alors (5.125) implique

$$(5.144)\quad \begin{cases} \| u_0(\cdot\,;t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \| u_0(\cdot\,;t)\|_{L_2(B(r))} \\ + \| u_0(\cdot\,;t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n - B(r))} \leqslant \| u_0(\cdot\,;t)\|_{L_2(B(r))} \\ + \| u_1(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} + \| u_2(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} \end{cases}$$

Maintenant le troisième terme à droite tend vers zéro quand $t \to \mp\infty$, d'après le théorème (4.5), (5.139) et (5.141). Ceci complète la preuve de (5.132) et du théorème (5.14).

Le corollaire (5.13) et le théorème (5.15) impliquent que les deux expressions des fonctions propres basées sur $W_{\pm}(x;\xi)$ fournissent deux représentations spectrales de l'opérateur A. Ce résultat fournit la base pour l'étude dans les parties 6 et 7 des solutions de l'équation de LAMÉ dans Ω. Elle peut être formulée comme suit :

Corollaire 5.18 : *Si $\psi(\gamma)$ est bornée, fonction mesurable au sens de Lebesgue de $\gamma \geq 0$ alors $\psi(A)$ admet la représentation.*

$$\psi(A) f(x) = L_2(\Omega) - \lim_{M \to \infty} \int_{|\xi| \leq M} W_{\pm}(x;\xi)\, \psi(\mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi \cdot a|^2)\, \hat{f}_{\pm}(\xi)\, d\xi \tag{5.45}$$

Démonstration : (5.145) s'en suit immédiatement de (5.97) et (5.103).

CHAPITRE VI

OPERATEURS D'ONDE ET SOLUTIONS DE L'EQUATION DE LAMÉ DANS DES DOMAINES EXTERIEURS.

Dans ce chapitre la solution dans $L_2(\Omega)$ est construite par le moyen du développement des fonctions propres du Chapitre V et son comportement asymptotique pour $t \to \infty$ est calculé. Le résultat principal dans ce Chapitre est le théorème qui énonce que toute solution dans $L_2(\Omega)$ est asymptotiquement égale à une onde libre dans $L_2(\mathbb{R}^n)$, comme suggéré en Chapitre IV. Comme un corollaire, l'existence des opérateurs d'ondes $W_\pm$ est prouvée et une représentation explicite dérive pour eux. Les résultats exhibent les relations précises entre la théorie de scattering stationnaire des Chapitres III et V et la théorie du scattering dépendant du temps du Chapitre IV.

Les solutions à valeurs complexes définies par :

$$(6.1) \qquad v(x;t) = e^{-itA^{1/2}} h \qquad , h \in L_2(\Omega)$$

sont étudiées dans ce chapitre. Les résultats corrrespondants pour les solutions à valeurs réelles sont donnés dans le Chapitre VII. Le corollaire (5.18) implique que $v(x;t)$ admet deux représentations spectrales correspondant aux deux ensembles complets de fonctions propres $\{w_+(x;\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$ et $\{w_-(x;\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$. Elles ont la forme :

$$(6.2) \begin{cases} v^{(j)}(x;t) = L_2(\Omega) - \lim\limits_{M \to \infty} \displaystyle\int_{|\xi| \leq M} w_+^j(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{matrix} c_1|\xi| \\ c_2|\xi \cdot a| \end{matrix}\right.} \hat{h}_+^j(\xi)\, d\xi \, , \; j=1,2 \\ \\ v(x;t) = v^{(1)}(x;t) + v^2(x;t) \end{cases}$$

et

$$(6.3)\quad \begin{cases} v^{(j)}(x;t) = L_2(\Omega)-\lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_{|\xi|\leq M} w_-^{j}(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{smallmatrix} c_1|\xi| \\ c_2|\xi\cdot a|\end{smallmatrix}\right.} \hat{h}_-^{j}(\xi)\,d\xi \,,\ j=1,2 \\ v(x;t) = v^{(1)}(x;t) + v^{(2)}(x;t) \end{cases}$$

où

$$(6.4)\quad \hat{h}_\pm^{j}(\xi) = L_2(\mathbb{R}^n)-\lim_{M\to\infty} \int_{\Omega_M} \overline{w_\pm^{j}(x;\xi)}\, h^{j}(x)\,dx = \Phi_\pm h^{j}(\xi)$$

On rappelle que :

$$(6.5)\quad w_\pm(x;\xi) = j(x)\, w_0(x;\xi) + w'_\pm(x;\xi)$$

où $w'_+(x;\xi)$ et $w'_-(x;\xi)$ se comportent semblablement comme des ondes sortante et entrante respectivement.

Dans ce principe, l'une ou l'autre des représentations (6.2), (6.3) peuvent être utilisées pour connaître le comportement asymptotique de $v(x;t)$ pour $t\to\infty$. Il sera montré que la représentation entrante (6.3) conduit à un simple résultat particulier. En substituant la décomposition (6.5) de dans (6.3) cela donne :

$$(6.6)\quad v(x;t) = j(x)\, v_0^+(x;t) + v^+(x;t)$$

où

$$(6.7)\quad v_0^{+(j)}(x;t) = L_2(\mathbb{R}^n)\text{-}\lim_{M\to\infty} \int_{|\xi|\leq M} w_0^{(j)}(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{array}{l} c_1|\xi| \\ c_2|\xi\cdot a| \end{array}\right.}\ \hat{h}_-^{j}(\xi)\, d\xi$$

et

$$(6.8)\quad v^{+(j)}(x;t) = L_2(\Omega)\text{-}\lim_{M\to\infty} \int_{|\xi|\leq M} w_-^{\prime(j)}(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{array}{l} c_1|\xi| \\ c_2|\xi\cdot a| \end{array}\right.}\ \hat{h}_-^{j}(\xi)\, d\xi$$

En particulier, l'existence des limites dans (6.3) et (6.7) qui sont connues d'après les théorèmes du développement des valeurs propres pour A et A_0, impliquent que la limite dans (6.8) existe. On note que $v_0^+(x;t)$ est une onde libre dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ de la forme :

$$(6.9)\quad v_0^+(x;t) = e^{-itA_0^{1/2}}\, h_0^+(x)$$

où $h_0^+ \in L_2(\mathbb{R}^n)$ est définie par $h_0^+(x) = v_0^+(x;0)$.
Ainsi, d'après (4.4) et (5.4).

$$(6.10)\quad h_0^+ = \Phi^* \hat{h}_- = \Phi^* \Phi_- h$$

où Φ est la transformée de Fourier dans $L_2(\mathbb{R}^n)$. Avec cette notation les résultats principaux de ce Chapitre peuvent s'énoncer comme suit :

Théorème 6.1 : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C$. *Ainsi pour tout* $h \in L_2(\Omega)$.

$$L_2(\Omega)-\lim_{t\to\infty} v^+(\cdot\,;t) = 0 \tag{6.11}$$

et ainsi

$$\lim_{t\to\infty} \| v(\cdot\,;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{6.12}$$

Théorème 6.2 (Corollaire): *Si* Ω *est un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C$. *Alors l'opérateur d'onde* $W_+ = W_+ (A_0^{1/2} , A^{1/2} , J_\Omega)$ *existe et*

$$W_+ = \Phi^* \Phi_- \tag{6.13}$$

En particulier, $W_+ : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(IR^n)$ *est unitaire. En outre, elle définit une équivalence unitaire entre* A *et* A_0 :

$$\Pi(\gamma) = W_+^* \, \Pi_0(\gamma)\, W_+ \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in IR \tag{6.14}$$

On note que le théorème (4.6) du chapitre IV est pronné par le corollaire 6.2.

Démonstration du théorème 6.1 :

Les énoncés de (6.11) et (6.12) sont équivalents, d'après (6.6). En outre, (6.12) peut s'écrire :

(6.15) $$\lim_{t\to\infty} \|(e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_0^{1/2}} \Phi^* \Phi_-)h\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

d'après (6.1), (6.9) et (6.10) où $J^* : L_2(IR^n) \longrightarrow L_2(\Omega)$ est définie par :

(6.16) $$J^* f(x) = j(x) f(x) \qquad \text{pour tout } x \in \Omega \; .$$

La notation J^* est utilisée parce que (6.16) définit l'opérateur adjoint de $J : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(IR^n)$ définie par (6.34). Maintenant, l'opérateur $e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_0^{1/2}} \Phi^* \Phi_-$ est uniformément borné pour tout $t \in IR$. Il s'en suit que pour prouver le théorème (6.1) il suffit de vérifier (6.15) pour des vecteurs h dans un sous ensemble dense de $L_2(\Omega)$, comme dans la preuve du théorème (IV.3). Il conviendra d'utiliser l'ensemble dense :

(6.17) $$D_0^- = \Phi_-^* \, D_0(IR^n) = \{ h \in L_2(\Omega) : \hat{h}_- \in D_0(IR^n) \}$$

où $D_0(IR^n)$ est l'ensemble défini dans le chapitre I. D_0^- est dense dans $L_2(\Omega)$ parce que $D_0(IR^n)$ est dense dans $L_2(IR^n)$ et $\Phi_-^* : L_2(IR^n) \longrightarrow L_2(\Omega)$ est unitaire, d'après le théorème (5.14).

On suppose que $\hat{h}_- \in D_0(IR^n)$ telle que :

(6.18) $$v^{+(j)}(x;t) = \int_{K_j} w_-^{(j)}(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{smallmatrix} c_1|\xi| \\ c_2|\xi \cdot a|\end{smallmatrix}\right.} \hat{h}_-^j(\xi)\, d\xi$$

où K_j, support de $\hat{h}_-^j$, est compact, la convergence (6.11) sera prouvée par le moyen du lemme (1.7).

