THÈSES

présentées à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Aziz EL KACIMI-ALAOUI

Première thèse

ASPECTS ANALYTIQUES ET COHOMOLOGIQUES DES VARIÉTÉS FEUILLETÉES

Deuxième thèse

RÉGULARITÉ AU BORD DU $\bar{\partial}$ PAR LA MÉTHODE DES NOYAUX

Thèses soutenues le 9 décembre 1986 devant la Commission d'Examen :

Président	:	G. COEURE (Université de Lille I)
Rapporteurs	:	G. HECTOR (Université de Lille I)
		A. HAEFLIGER (Université de Genève)
		P. MOLINO (Université de Montpellier II)
Examinateurs	:	P. DOLBEAULT (Université de Paris VI)
		E. GHYS (C.N.R.S. Lille I)

A ma mère et mon père qui ont
durement peiné pour me donner
la possibilité matérielle
d'aller à l'école.

C'est avec Gilbert Hector que j'ai appris la théorie des feuilletages et fait mes premiers pas dans la recherche mathématique. J'ai trouvé auprès de lui bien plus qu'un directeur de thèse. Sa disponibilité, sa bonne manière d'attaquer les problèmes et ses nombreuses critiques m'ont permis de mener à bien ce travail. La forme définitive prise par ce mémoire lui doit beaucoup. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

André Haefliger et Pierre Molino se sont intéressés à mon travail et m'ont supporté tout le long de la rédaction. Ils n'ont cessé de m'encourager et de me prodiguer conseil. J'ai appris beaucoup de choses grâce à leur profonde connaissance des mathématiques. Ils ont bien voulu rapporter sur cette thèse ; je les en remercie vivement.

Outre l'amitié qui me lie à Etienne Ghys, j'ai à plusieurs reprises profité de ses grandes qualités mathématiques. Je suis heureux de pouvoir le remercier ici.

Gérard Coeuré m'a initié à l'analyse complexe. Il m'a proposé le sujet pour la seconde thèse qui m'a permis d'élargir mes connaissances sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Je l'en remercie infiniment.

Pierre Dolbeault a manisfesté un grand intérêt à ce travail et a accepté de se joindre à la Commission d'Examen. Je lui présente mes sincères remerciements.

J'ai eu de nombreuses discussions mathématiques ou autres avec Yves Carrière, Jean-Jacques Loeb, Norreddine Mahammed et Vlad Sergiescu. Leur contribution est ici présente. Je les en remercie ainsi que Jean-Paul Brasselet, Youssef Hantout, Abdellah Oueldguejdi et Khim Sou sans oublier les autres membres de l'équipe de Géométrie et Topologie de Lille pour l'ambiance de travail stimulante qu'ils ont toujours entretenue.

Une pensée amicale à tous mes collègues ainsi qu'au personnel administratif de l'U.F.R de Mathématiques et Sciences Economiques de l'Université de Lille III.

J'ai exposé une partie de cette thèse au "II Coloquio Internacional de Sistemas Dinamicos" qui s'est tenu à Mexico et Guadalajara en juillet 1986.

Je remercie, à cet effet, les organisateurs et en particulier Xavier Gomez-Mont, José Seade et Alberto Verjovsky de m'y avoir invité.

Claudine Evrard a dactylographié le manuscrit avec grand soin et compétence. Avec Raymonde Bérat et Arlette Lengaigne, elles ont su créer au Secrétariat Scientifique un cadre chaleureux et accueillant. Je les en remercie de tout coeur. Mes remerciements vont aussi à Monique Lloret, Françoise Wdowczyk, Albert Gournay et Michel Provost pour l'excellent travail de reprographie.

SOMMAIRE

PREAMBULE

Le chapitre I reprend quelques résultats de ma thèse de troisième cycle [8] publiés en partie dans un article paru à Compositio Mathematica [9] et d'autres résultats d'un article [18] en collaboration avec A. Tihami à paraître au Bulletin de la Société Mathématique de Belgique. Le chapitre II est la reprise textuelle de la version [12] parue au Bulletin de l'IRMA et soumise à Manuscripta Mathematica. Le chapitre III est un travail commun fait avec G. Hector. Il a été annoncé dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [15] et une version raccourcie paraîtra aux Annales de l'Institut Fourier [16]. Le résultat de finitude qu'il contient a déjé été obtenu en collaboration avec G. Hector et V. Sergiescu à l'aide de deux suites spectrales, l'une du type Čech-de Rham, l'autre similaire à celle d'un fibré principal et est paru à Mathematische Zeitschrift [17]. Enfin, le chapitre IV qui contient le résultat général de l'aspect transverse étudié dans le second volet de cette thèse a fait l'objet d'une publication interne [13] au Bulletin de l'IRMA de Lille.

Certains objets sont notés différemment et certaines notations désignent des objets différents quand on passe d'un chapitre à un autre. Nous avons pris le soin de les préciser à chaque fois !.

INTRODUCTION

La rigidité d'un feuilletage tient à la fois de la géométrie des feuilles, la structure transverse et la topologie de la variété ambiante. Deux points de vue sont abordés dans ce travail. Un point de vue "tangent et transverse" dans lequel on développe des calculs de certains invariants de nature cohomologique et un point de vue "purement transverse". En effet un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est la réalisation géométrique d'un système différentiel complètement intégrable. A un instant donné on passe d'une feuille à une autre par un changement de condition initiale. On peut donc interpréter l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$ comme un "espace de paramètres" des solutions de ce système différentiel. Depuis le début de la théorie des feuilletages une question importante s'est posée explicitement ou implicitement : dans quelle mesure l'espace B ressemble-t-il à une variété compacte ? (la variété ambiante M étant bien entendu compacte). Des exemples simples montrent qu'en général B n'est pas une variété. On peut cependant y définir la notion de différentiabilité, de fibré, de section, de métrique riemannienne, d'opérateurs différentiels etc.. . Ces objets correspondent à leurs analogues sur M invariants le long des feuilles en un sens à préciser selon le contexte. Le but du second volet de cette thèse est de montrer que si $\mathcal{F}$ a une certaine structure transverse, ces objets géométriques s'apparentent fortement à ceux d'une bonne variété compacte.

Les structures considérées sont de classe C^{∞}. Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n (réelle ou complexe suivant le cas). On supposera, pour simplifier que $\mathcal{F}$ est transversalement orientable (c'est le cas par exemple si $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable -T.P. en abrégé- ou transversalement holomorphe) sinon on passe à un revêtement à deux feuillets.

I. *Suite spectrale d'un feuilletage.*

Une forme différentielle α sur M est dite basique si elle vérifie $i_X\alpha = 0$ et $L_X\alpha = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$. Localement α est la relevée d'une forme différentielle sur la variété des plaques. On peut donc l'interpréter comme une "forme différentielle sur l'espace B".

Le faisceau $\underset{\sim}{\phi}^p$ des germes de p-formes basiques n'est pas fin et permet donc de définir une théorie de cohomologie $H^*(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$ en général non triviale qu'on appellera la cohomologie bigraduée de la variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$. C'est en fait le terme E_1^{p*} d'une suite spectrale (E_r) associée à la résolution de de Rham transverse

$$0 \to \underset{\sim}{\mathbb{R}} \to \underset{\sim}{\phi}^o \xrightarrow{d} \underset{\sim}{\phi}^1 \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \underset{\sim}{\phi}^n \longrightarrow 0$$

du faisceau constant $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ sur M. C'est l'analogue pour $\mathcal{F}$ de la version différentiable de la suite de Leray-Serre d'une fibration localement triviale (cf. [29]). La cohomologie bigraduée est apparue pour la première fois dans les travaux de B. Reinhart [48]. Depuis lors, divers auteurs l'ont étudiée.

I. Vaisman [57] a donné une résolution fine du faisceau $\underset{\sim}{\phi}^p$ en termes de formes différentielles. Dans sa thèse [51] K.S. Sarkaria a relié cette cohomologie aux classes caractéristiques des fibrés en droites complexes et a obtenu des résultats intéressants. Dans les travaux de K. Kodaira et D.C. Spencer [39] on peut trouver des applications aux déformations des feuilletages ainsi que dans les travaux de R.S. Hamilton [33], T. Duchamp et M. Kalka [7]. Certains résultats ont été obtenus aussi par C. Roger [50], X. Masa [42], E. Macias [41], M.A. Mostow [45]. J'en oublie sûrement d'autres ; qu'ils veuillent bien m'excuser. Le même type de cohomologie a été utilisé par P. Molino [44] pour lire les obstructions à l'existence de connexions basiques. Jusqu'à récemment on ne disposait d'aucun calcul à part celui des feuilletages linéaires du tore T^2

qui a été fait partiellement par B. Reinhart [48] et d'une manière complète par J. Heitcsh [34] et C. Roger [50]. Les méthodes de calcul reposent sur la notion de "petit dénominateur" déjà présente dans les travaux de H. Poincaré et C. Siegal.

Je présente l'ensemble du travail que j'ai entrepris dan [8], [9] et [18] sur cette cohomologie.

J'ai montré pour commencer que le terme E_1^{p*} est invariant par homotopie intégrable i.e. une homotopie qui préserve chaque feuille individuellement. Par le biais d'une partition de l'unité sur M, nous avons établi [18] un principe généralisé de Mayer-Vietoris et donc, comme dans le cas classique, une autre suite spectrale de type Čech-de Rham convergent vers $H^*(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$. En particulier nous avons montré, à l'aide de cette dernière suite spectrale, que si F est transverse à une fibration $F \to M \to W$ alors $H^*(M,\underset{\sim}{\phi}^p) = H^*(W,\underset{\sim}{A}^p)$ où $\underset{\sim}{A}^p$ est le faisceau localement constant sur W de fibre l'espace de Frechet $A^p(F)$ des p-formes différentielles sur F. Ce qui nous a permis de donner des calculs explicites pour beaucoup d'exemples de feuilletages. J'ai montré [9] que si $H^{\dim F}(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$ est nul alors le feuilletage F n'admet pas de mesure transverse invariante.

II. *Dualité pour les feuilletages transversalement holomorphes* .

On suppose que F est transversalement holomorphe. Une forme différentielle sur M est dite basique holomorphe si elle est basique et si sa restriction à toute transversale est une forme holomorphe. Sur un ouvert distingué une telle forme est le pull-back d'une forme holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. Pas plus que le faisceau $\underset{\sim}{\phi}^p$ le faisceau $\underset{\sim}{\Omega}_F^p$ des p-formes différentielles basiques holomorphes n'est fin. La cohomologie de M à valeurs dans $\underset{\sim}{\Omega}_F^p$ sera appelée la cohomologie mixte de la variété feuilletée (M,F). Cette appellation est bien justifiée car d'une part une variété supportant un feuilletage transversalement holomorphe est une variété mixte et d'autre part si $\mathcal{F}$ admet un feuilletage transverse (qui sera nécessairement holomorphe) alors $H^*(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}})$ se calcule à l'aide d'un complexe mixte de de Rham-Dolbeault. L'avantage du faisceau $\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}$ est qu'il admet, contrairement à $\underset{\sim}{\phi}^p$, une résolution elliptique permettant de montrer que les espaces vectoriels $H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}})$ sont de dimension finie. Ceci a été remarqué par I. Vaisman [58]. Mais une démonstration correcte de ce fait n'a été donnée que récemment par T. Duchamp et M. Kalka [7].

De manière générale soit E un fibré vectoriel complexe feuilleté-holomorphe i.e. les fonctions de transition sont constantes sur les feuilles et transversalement holomorphes. En suivant la démarche de T. Duchamp et M. Kalka [7] je montre que $H^*(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E))$ est de dimension finie où $\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E)$ est le faisceau des p-formes basiques holomorphes à valeurs dans E. Cette démonstration reste vraie si on remplace $\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E)$ par n'importe quel $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$-faisceau localement libre et cohérent où $\underset{\sim}{\mathcal{O}} = \underset{\sim}{\Omega}^o$. Si E est le fibré normal holomorphe, l'espace $H^1(M,\underset{\sim}{\Omega}^o_{\mathcal{F}}(E))$ paramètre les classes d'équivalence des déformations infinitésimales de $\mathcal{F}$. Je démontre par ailleurs l'analogue de la dualité de Serre à savoir que pour tout $p = 0,\dots,n$ et pour tout $q = 0,\dots,n+\dim \mathcal{F}$ l'espace vectoriel $H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E))$ est canoniquement isomorphe à $H^{n+\dim \mathcal{F}-q}(M,\underset{\sim}{\Omega}^{n-p}_{\mathcal{F}}(E^*))$ où E^* est le dual de E.

J'ai d'autre part donné quelques calculs explicites de cette cohomologie. On peut noter enfin que la suite

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{\mathbb{C}} \longrightarrow \underset{\sim}{\Omega}^o_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\quad d \quad} \underset{\sim}{\Omega}^1_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\ d\ } \dots \longrightarrow \underset{\sim}{\Omega}^n_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

est une résolution du faisceau constant $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$. D'où une suite spectrale $K_1^{pq} = H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}})$ convergent vers la cohomologie de de Rham à coefficients complexes de la variété M. Par analogie aux cas classiques on l'appellera la suite spectrale de Leray-Serre-Frölicher de la variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$. Son intérêt

est que pour $n = 1$ le terme $K_2^{1,1}$ contient l'espace vectoriel $H^2(M/\mathcal{F})$ de cohomologie basique de $\mathcal{F}$ qui sera donc de dimension finie. Ce qui n'est pas toujours le cas si la codimension de $\mathcal{F}$ est strictement supérieure à 1 (codimension complexe ou réelle bien entendu suivant le cas).
Chacune des cohomologies $H^*(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$ et $H^*(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}})$ dépend de la topologie des feuilles pour $*\geq 1$ et ne peut en aucun cas être considérée comme cohomologie de l'espace transverse à $\mathcal{F}$. Pour ce on considère l'espace $\Omega^p(M/\mathcal{F}) = H^o(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$ des sections globales du faisceau $\underset{\sim}{\phi}^p$ qui n'est rien d'autre que l'espace des p-formes différentielles basiques sur M. On obtient ainsi un complexe différentiel $(\Omega^*(M/\mathcal{F}),d)$ dont l'homologie $H^*(M/\mathcal{F})$ est appelée la cohomologie basique de $\mathcal{F}$. On peut l'envisager comme cohomologie de de Rham de la structure transverse, voire de l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$. Ainsi lorsque $\mathcal{F}$ provient d'une fibration, $H^*(M/\mathcal{F})$ s'identifie à la cohomologie de de Rham de l'espace de base de la fibration. Que garde-t-elle alors de la cohomologie de de Rham d'une variété compacte ? Presque rien si le feuilletage est quelconque. On peut par exemple se demander si les espaces vectoriels $H^p(M/\mathcal{F})$ sont de dimension finie. Ceci est immédiat pour $H^o(M/\mathcal{F})$ et $H^1(M/\mathcal{F})$. Mais en général il n'en est rien pour $H^p(M/\mathcal{F})$ avec $p \geq 2$ comme le montrent les exemples de G.W. Schwarz [53] et récemment ceux de K.S. Sarkaria [52] et E. Ghys [21]. Ces derniers ont l'avantage d'être analytiques. En plus une "complexification" des exemples de E. Ghys [21] fournit des exemples de feuilletages transversalement holomorphes de codimension complexe au moins 2 pour lesquels la cohomologie basique est de dimension infinie. Ce qui ne saurait se produire ni pour les feuilletages transversalement holomorphes de codimension 1 comme je viens de le signaler plus haut ni pour les feuilletages riemanniens auxquels on consacre une étude détaillée.

III. *Cohomologie basique des feuilletages riemanniens.*

Si $\mathcal{F}$ est riemannien i.e le fibré normal supporte une métrique riemannienne invariante par le pseudo-groupe d'holonomie, B. Reinhart affirme dans [49] que la cohomologie basique de $\mathcal{F}$ est de dimension finie et vérifie la dualité de Poincaré. Malheureusement la seconde assertion a été mise en défaut par suite d'un contre-exemple de Y. Carrière [4]. L'erreur détectée compromet en même temps l'assertion de finitude. La question est devenue désormais ouverte. Peu de temps après F. Kamber et P. Tondeur [36] ont montré que les résultats et les démonstrations de B. Reinhart restent vrais pourvu que l'on se restreigne aux feuilletages riemanniens minimalisables (i.e admettant une métrique riemannienne quasi-fibrée pour laquelle les feuilles sont des sous-variétés minimales). Nous avons alors abordé la question dans toute sa généralité pour un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. Le comportement qualitatif d'un tel feuilletage est décrit par les théorèmes III.1.2.1 et III.3.1.2 dûs à P. Molino [43]. Ces deux théorèmes nous ont permis de construire deux suites spectrales [17] permettant d'une part de montrer que $H^*(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie et d'autre part de calculer effectivement cette cohomologie.

En fait pour un feuilletage T.P. $(\Omega^*(M/\mathcal{F}),d)$ s'identifie à un complexe elliptique au-dessus de la variété basique de $\mathcal{F}$ (i.e. l'espace des adhérences des feuilles). A peu de choses près ceci reste vrai pour $\mathcal{F}$ riemannien en général. Notre résultat essentiel découle de cette observation : le complexe $(\Omega^*(M/\mathcal{F}),d)$ admet une décomposition de Hodge (cf. [15] ou [16]). Comme conséquence on retrouve le théorème de finitude pour $H^*(M/\mathcal{F})$. Il en résulte, d'autre part, que la cohomologie basique de $\mathcal{F}$ vérifie la dualité de Poincaré si et seulement si $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable i.e. $H^n(M/\mathcal{F})$ est non nul. La dualité de Poincaré a été obtenue indépendamment par A. Haefliger (communication privée) et V. Sergiescu [54] par des techniques homologiques.

Ces premiers résultats montrent à quel point la cohomologie de de Rham de l'espace des feuilles B est proche de celle d'une variété compacte. Ceci rentre, en fait, dans le cadre plus général de la théorie des opérateurs transversalement elliptiques que nous allons esquisser maintenant.

IV. *Opérateurs transversalement elliptiques sur les feuilletages riemanniens.*

Soit $q : E \to M$ un fibré vectoriel complexe de rang N'. On dira que E est un $\mathcal{F}$-fibré s'il est muni d'une connexion basique ∇ (cf. IV.2.1.3). Une section α de E est dite basique si elle vérifie $\nabla_X \alpha = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$. C'est la généralisation naturelle de la notion de forme différentielle basique. L'ensemble $C^\infty(E/\mathcal{F})$ des sections basiques est un module sur l'anneau $A(M/\mathcal{F})$ des fonctions basiques sur M. On note $\underset{\sim}{C}$ le préfaisceau des sections basiques de E. Un opérateur différentiel basique d'ordre m agissant sur les sections basiques de E est un morphisme de préfaisceaux $D : \underset{\sim}{C} \to \underset{\sim}{C}$ tel que pour tout ouvert V distingué pour $\mathcal{F}$ et trivialisant E, D s'écrit par rapport à un système de coordonnées locales (x,y) adaptées à $\mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F}$ est défini sur V par $dy = 0$)

$$D = \sum_{s=0}^{m} P_s\left(y, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) ,$$

où $P_s = (P_s^{k\ell})$ est une matrice de rang réel = rang réel de $E = 2N'$ telle que $P_s^{k\ell}$ est un polynôme homogène de degré s en $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ à coefficients des fonctions basiques.

Soient $z \in M$, $\xi \in T_z^* M$ un covecteur basique (on dira aussi transverse à $\mathcal{F}$) et g une fonction basique définie sur V telle que $g(z) = 0$ et $dg_z = \xi$. Le symbole principal de D en (z,ξ) est l'application linéaire $\sigma(D)(z,\xi) : E_z \to E_z$ définie par

$$\sigma(D)(z,\xi)(\eta) = \frac{1}{m!} D(g^m \alpha)(z)$$

où α est une section basique de E au-dessus de V vérifiant $\alpha(z) = \eta$. Formellement $\sigma(D)(z,\xi)$ s'obtient en substituant à $\frac{\partial}{\partial y_k}$ dans P_s la composante ξ_k de $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. On dira que D est transversalement elliptique si $\sigma(D)(z,\xi)$ est un isomorphisme pour tout $z \in M$ et tout covecteur basique ξ non nul. Notons T^*M' le fibré T^*M privé de la section nulle et $\hat{E}$ le fibré image réciproque de E par la projection canonique $T^*M' \to M$. C'est un $\mathcal{F}$-fibré au-dessus de T^*M' et le symbole principal de D est alors un morphisme de fibrés feuilletés $\sigma(D) : \hat{E} \to \hat{E}$. C'est un isomorphisme si et seulement si D est transversalement elliptique. La notion d'ellipticité transverse a été utilisée de manière implicite par B. Reinhart [48]. Elle se trouve aussi dans les travaux de M.F. Atiyah [1], A. Connes [5] et C. Lazarov [40]. Supposons maintenant que E est muni d'une métrique hermitienne h parallèle le long des feuilles pour la connexion canonique ∇^S définie par ∇ sur le fibré S^2E^* des 2-formes hermitiennes associé à E. Dans ce cas on dira que E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Supposons $m = 2m'$ pair. On définit alors une forme quadratique en chaque point (z,ξ) en posant

$$A_D(z,\xi,\eta) = (-1)^{m'} h(\sigma(D)(z,\xi)(\eta),\eta).$$

L'opérateur D est fortement transversalement elliptique si cette forme quadratique est définie positive en tout point z de M et tout covecteur basique ξ non nul. Localement un $\mathcal{F}$-fibré est l'image réciproque d'un fibré hermitien muni de la connexion de Levi-Civita sur la variété des plaques et un opérateur basique transversalement elliptique (fortement transversalement elliptique) agissant sur les sections basiques de E n'est rien d'autre que le relevé d'un opérateur différentiel au sens ordinaire elliptique (fortement elliptique) agissant sur les sections de ce fibré sur la variété des plaques.

La métrique hermitienne h sur E permet de définir un produit scalaire $<\ ,\ >_E$ sur $C^{\infty}(E/\mathcal{F})$ le munissant ainsi d'une structure préhilbertienne pour laquelle l'adjoint formel D^* de D est un opérateur différentiel basique. Je démontre alors le théroème suivant : soit D un opérateur différentiel d'ordre pair fortement transversalement elliptique agissant sur les sections basiques d'un $\mathcal{F}$-fibré hermitien E au-dessus de M. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{H}(E/\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\, D$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale

$$C^{\infty}(E/\mathcal{F}) = \mathcal{H}(E/\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}\, D^*.$$

Supposons D auto-adjoint. Une conséquence immédiate de cette décomposition est que l'équation $D\alpha = \beta$ dans $C^{\infty}(E/\mathcal{F})$ a une solution (et dans ce cas l'espace des solutions est de dimension finie) si et seulement si β est orthogonale à $\mathcal{H}(E/\mathcal{F})$. La démonstration de ce théorème de décomposition se fait en trois étapes.

i) D'abord si $\mathcal{F}$ est de Lie à feuilles denses, l'espace vectoriel $C^{\infty}(E/\mathcal{F})$ est de dimension finie. La décomposition de Hodge est donc un problème d'algèbre linéaire.

ii) Pour un feuilletage T.P. on utilise le théorème de Molino (cf. III.1.2). Soit u un point de la variété basique W de $\mathcal{F}$ et notons F_u la fibre au-dessus de u de la fibration basique $\pi : M \to W$ associée à $\mathcal{F}$ et E_u la restriction de E à F_u. Le feuilletage $\mathcal{F}_u$ induit par $\mathcal{F}$ sur F_u est de Lie à feuilles denses ; l'espace vectoriel $C^{\infty}(E_u/\mathcal{F}_u)$ est donc de dimension finie. Le parallélisme transverse à $\mathcal{F}$ et la structure de $\mathcal{F}$-fibré sur E permettent de montrer que cette dimension ne dépend pas de u. On construit alors un fibré $\bar{E}$ au-des s de W dont l'espace des sections $C^{\infty}_U(E)$ au-dessus de tout ouvert U s'identifie par un isomorphisme naturel ψ à l'espace $C^{\infty}_V(E/\mathcal{F})$ des sections basiques de E au-dessus de $V = \pi^{-1}(U)$. D'autre part

h induit une métrique hermitienne $\bar{h}$ sur $\bar{E}$ qui permet de munir $C^{\infty}(\bar{E})$ d'un produit scalaire de telle sorte que $\psi : C^{\infty}(E/F) \to C^{\infty}(\bar{E})$ est une isométrie. Enfin l'opérateur D induit sur W un opérateur différentiel $\bar{D}$ d'ordre $2m'$ fortement elliptique agissant sur les sections de $\bar{E}$ et faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(E/F) & \xrightarrow{\quad D \quad} & C^{\infty}(E/F) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ C^{\infty}(\bar{E}) & \xrightarrow{\quad \bar{D} \quad} & C^{\infty}(\bar{E}) \end{array}$$

La décomposition de Hodge pour D se ramène alors à celle de $\bar{D}$ sur W qui s'obtient en appliquant la théorie classique bien connue.

iii) Enfin pour le cas général, on considère le fibré principal $G = SO(n) \longrightarrow M^{\#} \xrightarrow{\rho} M$ des repères orthonormés directs transverses à F. La variété $M^{\#}$ est munie d'un feuilletage T.P. $F^{\#}$ de même dimension que F et invariant par l'action de G (cf. III.3.1.2). On note $E^{\#} = \rho^{*}E$ l'image réciproque par la projection ρ du fibré E qu'on munit de la connexion $\nabla^{\#}$ et de la métrique $h^{\#}$ relevées respectivement de ∇ et h. On vérifie facilement que $E^{\#}$ est un $F^{\#}$-fibré hermitien muni d'une action du groupe G. L'espace $C^{\infty}(E/F)$ des sections basiques de E s'identifie naturellement à l'espace $C^{\infty}_{G}(E^{\#}/F^{\#})$ des sections basiques de $E^{\#}$ invariantes par G. D'autre part la connexion de Levi-Civita du fibré principal $G \to M^{\#} \to M$ permet de relever l'opérateur D en un opérateur différentiel $D^{\#}$ basique, d'ordre $2m'$, agissant sur toutes les sections basiques de $E^{\#}$. Finalement on note Q' l'opérateur de Casimir le long des fibres de $M^{\#} \xrightarrow{\rho} M$ et on pose $D' = D + (-1)^{m'}Q'$. L'opérateur différentiel D' ainsi défini est basique, d'ordre $2m'$, fortement transversalement elliptique et commute avec l'action de G. En plus sa restriction à $C^\infty_G(E^\#/F^\#) = C^\infty(E/F)$ coïncide avec D. D'après ii) l'espace vectoriel $H(E^\#/F^\#)$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale $C^\infty(E^\#/F^\#) = H(E^\#/F^\#) \oplus \mathrm{Im}\, D'^*$. Comme $H_G(E^\#/F^\#) = H(E^\#/F^\#) \cap C^\infty_G(E^\#/F^\#)$ et D commute avec G, en se restreignant à $C^\infty_G(E^\#/F^\#)$ on obtient le résultat cherché.

Comme applications, outre la décomposition de Hodge pour le complexe de de Rham basique obtenue au chapitre III, je démontre un théorème de Hodge-Kodaira pour le complexe de Dolbeault basique dans le cas où F est hermitien (i.e est riemannien et transversalement holomorphe). D'où l'on déduit que la cohomologie de Dolbeault basique est de dimension finie et vérifie la dualité de Serre si et seulement si F est homologiquement orientable. Si on raffine la structure transverse en supposant par exemple que F est transversalement kählerien (et homologiquement orientable), les belles propriétés cohomologiques (structures de Hodge, théorèmes de Lefschetz etc...) des variétés kähleriennes compactes se transposent entièrement à l'espace $B = M/F$.

En fait ce théorème de décomposition s'applique à n'importe quel complexe basique transversalement elliptique sur un feuilletage riemannien sur une variété compacte.

Signalons que cette théorie peut être écrite directement sur les pseudo-groupes d'isométries à génération compacte [32] qui est a priori un cadre plus général !

Les méthodes utilisées dans ce dernier chapitre permettent d'établir sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien sur une variété compacte beaucoup de théorèmes d'Analyse Classique (voir par exemple [10], [11] et [14]) dont certains d'entre-eux ont été à peine abordés dans le cas particulier d'une surface de Sataké.

En conclusion, je peux dire que l'ensemble du travail constitue une réponse à la question posée : <u>l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien sur une variété compacte est une "variété compacte" du point de vue de l'Analyse Globale</u>.

CHAPITRE I

SUITE SPECTRALE D'UN FEUILLETAGE

1. *Généralités.*

Dans ce paragraphe nous introduisons une suite spectrale d'un feuilletage généralisant celle de Leray-Serre d'une fibration localement triviale.

1.1. *Définition.* Une forme différentielle α sur M est dite basique si $i_X\alpha = i_X d\alpha = 0$ pour tout champ X tangent à F.

Le faisceau $\underset{\sim}{\Phi}^p$ des germes de p-formes basiques n'est pas fin en général (sauf si $\dim F = 0$) et permet donc de définir une théorie de cohomologie $H^q(M,\underset{\sim}{\Phi}^p)$ non triviale qu'on appelle la cohomologie bigraduée de la variété feuilletée (M,F).

Cette cohomologie est en fait le terme E_1 d'une suite spectrale (E_1) associée à F et dont l'aboutissement est la cohomologie de de Rham de M.

1.2. *Proposition.* On a une résolution du faisceau constant $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$:

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \underset{\sim}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\sim}{\Phi}^0 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \underset{\sim}{\Phi}^n \longrightarrow 0$$

Démonstration : Il est clair que $\underset{\sim}{\mathbb{R}}$ s'injecte dans $\underset{\sim}{\Phi}^0$ qui est le faisceau des germes de fonctions constantes sur les feuilles. Pour démontrer l'exactitude il suffit de le faire sur un voisinage ouvert U de chaque point et appliquer le lemme de Poincaré habituel sur la variété des plaques.

On obtient donc le :

1.3. *Théorème* [25]. La cohomologie de de Rham $H^*(M,\mathbb{R})$ est isomorphe à l'hypercohomologie $\mathbb{H}^*(M,\underset{\sim}{\Phi}^*)$ de M à valeurs dans le faisceau différentiel $\underset{\sim}{\Phi}^*$.

A la suite exacte (1) correspond une suite spectrale (E_r) de terme : $E_1^{pq} = H^q(M,\underset{\sim}{\Phi}^p)$ convergent vers $H^*(M,R)$.

2. *Résolution du faisceau* $\underset{\sim}{\phi}^p$.

Nous allons donner une résolution fine canonique du faisceau $\underset{\sim}{\phi}^p$ en termes de formes différentielles qui nous permettra de calculer $H^*(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$.

Pour tout fibré vectoriel E au-dessus de M, on notrera Λ^*E^* le fibré en algèbres extérieures associé. Une section du fibré $\Lambda^q T^*F \otimes \Lambda^p \nu^* F$ sera appelée une q-forme différentielle tangente à valeurs dans $\Lambda^p \nu^* F$. On notera $A^{p,q}(M)$ l'espace de ces formes différentielles et $\underset{\sim}{A}^{p,q}$ le faisceau des germes correspondant.

Soit $d_F : A^{o,q}(M) \to A^{o,q+1}(M)$ la différentielle extérieure le long des feuilles i.e. l'opérateur défini par

$$d_F\alpha(X_1,\ldots,X_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)\ X_i \cdot \alpha(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{q+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\ \alpha([X_i,X_j],\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{q+1})$$

qui vérifie clairement $d_F^2 = 0$. On a la

2.1. *Proposition.* [57]. La suite

$$0 \to \underset{\sim}{\Phi} \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{oo}(M) \xrightarrow{d_F} A^{o1}(M) \xrightarrow{d_F} \cdots$$

est une résolution fine du faisceau $\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{\phi}^p$.

Puisque le fibré $\Lambda^p \nu^* F$ est feuilleté (le cocycle est constant sur les feuilles) l'opérateur

$$A^{oq} \underset{\underset{\sim}{\phi}}{\otimes} \Lambda^p \nu^* F \xrightarrow{d_F \otimes 1} A^{o,q+1} \otimes \Lambda^p \nu^* F$$

donne globalement une différentielle notée encore d_F.

$$d_F : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+1}(M)$$

De la proposition 2.1 on déduit alors une résolution fine de $\underset{\sim}{\phi}^p$.

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{\phi}^p \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{po}(M) \xrightarrow{d_F} A^{pq}(M) \xrightarrow{d_F} \cdots$$

2.3. Théorème. On a :

$$H^q(M,\underset{\sim}{\phi}^p) = \frac{\mathrm{Ker}(A^{pq}(M) \to A^{p,q+1}(M))}{\mathrm{Im}(A^{p,q-1}(M) \to A^{p,q}(M))} .$$

Dans la suite $H^q(M,\underset{\sim}{\phi}^p)$ sera noté $H^{pq}(M,F)$ et sera appelé la cohomologie bigraduée de type (p,q) de la variété feuilletée (M,F).

3. *Invariance de la suite spectrale* (E_r).

Une homotopie habituelle préservant F laisse les termes $(E_r)_{r \geq 2}$ invariants mais pas le terme E_1. Pour ce faire il faudrait qu'elle préserve en plus chaque feuille individuellement. Une telle homotopie est dite intégrable (cf [31]).

L'invariance du terme E_1 par homotopie intégrable a été démontrée independamment par K.S. Sarkaria [31] et l'auteur [9]. Nous rappelons rapidement cette dernière.

Soient (M,F) et (M',F') deux variétés feuilletées et f une application de M dans M'. On dira que f est feuilletée si pour toute feuille L de F, $f(L)$ est contenue dans une feuille de F'.

On peut feuilleter $M \times [0,1]$ de deux façons différentes :

Soit par p^*F où $p : M \times [0,1] \to M$ est la première projection soit en mettant le feuilletage F dans chaque facteur $M \times \{t\}$. Dans le premier cas on dira que $M \times [0,1]$ est 1-feuilletée ; dans le second cas on dira que $M \times [0,1]$ est 2-feuilletée.

Soient maintenant f et g deux applications feuilletées de $(M,\mathcal{F})$ dans $(M',\mathcal{F}')$.

3.1. *Définition.* f et g sont dites k-homotopes $(k = 1,2)$ s'il existe une application

$$H : M\times I \to M'$$

envoyant les feuilles du k-feuilletage sur $M\times I$ dans les feuilles de $\mathcal{F}'$.

3.2. *Proposition* [51]. Si f et g sont k-homotopes alors elles induisent le même homomorphisme

$$E_r(M,\mathcal{F}) \to E_r(M$$

pour $r \geqslant k$.

3.3. *Corollaire* [9]. Si $(M',\mathcal{F}')$ est un retract par k-déformation de $(M,\mathcal{F})$, alors $E_r(M,\mathcal{F})$ et $E_r(M',\mathcal{F}')$ sont isomorphes pour $r \geqslant k$.

En particulier si $f : M \to M'$ est un difféomorphisme feuilleté, alors pour tout $r \geqslant 0$, $E_r(M,\mathcal{F})$ et $E_r(M',\mathcal{F}')$ sont isomorphes.

4. *Théorème de Mayer-Vietoris pour la cohomologie bigraduée.*

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de M. Pour tout multi-indice $(i_o,\dots,i_s)$ on pose :

$$U_{i_o\dots i_s} = U_{i_o} \cap \dots \cap U_{i_s}$$

on a une suite d'inclusions :

$$M \longleftarrow \coprod_{i_o} U_{i_o} \underset{\partial_1}{\overset{\partial_o}{\leftleftarrows}} \coprod_{i_o<i_1} U_{i_o i_1} \Lleftarrow \dots$$

On fixe un entier $p \in \{0,\dots,n\}$. Cette suite d'inclusions induit une suite de restrictions :

$$A^{p*}(M) \xrightarrow{r} \prod_{i_o} A^{p*}(U_{i_o}) \underset{\delta_1}{\overset{\delta_o}{\rightrightarrows}} \prod_{i_o<i_1} A^{p*}(U_{i_o i_1}) \rightrightarrows \dots$$

Les ouverts $(U_{i_o \dots i_1})$ étant, bien entendu, munis des feuilletages induits par F.

On pose :

$$C^s(\mathcal{U},A^{p*}) = \prod_{i_o \dots i_s} A^{p*}(U_{i_o \dots i_s})$$

on construit alors comme dans le cas usuel (cf [3]) un opérateur :

$$\delta : C^s(\mathcal{U},A^{p*}) \to C^{s+1}(\mathcal{U},A^{p*})$$

on a la :

4.1. Proposition. La suite :

$$0 \longrightarrow A^{p*}(M) \xrightarrow{\delta} C^o(\mathcal{U},A^{p*}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},A^{p*}) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration : On construit un opérateur d'homotopie $K : C^s(\mathcal{U},A^{p*}) \to C^{s-1}(\mathcal{U},A^{p*})$ en utilisant une partition de l'unité, subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$.

De cette proposition on déduit :

4.2. Proposition. La restriction $r : A^{p*}(M) \to C^*(\mathcal{U},A^{p*})$ induit un isomorphisme :

$$r^* : H^{p*}(M,F) \to H_{D_p}(C^*(\mathcal{U},A^{p*}))$$

où $D_p = \delta + (-1)^s d_F$ est la différentielle du double complexe $(C^s(\mathcal{U},A^{pq}))_{sq}$.

On a alors une suite spectrale $E_r(p)$ de terme $E_2^{sq}(p) = H^s(\mathcal{U},\mathcal{H}^{pq})$ et dont l'aboutissement et la cohomologie bigraduée de type $(p,*)$ de (M,F) où $\mathcal{H}^{pq}$ est préfaisceau sur M qui à tout ouvert $V \in \mathcal{U}$ associe $H^{pq}(V,F)$.

