N° d'ordre : 1317

T H E S E

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Mécanique des Fluides.

par

BOUDLAL Abdelaziz

ONDES PROGRESSIVES FAIBLEMENT NON LINEAIRES DANS UNE CONDUITE OU DANS UN CANAL CONTENANT DEUX FLUIDES PESANTS, NON MISCIBLES, STRATIFIES.

Soutenue le 07 Février 1986 devant la Commission d'Examen

Président : P.A. BOIS, Professeur, Université des Sciences et Techniques de Lille.

Rapporteurs : L. MASBERNAT, Professeur, Université de Toulouse (E.N.S.E.E.I.H.T.).

A. DYMENT, Professeur, Université des Sciences et Techniques de Lille.

M. LOFFICIAL, Maître de Conférences, Université des Sciences et Techniques de Lille.

A la mémoire de mon père,

A ma mère.

AVANT-PROPOS

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur A. DYMENT qui m'a dirigé au cours de cette étude. Ses précieux conseils, sa disponibilité et nos fructueuses discussions ont été pour moi une source permanente d'encouragement et m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur P.A. BOIS qui me fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur L. MASBERNAT, a bien voulu accepter de juger ce travail : qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie tout particulièrement Monsieur M. LOFFICIAL, Maître de Conférences, qui a suivi ce travail avec intérêt; son appui enthousiaste et sa grande disponibilité ont été pour moi d'une aide très précieuse.

Madame Françoise PÉTIAUX a dactylographié ce texte avec patience et savoir faire; qu'il me soit permis de la remercier chaleureusement ainsi que toutes les personnes ayant participé à la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS PRINCIPALES

Les lettres minuscules désignent des grandeurs physiques, les lettres majuscules des grandeurs normalisées; une lettre latine en indice symbolise une dérivation. Les grandeurs accentuées se rapportent au fluide léger, celles non accentuées au fluide lourd.

x , y , z (X , Y , Z) coordonnées cartésiennes;

t (T) : temps;

u , v , w (U , V , W) et u' , v' , w' (U' , V' , W') : composantes des vitesses;

p (P) , p' (P') : pressions ou pressions effectives;

ρ et $\rho' = \tau . \rho$: masses volumiques;

g : accélération de la pesanteur;

$\hat{p}$ et $\hat{p}'$: pressions motrices;

$k(K)$ ou $a(A)$ équation de la conduite ou du canal;

$s(S)$: altitude de l'interface;

$\sigma(\Sigma)$ et $\sigma'(\Sigma')$: aires occupées par les deux fluides dans une section droite;

$\bar{\sigma}(\bar{\Sigma})$: aire occupée par les deux fluides dans une section droite;

Nous récapitulons ci-dessous les notations principales de chaque chapitre :

Les symboles sont classés par ordre d'introduction.

Chapitre 1.

p^* : pression interfaciale.

b_1 , b_2 , $\bar{b}$, e , e' , r , r' : figure 1.1.

c , c' : équation (1.10);

i : pente de la conduite.

(O , x_i , y , z_i), h, $\bar{h}$: figure 1.2;

τ_s , τ_s' : moyennes de la contrainte de frottement à la paroi solide;

τ_I : moyenne de la contrainte de frottement à l'interface.

π , π' : périmètres mouillés de la paroi solide;

ψ , ψ' , λ : coefficients de frottement linéique entre les fluides et la paroi solide et interfacial;

Δ , Δ' : diamètres équivalents.

ω : vitesse de propagation de l'onde progressive continue.

ξ : équation (1.26).

q , q' : équation (1.27).

D , D' : équations (1.35) et (1.47).

θ : figure 1.3.

K , K' , L , L' : équation (1.39);

m_o, n_o : équations (1.40.a).

$\mathbb{F}_o$, $\mathbb{F}_o'$: nombres de Froude absolus.

k , k' , ℓ , ℓ' : équation (1.50);

m_o', J_1 , I_1 , ..., $I_{1\ell}$: équation (1.51);

$\bar{\mathbb{F}}_o$, $\bar{\mathbb{F}}_o'$, $\tilde{\mathbb{F}}_0$: équation (1.51);

$\bar{u}$, $\bar{C}$: équation (1.51);

Chapitre 2.

p^* , p^{**} : pressions interfaciales.

q , q' : équation (2.3).

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1'$, $\mathcal{P}_2'$: équations (2.5) et (2.6).

d_a , d_b : équation (2.10) et (2.15);

F , F' : équations (2.17) et (2.18);

$\mathcal{R}$: équation (2.19);

$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$: équation (2.23.a);

$\mathcal{Q}$: équation (2.23.b);

ω : vitesse de propagation des ondes périodiques avec discontinuités;

Pour les paragraphes 2.1.3 à 2.2.4 F et F' sont des nombres de Froude relatifs définis par (2.17) et (2.18) où q et q' sont donnés par (1.27).

g_o , g_o' : équations (2.49) et (2.52).

Chapitre 3.

h , l : grandeurs de référence, équations (3.1).

ε : paramètre petit, équation (3.1).

α_o , α_o' : équations (3.11.a) et (3.11.b).

C_o , C_o' : équations (3.16).

F_o , F_o' : équation (3.19);

ℓ_o , ℓ_o' : équations (3.21.a) et (3.21.b).

$\overline{H}$: figure 3.2.

ℓ_1 , ℓ_1' : équations (3.31.a) et (3.31.b).

L , L' : équations (3.38.a) et (3.38.c).

M , M', N : équations (3.38.b), (3.38.d) et (3.39).

β_1 , β_2 , γ_1 , β'_1 , β'_2 , γ'_1 : équations (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) et (3.51).

$\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}'_0$: équation (3.58).

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$: équations (3.61) et (3.62).

I_1 , J_1 : équations (3.63) et (3.64).

$\mathcal{Q}_e$: équation (3.65).

$\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_3$: équation (3.66).

$\mathcal{P}_3$: second membre de (3.66).

s_{11} , s_{12} , s_{13} : racines de $\mathcal{P}_3$.

s_{14} , s_{15} : racines de $\mathcal{P}_3$.

α : équations (3.69) et (3.81).

$\mathcal{K}$: intégrale elliptique complète de première espèce.

$\mathbb{K}$: équations (3.70) et (3.82).

λ : équation (3.71).

S_M , S_m : équation (3.73).

S_{moy} : équation (3.75).

$\mathcal{D}$: intégrale elliptique complète de seconde espèce.

Chapitre 4.

s' (S') : altitude de la surface libre.

$\mathbb{D}_0$: équation (4.1).

C_0 , C'_0 : équation (4.15).

μ_0, μ'_0 : équation (3.18.a).

n , λ : équation (4.21).

L , L' : équations (4.45) et (4.47).

M , M : équations (4.46) et (4.48).

G_1, G'_1 , G'_2 , G''_2 : équations (4.56), (4.57), (4.58) et (4.59).

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$: équations (4.63) et (4.64).

$\mathcal{D}''_0$: équation (4.65).

INTRODUCTION

L'objet de cette recherche est de construire des solutions nouvelles d'ondes faiblement non linéaires pour deux fluides pesants stratifiés soit dans une conduite fermée, soit dans un canal ouvert à l'atmosphère. Il s'avère que le problème général des ondes d'amplitude finie ne peut donner lieu à un développement analytique et doit être traité numériquement. En conséquence, l'étude théorique doit se limiter aux ondes de faible amplitude produites dans un écoulement de base uniforme.

Dans le Chapitre 1, on donne les équations générales qui régissent l'écoulement sans frottement dans les conduites quasi-horizontales de section quelconque, puis l'écoulement avec frottement dans les conduites cylindriques de faible pente. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la recherche de solutions d'ondes progressives continues en canalisation cylindrique de pente constante, en adoptant pour le frottement une loi empirique simple [25]. On néglige dans un premier temps le frottement interfacial et on met en évidence des solutions d'ondes progressives continues dites ondes de crue, analogues à celles obtenues dans un liquide avec surface libre par Thomas en mouvement plan [4] et par DYMENT et DYMENT et LOFFICIAL dans un canal cylindrique quelconque [1], [2]. Dans un second temps on tient compte du frottement interfacial et on obtient des résultats analogues mais un peu plus compliqués analytiquement.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude des ondes périodiques avec discontinuités dans une canalisation cylindrique de pente constante. Après une étude des discontinuités interfaciales, on exploite les propriétés établies pour construire des solutions d'ondes périodiques avec discontinuités [25]. Des ondes analogues ont été trouvées dans un liquide avec surface libre pa DRESSLER en mouvement plan [12] et par DYMENT et DYMENT et LOFFICIAL [1], [2] pour une section quelconque. Le problème est traité ici d'abord sans frottement interfacial, puis en tenant compte de ce frottement. Pour illustrer ces résultats un exemple est considéré en détail.

Au Chapitre 3 on revient à l'écoulement sans frottement et on procède à la normalisation des équations suivant une présentation qui découle des propriétés physiques du phénomène. Cette présentation fait apparaître un petit paramètre représentant le carré du rapport de deux longueurs de référence, l'une transversale et l'autre longitudinale. Une méthode des perturbations par rapport à ce paramètre est ensuite mise en oeuvre en prenant pour solution de base un écoulement uniforme. Cette procédure a déjà été utilisée par de nombreux auteurs [7], [13], [18]. On calcule ensuite les approximations d'ordre un et deux et on montre l'existance d'ondes progressives indéformables à l'ordre deux de type cnoïdal [26]. Suivant la forme de la conduite, le rapport des masses volumiques et les vitesses respectives dans les deux fluides, les ondes cnoïdales ont une forme normale ou inversée. En particulier les ondes solitaires obtenues dans le cas particulier d'une longueur d'onde infinie sont soit des surélévations, soit des dénivellations quelle que soit la forme de la conduite. Le cas particulier des ondes solitaires avait déjà été envisagé par LONG [17], mais seulement en mouvement plan. Dans le cas d'un seul liquide à surface libre étudié par DYMENT [1], FENTON [16] on obtient des résultats analogues, mais le type des ondes dépend uniquement de la forme du canal. La propriété remarquable établie dans ce problème est que les conditions pour lesquelles les ondes périodiques indéformables à l'ordre deux sont de type normal ou inversé sont les mêmes que celles obtenues dans l'étude des ondes périodiques, et pour lesquelles les discontinuités sont des surélévations ou des dénivellations.

La normalisation et la méthode des perturbations sont appliquées de nouveau dans le Chapitre 4 à l'écoulement sans frottement dans un canal cylindrique horizontal ouvert à l'atmosphère. Les approximations d'ordre un et deux sont calculées pour un écoulement de base uniforme à l'ordre zéro. Ici également on met en évidence l'existance d'ondes progressives indéformables de type cnoïdal tant pour l'interface que pour la surface libre : suivant les données du problème ces ondes sont de type normal ou inversé. En écoulement plan ces ondes sont bien connues (DYMENT [15], KENLEGAN [19], KAKUTANI et YAMASAKI [20] PETERS et STOKER [22] .... voir bibliographie dans MILES [23]). GAVRILOV [21] a montré expérimentalement pour une section rectangulaire l'existance d'ondes solitaires tant pour l'interface que pour la surface libre. GRIMSHAW [24] a été le premier à obtenir des ondes interfaciales de type cnoïdal dans les canaux de section lentement variable et pour des écoulements voisins du repos. Indépendamment de GRIMSHAW nous avons établi par une méthode différente les équations définissant les ondes cnoïdales à l'interface et à la surface libre.

CHAPITRE 1

ECOULEMENT DE DEUX FLUIDES NON MISCIBLES SUPERPOSES DANS UNE CONDUITE. ONDES PROGRESSIVES CONTINUES AVEC FROTTEMENT

1.1.- ECOULEMENT PRESQUE A UNE DIMENSION. ECOULEMENT GRADUELLEMENT VARIE.

On considère deux fluides non miscibles superposés, isovolumes, pesants, non visqueux dans une conduite de section régulière quelconque.

Les mouvements considérés s'effectuent par rapport à un repère $Oxyz$ trirectangle, direct, galiléen avec Ox horizontal et Oz vertical ascendant.

Les grandeurs accentuées sont liées au fluide léger et celles non accentuées au fluide lourd.

Nous désignons par u, v, w et u', v', w' les composantes des vitesses, par ρ et $\rho' = \delta\rho$ les masses volumiques, par g l'accélération de la pesanteur, par $\hat{p}$ et $\hat{p}'$: les pressions motrices définies par $\hat{p} = p + \rho g z$ et $\hat{p}' = p' + \rho g z$ (où p et p' désignent les pressions effectives (différence entre la pression et la pression atmosphérique)), par h la cote de l'interface, par σ et σ' les aires occupées par les deux fluides dans une section transversale de la conduite, par $\bar{\sigma} = \sigma + \sigma'$ l'aire d'une section transversale de la conduite, par $y = b(x, z)$ ou $z = a(x, y)$ l'équation de la conduite, par t le temps.

Ecrivons l'équation de conservation de la masse, les équations de la dynamique, et les conditions cinématiques à la frontière solide et à l'interface (une lettre latine en indice symbolise une dérivation). Pour le fluide lourd on a :

(1.1.a) $$u_x + v_y + w_z = 0$$

(1.1.b) $$u_t + u u_x + v u_y + w u_z + \frac{\hat{p}_x}{\rho} = 0$$

(1.1.c) $$v_t + u v_x + v v_y + w v_z + \frac{p_y}{\rho} = 0$$

(1.1.d) $$w_t + u w_x + v w_y + w w_z + \frac{p_z}{\rho} = 0$$

(1.1.e) $u a_x + v a_y = w$: pour $z = a(x,y)$, ou $u b_x + w b_z = v$: pour $y = b(x,z)$; à la frontière solide-fluide lourd.

(1.1.f) $b_t + u b_x + v b_y = w$ à l'interface $z = b(x,y,t)$.

Pour le fluide léger on a :

(1.2.a) $$u'_x + v'_y + w'_z = 0$$

(1.2.b) $$u'_t + u'u'_x + v'u'_y + w'u'_z + \frac{p'_x}{\rho'} = 0$$

(1.2.c) $$v'_t + u'v'_x + v'v'_y + w'v'_z + \frac{p'_y}{\rho'} = 0$$

(1.2.d) $$w'_t + u'w'_x + v'w'_y + w'w'_z + \frac{p'_z}{\rho'} = 0$$

(1.2.e) $u'a_x + v'a_y = w'$ pour $z = a(x,y)$, ou $u'b_x + w'b_z = v'$ pour $y = b(x,z)$, à la frontière solide-fluide léger.

(1.2.f) $b_t + u'b_x + v'b_y = w'$ à l'interface $z = b(x,y,t)$. pour le fluide léger.

La condition dynamique à l'interface s'écrit :

(1.3) $p = p'$ pour $z = b(x,y,t)$

On suppose que l'écoulement est irrotationnel. On a donc :

(1.4.a) $u_y = v_x$, $u_z = w_x$, $v_z = w_y$

(1.4.b) $u'_y = v'_x$, $u'_z = w'_x$, $v'_z = w'_y$

Si la section de la conduite varie très lentement en fonction de x et s'il est de même pour la cote de l'interface à l'égard de x et de t , l'écoulement est presque à une dimension.

Ceci se traduit par :

(1.5.a) $\quad v, w << u \quad ; \quad u_y, u_z, \hat{p}_y, \hat{p}_z \simeq 0$,

(1.5.b) $\quad v', w' << u' \quad ; \quad u'_y, u'_z, \hat{p}'_y, \hat{p}'_z \simeq 0$.

Il vient pour p et p' , compte tenu de (1.3) :

(1.6) $\quad p \simeq p^* + \rho g(h-z) \quad ; \quad p' \simeq p^* + \rho' g(h-z)$

On en déduit que h ne dépend presque pas de y . Par suite, les équations (1.1.b), (1.1.c), (1.1.d), (1.1.f), et (1.2.b), (1.2.c), (1.2.d), (1.2.f) peuvent prendre les formes approchées suivantes :

(1.7.a) $\quad u_t + u u_x + \dfrac{\hat{p}_x}{\rho} \simeq 0$

(1.7.b) $\quad \dfrac{dv}{dt} \simeq 0$

(1.7.c) $\quad \dfrac{dw}{dt} \simeq 0$

(1.7.d) $\quad h_t + u h_x \simeq w \qquad$ pour $z = h$

(1.7.e) $\quad u'_t + u' u'_x + \dfrac{\hat{p}'_x}{\rho'} \simeq 0$

(1.7.f) $\quad \dfrac{dv'}{dt} \simeq 0$

(1.7.g) $\quad \dfrac{dw'}{dt} \simeq 0$

(1.7.h) $\quad h_t + u' h_x \simeq w' \qquad$ pour $z = h$

Intégrons les équations (1.1.a) et (1.2.a) respectivement sur σ et σ'.

Comme u et u' ne dépendent presque pas de y et de z , on obtient :

$$\sigma u_x + \int_\sigma v_y \, dy\, dz + \int_\sigma w_z \, dy\, dz \simeq 0$$

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ désignent les contours respectifs de σ et σ' parcourus dans le sens direct, Γ et Γ' les parties respectives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ appartenant à la frontière solide (fig. 1.1), nous obtenons :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_\sigma v_y \, dy\, dz = \int_{\mathcal{C}} v \, dz = \int_\Gamma v a_y \, dz = \int_\Gamma (u b_x + w b_z) \, dz \,, \\ &\int_\sigma w_z \, dy\, dz = -\int_\Gamma (u a_x + v a_y) \, dy - \int_{b_2}^{b_1} (s_t + u s_x) \, dy \,, \\ &\int_{\sigma'} v'_y \, dy\, dz = \int_{\mathcal{C}'} v' \, dz = \int_{\Gamma'} v' a_y \, dy = \int_{\Gamma'} (u' b_x + w' b_z) \, dz \,, \\ &\int_{\sigma'} w'_z \, dy\, dz = -\int_{\Gamma'} (u' a_x + v' a_y) \, dy - \int_{b_1}^{b_2} (s_t + u s_x) \, dy \,. \end{aligned} \right.$$

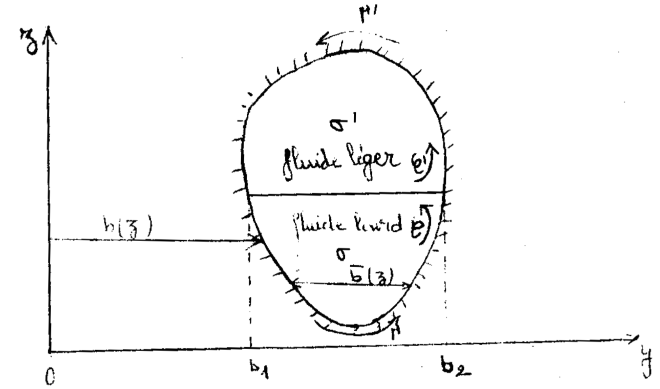


Fig. 1.1 : Section de la conduite.

Par conséquent, les équations de conservation de la masse (1.1.a), (1.2.a) s'écrivent :

$$(1.9.a) \qquad g s_t + u g s_x + c^2 u_x \simeq \frac{u c^2}{\sigma}\int_\Gamma a_x\, dy = -\frac{u c^2}{\sigma}\int_\Gamma b_x\, dz ,$$

$$(1.9.b) \qquad g s_t + u' g s_x - c'^2 u'_x \simeq -\frac{u' c'^2}{\sigma'}\int_{\Gamma'} a_x\, dy = \frac{u' c'^2}{\sigma'}\int_{\Gamma'} b_x\, dz$$

avec c et c' positifs définis par :

$$(1.10) \qquad c^2 = \frac{g\sigma}{\bar{b}(s)} , \qquad c'^2 = \frac{g\sigma'}{\bar{b}(s)} .$$

En tenant compte de

$$\sigma = \int_\Gamma b\, dz = s\bar{b}(s) - \int_\Gamma a\, dy$$

$$\sigma' = \int_{\Gamma'} b\, dz = -s\bar{b}(s) - \int_{\Gamma'} a\, dy ,$$

on obtient :

$$(1.11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_t = s_t \bar{b}(s) , \quad \sigma'_t = -s_t \bar{b}(s) , \\[2ex] \sigma_x = s_x \bar{b}(s) + \int_\Gamma b_x\, dz = s_x \bar{b}(s) - \int_\Gamma a_x\, dy , \\[2ex] \sigma'_x = -s_x \bar{b}(s) + \int_{\Gamma'} b_x\, dz = -s_x \bar{b}(s) - \int_{\Gamma'} a_x\, dy . \end{array} \right.$$

De là, à la place de (1.9.a) et (1.9.b) :

(1.12.a) $$\sigma_t + (u\sigma)_x \simeq 0$$

(1.12.b) $$\sigma'_t + (u'\sigma')_x \simeq 0$$

Remplaçons les égalités approchées par des égalités strictes : les équations (1.5) et (1.6) s'écrivent :

(1.13.a) $$u_y = u_z = u'_y = u'_z = 0$$

(1.13.b) $$\hat{p}_y = \hat{p}_z = 0 \quad , \quad p = p^* + \rho g(s - z) \quad , \quad p' = p^* + \rho' g(s - z)$$

Compte tenu des deux dernières relations (1.13.b), les équations (1.7.a) et (1.7.e) deviennent :

(1.14.a) $$u_t + uu_x + \frac{p^*_x}{\rho} + g s_x = 0$$

(1.14.b) $$u'_t + u'u'_x + \frac{p^*_x}{\rho'} + g s_x = 0$$

Les équations (1.7.d), (1.7.h), (1.9) ou (1.12) s'écrivent :

(1.15.a) $$s_t + u s_x = w$$

(1.15.b) $$s_t + u' s_x = w'$$

pour $z = s$

(1.16.a) $$\sigma_t + (u\sigma)_x = 0$$

(1.16.b) $$\sigma'_t + (u'\sigma')_x = 0$$

Les écoulements correspondant à la solution du système d'équations (1.13), (1.14) et (1.16) sont appelés écoulements par tranches ou encore écoulements graduellement variés. On admet que ces écoulements constituent une première approximation des écoulement presque à une dimension.

1.2.- ECOULEMENT GRADUELLEMENT VARIE AVEC FROTTEMENT

Abandonnons l'hypothèse de fluide idéal et tenons compte du frottement. Nous adoptons pour ce frottement une loi empirique simple comme dans [1], [2], [3]. La conduite est supposée cylindrique de section régulière quelconque, quasi-horizontale de pente i constante.

Plaçons-nous dans un repère $Ox_i y\, z_i$ trirectangle, direct galiléen avec Ox_i dirigé suivant la pente, et Oz_i directement perpendiculaire (voir figure 1.2). Si $z_i = h$ désigne l'interface on a : $h = s + i x_i$.
La condition d'adhérence oblige les deux fluides à avoir la même vitesse à l'interface d'une part, et à avoir une vitesse nulle à la frontière solide d'autre part. Autrement dit, la vitesse varie très rapidement au voisinage des frontières et elle est très voisine, pour chaque fluide, de la vitesse moyenne sur la plus grande partie de la section transversale baignée par ce fluide, de sorte qu'on peut remplacer en première approximation les profils de vitesse réels par des profils uniformes. Au lieu de $u(x_i, y, z_i, t)$ et $u'(x_i, y, z_i, t)$ on aura $u(x_i, t)$ et $u'(x_i, t)$ sur σ et σ' ouverts, et :

$$\text{(1.17)} \quad \begin{cases} \vec{u} = \vec{u'} & \text{pour } z_i = h = s + i x_i \,, \\ \vec{u} = \vec{0} \,, \quad \vec{u'} = \vec{0} & \text{sur la frontière solide,} \end{cases}$$

de manière à satisfaire aux conditions d'adhérence. Ainsi, les hypothèses (1.13) de l'écoulement bicouches par tranches demeurent encore valables en première approximation.

A la place de (1.15) on a :

$$\text{(1.18)} \qquad h_t + u\, h_{x_i} = w \qquad \text{pour } z_i = h$$

On verra par la suite que les équations (1.16) demeurent valables.

1.2.1.- *Equation de conservation de la masse*

Intégrons les équations (1.1.a) et (1.2.a) respectivement sur σ et σ'. Compte tenu de (1.8) et de (1.17) on obtient (voir figure 1.2) :

$$\int_0^h u_{x_i}(x_i,y,z_i,t)\,\bar{b}(z_i)\,dz_i + w(x_i,y,h,t)\,\bar{b}(h)=0\,,$$

$$\int_h^{\bar{h}} u'_{x_i}(x_i,y,z_i,t)\,\bar{b}(z_i)\,dz_i - w(x_i,y,h,t)\,\bar{b}(h)=0\,,$$

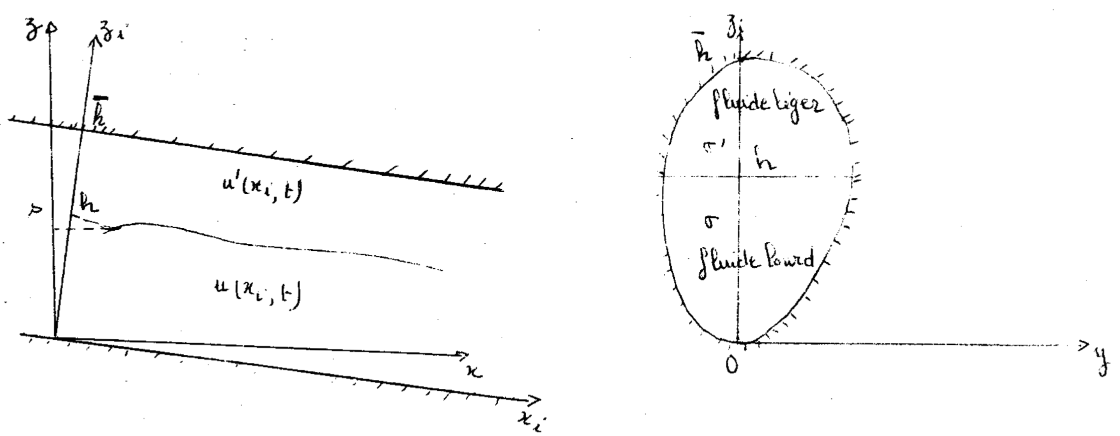


Fig. 1.2 : Conduite de section quelconque.

Comme, en première approximation

$$\int_0^h u\,\bar{b}(z_i)\,dz_i = u(x_i,t)\,\sigma \quad , \quad \int_h^{\bar{h}} u'\,\bar{b}(z_i)\,dz_i = u'(x_i,t)\,\sigma'$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^h u\,\bar{b}(z_i)\,dz_i = \int_0^h u_{x_i}\,\bar{b}(z_i)\,dz_i + u(x_i,y,h,t)\,\bar{b}(h)\,h_{x_i} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_h^{\bar h} u'\cdot\bar b(z_i)\,dz_i = \int_h^{\bar h} u'_{x_i}\,\bar b(z_i)\,dz_i - u(x_i,y,h)\,\bar b(h)\,h_{x_i}$$

On obtient, compte tenu de (1.18) :

(1.19.a) $$\sigma_t + (u\sigma)_{x_i} = 0\ ,$$

(1.19.b) $$\sigma'_t + (u'\sigma')_{x_i} = 0\ .$$

1.2.2.- Equation de la dynamique

Appliquons le théorème global d'Euler au volume ϑ' de fluide lourd compris entre deux sections parallèles à Oyz_i et distantes de dx_i .

On obtient par projection sur Ox_i :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta'}\rho u\,d\vartheta' + \int_{\vartheta'}\hat{p}_{x_i}\,d\vartheta' + d\int_{\sigma}\rho u^2 d\sigma + \left[\tau_s\pi + \tau_I\bar b(h)\right]dx_i = 0$$

où τ_s et τ_I sont respectivement les moyennes de la projection sur Ox_i de la contrainte de frottement à la frontière entre solide et fluide de σ , et où π est le périmètre mouillé de la paroi solide.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\vartheta}\rho u\,d\vartheta = dx_i\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma}\rho u\,d\sigma = \rho(u\sigma)_t\,dx_i\ ,$$

Par ailleurs :

$$\int_{v} \hat{p}_{x_i}\, dv = \hat{p}_{x_i}\, \sigma\, dx_i \,,$$ puisque la pression est hydrostatique

et $$d \int_{\sigma} \rho\, u^2 d\sigma = \rho\, d\left(u^2 \sigma\right)$$ en première approximation.

En utilisant (1.19.a) on obtient finalement :

(1.20.a) $$u_t + u\, u_{x_i} + \frac{\hat{p}_{x_i}}{\rho} + \frac{\tau_s}{\rho} \cdot \frac{\pi}{\sigma} + \tau_I \frac{b(h)}{\rho \sigma} = 0 .$$

D'une manière analogue on obtient pour le fluide léger, en tenant compte de la continuité du vecteur contrainte à l'interface :

(1.20.b) $$u'_t + u' u'_{x_i} + \frac{\hat{p}'_{x_i}}{\rho'} + \frac{\tau'_s}{\rho'} \frac{\pi'}{\sigma'} - \tau_I \frac{b(h)}{\rho' \sigma'} = 0$$

où τ'_s est la moyenne de la contrainte de frottement à la paroi solide et π' le périmètre mouillé de la paroi solide.

En définissant les coefficients de frottement linéïque ψ , ψ' et λ par :

(1.21) $$\tau_s = \psi \frac{\rho u^2}{8} \quad , \quad \tau'_s = \psi' \frac{\rho' u'^2}{8} \quad , \quad \tau_I = \lambda \frac{\rho (u - u')^2}{2} ,$$

on obtient :

(1.22.a) $$u_t + u\, u_{x_i} + \frac{\hat{p}_{x_i}}{\rho} = - \frac{\psi u^2}{2 \Delta} - \lambda g \frac{(u - u')^2}{2 c^2}$$

(1.22.b) $$u'_t + u' u'_{x_i} + \frac{\hat{p}'_{x_i}}{\rho'} = - \frac{\psi' u'^2}{2 \Delta'} + \lambda g \frac{(u - u')^2}{2 s\, c'^2}$$

où Δ et Δ' sont les diamètres équivalents définis par :

(1.23) $$\Delta = \frac{4 \sigma}{\pi} \quad , \quad \Delta' = \frac{4 \sigma'}{\pi'} .$$

Les relations (1.13.b) permettent d'écrire :

(1.24.a) $$u_t + u u_{x_i} + \frac{p^*_{x_i}}{\rho} + g h_{x_i} = g i - \frac{\psi u^2}{2\Delta} - \lambda g \frac{(u-u')^2}{2c^2}$$

(1.24.b) $$u'_t + u' u'_{x_i} + \frac{p^*_{x_i}}{\rho'} + g h_{x_i} = g i - \frac{\psi' u'^2}{2\Delta'} + \lambda g \frac{(u-u')^2}{2\delta c'^2}$$

Il est à noter que ψ , ψ' et λ sont de même signe que u , u' et $u-u'$ respectivement. Dans la suite ψ , ψ' et λ seront considérés comme des constantes.

