N° d'ordre : 1365

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET
TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3e CYCLE
SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

SUQUET Charles

ESPACES AUTOREPRODUISANTS ET MESURES ALEATOIRES

Membres du Jury : D. BOSQ, Président
P. JACOB, Rapporteur
Ph. ANTOINE,
A. BERLINET (Université de Grenoble I), } Examinateurs

Soutenue le 10 Décembre 1986

Monsieur le Professeur Denis BOSQ me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

Monsieur le Professeur Pierre JACOB m'a proposé le sujet de cette étude et a guidé mes pas dans cette initiation à la recherche. Sa patience, sa grande disponibilité et les encouragements qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer m'ont été d'un secours précieux. Ses suggestions, ses questions et ses critiques toujours constructives sont à la base de la plupart des résultats obtenus. Ma reconnaissance envers lui est profonde.

Monsieur le Professeur Philippe ANTOINE a accepté de faire partie du Jury. Je lui adresse mes remerciements les plus vifs.

Monsieur Alain BERLINET, Maître de Conférences à l'Université de Grenoble I, a bien voulu juger ce travail. Je l'en remercie très sincèrement.

Je souhaite que cette thèse puisse être considérée comme un hommage respectueux à la mémoire de Monsieur Christian GUILBART dont les travaux m'ont servi de point de départ et de référence constante.

Je tiens à remercier tous les enseignants de l'U.E.R. de Mathématiques dont j'ai pu suivre les cours, malheureusement souvent de façon trop partielle, ces dernières années et plus particulièrement Messieurs Marc ROGALSKI et Alain PAJOR qui m'ont fait découvrir l'analyse fonctionnelle.

J'adresse mes remerciements les plus cordiaux à Madame Arlette LENGAIGNE qui a dactylographié le texte de cette thèse pour le soin, la rapidité et la gentillesse dont elle a fait preuve. Que soient également remerciées toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse.

I N T R O D U C T I O N

La définition d'une métrique euclidienne sur l'espace M des mesures à signes bornées est due à C. GUILBART qui a donné une étude générale des (pseudo)-produits scalaires sur M (cf. [9] et [10]). Cet auteur a notamment démontré que l'on pouvait toujours munir l'espace des mesures à signes bornées sur la tribu borélienne d'un espace métrique séparable d'un produit scalaire dont la topologie trace sur l'espace M^+ des mesures positives bornées soit la topologie faible. Les résultats obtenus dans cette étude ont été utilisés par C. GUILBART essentiellement en théorie de l'estimation.

L'objectif du présent travail est d'étudier la possibilité de bâtir une théorie des mesures aléatoires à l'aide de la topologie définie sur l'espace des mesures par un produit scalaire.

On commence pour cela par donner une construction directe d'un produit scalaire sur M à partir d'une suite de fonctions caractérisant les mesures. Ce produit scalaire nous permet ensuite de définir un espace de Hilbert autoreproduisant dans lequel s'injecte isométriquement l'espace des mesures (cf. I.1. et I.2.). L'espace des mesures peut ainsi être identifié à un sous-espace vectoriel dense de l'espace autoreproduisant associé.

On étudie ensuite la caractérisation des éléments de l'espace autoreproduisant et on montre que la suite de fonctions caractérisant les mesures utilisée pour construire son noyau est totale dans cet espace (cf. I.3.). Moyennant l'adjonction d'une hypothèse supplémentaire du type indépendance linéaire, on prouve que cette suite constitue une base hilbertienne de l'espace autoreproduisant (cf. I.4.). On utilise alors ce résultat pour obtenir des bases hilbertiennes d'expression simple pour des exemples d'espaces autoreproduisants de fonctions sur une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ (cf. I.5.).

Trois questions essentielles se posent en vue de l'étude des mesures aléatoires : la richesse en fonctions de l'espace autoreproduisant, la caractérisation des (images des) mesures parmi ces fonctions, la mesurabilité de l'espace des mesures par rapport à la tribu borélienne de son complété. Nous y répondons dans le cas où l'espace de base X est compact (resp. localement compact) avec un noyau continu (resp. continu tendant vers 0 séparément à l'infini) (cf. II).

Les résultats obtenus permettent ainsi de bâtir une théorie des mesures aléatoires à signes sur la tribu borélienne de l'espace X dans le cas le plus "usuel" où X est une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$.

La section III est consacrée à l'étude des hypothèses relatives à la topologie de X rendant possible la construction sur M d'un produit scalaire (comme au I) bien adapté à l'étude des mesures aléatoires. Les réponses partielles que nous apportons à ce problème nous conduisent à conjecturer que cette construction n'est envisageable que dans le cas où l'espace X est métrisable séparable.

Le problème de la mesurabilité des espaces M et M^+ dans la tribu borélienne du complété de M est traité au § IV.

On cherche ensuite une caractérisaiton des parties relativement compactes dans l'espace autoreproduisant et dans l'espace des mesures (cf. V). On en déduit des conditions suffisantes de relative compacité qui seront utilisées lors de l'étude de la convergence des suites de mesures aléatoires.

Dans la $2^{ème}$ partie consacrée aux mesures aléatoires, on met en oeuvre les résultats obtenus dans la première partie pour construire les mesures aléatoires comme variables aléatoires à valeurs dans un espace autoreproduisant . La donnée d'une mesure aléatoire équivaut ainsi à la donnée d'une loi de probabilité sur la tribu borélienne de l'espace autoreproduisant dont toute la masse soit concentrée sur le sous-espace vectoriel dense image isométrique de M (cf. VII). Les variables aléatoires réelles qui s'associent naturellement à une telle mesure aléatoire sont les intégrales des éléments de l'espace autoreproduisant par rapport à cette mesure. On étudie alors les divers modes de convergence des suites de mesures aléatoires en essayant systématiquement de les déduire des convergences selon le même mode de suites d'intégrales de ces mesures aléatoires (VIII, IX, X) . Une loi forte des grands nombres termine cette étude (XI).

PRINCIPALES NOTATIONS

- $|| \ ||_K$ et $< \, , \, >_K$ désignent respectivement la norme et le produit scalaire de l'espace autoreproduisant H_K associé au noyau K.

- $K(x,.)$ désigne la fonction réelle sur X définie par $\forall y \in X$, $K(x,.)(y) = K(x,y)$.

- $<h,.>$ désigne la forme linéaire continue associée à l'élément h d'un espace de Hilbert $(H, < \ >)$ par : $<h,.>(g) = <h,g> \quad \forall g \in H$.

- $|| \ ||_\infty$ désigne la norme de la borne supérieure : si f est une fonction réelle bornée sur X , $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in X} |f(x)|$.

- $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^+$) désigne toujours l'espace des mesures à signes (resp. positives) bornées sur la tribu borélienne de l'espace topologique X.

- $|\mu|$, μ^+ , μ^- désignent respectivement la variation totale, la partie positive et la partie négative (au sens de la décomposition de Hahn Jordan) de la mesure à signes bornée μ .

- δ_x désigne la mesure de Dirac au point x.

- $[g_1,\dots,g_n]$ désigne l'espace vectoriel de dimension finie engendrée par les n fonctions g_i $(1 \leq i \leq n)$.

- $\ell^2(\mathbb{N})$ désigne l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable.

- $C(X)$ désigne l'espace de Banach pour la norme $\|\ \|_\infty$ des fonctions réelles continues bornées sur X.

- $C_o(X)$ désigne l'espace de Banach pour la norme $\|\ \|_\infty$ des fonctions réelles continues et tendant vers zéro à l'infini sur l'espace localement compact X.

- $U(X)$ désigne l'espace de Banach pour la norme $\|\ \|_\infty$ des fonctions réelles uniformément continues bornées sur l'espace métrique X.

- Si F est un espace de Banach et F' son dual topologique, on note $\sigma(F,F')$ la topologie affaiblie de F (cf. [22] p. 286).

  En particulier : $f_n \xrightarrow{\sigma(F,F')} f \iff \forall \ell \in F' \quad \lim_{n\to+\infty} \ell(f_n) = \ell(f)$.

  Dans le cas où F est un espace de Hilbert H, nous noterons plus simplement $\sigma(H,H)$:

  $h_n \xrightarrow{\sigma(H,H)} h \iff \forall g \in H \ , \quad \lim_{n\to+\infty} \langle h_n - h, g\rangle = 0$.

- La convergence faible des suites de mesures bornées sera notée par $\Rrightarrow$:

  $\mu_n \Rrightarrow \mu \iff \forall f \in C(X) \ , \quad \lim_{n\to+\infty} \int_X f \, d\mu_n = \int_X f \, d\mu$.

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

ESPACE DES MESURES

ESPACE DE HILBERT AUTOREPRODUISANT ASSOCIE

NOTATIONS et DEFINITIONS.

On désignera par $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^+$) l'espace des mesures à signe (resp. positives) bornées sur un espace mesurable $(\mathcal{X},\mathcal{B})$. Sauf mention explicite du contraire, on considérera que $\mathcal{X}$ est un espace topologique et que $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne associée.

