THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3EME CYCLE
Spécialité : Mathématiques Pures

par

LHACHEMI Mohamed

FORMES QUADRATIQUES ET ALGEBRES DE QUATERNIONS SUR CERTAINS CORPS DE CARACTERISTIQUE 2.

Membres du Jury : ZINN-JUSTIN Nicole, Présidente
LEGRAND Solange, Rapporteur
DIERS Yves, Examinateur

Soutenue le 26 JUIN 1986

à la mémoire de ma grand-mère,

à ma mère et Karima qui ont tant sacrifié pour mes études,

à mes biens aimés Khadija, Adiba, Badia, Charaf et Michèle.

Je tiens à exprimer ici mes remerciements à Solange Legrand qui a dirigé mes premiers pas dans la recherche mathématique et pour l'aide qu'elle m'a apportée tout au long de ce travail. Je lui réserve toute ma gratitude et mon respect.

Je remercie également Nicole Zinn-Justin d'avoir bien voulu juger ce travail, ainsi que Yves Diers d'avoir accepter de participer au jury.

Raymonde Bérat a dactylographié ce travail avec patience, soin et rapidité, je la remercie vivement, ainsi que les services de l'imprimerie de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université de Lille Flandes Artois.

INTRODUCTION

Dans son article "Quadratic forms 'à la' Local Theory" [4], FROHLICH donne une axiomatisation des corps (de caractéristique $\neq 2$) qui possèdent une théorie de formes quadratiques analogue à celle des nombres p-adiques ou à celle des nombres réels. Son axiome est que pour chaque discriminant d différent de -1, il existe deux classes d'équivalence de formes quadratiques binaires régulières de discriminant d.

Une généralisation a été donnée par KAPLANSKY [5], pour les corps de caractéristique $\neq 2$ et il a posé le problème pour un corps de caractéristique 2 de savoir s'il existe à isomorphisme près une unique algèbre de quaternions de division lorsque pour chaque invariant de Arf d différent de 0, il existe au plus deux classes d'équivalence de formes quadratiques binaires totalement régulières d'invariant de Arf d et exactement deux classes pour un d_0 au moins. Sous l'hypothèse qu'il existe exactement deux classes d'équivalence de formes quadratiques binaires totalement régulières pour chaque invariant de Arf différent de 0, DRAXL [2] a répondu à la question dans ce cas plus restreint.

Dans notre étude, on essaie de voir d'une façon directe le problème de KAPLANSKY. Les résultats obtenus correspondent entièrement aux résultats déjà connus dans le cas de caractéristique $\neq 2$, [5]. On procède comme suit :

Dans la première partie, on rappelle la définition des algèbres de quaternions en caractéristique 2 et des formes quadratiques quaternaires concrètes totalement régulières associées à chaque algèbre de quaternions.

On montre que deux algèbres de quaternions sont isomorphes si et seulement si les formes quadratiques associées à ces algèbres sont équivalentes.

Dans la deuxième partie, on définit un corps de Hilbert généralisé comme étant un corps de caractéristique 2 vérifiant les conditions ci-dessus données par KAPLANSKY. On voit que sur un tel corps toute forme quadratique quaternaire totalement régulière est universelle. A l'aide de ceci, on montre qu'un corps de caractéristique 2 est de Hilbert généralisé si et seulement si, il existe une seule algèbre de quaternions de division à isomorphisme près sur ce corps ; ce qui est équivalent à l'existence à équivalence près d'une forme quadratique quaternaire totalement régulière anisotrope unique d'invariant de Arf nul. On donne aussi une condition nécessaire et suffisante pour que sur un corps de Hilbert généralisé toute forme quadratique quaternaire totalement régulière d'invariant de Arf non nul, soit isotrope.

Dans la troisième partie, on utilise des propositions démontrées dans les parties précédentes pour donner une réponse dans le cas de corps de caractéristique 2 à une question posée par P. Draxl dans [2] : Pour quels corps K non parfaits a-t-on le théorème "le produit tensoriel de deux K-algèbres de quaternions n'est pas de division si et seulement si ces K-algèbres possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K".

PLAN

§ 1 - ALGEBRES DE QUATERNIONS.

§ 2 - CORPS DE HILBERT GENERALISE DE CARACTERISTIQUE 2.

§ 3 - SUR UN THEOREME DE DRAXL.

BIBLIOGRAPHIE

§ 1 - ALGEBRES DE QUATERNIONS.

Rappel de définitions et compléments.

Dans toute la suite, K est un corps de caractéristique 2. Les notations sont en général celles de DRAXL [2].

L'endomorphisme du groupe additif K défini par $x \to x^2 + x$ est noté $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}K$ désigne l'image de K par $\mathcal{P}$.

A chaque $\alpha \in K$, on associe une K-algèbre commutative de dimension 2 de base $\{1,\omega\}$:

$$K_\alpha = K \oplus K\omega$$

munie de la multiplication déterminée par la condition : $\omega^2 = \omega + \alpha$, c'est-à-dire $\mathcal{P}\omega = \alpha$.

K_α est un corps exactement pour $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$ et l'application $S : \omega \to \omega+1$ induit sur K un automorphisme involutif de K-algèbre.

On définit maintenant pour $\beta \in K^* = K - \{0\}$ et $\alpha \in K$, une K-algèbre de dimension 4 par :

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] = K_\alpha \oplus K_\alpha u$$

avec la multiplication déterminée par les conditions :

$$u^2 = \beta \quad \text{et} \quad ua = S(a)u \quad \text{pour tout} \quad a \in K_\alpha.$$

Alors $1, \omega, u, \omega u$ forment une base de $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ sur K.

On étend l'involution S de K_α à l'algèbre entière par l'identité sur $K_\alpha u$, on définit ainsi un antiautomorphisme - de K-algèbre.

Définition 1.1 - On appelle K-algèbre de quaternions, toute K-algèbre de la forme $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$.

On pose maintenant $v = \omega u$, alors les vecteurs 1, u, v et uv sont linéairement indépendants sur K et on a :

$$(1) \qquad u^2 = \beta, \quad v^2 = \alpha\beta \quad \text{et} \quad uv + vu = \beta.$$

La multiplication dans notre algèbre est alors complètement déterminée par (1) et on a :

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = v \quad \text{et} \quad \overline{uv} = \beta + uv.$$

Si $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$, soit $\alpha = \gamma^2 + \gamma$ avec $\gamma \in K$. Les deux matrices $u = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 & \beta(\gamma+1) \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ vérifient la règle (1), c'est-à-dire qu'on a :

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong M_2(K).$$

Si par contre $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$, K_α est une extension quadratique séparable de K et $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est isomorphe à l'algèbre croisée $(K_{\alpha/K}, S, \beta)$.

Donc $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est une K-algèbre centrale simple de dimension 4 sur K. Inversement, on montre que toute K-algèbre centrale simple de dimension 4 est une K-algèbre de quaternions au sens de la définition 1.1, ([3], p. 103).

Remarque : L'algèbre $\left(\frac{1,\alpha}{K}\right]$ est isomorphe à $M_2(K)$.

Soit $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ une K-algèbre de quaternions, on pose :

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]_0 = \{q \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \; : \; \bar{q} = q\}.$$

Lemme 1.2 - Pour tout $q \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$, les énoncés suivants sont équivalents :

i) $\bar{q} = q$

ii) $q^2 \in K$

iii) $q \in K \oplus K_\alpha u$

Preuve :

Soit $q = (a+b\omega) + (c+d\omega)u$ un élément de $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$.

On a $\bar{q} = b + q$ et

$q^2 = a^2 + \alpha b^2 + \beta(c^2+cd+\alpha d^2) + b[b\omega+cu+d\omega u]$.

Les équivalences énoncées résultent alors de ces faits. ∎

Proposition 1.3 - Pour tout isomorphisme de K-algèbres de quaternions ψ de A dans A', on a $\psi(A_0) = A'_0$. En particulier, A_0 est stable par tout automorphisme de A.

La preuve est immédiate à partir du lemme 1.2 précédent.

Définition 1.4 - A chaque $q = a + b\omega + cu + d\omega u \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$, on fait correspondre l'élément

$$n(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = (a^2+ab+\alpha b^2) + \beta(c^2+cd+\alpha d^2).$$

La forme quadratique n ainsi définie est appelée norme.

L'application définie par :

$$(a,b,c,d) \to (a^2+ab+\alpha b^2) + \beta(c^2+cd+\alpha d^2)$$

est une K-forme quadratique quaternaire concrète totalement régulière associée à l'algèbre $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et à la base choisie.

On la note $(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2)$.

Il est clair que l'algèbre de quaternions $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est de division si et seulement si la forme n est anisotrope.

Pour tout $q = a + (c+d\omega)u \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]_0$, on a

$n(q) = q^2 = a^2 + \beta(c^2+cd+\alpha d^2)$.

Donc n induit une forme quadratique ternaire concrète régulière sur l'espace vectoriel $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]_0$; par restriction.

Remarque : Dans tout ce qui suit, quand une algèbre de quaternions est considérée comme espace quadratique ; c'est relativement à la norme associée ci-dessus et il en est de même pour son sous-espace vectoriel des éléments invariants par l'involution.

Proposition 1.5 - Soient A et A' deux K-algèbres de quaternions. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A et A' sont isomorphes comme K-algèbres.

ii) A et A' sont isométriques comme K-espaces quadratiques.

iii) A_0 et A'_0 sont isométriques comme K-espaces quadratiques.