L'élimination de p^* entre les deux équations (1.24) donne :

(1.25) $$u_t + u u_{x_i} - \delta\left(u'_t + u' u'_{x_i}\right) + (1-\delta) g h_{x_i} = (1-\delta) g i - \frac{\psi u^2}{2\Delta} + \frac{\delta \psi' u'^2}{2\Delta'} - \frac{\lambda g}{2}(u-u')^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c'^2}\right)$$

1.3.- ONDES PROGRESSIVES CONTINUES SANS FROTTEMENT INTERFACIAL

1.3.1.- *Solutions d'ondes progressives continues de vitesse constante*

Négligeons le frottement interfacial, ce qui revient à poser $\lambda = 0$ dans (1.24), et proposons-nous de chercher des solutions d'ondes progressives de vitesse ω constante.

On se place dans le repère lié à l'onde dont les axes sont parallèles à ceux du trièdre $O x_i y z_i$. Cela se traduit par le changement de variable :

(1.26) $$\xi = x_i - \omega t$$

On fait l'hypothèse que u , u' , σ et σ' ne sont fonction que de ξ . Alors les équations (1.19) deviennent :

(1.27) $$q = (\omega - u)\sigma \quad , \quad q' = (\omega - u')\sigma'$$

où q et q' représentent les débits apparents.

Compte tenu des relations (1.27), l'équation (1.25) s'écrit :

(1.28) $$\left\{ 1 - \frac{q^2}{(1-\delta)\sigma^2 c^2} - \frac{\delta q'^2}{(1-\delta)\sigma'^2 c'^2} \right\} \frac{h_\xi}{i} = 1 - \frac{\psi}{2gi\Delta(1-\delta)}\left(\omega - \frac{q}{\sigma}\right)^2 + \frac{\delta \psi'}{2gi\Delta'(1-\delta)}\left(\omega - \frac{q'}{\sigma'}\right)^2$$

Nous cherchons à construire une solution représentant une onde unique, dite onde de crue, telle que l'écoulement soit uniforme à l'infini amont et à l'infini aval [25].

En réservant les indices 0 et 1 respectivement pour l'infini aval et pour l'infini amont les conditions aux limites sont :

(1.29.a) $u = u_0 \; , \; h = h_0 \; , \; u' = u'_0$: à l'infini aval

(1.29.b) $u = u_1 \; , \; h = h_1 \; , \; u' = u'_1$: à l'infini amont

Dans le cas d'un seul fluide à surface libre, ce problème a été résolu en mouvement plan par THOMAS [4], et étendu aux canaux cylindriques par DYMENT [1], DYMENT et LOFFICIAL [2].

1.3.2.- *Calcul de la vitesse de propagation*

Des deux relations (1.2 7) on tire :

(1.30) $$\frac{\omega}{u_0} = \frac{\dfrac{\sigma_1 u_1}{\sigma_0 u_0} - 1}{\dfrac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1} \quad , \quad \frac{\omega}{u'_0} = \frac{\dfrac{\sigma'_1 u'_1}{\sigma'_0 u'_0} - 1}{\dfrac{\sigma'_1}{\sigma'_0} - 1} .$$

Les équations (1.24) se réduisent au loin à :

(1.31.a) $$p^*_{,x_i} = \rho\left(gi - \frac{\psi u_0^2}{2\Delta_0}\right) = \rho'\left(gi - \frac{\psi' u_0'^2}{2\Delta_0'}\right)$$

(1.31.b) $$p^*_{1,x_i} = \rho\left(gi - \frac{\psi u_1^2}{2\Delta_1}\right) = \rho'\left(gi - \frac{\psi u_1'^2}{2\Delta_1'}\right)$$

Par conséquent le gradient de p^* est constant au loin.

De là, la condition d'écoulement uniforme à l'infini amont et à l'infini aval :

(1.32) $$2gi(1-s) = \frac{\psi u_0^2}{\Delta_0} - \frac{s\psi' u_0'^2}{\Delta_0'} = \frac{\psi u_1^2}{\Delta_1} - \frac{s\psi' u_1'^2}{\Delta_1'}$$

1.3.3.- *Conditions d'existance*

Dans les deux expressions (1.30), on voit que ω dépend de façon indépendante des propriétés du fluide supérieur et du fluide inférieur. Il en résulte une condition nécessaire d'existance d'ondes progressives continues de vitesse ω constante.

En effet, compte tenu de $\sigma_0 + \sigma_0' = \sigma_1 + \sigma_1' = cte$ les relations (1.30) donnent, par élimination de ω :

(1.33) $$\sigma_0 u_0 + \sigma_0' u_0' = \sigma_1 u_1 + \sigma_1' u_1' \quad .$$

Les relations (1.30) et (1.32) permettent d'écrire :

(1.34) $$\left(\frac{\psi}{\Delta_1\sigma_1^2} - \frac{s\psi'}{\Delta_1'\sigma_1'^2}\right)(\sigma_1-\sigma_0)^2\omega^2 + 2\left(\frac{\psi\sigma_0 u_0}{\Delta_1\sigma_1^2} + \frac{s\psi'\sigma_0' u_0'}{\Delta_1'\sigma_1'^2}\right)(\sigma_1-\sigma_0)\omega$$

$$+ \frac{\psi\sigma_0^2 u_0^2}{\Delta_1\sigma_1^2} - \frac{s\psi'\sigma_0'^2 u_0'^2}{\Delta_1'\sigma_1'^2} + 2gi(s-1) = 0$$

Cette équation du second degré en ω n'admet de solutions réelles que si son discriminant est positif ou nul. De là, la seconde condition nécessaire d'existance d'ondes progressives de vitesse ω constante :

$$(1.35) \qquad D = \frac{\Psi\left(\sigma_0 u_0 + \sigma'_0 u'_0\right)^2}{2 g i \Delta_1 \sigma_1^2 (1-\delta)} + \frac{\Psi}{\delta \Psi'} \frac{\sigma_1'^2 \Delta'_1}{\sigma_1^2 \Delta_1} - 1 \geqslant 0$$

Dans cette inégalité, il faut tenir compte de ce que les différentes grandeurs au loin en amont et en aval ne sont pas indépendantes.

En plus de (1.33), on a en effet

$$\pi_0 + \pi'_0 = \pi_1 + \pi'_1$$

u_0, u'_0, σ_0, σ'_0, Δ_0, Δ'_0 vérifiant la première égalité (1.32) étant donnés, σ_1, σ'_1, Δ_1, Δ'_1 sont des fonctions de h_1 et (1.35) constitue alors une inéquation en h_1 dont la racine ou les racines, si elles existent, fournissent la solution du problème.

Par suite, on obtient ω à partir de (1.34) :

$$(1.36) \qquad \omega = \frac{\dfrac{\Psi \sigma_0 u_0}{\Delta_1 \sigma_1^2} + \dfrac{\delta \Psi' \sigma'_0 u'_0}{\Delta'_1 \sigma_1'^2} - \left\{\dfrac{2 g i \delta \Psi' (1-\delta) D}{\Delta'_1 \sigma_1'^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left(\dfrac{\delta \Psi'}{\Delta'_1 \sigma_1'^2} - \dfrac{\Psi}{\Delta_1 \sigma_1^2}\right)\left(\sigma_1 - \sigma_0\right)}$$

L'autre racine est écartée car elle ne satisfait pas la condition d'existance (1.33).

Dans le cas exceptionnel où le coefficient de ω^2 dans (1.34) est nul, la solution est évidente : elle satisfait la condition d'existance (1.33).

Les relations (1.31) montrent qu'au loin, où l'écoulement est uniforme, p^* est une fonction linéaire de x_1. Il en est par conséquent de même pour p et p' d'après les deux dernières relations (1.13.b). C'est une solution acceptable pour une conduite de longueur finie, ce qui se présente toujours dans la pratique.

Pour une conduite de longueur infinie, comme p et p' doivent être bornées, il faut que $p_{x_i} = p'_{x_i} = 0$. On a alors à la place de (1.32)

$$\text{(1.37.a)} \qquad \frac{u_1^2}{u_v^2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_v} \;, \qquad \frac{u_1'^2}{u_v'^2} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'_v} \;, \qquad \frac{\psi'}{\psi} = \frac{u_v^2}{u_v'^2}\,\frac{\Delta'_v}{\Delta_v}$$

La condition (1.33) devient :

$$\text{(1.37.b)} \qquad \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_v}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_v}\right)^{1/2} - 1\right)\frac{\sigma_v}{\sigma'_v}\left(\frac{\psi'\,\Delta_v}{\psi\,\Delta'_v}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\sigma'_1}{\sigma'_v}\left(\frac{\Delta'_1}{\Delta'_v}\right)^{1/2}\right)$$

Par suite :

$$\text{(1.37.c)} \qquad \frac{\omega}{u_v} = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_v}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_v}\right)^{1/2} - 1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_v} - 1} \;.$$

Revenons au cas général et donnons un exemple. Soit une conduite cylindrique, de section circulaire de rayon a .

Prenons pour paramètre l'angle θ indiqué sur la figure (1.3). On a :

$$\text{(1.38)} \qquad \begin{cases} \sigma = \dfrac{a^2}{2}\left(2\theta - \sin 2\theta\right) \\[2ex] \sigma' = \dfrac{a^2}{2}\left(2(\pi-\theta) + \sin 2\theta\right) \\[2ex] \Delta = \dfrac{a}{\theta}\left(2\theta - \sin 2\theta\right) \\[2ex] \Delta' = \dfrac{a}{\pi-\theta}\left(2(\pi-\theta) + \sin 2\theta\right) \end{cases}$$

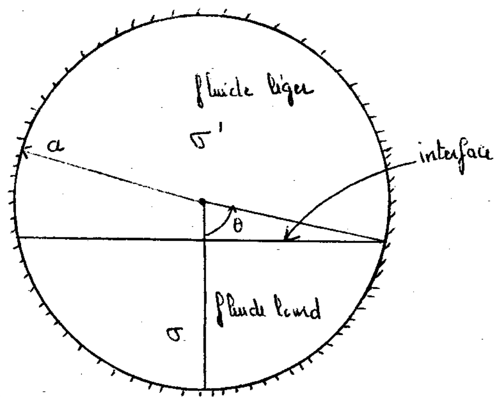


Fig. 1.3 : Conduite de section circulaire.

On trouvera sur les planches 1, 2, 3 les représentations graphiques de $\mathbb{D}$ et de $\frac{\omega}{c_0}$ en fonction de θ_1 pour θ_0 , i , δ , ψ , ψ' donnés.

1.3.4.- Solution explicite pour l'onde de faible amplitude

L'intégration analytique de l'équation (1.28) pour une conduite quelconque est impossible.

Par la suite, nous nous limitons à envisager le cas d'une onde de faible amplitude.

Introduisons les quantités

$$(1.39)\qquad \begin{cases} K = \dfrac{d\,\mathrm{Log}\,\Delta}{d\,\mathrm{Log}\,\sigma} + 2 \,, & L = \dfrac{d\,\mathrm{Log}\,K}{d\,\mathrm{Log}\,\sigma} \\[2ex] K' = \dfrac{d\,\mathrm{Log}\,\Delta'}{d\,\mathrm{Log}\,\sigma'} + 2 \,, & L' = \dfrac{d\,\mathrm{Log}\,|K'|}{d\,\mathrm{Log}\,\sigma'} \end{cases}$$

qui ne dépendent que de la forme de la conduite.

L'équation (1.28) s'écrit au terme d'un long calcul :

$$(1.40.a)\qquad m_0\, h_\xi = n_0\, g\,(h - h_0)(h - h_1)$$

où :

$$m_0 = 4(1-\delta) - \mathbb{F}_0^2 \left\{ \frac{\dfrac{\psi C_0 \mathbb{F}_0}{\Delta_0 \sigma_0}(K_0 - 2) + \dfrac{\delta \psi' C'_0 \mathbb{F}'_0}{\Delta'_0 \sigma'_0}\left(\dfrac{C'_0 \mathbb{F}'_0}{C_0 \mathbb{F}_0} K'_0 - 2\right)}{\dfrac{\psi C_0 \mathbb{F}_0}{\Delta_0 \sigma_0} + \dfrac{\delta \psi' C'_0 \mathbb{F}'_0}{\Delta'_0 \sigma'_0}} \right\}^2$$

$$- \delta \mathbb{F}_0'^2 \left\{ \frac{\dfrac{\psi C_0 \mathbb{F}_0}{\Delta_0 \sigma_0}\left(\dfrac{C_0 \mathbb{F}_0}{C'_0 \mathbb{F}'_0} K_0 - 2\right) + \dfrac{\delta \psi' C'_0 \mathbb{F}'_0}{\Delta'_0 \sigma'_0}(K'_0 - 2)}{\dfrac{\psi C_0 \mathbb{F}_0}{\Delta_0 \sigma_0} + \dfrac{\delta \psi' C'_0 \mathbb{F}'_0}{\Delta'_0 \sigma'_0}} \right\}^2$$

$$n_0 = \frac{\Psi \mathbb{F}_0^2}{2\Delta_0 C_0^2}(K_0-2)(2L_0+K_0) - \frac{\delta\Psi'\mathbb{F}_0'^2}{2\Delta_0' C_0'^2}(K_0'-2)(2L_0'+K_0') +$$

$$+ \frac{\delta\Psi\Psi'(K_0'C_0'\mathbb{F}_0' - K_0C_0\mathbb{F}_0)^2}{\Delta_0\Delta_0'\left(\frac{\Psi\mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \frac{\delta\Psi'\mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'}\right)} \left\{ \frac{\left(\frac{\Psi C_0^2\mathbb{F}_0^2}{\Delta_0} - \frac{\delta\Psi' C_0'^2\mathbb{F}_0'^2}{\Delta_0'}\right)}{2C_0^4 C_0'^4\left(\frac{\Psi\mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \frac{\delta\Psi'\mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathbb{F}_0\mathbb{F}_0'\left(\frac{K_0}{C_0^2} + \frac{K_0'}{C_0'^2}\right)}{C_0C_0'\left(K_0'C_0'\mathbb{F}_0' - K_0C_0\mathbb{F}_0\right)} \right\}$$

et $\mathbb{F}_0$, $\mathbb{F}_0'$ sont des nombre de Froude absolus définis par

(1.40.b) $$\mathbb{F}_0 = \frac{u_0}{C_0} \quad , \quad \mathbb{F}_0' = \frac{u_0'}{C_0'} \quad ;$$

La relation (1.36) devient :

(1.41) $$\omega = \frac{\frac{\Psi K_0 \mathbb{F}_0^2}{2\Delta_0} + \frac{\delta\Psi' K_0' \mathbb{F}_0'^2}{2\Delta_0'}}{\frac{\Psi\mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \frac{\delta\Psi'\mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'}}$$

Dans l'équation (1.40), $h - h_0$ et $h - h_1$ sont de signes contraires pour le profil indiqué sur la figure 1.4. Par conséquent, la pente h_ξ est du signe opposé de $m_0 \cdot n_0$

Pour des nombres de Froude absolus, un rapport de masses volumiques et une forme de la conduite tels que cette quantité soit positive, on a une onde de crue. Dans le cas contraire, on a nécessairement une onde de décrue.

a. onde de crue

b. onde de décrue

Fig. 1.4 : Ondes de crue et de décrue.

L'intégration de l'équation (1.40.a) est immédiate.

En choisissant l'origine du repère mobile au point où $h = \frac{h_0 + h_1}{2}$,

on obtient :

$$h = \frac{h_0 + h_1}{2} - \frac{h_1 - h_0}{2} \, th \left\{ \frac{g n_0}{m_0} (h_1 - h_0) \xi \right\} \tag{1.42}$$

Dans le cas particulier d'un seul fluide à surface libre, on a : $\delta = 0$.
On retrouve les résultats de DYMENT [1], et DYMENT et LOFFICIAL [2].

Exemple : conduite de section rectangulaire et de grande largeur (fig. 1.5). On a :

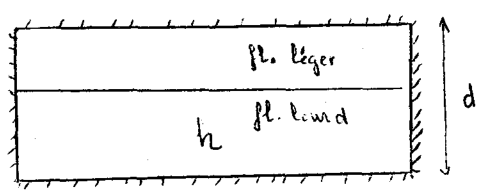


Fig. 1.5 : Section rectangulaire

$$K_0 = K'_0 = 3 \quad , \quad L_0 = L'_0 = 0 \quad ,$$

$$C_0^2 = g h_0 \quad , \quad C_0'^2 = g(d-h_0) \quad , \quad \Delta_0 = 4 h_0 \quad , \quad \Delta'_0 = 4(d-h_0)$$

Par suite, h est donnée par (1.42) avec

$$m_0 = 4(1-\delta) - \mathbb{F}_0^2 \left\{ \frac{\Psi \mathbb{F}_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{3/2} + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0 \left[3 \frac{\mathbb{F}'_0}{\mathbb{F}_0} \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{1/2} - 2 \right]}{\Psi \mathbb{F}_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{3/2} + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0} \right]^2$$

$$- \delta \mathbb{F}_0'^2 \left\{ \frac{\Psi \mathbb{F}_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{3/2} \left[3 \frac{\mathbb{F}_0}{\mathbb{F}'_0} \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{-1/2} - 2 \right] + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0}{\Psi \mathbb{F}_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{3/2} + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0} \right\}^2 ,$$

$$g \cdot n_0 = \frac{3 \Psi \mathbb{F}_0^2}{8 h_0^2} - \frac{3 \delta \Psi' \mathbb{F}_0'^2}{8 h_0^2 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^2} + \frac{9 \delta \Psi \Psi' \left[\mathbb{F}'_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{1/2} - \mathbb{F}_0 \right]^2}{8 h_0^2 \left[\Psi \mathbb{F}_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{3/2} + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0 \right]} \Bigg\{$$

$$\frac{\Psi \mathbb{F}_0^2 - \delta \Psi' \mathbb{F}_0'^2}{\Psi \mathbb{F}_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{3/2} + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0} + \frac{2 \mathbb{F}_0 \mathbb{F}'_0 \frac{d}{h_0}}{\left(\frac{d}{h_0}-1\right) \left[\mathbb{F}'_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{1/2} - \mathbb{F}_0 \right]} \Bigg\} ,$$

et

$$\omega = \frac{\frac{3 \Psi \mathbb{F}_0^2}{2} + \frac{3 \delta \Psi' \mathbb{F}_0'^2}{2} \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{-1/2}}{\Psi \mathbb{F}_0 + \delta \Psi' \mathbb{F}'_0 \left(\frac{d}{h_0}-1\right)^{-3/2}} \cdot (g h_0)^{1/2}$$

Nous retrouvons les résultats de Morikawa [5] pour un seul fluide en posant $\delta = 0$.

1.4.- *ONDES PROGRESSIVES AVEC FROTTEMENT INTERFACIAL*

Reprenons le problème posé en 1.3 en supposant maintenant de plus qu'il y a frottement à l'interface. Les équations du mouvement graduellement varié sont données par (1.19) et (1.24).

1.4.1.- *Solutions d'ondes progressives continues de vitesse constante*

Nous nous proposons de chercher des solutions d'ondes progressives analogues à celles envisagées en 1.3. Nous nous plaçons dans un repère lié aux ondes ce qui nous conduit au changement de variable (1.26).A partir des équations (1.19) on obtient les deux formules (1.27). Par suite, l'équation (1.25) peut s'écrire :

$$(1.43)\quad \left\{1-\frac{q^2}{(1-\delta)\sigma^2c^2}-\frac{\delta q'^2}{(1-\delta)\sigma'^2c'^2}\right\}\frac{h_\xi}{i}=1-\frac{\psi}{2gi\Delta(1-\delta)}\left(\omega-\frac{q}{\sigma}\right)^2$$

$$+\frac{\delta\psi'}{2gi\Delta'(1-\delta)}\left(\omega-\frac{q'}{\sigma'}\right)^2-\frac{\lambda}{2i(1-\delta)}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c'^2}\right)\left(\frac{q'}{\sigma'}-\frac{q}{\sigma}\right)^2$$

Pour une onde de profil indiqué sur la figure 1.4 les conditions à l'infini aval et à l'infini amont sont définies par le système (1.29)

1.4.2.- *Calcul de la vitesse de propagation - Conditions d'existance*

Puisque l'écoulement est uniforme à l'infini, σ , σ' et h sont constants à l'infini aval et à l'infini amont de sorte qu'au loin le système (1.24) se réduit à :

$$(1.44.a)\quad p^*_{ox_i}=\rho\left\{gi-\frac{\psi u_o^2}{2\Delta_o}-\lambda g\frac{(u_o-u'_o)^2}{2C_o^2}\right\}=\rho'\left\{gi-\frac{\psi' u_o'^2}{2\Delta'_o}+\lambda g\frac{(u_o-u'_o)^2}{2C_o'^2}\right\},$$

(1.44.b) $$p_{1x_1} = \rho\left\{gi - \frac{\psi u_1^2}{2\Delta_1} - \frac{\lambda g(u_1-u_1')^2}{2C_1^2}\right\} = \rho'\left\{gi - \frac{\psi' u_1'^2}{2\Delta_1'} + \frac{\lambda g(u_1-u_1')^2}{2C_1'^2}\right\}$$

De là, les conditions d'écoulement uniforme à l'infini aval et à l'infini amont :

(1.45) $$2gi(1-\delta) = \frac{\psi u_0^2}{\Delta_0} - \frac{\delta\psi' u_0'^2}{\Delta_0'} + \lambda g(u_0-u_0')^2\left(\frac{1}{C_0^2}+\frac{1}{C_0'^2}\right) = \frac{\psi u_1^2}{\Delta_1} - \frac{\delta\psi' u_1'^2}{\Delta_1'} + \lambda g(u_1-u_1')^2\left(\frac{1}{C_1^2}+\frac{1}{C_1'^2}\right).$$

A partir des expressions (1.27), on obtient les deux relations (1.30) pour ω. De là, il résulte la première condition (1.33) nécessaire d'existance d'onde progressive de vitesse uniforme ω . La relation (1.45) nous permet d'écrire, grâce à (1.30), l'équation du second degré en ω:

(1.46) $$\left\{\frac{\psi}{\Delta_1\sigma_1^2} - \frac{\delta\psi'}{\Delta_1'\sigma_1'^2} + \frac{\lambda g\bar{\sigma}^2}{\sigma_1^2\sigma_1'^2}\left(\frac{1}{C_1^2}+\frac{1}{C_1'^2}\right)\right\}(\sigma_1-\sigma_0)^2\omega^2 + 2\left\{\frac{\psi\sigma_0 u_0}{\Delta_1\sigma_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta\psi'\sigma_0' u_0'}{\Delta_1'\sigma_1'^2} + \frac{\lambda g\bar{\sigma}}{\sigma_1\sigma_1'}\left(\frac{\sigma_0 u_0}{\sigma_1} - \frac{\sigma_0' u_0'}{\sigma_1'}\right)\left(\frac{1}{C_1^2}+\frac{1}{C_1'^2}\right)\right\}(\sigma_1-\sigma_0)\omega +$$

$$+ \frac{\psi\sigma_0^2 u_0^2}{\Delta_1\sigma_1^2} - \frac{\delta\psi'\sigma_0'^2 u_0'^2}{\Delta_1'\sigma_1'^2} + \lambda g\left(\frac{1}{C_1^2}+\frac{1}{C_1'^2}\right)\left(\frac{\sigma_0 u_0}{\sigma_1} - \frac{\sigma_0' u_0'}{\sigma_1'}\right)^2 + 2gi(\delta-1) = 0$$

L'équation (1.46) admet des solutions si son discriminant est positif ou nul.

D'où la seconde condition d'existance :

$$(1.47)\quad D' = \left[\left\{ \psi + \lambda g \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_1'^2} \right) \left(\Delta_1 - \frac{\Delta_1' \psi}{\delta \psi'} \right) \right\} \frac{(\sigma_0 u_0 + \sigma_0' u_0')^2}{2gi \Delta_1 \sigma_1^2 (1-\delta)} + \frac{\psi}{\delta \psi'} \frac{\Delta_1' \sigma_1'^2}{\Delta_1 \sigma_1^2} + \frac{\lambda g}{\delta \psi'} \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_1'^2} \right) \frac{\Delta_1' \bar{\sigma}^2}{\sigma_1^2} - 1 \right] \geqslant 0$$

$u_0, u_0', \sigma_0, \sigma_0', \Delta_0, \Delta_0'$ vérifiant la première égalité (1.45) étant donnés; comme en 1.3, (1.47) constitue une inéquation en h_1 dont la racine, ou les racines si elles existent, fournissent la solution du problème.

On obtient pour ω à partir de (1.46) :

$$(1.48)\quad \omega = \frac{\dfrac{\psi \sigma_0 u_0}{\Delta_1 \sigma_1^2} + \dfrac{\delta \psi' \sigma_0' u_0'}{\Delta_1' \sigma_1'^2} + \dfrac{\lambda g \bar{\sigma}}{\sigma_1 \sigma_1'} \left(\dfrac{1}{C_1^2} + \dfrac{1}{C_1'^2} \right) - \left\{ \dfrac{2gi\delta\psi' D'(1-\delta)}{\Delta_1' \sigma_1'^2} \right\}^{1/2}}{\left\{ \dfrac{\delta \psi'}{\Delta_1' \sigma_1'^2} - \dfrac{\psi}{\Delta_1 \sigma_1^2} - \dfrac{\lambda g \bar{\sigma}^2}{\sigma_1^2 \sigma_1'^2} \left(\dfrac{1}{C_1^2} + \dfrac{1}{C_1'^2} \right) \right\} (\sigma_1 - \sigma_0)}$$

L'autre racine est écartée car elle ne vérifie pas la condition d'existance (1.33).

Dans le cas particulier sans frottement interfacial, on retrouve la relation (1.36).

Dans le cas exceptionnel ou le coefficient de ω^2 dans (1.46) est nul, la solution est évidente : elle satisfait la condition d'existance (1.33).

Comme en 1.3, p et p' sont des fonctions linéaires de x_i. Ces solutions sont valables en conduite de longueur finie.

Pour une conduite de longueur infinie on doit avoir en toute rigueur :

$$p_{x_i} = 0 \qquad , \qquad p'_{x_i} = 0$$

et les relations (1.44) sont remplacées par :

1.49) $$\frac{\psi u_0^2}{\Delta_0} + \frac{\lambda g}{C_0^2}(u_0 - u_0')^2 = \frac{\psi' u_0'^2}{\Delta_0'} - \frac{\lambda g}{C_0'^2}(u_0 - u_0')^2 = \frac{\psi u_1^2}{\Delta_1} + \frac{\lambda g}{C_1'^2}(u_1 - u_1')^2 =$$

$$\frac{\psi' u_1'^2}{\Delta_1'} - \frac{\lambda g}{C_1'^2}(u_1 - u_1')^2$$

1.4.3.- Solution explicite pour l'onde de faible amplitude

L'intégration analytique de l'équation (1.43) pour une section quelconque de la conduite est impossible.

Nous nous limitons à envisager le cas d'une onde de faible amplitude, comme en 1.3.