Pour alléger les écritures on notera :

$$\int f\, d\mu \quad \text{pour} \quad \int_{\mathcal{X}} f\, d\mu \qquad \text{et} \quad \int K\, d\mu \otimes \nu \quad \text{pour} \quad \int_{\mathcal{X}^2} K\, d\mu \otimes \nu \ .$$

Une fonction réelle K sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est dite noyau reproduisant si elle est symétrique et semi-définie positive :

- $\forall (x,y) \in \mathcal{X}^2 \qquad K(x,y) = K(y,x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{X}^n$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} a_i\, a_j\, K(x_i,x_j) \geq 0 \quad .$$

On sait qu'on peut associer à un tel noyau un espace de Hilbert autoreproduisant de fonctions réelles définies sur $\mathcal{X}$ c'est-à-dire un espace H_K de fonctions vérifiant :

- $\forall x \in \mathcal{X} \qquad K(x,.) \in H_K \qquad (K(x,.)$ désignant la fonction réelle définie sur $\mathcal{X}$ par : $K(x,.)(y) = K(x,y) \quad \forall y \in \mathcal{X}$) .
- $\forall x \in \mathcal{X} \ , \quad \forall f \in H_K \qquad f(x) = \langle f,K(x,.)\rangle \qquad$ (Propriété d'autoreproduction).

Pour le construire on définit sur l'espace des combinaisons linéaires finies des $K(x,.)$ un produit scalaire en posant

$(K(x,.), K(y,.)) = K(x,y)$. Parmi les complétés de H_o un seul est un espace autoreproduisant H_K de fonctions réelles sur X. H_K est l'ensemble des fonctions sur X qui sont limites simples sur X de suites d'éléments de H_o qui sont de Cauchy. (cf. Aronszajn "Theory of reproducing kernels" [2]).

Remarque : Conséquences de la propriété d'autoreproduction.

La propriété d'autoreproduction permet la transmission de certaines propriétés de K à tous les éléments de H_K. Citons en quelques-unes qui seront utilisées par la suite :

. Si K est borné alors tout élément de H_K est une fonction bornée sur X. En effet :

$$\sup_{x\in X} |f(x)| = \sup_{x\in X} |\langle f,K(x,.)\rangle| \leq \sup_{x\in X} (||f||_K \times ||K(x,.)||)$$

$$\leq \sup_{x\in X} (||f||_K\, K(x,x)^{1/2}) \leq ||f||_K \sup_{X^2} |K|^{1/2} .$$

Donc f est bornée et $\quad ||f||_\infty \leq (\sup_{X^2} |K|^{1/2})\ ||f||_K$

en notant : $\quad ||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Remarquons au passage que $\sup_{x\in X} K(x,x) = \sup_{(x,y)\in X^2} |K(x,y)|$.

En effet comme $K(x,y) = \langle K(x,.), K(.,y)\rangle$ on a par l'inégalité de Schwarz

$$|K(x,y)| \leq K(x,x)^{1/2}\, K(y,y)^{1/2} \leq \mathrm{Max}(K(x,x), K(y,y)) .$$

. Si K est continu (resp. uniformément continu) sur X^2 alors tout élément de H_K est une fonction continue (resp. uniformément continue) sur X. En effet on a la majoration :

$$|f(x)-f(y)| = |\langle f,K(x,.)\rangle - \langle f,K(y,.)\rangle| = |\langle f,K(x,.)-K(y,.)\rangle|$$

$$\leq ||f||_K\, ||K(x,.)-K(y,.)||_K = ||f||_K\, (K(x,x)+K(y,y)-2K(x,y))^{1/2} .$$

I - LES ESPACES $\mathcal{M}_K$ et H_K.-

I.1. - Construction d'un produit scalaire sur $\mathcal{M}$.

Nous ferons sur X l'hypothèse suivante et qui, sauf mention expresse du contraire, sera toujours supposée vérifiée dans la suite :

" Il existe une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables bornées $X \to \mathbb{R}$ qui caractérise les mesures à signe bornées :
Si $\int f_i \, d\mu = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ alors $\mu = 0$ " .

La caractérisation des espaces $(X,\mathcal{B})$ vérifiant cette hypothèse sera discutée ultérieurement (cf. III).

Quitte à remplacer les f_i par des homothétiques convenablement choisies on peut alors, sans que cela entraîne de restriction supplémentaire sur X, se ramener au cas où la série de fonctions

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)\, f_i(y)$$

converge uniformément par rapport à chaque variable (l'autre étant fixée) et où K ainsi défini est une fonction bornée (et mesurable) sur X^2 .

Pour tout couple (μ,ν) de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ on pose alors :

$$\langle\mu,\nu\rangle_K = \int_{X^2} K(x,y)\, \mu \otimes \nu\, (dx,dy) \quad .$$

Proposition (I.1.1.).-

$(\mathcal{M}, \langle\ \rangle_K)$ est un espace préhilbertien séparé (noté $\mathcal{M}_K$).

Démonstration : La bilinéarité et la symétrie de $< \, , \, >_K$ étant évidentes, il reste à prouver la définie positivité. Pour cela on établit la formule suivante :

$$\forall(\mu,\nu) \in M \times M \qquad \int_{X^2} K(x,y)\ \mu \otimes \nu\ (dx,dy) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_X f_i\, d\mu \int_X f_i\, d\nu \qquad (1)$$

En effet, si (1) est vraie on aura :

$$\int K\, d\mu \otimes \mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int f_i\, d\mu\right)^2 \geq 0 \quad \text{et} \int K\, d\mu \otimes \mu = 0 \Longrightarrow \int f_i\, d\mu = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

donc $\mu = 0$ puisque f_i caractérise les mesures.

Preuve de (1) :

En écrivant $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $\nu = \nu^+ - \nu^-$ on se ramène facilement au cas où μ et ν sont deux mesures positives.

Pour tout $x \in X$, les $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, f_i(y)$ sont uniformément bornées (par rapport à y) en effet on a la majoration :

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\, f_i(y)\right| \leq \sum_{i=0}^{n} (f_i(x)^2 + f_i(y)^2) \leq K(x,x) + K(y,y) \leq 2 \sup_{X^2} K$$

Le théorème de convergence dominée nous permet alors d'écrire :

$$\forall x \in X \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x) \int f_i\, d\nu = \int K(x,y)\ \nu(dy) \quad .$$

D'autre part :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left|\int f_i\, d\mu\right| \left|\int f_i\, d\nu\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int |f_i|\, d\mu \int |f_i|\, d\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \int |f_i \otimes f_i|\, d\mu \otimes \nu$$

(Fubini-Tonelli)

$$= \int \sum_{i=0}^{\infty} |f_i \otimes f_i|\, d\mu \otimes \nu \qquad \text{(Beppo-Lévi)}$$

$$\leq \int \left[\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)^2 + \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(y)^2\right] \mu \otimes \nu\ (dx,dy) = \int [K(x,x)+K(y,y)]\ \mu \otimes \nu\ (dx,dy) < +\infty$$

puisque μ, ν et K sont bornés.

Par conséquent en appliquant 2 fois le théorème de Fubini on a :

$$\int K(x,y)\ \mu \otimes \nu\ (dx,dy) = \int \left[\int K(x,y)\ \nu(dy)\right] \mu(dx) = \int \left[\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x) \int f_i\ d\nu\right] \mu(dx)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \int f_i\ d\mu \int f_i\ d\nu\ .$$

I.1.2. - Corollaire.-

Le noyau K est défini positif si la tribu $\mathcal{B}$ sépare les points.

Vérification : Il suffit de poser $\mu = \nu = \sum_{i\in I} a_i\ \delta_{x_i}$ avec I partie finie quelconque de $\mathbb{N}$ dans (1). En effet on a alors :

$\sum_{(i,j)\in I^2} a_i\ a_j\ K(a_i,a_j) = 0 \Longrightarrow \sum_{i\in I} a_i\ \delta_{x_i} = 0 \Longrightarrow \forall i \in I\ \ a_i = 0$ (δ_{x_i} est la mesure de Dirac au point x_i de X et les x_i sont supposés distincts).

I.1.3. - Remarque :

Dans [10] on trouve une étude générale des pseudo-produits scalaires sur l'espace M. Si l'on se limite au cas des produits scalaires sur M la construction donnée peut se résumer ainsi :

- On considère un produit scalaire sur M noté $\langle .,. \rangle$. On définit K par :

$$K(x,y) = \langle \delta_x, \delta_y \rangle \qquad (x,y) \in X^2\ .$$

Alors K ainsi défini est un noyau symétrique de type positif. On note H_K l'espace de Hilbert autoreproduisant associé, M_o l'espace des combinaisons linéaires finies des mesures de Dirac, H_o l'espace des combinaisons linéaires finies des $K(x,.)$.

- On a alors le *lemme* :

" Si K est mesurable borné, l'application linéaire ψ de $(M_o, < >)$ sur $(H_o, (,)_{H_K})$ est une isométrie entre ces deux espaces , ψ étant définie par : $\psi(\delta_y) = K(.,y)$ "

puis le

- *Théorème de plongement* :

" On peut alors prolonger ψ en une application linéaire de M dans H_K par : $\psi(\mu) = \int K(.,y)\, d\mu(y)$; on note $(\mu,\nu)_K$ le pseudo-produit scalaire défini sur M par $(\mu,\nu)_K = (\psi(\mu), \psi(\nu))_{H_K}$ " .

" Si $(,)_K$ est non dégénéré , ψ est une isométrie et $(M, ( )_K)$ peut être considéré comme un sous-espace de H_K " .

On voit facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le pseudo-produit scalaire $(,)_K$ soit un véritable produit scalaire est l'injectivité de ψ. L'injectivité de ψ peut se traduire par :

$$\forall \mu \neq 0 \quad , \quad \exists y \in X \, , \quad \int_X K(x,y)\, d\mu(x) \neq 0 \quad .$$

Cette condition est l'analogue de notre hypothèse de caractérisation des mesures par la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en remplaçant la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par la famille de fonctions $\{K(x,.), x \in X\}$.