Preuve :

Soit $A = \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ dont $1, u, v, uv$ est une base sur K vérifiant :

$$u^2 = \beta,\quad v^2 = \alpha\beta \quad \text{et} \quad uv + vu = \beta,$$

et soit $A' = \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$ dont $1, u', v', u'v'$ est une base sur K vérifiant :

$$u'^2 = \beta',\quad v'^2 = \alpha'\beta' \quad \text{et} \quad u'v' + v'u' = \beta'.$$

Soient n et n' les formes normes associées à A et A' respectivement.

i) $\Longrightarrow$ ii)

Soit φ un K-isomorphisme d'algèbres de A dans A'. On veut montrer que pour tout $q \in A$: $n'(\varphi(q)) = n(q)$.

Pour cela, soit $q = q_0 + auv \in A$ avec $q_0 \in A_0$ et $a \in K$.

D'après la proposition 1.3, on a $\psi(q_0) \in A'_0$ donc $\overline{\psi(q_0)} = \psi(q_0)$, par suite :

$$\overline{\psi(q)} = \psi(q_0) + a\overline{\psi(uv)}.$$

D'autre part, $\bar{q} = q_0 + a\overline{uv}$ et compte tenu du fait que $\overline{uv} = \beta + uv$, on a :

$$\psi(\bar{q}) = \psi(q_0) + a(\beta + \psi(uv)).$$

Montrons que $\overline{\psi(uv)} = \beta + \psi(uv)$.

Il existe $p'_0 \in A'_0$ et $b \in K$ tels que $\psi(uv) = p'_0 + bu'v'$. Mais comme $uv \notin A_0$, on a $\psi(uv) \notin A'_0$ par conséquent on a $b \neq 0$.

$$\overline{\psi(uv)} = p'_0 + b\,\overline{u'v'} = p'_0 + b(\beta' + u'v')$$

(2) $\overline{\psi(uv)} = b\beta' + \psi(uv)$

(3) $(\overline{\psi(uv)})^2 = b^2\beta'^2 + (\psi(uv))^2$.

Comme $(uv)^2 = \alpha\beta^2 + \beta uv$, on a :

(4) $(\psi(uv))^2 = \alpha\beta^2 + \beta\psi(uv)$.

En substituant dans (3), on obtient :

(5) $(\overline{\psi(uv)})^2 = b^2\beta'^2 + \alpha\beta^2 + \beta\psi(uv)$.

De (4), on obtient directement :

$(\overline{\psi(uv)})^2 = \alpha\beta^2 + \beta\overline{\psi(uv)}$,

ou encore, compte tenu de (2) :

(6) $(\overline{\psi(uv)})^2 = \alpha\beta^2 + \beta\beta' b + \beta\psi(uv)$.

En comparant (5) et (6), il en résulte que

$b^2\beta'^2 + b\beta'\beta = 0$ avec $b, \beta, \beta' \in K^*$.

On divise par β^2, on obtient :

$$\left(\frac{b\beta'}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{b\beta'}{\beta}\right) = 0.$$

Puisque $\frac{b\beta'}{\beta} \neq 0$, on a $\frac{b\beta'}{\beta} = 1$ donc $b\beta' = \beta$.

Il en découle que $\overline{\varphi(uv)} = \beta + \varphi(uv)$. Par suite, $\overline{\varphi(q)} = \varphi(\bar{q})$ pour tout $q \in A$. Finalement, pour tout $q \in A$ on a :

$$n'(\varphi(q)) = \varphi(q)\overline{\varphi(q)} = \varphi(q)\varphi(\bar{q}) = \varphi(q\bar{q}) = \varphi(n(q))$$

$$n'(\varphi(q)) = n(q)\varphi(1) = n(q).$$

Ainsi φ est une isométrie de A sur A'.

ii) $\Longrightarrow$ i)

Supposons A et A' isométriques.

Soient $x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2 + \beta(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2)$

$x_1^2 + x_1y_1 + \alpha' y_1^2 + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2)$

représentant respectivement les normes n et n'.

Les K-algèbres de Clifford $C(A)$, $C(A')$ associées respectivement à A et A' sont isomorphes ([1]), avec

$$C(A) \cong \left(\frac{1,\alpha}{K}\right] \underset{K}{\otimes} \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong M_2(K) \underset{K}{\otimes} A \cong M_2(A)$$

et $$C(A') \cong \left(\frac{1,\alpha'}{K}\right] \underset{K}{\otimes} \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right] \cong M_2(K) \underset{K}{\otimes} A' \cong M_2(A').$$

Donc $M_2(A) \cong M_2(A')$ et puisque A et A' sont de même dimension 4 sur K, il en résulte que A et A' sont isomorphes comme K-algèbres ([3], p. 60).

i) $\Longrightarrow$ iii)

Soit φ un K-isomorphisme d'algèbres de quaternions de A dans A'. D'après la proposition 1.3, on $\varphi(A_o) = A'_o$. Donc φ induit un isomorphisme de K-espaces vectoriels de A_o sur A'_o.

De plus, $n'(\psi(q)) = n(q)$ pour tout $q \in A_0$.

D'où, A_0 et A'_0 sont isométriques.

iii) $\Longrightarrow$ i)

Soit ψ_0 une isométrie de A_0 sur A'_0. Donc pour tout $q \in A_0$, on a :

$$n'(\psi_0(q)) = n(q) \quad \text{avec} \quad n'(\psi_0(q)) = (\psi_0(q))^2 \quad \text{et} \quad n(q) = q^2.$$

En particulier, on a :

$$n'(\psi_0(u)) = (\psi_0(u))^2, \quad n(u) = u^2 = \beta$$

$$n'(\psi_0(v)) = (\psi_0(v))^2, \quad n(v) = v^2 = \alpha\beta$$

$$\begin{aligned} n'(\psi_0(u+v)) &= (\psi_0(u+v))^2 \\ &= (\psi_0(u))^2 + (\psi_0(v))^2 + \psi_0(u)\psi_0(v) + \psi_0(v)\psi_0(u) \end{aligned}$$

et $n(u+v) = (u+v)^2 = u^2 + v^2 + uv + vu.$

Il en résulte que :

(7) $$\psi_0(u)^2 = \beta, \quad \psi_0(v)^2 = \alpha\beta \quad \text{et} \quad \psi_0(u)\psi_0(v) + \psi_0(v)\psi_0(u) = \beta \quad \text{dans } A'.$$

Montrons que $1, \psi_0(u), \psi_0(v), \psi_0(u)\psi_0(v)$ sont linéairement indépendants sur K.

En effet, supposons que pour a, b, c, d dans K ; on a :

(8) $$a + b\,\psi_0(u) + c\,\psi_0(v) + d\,\psi_0(u)\psi_0(v) = 0.$$

Multiplions à droite par $\psi_0(u)$ et à gauche par $\psi_0(u)$, on obtient respectivement :

$$\beta b + a\psi_0(u) + \beta d\psi_0(v) + c\psi_0(u)\psi_0(v) = 0 \quad \text{et}$$

$$(b+c)\beta + (a+d\beta)\psi_0(u) + \beta d\psi_0(v) + c\psi_0(u)\psi_0(v) = 0.$$

Par addition, on trouve que :

$\beta(c+d\psi_0(u)) = 0.$

Comme on a $\beta \neq 0$, alors $c+d\psi_0(u) = 0$ dans A'_0. Puisque les vecteurs 1, $\psi_0(u)$, $\psi_0(v)$ sont linéairement indépendants sur K, on a : $c = d = 0$. On porte dans (8) pour avoir $a + b\psi_0(u) = 0$. Ce qui entraîne que $a = b = 0$.

Il en résulte que 1, $\psi_0(u)$, $\psi_0(v)$, $\psi_0(u)\psi_0(v)$ forment une base de A' sur K, vérifiant les conditions (7).

On définit l'isomorphisme ψ de A sur A' prolongeant ψ_0, par $\psi_{/A_0} = \psi_0$ et $\psi(uv) = \psi_0(u)\psi_0(v)$.

D'où A et A' sont isomorphes comme K-algèbres. ■

§ 2 - CORPS DE HILBERT GENERALISE DE CARACTERISTIQUE 2.

Soit $F = \sum_{i=1}^{r} (a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2)$ avec $b_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.

On associe à la classe d'équivalence de F deux invariants :

1) L'invariant de Arf qui est la classe mod $\mathcal{P}K$ de $\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$.

On notera souvent ΔF l'expression $\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$.

2) La classe d'isomorphisme des algèbres de Clifford de F. On notera souvent $C(F)$ une de ces algèbres de Clifford, avec

$$C(F) \cong \bigotimes_{i=1}^{1} \left(\frac{a_i, a_i c_i b_i^{-2}}{K}\right] ;$$

Ces invariants ne dépendent en fait que de la classe d'équivalence de F ([1]).

Les formes quadratiques binaires d'invariant de Arf 0 (mod $\mathcal{P}K$) sont toutes équivalentes à la forme quadratique xy ([1], corollaire 2 du théorème 3).

On étudie les formes quadratiques binaires d'invariant de Arf $\neq 0$ (mod $\mathcal{P}K$).

Soit $\varphi \cong ax^2 + bxy + cy^2$ avec $b \neq 0$. On peut toujours supposer $a \neq 0$, ce qui peut être obtenu par l'une des deux transformations $x' = y$, $y' = x$ ou $x' = x$ et $y' = x + y$.

Donc $\varphi \cong a(x^2 + \frac{b}{a} xy + \frac{c}{a} y^2) \cong a(x^2 + xy + \frac{ac}{b^2} y^2)$ ceci en substituant y à $\frac{a}{b} y$, de plus $\Delta\varphi = \frac{ac}{b^2}$.