On rappelle que $w_-^j(x;\xi)$ est solution de

$$(6.19)\quad (\Delta^* + \mu|\xi|^2 + (\lambda+\mu)|\xi\cdot a|^2) w'_-(x;\xi) = M(x;\xi)\ ,\ x\in\Omega\ ,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

où $M(x;\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. En particulier, $w'_-(x;\xi) \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. En outre, le corollaire 5.2 implique que

$$(6.20)\quad w'_-(x;\xi) = \frac{e^{-i|\xi||x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\,\theta_-\left(\frac{x}{|x|};\xi\right) + q_-(x;\xi)$$

où $\theta_-(\eta;\xi) \in C^\infty(S^{n-1}\times\mathbb{R}^n - \{0\})$ et pour chaque compact $K \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ il existe une constante $M_- = M_-(K)$ telle que :

$$(6.21)\quad \begin{cases} |q_-(x;\xi)| \leqslant \dfrac{M_-}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} & \text{pour tout } x\in\Omega-\{0\} \\ \text{et } \xi\in K. \end{cases}$$

en substituant (6.20) dans (6.18) cela donne :

$$(6.22)\quad v^{+(\delta)}(x;t) = v_1^{+(\delta)}(x;t) + v_2^{+(\delta)}(x;t)$$

où

$$(6.23)\quad \begin{cases} v_1^{+(1)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\displaystyle\int_a^b e^{-i|\xi|(|x|+c_1 t)}\,\theta_-^1\left(\frac{x}{|x|};\xi\right)\hat{h}_-^1(\xi)\,d\xi \\[2ex] v_1^{+(2)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}\displaystyle\int_a^b e^{-i|\xi|(|x|+c_2|w\cdot a|t)}\,\theta_-^2\left(\frac{x}{|x|};\xi\right)\hat{h}_-^2(\xi)\,d\xi \end{cases}$$

et

$$(6.24)\quad v_2^{+(j)}(x;t) = \int_K q_-^j(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{smallmatrix} c_1 |\xi| \\ c_2|\xi\cdot a|\end{smallmatrix}\right.}\, \hat{h}_-^j(\xi)\, d\xi$$

En introduisant les coordonnées sphériques $\xi = \rho w$ dans la première équation (6.23) cela donne :

$$(6.25)\quad \begin{cases} v_1^{+(1)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_a^b e^{-i(|x|+c_1 t)\rho} \\ \cdot \left\{ \displaystyle\int_{S^{n-1}} \theta_-^1\left(\frac{x}{|x|};\rho w\right) \hat{h}_-^1(\rho w)\, \rho^{n-1} dw \right\} d\rho \end{cases}$$

où a et b sont des nombres tels que $K = K_1 \cup K_2 = \operatorname{Supp} \hat{h}_- = \operatorname{Supp}(\hat{h}_-^1 + \hat{h}_-^2) \subset \{\xi : 0 < a \leq |\xi| \leq b\}$. En outre, la fonction entre accolades dans (6.25) est dans la classe $D(\mathbb{R}_+)$ comme fonction de ρ.

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$(6.26)\quad \begin{cases} v_1^{+(1)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-i(|x|+c_1 t)\rho}}{i(|x|+c_1 t)} \\ \cdot \left\{ \dfrac{\partial}{\partial\rho} \displaystyle\int_{S^{n-1}} \theta_-^1\left(\frac{x}{|x|};\rho w\right) \hat{h}_-^1(\rho w)\, \rho^{n-1} dw \right\} d\rho , \end{cases}$$

et la fonction entre accolades dans (6.26) est bornée pour tout $a \leq \rho \leq b$ et $x/|x| \in S^{n-1}$. Soit M_0 une borne on a :

$$(6.27)\quad |v_1^{+(1)}(x;t)| \leqslant \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}(|x|+c_1 t)} \int_a^b M_0\, d\ell \leqslant \frac{M_0(b-a)}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}$$

pour tout $x \in \Omega - \{0\}$ et $t>0$. La dernière inégalité tient parce que $|x|+c_1 t > |x|$ pour $t>0$. En combinant (6.21) et (6.24) cela donne une estimation similaire pour $v_2^{+(\delta)}(x;t)$,

C'est-à-dire :

$$(6.28)\quad |v_2^{+(\delta)}(x;t)| \leqslant \int_{K_\delta} |q_-^{(\delta)}(x;\xi)||\hat{h}_-^\delta(\xi)|d\xi \leqslant \frac{M_- M_1^\delta}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}$$

pour tout $x \in \Omega - \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$ où $M_1^\delta = \int_{K_\delta} |\hat{h}_1^\delta(\xi)|d\xi$.

En combinant (6.22), (6.27) et (6.28) cela donne

$$(6.29)\quad |v^{+(\delta)}(x;t)| \leqslant \frac{N^\delta}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{pour tout } t>0 \text{ et } x \in \Omega - \{0\}$$

puisque $|v_1^{+(2)}(x;t)| \leqslant \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_a^b e^{-i|\xi|(|x|+c_2 t)}\, \theta_-^2\left(\frac{x}{|x|};\xi\right)\hat{h}_-^2(\xi)d\xi$

(cf. V), où $N^\delta = N(h^\delta)$ est une constante souhaitable.

L'équation (6.29) et la condition (2.71). L'équation (6.6) implique que $v^{+(\delta)}(\cdot;t) \in L_2(\Omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (et donc $v^+(\cdot;t) \in L_2(\Omega)$ d'après l'inégalité triangulaire) parce que $v^{(\delta)}(\cdot;t) \in L_2(\Omega)$ et $v_0^{+(\delta)}(\cdot;t) \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Finalement, $v^+(x;t)$ satisfait la condition de décroissance locale.

$$(6.30)\quad \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \|v^+(\cdot;t)\|_{L_2(K\cap\Omega)} = 0 \\ \text{pour tout compact } K \subset \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

parce que $v(x;t)$ et $V_o^+(x;t)$ ont cette propriété d'après le théorème (4.5). Ainsi le lemme (1.7) implique (6.11) quand $h \in D_o^-$. L'extension de ce cas pour $h \in L_2(\Omega)$ arbitraire est faite en utilisant la densité de D_o^- dans $L_2(\Omega)$. L'argument ne sera pas reproduit ici.

Démonstration du corollaire 6.2 : Le commencement de la démonstration est l'équation (6.15) qui tient pour tout $h \in L_2(\Omega)$ d'après le théorème (I.7, Chapitre I). On note que si $J_\Omega : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ et $J : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ sont définies par (4.21) et (5.34), respectivement, alors :

$$(6.31)\quad \left\{\begin{aligned} & J_\Omega e^{-itA^{1/2}} - e^{-itA_o^{1/2}} \Phi^* \Phi_- \\ & = J e^{-itA^{1/2}} - e^{-itA_o^{1/2}} \Phi^* \Phi_- + (J_\Omega - J) e^{-itA^{1/2}} \\ & = J\left(e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_o^{1/2}} \Phi^* \Phi_-\right) \\ & \quad + (JJ^* - 1) e^{-itA_o^{1/2}} \Phi^* \Phi_- + (J_\Omega - J) e^{-itA^{1/2}} \end{aligned}\right.$$

On note que $(JJ^* - 1) f(x) = (j^2(x) - 1) f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$(6.32)\quad (J_\Omega - J) f(x) = \begin{cases} (1 - j(x)) f(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

En particulier $\| J J^* - 1 \| \leqslant 1$, $\| J_\Omega - J \| \leqslant 1$, $\mathrm{Supp}(JJ^* - 1)f \subset \{ x : |x| \leqslant r_0 \}$ et $\mathrm{Supp}(J_\Omega - J)f \subset \{ x : |x| \leqslant r_0 \}$. Ainsi (6.31) implique que, pour tout $h \in L_2(\Omega)$,

$$(6.33) \quad \begin{cases} \| (J_\Omega e^{-itA^{1/2}} - e^{-itA_0^{1/2}} \Phi^* \Phi_-) h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ \leqslant \| (e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_0^{1/2}} \Phi^* \Phi_-) h \|_{L_2(\Omega)} \\ \quad + \| e^{-itA_0^{1/2}} (\Phi^* \Phi_- h) \|_{L_2(B(r_0))} + \| e^{-itA^{1/2}} h \|_{L_2(\Omega_{r_0})} \end{cases}$$

Maintenant, le premier terme sur la droite dans (6.33) tend vers zéro quand $t \to \infty$ d'après (6.15). En outre, les deux derniers termes tendent vers zéro quand $t \to \infty$ d'après le théorème 4.5, appliqué à A_0 et A respectivement. Ainsi (6.33) implique

$$(6.34) \quad \lim_{t \to \infty} \| (J_\Omega e^{-itA^{1/2}} - e^{-itA_0^{1/2}} \Phi^* \Phi_-) h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

pour tout $h \in L_2(\Omega)$. Ceci est équivaut à l'équation

$$(6.35) \quad \lim_{t \to \infty} \| e^{itA_0^{1/2}} J_\Omega e^{-itA^{1/2}} h - \Phi^* \Phi_- h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

pour tout $h \in L_2(\Omega)$, parce que $e^{itA_0^{1/2}}$ est unitaire. L'équation (6.35) implique que $W_+ = W_+(A_0^{1/2}, A^{1/2}, J_\Omega)$ existe et satisfait (6.13).

L'unicité de $W_+ : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ s'en suit d'après l'unicité de $\Phi_- : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ (théorème (5.14) et $\Phi^* : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$. Pour compléter la preuve du corollaire

6.2 il reste à vérifier (6.14).

On note que (6.13) et l'unicité de Φ et Φ_- impliquent que $W_+^* = \Phi_-^* \Phi = W_+^{-1}$. Ainsi, (6.14) peut s'écrire sous la forme équivalente.

$$(6.36) \qquad \Pi(\gamma) = \Phi_-^* \Phi \Pi_o(\gamma) \Phi^* \Phi_- \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

ou

$$(6.37) \qquad \Phi_- \Pi(\gamma) \Phi_-^* = \Phi \Pi_o(\gamma) \Phi^* \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

mais la dernière équation est correcte parce que les deux membres coïncident avec l'opération de multiplication avec $H(\gamma - \mu|\xi|^2 - (\lambda+\mu)|\xi.a|^2)$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ d'après le théorème (5.15) et l'équation (I.15).