- D'autre part C. Guilbart donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit scalaire $< >$ sur M "se réintégre" c'est-à-dire vérifie :

$$\forall \mu \in M \;\; \forall \nu \in M \qquad <\mu,\nu> = \int <\delta_x,\delta_y>\, d\mu \otimes \nu(x,y) = \int K \, d\mu \otimes \nu \qquad .$$

Pour le produit scalaire que nous avons défini à la proposition (I.1.1.) cette condition est automatiquement vérifiée par construction. Dans toute la suite de ce travail les seuls produits scalaires que nous envisageons seront de ce type.

Pour des raisons de mesurabilité nous nous occuperons essentiellement du cas où H_K est séparable. Dans ce cas là la construction donnée en I.1.1. coïncide avec celle de C. Guilbart dans le cas où $\emptyset$ est injective et $< \ >$ se réintégre. En effet, le "théorème de séparabilité" de C. Guilbart nous dit que :

" L'espace autoreproduisant H_K associé au noyau reproduisant borné K est séparable si et seulement si il existe une suite de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $K = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \otimes f_i$ (série convergent simplement sur X^2). Alors les f_i sont bornées et la convergence est uniforme en x pour tout y fixé ".

Donc si le produit scalaire $< \ >$ se réintégre et est tel que H_K soit séparable on peut prouver comme dans I.1.1. que

$$<\mu,\mu> = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int f_i \, d\mu\right)^2$$

et comme $< \ >$ est défini positif en tant que produit scalaire il en résulte que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ caractérise les mesures.

Remarquons enfin que la construction de C. Guilbart la densité de $\emptyset(M)$ dans H_K a lieu "par construction" tandis que la formule de réintégration n'est pas acquise a priori. A l'inverse avec la construction (I.1.1.) la "réintégration" est automatique, mais on ne peut utiliser les théorèmes de C. Guilbart pour avoir la densité de $\emptyset(M)$ dans H_K. Il nous faut donc prouver directement que le complété de M_K est isométrique à H_K.

I.2. - Plongement isométrique de $\mathcal{M}_K$ dans H_K .

I.2.1. - Théorème.-

$\mathcal{M}_K$ s'injecte isométriquement dans l'espace autoreproduisant H_K par l'application ψ :

$$\psi : \mathcal{M}_K \longrightarrow H_K \qquad \mu \longmapsto \int K(.,y)\, d\mu(y)$$

$\psi(\mathcal{M}_K)$ est un s.e.v. dense dans H_K.

Démonstration : A tout élément μ de $\mathcal{M}$ on peut associer la fonction réelle $\psi(\mu)$ sur X définie par :

$$\psi(\mu) = \int_X K(.,y)\, d\mu(y) .$$

Comme K est borné et mesurable cette définition a bien un sens et, comme nous l'avons vu au cours de la démonstration de (I.1.1.) les hypothèses faites sur K et les f_i nous permettent, grâce au théorème de convergence dominée d'écrire :

$$\psi(\mu) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int f_i\, d\mu\right) f_i . \tag{1}$$

- Notons H_1 l'espace vectoriel de fonctions réelles sur X défini par :

$$H_1 = \{\psi(\mu) \ , \ \mu \in \mathcal{M}\} .$$

L'application ψ réalise alors une bijection linéaire de $\mathcal{M}$ sur H_1 ; le seul point non évident est l'injectivité. Supposons donc $\psi(\mu) = 0$.

Alors on a $\int_X \psi(\mu)(x)\, d\mu(x) = 0$. Ce qui entraîne par le théorème de Fubini et la formule (I.1.1.): $\int K\, d\mu \otimes \mu = 0$ donc $\langle\mu,\mu\rangle_K = 0$ donc $\mu = 0$.

- Définissons alors sur l'espace fonctionnel H_1 un produit scalaire noté $< \ >$ par :

$$\forall g \in H_1 \ , \ \forall h \in H_1 \qquad <g,h> = <\psi^{-1}(g),\psi^{-1}(h)>_K \quad . \tag{2}$$

Nous allons démontrer que l'espace préhilbertien $(H_1 \ , < \ >)$ admet un complété fonctionnel (1) et que ce complété n'est autre que H_K .

Nous aurons besoin pour ce faire des résultats préliminaires contenus dans les lemmes 1 à 3.

Lemme 1 : L'espace H_1 contient toutes les fonctions $K(x,.)$ $(x \in X)$ et vérifie la propriété d'autoreproduction pour le noyau K.

Vérification :

- On a $K(x,.) = \psi(\delta_x)$. De plus pour tout couple (x,y) de X^2 on a :

$$<K(x,.),K(y,.)> = <\delta_x,\delta_y>_K = K(x,y) \ . \tag{3}$$

En particulier $||K(x,.)|| = K(x,x)^{1/2}$.

- Pour tout f de H_1 , en notant $f = \psi(\mu)$ on a :

$$<f,K(x,.)> = <\mu,\delta_x>_K = \int K \, d\mu \otimes d\delta_x = \int K(x,y) \, d\mu(y) = \psi(\mu)(x) = f(x) \ . \tag{4}$$

Lemme 2 :

$$\forall f \in H_1 \ , \quad \forall \mu \in M \ , \qquad <f, \psi(\mu)> = \int f \, d\mu \quad . \tag{5}$$

Vérification :

Si $f = \psi(\nu)$ on a d'après (1) : $f = \sum_{i=0}^{+\infty} (\int f_i \, d\nu) \, f_i$ et d'après

---

(1) : Par "complété fonctionnel" nous entendons selon la terminologie de N. Aronszajn (cf. [2]) un complété dont les éléments sont des fonctions sur X et pour lequel la convergence en norme implique la converge simple sur X.

la définition (2) :

$$<\psi(\nu),\psi(\mu)> = \sum_{i=0}^{+\infty} (\int f_i \, d\nu) \, (\int f_i \, d\mu) = \int (\sum_{i=0}^{+\infty} (\int f_i \, d\nu) \, f_i) \, d\mu = \int f \, d\mu \quad .$$

La justification de l'interversion des sommations ayant été donnée en (I.1.1.).

Lemme 3 : La topologie définie sur H_1 par $< \ >$ est plus forte que celle de la convergence uniforme sur X. On a en effet :

$$||\psi(\nu)||_\infty \leq (\operatorname{Sup}_{X^2} K)^{1/2} \, ||\psi(\mu)|| \quad . \tag{6}$$

Vérification : En utilisant la propriété d'autoreproduction du lemme 1 et l'inégalité de Schwarz :

$$||\psi(\mu)||_\infty = \operatorname{Sup}_{x\in X} |\psi(\mu)(x)| = \operatorname{Sup}_{x\in X} |<\psi(\mu),K(x,.)>| \leq \operatorname{Sup}_{x\in X} (||K(x,.)|| \; ||\psi(\mu)||)$$
$$\leq (\operatorname{Sup}_{X^2} K)^{1/2} \, . \, ||\psi(\mu)|| \quad .$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que $(H_1, < \ >)$ a un complété fonctionnel. On utilise pour cela un théorème d'Aronszajn (cf. [2]).

" Soit F un espace préhilbertien de fonctions sur X. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un complété fonctionnel de F est que :

1°) pour tout y fixé de X la fonctionnelle linéaire f(y) définie sur F soit bornée ,

2°) si (f_m) est une suite de Cauchy de F la condition $f_m(y) \to 0$ pour tout y de X implique $||f_m|| \to 0$.

Si cette complétion fonctionnelle existe, elle est unique " .

La vérification de 1°) est immédiate puisque la "fonctionnelle $f \longmapsto f(y)$" n'est autre que la forme linéaire $\langle K(.,y),.\rangle$ continue sur H_1.

Pour la vérification du point 2) notons $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H_1 convergeant simplement vers 0 sur X. D'après le lemme 3 la suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy pour la norme $|| \; ||_\infty$. Elle converge donc aussi uniformément sur X et sa limite uniforme ne peut être alors que 0.

Pour toute mesure à signe bornée μ on a alors (1) :
$\lim\limits_{m \to +\infty} \int f_m \, d\mu = 0$. Ce qui d'après le lemme 2 peut encore s'écrire :

$$\forall h \in H_1 \qquad \lim_{m \to +\infty} \langle f_m, h\rangle = 0 \ . \tag{7}$$

Notons $\bar{H}_1$ un complété (pas forcément fonctionnel) de H_1. H_1 est dense dans $\bar{H}_1$ donc la condition (7) jointe au fait que (f_m) est bornée en norme $|| \; ||_{\bar{H}_1}$ comme suite de Cauchy assure la convergence de (f_m) vers 0 pour la topologie faible de $\bar{H}_1$ (au sens $\sigma(\bar{H}_1, \bar{H}_1)$) d'après un critère classique de convergence faible (cf. Kolmogorov-Fomine [14] p. 189).

D'autre part, (f_m) étant de Cauchy converge aussi fortement dans $\bar{H}_1$. Sa limite forte coïncide alors avec sa limite faible, c'est-à-dire 0. La condition 2) est ainsi vérifiée.

Désormais la notation $\bar{H}_1$ désignera l'unique complété fonctionnel de H_1. Les éléments de $\bar{H}_1$ peuvent être caractérisés comme étant les fonctions limites simples sur X des suites de H_1 qui sont de Cauchy.