Nous introduisons les quantités K, L, K', L' définies par les relations (1.39) et k, ℓ, k', ℓ' définies par

(1.50) $$\begin{cases} k = \dfrac{d \operatorname{Log} C^2}{d \operatorname{Log} \sigma} + 1 , & \ell = \dfrac{d \operatorname{Log} |k|}{d \operatorname{Log} \sigma} \\[2ex] k' = \dfrac{d \operatorname{Log} C'^2}{d \operatorname{Log} \sigma'} + 1 , & \ell' = \dfrac{d \operatorname{Log} |k'|}{d \operatorname{Log} \sigma'} \end{cases}$$

L'équation (1.43) devient au terme d'un long calcul :

(1.51) $$m_0' h_\xi = g(h - h_0)(h - h_1)\left\{ I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \frac{1}{J_1}\left(I_5 + I_6 + \dots + I_{12}\right)\right\}$$

avec :

$$m_0' = -\mathbb{F}_0^2 \left\{ \frac{\dfrac{\psi \mathbb{F}_0^2}{\Delta_0}(K_0 - 2) + \dfrac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'^2}{\Delta_0'}\left(K_0' - 2\dfrac{\mathbb{F}_0 C_0}{\mathbb{F}_0' C_0'}\right) + \lambda g \left[\dfrac{\overline{\mathbb{F}}_0^2}{C_0^2}(k_0 - 1) + \dfrac{\overline{\mathbb{F}}_0'^2}{C_0'^2}(1 - k_0') + \dfrac{2\widetilde{\mathbb{F}}_0}{\overline{C} C_0'^2}\left(C_0' \mathbb{F}_0' - C_0 \mathbb{F}_0\right)\right]}{C_0 \mathbb{F}_0 \left(\dfrac{\psi \mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \dfrac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'} + \lambda g \dfrac{\widetilde{\mathbb{F}}_0}{\overline{C}^3} \right)} \right\}^2$$

$$- \delta \mathbb{F}_0'^2 \left\{ \frac{\dfrac{\psi \mathbb{F}_0^2}{\Delta_0}\left(K_0 - \dfrac{2\mathbb{F}_0' C_0'}{\mathbb{F}_0 C_0}\right) + \dfrac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'^2}{\Delta_0'}(K_0' - 2) + \lambda g \left[\dfrac{\overline{\mathbb{F}}_0^2}{C_0^2}(k_0 - 1) + \dfrac{\overline{\mathbb{F}}_0'^2}{C_0'^2}(1 - k_0') + \dfrac{2\widetilde{\mathbb{F}}_0}{\overline{C} C_0^2}\left(C_0 \mathbb{F}_0 - C_0' \mathbb{F}_0'\right)\right]}{C_0' \mathbb{F}_0' \left(\dfrac{\psi \mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \dfrac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'} + \lambda g \dfrac{\widetilde{\mathbb{F}}_0}{\overline{C}^3} \right)} \right\}^2$$

$$+ 4(1 - \delta) ,$$

$$I_1 = \frac{\psi \mathbb{F}_0^2}{2\Delta_0 C_0^2}(K_0 - 2)(2L_0 + K_0) ,$$

$$I_2 = \frac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'^2}{2\Delta_0' C_0'^2}(2 - K_0')(2L_0' + K_0') ,$$

$$I_3 = 2\lambda g \left\{ \frac{\mathbb{F}_0}{C_0^3}\left(\frac{2\mathbb{F}_0}{C_0} + \frac{2\mathbb{F}_0'}{C_0'} - \frac{\mathbb{F}_0}{C_0}\ell_0\right)(1-k_0) + \frac{\mathbb{F}_0'}{C_0'^3}\left(\frac{2\mathbb{F}_0}{C_0} + \frac{2\mathbb{F}_0'}{C_0'} + \frac{\mathbb{F}_0'\ell_0'}{C_0'}\right)(k_0'-1) \right\} ,$$

$$I_4 = 2(\lambda g)^2 \left\{ \frac{\left(\frac{k_0-1}{C_0^4} + \frac{1-k_0'}{C_0'^4}\right)^2 \tilde{\mathbb{F}}_0^3 \, \bar{C}}{\frac{\psi \mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \frac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'} + \lambda g \frac{\tilde{\mathbb{F}}_0}{\bar{C}_0^3}} \right\} ,$$

$$J_1 = 2 \left\{ \frac{\psi \mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \frac{\delta \psi' \mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'} + \lambda g \frac{\tilde{\mathbb{F}}_0}{\bar{C}_0^3} \right\}^2 ,$$

$$I_5 = \frac{\psi}{\Delta_0}\left(\frac{\delta\psi'}{\Delta_0'}\right)^2 \left\{ \frac{\mathbb{F}_0^3 K_0'^2}{C_0}\left(\frac{2\mathbb{F}_0}{C_0'^3} - \frac{\mathbb{F}_0'}{C_0^3}\right) + \frac{2\mathbb{F}_0\mathbb{F}_0'^2}{C_0'}K_0 K_0'\left(\frac{2\mathbb{F}_0'}{C_0^3} - \frac{\mathbb{F}_0}{C_0'^3}\right) - \frac{3\mathbb{F}_0^2\mathbb{F}_0'^2 K_0^2}{C_0^2 C_0'^2} \right\} ,$$

$$I_6 = \left(\frac{\psi}{\Delta_0}\right)^2 \frac{\delta\psi'}{\Delta_0'} \left\{ \frac{\mathbb{F}_0'^3 K_0^2}{C_0'}\left(-\frac{2\mathbb{F}_0'}{C_0^3} + \frac{\mathbb{F}_0}{C_0'^3}\right) + \frac{2\mathbb{F}_0^2\mathbb{F}_0'}{C_0}K_0 K_0'\left(-\frac{2\mathbb{F}_0}{C_0'^3} + \frac{\mathbb{F}_0'}{C_0^3}\right) + \frac{3\mathbb{F}_0^2\mathbb{F}_0'^2 K_0'^2}{C_0^2 C_0'^2} \right\} ,$$

$$I_7 = \frac{\psi}{\Delta_0}(\lambda g)^2 \left\{ \frac{\tilde{\mathbb{F}}_0^2}{\bar{C}_0^2}\left(\frac{2\mathbb{F}_0^2 K_0}{\bar{C}_0^2}\left[\frac{k_0+1}{C_0^4} - \frac{k_0'+1}{C_0'^4}\right] + \frac{16\mathbb{F}_0}{C_0\bar{C}_0^2}\left[\frac{\mathbb{F}_0'}{C_0'^3} - \frac{\mathbb{F}_0}{C_0^3}\right] + \frac{\mathbb{F}_0^2 K_0^2}{C_0^2\bar{C}_0^4} \right.\right.$$

$$\left. + \frac{4\mathbb{F}_0}{C_0}\left[\frac{\mathbb{F}_0}{C_0} + \frac{\mathbb{F}_0'}{C_0'}\right]\left[\frac{3k_0-1}{C_0^4} + \frac{1-3k_0'}{C_0'^4}\right] - \frac{4}{C_0^4}\left[\frac{\mathbb{F}_0}{C_0} + \frac{\mathbb{F}_0'}{C_0'} - \frac{\mathbb{F}_0 C_0 K_0}{\bar{C}_0^2}\right]^2 \right)$$

$$\left. + \frac{4\mathbb{F}_0\tilde{\mathbb{F}}_0^3}{C_0\bar{C}_0}\left(\frac{k_0-1}{C_0^4} + \frac{1-k_0'}{C_0'^4}\right)\left(\frac{K_0+1}{C_0^2} - \frac{1}{C_0'^2}\right) + \tilde{\mathbb{F}}_0^4\left(\frac{k_0-1}{C_0^4} + \frac{1-k_0'}{C_0'^4}\right)^2 \right\} ,$$

$$I_8 = \frac{\delta\Psi'}{\Delta'_0}(\lambda g)^2 \left\{ \frac{\tilde{\mathbb{F}}_0^2}{\bar{C}_0^2}\left(\frac{2\mathbb{F}_0'^2 K_0'}{\bar{C}_0^2}\left[\frac{k_0+1}{c_0^4} - \frac{1+k_0'}{c_0'^4}\right] + \frac{16\mathbb{F}_0'}{c_0'\bar{C}_0^2}\left[\frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'^3} - \frac{\mathbb{F}_0}{c_0^3}\right] - \frac{\mathbb{F}_0'^2 K_0'^2}{c_0'^2\bar{C}_0^4} \right.\right.$$

$$+ \frac{4\mathbb{F}_0'}{c_0'}\left[\frac{\mathbb{F}_0}{c_0} + \frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'}\right]\left[\frac{3k_0-1}{c_0^4} + \frac{1-3k_0'}{c_0'^4}\right] + \left.\frac{4}{c_0'^4}\left[\frac{\mathbb{F}_0}{c_0} + \frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'} - \frac{\mathbb{F}_0' c_0' K_0'}{\bar{C}_0^2}\right]^2\right)$$

$$\left. + \frac{4\mathbb{F}_0'\tilde{\mathbb{F}}_0^3}{c_0'\bar{C}_0}\left(\frac{k_0-1}{c_0^4} + \frac{1-k_0'}{c_0'^4}\right)\left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1+K_0'}{c_0'^2}\right) - \bar{\mathbb{F}}'^4\left(\frac{k_0-1}{c_0^4} + \frac{1-k_0'}{c_0'^4}\right)^2 \right\},$$

$$I_9 = \left(\frac{\Psi}{\Delta_0}\right)^2 \lambda g \left\{ \frac{4\mathbb{F}_0^2\tilde{\mathbb{F}}_0}{c_0^2\bar{C}_0}\left(\left[\left(\frac{3K_0}{2}-1\right)k_0 - K_0\right]\frac{\mathbb{F}_0}{c_0^3} + \left[1 - \frac{3k_0'}{2}\right]\frac{\mathbb{F}_0 C_0 K_0}{c_0'^4} + \frac{\mathbb{F}_0' k_0'}{c_0'^3} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{K_0+k_0-2}{c_0^2}\left[\frac{\mathbb{F}_0}{c_0} + \frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'} - \frac{\mathbb{F}_0 C_0 K_0}{2\bar{C}_0^2}\right]\right) - \frac{\mathbb{F}_0^2}{c_0^2\bar{C}_0^2}\left[\frac{2\mathbb{F}_0}{c_0} + \frac{2\mathbb{F}_0'}{c_0'} - \frac{\mathbb{F}_0 C_0 K_0}{\bar{C}^2}\right]^2 +$$

$$\left. + \frac{2\mathbb{F}_0^2\bar{\mathbb{F}}^2 K_0}{c_0^2}\left[\frac{k_0-1}{c_0^4} + \frac{1-k_0'}{c_0'^4}\right]\right\},$$

$$I_{10} = \left(\frac{\delta\Psi'}{\Delta'_0}\right)^2 \lambda g \left\{ \frac{4\mathbb{F}_0'^2\tilde{\mathbb{F}}}{c_0'^2\bar{C}_0}\left(\left[\left(1 - \frac{3K_0'}{2}\right)k_0' + K_0'\right]\frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'^3} + \left[\frac{3k_0}{2} - 1\right]\frac{\mathbb{F}_0' C_0' K_0'}{c_0^4} + \frac{\mathbb{F}_0 k_0}{c_0^3} \right.\right.$$

$$\left. + \frac{K_0'+k_0'-2}{c_0'^2}\left[-\frac{\mathbb{F}_0}{c_0} - \frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'} + \frac{\mathbb{F}_0' C_0' K_0'}{2\bar{C}_0^2}\right]\right) - \frac{\mathbb{F}_0'^2}{c_0'^2\bar{C}_0}\left[\frac{2\mathbb{F}_0}{c_0} + \frac{2\mathbb{F}_0'}{c_0'} - \frac{\mathbb{F}_0' C_0' K_0'}{\bar{C}_0^2}\right]^2 +$$

$$\left. + \frac{2\mathbb{F}_0'^2\bar{\mathbb{F}}'^2 K_0'}{c_0'^2}\left(\frac{1-k_0}{c_0^4} + \frac{k_0'-1}{c_0'^4}\right)\right\},$$

$$I_{11} = (\lambda g)^3 \left\{ \frac{12\tilde{\mathbb{F}}^3}{\bar{C}_0^5}\left(\frac{\mathbb{F}_0}{c_0} + \frac{\mathbb{F}_0'}{c_0'}\right)\left(\frac{k_0-1}{c_0^4} + \frac{1-k_0'}{c_0'^4}\right) + \frac{\tilde{\mathbb{F}}_0^4}{\bar{C}_0^2}\left(-\frac{8}{c_0^2 c_0'^2\bar{C}_0^4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{\bar{C}_0^2}\left[\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_0'^2}\right]\left[\frac{k_0-1}{c_0^4} + \frac{1-k_0'}{c_0'^4}\right]\right) + \left(\frac{1-k_0}{c_0^4} + \frac{k_0'-1}{c_0'^4}\right)^2 \right\}$$

$$
\begin{aligned}
I_{12} = \frac{\psi}{\Delta_0}\cdot\frac{\delta\psi'}{\Delta'_0}\,\lambda g \Bigg\{ & \overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0\left(\frac{k_0-1}{c_0^4}+\frac{1-k'_0}{c'^4_0}\right)\left[4\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0\left(\frac{K_0c'_0}{c_0}-\frac{K'_0c_0}{c'_0}\right)+\frac{2\overline{\mathbb{F}}_0^2c_0^2K_0}{c'^2_0}-2\overline{\mathbb{F}}'^2_0c'^2_0K'_0\right]+ \\
& +\frac{\widetilde{\mathbb{F}}_0}{C_0}\Bigg[4\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0\left(\frac{K_0\overline{\mathbb{F}}_0}{c'_0}+\frac{K'_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{c_0}\right)\left(\frac{k_0-1}{c_0^4}+\frac{1-k'_0}{c'^4_0}\right)+\frac{2\overline{\mathbb{F}}_0^2\overline{\mathbb{F}}'_0}{c'_0\overline{C}^2}\left(\frac{K_0}{c_0^2}\left[2-k_0-3K_0\right]\right. \\
& \left.-2\frac{K_0K'_0}{c'^2_0}\right)+\frac{2\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'^2_0}{c_0\overline{C}^2}\left(\frac{K'_0}{c'^2_0}\left[3K'_0+k'_0-2\right]+\frac{2K_0K'_0}{c_0^2}\right)+ \\
& +4\left(\frac{\overline{\mathbb{F}}_0}{c_0}+\frac{\overline{\mathbb{F}}'_0}{c'_0}\right)\left(\frac{K_0\overline{\mathbb{F}}_0^2}{c'^4_0}-\frac{K'_0\overline{\mathbb{F}}'^2_0}{c_0^4}\right)+4\frac{\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{c_0c'_0}\left(\frac{\overline{\mathbb{F}}_0}{c_0}+\frac{\overline{\mathbb{F}}'_0}{c'_0}\right)\left(\frac{2K_0+k_0-2}{c_0^2}+\right. \\
& \left.+\frac{2-k'_0-2K'_0}{c'^2_0}\right)+\frac{8\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{c_0c'_0}\left(\frac{\overline{\mathbb{F}}'_0k'_0}{c'^3_0}-\frac{\overline{\mathbb{F}}_0k_0}{c_0^3}\right)+2\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0\left(\frac{K_0\overline{\mathbb{F}}_0}{c'_0}+\frac{K'_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{c_0}\right)\left(-\frac{k'_0}{c'^4_0}+\right. \\
& \left.\left.+\frac{k_0}{c_0^4}\right)\right]+\frac{\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{\overline{C}^2}\left[\frac{4}{\overline{C}^2}\left(\frac{\overline{\mathbb{F}}_0}{c_0}+\frac{\overline{\mathbb{F}}'_0}{c'_0}\right)\left(\frac{K_0\overline{\mathbb{F}}_0}{c'_0}+\frac{K'_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{c_0}\right)-\frac{8}{c_0c'_0}\left(\frac{\overline{\mathbb{F}}_0}{c_0}+\frac{\overline{\mathbb{F}}'_0}{c'_0}\right)^2\right. \\
& \left.-\frac{2\overline{\mathbb{F}}_0\overline{\mathbb{F}}'_0}{\overline{C}^4}K_0K'_0\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

où

$$
\overline{\mathbb{F}}_0=\frac{\bar{u}}{c_0}\qquad,\quad \overline{\mathbb{F}}'_0=\frac{\bar{u}}{c'_0}\qquad,\quad \widetilde{\mathbb{F}}_0=\frac{\bar{u}}{\overline{C}}
$$

$$
\bar{u}=u_0-u'_0\quad,\qquad \frac{1}{\overline{C}^2}=\frac{1}{c_0^2}+\frac{1}{c'^2_0}
$$

L'équation (1.48) donnant ω fournit :

$$\omega = \frac{\dfrac{\Psi \mathbb{F}_0^2 K_0}{\Delta_0} + \dfrac{\delta \Psi' \mathbb{F}_0'^2 K_0'}{\Delta_0'} + \lambda g \left\{ \dfrac{2\widehat{\widetilde{\mathbb{F}}}_0}{\overline{C}} \left(\dfrac{\mathbb{F}_0}{C_0} + \dfrac{\mathbb{F}_0'}{C_0'} \right) + \dfrac{\overline{\overline{\mathbb{F}}}_0^{\,2}}{C_0^2}(k_0 - 1) + \dfrac{\overline{\mathbb{F}}_0'^{\,2}}{C_0'^2}(1 - k_0') \right\}}{2\left(\dfrac{\Psi \mathbb{F}_0}{\Delta_0 C_0} + \dfrac{\delta \Psi' \mathbb{F}_0'}{\Delta_0' C_0'} + \dfrac{\lambda g \widetilde{\widehat{\mathbb{F}}}_0}{\overline{C}^3} \right)} \tag{1.52}$$

Dans (1.51) $h - h_0$ et $h - h_1$ sont de signes contraires pour les profils indiqués sur la figure 1.4.

Nous obtenons des ondes de crue ou de décrue suivant que :

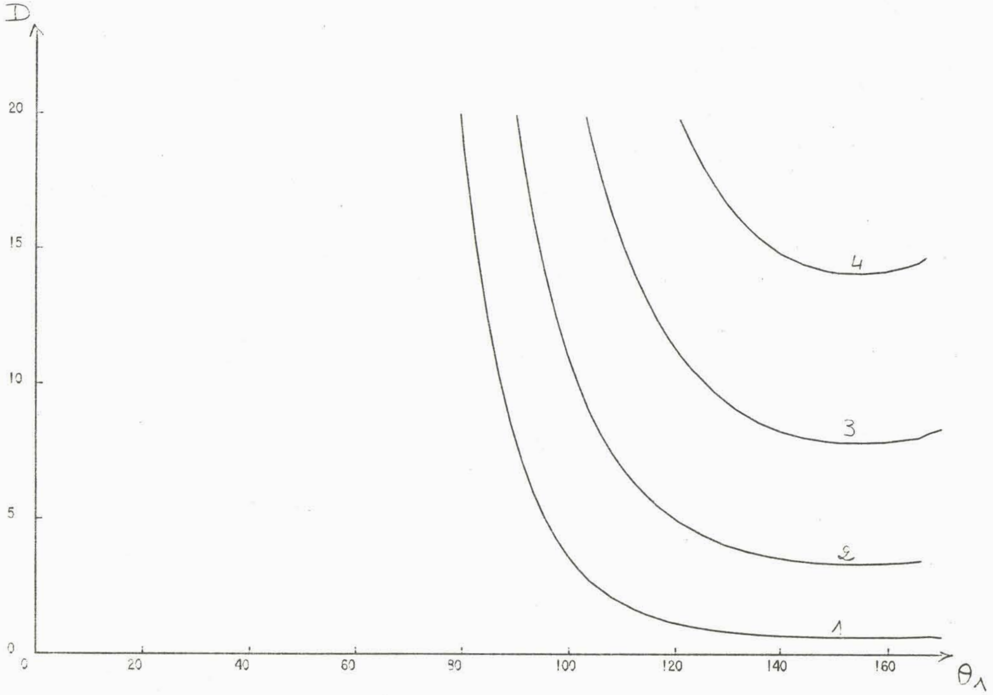
$$m_0' \left(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \frac{1}{\delta_1} \left[I_5 + I_6 + \cdots + I_{12} \right] \right)$$

est positive ou négative.

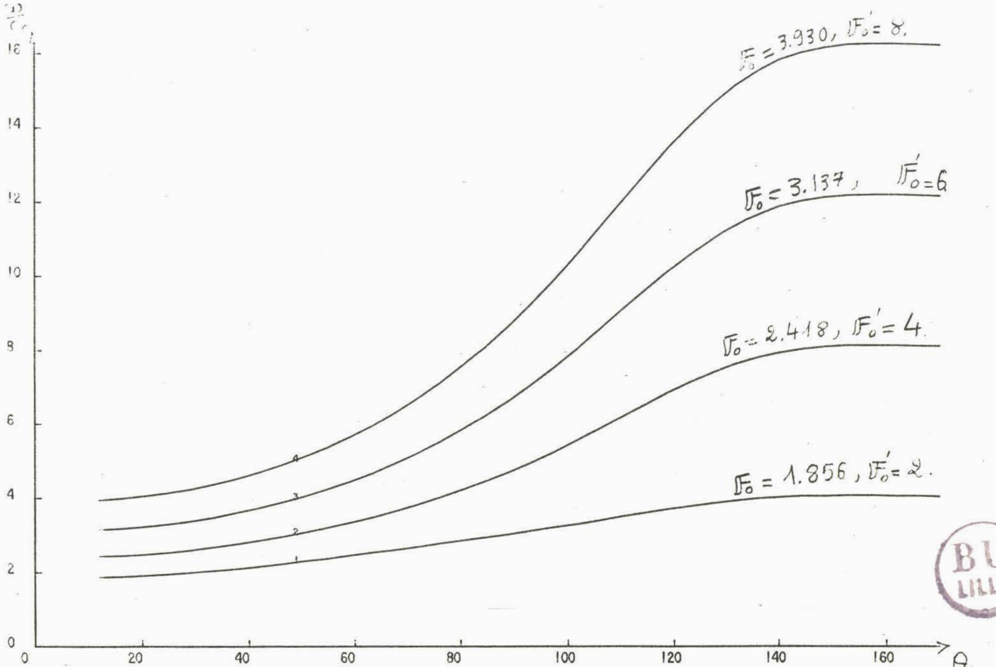
L'intégration de (1.51) donne, en choisissant la même origine des cotes que dans le cas sans frottement interfacial :

$$h = \frac{h_0 + h_1}{2} - \frac{h_1 - h_0}{2} \,\mathrm{th} \left\{ g \frac{(h_1 - h_0)}{m_0'} \left(I_1 + \cdots + I_4 + \frac{1}{\delta_1} \left[I_5 + I_6 + \cdots + I_{12} \right] \right) \xi \right\}$$

Nous retrouvons les résultats de 1.3 en posant $\lambda = 0$.

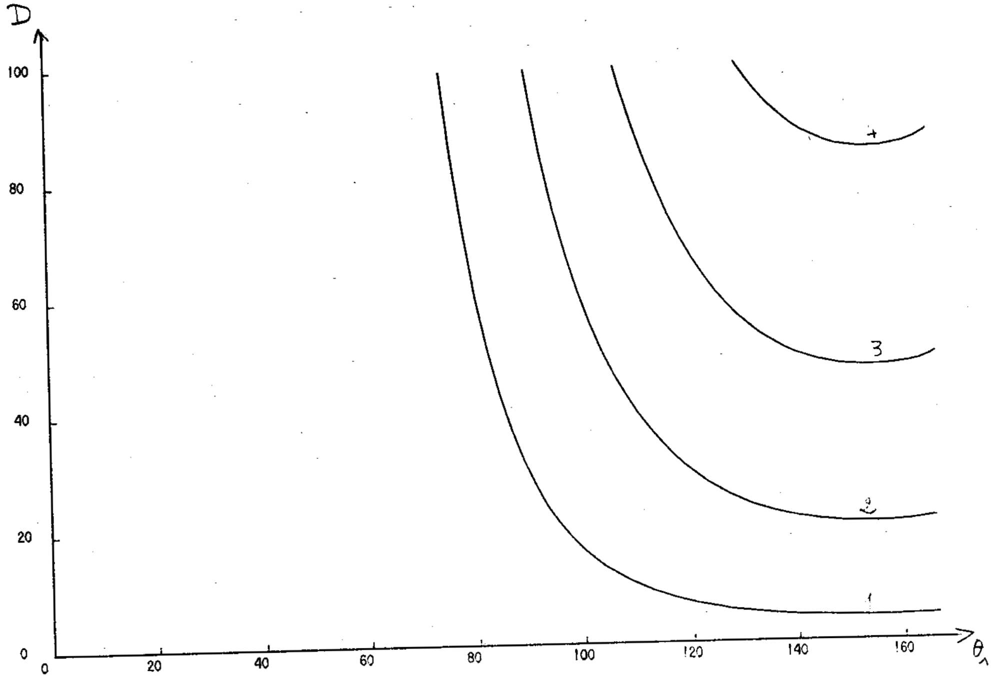


a

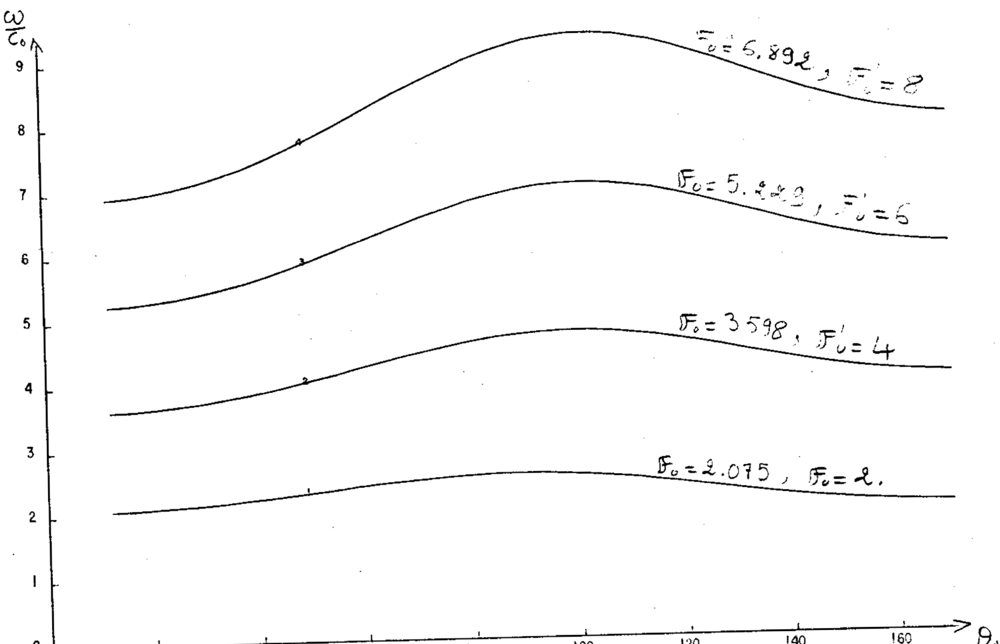


b

Planche 1 : $i = 0.02$, $\delta = 0.2$, $\Psi = 0.04$, $\Psi' = 0.02$, $\theta_0 = 60°$

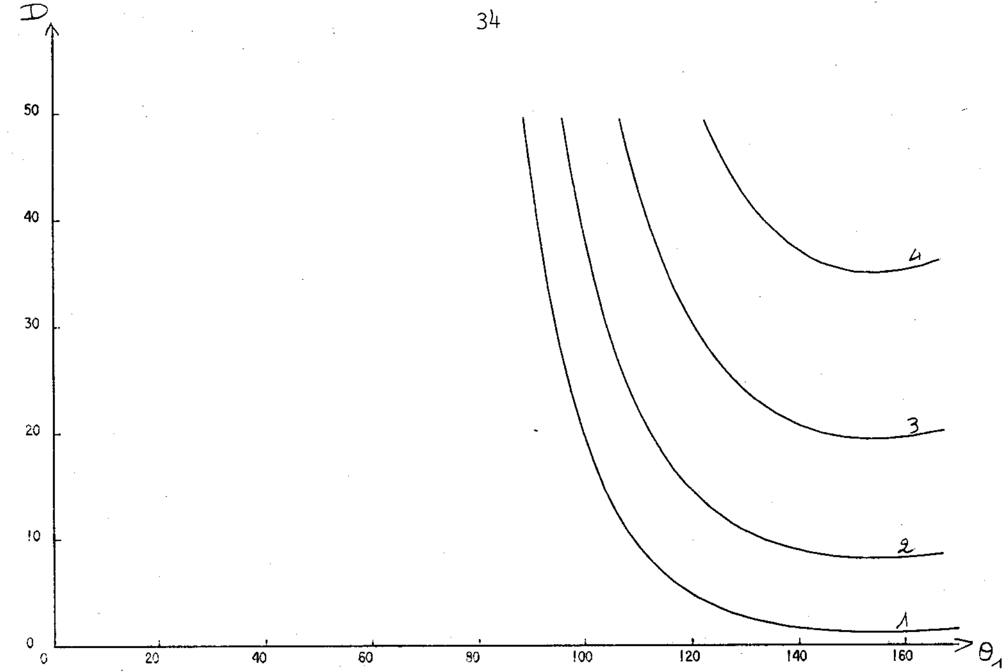


a

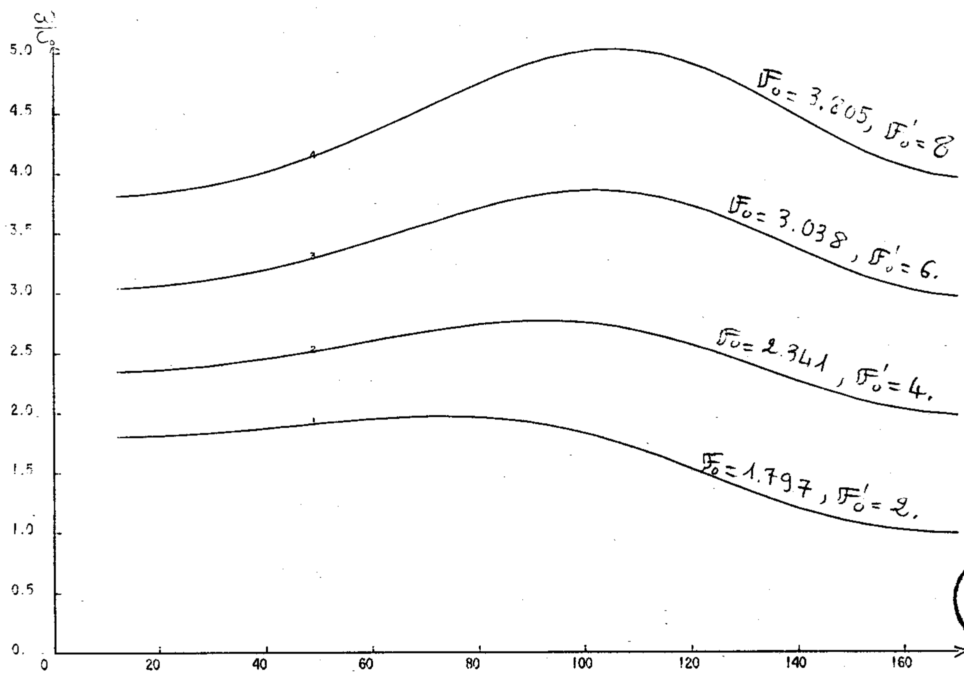


b

Planche 2 : $i = 0.04$, $\sigma = 0.72$, $\psi = 0.04$, $\psi' = 0.04$, $\theta_0 = 90°$



a



b

Planche 3 : $\iota = 0.06$, $\delta = 0.5$, $\Psi = 0.04$, $\Psi' = 0.03$, $\theta_0 = 120$

CHAPITRE 2

DISCONTINUITES INTERFACIALES EN ECOULEMENT BICOUCHES DANS LES CONDUITES CYLINDRIQUES. ONDES INTERNES PERIODIQUES AVEC DISCONTINUITES.

2.1.- DISCONTINUITES INTERFACIALES

Jusqu'à présent, nous avons traité les problèmes d'écoulements continus dans les conduites cylindriques de faible pente.