D'une autre manière, $\varphi \cong aN_{K(\omega)/K}(x+y\omega)$ où $K(\omega)$ est une extension propre de K de polynôme minimal $T^2 + T + \frac{ac}{b^2}$ et $N_{K(\omega)/K}$ désigne la norme de cette extension au sens usuel

$$N_{K(\omega)/K}(x + y\omega) = (x + y\omega)(x + y(1+\omega)).$$

Soient $\bar{K}$ une clôture séparable de K, ω et ω' dans $\bar{K}$ vérifiant $\mathcal{P}\omega \equiv \mathcal{P}\omega'$ (mod $\mathcal{P}K$) avec $\mathcal{P}\omega = \alpha$, $\mathcal{P}\omega' = \alpha'$ et $\alpha \not\equiv 0$ (mod $\mathcal{P}K$). Prenons les formes quadratiques :

$$\varphi \cong \beta(x^2 + xy + \alpha y^2) \quad \text{et} \quad \varphi' \cong \beta'(x^2 + xy + \alpha' y^2)$$

où β, $\beta' \in K^*$.

Les formes φ et φ' ont le même invariant de Arf : α(mod $\mathcal{P}K$).

Proposition 2.1 - Les formes quadratiques binaires φ et φ' sont équivalentes si et seulement si, il existe λ, $\mu \in K$ tels que $\beta = \beta' N_{K(\omega')/K}(\lambda+\mu\omega')$.

Preuve :

($\Rightarrow$) On suppose les formes φ et φ' équivalentes, donc φ' représente β et comme $\varphi' \cong \beta' N_{K(\omega')/K}(x+y\omega')$.

Il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $\beta = \beta' N_{K(\omega')/K}(\lambda+\mu\omega')$.

(<=) Supposons que $\beta = \beta' N_{K(\omega')/K}(\lambda+\mu\omega')$ avec $\lambda,\mu \in K$.
On a $\alpha \equiv \alpha' (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}K)$, donc il existe $\rho \in K$ tel que $\omega = \omega' + \rho$.

$$\begin{aligned} N_{K(\omega)/K}(x+y\omega) &= (x+y\omega)(x+y(1+\omega)) \\ &= (x+y(\omega'+\rho))(x+y(1+\rho+\omega')) \\ &= N_{K(\omega')/K}((x+\rho y)+y\omega'). \end{aligned}$$

Donc $\psi \cong \beta N_{K(\omega)/K}(x+y\omega)$

$\psi \cong \beta' N_{K(\omega')/K}((\lambda+\mu\omega')((x+\rho y)+y\omega'))$.

D'où :

$$\psi \cong \beta' N_{K(\omega')/K}\left[(\lambda x+(\lambda\rho+\mu\alpha')y) + (\mu x+(\lambda+\mu+\mu\rho)y)\omega'\right].$$

Par suite, ψ provient de ψ' par la transformation

$x \longrightarrow \lambda x + (\lambda\rho+\mu\alpha')y$

$y \longrightarrow \mu x + (\lambda+\mu+\mu\rho)y$.

D'où $\psi \cong \psi'$. ■

On note $N(2,\alpha)$ le nombre des classes d'équivalence des formes quadratiques binaires totalement régulières dont l'invariant de Arf est $\alpha(\mathrm{mod}\ \mathcal{P}K)$. Il résulte de la proposition 2.1 que $N(2,\alpha)$ est exactement le nombre des classes de $K^*/(N_{K_\alpha/K}(K_\alpha^*))$; c'est-à-dire :

$N(2,\alpha) = \left[K^* : N_{K_\alpha/K}(K_\alpha^*)\right]$ dans le cas $\alpha \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}K)$

$N(2,\alpha) = 1$ dans le cas $\alpha \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{P}K)$.

Donnons une définition suggérée par KAPLANSKY pour prolonger celle de FROHLICH.

Définition 2.2 - Un corps K est dit de Hilbert généralisé, si pour toute extension quadratique séparable K_α de K avec $\alpha \in K$, on a $\left[K^* : N_{K_\alpha/K}(K_\alpha^*)\right] \leqslant 2$ avec l'égalité pour au moins un $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$.

Il est clair que K est un corps de Hilbert généralisé si et seulement si pour chaque $\alpha \in K$ il existe au plus deux classes d'équivalence de formes quadratiques binaires totalement régulières d'invariant de Arf $\alpha \pmod{\mathcal{P}K}$ avec exactement deux classes pour au moins un $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$.

Proposition 2.3 - Sur un corps de Hilbert généralisé, toute forme quadratique quaternaire totalement régulière est universelle.

Preuve :

Soit F une telle forme quadratique, $F \cong \varphi + \Psi$ où φ et Ψ sont deux formes quadratiques binaires totalement régulières avec $\Delta(F) \equiv \Delta(\varphi) + \Delta(\Psi) \pmod{\mathcal{P}K}$.

Soient $\alpha \equiv \Delta(\varphi)$ et $\alpha' \equiv \Delta(\Psi) \pmod{\mathcal{P}K}$.

On va distinguer deux cas :

i) On suppose $\Delta(F) \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$.

Donc $\alpha \not\equiv \alpha' \pmod{\mathcal{P}K}$.

Si $N(2,\alpha) = 1$ ou $N(2,\alpha') = 1$, alors φ ou Ψ est universelle. Donc F est universelle.

Supposons $N(2,\alpha) = N(2,\alpha') = 2$. Posons $N_\alpha = N_{K_\alpha/K}(K_\alpha^*)$, $N_{\alpha'} = N_{K_{\alpha'}/K}(K_{\alpha'}^*)$ et soient $\beta, \beta' \in K^*$ tels que $\beta \notin N_\alpha$ et $\beta' \notin N_{\alpha'}$.

Alors $\{N_\alpha, \beta N_\alpha\}$ et $\{N_{\alpha'}, \beta' N_{\alpha'}\}$ sont deux partitions de K^*.

Il résulte de ces hypothèses que les deux classes d'équivalence de formes quadratiques binaires totalement régulières d'invariant de Arf $\alpha (\mathrm{mod}\, \mathcal{P}K)$ (respectivement $\alpha' (\mathrm{mod}\, \mathcal{P}K)$), sont celles des formes quadratiques suivantes :

$$\varphi_1 = x^2 + xy + \alpha y^2 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \beta(x^2 + xy + \alpha y^2),$$

(respectivement

$$\Psi_1 = x^2 + xy + \alpha' y^2 \quad \text{et} \quad \Psi_2 = \beta'(x^2 + xy + \alpha' y^2)).$$

Donc F est équivalente à l'une des quatre formes quadratiques suivantes :

$$\varphi_i + \Psi_j \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 2,$$

et, on a :

$$N_\alpha = \varphi_1((K \times K)^*), \qquad \beta N_\alpha = \varphi_2((K \times K)^*)$$

$$N_{\alpha'} = \Psi_1((K \times K)^*) \quad \text{et} \quad \beta' N_{\alpha'} = \Psi_2((K \times K)^*).$$

D'abord la forme quadratique $\varphi_1 + \Psi_1$ est toujours isotrope, puisque $K^{*2} \subset N_\alpha \cap N_{\alpha'}$ et K est de caractéristique 2. Par exemple, si $\gamma \in K^*$, on a $\varphi_1(\gamma,0) = \Psi_1(\gamma,0) = \gamma^2$ et $\varphi_1 + \Psi_1$ vaut $\gamma^2 + \gamma^2 = 0$ au point $(\gamma,0,\gamma,0) \in (K^4)^*$.

Comme toute forme quadratique régulière isotrope est universelle, $\varphi_1 + \Psi_1$ est universelle.

Montrons que $\varphi_1 + \Psi_2$ est anisotrope si et seulement si $\varphi_2 + \Psi_1$ est anisotrope.

En effet, supposons que l'on ait $\varphi_1 + \Psi_2$ anisotrope et $\varphi_2 + \Psi_1$ isotrope. Alors, on a $N_\alpha \cap (\beta' N_{\alpha'}) = \emptyset$, d'où $N_\alpha \subset N_{\alpha'}$ et $(\beta' N_{\alpha'}) \subset (\beta N_\alpha)$. Donc $\varphi_2 + \Psi_2$ est isotrope.

Il existe trois formes quadratiques binaires totalement régulières f, g et h vérifiant les conditions suivantes :

$$\varphi_1 + \Psi_1 \cong xy + f, \quad \varphi_2 + \Psi_1 \cong xy + g \quad \text{et} \quad \varphi_2 + \Psi_2 \cong xy + h$$

avec $\Delta(f) \equiv \Delta(g) \equiv \Delta(h) \pmod{\mathcal{P}K}$.

Supposons que $f \cong g$, alors $\varphi_1 + \Psi_1 \cong \varphi_2 + \Psi_1$ et par suite $\varphi_1 \cong \varphi_2$. Ceci est en contradiction avec les hypothèses de départ. D'où $f \not\cong g$.

De même, supposons $h \cong g$, alors $\varphi_2 + \Psi_1 \cong \varphi_2 + \Psi_2$ implique que $\Psi_1 \cong \Psi_2$ ceci est aussi faux. D'où $h \not\cong g$.

Puisque K est un corps de Hilbert généralisé, on a $f \cong h$ d'où $\varphi_1 + \Psi_1 \cong \varphi_2 + \Psi_2$.