$\bar{H}_1$ contient bien entendu toutes les fonctions $K(x,.)$ $(x \in X)$. Il possède aussi la propriété d'autoreproduction par rapport au noyau K :

---

(1) On pourrait conclure directement avec le théorème de convergence dominée sans invoquer la convergence uniforme de (f_m). Mais en vue d'une généralisation ultérieure nous avons préféré cette version (cf. VI).

Si $f \in \bar{H}_1$ $\langle f, K(x,.)\rangle = \lim_{m\to+\infty} \langle f_m, K(x,.)\rangle = \lim_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x)$

en désignant par (f_m) une suite d'éléments de H_1 convergeant fortement vers f.

On peut alors conclure que $\bar{H}_1$ est exactement l'espace autoreproduisant H_K.

I.2.2. - Proposition.-

$$\forall f \in H_K \ , \quad \forall \mu \in \mathcal{M} \qquad \langle f, \psi(\mu)\rangle = \int f \, d\mu \ .$$

Preuve : C'est vrai pour $f \in \psi(\mathcal{M})$ d'après le lemme 2 de (I.2.1.). Si $f \notin \psi(\mathcal{M})$ alors f est limite en $\|\ \|_K$ d'une suite (f_m) d'éléments de $\psi(\mathcal{M})$ donc : $\lim_{m\to+\infty} \langle f_m, \psi(\mu)\rangle = \langle f, \psi(\mu)\rangle$. D'autre part f_m converge aussi uniformément vers f et μ est bornée donc : $\int f \, d\mu = \lim_{m\to+\infty} \int f_m \, d\mu$.

Désormais nous noterons $\langle\ \rangle_K$ et $\|\ \|_K$ le produit scalaire et la norme de l'espace H_K .

I.3. - Une caractérisation des éléments de H_K .

Dans son article (Publ. Int. n° 108) [9] C. Guilbart citant la thèse de Duc-Jacquet ([5]) utilise la notion de "support d'un noyau reproduisant" pour donner une caractérisation des éléments de H_K :

On appelle "support du noyau reproduisant K" tout élément de C_K maximal pour l'inclusion, C_K étant la famille des parties A de X telles que pour tout sous-ensemble fini $\{x_1,\dots,x_n\}$ de A la famille $\{K(x_1,.)\ ;\dots;\ K(x_n,.)\}$ soit libre. Nous examinons maintenant ce que devient cette caractérisation dans le cas où K définit un produit scalaire sur M et où la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sépare les points. (Ce qui est le cas dès que la topologie de X est séparée).

I.3.1. - Proposition.-

Si la tribu $\mathcal{B}$ sépare les points de X et si le noyau K définit un produit scalaire sur M, alors quel que soit $A \subset X$, la famille $\zeta(A) = \{K(x,.),\ x \in A\}$ est une famille libre de H_K. Autrement dit, le seul support de K est X.

Démonstration : Soit $A \subset X$. Il faut prouver que toute sous famille finie de $\zeta(A)$ est libre. Puisque K définit un produit scalaire $<\ ,\ >_K$ sur M, si μ est une mesure bornée non nulle il existe au moins $y \in H_K$ tel que

$$\int_X K(x,y)\, d\mu(x) \neq 0 \quad \text{(d'après l'injectivité de } \emptyset) .$$

Soit alors $\{x_1,\dots,x_n\}$ une partie finie quelconque de A. Supposons qu'il existe des réels $a_1,\dots,a_n$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.) = 0_{H_K} .$$

Comme, par hypothèse, la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sépare les points de X (donc si $x \neq y$ $\delta_x \neq \delta_y$) et comme les a_i $(1 \leq i \leq n)$ sont non tous nuls et les x_i deux à deux distincts la mesure $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \delta_{x_i}$ est non nulle donc il existe $y \in X$ tel que : $\int_X K(x,y)\, d\mu(x) \neq 0$.

Mais comme $\int K(x,y)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,y)$ on a une contradiction.

En adaptant le théorème de Duc-Jacquet à ce cas particulier on arrive alors au résultat suivant :

1.3.2. - Proposition.-

Une CNS pour qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ soit un élément de H_K est l'existence d'une constante $c(f)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \forall\{x_1,\ldots,x_n\} \subset X \quad , \quad \forall(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, f(x_i) \leq c(f)\, \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.) \right\|_K . \tag{1}$$

On peut d'ailleurs donner une démonstration directe de ce résultat :

Démonstration :

- *Condition nécessaire :* évidente puisque si $f \in H_K$ on a alors $f(x_i) = \langle K(x_i,.),f\rangle$ et il suffit d'utiliser l'inégalité de Schwarz . On a alors $c(f) = ||f||_{H_K}$.

- *Condition suffisante :* L'hypothèse :

$\exists c(f) \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, f(x_i)\right| \leq c(f)\, \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.)\right\|_K$ peut s'interpréter comme une condition de continuité d'une forme linéaire sur H_K construite à partir de f et permet ainsi d'identifier f à un élément de H_K par le théorème de Riesz. Explicitement, considérons H_o espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des $K(x,.)$ $(x \in X)$. On définit sur H_o une forme linéaire notée $\tilde{f}$ par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \{x_1,\dots,x_n\} \subset X$, $\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{f}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, f(x_i) \quad .$$

Cette définition est cohérente puisque $\{K(x_1,.) ,\dots, K(x_n,.)\}$ est libre. L'hypothèse (1) nous dit alors que :

$$\forall h \in H_o \quad , \quad |\tilde{f}(h)| \leq c(f)\ ||h||_K \quad .$$

Par conséquent $\tilde{f}$ est une forme linéaire continue sur H_o de norme inférieure ou égale à $c(f)$. H_o étant d'autre part dense dans H_K , elle se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur H_K que nous noterons encore $\tilde{f}$.

D'après un théorème de Riesz, il existe alors un unique élément g de H_K tel que :

$$\tilde{f} = \langle g,.\rangle \quad .$$

Enfin comme : $\forall x \in X \quad f(x) = \tilde{f}(K(x,.)) = \langle g,K(x,.)\rangle = g(x)$ on a $f = g$ donc $f \in H_K$.

I.3.3. - Corollaire.-

Soit f une fonction mesurable réelle sur X alors :

$$f \in H_K \iff \exists c(f) \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \forall \mu \in M \quad \left|\int_X f\, d\mu\right| \leq c(f)\ ||\mu||_K \quad . \qquad (2)$$

Condition suffisante : En faisant $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \delta_{x_i}$ on retrouve (1) .

Condition nécessaire : Prendre $c(f) = ||f||_K$.

Une conséquence de ce corollaire est, par exemple, que les fonctions f_i à partir desquelles on a construit un noyau K au I.1. sont des élément de H_K . En effet on a la majoration

$$\left(\int f_i \, d\mu\right)^2 \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\int f_j \, d\mu\right)^2 = ||\mu||_K^2$$. On voit de plus que $||f_i||_K \leq 1$.

Bien entendu, un tel résultat doit être indépendant de la topologie de X (1). Nous allons donc le retrouver dans le cas général. Le théorème suivant, qui peut être considéré comme complémentaire à la démonstration du théorème de séparabilité dans [10], précise le rôle des f_i .

I.3.4. - Théorème.-

Si $(f_i)_{i\in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles sur X telle que la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i(y) = K(x,y)$$

converge simplement sur X^2 et que la fonction K ainsi définie soit bornée sur X^2 alors :

i) K est un noyau symétrique de type positif.

ii) L'espace autoreproduisant H_K associé contient les f_i .

iii) $\{f_i \, , \, i \in \mathbb{N}\}$ est une famille totale de H_K .

Démonstration :

i) est immédiat.

---

(1) Le corollaire I.3.3. a été démontré à partir de I.3.1. en supposant que la tribu $\mathcal{B}$ sépare les points. A ce sujet, on pourra comparer les deux démonstrations du théorème de séparabilité de C. Guilbart dans [9] et dans [10].

Preuve de (ii) : Soit S un support du noyau K (cf. p. 14).
Pour tout élément h de l'espace H_o des combinaisons linéaires finies des $\{K(x,.),\ x \in X\}$ il existe une décomposition unique $h = \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.)$ où les x_i sont tous des éléments de S. Par conséquent la formule :

$$\tilde{f}_i(K(x,.)) = f_i(x) \qquad \forall x \in S$$

définit de manière cohérente une unique forme linéaire $\tilde{f}_i$ sur H_o. On vérifie alors la continuité de $\tilde{f}_i$ pour la norme $\|\ \|_K$ sur H_o :

$\forall n\ ,\ \forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in S^n\ :\ \tilde{f}_i(\sum_{j=1}^{n} a_j\, K(x_j,.))^2 = [\sum_{j=1}^{n} a_j\, f_i(x_j)]^2$

et

$$[\sum_{j=1}^{n} a_j\, f_i(x_j)]^2 \leq \sum_{p=0}^{+\infty} [\sum_{j=1}^{n} a_j\, f_p(x_j)]^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{j,\ell=1}^{n} a_j\, a_\ell\, f_p(x_\ell)\, f_p(x_j)$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^{n} a_j\, a_\ell \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(x_j)\, f_p(x_\ell) = \sum_{j,\ell=1}^{n} a_j\, a_\ell\, K(x_j,x_\ell) = \|\sum_{j=1}^{n} a_j\, K(x_j,.)\|_K^2 .$$