4.3. Cas particulier. Si le recouvrement $\mathcal{U}$ est formé de deux ouverts U_o et U_1 la suite 4.1 se réduit à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow A^{p*}(M) \longrightarrow A^{p*}(U_o) \oplus A^{p*}(U_1) \longrightarrow A^{p*}(U_o \cap U_1) \longrightarrow 0$$

à laquelle est associée la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H^{po}(M,F) \longrightarrow H^{po}(U_o,F) \oplus H^{po}(U_1,F_1) \longrightarrow H^{po}(U_o \cap U_1,F) \longrightarrow H^1(M,F) \longrightarrow \dots$$

qu'on appellera la suite de Mayer-Vietoris de cohomologie bigraduée de (M,F). Nous nous sommes référés à [3] pour cette section.

5. *Exemples de calculs.*

Nous allons donner quelques calculs explicites du terme (E_1) de la suite spectrale pour certains feuilletages.

5.1. *Feuilletages linéaires sur les tores.*

Soient $X_1,\dots,X_m$ des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^{n+m}$. Ces vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel de dimension m de $\mathbb{R}^{n+m}$. Les m-plans affines parallèles à ce sous-espace définissent un feuilletage invariant par les translations et donc un feuilletage sur F_m sur $T^{n+m} = \mathbb{R}^{n+m}/\mathbb{Z}^{n+m}$. Les feuilles sont des m-plans, des m-cylindres $T^r \times R^{m-r}$ ou des tores T^m. Ce feuilletage est défini par n formes fermées linéairement indépendantes en chaque point. Il possède donc une structure transverse de Lie modelée sur le groupe $\mathbb{R}^n$.

Supposons $m = 1$ et notons F_1 le feuilletage sur T^{n+1} défini par le vecteur $X = (1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1})$.

Si F_1 est à feuilles denses, alors toute fonction f telle que $d_F f = 0$ est constante. D'où $H^{oo}(T^{n+1},F_1) \simeq \mathbb{R}$. Sinon les adhérences des feuilles sont des tores T^ℓ qui fibrent T^{n+1} sur un tore $T^{n+1-\ell}$. Par conséquent $H^{oo}(T^{n+1},F_1) \simeq A(T^{n+1-\ell})$ qui est l'espace des fonctions sur $T^{n+1-\ell}$.

Pour calculer $H^{01}(T^{n+1},F_1)$, notons w la 1-forme duale à X. Toute forme α de type $(0,1)$ s'écrit :

$$\eta = f(x_1,\dots,x_{n+1})w$$

où $f \in A(T^{n+1})$.

La forme η est $d_{\mathcal{F}}$-fermée. Elle est $d_{\mathcal{F}}$ exacte s'il existe $h \in A(T^{n+1})$ telle que

$$\eta = d_{\mathcal{F}}h \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{\partial h}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{n+1} \frac{\partial h}{\partial x_{n+1}} = f.$$

En développant f et g en série de Fourier, cette équation se ramène au système :

$$(S) \qquad 2i\Pi(s_1+s_2\alpha_1 + \ldots + s_{n+1}\alpha_{n+1})h_{s_1,\ldots,s_{n+1}} = f_{s_1,\ldots,s_{n+1}}$$

où $(s_1,\ldots,s_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Si $1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants on montre facilement que $\bar{H}^{01}(T^{n+1},\mathcal{F}_1)$ est de dimension infinie mais séparé.

Supposons $1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}$ $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Si $f_{0,\ldots,0} \neq 0$ le système (S) n'a pas de solution et donc $\dim H^{01}(T^{n+1},\mathcal{F}_1) \geq 1$. Sinon on choisit $h_{o,\ldots,o}$ arbitraire. Et pour $(s_1,\ldots,s_{n+1}) \neq (0,\ldots,0)$, on a :

$$h_{s_1,\ldots,s_{n+1}} = \frac{f_{s_1,\ldots,s_{n+1}}}{2i\Pi(s_1+s_2\alpha_2+\ldots+s_{n+1}\alpha_{n+1})} \quad .$$

La convergence de la série de Fourier de h dépend de la nature arithmétique du vecteur $(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1})$.

5.1.1. Définition. Un vecteur $(1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est dit :

i) de Liouville si pour tout $\gamma > 0$ il existe des entiers $s_1,\ldots,s_{n+1}$ tels que :

$$|s_1+s_2\alpha_2 + \ldots + s_{n+1}\alpha_{n+1}| < \frac{1}{(|s_1|+\ldots+|s_{n+1}|)} \gamma$$

ii) diophantien s'il existe $\gamma > 2$ et $A > 0$ tels que

$$|s_1+s_2\alpha_2 + \ldots + s_{n+1}\alpha_{n+1}| > \frac{A}{(|s_1|+\ldots+|s_{n+1}|)^{\gamma}}$$

pour $s_1,\ldots,s_{n+1}$ assez grands.

5.1.2. <u>Théorème</u>. Si le vecteur $X = (1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1})$ est

i) de Liouville, $H^{01}(T^{n+1},F_1)$ est un espace vectoriel topologique de dimension infinie et non séparé, l'adhérence de 0 est de codimension 1.

ii) diophantien, $H^{01}(T^{n+1},F_1)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ et $H^{p1}(T^{n+1},F_1) \simeq \mathbb{R}^{c_n^p}$ pour tout $p \in \{0,\dots,n\}$.

Si m est quelconque, on dira que F_m est diophantien si tous les vecteurs $X_1,\dots,X_m$ qui le définissent le sont.

Dans ce cas on a le :

5.1.3. <u>Théorème</u>. Soit F_m un feuilletage linéaire diophantien sur le tore T^{n+m}. Alors

$$H^{pq}(T^{n+m},F_m) \simeq \Lambda^p\mathbb{R}^n \otimes \Lambda^q\mathbb{R}^m.$$

<u>Démonstration</u> : On fait une récurrence sur $\dim F_m$ et $\dim T^{n+m}$. On coupe suivant deux fibres T^{n+m-1} transverses à F_m. En utilisant l'invariance de la cohomologie bigraduée par 1-homotopie on se ramène à un feuilletage diophantien F_{m-1} sur F^{n+m-1} et on applique la suite exacte de Mayer-Vietoris (cf [18] pour plus de détails).

5.2. *Feuilletages épaissis et suspensions.*

On note $\mathrm{Aut}(M,F)$ le groupe des automorphismes de F. On se donne comme dans [20],

i) une variété W

ii) une représentation $\rho : \Pi(W) \to \mathrm{Aut}(M,F)$.

Soit $\tilde{W}$ le revêtement universel de W et $p_2 : \tilde{W}\times M \to M$ la deuxième projection. Alors le feuilletage p_2^*F est invariant par les transformations

$$\tilde{W}\times M \to \tilde{W}\times M$$
$$(\tilde{u},x) \to (\gamma\cdot\tilde{u},\rho(\gamma)x)$$

et induit donc un feuilletage $\mathcal{F}_\rho$ sur la variété quotient $M_\rho = \tilde{W}\times M/(\tilde{u},x) \simeq (\gamma\tilde{u},\rho(\gamma)x)$.

La fibration localement triviale :

$$M \to M_\rho \xrightarrow{\Pi} W$$

va nous permettre, en appliquant les résultats du §.4 de construire une suite spectrale reliant la cohomologie de W, la cohomologie bigraduée de $(M,\mathcal{F})$ et convergeant vers $H^{**}(M_\rho,\mathcal{F}_\rho)$. Comme applications on calculera la cohomologie bigraduée des suspensions et un exemple de feuilletage $(M_\rho,\mathcal{F}_\rho)$ obtenu à l'aide d'une représentation du groupe fondamental du cercle dans le groupe des automorphismes d'un feuilletage linéaire diophantien sur un tore.

5.2.1. <u>Suite spectrale.</u>

Soit $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un bon recouvrement distingué (i.e les ouverts V_i sont distingués et tels que toutes les intersections finies sont contractiles) de W. On pose

$$U_i = \Pi^{-1}(V_i) \simeq V_i\times M.$$

D'après le §.4 on a une suite spectrale $E_r(p)$ de terme $E_2^{s,q}(p) = H^s(\mathcal{U},\mathcal{H}^{pq})$ qui converge vers la cohomologie bigraduée de $(M_\rho,\mathcal{F}_\rho)$.

En fait $\mathcal{H}^{pq}$ est le préfaisceau localement constant sur W qui à tout ouvert V associe $H^{pq}(\Pi^{-1}(V),\mathcal{F})$. Le faisceau associé a pour fibre $H^{pq}(M,\mathcal{F})$ car $(\Pi^{-1}(V),\mathcal{F})$ et $(M,\mathcal{F})$ ont même type de 1-homotopie.

On a donc une suite spectrale $E_r(p)$ de terme :

$$E_2^{sq}(p) = H^s(W,H^{pq}(M,\mathcal{F})) \simeq H^s(\mathcal{U},\mathcal{H}^{pq})$$

et dont l'aboutissement est la cohomologie bigraduée $H^{p*}(M_\rho,\mathcal{F}_\rho)$.

5.2.2. <u>Cas particuliers.</u>

i) Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage ayant pour seule feuille M, on a :

$$H^{pq}(M,\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{pour } p > 0$$

et $$H^{0q}(M,F) = H^q_{DR}(M).$$

Dans ce cas, on retrouve la suite spectrale d'une fibration localement triviale telle qu'elle est décrite dans [3] par exemple.

ii) Si F est le feuilletage par points, F_ρ est obtenu en suspendant un groupe de difféomorphisme de M. On a :

$$H^{pq}(M,F) = \begin{cases} 0 & \text{pour } q > 0 \\ A^p(M) & \text{pour } q = 0 \end{cases}$$

où $A^p(M)$ est l'espace des p-formes différentielles sur M.

La suite spectrale $E_r(p)$ stationne au terme $E_2(p)$ i.e $E_\infty(p) = E_2(p)$. Comme $E_\infty^{s,q}(p) = 0$ pour $q \neq 0$, on a :

$$H^{p,s}(M_\rho, F_\rho) = E_2^{s0}(p) = H^s(W, A^p)$$

où A^p est le fibré plat localement trivial au-dessus de W dont la fibre est l'espace $A^p(M)$.

L'action de $\Pi_1(W)$ sur $A^p(M)$ est donnée par :

$$h^* : A^p(M) \to A^p(M)$$
$$\omega \to h^*\omega$$

où $h = \rho(\gamma)$ avec $\gamma \in \Pi_1(W)$.

5.2.3. Calculs explicites.

5.2.3.1. Suspension d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}$.

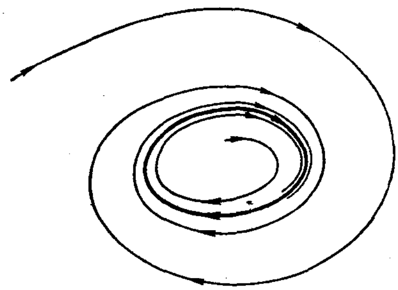
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un difféomorphisme tel que :

i) $\varphi(0) = 0$

ii) $|\varphi(x)| < |x|$ pour $x \neq 0$ et $\rho : \Pi_1(\mathbb{S}^1) = Z \to \mathrm{Diff}(\mathbb{R})$ la représentation définie par $\rho(1) = \varphi$.

La variété M_ρ obtenue en suspendant φ à l'aide de ρ est difféomorphe à

$\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ et le feuilletage $\mathcal{F}_\rho$ sur M_ρ a l'allure ci-dessous.



D'après 5.2.2. ii) on a :

$$H^{ps}(M_\rho,\mathcal{F}_\rho) = H^s(\mathbb{S}^1,A^p(\mathbb{R})).$$

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de $\mathbb{S}^1$ par des intervalles ouverts U_o,U_1,U_2 dont les intersections sont des intervalles U_{01},U_{12},U_{02} et $U_{012} = \emptyset$.

Un élément $c \in C^o(\mathcal{U},A^p(\mathbb{R}))$ est un triplet $c = (f_o,f_1,f_2)$ où f_o,f_1 et f_2 sont dans $A^p(\mathbb{R})$. On a $\delta c = (f_{01},f_{12},f_{20})$ où f_{01},f_{12} et f_{20} sont donnés par :

$$\begin{cases} f_{01} = f_1 - f_0 \\ f_{12} = f_2 - f_1 \\ f_{20} = \psi^* f_0 - f_2 \end{cases}$$

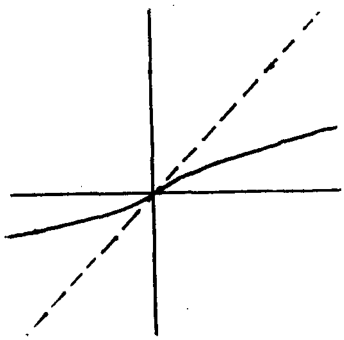
L'équation $\delta c = 0$ est alors équivalente à $f_0 = f_1$, $f_1 = f_2$ et $\psi^* f_0 = f_0$. On en déduit que l'espace $H^o(\mathbb{S}^1,A^p(\mathbb{R}))$ s'identifie au noyau de l'opérateur

$$\psi^* : A^p(\mathbb{R}) \to A^p(\mathbb{R})$$
$$\alpha \to \psi^*\alpha - \alpha$$

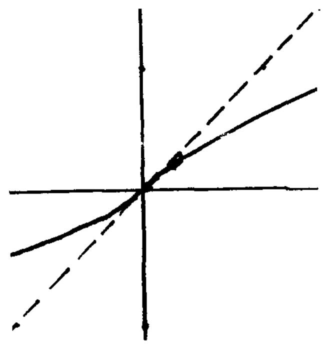
Un raisonnement du même genre donne

$$H^1(S^1, A^p(\mathbb{R})) = \operatorname{Coker} \psi^*.$$

Nous ferons les calculs pour deux types de difféomorphismes :



O est hyperbolique



ψ est infiniment tangent à l'identité en O.

Dans tous les cas on a $H^0(\mathbb{S}^1, A^0(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$. En effet une fonction f qui vérifie $f = f \circ \psi$ est constante sur les orbites de ψ ; donc sur les adhérences de ces orbites. Mais comme ces adhérences ont 0 comme point commun, f est constante.

i) <u>cas où</u> ψ <u>est hyperbolique</u>.

Le difféomorphisme ψ est C^∞-conjugué à l'homothétite $x \to ax$ (cf [5c]). On peut donc supposer $\psi(x) = ax$ puisque la cohomologie bigraduée est invariante par conjugaison différentiable.

Pour calculer $H^1(\mathbb{S}^1, A^0(\mathbb{R}))$ il suffit de résoudre le problème suivant : étant donné $f \in A^0(\mathbb{R})$ existe-t-il $g \in A^0(\mathbb{R})$ telle que

$$f = g \circ \psi - g \ ? \quad \text{i.e} \quad f(x) = g(ax) - g(x).$$

Il est nécessaire d'avoir $f(0) = 0$; donc $\dim H^1(\mathbb{S}^1, A^0(\mathbb{R})) \geqslant 1$. Supposons cette condition remplie. Alors g est nécessairement de la forme :

$$g(x) = \sum_{n \geqslant 0} f(a^n X).$$

Pour $x = 0$ tous les termes de la série sont nuls donc elle est convergente.

Nous allons montrer que la série dérivée converge uniformément sur tout compact $[-R,+R]$ où $R > 0$. On a formellement :

$$g'(x) = \sum_{n\geqslant 0} a^n f(a^n x) .$$

Le terme $f(a^n x)$ est majoré par $\sup_{[-R,R]} f$ qui ne dépend pas de n. La convergence est assurée car $0 < a < 1$. On en déduit que g est bien défini de class C^1. Le même raisonnement vaut pour les dérivées d'ordre supérieur. La fonction g est C^∞. L'espace $H^1(S^1, A^o(\mathbb{R}))$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha = g(x)\,dx \in A^1(\mathbb{R})$. Alors $\varphi^*(\alpha) = ag(ax)dx$. Si α satisfait $\varphi^*(\alpha) = \alpha$, la fonction g vérifie

$$ag(ax) = g(x).$$

Pour $x = 1$, on obtient $g(a^n) = \frac{1}{a^n} g(1)$. Quand $n \to \infty$, a^n tend vers 0 et $g(a^n)$ tend vers ∞. La fonction g ne saurait donc être continue en 0. D'où :

$$H^o(S^1, A^1(\mathbb{R})) = 0.$$

Reste à calculer $H^1(S^1, A^1(\mathbb{R}))$. Pour cela, rappelons-nous que $E_1^{ps} = H^s(S^1, A^p(\mathbb{R})) = H^{ps}(M_\rho, F_\rho)$. D'autre part, $E_1^{11} = E_2^{1,1} \oplus d_1(E_1^{01})$ est de dimension finie. Soit $d^{p,s} = \dim E_1^{p,s}$. On a :

$$0 = \chi(M_\rho) = d^{00} - (d^{10} + d^{01}) + d^{11}$$

D'où : $d^{11} = 0$. i.e $H^1(S^1, A^1(\mathbb{R})) = 0$.

ii) <u>Cas où φ est infiniment tangent à l'identité.</u>

Pour calculer la cohomologie bigraduée de (M_ρ, F_ρ) dans ce cas on se servira du fait que la suite spectrale

$$E_1^{ps} = H^{ps}(M_\rho, F_\rho) = H^s(S^1, A^p(\mathbb{R}))$$

converge vers $H^*(M_\rho,R)$ au terme E_2.

Tout d'abord $H^0(\mathcal{U},A^0(\mathbb{R}))$ s'identifie aux fonctions constantes i.e. $E_1^{00} = \mathbb{R}$.

D'autre part, $H^1(\mathcal{U},A^0(\mathbb{R}))$ est le conoyau de l'opérateur $A^0(\mathbb{R}) \to A^0(\mathbb{R})$ qui à f associe $f - f \circ \psi$. On est donc amené à résoudre l'équation

$$g = f - f \circ \psi$$

On a $g(0) = 0$ (car $\psi(0) = 0$).

Calculons les dérivées successives de g :

$$g'(x) = f'(x) - \psi' f'(\psi(x))$$
$$g''(x) = f''(x) - \psi'^2 f''(\psi(x) - \psi'' f'(\psi(x))$$
etc.....

Or $\psi'(0) = 1$ et $\psi''(0) = \psi'''(0) = \dots = 0$ car f est infiniment tangent à l'identité en 0. On en déduit que g doit être plate en 0. $H^1(\mathcal{U},A^0(\mathbb{R}))$ est donc de dimension infinie. Il contient par exemple l'espace $A^\omega(\mathbb{R})$ des fonctions analytiques.
Le terme $E_2^{01} = \mathrm{Ker}(E_1^{01} \to E_1^{11})$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ puisqu'il contient les constantes et est facteur direct de $H^1(M_\rho,\mathbb{R}) = E_2^{01} \oplus E_2^{10}$. Donc $E_2^{10} = 0$. Par conséquent $E_1^{10} = 0$ car $d_1 = 0$ sur E_1^{00}.

Finalement, on montre que $H^{11}(M_\rho,\mathcal{F}_\rho)$ est de dimension infinie.

On résume tout dans le tableau qui suit en donnant les dimensions des espaces :

<u>Cas i)</u>

q \ p	0	1
1	1	0
0	1	0

<u>cas ii)</u>

q \ p	0	1
1	∞	∞
0	1	0

Cet exemple montre bien que la cohomologie bigraduée n'est pas invariante par conjugaison topologique. En effet, deux difféomorphismes contractants ψ_1 et ψ_2 de $\mathbb{R}^+$ fixant 0 et tels que ψ_1 infiniment tangent à l'identité et $\psi_2'(0) \in [0,1]$ n'ont pas le même terme E_1^{*1}; et pourtant ils sont topologiquement conjugués !

5.2.3.2. Suspension d'un difféomorphisme du cercle.

Soit $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un difféomorphisme du cercle. Alors en suspendant ψ à l'aide de la représentation $\rho : \Pi_1(\mathbb{S}^1) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ définie par $\rho(1) = \psi$ on obtient un feuilletage F_ρ sur T^2.

Notons $\tilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relèvement de ψ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x+1) = f(x) + 1$. Posons :

$$a(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{\psi}^n(x)}{n} .$$

Alors cette limite existe et est telle que si $x' \neq x$, $a(x) - a(x')$ est un entier, donc définit un élément a de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ appelé le nombre de rotation de ψ.

Si ψ est une rotation alors a coïncide avec l'angle de rotation. Dans ce cas le calcul a été fait en 5.1.

Supposons que ψ n'est pas une rotation

i) cas où a est irrationnel.

D'après un théorème de Denjoy, ψ est topologiquement conjugué à la rotation d'angle a.

Si le vecteur $(1,a) \in \mathbb{R}^2$ est diophantien (cf. 5.1.1 ii)) la conjugaison est différentiable. [35] La dimension de la cohomologie bigraduée $H^{pq}(T^2,F)$ est donnée par le tableau

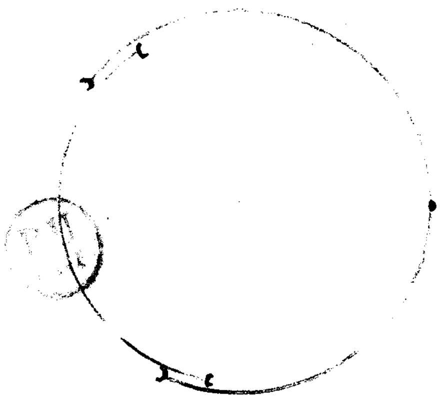
$$
\begin{array}{c|ccc}
q & & & \\
0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 0 & 1 & p
\end{array}
$$

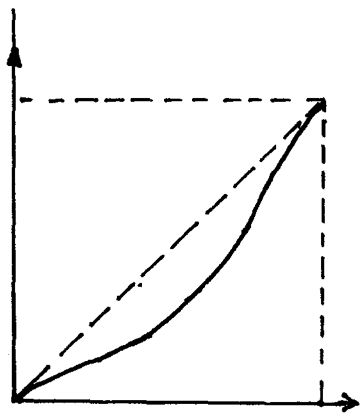
(cf 5.1.2. ii)).

Si $(1,a)$ est de Liouville la question est ouverte.

ii) <u>Cas où a est rationnel.</u>

Le difféomorphisme ψ a nécessairement un point périodique x_o. Si x_o est unique, ψ est nécessairement infiniment tangent à l'identité en x_o.





La suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement $\{U_0,U_1\}$ s'écrit

$$0 \to H^{p0}(T^2,\mathcal{F}_\rho) \to H^{p0}(U_o,\mathcal{F}_\rho) \oplus H^{p0}(U_1,\mathcal{F}_\rho) \to H^{p0}(U_0 \cap U_1,\mathcal{F}_\rho) \to H^{p1}(T^2,\mathcal{F}_\rho)$$

Pour $p = 0$, la suite s'écrit :

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1) \oplus C^\infty(S^1) \to H^{01}(T^2,\mathcal{F}\ ) \to 0$$

L'examen de cette suite montre que H^{01} est de dimension infinie.

Pour $p = 1$, on a :

$$0 \to C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1 \oplus C^\infty(S^1) \to H^{11}(T^2,F) \to 0.$$

Là encore on constate que $H^{11}(T^2,F)$ est de dimension infinie.

Dans le cas où il y a plusieurs points périodiques, on montre par des calculs similaires que les espaces de cohomologie bigraduée ont pour dimension

$$\begin{array}{c|ccc}
q & & & \\
1 & \infty & \infty & \\
0 & 1 & 0 & \\
\hline
 & 0 & 1 & p
\end{array}$$

5.2.3.3. <u>Feuilletages sur les tores hyperboliques.</u>

Soit A une matrice de $S\ell\,(n+m,\mathbb{Z})$ diagonalisable ayant ses valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda'_1,\ldots,\lambda'_m$ telles que $\lambda'_1,\ldots,\lambda'_m$ soient irrationnelles. Pour tout $j = 1,\ldots,m$ on notera $X_j = (1,\alpha_2^j,\ldots,\alpha_m^j)$ un vecteur propre associé à la valeur propre α'_j de telle sorte que $X_1,\ldots,X_m$ soit un système libre. On supposera que α_k^j est irrationnel pour tout $j = 1,\ldots,m$ et tout $k = 2,\ldots,m$. Le vecteur X_j est alors diophantien pour tout j.
Considérons le feuilletage F_m sur T^{n+m} défini par l'action de $\mathbb{R}^m$ engendrée par les (X_j). Ce feuilletage est diophantien. Sa cohomologie bigraduée de type (p,q) est donc :

$$H^{pq}(T^{n+m},F_m) = \Lambda^p\,\mathbb{R}^n \otimes \Lambda^q\,\mathbb{R}^m$$

(cf 5.1.3).

Soit ρ la représentation de $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(T^{n+m},F_m)$ définie par $\rho(1) = A$. En procédant de la même façon qu'en 5.2. on obtient un feuilletage $\mathcal{F}_\rho$ sur le tore hyperbolique

$$T_A^{n+m+1} = T^{n+m} \times \mathbb{R}/(x,t) \sim (A(x),t+1)$$

Les feuilles sont des plans $\mathbb{R}^{m+1}$ et des cylindres $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^1$.

D'après 5.2.1., on a :

$$E_2^{sq}(p) = H^s(\mathbb{S}^1, H^{pq}(T^{n+m}, \mathcal{F}_m)).$$

Nous allons calculer le terme $E_2(p)$ de cette suite spectrale.

Soit $(\theta^1,\dots,\theta^n,\theta'^1,\dots,\theta'^m)$ une base duale d'une base propre de A. Un élément $\beta \in H^{pq}(T^{n+m},\mathcal{F}_m)$ peut être représenté sous la forme :

$$\beta = \sum \beta_{i_1\dots i_p j,\dots,j_q} \; \theta^{i_1} \wedge \dots\dots \wedge \theta^{i_p} \wedge \theta'^{j_1} \wedge \dots \wedge \theta'^{j_q}$$

où $\beta_{i_1,\dots,i_p j_1,\dots,j_q}$ sont des constantes.

L'action de $\Pi_1(\mathbb{S}^1)$ sur un élément θ^i (resp. θ'^j) s'écrit $\lambda_i \theta^i$ (resp. $\lambda'_j \theta'^j$). Il est alors clair que la dimension de $E_2^{0q}(p) \simeq E_2^{1q}(p)$ est égale au nombre de (p+q)-uples $(i_1,\dots,i\ ,j_1,\dots,j_q)$ tels que $\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_p}\lambda'_{j_1}\dots\lambda'_{j_q} = 1$.

D'autre part, on a :

$$E_2^{sq}(p) = E_\infty^{sq}(p),$$

car dim $S^1 = 1$. D'où :

$$H^{pq}(T_A^{n+m+1},F_\rho) = E_2^{0q}(p) \oplus E_2^{1,q-1}(p).$$

Par exemple, si n = m = 1, on a $T_A^{n+m+1} = T_A^3$ et $\mathcal{F}_\rho$ est le feuilletage d'Anosov décrit dans [22] par exemple. Dans ce cas on a :

q \ p	0	1
2	0	1
1	1	0
0	1	0

En particulier on a $H^{02}(T^3_A, F_\rho) = 0$; ce qui contredit un théorème de I. Vaisman [57].

Notons $\underset{\sim}{\theta}$ le faisceau des germes de champs basiques pour le feuilletage F_ρ sur T^3_A i.e le quotient du faisceau des germes d'automorphismes infinitésimaux de F_ρ par le faisceau des germes des champs tangents à F_ρ. Des calculs jumilaires à ceux que l'on vient de faire permettent de montrer que l'espace $H^1(T^3_A, F_\rho)$ des déformations infinitésimales de F_ρ est nul. La C^∞-stabilité structurelle de ce feuilletage a déjà été établie par E. Ghys et V. Sergiescu dans [22].

CHAPITRE II

DUALITE POUR LES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT HOLOMORPHES.

1. Généralités.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 2n sur une variété M de dimension 2n+m.

1.1. Définition. On dira que $\mathcal{F}$ est transversalement holomorphe s'il est défini par une famille de submersions locales $U_i \xrightarrow{f_i} \mathbb{C}^n$ telles que pour tous i et j il existe un isomorphisme holomorphe $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$ vérifiant

$$f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$$

1.2. Exemples

i) Sur $\mathbb{C}^2$ on considère le champ de vecteurs

$$Z = \alpha z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad .$$

Ce champ définit un feuilletage sur la sphère $S^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2/|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ si et seulement si ses feuilles intersectent transversalement S^3. Un calcul simple montre que ceci est le cas si $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}^-$. Le flot induit sur $\mathbb{S}^3$ est transversalement holomorphe. Il a deux orbites fermées définies respectivement par $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$.

ii) En imitant la construction faite par E. Ghys dans [?0] on obtient d'autres exemples de feuilletages transversalement holomorphes. Soient N une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension n transversalement holomorphe et B une variété à groupe fondamental de type fini. Supposons qu'on a une représentation $\rho : \Pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(N,\mathcal{F})$ où $\mathrm{Aut}(N,\mathcal{F})$ est le groupe des automorphismes de N préservant $\mathcal{F}$. Soit $\tilde{B}$ le revêtement universel de B. Par produit $\tilde{B}\times N$ on obtient un feuilletage de codimension n invariant par les transformations :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}\times N & \longrightarrow & \tilde{B}\times N \\ (\tilde{b},z) & \longrightarrow & (\gamma\cdot\tilde{b},\rho(\gamma)z) \end{array}$$

où $\gamma \in \Pi_1(B)$ et induit donc un feuilletage $\mathcal{F}_\rho$ transversalement holomorphe sur le quotient $M = \tilde{B}\times N/_{(\tilde{b},z)\sim(\gamma\cdot\tilde{b},\rho(\gamma)z)}$.

iii) Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage par points dans l'exemple qui précède alors

N est une variété analytique complexe et $\mathcal{F}_\rho$ est transverse à la fibration naturelle

$$N \to M \xrightarrow{\Pi} B$$

iv) Soit $K = \{(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}\} - \{(0,0)\}$. L'équation $dz = 0$ définit un feuilletage de dimension 1 transversalement holomorphe sur K. Celui-ci est invariant par la transformation

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K \\ (t,z) &\longrightarrow (at,az) \end{aligned}$$

où $a \in]0,1[$ et définit un flot $\mathcal{F}$ sur $M = K/_{(t,z)\sim(at,az)}$ qui n'est rien d'autre que le flot normal au feuilletage affine de Reeb sur $S^1 \times D^2$.

Si on prend cette fois-ci $K = \mathbb{R} \times \mathbb{C} - \{(0,0)\}$, la même construction donne un flot transversalement holomorphe sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

1.3. Remarques.

i) Une variété qui supporte un feuilletage transversalement holomorphe est une variété mixte.

ii) Toute transversale hérite d'une structure complexe.

2. Cohomologie mixte d'un feuilletage transversalement holomorphe.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement holomorphe de dimension (réelle) m et de codimension n sur une variété M.

Pour tout fibré vectoriel E sur M on note $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $C^\infty(E)$ l'espace de ses sections. On désignera par $T\mathcal{F}$ le fibré tangent à $\mathcal{F}$ et $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ le fibré normal et par

$$\Pi : TM \longrightarrow \nu\mathcal{F}$$

la projection canonique. On a alors une suite exacte

$$0 \to T\mathcal{F} \longrightarrow TM \xrightarrow{\ \Pi\ } \nu\mathcal{F} \to 0 \qquad (2.1)$$

Soient $\nu_{(1,0)}$ et $\nu_{(0,1)}$ les sous-fibrés propres de l'automorphisme associé à la structure complexe sur $\nu F_{\mathbb{C}}$. On a une décomposition

$$\nu F_{\mathbb{C}} = \nu_{(1,0)} \oplus \nu_{(0,1)} \tag{2.2}$$

L'application Π s'étend par linéarité en $\Pi : TM_{\mathbb{C}} \to \nu F_{\mathbb{C}}$. On notera $\Pi_{(1,0)}$ la composée $TM_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\Pi} \nu F_{\mathbb{C}} \xrightarrow{p_1} \nu_{(1,0)}$ où p_1 est la première projection suivant (2.2). Posons $\zeta = \operatorname{Ker} \Pi_{(1,0)}$. On obtient alors une suite exacte

$$0 \to \zeta \xrightarrow{i_\zeta} TM_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\Pi_{(1,0)}} \nu_{(1,0)} \to 0 \tag{2.3}$$

En utilisant une section τ de $\Pi_{(1,0)} : TM_{\mathbb{C}} \underset{\tau}{\rightleftarrows} \nu_{(1,0)}$ on obtient des isomorphismes

$$TM_{\mathbb{C}} \simeq \zeta \oplus \nu_{(1,0)} \tag{2.4}$$

et

$$\zeta \simeq TF_{\mathbb{C}} \oplus \nu_{(0,1)} \tag{2.5}$$

On notera $\iota : TM_{\mathbb{C}} \to \zeta$ la première projection.

Soient $\Omega^p(M)$ l'espace des p-formes différentielles sur M à valeurs complexes, $\Omega^p(M/\zeta)$ le sous-espace de $\Omega^p(M)$ des formes ω vérifiant

$$i_X \omega = 0$$

pour tout champ de vecteurs X sur M tangent à ζ et $\Lambda^p \nu^*_{(1,0)}$ le fibré des p-formes extérieures sur $\nu_{(1,0)}$.

Les applications $\Pi_{(1,0)}$ et τ induisent de manière évidente des isomorphismes d'algèbres

$$C^\infty(\Lambda^p \nu^*_{(1,0)}) \underset{\tau^*}{\overset{\Pi^*_{(1,0)}}{\rightleftarrows}} \Omega^p(M/\zeta)$$

inverses l'un de l'autre.

Pour tout champ X tangent à ζ et tout $\omega \in C^\infty(\Lambda^p \nu^*_{(1,0)})$ on pose

$$\theta_X \omega = \tau^* L_X \Pi^*_{(1,0)} \omega$$

où L_X est la dérivée de Lie dans la direction de X.

2.1. Proposition. Soit $\omega \in \Omega^p(M/\zeta)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $L_X\omega = 0$

ii) ω est localement la relevée d'une p-forme holomorphe sur $\mathbb{C}^n$. ∎

Démonstration. Soit $(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$ un système de coordonnées locales adaptées à F. Un champ de vecteurs X tangent à ζ s'écrit dans ce système de coordonnées

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i(x,z)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x,z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

où a_i et b_k sont des fonctions.

La condition $i_X\omega = 0$ implique que ω s'écrit :

$$\omega = \sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_p\leqslant n} \omega_{j_1\dots j_p}(x,z)dz_{j_1}\wedge\dots\wedge dz_{j_p}$$

Un calcul simple montre alors que $L_X\omega = 0$ si et seulement si pour tout $(j_1,\dots,j_p)$ la fonction $\omega_{j_1\dots j_p}$ ne dépend pas de x et est holomorphe en z i.e ω est une p-forme holomorphe sur $\mathbb{C}^n$.

2.2. Définition. Une p-forme différentielle vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 2.1 est dite basique holomorphe. ∎

On notera $\underset{\sim}{\Omega}^p_F$ le faisceau des germes de p-formes basiques holomorphes sur M. On posera $\underset{\sim}{\Omega}^o_F = \underset{\sim}{\mathcal{O}}_F$.

La suite (2.3) donne une suite exacte d'algèbres extérieures

$$0 \to \Lambda^1\nu^*_{(1,0)} \wedge \Lambda^{q-1}\, T^*M_{\mathbb{C}} \to \Lambda^q\, T^*M_{\mathbb{C}} \xrightarrow{i^*_\zeta} \Lambda^q\, \zeta^* \to 0 \tag{2.5}$$

et une suite exacte au niveau des faisceaux

$$0 \to \underset{\sim}{\Lambda}^1\nu^*_{(1,0)} \wedge \underset{\sim}{\Omega}^{q-1}(M) \to \underset{\sim}{\Omega}^q(M) \xrightarrow{i^*_\zeta} \Lambda^q\, \zeta^* \to 0 \tag{2.6}$$

La différentielle extérieure induit un opérateur

$$\tilde{d} : \underset{\sim}{\Lambda}^1\nu^*_{(1,0)} \wedge \underset{\sim}{\Omega}^{q-1}(M) \longrightarrow \Lambda^1\nu^*_{(1,0)} \wedge \underset{\sim}{\Omega}^q(M)$$

On définit D comme étant l'unique opérateur qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underset{\sim}{\Lambda}^1 \nu^*_{(1,0)} \wedge \underset{\sim}{\Omega}^{q-1}(M) & \longrightarrow & \underset{\sim}{\Omega}^q(M) & \underset{\imath^*}{\overset{i^*_\zeta}{\rightleftarrows}} & \Lambda^q \zeta^* & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow \tilde{d} & & \Big\downarrow d & & \Big\downarrow D & & \\
0 & \to & \underset{\sim}{\Lambda}^1 \nu^*_{(1,0)} \wedge \underset{\sim}{\Omega}^{q}(M) & \longrightarrow & \underset{\sim}{\Omega}^{q+1}(M) & \xrightarrow{i^*_\zeta} & \underset{\sim}{\Lambda}^{q+1} \zeta^* & \to & 0
\end{array} \qquad (2.7)$$

i.e. pour toute section α de $\underset{\sim}{\Lambda}^q\zeta^*$ on a

$$D\alpha = i^*_\zeta \, d \, \imath^* \alpha .$$

Localement on a :

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r \, i'_1 \ldots i'_s}(x,z) d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_r} \wedge dx_{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i'_s}$$

et $D\alpha = \bar{\partial} + d_F$ où $\bar{\partial}$ est l'opérateur de Cauchy-Riemann sur $\mathbb{C}^n$ et d_F la différentielle extérieure sur $\mathbb{R}^m$.