Il en découle que :

$$(\varphi_1 + \Psi_1) + (\Psi_1 + \Psi_2) \cong (\varphi_2 + \Psi_2) + (\Psi_1 + \Psi_2)$$

$$(\varphi_1 + \Psi_2) + (\Psi_1 + \Psi_1) \cong (\varphi_2 + \Psi_1) + (\Psi_2 + \Psi_2).$$

On sait que pour qu'une forme quadratique binaire totalement régulière soit équivalente à la forme xy, il faut et il suffit que son invariant de Arf soit égal à $0 \pmod{\mathcal{P}K}$, ([1], p. 153).

Soit maintenant G une forme quadratique binaire totalement régulière. La forme quadratique $G+G$ est totalement régulière isotrope. Il existe donc une forme quadratique binaire totalement régulière G' telle que :

$$G + G \cong xy + G' \quad \text{avec} \quad \Delta(G+G) \equiv \Delta(xy+G') \pmod{\mathcal{P}K}.$$

D'autre part, on a :

$$\Delta(G+G) \equiv \Delta(G) + \Delta(G) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$$

$$\Delta(xy+G') \equiv \Delta(xy) + \Delta(G') \equiv \Delta(G') \pmod{\mathcal{P}K}.$$

Donc $\Delta(G') \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$ et, par conséquent, $G' \cong xy$.

D'où $G + G \cong xy + x'y'$.

Il en résulte les équivalences :

$$\Psi_1 + \Psi_1 \cong \Psi_2 + \Psi_2 \cong xy + x'y'.$$

D'où $\phi_1 + \Psi_2$ est équivalente à $\phi_2 + \Psi_1$, ce qui est absurde car $\phi_1 + \Psi_2$ est anisotrope et $\phi_2 + \Psi_1$ est isotrope. Donc $\phi_2 + \Psi_1$ est nécessairement anisotrope.

D'une manière analogue, on montre que si $\phi_2 + \Psi_1$ est anisotrope, alors $\phi_1 + \Psi_2$ est anisotrope.

On a les deux cas suivants :

1) $\phi_1 + \Psi_2$ et $\phi_2 + \Psi_1$ sont anisotropes.

Donc $N_\alpha \cap (\beta' N_{\alpha'}) = \emptyset$ et $(\beta N_\alpha) \cap N_{\alpha'} = \emptyset$, ce qui implique que $N_\alpha \subset N_{\alpha'}$, $(\beta' N_{\alpha'}) \subset (\beta N_\alpha)$ et $N_{\alpha'} \subset N_\alpha$, $(\beta N_\alpha) \subset (\beta' N_{\alpha'})$.

D'où $N_\alpha = N_{\alpha'}$ et $\beta N_\alpha = \beta' N_{\alpha'}$. Par suite, les formes quadratiques $\phi_1 + \Psi_2$ et $\phi_2 + \Psi_1$ sont universelles et $\phi_2 + \Psi_2$ est isotrope donc universelle.

2) $\phi_1 + \Psi_2$ et $\phi_2 + \Psi_1$ sont isotropes.

Donc elles sont universelles. Il reste à voir que la forme quadratique $\phi_2 + \Psi_2$ est universelle.

Puisque les trois formes quadratiques $\phi_1 + \Psi_1$, $\phi_1 + \Psi_2$ et $\phi_2 + \Psi_1$ sont isotropes, il existe trois formes quadratiques binaires totalement régulières f, g et h de même invariant de $\mathrm{Arf}(\alpha+\alpha')$ (mod $\mathcal{P}K$) vérifiant respectivement les conditions :

$$\phi_1 + \Psi_1 \cong xy + f, \quad \phi_1 + \Psi_2 \cong xy + g \quad \text{et} \quad \phi_2 + \Psi_1 \cong xy + h.$$

Comme on a :

$\Psi_1 \not\cong \Psi_2 \implies f \not\cong g$

et $\quad \psi_1 \not\cong \psi_2 \implies f \not\cong h$

sur K un corps de Hilbert généralisé, il en résulte que $g \cong h$.

Donc $\psi_1 + \Psi_2 \cong \psi_2 + \Psi_1$

et $(\psi_1+\Psi_2) + (\Psi_1+\Psi_2) \cong (\psi_2+\Psi_1) + (\Psi_1+\Psi_2)$

$(\psi_1+\Psi_1) + (\Psi_2+\Psi_2) \cong (\psi_2+\Psi_2) + (\Psi_1+\Psi_1)$.

Mais $\Psi_1 + \Psi_1 \cong \Psi_2 + \Psi_2 \cong xy + x'y'$, ce qui implique que $\psi_1 + \Psi_1$ et $\psi_2 + \Psi_2$ sont équivalentes. Par suite, $\psi_2 + \Psi_2$ est universelle.

Finalement les 4 formes $\psi_i + \Psi_j$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant 2$ sont universelles. Donc F est universelle lorsque $\Delta(F) \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$.

ii) On suppose $\Delta(F) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$.

Donc $\alpha \equiv \alpha' \pmod{\mathcal{P}K}$.

Si $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$, alors $F \cong xy + x'y'$, puisque $\psi \cong \Psi \cong xy$.

Si $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$, alors ou bien $N(2,\alpha) = 1$ donc $\psi \cong \Psi$ et on a aussi $F \cong xy + x'y'$, ou bien $N(2,\alpha) = 2$ et $F \cong \psi_1 + \psi_2$ ou $F \cong \psi_1 + \psi_1 \cong \psi_2 + \psi_2 \cong xy + x'y'$.

Dans tous les cas F est universelle. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque :

L'algèbre de Clifford et l'invariant de Arf constituent un système complet d'invariants pour les classes d'équivalence des formes quadratiques totalement régulières de même dimension sur un corps de Hilbert généralisé.

Ceci résulte de la proposition 2.3 et du théorème suivant, ([1], p. 166) :

Théorème.- Soit K un corps sur lequel toute forme quadratique de type $\varphi + \psi + z^2$ où φ et ψ sont deux formes quadratiques binaires totalement régulières, est isotrope. Alors le nombre de variables $m = 2n$, l'algèbre de Clifford $C(F)$ et la classe $\Delta(F)$ $(\mathrm{mod}\ \mathcal{P}K)$ forment un système d'invariants complet pour l'équivalence des formes quadratiques totalement régulières F.

Proposition 2.4 - Soient $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ deux K-algèbres de quaternions de division telles que la forme quadratique quaternaire totalement régulière

$$F = \beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + ay_2^2)$$

soit universelle. Alors il existe une extension quadratique séparable K_d (resp. purement inséparable $K(\sqrt{c})$) de K, isomorphe à la fois à un sous-corps de $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et à un sous-corps de $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ et il existe des scalaires non nuls $\beta_0, b_0 \in K$ (resp. $\alpha_0, a_0 \in K$) tels que

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\beta_0,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{b_0,d}{K}\right]$$

(resp. $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{c,\alpha_0}{K}\right]$ et $\left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{c,a_0}{K}\right]$).

Preuve :

Soit $1, \theta, u, \theta u$; une base de $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ vérifiant :

$u^2 = \beta$, $\mathcal{P}\theta = \alpha$ et $u\theta = (1+\theta)u$

et soit $1, \omega, v, \omega v$; une base de $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ vérifiant :

$v^2 = b$, $\mathcal{P}\omega = a$ et $v\omega = (\omega+1)v$.

Cas séparable :

Soit $\ell = (\mu+\nu\theta) + (\lambda+\gamma\theta)u \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$, calculons $\mathcal{P}\ell = \ell^2 + \ell$.

$$\mathcal{P}\ell = (\mu+\nu\theta)^2 + (\lambda+\gamma\theta)u(\lambda+\gamma\theta)u + (\mu+\nu\theta)(\lambda+\gamma\theta)u$$
$$+ (\lambda+\gamma\theta)u(\mu+\nu\theta) + (\mu+\nu\theta) + (\lambda+\gamma\theta)u$$

$$\mathcal{P}\ell = \mu^2 + \nu^2\theta^2 + (\lambda+\gamma\theta)(\lambda+\gamma(\theta+1))u^2 + (\mu+\nu\theta)(\lambda+\gamma\theta)u$$
$$+ (\lambda+\gamma\theta)(\mu+\nu(\theta+1))u + (\mu+\nu\theta) + (\lambda+\gamma\theta)u$$

$$\mathcal{P}\ell = \mathcal{P}\mu + \mathcal{P}(\nu\theta) + \beta(\lambda^2+\lambda\gamma+\alpha\gamma^2) + (1+\nu)(\lambda+\gamma\theta)u.$$

Pour que $\mathcal{P}\ell$ soit dans K, il suffit que l'on ait $\nu = 1$.

On obtient :

$$\mathcal{P}\ell = \mu + \mu^2 + \alpha + \beta(\lambda^2+\lambda\gamma+\alpha\gamma^2).$$

On prend de plus $\mu = 0$; $\ell = \theta + (\lambda+\gamma\theta)u$
et $\mathcal{P}\ell = \alpha + \beta(\lambda^2+\lambda\gamma+\alpha\gamma^2)$ est dans K.

Soit maintenant $h = \omega + (z+t\omega)v \in \left(\frac{b,a}{K}\right]$, par analogie avec ce qui précède, on a $\mathcal{P}h = a + b(z^2+zt+at^2)$ appartient à K.

Puisque les deux K-algèbres $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ sont de division, on a $\alpha \not\equiv 0$ et $a \not\equiv 0$ (mod $\mathcal{P}K$).

Si on a $\alpha \equiv a$ (mod $\mathcal{P}K$). $K(\theta)$ est isomorphe à $K(\omega)$, il se plonge dans les K-algèbres $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{b,a}{K}\right]$. On prend $\beta_0 = \beta$ et $b_0 = b$.