$\tilde{f}_i$ est donc bien une forme linéaire continue sur H_o. Elle se prolonge de manière unique à H_K et on en déduit comme dans I.3.2. en utilisant le théorème de Riesz l'existence d'un élément g_i de H_K tel que

$$\tilde{f}_i = \langle g_i,.\rangle \ .$$

La définition de $\tilde{f}_i$ et la propriété d'autoreproduction nous permettent alors d'écrire que :

$$\forall x \in S\ , \qquad f_i(x) = g_i(x) \ .$$

Il reste à prouver que cette égalité est valable aussi pour $x \in X \setminus S$.
Soit $x \in X \setminus S$. D'après la définition de S, il existe une décomposition unique :

$$K(x,.) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, K(x_j,.) \qquad \text{où} \quad x_j \in S \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\} .$$

On a alors :

$$g_i(x) = \langle g_i, K(x,.)\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \, g_i(x_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, f_i(x_j) \quad .$$

D'autre part, on a

$$||K(x,.) - \sum_{j=1}^{n} a_j \, K(x_j,.)||_K^2 = 0$$

$$\Longrightarrow K(x,x) - 2 \sum_{j=1}^{n} a_j \, K(x_j,x) + \sum_{j,\ell=1}^{n} a_j \, a_\ell \, K(x_j,x_\ell) = 0 \quad .$$

En revenant à la définition de K à partir des f_i , et en remarquant qu'on a affaire à une somme finie de séries convergentes ce qui légitime l'interversion des sommations on en déduit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} [f_i(x)^2 - 2 \sum_{j=1}^{n} a_j \, f_i(x_j) \, f_i(x) + \sum_{j,\ell=1}^{n} a_j \, a_\ell \, f_i(x_j) \, f_i(x_\ell)] = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} (f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \, f_i(x_j))^2 = 0 \Longrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \; , \; f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, f_i(x_j)$$

donc $f_i(x) = g_i(x)$ aussi pour $x \in X \setminus S$.

Preuve de (iii) : Pour montrer que $\{f_i \, , \, i \in \mathbb{N}\}$ est totale dans H_K il suffit de montrer que les f_i engendrent les $K(x,.)$. Pour cela nous disposons de la formule suivante qui nous est fournie par la définition de K :

$$K(x,.) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x) \, f_i \quad .$$

Mais il importe de remarquer que la convergence de cette série a lieu uniquement (pour l'instant) au sens de la convergence simple d'une suite de fonctions réelles sur X. Nous allons démontrer que cette convergence a lieu aussi au sens de la topologie (forte) de H_K c'est-à-dire que :

$$\lim_{m\to\infty} ||K(x,.) - \sum_{i=0}^{m} f_i(x)\, f_i||_K = 0 \quad .$$

H_K étant complet, nous allons utiliser le critère de Cauchy en montrant que

$$\lim_{n\to+\infty} ||\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, f_i||_K = 0 \quad \text{(uniformément par rapport à } p).$$

H_o étant dense dans H_K on a

$$||\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, f_i||_K = \sup_{\substack{h\in H_o \\ ||h||_K\leq 1}} |<\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, f_i,\ h>| \quad . \tag{1}$$

Soit donc $h = \sum_{j=1}^{m} a_j\, K(x_j,.)$ un élément quelconque de H_o . On a :

$$|<\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, f_i\ ,\ \sum_{j=1}^{m} a_j\, K(x_j,.)>| = |\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\ (\sum_{j=1}^{m} a_j\, f_i(x_j))| \tag{2}$$

d'après la propriété d'autoreproduction. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{p+1}$ on peut alors écrire :

$$|\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\ (\sum_{j=1}^{m} a_j\, f_i(x_j))| \leq [\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)^2]^{1/2} \times [\sum_{i=n}^{n+p} (\sum_{j=1}^{m} a_j\, f_i(x_j))^2]^{1/2} \tag{3}$$

$$\leq [\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)^2]^{1/2} \times [\sum_{i=0}^{+\infty} (\sum_{j=1}^{m} a_j\, f_i(x_j))^2]^{1/2} \tag{4}$$

$$= [\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)^2]^{1/2} \times [\sum_{j,\ell=1}^{m} a_j\, a_\ell \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x_j)\, f_i(x_\ell)]^{1/2}$$

$$= [\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)^2]^{1/2}\ ||\sum_{j=1}^{m} a_j\, K(x_j,.)||_K \quad . \tag{5}$$

L'interversion des sommations entre (4) et (5) étant justifiée par la convergence des m^2 séries $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x_j)\, f_i(x_\ell)$ (d'après la définition de K).

Compte tenu de (1), (2) on en déduit alors :

$$\left\|\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)\, f_i\right\|_K \leqslant \left|\sum_{i=n}^{n+p} f_i(x)^2\right|^{1/2} \tag{6}$$

il ne reste plus alors pour conclure qu'à observer que la série définissant $K(x,x)$ étant convergente vérifie le critère de Cauchy pour les séries à termes réels.

I.4. - Recherche d'une base orthonormée de H_K .

I.4.1. -

Pour construire une base orthonormée d'un espace autoreproduisant H_K , on peut utiliser le théorème suivant (cf. [17]).

" $\mathcal{X}$ étant un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et d'une mesure positive σ-finie μ de support $\mathcal{X}$, $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{X},\mathcal{B},\mu)$ est un espace de Hilbert séparable que nous supposerons de dimension infinie. K étant un noyau symétrique, de type positif, continu sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et tel que $\int_{\mathcal{X}} K(x,x)\, \mu(dx) < +\infty$ alors on a :

i) $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{X},\mathcal{B},\mu)$, $\int_{\mathcal{X}} K(x,.)\, f(x)\, \mu(dx) \in H_K$.

ii) Il existe une base orthonormale $(h_n\ ;\ n \geqslant 0)$ de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{X},\mathcal{B},\mu)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint K_μ :

$$K_\mu : f \longmapsto \int K(x,.)\, f(x)\, \mu(dx) \quad .$$

Leurs valeurs propres respectives $(c_n \ , n \in \mathbb{N})$ sont positives ou nulles et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < \infty$.

iii) Si $N = \{n \in \mathbb{N} \ , \ c_n > 0\}$, alors pour tout $n \in N$ on peut choisir $h_n \neq 0$ de manière que

$$c_n \, h_n = \int K(x,.) \, h_n(x) \, \mu(dx)$$

et $\{\sqrt{c_n}\, h_n \ , n \in N\}$ est alors une base orthonormale de H_K ".

L'inconvénient de ce théorème est qu'il n'est pas forcément facile de résoudre l'équation intégrale $K_\mu(f) = cf$.

Dans certains cas il peut sembler plus commode de construire la base orthonormée sans se fixer K a priori (cf. I.4.2. et I.4.3.).

Si l'on sait résoudre l'équation "$K_\mu(f) = cf$" ce théorème permet alors d'obtenir une base hilbertienne de H_K formée d'éléments de $\mathcal{V}(M)$ qui sont des (images par $\mathcal{V}$ de) mesures ayant toutes une densité par rapport à μ.

(Car si μ est finie $h_n \in L^2 \Longrightarrow h_n \in L^1$ et $\sqrt{c_n}\, h_n = \mathcal{V}\left(\frac{h_n}{\sqrt{c_n}} \, . \, \mu\right)$ en notant $\frac{h_n}{\sqrt{c_n}} \, . \, \mu$ la mesure ν telle que $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{h_n}{\sqrt{c_n}}$)

I.4.2.1. - Théorème.-

Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles sur X telle que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)^2$ soit simplement convergente sur X. On suppose de plus que :

(i) Si pour $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \, f_i = 0$ alors : $a_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions la fonction réelle K définie sur X^2 par :
$K(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i(y)$ est un noyau reproduisant et l'espace H_K admet $(f_i,\ i \in \mathbb{N})$ pour base hilbertienne.

Démonstration : Remarquons d'abord que pour tout $x \in X$ la suite $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$ par conséquent les séries : $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, f_i(x)$ pour $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i(y)$$

sont bien convergentes. Il est alors immédiat de vérifier que K est une fonction symétrique et semi-définie positive. Donc c'est bien un noyau reproduisant. Nous notons H_K l'unique espace de Hilbert autoreproduisant de fonctions réelles sur X ayant pour noyau K.

On va construire un espace de Hilbert F de fonctions réelles sur X admettant $(f_i\ ,\ i \in \mathbb{N})$ pour base hilbertienne puis on montrera que $F = H_K$.

- Définissons F comme l'espace des fonctions réelles sur X de la forme

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, f_i \qquad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad . \tag{1}$$

D'après l'hypothèse (i) la représentation d'un élément de F sous la forme (1) est unique. Cette unicité garantit la cohérence dela définition :

$$< \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, f_i\ ,\ \sum_{i=0}^{+\infty} b_i\, f_i >_F = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\, b_i \tag{2}$$

d'un produit scalaire sur F . $(F\ ,\ <\ >_F)$ est alors clairement un espace de Hilbert isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$ et admettant $(f_i,\ i \in \mathbb{N})$ pour base hilbertienne.

- Maintenant, pour $x \in X$ fixé, $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ donc $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i \in F$. Or $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i = K(x,.)$.

F contient donc $\{K(x,.)\ ,\ x \in X\}$.

Calculons $\langle f, K(x,.)\rangle_F$: Si $f = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i f_i$ on a

$$\langle f,K(x,.)\rangle_F = \langle \sum_{i=0}^{+\infty} a_i f_i\ ,\ \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i\rangle_F = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i f_i(x) = f(x) .$$

F vérifie donc la propriété d'autoreproduction. F est donc un espace de Hilbert autoreproduisant de fonctions réelles sur X pour le noyau K. On sait que K étant donné, un tel espace fonctionnel est unique donc $F = H_K$.