Nous allons aborder ici le problème de discontinuité interfaciale dans une conduite cylindrique quasi-horizontale de faible pente i , qui consiste en une variation brutale de l'altitude de l'interface.

Dans la suite nous dirons discontinuité au lieu de discontinuité interfaciale pour simplifier le langage.

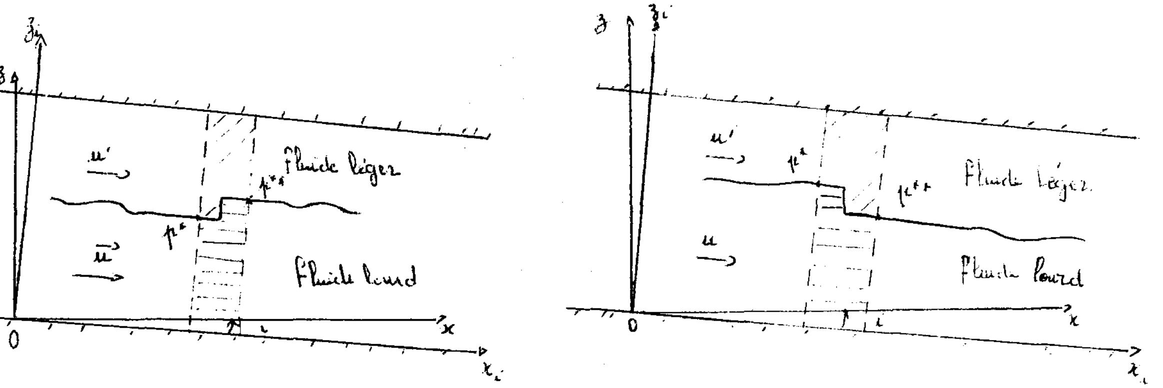
Considérons d'abord une discontinuité en mouvement permanent. Le système de référence peut être pris soit avec un des axes horizontal soit avec un des axes suivant la pente de la conduite.

Etant donnée l'utilisation qui sera faite dans la suite de ce chapitre des résultats que nous allons établir, c'est ce second système d'axes qui sera utilisé. Donc ox_i est dirigé suivant la pente et Oz_i est directement perpendiculaire.

De part et d'autre de cette discontinuité, l'écoulement est continu et les équations de l'écoulement graduellement varié établies au chapitre 1 restent valables en première approximation.

2.1.1.- *Hypothèses générales*

Les vitesses dans les deux fluides sont supposées de même sens (Fig. 2.1)



a : discontinuité de surélévation   b : discontinuité de dénivellation

Fig. 2.1

En suivant la théorie de CHU et BADDOUR [6], on suppose qu'il n'y a pas de perte de charge dans le convergent (partie occupée par le fluide léger dans le cas d'une discontinuité de surélévation (Fig. 2.1.a) ou celle occupée par le fluide lourd dans le cas d'une discontinuité de dénivellation (Fig. 2.1.b)).

Nous n'envisageons pas le problème où les vitesses des deux fluides sont opposées : dans ce cas il y a soit deux convergents soit deux divergents (voir figures 2.2 et 2.3).

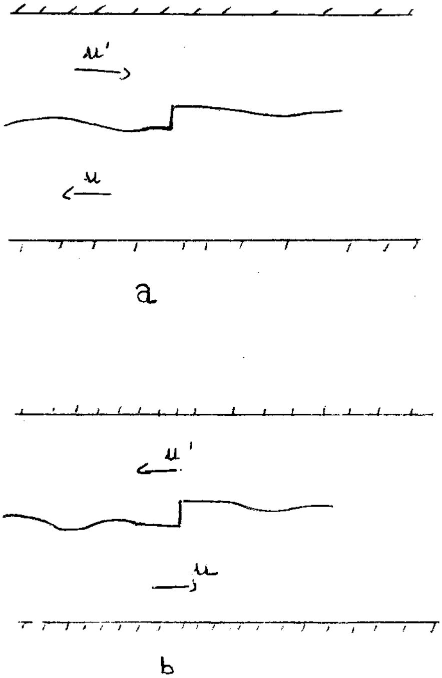


Fig. 2.2

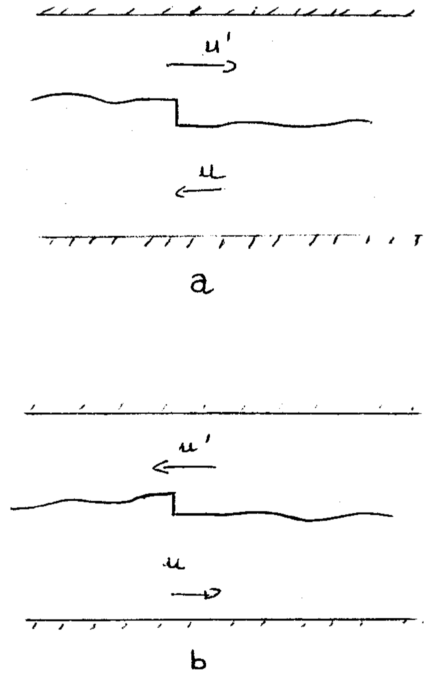


Fig. 2.3

En effet, si on suppose connues les conditions d'un côté de la discontinuité, les inconnues au nombre quatre sont les deux vitesses, la cote de l'interface et la pression de l'autre côté.

Pour déterminer ces quatre grandeurs on dispose dans le premier problème (fig. 2.2) de cinq équations : deux pour la conservation de la masse, une pour l'impulsion et deux pour la conservation de la charge (problème surdéterminé). Par contre dans le second cas (fig. 2.3) on a trois équations : deux pour la conservation de la masse, et une pour l'impulsion (problème indéterminé).

2.1.2.- *Equations pour une discontinuité fixe*

Nous désignons par p^* et p^{**} les pressions interfaciales respectivement à l'amont et à l'aval de la discontinuité (voir figures 2.1).

Si on désigne par 1 et 2 les indices liés respectivement à l'amont et à l'aval de la discontinuité, nous avons :

(2.1) $$p_1 = p^* + \rho g (h_1 - z_i) \quad , \quad p_2 = p^{**} + \rho g (h_2 - z_i)$$

(2.2) $$p'_1 = p^* + \rho' g (h_1 - z_i) \quad , \quad p'_2 = p^{**} + \rho' g (h_2 - z_i)$$

(2.3) $$\sigma_1 u_1 = \sigma_2 u_2 = q \quad , \quad \sigma'_1 u'_1 = \sigma'_2 u'_2 = q'$$

où q et q' désignent les débits volumiques.

En appliquant le théorème global d'Euler au domaine hachuré compris entre deux sections droites très voisines des figures 2.1 et en tenant compte de (23) nous obtenons l'expression suivante :

(2.4) $$\rho q^2 \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) + \rho' q'^2 \left(\frac{1}{\sigma'_2} - \frac{1}{\sigma'_1} \right) = \bar{\sigma} (p^* - p^{**}) + $$
$$+ \rho g (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) + \rho' g (\mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_1)$$

où (voir Fig. 2.4)

(2.5) $$\mathcal{P}_1 = \int_0^{h_1} (h_1 - z_i) \bar{b}(z_i) dz_i \quad , \quad \mathcal{P}_2 = \int_0^{h_2} (h_2 - z_i) \bar{b}(z_i) dz_i$$

(2.6) $$\mathcal{P}'_1 = \int_{h_1}^{\bar{h}} (z_i - h_1) \bar{b}(z_i) dz_i \quad , \quad \mathcal{P}'_2 = \int_{h_2}^{\bar{h}} (z_i - h_2) \bar{b}(z_i) dz_i$$

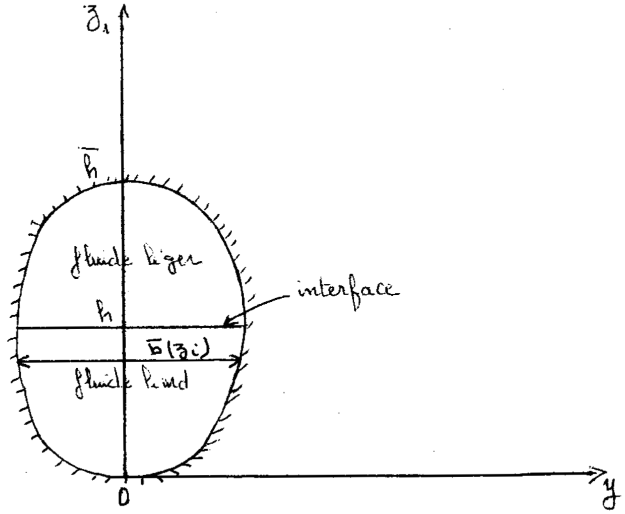


Fig. 2.4

2.1.2.1.- *Discontinuités de surélévation*

C'est le cas de la figure 2.1.a avec $h_2 > h_1$. Dans le convergent formé par le fluide léger il n'y a pas de perte de charge. Par conséquent, l'équation de Bernoulli y est valable et, compte tenu de (2.2), (2.3), on peut écrire :

$$p^{*} - p^{**} = \frac{\rho' q'^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2'^2} - \frac{1}{\sigma_1'^2}\right) + \rho' g (h_2 - h_1) \qquad (2.7)$$

L'équation de l'impulsion (2.4) s'écrit par conséquent :

$$\rho q^2\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)+\rho' q'^2\left\{\frac{1}{\sigma'_2}-\frac{1}{\sigma'_1}+\frac{\overline{\sigma}}{2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_1}-\frac{1}{\sigma'^2_2}\right)\right\}+ \tag{2.8}$$

$$+\rho g\left(\mathcal{P}_2-\mathcal{P}_1\right)+\rho' g\left\{\left(h_1-h_2\right)\overline{\sigma}+\mathcal{P}'_1-\mathcal{P}'_2\right\}=0$$

ou encore, compte tenu des expressions de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}'_1$, $\mathcal{P}'_2$:

$$\rho q^2\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)+\rho' q'^2\left\{\frac{1}{\sigma'_2}-\frac{1}{\sigma'_1}+\frac{\overline{\sigma}}{2}\left(\frac{1}{\sigma'^2_1}-\frac{1}{\sigma'^2_2}\right)\right\}+ \tag{2.9}$$

$$+g\left(\rho-\rho'\right)\left(\mathcal{P}_2-\mathcal{P}_1\right)=0$$

D'après l'équation de l'énergie et le second principe de la thermodynamique la charge du fluide lourd à l'amont de la discontinuité doit être supérieure (ou égale) à la charge à l'aval.

Si on désigne par δ_a la perte de charge à travers la discontinuité de surélévation, nous devons donc avoir, compte tenu de (2.1) :

$$\delta_a = p^* - p^{**} + \rho g\left(h_1-h_2\right)+\frac{\rho q^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\geqslant 0 \tag{2.10}$$

En substituant à la quantité $p^* - p^{**}$ sa valeur tirée de (2.7), l'inégalité (2.10) s'écrit :

$$\delta_a = \frac{\rho q^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right) + \frac{\rho' q'^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2'^2} - \frac{1}{\sigma_1'^2}\right) + g(\rho-\rho')(h_1-h_2) \geqslant 0 \tag{2.11}$$

2.1.2.2.- *Discontinuité de dénivellation*

Comme dans le cas d'une discontinuité de surélévation, nous appliquons l'équation de Bernoulli au convergent occupé par le fluide lourd (fig. 2.1.b). Compte tenu de (2.1) et (2.3) nous obtenons :

$$p^* - p^{**} = \rho g(h_2 - h_1) + \frac{\rho q^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \tag{2.12}$$

Par suite, en substituant dans (2.4) on obtient :

$$\rho q^2\left\{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} + \frac{\bar\sigma}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\} + \rho' q'^2\left(\frac{1}{\sigma_2'} - \frac{1}{\sigma_1'}\right) + \rho g\left\{(h_1-h_2)\bar\sigma + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1\right\} + \rho' g\left(\mathcal{P}_1' - \mathcal{P}_2'\right) = 0 \tag{2.13}$$

ou encore, compte tenu de (2.5), (2.6) :

$$\rho q^2\left\{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} + \frac{\bar\sigma}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\right\} + \rho' q'^2\left(\frac{1}{\sigma_2'} - \frac{1}{\sigma_1'}\right) + g(\rho-\rho')\left(\mathcal{P}_2' - \mathcal{P}_1'\right) = 0 \tag{2.14}$$

Comme dans le cas d'une surélévation, en désignant par J_b la perte de charge du fluide léger à travers la dénivellation, on a l'inégalité suivante :

(2.15) $$J_b = p^* - p^{**} + \rho' g (h_1 - h_2) + \frac{\rho' q'^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1'^2} - \frac{1}{\sigma_2'^2} \right) \geq 0$$

Soit, compte tenu de (2.12),

(2.16) $$J_b = g(\rho - \rho')(h_2 - h_1) + \frac{\rho q^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) + \rho' \frac{q'^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1'^2} - \frac{1}{\sigma_2'^2} \right) \geq 0$$

2.1.2.3.- *Discontinuité de surélévation de faible amplitude*

Dans ce qui suit nous nous limitons à des discontinuités de faible amplitude.

Reprenons l'équation de l'impulsion (2.9). Introduisons les quantités F, F' et R définies par :

(2.17) $$F^2 = \frac{q^2 \bar{b}(h)}{g \sigma^3} ,$$

(2.18) $$F'^2 = \frac{q'^2 \bar{b}(h)}{g \sigma'^3} ,$$

(2.19) $$R = F^2 + \delta F'^2 + \delta - 1 ,$$

L'équation (2.9) s'écrit alors après quelques transformations :

$$(2.20)\quad (\rho_2 - \rho_1) R_1 + \left\{ \frac{\sigma_1^2(\sigma_2-\sigma_1)}{\sigma_2\, \bar{b}(h_1)} + \rho_1 - \rho_2 \right\} F_1^2 + \left\{ (\sigma_1'\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2') \frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sigma_1'}{2\bar{b}(h_1)\,\sigma_2'^2} + \rho_1 - \rho_2 \right\} \delta F_1'^2 = 0$$

ou encore en fonction de R_2 , F_2 , F_2' .

$$(2.21)\quad (\rho_2 - \rho_1) R_2 + \left\{ \frac{\sigma_2^2(\sigma_2-\sigma_1)}{\sigma_1\, \bar{b}(h_2)} + \rho_1 - \rho_2 \right\} F_2^2 + \left\{ (\sigma_1'\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2') \frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sigma_2'}{2\bar{b}(h_2)\,\sigma_1'^2} + \rho_1 - \rho_2 \right\} \delta F_2'^2 = 0$$

En tenant compte de (2.9) quelques calculs permettent d'écrire l'expression de la perte de charge sous la forme :

$$(2.22)\quad J_a = \rho g (\sigma_2 - \sigma_1) \left[\left\{ \sigma_1 + \sigma_2 + \frac{2(h_1-h_2)\,\sigma_1\sigma_2}{\rho_2-\rho_1} \right\} \frac{\sigma_1 F_1^2}{2\bar{b}(h_1)\sigma_2^2} + \left\{ \sigma_1' + \sigma_2' + \frac{(h_1-h_2)}{\rho_2-\rho_1}(\sigma_1\sigma_2' + \sigma_1'\sigma_2) \right\} \frac{\delta\sigma_1' F_1'^2}{2\bar{b}(h_1)\,\sigma_2'^2} \right] \geqslant 0$$

La discontinuité interfaciale étant de faible amplitude, nous avons :

$$h_2 - h_1 << h_1$$

Posons :

$$(2.23.a)\quad \mathcal{D} = \frac{d^2}{dh^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \quad , \quad \mathcal{D}' = \frac{d^2}{dh^2}\left(\frac{1}{\sigma'^2}\right)$$

$$(2.23.b)\quad Q = \sigma^3 F^2 \mathcal{D} - \delta\, \sigma'^3 F'^2 \mathcal{D}'$$

Il faut noter que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas indépendants car $\sigma + \sigma' = \text{cte}$.

Par suite on peut écrire les développements :

(2.24.a) $$\sigma_2 = \sigma_1 + (h_2 - h_1)\,\bar{b}(h_1) + \frac{(h_2-h_1)^2}{2}\frac{d\bar{b}}{dh}(h_1) + \cdots$$

(2.24.b) $$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 + (h_2 - h_1)\,\sigma_1 + \frac{(h_2-h_1)^2}{2}\,\bar{b}(h_1) + \cdots$$

(2.24.c) $$\sigma'_2 = \sigma'_1 - (h_2 - h_1)\,\bar{b}(h_1) - \frac{(h_2-h_1)^2}{2}\frac{d\bar{b}}{dh}(h_1) + \cdots$$

(2.24.d) $$\frac{F_1^2}{F_2^2} = 1 + \frac{\sigma_1^3 \mathcal{D}_1}{2\bar{b}(h_1)}(h_2 - h_1) + \cdots$$

(2.24.e) $$\frac{F_1'^2}{F_2'^2} = 1 - \frac{\sigma_1'^3 \mathcal{D}'_1}{2\bar{b}(h_1)}(h_2 - h_1) + \cdots$$

Introduisons ces développements dans les relations (2.20), (2.21), (2.22).

Après un long calcul on obtient :

(2.25) $$\left\{\sigma_1 + \frac{\bar{b}(h_1)}{2}(h_2 - h_1)\right\} R_1 - \frac{\sigma_1 Q_1 (h_2 - h_1)}{4\bar{b}(h_1)} = 0$$

(2.26) $$\left\{\sigma_1 + \frac{\bar{b}(h_1)}{2}(h_2 - h_1)\right\} R_2 + \frac{\sigma_1 Q_1 (h_2 - h_1)}{4\bar{b}(h_1)} = 0$$

et

(2.27) $$J_a = \frac{\rho g}{24\sigma_1}(h_2 - h_1)^3 Q_1 \geqslant 0$$

Puisqu'il s'agit d'une surélévation il est nécessaire que l'on ait :

(2.28) $$Q_1 \geqslant 0$$

On obtiendrait la même inégalité pour $\mathcal{Q}_2$.

En comparant (2.24)et(2.25) avec (2.28), on voit que :

(2.29.a) $$\mathcal{R}_1 \geqslant 0$$

(2.29.b) $$\mathcal{R}_2 \leqslant 0$$

Les relations (2.24.d) et (2.24.e) nous donnent les conditions suivantes, à satisfaire de part et d'autre de la discontinuité pour chaque fluide :

(2.30.a) $$\begin{cases} F_1 > F_2 & \text{si} \quad \mathcal{D}_1 > 0 , \\ F'_1 < F'_2 & \text{si} \quad \mathcal{D}'_1 > 0 . \end{cases}$$

ou

(2.30.b) $$\begin{cases} F_1 < F_2 & \text{si} \quad \mathcal{D}_1 < 0 , \\ F'_1 < F'_2 & \text{si} \quad \mathcal{D}'_1 > 0 . \end{cases}$$

ou

(2.30.c) $$\begin{cases} F_1 > F_2 & \text{si} \quad \mathcal{D}_1 > 0 , \\ F'_1 > F'_2 & \text{si} \quad \mathcal{D}'_1 < 0 . \end{cases}$$

ou

$$(2.30.d)\qquad \begin{cases} F_1 < F_2 & \text{si} \quad \vartheta_1 < 0 \\ F'_1 > F'_2 & \text{si} \quad \vartheta'_1 < 0 \end{cases}$$

2.1.2.4.- <u>Discontinuité de dénivellation de faible amplitude</u>

Pour l'étude d'une discontinuité de dénivellation de faible amplitude, nous allons transformer les équations de l'impulsion et de la perte de charge comme dans le cas d'une surélévation. Après quelques calculs, la relation (2.14) peut prendre l'une des formes suivantes :

$$(2.31)\qquad (\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_2)\,\mathcal{R}_1 + \left\{(\sigma'_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma'_2)\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sigma_1}{2\bar{b}(h_1)\,\sigma_2^2} + \mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_1\right\} F_1^2 +$$

$$+ \left\{\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\,\sigma_1'^2}{\sigma'_2\,\bar{b}(h_1)} + \mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_1\right\} \delta F_1'^2 = 0$$

ou

$$(2.32)\qquad (\mathcal{P}'_1 - \mathcal{P}'_2)\,\mathcal{R}_2 + \left\{(\sigma'_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma'_2)\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sigma_2}{2\bar{b}(h_2)\,\sigma_1^2} + \mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_1\right\} F_2^2 +$$

$$+ \left\{\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\,\sigma_2'^2}{\sigma'_1\,\bar{b}(h_2)} + \mathcal{P}'_2 - \mathcal{P}'_1\right\} \delta F_2'^2 = 0$$

L'expression de la perte de charge peut s'écrire, grâce à (2.14) :

(2.33) $$\delta_b = \rho g(\sigma_1 - \sigma_2)\left[\left\{\sigma_1 + \sigma_2 + \frac{h_1 - h_2}{\rho_1' - \rho_2'}\cdot(\sigma_1'\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2')\right\}\frac{\sigma_1 F_1^2}{2\bar{b}(h_1)\sigma_2^2} + \right.$$

$$\left. + \left\{\sigma_1' + \sigma_2' + \frac{2(h_1 - h_2)\sigma_1'\sigma_2'}{\rho_1' - \rho_2'}\right\}\frac{\delta\sigma_1' F_1'^2}{2\bar{b}(h_1)\sigma_2'^2}\right] \geqslant 0$$

Comme la discontinuité est de faible amplitude, nous avons :

$$h_1 - h_2 << h_2 .$$

De là :

(2.34) $$\rho_2' = \rho_1' - (h_2 - h_1)\sigma_1' + \frac{(h_2 - h_1)^2}{2}\cdot\bar{b}(h_1) + \dots$$

Les développements concernant σ_2, σ_2' sont donnés par les formules (2.24.a) et (2.24.c).

Par suite, les relations (2.31), (2.32), (2.33) deviennent après un long calcul

(2.35) $$\left\{\sigma_1' + (h_1 - h_2)\frac{\bar{b}(h_1)}{2}\right\}R_1 + \frac{\sigma_1'(h_1 - h_2)}{4\bar{b}(h_1)}Q_1 = 0 ,$$

(2.36) $$\left\{\sigma_1' + (h_1 - h_2)\frac{\bar{b}(h_1)}{2}\right\}R_2 - \frac{\sigma_1'(h_1 - h_2)}{4\bar{b}(h_1)}Q_1 = 0$$

pour l'équation de l'impulsion, et

$$\text{(2.37)} \qquad J_b = \frac{\rho g}{24 \sigma'_1} (h_2 - h_1)^3 \, \mathcal{Q}_1 \geqslant 0$$

pour l'équation de la perte de charge.

Les quantités F_1 , F'_1 , $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{Q}$ sont définis par les relations(2.17), (2.18), (2.19) et (2.23).

L'inégalité (2.37) montre que :

$$\text{(2.38)} \qquad \mathcal{Q}_1 \leqslant 0$$

La même inégalité est valable pour $\mathcal{Q}_2$.

En comparant (2.35), (2.36) avec (2.38) on voit que :

$$\text{(2.39.a)} \qquad \mathcal{R}_1 \geqslant 0$$

$$\text{(2.39.b)} \qquad \mathcal{R}_2 \leqslant 0$$

A partir de (2.24.d) et (2.24.e) on obtient les conditions à satisfaire de part et d'autre de la discontinuité pour chaque fluide suivantes :

$$\text{(2.40)} \qquad \begin{cases} F_1 > F_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{G}_1 < 0 , \\ F'_1 > F'_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{G}'_1 > 0 . \end{cases}$$

ou

$$(2.40.b)\quad \begin{cases} F_1 < F_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{D}_1 > 0 \,, \\ F'_1 > F'_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{D}'_1 > 0 \,, \end{cases}$$

ou

$$(2.40.c)\quad \begin{cases} F_1 > F_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{D}_1 < 0 \\ F'_1 < F'_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{D}'_1 < 0 \end{cases}$$

ou

$$(2.40.d)\quad \begin{cases} F_1 < F_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{D}_1 > 0 \\ F'_1 < F'_2 \quad , \quad \text{si} \quad \mathcal{D}'_1 < 0 \end{cases}$$

De la confrontation des résultats concernant les faibles discontinuités de surélévation et de dénivellation établies ci-dessus, il ressort que deux des 4 conditions nécessaires à leur existance dépendent du signe de la quantité

$$\mathcal{R} = F^2 + \gamma F'^2 + \gamma - 1$$

Par analogie avec les résultats du cas d'un seul fluide [7] on peut considérer qu'un écoulement bicouches dans une conduite cylindrique et quasi horizontale est supercritique ou subcritique suivant que $\mathcal{R}$ est positif ou négatif. Avec cette terminologie l'écoulement est supercritique en amont d'une faible discontinuité, qu'elle soit de surélévation ou de dénivellation, et il est subcritique en aval.

Les deux états amont et aval sont dits conjugués.

On définit un écoulement critique comme étant un état qui est son propre conjugué [8], [9], [10]. En faisant tendre h_2 vers h_1 on voit à partir des équations de l'impulsion (2.25), (2.26) et (2.35), (2.36) que R_1 et R_2 tendent vers zéro.

On a par conséquent le critère suivant : un écoulement bicouches est critique pour $R = 0$.

Il est à noter qu'on aboutit également à ce critère en partant des hypothèses de YIH et GUHA [11].

2.1.3.- *Discontinuités mobiles*

A présent nous considérons une discontinuité mobile. On peut montrer que dans ce cas les équations de la discontinuité fixe restent valables à condition de remplacer les vitesses absolues par les vitesses par rapport à la discontinuité.

En effet, l'écoulement n'étant pas permanent, il va figurer dans les équations de conservation écrites dans le repère lié à la discontinuité des termes instationnaires du type $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta} \varphi \, d\Delta$ où Δ est le domaine auquel on applique les lois de conservation à l'instant t, et des termes du type $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta} \psi \, d\Delta$ correspondant aux forces d'inertie. Les fonctions φ et ψ sont bornées. Soient Δ_1, Δ'_1 les parties de Δ situées à l'amont de la discontinuité et Δ_2, Δ'_2 les parties à l'aval. Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{D}\varphi\, dD = \int_{D_1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dD + \int_{D'_1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dD + \int_{D_2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dD +$$

$$+ \int_{D'_2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dD$$

et une décomposition analogue pour $\int_{D}\psi\, dD$.

En prenant un domaine D de volume nul, applati sur la discontinuité, on voit que tous ces termes apportent une contribution nulle de sorte que les équations établies dans le cas permanent restent valables ici, dans le repère accompagnant la discontinuité.

2.2.- ONDES PERIODIQUES DE FAIBLE AMPLITUDE

2.2.1.- *Généralités*

Nous allons essayer de construire des solutions d'ondes progressives périodiques avec discontinuités, de vitesse constante ω, dans une conduite cylindrique quasi-horizontale de pente constante i [25]. On suppose $(\omega - u)\cdot(\omega - u') > 0$. Celà signifie que dans le repère lié à la discontinuité, les deux fluides se déplacent dans le même sens de manière à se trouver dans les cas des figures 2.1.a et b auxquelles correspondent ici les figures 2.4.1 et 2.4.2.

Comme au chapitre 1, nous nous plaçons dans le repère lié aux ondes.

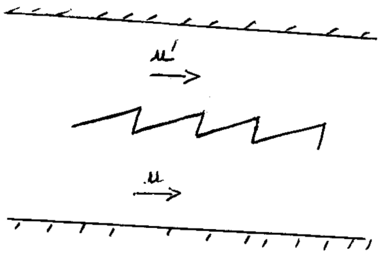


Fig. 2.4.1.a : dans un repère absolu.

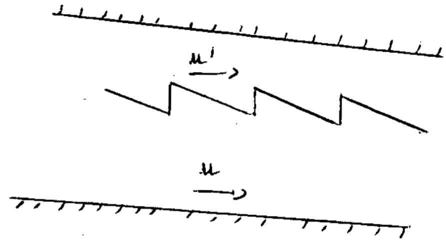


Fig. 2.4.2.a : dans un repère absolu.

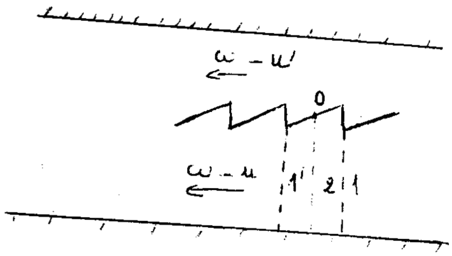


Fig. 2.4.1.b : dans un repère lié à l'onde, $\omega > u$, u' .

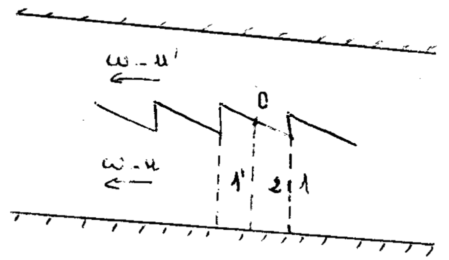


Fig. 2.4.2.b : dans un repère lié à l'onde $\omega > u$, u'.

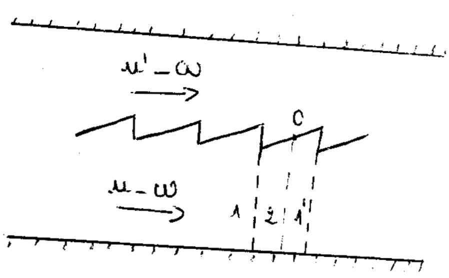


Fig. 2.4.1.c : dans un repère lié à l'onde, $\omega < u$, u' .

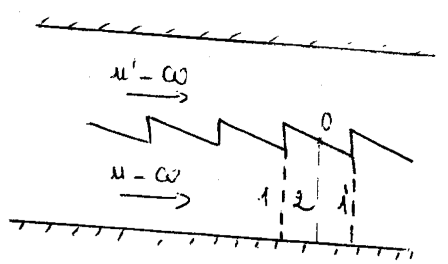


Fig. 2.4.2.c : dans un repère lié à l'onde, $\omega < u$, u'.

Fig. 2.4 : Conduite de section quelconque.