On a la

2.3. <u>Proposition</u> [7]. La suite

$$0 \to \underset{\sim}{\mathcal{O}}_F \longrightarrow \underset{\sim}{\Lambda}^o \zeta^* \xrightarrow{D} \underset{\sim}{\Lambda}^1 \zeta^* \to \cdots \xrightarrow{D} \underset{\sim}{\Lambda}^{n+m} \zeta^* \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

est une résolution fine du faisceau $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_F$. ■

Mieux encore

2.4. <u>Proposition</u>. Le complexe associé à la suite (*) est elliptique. ■

<u>Démonstration</u> : Soit $y \in M$ et notons $\Lambda^q_y\zeta^*$ la fibre de $\underset{\sim}{\Lambda}^q\zeta^*$ en y. Si $\xi = \xi_{(1,0)} + \xi_{(0,1)} + \xi_F$ est un vecteur cotangent à M en y, le symbole de D est l'application

$$\sigma\, D(y,\xi) : \Lambda^q_y \zeta^* \longrightarrow \Lambda^{q+1}_y \zeta^*$$

définie par $\sigma\, D(y,\xi)v = (\xi_{(0,1)} + \xi_F) \wedge v$. Puisque $\xi = 0$ si et seulement si $\xi_{(0,1)} = 0$ et $\xi_F = 0$, la suite des symboles

$$\cdots \to \Lambda^q_y \zeta^* \xrightarrow{\sigma D(y,\xi)} \Lambda^{q+1}_y \zeta^*$$

est exacte pour tout $\xi \neq 0$. Ce qui démontre la proposition.

Soit maintenant E un fibré vectoriel complexe de rang N défini par un cocycle $\{U_i, \gamma_{ij}\}$ où U_i est un ouvert de M distingué pour $\mathcal{F}$ et γ_{ij} une fonction sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$ à valeurs dans $G\ell(N,\mathbb{C})$.

2.5. <u>Définition</u>. On dira que E est un fibré <u>feuilleté holomorphe</u> si pour tous i et j, γ_{ij} est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}_{|U_{ij}}$ et transversalement holomorphe. ∎

Soit E un tel fibré et notons pour tout i, $(e_{i1},\ldots,e_{iN})$ une base de sections basiques holomorphes (en un sens évident) trivialisant le fibré E au-dessus de U_i.

Une p-forme basique holomorphe à valeurs dans E est une section du faisceau $\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E) = \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}} \otimes_{\underset{\sim}{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}} E$ s'écrivant localement $\omega_i = \sum_{k=1}^{N} \omega_i^k \otimes e_k$ où ω_i^k est une p-forme holomorphe au sens de 2.2.

L'espace vectoriel $H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E))$ sera appelé la <u>cohomologie mixte de type (p,q) de $(M,\mathcal{F})$ à valeurs dans E</u>.

Dans toute la suite et sauf précision, tous les produits tensoriels que l'on considérera seront au sens du faisceau $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_{\mathcal{F}}$.

On note encore D l'opérateur

$$D \otimes 1 : \underset{\sim}{\Lambda}^q_{\mathcal{F}} \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E) \longrightarrow \underset{\sim}{\Lambda}^{q+1} \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E)$$

De 2.3 et 2.4 on déduit la

2.6. <u>Proposition</u>. La suite

$$0 \to \underset{\sim}{\Omega}^p(E) \to \underset{\sim}{\Lambda}^0 \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E) \xrightarrow{D} \Lambda^1 \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p(E) \to \cdots$$

est une réduction fine elliptique du faisceau $\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E)$. ∎

Ce qui donne le

2.7. <u>Théorème</u>. Si M est compacte, alors pour tout $p = 0,\ldots,n$ et tout $q = 0,\ldots n+m$, l'espace vectoriel $H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}}(E))$ est de dimension finie. ∎

Une démonstration de ce théorème dans le cadre des faisceaux h feuilletés a été donnée par X. Gomez-Mont dans [27]. L'idée de la résolution de $\underset{\sim}{\Omega}^p_F(E)$ se trouve dans [58].

3. Dualité de Serre.

Dans toute la suite M sera supposée compacte, connexe et orientable.

On note

$A^{pq}(M)$ l'espace des sections du faisceau $\underset{\sim}{\Lambda}^{pq} = \underset{\sim}{\Lambda}^q\zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_F$;

$A^{pq}(E)$ celui du faisceau $\underset{\sim}{\Lambda}^{pq} \otimes E = \underset{\sim}{\Lambda}^q\zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_F(E)$.

3.1. Opérateurs $*$ et D^*.

En complétant une métrique hermitienne $\nu F_{\mathbb{C}}$ par une métrique hermitienne sur $TF_{\mathbb{C}}$ on obtient une métrique hermitienne sur $TM_{\mathbb{C}}$ qui permet de définir un opérateur

$$\bar{*} : \underset{\sim}{\Lambda}^{pq} \longrightarrow \underset{\sim}{\Lambda}^{n-p,n+m-q}$$

Soit d'autre part (,) la forme bilinéaire canonique mettant en dualité E et E^*. Pour tout $e \in E$ on notera e^* l'élément correspondant de E^*. On définit alors l'opérateur

$$* : \underset{\sim}{\Lambda}^{pq} \otimes E \longrightarrow \underset{\sim}{\Lambda}^{n-p,n+m-q} \otimes E^*$$

par $*(\sum_{k=1}^{N} \alpha^k \otimes e_k) = \sum_{k=1}^{N} \bar{*}\,\alpha^k \otimes e_k^*$ où $\alpha^k \in \underset{\sim}{\Lambda}^{pq}$ et $(e_1,\ldots,e_k)$ une base de sections basiques holomorphes trivialisant localement E (cf. 2.5). Il induit un isomorphisme

$$* : A^{pq}(E) \longrightarrow A^{n-p,n+m-q}(E^*) .$$

On pose alors de manière analogue au cas classique $D^* = (-1)^{p+q} *^{-1} D*$. On obtient ainsi un opérateur

$$D^* : A^{pq}(E) \longrightarrow A^{p,q-1}(E).$$

3.2. Produit scalaire.

On notera encore i^*_ζ et ι^* respectivement les applications $i^*_\zeta \otimes 1 : \underset{\sim}{\Omega}^q(M) \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p(E) \to \underset{\sim}{\Lambda}^q\zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p(E)$ et $\iota^* \otimes 1 : \underset{\sim}{\Lambda}^q\zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p(E) \to \underset{\sim}{\Omega}^q(M) \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p(E)$.

Soient $\alpha,\beta \in A^{pq}(E)$ qu'on peut écrire localement

$$\alpha = \sum_{k=1}^{N} \alpha^k \otimes e_k \qquad \text{et} \qquad \beta = \sum_{\ell=1}^{N} \beta^\ell \otimes e_\ell$$

où α^k et β^ℓ sont des sections locales du faisceau $\underset{\sim}{\Lambda}^{pq}$. Alors

$$\iota^*\alpha \wedge \iota^* * \beta = \sum_{k,\ell} (\iota^*\alpha^k \wedge \iota^* \bar{*}\, \beta^\ell)\cdot(e_k,e_\ell^*)$$

est une forme différentielle scalaire de degré maximum définie globalement sur M.

On pose

$$<\alpha,\beta> = \int_M \iota^*\alpha \wedge \iota^* * \beta$$

L'espace $A^{pq}(E)$ est ainsi muni d'une structure préhilbertienne.

3.3. Proposition. L'opérateur D^* est l'adjoint de D pour le produit scalaire $<\,,\,>$ ■

Démonstration : Soient $\alpha \in A^{p,q-1}(E)$ et $\beta \in A^{p,q}(E)$. On a :

$$d(\iota^*\alpha \wedge \iota^* * \beta) = d\iota^*\alpha \wedge \iota^* * \beta + (-1)^{p+q-1}\, \iota^*\alpha \wedge d\iota^* * \beta$$

comme ι^* est une section de 1^*_ζ on a

$$d\iota^* = \iota^*D$$

D'où

$$d(\iota^* \alpha \wedge \iota^* * \beta) = \iota^*d\alpha \wedge \iota^* * \beta + (-1)^{p+q-1}\, \iota^* \alpha \wedge \iota^*D * \beta.$$

D'autre part $D* = (-1)^{p+q} * D^*$. En intégrant les deux membres sur M, on obtient

$$0 = <D\alpha,\beta> - <\alpha,D^*\beta> .$$

3.4. Corollaire. L'opérateur $\nabla = DD^* + D^*D$ est auto-adjoint. ■

Une section $\alpha \in A^{pq}(E)$ qui vérifie $\nabla\alpha = 0$ est dite ∇-harmonique. On posera :

$$\mathcal{H}^{pq}(E) = \operatorname{Ker} \nabla = \operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} D^*.$$

D'après la proposition 2.6 l'opérateur ∇ est elliptique. Il résulte alors de la théorie générale (cf. [59]) des opérateurs elliptiques le

3.5. Théorème. L'espace vectoriel $\mathcal{H}^{pq}(E)$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale $A^{pq}(E) = \mathcal{H}^{pq}(E) \oplus \mathrm{Im}\, D \oplus \mathrm{Im}\, D^*$.

D'où le

3.6. Corollaire. L'espace vectoriel $H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}{}^p_F(E))$ s'identifie à $\mathcal{H}^{pq}(E)$. ■

Considérons maintenant l'accouplement ψ

$$\begin{tikzcd} & \Omega^{2n+m}(M) \arrow[d] \\ A^{pq}(E) \otimes A^{n-p,n+m-q}(E^*) \arrow[ur] \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

défini par

$$\psi(\alpha,\beta) = \int_M \iota^*\alpha \wedge \iota^*\beta$$

où $\iota^*\alpha \wedge \iota^*\beta$ est défini localement par

$$\iota^*\alpha \wedge \iota^*\beta = \sum_{k,\ell} \iota^*\alpha^k \wedge \iota^*\beta^\ell \cdot (e_k, e^*_\ell)$$

avec $\alpha = \sum_{k=1}^{N} \alpha^k \otimes e_k$ et $\beta = \sum_{\ell=1}^{N} \beta^\ell \otimes e_\ell$. L'application ψ est indépendante de ι^* (i.e. de la section τ).

3.7. Proposition. Pour tout $\alpha \in A^{pq}(E)$ et tout $\beta \in A^{n-p,n+m-q}(E^*)$ on a

$$\psi(\alpha,\beta) = \langle\alpha, *\beta\rangle \quad ■$$

La démonstration de cette proposition est immédiate.

On a alors un accouplement non dégénéré

$$\psi_h : \mathcal{H}^{pq}(E) \times \mathcal{H}^{n-p,n+m-q}(E^*) \longrightarrow \mathbb{C}$$

induit par ψ. Ce qui donne le

3.8. <u>Théorème de dualité de Serre</u> [55]. On a un isomorphisme canonique

$$H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_F(E)) \simeq H^{n+m-q}(M,\underset{\sim}{\Omega}^{n-p}_F(E^*)). \blacksquare$$

3.9. <u>Remarques</u>.

i) Si $\dim F = \dim M$ on retrouve le théorème de de Rham, le théorème de Hodge et la dualité de Poincaré usuelle. Si F est le feuilletage par points, M est une variété analytique complexe ; on retrouve alors les théorèmes de Dolbeault, de Kodaria et la dualité de Serre. Les résultats qu'on vient de décrire constituent une généralisation naturelle de la situation classique.

ii) Si $E = \mathbb{C}$ est trivial, alors l'espace vectoriel $H^o(M,\underset{\sim}{\Omega}^o_F)$ des fonctions basiques holomorphes est isomorphe à $\mathbb{C}$. En effet soit f une fonction basique holomorphe. Comme M est compacte, f atteint son maximum en un point $y_o \in M$. Posons $A = \{y \in M/f(y) = f(y_o)\}$. Cet ensemble est clairement fermé et non vide. Soit $y \in A$ et considérons une transversale T_y à F passant par y. La restriction de f à T_y est holomorphe et atteint son maximum en y. Elle est donc constante en vertu du principe du maximum. Comme f est basique, elle est en fait constante sur un voisinage de y dans M. L'ensemble A est donc ouvert ; il est donc égal à M. Par suite la fonction f est constante sur M.

4. <u>Exemples de calculs</u>.

Dans ce paragraphe nous considérerons des exemples de type 1.2 iii) pour lesquels nous calculerons les espaces vectoriels $H^q(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_F(E))$.

Soit $V = \{V_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert dénombrable de B tel que toute intersection finie $V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_s}$ est contractile.
Pour tout $i \in I$, $U_i = \Pi^{-1}(V_i)$ est un ouvert de M difféomorphe à $V_i \times N$ et la restriction de ce difféomorphisme à toute fibre est un isomorphisme holomorphe sur N. La famille $U = \{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de M. On a alors (cf. [5]) une suite spectrale $K_r(p)$ convergeant vers $H^*(M,\underset{\sim}{\Omega}^p_F(E))$ de terme

$$K_2^{sk}(p) = H^s(\mathcal{V},\underset{\sim}{H}^{p,k}(E))$$

où $\underset{\sim}{H}^{p,k}(E)$ est le préfaisceau localement constant sur B défini par $\underset{\sim}{H}^{p,k}(E)(V) = H^k(\Pi^{-1}(V),\underset{\sim}{\Omega}_{\mathcal{F}}^p(E))$ pour tout ouvert V de B. En fait

$$H^s(\mathcal{U},\underset{\sim}{H}^{p,k}(E)) = H^s(\mathcal{V},\underset{\sim}{H}^{p,k}(E))$$

et

$$H^k(\Pi^{-1}(V),\underset{\sim}{\Omega}_{\mathcal{F}}^p(E)) = H^{p,k}(N,E)$$

où $H^{p,k}(N,E)$ est la cohomologie de Dolbeault de type (p,k) à valeurs dans E de la variété analytique complexe N.

4.1. <u>Théorème</u>. Il existe une suite spectrale $K_r(p)$ convergeant vers $H^*(M,\underset{\sim}{\Omega}_{\mathcal{F}}^p(E))$ et de terme

$$K_2^{sk}(p) = H^s(B,\underset{\sim}{H}^{p,k}(E)). \blacksquare$$

Si $\dim H^{p*}(N,E) < +\infty$ (ce qui est le cas si N est compacte), alors $H^*(B,\underset{\sim}{H}^{p*}(N,E))$ n'est rien d'autre que la cohomologie de de Rham de B à valeurs dans le fibré vectoriel plat de fibre $H^{p*}(N,E)$.

Nous allons donner explicitement des calculs de $H^*(M,\underset{\sim}{\Omega}_{\mathcal{F}}^p)$ pour certains feuilletages.

4.2. <u>Sur une variété ouverte</u>.

Posons $N = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{S}^1$ et considérons la représentation ρ de $\Pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ définie par $\rho(1) = \varphi$ où $\varphi(z) = az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. On obtient ainsi un flot $\mathcal{F}$ transversalement holomorphe sur $M = \mathbb{C}\times\mathbb{S}^1$.
Par le théorème 4.1 on a une suite spectrale

$$K_2^{sk}(p) = H^s(\mathbb{S}^1,\underset{\sim}{H}^{p,k}(\mathbb{C}))$$

Or $H^{pk}(\mathbb{C}) = 0$ sauf pour $p,k = 0$ où $H^{00}(\mathbb{C}) = \mathcal{O}$, espaces des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. et $H^{10}(C) \simeq \mathcal{O}$ est l'espace des 1-formes homomorphes sur $\mathcal{O}$. On va détailler le calcul pour $p = 0$. A peu de chose près le cas $p = 1$ se fait de la même manière.
Il est facile de voir alors que

$$K_2^{00}(0) = \operatorname{Ker} \gamma$$

et
$$K_2^{10}(0) = \operatorname{Coker} \gamma$$

où :

$$\gamma : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$$
$$f \to f - f \circ \psi$$

Nous allons donc calculer $\operatorname{Ker} \gamma$ et $\operatorname{Coker} \gamma$.

i) Soit $f \in \mathcal{O}$. On a $f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et $f \circ \psi(z) = \sum_{n\geq 0} a^n b_n z^n$ et donc $f \in \operatorname{Ker} \gamma$ si et seulement si $b_n = a^n b_n$ pour tout $n \geq 0$.

Cas 1. Si a est racine de l'unité i.e. s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a^p = 1$, alors les fonctions $f_n(z) = z^n$ où $n = kp$ sont linéairement indépendantes et vérifient $f_n = f_n \circ \psi$. L'espace $K_2^{00}(0)$ est donc de dimension infinie.

Cas 2. Si a n'est pas racine de l'unité, la relation $f = f \circ \psi$ n'est satisfaite que si f est constante. D'où $K_2^{00}(0) = \mathbb{C}$.

ii) Soit $h \in \mathcal{O}$. Alors $h \in \operatorname{Im} \gamma$ si et seulement si il existe $f \in \mathcal{O}$ telle que $h = f - f \circ \psi$. Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^m$ et $h(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ cette relation se ramène au système :

$$(1-a^n) b_n = c_n \qquad \text{pour} \qquad n \geq 0.$$

Si h est constante non nulle, ce système n'a pas de solution donc $\dim K_2^{10}(0) \geq 1$. Supposons $C_o = 0$.

Cas 1. Si $|a| \neq 1$, alors $|1-a^n| \geq |1-|a||$. D'où

$$|b_n| = \frac{|c_n|}{|1-a^n|} \leq \frac{|c_n|}{|1-|a||} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

La série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ converge alors uniformément sur $\mathbb{C}$, et donc f est holomorphe. D'où $K_2^{10}(0) = \mathbb{C}$.

Cas 2. $|a| = 1$ i.e. $a = e^{i\theta}$. Si $\theta = 2\pi\, p/q$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors $K_2^{10}(0)$ est de dimension infinie.

Si $\frac{\theta}{2\pi}$ n'est pas rationnel la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{1-e^{in\theta}} z^n$ dépend de la nature arithmétique de θ. Nous étudierons deux cas :

α) θ est diophantien i.e. il existe $A > 0$ et $s > 2$ tels que $|1-e^{in\theta}| \geqslant \frac{A}{n^s}$ pour n assez grand. On aura alors :

$$|b_n| \leqslant A\cdot n^s |c_n|$$

Ceci implique que f est holomorphe, et donc $K_2^{10}(0) = \mathbb{C}$.

β) θ est "super liouville" i.e. : pour tout $s > 1$, il existe un entier n_s tel que $|1-e^{in_s\theta}| < e^{-2n_s}$. On pose alors :

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq n_s \\ e^{-n_s} & \text{pour } n = n_s \end{cases}$$

De cette façon on peut définir une famille infinie libre de fonctions holomorphes h pour lesquelles l'équation $f-f \circ \psi = h$ n'a pas de solution dans $\mathcal{O}$.

iii) Finalement S^1 est de dimension 1, la suite spectrale $K_2^{\ell k}(p)$ converge au terme $K_2(p)$. Donc :

$$H^o(M,\underset{\sim}{\Omega}{}^o_{\mathcal{F}}) = K_2^{0,0}(0)$$

et

$$H^1(M,\underset{\sim}{\Omega}{}^o_{\mathcal{F}}) = K_2^{1,0}(0)$$

Les autres termes sont tous nuls.

4.3. <u>Sur une variété fermée.</u>

Posons cette fois-ci $N = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^2$ et $B = \mathbb{S}^1$. La variété N est un tore complexe de dimension 2 qu'on notera $T^2_{\mathbb{C}}$. Considérons la représentation

$$\rho : \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T^2_C)$$

$$1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon\ S\ell_2(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$$

Nous avons alors une suite spectrale

$$K_2^{\ell k}(p) = H^{\ell}(S^1, H^{pk}(T^2_{\mathbb{C}})).$$

Il est facile de voir que :

$$K_2^{0k}(p) = \mathrm{Ker}\ \gamma \quad \text{où}$$

$$\gamma : H^{pk}(T^2_C) \longrightarrow H^{pk}(T^2_{\mathbb{C}})$$

$$\alpha \longrightarrow \alpha - A^{*}\alpha.$$

D'autre part, par dualité de Poincaré sur S^1, on a :

$$K_2^{1k}(p) = K_2^{0k}(p).$$

Un calcul simple mais un peu long donne alors :

$$K_2^{0k}(p) = K_2^{1k}(p) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } p = 2 \text{ ou } k = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci donne les différents espaces $H^q(M, \underset{\sim}{\Omega}^p_F)$

p \ q	0	1	2	3
2	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
1	0	0	0	0
0	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$

On trouvera beaucoup d'exemples de calcul du même type dans [24].

5. Relation avec $H^*(M,\mathbb{C})$

Considérons le faisceau différentiel

$$0 \to \mathbb{C} \longrightarrow \underset{\sim}{\Omega}^o_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\ d\ } \underset{\sim}{\Omega}^1_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\ d\ } \cdots \xrightarrow{\ d\ } \underset{\sim}{\Omega}^n_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

En raisonnant de manière analogue que dans le cas classique on montre que cette suite est exacte et est donc une résolution du faisceau constant de fibre $\mathbb{C}$.

On obtient alors un bicomplexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & \underset{\sim}{\Lambda}^q \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}} \arrow[rr, "D"] \arrow[d, "1 \otimes d"'] & & \underset{\sim}{\Lambda}^{q+1} \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d, "1 \otimes d"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \underset{\sim}{\Lambda}^q \zeta^* \otimes \underset{\sim}{\Omega}^{p+1}_{\mathcal{F}} \arrow[rr, "D"] \arrow[d] & & \underset{\sim}{\Lambda}^{q+1} \otimes \underset{\sim}{\Omega}^{p+1}_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & {} & & {} &
\end{tikzcd}$$

qui donne un complexe double au niveau des sections globales. On en déduit le

5.1. <u>Théorème</u>. Il existe une suite spectrale (E_r) de terme

$$E_1^{pq} = H^q(M, \underset{\sim}{\Omega}^p_{\mathcal{F}})$$

convergeant vers la cohomologie de de Rham $H^*(M,\mathbb{C})$. ■

Pour la démonstration et les détails on peut consulter [25] p. 179.

Par analogie aux cas classiques, on appellera (E_r) <u>la suite spectrale de Leray-Serre-Frölicher du feuilletage</u> $\mathcal{F}$.

Si M est compacte, on obtient à partir du théorème 2.7 le

5.2. <u>Corollaire</u>. Pour tout $r \geqslant 1$, l'espace vectoriel (E_r) est de dimension finie. ■

6. Une application.

Nous allons utiliser le corollaire 5.2 pour démontrer un résultat de finitude pour la cohomologie basique d'un feuilletage transversalement holomorphe de codimension 1.

Soit F un feuilletage transversalement holomorphe de codimension 1 sur une variété M compacte, connexe et orientable.

La décomposition (2.4) donne une décomposition au niveau des algèbres extérieures

$$\Lambda^r \, TM^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+k+\ell=r} \Lambda^{p,k,\ell}$$

où $\Lambda^{p,k,\ell} = \Lambda^p \nu^*_{(1,0)} \otimes \Lambda^k \nu^*_{(0,1)} \otimes \Lambda^q \, TF^*_{\mathbb{C}}$.

Une section du fibré $\Lambda^{p,k,\ell}$ est appelée <u>forme différentielle de type (p,k,ℓ)</u>. On note

- $A^{p,k,\ell}(M)$ l'espace des formes différentielles de type (p,k,ℓ) sur M.
- $A^{p,q}(M) = \bigoplus_{k+\ell=q} A^{p,k,\ell}(M)$ et $\underset{\sim}{A}^{p,q}$ le faisceau des germes correspondant.

La différentielle extérieure se décompose en une somme

$$d = \partial + \partial + d_F + \delta$$

où $\partial, \bar{\partial}$, d_F et δ sont des opérateurs respectivement de type $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ et $(1,1,-1)$.

On montre facilement que l'opérateur $D = \bar{\partial} + d_F$ vérifie $D^2 = 0$ pour des raisons de degré. On a la proposition dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

6.1. <u>Proposition</u>. Une forme différentielle sur M de type $(p,0,0)$ et D-fermée est basique holomorphe. ■

On note toujours $\underset{\sim}{\Omega}^p_F$ le faisceau des germes de p-formes holomorphes. La résolution (2.6) s'écrit dans ce cas

$$0 \to \underset{\sim}{\Omega}^p_F \longrightarrow \underset{\sim}{A}^{p0} \xrightarrow{D} \underset{\sim}{A}^{p1} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \underset{\sim}{A}^{p,1+m} \to 0$$

de telle sorte que la cohomologie mixte est isomorphe à celle du complexe

$$0 \to A^{po}(M) \xrightarrow{D} A^{p1}(M) \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} A^{p,1+m}(M) \to 0$$

Soit maintenant ω une forme différentielle de degré s sur M.

6.2. <u>Définition</u>. On dira que α est basique si elle s'écrit $\alpha = \sum_{p+k=s} \alpha_{(p,k,0)}$ où $\alpha_{(p,k,0)}$ est une forme de type $(p,k,0)$ et vérifiant $d_{\mathcal{F}}\, \alpha_{(p,k,0)} = 0$. ■

Localement α est la relevée d'une s-forme différentielle sur $\mathbb{C}^n$.

6.3. <u>Théorème</u>. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement holomorphe de codimension 1 sur une variété compacte M. Alors la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$ est de dimension finie. ■

<u>Démonstration</u> : On sait que $H^o(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. D'autre part un calcul simple montre que $H^1(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$ s'injecte dans $H^1(M,\mathbb{C})$. Le problème se pose donc uniquement pour $H^2(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$. Nous allons montrer que cet espace s'injecte dans le terme $E_2^{1,1}$ de la suite spectrale (E_r). La conclusion sera alors immédiate par le corollaire 5.2.

Soit α une forme basique pour $\mathcal{F}$ de degré 2. Elle est nécessairement de type $(1,1,0)$ et vérifie $d_{\mathcal{F}}\, \alpha = 0$. En plus, on a $\bar{\partial}\alpha = 0$ et $\partial\alpha = 0$. Donc elle définit un cycle dans tout $E_r^{1,1}$. Supposons que $\alpha = d\beta$ où β est basique.

On a $\beta = \beta_{(1,0,0)}+\beta_{(0,1,0)}$ et nécessairement $d_{\mathcal{F}}\beta_{(1,0,0)} = 0$ et $d_{\mathcal{F}}\beta_{(0,1,0)} = 0$.
Ce qui donne :

$$\alpha = \partial\beta_{(0,1,0)} + D\beta_{(1,0,0)}$$

i.e. α est un bord dans $E_2^{1,1}$. Il existe donc un morphisme :

$$H^2(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \to E_2^{1,1}.$$

Supposons que la classe de α est nulle dans $E_2^{1,1}$ i.e. :

$$\alpha = \partial\eta + D\gamma$$

où η est de type $(0,1,0)$ et vérifie $D\eta = 0 = d_{\mathcal{F}}\eta$ et γ est de type $(1,0,0)$ et donc elle vérifie nécessairement $d_{\mathcal{F}}\gamma = 0$ sinon on aura une composante de type $(1,0,1)$, ce qui n'est pas le cas. La forme $\omega = \eta+\gamma$ est basique et vérifie $\alpha = (\partial+\bar{\partial})\omega$.

CHAPITRE III

COHOMOLOGIE BASIQUE D'UN FEUILLETAGE RIEMANNIEN.

1. *Cohomologie basique des feuilletages transversalement parallélisables : suite spectrale.*

Au paragraphe (1.1.), nous fixons le langage et les notations utilisées dans ce travail et nous rappelons les théorèmes de structure de Fédida et Molino pour les feuilletages T.P. (voir [43] et [19]). La plupart des constructions et propriétés évoquées aux §. 1.1 et 1.2) se trouvent déjà chez Molino et (ou Drissen (voir [43] et [6]) ; elles sont essentielles pour notre propos ; nous avons donc été amené à les expliciter et à les compléter. Enfin dans les paragraphes 1.3 et 1.4 nous décrivons la cohomologie (de De Rham) basique d'un feuilletage transversalement parallélisable. En particulier, dans 1.4 nous introduisons une suite spectrale qui est une version "différentiable" de la suite spectrale étudiée au §.II.5 de [17]. Cette suite spectrale est construite sur le "modèle" de la version "différentiable" de la suite de Leray-Serre d'un fibré décrite dans [30].

1.1. *Champs feuilletés - champs basiques - Feuilletages transversalement parallélisables.*

On note $A(M)$ l'anneau des fonctions sur une variété M. Si M est munie d'un feuilletage F, on désigne par $T(F) \subset T(M)$ le fibré tangent à F et par $\nu(F) = T(M) / T(F)$ le fibré normal à F.

1.1.1. Champs feuilletés - champs basiques.-

Soient $X(M)$ le $A(M)$-module des champs de vecteurs sur M et $\Gamma(F)$ le sous-module des champs tangents à F (i.e. des sections de $T(F)$).

i) On dit que $X \in X(M)$ est un champ F-feuilleté (ou simplement un champ feuilleté) si on a :

$$[X,Y] \in \Gamma(F) \qquad \text{pour tout} \quad Y \in \Gamma(F),$$

c'est-à-dire X est un automorphisme infinitésimal de F. On vérifie aisément que X est feuilleté si et seulement si le flot local (φ_t) engendré par X préserve F. L'algèbre de Lie des champs F-feuilletés est notée $X(M,F)$.

ii) Bien sûr, $\Gamma(F)$ est un idéal de $X(M,F)$ et on obtient une suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \to \Gamma(F) \to X(M,F) \xrightarrow{\nu_*} X(M/F) \to 0$$

où $X(M/F) = X(M,F)/\Gamma(F)$ est appelée l'algèbre de Lie des champs F-basiques (ou simplement basiques). Plus simplement on écrira X^b pour $\nu_*(X)$.

1.1.2. Remarque. La notation $X(M/F)$ se justifie par le fait que si F est une fibration localement triviale de base B, l'espace des feuilles M/F s'identifie à B et $X(M/F)$ s'identifie naturellement à $X(B)$. La même interprétation reste valable dans le cas des feuilletages transversalement parallélisables pourvu que l'on considère M/F comme une Q-variété au sens de [2]. Pour cette même raison, nous préférons l'appellation champ "basique" plutôt que champ "transverse" (cf. [43]) pour les éléments de $X(M/F)$ (voir 1.3.4.).

Nous introduisons maintenant la famille des feuilletages dont nous voulons étudier la cohomologie basique aux paragraphes 1.4 et 2.

1.1.3. Feuilletages transversallement parallélisables.
Soit (M,F) un feuilletage de codimension n.

i) On dira qu'un n-uple $P = \{P_1,\ldots,P_n\}$ de champs feuilletés définit un parallélisme transverse pour F si le n-uple $\mathcal{P}^b = \{P_1^b,\ldots,P_n^b\}$ de champs basiques est de rang n en tout point [et donc trivialise le fibré normal $\nu(F)$]. Si un tel parallélisme existe, on dit que F est un feuilletage transversalement parallélisable (ou plus simplement un feuilletage T.P).

Dans le cas d'un feuilletage T.P, $X(M/F)$ est un module libre engendré par $\{P_1^b,\ldots,P_n^b\}$ et le morphisme ν_* introduit en 1.1.1 (ii) admet une section τ. Remarquons encore que la trivialité de $\nu(F)$ n'est pas une condition suffisante d'existence d'un parallélisme transverse pour F. Par exemple, un feuilletage de codimension un est transversalement parallélisable si et seulement si il peut être défini par une forme fermée. Plus généralement $X(M/F)$ est un sous-module du module des sections de $\nu(F)$ mais il en est distinct en général.

ii) Dans le cas particulier où le sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ de $X(M/F)$ engendré par $\mathcal{P}^b$ est une sous-algèbre de Lie, on dit que F admet une <u>structure transverse de Lie</u> ou plus simplement que F est un <u>$\mathcal{G}$-feuilletage de Lie</u>. On vérifie que F est un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie, si et seulement si $T(F)$ est le noyau d'une 1-forme α à valeurs dans $\mathcal{G}$, qui est de rang maximum et vérifie l'équation de Maurer-Cartan :

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0.$$

On peut encore remarquer qu'un feuilletage T.P admet une structure riemannienne transverse. Nous introduirons et utiliserons cette structure au paragraphe (2.2).

1.1.4. <u>Structure des $\mathcal{G}$-feuilletages de Lie</u> (cf. [19]).

Soit F un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie sur une variété compacte M et soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Il existe un homomorphisme

$$H : \Pi_1(M) \to G$$

tel que si $p : \tilde{M} \to M$ est le revêtement correspondant, alors

i) il existe une fibration localement triviale

$$D : \tilde{M} \to G$$

invariante par $\mathrm{Aut}(p) = \mathrm{Im}\, H$;

ii) le feuilletage relevé $\tilde{F} = p^{*}F$ de F par p a pour feuilles les fibres de D.

On remarquera que la condition (i) signifie que si $\tilde{\gamma}$ et γ sont des éléments correspondants de $\mathrm{Aut}(p)$ et $\mathrm{Im}\, H$, alors pour tout $x \in \tilde{M}$, on a :

$$D(\tilde{\gamma}(x)) = \gamma \cdot D(x).$$

1.1.5. Structure des feuilletages transversalement parallélisables. (cf. [43]).

Soit F un feuilletage T.P de codimension n sur une variété compacte M. Il existe :

a) une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension $g \leq n$,

b) une fibration localement triviale $\Pi : M \to W$ de fibre (compacte) F,

c) Un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie (F, F_0) à feuilles denses sur F

tels que :

i) $m = \dim W = n-g$,

ii) les fibres de Π sont les adhérences des feuilles de F,

iii) le feuilletage induit par F sur une fibre de Π est isomorphe à (F, F_0).

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est appelée l'algèbre de Lie structurale de F, la fibration Π est la fibration (ou feuilletage) basique de F et W est la variété basique de F.

En raison de la propriété (ii) ci-dessus le feuilletage basique de F sera désigné par $\bar{F}$

Retenons quelques conséquences de 1.1.5. qui nous seront utiles pour la suite :

1.1.6. Remarques. Soit F un feuilletage T.P. sur M.

i) Pour le feuilletage (F,F_o), on a bien sûr $X(F/F_o) \simeq \mathcal{G}$.

ii) les espaces $X(M,F)$ et $X(M/F)$ sont des $A(W)$-modules. Par ailleurs l'existence du parallélisme permet de montrer de façon immédiate que $X(M,F)$ engendre $X(M)$ comme $A(M)$-module.

iii) De façon évidente $X(M/\bar{F})$ s'identifie à $X(W)$. Par ailleurs en raison de la propriété (ii) de 1.1.5., $X(M,F)$ est une sous-algèbre de $X(M,\bar{F})$. On obtient alors un morphisme de $A(W)$-modules et d'algèbres de Lie $\Pi_* : X(M,F) \to X(W)$.

iv) Finalement on remarquera que le feuilletage basique $\bar{F}$ n'est pas T.P en général i.e. W n'est pas nécessairement parallélisable. Bien plus, W n'est pas orientable en général (cf. 1.2.2. (iii)).

1.2. *Structure infinitésimale des feuilletages transversalement parallélisables.*

Désormais F désignera un feuilletage de codimension n sur une variété compacte M admettant un parallélisme transverse $P = \{P_1,\dots,P_n\}$ que l'on supposera fixé une fois pour toutes. Le but de ce second paragraphe sera d'expliciter les relations qu'il y a entre les différentes algèbres de Lie de champs de vecteurs associées à F (et à sa fibration basique $\bar{F}$).

Pour ce faire, on commencera par décrire une "trivialisation locale simultanée" de $\bar{F}$ et F.

1.2.1. $\mathcal{P}$-trivialisation du feuilletage basique $\bar{F}$ (cf. [43]).

Soit $\Pi_* : \mathcal{X}(M,F) \to \mathcal{X}(W)$ l'homomorphisme défini en 1.1.6 (iii) et soit $\bar{\mathcal{P}} = \{\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_n\}$ l'image par Π_* du parallélisme $\mathcal{P}$. Pour tout $u \in W$, on peut extraire de $\bar{\mathcal{P}}$ une suite de m éléments (mettons pour simplifier les m premiers) $\{\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_m\}$ qui soient linéairement indépendants au point u. On note (φ_t^i) le groupe à un paramètre engendré par le champ feuilleté P_i. Si $F_u = \Pi^{-1}(u)$, l'application :

$$\begin{aligned}\phi : F_u \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow M\\ (x;t_1,\ldots,t_m) &\to \left[\varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \ldots \circ \varphi_{t_m}^m\right](x)\end{aligned}$$

est de rang maximum sur $F_u \times \{0\}$. Puisque les champs P_i préservent F et $\bar{F}$, il existe des ouverts V et U respectivement dans R^m et W tels que :

i) ϕ est un difféomorphisme de $F_u \times V$ sur $\Pi^{-1}(U)$ et $\phi^*\bar{F}$ est la fibration triviale :

$$pr_2 : F_u \times V \to V$$

ii) ϕ^*F est un feuilletage T.P de fibration basique $\phi^*\bar{F}$ et si F_u désigne le feuilletage induit par F dans F_u, la restriction de ϕ^*F à $F_u \times \{y\}$ est l'image réciproque de F_u par :

$$pr_1 : F_u \times V \to F_u$$

restreinte à $F_u \times \{y\}$.

Bref, on dira que (U,ϕ) "trivialise simultanément" F et $\bar{F}$.

Une famille $\{(U_j,\phi_j)\}$ de telles trivialisations locales, pour laquelle $\{U_j\}$ est un recouvrement de W sera appelée une $\mathcal{P}$-trivialisation de $\bar{\mathcal{F}}$.

1.2.2. Le fibré structural d'un feuilletage T.P

i) Comme conséquence immédiate de 1.2.1., on voit que le fibré basique $\bar{\mathcal{F}}$ d'un feuilletage T.P. $(M,\mathcal{F})$, est un fibré à groupe structural $\mathrm{Diff}(F,\mathcal{F}_o)$, le groupe des difféomorphismes de F respectant le feuilletage $\mathcal{F}_o$ induit par $\mathcal{F}$ dans F. Autrement dit $\bar{\mathcal{F}}$ est défini à l'aide d'un cocycle $C = (\{U_i\},\{g_{ij}\})$ sur W à valeurs dans $\mathrm{Diff}(F,\mathcal{F}_o)$.

ii) un élément $f \in \mathrm{Diff}(F,\mathcal{F}_o)$ induit des isomorphismes d'algèbres de Lie (cf. 1.1.6 ii)) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(F,\mathcal{F}_o) & \xrightarrow{\quad f_* \quad} & \mathcal{X}(F,\mathcal{F}_o) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_*} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_*} \\ \mathcal{G} = \mathcal{X}(F/\mathcal{F}_o) & \xrightarrow{\quad f_b \quad} & \mathcal{X}(F/\mathcal{F}_o) = \mathcal{G} \end{array}$$

et bien sûr l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Diff}(F,\mathcal{F}_o) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \\ f &\longrightarrow f_b \end{aligned}$$

est continue où $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ est muni de la topologie pour laquelle la composante connexe de l'identité est le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Donc $\hat{C} = (\{U_i\},\{\psi o g_{ij}\})$ est un cocycle sur W à valeurs dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ qui nous permet de construire un fibré en algèbres de Lie (appelé <u>fibré structural</u> de $(M,\mathcal{F})$) :

$$\xi : \mathcal{G} \to E \xrightarrow{\lambda} W$$

Bien sûr, ξ ne dépend pas du choix du cocycle C.

iii) La variété basique W sera orientable si et seulement si il en est de même pour ξ.