Etude du cas $a \not\equiv \alpha$ (mod $\mathcal{P}K$) :

La forme quadratique F représente $a + \alpha \in K^*$ car elle est universelle ; il existe λ_0, γ_0, z_0 et t_0 non tous nuls dans K tels que :

$$\alpha + a = \beta(\lambda_0^2 + \lambda_0\gamma_0 + \alpha\gamma_0^2) + b(z_0^2+z_0t_0+at_0^2).$$

Donc pour $\ell_0 = \theta + (\lambda_0+\gamma_0\theta)u$ et $h_0 = \omega + (z_0+t_0\omega)v$,
on a $\mathcal{P}\ell_0 = \mathcal{P}h_0 = d \in K$ avec $\ell_0 \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $h_0 \in \left(\frac{b,a}{K}\right]$.

On a $\mathcal{P}\ell_0 \not\equiv 0$ et $\mathcal{P}h_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$, puisque ℓ_0 et h_0 n'appartiennent pas à K.

$K(\ell_0)$ est isomorphe à $K(h_0)$, c'est l'extension quadratique séparable de K cherchée.

Posons $u_0 = (\lambda_0+\gamma_0\theta)u$ et $v_0 = (z_0+t_0\omega)v$, on a :
$\ell_0 = \theta + u_0$, $h_0 = \omega + v_0$, $\mathcal{P}\ell_0 = \alpha + u_0^2$ et $\mathcal{P}h_0 = a+v_0^2$ avec
$u_0^2 = \beta(\lambda_0^2 + \lambda_0\gamma_0 + \alpha\gamma_0^2) = \beta_0$ et $v_0^2 = b(z_0^2 + z_0t_0 + at_0^2) = b_0$.

$$\begin{aligned}
\ell_0u_0 + u_0\ell_0 &= (\theta+u_0)u_0 + u_0(\theta+u_0) \\
&= \theta u_0 + u_0\theta \\
&= \theta(\lambda_0+\gamma_0\theta)u + (\lambda_0+\gamma_0\theta)u\theta \\
&= (\lambda_0+\gamma_0\theta)\theta u + (\lambda_0+\gamma_0\theta)(\theta+1)u \\
\ell_0u_0 + u_0{}_0 &= (\lambda_0+\gamma_0\theta)u.
\end{aligned}$$

D'où $\ell_0u_0 + u_0\ell_0 = u_0$. De même $h_0v_0 + v_0h_0 = v_0$.

On a toujours $u_0 \neq 0$ ou $v_0 \neq 0$ car $a + \alpha \neq 0$.

Etude des cas possibles.

1) $u_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$.

On a $u_0^2 = \beta_0 \in K^*$, $v_0^2 = b_0 \in K^*$ d'où

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\beta_0,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{b_0,d}{K}\right].$$

2) $u_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$.

On a $\mathcal{P}\ell_0 = \alpha = d$, $v_0^2 = b_0 \in K^*$ d'où

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\beta,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{b_0,d}{K}\right].$$

3) $u_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$.

On a $\mathcal{P}h_0 = a = d$, $u_0^2 = \beta_0 \in K^*$ d'où

$$\left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{b,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\beta_0,d}{K}\right].$$

Ceci termine la démonstration de la proposition concernant le cas séparable.

Cas inséparable :

Soient $\ell \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $h \in \left(\frac{b,a}{K}\right]$. Pour qu'on ait $\ell^2 \in K$ et $\ell \notin K$ il faut et il suffit que $\ell = \mu + (\lambda+\gamma\theta)u$ avec $\lambda + \gamma\theta \neq 0$.
De même pour qu'on ait $h^2 \in K$ et $h \notin K$ il faut et il suffit que $h = x + (y+z\omega)v$ avec $y+z\omega \neq 0$.

On cherche un tel ℓ et un tel h tels que $\ell^2 = h^2 \in K^*$

On a $\ell^2 = \mu^2 + \beta(\lambda^2+\lambda\gamma+\alpha\gamma^2)$

et $h^2 = x^2 + b(y^2+yz+az^2)$.

Soient $\mu_0 \neq x_0$ dans K, la forme quadratique F est universelle donc représente $(\mu_0+x_0)^2 \neq 0$; c'est-à-dire qu'il existe λ_0, γ_0, y_0 et z_0 non tous nuls dans K tels que :

$$\mu_0^2 + x_0^2 = \beta(\lambda_0^2+\lambda_0\gamma_0+\alpha\gamma_0^2) + b(y_0^2+y_0z_0+az_0^2).$$

On prend $\ell_0 = \mu_0 + (\lambda_0+\gamma_0\theta)u$ et $h_0 = x_0 + (y_0+z_0\omega)v$.

Si on avait $\lambda_0 = \gamma_0 = 0$, alors on aurait $b(y_0^2+y_0z_0+az_0^2) = (x_0+\mu_0)^2 \neq 0$ et b serait une norme d'un élément de K_a. Dans ce cas, on aurait $\left(\frac{b,a}{K}\right] \cong M_2(K)$. Ce qui est absurde car $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ est de division. Donc, on a $\lambda_0 + \gamma_0\theta \neq 0$ et $\ell_0 \notin K$.

De même, $h_0 \notin K$ car $y_0 + z_0\omega \neq 0$.

On a trouvé $\ell_0 \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $h_0 \in \left(\frac{b,a}{K}\right]$, qui ne sont pas dans K avec $\ell_0^2 = h_0^2 \in K^*$. Donc $K(\ell_0)$ est isomorphe à $K(h_0)$ et $K(\ell_0)$ est l'extension quadratique inséparable de K cherchée.

Pour terminer la démonstration de notre proposition dans le cas inséparable, il suffit d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 2.5 - Soit $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ une K-algèbre de quaternions qui contient une extension quadratique inséparable $K(\sqrt{c})$ de K. Alors il existe $\alpha_0 \in K$ tel que $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ soit isomorphe à $\left(\frac{c,\alpha_0}{K}\right]$.

Preuve :

On utilise les mêmes notations θ,u que dans la preuve de la proposition précédente.

Il existe $\ell_0 \in \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ tel que : $\ell_0^2 = c$ et $\ell_0 \notin K$.

D'après le lemme 1.2, on peut écrire $\ell_0 = \mu_0 + a_0 u$ avec $a_0 = \lambda_0 + \gamma_0\theta \neq 0$ et $\mu_0, \lambda_0, \gamma_0 \in K$.

On cherche $\theta_0 = \theta + xu$ avec $x = \lambda + \gamma\theta \neq 0$, vérifiant la condition $\theta_0\ell_0 + \ell_0\theta_0 = \ell_0$.

On a $\theta_0^2 + \theta_0 = \alpha + \beta(\lambda^2 + \lambda\gamma + \alpha\gamma^2) = \rho \in K$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\ell_0 + \ell_0\theta_0 + \theta_0\ell_0 &= \mu_0 + a_0u + (\mu_0+a_0u)(\theta+xu) + (\theta+xu)(\mu_0+a_0u)\\ &= \mu_0 + a_0u + a_0u\theta + a_0uxu + \theta a_0u + xua_0u\\ &= \mu_0 + a_0(u+u\theta + \theta u) + a_0(ux)u + x(ua_0)u\end{aligned}$$

mais comme $u + u\theta + \theta u = 0$, $ux = (x+\gamma)u$ et $ua_0 = (a_0+\gamma_0)u$, on a :

$$\begin{aligned}\ell_0 + \ell_0\theta_0 + \theta_0\ell_0 &= \mu_0 + a_0(x+\gamma)u^2 + x(a_0+\gamma_0)u^2\\ &= \mu_0 + \beta(a_0\gamma + x\gamma_0).\end{aligned}$$

Puisque $a_0\gamma + x\gamma_0 = \gamma_0\lambda + \lambda_0\gamma$, on trouve finalement que :

$$\ell_0 + \ell_0\theta_0 + \theta_0\ell_0 = \mu_0 + \beta(\gamma_0\lambda + \lambda_0\gamma).$$

Comme on a $a_0 \neq 0$, dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$ on prend $\lambda = 0$ et $\gamma = \lambda_0^{-1}\beta^{-1}\mu_0$ et dans le cas où $\lambda_0 = 0$, on a $\gamma_0 \neq 0$ et on prend $\lambda = \gamma_0^{-1}\beta^{-1}\mu_0$. On obtient donc dans les deux cas :

$$\ell_0\theta_0 = (1+\theta_0)\ell_0.$$

D'où $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{c,\rho}{K}\right]$. ∎

Théorème 2.6 - K est un corps de Hilbert généralisé si et seulement si, il existe à isomorphisme près une unique K-algèbre de quaternions de division. Si K est de Hilbert généralisé cette K-algèbre de quaternions de division est neutralisée par toute extension quadratique séparable de K d'indice de norme 2.

Preuve :

Soit K un corps de Hilbert généralisé. Soit $\alpha_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$ tel que $\left[K^* : N_{K_{\alpha_0}/K}(K^*_{\alpha_0})\right] = 2$ et soit $\beta_0 \in K$ qui n'est pas la norme d'un élément de K_{α_0}. Alors $\left(\frac{\beta_0,\alpha_0}{K}\right]$ est une K-algèbre de quaternions de division.

Soient $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$. deux K-algèbres de quaternions de division. Donc on a $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$ et β,β' ne sont pas des normes d'éléments de K_α.