Maintenant, on considère la représentation sortante de $v(x;t)$, équation (6.2). En substituant (6.5) pour $w_+(x;\xi)$ dans (6.2) cela donne :

$$(6.38) \qquad v(x;t) = \mathcal{J}(x)\, v_o^-(x;t) + v^-(x;t)$$

où

$$(6.39) \qquad \begin{cases} v_o^{-(j)}(x;t) = L_2(\mathbb{R}^n)\text{-}\lim\limits_{M\to\infty} \displaystyle\int_{|\xi|<M} w_o^{(j)}(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{smallmatrix} c_1|\xi| \\ c_2|\xi.a|\end{smallmatrix}\right.} \hat{h}_+^j(\xi)\, d\xi \\ \\ v_o^- = v_o^{-(1)} + v_o^{-(2)} \end{cases}$$

et

$$(6.40) \qquad \begin{cases} v^{-(j)}(x;t) = L_2(\Omega)\text{-}\lim\limits_{M\to\infty} \displaystyle\int_{|\xi|<M} w_+'^{(j)}(x;\xi)\, e^{-it\left\{\begin{smallmatrix} c_1|\xi| \\ c_2|\xi.a|\end{smallmatrix}\right.} \hat{h}_+^j(\xi)\, d\xi \\ \\ v^- = v^{-(1)} + v^{-(2)} \end{cases}$$

En outre, $V_0^-(x;t)$ est un onde libre dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ de la forme :

(6.41) $$V_0^-(x;t) = e^{-itA_0^{1/2}} h_0^-(x)$$

où

(6.42) $$h_0^- = \Phi^* \hat{h}_+ = \Phi^* \Phi_+ h$$

Aussi, en substituant la représentation

(6.43) $$w_+'(x;\xi) = \frac{e^{i|\xi||x|}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \theta_+\left(\frac{x}{|x|};\xi\right) + q_+(x;\xi)$$

du corollaire (5.2) dans (6.40) cela donne :

(6.44) $$V^-(x;t) = V_1^-(x;t) + V_2^-(x;t)$$

où

(6.45) $$\begin{cases} V_1^{-(1)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_K e^{i|\xi|(|x|-c_1 t)} \theta_+^{(1)}\left(\frac{x}{|x|};\xi\right) \hat{h}_+^1(\xi)\, d\xi \\ V_1^{-(2)}(x;t) = \dfrac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \displaystyle\int_K e^{i|\xi|(|x|-c_2|w.a|t)} \theta_+^{(2)}\left(\frac{x}{|x|};\xi\right) \hat{h}_+^2(\xi)\, d\xi \\ V_1^- = V_1^{-(1)} + V_1^{-(2)} \end{cases}$$

et

(6.46) $$\begin{cases} V_2^{-(j)}(x;t) = \displaystyle\int_{K_j} q_+^{(j)}(x;\xi) e^{-it\left\{\substack{c_1|\xi| \\ c_2|\xi.a|}\right.} \hat{h}_+^j(\xi)\, d\xi \\ V_2^- = V_2^{-(1)} + V_2^{-(2)} \end{cases}$$

Dans les deux dernières équations, il est supposé, pour simplicité que $\hat{h}_+ \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{Supp}\hat{h}_+ = k_1 \cup k_2$. L'estimation (5.26) pour $q_+(x;\xi)$ implique que $|v_2^{-(j)}(x;t)| \leq M / |x|^{\frac{n+1}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et ainsi $\| v_2^-(\cdot\,;t)\| \to 0$ quand $t \to \pm\infty$ d'après l'inégalité triangulaire et les arguments utilisés pour la preuve du théorème (6.1). En outre, une intégration par parties dans (6.45) ne conduit pas à un résultat similaire pour $v_1^{-(j)}(x;t)$ quand $t \to \infty$. Ceci est parce que le terme $|x| - c_j t$ dans le dénominateur n'est pas plus grand que $|x|$ pour $t > 0$. En outre, $|x| - c_j t$ est supérieur à $|x|$ pour tout $t < 0$ et ainsi la méthode utilisée pour prouver le théorème 6.1 montre que :

$$(6.47) \qquad L_2(\Omega)-\lim_{t\to-\infty} v^-(\cdot\,;t) = 0$$

Ainsi, la représentation sortante conduit aux théorème et corollaire analogue à 6.1 et 6.2.

<u>*Corollaire 6.3*</u> : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C.$ *Alors pour tout* $h \in L_2(\Omega)$

$$(6.48) \qquad \lim_{t\to\infty} \| v(\cdot\,;t) - j(x)\, v_0^-(\cdot\,;t) \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

<u>*Corollaire 6.4*</u> : *Sous les mêmes hypothèses l'opérateur d'onde*

$$(6.49) \qquad W_- = W_-(A_0^{1/2}, A^{1/2}, J_\Omega) = s\text{-}\lim_{t\to-\infty} e^{itA_0^{1/2}} J_\Omega e^{-itA^{1/2}}$$

existe et

$$(6.50) \qquad W_- = \Phi^* \Phi_+$$

En particulier, $W_- : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ *est unitaire et satisfait*

(6.51) $\quad \Pi(\gamma) = W_-^* \, \Pi_0(\gamma) \, W_-$ pour tout $\quad \gamma \in \mathbb{R}$

Il sera noté que la preuve du théorème (6.1) et les corollaires dépendent essentiellement du théorème 4.5 qui garantit la propriété de décroissante locale des solutions dans $L_2(\Omega)$. Le chapitre VII , contiendra des résultats forts sur la décroissante des solutions dans $L_2(\Omega)$ et des solutions E.F., pour ce fait, on combinera le théorème 6.1 et les résultats sur les fonctions d'ondes asymptotiques (Chapitre I). Le rappel de ce chapitre est développé en montrant que si $v(x;t)$ est une solution d'E.F. alors les solutions asymptotiques $v_0^-(x;t)$ et $v_0^+(x;t)$ du théorème (6.1) et du corollaire (6.3) approchent $v(x;t)$ pour la norme de l'énergie.

Plus précisément, le résultat suivant est prouvé :

<u>*Théorème 6.5*</u> : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C$ *et* $h \in D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ *tel que* $v(\cdot;t) = e^{-itA^{1/2}} \cdot h$ *est une solution d'E.F. Alors* $h_0^{\pm} = W_{\pm} h \in D(A_0^{1/2}) = H^1(\mathbb{R}^n)$, *tel que*

$$v_0^{\pm}(\cdot;t) = e^{-itA_0^{1/2}} h_0^{\pm}$$ *sont solutions d'E.F., et*

(6.52) $$\lim_{t\to\pm\infty} \| D_k v(\cdot;t) - j(\cdot) D_k v_0^{\pm}(\cdot;t) \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

<u>*Démonstration*</u> : Seule la limite $t \to \infty$ sera discutée. L'autre cas est exactement analogue. On note que le corollaire 6.2 implique que $h \in D(A^{1/2})$ si, et seulement si, $h_0^+ = W_+ h \in D(A_0^{1/2})$. Pour prouver (6.52) avec $k = 0$ on note que quand $h \in D(A^{1/2})$, alors :

$$(6.53)\quad D_0 v(\cdot\,;t) = -i A^{1/2} e^{-itA^{1/2}} h = -i e^{-itA^{1/2}} (A^{1/2} h)$$

et

$$(6.54)\begin{cases} D_0 v_0^+(\cdot\,;t) = -i A_0^{1/2} e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+ = -i e^{-itA_0^{1/2}} A_0^{1/2} W_+ h \\ \quad = -e^{-itA_0^{1/2}} W_+ (A^{1/2} h) \end{cases}$$

Le dernier pas dans (6.54) s'en suit d'après

$$(6.55)\quad W_+ A^{1/2} \subset A_0^{1/2} W_+$$

qui est une conséquence de (6.14). Maintenant, le théorème 6.1 énonce que :

$$(6.56)\quad \lim_{t\to\infty} \| e^{-itA^{1/2}} h - J^* e^{-itA_0^{1/2}} W_+ h \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

pour tout $h \in L_2(\Omega)$. En substituant $A^{1/2} h$ pour h dans (6.56) et en utilisant (6.53), (6.54) cela donne (6.52) avec $k = 0$.

La preuve de (6.52) avec $k = 1, 2, \dots, n$ est plus difficile. On note en premier que, puisque $j\, D_k v_0^+ = D_k(j v_0^+) + (D_k j) v_0^+$,

$$(6.57)\begin{cases} \| D_k v(\cdot\,;t) - j(\cdot) D_k v_0^+(\cdot\,;t) \| \\ \leq \| D_k \{ v(\cdot\,;t) - j(\cdot) v_0^+(\cdot\,;t) \} \| + \| D_k j(\cdot) v_0^+(\cdot\,;t) \| \end{cases}$$

Maintenant $\operatorname{Supp} D_k j \subset B(r_0+1)$ et ainsi le dernier terme tend vers zéro quand $t \to \infty$ d'après le théorème (4.5). Ainsi, pour prouver (6.52) pour $k = 1, \dots, n$ il suffit de prouver que :

$$(6.58)\quad \lim_{t\to\infty} \| \nabla \{ v(\cdot\,;t) - j(\cdot) v_0^+(\cdot\,;t) \} \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Pour prouver ceci on suppose en premier que $h \in D(A)$. Alors $h_0^+ = W_+ h \in D(A_0)$, d'après (6.14), et il s'en suit que $v(\cdot;t) \in D(A)$ et $v_0^+(\cdot;t) \in D(A_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En outre, $h \in D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ et $h_0^+ = W_+ h \in D(A_0^{1/2}) = H^1(\mathbb{R}^n)$. Il s'en suit que $j(x)\, v_0^+(x;t) \in D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ et ainsi :

$$(6.59)\begin{cases} \| \nabla \{ v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\}\|^2 \\ = \| A^{1/2}\{ v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\}\|^2 \\ = (A^{1/2}\{v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\}, A^{1/2}\{v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\}) \\ = (A\{v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\}, \{v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\}) \\ \leq \| A v(\cdot;t) - A J^* v_0^+(\cdot;t)\| \, \| v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\| \\ \leq (\| A v(\cdot;t)\| + \| A J^* v_0^+(\cdot;t)\|)\, \| v(\cdot;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot;t)\| \end{cases}$$

On note que :

$$(6.60)\quad \| A v(\cdot;t)\| = \| A e^{-itA^{1/2}} h\| = \| e^{-itA^{1/2}} A h\| = \| A h\| < \infty$$

parce que $h \in D(A)$. En outre,

$$(6.61)\begin{cases} A J^* v_0^+(x;t) = -\Delta^* \{ j(x)\, v_0^+(x;t)\} \\ = -(\Delta^* j(x)\, v_0^+(x;t) + 2\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} D_k j(x) D_l v_0^+(x;t) + j(x)\Delta^* v_0^+(x;t)) \end{cases}$$

Ainsi, si M est une borne pour $\|\Delta^* j'(x)\|$ et $|\nabla j'(x)|$

$$(6.62)\quad \begin{cases} \|A J^* v_0^+(\cdot;t)\| \leq M \|e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| \\ +M\|2\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} D_l e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| + \|A_0 e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| \\ \leq M \|e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| \\ +2Mn^2(2\mu+\lambda)\|\nabla e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| + \|A_0 e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| \\ = M\|h_0^+\| + 2Mn^2(2\mu+\lambda)\|A_0^{1/2} e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+\| + \|e^{-itA_0^{1/2}} A_0 h_0^+\| \\ = M\|h_0^+\| + 2Mn^2(2\mu+\lambda)\|A_0^{1/2} h_0^+\| + \|A_0 h_0^+\| < \infty \end{cases}$$

parce que $h_0^+ = W_+ h \in D(A_0)$. Ainsi (6.59) implique que pour $h \in D(A)$.

$$(6.63)\quad \|\nabla \{v(\cdot;t) - j'(\cdot)v_0^+(\cdot;t)\|^2 \leq C\|v(\cdot;t) - j(\cdot)v_0^+(\cdot;t)\|$$

où $C = C(h)$ est indépendante de t . En faisant $t \to \infty$ dans (6.63) et en utilisant le théorème (6.1) cela donne (6.58) dans le cas où $h \in D(A)$.