I.4.2.2. - Remarque : Il serait intéressant de pouvoir affaiblir l'hypothèse (i), mais il est clair qu'elle ne peut être complètement supprimée puisque si $(f_i\ ,\ i \in \mathbb{N})$ n'est pas une famille libre la conclusion du théorème est en défaut.

On verra au I.5. que pour les exemples avec $X = \mathbb{R}$ cette hypothèse (i) est assez facile à vérifier par des considérations sur les développements en série par exemple ...

Bien sûr, le cas qui nous importe est celui où $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables bornées caractérisant les mesures et où K est borné sur X^2.

I.4.3. - Une base orthonormée de $\mathcal{M}(M)$.-

Pour construire une base orthonormée de $\mathcal{M}(M)$ on peut remarquer que l'identité

I.1.1. : $$\langle\mu,\nu\rangle_K = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\int f_i \, d\mu\right) \left(\int f_i \, d\nu\right)$$

peut s'interpréter comme une identité de Bessel-Parseval sur $\emptyset(M)$:

$$\langle\emptyset(\mu), \emptyset(\nu)\rangle_K = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle f_i, \emptyset(\mu)\rangle \langle f_i, \emptyset(\nu)\rangle \quad .$$

On prouve alors le lemme suivant :

I.4.3.1. - Lemme : Soit H un espace de Hilbert séparable, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille totale de H et G un sous-espace vectoriel dense de H vérifiant :

a) $\forall(u,v) \in G^2 \qquad \langle u,v\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle e_i,u\rangle \langle e_i,v\rangle$

b) $\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists v \in G \quad \begin{cases} \langle e_j,v\rangle = 0 & \text{si} \quad j \neq i \\ \langle e_i,v\rangle \neq 0 & . \end{cases}$

Alors $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H formée d'éléments de G.

Preuve : On sait déjà que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille totale, il reste à prouver qu'elle est orthogonale. Soit i fixé. On peut toujours dans l'hypothèse (b) choisir v dans G tel que $\langle e_i,v\rangle = 1$.

En reportant dans (a) on a alors :

$$\forall u \in G \qquad \langle u,v\rangle = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \langle e_\ell,u\rangle \langle e_\ell,v\rangle = \langle e_i,u\rangle \quad .$$

Les formes linéaires continues $\langle .,v\rangle$ et $\langle e_i,.\rangle$ coïncident donc sur G qui est dense dans H donc elles coïncident sur H donc $v = e_i$.
Donc $\langle e_i,e_i\rangle = 1$ et $\langle e_i,e_j\rangle = 0$ pour $j \neq i$. De plus $e_i \in G$.
En appliquant ce lemme à $H = H_K$ avec $G = \emptyset(M)$ et $e_i = f_i$ (on sait que les f_i sont dans H_K d'après I.3.4. et qu'elles forment une

famille totale de H_K . De plus $\mathcal{V}(M)$ est dense dans H_K d'après I.2.1.) on obtient :

I.4.3.2. - *Proposition*.-

Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables caractérisant les mesures sur X telle que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i(y)$ converge uniformément par rapport à chaque variable (l'autre étant fixée) vers un noyau $K(x,y)$ borné sur X^2 . On suppose de plus que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad \exists \mu \in M\ ,\quad \mu \neq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \int f_i\, d\mu \neq 0 \\ \int f_j\, d\mu = 0 \quad \text{pour } j \neq i \end{cases} .$$

Alors l'espace H_K admet $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme base hilbertienne et tous les f_i sont des éléments de $\mathcal{V}(M)$.

I.4.3.3. - *Application : étude d'un exemple avec* $X = [0,1]$.-

Sur $X = [0,1]$ on considère la suite de fonctions réelles $(f_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [0,1] \qquad f_\ell(x) = a_\ell \cos(\pi \ell x) \qquad (a_\ell \in \mathbb{R}^*) .$$

- Vérifions d'abord que cette suite caractérise les mesures sur $[0,1]$. On sait que $\cos(n\pi x)$ est un polynôme de degré n en $\cos\pi x$. Le s.e.v. de $C([0,1])$ engendré par les f_ℓ "coïncide" donc avec l'algèbre des "polynômes en $\cos x$ ". Cette algèbre contient l'unité et sépare les points de $[0,1]$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass elle est donc dense dans $C([0,1])$ pour la norme $\|\ \|_\infty$. $(f_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ caractérise donc bien les mesures.

- Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit μ la mesure définie par $d\mu(x) = \cos(n\pi x)\, dx$. On a alors par un calcul classique :

$$\int_0^1 f_\ell(x)\, d\mu(x) = \int_0^1 a_\ell \cos(\ell\pi x)\cos(n\pi x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq n \\ \dfrac{a_\ell}{2} & \text{si } \ell = n \end{cases} .$$

- En choisissant les a_ℓ de façon à ce que : $\sum_{\ell=0}^{+\infty} a_\ell^2 < +\infty$ on est dans les conditions de I.4.3.2. .

Alors $K(x,y) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} a_\ell^2 \cos(\ell\pi x)\cos(\ell\pi y)$ définit le noyau d'un espace autoreproduisant H_K et la suite $(f_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ constitue une base hilbertienne de H_K formée d'éléments de $\mathcal{D}(M)$.

Pour le calcul explicite de K si on choisit de prendre $a_\ell = a^{-\ell/2}$ avec $a > 1$ on a :

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\pi x \cos n\pi y}{a^n} = \frac{1}{4}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{i\pi(x+y)}}{a}\Big)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{-i\pi(x+y)}}{a}\Big)^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{i\pi(x-y)}}{a}\Big)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{-i\pi(x-y)}}{a}\Big)^n\Big]$$

ce qui donne après calcul :

$$K(x,y) = \frac{a}{2}\Big[\frac{a - \cos\pi(x+y)}{1+a^2-2a\cos\pi(x+y)} + \frac{a-\cos\pi(x-y)}{1+a^2-2a\cos\pi(x-y)}\Big]$$

I.5. - Exemples d'espaces H_K.

Dans [10] C. Guilbart montre que dans le cas où X est métrique séparable on peut toujours construire un produit scalaire sur M dont la topologie trace sur M^+ soit la topologie faible. Les exemples 1 à 5 ci-dessous sont issus de son "théorème de construction" ([10] p. 21).

Exemple 1 : $X = [0,1]$ $K(x,y) = \frac{2}{2-xy}$.

On a alors $K(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xy)^n}{2^n}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions réelles sur $[0,1]$ définie par : $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^n$.

On voit facilement que (f_n) vérifie les hypothèses du théorème (I.4.2.1.). C'est donc une base hilbertienne de H_K . Remarquons de plus que $(H_K , \| \|_\infty)$ est dense dans $C([0,1])$.

Exemple 2 : $X = [0,1]$ $K(x,y) = \frac{2-\cos\pi(x+y)}{5-4\cos\pi(x+y)} + \frac{2-\cos\pi(x-y)}{5-4\cos\pi(x-y)}$

(cf. I.4.3.3. avec $a = 2$). La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall x \in X$, $f_n(x) = 2^{-n/2}\cos(n\pi x)$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}(M)$ et constitue une base hilbertienne de H_K . Là encore $(H_K , \| \|_\infty)$ est dense dans $C([0,1])$.

Exemple 3 : $X = \mathbb{R}$ (ou $X \subset \mathbb{R}$) et $K(x,y) = \dfrac{2}{2 - \dfrac{xy}{(1+|x|)(1+|y|)}}$

La suite de fonctions réelles sur X $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(x) = 2^{-n/2}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)^n$ vérifie les hypothèses du théorème (I.4.2.1.) : pour l'hypothèse (i) il suffit de poser $z = \frac{x}{1+|x|}$ de façon à se ramener à un développement en série sur $]-1,+1[$. C'est donc une base hilbertienne de H_K . La vérification est analogue pour les exemples 4 et 5 ci-dessous :

Exemple 4 : $X = \mathbb{R}$ (ou $X \subset \mathbb{R}$) $K(x,y) = \exp\left(\frac{x}{1+|x|} \cdot \frac{y}{1+|y|}\right)$

Base hilbertienne : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$

$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{x}{1+|x|}\right)^n$.

Exemple 5 : $X = \mathbb{R}$ (ou $X \subset \mathbb{R}$) $K(x,y) = \dfrac{3}{3 - \text{Arctg } x \text{ Arctg } y}$

Base hilbertienne : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \quad f_n(x) = \left(\dfrac{\text{Arctg } x}{\sqrt{3}}\right)^n$.

Les noyaux des exemples 1 à 5 peuvent servir à la construction de noyaux sur $\mathbb{R}^m$ (ou $X \subset \mathbb{R}^m$) comme le prouve C. Guilbart ("Lemme des produits" (3.E.I.) [10]). Pour l'exemple 3 le noyau correspondant est alors donné par :

$$K((x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_m)) = \frac{2}{2 - \dfrac{x_1\, y_1}{(1+|x_1|)(1+|y_1|)}} \times\dots\times \frac{2}{2 - \dfrac{x_m\, y_m}{(1+|x_m|)(1+|y_m|)}}$$

On peut alors vérifier que l'on a une base hilbertienne constituée par les fonctions de la forme $f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \dots \otimes f_{i_m}$ (où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la base hilbertienne de l'exemple 3).

Exemple 6 : $X = \mathbb{R}$ $\qquad K(x,y) = e^{-1/2(x-y)^2}$.