Les formes quadratiques $\beta(x^2+xy+\alpha y^2)$ et $\beta'(x^2+xy+\alpha y^2)$ sont équivalentes comme étant des formes quadratiques binaires totalement régulières de même invariant de Arf $\alpha \pmod{\mathcal{P}K}$, non équivalentes à la forme $x^2 + xy + \alpha y^2$, puisque K est de Hilbert généralisé.

Les formes $(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2)$ et $(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2)$ sont des formes quadratiques concrètes associées respectivement aux K-algèbres $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$, elles sont équivalentes. D'après la proposition 1.5, on a $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est isomorphe à $\left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$.

Soient $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$ deux K-algèbres de quaternions de division. D'après la proposition 2.3, la forme quadratique

$$F = \beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2)$$

est universelle.

Par la proposition 2.4, il existe une extension quadratique séparable K_d de K qui se plonge dans $\left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right]$ et $\left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$, et des scalaires λ, γ non nuls dans K tels qu'on ait :

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\lambda,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right] \cong \left(\frac{\gamma,d}{K}\right].$$

D'après ce qui précède, on a $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$.

Inversement, supposons qu'il existe à isomorphisme près une unique K-algèbre de quaternions de division.

Soit $\alpha \in K$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$. Considérons les formes quadratiques d'invariant de Arf $\alpha \pmod{\mathcal{P}K}$ suivantes :

$$f \cong x^2 + xy + \alpha y^2, \quad g \cong \beta(x^2 + xy + \alpha y^2)$$

et $\quad h \cong \beta'(x^2 + xy + \alpha y^2)$ avec $\beta,\beta' \in K^*$.

Supposons que f ne soit équivalente ni à g ni à h.
Alors les algèbres de Clifford $c(g) \cong \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $c(h) \cong \left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$ sont de

division. Donc elles sont isomorphes et comme $\Delta(g) \equiv \Delta(h) \equiv \alpha \pmod{\mathcal{P}K}$, on a $h \cong g$. D'où $N(2,\alpha) \leqslant 2$.

Soit $\left(\frac{\beta_0,\alpha_0}{K}\right]$ une K-algèbre de quaternions de division, alors la forme quadratique $g_0 = \beta_0(x^2+xy+\alpha_0 y^2)$ n'est pas équivalente à la forme quadratique $f_0 = x^2+xy+\alpha_0 y^2$ et f_0, g_0 ont le même invariant de Arf $\alpha_0 \pmod{\mathcal{P}K}$. Donc $N(2,\alpha_0) = 2$.

D'où K est de Hilbert généralisé.

Soit Q une K-algèbre de quaternions de division et soit K_α une extension quadratique séparable de K d'indice de norme 2 ; $\alpha \in K$. Soit $\beta \in K^*$, β n'étant pas la norme d'un élément de K_α. Alors $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est de division, d'où $Q \cong \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et K_α neutralise $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ donc neutralise Q.

Corollaire 2.7.- Soit K un corps sur lequel toute forme quadratique quaternaire totalement régulière est universelle. Les énoncés suivants sont équivalents :

1) Si $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$ sont des K-algèbres de quaternions de division, alors $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est isomorphe à $\left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$.

2) Si $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{\beta,\alpha'}{K}\right]$ sont des K-algèbres de quaternions de division, alors $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est isomorphe à $\left(\frac{\beta,\alpha'}{K}\right]$.

Preuve :

1) => 2), résulte de la preuve du théorème précédent.

2) => 1), en effet,

puisque la forme quadratique F donnée par

$$F = \beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2)$$

est universelle, il existe γ, λ et λ' non nuls dans K tels qu'on ait

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\gamma,\lambda}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\gamma,\lambda'}{K}\right],$$

ceci d'après la proposition 2.4.

D'après 2), on conclut que $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est isomorphe à $\left(\frac{\beta',\alpha}{K}\right]$. ∎

Proposition 2.8.- K est un corps de Hilbert généralisé si et seulement si, il existe une seule classe d'équivalence de formes quadratiques quaternaires totalement régulières anisotropes d'invariant de Arf 0 (mod $\mathcal{P}$K).

Preuve :

Soit K tel qu'il existe une seule classe d'équivalence de formes quadratiques quaternaires totalement régulières anisotropes d'invariant de Arf 0 (mod $\mathcal{P}$K).

Toute forme quadratique norme associée à une K-algèbre de quaternions de division est anisotrope et d'invariant de Arf 0 (mod $\mathcal{P}$K). La proposition 1.5, montre qu'il existe à isomorphisme près une unique K-algèbre de quaternions de division. Donc K est de Hilbert généralisé.

Réciproquement, soit K un corps de Hilbert généralisé.

Soit F une forme quadratique quaternaire totalement régulière anisotrope d'invariant de Arf 0 (mod $\mathcal{P}$K). Alors, on a $F \cong \varphi + \psi$ où φ et ψ sont deux formes binaires totalement régulières avec $\Delta(\varphi) \equiv \Delta(\psi)$ (mod $\mathcal{P}$K).

Puisque F est anisotrope, on a $\varphi \not\cong \psi$. Donc $N(2,\alpha) = 2$ où $\alpha \equiv \Delta(\varphi)$ (mod $\mathcal{P}$K).

Soit $\beta \in K^*$ tel que $\beta \notin N_{K_\alpha/K}(K_\alpha^*)$.

Soient $\varphi_1 = x^2 + xy + \alpha y^2$ et $\varphi_2 = \beta(x^2 + xy + \alpha y^2)$ deux formes quadratiques non équivalentes représentant les deux classes de formes quadratiques binaires totalement régulières d'invariant de Arf α (mod $\mathcal{P}K$). On peut donc supposer que φ et Ψ sont équivalentes respectivement aux formes φ_1 et φ_2.

Par suite F est équivalente à $\varphi_1 + \varphi_2$, qui est une forme norme associée à la K-algèbre de division $\left[\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$.

Par le théorème 2.6, $\left[\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ est la seule K-algèbre de division de quaternions à isomorphisme près. La proposition 1.5, montre que la classe d'équivalence des formes quadratiques quaternaires totalement régulières anisotropes d'invariant de Arf 0 (mod $\mathcal{P}K$) est unique. ∎

Proposition 2.9.- Sur un corps K de Hilbert généralisé, les énoncés suivants sont équivalents :

i) Toute forme quadratique quaternaire sur K, totalement régulière d'invariant de Arf différent de 0 (mod $\mathcal{P}K$), est isotrope.

ii) Toute extension quadratique séparable de K neutralise toute K-algèbre de quaternions de division.

iii) Toute extension quadratique séparable de K est d'indice de norme 2.

Preuve :

i) => ii).

Soient $Q = \left[\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ une K-algèbre de quaternions de division et K_γ une extension quadratique séparable de K.

Si K_γ est d'indice de norme 2, alors par le théorème 2.6, K_γ neutralise Q.

Si K_γ est d'indice de norme 1, prenons $Q' = \left(\frac{1,\alpha+\gamma}{K}\right] \cong M_2(K)$.

On a : ou bien $\gamma \equiv \alpha \pmod{\mathcal{P}K}$ et K_γ neutralise Q,

ou bien $\gamma \not\equiv \alpha \pmod{\mathcal{P}K}$ et d'après i), la forme quadratique

$$F = (x_1^2 + x_1y_1 + (\alpha+\gamma)y_1^2) + \beta(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2)$$

est isotrope avec $\Delta(F) = \gamma \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$ et $C(F) \cong M_2(K) \otimes Q$.

D'autre part, on sait qu'une forme quadratique G quaternaire totalement régulière est isotrope si et seulement si, l'algèbre de Clifford $C(G)$ est neutralisée par $K_{\Delta(G)}$ ([1], p. 162).

Donc $C(F)$ est neutralisée par K_γ, ce qui implique que Q est neutralisée par K_γ.

ii) => iii).

Soit $K_{\alpha'}$ une extension quadratique séparable de K.
Puisque $K_{\alpha'}$ neutralise l'algèbre de division $Q = \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$, $K_{\alpha'}$ est isomorphe à un sous-corps de Q ([3], p. 65).

Donc il existe $\beta' \in K^*$, $\beta' \not\equiv 1 \pmod{K^{*2}}$ tel qu'on ait $Q \cong \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$. Donc $\beta' \notin N_{K_{\alpha'}/K}(K^*_{\alpha'})$. Comme on a $N(2,\alpha') \leq 2$; puisque K est de Hilbert généralisé. On en déduit que $N(2,\alpha') = 2$.

iii) => ii).

Soit $K_{\alpha'}$ une extension quadratique séparable de K. Donc $K_{\alpha'}$ est d'indice de norme 2. D'après le théorème 2.6, $K_{\alpha'}$ neutralise toute K-algèbre de quaternions de division.

ii) => i)

Soit F une forme quadratique quaternaire totalement régulière avec $\Delta(F) \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}K}$.

On a $F \cong \varphi + \Psi$ où φ et Ψ sont deux formes quadratiques binaires totalement régulières avec $C(F) \cong C(\varphi) \underset{K}{\otimes} C(\Psi)$ et $\Delta(F) \cong \Delta(\varphi) + \Delta(\Psi)$ $\pmod{\mathcal{P}K}$.

De plus, $K_{\Delta(F)}$ est une extension quadratique séparable de K.

Si $C(\varphi)$ est isomorphe à $C(\Psi)$, alors $C(F)$ est isomorphe à $M_4(K)$.