La preuve de (6.58) dans le cas général de $h \in D(A^{1/2})$ sera complétée par un argument de densité. On note que :

$$\| \nabla \{ e^{-itA^{1/2}} h - J^* e^{-itA_0^{1/2}} W_+ h \} \|$$

$$= \| \nabla \{ v(\cdot\,;t) - j(\cdot) v_0^+ (\cdot\,;t) \} \|$$

$$= \| \nabla v(\cdot\,;t) - j(\cdot) \nabla v_0^+ (\cdot\,;t) - (\nabla j) v_0^+ (\cdot\,;t) \|$$

$$\leq \| \nabla v(\cdot\,;t) \| + \| j(\cdot) \nabla v_0^+ (\cdot\,;t) \| + \| (\nabla j) v_0^+ (\cdot\,;t) \|$$

(6.64) $$\leq \| A^{1/2} e^{-itA^{1/2}} h \|_{L_2(\Omega)} + \| \nabla e^{-itA_0^{1/2}} W_+ h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

$$+ M \| e^{-itA^{1/2}} W_+ h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \| e^{-itA^{1/2}} A^{1/2} h \|_{L_2(\Omega)}$$

$$+ \| A_0^{1/2} e^{-itA_0^{1/2}} W_+ h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + M \| W_+ h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \| A^{1/2} h \|_{L_2(\Omega)} + \| A_0^{1/2} W_+ h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + M \| h \|_{L_2(\Omega)}$$

$$= \| A^{1/2} h \|_{L_2(\Omega)} + \| W_+ A^{1/2} h \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + M \| h \|_{L_2(\Omega)}$$

(6.64) $$= 2 \| A^{1/2} h \|_{L_2(\Omega)} + M \| h \|_{L_2(\Omega)}$$

(cont)

$$= 2 \| \nabla h \|_{L_2(\Omega)} + M \| h \|_{L_2(\Omega)} \leq M_1 \| h \|_{H^1(\Omega)}$$

où M est une borne pour $|\nabla j(x)|$ et $M_1 = 2+M$. Pour compléter la preuve de (6.58) on note que $D(A)$ est deux dans $D(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$ d'après le théorème spectral. Etant donné $h \in D(A^{1/2})$ soit $\{h_m\}$ une suite telle que $h_m \in D(A)$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et $\lim_{m\to\infty} h_m = h$ dans $H^1(\Omega)$. Alors, d'après (6.64) et l'inégalité triangulaire,

$$
(6.65)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\| \nabla \{ v(t;\cdot) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot\,;t) \| \\
&= \| \nabla (e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_0^{1/2}} W_+) h \| \\
&\leq \| \nabla (e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_0^{1/2}} W_+) h_m \| \\
&\quad + \| \nabla (e^{-itA^{1/2}} - J^* e^{-itA_0^{1/2}} W_+) (h - h_m) \| \\
&\leq \| \nabla (e^{-itA^{1/2}} h_m - J^* e^{-itA_0^{1/2}} W_+ h_m \| + M_1 \| h - h_m \|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}
\right.
$$

En faisant $t \to \infty$ dans (6.65) avec m fixé. Le premier terme sur le membre de droite tend vers zéro parce que $h_m \in D(A)$.

Ainsi,

$$
(6.66)\quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \| \nabla \{ v(\cdot\,;t) - j(\cdot)\, v_0^+(\cdot\,;t) \| \leq M_1 \| h - h_m \|_{H^1(\Omega)}
$$

pour $m = 1, 2, 3, \ldots$. Ceci implique (6.58) parce que le membre de gauche dans (6.66) est indépendant de m et $h_m \to h$ dans $H^1(\Omega)$.

CHAPITRE VII

FONCTIONS D'ONDES ASYMPTOTIQUES ET DISTRIBUTIONS ENERGETIQUES DANS DES DOMAINES EXTERIEURS

Dans ce chapitre, les résultats obtenus dans la lecture précédente sont utilisés pour construire des fonctions d'ondes asymptotique pour des solutions dans des sous ensembles bornés et non bornés de Ω .

On considère en premier la solution à valeur complexe dans $L_2(\Omega)$.

$$(7.1) \qquad v(x;t) = e^{-itA^{1/2}} h(x) \qquad , h \in L_2(\Omega)$$

Le théorème (6.1) énonce que $v(x;t)$ est asymptotiquement égale dans $L_2(\Omega)$ à l'onde libre.

$$(7.2) \qquad v_0^+(x;t) = e^{-itA_0^{1/2}} h_0^+(x)$$

pour $t \to \infty$ où

$$(7.3) \qquad h_0^+ = W_+ h = \Phi^* \Phi_- h$$

L'équation (6.12) du théorème (6.1) est équivalente à

$$(7.4) \qquad \lim_{t\to\infty} \| v(\cdot;t) - v_0^+(\cdot;t) \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Pour voir ceci, on note que $v_0^+(x;t) - j(x) v_0^+(x;t) = (1 - j(x)) v_0^+(x;t)$ et ainsi :

$$(7.5) \qquad \| (1 - j(\cdot)) v_0^+(\cdot;t) \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| v_0^+(\cdot;t) \|_{L_2(\Omega_{r_0+1})}$$

La dernière quantité tend vers zéro quand $t \to \infty$ d'après le théorème 4.5. Après on rappelle que l'onde libre (7.2) est asymptotiquement égale dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ à une fonction d'onde asymptotique

$$(7.6)\quad \begin{cases} v_0^{+,\infty}(x;t) = v_{0,1}^{+,\infty}(x;t) + v_{0,2}^{+,\infty}(x;t) \\ v_{0,j}^{+,\infty}(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} G^j\left(|x| - c_j t\,;\, \frac{x}{|x|}\right) \end{cases}$$

où

$G^j(r;w)$ est définie par :

$$(7.7)\quad \hat{G}^j(\rho;w) = (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} H(\rho)\, \hat{h}_0^{+j}(\rho w)\;, \rho \in \mathbb{R}\;, w \in S^{n-1}$$

et $H(\tau)$ est la fonction d'Heviside.

Il est à noter que $G^{(j)} \in L^2_{(j)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})^n$ (car $h_j^+ \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}^n)$) (cf. Chapitre I).

$$(7.8)\quad \hat{h}_0^+ = \Phi h_0^+ = \Phi_- h = \hat{h}_-$$

Ainsi (7.7) peut aussi s'écrire :

$$(7.9)\quad \hat{G}^j(\rho;w) = (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} H(\rho)\, \hat{h}_-^j(\rho w)\quad, \rho \in \mathbb{R}\;, w \in S^{n-1}$$

Le théorème (1.6) implique que :

$$(7.10)\quad \lim_{t\to\infty} \| v_0^+(\cdot\,;t) - v_0^{+,\infty}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

On a utilisé l'inégalité triangulaire aussi. Maintenant :

$$
(7.11)\begin{cases}
\| v(\cdot\,;t) - v_0^{+,\infty}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} \\
\leqslant \| v(\cdot\,;t) - v_0^{+}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} \\
+ \| v_0^{+}(\cdot\,;t) - v_0^{+,\infty}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}
\end{cases}
$$

et les deux dernières quantités tendent vers zéro quand $t \to \infty$ d'après (7.4) et (7.10). Ceci suggère la définition

<u>Définition</u> : La fonction d'onde asymptotique associée avec la fonction d'onde (7.1) est

$$
(7.12)\begin{cases}
v^{\infty}(x;t) = v_1^{\infty}(x;t) + v_2^{\infty}(x;t) \\
v_j^{\infty}(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} G^{j}(|x| - c_j t,\ x/|x|),\ x \in \Omega - \{0\},\ t \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

et $\quad G^{(j)} \in L^2_{(j)}(\mathbb{R} \times S^{n-1})$

Les propriétés basiques de cette fonction d'onde asymptotique sont données par le théorème suivant :

<u>Théorème 7.1</u> : Pour tout $h \in L_2(\Omega)$ *la fonction d'onde asymptotique (7.12) satisfait :*

(7.13) $\quad v_j^{\infty}(\cdot\,;t) \in L^2_{(j)}(\Omega)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

(7.14) $\quad t \longrightarrow v_j^{\infty}(\cdot\,;t) \in L^2_{(j)}(\Omega)$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$

(7.15) $\quad \lim\limits_{t \to \infty} \|v^{\infty}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = \|h\|_{L_2(\Omega)}$

(7.16) $\quad \lim\limits_{t \to -\infty} \| v^{\infty}(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$

Démonstration : Les propriétés (7.13), (7.14) et (7.16) s'en suivent d'après le théorème (1.5) chapitre I parce que $G^j \in L^2_{(j)}(\mathbb{R}\times S^{n-1})^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Pour vérifier (7.15) on note que :

$$(7.17)\quad \lim_{t\to\infty} \| v^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = \| G \|_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})}$$

D'après les arguments utilisés pour prouver le théorème (1.5) Chapitre I. Maintenant, d'après (7.12) et le théorème (5.14) :

$$(7.18)\quad \begin{cases} \| G\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = \| \hat{G} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} \\ = \displaystyle\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |\hat{h}_-(\rho w)|^2 \rho^{n-1}\, dw\, d\rho = \| \hat{h}_- \|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ = \| h \|^2_{L_2(\Omega)} \end{cases}$$

En combinant (7.17) et (7.18) cela donne (7.15).

Le théorème de convergence basique pour les fonctions d'ondes asymptotiques est :

Théorème 7.2 : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C$. *Alors pour tout* $h \in L_2(\Omega)$

$$(7.19)\quad \lim_{t\to\infty} \| v(\cdot\,;t) - v^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

<u>*Démonstration*</u> : On a besoin de l'hypothèse $\Omega \in L.C$ pour garantir la validité du théorème de l'expression des valeurs propres et l'existence du profil d'onde (7.9). L'équation (7.19) s'en suit d'après (7.11), (7.4) et (7.10), puisque V^{∞} coïncide avec $V_0^{+,\infty}$ sur Ω .

Les fonctions d'onde asymptotiques pour les solutions du problème à valeurs initiales sur les frontières pour l'équation de LAMÉ s'en suit immédiatement d'après le théorème (7.2). Soit :

$$(7.20)\quad u(x;t) = \cos(tA^{1/2})f(x) + (A^{-1/2}\sin tA^{1/2})g(x)$$

la solution dans $L_2(\Omega)$ avec les valeurs initiales f et g . Le théorème (7.2) et (chapitre II; (2.34) et (2.35)) impliquent :

<u>*Corollaire 7.3*</u> : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C$ *. Soient* f *et* g *deux fonctions à valeurs réelles telles que* $f \in L_2(\Omega)$ *et* $g \in D(A^{-1/2})$ *et on définit* $h = f + iA^{-1/2}g \in L_2(\Omega)$ *. On définit*

$$(7.21)\quad \begin{cases} u^{\infty}(x;t) = u_1^{\infty}(x;t) + u_2^{\infty}(x;t) \\ u_j^{\infty}(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} F^j(|x|-c_j t, x/|x|), x \in \Omega-\{0\}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec

$$(7.22)\quad F^j(r;w) = R_0\{G^j(r;w)\}$$

où G^j *est définie par (7.9). Alors*

$$(7.23)\quad \lim_{t\to\infty} \| u(\cdot;t) - u^{\infty}(\cdot;t) \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

La preuve est semblable à celle du théorème (1.8) Chapitre I.