1.2.3. <u>Sections du fibré structural et champs basiques.</u>

Soit $\Gamma(\xi)$ le $A(W)$-module des sections du fibré structural ξ de (M,F). Il est muni canoniquement d'une structure d'algèbre de Lie. On le relie aux champs F-feuilletés par l'intermédiaire de deux suites.

i) Soit $X_{\bar{F}}(M,F) = X(M,F) \cap \Gamma(\bar{F}) = \ker \Pi_*$ l'algèbre de Lie des champs F-feuilletés qui sont tangents à $\bar{F}$. L'algèbre $\Gamma(F)$ est un idéal de $X_{\bar{F}}(M,F)$ et à l'aide d'une P-trivialisation, on vérifie immédiatement que l'on a une suite exacte d'algèbres de Lie et $A(W)$-modules :

$$0 \to \Gamma(F) \longrightarrow X_{\bar{F}}(M,F) \xrightarrow{\tilde{\nu}_*} \Gamma(\xi) \to 0 .$$

ii) Par ailleurs $\Gamma(F)$ est contenu dans le noyau de Π_* et donc la suite exacte de 1.1.1 (ii) nous permet de construire un morphisme Π_b :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(F) \arrow[r] \arrow[dr] & X(M,F) \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[d, "\Pi_*"] & X(M/F) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\Pi_b"] & 0 \\
& & X(W) & &
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que $\ker \Pi_b \cong \Gamma(\xi)$.

Le lemme suivant va nous permettre de construire des sections de Π_* et Π_b ; ce qui montrera en particulier que ces morphismes sont surjectifs.

1.2.4. <u>Lemme</u>. (voir aussi [6]) : Il existe n formes de Pfaff $\eta^i \in \Omega^1(W)$ telles que l'application

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ X(W) &\longrightarrow X(M) \\ V &\longrightarrow \tilde{V} = \sum_{i=1}^{n} \eta^i(V)\, F_i \end{aligned}$$

est un morphisme de $A(W)$-modules et une section de Π_* (en particulier $\tilde{V} \in X(M,F)$).

Démonstration : Soit $\{(U_j,\phi_j)\}$ une P-trivialisation de $(M,\vec{F})$ (cf. 1.2.1). Pour j fixé on définit n formes $\eta_j^i \in \Omega^1(U_j)$ par la condition suivante :

Pour tout $V \in X(W)$, le vecteur $\tilde{V}_j = \sum \eta_j^i(V|_{U_j})P_i$ est un vecteur horizontal respectivement à ϕ_j c'est-à-dire tel que $(pr_1 \circ \phi_j^{-1})_* \tilde{V}_j = 0$. Par construction, on a :

$$\begin{aligned} \sigma \ : \ X(U_j) &\longrightarrow X(\Pi^{-1}(U_j)) \\ V|_{U_j} &\longrightarrow \tilde{V}_j \end{aligned}$$

est un homomorphisme de $A(U_j)$-modules tel que $\tilde{V}_j \in X(\Pi^{-1}(U_j),F)$ et $\Pi_*(\tilde{V}_j) = V|_{U_j}$. On introduit une partition de l'unité (f^j) subordonnée au recouvrement (U_j) et on pose :

$$\eta^i = \sum_j f^j \eta_j^i .$$

En utilisant (*), on obtient sans peine le résultat annoncé.

Notons les conséquences suivantes :

1.2.5. Remarques.

i) En posant $\sigma_b = \nu_* \circ \sigma$, on voit dans 1.2.3 (ii) que σ_b est une section de Π_b. En conséquence les deux homomorphismes Π_* et Π_b sont surjectifs.

ii) Puisque σ est un morphisme de $A(W)$-modules, il vient que pour tout $u \in W$, et tout $x \in \Pi^{-1}(u)$, l'ensemble $\{\sigma(V)(x)\}_{V \in X(W)}$ est un sous-espace vectoriel de dimension m de $T_x(M)$ transverse à $T_x(\bar{F})$. Bref on construit ainsi un sous-fibré de rang m de $T(M)$ supplémentaire de $T(\bar{F})$. On le note $\mathcal{N}(\bar{F})$.

Pour terminer nous pouvons résumer tout ce paragraphe dans le diagramme exact commutatif ci-dessous :

1.2.6. <u>Diagramme descriptif</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_{\bar{F}}(M,F) \arrow[r, "\tilde{\nu}_*"'] \arrow[d] & \Gamma(\xi) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dashed, bend right, "\tilde{\tau}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(F) \arrow[r] & X(M,F) \arrow[r, "\nu_*"'] \arrow[d, "\Pi_\#"] & X(M/F) \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_b"] \arrow[l, dashed, bend right, "\tau"'] & 0 \\
 & & X(W) \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[u, dashed, bend left, "\sigma"] & X(W) \arrow[d] \arrow[u, dashed, bend left, "\sigma_b"] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Toutes les lignes et les verticales sont exactes. Toutes les flèches sont à à la fois des morphismes de $A(W)$-modules et d'algèbres de Lie, à l'exception des sections σ, σ_b, τ et, $\tilde{\tau}$ qui ne sont pas des morphismes d'algèbres de Lie en général. [La section τ a été introduite en 1.1.3 (i) et $\tilde{\tau}$ est induite par τ].

1.3. *Formes basiques - Cohomologie basique d'un feuilletage transversalement parallélisable.*

Nous développons ici quelques propriétés préalables de la cohomologie basique des feuilletages T.P. Afin de pouvoir faire cette étude uniquement en termes de formes différentielles, nous commençons par quelques rappels sur la notion de forme différentielle à valeurs dans un fibré vectoriel (pour plus de détails, se reporter à [28] et [3]).

Pour tout fibré η on notera $\Gamma(\eta)$ le module de ses sections.

1.3.1. Formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel.

i) Soit $\eta : F \to E \xrightarrow{\lambda} W$ un fibré vectoriel réel de rang n. On considère le fibré associé $A^p(T(W),\eta)$ dont la fibre en $u \in W$ est l'espace des applications multilinéaires alternées :

$$T_u(W) \times \ldots \times T_u(W) \longrightarrow F_u .$$

Une section de ce fibré est appelée une p-forme différentielle sur W à valeurs dans η. On dénote par $\Omega^p(W,\eta)$ le $A(W)$-module $\Gamma(A^p(T(W),\eta))$ de ces p-formes différentielles. On a bien sûr :

$$\Omega^o(W,\eta) = \Gamma(\eta) \quad \text{et} \quad \Omega^p(W,\eta) \cong A^p(X(W) \; ; \Gamma(\eta))$$

i.e. tout élément de $\Omega^p(W,\eta)$ s'interprète comme une application p-linéaire alternée de $X(W)$ dans $\Gamma(\eta)$.

ii) Le fibré vectoriel η est dit plat s'il est défini par un cocycle localement constant. Ceci revient à dire que l'espace total de η est muni d'un feuilletage H transverse aux fibres qui en fait un faisceau localement constant d'espaces vectoriels.

Dans cette situation, soient U un ouvert trivialisant de η et $\emptyset$ une trivialisation :

$$\emptyset : \lambda^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n.$$

Une base de R^n définit n sections $\{e_U^1,\ldots,e_U^n\}$ de η au-dessus de U qui sont "constantes" (i.e. à valeurs dans une feuille de H) et qui engendrent le $A(U)$-module $\Gamma(\eta_{|U})$. Pour toute forme $\omega \in \Omega^p(W,\eta)$ on a l'écriture locale :

$$\omega_{|U} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \otimes e_U^i \quad \text{où} \quad \omega_i \in \Omega^p(U).$$

On définit une différentielle :

$$D : \Omega^p(W,\eta) \to \Omega^{p+1}(W,\eta)$$

en posant :

$$D\omega_{|U} = \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \otimes e_U^i \qquad \text{(cf. [3])}.$$

On a bien sûr $D^2 = 0$, ce qui permet de définir <u>la cohomologie à valeurs dans le fibré</u> η que l'on dénote par $H^p(W,\eta)$.

On applique les notions précédentes aux fibrés en algèbres de Lie. Nous procédons en deux temps :

1.3.2. <u>Fibré de cohomologie d'un fibré en algèbres de Lie</u>.

Soit $\xi : \mathcal{G} \to E \xrightarrow{\lambda} W$ un fibré en algèbres de Lie $\mathcal{G}$, défini par un cocycle $C = (\{U_i\},\{g_{ij}\})$ à valeurs dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

i) Soit $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$ et $\Lambda^q\mathcal{G}^*$ l'espace vectoriel des q-formes linéaires alternées sur $\mathcal{G}$. Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ agit de façon naturelle sur $\Lambda^q\mathcal{G}^*$ et à l'aide du cocycle C, on construit les fibrés associés.

$$\Lambda^q\xi^* : \Lambda^q\mathcal{G}^* \longrightarrow E(\Lambda^q\xi^*) \longrightarrow W.$$

ii) La différentielle habituelle

$$\partial : \Lambda^q \mathcal{G}^* \longrightarrow \Lambda^{q+1}\mathcal{G}^*$$

commute avec l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ donc induit un morphisme de rang constant (qui est l'identité sur la base), que l'on note encore

$$\partial : \Lambda^q \xi^* \longrightarrow \Lambda^{q+1}\xi^* .$$

On a bien sûr $\partial^2 = 0$ et pour tout $q \geq 0$, on obtient le fibré vectoriel quotient :

$$H^q(\xi) = \frac{\ker \partial : \Lambda^q\xi^* \longrightarrow \Lambda^{q+1}\xi^*}{\mathrm{im}\ \partial : \Lambda^{q-1}\xi^* \longrightarrow \Lambda^q\xi^*} .$$

Il n'est pas difficile de voir que la fibre de $H^q(\xi)$ s'identifie à $H^q(\mathcal{G})$. On dit que $H^q(\xi)$ est le q-fibré de cohomologie de ξ.

iii) Finalement, on observe que la propriété d'invariance par homotopie des applications induites en cohomologie montre que $H^q(\xi)$ est défini par un cocycle localement constant i.e. $H^q(\xi)$ est un fibré plat.

1.3.3. Cohomologie à valeurs dans un fibré en algèbres de Lie.

i) Soit $\xi : \mathcal{G} \to E \xrightarrow{\lambda} W$ un fibré en algèbres de Lie. En considérant les éléments de $\Omega^p(W,\Lambda^q\xi^*)$ comme des sections de $A^p(T(W),\Lambda^q\xi^*)$ la différentielle ∂ définie en 1.3.2. (ii), induit une différentielle que l'on désigne toujours par la même lettre :

$$\partial : \Omega^p(W,\Lambda^q\xi^*) \longrightarrow \Omega^p(W,\Lambda^{q+1}\xi^*).$$

La cohomologie du complexe ainsi défini sera donnée par :

$$H[\Omega^p(W,\Lambda^q\xi^*),\partial] \cong \Omega^p(W,H^q(\xi)).$$

ii) Mais $H^q(\xi)$ est un fibré plat (cf. 1.3.2. iii)) donc la définition de 1.3.1. ii) s'applique. On a une différentielle

$$D : \Omega^p(W,H^q(\xi)) \to \Omega^{p+1}(W,H^q(\xi))$$

qui nous permet de définir la cohomologie, $H^p(W,H^q(\xi))$ de W à valeurs dans le fibré plat $H^q(\xi)$ (et qui est aussi la cohomologie de W à valeurs dans $H^q(\xi)$ considéré comme faisceau localement constant.)

Passons rapidement à la cohomologie basique d'un feuilletage (quelconque) (M,F).

1.3.4. Formes basiques.

i) Soit $\Omega^*(M)$ le complexe des formes différentielles sur M ($\Omega^o(M) = A(M)$). Si M est muni d'un feuilletage F, on dira que $\alpha \in \Omega^*(M)$ est F-basique (ou basique tout court), si on a :

$$i_X\alpha = 0 \quad \text{et} \quad i_X d\alpha = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \Gamma(F).$$

Bien sûr si α est basique il en est de même pour $d\alpha$ et l'espace des formes basiques est un sous-complexe de $\Omega^*(M)$ que l'on note $\Omega^*(M/F)$ (voir 1.1.2).

La cohomologie du complexe $[\Omega^*(M/F),d]$ s'appelle la cohomologie (de De Rham) basique de F.

ii) En particulier, on posera $\Omega^o(M/F) = A(M/F)$. Alors $\Omega^*(M/F)$ est muni d'une structure de $A(M/F)$-module. De plus si F est T.P. on a de façon évidente $A(M/F) = A(W)$ donc $\Omega^*(M/F)$ est un $A(W)$-module. On verra en 2.1.1. que ce module est libre.

Par exemple, on peut calculer immédiatement la cohomologie basique d'un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie en utilisant (1.1.4).

1.3.5. Cohomologie basique d'un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie.

Soit (M,F) un $\mathcal{G}$-feuilletage de Lie. Avec les notations de (1.1.4), soit $\Omega_I^*(\tilde{M}/\tilde{F}) \subset \Omega^*(\tilde{M}/\tilde{F})$ le sous-complexe des formes basiques de $\tilde{F}$ qui sont invariantes par l'action de $\mathrm{Aut}(p)$ sur $\tilde{M}$. Si par ailleurs $\Omega_K^*(G)$ (où $K = \mathrm{im}\, H$) désigne les formes sur G invariantes par K, on a un diagramme

$$\Omega^*(M/F) \xrightarrow{p^*} \Omega_I^*(\tilde{M}/\tilde{F}) \xleftarrow{D^*} \Omega_K^*(G)$$

où p^* et D^* sont visiblement des isomorphismes.

Comme conséquence, on a $H^*(M/F) \cong H_K^*(G)$ (cohomologie des formes K-invariantes sur G). En particulier F est un feuilletage à feuilles denses si et seulement si $\bar{K} = G$ et dans ce cas on aura donc :

$$H^*(M/F) = H^*(\mathcal{G}) \blacksquare$$

Pour le reste de ce paragraphe, nous supposerons que F est un feuilletage T.P sur une variété compacte M et que l'on a fixé une fois pour toutes un parallélisme P. A l'aide du supplémentaire $N(\bar{F})$ de $T(\bar{F})$ construit en 1.2.5 (ii), on va munir $\Omega^*(M/F)$ d'une structure de $A(W)$-module bigradué différentiel.

1.3.6. Formes basiques pures de type (p,q).

i) Un champ feuilleté $X \in \mathcal{X}(M,F)$ sera dit pur horizontal [resp. vertical] si c'est une section de $N(\bar{F})$ [resp. de $T(\bar{F})$]. De même on dira qu'une forme $\alpha \in \Omega^r(M/F)$ est pure de type (p,q), avec $p+q = r$, si pour tout r-uple $\{X_1,\ldots,X_r\}$ de champs feuilletés purs on a :

$$\alpha(X_1,\ldots,X_r) = 0$$

sauf si p-champs X_i sont horizontaux et q sont verticaux.

On note $\Omega^{pq}(M/\mathcal{F})$ le $A(W)$-module des formes basiques pures de type (p,q), et grâce au fait que les champs feuilletés engendrent $\mathcal{X}(M)$ (comme $A(M)$-module) (voir 1.1.6 ii)), on obtient immédiatement que :

$$\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{pq}(M/\mathcal{F}).$$

ii) En outre, du fait que $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}(M,\mathcal{F})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(M,\mathcal{F})$ (voir 1.2.3), on déduit que la différentielle :

$$d : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M/\mathcal{F})$$

se décompose en une somme de trois termes :

$$d = d_{01} + d_{10} + d_{2,-1}$$

Contrairement à $\Omega^r(M/\mathcal{F})$, le module $\Omega^{pq}(M/\mathcal{F})$ ne sera pas libre en général∎

Soit alors ξ le fibré structural du feuilletage T.P., $(M,\mathcal{F})$, on a :

1.3.7. <u>Lemme</u>. Pour tout (p,q), on a un isomorphisme de $A(W)$-modules :

$$\theta : \Omega^{pq}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^p(W,\Omega^q\xi^*).$$

<u>Démonstration</u> : Soient $X_i \in \mathcal{X}(W)$, $i = 1,\ldots,p$ et $Y_j \in \Gamma(\xi)$, $j = 1,\ldots,q$
Pour tout $\omega \in \Omega^{pq}(M/\mathcal{F})$, la fonction

$$\omega\left[\sigma(X_1),\ldots,\sigma(X_p),\ \tilde{\tau}(Y\ \ \tilde{\tau}(Y_1),\ldots,\tilde{\tau}(Y_q)\right]$$

est $\mathcal{F}$-basique, donc appartient à $A(W)$. (pour la signification de σ et $\tilde{\tau}$ se reporter à 1.2.6).

On définit alors $\theta\omega \in \Gamma(A^p(T(W),\Lambda^q\xi^*))$ en posant :

$$(*) : \theta(\omega)(X_1,\ldots,X_p)\ (u)(Y_1,\ldots,Y_q) = \omega[\sigma(X_1),\ldots,\sigma(X_p),\tilde{\tau}(Y_1),\ldots,\tilde{\tau}(Y_q)](x)$$

où $u \in W$ et x est un point quelconque de $\Pi^{-1}(u)$. L'égalité $(*)$ définit θ comme morphisme de $A(W)$-modules et montre en même temps que θ est surjective. En se rappelant que $\mathcal{X}(M,F)$ engendre $\mathcal{X}(M)$ comme $A(M)$-module (voir 1.1.6 ii)), on voit immédiatement que θ est injective ■

Du point de vue des structures de complexes différentiels (voir 1.3.2 et 1.3.3), on a les résultats partiels suivants dont le premier est immédiat :

1.3.8. Proposition. L'application θ est un isomorphisme de complexes différentiels :

$$\theta : [\Omega^{pq}(M/F),\ d_{01}] \to [\Omega^p(W,\Lambda^q\xi^*),\partial].$$

En conséquence on a :

$$H[\Omega^{pq}(M/F),d_{01}] \cong \Omega^p(W,H^q(\xi)).$$

Soit alors $Z_o^{pq} = \{\alpha \in \Omega^{pq}(M/F) \mid d_{01}\alpha = 0\}$ et soit J la projection naturelle de Z_o^{pq} sur $\Omega^p(W,H^q(\xi)) \cong H[\Omega^{pq}(M,F),d_{01}]$, on a :

1.3.9. Proposition.

Le diagramme ci-contre est commutatif : en particulier pour $q = 0$ on a un isomorphisme de complexes différentiels :

$$\begin{array}{ccc} Z_o^{pq} & \xrightarrow{d_{10}} & Z_o^{p+1,q} \\ \downarrow J & & \downarrow J \\ \Omega^p(W,H^q(\xi)) & \xrightarrow{D} & \Omega^{p+1}(W,H^q(\xi)) \end{array}$$

$$J : [\Omega^{*o}(M/\mathcal{F}), d_{10}] \to [\Omega^{*}(W), d_W] \ .$$

(où d_W désigne la différentielle sur la variété W).

<u>Démonstration</u> :

a) Dans le cas $q = 0$ on vérifie en utilisant la définition des formes de type (p,q) que $d_{01}\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega^{p,o}(M/\mathcal{F})$. Dans ce cas $J = \theta$ qui est alors l'isomorphisme de complexes différentiels annoncés (voir 1.3.1).

b) Soit U un ouvert $\mathcal{P}$-trivialisant pour $\bar{\mathcal{F}}$ (voir 1.2.1). Cet ouvert trivialise également $\ker \partial \subset \Lambda^q\xi^*$ et $H^q(\xi)$ et il existe un nombre fini de formes $v_i \in \Omega^q[\pi^{-1}(U)/\mathcal{F}]$ telles que $\{\theta(v_i)\}$ est une base de $\Gamma(\Lambda^q\xi^*{}_{|U})$. Pour toute forme $\omega \in \Omega^{pq}(M/\mathcal{F})$, on a alors l'écriture locale :

$$\omega_{|\pi^{-1}(U)} = \sum_i \omega_i \otimes v_i$$

où $\omega_i \in \Omega^{po}(M/\mathcal{F})$ est identifié d'après (a) à un élément de $\Omega^p(W)$. On vérifie immédiatement que l'on a :

$$d_{10}\omega_{|\pi^{-1}(U)} = \sum_i d_W\, \omega_i \otimes v_i \qquad ;$$

et

$$Jd_{10}\omega_{|U} = \sum_i d_W\, \omega_i \otimes [v_i]$$

où $[v_i]$ est la classe de v_i dans $H^q(\xi)$. Par définition de D (1.3.1. ii)) on obtient enfin

$$Jd_{10}\omega = D\, J\, \omega \, .$$

D'où la proposition ∎

1.4. *Suite spectrale de cohomologie basique d'un feuilletage transversalement parallélisable.*

Enfin nous arrivons à la suite spectrale annoncée :

1.4.1. Filtration de $\Omega^*(M/F)$ - suite spectrale.

i) Soient r, p des entiers naturels. On pose

$$F^p\Omega^r(M/F) = \{\alpha \in \Omega^r(M/F) \mid i_V\alpha = 0\}$$

pour tout $(r-p+1)$-uple $V = X_1 \wedge \dots \wedge X_{r-p+1}$ de champs feuilletés X_i appartenant à $X_{\bar{F}}(M,F)$. Du fait que $X_{\bar{F}}(M,F)$ est une sous-algèbre de Lie de $X(M,F)$, on vérifie que l'on a (de façon analogue au cas des fibrés) :

$$d\, F^p\Omega^r(M/F) \subset F^p\Omega^{r+1}(M/F).$$

Autrement dit, on obtient une filtration décroissante de $\Omega^*(M/F)$ compatible avec la différentielle.

ii) La suite spectrale correspondante

$$E_r^{pq}(M/F) \Longrightarrow H^{p+q}(M/F)$$

qui aboutit à la cohomologie basique de F est appelée la suite spectrale de cohomologie basique de F.

Les premiers termes de cette suite spectrale s'identifient aisément avec les notations de (1.3) .

1.4.2. Proposition. Pour tout (p,q) on a :

i) $[E_o^{pq}, d_o] \cong [\Omega^{pq}(M/F), d_{01}]$

ii) $[E_1^{pq}, d_1] \cong [\Omega^p(W, H^q(\xi)), D]$

Démonstration : Le point (i) est immédiat (et standard) à partir de l'égalité :

$$F^p\Omega^{p+q}(M/F) = \Omega^{p+q,0} \oplus \Omega^{p+q-1,1} \oplus \dots \oplus \Omega^{p,q}\ .$$

En appliquant 1.3.8, on a donc :

$$E_1^{pq} \cong \Omega^p(W,H^q(\xi))$$

et il nous reste simplement à identifier la différentielle

$$d_1 : E_1^{pq} \longrightarrow E_1^{p+1,q} .$$

Pour cela considérons $Z_o^{pq} = \{\alpha \in \Omega^{pq}(M/F) \mid d_{01}\alpha = 0\}$. Une autre observation standard est que d_1 est induite par $d_{10} : Z_o^{pq} \to Z_o^{p+1,q}$. En appliquant la proposition 1.3.9. on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& Z_o^{pq} \arrow[rr, "d_{10}"] \arrow[dl, "J"'] \arrow[dd] & & Z_o^{p+1,q} \arrow[dl, "J"] \arrow[dd] \\
\Omega^p(W,H^q(\xi)) \arrow[rr, "D"] & & \Omega^{p+1}(W,H^q(\xi)) & \\
& E_1^{pq} \arrow[ul, "\theta^*"] \arrow[rr, "d_1"] & & E_1^{p+1,q} \arrow[ul, "\theta^*"]
\end{tikzcd}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme ■

On a les conséquences immédiates suivantes :

1.4.3. <u>Théorème</u>. La suite spectrale de cohomologie basique d'un feuilletage T.P. F vérifie la relation :

$$E_2^{pq} \cong H^p(W,H^q(\xi)).$$

1.4.4. <u>Corollaire</u>. (cf. [17]) La cohomologie basique d'un feuilletage T.P. est de dimension finie.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous utiliserons la condition $H^n(M/F) \neq 0$. Cette condition n'est pas toujours vérifiée comme le montre l'exemple ci-dessous.

1.4.5. Exemple (cf. [4]). Soit λ une valeur propre d'une matrice hyperbolique $A \in S\ell_2(\mathbb{Z})$. La direction propre associée à λ définit sur $T^2 \times [0,1]$ un flot invariant par l'identification $(y,0) \sim (A(y),1)$. On obtient ainsi sur la variété quotient T^3_A un flot F transversalement de Lie modelé sur le groupe affine de la droite réelle, donc un feuilletage T.P.

La fibration basique s'identifie à la fibration naturelle $T^2 \to T^3_A \to \mathbb{S}^1$. Le terme E_2 de la suite spectrale de cohomologie basique du feuilletage (T^3_A, F) s'écrit compte tenu de (1.4.2.) :

$$E_2^{pq} = H^p(S^1, H^q(\xi))$$

où $H^q(\xi)$ est un fibré vectoriel de fibre $H^q(\mathbb{R})$.

Enfin, puisque la base $\mathcal{W}$ est de dimension un, il est facile de voir que cette suite spectrale stationne à partir du terme E_2 que l'on peut représenter comme suit ; compte tenu du fait que $H^1(\xi)$ n'est pas trivial (en tant que fibré plat) :

$$\begin{array}{c|ccc}
q & & & \\
1 & 0 & 0 & \\
0 & \mathbb{R} & \mathbb{R} & \\
\hline
 & 0 & 1 & p
\end{array}$$

On en déduit que :

$$H^0(T^3_A/F) \cong \mathbb{R}$$
$$H^1(T^3_A/F) \cong \mathbb{R}$$
$$\text{et} \quad H^2(T^3_A/F) \cong 0 \quad \blacksquare$$

2. *Feuilletages T.P. : décomposition de Hodge et dualité de Poincaré.*

Pour un feuilletage T.P. le complexe $\Omega^*(M/F)$ des formes basiques est libre. Il s'ensuit que $\{\Omega^r(M/F)\}_{r=0,\dots,n}$ est la famille des sections d'un complexe elliptique $(\mathcal{B},d)$ au-dessus de la variété basique W : le complexe de de Rham de M/F. On obtient immédiatement un théorème de décomposition de Hodge pour les formes basiques (voir 2.1.6).

Dans un deuxième temps (paragraphe 2.2), on rappelle qu'un feuilletage T.P. est riemannien et on montre que si $n = \mathrm{cod}\ F$, alors $H^n(M/F)$ est non nul si et seulement si la forme volume basique v est harmonique. On conclut en montrant que $H^*(M/F)$ vérifie la dualité de Poincaré si et seulement si cette hypothèse est satisfaite. Notre démarche dans cette deuxième partie se réfère à Wells [59].

2.1. Décomposition de Hodge des formes basiques pour les feuilletages T.P.

Soient (M,F) un feuilletage T.P. de codimension n et $P = \{P_1,\dots,P_n\}$ un parallélisme transverse de F. On montre tout d'abord que $\Omega^*(M/F)$ est libre.

2.1.1. Base P-canonique de $\Omega^r(M/F)$.

i) Soit $X(M/F)^*$ le dual du module des champs basiques. On définit un morphisme de $A(W)$-modules :

$$j : \Omega^1(M/F) \to X(M/F)^*$$

par $(j\omega)(X) = \omega(\tau(X))$ pour $X \in X(M/F)$ [où τ est comme en 1.2.6]. On voit aisément en utilisant 1.1.6 (ii) que j est bijectif.

ii) Identifiant $X(M/F)^*$ avec $\Omega^1(M/F)$ à l'aide de j, on désigne par $\{\theta^i\} \subset \Omega^1(M/F)$ la base duale de P^b. On voit que $\Omega^r(M/F)$ est un $A(W)$-module libre de dimension C_n^r engendré par la base

$$\{\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}\}_{i_1<i_2<\dots<i_r} .$$

C'est la base $\mathcal{P}$-canonique de $\Omega^r(M/\mathcal{F})$.

iii) le générateur $v = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^n$ de $\Omega^n(M/\mathcal{F})$ est appelé la forme volume basique de $\mathcal{F}$.

2.1.2. Le complexe de de Rham de $M/\mathcal{F}$.

i) compte-tenu de ce qui précède, on voit immédiatement que $\Omega^r(M/\mathcal{F})$ s'identifie au A(W)-module $\Gamma(\mathcal{B}_r)$ des sections d'un fibré vectoriel trivial $\mathcal{B}_r$ de rang C_n^r et base W. Soit $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_r\}_{r=0,1,\ldots,n}$, alors $(\mathcal{B},d)$ est le complexe de de Rham de $M/\mathcal{F}$.

ii) Soit $(x_1,\ldots,x_m)$ un système de coordonnées locales sur un ouvert U qui trivialise simultanément $\bar{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}$ (cf. 1.2.1). On peut choisir le parallélisme $\mathcal{P} = \{P_1,\ldots,P_n\}$ de telle façon que l'on ait :

$$P_{i\,|\Pi^{-1}(U)} = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \qquad \text{pour } i \in \{1,\ldots,m\},$$

$$P_{i\,|\Pi^{-1}(U)} \in \Gamma(\bar{\mathcal{F}}) \qquad \text{pour } i > m.$$

Un abus d'écriture évident nous donne alors les écritures locales suivantes pour tout $\omega \in \Omega^r(M/\mathcal{F})$,

$$\omega_{|U} = \sum_{i_1<\ldots<i_r} a_{i_1\ldots i_r}\, d_W x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_W x_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}$$

$$\begin{aligned} d\omega_{|U} = & \sum d_W a_{i_1\ldots i_r} \wedge d_W x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_W x_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r} \\ & + \sum (-1)^s a_{i_1\ldots i_r}\, d_W x_{i_1} \wedge \ldots \wedge d_W x_{i_s} \wedge d(\theta^{i_{s+1}} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}). \end{aligned}$$

où s dépend du r-uple considéré $i_1 < \ldots < i_r$ et d_W désigne la différentielle sur la variété W.

L'expression précédente de $d\omega$ montre que la différentielle d est un opérateur différentiel d'ordre 1 au sens du complexe $\mathcal{B}$. Bref $(\mathcal{B},d)$ est un complexe différentiel. (Dans la suite on écrira désormais d au lieu de d_W).

iii) Soient enfin $u \in W$, $\xi \in T_u^*(W)$, $\xi \neq 0$, et $\varphi \in A(W)$ tels que $\varphi(u) = 0$ et $d\varphi(u) = \xi$. D'après ([15] p. 115), le symbole $\sigma(d)(u,\xi)$ de d au point (u,ξ) est défini par

$$\sigma(d)(u,\xi)\omega_u = (d\varphi \wedge \omega)_u$$

pour toute forme $\omega \in \Omega^r(M/\mathcal{F})$.

Alors si $(d\varphi \wedge \omega)_u = 0$, on choisit les coordonnées locales $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ dans (ii) ci-dessus de façon à avoir $x_1 = \varphi$ et en utilisant les écritures précédentes, on obtient :

$$\omega_{|U} = \sum a_{1i_2\dots i_r}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}$$

$$\omega_{|U} = dx_1 \wedge \alpha,$$

où α est la r-forme basique définie sur $\Pi^{-1}(U)$ par :

$$\alpha = \sum_{i_2<\dots<i_r} a_{1i_2\dots i_r}\, dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_s} \wedge \theta^{i_{s+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r} .$$

Bref le complexe de de Rham $(\mathcal{B},d)$ de $M/\mathcal{F}$ est un complexe elliptique.

Pour pouvoir appliquer au complexe $(\mathcal{B},d)$ les résultats de la théorie des complexes elliptiques, il nous reste à définir le L^2-produit scalaire correspondant. Pour ce faire, on remarque qu'il existe sur $(\mathcal{B},d)$ une structure riemannienne adaptée au parallélisme fixé $\mathcal{P}$.

2.1.3. Structure riemannienne de $(M,\mathcal{F})$.

i) Rappelons que le fibré normal $\nu(\mathcal{F})$ est trivialisé par la famille des champs basiques :

$$\mathcal{P}^b = \{P_1^b,\ldots,P_n^b\} .$$

On désigne par R_ν l'unique structure riemannienne sur $\nu(\mathcal{F})$ telle que :

$$R_\nu(P_i^b,P_j^b) = \delta_i^j .$$

Elle est définie par une section du fibré $\nu(\mathcal{F})^* \otimes \nu(\mathcal{F})^*$ qui est $\mathcal{F}$-basique (en un sens évident). En raison de l'existence de cette structure, on dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien (voir aussi 3.1.1).

ii) La structure R_ν définit une métrique riemannienne R_W sur W.

Si W est orientable, on choisit une orientation $\mathcal{O}$ de W (et donc aussi une orientation de ξ, cf. 1.2.2 (iii)) et on désigne par w la forme volume correspondant à $(R_W,\mathcal{O})$. Dans le cas contraire, on munit W de la mesure différentiable strictement positive μ obtenue en considérant une forme volume $\tilde{w}$ sur le revêtement $\tilde{W}$ des orientations de W et pour laquelle on a

$$\int_W f d\mu = \frac{1}{2}\int_{\tilde{W}} \tilde{f}\,\tilde{w}$$

où $\tilde{f}$ est le relèvement à $\tilde{W}$ de la fonction f.

Pour unifier l'écriture dans la suite, on conviendra que l'on écrira aussi $d\mu = w$ dans le cas orientable.

2.1.4. Produit scalaire - Laplacien basique - Formes harmoniques basiques.

i) A la métrique R_ν de 2.1.3, on associe naturellement la structure euclidienne $(\ ,\ )_r$ sur $\mathcal{B}_r$ telle que pour tout couple de r-formes basiques :

$$\alpha = \sum a_{i_1 \ldots i_r} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}$$

$$\beta = \sum b_{i_1 \ldots i_r} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}$$

on ait :

$$(\alpha_u, \beta_u)_r = \sum a_{i_1 \ldots i_r} b_{i_1 \ldots i_r} \qquad \text{pour tout } u \in W.$$

On obtient un produit scalaire noté $<,>_r$ sur $\Omega^r(M/F)$, en posant :

$$<\alpha,\beta>_r = \int_W (\alpha_u, \beta_u)_r d\mu(u).$$

ii) On construit maintenant les opérateurs usuels associés à l'opérateur d_r :

$$\delta_r : \Omega^{r+1}(M/F) \to \Omega^r(M/F) \quad \text{l'adjoint de } d_r \text{ par rapport à } <,>_r$$

et : $$\Delta_r : \Omega^r(M/F) \to \Omega^r(M/F)$$

défini par :

$$\Delta_r = d_{r-1}\delta_{r-1} + \delta_r d_r .$$

L'opérateur Δ_r est auto-adjoint par rapport au produit scalaire $<,>_r$. C'est le <u>laplacien basique</u> de (M,F). Les éléments de $H^r(M/F) = \ker \Delta_r$ sont les r-formes basiques <u>harmoniques</u>. On a l'égalité :

$$H^r(M/F) = \ker d_r \cap \ker \delta_{r-1} .$$

La théorie générale des complexes elliptiques (voir par exemple Wells [59]) nous donne alors le théorème de décomposition de Hodge pour les formes basiques de (M,F).

2.1.5. Théorème. Soit F un feuilletage T.P. de codimension n sur une variété compacte M. Alors pour tout $r \in \{0,\dots,n\}$ on a :

i) $H^r(M/F)$ est de dimension finie.

ii) $\Omega^r(M/F) = H^r(M/F) \oplus \operatorname{im} d_{r-1} \oplus \operatorname{im} \delta_r$.

En particulier, on a $H^r(M/F) \cong H^r(M/F)$ et on retrouve le résultat de [7] :

2.1.6. Corollaire. La cohomologie basique d'un feuilletage T.P. sur une variété compacte est de dimension finie.

2.2. Dualité de Poincaré en cohomologie basique pour les feuilletages T.P.

On remarque que pour le feuilletage de Lie décrit en 1.4.5, la classe $[v]$ dans $H^n(M/F)$ de la forme volume basique v (cf. 2.1.1 (iii)) est nulle. Or la non-nullité de cette classe est bien sûr une condition nécessaire pour que $H^*(M/F)$ vérifie la dualité de Poincaré. En fait nous voulons montrer dans la suite qu'elle est suffisante. Nous commençons par expliciter la signification de cette condition dans le cas d'un feuilletage T.P. dont la variété basique W est orientable.

2.2.1. Proposition. Soit F un feuilletage T.P. de codimension n sur une variété compacte M, avec $m = \dim W$ et $g = n-m = \dim \mathcal{G}$. Alors si W est orientable les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $H^n(M/F) \neq 0$;

ii) $H^g(\xi)$ est un fibré orientable de rang un qui est trivial comme fibré plat ;

iii) $\mathcal{G}$ est unimodulaire et v est décomposable, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \Omega^{0g}(M/F)$ telle que $d_{10}\lambda = 0$ et $v = w \wedge \lambda$ (où w est la forme volume sur W considérée comme élément de $\Omega^{m0}(M/F)$).

<u>Démonstration</u> : D'après (1.4.3), on a une suite d'isomorphismes :

$$(S) \; : \; H^n(M/F) \cong E_\infty^{m,g} \cong E_2^{m,g} \cong H^m(W,H^g(\xi))$$

et comme la variété W est orientable on a par dualité

$$H^m(W,H^g(\xi)) \cong H^o(W,H^g(\xi)).$$

On voit donc que $H^n(M/F) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{G}$ est unimodulaire et le fibré plat $H^g(\xi)$ possède une section non nulle λ c'est-à-dire $H^g(\xi)$ est trivial de rang un. Ceci montre que (i) équivaut à (ii).