Si $C(\varphi)$ n'est pas isomorphe à $C(\Psi)$, alors ou bien $C(\varphi)$ est de division et $C(\Psi)$ est isomorphe à $M_2(K)$; donc $K_{\Delta(F)}$ neutralise $C(\varphi)$, ou bien $C(\varphi)$ est isomorphe à $M_2(K)$ et $C(\Psi)$ est de division ; donc $K_{\Delta(F)}$ neutralise $C(\Psi)$.

Dans les trois cas, $K_{\Delta(F)}$ neutralise $C(F)$. Par conséquent, F est isotrope ; d'après ce qui précède. ∎

Remarque :

Un corps de Hilbert au sens de Draxl [2] est un corps de Hilbert généralisé vérifiant la condition supplémentaire donnée par les énoncés équivalents de la proposition 2.9.

§ 3 - SUR UN THEOREME DE DRAXL.

P. Draxl dans [2] a démontré le théorème (D)

(D) Le produit tensoriel de deux K-algèbres de quaternions n'est pas de division si et seulement si ces K-algèbres possèdent un même corps neutralisant quadratique séparable sur K.

Nous allons d'abord énoncer des corollaires de la proposition 2.4 et obtenir une nouvelle démonstration du théorème de P. Draxl. Nous allons ensuite dans le cas de corps de caractéristique 2 en réponse à une question posée par P. Draxl, déterminer les corps non parfaits K pour lesquels le théorème (D') obtenu en remplaçant dans l'énoncé (D) séparable par inséparable est valable.

R. Baeza ([7], p. 134) a donné l'exemple d'un corps K de caractéristique 2 tel qu'il existe deux K-algèbres de quaternions de division neutralisées par une même extension quadratique séparable de K, donc dont le produit tensoriel n'est pas de division, qui ne possèdent pas de corps neutralisant commun quadratique inséparable sur K.

Ceci montre que le théorème (D') n'est pas valable pour tous les corps K.

On utilisera le théorème d'Albert [6] suivant qui est valable pour un corps K de caractéristique quelconque.

Théorème.- Le produit tensoriel de deux K-algèbres de quaternions de division n'est pas de division si et seulement si ces deux K-algèbres possèdent un même corps neutralisant quadratique sur K.

Proposition 2.4 (*Rappel*).-

Soient $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ deux K-algèbres de quaternions de division telles que la forme quadratique quaternaire totalement régulière

$$F = \beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + ay_2^2)$$

soit universelle. Alors il existe une extension quadratique séparable K (resp. purement inséparable $K(\sqrt{c})$) de K, isomorphe à la fois à un sous-corps de $\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et à un sous-corps de $\left(\frac{b,a}{K}\right]$ et il existe des scalaires β_0, $b_0 \in K^*$ (resp. α_0, $a_0 \in K$) tels que :

$$\left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{\beta_0,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{b_0,d}{K}\right]$$

$$\left(\text{resp.} \quad \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right] \cong \left(\frac{c,\alpha_0}{K}\right] \quad \text{et} \quad \left(\frac{b,a}{K}\right] \cong \left(\frac{c,a_0}{K}\right]\right).$$

Corollaire 3.1.- Si deux K-algèbres de quaternions de division possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K, alors ces deux K-algèbres possèdent un même corps neutralisant quadratique séparable sur K.

Preuve :

Soient A et A' deux K-algèbres de quaternions de division neutralisées par une même extension quadratique purement inséparable $K(\sqrt{c})$ de K. Donc $K(\sqrt{c})$ se plonge dans A et A' ([4], p. 65). D'après le lemme 2.5, il existe $\mu, \nu \in K^*$ tels qu'on ait :

$$A \cong \left(\frac{c,\mu}{K}\right] \quad \text{et} \quad A' \cong \left(\frac{c,\nu}{K}\right] .$$

La forme quadratique quaternaire totalement régulière

$$F = c(x_1^2 + x_1y_1 + \mu y_1^2) + c(x_2^2 + x_2y_2 + \nu y_2^2)$$

est isotrope donc universelle. D'après la proposition 2.4, il existe une extension quadratique séparable K_d de K et des scalaires $\lambda, \gamma \in K^*$ tels qu'on ait :

$$A \cong \left(\frac{c,\mu}{K}\right] \cong \left(\frac{\lambda,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad A' \cong \left(\frac{c,\nu}{K}\right] \cong \left(\frac{\gamma,d}{K}\right] .$$

D'où K_d est une extension quadratique séparable de K neutralisant A et A' comme sous-corps commutatif maximal de A et A' ([4], page 65). ∎

Il résulte de l'exemple de R. Baeza cité ci-dessus que la réciproque du corollaire 3.1 est fausse. Toutefois, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.- Soit K un corps sur lequel toute forme quadratique régulière de la forme :

$$a(x_1^2 + x_1y_1 + cy_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + cy_2^2) + z^2$$

avec $a, b \in K^*$ et $c \in K$ est isotrope.

Si deux K-algèbres de quaternions de division possèdent un même corps neutralisant quadratique séparable sur K, alors ces deux K-algèbres possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K.

Preuve :

Soit K un corps vérifiant la condition ci-dessus.

Soient A et A' deux K-algèbres de quaternions de division neutralisées par un même corps K_d quadratique séparable sur K. Donc K_d se plonge dans A et A' ([4], p. 65) et il existe $\mu, \nu \in K^*$ tels qu'on ait :

$$A \cong \left(\frac{\mu, d}{K}\right] \quad \text{et} \quad A' \cong \left(\frac{\nu, d}{K}\right] .$$

Par hypothèse, la forme quadratique quaternaire totalement régulière

$$F = \mu(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \nu(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2)$$

représentent un élément de K^2, c'est-à-dire il existe $\alpha, \beta, \lambda, \gamma$ non tous nuls dans K et $a \in K$ tels que

$$\mu(\alpha^2 + \alpha\beta + d\beta^2) + \nu(\lambda^2 + \lambda\gamma + d\gamma^2) = a^2. \tag{9}$$

Soient $1, \theta, u, \theta u$ une base de $\left(\frac{\mu, d}{K}\right]$ sur K, vérifiant : $u^2 = \mu, \mathcal{P}\theta = d$ et $u\theta = (\theta+1)u$, et $1, \omega, v, \omega v$ une base de $\left(\frac{\nu, d}{K}\right]$ sur K, vérifiant :

$$v^2 = \nu, \quad \mathcal{P}\omega = d \quad \text{et} \quad v\omega = (\omega+1)v.$$

Maintenant on reprend la preuve de la proposition 2.4 dans le cas inséparable :

On pose $\ell = (\alpha + \beta\theta)u \in \left(\frac{\mu, d}{K}\right]$ et

$$h = a + (\lambda+\gamma\omega)v \in \left(\frac{\nu, d}{K}\right] .$$

On sait que $\ell^2 = \mu(\alpha^2 + \alpha\beta + d\beta^2)$ et que

$$h^2 = a^2 + \nu(\lambda^2 + \lambda\gamma + d\gamma^2).$$

D'après (9), on obtient :

$$\ell^2 = h^2 = c \in K.$$

Puisque les K-algèbres $A \cong \left(\frac{\mu, d}{K}\right]$ et $A' \cong \left(\frac{\nu, d}{K}\right]$ sont de division, il en résulte que $\ell \notin K$ et $h \notin K$.

Donc $K(\sqrt{c})$ est une extension quadratique purement inséparable sur K isomorphe à la fois à un sous-corps de A et à un sous-corps de A'.

D'où $K(\sqrt{c})$ neutralise A et A' comme sous-corps commutatif maximal de A et A'. ■

Démonstration du théorème de Draxl résultant de ce qui précède :

Soient A et A' deux K-algèbres de quaternions telles que $A \otimes_K A'$ ne soit pas de division. Dans le cas où l'une des deux K-algèbres A ou A' n'est pas de division, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer A et A' de division.

D'après le théorème d'Albert, A et A' sont neutralisées par une même extension quadratique L de K. Donc $L = K(\omega)$ où ω est une racine d'un polynôme minimal de degré 2 sur K de la forme $X^2 + aX + b$ avec $b \neq 0$.

1er cas $a \neq 0$, $L = K(\omega')$ où ω' est une racine du polynôme minimal $X^2 + X + \frac{b}{a^2}$ sur K. Donc L est un corps séparable sur K neutralisant A et A'.

2ème cas $a = 0$, donc $L = K(\sqrt{b})$ est une extension quadratique purement inséparable sur K neutralisant A et A'. D'après le corollaire 3.1, A et A' possèdent un même corps neutralisant quadratique séparable sur K.

Inversement, soient A et A' deux K-algèbres de quaternions qui possèdent un même corps neutralisant quadratique séparable sur K. Le théorème d'Albert implique que $A \underset{K}{\otimes} A'$ n'est pas de division. ■

Théorème 3.3.- Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Toute forme quadratique régulière sur K de la forme $a(x_1^2 + x_1y_1 + cy_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + cy_2^2) + z^2$ avec $a, b \in K^*$ et $c \in K$, est isotrope.

2) Le produit tensoriel de deux K-algèbres de quaternions de division n'est pas de division si et seulement si ces deux K-algèbres possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K.

Preuve :

1) => 2).

Soient A et A' deux K-algèbres de quaternions de division telles que $A \underset{K}{\otimes} A'$ ne soit pas de division. D'après le théorème d'Albert, A et A' possèdent un même corps neutralisant quadratique M sur K.

Donc $M = K(\omega)$ où ω est une racine d'un polynôme minimal de degré 2 sur K de la forme $X^2 + aX + b$ avec $b \neq 0$.

1er cas $a = 0$, donc $M = K(\sqrt{b})$ est une extension purement inséparable sur K neutralisant A et A'.