Considérons une longueur d'onde. Repérons par les indices 1 et 2 l'amont et l'aval d'une discontinuité et par l'indice 1' l'amont de la discontinuité suivante (Figures 2.4.1 et 2.4.2).

D'après les résultats sur les discontinuités mobiles, de faible amplitude on a :

$$\mathcal{R}_1 \geqslant 0 \quad , \quad \mathcal{R}_2 \leqslant 0 \ ,$$

$\mathcal{Q} \geqslant 0$ dans le cas des figures (2.4.1.b) et (2.4.2.c),

$\mathcal{Q} \leqslant 0$ dans le cas des figures (2.4.1.c) et (2.4.2.b).

Il ne faut pas oublier que dans les expressions de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{Q}$ interviennent les nombres de Froude relatifs. Or, il est facile d'établir qu'en écoulement continu

(2.43.a) $$\mathcal{D} = -\frac{2g}{q^2}\frac{dF^2}{dh} \quad , \quad \mathcal{D}' = \frac{2g}{q'^2}\frac{dF'^2}{dh} \ ,$$

(2.43.b) $$\mathcal{Q} = -2\bar{b}(h)\frac{d\mathcal{R}}{dh} .$$

Par conséquent, $\mathcal{R}(h)$ est décroissant dans le cas des figures : (2.4.1.b) et (2.4.2.c), et croissant dans le cas des figures (2.4.1.c) et (2.4.2.b) lorsqu'on parcourt une longueur d'onde de la section 2 vers la section 1'. Il en résulte que l'écoulement est critique, $\mathcal{R} = 0$, dans une section située entre 1' et 2 et qui sera repérée par l'indice 0.

Entre l'aval d'une discontinuité et l'amont de la suivante l'écoulement est continu et les équations de l'écoulement graduellement varié établies au chapitre 1 demeurent donc valables.

2.2.2.- *Solution sans frottement interfacial*

A partir des équations (1.27) exprimant la conservation des débits apparents, on obtient la condition suivante d'existance d'ondes progressives périodiques avec discontinuités, de vitesse uniforme ω :

(2.44.a) $$F + \mathbb{F} = \left(F' + \mathbb{F}'\right)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{1/2}$$

où $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}'$ sont les nombres de Froude absolus de l'écoulement définis par

(2.44.b) $$\mathbb{F} = \frac{u}{c} \quad , \quad \mathbb{F}' = \frac{u'}{c'} \ .$$

Cette relation est valable en particulier dans la section 0 :

(2.45.a) $$F_0 + \mathbb{F}_0 = \left(F_0' + \mathbb{F}_0'\right)\left(\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}\right)^{1/2}$$

Comme la section 0 est critique on a, en plus :

(2.45.b) $$F_0^2 + \varsigma F_0'^2 + \varsigma - 1 = 0$$

Ces deux relations nous permettent de déterminer F_0 et F_0' en fonction de ς, σ_0 , σ_0' , $\mathbb{F}_0$ et $\mathbb{F}_0'$ (c'est-à-dire q et q' en fonction de ς, σ_0, σ_0', u_0, u_0')

En se donnant ς , σ_0 et σ_0' et en prenant $\left(\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}\right)^{1/2}\mathbb{F}_0' - \mathbb{F}_0$ comme paramètres, les solutions dans le plan (F_0 , F_0') sont déterminées par les points d'intersection de l'ellipse fixe (E) d'équation (2.45.b) et de la droite (D) d'équation (2.45.a). La situation est présentée sur la figure 2.5.

Sur les portions (I) de (E) en traits discontinus il n'y a pas de solution (car $F_0 . F_0' < 0$).

Sur les portions (II) de (E) en traits pleins il peut y avoir des solutions (car $F_0 . F_0' > 0$).

Par conséquent, le système (2.45) admet deux solutions si (D) coupe (E) sur les portions (II), ce qui correspond à :

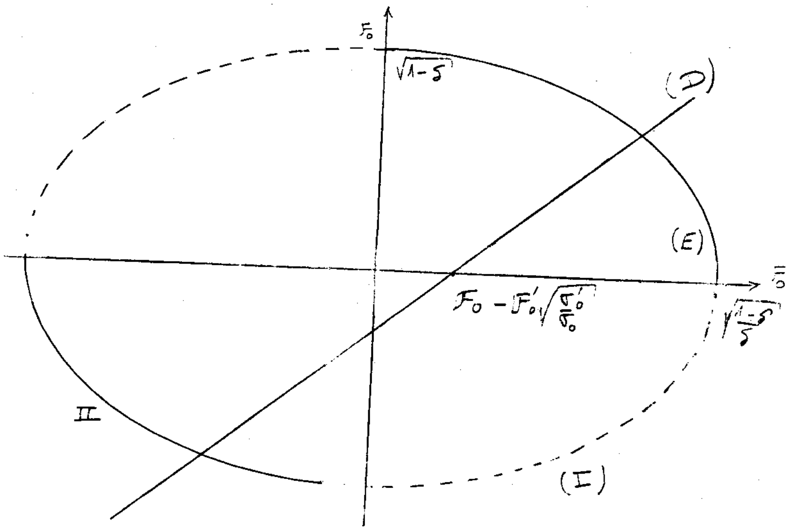


fig. 2 5

(2.46.a)
$$\sup\left\{\mathbb{F}'_0\left(\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}\right)^{1/2}-\sqrt{1-\delta}\,,\ \sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}'_0+\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right)\right\} \leq \mathbb{F}_0 \leq \inf\left\{\sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}'_0+\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right),\ \mathbb{F}'_0\sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}+\sqrt{1-\delta}\right\}$$

Il y a une seule solution si les intersections se font sur les portions (I) et (II) ce qui correspond à :

(2.46.b)
$$\inf\left\{\sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}'_0+\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right),\ \mathbb{F}'_0\sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}+\sqrt{1-\delta}\right\} < \mathbb{F}_0 < \sup\left\{\sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}'_0+\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right),\ \mathbb{F}'_0\sqrt{\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}}+\sqrt{1-\delta}\right\}$$

ou

(2.46.c) $$\inf\left\{ \mathbb{F}_0'\sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}} - \sqrt{1-\delta}\ ,\ \sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}_0' - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right)\right\} < \mathbb{F}_0 < \sup\left\{ \mathbb{F}_0'\sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}} - \sqrt{1-\delta}\ ,\ \sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}_0' - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right)\right\} .$$

Enfin, il n'y a pas de solution en absence d'intersection,ou bien si celle-ci se fait sur la portion (I); dans ce cas on a :

(2.46.c) $$\mathbb{F}_0 > \sup\left\{ \sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}_0' + \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right),\ \mathbb{F}_0'\sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}} + \sqrt{1-\delta} \right\}$$

ou

(2.46.d) $$\mathbb{F}_0 < \inf\left\{ \mathbb{F}_0'\sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}} - \sqrt{1-\delta}\ ,\ \sqrt{\frac{\sigma_0'}{\sigma_0}}\left(\mathbb{F}_0' - \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\right)\right\}$$

L'équation (1.28) se réduit dans la section O à

(2.47) $$\psi \pi_0 \mathbb{F}_0^2 - \delta \psi' \pi_0' \mathbb{F}_0'^2 = 8i(1-\delta)\bar{b}(h_0)$$

On obtient au terme d'un long développement :

(2.48) $$Q_0 h_\xi = \frac{\psi \bar{b}(h_0)}{\Delta_0}\left\{ (K_0 - 2)\mathbb{F}_0^2 - 2\mathbb{F}_0 F_0 \right\} + \frac{\delta \psi' \bar{b}(h_0)}{\Delta_0'}\left\{ (K_0' - 2)\mathbb{F}_0'^2 - 2\mathbb{F}_0' F_0' \right\}$$

Donc h est une fonction linéaire de ξ en première approximation.

On sait que Q est positif si le raccord entre les régimes supercritique et subcritique se fait avec élévation de la cote de l'interface. Par conséquent , h_ξ est positif dans le cas de la figure 2.4.1.b, et négatif dans le cas de la figure 2.4.2.c.

Par contre, Q est négatif si on a une discontinuité d'abaissement et h_ξ est négatif dans le cas de la figure 2.4.2.b et positif dans le cas de la figure 2.4.1.c.

On voit finalement que dans tous les cas une condition nécessaire d'existence des ondes périodiques avec discontinuités s'exprime par :

$$g_c > 0 \qquad \text{si} \qquad \omega > u, u'$$
$$g_o < 0 \qquad \text{si} \qquad \omega < u, u'$$

avec

(2.49) $$g_c = \frac{\Psi}{\Delta_0}\left\{(K_0-2)F_0^2 - 2F_c F_0\right\} + \frac{\delta\Psi'}{\Delta'_0}\left\{(K'_0-2)F_0'^2 - 2F'_c F'_0\right\}$$

Les deux relations (2.47) et (2.49) constituent les deux conditions nécessaires d'existance d'ondes progressives avec discontinuités en écoulement bicouches sans frottement interfacial des figures (2.4.1) et (2.4.2).

Dans le cas particulier d'un seul fluide à surface libre on a $\Psi'=0$, $\delta=0$, et comme ω doit être supérieur à u [1] la condition (2.49) devient : $g_c > \frac{2c_c^2}{(K_0-2)\Delta_0}$. C'est le résultat de DYMENT [1] et DYMENT et LOFFICIAL [2].

Si, de plus, la section est de grande largeur on obtient le résultat de DRESSLER [12].

2.2.3.- *Solution avec frottement interfacial*

Considérons le cas de l'écoulement avec frottement interfacial. Les nombres de Froude relatifs F_0, F_0', et la vitesse de l'onde ω sont déterminés par les solutions du système (2.45). La discussion des solutions a déjà été faite en 2.2.2.

L'équation (1.25) se réduit dans la section 0 à :

$$\Psi \Pi_0 \mathbb{F}_0^2 - \delta \Psi' \Pi_0' \mathbb{F}_0'^2 + 4\lambda \bar{b}(h_0) \cdot \left(C_0 \mathbb{F}_0 - C_0' \mathbb{F}_0'\right)^2 \left(\frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{C_0'^2}\right) = 8 i (1-\delta) \bar{b}(h_0) \tag{2.50}$$

Entre les sections 2 et 1' on obtient pour (1.25), à l'issue d'un long calcul :

$$Q_0 h_\xi = \frac{\Psi \bar{b}(h_0)}{\Delta_0}\left\{(K_0-2)\mathbb{F}_0^2 - 2\mathbb{F}_0 F_0\right\} + \frac{\delta \Psi' \bar{b}(h_0)}{\Delta_0'}\left\{(K_0'-2)\mathbb{F}_0'^2 - 2\mathbb{F}_0' F_0'\right\} + \tag{2.51}$$
$$+ \lambda g \bar{b}(h_0)\left\{\left(C_0\mathbb{F}_0 - C_0'\mathbb{F}_0'\right)^2\left(\frac{k_0-1}{C_0^4} - \frac{k_0'-1}{C_0'^4}\right) + 2\left(C_0\mathbb{F}_0 - C_0'\mathbb{F}_0'\right)\left(\frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{C_0'^2}\right)\left(\frac{\mathbb{F}_0'}{C_0'} + \frac{\mathbb{F}_0}{C_0}\right)\right\}$$

Comme dans le cas sans frottement interfacial, ici aussi h est une fonction linéaire de ξ en première approximation.

Par un raisonnement analogue au cas sans frottement interfacial, on aboutit à une condition nécessaire d'existance des ondes périodiques avec frottement :

$$g_0' > 0 \qquad \text{si} \qquad \omega > u, u'$$
$$g_0' < 0 \qquad \text{si} \qquad \omega < u, u'$$

avec

$$g_0' = \frac{\Psi}{\Delta_0}\left\{(K_0-2)\mathbb{F}_0^2 - 2\mathbb{F}_0 F_0\right\} + \frac{\delta \Psi'}{\Delta_0'}\left\{(K_0'-2)\mathbb{F}_0'^2 - 2\mathbb{F}_0' F_0'\right\} + \tag{2.52}$$
$$\lambda g \left\{\left(C_0\mathbb{F}_0 - C_0'\mathbb{F}_0'\right)^2\left(\frac{k_0-1}{C_0^4} - \frac{k_0'-1}{C_0'^4}\right) + 2\left(C_0\mathbb{F}_0 - C_0'\mathbb{F}_0'\right)\left(\frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{C_0'^2}\right)\left(\frac{\mathbb{F}_0'}{C_0'} + \frac{\mathbb{F}_0}{C_0}\right)\right\}$$

Les relations (2.50) et (2.52) constituent les deux conditions nécessaires d'existance d'ondes périodiques avec discontinuités en écoulement bicouches avec frottement interfacial des figures 2.4.1 et 2.4.2. Nous retrouvons les résultats du cas sans frottement en posant $\lambda = 0$.

2.2.4.- *Exemple : Conduites de section circulaire (voir figure 1.3)*

σ_o , σ'_o , Δ_o , Δ'_o sont données en fonction de θ_o par (1.38),

$$\sigma_o^3 \mathcal{D}_o = \frac{48 \sin^2\theta_o}{2\theta_o - \sin 2\theta} - 4 \operatorname{ctg}\theta_o \quad ,$$

$$\sigma_o'^3 \mathcal{D}'_o = \frac{48 \sin^2\theta_o}{2(\pi-\theta_o) + \sin 2\theta_o} + 4 \operatorname{ctg}\theta_o \quad ,$$

On trouvera sur les planches 4.a, b, c les représentations graphiques de Q_c en fonction de θ_o pour différentes valeurs des paramètres δ et F_o (ou F'_o). F_o étant donné en fonction de F'_o ou inversement (2.45.b). On trouvera également les représentations graphiques dans le plan (F_o , F'_o) de l'ellipse (E) d'équation (2.45.b) et de la droite (D) d'équation (2.45.a) pour trois cas :

Deux solutions (planche 5 a) une solution (planche 5 b) et aucune solution (planche 5c). F_o étant donné en fonction de F'_o ou inversement par (2.47) dans le cas sans frottement interfacial, et par (2.52) dans le cas avec frottement interfacial.

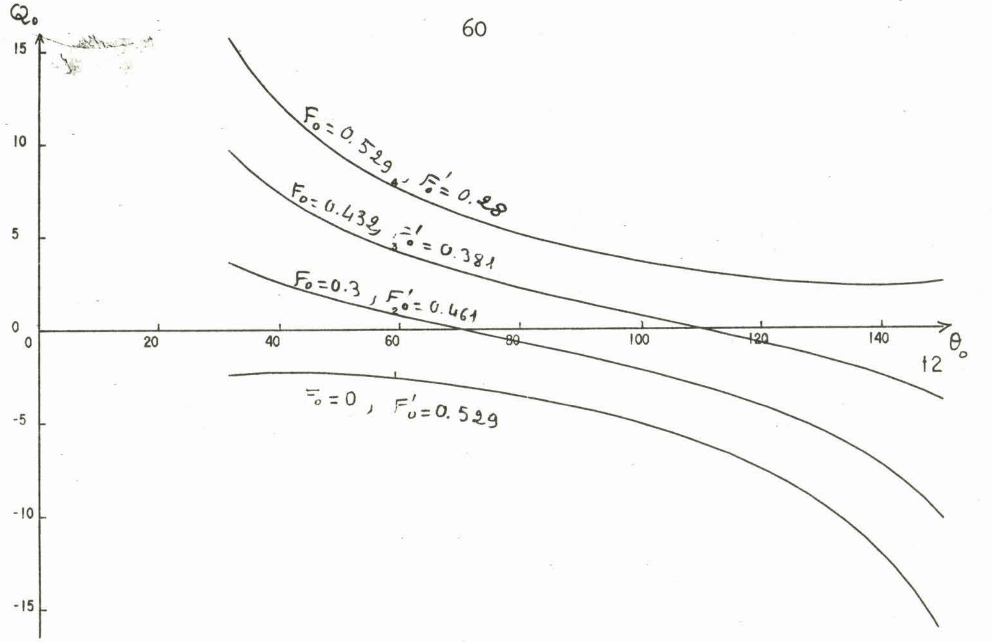


Planche 4.c : $\delta = 0.72$

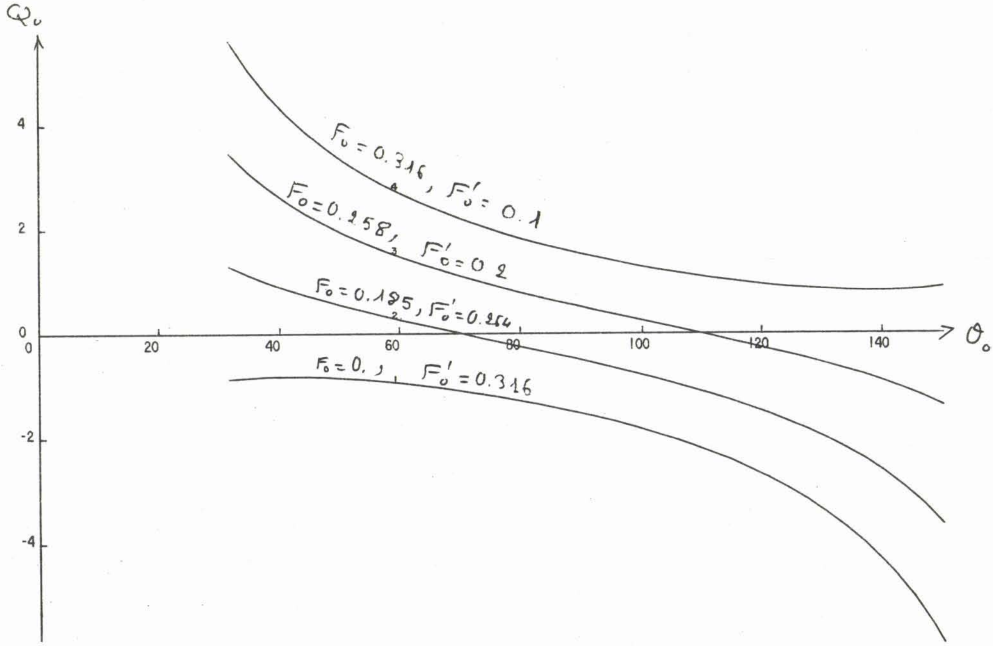


Planche 4.d : $\delta = 0.9$

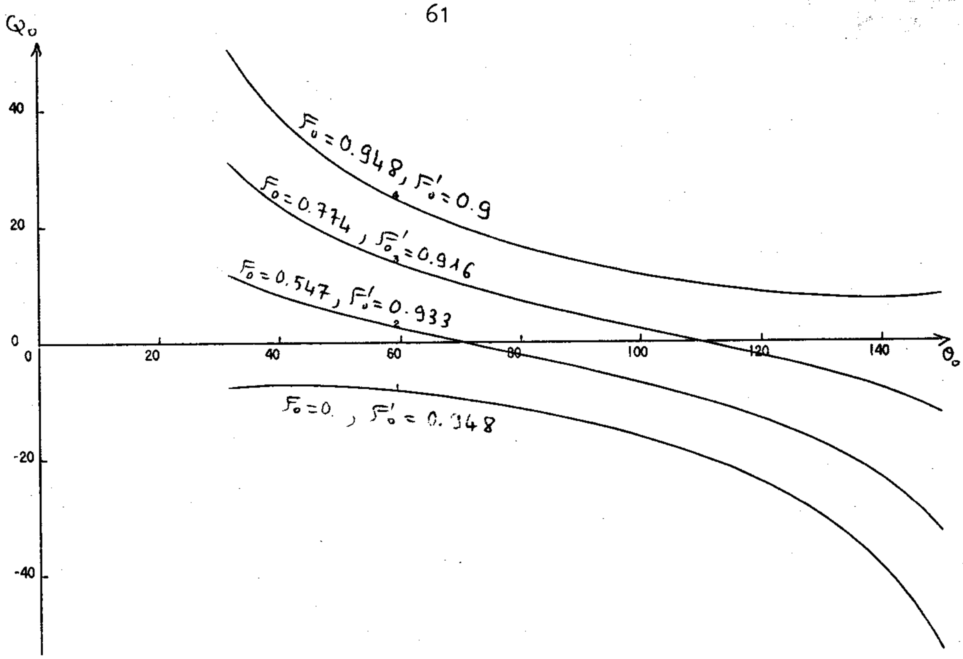


Planche 4.a : $\sigma = 0$)

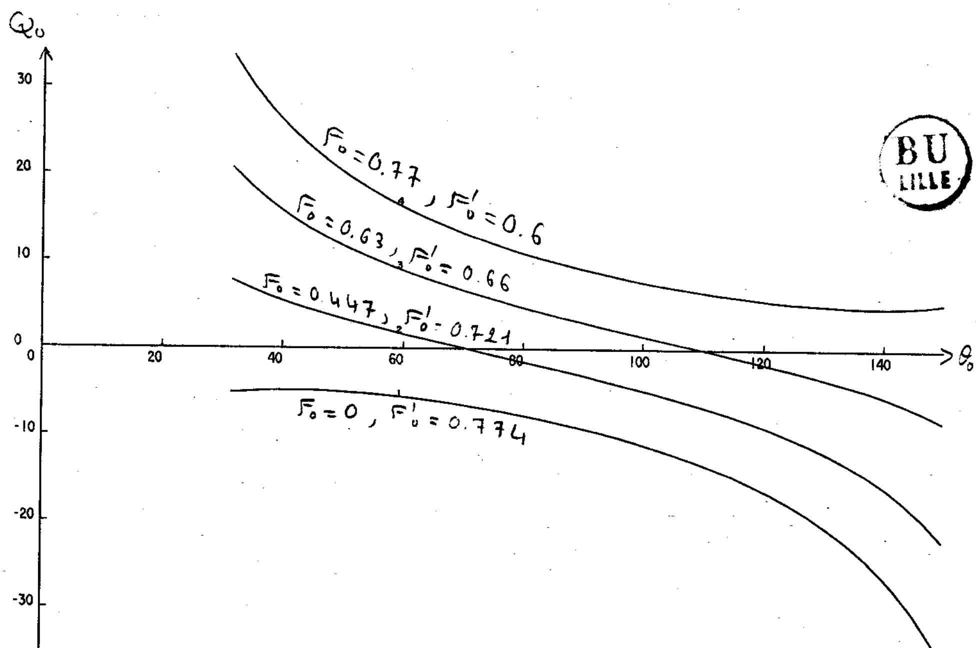
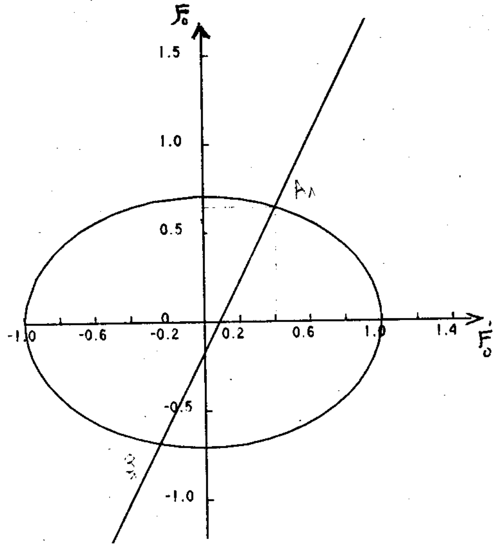


Planche 4.b : $\sigma = 0.4$

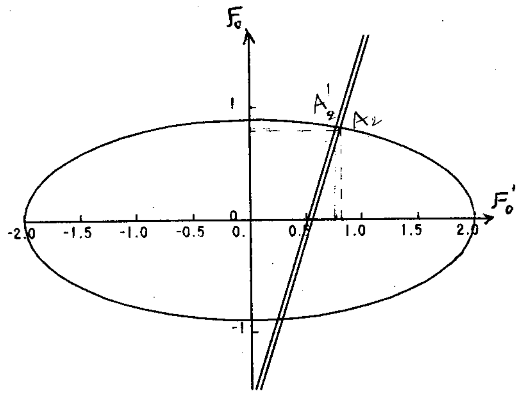


$i = 0.06$, $\sigma = 0.5$,

$\Psi = 0.02$, $\Psi' = 0.04$,

$\lambda = 0.005$, $\theta_0 = 60°$.

Planche 5.a : $A_1\left(\mathbb{F}_0 = 4.234, \mathbb{F}'_0 = 2, F_0 = 0.644, F'_0 = 0.4, \frac{\omega}{C_0} = 4.634,\right.$
$\left. g_0 = 0.086, g'_0 = 0.054, Q_0 = 465\right)$,
$B_1\left(\mathbb{F}_0 = 4.234, \mathbb{F}'_0 = 2, F_0 = -0.678, F'_0 = -0.271, \frac{\omega}{C_0} = 3.556,\right.$
$\left. g_0 = 0.299, g'_0 = 0.268, Q_0 = 465\right)$



$i = $ [illegible], $\sigma = 0.2$,

$\Psi = 0.02$, $\Psi' = 0.04$

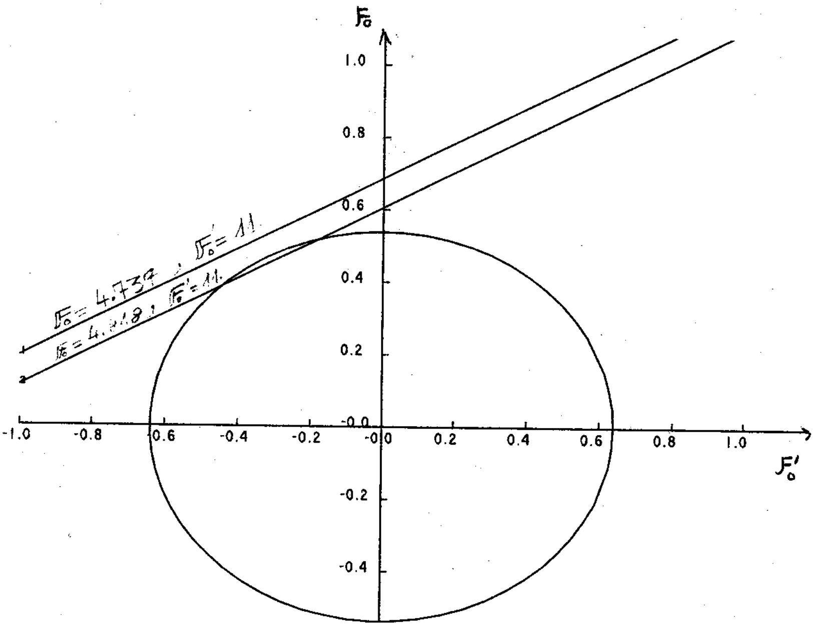
$\lambda = 0.0025$, $\theta_0 = 45°$.

Planche 5.b : $A_2\left(\mathbb{F}_0 = 4.99\ldots, \mathbb{F}'_0 = 1, F_0 = 0.773, F'_0 = 0.826,\right.$

$\left. \frac{\omega}{C_0} = 5.765, g_0 = 0.209, Q_0 = 920.9\right)$,

$A'_2\left(\mathbb{F}_0 = 4.789, \mathbb{F}'_0 = 1, F_0 = 0.8, F'_0 = 0.773, \frac{\omega}{C_0} = 5.589,\right.$

$\left. g'_0 = -0.0189, Q_0 = 871.1\right)$



$i = 0.04$, $\delta = 0.71$

$\psi = 0.04$, $\psi' = 0.02$,

$\lambda = -0.01$, $\theta_0 = 120°$

Planche 5.c

CHAPITRE 3

ONDES INTERNES INDEFORMABLES EN CONDUITE CYLINDRIQUE HORIZONTALE, DE SECTION QUELCONQUE, CONTENANT DEUX FLUIDES STRATIFIES NON MISCIBLES

3.1.- *NORMALISATION POUR UN ECOULEMENT DE FLUIDES STRATIFIES DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE HORIZONTALE*

Nous revenons à des fluides idéaux en mouvement irrotationnel considérés en 1.1.

La conduite est maintenant cylindrique et horizontale. Nous avons admis que l'écoulement correspondant à la solution des équations de l'écoulement graduellement varié constitue une première approximation de l'écoulement presque à une dimension.

Pour envisager le problème d'une façon générale et systématique qui évite de commettre des erreurs dans l'évaluation des ordres de grandeur nous procédons à la normalisation des équations proposée par DYMENT [1].

Nous écrivons les équations à l'aide de grandeurs dites normalisées, qui sont à la fois sans dimension et de l'ordre de grandeur de 1. Ces grandeurs seront représentées par des lettres majuscules.

La normalisation à effectuer est la suivante :

$$(3.1) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} Xh = x\sqrt{\varepsilon}, & Yh = y, & Zh = z, & T\sqrt{h} = t\sqrt{g\varepsilon}, & \\ Sh = s, & Ah = a, & Bh = b, & \Sigma h^2 = \sigma, & \Sigma' h^2 = \sigma' \\ U\sqrt{gh} = u, & V\sqrt{g\varepsilon h} = v, & W\sqrt{g\varepsilon h} = w, & P\rho g h = p & \\ U'\sqrt{gh} = u', & V'\sqrt{g\varepsilon h} = v', & W'\sqrt{g\varepsilon h} = w', & P'\rho g h = p' & \end{array} \right.$$

où h est une longueur de référence transversale et ε le petit paramètre $\varepsilon=\left(\frac{h}{\ell}\right)^2$ qui caractérise les écoulements presque à une dimension, ℓ étant une longueur de référence longitudinale.