C'est un exemple du à C. Guilbart ([10] p. 22 2.E.I.) de noyau pour lequel la topologie trace sur M^+ est moins fine que la topologie faible. Remarquons que K tend vers 0 à l'infini lorsque l'une des 2 variables est fixée. Nous verrons plus loin qu'avec ce type de noyau, $(H_K, \| \|_\infty)$ est dense dans $C_o(X)$.

I.6. - Relations entre les divers modes de convergence des suites de H_K.

I.6.1. - Soit H_K un espace autoreproduisant de noyau K et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de H_K. Soit $h \in H_K$, nous envisageons les 4 modes de convergence suivants :

i) $h_n \longrightarrow h$ en norme $\| \ \|_K$

ii) $h_n \longrightarrow h$ $\sigma(H_K,H_K)$ (i.e. : $\forall g \in H_K$, $\langle h_n - h, g\rangle_K \longrightarrow 0$)

iii) $h_n \longrightarrow h$ uniformément sur X (ou en $\| \ \|_\infty$)

iv) $h_n \longrightarrow h$ simplement sur X .

Notons les implications évidentes :

. (i) $\Longrightarrow$ (ii)

. (i) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) (car $\| \ \|_\infty \leq (\mathrm{Sup}\ K)^{1/2} . \| \ \|_K$)

. (ii) $\Longrightarrow$ (iv) (Autoreproduction, faire $g = K(x,.)$) .

<u>*I.6.2. - Remarque*</u> : Les seuls espaces H_K où (ii) $\Longrightarrow$ (i) sont de dimension finie : si $\dim H_K = +\infty$ il y a dans H_K au moins une famille orthonormale $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $h_n \longrightarrow 0$ $\sigma(H_K,H_K)$ puisque :

$$\forall g \in H_K \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g,h_n\rangle^2 \underset{\text{(Bessel)}}{\leq} \|g\|^2 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to\infty} \langle h_n,g\rangle = 0 .$$

Par contre $\|h_n\|_K = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>*I.6.3. - Remarque*</u> :

$$h_n \longrightarrow h \quad \sigma(H_K,H_K) \Longleftrightarrow \text{(v)} \quad \begin{cases} h_n \longrightarrow h & \text{simplement sur } X \\ \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{H_K} < +\infty \end{cases}$$

<u>*Preuve*</u> :

(ii) $\Longrightarrow$ (v) : c'est immédiat car (ii) $\Longrightarrow$ (iv) et toute suite $\sigma(H_K,H_K)$ convergente est bornée en norme.

(v) $\Longrightarrow$ (ii) : La convergence simple de h_n vers h se traduit grâce à la propriété d'autoreproduction par :

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle K(x,.),h_n\rangle = \langle K(x,.),h\rangle \quad .$$

On en déduit immédiatement :

$$\forall f \in H_o \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle h_n,f\rangle = \langle h,f\rangle$$

où H_o désigne l'espace des combinaisons linéaires finies des $K(x,.)$. H_o étant dense dans H_K et $(||h_n||_K)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée on en déduit la convergence faible $\sigma(H_K,H_K)$ de h_n vers h d'après un critère de convergence faible $\sigma(H_K,H_K)$ (cf. [14]).

Voici maintenant 2 cas où il est possible de remonter de la convergence $\sigma(H_K,H_K)$ à la convergence en norme $||\ ||_K$ moyennant l'adjonction d'une hypothèse supplémentaire relative aux $|\mu_n|(X)$ pour une suite de la forme $(h_n) = (\psi(\mu_n))$.

I.6.4. - Proposition.-

On suppose que X est métrisable séparable, K continu et H_K dense pour la topologie de la norme $||\ ||_\infty$ dans $U(X)$ espace des fonctions uniformément continues bornées sur X pour une certaine métrique d telle que $(U(X), ||\ ||_\infty)$ soit séparable (1) .

Soit $\mu \in M^+$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de M^+ telle que : $\operatorname{Sup} \mu_n(X) < +\infty$. Alors (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) :

i) quand $n \to +\infty$ $\qquad \psi(\mu_n) \xrightarrow{\sigma(H_K,H_K)} \psi(\mu)$.

ii) quand $n \to +\infty$ $\qquad \mu_n \Rrightarrow \mu$

---

(1) C'est le cas du "théorème d'existence" de Guilbart d'un noyau dont la topologie trace sur M^+ est la topologie faible.

iii) quand $n \to +\infty$ $\quad \vartheta(\mu_n) \xrightarrow{\|\ \|_K} \vartheta(\mu)$.

Preuve : Comme " (iii) $\Longrightarrow$ (i) " est évident, il suffit de prouver : " (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) " .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : La suite (μ_n) considérée comme suite de formes linéaires continues sur $(U(X), \|\ \|_\infty)$ est équicontinue donc d'après [22] (T.2. XX.3.1. corollaire 5 p. 312) :

- 1) l'ensemble des f de $U(X)$ pour lesquelles $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f\, d\mu_n$ existe est un fermé de $U(X)$ mais comme il contient H_K qui est dense dans $U(X)$, c'est $U(X)$ tout entier.

- 2) L'application $T : U(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f\, d\mu_n$ est une forme linéaire continue sur $U(X)$.

Mais μ étant aussi une forme linéaire continue sur $U(X)$ telle que : $\forall f \in H_K \quad T(f) = \int f\, d\mu$ on en déduit par densité de H_K que T et μ sont identiques.

Par conséquent on a :

$$\begin{cases} \forall f \in U(X) & \int f\, d\mu_n \longrightarrow \int f\, d\mu \quad \text{quand } n \to +\infty \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(X) < +\infty & . \end{cases}$$

On en déduit alors la convergence faible de μ_n vers μ par le théorème de Billingsley-Alexandrov.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : cf "théorème d'existence" ([10]).

I.6.5. - Proposition.- Soit X métrique compact et K un noyau continu définissant un produit scalaire sur M. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M telle que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n|(X) < +\infty$. Alors (i) <==> (ii) <==> (iii) :

i) La suite $(\psi(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\sigma(H_K,H_K)$ - convergente .

ii) Il existe une mesure à signe bornée μ telle que $\mu_n \Rrightarrow \mu$ quand $n \to +\infty$.

iii) La suite $(\psi(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\|\ \|_K$ - convergente .

Preuve :

(i) ==> (ii) : Nous verrons plus loin (cf. II.1.) qu'avec ces hypothèses, H_K est dense dans $C(X)$ pour la topologie de la $\|\ \|_\infty$. Le même raisonnement qu'à la partie (i) ==> (ii) de I.6.4. avec $C(X)$ à la place de $U(X)$ montre alors que :

Pour toute $f \in C(X)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f\, d\mu_n$ existe et que l'application T

$$T : C(X) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad T(f) = \lim_{n\to+\infty} \int f\, d\mu_n$$

est une forme linéaire continue sur $(C(X), \|\ \|_\infty)$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe alors une unique mesure μ bornée telle que

$$T(f) = \int_X f\, d\mu \quad .$$

On aboutit donc à : $\forall f \in C(X) \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \int f\, d\mu_n = \int f\, d\mu$

ce qui est exactement la définition de la convergence faible de μ_n vers μ.

(ii) ==> (iii) : D'après le théorème de faible comparaison (cf. [10]) la topologie faible sur M est plus fine que la topologie trace de $\|\ \|_K$

donc : $$\left(\mu_n \Rrightarrow \mu\right) \Longrightarrow \left(\mu_n \xrightarrow{\|\ \|_K} \mu\right) \quad .$$

II - ETUDE DES CAS X COMPACT, X LOCALEMENT COMPACT.-

On suppose dans cette section que l'espace $(X,\mathcal{B})$ est tel que toute mesure bornée sur $\mathcal{B}$ soit régulière c'est-à-dire vérifie :
$\forall B \in \mathcal{B}$, $|\mu|(B) = \text{Inf}\ \{|\mu|(V)\ ,\ V \supset B\ ,\ V \text{ ouvert}\} =$
$\text{Sup}\ \{|\mu|(C)\ ,\ C \subset B\ ,\ C \text{ compact}\}$. Cette hypothèse est vérifiée si X est métrique compact ou si X est localement compact séparé et à base dénombrable. La nécessité de cette hypothèse sera discutée au § III. Avec cette hypothèse on peut par le théorème de représentation de Riesz identifier M au dual de $C(X)$ (resp. $C_o(X)$).

II.1. - Proposition.

Soit X un espace compact et K un noyau reproduisant continu sur X^2 définissant un produit scalaire sur M. Alors $(H_K\ ,\ \|\ \|_\infty)$ est dense dans $C(X)$ espace des fonctions continues sur X.

Preuve : Comme K est continu, H_K est formé de fonctions continues. Donc H_K est un sous-espace vectoriel (au sens algébrique) de $C(X)$. D'autre part K définit un produit scalaire sur l'espace des mesures bornées sur X. On a donc :

$$\int_X K(x,y)\, d\mu(y) = 0 \quad \forall x \in X \implies \mu = 0 \ .$$

Or on sait que les formes linéaires continues sur $(C(X),\ \|\ \|_\infty)$ sont exactement les mesures bornées sur X. Par conséquent $\{K(x,.),\ x \in X\}$ est une famille totale de $(C(X),\ \|\ \|_\infty)$ par un corollaire classique du théorème de Hahn-Banach.

Comme : $\{K(x,.),\ x \in X\} \subset H_K \subset C(X)$, H_K est bien dense dans $C(X)$.