Supposons (ii) satisfaite ; une section non nulle λ du fibré plat $H^g(\xi)$ est un élément de $\Omega^o(W,H^g(\xi))$ tel que $d_1\lambda = 0$. Comme $\mathcal{G}$ est unimodulaire, on a :

$$\Omega^o(W,H^g(\xi)) \cong \Omega^o(W,\Lambda^g\xi^*) \cong \Omega^{o,g}(M/F) \;,$$

donc on peut considérer λ comme un élément de $\Omega^{o,g}(M/F)$ vérifiant $d_{10}\lambda = 0$.

Soient $P = \{P_1,\ldots,P_n\}$ un parallélisme transverse de F et w la forme volume sur W correspondant à l'orientation de $H^g(\xi)$ (cf. 1.2.2. (iii)). La condition $d_{10}\lambda = 0$ implique que la fonction

$$(w \wedge \lambda)(P_1(x),\ldots,P_n(x)), \qquad x \in M$$

est une constante non nulle. D'où la condition (iii) pour un choix convenable de λ.

Réciproquement, soit $\lambda \in \Omega^{o,g}(M/F)$ avec $d_{10}\lambda = 0$. Sa classe de cohomologie $[\lambda] \in \Omega^o(W,H^g(\xi))$ vérifie $d_1[\lambda] = 0$ autrement dit $[\lambda]$ définit une section du fibré plat $H^g(\xi)$. Puisque $\mathcal{G}$ est unimodulaire, cette section n'est pas nulle et la condition (ii) suit aisément ∎

2.2.2. Corollaire. Dans les conditions précédentes, si $H^n(M/F) \neq 0$, l'homomorphisme de $A(W)$-modules :

$$I : \Omega^n(M/F) \longrightarrow \Omega^m(W)$$

défini par $I(v) = w$ est un morphisme différentiel qui induit un isomorphisme :

$$I^* : H^n(M/F) \longrightarrow H^m(W) \cong \mathbb{R}.$$

Démonstration : D'après la suite (S) de la démonstration précédente et utilisant la condition (ii) dans l'énoncé de 2.2.1, on a

$$H^n(M/F) \cong H^m(W,H^g(\xi)) \cong H^m(W) \cong \mathbb{R}.$$

En outre comme, avec les notations de 1.4.2, tout élément de E_o^{mg} est d_o-fermé, la projection naturelle de Z_o^{mg} sur E_1^{mg} définit un morphisme de $A(W)$-modules différentiels :

$$\Omega^n(M/F) \cong \Omega^{mg}(M/F) \cong E_o^{mg} = Z_o^{mg} \longrightarrow E_1^{mg} \cong \Omega^m(W,H^g(\xi)) \cong \Omega^m(W)$$

qui est tel que (voir démonstration de 1.3.9) :

$$I(v) = I(w \wedge \lambda) = w \otimes [\lambda] = w$$

où $[\lambda]$ est la classe de λ dans le fibré trivial $H^g(\xi)$. Comme $H^n(M/F) \cong \mathbb{R}$, I^* est un isomorphisme ∎

Il faut bien noter que l'homomorphisme I ci-dessus est en fait défini dès que W est orientable mais que ce n'est un homomorphisme différentiel que si $H^n(M/F) \neq 0$. Nous allons donc l'utiliser (même quand $H^n(M/F) = 0$) pour donner une expression du produit scalaire $\langle , \rangle$ à l'aide de l'"opérateur de Hodge basique" (voir 2.2.3).

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage de codimension n admettant un parallélisme transverse $P = \{P_1,\ldots,P_n\}$ et soit $\{\theta^1,\ldots,\theta^n\}$ la base duale de P^b (cf. 2.1.1).

2.2.3. Opérateur de Hodge basique - autre expression du produit scalaire $<,>$

i) On définit un morphisme de $A(W)$-modules

$$* : \Omega^r(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{n-r}(M/\mathcal{F})$$

en posant :

$$*(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_r}) = \varepsilon(i_1,\ldots,i_r)\, \theta^{j_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{j_{n-r}}$$

où $j_1 < \ldots < j_{n-r}$ est la suite complémentaire de $i_1 < \ldots < i_r$ dans $(1,\ldots,n)$ et $\varepsilon(i_1,\ldots,i_r)$ est la signature de la permutation $(i_1\ldots i_r j_1 \ldots j_{n-r})$. C'est l'opérateur de Hodge basique pour $\mathcal{F}$. On vérifie aisément que :

$$* *\alpha = (-1)^{r(n-r)}\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha,$$

donc que $*$ est un isomorphisme dont l'inverse est donné par :

$$*^{-1} = (-1)^{r(n-r)} * \quad .$$

ii) Il est alors immédiat que si la variété basique W est orientable, le produit scalaire $<,>$ peut s'écrire

$$<\alpha,\beta>_r = \int_W I(\alpha \wedge * \beta) \qquad \text{pour } \alpha,\beta \in \Omega^r(M/\mathcal{F}).$$

iii) Si W n'est pas orientable, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tilde{\Pi}"'] & M \arrow[d, "\Pi"] \\ \tilde{W} \arrow[r, "q_W"] & W \end{tikzcd}$$

où q_W est le revêtement des orientations de W et $\tilde{\Pi}$ est le fibré image réciproque de Π. Alors $\tilde{F} = q^*F$ est un feuilletage T.P. dont la variété basique W est orientable et les formes basiques de F s'identifient aux formes basiques de $\tilde{F}$ invariantes par l'action de Z_2 sur $\tilde{M}$. Dans ces conditions, on a

$$<\alpha,\beta>_r = \frac{1}{2}\int_{\tilde{W}} \tilde{I}(\tilde{\alpha} \wedge * \tilde{\beta})$$

où $\tilde{\alpha} = q^*\alpha$, $\tilde{\beta} = q^*\beta$ et $\tilde{I}$ est l'homomorphisme correspondant à I pour le feuilletage $\tilde{F}$.

Nous arrivons au résultat central de ce paragraphe.

2.2.4. Proposition. Soit (M,F) un feuilletage T.P. de codimension n tel que $H^n(M/F) \neq 0$. Alors on a les relations :

$$\delta_r = (-1)^r *^{-1} d_r * \qquad \text{et} \qquad *\Delta_r = \Delta_r *$$

Démonstration : On va montrer que l'opérateur $\hat{\delta}_r = (-1)^r *^{-1} d_r *$ est bien l'adjoint de d_r pour le produit scalaire $<,>_r$. En effet, pour $\alpha \in \Omega^{r-1}(M/F)$ et $\beta \in \Omega^r(M/F)$, on a :

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{r-1} \alpha \wedge d*\beta,$$

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \hat{\delta}\, \beta.$$

Supposons alors W orientable. Comme $H^n(M/F) \neq 0$, I est un morphisme différentiel et par application du théorème de Stokes, il vient :

$$<d\alpha,\beta>_r = <\alpha,\hat{\delta}\ \beta>_r \quad .$$

Ce même résultat est obtenu en passant par l'intermédiaire du feuilletage $\tilde{F}$ (cf. 2.2.3) si W n'est pas orientable. Finalement, on a $\hat{\delta}_r = \delta_r$ et le reste en découle aisément ■

On obtient le résultat final annoncé.

2.2.5. <u>Théorème de dualité</u>. Soit (M,F) un feuilletage T.P. de codimension n. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) la forme volume basique v est harmonique

ii) $H^n(M/F) \neq 0$

iii) $H^*(M/F)$ vérifie la dualité de Poincaré.

<u>Démonstration</u> : (i) implique (ii) d'après 2.1.5. Supposons alors que $H^n(M/F) \neq 0$, l'opérateur de Hodge commutant avec Δ (voir 2.2.4), induit un isomorphisme $* : H^r(M/F) \to H^{n-r}(M/F)$. D'où la condition (iii).

Enfin, si $H^*(M/F)$ vérifie la dualité de Poincaré, on a $H^n(M/F) \neq 0$ et donc $*\Delta = \Delta*$ d'après 2.2.4. En appliquant cette relation à la forme volume v, il vient :

$$*\Delta v = \Delta * v = \Delta 1 = 0.$$

Puisque $*$ est un isomorphisme, on a $\Delta v = 0$. D'où le théorème■

3. *Feuilletages riemanniens : Théorie de Hodge basique et dualité.*

Un feuilletage riemannien (M,F) transversalement orienté se relève en un feuilletage T.P. $(M^{\#},F^{\#})$ dans le SO(n)-fibré principal

$$\rho : M^{\#} \to M$$

des repères transverses de F (cf. 3.1.2 et 3.1.3). Cette fibration joue dans la suite un rôle déterminant, car les formes F-basiques s'identifient par ρ^* aux formes $F^{\#}$-basiques qui sont SO(n)-invariantes (cf. 3.2.1 (ii)).

Au §.3.1, on montre que ρ définit une suite spectrale de Leray-Serre pour les formes $F^{\#}$-basiques qui comme celle de §.1.4 s'exprime uniquement en termes de formes différentielles et dont le terme E_2^{pq} est isomorphe à $H^p(M/F) \otimes H^q(so(n))$ (cf. 3.1.8 - Voir aussi [17]).

Dans 3.2., nous définissons tous les opérateurs de la théorie de Hodge pour F et nous les relions aux opérateurs correspondants relatifs à $F^{\#}$ à l'aide de l'intégration le long des fibres de ρ. On en déduit un théorème de décomposition de Hodge basique dans le cas particulier d'un feuilletage F tel que la fibration ρ admette une forme caractéristique fermée (cf. 3.2.10). Le cas général est traité au §.3.3 en se ramenant au cas précédent par une modification de la différentielle.

3.1. Fibration principale associée à un feuilletage riemannien - suite spectrale de Leray-Serre basique.

Nous commençons par rappeler la construction du feuilletage T.P. $(M^{\#},F^{\#})$ "relevé" d'un feuilletage riemannien (M,F). Ceci nous permettra d'introduire une nouvelle bigraduation du module $\Omega^*(M^{\#}/F^{\#})$ et de construire une nouvelle suite spectrale. Sauf en 3.1.1 et 3.1.10, les feuilletages considérés seront supposés transversalement orientés.

Soit donc (M,F) un feuilletage de codimension n sur une variété compacte M.

3.1.1. Feuilletages riemanniens.

i) On dit que F est riemannien s'il existe une métrique riemannienne R_o sur $\mathbb{R}^n$ et un cocycle feuilleté $C = (\{(U_i,f_i)\},\{g_{ij}\})$ définissant F tel que pour tout $x \in M$, $g_{ij}(x)$ soit une isométrie locale de $\mathbb{R}^n$. La différentielle Dg_{ij} est à valeurs dans le groupe orthogonal $O(n)$ et le fibré normal $\nu(F)$ est muni d'une structure riemannienne R_ν invariante le long des feuilles de F (voir aussi 2.1.3 (ii)).

ii) En choisissant un supplémentaire $N(F)$ de $T(F)$ dans $T(M)$, on pourra compléter R_ν, considérée comme structure riemannienne sur $N(F)$ en une métrique $R = R_T \oplus R_\nu$ sur M, dont on dira qu'elle est quasi-fibrée (voir [47]).

On remarquera que dans un système de coordonnées locales (x,y) adaptées à F, la métrique R sera donnée par une expression du type

$$ds^2 = \sum_{k,\ell} R_{k,\ell}(x,y)\, \gamma^k \gamma^\ell + \sum_{i,j} R_{ij}(y)\, dy^i dy^j$$

dont la seconde partie correspond à R_ν.

3.1.2. Feuilletage $(M^\#,F^\#)$ relevé d'un feuilletage riemannien transversalement orienté (M,F). (cf. [43])

i) Soit (M,F) un feuilletage riemannien transversalement orienté défini par un cocycle C comme ci-dessus. On désigne par :

$$\rho : M^\# \to M$$

le $SO(n)$-fibré principal associé à $\nu(F)$, c'est-à-dire le fibré des repères orthonormés directs transverses à F. Il est défini par le cocycle $(\{U_i\},\{Dg_{ij}\})$.

On remarque que la différentielle d'une submersion f_i permet d'associer à tout repère transverse de $\mathcal{F}$ au-dessus de U_i, un repère de $\mathbb{R}^n$. Donc si $\rho_o : E \to \mathbb{R}^n$ est le fibré des repères directs de $\mathbb{R}^n$, la submersion f_i induit une submersion F_i telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\rho^{-1}(U_i) \arrow[r, "F_i"] \arrow[d, "\rho"'] & E \arrow[d, "\rho_o"] \\
U_i \arrow[r, "f_i"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

De même la différentielle de l'isométrie locale g_{ij} induit un difféomorphisme local G_{ij} de E qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "G_{ij}"] \arrow[d, "\rho_o"'] & E \arrow[d, "\rho_o"] \\
R^n \arrow[r, "g_{ij}"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

On vérifie alors aisément que $(\{(\rho^{-1}(U_i),F_i)\},\{G_{ij}\})$ est un cocycle feuilleté. Il définit un feuilletage $\mathcal{F}^{\#}$ sur $M^{\#}$ qu'on appelle le <u>relevé</u> de $\mathcal{F}$.

ii) On convient de faire opérer $SO(n)$ à droite sur $M^{\#}$. Par construction, $\mathcal{F}^{\#}$ est invariant par cette action, sa dimension est égale à celle de $\mathcal{F}$ et la restriction de ρ à toute feuille L de $\mathcal{F}^{\#}$ est un revêtement galoisien, de base $L' = \rho(L) \in \mathcal{F}$, dont le groupe d'automorphismes est isomorphe au groupe d'holonomie de L'.

L'intérêt de $\mathcal{F}^{\#}$ réside dans le fait que c'est un

feuilletage T.P. Nous en décrivons maintenant un parallélisme transverse.

3.1.3. Un parallélisme transverse pour $(M^{\#}, F^{\#})$ (cf. [43]).

i) Posons $N = \frac{1}{2}\,n(n-1) = \dim SO(n)$. La connexion de Levi-Civita sur $(\mathbb{R}^n, R_o)$ permet de construire un parallélisme

$$\mathcal{P}^o = \{P_1^o, \dots, P_n^o,\ Q_1^o, \dots, Q_N^o\}$$

de E qui jouit des propriétés suivantes :

(a) La partie verticale $\{Q_1^o, \dots, Q_N^o\}$ de $\mathcal{P}^o$ est formée par une base de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs fondamentaux pour l'action de $SO(n)$ sur E (celle-ci est isomorphe à l'algèbre de Lie $so(n)$ de $SO(n)$)

(b) La partie horizontale $\{P_1^o, \dots, P_n^o\}$ de $\mathcal{P}^o$ est formée de n champs de vecteurs tels que pour tout $x \in E$, $\{P_1^o(x), P_2^o(x), \dots, P_n^o(x)\}$ se projette en un repère orthonormé de $T_{\rho_o(x)}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Si G est le difféomorphisme local de E induit par une isométrie locale g de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{P}^o$ est invariant par G.

ii) Cette dernière propriété (c), nous permet d'associer à $\mathcal{P}^o$ une famille $\mathcal{P}^b = \{P_1^b, \dots, P_n^b, Q_1^b, \dots, Q_N^b\}$ de champs de vecteurs $F^{\#}$-basiques qui trivialise le fibré $\nu(F^{\#})$. On choisit un supplémentaire $N(F^{\#})$ de $T(F^{\#})$ dans $T(M)$; en représentant les éléments de $\mathcal{P}^b$ par des sections de $N(F^{\#})$, on obtient finalement une famille

$$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n,\ Q_1, \dots, Q_N\}$$

de champs $F^{\#}$-feuilletés qui est un parallélisme transverse de $F^{\#}$.

On décompose $N(F^{\#})$ en la somme d'une partie horizontale et d'une partie verticale engendrées respectivement par les $\{P_i\}$ et les $\{Q_j\}$:

$$N(F^{\#}) = N^h(F^{\#}) \oplus N^v(F^{\#}).$$

Un champ $X \in \mathfrak{X}(M^{\#},F^{\#})$ est dit <u>pur horizontal</u> (resp. <u>vertical</u>) si c'est une section de $N^h(F^{\#})$ (resp. $N^v(F^{\#})$). Par exemple, pour les crochets de Lie, on a :

(a) $[P_i,P_j]$ est vertical,

(b) $[P_i,Q_k]$ est horizontal,

(c) $[Q_k,Q_\ell]$ est vertical.

iii) Pour terminer, remarquons que la métrique transverse de $F^{\#}$ définie à l'aide de P comme en 2.1.3 (i) est invariante par $SO(n)$. En outre la fibration $\rho : M^{\#} \to M$ induit une isométrie du sous-espace horizontal de $N(F^{\#})$ en $x \in M^{\#}$ sur la fibre $\nu_{\rho(x)}(F)$ ∎

La distinction précédente entre éléments horizontaux et éléments verticaux du parallélisme P va nous permettre maintenant de définir une nouvelle bigraduation sur le complexe $\Omega^*(M^{\#}/F^{\#})$ des formes $F^{\#}$-basique, dont on remarquera qu'elle est sans grand rapport avec la bigraduation précédemment définie en 1.3.6.

3.1.4. <u>Le complexe des formes $F^{\#}$-basiques</u>.

On désigne par W la variété basique de $F^{\#}$

i) Dans la base P-canonique de $\Omega^1(M^{\#}/F^{\#})$ (cf. 2.1.1), nous distinguons les éléments <u>horizontaux</u> $\{\omega^1,\omega^2\dots\omega^n\}$ définis par

$$\begin{cases} \omega^i(Q_k) = 0 & \text{pour tout } k \\ \omega^i(P_j) = \delta^i_j & \text{pour tout } i,j \ ; \end{cases}$$

et les éléments <u>verticaux</u> $\{\theta^1,\dots,\theta^N\}$ définis de façon analogue.

La base P-canonique de $\Omega^r(M^{\#}/F^{\#})$ sera alors donnée par les C^r_n expressions du type

$$\{\omega^{i_1}\wedge\dots\wedge\omega^{i_p}\wedge\theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_q}\}$$

(où $r = p+q$, $i_1 < \dots < i_p \leq n$ et $j_1 < j_2 < \dots j_q \leq N$) dont on dira qu'elles sont de degré <u>horizontal</u> p et de degré <u>vertical</u> q. Ceci définit la bigraduation annoncée :

$$\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#}).$$

Par définition de la partie verticale du parallélisme P, on a des relations du type :

$$d\theta^j = \sum C^j_{ik}\, \theta^i \wedge \theta^k \ , \qquad C^j_{ik} \in A(W).$$

Par suite la différentielle d se décompose comme dans les cas usuels sous la forme :

$$d = d_{01} + d_{10} + d_{2,-1} \quad .$$

ii) L'action à droite de $SO(n)$ sur $M^{\#}$ induit une action de $SO(n)$ sur les formes différentielles de $M^{\#}$ qui préserve les formes $F^{\#}$-basiques. Comme en outre la différentielle d'une forme $SO(n)$-invariante est elle-même invariante, on obtient le sous-complexe différentiel des formes $F^{\#}$-basiques $SO(n)$-invariantes qu'on désignera par

$$(I\Omega^*(M^{\#}/F^{\#}),d).$$

Ce n'est évidemment pas un $A(W)$-sous-module de $\Omega(M^{\#}/F^{\#})$, mais il sera muni d'une structure de $IA(W)$-module. Il est bigradué par restriction de la bigraduation de $\Omega^*(M^{\#}/F^{\#})$ ∎

Il est bien connu que l'inclusion

$$j \ : \ I\Omega^*(M^{\#}) \to \Omega^*(M^{\#})$$

est une équivalence d'homotopie, ainsi que sa restriction aux formes $F^{\#}$-basiques. Son inverse homotopique est l'opérateur de "moyennisation" par rapport par rapport au groupe SO(n). Comme nous aurons besoin d'un raffinement de ce résultat prenant en compte la bigraduation introduite en 3.1.4, nous reprenons rapidement cette question en nous basant sur l'exposé de [28].

3.1.5. Moyenne d'une forme $\alpha \in \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#})$ relativement à l'action de SO(n).

i) Soit $\phi : M^{\#} \times SO(n) \to M^{\#}$ l'action (à droite) de SO(n) sur $M^{\#}$. Cette application ϕ peut être considérée comme une SO(n)-fibration principale dont la fibre au point (x,g) est l'ensemble $\{xh, h^{-1}g\}_{h\in SO(n)}$. Elle est transverse au feuilletage $F^{\#}$ et l'image réciproque $\phi^*F^{\#}$ est un feuilletage dont les feuilles fibrent au-dessus des feuilles de $F^{\#}$ (par restriction de ϕ). L'espace transverse $N(\phi^*F^{\#})$ s'identifie à un sous-fibré d'une somme directe de trois facteurs qui s'écrit (avec des abus de notations évidents) :

$$N^h(F^{\#}) \oplus N^v(F^{\#}) \oplus T(SO(n))$$

et qui induit une graduation à trois indices sur l'espace des formes $\phi^*F^{\#}$-basiques. Ainsi, pour tout $\alpha \in \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#})$, la forme $\phi^*\alpha$ est $\phi^*F^{\#}$-basique et s'écrit :

$$\phi^*\alpha = \sum_{q'+q''=q} \underline{\alpha}^{pq'q''} \quad .$$

(A noter que le degré horizontal p est préservé par relèvement !).

ii) Désignons par χ_o la forme volume canonique sur SO(n), considérée comme une forme de type (0,0,N) sur $M^{\#} \times SO(n)$. L'opérateur "moyenne" est défini par

$$m(\alpha) = \int_{SO(n)} \phi^*\alpha \wedge \chi_o \qquad \text{pour } \alpha \in \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#})$$

(où $\int_{SO(n)}$ désigne l'intégration le long des fibres du fibré trivial

$pr_1 : M^{\#} \times SO(n) \to M^{\#}$). On vérifie aisément que pour tout $\alpha \in \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#})$, on a :

$$m(\alpha) = \int_{SO(n)} \underline{\alpha}^{pqo} \wedge \chi_o \in I\Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#}),$$

$$m(d\alpha) = d\, m(\alpha),$$

$$m(\alpha) = \alpha \quad \text{si } \alpha \text{ est } SO(n)\text{-invariante.}$$

3.1.6. Lemme. L'opérateur $j \circ m$ est d_{01}-homotope à l'identité. En d'autres termes, il existe un opérateur

$$S_{0,-1} : \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#}) \to \Omega^{p,q-1}(M^{\#}/F^{\#})$$

tel que pour tout $\alpha \in \Omega^{pq}$, on ait :

$$(j \circ m)(\alpha) - \alpha = (d_{01}S_{0,-1} + S_{0,-1}d_{01})(\alpha).$$

Démonstration : L'opérateur S va être obtenu comme somme de deux opérateurs de type (0,-1).

(a) Soit U un voisinage contractile de l'élément neutre e de $SO(n)$. Une N-forme χ_U à support dans U est cohomologue à χ_o si $\int_{SO(n)} \chi_U = 1$. Dans ces conditions, il existe une (N-1)-forme λ telle que $\chi_o - \chi_U = d\lambda$. Par suite si $\alpha \in \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#})$ et si on pose

$$m_U(\alpha) = \int_{SO(n)} \phi^*\alpha \wedge \chi_U \qquad ,$$

il vient :

$$m(\alpha) - m_U(\alpha) = \int_{SO(n)} \phi^*\alpha \wedge d\lambda \qquad ,$$

$$m(\alpha) - m_U(\alpha) = d\left[(-1)^r \int_{SO(n)} \phi^*\alpha\wedge\lambda\right] + (-1)^{r+1} \int_{SO(n)} \phi^*(d\alpha) \wedge \lambda,$$

où $r = p+q$. On obtient un opérateur k de type $(0,-1)$ en posant (avec les notations de 3.1.5) :

$$k(\alpha) = (-1)^r \int_{SO(n)} \phi^*\alpha \wedge \lambda = (-1)^r \int_{SO(n)} \underline{\alpha}^{p,q-1,1} \wedge \lambda .$$

Alors, comme $m(\alpha) - m_U(\alpha)$ est de type (p,q), un calcul simple montre que l'on a :

$$m(\alpha) - m_U(\alpha) = (d_{01}k_{0,-1} + k_{0,-1}d_{01})(\alpha).$$

(b) Finalement, soit $r : U \times I \to U$ une rétraction de U sur e. L'application

$$\hat{\phi} : M^{\#}\times U\times I \xrightarrow{(id,r)} M^{\#}\times U \xrightarrow{\phi} M^{\#}$$

est transverse à $F^{\#}$ et l'espace transverse au feuilletage $\hat{\phi}^* F^{\#}$ (dont les feuilles sont difféomorphes au produit par I des feuilles de $F^{\#}$) s'enrichit d'une quatrième composante correspondant au facteur I. Pour $\alpha \in \Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#})$. On a la décomposition

$$\hat{\phi}^*\alpha = \sum_{q'+q''+q'''=q} \underline{\alpha}^{pq'q''q'''}$$

où il faut remarquer encore une fois que le degré horizontal p est préservé.

En reprenant le calcul de ([28], vol. I, p. 178) et en raisonnant sur la bigraduation comme en (a) ci-dessus, il s'introduit un opérateur ℓ de type $(0,-1)$ tel que

$$m_U(\alpha) - \alpha = (d_{01}\ell_{0,-1} + \ell_{0,-1}d_{01})\alpha \quad .$$

On trouve S en additionnant ℓ et k ∎

Nous en arrivons à la suite spectrale annoncée.

3.1.7. <u>Suite spectrale de cohomologie basique de la fibration</u> $\rho : M^{\#} \to M$.

i) De façon analogue à 1.4.1., on pose

$$F^p\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) = \{\alpha \in \Omega^r \mid i_V\alpha = 0\}$$

pour tout $(r-p+1)$-uple $V = X_1 \wedge \ldots \wedge X_{r-p+1}$ de champs $F^{\#}$-feuilletés verticaux. D'après (3.1.4), on a

$$dF^p\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) \subset F^p\Omega^{r+1}(M^{\#}/F^{\#}).$$

Ce qui nous définit une filtration décroissante compatible avec la différentielle.

ii) la suite spectrale correspondante,

$$E_r^{p,q}(\rho) \Longrightarrow H^{p+q}(M^{\#}/F^{\#})$$

qui aboutit à la cohomologie basique de $F^{\#}$ s'appelle la <u>suite spectrale de Leray-Serre basique</u> de la fibration $\rho : M^{\#} \to M$.

3.1.8. <u>Théorème</u>. Pour tout feuilletage riemannien transversalement orientable (M,F), la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration principale associée ρ vérifie les relations suivantes :

i) $[E_o^{pq}, d_o] \cong [\Omega^{pq}(M^{\#}/F^{\#}), d_{01}]$

ii) $[E_1^{pq}, d_1] \cong [\Omega^p(M/F) \otimes H^q(so(n)), d \otimes 1]$

iii) $E_2^{pq} \cong H^p(M/F) \otimes H^q(so(n))$.

(où $so(n)$ est l'algèbre de Lie de $SO(n)$).

Démonstration : L'égalité (i) est obtenue de la façon habituelle. Pour démontrer (ii), on considère le fibré en algèbres de Lie associé à ρ :

$$\xi : so(n) \to E^{\#} \to M,$$

et on note $\Lambda^q\xi^*$ le fibré vectoriel associé (cf. 1.3.2) :

$$\Lambda^q(so(n))^* \to E(\Lambda^q\xi^*) \to M$$

comme $SO(n)$ est connexe, l'argument usuel montre que le fibré de cohomologie $H^q(\xi)$ obtenu à l'aide de la différentielle ∂ de 1.3.2 est le fibré trivial de fibre $H^q(so(n))$.

Mais en procédant exactement comme en 1.3.7 et 1.3.8, on montre que :

$$[I\Omega^{p\ q}(M^{\#}/F^{\#}), d_{01}] \cong [\Omega^p(M/F\ ;\ \Lambda^q\xi^*), \partial].$$

Et puisque l'injection $j : I\Omega^{pq} \to \Omega^{pq}$ est une équivalence d'homotopie pour la différentielle d_{01} (cf. 3.1.6), on obtient par passage à la cohomologie :

$$E_1^{pq} \cong \Omega^p(M/F, H^q(\xi)) \cong \Omega^p(M/F) \otimes H^q(so(n)).$$

Pour finir, la différentielle d_1 de E_1^{pq} s'identifie comme en 1.3.9. D'où le théorème ∎

3.1.9. Corollaire. Dans les conditions précédentes, on a :

$$H^{n+N}(M^{\#}/F^{\#}) \cong H^n(M/F) \otimes H^N(so(n)) \cong H^n(M/F).$$

Pour terminer considérons le cas où le feuilletage riemannien n'est pas orientable.

3.1.10. Feuilletage riemannien non transversalement orientable.

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage riemannien de codimension n.

i) *si $\mathcal{F}$ n'est pas transversalement orientable, on construit* $q : (M_1,\mathcal{F}_1) \to (M,\mathcal{F})$ le feuilletage induit sur le revêtement des orientations transverses de $\mathcal{F}$. Le fibré des repères transverses de $\mathcal{F}_1$ (cf. 3.1.2), définira un $O(n)$-fibré principal au-dessus de M

$$\rho_1 : M_1^{\#} \to M.$$

Et on aura comme précédemment une suite spectrale reliant la cohomologie basique de $\mathcal{F}_1^{\#}$ à celle de $\mathcal{F}_1$.

ii) On passera à la cohomologie basique de $\mathcal{F}$ par l'identification

$$\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \Omega^*_{Z_2}(M_1/\mathcal{F}_1)$$

où $\Omega^*_{Z_2}(M_1/\mathcal{F}_1)$ est le sous-complexe des formes $\mathcal{F}_1$-basiques qui sont invariantes par l'action naturelle de $\mathbb{Z}_2$ sur M_1.

En particulier, on aura $H^n(M/\mathcal{F}) = 0$.

3.2. Préliminaires pour le théorème de décomposition de Hodge.

Nous nous plaçons dans la situation du paragraphe 3.1 et désignons par $(M^{\#},\mathcal{F}^{\#})$, le feuilletage T.P. relevé d'un feuilletage riemannien $(M,\mathcal{F})$. Dans ce paragraphe, nous décrivons les relations établies entre les opérateurs de la théorie de Hodge pour $\mathcal{F}^{\#}$ et $\mathcal{F}$ respectivement, au moyen de l'intégration le long des fibres de la fibration $\rho : M^{\#} \to M$. Ceci nous permettra déjà d'obtenir le thoérème de décomposition de Hodge basique dans le cas des feuilletages $\mathcal{F}$ pour lesquels ρ admet une forme caractéristique χ fermée (cf. 3.2.1).

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que $\mathcal{F}$ est transversalement orienté.

3.2.1. Formes volumes basiques de F et $F^{\#}$.

Soit $\{\omega^1,\ldots,\omega^n,\theta^1,\ldots,\theta^N\}$ la base duale dans $\Omega^1(M^{\#}/F^{\#})$ du parallélisme P de $F^{\#}$ (cf. 3.1.4 (i)).

i) La forme $\chi = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^N \in \Omega^{0,N}(M^{\#}/F^{\#})$ est SO(n)-invariante. Un calcul explicite, utilisant les résultats de crochet de 3.1.3(ii), montre que $d_{10}\chi = 0$. On appelle χ la forme caractéristique du fibré $\rho : M^{\#} \to M$.

ii) La fibration ρ induit

$$\rho^* : \Omega^r(M/F) \to \Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$$

dont il est aisé de voir que l'image est exactement $I\Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$. Pour des raisons de conmmodité on fera souvent l'identification $\Omega^r(M/F) = I\Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$.

L'orientation transverse de F définit une orientation du fibré normal $\nu(F)$ (muni de la métrique transverse R_ν). Exactement comme dans le cas du fibré tangent à une variété riemannienne, cette orientation définit une unique forme $v \in \Omega^n(M/F)$ qui vérifie la relation

$$v(X_1,\ldots,X_n)\, v(Y_1,\ldots,Y_n) = \text{dét}(R_\nu(X_i,Y_j))$$

pour tous $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ dans $\nu(F)$. C'est la forme volume basique de F. Avec l'identification $\Omega^n(M/F) = I\Omega^{n,0}(M^{\#}/F^{\#})$, on peut écrire

$$v = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots\ldots \omega^N$$

(c'est une forme SO(n)-invariante bien que les ω^i ne le soient pas en général).

iii) Enfin $v^{\#} = v \wedge \chi$ est la forme volume basique de $F^{\#}$ ainsi qu'elle a été définie en (2.1.1 (iii)). Elle est SO(n)-invariante.

Dans la suite, afin d'éviter les confusions, nous affecterons d'un dièze $\#$ tous les opérateurs (sauf la différentielle d) relatifs à $F^{\#}$. Ainsi, on désignera désormais par $*^{\#}$, $< >^{\#}$, $\delta^{\#}$, $\Delta^{\#}$ les opérateurs introduits dans (2.1.4), réservant les notations $*$, $< >$, δ, Δ pour des opérateurs portant sur les formes basiques de F et qui restent à définir.

3.2.2. <u>Les opérateurs de Hodge pour</u> F <u>et</u> $F^{\#}$

i) Ainsi que nous l'avons déjà remarqué à propos de la forme volume basique de F, la métrique transverse R_ν nous permet de définir un opérateur

$$* : \Omega^r(M/F) \to \Omega^{n-r}(M/F)$$

par un procédé analogue à celui que l'on utilise dans le cas des variétés riemanniennes.

En fait grâce à l'identification $\Omega^r(M/F) = I\Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$, on vérifie immédiatement que cet opérateur appelé <u>opérateur de Hodge basique</u> de F sera induit par l'opérateur suivant défini sur $\Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$

$$*(\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r}) = \varepsilon(i_1,\dots,i_r)\, \omega^{k_1} \wedge \dots \wedge \omega^{k_{n-r}}$$

où $k_1 < \dots < k_{n-r}$ est la suite complémentaire de $i_1 < i_2 \dots < i_r$ dans $(1,2,\dots,n)$ et $\varepsilon(i_1,\dots,i_r)$ est la signature de la permutation $(i_1,\dots,i_r,k_1,\dots,k_{n-r})$.

ii) De la même manière qu'en (2.2.3), on vérifie que :

$$* * \alpha = (-1)^{r(n-r)}\alpha \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Omega^r(M/F)$$

donc que $*$ est un isomorphisme dont l'inverse est donné par la formule habituelle

$$*^{-1} = (-1)^{r(n-r)} * \quad .$$

iii) Finalement soit $*^{\#}$ l'opérateur de Hodge basique de $F^{\#}$. Les définitions explicites de $*$ et $*^{\#}$, montrent que l'on a les deux relations suivantes (quel'on vérifie en évaluant sur la base canonique de $\Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$:

$$*^{\#}\alpha = *\,\alpha \wedge \chi \qquad \text{et} \qquad *\alpha = *^{\#}(\alpha \wedge \chi)$$

pour toute forme $\alpha \in \Omega^{r}(M/F)$ ■

3.2.3. <u>Produits scalaires pour</u> F <u>et</u> $F^{\#}$.

i) Nous munissons $\Omega^{r}(M^{\#}/F^{\#})$ du produit scalaire $<,>^{\#}$ défini en (2.1.4) et notons $<,>$ le produit scalaire sur $\Omega^{r}(M/F)$ obtenu par restriction de $<,>^{\#}$ à $I\Omega^{r,0}(M^{\#}/F^{\#})$. En procédant comme en (2.2.3), (et avec des notations comme en 2.2.3 (iii)) ce produit scalaire s'exprimera en fonction de l'opérateur $*$ par les formules :

$$<\alpha,\beta> = \begin{cases} \displaystyle\int_W I(\alpha\wedge *\beta\wedge\chi) & \text{si la variété basique } W \text{ de } F^{\#} \text{ est orientable,} \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_W \tilde{I}(\tilde{\alpha}\wedge *\tilde{\beta}\wedge\tilde{\chi}) & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^{r}(M/F)$.

ii) Soit $\delta : \Omega^{r}(M/F) \to \Omega^{r-1}(M/F)$ l'adjoint de d par rapport à $<,>$. En général on a bien sûr $\delta\alpha \neq \delta^{\#}\alpha$. De même pour le <u>laplacien F-basique</u> $\Delta = d\delta + \delta d$, on a $\Delta\alpha \neq \Delta^{\#}\alpha$.

iii) Finalement $H(M/F) = \operatorname{Ker}\Delta$ est appelé l'espace des <u>formes harmoniques basiques</u> de F. On vérifie de la façon habituelle que les sous-espaces $\operatorname{Ker}\Delta$, $\operatorname{Im} d$ et $\operatorname{Im}\delta$ sont deux à deux disjoints et que l'on a $\operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Ker}\delta$.

Dans la suite, nous utiliserons de manière essentielle l'intégration le long des fibres du fibré ρ mais appliquée aux seules formes $F^{\#}$-basiques qui sont $SO(n)$-invariantes. Cette restriction qui facilitera nos calculs est justifiée par le résultat préliminaire suivant.

3.2.4. Proposition. Les formes $F^{\#}$-harmoniques sont $SO(n)$-invariantes et pour tout $r \in N$, on a une décomposition de Hodge :

$$I\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) = H^r(M^{\#}/F^{\#}) \oplus d(I\Omega^{r-1}) \oplus \delta^{\#}(I\Omega^{r+1}).$$

Démonstration : Comme $SO(n)$ agit par isométries sur $\nu(F^{\#})$ (cf. 3.1.3 (iii)), on vérifie que son action sur $\Omega^*(M^{\#}/F^{\#})$ commute avec l'opérateur de Hodge $*^{\#}$. De plus cette action préserve les adhérences des feuilles de $F^{\#}$ (i.e. les fibres de la fibration basique Π et donc $SO(n)$ agit par isométries sur la variété basique W. Par suite la forme volume w sur W (ou si W n'est pas orientable, la mesure positive μ) est invariante par $SO(n)$ et le morphisme I de (2.2.2) commute avec l'action de $SO(n)$.