Corollaire 7.4 : Le profil d'onde asymptotique (7.22) est caractérisé par :

(7.24)
$$\left\{\begin{array}{l} \hat{F}^{j}(\rho ; w) = \frac{1}{2}(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\begin{array}{ll} \hat{h}^{j}_{-}(\rho w) & , \rho > 0 \\ \overline{\hat{h}^{j}_{-}(-\rho w)} & , \rho < 0 \end{array}\right. \\ \qquad = \frac{1}{2}(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\begin{array}{ll} \hat{f}^{j}_{-}(\rho w) + i\,\dfrac{\hat{g}^{j}_{-}(\rho w)}{\rho c_j} & , \rho > 0 \\ \hat{f}^{j}_{+}(\rho w) + i\,\dfrac{\hat{g}^{j}_{+}(\rho w)}{\rho c_j} & , \rho < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Démonstration : La première équation dans (7.24) s'en suit immédiatement de (7.9) et (7.22). Pour prouver la seconde équation, on note que les ondes planes distordues ont la propriété que :

(7.25) $$\overline{w_{\pm}(x; -\xi)} = w_{\mp}(x; \xi) \qquad \text{pour tout } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Le chemin simple pour vérifier ceci est de noter que $\overline{w_{\mp}(x; -\xi)}$ satisfait les conditions (5.9), (5.10) et (5.11) qui définissent $w_{\pm}(x;\xi)$. Ainsi (7.25) s'en suit d'après l'unicité de $w_{\pm}(x;\xi)$. (7.25) implique que si $h(x)$ et $k(x)$ sont dans $L_2(\Omega)$ alors

(7.26) $$h(x) = \overline{k(x)} \text{ dans } L_2(\Omega) \iff \hat{h}_{+}(-\xi) = \overline{\hat{k}_{-}(\xi)} \text{ dans } L_2(\mathbb{R}^n)$$

En particulier,

(7.27) $f(x) = \overline{f(x)}$ dans $L_2(\Omega) \Longleftrightarrow \hat{f}_+(-\xi) = \overline{\hat{f}_-(\xi)}$ dans $L_2(\mathbb{R}^n)$

Il s'en suit que :

$$(7.28)\begin{cases} \hat{h}_-^j(-\rho w) = \overline{\hat{f}_-^j(-\rho w) + i\,\dfrac{\hat{g}_-^j(-\rho w)}{\rho c_j}} = \hat{f}_+^j(\rho w) - i\,\dfrac{\hat{g}_+^j(\rho w)}{|\rho|\begin{cases}c_1\\ c_2|w\cdot a|\end{cases}} \\ \qquad = \hat{f}_+^j(\rho w) + i\,\dfrac{\hat{g}_+^j(\rho w)}{\rho c_j} \quad \text{pour} \quad \rho < 0 \end{cases}$$

ce qui complète la preuve de (7.24).

Les fonctions d'ondes asymptotiques pour des solutions E.F. dans Ω dériveront après. On considère en premier la fonction d'onde à valeur complexes (7.1) avec $h \in D(A^{1/2})$. Dans ce cas, le théorème (6.5) implique

$$(7.29)\quad \lim_{t\to\infty} \| D_k v(\cdot\,;t) - D_k v^+(\cdot\,;t) \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$. La fonction $j(x)$ peut être oubliée dans (6.52) d'après les arguments donnés après (7.4) au-dessus. On rappelle que d'après (6.56)

$$(7.30)\quad D_0 v_0^+(\cdot\,;t) = -i e^{-itA_0^{1/2}} W_+(A^{1/2}h)$$

En particulier, $D_0 v_0^+(x;t)$ est une solution dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ quand $h \in D(A^{1/2})$. En outre, d'après (7.3)

$$(7.31)\quad (W_+ A^{1/2} h)^\wedge(\xi) = (\Phi_- A^{1/2} h)(\xi) = |\xi|\Phi_- h(\xi) = |\xi|\hat{h}_-(\xi)$$

Ainsi le profil de la fonction d'onde asymptotique pour (7.30) est caractérisé par :

$$(7.32)\begin{cases} \hat{G}_o(\rho;w) = \hat{G}_o^1 + \hat{G}_o^2 \\ \hat{G}_o^j(\rho;w) = (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} H(\rho)(-ic_j\rho)\hat{h}_-^j(\rho w), \rho\in\mathbb{R}, w\in S^{n-1} \end{cases}$$

La fonction d'onde asymptotique correspondante sera désignée par :

$$(7.33)\begin{cases} v_o^\infty(x;t) = v_{o,1}^\infty(x;t) + v_{o,2}^\infty(x;t) \\ v_{o,j}^\infty(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} G_o^j(|x|-c_jt, x/|x|), x\in\Omega-\{0\}, t\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

et (7.29), le théorème (5.6) et l'inégalité triangulaire impliquent :

$$(7.34)\quad \lim_{t\to\infty} \| D_o v(\cdot;t) - v_o^\infty(\cdot;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Similairement, comme dans la preuve du théorème 1.10 (Chapitre I), les dérivées

$$(7.35)\quad D_k v_o^+(\cdot;t) = e^{-itA_o^{1/2}} D_k W_+ h \quad , k=1,\ldots,n$$

sont solutions dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ et

$$(7.36)\quad (D_k W_+ h)^\wedge(\xi) = i\xi_k(W_+h)^\wedge(\xi) = i\xi_k h_-(\xi) \quad (\xi_k = \rho w_k, k=1,\ldots,n)$$

Ainsi, les profils d'onde G_k des fonctions d'onde asymptotiques pour (7.35) sont caractérisés par

$$(7.37)\quad \begin{cases} \hat{G}_k(\rho\,;w) = \hat{G}_k^1(\rho\,;w) + \hat{G}_k^2(\rho\,;w) \\ \hat{G}_k^j(\rho\,;w) = (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} H(\rho)(i\rho c_j w_k)\hat{h}_-^j(\rho w), \rho\in\mathbb{R}, w\in S^{n-1} \end{cases}$$

où

$$(7.38)\quad \hat{G}_k^j(\rho\,;w) = -\hat{G}_0(\rho\,;w)\,w_k \qquad , k=1,\dots,n$$

Les fonctions d'ondes asymptotiques correspondantes seront désignées par :

$$(7.39)\quad \begin{cases} v_k^\infty(x\,;t) = v_{k,1}^\infty(x\,;t) + v_{k,2}^\infty(x\,;t) \\ v_{k,j}^\infty(x;t) = |x|^{\frac{n-1}{2}} G_k^j(|x|-c_j t\,;x/|x|), x\in\Omega-\{0\}, t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

et (7.29) et le théorème (5.6) impliquent

$$(7.40)\quad \lim_{t\to\infty} \| D_k v(\cdot\,;t) - v_k^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad , k=1,\dots,n$$

La collection de ces résultats donne :

Théorème 7.5 : *Soit Ω un domaine extérieur tel que $\Omega \in L.C$. Alors pour tout* $h \in D(A^{1/2})$

$$(7.41)\quad \lim_{t\to\infty} \| D_k v(\cdot\,;t) - v_k^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad , k=1,\dots,n$$

Les résultats correspondants pour des solutions d'E.F. du problème aux valeurs initiales sur la frontière sont donnés par :

<u>*Corollaire 7.6*</u> : *Soit* Ω *un domaine extérieur tel que* $\Omega \in L.C.$ *Soient* f *et* g *les fonctions à valeurs réelles telles que* $f \in D(A^{1/2}) = EL(\Omega)$ *et* $g \in L_2(\Omega)$. *On définit :*

$$(7.42)\quad \begin{cases} u_k^\infty(x;t) = |x|^{\frac{1-n}{2}} \left[F_k^1\left(|x| - c_1 t; \frac{x}{|x|}\right) + F_k^2\left(|x| - c_2 t; \frac{x}{|x|}\right) \right] \\ \qquad\qquad\; = u_{k,1}^\infty(x;t) + u_{k,2}^\infty(x;t) \\ x \in \Omega - \{0\} \quad , \; t \in \mathbb{R} \quad , \; k = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

où

$$(7.43)\qquad F_k^j(r;w) = Re\{G_k^j(r;w)\}$$

avec G_k^j , $k = 0, 1, \ldots, n$ *sont définies par (7.32) et (7.38).*

Alors

$$(7.44)\qquad \lim_{t\to\infty} \| D_k u(\cdot;t) - u_k^\infty(\cdot;t) \|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad , \; k = 0, 1, \ldots, n$$

Chaque solution d'E.F. dans Ω a une quantité d'énergie qui est indépendante de t . Le théorème restant de ce chapitre décrit la distribution asymptotique de cette énergie, pour $t \to \infty$, dans des sous ensembles de Ω . Les résultats sont basés sur le corollaire (7.6) et la forme des fonctions $u_k^\infty(x;t)$.

Dans le reste de ce chapitre on enlève la mention que Ω est un domaine extérieur tel que $\Omega \in L.C$ et on désigne par $u(x;t)$ une solution d'E.F. dans Ω . Si $K \subset \Omega$ est un ensemble mesurable alors l'énergie sur K au temps t est définie par

$$(7.45)\quad E(u,K,t) = \sum_{k=0}^{n} \| D_k u(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(K)}$$

L'application du corollaire 7.6 pour le calcul de la distribution d'énergie asymptotique est basée sur le lemme suivant :

<u>*Lemme 7.7*</u> : $t \mapsto K(t) \subset \Omega$ *définit une famille de sous ensembles mesurables de* Ω *pour* $t \in \mathbb{R}$ *. Alors :*

$$(7.46)\quad \left\{ \begin{aligned} &\| D_k u(\cdot\,;t)\|_{L_2(K(t))} \\ &\qquad = \| u_k^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(K(t))} + o(1)\ , \quad t \to \infty, \end{aligned} \right.$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$ *et ainsi*

$$(7.47)\quad \left\{ \begin{aligned} &E(u, K(t), t) \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n} \| u_k^\infty(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(K(t))} + o(1)\ , \quad t \to \infty \end{aligned} \right.$$

où $o(1)$ *tend vers zéro uniformément avec respect de* $\{K(t), t \in \mathbb{R}\}$.