Les équations générales s'écrivent avec des grandeurs normalisées:

(3.2.a) $$U_x + V_y + W_z = 0 \quad ,$$

(3.2.b) $$U_T + UU_x + VU_y + WU_z + P_x = 0 \quad ,$$

(3.2.c) $$\varepsilon\left(V_T + UV_x + VV_y + WV_z\right) + P_y = 0 \quad ,$$

(3.2.d) $$\varepsilon\left(W_T + UW_x + VW_y + WW_z\right) + P_z + 1 = 0 \quad ,$$

(3.2.e) $$U_y = \varepsilon V_x \quad , \quad U_z = \varepsilon W_x \quad , \quad V_z = W_y \quad ,$$

(3.3.a) $$U'_x + V'_y + W'_z = 0 \quad ,$$

(3.3.b) $$U'_T + U'U'_x + V'U'_y + W'U'_z + \frac{P'_x}{\gamma} = 0 \quad ,$$

(3.3.c) $$\varepsilon\left(V'_T + U'V'_x + V'V'_y + W'V'_z\right) + \frac{P'_y}{\gamma} = 0 \quad ,$$

(3.3.d) $$\varepsilon\left(W'_T + U'W'_x + V'W'_y + W'W'_z\right) + \frac{P'_z}{\gamma} + 1 = 0 ,$$

(3.3.e) $$U'_y = \varepsilon V'_x \quad , \quad U'_z = \varepsilon W'_x \quad , \quad V'_z = W'_y \, .$$

Les conditions sur la paroi sont respectivement pour le fluide lourd et le fluide léger (figure 3.1).

(3.4.a) $VA_y = W$ pour $Z = A(y)$, ou $WB_Z = V$ pour $Y = B(Z)$, $Z < S$

(3.4.b) $V'A_y = W'$ pour $Z = A(y)$, ou $W'B_Z = V'$ pour $Y = B(Z)$, $Z > S$

Les conditions à l'interface sont :

$$\left.\begin{array}{ll} (3.5.a) & S_T + US_X + VS_y = W \\ (3.5.b) & S_T + U'S_X + V'S_y = W' \\ (3.5.c) & P = P' \end{array}\right\} \text{ pour } Z = S(X, Y, T)$$

3.2.- *METHODE DES PERTURBATIONS ET APPROXIMATION D'ORDRE ZERO*

Nous allons utiliser la méthode classique des perturbations qui consiste à poser pour chacune des inconnues U, V, W, P, S, U', V', W', P' les développements formels:

(3.6) $U(X, Y, Z, T) = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots + \varepsilon^i U_i + \dots$;

ou les U_i sont indépendants de ε. (U_i, V_i, W_i, P_i, S_i, U'_i, V'_i, W'_i, P'_i) est appelée approximation d'ordre i.

Toutes les quantités U_i, V_i, W_i, P_i, S_i, U'_i, V'_i, W'_i, P'_i et leurs dérivées sont supposées d'ordre 1.

On obtient les approximations successives en substituant dans les équations qui régissent le mouvement et en identifiant les termes de même puissance par rapport au paramètre petit ε .

Déterminons les équations de l'approximation d'ordre zéro. Les systèmes d'équations (3.2) et (3.3) s'écrivent en retenant les termes indépendants de ε :

(3.7.a) $$U_{0X} + V_{0Y} + W_{0Z} = 0$$

(3.7.b) $$U_{0T} + U_0 U_{0X} + P_{0X} = 0$$

(3.7.c) $$P_{0Y} = 0$$

(3.7.d) $$P_{0Z} = -1$$

(3.7.e) $$U_{0Y} = U_{0Z} = 0 \quad , \quad V_{0Z} = W_{0Y}$$

(3.8.a) $$U'_{0X} + V'_{0Y} + W'_{0Z} = 0$$

(3.8.b) $$U'_{0T} + U'_0 U'_{0X} + \frac{P'_{0X}}{\delta} = 0$$

(3.8.c) $$P'_{0Y} = 0$$

(3.8.d) $$P'_{0Z} = -\delta$$

(3.8.e) $$U'_{0Y} = U'_{0Z} = 0 \quad , \quad V'_{0Z} = W'_{0Y}$$

Les conditions (3.4) donnent respectivement pour le fluide lourd et le fluide léger :

(3.9.a) $V_0 A_y = W_0$ pour $Z = A(y)$, ou $W_0 B_Z = V_0$ pour $y = B(Z)$, $Z < S_0$

(3.9.b) $V_0' A_y = W_0'$ pour $Z = A(y)$, ou $W_0' B_Z = V_0'$ pour $y = B(Z)$, $Z > S_0$

Les conditions (3.5) à l'interface deviennent :

$$\left.\begin{array}{ll} (3.10.a) & S_{0T} + U_0 S_{0X} + V_0 S_{0y} = W_0 \\ (3.10.b) & S_{0T} + U_0' S_{0X} + V_0' S_{0y} = W_0' \\ (3.10.c) & P_0 = P_0' \end{array}\right\} \text{ pour } Z = S_0$$

Le système (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) constitue les équations de l'écoulement graduellement varié ou par tranches.

On intègre les équations (3.7.c), (3.7.d) et (3.8.c), (3.8.d) d'où :

(3.11.a) $P_0 = -Z + \alpha_0(X, T)$

(3.11.b) $P_0' = -\sigma Z + \alpha_0'(X, T)$

où α_0 et α_0' sont des fonctions arbitraires de X et de T. Compte tenu de (3.10.c), la dernière équation peut s'écrire :

(3.12) $P_0' = \sigma(S_0 - Z) - S_0 + \alpha_0(X, T)$

D'après (3.11) on voit que S_0 est indépendant de y.

Les premières équations (3.7.e) et (3.8.e) montrent que U_0 et U_0' sont indépendants de y et de Z.

Des équations (3.7.b), (3.8.b) on tire, compte tenu de (3.11.a) et de (3.12) :

$$(3.13) \qquad U_{0T} + U_0 U_{0X} - \delta\left(U'_{0T} + U'_0 U'_{0X}\right) + (1-\delta) S_{0X} = 0$$

Soient Σ_0 et Σ'_0 les sections mouillées, à l'ordre zéro, par les deux fluides (figure 3.1).

Nous allons intégrer les équations de conservation de la masse (3.7.a), (3.8.a) respectivement sur Σ_0 et Σ'_0 .

Désignons par B_1 et B_2 les ordonnées de la conduite pour $Z = S_0$, par $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}'_0$ les contours respectifs de Σ_0 et Σ'_0 parcourus dans le sens direct, et par Γ_0 et Γ'_0 les parties respectives de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}'_0$ appartenant à la frontière solide-fluide.

Nous avons d'abord :

$$\int_{\Sigma_0} U_{0X}\, dy\, dz = \Sigma_0 U_{0X}$$

$$\int_{\Sigma_0} V_{0y}\, dy\, dz = \int_{\Gamma_0} V_0\, dz = \int_{\Gamma_0} V_0 A_y\, dy$$

$$\int_{\Sigma_0} W_{0z}\, dy\, dz = -\int_{\Gamma_0} W_0\, dy - \int_{B_2}^{B_1} W_0\, dy$$

Par suite, et compte tenu de (3.10.a), l'équation (3.7.a) s'écrit :

(3.14) $$S_{oT} + U_o S_{oX} + C_o^2 U_{oX} = 0$$

D'une manière analogue, l'équation (3.8.a), compte tenu de (3.10.b), donne :

(3.15) $$S_{oT} + U'_o S_{oX} - C_o'^2 U'_{oX} = 0$$

Les quantités positives C_o et C'_o définies par

(3.16) $$C_o^2 = \frac{\Sigma_o}{B_2 - B_1} \quad , \quad C_o'^2 = \frac{\Sigma'_o}{B_2 - B_1}$$

sont les mêmes que celles introduites dans le chapitre 1. Les équations (3.13), (3.14), (3.15) permettent de calculer U_o , U'_o , S_o .

Ce sont les équations de l'écoulement longitudinal.

Leurs courbes caractéristiques dans le plan (X , T) sont définies par :

(3.17.a) $$dT = 0$$

(3.17.b) $$(\delta C_o^2 + C_o'^2)\, dX^2 - 2\left(U_o C_o'^2 + \delta U'_o C_o^2\right) dX\, dT + \left[C_o'^2 U_o^2 + \delta C_o^2 U_o'^2 + (\delta - 1) C_o^2 C_o'^2\right] dT^2 = 0$$

Elles sont toutes réelles, donc le système est hyperbolique, si on a :

(3.18) $$(1 - \delta)(\delta C_o^2 + C_o'^2) - \delta (U_o - U'_o)^2 \geqslant 0$$

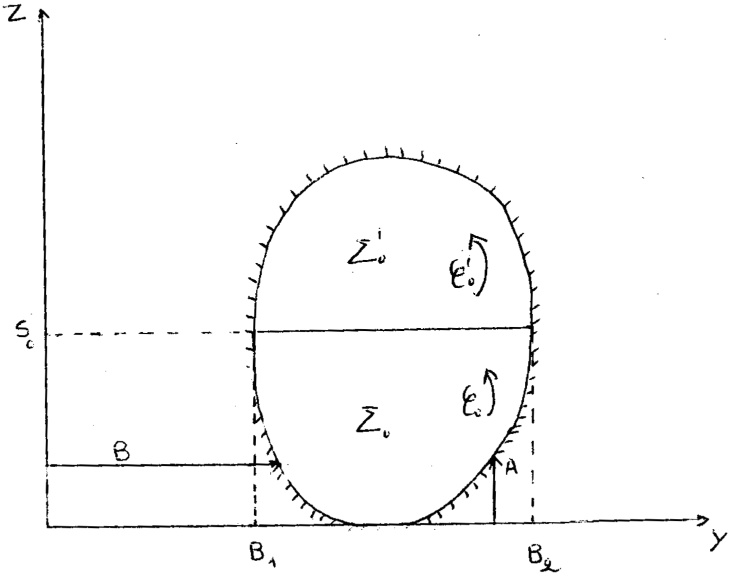


Fig. 3.1 : Conduite de section quelconque.

Si l'écoulement est permanent à l'ordre zéro on tire des équations (3.13), (3.14), (3.15).

$$\left(1 - \varsigma - F_0^2 - \varsigma F_c'^2\right) S_{cx} = 0$$

avec

(3.19) $$F_0 = \frac{u_0}{c_0} \quad , \quad F'_0 = \frac{u'_0}{c'_0}$$

Si on écarte le cas de l'écoulement uniforme, il en résulte :

(3.20) $$F_0^2 + \varsigma F_0'^2 + \varsigma - 1 = 0$$

Revenons au cas général de l'écoulement non permanent. Pour déterminer V_0 , W_0 , V'_0 , W'_0 nous introduisons, comme dans le cas d'un seul fluide à surface libre [7], les fonctions $\chi_0(y,z)$ et $\chi'_0(y,z)$, où les variables X et T jouent le rôle d'un paramètre, et qui sont définies par :

$$(3.21.a) \qquad V_0 = \chi_{0y} U_{0X} \quad , \quad W_0 = (\chi_{0Z} - Z) U_{0X}$$

$$(3.21.b) \qquad V'_0 = \chi'_{0y} U'_{0X} \quad , \quad W'_0 = (\chi'_{0Z} - Z) U'_{0X}$$

de manière à vérifier les relations d'irrotationalité (3.7.e) et (3.8.e).

Les équations (3.7.a) et (3.8.a) montrent que χ_0 et χ'_0 sont harmoniques.

Compte tenu de (3.14), (3.15) les conditions (3.10) donnent :

$$\left.\begin{array}{ll} (3.22.a) & \chi_{0Z} = S_0 - C_0^2 \\ (3.22.b) & \chi'_{0Z} = S_0 + C_0'^2 \end{array}\right\} \text{pour } Z = S_0$$

Quant aux conditions (3.9), on obtient respectivement à la frontière de la paroi avec le fluide lourd et avec le fluide léger :

$$(3.23.a) \qquad \chi_{0y} A_y = \chi_{0Z} - Z \text{ pour } Z = A(y), \text{ ou } \chi_{0Z} B_Z - Z = \chi_{0y} \text{ pour } y = B(Z),\ Z < S_0$$

$$(3.23.b) \qquad \chi'_{0y} A_y = \chi'_{0Z} - Z \text{ pour } Z = A(y), \text{ ou } \chi'_{0Z} B_Z - Z = \chi'_{0y} \text{ pour } y = B(Z),\ Z > S_0$$

Exemple : Conduite de section rectangulaire de hauteur $\bar{H}$ (fig. 3.2).

Le mouvement est plan.

On obtient :

$$\zeta_0 = cte \quad , \quad \zeta_0' = \bar{H} Z + cte \quad , \quad \text{par suite}$$

$$V_0 = 0 \quad , \quad W_0 = -Z U_{0X}$$

$$V_0' = 0 \quad , \quad W_0' = (\bar{H} - Z) U'_{0X}$$

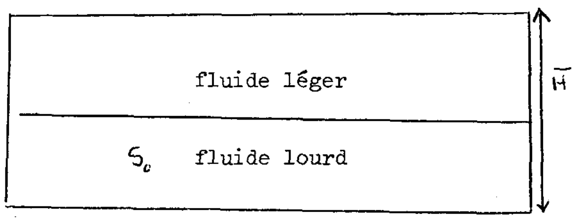


Fig. 3.2 : Conduite de section rectangulaire.

3.3.- ECOULEMENTS PRESQUE UNIFORMES

On se limite désormais à l'étude des écoulements dont la solution d'ordre zéro est uniforme et qui seront dits presque uniformes.

Les équations générales et les conditions à la frontière de la conduite et à l'interface s'écrivent à l'ordre 1 :

(3.24.a) $$U_{1X} + V_{1Y} + W_{1Z} = 0$$

(3.24.b) $$U_{1Y} = U_{1Z} = 0 \quad , \quad V_{1Z} = W_{1Y}$$

(3.24.c) $$U_{1T} + U_0 U_{1X} + P_{1X} = 0$$

(3.24.d) $$P_{1Y} = P_{1Z} = 0$$

(3.25.a) $U'_{1X} + V'_{1y} + W'_{1Z} = 0$

(3.25.b) $U'_{1y} = U'_{1Z} = 0 \quad , \quad V'_{1Z} = W'_{1y}$

(3.25.c) $U'_{1T} + U'_0 U'_{1X} + \dfrac{P'_{1X}}{\delta} = 0$

(3.25.d) $P'_{1y} = P'_{1Z} = 0$

(3.26.a) $V_1 A_y = W_1$ pour $Z = A(y)$, ou $W_1 B_Z = V_1$ pour $y = B(Z)$, $Z < S_0$

(3.26.b) $V'_1 A_y = W'_1$ pour $Z = A(y)$, ou $W'_1 B_Z = V'_1$ pour $y = B(Z)$, $Z > S_0$

$$\left.\begin{array}{ll} (3.27.a) & S_{1T} + U_0 S_{1X} = W_1 \\ (3.27.b) & S_{1T} + U'_0 S_{1X} = W'_1 \\ (3.27.c) & P_1 + S_1 P_{0Z} = P'_1 + S_1 P'_{0Z} \end{array}\right\} \text{pour } Z = S_0$$

A partir de (3.24.b), (3.24.d), (3.25.b), (3.25.d); on obtient :

(3.28.a) $U_1 = U_1(X,T) \quad , \quad P_1 = P_1(X,T)$

(3.28.b) $U'_1 = U'_1(X,T) \qquad P'_1 = P'_1(X,T)$.

Compte tenu de (3.27.c), les équations (3.24.c) et (3.25.c) donnent :

(3.29) $\left(U_{1T} + U_0 U_{1X}\right) - \delta\left(U'_{1T} + U'_0 U'_{1X}\right) + (1-\delta) S_{1X} = 0$

Nous intégrons les équations (3.24.a), (3.25.a) respectivement sur Σ_0 et Σ'_0, comme pour l'ordre zéro. Il vient :

(3.30.a) $$S_{1T} + U_0 S_{1X} + C_i^2 U_{1X} = 0 \ ,$$

(3.30.b) $$S_{1T} + U'_0 S_{1X} - C_i'^2 U'_{1X} = 0 \ .$$

Les équations (3.29) et (3.30) permettent de calculer U_1 , U'_1 et S_1 . Les courbes caractéristiques correspondantes dans le plan (X , T) sont définies par (3.17).

Dans le cas où les caractéristiques sont réelles chaque famille de caractéristiques est constituée de droites parallèles. La condition pour que l'écoulement soit permanent à l'ordre 1 est encore donnée par (3.20). Autrement dit, pour que l'écoulement soit permanent à l'ordre 1, il faut qu'il soit critique à l'ordre zéro. Le même résultat a été obtenu au chapitre 2.

Pour calculer V_1 , W_1 , V'_1 , W'_1 nous procédons comme à l'ordre zéro. Nous introduisons les fonctions $\chi_1(Y, Z)$, $\chi'_1(Y, Z)$ définies par :

(3.31.a) $$V_1 = U_{1X}\,\chi_{1Y} \qquad , \qquad W_1 = U_{1X}(\chi_{1Z} - Z)$$

(3.31.b) $$V'_1 = U'_{1X}\,\chi'_{1Y} \qquad , \qquad W'_1 = U'_{1X}\,(\chi'_{1Z} - Z)$$

de manière à satisfaire à (3.24.b) et (3.25.b).

Les équations (3.24.a) et (3.25.a) montrent que χ_1 et χ'_1 sont harmoniques.

Les conditions aux limites (3.26), (3.27) donnent, compte tenu de (3.30) :

$$\left.\begin{array}{ll} (3.32.a) & \zeta_{1Z} = S_0 - c_0^2 \\ (3.32.b) & \zeta'_{1Z} = S_0 + c_0'^2 \end{array}\right\} \text{pour } Z = S_0$$

(3.33.a) $B_Z(\zeta_{1Z} - Z) = \zeta_{1y}$ pour $y = B(Z)$, ou $A_y \zeta_{1y} = \zeta_{1Z} - Z$ pour $Z = A(y)$, $Z < S_0$

(3.33.b) $B_Z(\zeta'_{1Z} - Z) = \zeta'_{1y}$ pour $y = B(Z)$, ou $A_y \zeta'_{1y} = \zeta'_{1Z} - Z$ pour $Z = A(y)$, $Z > S_0$

<u>Exemple</u> : Pour une section rectangulaire, on obtient (Fig. 3.2)

$$\zeta_1 = cte \quad , \quad \zeta'_1 = \bar{H} Z + cte,$$

$$V_1 = V'_1 = 0 \quad , \quad W_1 = -Z U_{1X} \quad , \quad W'_1 = (\bar{H} - Z) U'_{1X}$$

Passons à l'approximation d'ordre 2.

Les équations générales et les conditions à la frontière s'écrivent :

(3.34.a) $U_{2X} + V_{2y} + W_{2Z} = 0$

(3.34.b) $U_{2y} = V_{1X}$, $U_{2Z} = W_{1X}$, $V_{2Z} = W_{2y}$,

(3.34.c) $U_{2T} + U_0 U_{2X} + U_1 U_{1X} + P_{2X} = 0$,

(3.34.d) $V_{1T} + U_0 V_{1X} + P_{2y} = 0$

(3.34.e) $W_{1T} + U_0 W_{1X} + P_{2Z} = 0$

(3.35.a) $U'_{2X} + V'_{2Y} + W'_{2Z} = 0$,

(3.35.b) $U'_{2Y} = V'_{1X}$, $U'_{2Z} = W'_{1X}$, $V'_{2Z} = W'_{2Y}$,

(3.35.c) $U'_{2T} + U'_0 U'_{2X} + U'_1 U'_{1X} + \dfrac{P'_{2X}}{\delta} = 0$,

(3.35.d) $V'_{1T} + U'_0 V'_{1X} + \dfrac{P'_{2Y}}{\delta} = 0$,

(3.35.e) $W'_{1T} + U'_0 W'_{1X} + \dfrac{P'_{2Z}}{\delta} = 0$,

(3.36.a) $V_2 A_Y = W_2$ pour $Z = A(Y)$, ou $W_2 B_Z = V_2$ pour $Y = B(Z)$, $Z < S_0$,

(3.36.b) $V'_2 A_Y = W'_2$ pour $Z = A(Y)$, ou $W'_2 B_Z = V'_2$ pour $Y = B(Z)$, $Z > S_0$,

$$\left.\begin{array}{ll} (3.37.a) & S_{2T} + U_0 S_{2X} + U_1 S_{1X} = W_2 + S_1 W_{1Z} \\ (3.37.b) & S_{2T} + U'_0 S_{2X} + U'_1 S_{1X} = W'_2 + S_1 W'_{1Z} \\ (3.37.c) & P_2 + S_2 P_{0Z} = P'_2 + S_2 P'_{0Z} \end{array}\right\} \text{ pour } Z = S_0$$

Compte tenu des résultats à l'ordre 1,(3.34.b), (3.34.d), (3.34.e) et (3.35.b), (3.35.d), (3.35.e) donnent par intégration :

(3.38.a) $U_2 = U_{1XX}\left(\chi_1 - \dfrac{Z^2}{2}\right) + L(X,T)$,

(3.38.b) $P_2 = -\left(U_{1T} + U_0 U_{1X}\right)_X \left(\chi_1 - \dfrac{Z^2}{2}\right) + M(X,T)$,

(3.38.c) $U'_2 = U'_{1XX}\left(\chi'_1 - \dfrac{Z^2}{2}\right) + L'(X,T)$, (3.38.d) $$P'_2 = -\varsigma \left(U'_{1T} + U'_0 U'_{1X}\right)_X \left(t'_1 - \frac{Z^2}{2}\right) + M'(X,T) ,$$

L, M, L', M' étant des fonctions arbitraires de X et de T.

3.4.- ONDES INDEFORMABLES

3.4.1.- *Equation différentielle fondamentale*

Dans ce qui va suivre nous chercherons à construire des solutions d'ondes progressives, indéformables à l'ordre 2, donc permanentes à l'ordre 2 dans le repère lié à ces ondes [26]. Nous allons donc supposer dès à présent que l'écoulement est permanent jusqu'à cet ordre [13].

De (3.34.c) et (3.35.c) on tire, compte tenu de (3.38) :

$$U_0 L_X + M_X = -U_1 U_{1X} ,$$

$$\varsigma U'_0 L'_X + M'_X = -U'_1 U'_{1X} .$$

En posant

(3.39) $$N = M - M' ,$$

on obtient par différence :

(3.40) $$U_0 L_X - \varsigma U'_0 L'_X + N_X = \varsigma U'_1 U'_{1X} - U_1 U_{1X}$$

Compte tenu des résultats à l'ordre zéro et 1, l'équation (3.37.c) permet d'écrire :

(3.41) $$(\lambda - \varsigma) S_2 = \varsigma U'_0 U'_{1XX} \left(t'_1(Y,S) - \frac{S_0^2}{2}\right) - U_0 U_{1XX} \left(t_1(Y,S) - \frac{S_0^2}{2}\right) + N$$

Par suite, (3.37.a), (3.37.b) donnent :

$$(3.42) \quad (1-\delta)W_2(x,y,s_0) = \left[t_1'(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right] U_0 U_0' U_{1XXX}' - \left[t_1(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right] U_0^2 U_{1XXX} +$$
$$+ U_0 N_X + (1-\delta)\left[(U_1 S)_X - S_1 U_{1X} t_{1ZZ}(y,s_0)\right]$$

$$(3.43) \quad (1-\delta)W_2'(x,y,s_0) = \left[t_1'(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right] \delta U_0'^2 U_{1XXX}' - \left[t_1(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right] U_0 U_0' U_{1XXX} +$$
$$+ U_0 N_X + (1-\delta)\left[(U_1' S_1)_X - S_1 U_{1X}' t_{1ZZ}'(y,s_0)\right]$$

Intégrons les équations (3.34.a) et (3.35.a) respectivement sur Σ_0 et Σ_0' comme pour l'ordre zéro.

Compte tenu de (3.40) et (3.41), on obtient :

$$(3.44) \quad U_0 N_X + (1-\delta) C_0^2 L_X = (\delta - 1)\left[(U_1 S_1)_X + \beta_1 U_{1XXX} + \beta_2' U_{1XXX}' + \gamma_1 S_1 U_{1X}\right],$$

$$(3.45) \quad U_0' N_X + (\delta - 1) C_0'^2 L_X' = (1-\delta)\left[-(U_1' S_1)_X + \beta_1' U_{1XXX}' + \beta_2 U_{1XXX} + \gamma_1' S_1 U_{1X}'\right]$$

où β_1, β_2, γ_1, β_1', β_2' et γ_1' sont définis par :

$$(3.46) \quad (B_2 - B_1)\beta_1 = \int_{\Sigma_0} \left(t_1 - \frac{z^2}{2}\right) dy\,dz - \frac{U_0^2}{1-\delta} \int_{B_1}^{B_2} \left[t_1(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right] dy,$$

$$(3.47) \quad (B_2 - B_1)\beta_2 = \frac{U_0 U_0'}{1-\delta} \int_{B_1}^{B_2} \left[t_1(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right] dy,$$

$$(3.48)\quad (B_2-B_1)\gamma_1 = -\int_{B_1}^{B_2} t_{1zz}(y,s_0)\,dy \; ,$$

$$(3.49)\quad (B_2-B_1)\beta_1' = \int_{\Sigma_0'}\left(t_1' - \frac{z^2}{2}\right)dy\,dz \;-\; \frac{s\,U_0'^2}{1-s}\int_{B_1}^{B_2}\left[t_1(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right]dy \; ,$$

$$(3.50)\quad (B_2-B_1)\beta_2' = \frac{s\,U_0 U_0'}{1-s}\int_{B_1}^{B_2}\left[t_1'(y,s_0) - \frac{s_0^2}{2}\right]dy \; ,$$

$$(3.51)\quad (B_2-B_1)\gamma_1' = \int_{B_1}^{B_2} t'_{1zz}(y,s_0)\,dy \; .$$

Le mouvement est permanent à l'ordre 2 si le système formé par les équations (3.40), (3.44), (3.45) admet une solution.

Le déterminant principal de ce système est :

$$D_p = \frac{c_0^2 c_0'^2}{s^2}\left[F_0^2 + s F_0'^2 + s - 1\right]$$

et il est nul d'après (3.20).

Par conséquent, il faut qu'un des déterminants secondaires soit nul. Cette condition se traduit par :

$$(3.52)\quad -\left(s\, c_0^2 c_0'^2\right)\lambda_1 + \left(U_0 c_0'^2\right)\lambda_2 + \left(U_0' c_0^2\right)\lambda_3 = 0$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont respectivement les seconds membres de (3.40), (3.44) et (3.45).

Compte tenu des résultats à l'ordre 1, nous avons :

$$(3.53.a)\quad s F_0'^2 = 1 - s - F_0^2 \; ,$$

(3.53.b) $\quad U_0 U_{1X} = -F_0^2 S_{1X}$,

(3.53.c) $\quad \varsigma U'_0 U'_{1X} = (1 - \varsigma - F_0^2) S_{1X}$.

En tenant compte des conditions à l'interface et à la paroi solide on trouve pour γ_1 et γ'_1 les expressions :

(3.54) $$(B_2 - B_1)\gamma_1 = -C_0^2 \frac{d}{dS_0}(B_2 - B_1) ,$$

(3.55) $$(B_2 - B_1)\gamma'_1 = -C_0'^2 \frac{d}{dS_0}(B_2 - B_1) ,$$

ou encore

(3.56) $$(3 + \gamma_1) = \frac{\Sigma_0^2 C_0^4}{2} \mathcal{D}_0 ,$$

(3.57) $$(3 - \gamma'_1) = \frac{\Sigma_0'^2 C_0'^4}{2} \mathcal{D}'_0$$

où $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}'_0$ sont les dérivées fondamentales définies, comme au chapitre 2, par :

(3.58) $$\mathcal{D}_0 = \frac{d^2}{dS_0^2}\left(\frac{1}{\Sigma_0^2}\right) \quad , \quad \mathcal{D}'_0 = \frac{d^2}{dS_0^2}\left(\frac{1}{\Sigma_0'^2}\right)$$

Puisque $\Sigma_0 + \Sigma'_0 = \overline{\Sigma}$ constant on a

$$C_0^6 \mathcal{D}_0 + C_0'^6 \mathcal{D}'_0 = \frac{6\overline{\Sigma}}{C_0^2 C_0'^2 (B_2 - B_1)^3}$$

De Là :

$$(3.59) \qquad c_0^2 \gamma_1' = c_0'^2 \gamma_1$$

Compte tenu de (3.53), (3.56) et de (3.57), nous obtenons à partir de (3.52) au terme d'un long calcul :

$$(3.60) \qquad \mathbb{A} S_{1XXX} + 3\mathbb{B} S_1 S_{1X} + \mathbb{C}_1 S_{1X} = 0$$

où $\mathbb{C}_1$ est une constante et où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont définies par :

$$(3.61) \qquad \mathbb{A} = c_0^2 c_0'^2 \left\{ F_0^2 I_1 + \sigma F_0'^2 J_1 \right\} ,$$

$$(3.62) \qquad \mathbb{B} = \frac{c_0^2 c_0'^2}{6(B_2 - B_1)} Q_0$$

avec :

$$(3.63) \qquad \Sigma_0 I_1 = \int_{\Sigma_0} \left\{ t_{1y}^2 + (t_{1z} - z)^2 \right\} dy\,dz$$

$$(3.64) \qquad \Sigma_0' J_1 = \int_{\Sigma_0'} \left\{ t_{1y}'^2 + (t_{1z}' - z)^2 \right\} dy\,dz$$

$$(3.65) \qquad Q_0 = \Sigma_0^3 F_0^2 \mathcal{D}_0 - \sigma \Sigma_0'^3 F_0'^2 \mathcal{D}_0'$$

Une double intégration de (3.60) conduit à

$$(3.66) \qquad \mathbb{A} S_{1X}^2 = -\mathbb{B} S_1^3 - \mathbb{C}_1 S_1^2 + \mathbb{C}_2 S_1 + \mathbb{C}_3$$

où $\mathbb{C}_2$ et $\mathbb{C}_3$ sont des nouvelles constantes.

Désignons par $\mathcal{P}_3$ le second membre de (3.66) : puisque $\mathbb{A}$ est positif, il est évident que (3.66) n'admet de solution que si $\mathcal{P}_3 > 0$.

Soient S_{11} , S_{12} , S_{13} les racines supposées réelles de $\mathcal{P}_3(S_1)$ rangées dans l'ordre suivant :

$$S_{11} < S_{12} < S_{13}$$

Nous avons :

$$\mathcal{P}_3(S_1) = \mathbb{B}\,(S_1 - S_{11})(S_1 - S_{12})(S_{13} - S_1)$$

Les figures 3.3 représentent $\mathcal{P}_3$ respectivement dans les trois cas $\mathcal{Q}_0 > 0$, $\mathcal{Q}_0 < 0$ et dans le cas particulier $\mathcal{Q}_0 = 0$.