En résumé, pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^r(M^{\#}/F^{\#})$ et tout $g \in SO(n)$, on a (si W est orientable) :

$$I(g^*\alpha \wedge *^{\#}g^*\beta) = I(g^*(\alpha \wedge *^{\#}\beta)) = g^*I(\alpha \wedge *^{\#}\beta)$$

$$\int_W I(g^*\alpha \wedge *^{\#}g^*\beta) = \int_W g^*I(\alpha \wedge *^{\#}\beta) = \int_W I(\alpha \wedge *^{\#}\beta)$$

$$\langle g^*\alpha, g^*\beta\rangle^{\#} = \langle\alpha,\beta\rangle^{\#} .$$

De cette relation et de la relation correspondante dans le cas non orientable, il découle que les sous-espaces $H^r(M^{\#}/F^{\#})$ et $\mathrm{Im}\,\delta^{\#}$ sont stables par l'action de $SO(n)$ sur $\Omega^r(M^{\#}/F^{\#})$. Enfin puisque $SO(n)$ est connexe par arcs, l'argument d'homotopie habituel montre que son action sur $H^r(M^{\#}/F^{\#})$ est triviale. Comme H^r s'identifie à H^r (voir 2.1.6), on obtient

$$H^r(M^{\#}/F^{\#}) \subset I\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}).$$

La proposition suit par unicité de la décomposition d'une forme invariante ∎

3.2.5. Quelques propriétés de l'intégration le long des fibres de $\rho : M^{\#} \to M$ (voir [28]).

Rappelons que l'on désigne par $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_N\}$ la famille des champs fondamentaux pour l'action de $SO(n)$ sur $M^{\#}$.

i) En restriction aux formes F-basiques qui sont $SO(n)$-invariantes, l'intégration le long des fibres de ρ désignée par :

$$\int : I\Omega^{r+N}(M^{\#}/F^{\#}) \to \Omega^r(M/F) = I\Omega^{r,o}(M^{\#}/F^{\#})$$

peut être définie par :

$$\int \alpha = (-1)^{rN}\, i_{SO(n)}\alpha \quad \text{où} \quad i_{SO(n)}\alpha = i_{Q_N} i_{Q_{N-1}} \ldots i_{Q_1} \alpha .$$

ii) Alors on vérifie que l'on a les propriétés suivantes (la bi-graduation étant celle introduite en 3.1.4)

$$\int \alpha = 0 \qquad \text{sauf si} \quad \alpha \in I\Omega^{rN} ,$$

$$\int d\alpha = d\int \alpha \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in I\Omega^{rN}$$

$$\left(\int \alpha\right) \wedge \beta = (-1)^{rN}\, \alpha \wedge \left(\int \beta\right) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in I\Omega^{rN} \quad \text{et } \beta \in I\Omega^{sN}$$

Enfin, pour $\alpha \in \Omega^r(M/F)$, on vérifie que :

$$\int (\alpha \wedge \chi) = \alpha \quad ;$$

ce qui montre en particulier que $\int$ est surjective.

La prochaine étape va consister à relier $\displaystyle\int$, $\delta^{\#}$ et δ.

3.2.6. Lemme : Pour tout $\alpha \in I\Omega^{rs}(M^{\#}/F^{\#})$, on a

$$\int \delta^{\#}\alpha = (-1)^N \delta \int \alpha \qquad \text{pourvu que} \quad s \neq N-1.$$

Démonstration : La relation est trivialement vérifiée pour $s \leq N-2$. Pour la vérifier dans le cas $s = N$, il nous suffit de montrer que si α est fixée, alors pour tout $\beta \in \Omega^{r-1}(M/F)$, on a la relation :

$$\text{(S)} \qquad <\int \delta^{\#}\alpha, \beta> = (-1)^N <\delta \int \alpha, \beta> .$$

Nous nous contenterons d'ailleurs de le faire dans le cas où la variété basique W de $F^{\#}$ est orientable.

Nous calculons successivement les deux produits scalaires qui figurent dans la relation (S).

a) Considérons la forme $\lambda = (\int \delta^{\#}\alpha \wedge * \beta) \wedge \chi$. On a les égalités successives :

$$\lambda = (-1)^{(r-1)N} \delta^{\#}\alpha \wedge \int (*\beta \wedge \chi)$$

$$\lambda = (-1)^{(r-1)N} \delta^{\#}\alpha \wedge * \beta \qquad \text{d'après 3.2.5 (ii)}$$

$$\lambda = (-1)^{(r-1)N} \delta^{\#}\alpha \wedge *^{\#}(\beta \wedge \chi) \qquad \text{d'après 3.2.2 (iii)}$$

On en déduit que :

$$<\int \delta^{\#}\alpha, \beta> = \int_W I(\lambda) = (-1)^{(r-1)N} <\delta^{\#}\alpha, \beta \wedge \chi>^{\#}$$

$$= (-1)^{(r-1)N} <\alpha, d(\beta \wedge \chi>^{\#}$$

$$= (-1)^{(r-1)N} <\alpha, d\beta \wedge \chi>^{\#} .$$

La dernière égalité provient du fait que $d_{10}\chi = 0$ et que $\langle\alpha, d(\beta \wedge \chi)\rangle = \langle\alpha, d_{10}(\beta \wedge \chi)\rangle^{\#}$ puisque α est de degré vertical maximum N.

b) On fait de même avec $\lambda' = (\displaystyle\fint\alpha)\wedge * d\beta \wedge \chi$. On a successivement

$$\lambda' = (-1)^{rN} \alpha \wedge \fint(* \beta \wedge \chi) = (-1)^{rN} \alpha \wedge *d\beta$$

$$\lambda' = (-1)^{rN} \alpha \wedge *^{\#}(d\beta \wedge \chi).$$

Par suite

$$\langle\delta \fint \alpha, \beta\rangle = \langle\fint\alpha, d\beta\rangle = \fint_W I(\lambda')$$

$$\langle\delta \fint \alpha, \beta\rangle = (-1)^{rN} \langle\alpha, d\beta \wedge \chi\rangle^{\#}$$

La relation (S) suit immédiatement ■

3.2.7. <u>Lemme</u> : Pour toute forme $\alpha \in I\Omega^{r\ s}(M^{\#}/F^{\#})$, on a

$$\fint\delta^{\#}\alpha = (-1)^N \delta \fint \alpha + \fint \delta^{\#}_{-2,+1} \alpha.$$

<u>Démonstration</u> : La formule ci-dessus se ramène à 3.2.6 quand $s \neq N-1$, si $s = N-1$, on a :

$$\fint \delta^{\#}_{-1,0} \alpha = \fint \delta^{\#}_{0,-1} \alpha = 0$$

et donc

$$\fint \delta^{\#}\alpha = \fint \delta^{\#}_{-2,+1} \alpha.$$

Comme par ailleurs $\delta\fint\alpha = 0$ dans ce cas, le résultat annoncé est démontré ■

3.2.8. <u>Le relèvement</u> $\psi : \Omega^r(M/F) \to \Omega^{r+N}(M^{\#}/F^{\#})$.

i) On définit ψ par $\psi(\alpha) = \alpha \wedge \chi$ pour $\alpha \in \Omega^r(M/F)$. Comme $\int(\alpha \wedge \chi) = \alpha$, on voit que ψ est injective mais ce n'est un morphisme de complexes différentiels que si $d\chi$ est nulle.

ii) Soient α et β deux éléments de $I\Omega^{r0}(M^{\#}/F^{\#})$. D'après 3.2.2 (iii), on a :

$$\alpha \wedge \chi \wedge *^{\#}(\beta\wedge\chi) = \alpha \wedge \chi \wedge * \beta$$

et en utilisant les formules 3.2.3 (i), il vient :

$$<\alpha \wedge \chi, \beta \wedge \chi>^{\#} = (-1)^{(n-r)N} <\alpha,\beta>.$$

Soit maintenant $\beta \wedge \chi \in I\Omega^{r-1,N}(M^{\#}/F^{\#})$. Comme $d_{10}\chi = 0$ (d'après 3.2.1 (i)) et que $d_{10}\beta = d\beta$ la relation précédente nous donne successivement :

$$<\delta^{\#}_{-1,0}(\alpha\wedge\chi),\beta\wedge\chi>^{\#} = <\alpha\wedge\chi,d_{10}(\beta\wedge\chi)>^{\#} = <\alpha\wedge\chi,d\beta\wedge\chi>^{\#}$$

$$= (-1)^{(n-r)N}<\alpha,d\beta> = (-1)^{(n-r)N}<\delta\alpha,\beta>$$

$$= <\delta\alpha\wedge\chi,\beta\wedge\chi>^{\#} .$$

L'argument utilisé en 3.2.4 montre que $\delta^{\#}_{-1,0}(\alpha\wedge\chi)$ est SO(n)-invariante et donc, on a :

$$\delta^{\#}_{-1,0}(\alpha\wedge\chi) = \delta\alpha \wedge \chi.$$

iii) En utilisant le fait que SO(n) est unimodulaire, on montre de même que

$$\delta^{\#}_{0,-1}(\alpha\wedge\chi) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \Omega^r(M/F).$$

Pour des raisons de degré, on arrive à la formule

$$\delta^{\#}(\alpha\wedge\chi) = \delta\alpha \wedge \chi \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Omega(M/F).$$

3.2.9. Remarque. Tous les calculs précédents ne nous permettent malheureusement pas d'établir de "bonnes" relations entre les formes $\Delta\alpha$ et $\Lambda^{\#}\alpha$ pour $\alpha \in \Omega^r(M/F)$. Toutefois la situation se simplifie fortement si $d\chi = d_{2,-1}\chi = 0$. En effet dans ce cas on a pour tout $\alpha \in I\Omega^*(M^{\#}/F^{\#})$ les relations :

i) $d(\alpha \wedge \chi) = d\alpha \wedge \chi$; $\delta^{\#}(\alpha\wedge\chi) = \delta^{\#}\alpha \wedge \chi$. Donc $\Delta^{\#}(\alpha\wedge\chi) = \Delta\alpha \wedge \chi$.

ii) $\displaystyle ⨍\delta^{\#}\alpha = (-1)^N \delta ⨍ \alpha.$

En effet si α est de type $(r,N-1)$ et si $\beta \wedge \chi$ est un élément quelconque de $\Omega^{r-2,N}$ on aura :

$$<\delta^{\#}_{-2,+1}\alpha, \beta \wedge \chi>^{\#} = <\alpha, d_{2,-1}(\beta \wedge \chi)>^{\#} = 0$$

et donc

$$\delta^{\#}_{-2,+1}\alpha = 0.$$

On applique (3.2.7).

iii) $$⨍\Delta^{\#}\alpha = (-1)^N \Delta ⨍ \alpha.$$

On en déduit une démonstration aisée du théorème de décomposition de Hodge de $\Omega^r(M/F)$ dans le cas où $d\chi = 0$.

3.2.10. Théorème. Soit (M,F) un feuilletage riemannien transversalement orienté sur une variété compacte.

Si la forme caractéristique χ de $\rho : M^{\#} \to M$ est fermée, on a pour tout r une décomposition en somme directe :

$$\Omega^r(M/F) = H^r(M/F) \oplus \mathrm{Im}\, d \oplus \mathrm{Im}\,\delta$$

avec $\dim H^r(M/F) < +\infty$.

Démonstration : Le théorème de décomposition de Hodge basique pour $F^{\#}$ (cf. 2.1.5) et la proposition (3.2.4) nous donnent la décomposition :

$$I\Omega^{r+N}(M^{\#}/F^{\#}) = H^{r+N}(M^{\#}/F^{\#}) \oplus d(I\Omega^{r+N-1}) \oplus \delta^{\#}(I\Omega^{r+N+1}).$$

On applique l'opérateur $\int$ à cette décomposition. Comme il est surjectif (cf. 3.2.5 (ii)) et commute (au signe près) avec d d'une part, avec $\delta^{\#}$ et δ d'autre part (cf. 3.2.9 (ii)), on obtient une décomposition

$$\Omega^{r}(M/F) = H^{r}(M/F) + d(\Omega^{r-1}(M/F) + \delta(\Omega^{r+1}(M/F)).$$

En fait cette somme est directe d'après 3.2.3 (iii).

Pour terminer, rappelons que ψ est injective (cf. 3.2.8 (i)) et par les mêmes relations de 3.2.9 (i), envoie $H^{r}(M/F)$ dans $H^{r+N}(M^{\#}/F^{\#})$. Il vient $\dim H^{r}(M/F) < +\infty$ ∎

3.3. Cas général : décomposition de Hodge basique et dualité.

Nous considérons un feuilletage riemannien (M,F) pour lequel la forme $d\chi$ est éventuellement non nulle. Pour pouvoir reprendre la démarche utilisée à la fin du paragraphe précédent, nous raisonnons en termes de "suite d'opérateurs différentiels" au lieu de "complexes différentiels".

3.3.1. La suite $(\Omega^{*}(M^{\#}/F^{\#}),\bar{d})$.

Supposons F transversalement orienté et considérons la suite d'opérateurs différentiels :

$$(S) \qquad 0 \to \Omega^{0}(M^{\#}/F^{\#}) \xrightarrow{\bar{d}} \Omega^{1}(M^{\#}/F^{\#}) \to \ldots\ldots \xrightarrow{\bar{d}} \Omega^{n+N}(M^{\#}/F^{\#}) \to 0$$

où $\bar{d} = d_{01} + d_{10} = d - d_{2,-1}$, au sens de la décomposition 3.1.4. Cette suite ne définit plus un complexe différentiel puisque, en général, on a $\bar{d}^{2} \neq 0$.

i) Soient $u \in W$, $\xi \in T^{*}_{u}(W)$, $\xi \neq 0$ et $\phi \in A(W)$ tels que $\phi(u) = 0$ et $d\phi(u) = \xi$ le symbole de $\bar{d}$ au point (u,ξ) est défini par

$$\sigma(\bar{d})(u,\xi)\ \omega_u = \bar{d}(\psi\omega)_u = (\bar{d}\psi \wedge \omega)_u$$

pour toute forme $\omega \in \Omega^*(M^{\#}/F^{\#})$. Comme $\bar{d}\psi = d\psi$ et que $\psi(u) = 0$, on voit immédiatement que l'on a

$$\sigma(\bar{d})(u,\xi) = \sigma(d)(u,\xi) \qquad \text{pour tout} \quad (u,\xi).$$

ii) L'adjoint de $\bar{d}$ par rapport au produit scalaire $< >^{\#}$ est bien sûr l'opérateur $\bar{\delta}^{\#} = \delta^{\#}_{0,-1} + \delta^{\#}_{-1,0}$. Son symbole **en** un point (u,ξ) est le transposé de l'application linéaire $\sigma(\bar{d})(u,\xi)$ donc compte tenu de (i), il vient :

$$\sigma(\bar{\delta}^{\#})(u,\xi) = \sigma(\delta^{\#})(u,\xi) \qquad \text{pour tout} \qquad (u,\xi).$$

iii) Finalement, pour chaque r, nous définissons

$$\bar{\Delta}^{\#} = (\bar{d}\bar{\delta}^{\#}+\bar{\delta}^{\#}\bar{d}) \ :\ \Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) \longrightarrow \Omega^r(M^{\#}/F^{\#}).$$

C'est un opérateur auto-adjoint par rapport à $<,>^{\#}$. En outre, les règles de calcul usuelles pour les symboles (cf. [15], p. 134) et les résultats précédents donnent

$$\sigma(\bar{\Delta}^{\#}) = \sigma(\Delta^{\#}).$$

Bref $\bar{\Delta}^{\#}$ est un opérateur différentiel auto-adjoint elliptique.

iv) Le théorème de décomposition correspondant (cf. [**59**] théorème 4.12), nous permet d'écrire :

$$\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) = \operatorname{Ker} \bar{\Delta}^{\#} \oplus \operatorname{Im} \bar{\Delta}^{\#} \qquad \text{avec} \quad \dim \operatorname{Ker} \bar{\Delta}^{\#} < +\infty\ .$$

Exactement comme en 3.2.4, on vérifie que les deux espaces $\operatorname{Ker} \bar{\Delta}^{\#}$ et $\operatorname{Im} \bar{\Delta}^{\#}$ sont stables par l'action de $SO(n)$ et donc que l'on a une décomposition induite pour les formes $SO(n)$-invariantes :

$$I\Omega^r(M^{\#}/F^{\#}) = \operatorname{Ker} \bar{\Delta}^{\#} \oplus \bar{\Delta}^{\#}(I\Omega^r) \quad \text{avec} \quad \dim \operatorname{Ker} \bar{\Delta}^{\#} < +\infty \quad .$$

La non-nullité de $\bar{d}^2$ fait que, contrairement au cas des complexes elliptiques, on ne peut plus décomposer $\operatorname{Im} \bar{\Delta}^{\#}$ en une somme $\operatorname{Im} \bar{d} \oplus \operatorname{Im} \bar{\delta}^{\#}$. Mais ceci est sans importance pour notre propos. Par contre il reste vrai que

$$\operatorname{Ker} \bar{\Delta}^{\#} = \operatorname{Ker} \bar{d} \cap \operatorname{Ker} \bar{\delta}^{\#}$$

En outre, on a les règles de calcul suivantes :

3.3.2. <u>Lemme</u>. Si F est transversalement orienté. On a :

i) $\displaystyle\int \bar{\delta}^{\#}\alpha = (-1)^N \delta \int \alpha$ pour tout $\alpha \in I\Omega^r(M^{\#}/F^{\#})$,

ii) $\bar{\delta}^{\#}(\beta \wedge \chi) = \delta\beta \wedge \chi$ pour tout $\beta \in \Omega^r(M/F)$.

<u>Démonstration</u> : La relation (i) découle de 3.2.7 par définition de $\bar{\delta}^{\#}$; La relation (ii) provient de 3.2.8 (iii) compte tenu du fait que

$$\delta^{\#}_{-2,+1}(\beta \wedge \chi) = 0 \ \blacksquare$$

A partir de 3.3.2, on obtient maintenant le théorème de décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien quelconque (M,F) exactement par la même démarche qu'en 3.2.10 pourvu que F soit transversalement orienté. Par ailleurs, le produit scalaire $<,>$ (cf. 3.2.3) est défini, que F soit orientable ou non et il en est donc de même pour δ et Δ. En identifiant $\Omega^*(M/F)$ aux formes basiques $\mathbb{Z}_2$-invariantes du revêtement des orientations transverses de F (cf. 3.1.10), on étend sans peine la décomposition précédente au cas non orientable ; d'où l'énoncé général suivant :

3.3.3. Théorème de décomposition de Hodge basique :

Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage riemannien de codimension n sur une variété compacte M. Pour tout $r \leq n$, on a :

i) $\Omega^r(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}\, d \oplus \mathrm{Im}\, \delta$

ii) $\dim \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}) < +\infty$.

3.3.4. Corollaire (cf. [17]). Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage riemannien de codimension n. Pour tout $r \leq n$ on a :

$$H^r(M/\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^r(M/\mathcal{F}),$$

Donc la cohomologie basique de $(M,\mathcal{F})$ est de dimension finie.

Pour finir, nous allons établir un théorème de dualité de Poincaré dans les mêmes conditions et de la même manière que pour les feuilletages T.P. à partir du préliminaire technique suivant (analogue à 2.2.4).

3.3.5. Proposition. Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletage riemannien de codimension n. Si $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$ on a les relations :

(i) $\delta = (-1)^r *^{-1} d *$ et (ii) $*\Delta = \Delta *$.

Démonstration : Si $H^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$, $\mathcal{F}$ est bien sûr transversalement orientable ; $H^{n+N}(M^\#/\mathcal{F}^\#) \neq 0$ d'après 3.1.9 et le morphisme I relatif à $\mathcal{F}^\#$ (cf. 2.2.2) est un morphisme différentiel.

Pour établir la formule (i), on procède comme en (2.2.4) (en se restreignant là aussi au cas où W est orientable !).

Pour tout $\alpha \in \Omega^{r-1}(M/\mathcal{F})$ et $\beta \in \Omega^r(M/\mathcal{F})$, on a la suite d'égalités :

$$d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{r-1} \alpha \wedge d * \beta$$

$$d[\alpha \wedge * \beta \wedge \chi] = d\alpha \wedge * \beta \wedge \chi + (-1)^{r-1} \alpha \wedge d* \beta \wedge \chi$$

puisque $d_{10}\chi = 0$,

$$dI[\alpha \wedge * \beta \wedge \chi] = I[d\alpha \wedge * \beta \wedge \chi] + (-1)^{r-1} I[\alpha \wedge d* \beta \wedge \chi]$$

En intégrant sur W, il vient grâce au théorème de Stokes :

$$0 = \langle d\alpha,\beta\rangle + (-1)^{r-1} \langle \alpha, *^{-1} d*\beta\rangle$$

et $\hat{\delta} = (-1)^r *^{-1} d*$ est l'adjoint de d par rapport à $\langle\ \rangle$ c'est-à-dire $\hat{\delta} = \delta$. La relation (ii) suit immédiatement ∎

3.3.6. <u>Théorème de dualité</u>. Soit (M,F) un feuilletage riemannien de codimension n. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) F est transversalement orientable et la forme volume basique v de F est harmonique ;

ii) $H^n(M/F) \neq 0$,

iii) $H^*(M/F)$ vérifie la dualité de Poincaré.

CHAPITRE IV

OPERATEURS TRANSVERSALEMENT ELLIPTIQUES SUR UN FEUILLETAGE RIEMANNIEN.

1. *Opérateurs elliptiques invariants.*

Soient M une variété de dimension n, G un groupe de Lie connexe et E un fibré vectoriel complexe de rang N' défini par un cocycle $\{U_i, \gamma_{ij}\}$ où U_i est un ouvert de M et γ_{ij} une application de $U_i \cap U_j$ à valeurs dans $Gl(N', \mathbb{C})$.

1.1. ***Définition.*** On dira que E est un G-fibré s'il existe une représentation de G dans le groupe $Aut(E)$ des automorphismes de E au-dessus de M.

Ceci définit en particulier une action de G sur M. Soit E un tel fibré et désignons par $C^{\infty}(E)$ l'espace de ses sections. L'action de G sur E induit de manière évidente une action de G sur $C^{\infty}(E)$. Pour tout $g \in Aut(E)$ on notera encore g l'automorphisme de $C^{\infty}(E)$ associé.

Si $g \in G$, $\alpha \in C^{\infty}(E)$, $(g^{*}\cdot\alpha)(x) = g\cdot\alpha(g^{-1}x)$.

Si X est un champ fondamental de l'action de G et $\alpha \in C^{\infty}(E)$,

$$(L_X\alpha)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\text{expt } X\cdot\alpha-\alpha}{t}(x)$$

1.2. ***Définition.*** Une section α de E est <u>G-invariante</u> si $g\cdot\alpha = \alpha$, $\forall g \in G$, ou encore $L_X\alpha = 0$ pour tout champ fondamental X (G étant connexe). ■

On note $C_G^{\infty}(E)$ l'ensemble des sections G-invariantes de E. C'est un module sur l'anneau $A_G(M)$ des fonctions G-invariantes i.e. constantes sur les orbites de G sur M.

Soit D un opérateur différenteil agissant sur les sections de E. On dira que D est <u>invariant</u> si $L_X \circ D = D \circ L_X$ pour tout champ fondamental X associé à l'action de G sur E. Un tel opérateur induit un opérateur qu'on notera encore D sur $C_G^{\infty}(E)$.

Une section α de E est donnée localement sur un ouvert U_i par ses composantes

$$\alpha_i(x) = (\alpha_i^1(x), \ldots, \alpha_i^{N'}(x))$$

de telle sorte que sur $U_i \cap U_j$ on a

$$\alpha_i^r(x) = \sum_{\ell=1}^{N'} \gamma_{ij}^{r\ell}\, \alpha_j^\ell(x).$$

Soit m l'ordre de l'opérateur D. Alors $D\alpha$ a pour composantes

$$(D\alpha)_i^r(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\ell=1}^{N'} P_k^{r\ell}(x\ ;\ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})\alpha_i^\ell(x)$$

où $P_k^{r\ell}$ est un polynôme homogène de degré k en $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Dans toute la suite nous supposerons que G est compact. Dans ce cas le fibré E peut être muni d'une métrique hermitienne $h = (h_{r\bar{\ell}})$ invariante par G.

Soient $x \in M$ et $\xi \in T_x^* M$; on substitue ξ_t à $\frac{\partial}{\partial x_t}$ pour tout $t = 1, \dots, n$ et on note $(P_m^{r\ell}(x,\xi))_{r,\ell}$ la matrice qui définit le symbole principal $\sigma(D)(x,\xi) : E_x \to E_x$ où E_x est la fibre de E en x.

Soit τ un sous-fibré de T^*M.

1.3. *Définition*. On dira que D est <u>τ-elliptique</u> si $\sigma(D)(x,\xi)$ est un isomorphisme pour tout $x \in M$ et tout ξ non nul appartenant à τ. ■

On retrouve la définition usuelle de l'ellpticité en posant $\tau = T^*M$

Supposons que $m = 2m'$. En utilisant la métrique hermitienne h sur E on définit pour tout $x \in M$ et tout $\xi \in T^*M$ une forme quadratique $A_D(x,\xi,\cdot)$ sur E_x en posant

$$A_D(x,\xi,\eta) = h((-1)^{m'}\sigma(D)(x,\xi)(\eta),\eta)$$

pour tout $\eta \in E_x$.

1.4. *Définition*. On dira que D est <u>fortement τ-elliptique</u> si $A_D(x,\xi,\cdot)$ est définie positive pour tout $x \in M$ et tout ξ non nul appartenant à τ. Dans le cas où $\tau = T^*M$, on dira tout simplement que D est <u>fortement elliptique</u>. ■

Dans toute la suite M sera compacte et munie d'une métrique riemannienne G-invariante dont on notera dx la mesure canonique associée. Pour tous $\alpha, \beta \in C^{\infty}(E)$ on pose

$$<\alpha,\beta> = \int_M h(\alpha(x),\beta(x))dx \qquad (1)$$

On définit ainsi sur $C^{\infty}(E)$ un produit scalaire G-invariant pour lequel $C^{\infty}_G(E)$ est un sous-espace fermé. On pose

$$H_G(E) = \{\alpha \in C^{\infty}_G(E)/D\alpha = 0\}$$

$$B^*_G(E) = \{\beta \in C^{\infty}_G(E)/ \exists \alpha \in C^{\infty}_G(E),\ \beta = D^*\alpha\}$$

où D^* est l'adjoint formel de D qui est bien entendu invariant. On a alors le

1.5. *Théorème*. Soit D un opérateur différentiel invariant et elliptique agissant sur les sections d'un G-fibré hermitien E au-dessus d'une variété compacte M. Alors

i) $H_G(E)$ est de dimension finie,

ii) on a une décomposition orthogonale $C^{\infty}_G(E) = H_G(E) \oplus B^*_G(E)$. ■

Démonstration : L'opérateur D agissant sur $C^{\infty}(E)$ est elliptique.
D'après la théorie générale [59] son noyau Ker D est de dimension finie, l'image de D^* est fermée et on a une décomposition orthogonale

$$C^{\infty}(E) = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D^* \qquad (2)$$

comme $H_G(E)$ est contenu dans Ker D, il est de dimension finie. D'autre part, les opérateurs D et D^* sont invariants ; donc pour tout champ fondamental X l'application $L_X : C^{\infty}(E) \to C^{\infty}(E)$ préserve Ker D et Im D^*. D'où

$$H_G(E) = \operatorname{Ker} D \cap C^{\infty}_G(E)$$

$$B^*_G(E) = \operatorname{Im} D^* \cap C^{\infty}_G(E)$$

mais surtout si $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ avec $L_X\alpha = 0$ alors $L_X\alpha_i = 0$ pour $i = 0$, i.e. $\alpha_1 \in H_G(E)$ et $\alpha_2 \in \beta_G^*(E)$.

D'après (2) on a

$$C_G^\infty(E) = H_G(E) \oplus B_G^*(E)$$

C.Q.F.D.

2. *Opérateurs transversalement elliptiques sur les feuilletages. Applications aux feuilletages riemanniens.*

Soit M une variété munie d'un feuilletage F de codimension n. On notera toujours TF le fibré tangent à F et $\nu F = TM/TF$; $X(M)$ et $\Gamma(F)$ sont les $A(M)$-modules des sections respectivement de TM et TF.
Enfin si X est un champ feuilleté sur M, X^b sera sa classe d'équivalence dans νF i.e. le champ basique associé.
Si V est un ouvert de M et $E \to M$ un fibré vectoriel, $C_V^\infty(E)$ sera l'espace des sections de E au-dessus de V ; pour $V = M$, on aura $C_V^\infty(E) = C^\infty(E)$. Si E_1 et E_2 sont des fibrés vectoriels au-dessus de M, on notera $L^k(E_1,E_2)$ le fibré des applications k-linéaires de E_1 dans E_2, $S^k(E_1,E_2)$ le sous-fibré des applications k-linéaires symétriques et $S^k : L^k(E_1,E_2) \to S^k(E_1,E_2)$ l'application canonique de symétrisation définie par

$$S^k(\phi)(Y_1,\dots,Y_k) = \frac{1}{k!}\sum_\sigma \phi(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(k)})$$

où σ décrit toutes les permutations de $\{1,\dots,k\}$.

2.1. *Catégorie des F-fibrés-Opérateurs différentiels basiques.*

Soit $\iota : P \to M$ un fibré principal de groupe structural $G' \subset G\ell(N',\mathbb{C})$. Pour tout point $z \in P$ on notera $\mathcal{G}'_z$ l'espace tangent en z à la fibre de ι.

2.1.1. <u>Définition</u>. <u>Une connexion</u> sur le fibré $G' \to P \xrightarrow{\iota} M$ est un sous-fibré H de TP tel que

i) $\mathcal{H}_z \cap \mathfrak{g}'_z = \{0\}$ pour tout $z \in P$;

ii) $\mathcal{H}_{zg'} = (R_{g'})_* \mathcal{H}_z$ pour tout $z \in P$ et tout $g' \in G'$ où $R_{g'}$ est l'action à droite de g' sur P. ■

Si $\mathcal{H}$ est une connexion sur P on notera, pour tout champ de vecteurs Y sur M, $\tilde{Y}$ l'unique champ de vecteurs sur P, horizontal et se projetant sur Y ; de même si τ est un sous-fibré de TM, $\tilde{\tau}$ sera le sous-fibré de $\mathcal{H}$ engendré par les relevés horizontaux des champs tangents à τ.

2.1.2. <u>Définition</u>. On dira que P est <u>feuilleté</u> s'il muni d'une connexion $\mathcal{H}$ pour laquelle $\tilde{\tau} = \widetilde{T\mathcal{F}}$ est intégrable. ■

Dans ce cas $\tilde{\tau}$ définit un feuilletage horizontal $\tilde{\mathcal{F}}$ sur P de même dimension que $\tilde{\mathcal{F}}$ et invariant par l'action à droite de G' sur P.

Notons ω la 1-forme de connexion associée à $\mathcal{H}$. C'est une 1-forme sur P à valeurs dans $\mathfrak{g}'$.

2.1.3. <u>Définition</u>. La connexion $\mathcal{H}$ est dite <u>basique</u> si ω est <u>basique</u> pour $\tilde{\mathcal{F}}$ i.e $L_{\tilde{X}}\omega = 0$ pour tout X tangent à $\mathcal{F}$. On dira alors que P est un <u>$\mathcal{F}$-fibré</u>. ■

On remarquera que la forme ω est basique au sens usuel car on a également $i_{\tilde{X}}\omega = 0$ puisque $\tilde{X}$ est horizontal pour tout X.

Soit maintenant E un fibré vectoriel complexe de rang N' et $G' \to P \xrightarrow{\iota} M$ le fibré principal associé par la représentation linéaire $G' \hookrightarrow G\ell(N',\mathbb{C})$.

2.1.4. <u>Définition</u>. On dira que E est

i) <u>feuilleté</u> si P est feuilleté ;

ii) <u>un $\mathcal{F}$-fibré</u> si P est un $\mathcal{F}$-fibré. ■

Rappelons que E s'obtient à partir de P en quotientant $P \times \mathbb{C}^{N'}$ par l'action libre de G'

$$g'\cdot(z,e) = (zg', g'^{-1}e).$$

Pour tout $(z,e) \in P\times\mathbb{C}^{N'}$ on notera $[z,e]$ sa classe d'équivalence dans $P \times_{G'} \mathbb{C}^{N'}$.

Pour toute section α de E on définit une fonction $\sigma(\alpha) : P \to \mathbb{C}^{N'}$ par

$$[z,\sigma(\alpha)(z)] = \alpha(\imath(z))$$

On a clairement $\sigma(\alpha)(zg') = g'^{-1}\sigma(\alpha)(z)$ pour tout $z \in P$ et tout $g' \in G'$. L'application σ est un isomorphisme de $C^{\infty}(E)$ sur l'espace $C^{\infty}_{G}(P,\mathbb{C}^{N'})$ des fonctions G'-équivariantes sur P à valeurs dans $\mathbb{C}^{N'}$.

Soient $\alpha \in C^{\infty}(E)$ et $X \in \mathcal{X}(M)$ on pose

$$\nabla_X\alpha(x) = [\sigma^{-1}(\tilde{X}\cdot\sigma(\alpha))](z)$$

où $x = \imath(z)$.

L'application $\nabla : \mathcal{X}(M)\times C^{\infty}(E) \to C^{\infty}(E)$ ainsi définie est $A(M)$-linéaire en X et vérifie

i) $\nabla_X(\alpha+\beta) = \nabla_X\alpha + \nabla_X\beta$

ii) $\nabla_X(f\alpha) = f\nabla_X\alpha + (X\cdot f)\alpha$

$\forall\alpha,\beta \in C^{\infty}(E)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ et $\forall f \in A(M)$.

Pour tous $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ on notera $\mathcal{R}(X,Y)$ l'endomorphisme de $C^{\infty}(E)$

$$\mathcal{R}(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

qu'on appelle la <u>courbure de la connexion linéaire</u> ∇ sur E.

2.1.5. <u>Proposition</u>. [37] Si E est un $\mathcal{F}$-fibré on a

$$i_X\mathcal{R} = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$. ∎

On observe que ∇ définit sur E un champ d'éléments horizontaux $\mathcal{H}_E$. En particulier $\mathcal{R}(X,Y) = 0$ si $X,Y \in \Gamma(\mathcal{F})$. Il existe un feuilletage

$\mathcal{F}_E$ sur E relevé horizontal de $\mathcal{F}$ pour $\mathcal{H}_E$. Ce feuilletage peut être obtenu autrement : sur chaque facteur $P\times\{e\}$ on met le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$. On obtient ainsi un feuilletage sur $P\times\mathbb{C}^{N'}$ invariant par G'. Il passe donc au quotient en un feuilletage $\mathcal{F}_E$ sur $E = P\times_{G'}\mathbb{C}^{N'}$.

Un morphisme de fibré feuilletés $\varphi : E_1 \to E_2$ est un morphisme de fibrés qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}_{E_1}$ dans les feuilles de $\mathcal{F}_{E_2}$. Un tel morphisme est induit par un morphisme feuilleté $\tilde{\varphi} : P_1 \to P_2$. Supposons que E_1 et E_2 sont des $\mathcal{F}$-fibrés et notons ω_i la 1-forme de connexion basique sur P_i où $i = 1,2$. On dira que φ est un morphisme de $\mathcal{F}$-fibrés si $\tilde{\varphi}^*\omega_2 = \omega_1$.

Pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$, on notera X_E le relevé horizontal pour $\mathcal{H}_E$ de X. En utilisant le fait que la courbure $\mathcal{R}$ vérifie $i_X\mathcal{R} = 0$ pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ on montre la

2.1.6. Proposition. Pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ et tout champ feuilleté $Y \in \Gamma(M,\mathcal{F})$, $[X_E,Y_E] \in \Gamma(\mathcal{F}_E)$. Autrement dit, tout automorphisme infinitésimal Y de $\mathcal{F}$ se relève en un automorphisme de $\mathcal{F}_E$. ■

Démonstration : Il suffit de montrer que pour tout $X\in\Gamma(\mathcal{F})$ et tout $Y \in \mathcal{X}(M,\mathcal{F})$ on a

$$\widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X},\tilde{Y}].$$

Soient α une section de E, $z \in P$ et $x = \iota(z)$. Par définition de $\mathcal{R}$ on a :

$$(\mathcal{R}(X,Y)\alpha)(x) = [\sigma^{-1}(([\tilde{X},\tilde{Y}]-\widetilde{[X,Y]})\sigma(\alpha))](z)$$

comme $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ on a $\mathcal{R}(X,Y) = 0$ pour toute section α de E. D'où l'on déduit $\widetilde{[X,Y]} = [\tilde{X},\tilde{Y}]$ qui implique bien entendu la proposition 2.1.6. ■

Soient E_1 et E_2 deux $\mathcal{F}$-fibrés. La proposition qui suit se démontre de la même manière que dans le cas classique.

2.1.7. <u>Proposition</u>. Les connexions basiques sur E_1 et E_2 définissent une unique connexion basique ∇^k sur $S^k(E_1,E_2)$. ■

Ceci montre que $S^k(E_1,E_2)$ est un F-fibré.

2.1.8. <u>Définition</u>. On dira que $\alpha \in C^\infty(E)$ est <u>basique</u> si $\nabla_X\alpha = 0$ pour tout $X \in \Gamma(F)$. ■

Si α est basique et $f \in A(M/F)$ alors $f\alpha$ est basique. En effet on a

$$\nabla_X(f\alpha) = f\nabla_X\alpha + (X\cdot f)\,\alpha$$

Si $X \in \Gamma(F)$, alors $X\cdot f = 0$ et $\nabla_X\alpha = 0$. L'espace $C^\infty(E/F)$ des sections basiques de E est donc un module sur l'anneau $A(M/F)$.

2.2. *Fibrés des jets basiques*.

La plupart des définitions et démonstrations que nous presentons dans cette section sont une adaptation au cas basique de l'exposé de R.S. Palais [46], chapitre IV.