<u>*Démonstration*</u> : L'inégalité triangulaire implique que :

$$(7.48)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Big| \| D_k u(\cdot\,;t)\|_{L_2(K(t))} - \| u_k^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(K(t))} \Big| \\ &\leq \| D_k u(\cdot\,;t) - u_k^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(K(t))} \\ &\leq \| D_k u(\cdot\,;t) - u_k^\infty(\cdot\,;t)\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \right.$$

et le dernier terme tend vers zéro quand $t \to \infty$ d'après le Corollaire (7.6). En outre, le dernier terme est indépendant de la famille $\{ K(t) \, ; t \in \mathbb{R} \}$.

Les premiers résultats sur les distributions d'énergie concernent la concentration de l'énergie, concentration asymptotique, dans des régions sphériques développantes de la forme :

$$(7.49) \quad B^j(t, \theta_1(t), \theta_2(t)) = \{ x : tc_j + \theta_1(t) \leqslant |x| \leqslant \theta_2(t) + tc_j \}$$

On note que si $\mathbb{R}^n - \Omega \subset B^j_{r_0}$ alors $B^j(t, \theta_1(t), \theta_2(t)) \subset \Omega$ fournit que

$$(7.50) \quad r_0 - c_j t \leqslant \theta_1(t) \leqslant \theta_2(t) \leqslant \infty$$

Avec ceci l'hypothèse du lemme 7.7 implique :

Lemme 7.8 : Soient $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ les fonctions de $t \in \mathbb{R}$ qui satisfont (7.50) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(7.51) \quad \left\{ \begin{aligned} & E^j(u, B^j(t, \theta_1(t), \theta_2(t)), t) \\ & \qquad = 2 \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \| F_0^j(r, \cdot) \|^2_{L_2(S^{n-1})} \, dr + o(1) \end{aligned} \right.$$

où $o(1)$ est indépendant de $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Démonstration : On note en premier que, d'après (7.42)

$$(7.52)\quad \begin{cases} \| u^{\infty}_{0,j}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(B^j(t,\theta_1(t),\theta_2(t)))} = \displaystyle\int_{B^j(t,\theta_1,\theta_2)} |u^{\infty}_{0,j}(x;t)|^2\,dx \\ = \displaystyle\int_{\theta_1(t)+tc_j}^{\theta_2+tc_j} dr \int_{S^{n-1}} |F_0^j(r-c_jt\,;w)|^2\,dw \\ = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} dr \int_{S^{n-1}} |F_0^j(r\,;w)|^2\,dw \end{cases}$$

Après, on note que (7.38), (7.43) impliquent :

$$(7.53)\quad F_k^j(r\,;\eta) = -F_0^j(r,\eta)\,\eta_k \qquad \text{pour } k = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \| u^{\infty}_{k,j}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(B^j(t,\theta_1,\theta_2))}$$

$$(7.54)\quad \begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{B^j(t,\theta_1,\theta_2)} |u^{\infty}_{k,j}(x;t)|^2\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\theta_1+tc_j}^{\theta_2+tc_j} dr \int_{S^{n-1}} |F_k^j(r-c_jt\,;\eta)|^2\,d\eta \\ &= \int_{\theta_1+tc_j}^{\theta_2+tc_j} dr \int_{S^{n-1}} |F_0^j(r-c_jt\,;\eta)|^2\,d\eta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} dr \int_{S^{n-1}} |F_0^j(r\,;\eta)|^2\,d\eta \end{aligned}$$

parce que $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2 = 1$. En combinant (7.52), (7.54) et le lemme 7.7 cela donne (7.51).

Théorème 7.9 : *Soient* $\theta_1(t), \theta_2(t)$ *satisfaisant* (7.50) *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et aussi :*

(7.55) $$\lim_{t\to\infty} \theta_1(t) = -\infty \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} \theta_2(t) = +\infty$$

Alors

(7.56) $$\lim_{t\to\infty} E^{d}(u, B^{d}(t, \theta_1(t), \theta_2(t)), t) = E^{d}(u, \Omega, 0)$$

et ainsi

(7.57) $$\lim_{t\to\infty} E^{d}(u, \Omega - B^{d}(u, \theta_1(t), \theta_2(t)), t) = 0$$

La preuve est basée sur le lemme 7.8 et

Lemme 7.10 : *Pour tout* $f \in D(A^{1/2}) = EL(\Omega)$ *et* $g \in L_2(\Omega)$

(7.58) $$E^{d}(u, \Omega, 0) = 2 \| F_0^{d} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})}$$

Preuve du théorème 7.9 : Le lemme 7.8, (7.55) et le lemme (7.10) impliquent

(7.59) $$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} E^{d}(u, B^{d}(t, \theta_1(t), \theta_2(t)), t) \\ \qquad = 2 \| F_0^{d} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = E^{d}(u, \Omega, 0) \end{cases}$$

L'équation (7.57) s'en suit de (7.56) parce que :

$$(7.60)\quad \begin{cases} E^{j}(u,\Omega,0) = E^{j}(u,\Omega,t) = E^{j}(u, B^{j}(t,\theta_1(t),\theta_2(t)),t) \\ \quad + E^{j}(u,\Omega - B^{j}(t,\theta_1(t),\theta_2(t)),t). \end{cases}$$

Preuve du lemme 7.10 : La définition de F_0^{j}, les équations (7.43) et (7.32) impliquent que :

$$(7.61)\quad \hat{F}_0^{j}(\rho\,;w) = \frac{1}{2}(-i\rho)^{\frac{n+1}{2}} \begin{cases} \hat{h}_-^{j}(\rho w) & , \rho > 0 \\ \overline{\hat{h}_-^{j}(-\rho w)} & , \rho < 0 \end{cases}$$

En outre, la formule de Parseval et le théorème de Fubini impliquent :

$$(7.62)\quad \begin{cases} \| F_0^{j} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} = \| \hat{F}_0^{j} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} \\ \quad = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S^{n-1}} |\hat{F}_0^{j}(\rho\,;w)|^2\, dw\, d\rho \end{cases}$$

Maintenant (7.61) implique que

$$(7.63)\quad \begin{cases} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} |\hat{F}_0^{j}(\rho;w)|^2\, dw\, d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} \rho^{n+1} |\hat{h}_-^{j}(\rho w)|^2\, dw\, d\rho \\ \quad = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{h}_-^{j}(\xi)|^2\, d\xi . \end{cases}$$

Similairement :

$$(7.64)\quad \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{0} \int_{S^{n-1}} |\hat{F}_0^{j}(\rho\,;w)|^2\, dw\, d\rho \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{0} \int_{S^{n-1}} |\rho|^{n+1} \, |\hat{h}_-^{j}(-\rho w)|^2\, dw\, d\rho \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} \rho^{n+1} \, |\hat{h}_-^{j}(\rho w)|^2\, dw\, d\rho \end{aligned}$$

$$(7.64) \qquad = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \, |\hat{h}_-^{\delta}(\xi)|^2 \, d\xi$$

En additionnant (7.63) et (7.64) et en utilisant (7.62) cela donne :

$$(7.65) \quad \begin{cases} 2 \| F_0^{\delta} \|^2_{L_2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} = \int |\xi|^2 \, |\hat{h}_-^{\delta}(\xi)|^2 \, d\xi \\ \qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi| \hat{f}_-^{\delta}(\xi) + \frac{i \, \hat{g}_-^{\delta}(\xi)}{c_\delta} \right|^2 d\xi . \end{cases}$$

En faisant l'échange des variables $\xi \to -\xi$ dans cette intégrale et en utilisant (7.27) cela donne la représentation alternative :

$$(7.66) \quad \begin{cases} 2 \| F_0^{\delta} \|^2_{L_2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi| \hat{f}_-^{\delta}(-\xi) + \frac{i \, \hat{g}_-^{\delta}(-\xi)}{c_\delta} \right|^2 d\xi \\ \qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi| \overline{\hat{f}_+^{\delta}(\xi)} + \frac{i \, \overline{g_+^{\delta}(\xi)}}{c_\delta} \right|^2 d\xi \\ \qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi| \hat{f}_+^{\delta}(\xi) - \frac{i \, \hat{g}_+^{\delta}(\xi)}{c_\delta} \right|^2 d\xi . \end{cases}$$

En appliquant les théorèmes 5.14 et 5.17 à ces deux représentations cela donne :

$$(7.67) \quad \begin{cases} 2 \| F_0^{\delta} \|^2_{L_2(\mathbb{R} \times S^{n-1})} = \left\| A^{1/2} f^{\delta} + \frac{i \, g^{\delta}}{c_\delta} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \\ \qquad = \left\| A^{1/2} f^{\delta} - i \frac{g^{\delta}}{c_\delta} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \end{cases}$$

Finalement, en additionnant les deux dernières expressions et en utilisant la loi du parallélogramme dans $L_2(\Omega)$ cela donne

$$(7.67)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\,\| F_0^{\delta} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} &= \| A^{1/2} f^{\delta} \|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{c_j^2} \| g^{\delta} \|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= E^{\delta}(u,\Omega,0) \end{aligned} \right.$$

On a le corollaire suivant :

Corollaire 7.11 : *Si* K *est un sous ensemble mesurable borné de* Ω *alors :*

$$(7.69)\qquad \lim_{t\to\infty} E^{\delta}(u,K,t) = 0$$

Démonstration : Puisque $K \subset \Omega$ est borné il existe $r > r_0$ tel que $K \subset \Omega_r$. Dans le théorème 7.9 on prend $\theta_1(t) = r - c_j t \geq r_0 - c_j t$ et $\theta_2(t) = \infty$. Alors $K \subset \Omega_r \subset \Omega - B^{\delta}(t,\theta_1(t),\theta_2(t))$ pour tout t et ainsi :

$$(7.70)\qquad 0 \leq E^{\delta}(u,K,t) \leq E(u,\Omega - B^{\delta}(t,\theta_1(t),\theta_2(t)),t)$$

pour tout t. En faisant tendre $t \to \infty$ et en utilisant (7.57) cela donne (7.69).

Le lemme 7.8 implique aussi

Corollaire 7.12 : *Soient* $f \in EL(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$ *et* $\varepsilon > 0$ *borné.* *Alors il existe des constantes* $\theta_1 = \theta_1(f,g,\varepsilon)$, $\theta_2 = \theta_2(f,g,\varepsilon)$ *et* $t_0 = t_0(f,g,\varepsilon)$ *telles que :*

$$(7.71)\qquad E^{\delta}(u,\Omega,0)-\varepsilon \leq E^{\delta}(u,B^{\delta}(t,\theta_1,\theta_2),t)\leq E^{\delta}(u,\Omega,0)$$

pour tout $t \geq t_0$.