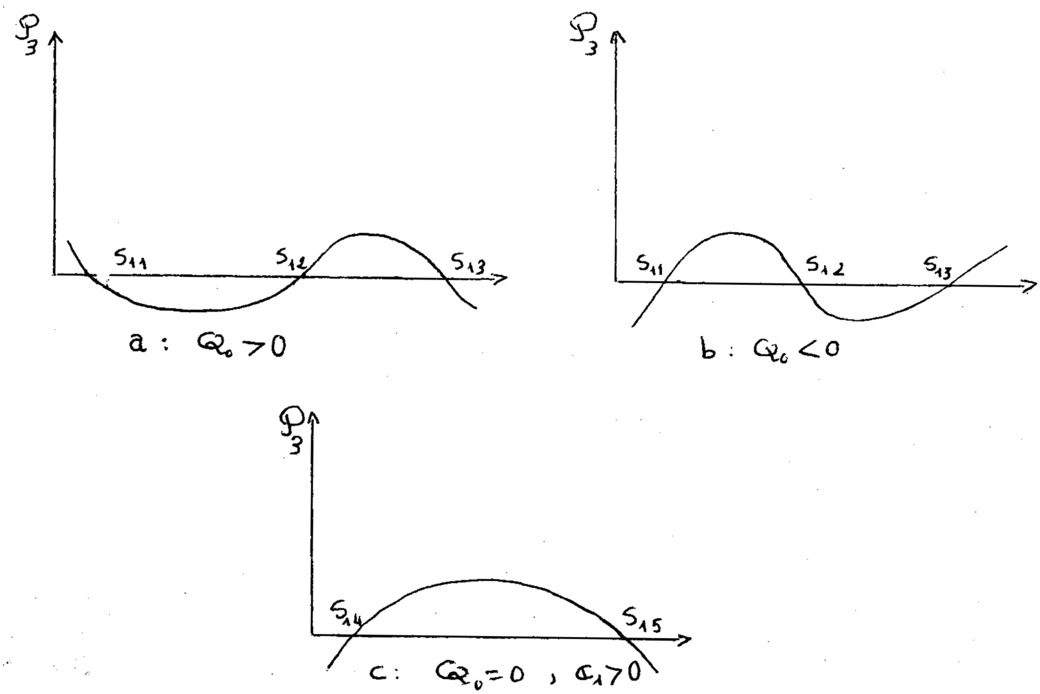


Fig. 3.3

S_1 doit être borné; par conséquent, pour obtenir $\mathcal{P}_3 > 0$ on doit faire varier S_1, dans l'intervalle $[S_{12}, S_{13}]$ si $\mathcal{Q}_0 > 0$, dans l'intervalle $[S_{11}, S_{12}]$ si $\mathcal{Q}_0 < 0$, et dans l'intervalle $[S_{14}, S_{15}]$ si $\mathcal{Q}_0 = 0$ et $a_1 > 0$, S_{14} et S_{15} désignant les racines de $\mathcal{P}_3$ dans ce cas particulier.

Une solution explicite de (3.60) en termes des fonctions elliptiques de Jacobi est bien connue [14].

3.4.2.- *Ondes indéformables de type régulier*

Ce cas correspond à $\mathcal{Q}_0 > 0$.

Nous cherchons la solution sous la forme :

(3.67) $$S_1 = S_{12} + (S_{13} - S_{12}) \cos^2\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

L'intégration donne :

(3.68) $$S_1 = S_{12} + (S_{13} - S_{12}) \, cn^2 \alpha x$$

La constante d'intégration a été choisie telle que $S_1 = S_{13}$ pour $x = 0$,

et α est une constante positive définie par

(3.69) $$\alpha^2 = \frac{\mathbb{B}(S_{13} - S_{11})}{4\,\mathbb{A}}$$

La fonction cn^2 est périodique de période $2K(\frac{\pi}{2}, \kappa)$ où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce de module:

$$(3.70) \qquad \mathbb{K} = \left(\frac{S_{13} - S_{12}}{S_{13} - S_{11}} \right)^{1/2}$$

La longueur d'onde est :

$$(3.71) \qquad \lambda = \frac{2K(\frac{\pi}{2}, \mathbb{K})}{\alpha}$$

On peut donc écrire à l'approximation d'ordre 1 :

$$(3.72) \qquad S = S_0 + \varepsilon \left[S_{12} + (S_{13} - S_{12}) \, cn^2 \alpha x \right]$$

Le maximum et le minimum sont donnés par :

$$(3.73) \qquad S_M = S_0 + \varepsilon S_{13} \qquad , \quad S_m = S_0 + \varepsilon S_{12}$$

Par suite,

$$(3.74.a) \qquad S = S_m + (S_M - S_m) \, cn^2 \alpha x$$

$$(3.74.b) \qquad U_0 (U - U_0) = F_0^2 \left[S_0 - S_m + (S_m - S_M) \, cn^2 \alpha x \right]$$

$$(3.74.c) \qquad \frac{U_0 V}{t_{1Y}} = \frac{U_0 W}{t_{1Z} - Z} = 2\alpha F_0^2 (S_M - S_m) \, cn\alpha x . sn\alpha x . dn\alpha x \, ,$$

$$(3.74.d) \qquad U'_0 (U' - U'_0) = F_0'^2 \left[S_m - S_0 + (S_M - S_m) \, cn^2 \alpha x \right]$$

$$(3.74.e) \qquad \frac{U'_0 V'}{t'_{1Y}} = \frac{U'_0 W'}{t'_{1Z} - Z} = 2\alpha F_0'^2 (S_m - S_M) . cn\alpha x . sn\alpha x . dn\alpha x$$

Les ondes indéformables définies par les relations ci-dessus sont appelées ondes cnoïdales.

Soit S_{moy} : l'altitude moyenne des ondes cnoïdales définies par :

(3.75) $$S_{moy} - S_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} (S - S_m)\, dx$$

Compte tenu de (3.74.a), on obtient :

(3.76) $$S_{moy} = S_M + \frac{S_M - S_m}{\mathbb{K}^2}\left\{\frac{\mathcal{D}(\frac{\pi}{2},\mathbb{K})}{\mathcal{K}(\frac{\pi}{2},\mathbb{K})} - 1\right\}$$

où $\mathcal{D}$ est l'intégrable elliptique complète de seconde espèce. Or :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\mathbb{K}^2}\left\{1 - \frac{\mathcal{D}(\frac{\pi}{2},\mathbb{K})}{\mathcal{K}(\frac{\pi}{2},\mathbb{K})}\right\} \leq 1 .$$

Par conséquent :

(3.77) $$S_{moy} - S_m \leq S_M - S_{moy} ,$$

ce qui signifie que la dénivellation entre les crêtes et le niveau moyen de l'interface est supérieure ou égale à la dénivellation entre le niveau moyen et les creux (Fig. 3.4.a).

Pour $S_{12} = S_{13}$: Fig. 3.3.a, il n'y a pas de solution d'ondes.

Pour $S_{12} = S_{11}$: Fig. 3.3.a, la longueur d'onde devint infinie, ce qui définit l'onde solitaire.

Les formules (3.74), (3.76) deviennent :

(3.78.a) $$S_{moy} = S_m$$

(3.78.b) $$S = S_m + (S_M - S_m)\,\mathrm{sech}^2 \alpha X$$

(3.78.c) $$U_0(U - U_0) = F_0^2\left[S_0 - S_m + (S_m - S_M)\,\mathrm{sech}^2 \alpha X\right]$$

(3.78.d) $$\frac{U_0 V}{t_{1y}} = \frac{U_0 W}{t_{1z} - Z} = 2\alpha F_0^2 (S_M - S_m)\,\mathrm{th}\,\alpha X \,.\, \mathrm{sech}^2 \alpha X$$

(3.78.e) $$U'_0(U' - U'_0) = F_0'^2\left[S_m - S_0 + (S_M - S_m)\,\mathrm{sech}^2 \alpha X\right]$$

(3.78.f) $$\frac{U'_0 V'}{t'_{1y}} = \frac{U'_0 W'}{t'_{1z} - Z} = 2\alpha F_0'^2 (S_m - S_M)\,\mathrm{th}\,\alpha X \,.\, \mathrm{sech}^2 \alpha X$$

On voit que l'onde solitaire est une surélévation (Fig. 3.4.b). En résumé le cas $\mathcal{Q}_0 > 0$ correspond à des ondes cnoïdales et solitaires de même nature que celles qu'on obtient usuellement dans un canal ouvert contenant un seul fluide lorsque la dérivée fondamentale est positive [1]. Nous dirons que ces ondes indéformables sont de type régulier.

3.4.3.- *Ondes indéformables exceptionnelles*

Ce cas correspond à $\mathcal{Q}_0 < 0$.

Le changement de variable à effectuer dans ce cas est :

(3.79) $$S_1 = S_{12} - (S_{12} - S_{11})\cos^2\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

L'intégration donne :

(3.80) $$S_1 = S_{12} - (S_{12} - S_{11})\,\mathrm{cn}^2 \alpha X$$

où α est une constante positive définie par :

(3.81) $$\alpha^2 = \frac{\mathbb{B}(S_{11} - S_{13})}{4\mathbb{A}}$$

La longueur d'onde est définie par (3.71) avec cette fois-ci :

(3.82) $$\mathbb{K} = \left(\frac{S_{12} - S_{11}}{S_{13} - S_{11}}\right)^{1/2}$$

S_m et S_M sont définies par :

$$S_M = S_0 + \varepsilon S_{12}$$

$$S_m = S_0 + \varepsilon S_{11}$$

Par suite, on obtient :

(3.83.a) $$S = S_M - (S_M - S_m)\,cn^2\alpha x \quad ,$$

(3.83.b) $$U_0(U - U_0) = F_0^2\left[S_0 - S_M + (S_M - S_m)\,cn^2\alpha x\right] \quad ,$$

(3.83.c) $$\frac{U_0 V}{t_{1y}} = \frac{U_0 W}{t_{1z} - Z} = 2\alpha F_0^2 (S_m - S_M)\,cn\alpha x . sn\alpha x . dn\alpha x \, ,$$

(3.83.d) $$U'_0(U' - U'_0) = F'^2_0\left[S_M - S_0 - (S_M - S_m)\,cn^2\alpha x\right] \quad ,$$

(3.83.e) $$\frac{U'_0 V'}{t'_{1y}} = \frac{U'_0 W'}{t_{1Z} - Z} = 2\alpha F'^2_0 (S_M - S_m)\,cn\alpha x . sn\alpha x . dn\alpha x \, ,$$

et

(3.84) $$S_{moy} = S_m + \frac{S_M - S_m}{\mathbb{K}^2}\left(1 - \frac{\vartheta(\frac{\pi}{2}, \mathbb{K})}{k(\frac{\pi}{2}, \mathbb{K})}\right).$$

De là :

(3.85) $$S_{moy} - S_m \geqslant S_M - S_{moy} .$$

Résultat opposé au cas $Q_v > 0$ (voir Fig. 3.5.a)

Pour $S_{12} = S_{11}$, il n'y a pas de solution d'onde.

Pour $S_{12} = S_{13}$, la longueur d'onde devient infinie, ce qui définit l'onde solitaire. Dans ce cas les équations (3.83), (3.84) deviennent :

(3.86.a) $$S = S_M - (S_M - S_m)\,\mathrm{sech}^2 \alpha X \quad ,$$

(3.86.b) $$U_v (U - U_v) = F_v^2 \left[S_v - S_M + (S_M - S_m)\,\mathrm{sech}^2 \alpha X \right] ,$$

(3.86.c) $$\frac{U_v V}{\ell_{1y}} = \frac{U_v W}{\ell_{1z} - Z} = 2\alpha F_v^2 (S_m - S_M)\,\mathrm{th}\,\alpha X \cdot \mathrm{sech}^2 \alpha X \quad ,$$

(3.86.d) $$U'_v (U' - U'_v) = F'^2_v \left[S_M - S_v - (S_M - S_m)\,\mathrm{sech}^2 \alpha X \right] \quad ,$$

(3.86.e) $$\frac{U'_v V'}{\ell'_{1y}} = \frac{U'_v W'}{\ell'_{1z} - Z} = 2\alpha F'^2_v (S_M - S_m)\,\mathrm{th}\,\alpha X \cdot \mathrm{sech}^2 \alpha X \quad ,$$

(3.86.f) $$S_{mcy} = S_M .$$

Cela signifie que l'onde solitaire est une dénivellation (Fig. 3.5.b). La situation obtenue pour $Q_v < 0$ est analogue à ce qu'on rencontre dans un canal ouvert contenant un seul liquide lorsque la dérivée fondamentale est négative. Nous dirons que les ondes indéformables sont de type exceptionnel. Il reste à examiner le cas limite $Q_v = 0$.

Si $\mathcal{C}_1 \leq 0$, il n'y a pas de solution d'onde.

Par contre si $\mathcal{C}_1 > 0$ (Fig. 3.3.c), on obtient :

$$S_1 = S_{14} + (S_{15} - S_{14}) \cos^2 \left\{ \left(\frac{\mathcal{C}_1}{4A} \right)^{1/2} X \right\}$$

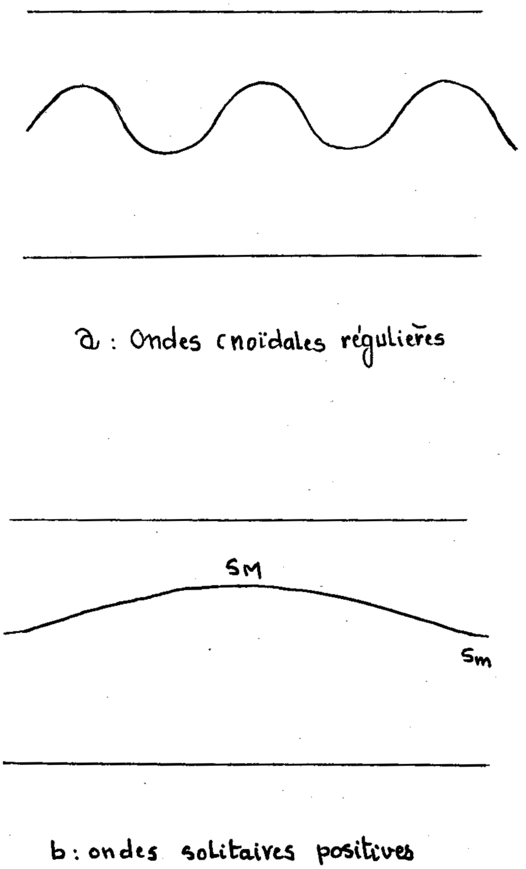


Fig. 3.4 : Ondes indéformables régulières.

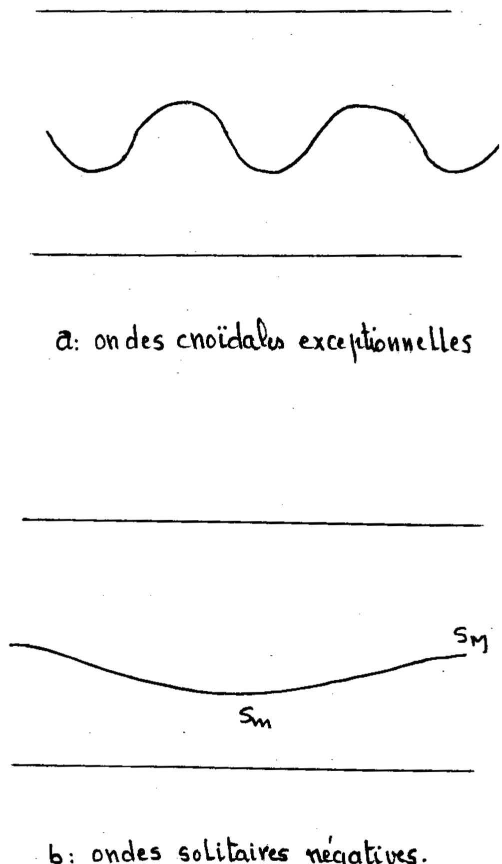


Fig. 3.5 : Ondes indéformables exceptionnelles.

On remarque que les ondes périodiques avec discontinuités (chapitre 2) aussi bien que les ondes périodiques indéformables à l'ordre deux s'obtiennent par perturbation d'un écoulement critique donné, et que les ondes cnoïdales et les ondes avec discontinuités sont régulières ou exceptionnelles (ou encore inversées), suivant que la quantité : $\mathcal{Q}_c = \Sigma_c^3 F_c^2 \mathcal{D}_c - \Sigma_c'^3 F_c'^2 \mathcal{D}_c'$ est positive ou négative. La quantité $\mathcal{Q}_c$ joue donc ici exactement le même rôle que la dérivée fondamentale dans un écoulement d'un seul fluide dans un canal ouvert à l'atmosphère [1],[16].

Exemple : conduite de section circulaire (voir Fig. 1.3).

Les courbes représentatives de $\mathcal{Q}_c$ en fonction de θ_c pour différentes valeurs des paramètres σ et F_c (ou F_c') ont déjà été données sur les planches 4.a, b, c, d auxquelles il suffit de se référer.

CHAPITRE 4

ONDES INDEFORMABLES EN CANAL CYLINDRIQUE HORIZONTAL, DE SECTION QUELCONQUE, CONTENANT DEUX FLUIDES STRATIFIES NON MISCIBLES

4.1.- *NORMALISATION ET APPROXIMATION D'ORDRE ZERO*

Nous reprenons le problème considéré dans le chapitre 3 mais cette fois en écoulement dans un canal cylindrique et horizontal, ouvert à l'atmosphère. La pression atmosphérique sera prise pour origine des pressions. Nous conservons les mêmes notations et la même normalisation. On désigne par b' la cote de la surface libre et on définit S'_0 et $\mathbb{D}_0$ par (Fig. 4.1) :

$$(4.1) \qquad S'h = b' \qquad , \qquad (B'_2 - B'_1)\,\mathbb{D}_0 = B_2 - B_1$$

Nous mettons en oeuvre la méthode des perturbations comme au chapitre 3. Nous posons pour chacune des variables U, V, W, P, S, U', V', W', P', S' les développements de la forme (3.6).

Déterminons les équations de l'approximation d'ordre zéro. Les équations de conservation de la masse, les équations de la dynamique et les conditions d'irrotationalité, s'écrivent à l'ordre zéro :

$$(4.2.a) \qquad U_{0X} + V_{0Y} + W_{0Z} = 0$$

$$(4.2.b) \qquad U_{0T} + U_0 U_{0X} + P_{0X} = 0$$

$$(4.2.c) \qquad P_{0Y} = 0$$

(4.2.d) $$P_{oZ} = -1$$

(4.2.e) $$U_{oy} = U_{oZ} = 0 \quad , \quad V_{oZ} = W_{oy}$$

(4.3.a) $$U'_{oX} + V'_{oy} + W'_{oZ} = 0$$

(4.3.b) $$U'_{oT} + U'_o U'_{oX} + \frac{P'_{oX}}{\delta} = 0$$

(4.3.c) $$P'_{oy} = 0$$

(4.3.d) $$P'_{oZ} = -\delta$$

(4.3.e) $$U'_{oy} = U'_{oZ} = 0 \quad , \quad V'_{oZ} = W'_{oy}$$

Les conditions sur la paroi sont :

(4.4.a) $$V_o A_y = W_o \text{ pour } Z = A(y) \text{, ou } W_o B_Z = V_o \text{ pour } Y = B(Z) \text{,} \quad 0 < Z < S_o \text{,}$$

(4.4.b) $$V'_o A_y = W'_o \text{ pour } Z = A(y) \text{, ou } W'_o B_Z = V'_o \text{ pour } Y = B(Z) \text{,} \quad S_o < Z < S'_o \text{.}$$

Les conditions cinématiques à l'interface et à la surface libre sont :

(4.5.a) $$S_{oT} + U_o S_{oX} = W_o$$

(4.5.b) $$S_{oT} + U'_o S_{oX} = W'_o$$

pour $Z = S_o$

(4.6) $$S'_{oT} + U'_o S'_{oX} = W'_o \quad \text{pour} \quad Z = S'_o \text{.}$$

Les conditions dynamiques à l'interface et à la surface libre sont :

(4.7) $\quad P_o = P'_o \qquad$ pour $\quad Z = S_o$

(4.8) $\quad P'_o = 0 \qquad$ pour $\quad Z = S'_o$

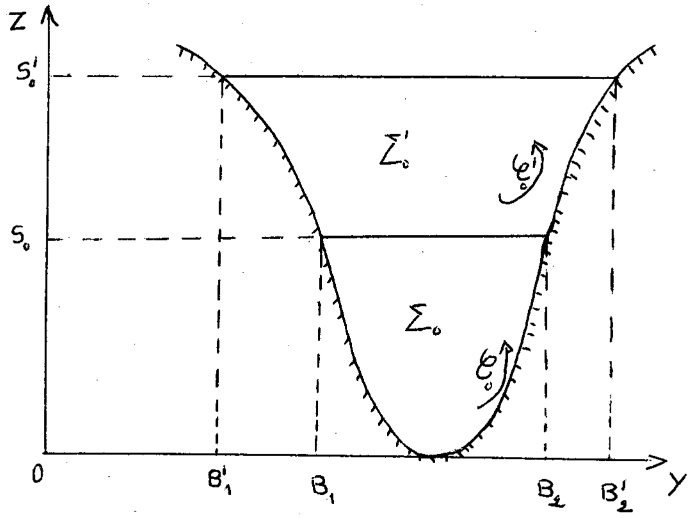


Fig. 4.1 : Canal de section quelconque.

Les équations (4.2.e) et (4.3.e) montrent que U_o et U'_o ne sont fonctions que de X et de T .

L'intégration de (4.3.c), (4.3.d) donne, compte tenu de (4.8)

(4.9) $\quad P'_o = \rho(S'_o - Z)$

De même l'intégration de (4.2.c) et (4.3.c) donne, compte tenu de (4.7) et (4.9) :

(4.10) $$P_0 = S_0 - Z + \delta(S'_0 - S_0)$$

Par suite, (4.2.b) et (4.3.b) deviennent :

(4.11) $$U_{0T} + U_0 U_{0X} + S_{0X} + \delta(S'_0 - S_0)_X = 0 \ ,$$

(4.12) $$U'_{0T} + U'_0 U'_{0X} + S'_{0X} = 0 \ .$$

De (4.9) et (4.10) il résulte que S_0 et S'_0 ne sont fonctions que de X et de T .

Intégrons les équations de conservation de la masse (4.2.a), (4.3.a) respectivement sur Σ_0 et Σ'_0 , aires mouillées par le fluide lourd et le fluide léger.

Pour cela, désignons par $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}'_0$ les contours respectifs de Σ_0 et Σ'_0 parcourus dans le sens direct, et par Γ_0 et Γ'_0 les parties de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}'_0$ appartenant au fond (Figure 4.1).

Nous avons d'abord :

$$\int_{\Sigma'_0} U'_{0X} \, dy\, dz = \Sigma'_0 U'_{0X} \ ,$$

$$\int_{\Sigma'_0} V'_{0y} \, dy\, dz = \int_{\Gamma'_0} V'_0 \, dz$$

$$\int_{\Sigma'_0} W'_{0z} \, dy\, dz = -\int_{\Gamma'_0} W'_0 \, dy - \int_{B_1}^{B_2} W'_0 \, dy - \int_{B'_2}^{B'_1} W'_0 \, dy$$

Par suite, l'équation (4.3.a) prend la forme suivante :

(4.13) $$S'_{0T} + U'_0 S'_{0X} - D_0 \left(S_{0T} + U'_0 S_{0X} \right) + C'^2_0 U'_{0X} = 0$$

D'une manière analogue, (4.2.a) donne :

(4.14) $$S_{0T} + U_0 S_{0X} + C_0^2 U_{0X} = 0$$

Les quantités positives C_0 et C'_0 sont définies par :

(4.15) $$C_0^2 = \frac{\Sigma_0}{B_2 - B_1} \quad , \quad C'^2_0 = \frac{\Sigma'_0}{B'_2 - B'_1}$$

Les équations (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) permettent de déterminer U_0 , S_0 , U'_0 , S'_0 . Ce sont les équations du mouvement longitudinal. Leurs courbes caractéristiques dans le plan (X , T) sont définies par :

(4.16) $$\left\{ \left(\frac{dX}{dT} - U_0 \right)^2 - C_0^2 \right\} \left\{ \left(\frac{dX}{dT} - U'_0 \right)^2 - C'^2_0 \right\} = \delta C_0^2 \left\{ C'^2_0 + (D_0 - 1) \left(\frac{dX}{dT} - U'_0 \right)^2 \right\}$$

Pour que l'écoulement soit permanent à l'ordre zéro, il faut que :

(4.17.a) $$S_{0X} = 0$$

ou

(4.17.b) $$(\mu_0 + \delta)\, \mu'_0 = \delta\, D_0 (\mu'_0 + 1)$$

avec

(4.18.a) $\mu_0 = F_0^2 - 1$, $\mu'_0 = F_0'^2 - 1$,

(4.18.b) $F_0 = \dfrac{U_0}{C_0}$, $F'_0 = \dfrac{U'_0}{C'_0}$.

Dans le cas particulier de l'écoulement plan, (3.17.b) devient $\mu_0 \mu'_0 = \zeta$: c'est le critère d'écoulement critique obtenu par YIH et GUHA [11].

Pour déterminer V_0 , W_0 , V'_0 , W'_0 nous introduisons les fonctions $\varphi_0(y,z)$ et $\varphi'_0(y,z)$ définies par (3.21) de manière à satisfaire (4.2.e) et (4.3.e). Les équations (4.2.a) et (4.3.a) montrent que φ_0 et φ'_0 sont harmoniques.

Les conditions (4.4), (4.5), (4.6) s'expriment par :

(4.19.a) $\varphi_{0y} A_y = \varphi_{0z} - Z$ pour $Z = A(y)$, $0 < Z < S_0$

(4.19.b) $\varphi'_{0y} A_y = \varphi'_{0z} - Z$ pour $Z = A(y)$, $S_0 < Z < S'_0$

(4.20.a) $S_{0T} + U_0 S_{0X} = U_{0X}(\varphi_{0z} - S_0)$

(4.20.b) $S_{0T} + U'_0 S_{0X} = U'_{0X}(\varphi'_{0z} - S_0)$

$\Big\}$ pour $Z = S_0$

(4.20.c) $S'_{0T} + U'_0 S'_{0X} = U'_{0X}(\varphi'_{0z} - S'_0)$ pour $Z = S'_0$

<u>Exemple</u> : section "puissance" d'équation :

(4.21) $Y = \pm n Z^\lambda$, n et λ constantes positives. On a :

$$C_0^2 = \frac{S_0}{\lambda+1} \quad , \qquad C_0'^2 = \frac{S_0'}{\lambda+1} - \frac{S_0}{\lambda+1}\left(\frac{S_0}{S_0'}\right)^{\lambda}$$

Dans le cas particulier simple où $U_0 = U_0'$ on obtient :

$$t_0 = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\frac{z^2-y^2}{2} \quad , \qquad t_0' = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\frac{z^2-y^2}{2} \, .$$

De là :

$$V_0 = -\frac{\lambda U_{0x}\, y}{\lambda+1} \quad , \qquad W_0 = -\frac{U_{0x}\, z}{\lambda+1} \quad ,$$

$$V_0' = -\frac{\lambda U_{0x}}{\lambda+1}\, y \quad , \qquad W_0' = -\frac{U_{0x}}{\lambda+1}\, z \, .$$

4.2.- *ECOULEMENTS PRESQUE UNIFORMES*

Comme au chapitre précédent nous allons poursuivre en nous limitant à des écoulements presque uniformes, c'est-à-dire des écoulements pour lesquels l'approximation d'ordre zéro est uniforme.

Les équations générales, les conditions cinématiques à la paroi solide, à l'interface et à la surface libre s'écrivent à l'ordre 1 :

(4.22.a) $$U_{1x} + V_{1y} + W_{1z} = 0$$

(4.22.b) $$U_{1T} + U_0 U_{1x} + P_{1x} = 0$$

(4.22.c) $P_{1y} = P_{1z} = 0$

(4.22.d) $U_{1y} = U_{1z} = 0 \quad , \; V_{1z} = W_{1y}$

(4.23.a) $U'_{1x} + V'_{1y} + W'_{1z} = 0$

(4.23.b) $U'_{1T} + U'_0 U'_{1x} + \dfrac{P'_{1x}}{\varsigma} = 0$

(4.23.c) $P'_{1y} = P'_{1z} = 0$

(4.23.d) $U'_{1y} = U'_{1z} = 0 \quad , \; V'_{1z} = W'_{1y}$

(4.24.a) $V_1 A_y = W_1$ pour $Z = A(y)$, ou $W_1 B_z = V_1$ pour $y = B(z)$, $0 < Z < S_0$,

(4.24.b) $V'_1 A_y = W'_1$ pour $Z = A(y)$, ou $W'_1 B_z = V'_1$ pour $y = B(z)$, $S_0 < Z < S'_0$,

$$\left.\begin{array}{ll} (4.24.c) & S_{1T} + U_0 S_{1x} = W_1 \\ & \\ (4.24.d) & S_{1T} + U'_0 S_{1x} = W'_1 \end{array}\right\} \quad \text{pour } Z = S_0 \; ,$$

(4.24.e) $S'_{1T} + U'_0 S'_{1x} = W'_1$ pour $Z = S'_0$.

Les conditions dynamiques à l'interface et à la surface libre s'écrivent :

(4.25) $P_1 + S_1 P_{0Z} = P'_1 + S_1 P'_{0Z}$ pour $Z = S_0$,

(4.26) $P'_1 + S'_1 P'_{0Z} = 0$ pour $Z = S'_0$.

Les équations (4.22.c), (4.22.d), (4.23.c), (4.23.d) montrent que U_1 , U'_1 , P_1 et P'_1 ne sont fonctions que de X et de T .