2ème cas $a \neq 0$, donc M est une extension quadratique séparable de K neutralisant A et A'. D'après le corollaire 3.2, A et A' possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K.

2) => 1).

Soit $F = a(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2)$ une forme quadratique quaternaire totalement régulière sur K.

Considérons les K-algèbres de quaternions :

$$A = \left(\frac{a,d}{K}\right] \quad \text{et} \quad A' = \left(\frac{b,d}{K}\right] .$$

1°) On suppose A et A' de division.

Soient $1, \omega, u, \omega u$ une base de A sur K, vérifiant :

$$u^2 = a,\ \mathcal{P}\omega = d \quad \text{et} \quad u\omega = (\omega+1)u,$$

et $1, \theta, v, \theta v$ une base de A' sur K, vérifiant :

$$v^2 = b,\ \mathcal{P}\theta = d \quad \text{et} \quad v\theta = (\theta+1)v.$$

Comme $A \underset{K}{\otimes} A' \cong M_2(K) \underset{K}{\otimes} \left(\frac{ab,d}{K}\right]$ ([4], p. 104),

d'après 2), A et A' possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable $K(\sqrt{c})$ sur K. Donc $K(\sqrt{c})$ est isomorphe à un sous-corps de A et à un sous-corps de A'.

Donc il existe $\ell \in A$ et $h \in A'$ tels que $\ell \notin K$, $h \notin K$ et $\ell^2 = h^2 = c$. D'après le lemme 1.2, ℓ et h peuvent s'écrire sous la forme $\ell = \mu + (\lambda+\gamma\omega)u$ et $h = x + (y+z\theta)v$ avec $\lambda + \gamma\omega \neq 0$ et $y + z\theta \neq 0$.

D'autre part, $\ell^2 = \mu^2 + a(\lambda^2 + \lambda\gamma + d\gamma^2)$ et $h^2 = x^2 + b(y^2 + yz + dz^2)$. Alors $\ell^2 = h^2$ implique que :

$$(\mu+x)^2 = a(\lambda^2 + \lambda\gamma + d\gamma^2) + b(y^2 + yz + dz^2)$$

avec λ, γ, y et z non tous nuls.

Donc F représente l'élément $(\mu+x)^2 \in K^2$. D'où $F + z^2$ est isotrope.

2°) On suppose qu'une au moins des algèbres A, A' n'est pas de division, par exemple A.

On a $A \simeq M_2(K)$ d'où :

$$a(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) \cong x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2$$

$$a(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) \cong (x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + b(x_1^2 + x_2y_2 + dy_2^2).$$

Cette forme quadratique représent 1 et par suite la forme quadratique $a(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + b(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + z^2$ est isotrope. ∎

Si le corps K n'est pas parfait, pour toute K-algèbre de quaternions A (de division ou non) il existe une extension quadratique purement inséparable sur K neutralisant A.

En utilisant le théorème 3.3, on obtient donc une réponse au problème posé par P. Draxl.

Les corps non parfaits, de caractéristique 2, pour lesquels le théorème (D') est valable sont ceux qui vérifient la condition (1) du théorème 3.3.

Cette condition est vérifiée en particulier par les corps de Hilbert généralisés de caractéristique 2, cela résulte de la proposition 2.3.

Proposition 3.4.- Soient $A = \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $A' = \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$ deux K-algèbres de quaternions de division. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A et A' sont neutralisées par une même extension quadratique séparable sur K et la forme quadratique régulière

$$F = \beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + z^2$$

est isotrope.

2) A et A' sont neutralisées par une même extension quadratique purement inséparable sur K.

Preuve :

1) => 2).

Supposons que A et A' soient neutralisées par une même extension quadratique séparable K_d de K. Donc K_d se plonge dans A et A', et il existe λ, $\gamma \in K^*$ tels qu'on ait :

$$A \cong \left(\frac{\lambda, d}{K}\right] \quad \text{et} \quad A' \cong \left(\frac{\gamma, d}{K}\right] \; .$$

D'après la proposition 1.5, on a les équivalences :

$$(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2) \cong (x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \lambda(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2)$$

$$(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha' y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) \cong (x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2).$$

Comme on a de plus les équivalences suivantes :

$$(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + (x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) \cong x_1y_1 + (x_2^2 + x_2y_2 + (\alpha+\alpha')y_2^2)$$

$$(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + (x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) \cong x_1y_1 + x_2y_2 \; .$$

Il en résulte que :

$$\beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + (x_3^2 + x_3y_3 + (\alpha+\alpha')y_3^2) + x_4y_4 \cong$$
$$\lambda(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Donc on a :

$$\beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + (x^2 + x_3y_3 + (\alpha+\alpha')y_3^2) \cong$$
$$\lambda(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + x_3y_3.$$

Par suite :

$$\beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + (x_3^2 + x_3y_3 + (\alpha+\alpha')y_3^2) + z^2 \cong$$
$$\lambda(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + x_3y_3 + z^2.$$

Mais comme on a pour tout $\mu \in K^*$:

$$\left(\frac{1,\alpha+\alpha'}{K}\right] \cong M_2(K) \cong \left(\frac{\mu,0}{K}\right] .$$

D'après la proposition 1.5, on obtient l'équivalence :

$$\begin{aligned} z^2 + (x^2 + xy + (\alpha+\alpha')y^2) &\cong z^2 + \mu(x^2 + xy + 0y^2) \\ &\cong z^2 + xy. \end{aligned}$$

Il en découle que :

$$\beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + x_3y_3 + z^2 \cong$$

$$\lambda(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + x_3y_3 + z^2.$$

D'où :

$$\beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + z^2 \cong$$

$$\lambda(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + z^2 ,$$

qui est donc isotrope.

Donc on a $A \cong \left(\frac{\lambda,d}{K}\right]$ et $A' \cong \left(\frac{\gamma,d}{K}\right]$ avec la forme quadratique régulière :

$$\lambda(x_1^2 + x_1y_1 + dy_1^2) + \gamma(x_2^2 + x_2y_2 + dy_2^2) + z^2$$

qui est isotrope.

La preuve du corollaire 3.2 montre alors que A et A' possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K.

2) => 1).

Soient $A = \left(\frac{\beta,\alpha}{K}\right]$ et $A' = \left(\frac{\beta',\alpha'}{K}\right]$ deux K-algèbres de quaternions de division neutralisées par une même extension quadratique purement inséparable $K(\sqrt{c})$ de K. Donc $K(\sqrt{c})$ se plonge dans A et A' ([4], page 65).

D'après le lemme 2.5, il existe λ, $\gamma \in K$ tels que :

$$A \cong \left(\frac{c,\lambda}{K}\right] \quad \text{et} \quad A' \cong \left(\frac{c,\gamma}{K}\right] .$$

D'après la proposition 1.5, on a les équivalences :

$$(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha y_2^2) \cong (x_1^2 + x_1y_1 + \lambda y_1^2) + c(x_2^2 + x_2y_2 + \lambda y_2^2)$$

$$(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha' y_2^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) \cong (x_1^2 + x_1y_1 + \gamma y_1^2) + c(x_2^2 + x_2y_2 + \gamma y_2^2).$$

Comme dans la preuve de "1) implique 2"), on peut voir de la même façon qu'on a l'équivalence :

$$\beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + z^2 \cong$$

$$c(x_1^2 + x_1y_1 + \lambda y_1^2) + c(x_2^2 + x_2y_2 + \gamma y_2^2) + z^2.$$

La deuxième forme quadratique étant isotrope, on en déduit que la forme quadratique :

$$F = \beta(x_1^2 + x_1y_1 + \alpha y_1^2) + \beta'(x_2^2 + x_2y_2 + \alpha' y_2^2) + z^2$$

est isotrope.

Finalement, puisque A et A' possèdent un même corps neutralisant quadratique purement inséparable sur K. D'après le corollaire 3.1, A et A' possèdent aussi un même corps neutralisant quadratique séparable sur K.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARF C. - Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charackteristik 2, J. Reine Angew. Math. 183, p. 148-167 (1941).

[2] DRAXL P. - Uber gemeinsame separabel-quadratische Zerfällungskörper von Quaternionenalgebren, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 16 (1975).

[3] DRAXL P.K. - Skew Fields, LMS Lectures Note Series 81, Cambridge, 1983.

[4] FROHLICH A. - Quadratic forms, "à la" local theory, Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (1967), p. 579-586.

[5] KAPLANSKY I. - Fröhlich's local quadratic forms, J. Reine Angew. Math. 239 (1969), p. 74-77.

[6] ALBERT A.A. - Tensor Products of Quaternion Algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), p. 65-66.

[7] BAEZA R. - Quadratic Forms over Semilocal Rings, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

RESUME

Dans une première partie, on étudie les corps K de caractéristique 2 tels que pour chaque $d \in K$ il existe au plus deux classes de K-formes quadratiques binaires totalement régulières d'invariant de Arf d, avec pour un d_o au moins exactement deux classes correspondant à d_o. On montre en particulier qu'à isomorphisme près il existe sur de tels corps K une unique K-algèbre de quaternions de division.

Dans une deuxième partie, pour répondre à une question posée par P. Draxl concernant les corps non parfaits de caractéristique 2, on étudie l'existence pour des K-algèbres de quaternions données de corps neutralisants communs, quadratiques inséparables sur K.

MOTS CLES : FORMES QUADRATIQUES,
ALGEBRES DE QUATERNIONS,
CARACTERISTIQUE 2,
CORPS NEUTRALISANTS.