<u>*Démonstration*</u> : On note que (7.71) est équivalente à

$$(7.72)\qquad \begin{cases} |E^{\delta}(u,\Omega,0) - E^{\delta}(u,B^{\delta}(t,\theta_1,\theta_2),t)| \leq \varepsilon \\ \text{pour tout} \quad t \geq t_0 \ . \end{cases}$$

Maintenant d'après le lemme 7.10 :

$$(7.73)\qquad \begin{cases} |E^{\delta}(u,\Omega,0) - E^{\delta}(u,B^{\delta}(t,\theta_1,\theta_2),t)| \\ = \left|2\int_{-\infty}^{\infty}\|F_0^{\delta}(r;\cdot)\|^2 dr - E^{\delta}(u,B^{\delta}(t,\theta_1,\theta_2),t)\right| \\ \leq 2\int_{-\infty}^{\theta_1}\|F_0^{\delta}(r;\cdot)\|^2 dr + 2\int_{\theta_2}^{\infty}\|F_0^{\delta}(r;\cdot)\|^2 dr \\ \quad + \left|2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\|F_0^{\delta}(r;\cdot)\|^2 dr - E^{\delta}(u,B^{\delta}(t,\theta_1,\theta_2),t)\right| \end{cases}$$

pour tout t . Le lemme 7.8 implique qu'il existe $t_0=t_0(f,g,\varepsilon)$, indépendant de θ_1 , θ_2 , tel que le dernier terme dans (7.73) est inférieure à $\varepsilon/2$ pour tout $t \geq t_0$. En outre, il existe des constantes $\theta_1=\theta_1(f,g,\varepsilon)$, $\theta_2=\theta_2(f,g,\varepsilon)$ telles que la somme de la première et seconde intégrales sur le membre de droite de (7.73) soit inférieure à $\varepsilon/2$. Avec ce choix (7.73) implique (7.72) et ainsi (7.71).

Le lemme 7.7 implique encore plus précisément les résultats concernant la concentration asymptotique des solutions d'E.F. La nature des ensembles dans lesquels $u(x;t)$ est concentrée pour t grand est déterminée par l'état initial

f , g à travers la fonction F_0 . Pour formuler cette idée, soit $\varepsilon > 0$ donné et soit $S^\delta = S^\delta(f, g, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \times S^{n-1}$ un ensemble tel que :

$$(7.74)\left\{\begin{array}{l} \| F^\delta \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \int_{S^\delta} | F_0^\delta(r, \eta)|^2 dr\, d\eta \\ \qquad \leqslant \| F_0^\delta \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times S^{n-1})} \end{array}\right.$$

On introduit les notations :

$$(7.75) \qquad S_t^\delta = \{ (r + \varsigma t, \eta) : (r, \eta) \in S^\delta \} \subset \mathbb{R}\times S^{n-1},$$

$$(7.76) \qquad S_\pm^\delta = S^\delta \cap \{ (r, \eta) : \pm r \geqslant 0 \}$$

et

$$(7.77) \qquad K_t^\delta = \{ x = r\eta : (r, \eta) \in S_{t+}^\delta \} \subset \mathbb{R}^n$$

Alors le rafinement du corollaire 7.12 tient :

Corollaire 7.12 : *Soit* $f \in EL(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$ *et* $\varepsilon > 0$ *donné. Soit* $S^\delta = S^\delta(f, g, \varepsilon)$ *un sous ensemble de* $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ *tel que (7.74) tient. Alors il existe* $t_0 = t_0(f, g, \varepsilon)$ *tel que :*

$$(7.78) \qquad E^\delta(u, \Omega, 0) - \varepsilon \leqslant E^\delta(u, \Omega \cap K_+^\delta, t) \leqslant E^\delta(u, \Omega, 0)$$

pour tout $t \geqslant t_0$.

Démonstration : (7.78) est équivalente à

$$|E^{\delta}(u,\Omega,0)-E^{\delta}(u,\Omega\cap K_t^{\delta},t)|\leq\varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t\geq t_0 \quad ; \tag{7.79}$$

d'après le lemme 7.10.

$$\left\{\begin{aligned} &|E^{\delta}(u,\Omega,0)-E^{\delta}(u,\Omega\cap K_t^{\delta},t)| \\ &\leq \left|2\|F_0^{\delta}\|^2-2\int_S|F_0^{\delta}(r,h)|^2\,dr\,dh\right| \\ &+\left|2\int_S|F_0^{\delta}(r,h)|^2\,dr\,dh-E^{\delta}(u,\Omega\cap K_t^{\delta},t)\right| \end{aligned}\right. \tag{7.80}$$

Le premier terme sur la droite est inférieur à $\varepsilon/2$ d'après le choix (7.74) de S^{δ}. Pour estimer le second terme on note que, d'après le lemme 7.7,

$$E^{\delta}(u,\Omega\cap K_t^{\delta},t)=\sum_{k=0}^{n}\|u^{\infty}_{k,\delta}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(K_+^{\delta})}+o(1) \tag{7.81}$$

Les fonctions d'ondes asymptotiques $u^{\infty}_{k,\delta}(\cdot\,;t)$ ont une extension dans $L_2(\mathbb{R}^n)$ et tendent vers zéro dans $L_2(K)$ pour tout $K\subset\mathbb{R}^n$ borné. Ainsi (7.81) implique

$$\begin{aligned} E^{\delta}(u,\Omega\cap K_t^{\delta},t)&=\sum_{k=0}^{n}\|u^{\infty}_{k,\delta}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(K_+^{\delta})}+o(1) \\ &=\sum_{k=0}^{n}\int_{K_t^{\delta}}|F_k^{\delta}(|x|-c_\delta t\,;x/|x|)|^2\,|x|^{1-n}\,dx+o(1) \\ &=2\int_{S_{t+}^{\delta}}|F_0^{\delta}(r-c_\delta t\,;h)|^2\,dr\,dh+o(1) \\ &=2\int_{S^{\delta}\cap\{(r,h):\,r\geq -c_\delta t\}}|F_0^{\delta}(r;h)|^2\,dr\,dh+o(1) \end{aligned} \tag{7.82}$$

On note que :

(7.83) $$0 \leq \int_{S^d \cap \{(r,\eta):\, r \leq -c_j' t\}} |F_0^{j}(r;\eta)|^2 \, dr \, d\eta \leq \int_{-\infty}^{-c_j' t} \int_{S^{n-1}} |F_0^{j}(r;\eta)|^2 \, d\eta \, dr$$

et la dernière intégrale tend vers zéro quand $t \to \infty$. Ainsi (7.82) et (7.83) impliquent que

(7.84) $$E^j(u, \Omega \cap K_t^j, t) = 2 \int_{S^j} |F_0^{j}(r,\eta)|^2 \, dr \, d\eta + o(1), \; t \to \infty$$

Ainsi il existe $t_0 = t_0(f,g,\varepsilon)$ tel que le dernier terme dans (7.80) est inférieur à $\varepsilon/2$ pour tout $t \geq t_0$. Ceci complète la preuve.

Maintenant on considère un cône dans $\mathbb{R}^n$ ayant pour sommet l'origine; c'est-à-dire, un ensemble de la forme

(7.85) $$C = \{ x = r\eta \; : \; r > 0 \quad \text{et} \quad \eta \in C_0 \}$$

où C_0 est un sous ensemble mesurable au sens de Lebesgue de S^{n-1}. La distribution asymptotique de l'énergie dans le cône est décrite par :

Théorème 7.14 : *La distribution asymptotique de l'énergie*

(7.86) $$E_d^{\infty}(u,\Omega\cap C) = \lim_{t\to\infty} E^d(u,\Omega\cap C,t)$$

existe pour tout cône C *et est donnée par*

(7.87) $$E_d^{\infty}(u,\Omega\cap C) = \int_C \left| |\xi| \hat{f}_-^d(\xi) + \frac{i\,\hat{g}_-^d(\xi)}{c_d} \right|^2 d\xi$$

Un premier pas dans la preuve du théorème 7.14 est :

Lemme 7.15 : *Pour tout cône* C

(7.88) $$E_d^{\infty}(u,\Omega\cap C) = 2\,\|F_0^d\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)}$$

Démonstration du lemme 7.15

On pose :

(7.89) $$C'_h = C\cap B'_h = \{x = r\eta : r \geq h \text{ et } \eta\in C_0\}$$

Alors si $h \geq r_0$, $\Omega\cap C = (\Omega_h\cap C)\cup C'_h$ puisque $\mathbb{R}^n - \Omega\subset B_{r_0}$ et ainsi :

(7.90) $$E^d(u,\Omega\cap C,t) = E^d(u,\Omega_h\cap C,t) + E(u,C'_h,t).$$

Maintenant $E^d(u,\Omega_h\cap C,t) = o(1)$ pour $t\to\infty$ d'après le corollaire 7.11. Ainsi en combinant (7.90) et le lemme 7.7 cela donne :

$$(7.91)\quad E^{\delta}(u,\Omega\cap C,t) = \sum_{k=0}^{n} \|u^{\infty}_{k,\delta}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(C'_h)} + o(1)$$

Maintenant :

$$(7.92)\quad \begin{cases} \|u^{\infty}_{o,\delta}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(C'_h)} = \int_{C'_h} |F_o^{\delta}(|x|-c_j t, x/|x|)|^2 |x|^{1-n} dx \\ = \int_h^{\infty}\int_{C_o} |F_o^{\delta}(r-c_j t, \eta)|^2 d\eta\, dr = \int_{h-c_j t}^{\infty}\int_{C_o} |F^{\delta}(r,\eta)|^2 d\eta\, dr \\ = \|F_o^{\delta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_o)} + o(1) \quad, t\to\infty \end{cases}$$

Similairement :

$$(7.93)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \|u^{\infty}_{k,\delta}(\cdot\,;t)\|^2_{L_2(C'_h)} = \sum_{k=1}^{n} \int_h^{\infty}\int_{C_o} |F_k^{\delta}(r-c_j t,\eta)|^2 d\eta\, dr \\ = \int_h^{\infty}\int_{C_o} |F_o^{\delta}(r-c_j t,\eta)|^2 d\eta\, dr = \|F_o^{\delta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_o)} + o(1) \end{cases}$$

En additionnant (7.92) et (7.93) et en utilisant (7.91) cela donne :

$$(7.94)\quad E^{\delta}(u,\Omega\cap C,t) = 2\,\|F_o^{\delta}\|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_o)} + o(1), \; t\to\infty$$

ce qui est équivalent à (7.88).