Compte tenu de (4.9) l'équation (4.26) s'écrit :

(4.27) $$P'_1 = \mathcal{G}\, S'_1$$

Par suite, l'équation (4.25) s'exprime grâce à (4.10) par

(4.28) $$P_1 = S_1 + \mathcal{G}(S'_1 - S_1)$$

Ces deux équations montrent que S_1 et S'_1 ne sont fonctions que de X et de T .

En injectant (4.27) et (4.28) respectivement dans (4.22.b) et (4.23.b) on obtient :

(4.29) $$U_{1T} + U_0 U_{1X} + S_{1X} + \mathcal{G}\left(S'_1 - S_1\right)_X = 0$$

(4.30) $$U'_{1T} + U'_0 U'_{1X} + S'_{1X} = 0$$

On intègre les équations (4.22.a) et (4.23.a) respectivement sur Σ_0 et Σ'_0 comme pour l'ordre zéro. De là :

(4.31) $$S_{1T} + U_0 S_{1X} + C_0^2 U_{1X} = 0 ,$$

(4.32) $$S'_{1T} + U'_0 S'_{1X} - D_0\left(S_{1T} + U'_0 S_{1X}\right) + C'^2_0 U'_{1X} = 0 .$$

Les équations (4.29), (4.30), (4.31) et (4.32) permettent de calculer U_1, U'_1, S_1 et S'_1 qui sont les inconnues du mouvement longitudinal. Leurs courbes caractéristiques dans le plan (X , T) les mêmes que pour l'ordre zéro: elles sont définies par l'équation (4.16).

La condition d'écoulement permanent à l'ordre un est donnée également par (4.17.b).

Pour déterminer V_1 , W_1 , V'_1 et W'_1 nous introduisons les fonctions $\ell_1(y,z)$ et $\ell'_1(y,z)$ définies par (3.31).

Les équations (4.22.a) et (4.23.a) montrent que ℓ_1 et ℓ'_1 sont harmoniques.

Les conditions à la paroi solide, à l'interface et à la surface libre donnent :

(4.33.a) $\quad \ell_{1y} A_y = \ell_{1z} - A$ pour $z = A(y)$, ou $(\ell_{1z} - Z) B_z = \ell_{1y}$ pour $y = B(z)$, à $0 < Z < S_0$,

(4.33.b) $\quad \ell'_{1y} A_y = \ell'_{1z} - A$ pour $z = A(y)$, ou $(\ell'_{1z} - Z) B_z = \ell'_{1y}$ pour $y = B(z)$, à $S_0 < Z < S'_0$,

$$\left.\begin{array}{ll} (4.33.c) & U_{1X}(\ell_{1Z} - S_0) = S_{1T} + U_0 S_{1X} \\ (4.33.d) & U'_{1X}(\ell'_{1Z} - S_0) = S_{1T} + U'_0 S_{1X} \end{array}\right\} \text{pour } Z = S_0$$

(4.33.e) $\quad U'_{1X}(\ell'_{1Z} - S'_0) = S'_{1T} + U'_0 S'_{1X} \qquad$ pour $Z = S'_0$

<u>Exemple</u> : Section "puissance" en écoulement permanent, et telle que :

$$\rho \mu'_0 \Sigma'_0 = \Sigma_0 .$$

On obtient :

$$t_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\frac{z^2-y^2}{2} \quad , \qquad t'_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\frac{z^2-y^2}{2} \quad ,$$

d'où

$$V_1 = -\frac{\lambda U_{1x}}{\lambda+1}\, y \quad , \qquad W_1 = -\frac{U_{1x}}{\lambda+1}\, z \quad ,$$

$$V'_1 = -\frac{\lambda U'_{1x}}{\lambda+1}\, y \quad , \qquad W'_1 = -\frac{U'_{1x}}{\lambda+1}\, z \, .$$

Passons à l'approximation d'ordre deux.

Les équations générales, les conditions d'irrotationalité, les conditions cinématiques à la frontière solide, à l'interface et à la surface libre s'écrivent à l'ordre deux :

(4.34.a) $$U_{2x} + V_{2y} + W_{2z} = 0$$

(4.34.b) $$U_{2\tau} + U_0 U_{2x} + U_1 U_{1x} + P_{2x} = 0$$

(4.34.c) $$V_{1\tau} + U_0 V_{1x} + P_{2y} = 0$$

(4.34.d) $$W_{1\tau} + U_0 W_{1x} + P_{2z} = 0$$

(4.34.e) $$U_{2y} = V_{1x} \quad , \quad U_{2z} = W_{1x} \quad , \quad V_{2z} = W_{2y}$$

(4.35.a) $$U'_{2x} + V'_{2y} + W'_{2z} = 0$$

(4.35.b) $$U'_{2\tau} + U'_0 U'_{2x} + U'_1 U'_{1x} + \frac{P'_{2x}}{\rho} = 0$$

(4.35.c) $$V'_{1\tau} + U'_0 V'_{1x} + \frac{P'_{2y}}{\rho} = 0$$

$$W'_{1T} + U_0 W'_{1X} + \frac{P'_{2Z}}{\sigma} = 0 \tag{4.35.d}$$

$$U'_{2Y} = V'_{1X} \quad , \quad U'_{2Z} = W'_{1X} \quad , \quad V'_{2Z} = W'_{2Y} \tag{4.35.e}$$

$$V_2 A_Y = W_2 \quad \text{pour } Z = A(Y) \text{ , ou } W_2 B_Z = V_2 \quad \text{pour } Y = B(Z) \text{ , } 0 < Z < S_0 \text{ ,} \tag{4.36.a}$$

$$V'_2 A_Y = W'_2 \quad \text{pour } Z = A(Y) \text{ , ou } W'_2 B_Z = V'_2 \quad \text{pour } Y = B(Z) \text{ , } S_0 < Z < S'_0 \text{ ,} \tag{4.36.b}$$

$$S_{2T} + U_0 S_{2X} + U_1 S_{1X} = W_2 + S_1 W_{1Z} \tag{4.37.a}$$

$$S_{2T} + U'_0 S_{2X} + U'_1 S_{1X} = W'_2 + S_1 W'_{1Z} \tag{4.37.b}$$

pour $Z = S_0$,

$$S'_{2T} + U'_0 S'_{2X} + U'_1 S'_{1X} = W'_2 + S'_1 W'_{1Z} \qquad \text{pour } Z = S'_0 \text{ .} \tag{4.38}$$

Les conditions dynamiques à l'interface et à la surface libre sont :

$$P_2 + S_2 P_{0Z} = P'_2 + S_2 P'_{0Z} \qquad \text{pour } Z = S_0 \tag{4.39}$$

$$P'_2 + S'_2 P'_{0Z} = 0 \qquad \text{pour } Z = S'_0 \tag{4.40}$$

Compte tenu de (4.9), l'équation (4.40) donne

$$\sigma S'_2 = P'_2 \tag{4.41}$$

De même, grâce à (4.9) et (4.10), (4.39) donne :

$$(1-\sigma) S_2 = P_2 - P'_2 \tag{4.42}$$

Des équations (4.34.c), (4.34.d), (4.34.e), (4.35.c), (4.35.d), (4.35.e) on tire, compte tenu des résultats à l'ordre 1 :

(4.43.a) $$P_{2Y} = -\left(U_{1T} + U_0 U_{1X}\right)_X \zeta_{1Y} \quad ,$$

(4.43.b) $$P_{2Z} = -\left(U_{1T} + U_0 U_{1X}\right)_X \left(\zeta_{1Z} - Z\right) \quad ,$$

(4.43.c) $$U_{2Y} = U_{1XX}\, \zeta_{1Y} \quad ,$$

(4.43.d) $$U_{2Z} = U_{1XX} \left(\zeta_{1Z} - Z\right) \quad ,$$

(4.44.a) $$P'_{2Y} = -\delta \left(U'_{1T} + U'_0 U'_{1X}\right)_X \zeta'_{1Y} \quad ,$$

(4.44.b) $$P'_{2Z} = -\delta \left(U'_{1T} + U'_0 U'_{1X}\right)_X \left(\zeta'_{1Z} - Z\right) \quad ,$$

(4.44.c) $$U'_{2Y} = U'_{1XX}\, \zeta'_{1Y} \quad ,$$

(4.44.d) $$U'_{2Z} = U'_{1XX} \left(\zeta'_{1Z} - Z\right)$$

De là, on obtient par intégration :

(4.45) $$U_2 = U_{1XX} \left(\zeta_1 - \frac{Z^2}{2}\right) + L(X,T)$$

(4.46) $$P_2 = -\left(U_{1T} + U_0 U_{1X}\right)_X \left(\zeta_1 - \frac{Z^2}{2}\right) + M(X,T)$$

(4.47) $$U'_2 = U'_{1XX} \left(\zeta'_1 - \frac{Z^2}{2}\right) + L'(X,T)$$

(4.48) $$P'_2 = -\delta\left(U'_{1T} + U'_0 U'_{1X}\right)_X \left(\chi'_1 - \frac{Z^2}{2}\right) + M'(X,T)$$

L , M , L' , M' étant des fonctions arbitraires de X et de T .

4.3.- *ONDES INDEFORMABLES*

Puisque nous nous intéressons à la recherche de solutions d'ondes progressives indéformables à l'ordre 2, nous supposons comme en 3.4 que l'écoulement est permanent jusqu'à cet ordre.

Dans cette hypothèse et compte tenu de (4.45), (4.46), (4.47), (4.48); les équations (4.34.b) et (4.35.b) s'écrivent :

(4.49) $$U_0 L_X + M_X = -U_1 U_{1X}$$

(4.50) $$\delta U'_0 L'_X + M'_X = -U'_1 U'_{1X}$$

Des relations (4.39) et (4.40) on tire, compte tenu de (4.46), (4.48) et des résultats à l'ordre zéro :

(4.51) $$(1-\delta) S_2 = \delta U'_0 U'_{1XX} \left(\chi'_1 - \frac{S_0^2}{2}\right) - U_0 U_{1XX}\left(\chi_1 - \frac{S_0^2}{2}\right) + M - M'$$

pour $Z = S_0$,

et

(4.52) $$\delta S'_2 = -\delta U'_0 U'_{1XX}\left(\chi'_1 - \frac{S'^2_0}{2}\right) + M' \qquad \text{pour } Z = S'_0$$

A l'aide de (4.51) et (4.52), et des résultats à l'ordre 1, on peut écrire à la place de (4.37) et (4.38) :

(4.53) $$(1-\delta)W_2 = \delta U_0 U'_0 U'_{1XXX}\left(t'_1 - \frac{S_0^2}{2}\right) - U_0^2 U_{1XXX}\left(t_1 - \frac{S_0^2}{2}\right)$$

$$+ U_0(M-M')_X + (1-\delta)\left[(U_1 S_1)_X - S_1 U_{1X} t_{1ZZ}\right]$$

pour $Z = S_0$.

(4.54) $$(1-\delta)W'_2 = \delta U_0'^2 U'_{1XXX}\left(t'_1 - \frac{S_0^2}{2}\right) - U_0 U'_0 U_{1XXX}\left(t_1 - \frac{S_0^2}{2}\right)$$

$$+ U'_0(M-M')_X + (1-\delta)\left\{(U'_1 S_1)_X - S_1 U'_{1X} t'_{1ZZ}\right\} \quad \text{pour } Z = S_0,$$

(4.55) $$\delta W'_2 = -\delta U_0'^2 U'_{1XXX}\left(t'_1 - \frac{S_0'^2}{2}\right) + U'_0 M'_X + \delta\left[(U'_1 S'_1)_X - S'_1 U'_{1X} t'_{1ZZ}(Y, S'_0)\right]$$

pour $Z = S'_0$

On intègre les équations (4.34.a) et (4.35.a) respectivement sur Σ_0 et Σ'_0 comme pour l'ordre zéro.

Introduisons les quantités G_1 , G'_1 , G'_2 et G''_2 définies par :

(4.56) $$(B'_2 - B'_1)G_1 = \frac{U_0 U'_0}{1-\delta}\int_{B_1}^{B_2}\left[t_1(Y, S_0) - \frac{S_0^2}{2}\right]dY \quad ,$$

(4.57) $$(B'_2 - B'_1)G'_1 = \iint_{\Sigma'_0}\left(t'_1 - \frac{Z^2}{2}\right)dY\,dZ - U_0'^2\left\{\frac{\delta}{1-\delta}\int_{B_1}^{B_2}\left[t_1(Y, S_0) - \frac{S_0^2}{2}\right]dY\right.$$

$$\left. + \int_{B'_1}^{B'_2}\left[t'_1(Y, S'_0) - \frac{S_0'^2}{2}\right]dY\right\} ,$$

(4.58) $$\left(B_2' - B_1'\right) G_2' = \int_{B_1}^{B_2} \chi_{1ZZ}'(y, s_0)\, dy \quad ,$$

(4.59) $$\left(B_2' - B_1'\right) G_2'' = -\int_{B_1'}^{B_2'} \chi_{1ZZ}'(y, s_0')\, dy \; .$$

Compte tenu de (4.53), (4.54) et (4.55) on obtient les relations suivantes :

(4.60) $$U_0 (M - M')_X + (1 - \delta) C_0^2 L_X = (\delta - 1)\Big[(U_1 S_1)_X + \beta_1 U_{1XXX}$$

$$+ \beta_2' U_{1XXX}' + \gamma_1 S_1 U_{1X}\Big] \; ,$$

(4.61) $$\frac{D_0 U_0' M_X}{1 - \delta} - \left(\frac{D_0 U_0'}{1 - \delta} + \frac{U_0'}{\delta}\right) M_X' - C_0'^2 L_X' = (U_1' S_1')_X - D_0 (U_1' S_1)_X +$$

$$+ G_1 U_{1XXX} + G_1' U_{1XXX}' + G_2' S_1 U_{1X}' + G_2'' S_1' U_{1X}' \; ,$$

où β_1 , γ_1 , β_2' sont définis par (3.46), (3.48), (3.50).

Le déterminant principal du système d'équations (4.49), (4.50), (4.60) et (4.61) est :

$$\frac{C_0^2 C_0'^2}{1 - \delta} \left\{ D_0 (\mu_0' + 1) - \mu_0' \left(\frac{\mu_0}{\delta} + 1 \right) \right\}$$

et il est nul d'après (4.17.b).

La condition nécessaire d'existance d'un écoulement permanent à l'ordre deux est par conséquent que l'un des déterminants secondaires soit nul.

De là la condition :

(4.62) $$\frac{D_0 C_0^2 U_0'^2}{1-\delta}\alpha_1 + \left(\frac{U_0^2 C_0'^2}{1-\delta} - C_0^2 C_0'^2\right)\alpha_2 - \frac{D_0 U_0 U_0'^2}{1-\delta}\alpha_3 + \left(\frac{U_0^2 U_0'}{1-\delta} - C_0^2 U_0'\right)\alpha_4 = 0$$

où α_1 , α_2 , α_3 et α_4 sont respectivement les seconds membres de (4.49), (4.50), (4.60) et (4.61).

Compte tenu de (4.17.b) et des équations à l'ordre 1, on obtient à partir de (4.62) au terme d'un calcul fastidieux l'équation (3.60) qui définit les ondes progressives indéformables, avec cette fois :

(4.63) $$\mathbb{A} = C_0^2 C_0'^2 \left\{ \left(D_0 \delta + \left[\delta (D_0 - 1) + 1\right] \mu_0'\right) \mu_0' I_1 + \delta D_0 (\mu_0' + 1) J_1 \right\} ,$$

(4.64) $$\mathbb{B} = \frac{1}{\mu_0'} \left\{ \frac{C_0^2 C_0'^2}{6} (B_2 - B_1)^2 \left[(1-\delta) C_0^6 \mathcal{D}_0 \mu_0'^3 + \delta C_0'^6 \mathcal{D}_0'' (\mu_0' + 1)^3 \right] + \delta D_0 \mu_0' (\mu_0' + 1) \left[C_0'^2 \mu_0' - D_0 C_0^2 (\mu_0' + 1) \right] \right\} .$$

Dans ces relations $\mathcal{D}_0$, I_1 , J_1 sont définis par (3.58), (3.63), (3.64) et $\mathcal{D}''_0$ est la dérivée fondamentale définie par :

(3.65) $$\mathcal{D}''_0 = \frac{\partial^2}{\partial S_0'^2}\left(\frac{1}{\Sigma_0'^2}\right)$$

Etudions le signe de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{B}$.

Dans la formule (3.63), le coefficient de J_1 est positif. Il en est de même du coefficient de I_1 compte tenu de (4.17.b).

Par conséquent :

$$\mathbb{A} \geq 0$$

Le signe de $\mathbb{B}$ dépend de la forme du canal, du rapport des masses volumiques ς , et du nombre de Fronde F_0 (ou F_0'). Si $\mathbb{B}$ est positif, les ondes obtenues dans le fluide lourd correspondent au cas de la figure (3.4.a). Par contre, si $\mathbb{B}$ est négatif; on se trouve dans le cas de la figure (3.5.a).

En ce qui concerne le fluide léger, comme :

$$S'_{1X}\left(F_0'^2 - 1\right) = D_0 F_0'^2 S_{1X} \, ,$$

l'interface et la surface libre présentent deux bosses ou deux creux si $F_0' > 1$.

Par contre, pour $F_0' < 1$, à une bosse dans l'un des fluides correspond un creux dans l'autre. En particulier, en écoulement plan, nous retrouvons les résultats de DYMENT [15].

Si en plus, on fait $\varsigma = 0$, on tombe sur les résultats de KELLER [13].

Exemple : pour une section "puissance" définie par (2.21):

$$(B_2 - B_1)^2 \mathcal{D}_0 = \frac{2(\lambda+1)^3(2\lambda+3)}{S_0^4}$$

$$(B'_2 - B'_1)^2 \mathcal{D}''_0 = \frac{2(\lambda+1)^3\left[\left(2+\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\right)\lambda+3\right]}{S_0'^4\left(1-\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\right)^4},$$

Par suite :

$$\mathbb{B} = \frac{S'_0}{3(\lambda+1)^2}\left\{(1-\delta)(2\lambda+3)\left[1-\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\right]\mu_0'^2 + \delta\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\cdot\left[\lambda\left(2+\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+3\right]\frac{(\mu'_0+1)^3}{\mu'_0}\right\} + S_0'\delta\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda}\frac{\mu'_0+1}{\lambda+1}\left\{\left[1-2\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\right]\mu'_0 - 2\left(\frac{S_0}{S'_0}\right)^{\lambda+1}\right\}$$

On trouvera sur les Planches 6.a, b, c, les courbes représentatives de $\mathbb{B}/S'_0$ en fonction de $\frac{S_0}{S'_0}$ pour différentes valeurs des paramètres δ, μ'_0 et λ .

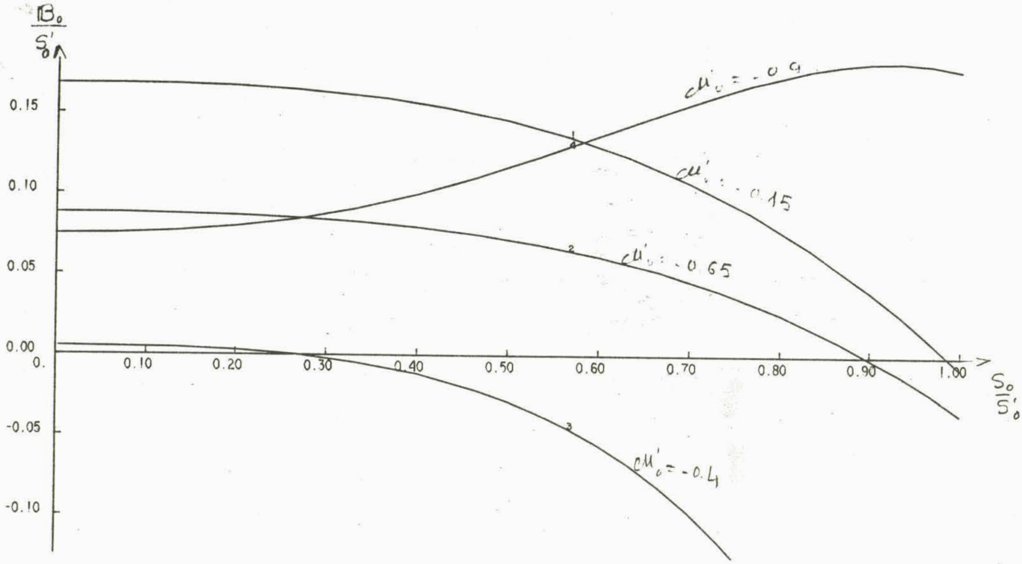


Planche 6.a : $\delta = 0.2$, $\lambda = 2$

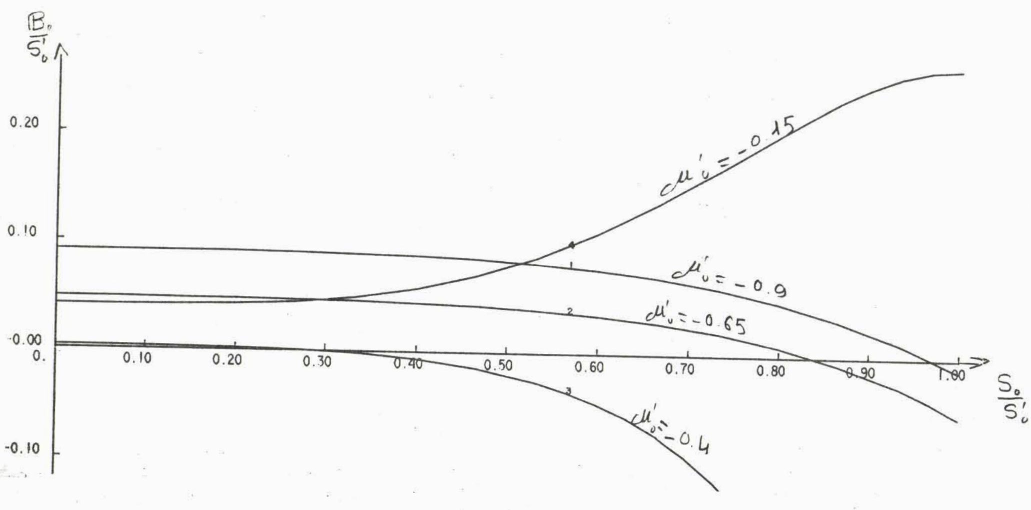


Planche 6.b : $\delta = 0.4$, $\lambda = 0.3$

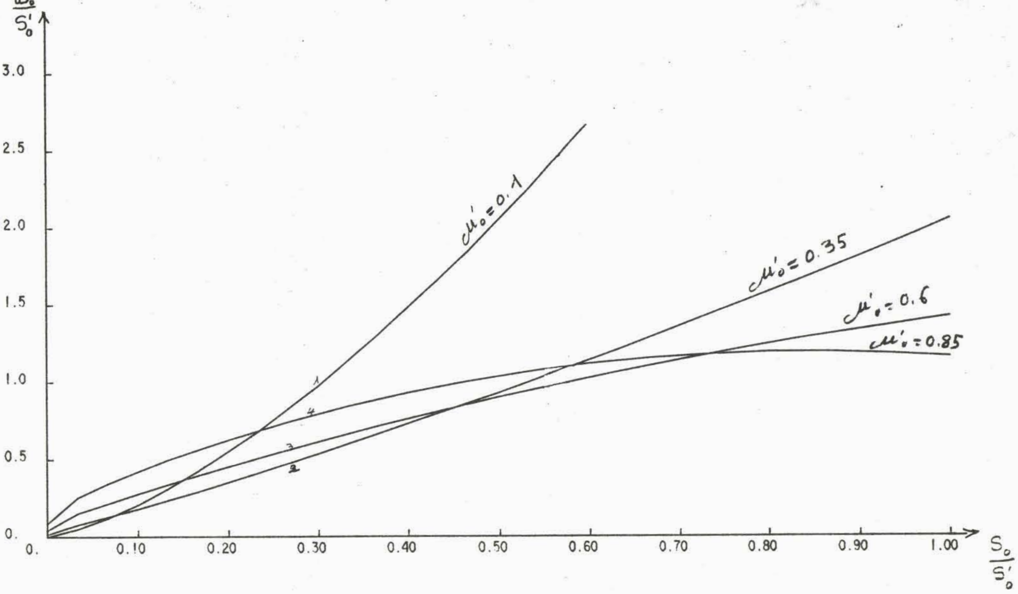


Planche 6.c : $\delta = 0.8$, $\lambda = 0.5$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DYMENT : Phénomènes exceptionnels de propagation d'ondes de pesanteur dans un canal (J.de Mécanique, vol.20, n° 1, 1981, pp. 59-78).

[2] A. DYMENT et LOFFICIAL : Phénomènes exceptionnels de propagation d'ondes de pesanteur, avec frottement, dans un canal cylindrique de section quelconque et de pente constante (C.A.N.C.A.M., Juin 1981).

[3] BOULOT, BRACONNOT et MARVAUD : Détermination numérique des mouvements d'un coin salé (La Houille Blanche, n° 8, 1967).

[4] ROUSE : Engineering Hydraulics, Wiley, 1967.

[5] G.K. MORIKAWA : Non linear diffusion of flood waves in rivers (Com. Pure Appl. Math., vol. 10, 1957, p. 294-303).

[6] CHU, V.H.T. BADDOUR, R.E. : 1977, Surges, waves and mixing in two layer density stratified flow(Int.Proc. 17th Congr. I.N.T.L. Assn Hydraul. Res., vol. 1, pp. 303-310.

[7] A. DYMENT : Sur quelques phénomènes exceptionnels de propagation d'ondes de pesanteur dans un canal (Thèse, Université de Lille, 1970).

[8] S.C. MEHROTRA and R.E. KELLY : On the question of non uniqueness of internal Hydraulic Jumps and drops in two-fluid system (Tellus, vol. 25, n° 6, 1973, pp. 560-567).

[9] S.C. MEHROTRA : Limitations on the existence of shock solutions in a two fluid system (Tellus, vol. 25, n° 3, 1973, pp. 358-366).

[10] JOSEPH H.W. LEE, A.M. ASCE : Internal Hydraulic Jump in Stratified Counterflow (Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 108, EM 5, 1982, pp. 986-990).

[11] CHIA-SHUN YIH and C.R. GUHA : Hydraulic Jump in a fluid system of two layers (Tellus, vol. 7, n° 3, 1955, pp. 358-366).

[12] Robert F. DRESSLER : Mathematical solution of the problem of Roll-waves in inclined open channels (com. on Pure and applied Mathematics, vol. 2, 1949, pp. 149-194).

[13] Joseph B. KELLER : The solitary wave and periodic waves in shallow water (Com. on Pure and Applied Mathematics, vol. 1, n° 4, 1948, pp. 323-339).

[14] P.F. BYRD and MD. FRIEDMAN : Handbook of elliptic integrals for Engineers and Physicists (Springer, Berlin, 1954).

[15] A. DYMENT : Sur les ondes de pesanteur permanents à l'approximation d'ordre 2 dans un écoulement plan sur fond horizontal de deux liquides non miscibles (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 267, Série A, 1968, p. 839).

[16] J.D. FENTON : Cnoïdal waves and bores in uniform channels of arbitrary cross-section (J. Fluid Mech. (1973), vol. 58, part 3, pp. 417-434).

[17] Robert R. LONG : Solitary waves in the one-and two-Fluid Systems. (Tellus 8, 460-471).

[18] M. LOFFICIAL : Sur les écoulements avec surface libre d'un fluide barotrope pesant (Thèse, Université de Lille, 1973).

[19] KEULEGAN, G.H. : Characteristics of internal solitary waves (J. Res. Nat. Bur. Stand., 51, pp. 133-140, 1953).

[20] KAKUTANI, T. and YAMASAKI, N. : Solitary waves on a two-layer Fluid. (J. Phys. soc. Jpn., 45, pp. 674-679, 1978).

[21] I.V. GAVRILOV : Solitary internal waves in a two-layer liquid with a free surface (Fluid Mechanics - Soviet Research, Vol. 12, N° 4, 1983).

[22] PETERS, A.S., STOKER, J.J. : Solitary waves in liquids having nonconstant density (Com. on Pure and Applied Mathematics, vol. 13, 1960, pp. 115-164).

[23] John W. MILES : Solitary waves (Ann. Rev. Fluid Mech. 1980, vol. 12, pp. 11-43).

[24] R.H.J. GRIMSHAW : Long non linear internal waves in channel of arbitrary cross-section (J. Fluid Mech. 1978, vol. 86, part 3, pp. 415-431).

[25] A. BOUDLAL et A. DYMENT : Ondes de crue et ondes périodiques avec discontinuités dans une canalisation cylindrique, quasi-horizontale, contenant deux fluides non miscibles (comptes-rendus Ac. Sces. A paraître).

[26] A. DYMENT et A. BOUDLAL : Ondes cnoïdales et ondes solitaires dans une conduite cylindrique horizontale contenant deux fluides stratifiés non miscibles (comptes-rendus Ac. Sces. A paraître).

MOTS CLES

ECOULEMENTS STRATIFIES DANS UNE CANALISATION OU UN CANAL.

ONDES DE CRUE EN CANALISATION.

ONDES PERIODIQUES AVEC DISCONTINUITES EN CANALISATION.

ONDES CNOIDALES ET SOLITAIRES EN CANALISATION.

RESUME

On construit des solutions nouvelles d'ondes progressives faiblement non linéaires pour deux fluides pesants stratifiés soit dans une conduite fermée, soit dans un canal ouvert à l'atmosphère. Pour des conduites de faible pente et en tenant compte du frottement on trouve des solutions d'ondes progressives continues, dites ondes de crue, et d'ondes périodiques avec discontinuités.

Dans le cas des écoulements sans frottement dans les conduites cylindriques horizontales, puis dans les canaux ouverts à l'atmosphère, une méthode de perturbation par rapport à un petit paramètre, caractéristique de la distorsion géométrique du domaine d'écoulement, est mise en oeuvre en prenant pour solution de base un écoulement uniforme. On calcule les approximations d'ordre un et deux et on montre l'existence d'ondes progressives indéformables de type cnoïdal, et d'ondes solitaires.