Soient E un F-fibré sur M et V un ouvert distingué pour F et trivialisant E. Pour tout $z \in V$ soit $I^m(V/F_V)_z$ l'idéal des fonctions basiques pour le feuilletage F_V induit sur V dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont nulles en z. On note

$$Z_V^m(E/F)_z = \{f\cdot\alpha / f \in I^{m+1}(V/F_V)_z \quad \text{et} \quad \alpha \in C_V^\infty(E/F)\}$$

où $C_V^\infty(E/F)$ est l'espace des sections F_V-basiques au-dessus de V et

$$J_V^m(E/F)_z = C_V^\infty(E/F) \,/\, Z_V^m(E/F)_z .$$

La projection canonique $C_V^\infty(E/F) \to J_V^m(E/F)_z$ est compatible avec les restrictions $C_V^\infty(E/F) \to C_{V'}^\infty(E/F)$ pour $V' \subset V$. On l'appellera le m-<u>jet basique</u> en z.

Dans toute la suite on supposera que le fibré normal νF est muni d'une connexion basique ∇^{ν} i.e. νF est un F-fibré.

2.2.1. Lemme. Il existe une unique application linéaire $d_z^m : I^m(V/F_V)_z \to S^m(\nu_z F, \mathbb{C})$ telle que si $Y_1^b, \ldots, Y_m^b$ sont m champs basiques en z et $f \in I^m(V/F_V)_z$, on a :

i) $d_z^m f(Y_1^b, \ldots, Y_m^b) = (Y_1 \ldots Y_m) \cdot f(z)$

ii) la suite

$$0 \to I^{m+1}(V/F_V)_z \to I^m(V/F_V)_z \xrightarrow{d_z^m} S^m(\nu_z F, \mathbb{C}) \to 0$$

est exacte où $Y_1, \ldots, Y_m$ dont des champs sur M représentant $Y_1^b, \ldots, Y_m^b$. ■

Démonstration : i) Pour $m = 1$, la différentielle d'une fonction basique est une 1-forme basique df. Sa valeur en z est une forme linéaire sur $T_z M$ nulle sur $T_z F$. Elle définit donc une forme linéaire $d_z^1 f = \nu_z F = T_z M / T_z F$.

Supposons que le lemme est vrai pour tout $k < m$.

ii) Soit $f \in I^m(V/F_V)_z$. Par l'hypothèse de récurrence on a $d_z^{m-1} f = 0$. Soient $Y_1^b, \ldots, Y_m^b$, m champs basiques. Alors

$$\begin{aligned}
&[(Y_1 \ldots Y_i Y_{i+1} \ldots Y_m) \cdot f](z) - [(Y_1 \cdot \ldots Y_{i+1} Y_i \ldots Y_m) \cdot f](z) = \\
&[(Y_1 \ldots Y_{i-1} \cdot [Y_i, Y_{i+1}] \cdot Y_{i+2} \cdot \ldots \cdot Y_m) \cdot f](z) = \\
&d_z^{m-1} f(Y_1, \ldots, [Y_i, Y_{i+1}], \ldots, Y_m) = 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que $[(Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_m) f](z)$ est symétrique en $Y_1, \ldots, Y_m$. Il n'est pas difficile de voir qu'en fait $[(Y_1 \ldots Y_m) \cdot f](z) \in S^m(\nu_z F, \mathbb{C})$. Comme f est basique ceci ne dépend pas du choix qu'on a fait des champs $Y_1, \ldots, Y_m$ représentant les champs basiques $Y_1^b, \ldots, Y_m^b$.

L'application

$$d_z^m : I^m(V/F_V)_z \to S^m(\nu_z F, \mathbb{C})$$

est donc bien définie.

iii) Soient $g_1,\dots,g_{m+1} \in I(V/\mathcal{F}_V)_z$ et Y^b un champ basique. Alors

$$Y\cdot(g_1\cdot\ldots\cdot g_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} g_1\ldots(Y\cdot g_i)\ldots g_{m+1}$$

est un élément de $I^m(V)\mathcal{F}_V)_z$ i.e. l'application $f \to Y\cdot f$ envoie $I^{m+1}(V/\mathcal{F}_V)_z$ dans $I^m(V/\mathcal{F}_V)_z$. Par récurrence si $f \in I^{m+1}(V/\mathcal{F}_V)_z$ alors $(Y_1\ldots Y_m)f \in I^o(V/\mathcal{F}_V)_z$ i.e. $[(Y_1 \ldots Y_m)f](z) = d_z^m f(Y_1^b,\dots,Y_m^b) = 0$. D'où $I^{m+1}(V/\mathcal{F}_V)_z \subset \operatorname{Ker} d_z^m$.

iv) Soit $(e_1^b,\dots,e_n^b)$ une base de $\nu_z\mathcal{F}$ et $(e_1^{b*},\dots,e_n^{b*})$ la base duale associée. Considérons n germes de fonctions basiques $Y_1,\dots,Y_n$ telles que $Y_i(z) = 0$ et $(dY_i)_z = e_i^*$. Si $f \in A(V/\mathcal{F}_V)$ par le théorème de Taylor on a $f = \sum_{|s|\leq m} \frac{1}{s!} D^s f(z) Y^s + g$ où $g \in I^{m+1}$, $s = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{N}^n$, $|s| = s_1+\dots+s_n$,

$D^s = \dfrac{\partial^{|s|}}{\partial y_1^{s_1}\ldots\partial y_n^{s_n}}$ et $Y^s = Y_1^{s_1}\ldots Y_n^{s_n}$. Si $f \in I^m(M/\mathcal{F})$, alors

$D^s f(z) = d_z^{|s|} f|((\frac{\partial}{\partial y_i})^b)^{(s)}| = 0$ où $(e)^{(s)}$ est le $|s|$-uple $(\underbrace{e_1,\dots,e_1}_{s_1 \text{ fois}},\dots,\underbrace{e_n,\dots,e_n}_{s_n \text{ fois}})$

si $e = (e_1,\dots,e_n)$, si $|s| < m$ et $f = \sum_{|s|=m} (\frac{1}{s!} D^s f(z))\, Y^s + g$. D'où

$d_z^m f[((\frac{\partial}{\partial y_i})^b)^s] = D^s f(z)$ car pour $|s| = |s'| = m$ alors $(D^{s'} Y^s)(z) = 0$ si $s \neq s'$ et $(D^{s'} Y^s)(z) = s!$ $(= s_1!\ldots s_n!)$ si $s = s'$. Finalement si $f \in \ker d_z^m$ on a $D^s f(z) = 0$ pour $|s| = m$; donc $f \in I^{m+1}(V/\mathcal{F}_V)_z$.

v) Pour terminer nous allons montrer que l'application d_z^m est surjective. Soit $a \in S^m(\nu_z\mathcal{F},\mathbb{C})$ et posons

$$f = \sum_{|s|=m} \frac{1}{s!}\, a(e^{(s)}) Y^s.$$

on a $f \in I^m(V/\mathcal{F}_V)_z$ et $d_z^m(e^{(s)}) = (D^s f)(z) = a(e^{(s)})$ i.e. $d_z^m f = a$. ■

2.2.2. Lemme. Soit $g \in I(V/F_V)_z$ et $dg_z = v$. On a alors $d_z^m g^m = m! S^m(v)$ ■

On a aussi le

2.2.3. Lemme. Il existe une unique application $d_z^m : Z^{m-1}(E/F)_z \to S^m(\nu_z F, E_z)$ telle que

i) si $f \in Z_V^{m-1}(E/F)_z$ et $h \in C_V^\infty(E^*/F)_z$ alors $d_z^m(h_\circ f) = h(z)_\circ d_z^m f$ où $(h_\circ f)(z) = h(z)(f(z))$;

ii) si $g \in A(V/F_V)$ est telle que $g(z) = 0$ et $dg_z = v$ et $f \in C_V^\infty(E/F)$ vérifiant $f(z) = e$ alors $d_z^m(g^m f) = m!(S^m(V \otimes e)$;

iii) la suite

$$0 \to Z_V^m(E/F)_z \longrightarrow Z_V^{m-1}(E/F)_z \xrightarrow{d_z^m} S^m(\nu_z F, E_z) \to 0$$

est exacte. ■

Ces lemmes se démontrent de la même manière que les lemmes 2 et 3 de [46] p. 57-58.

L'application canonique $f \to J_m(f)_z$ de $C_V^\infty(E/F)$ dans $J_V^m(E/F)_z = C^\infty(E/F)/Z_V^m(E/F)_z$ envoie $Z_V^m(E/F)_z$ dans $Z_V^{m-1}(E/F)_z$. Elle induit donc une application linéaire $J_m(f)_z \to I_{m-1}(f)_z$ de $J_V^m(E/F)_z$ dans $J_V^{m-1}(E/F)_z$ ayant pour noyau $Z_V^{m-1}(E/F)_z / Z_V^m(E/F)_z$. Par le lemme 2.2.3 on obtient une suite exacte

$$0 \to S^m(\nu_z F, E_z) \xrightarrow{i} J_V^m(E/F)_z \longrightarrow J_V^{m-1}(E/F)_z \to 0$$

où i est caractérisée par

$$i(S^m(v^b) \otimes e) = J_m(\frac{1}{m!} g^m f)$$

avec $g \in A(V/F)$ vérifiant $g(z) = 0$ et $dg_z = v$.

Posons $J^m(E/F) = \bigcup_{z \in V} J_V^m(E/F)_z$ et définissons $J_m(f) : M \to J^m(E/F)$ pour $f \in C_V^\infty(E/F)_z$ par $J_m(f)(z) = J_m(f)_z$.

2.2.4. Proposition. $J^m(E/F)$ est un fibré vectoriel. ■

Démonstration : Soient V un ouvert distingué trivialisant E et f une section F-basique au-dessus de V i.e une fonction F_V-basique de V dans $\mathbb{C}^{N'}$. Par le théorème de Taylor, on a $J_m(f)_z = 0$ si et seulement si $d_z^k f = 0$ pour $k = 0,\dots,m$. On pose alors

$$\psi(J_m(f)_z) = (z,\{d^k f\}_{0\leq k\leq m})$$

L'application ψ ainsi définie est une trivialisation de $J^m(E/F)$ au-dessus de U

$$J^m(E/F)_{|V} \simeq V \times \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^{N'}). \qquad ■$$

En utilisant le fait que E et νF sont des F-fibrés nous allons montrer, qu'en fait $J^m(E/F)$ et $\bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F,E)$ sont canoniquement isomorphes.

La suite (S) donne une suite exacte au niveau des fibrés

$$0 \to S^m(\nu F,E) \xrightarrow{i} J^m(E/F) \to J^{m-1}(E/F) \to 0 \qquad (S^*)$$

Pour $m = 1$ on a simplement

$$0 \to L(\nu F,E) \xrightarrow{i} J^1(E/F) \xrightarrow{p} E \to 0$$

où $i(dg_z \otimes f(z)) = j_1(gf)_z$ et $pj_1(f)_z = f(z)$ avec $g \in A(V/F_V)$ telle que $g(z) = 0$ et $f \in C_V^\infty(E/F)$.

2.2.5. Proposition. La connexion ∇ définit une application linéaire $T : J^1(E/F) \to L(\nu F,E)$ telle que $T\circ i$ est l'identité de $L(\nu F,E)$. ■

Démonstration : La connexion ∇ sur E peut être vue comme une application linéaire de $C^\infty(E)$ à valeurs dans $C^\infty(L(TM,E))$ définie par

$$(\nabla\alpha)_z(X) = (\nabla_X\alpha)(z).$$

Si $\alpha \in C^\infty(E/F)$ alors $(\nabla\alpha)(X) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(F)$. Donc ∇ définit une application linéaire de $C^\infty(E/F)$ dans $C^\infty(L(\nu F,E))$ telle que l'application $\alpha \to \nabla\alpha(z)$ est nulle sur $Z^1_z(E/F)$. Elle induit donc une application

$$T_z : J^1(E/F)_z = C^\infty_V(E/F)/Z^1_V(M/F)_z \to L(\nu_z F, E_z)$$

vérifiant $\nabla = T \circ j_1$.

Par construction $T \circ i$ est l'identité de $L(\nu F,E)$. ■

2.2.6. Théorème. La connexion ∇ définit une application $D_m : J^m(E/F) \to S^m(\nu F,E)$ telle que $D_m \circ i = id_{S^m(\nu F,E)}$. ■

Démonstration : Il suffit de poser $D_m = S^m_* \circ \nabla^{m-1} \circ \dots \circ \nabla^1 \circ \nabla$ où ∇^k est vue comme application linéaire de $L^k(\nu F,E)$ dans $L(L^k(\nu F,E)\ ,\ E) \simeq L^{k+1}(\nu F,E)$.

Un calcul simple utilisant la définition de i dans la suite exacte (S^*) permet de conclure. ■

2.2.7. Corollaire. Il existe un isomorphisme canonique du fibré $J^m(E/F)$ sur le F-fibré $\bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F,E)$. ■

Démonstration : Par la suite (S^*), $J^{m-1}(E/F)$ se réalise comme sous-fibré de $J^m(E/F)$ isomorphe au noyau de D_m. On a ainsi

$$J^m(E/F) \simeq J^{m-1}(E/F) \oplus S^m(\nu F,E).$$

Un raisonnement analogue donne

$$J^{m-1}(E/F) \simeq J^{m-2}(E/F) \oplus S^{m-1}(\nu F,E)$$

etc... On obtient finalement

$$J^m(E/F) \simeq \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F,E) \ ■$$

On en déduit que $J^m(E/\mathcal{F})$ est canoniquement muni d'une connexion basique et qui en fait un $\mathcal{F}$-fibré.

2.3. *Opérateurs différentiels basiques sur les $\mathcal{F}$-fibrés.*

Considérons le préfaisceau $\underset{\sim}{C}$ sur M qui à tout ouvert V associe l'espace $C^\infty_V(E/\mathcal{F})$ des sections $\mathcal{F}_V$-basiques de E au-dessus de V.

2.3.1. Définition. Un opérateur différentiel basique d'ordre m agissant sur les sections basiques $C^\infty(E/\mathcal{F})$ de E est un morphisme $D : \underset{\sim}{C} \to \underset{\sim}{C}$ tel que pour tout ouvert V distingué pour $\mathcal{F}$ et trivialisant E pour tout $z \in V$, $J_m(\alpha)_z = 0$ implique $D\alpha(z) = 0$ $\forall \alpha \in C^\infty_V(E/\mathcal{F})$. ∎

Un tel morphisme induit une application linéaire $D : C^\infty(E/\mathcal{F}) \to C^\infty(E/\mathcal{F})$.

Dans un système de coordonnées locales (x,y) adaptées à $\mathcal{F}$, D s'écrit

$$D = \sum_{k=0}^{m} P_k\left(y ; \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

où pour tout $k = 0,..,m$ P_k est un polynôme homogène de degré k en $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ dont les coéfficients sont des matrices carrées d'ordre $N' = \mathrm{rang}_{\mathbb{C}} E$ à valeurs des fonctions basiques.

On peut remarquer que si T est un morphisme feuilleté entre deux $\mathcal{F}$-fibrés E_1 et E_2 alors la section T_* du $\mathcal{F}$-fibré $L(E_1,E_2)$ induite par T est C^∞ et basique. On a la proposition qui se démontre comme dans le cas classique [46].

2.3.2. Proposition. D est un opérateur différentiel basique d'ordre m si et seulement si il existe un morphisme feuilleté $T : J^m(E/\mathcal{F}) \to E$ tel que $D = T_* \circ j_m$. ∎

2.4. *$\mathcal{F}$-fibrés hermitiens.*

Supposons que $\mathcal{F}$ est riemannien. Alors le fibré $\nu\mathcal{F}_{\mathbb{C}} = \nu\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}$ est muni d'une métrique hermitienne h invariante le long des feuilles.

2.4.1. Proposition. La connexion de Levi-Civita transverse associée à h est basique et fait donc de $\nu F_{\mathbb{C}}$ un F-fibré hermitien. ∎

Les sections basiques de $\nu F_{\mathbb{C}}$ ne sont rien d'autre que les champs basiques sur M.

De manière générale soit E un F-fibré muni d'une métrique hermitienne h. On peut considérer h comme une section du fibré S^2E^* des formes bilinéaires hermitiennes sur E. La connexion basique ∇ s'étend de manière naturelle en une connexion basique ∇^S sur S^2E^*.

2.4.2. Définition. On dira que E est un F-fibré hermitien si $\nabla^S_X h = 0$ pour tout $X \in \Gamma(F)$. ∎

Si F est riemannien alors sur l'espace total d'un tel fibré, le feuilletage F_E est riemannien. En effet le fibré normal à F_E s'identifie à la somme directe du fibré TE tangent aux fibres de $q : E \to M$ et au fibré $q^*(\nu F)$ qui sont munis de métriques riemanniennes invariantes le long des feuilles de F_E.

Les F-fibrés hermitiens constitueront la catégorie que l'on considérera dans toute la suite.

Soient maintenant D un opérateur différentiel basique d'ordre m agissant sur les sections basiques de E, $z \in M$ et $\xi \in T^*M$ basique pour F. On se donne une fonction basique g définie sur un voisinage V distingué pour F et trivialisant E telle que $g(z) = 0$ et $dg(z) = \xi$ et $\alpha \in C^\infty_V(E/F)$. On notera η la valeur de α au point z. Par analogie au cas classique (cf. [46]) on définit le symbole principal de D au point z comme étant l'application linéaire $\sigma(D)(z,\xi) : E_z \to E_z$ définie par

$$\sigma(D)(z,\xi)(\eta) = \frac{1}{m!} D(g^n\alpha)(z)(\eta).$$

Comme en 1.3 on notera $A_D(z,\xi,\cdot)$ la forme quadratique relativement à la métrique hermitienne h sur E.

2.4.3. Définition. On dira que D est

i) transversalement elliptique si $\sigma(D)(z,\xi)$ est un isomorphisme pour tout $z \in M$ et tout ξ non nul ;

ii) fortement transversalement elliptique si $A_D(z,\xi,\cdot)$ est définie positive pour tout $z \in M$ et tout ξ non nul. ∎

Dans toute la suite E sera un $\mathcal{F}$-fibré hermitien de rang N' au-dessus d'une variété compacte M munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ de codimension n. On notera h la métrique hermitienne sur E. Quitte à passer à un revêtement à deux feuillets on peut supposer que $\mathcal{F}$ est transversalement orientable. On se donne un opérateur différentiel basique D d'ordre pair $m = 2m'$ fortement transversalement elliptique agissant sur les sections basiques de E.

Nous allons montrer que D possède les mêmes propriétés qu'un opérateur fortement elliptique agissant sur toutes les sections d'un fibré herminiten au-dessus d'une variété compacte. Nous procéderons en trois étapes.

2.5. *Feuilletages de Lie à feuilles denses.*

Dans ce cas l'espace vectoriel $C^{\infty}(E/\mathcal{F})$ est de dimension finie. En effet une section basique qui est nulle en un point est nulle partout par densité des feuilles. Autrement dit, une section basique est entièrement déterminée par la valeur qu'elle prend en un point. Il n'y a donc qu'un nombre fini de sections basiques linéairement indépendantes. Posons $\bar{E}_o = C^{\infty}(E/\mathcal{F})$ et $N'_o = \dim \bar{E}_o$.
La métrique hermitienne sur E définit une métrique hermitienne sur $\bar{E}_o$. La décomposition de Hodge pour D se ramène donc à celle d'une application linéaire opérant sur un espace hermitien de dimension finie.

2.6. *Feuilletages T.P.*

Pour tout $u \in W$, on note F_u la fibre au-dessus de u de la fibration basique $\pi : M \to W$ et $\bar{E}_u = C^\infty(E_u/\mathcal{F}_u)$ où E_u et $\mathcal{F}_u$ sont respectivement les restrictions du fibré E et du feuilletage $\mathcal{F}$ à F_u.

2.6.1. Proposition. La dimension de $\bar{E}_u$ ne dépend pas de u. ■

Démonstration : Soient u_1 et u_2 deux points de W. Les automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{F}$ se relèvent naturellement (E étant un $\mathcal{F}$-fibré) en automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{F}_E$, et il en est de même du groupe des automorphismes qu'ils engendrent. Celui-ci est transitif sur M et projetable sur W. Donc il existe dans ce groupe un élément γ tel que $\gamma(F_{u_1}) = F_{u_2}$. Si γ_E est son relevé dans E, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_{u_1} \arrow[r, "\gamma_E"] \arrow[d] & E_{u_2} \arrow[d] \\ F_{u_1} \arrow[r, "\gamma"] & F_{u_2} \end{tikzcd}$$

L'automorphisme γ_E induit alors un isomorphisme entre E'_{u_1} et E'_{u_2}. ■

On pose $\bar{E} = \bigcup_{u \in W} \bar{E}_u$ et on note $\bar{q} : \bar{E} \to W$ la projection $\bar{q}(\alpha_u) = u$.

2.6.2. Proposition. $\bar{E}$ est un fibré hermitien au-dessus de W. ■

Démonstration : $\bar{E}$ est la réunion pour chaque $u \in W$, d'un espace vectoriel de dimension N'_o associé à ce point. On définit sur E' une structure de fibré vectoriel de base W à l'aide des trivialisations locales suivantes : soient $u_o \in W$, $z_o \in \pi^{-1}(u_o)$ et N'_o sections basiques $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N'_o}$ de E linéairement indépendantes en z_o. L'ouvert de M où ces sections restent linéairement indépendantes est saturé pour la fibration π, donc se projette en un ouvert U de

W dans lequel $\alpha_1,\dots,\alpha_{N_o'}$ définissent une trivialisation locale de $\bar{E}_o$. Il est immédiat de vérifier que ces trivialisations locales sont différentiablement compatibles (le passage d'une telle trivialisation à une autre se faisant par une matrice de fonctions basiques, regardées comme fonctions différentiables sur W).

En outre si α est une section basique de E, la correspondance définit $u \to \alpha_{|\pi^{-1}(u)}$ une section de $\bar{E}$ que nous noterons $\psi(\alpha)$. D'où une application :

$$\psi : C^\infty(E/F) \to C^\infty(\bar{E})$$

qui est visiblement un isomorphisme de $A(W)$-modules ($A(W)$ étant identifié au module des fonctions basiques sur M).

D'autre part, comme pour tout $u \in W$, l'espace vectoriel $\bar{E}_u$ est muni d'une métrique $\bar{h}_u$ provenant de la métrique hermitienne h définie globalement sur E, le fibré $\bar{E}$ est canoniquement munie d'une métrique hermitienne $\bar{h}$. ■

$\bar{E}$ sera appelé le <u>fibré basique</u> correspondant à E.

2.6.3. <u>Exemple</u>. Soit $M = T^3$ le tore de dimension 3 et notons (z_1,z_2,u) les coordonnées canoniques. Considérons le feuilletage $\mathcal{F}$ défini par le système différentiel

$$\begin{cases} a\,dz_1 - dz_2 = 0 \\ \qquad\quad du = 0 \end{cases}$$

où a est un nombre réel irrationnel. C'est un feuilletage transversalement de Lie de groupe R^2, donc T.P. Sa fibration basique s'identifie à la fibration triviale définie par l'équation $du = 0$:

$$T^2 \hookrightarrow T^3 \xrightarrow{\pi} S^1$$

Le feuilletage induit sur chaque fibre T^2 est le feuilletage par droites irrationnelles de pente a.

Soit E le fibré complexe de rang 2 défini par la représentation :

$$\psi : \pi_1(M) \to SU(2)$$

avec

$$\psi((1,0,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix} \qquad \psi((0,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$\psi((0,0,1)) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\mu} \end{pmatrix}$$

où θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ et λ et μ sont des réels quelconques.

On munit E de la connexion canonique associée à ψ. Elle est basique et plate. D'autre part le groupe structural de E est un sous-groupe de $SU(2)$. Bref E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien. Le feuilletage $\mathcal{F}_E$ sur E est un feuilletage en droites.

Soit u un élément de S^1.

i) On peut remarquer que si $\dim C^\infty(E_u/\mathcal{F}_u)$ était égal à 2, alors E_u aurait une trivialisation basique, ce qui n'est pas le cas car le morphisme $\pi_1(T^2) \to SU(2)$ induit par ψ est non trivial. Ceci étant, si l'on exhibe un élément non nul de $C^\infty(E_u/\mathcal{F}_u)$, tous les autres lui sont proportionnels (sur $\mathbb{C}$). On peut observer que le fibré E_u est, pour $u = 0$ par exemple, le quotient de $\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^2$ par la relation d'équivalence qui identifie l'élément (z_1,z_2,t_1,t_2) à $(z_1+2k_1,\ z_2+2k_2,\ t_1,t_2e^{i(k_1\theta_1+k_2\theta_2)})$. On définit alors la section qui à (z_1,z_2) associe la classe d'équivalence de l'élément $(z_1,z_2,1,0)$ qui est basique car à dérivée covariante nulle pour la connexion plate définissant le feuilletage $\mathcal{F}_{E_o}$ sur E_o.

ii) En opérant ainsi sur chaque fibre E_u, on voit que toute section basique globale s'écrit $(z_1,z_2,u) \to \overline{(z_1,z_2,f(u))}$ = classe d'équivalence de $(z_1,z_2,f(u))$

et l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ doit vérifier, par définition de E :

$$f(u+1) = f(u)e^{i\lambda} \qquad (*)$$

iii) D'autre part le fibré E se décompose de façon naturelle en somme directe : si $v = \overline{(z_1,z_2,u,t_1,t_2)}$, alors $v = v_1+v_2$ où $v_1 = \overline{(z_1,z_2,u,t_1,0)}$ et $v_2 = \overline{(z_1,z_2,u,0,t_2)}$.

iv) Finalement, le fibré $\bar{E}$ est défini par la représentation $\bar{\psi}$ de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ dans $SU(1)$ donnée par $\bar{\psi}(1) = e^{i\lambda}$.

2.6.4. Produit scalaire.

En utilisant la métrique hermitienne h sur E, nous allons munir l'espace $C^\infty(E/F)$ d'une structure préhilbertienne.

Supposons que la métrique sur M quasi-fibrée pour F soit telle que le volume des fibres est égal à 1. La mesure canonique associée est de la forme

$$v = \lambda \wedge \pi^*(w)$$

où λ est la forme volume sur les fibres de π et w la mesure induite sur W. Si α et β sont deux éléments de $C^\infty(E/F)$ on pose :

$$\langle\alpha,\beta\rangle_E = \int_M h_z(\alpha,\beta)v$$

On définit ainsi un produit scalaire sur $C^\infty(E/F)$.

Considérons maintenant deux éléments $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de $C^\infty(\bar{E})$ tels que

$$\bar{\alpha} = \psi(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \bar{\beta} = \psi(\beta)$$

avec $\alpha,\beta \in C^\infty(E/F)$ et ψ l'isomorphisme entre $C^\infty(E/F)$ et $C^\infty(\bar{E})$ décrit en 2.6.2. On pose :

$$\langle\bar{\alpha},\bar{\beta}\rangle = \int_W h_u(\bar{\alpha},\bar{\beta})w$$

On a alors la

2.6.5. Proposition. L'isomorphisme ψ est une isométrie de $C^\infty(E/F)$ sur $C^\infty(\bar{E})$.■

Démonstration :

$$\langle\alpha,\beta\rangle_E = \int_M h_z(\alpha,\beta)v$$

$$= \int_M h_z(\alpha,\beta)\lambda \wedge \Pi^*(W)$$

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$\langle\alpha,\beta\rangle_E = \int_W (\int_F h_z(\alpha,\beta)\lambda)w$$

$$= \int_W \bar{h}_u(\bar{\alpha},\bar{\beta})w$$

i.e. $\langle\alpha,\beta\rangle_E = \langle\bar{\alpha},\bar{\beta}\rangle_{\bar{E}}$.■

Nous allons maintenant associer à l'opérateur D un opérateur différentiel ordinaire de même ordre sur W agissant sur $C^\infty(\bar{E})$ et fortement elliptique.

2.6.7. Proposition. D induit sur W un opérateur différentiel $\bar{D}$ agissant sur les sections de E.■

Démonstration : Soit U un ouvert de W (muni du feuilletage par points) trivialisant $\bar{E}$ et posons $V = \Pi^{-1}(U)$. Si $C^\infty_U(\bar{E})$ est l'espace des sections de $\bar{E}$ au-dessus de U on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_V(E/F) & \xrightarrow{D} & C^\infty_V(E/F) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ C^\infty_U(\bar{E}) & \xrightarrow{\bar{D}} & C^\infty_U(\bar{E}) \end{array}$$

qui définit donc l'opérateur différentiel $\bar{D}$ cherché. ■

2.6.8. Proposition. $\bar{D}$ est d'ordre $2m'$ et est fortement elliptique.

Démonstration : Soient $u \in V$ et $z \in F_u$. Posons $E' = \pi^* \bar{E}$. Alors l'évaluation de $\alpha \in E'_u$ en z permet d'identifier E' à un sous-fibré de E. L'espace cotangent à M en z se décompose de la façon suivante :

$$T_z^* M = T_z^* F \oplus N_z^*$$

où N_z est l'orthogonal à l'esapce $T_z F$ tangent à la fibre de π en z. Pour tout $\bar{\xi} \in T_u^* W$ on note ξ l'unique vecteur de N_z^* qui se projette sur $\bar{\xi}$.
Soit g une fonction sur W telle que $g(u) = 0$ et $dg_u = \bar{\xi}$; bien entendu si g est considérée comme fonction sur M, elle est basique pour la fibration π et on a donc $dg_z = \xi$ puisque la 1-forme différentielle dg est aussi basique pour π. Considérons une section locale $\bar{\alpha}$ de $\bar{E}$ telle que $\bar{\alpha}(u) = \eta \in \bar{E}_u$. On pose $\alpha = \psi^{-1}(\bar{\alpha})$. Le symbole de D est alors donné par

$$\sigma(D)(z,\xi)(\eta(z)) = \frac{1}{m!} D(g^m \alpha)(z)(\eta(z))$$

et préserve le sous-espace E'_z; il induit donc une application linéaire de $\bar{E}_u$ dans lui-même qui n'est rien d'autre que le symbole principal

$$\sigma(\bar{D})(u,\bar{\xi})(\eta) = \frac{1}{m!} \bar{D}(g^m \bar{\alpha}) \cdot (u)(\eta)$$

de $\bar{D}$ au point u. Ceci montre que $\bar{D}$ est d'ordre $2m' = m$ et que la forme quadratique $A_{\bar{D}}(u,\bar{\xi},\cdot)$ associée à $\bar{D}$ sur $\bar{E}_u$ relativement à la métrique hermitienne $\bar{h}$ est égale à la restriction à E'_u de la forme quadratique $A_D(z,\xi,\cdot)$ associée à D sur E_z relativement à la métrique hermitienne h. Comme cette dernière est définie positive pour tout $\xi \neq 0$ (D étant fortement transversalement elliptique) et que $\xi = 0$ si et seulement si $\bar{\xi} = 0$, $A_{\bar{D}}(u,\bar{\xi},\cdot)$ est définie positive pour tout $\bar{\xi} \neq 0$ i.e. $\bar{D}$ est fortement elliptique. ■

On note D^* l'adjoint de D pour le produit scalaire sur $C^\infty(E/F)$. C'est un opérateur différentiel basique d'ordre 2m'. Puisque ψ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens on a $\overline{D^*} = \bar{D}^*$.

Soit $H(E/F) = \{\alpha \in C^\infty(E/F)/D\alpha = 0\}$ qui s'identifie à $H(\bar{E}) = \operatorname{Ker} \bar{D}$. On a le

2.6.9. Théorème. L'espace vectoriel $H(E/F)$ est de dimension finie et on a une décomposition orthogonale

$$C^\infty(E/F) = H(E/F) \oplus \operatorname{Im} D^* . \blacksquare$$

Démonstration : résulte de la théorie générale des opérateurs elliptiques appliquée à $\bar{D}$ agissant sur $C^\infty(\bar{E})$ sur la variété compacte W (cf. [59]) ■

2.7. *Cas riemannien.*

On note toujours $G = SO(n) \to M^\# \xrightarrow{\rho} M$ le fibré principal des repères orthonormés directs transverses à F et $F^\#$ le feuilletage T.P. sur $M^\#$ associé à F. On pose $E^\# = \rho^* E$ et on note $q^\#$ la projection $E^\# \to M^\#$.

2.7.1. Proposition. $E^\#$ est à la fois un $F^\#$-fibré hermitien et un G-fibré sur $M^\#$. ■

Démonstration : Soit $\rho_E : E^\# \to E$ la projection relevant ρ. L'image réciproque par ρ_E de la connexion ∇ sur E est une connexion $\nabla^\#$ sur $E^\#$ qui en fait un fibré feuilleté. On a alors un diagramme commutatif de variétés et d'applications feuilletées

$$\begin{tikzcd} E^\# \arrow[r, "\rho_E"] \arrow[d, "q^\#"'] & E \arrow[d, "q"] \\ M^\# \arrow[r, "\rho"] & M \end{tikzcd}$$

La connexion $\nabla^{\#}$ *est donc basique et compatible* avec la métrique hermitienne $h^{\#}$ sur $E^{\#}$ relevée de h. D'autre part, l'action de G sur $M^{\#}$ se relève, à l'aide de cette connexion, en une action sur $E^{\#}$ qui préserve à la fois le feuilletage $F_{E^{\#}}$ et la métrique hermitienne $h^{\#}$. Ce cui démontre la proposition. ■

Au fibré $E^{\#}$ correspond, par la proposition 2.6.2., un fibré $\bar{E}^{\#}$ sur la variété basique $W^{\#}$ de $F^{\#}$. L'action de G sur $E^{\#}$ induit une action sur $\bar{E}^{\#}$ qui en fait un G-fibré muni d'une métrique $\bar{h}^{\#}$ G-invariante induite par h . On dira que $\bar{E}^{\#}$ <u>est le fibré basique correspondant à</u> E.

2.7.2. <u>Remarques</u>.

i) L'anneau $A(M/F)$ *des fonctions basiques sur* M s'identifie à l'anneau $A_G(W^{\#})$ des fonctions sur $W^{\#}$ invariantes par G. On a alors un isomorphisme naturel entre le $A(M/F)$-module $C^{\infty}(E/F)$ et le $A_G(W^{\#})$-module $C^{\infty}_G(E^{\#}/F^{\#})$ des sections basiques de $E^{\#}$ invariantes par G. Comme $C^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$ est canoniquement isomorphe au A(W)-module $C^{\infty}(\bar{E}\ )$ on a une identification naturelle entre $C^{\infty}(E/F)$ et le $A_G(W^{\#})$-module $C^{\infty}_G(\bar{E}^{\#})$, des sections de $\bar{E}^{\#}$ qui sont G-invariantes.

ii) Signalons aussi que E étant un F-fibré hermitien, il en est de même de tous les fibrés associés $(S^k(\nu F,E), J^k(E/F), L(J^k(E/F),E)$ etc...). Leurs relevés $S^k(\nu F,E)^{\#}$, $J^k(E/F)^{\#}$, $L(J^k(E/F),E)^{\#}\ldots$ à $M^{\#}$ par la projection $p : M^{\#} \to M$ sont à la fois des $F^{\#}$-fibrés hermitiens et des G-fibrés.

iii) On définit le produit scalaire sur $C^{\infty}(E/F)$ par restriction à $C^{\infty}_G(E^{\#}/F^{\#})$ de celui défini à l'aide de la métrique $h^{\#}$ comme précédemment sur $C^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$.

Posons $N = \frac{1}{2}\,n(n-1) = \dim G$ et considérons le parallélisme transverse à $F^{\#}$, $P = \{P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_N\}$ (cf. 3.1.3. ii) chap III). Les champs basiques associés $P^b_1,\ldots,P^b_n,Q^b_1,\ldots,Q^b_N$ engendrent le fibré normal $\nu F^{\#}$ à $F^{\#}$. On notera H le sous-fibré de $TM^{\#}$ engendré par $(P_1,\ldots,P_n)$ et V celui engendré par $(Q_1,\ldots,Q_N)$. De même H^b sera le sous-fibré de $\nu F^{\#}$ engendré par $(P^b_1,\ldots,P^b_n)$ et

V^b celui engendré par $(Q_1^b,\dots,Q_N^b)$. On a de manière évidente

$$TM^\# = TF^\# \oplus V \oplus H$$
$$\nu F^\# = V^b \oplus H^b$$

et des isomorphismes naturels

$$(\nu F)^\# = \rho^*(\nu F) \simeq H^b \tag{1}$$

$$S^k((\nu F)^\#, E^\#) \simeq S^k(\nu F, E)^\# \simeq S^k(\nu F^\#/V^b,\ E^\#) \tag{2}$$

Soit maintenant $D = T_* \circ J_m$ où J_m est un jet basique d'ordre m et T un morphisme feuilleté $T : J^m(E/F) \to E$. Nous allons relever l'opérateur D en un opérateur différentiel basique d'ordre 2m' sur M agissant sur $C^\infty(E^\#/F^\#)$ et commutant à l'action de G. Pour cela il suffit de relever T en un morphisme feuilleté : $T^\# : J^m(E^\#/F^\#) \to E^\#$ commutant à l'action de G induite sur $J^m(E^\#/F^\#)$ et $E^\#$.