Preuve du théorème 7.14 : Il sera montré que :

$$(7.95)\quad 2\| F_0^{\delta'} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)} = \int_C \left| |\xi|\, \hat{f}_-^{\delta'}(\xi) + \frac{i\,\hat{g}_-(\xi)}{c_{\delta'}} \right|^2 d\xi \,..$$

Pour cette fin on note que $F_0^{\delta'} = \frac{1}{2}(G_0^{\delta'} + \bar{G}_0^{\delta'})$ où $G_0^{\delta'}$ et $\bar{G}_0^{\delta'}$ sont orthogonaux dans $L_2(\mathbb{R}\times C_0)$. Ceci s'en suit d'après la formule de Parseval dans $L_2(\mathbb{R}, L_2(C_0))$ et le fait que $\hat{G}_0^{\delta'}(\varrho;\eta)$ et $\hat{\bar{G}}_0^{\delta'}(-\varrho,\eta)$, transformées de $\hat{G}_\rho^{\delta'}$, ont des supports disjoints. Ainsi :

$$(7.96)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\| F_0^{\delta'} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)} = \frac{1}{2} \| G_0^{\delta'} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)} \\ & + \frac{1}{2} \| \bar{G}_0^{\delta'} \|_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)} = \| G_0^{\delta'} \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)} \\ & = \| \hat{G}_0 \|^2_{L_2(\mathbb{R}\times C_0)} = \int_0^\infty \int_{C_0} | \hat{G}_0^{\delta'}(\varrho,\eta)|^2 d\eta\, d\varrho \\ & = \int_0^\infty \int_{C_0} \varrho^{n+1} |\hat{h}_-^{\delta'}(\varrho\eta)|^2 d\eta\, d\varrho = \int_C |\xi|^2 |\hat{h}_-^{\delta'}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned} \right.$$

Ce qui équivaut à (7.95) parce que :

$$(7.97)\quad \left\{ \begin{aligned} |\xi|\, \hat{h}_-^{\delta'}(\xi) & = |\xi| (\Phi_- h^{\delta'})(\xi) = \Phi_-(A^{1/2} h^{\delta'}) = \Phi_-(A^{1/2} f^{\delta'} + i g^{\delta'}) \\ & = \Phi_-(A^{1/2} f^{\delta'}) + i\, \Phi_- g^{\delta'} = |\xi|\, \hat{f}_-^{\delta'}(\xi) + \frac{i\,\hat{g}_-^{\delta'}(\xi)}{c_{\delta'}} \end{aligned} \right.$$

Corollaire 7.16 : *La distribution limite (7.87) peut s'écrire* :

$$(7.98)\quad \left\{ \begin{aligned} E_{\delta'}^{\infty}(u, \Omega\cap C) & = \int_C | \Phi_-(A^{1/2} f^{\delta'} + i\, g^{\delta'})|^2 d\xi \\ & = \int_C | \Phi W_+ (A^{1/2} f^{\delta'} + i\, g^{\delta'})|^2 d\xi \end{aligned} \right.$$

Ceci est immédiat d'après (7.87), (7.97) et la relation $W_+ = \Phi^* \Phi^-$.

Tout cône dans $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire de la forme $C + \bar{x}$ où $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et C est un cône ayant pour sommet l'origine. Ce décalage par $\bar{x}$ n'a pas d'effet sur la distribution asymptotique de l'énergie. Ceci est énoncé comme suit :

<u>*Corollaire 7.17*</u> : *Pour tout cône* C

(7.99) $$E_j^\infty(u, \Omega \cap (C + \bar{x})) = E_j^\infty(u, \Omega \cap C) \quad \text{pour tout} \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

<u>*Démonstration*</u> : Une preuve directe par le calcul est tout à fait fastudieuse. En outre, on note que sous le changement de coordonnées $x \longrightarrow \tilde{x} = x - \bar{x}$ le problème à valeurs sur la frontière Ω devient un problème à valeurs sur la frontière pour $\Omega - \bar{x}$. Il n'est pas difficile de vérifier que les fonctions propres pour $\Omega - \bar{x}$ dans le système nouveau de coordonnées sont $\tilde{w}_\pm(\tilde{x}; \xi) = e^{-i\bar{x}\xi} w_\pm(x; \xi)$. En outre, si $\tilde{u}(\tilde{x}; t) = u(x; t)$ alors $\tilde{u}(\tilde{x}; t)$ est une solution d'E.F. pour $\Omega - \bar{x}$ et

(7.100) $$E^j(u, \Omega \cap (C + \bar{x}), t) = E^j(\tilde{u}, (\Omega \cap \bar{x}) \cap C, t) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il s'en suit que

(7.101) $$\left\{ \begin{aligned} E_j^\infty(u, \Omega \cap (C + \bar{x})) &= E_j^\infty(\tilde{u}, (\Omega - \tilde{x}) \cap C) \\ &= \int_C \left| |\xi| \hat{\tilde{f}}_-^j(\xi) + \frac{i\, \hat{\tilde{g}}_-^j(\xi)}{c_j} \right|^2 d\xi \end{aligned} \right.$$

Mais

$$(7.102)\quad \begin{cases} \hat{\tilde{f}}^{\delta}_{-}(\xi) = \displaystyle\int_{\Omega-\bar{x}} \overline{\tilde{w}_{-}(\tilde{x};\xi)}\, \tilde{f}^{\delta}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \\ \quad = \displaystyle\int_{\Omega} \overline{e^{-i\xi\cdot\bar{x}}\, w_{-}(x;\xi)}\, f^{\delta}(x)\,dx = e^{i\xi\cdot\bar{x}}\, \hat{f}^{\delta}_{-}(\xi) \end{cases}$$

et similairement $\hat{\tilde{g}}_{-}(\xi) = e^{i\xi\cdot\bar{x}}\, \hat{g}^{\delta}_{-}(\xi)$. Ainsi (7.101) implique (7.99).

Maintenant on considère une plaque dans $\mathbb{R}^n$; c'est-à-dire un ensemble de la forme :

$$(7.103)\quad S = \{\, x : d_1 \leq x\cdot\bar{x} \leq d_2 \,\}$$

où d_1 et $d_2 \geq d_1$ sont constants et $\bar{x}$ est un vecteur unité. S peut s'écrire comme la différence de deux demi-espaces. Ainsi si :

$$(7.104)\quad \begin{cases} H = \{\, x : x\cdot\bar{x} \geq 0 \,\} \\ H_1 = H + d_1\bar{x} \\ H_2 = H + d_2\bar{x} \end{cases}$$

Alors :

$$(7.105)\quad S = H_1 - H_2$$

il s'en suit que :

$$(7.106)\quad E^{d}(u, \Omega\cap H_1, t) = E^{d}(u, \Omega\cap H_2, t) + E^{d}(u, \Omega\cap S, t)$$

et ainsi :

$$E_j^{\infty}(u, \Omega \cap H_1) = E_j^{\infty}(u, \Omega \cap H_2) + E_j^{\infty}(u, \Omega \cap S) \tag{7.107}$$

Mais le corollaire 7.17 implique que :

$$E_j^{\infty}(u, \Omega \cap H_1) = E_j^{\infty}(u, \Omega \cap H_2) = E_j^{\infty}(u, \Omega \cap H) \tag{7.108}$$

En combinant ceci avec (7.107) ceci prouve :

<u>*Corollaire 7.18*</u> : *Pour toute plaque* S :

$$E_j^{\infty}(u, S) = 0 \quad . \tag{7.109}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON, S.: Lectures on elliptic boundary value problems, New York : Van Nostrand, 1965.

[2] DENY-LIONS : Sur les espaces du type de BEPPO-LEVI. Annales Institut FOURIER.

[3] DUFFG G.D. : The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium Phil. Trans. Roy. Soc. - London - Série A - 252, p. 249-273, 1960.

[3'] EZIN J.P. : Thèse de Doctorat de 3ième cycle de Mathématiques, 1972, Problèmes Mixtes pour certaines équations hyperboliques du second ordre à coéfficients matriciels.

[4] KATO T. : Perturbation theory for linear operators, New York, Springer, 1966.

[5] LAX, P.D. and R.S. PHILLIPS : Scattering theory, New York : Academic press, 1967.

[6] LIONS : Equations différentielles opérationnelles - Springer-Verlag.

[7] LIONS-MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes. Dunod, vol. 1 et 2.

[8] LITTMAN, W. : Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface overages, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 766-770 (1963).

[9] MAGNUS, W., F. OBERHETTINGER and R.P. SONI, Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, New York : Springer, 1966.

[10] MATSUMURA M. : Comportement des solutions de quelques problèmes mixtes pour certains systèmes hyperboliques symétriques à coefficients constants, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 4, 309-359 (1968).

[11] PARSY F. : Thèse de Doctorat ès Sciences en Mathématiques, Lille 1975.

[12] RELLICH F. : Ein Satz über mittler Konvergenz, Gött, Nach. (math. phys.), 30-35 (1930).

[13] RELLICH F. : Über das asymptotische verhatlen der lösungen von $\Delta u + ku = 0$ in unendlichen Gebieten, Jber. Deutschen Math. Verein. 53, 57-64 (1943).

[14] RIESZ F. and B. SZ. NAGY : Functional Analysis. New York : Ungar Publishing Co., 1955.

[15] SCHWARTZ L. : Theorie des distributions, vol. I, Paris Hermann, 1950.

[16] TITCHMARSH E.C. : Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford University Press, 1937.

[17] WILCOX C.H., Scattering theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York 1975.

[18] WILCOX C.H., Scattering states and wave operators in the abstract theory of scattering J. Functional Anal., 12, 257-274 (1973).

[19] YOSIDA K. : Fucntional analysis, Berlin-Göttingen-Heidelberg : Springer 1965.

RESUME

Cette thèse se propose d'étudier la perturbation, du problème de CAUCHY des ondes élastiques dans R^n, produite par l'introduction d'un obstacle borné rigide (D

Si l'on désigne par A_o (resp. A) l'opérateur d'élasticité défini sur $L^2(R^n)$ [resp. $L^2(R^n/D)$] on est amené à comparer les développements en fonctions propres généralisées de A_o (resp. A) d'une onde élastique satisfaisant à des conditions initial imposées.

Le problème fondamental ("scattering") est celui de la comparaison asympto-tique, lorsque t tend vers l'infini des ondes libre et diffusée (par D).

Pour ce faire on étudie directement les solutions des équations d'évolutio (méthode "dépendant du temps") ou, en s'imposant une dépendance harmonique par rapport au temps (méthode dite "stationnaire") on est ramené à comparer les développements en fonctions propres généralisées au voisinage des valeurs propres de A.

MOTS CLES

ABSORPTION LIMITE.
COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE.
DIFFUSION ONDE.
ELASTICITE LINEAIRE.
ELASTODYNAMIQUE.
OPERATEUR LAMÉ.