2.7.3. <u>Lemme</u>. Il existe un relèvement $\tilde{T}^\#$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F,E)^\# \arrow[r, "\tilde{T}^\#"] \arrow[d, "\rho_*^s"] & E^\# \arrow[d, "\rho_*"] \\
J^m(E/F) \simeq & \bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F,E) \arrow[r, dashed] & E
\end{tikzcd} \tag{**}$$

où ρ_* et ρ_*^s sont les applications naturelles définies par ρ. ■

<u>Démonstration</u> : Soient $z^\# \in M^\#$ et $z = \rho(z^\#)$. La restriction de ρ_* à la fibre $E^\#_{z^\#}$ de $E^\#$ en $z^\#$ est un isomorphisme sur E_z. Pour tout $\theta \in S^k(\nu F,E)^\#$ on pose

$$\widetilde{T}^{\#}_{z^{\#}}(\theta) = \rho_*^{-1}\left[T_z(\rho_*^s(\theta)\right]$$

on vérifie alors facilement que $\widetilde{T}^{\#}$ est différentiable par le théorème 2 p.60 de [46] ; c'est donc un morphisme feuilleté et fait commuter le diagramme (**).■

Reste à prolonger $\widetilde{T}^{\#}$. On a des isomorphismes canoniques

$$S^k(\nu F,E) \simeq S^k((\nu F)^{\#},E^{\#}) \simeq S^k(\nu F^{\#}/V^b,\ E^{\#})$$

pour tout $k = 0,\dots,m$. Alors la projection

$$pr : \nu F^{\#} \to \nu F^{\#}/V^b$$

définit une injection

$$pr^* : S^k(\nu F^{\#}/V^b,E^{\#}) \to S^k(\nu F^{\#},E^{\#}).$$

2.7.4. Lemme. Il existe un morphisme feuilleté $T^{\#}$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F^{\#}/V^b,E^{\#}) \arrow[r, "\widetilde{T}^{\#}"] \arrow[d, hook] & E^{\#} \\
\bigoplus_{k=0}^{m} S^k(\nu F^{\#},E^{\#}) \arrow[ur, "T^{\#}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (***)$$

■

Démonstration : On a $\widetilde{T}^{\#} = \widetilde{T}^{\#}_o \oplus \dots \oplus \widetilde{T}^{\#}_m$ où $\widetilde{T}^{\#}_k$ est la kème composante de $\widetilde{T}^{\#}$. Il suffit de prolonger cette composante. On a $\nu F^{\#} = V^b \oplus H^b$. D'où

$$S^k(\nu F^{\#},E^{\#}) = \bigoplus_{r+s=k} S^{s,r}$$

où $S^{s,r} = S^s(H^b,E^{\#}) \otimes S^r(V^b,\mathbb{C})$; et donc

$$S^k(\nu F^{\#}/\quad,E^{\#}) = S^{k,o} \simeq S^k(H^b,E^{\#}).$$

Tout $\theta \in S^k(\nu F^\#, E^\#)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\theta = \theta^{k,0} + \sum_{\substack{s+r=k \\ r\geqslant 1}} \theta^{s,r}$$

où $\theta^{s,r} \in S^{s,r}$ on pose alors

$$T^\#(\theta) = \tilde{T}^\#(\theta^{k,0}) \qquad \text{et} \qquad T^\#\Big(\sum_{\substack{s+r=k \\ r\geqslant 1}} \theta^{sr}\Big) = 0$$

Ceci définit bien le prolongement $T^\#$ cherché. On vérifie facilement qu'il commute à l'action de G. ■

On pose $D^\# = T^\#_* \circ J^\#_m$. On obtient ainsi un opérateur différentiel basique d'ordre m sur $M^\#$, G-invariant agissant sur les sections basiques de $E^\#$ et dont la restriction à $C^\infty_{G,\rho^{-1}(V)}(E^\#/F^\#)$, pour tout ouvert V de M fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} C^\infty_{G,\rho^{-1}(V)}(E^\#/F^\#) \arrow[r, "D^\#"] & C^\infty_{G,\rho^{-1}(V)}(E^\#/F^\#) \\ C^\infty_V(E/F) \arrow[u, "\int"] \arrow[r, "D"] & C^\infty_V(E/F) \arrow[u, "\int"'] \end{tikzcd}$$

2.7.5. <u>Proposition</u>. L'opérateur $D^\#$ est fortement H^*-elliptique. ■

<u>Démonstration</u> : soient $z^\# \in M^\#$, $\xi^\#_H \in H^*_{z^\#}$ et $\eta^\# \in E^\#_{z^\#}$. On notera $z = \rho(z^\#)$, $\xi = \rho_*(\xi^\#_H)$ et $\eta = \rho_*(\eta^\#)$ qui sont respectivement des vecteurs de $(\nu F)^*_z$ et E_z où ρ_* est la projection induite naturellement par ρ. Il existe alors un ouvert V distingué pour F et trivialisant E, une fonction basique g définie sur V et $\alpha \in C^\infty_V(F)$ vérifiant

$$g^\#(z^\#) = 0, \quad dg^\#_{z^\#} = \xi^\#_H \qquad \text{et} \qquad \alpha^\#(z^\#) = \eta^\#.$$

où $g^{\#}$ et $\alpha^{\#}$ sont les relevées à $\rho^{-1}(V)$ de g et α.

Puisque la restriction de $D^{\#}$ à $C^{\infty}_{G,\rho^{-1}(V)}(E^{\#}/F^{\#})$ est égale à D on a

$$\sigma(D^{\#})(z^{\#},\xi_H^{\#},\eta^{\#}) = \frac{1}{m!} D^{\#}(g^{\#m}\alpha^{\#})(z^{\#})(\eta^{\#})$$

$$= \frac{1}{m!} \rho_*^{-1}\left[D(g^m\alpha)(z)(\eta)\right]$$

$$= \rho_*^{-1}\left[\sigma(D)(z,\xi)(\eta)\right]$$

D'où

$$A_{D^{\#}}(z^{\#},\xi_H^{\#},\eta^{\#}) = A_D(z,\xi,\eta).$$

Comme $A_D(z,\xi,\cdot)$ est définie positive pour tout $\xi \neq 0$ et basique et que $\xi_H^{\#} \neq 0$ si et seulement si $\xi \neq 0$, $A_{D^{\#}}(z^{\#},\xi_H^{\#},\cdot)$ est définie positive pour tout $\xi_H^{\#} \in H_z^*$ non nul i.e. $D^{\#}$ est fortement H^*-elliptique. ∎

Ceci n'est malheureusement pas suffisant pour appliquer le théorème 2.6.9. car $D^{\#}$ n'est pas fortement transversalement elliptique. Nous allons le compléter à cet effet.

Les champs fondamentaux $Q_1,\ldots,Q_N$ de l'action de G sur $M^{\#}$ définissent des opérateurs différentiels d'ordre 1 basiques et G-invariants qu'on notera encore $Q_1,\ldots,Q_N$. On pose

$$Q' = \Big(\sum_{j=1}^{N} Q_j\bar{Q}_j\Big)^{m'} \quad , \quad Q = (-1)^{m'}\, Q' \qquad \text{et} \qquad D' = D^{\#} + Q$$

où $\bar{Q}_j$ est le conjugué complexe de Q_j et $m = 2m'$ est l'ordre de D.

2.7.6. <u>Proposition</u>. L'opérateur Q est fortement V^*-elliptique et est nul sur $C_G^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$. ∎

<u>Démonstration</u> : Soit $(g_1,\ldots,g_N)$ un système de coordonnées locales au voisinage d'un point $z \in M^{\#}$ dans la fibre de $\rho : M^{\#} \to M$ telles que pour tout $j = 1,\ldots,N$

l'opérateur Q_j s'écrit $Q_j = b_j \frac{\partial}{\partial g_j}$ où b_j est une fonction. On a alors

$$Q = \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{N} b_j \, \bar{b}_j \, \frac{\partial}{\partial g_j} \, \overline{\frac{\partial}{\partial g_j}} \right)^{m'}$$

où $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m' \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } m' \text{ est impair.} \end{cases}$

Soit $\xi^{\#}_V = (\xi^{\#}_{V1}, \ldots, \xi^{\#}_{VN})$ un vecteur de V_z. Il est alors facile de voir que pour tout vecteur $\eta^{\#}$ de $E^{\#}_{z^{\#}}$ et quelle que soit la parité de m' on a

$$A_Q(z^{\#}, \xi^{\#}_V, \eta^{\#}) = \sum_{k,\ell} h^{\#}_{k\bar{\ell}}(z^{\#})(\xi^{\#}_k)^{2m'} \eta^{\#}_k \, \bar{\eta}^{\#}_{\bar{\ell}}$$

i.e. la forme quadratique $A^{\#}_Q(z^{\#}, \xi^{\#}_V, \cdot)$ a pour matrice

$$A = \Xi \circ h^{\#}$$

où $h^{\#}$ est la matrice de la métrique hermitienne sur $E^{\#}$ et Ξ la matrice diagonale

$$\Xi = \begin{pmatrix} (\xi^{\#}_{V1})^{2m'} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\xi^{\#}_{VN})^{2m'} \end{pmatrix}$$

Comme $h^{\#}$ est une métrique hermitienne elle est définie positive ; en plus tous les coéfficients de Ξ sont positifs. Donc $A_Q(z^{\#}, \xi^{\#}_V, \cdot)$ est définie positive pour tout $\xi^{\#}_V \in V^{*}_{z^{\#}}$ non nul.

Le fait que Q est nul sur $C^{\infty}_G(E^{\#}/F^{\#})$ découle de la définition même d'une section basique invariante. ■

Soit maintenant $\xi \in T^{*}_{z^{\#}} M^{\#}$ un covecteur basique non nul. On a $\xi^{\#} = \xi^{\#}_H + \xi^{\#}_V$ où $\xi^{\#}_H \in H^{*}_{z^{\#}}$ et $\xi^{\#}_V \in V^{*}_{z^{\#}}$

$$A_{D'}(z^{\#},\xi^{\#},\cdot) = A_{D^{\#}}(z^{\#},\xi_H^{\#},\cdot) + A_Q(z^{\#},\xi_V^{\#},\cdot)$$

On déduit immédiatement des propositions 2.7.6 et 2.7.6 que $A_{D'}(z^{\#},\xi^{\#},\cdot)$ est définie positive i.e. que D' est fortement transversalement elliptique. Il est basique, et invariant agissant sur $C^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$.

Comme pour $\alpha^{\#} \in C_G^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$ on a $Q\alpha^{\#} = 0$, la restriction de D' à $C_G^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$ est égale à D. D'autre part l'adjoint D'^{*} de D' est la somme du relevé de l'adjoint de D et de l'adjoint de Q.

Le théorème 2.6.9. appliqué à D' donne

i) l'espace vectoriel $\mathcal{H}(E^{\#}/F^{\#}) = \operatorname{Ker} D'$ est de dimension finie ;

ii) on a une décomposition orthogonale $C^{\infty}(E^{\#}/F^{\#}) = \mathcal{H}(E^{\#}/F^{\#}) \oplus \operatorname{Im} D'^{*}$.

En se restreignant à $C_G^{\infty}(E^{\#}/F^{\#})$ et en raisonnant de la même manière qu'en 1.1.5, on obtient finalement le

2.7.7. Théorème.

i) L'espace vectoriel $\mathcal{H}(E/F)$ est de dimension finie ;

ii) On a une décomposition orthogonale $C^{\infty}(E/F) = \mathcal{H}(E/F) \oplus \operatorname{Im} D^{*}$. ■

Ce théorème montre que D est de Fredholm. C'est donc un opérateur à indice

$$\operatorname{ind}_F(D) = \dim \operatorname{Ker} D - \dim \operatorname{Ker} D^{*}.$$

2.7.8. Problème. Calculer cet entier en fonction d'invariants transverses.

3. *Exemples*.

Nous allons donner quelques exemples pour illustrer les résultats que nous venons d'obtenir.

Soit M une variété compacte, connexe munie d'un feuilletage riemannien F de codimension n (réelle ou complexe suivant le cas) et transversalement orientable. La métrique riemannienne sur le fibré normal νF définit sur son complexifié

$\nu F_{\mathbb{C}}$ une métrique hermitienne invariante le long des feuilles. La connexion associée fait de $\nu F_{\mathbb{C}}$ un F-fibré hermitien.

Dans toute la suite le feuilletage F sera supposé homologiquement orientable i.e. l'espace vectoriel de cohomologie basique en dimension maximum est non nul. Pour la dualité de Poincaré et la dualité de Serre. Cette condition $H^{\mathrm{cod}F}(M/F)\neq 0$ est nécessaire. C'est en fait une telle condition qui traduit la bonne notion d'"orientabilité de l'espace des feuilles $B = M/F$". L'orientabilité transverse de F n'est malheureusement pas suffisante comme le montre le flot transversalement de Lie de groupe GA sur le fibré hyperbolique T_A^3 (cf. III. 1.4.5).

3.1. *Le complexe de de Rham basique.*

On pose $E = \Lambda^r \nu^* F_{\mathbb{C}}$ où r est un entier tel que $0 \leq r \leq \mathrm{cod}_{\mathbb{R}} F$. On obtient ainsi un F-fibré hermitien sur M. Les sections basiques de E ne sont rien d'autres que les r-formes différentielles basiques à valeurs complexes. On notera $\Omega^r(M/F,\mathbb{C})$ l'espace de ces formes différentielles.

3.1.1. L'opérateur $\bar{*}$.

L'opérateur $* : \Omega^r(M/F) \to \Omega^{n-r}(M/F)$ défini en III 2.2.3 par la métrique riemannienne transverse à F, s'étend par linéarité en un opérateur

$$\bar{*} : \Omega^r(M/F,\mathbb{C}) \to \Omega^{n-r}(M/F,\mathbb{C})$$

qui est en fait un isomorphisme.

3.1.2. Produit scalaire sur $\Omega^r(M/F,\mathbb{C})$.

Soient $\alpha,\beta \in \Omega^r(M/F,\mathbb{C})$. Alors $\alpha \wedge \bar{*}\beta$ est un élément de $\Omega^n(M/F,\mathbb{C})$. Pour tout $j = 1,\dots,N$ considérons la 1-forme basique θ^j duale du champ fondamental Q_j et

$$\chi = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^N$$

la forme caractéristique du fibré principal $G = SO(n) \to M^{\#} \xrightarrow{\rho} M$. La forme différentielle $\rho^{*}(\alpha \wedge \bar{*} \beta) \wedge \chi$ est basique et invariante sur $M^{\#}$ de degré $n+N =$ cod $F^{\#}$. On définit alors le produit scalaire de α et β par

$$<\alpha,\beta> = \int_W \bar{I}(\rho^{*}(\alpha \wedge \bar{*} \beta) \wedge \chi)$$

où $\bar{I}$ est l'extension complexe de l'homomorphisme

$$I : \Omega^{n+N}(M/F) \to \Omega^{\dim W}(W)$$

défini en III.2.2.2 et W est la variété basique de $F^{\#}$.
L'espace $\Omega^r(M/F,\mathbb{C})$ est muni ainsi d'une structure préhilbertienne.

3.1.3. Le Laplacien basique.

Soit $\delta : \Omega^r(M/F,\mathbb{C}) \to \Omega^{r-1}(M/F,\mathbb{C})$ l'opérateur défini par $\delta = (-1)^r \bar{*}^{-1} d \bar{*}$. En procédant comme en III. 3.3.5 on montre que δ est l'adjoint de d pour le produit scalaire $< , >$.
L'opérateur $\Delta = d\delta + \delta d$ est basique et auto-adjoint. Sur la variété quotient locale il coïncide avec le laplacien usuel défini à l'aide de la métrique induite. Il est donc fortement transversalement elliptique. D'après le théorème 2.7.7 on a :

3.1.4. Théorème.

i) l'espace vecotriel $\mathcal{H}^r(M/F,\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} \Delta$ est de dimension finie,

ii) on a une décomposition orthogonale $\Omega^r(M/F,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^r(M/F,\mathbb{C}) \oplus \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} \delta$ ∎

L'espace vectoriel $H^r(M/F,\mathbb{C})$ de cohomologie basique à coefficients complexes s'identifie à $\mathcal{H}^r(M/F,\mathbb{C})$. Il est donc de dimension finie. D'autre part l'opérateur $\bar{*}$ induit un isomorphisme

$$\mathcal{H}^r(M/F,\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}^{n-r}(M/F,\mathbb{C})$$

D'où le

3.1.5. Théorème de dualité de Poincaré. Pour tout $r = 0,\dots,n$ on a un isomorphisme

$$H^r(M/F,\mathbb{C}) \simeq H^{n-r}(M/F,\mathbb{C}) \blacksquare$$

3.2. Le complexe de Dolbeault basique.

Supposons que F est transversalement holomorphe. Alors le fibré $\nu F_{\mathbb{C}} = F \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ hérite d'une structure complexe dont on notera J l'automorphisme associé. La métrique riemannienne transverse h définit une métrique hermitienne $\tilde{h}(\cdot,\cdot) = h(\cdot,\cdot) + h(J\cdot,J\cdot)$ sur $\nu F_{\mathbb{C}}$ invariante le long des feuilles et en fait un F-fibré hermitien. Dans ce cas on dira que le feuilletage F est hermitien.

On a une décomposition en somme directe

$$\nu F_{\mathbb{C}} = \nu F_{(1,0)} \oplus \nu F_{(0,1)}$$

où $\nu F_{(1,0)}$ et $\nu F_{(0,1)}$ sont les sous-fibrés propres associés respectivement aux valeurs propres i et $-i$ de J. On a alors une décomposition du fibré en algèbres extérieures

$$\Lambda^r \nu^* F_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}$$

où $\Lambda^{p,q} = \Lambda^p \nu^* F_{(1,0)} \otimes \Lambda^q \nu^* F_{(0,1)}$. On pose $\Lambda^{p,q} = E$. C'est un F-fibré hermitien.

3.2.1. Définition. Une section basique de E est appelée forme différentielle basique de type (p,q). ■

On notera $\Omega^{p,q}(M/F,\mathbb{C})$ l'espace de telles formes différentielles. On a de manière évidente :

$$\Omega^r(M/F,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M/F,\mathbb{C})$$

Sur les formes basiques $\Omega^r(M/F,\mathbb{C})$ la différentielle d se décompose en la somme de deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ respectivement de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$. On obtient un complexe différentiel

$$0 \to \Omega^{p,0}(M/F,\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(M/F,\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \to \Omega^{p,n}(M/F,\mathbb{C}) \to 0$$

qu'on appellera le complexe de Dolbeault basique du feuilletage F. Son homologie sera appelée la cohomologie de Dolbeault basique de F.

3.2.2. L'opérateur Δ''

L'opérateur $\bar{*}$ défini en 3.1.1 induit un isomorphisme

$$\bar{*} : \Omega^{p,q}(M/F,\mathbb{C}) \to \Omega^{n-p,n-q}(M/F,\mathbb{C})$$

On pose $\bar{\delta} = -\bar{*}\partial\bar{*}$. On vérifie facilement que $\bar{\delta}$ est l'adjoint de $\bar{\partial}$ pour le produit scalaire $<\ ,\ >$. On en déduit que l'opérateur basique $\Delta'' = \bar{\partial}\bar{\delta}+\bar{\delta}\bar{\partial}$ est auto-adjoint. Une écriture locale de Δ'' montre comme dans le cas de Δ que c'est un opérateur fortement transversalement elliptique. D'après 2.7.7. on a le

3.2.3. Théorème.

i) L'espace vectoriel $H^{p,q}(M/F,\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}\ \Delta''$ est de dimension finie ;

ii) On a une décomposition orthogonale
$\Omega^{p,q}(M/F,C) = H^{p,q}(M/F,C) \oplus \mathrm{Im}\ \bar{\partial} \oplus \mathrm{Im}\ \bar{\delta}$. ■

L'espace vectoriel $H^{p,q}(M/F,\mathbb{C})$ s'identifie à $H^{p,q}(M/F,\mathbb{C})$; il est donc de dimension finie. D'autre part $\bar{*}$ induit un isomorphisme

$$\bar{*} : H^{p,q}(M/F,\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H^{n-p,n-q}(M/F,\mathbb{C}).$$

D'où le

3.2.4. Théorème de dualité de Serre [55].

Pour tout $p,q = 0,\dots,n$ on a un isomorphisme

$$H^{p,q}(M/F,\mathbb{C}) \simeq H^{n-p,n-q}(M/F,\mathbb{C})\ ■$$

3.2.5. Remarque. Les mêmes théorèmes de décomposition et de dualité peuvent être obtenus en prenant les formes différentielles à valeurs dans un F-fibré holomorphe.

3.3. *Le cas transversalement kählerien.*

La métrique hermitienne h sur $\nu F_{\mathbb{C}}$ vérifie $\tilde{h}(\cdot,\cdot) = \tilde{h}(J\cdot,J\cdot)$. On pose

$$\omega(\cdot,\cdot) = \tilde{h}(J\cdot,\cdot).$$

On définit ainsi une 2-forme différentielle sur M.

3.3.1. Proposition. La forme ω est basique, de type (1,1) et réelle. ∎

Démonstration : Soit $(z_1,\dots,z_n)$ un système de coordonnées locales transverses à $\mathcal{F}$. La métrique $\tilde{h}$ s'écrit

$$\tilde{h}(z) = \sum_{k,\ell} \tilde{h}_{k\bar{\ell}}(z)\, dz_k\, d\bar{z}_\ell$$

D'où :

$$\omega(z) = i \sum_{k,\ell} \tilde{h}_{k\bar{\ell}}(z)\, dz_k \wedge d\bar{z}_\ell$$

On voit donc que ω est basique et de type (1,1).

Comme $h_{k\bar{\ell}} = h_{\ell\bar{k}}$ et $d\bar{z}_k \wedge dz_\ell = -dz_\ell \wedge d\bar{z}_k$, on obtient :

$$\omega(z) = i \sum h_{\ell\bar{k}}(z)\, dz_\ell \wedge d\bar{z}_k$$

i.e. $\overline{\omega(z)} = \omega(z)$. La forme ω est donc réelle.

3.3.2. Définition. On dira que $\mathcal{F}$ est transversalement kählerien si ω est fermée et dans ce cas on l'appellera la forme de Kähler du feuilletage $\mathcal{F}$. ∎

3.3.3. Exemples.

i) Tout feuilletage hermitien de codimension 1 est transversalement khälerien.

ii) Tout feuilletage de Lie de groupe $\mathbb{C}^n$ est transversalement kählerien.

iii) On peut bien entendu construire d'autres exemples de tels feuilletages en suspendant des groupes d'automorphismes de variétés kähleriennes.

iv) Soient $\theta_1,\dots,\theta_{n+1}$ des nombres réels et considérons le flot ϕ sur $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ engendré par le champ holomorphe X donné au point $z = (z_1,\dots,z_{n+1})$ par

$$X(z) = A(z)$$

où $$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & e^{i\theta_{n+1}} \end{pmatrix}$$

Ce flot préserve la métrique kählérienne standard $h = \sum_{k=1}^{n+1} dz_k \cdot d\bar{z}_k$. Il est donc transversalement kählerien.

En chaque point $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, $X(z)$ engendre un plan réel

$$P_z = \{(x+iy) \cdot A(z) \ / \ x,y \in \mathbb{R}\}$$

D'autre part l'espace tangent T_z en z à la sphère unité $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \ \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|^2 = 1\}$ est donné par l'équation

$$\sum_{k=1}^{n+1} (\bar{z}_k Z_k + z_k \bar{Z}_k) = 0.$$

En remplaçant Z_k par $(x+iy)e^{i\theta_k} z_k$ pour tout $k = 1,\dots,n+1$ on obtient

$$P_z \cap T_z = \{(x+iy) \cdot A(z) \Big/ \sum_{k=1}^{n+1} (x \cos \theta_k - y \sin \theta_k) |z_k|^2 = 0\}$$

Pour un choix convenable des (θ_k) le sous-espace $P_z \cap T_z$ reste constamment de rang réel 1 sur $\mathbb{S}^{2n+1}$. Il définit donc un flot $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{S}^{2n+1}$ transversalement kählérien pour la métrique induite et de codimension complexe n.

Géométriquement on peut dire qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ hermitien est transversalement kählérien si au voisinage de tout point de M on peut trouver un système de coordonnées complexes $(z_1,\dots,z_n)$ transverses à $\mathcal{F}$ et qui soient géodésiques i.e. la métrique h coïncide à l'ordre 2 avec la métrique euclidienne $2 \sum_k dz_k \cdot d\bar{z}_k$.

La cohomologie de Dolbeault basique d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement kählerien et homologiquement orientable sur une variété compacte M possède les mêmes propriétés que la cohomologie de Dolbeault ordinaire sur une variété kählérienne compacte.

Soit $(M,\mathcal{F})$ un tel feuilletage. On notera ω sa forme de Kähler et $\bar{\vartheta} = -\bar{*}\partial\bar{*}$ l'adjoint de $\bar{\partial}$ sur $\Omega^{p,q}(M/\mathcal{F}, \mathbb{C})$.

On définit un opérateur L sur $\Omega^r(M/\mathcal{F}, \mathbb{C})$ à valeurs dans $\Omega^{r+2}(M/\mathcal{F}, \mathbb{C})$ par

$$L\alpha = \alpha \wedge \omega$$

et son adjoint $\Lambda = -\bar{*}L\bar{*}$.

3.3.4. Lemme. On a

i) $\Lambda\partial - \partial\Lambda = -i\bar{\vartheta}$

ii) $\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda = i\vartheta$

iii) $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}\vartheta + \vartheta\bar{\partial} = 0.$ ∎

La démonstration est similaire à celle du cas classique qu'on pourra trouver par exemple dans [26] ou [29].

Du lemme 3.3.4 on déduit la

3.3.5. Proposition. On a

i) $\Delta = 2\Delta''$

ii) Le laplacien basique Δ commute avec les opérateurs L et Λ. ∎

On obtient finalement le

3.3.6. Théorème. Pour tout feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement kählerien et homologiquement orientable sur une variété compacte M on a

i) la r-forme basique $\alpha = \sum\limits_{p+q=r} \alpha_{p,q}$ est harmonique si et seulement si toute composante $\alpha_{p,q}$ de type (p,q) l'est ; d'où

$$H^r(M/\mathcal{F}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M/\mathcal{F}, \mathbb{C}) ;$$

ii) La conjugaison induit un isomorphisme $H^{p,q}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \simeq H^{q,p}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$;

iii) Pour tout $p = 0,\dots,n$ la forme ω^p est harmonique ; donc $H^{p,p}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \neq 0$. ∎

On peut remarquer que toute p-forme basique holomorphe est harmonique. Pour $p = 1$, une telle forme sera appelée, par analogie au cas classique, <u>différentielle basique abélienne de première espèce</u>.

Posons $b^r(M/F) = \dim_{\mathbb{C}} H^r(M/F,\mathbb{C})$ et $h^{p,q}(M/F) = \dim H^{p,q}(M/F,\mathbb{C})$. Alors pour $n = 1$ on a $h^{1,0}(M/F) = \frac{1}{2} b^1(M/F)$. Le nombre de différentielles basiques abéliennes de première espèce linéairement indépendantes ne dépend donc que de la structure transverse différentiable. En particulier si $H^1(M,\mathbb{C}) = 0$ on a $b^1(M/F) = 0$ (car l'application canonique $H^1(M/F,\mathbb{C}) \to H^1(M,\mathbb{C})$ est injective) et donc de telles différentielles non nulles n'existent pas.

3.3.7. <u>Décomposition de Lefschetz basique</u>.

Notons $L^k : \Omega^r(M/F,\mathbb{C}) \to \Omega^{r+2k}(M/F,\mathbb{C})$ l'opérateur défini par

$$L^k\alpha = \begin{cases} \alpha \wedge \omega^k & \text{si } k \geq 1 \\ \alpha & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

et $H_o^r(M/F,\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(\Lambda : \Omega^r(M/F,\mathbb{C}) \to \Omega^{r-2}(M/F,\mathbb{C}))$. Un élément de $H_o^*(M/F,\mathbb{C})$ est dit <u>primitif</u>. Il est clair que $H_o^r(M/F,\mathbb{C}) = H^r(M/F,\mathbb{C})$ pour $r = 0$ ou 1. On a alors

i) $L^k : H^{n-k}(M/F,\mathbb{C}) \to H^{n+k}(M/F,\mathbb{C})$ est un isomorphisme ;

ii) $H^r(M/F,\mathbb{C}) = \bigoplus_k L^k H_o^{r-2k}(M/F,\mathbb{C})$. ∎

La démonstration classique se transpose complètement (voir [29] ou [59]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH, M.F. : Elliptic operators and compact groups. Lecture Notes in Math, n°401 (1974).

[2] BARRE, R. : De quelques aspects de la théorie des Q-variétés analytiques et différentielles. Ann. Inst. Fourier de Grenoble, 23 (1973), 227-312.

[3] BOTT, R., TU, L. : Differential forms in Algebraic Topology. G.T.M. n°82, Springer-Verlag (1982).

[4] CARRIERE, Y. : Flots riemanniens - Journées sur les structures transverses des feuilletages, Toulouse, Astérisque n°116 (1984).

[5] CONNES, A. : A survey of foliations and operator algebras. Proceedings of Symp. in Pure Math. Vol. 38 (1982).

[6] DRISSEN, H. : Sur la cohomologie basique des feuilletages de Lie et des feuilletages transversalement parallélisables. Thèse de 3ème cycle, Université de Montpellier II (1976).

[7] DUCHAMP, T., KALKA, M. : Deformation theory for holomorphic foliations. J. of Diff. Geom. 14, (1979), 317-337.

[8] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Cohomologie feuilletée - Exemples de calculs. Thèse de 3ème cycle, Université de Lille I (1980).

[9] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Sur la cohomologie feuilletée. Compositio Mathematica, 49 (1983), 195-215.

[10] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Equation de la chaleur sur les espaces singuliers. C.R. Acad. Sc. de Paris, t. 303, Série I, n°6 (1986).

[11] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Stabilité des V-variétés kähleriennes. Pub. IRMA - Lille Vol 4 - n°V (1986).Soumis pour publication Lecture Notes.

[12] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Dualité pour les feuilletages transversalement holomorphes. Pub. IRMA - Lille - Vol 4 n°III (1986).Soumis à Manuscripta Mathematica.

[13] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Opérateurs transversalement elliptiques sur les feuilletages riemanniens - Preprint Lille (1986).

[14] EL KACIMI-ALAOUI, A. : Courbure de Ricci basique et première classe de Chern d'un feuilletage transversalement kählerien. Pub. IRMA - Lille Vol. V n°5 (1986).

[15] EL KACIMI-ALAOUI, A., HECTOR, G. : Décomposition de Hodge sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien. C.R. Acad. Sc. de Paris, t. 298, Série I, n°13, (1984).

[16] EL KACIMI-ALAOUI, A., HECTOR, G. : Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien. Ann. Inst. Fourier de Grenoble, 36, 3 (1986), 207-227.

[17] EL KACIMI-ALAOUI, A., SERGIESCU, V., HECTOR, G. : La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie. Math. Z., 188, (1985), 593-599.

[18] EL KACIMI-ALAOUI, A., TIHAMI, A. : Cohomologie bigraduée de certains feuilletages. A paraître au Bulletin de la Société Mathématique de Belgique.

[19] FEDIDA, E. : Sur les feuilletages de Lie. C.R. Acad. Sc. de Paris t. 272 (1971), 999-1002.

[20] GHYS, E. : Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension 1. Comment. Math. Helv. 58, (1983) 543-572.

[21] GHYS, E. : Un feuilletage analytique dont la cohomologie basique est de dimension infinie. Pub. IRMA - Lille, Vol. VII, Fas. I (1985).

[22] GHYS, E., SERGIESCU, V. : Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. Topology Vol. 19 (1980), 179-197.

[23] GILKEY, P.B. : The index theorem and the heat equation. Mathematics Lectures Series, 4, Publish or Perish, Inc. Boston (1974).

[24] GIRBAU, J., HAEFLIGER, A., SUNDARARAMAN, D. : On deformations of transversely holomorphic foliations - J. Für die reine und Angewendte Mathematik, Band 345, (1983), 122-147.

[25] GODEMENT, R. : Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958).

[26] GOLDBERG, S. : Curvature and Homology. Dover Publications, Inc., New-York.

[27] GOMEZ-MONT, X. : Transversal holomorphic structures. J. of Diff. Geom. 15, (1980), 161-185.

[28] GREUB, W., HALPERIN, S., VANSTONE, R. : Connections, Curvature and Cohomology. Academic Press (1973-1975).

[29] GRIFFITHS, P., HARRIS, J. : Principles of Algebraic Geometry. Pure and Applied Mathematics - Interscience Series of Texts.

[30] GRIFFITHS, P., MORGAN, J. : Rationnal Homotopy Theory and differential forms. Birkhäuser Verlag (1981).

[31] HAEFLIGER, A. : Homotopy, Integrability. Lecture Notes in Math ; n°197, Amsterdam.

[32] HAEFLIGER, A. : Pseudo-groups of local isometries. In Differential Geometry, Santiago de Compostela, sept. 1984, 174-197. L. Cordero Editor, Research notes 131, Pitman 1985.

[33] HAMILTON, R.S. : Deformation Theory of foliations. Preprint Cornell University, New-York.

[34] HEITSCH, J.L. : A cohomology of foliated manifolds. Comment. Math. Helv. 50, (1975), 197-218.

[35] HERMANN, M. : Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des roattions. Publ. Math I.H.E.S., 49 (1972), 5-233.

[36] KAMBER, F., TONDEUR, P. : Duality for Riemannian foliations. Proc. Sym. Pure Math. Vol. 40 (1982).

[37] KAMBER, F., TONDEUR, P. : Foliated Bundles and Characteristic classes. Lecture Notes in Math., n°493 Springer-Verlag (1975).

[38] KAMBER, F., TONDEUR, P. : Hodge de Rham theory for Riemannian foliations. Preprint (1986).

[39] KODAIRA, K., SPENCER, D.C. : Multifoliate Structures. Ann. of Math. 74 (1961), 52-100.

[40] LAZAROV, C. : An Index Theorem for foliations. Illinois J. of Math. Vol. 30 n°1 (1986).

[41] MACIAS, E. : Las cohomologias diferenciable, continua y discreta de una variedad foliada. Publicaciones n°60 del Departemento de Geometria y Topologia Universidad de Santiago de Compostela.

[42] MASA, X. : Sucesion espectral de cohomologia associada a variedades foliadas. Applicaciones. Publicaciones n°19 del Departamento de Geometria y Topologia. Universidad de Santiago de Compostela.

[43] MOLINO, P. : Géométrie globale des feuilletages riemanniens. Pro. Kon. Neder. Akad., Ser. A, 1, 85 (1982), 45-76.

[44] MOLINO, P. : Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projetable. Topology 12, (1973), 317-325.

[45] MOSTOW, M.A. : Continuous cohomology of spaces with two topologies. Memoirs of the American Mathematical Society Number 175.

[46] PALAIS, R.S. : Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem. Ann. of Math. Studies n°57, Princeton University Press (1965).

[47] REINHART, B.L. : Foliated manifolds with bundle-like metrics. Ann. of Math., 69 (1959), 119-132.

[48] REINHART, B.L. : Harmonic integrals on almost product manifolds. Trans. A.M.S., 88 (1958), 243-276.

[49] REINHART, B.L. : Harmonic integrals on foliated manifolds. Am. J. of Math., (1959), 529-586.

[50] ROGER, C. : Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages. Thèse Orsay (1974).

[51] SARKARIA, K.S. : The de Rham cohomology of foliated manifolds. Thesis, Stony Brook (1974).

[52] SARKARIA, K.S. : Non degenerescence of some spectral sequences. Ann. Inst. Fourier de Grenoble, 34, 1, (1984), 39-46.

[53] SCHWARZ, G.S. :On the de Rham cohomology of the leaf space of foliation. Topology 13, (1974), 185-187.

[54] SERGIESCU, V. : Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens. Ann. Inst. Fourier de Grenoble, 53, 3 (1985), 137-158.

[55] SERRE, J.P. : Un théorème de dualité. Comment. Math. Helv., 29, (1955), 9-26.

[56] STERNBERG, S. : Local C^n transformations of the real line . Duke Math. J. 24 (1957), 97-102.

[57] VAISMAN, I. : Variétés riemanniennes feuilletées. Czechosl. Math. J. 21 (1971), 46-75.

[58] VAISMAN, I. : Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes feuilletées. C.R. Acad. Sc., Paris t. 273 (1971), 1067-1070.

[59] WELLS, R.C. : Differential Analysis on Complex Manifolds. G.T.M. n°65, Springer-Verlag (1979).

DEUXIEME THESE

REGULARITE AU BORD DU $\bar{\partial}$

PAR LA METHODE DES NOYAUX

RESUMÉ

La rigidité d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M tient à la fois de la géométrie des feuilles, la structure transverse et la topologie de la variété ambiante. Deux points de vue sont abordés dans ce travail :

i) Un point de vue "tangent et transverse" dans lequel nous développons des calculs de certains invariants de nature cohomologique : nous étudions diverses cohomologies de la variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$ à valeurs dans des faisceaux naturellement définis sur l'espace transverse à $\mathcal{F}$.

ii) Un point de vue "purement transverse". En effet depuis le début de la théorie des feuilletages une question s'est posée explicitement ou implicitement : dans quelle mesure l'espace des feuilles $B = M/\mathcal{F}$ ressemble-t-il à une variété compacte ? Des exemples simples montrent qu'en général B n'est pas une variété. On peut cependant y définir les objets géométriques usuels ; ils correspondent à leurs analogues sur M invariants le long des feuilles. Notre résultat principal du second volet de cette thèse est alors le suivant : soient $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété compacte M et E un fibré vectoriel complexe muni d'une connexion basique et d'une métrique hermitienne invariante par le pseudo-groupe d'holonomie et compatible avec cette connexion. Alors tout opérateur différentiel basique agissant sur les sections basiques de E (i.e parallèles le long des feuilles) fortement transversalement elliptique est de Fredholm. De là on déduit que tout complexe basique transversalement elliptique admet une décomposition du type Hodge. En particulier on obtient des théorèmes de finitude et de dualité de Poincaré pour la cohomologie basique, un théorème de dualité de Serre pour la cohomologie de Dolbeault basique si $\mathcal{F}$ est hermitien . S'il est en plus transversalement kählerien et homologiquement orientable, alors toutes les belles propriétés cohomologiques des variétés kählériennes compactes (structures de Hodge, décomposition de Lefschetz ...) se transposent à l'espace B. Ce qui montre que l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien sur une variété compacte est une "variété compacte" du point de vue de l'Analyse Globale.

Mots clés : Feuilletages - forme basique - faisceau - cohomologie - suite spectrale - $\mathcal{F}$-fibré - section basique - opérateur - ellipticité transverse.