II.2. - Caractérisation des éléments de $\mathcal{V}(M)$ dans H_K .

Proposition II.2.- Soit X un espace compact, K un noyau reproduisant continu sur X^2 définissant un produit scalaire sur M.
Soit g un élément de H_K , alors g appartient à $\mathcal{V}(M)$ si et seulement si :

$$\sup_{\substack{f \in H_K \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle g,f\rangle| < +\infty .$$

Démonstration : Soit $g \in H_K$. Alors g définit une forme linéaire continue ℓ :

$$\ell : (H_K, \|\ \|_K) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \ell = \langle g,.\rangle$$

Condition nécessaire : Si $g = \mathcal{V}(\mu)$ pour $\mu \in M$ alors :

$$\forall f \in H_K \qquad \ell(f) = \langle \mathcal{V}(\mu), f\rangle = \int_X f \, d\mu \ .$$

Or μ définit une forme linéaire continue sur $(C(X), \|\ \|_\infty)$ et comme $H_K \subset C(X)$, ℓ est aussi une forme linéaire continue sur $(H_K , \|\ \|_\infty)$.

Ce qui équivaut à : $\displaystyle\sup_{\substack{f \in H_K \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\ell(f)| < +\infty$ d'où le résultat .

Condition suffisante : Réciproquement, si la forme linéaire continue $\ell = \langle g,.\rangle$ sur $(H_K , \|\ \|_K)$ est aussi continue en tant que forme linéaire sur $(H_K , \|\ \|_\infty)$ alors elle se prolonge en une forme linéaire continue $\tilde{\ell}$ sur $(C(X), \|\ \|_\infty)$ (th. de Hahn Banach) et ce prolongement est même unique à cause de la densité de H_K dans $C(X)$ pour la $\|\ \|_\infty$.

X étant compact $\tilde{\ell}$ est donc de la forme :

$$\forall f \in C(X) \ , \quad \tilde{\ell}(f) = \int_X f \, d\mu \ , \quad \mu \in M \quad \text{d'après le théorème de Riesz.}$$

Alors par restriction à H_K on a : $\forall h \in H_K \quad \ell(h) = \int_X h \, d\mu = \langle \vartheta(\mu), h \rangle$

donc $g = \vartheta(\mu)$.

Remarque 1 : On sait d'autre part que même dans le cas X compact avec K continu définissant la topologie faible sur M^+, $(M, \| \ \|_K)$ n'est pas nécessairement complet (cf. [9] p. 65 § 7). Il y a donc généralement des éléments g de H_K qui ne sont pas de la forme $\vartheta(\mu)$ pour μ mesure à signe bornée sur X.

Pour ces éléments on a alors nécessairement $\displaystyle\sup_{\substack{f \in H_K \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle g,f \rangle| = +\infty$.

Remarque 2 : A cause de l'égalité $\|\tilde{\ell}\|_{C(X)'} = \|\ell\|_{(H_K ; \| \ \|_\infty)'}$ dans le prolongement par le théorème de Hahn Banach on a :

$$\text{Si} \quad g = \vartheta(\mu) \quad \text{alors} \quad \sup_{\substack{f \in H_K \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle g,f \rangle| = |\mu|(X) \ .$$

II.3. - Application à la mesurabilité de $\vartheta(M)$.

Nous faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire de séparabilité de H_K. Comme nous le verrons plus loin cette hypothèse est en fait superflue (cf. III) dès que X est métrisable puisque sa séparabilité entraîne alors celle de H_K grâce à la continuité de K.

Proposition II.3.- Soit X compact, K un noyau reproduisant sur X^2, continu , définissant un produit scalaire sur M et tel que H_K soit séparable. Alors $\emptyset(M)$ est un borélien de H_K .

Démonstration : Considérons l'application τ définie par :

$$\tau : (H_K , || \ ||_K) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

$$g \longrightarrow \tau(g) = \sup_{\substack{f \in H_K \\ ||f||_\infty \leq 1}} |<f,g>| \ .$$

Si on montre qu'elle est $(\mathcal{B}_{H_K} , \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}^+})$ mesurable, alors on aura prouvé que $\emptyset(M)$ est un borélien de H_K puisque $\emptyset(M) = \tau^{-1}([0, + \infty[)$ d'après II.2. Or dans la "boule" $\{f \in H_K , ||f||_\infty \leq 1\}$ il y a un sous-ensemble dénombrable dense pour la norme $|| \ ||_K$ que nous noterons $\{f_n , n \in \mathbb{N}\}$. En effet $(H_K , || \ ||_K)$ étant séparable tout sous-ensemble de H_K est séparable pour $|| \ ||_K$.

Puisque d'après un lemme classique tout sous-espace d'un espace métrique séparable est encore séparable.

$<.,g>$ étant continue pour la $|| \ ||_K$ on en déduit donc :

$$\tau(g) = \sup_{\substack{f \in H_K \\ ||f||_\infty \leq 1}} |<f,g>| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |<f_n,g>| \ .$$

Par conséquent $\tau = \sup_{n \in \mathbb{N}} |<f_n,.>|$ est bien mesurable puisque chaque $|<f_n,.>|$ est continue .

II.4. - Extension au cas X localement compact.

Les résultats obtenus ci-dessus dans le cas X compact reposent essentiellement sur la densité de $(H_K , \| \|_\infty)$ dans $C(X)$ et sur le théorème de représentation de Riesz qui identifie $C(X)'$ dual de $(C(X), \| \|_\infty)$ à M.

Dans le cas où X est localement compact, il y a également un théorème de représentation de Riesz qui identifie $C_o(X)'$ à M. (cf. [20] p. 125) en notant par $C_o(X)$ l'espace de Banach pour la $\| \|_\infty$ des fonctions continues sur X tendant vers 0 à l'infini. Avec un choix convenable de K on peut donc obtenir des résultats analogues à ceux du cas X compact.

II.4.1. - Définition :

Soit X un espace localement compact et K un noyau continu sur X^2 on dira que K tend vers 0 séparément à l'infini si :

$$\forall x \in X \;,\; \forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists C \text{ compact de } X \text{ tel que } \sup_{y \in X \setminus C} |K(x,y)| < \varepsilon.$$

(Autrement dit si pour tout x fixé $K(x,.) \in C_o(X)$).

II.4.2. - Remarque :

Si X est localement compact et K un noyau reproduisant borné continu sur X^2 et tendant vers 0 séparément à l'infini alors $(H_K , \| \|_\infty)$ est dense dans $C_o(X)$.

Preuve : Il suffit de vérifier que $H_K \subset C_o(X)$ et ensuite le raisonnement est le même qu'au § II.1. en remplaçant $C(X)$ par $C_o(X)$.

Soit $f \in H_K$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Comme K tend vers 0 séparément à l'infini les $K(x,.)$ sont dans $C_o(X)$. Comme K est borné on peut approcher f en $|| \, ||_\infty$ par une combinaison linéaire finie :

$$||f - \sum_{i=1}^{n} a_i K(x_i,.)||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ $\exists$ C_i compact de X tel que $\displaystyle\sup_{y \in X \setminus C_i} |K(x_i,y)| < \frac{\varepsilon}{2n|a_i|}$.

Pour le compact $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ on a alors $\displaystyle\sup_{y \in X \setminus C} |f(y)| < \varepsilon$ donc $f \in C_o(X)$.

II.4.3. : La démonstration des résultats II.2. et II.3. est alors la même pour X localement compact que pour X compact à condition de prendre K borné continu et tendant vers 0 séparément à l'infini.

Proposition II.4.3.- Soit X un espace localement compact, K un noyau reproduisant continu et borné sur X^2 tendant vers 0 séparément à l'infini et définissant un produit scalaire sur M alors on a :

i) $g = \mathcal{V}(\mu)$, $\mu \in M \Longleftrightarrow \displaystyle\sup_{f \in H_K,\, ||f||_\infty \leq 1} |\langle g,f\rangle| < +\infty$

ii) si $g = \mathcal{V}(\mu)$ $\displaystyle\sup_{f \in H_K,\, ||f||_\infty \leq 1} |\langle g,f\rangle| = |\mu|(X)$

iii) si H_K est séparable alors $\mathcal{V}(M)$ est un borélien de H_K .

III - ETUDE DES HYPOTHESES RELATIVES A $(X,\mathcal{B})$.-

III.0. - Introduction.

On se propose maintenant de discuter des hypothèses sur l'espace mesurable $(X,\mathcal{B})$ rendant possible la construction d'un produit scalaire sur M comme dans (I.1.1.) ou si l'on ne souhaite pas supposer a priori la séparabilité de H_K comme dans (I.1.3.).

D'après le théorème d'existence de C. Guilbart, si X est métrique séparable on peut toujours construire sur M un produit scalaire $< >_K$ pour un certain noyau K reproduisant continu et borné.

Soit X un espace topologique pour lequel il existe un noyau reproduisant K borné et caractérisant les mesures (au sens de (I.1.3.)). K définit alors un produit scalaire sur M. X est-il alors nécessairement métrisable ? Si H_K est séparable, X doit-il l'être aussi ? Nous apportons une réponse partielle à ces questions en nous limitant au cas de noyaux continus et d'espaces compacts ou localement compacts.

On commence par une proposition qui justifie l'hypothèse de régularité des mesures formulée au § II. On note M_r l'espace des mesures régulières.

III.0.1. - Proposition.- Si X est compact (resp. localement compact) et si $M \neq M_r$ il n'existe aucun noyau continu (resp. continu tendant vers 0 séparément à l'infini) définissant un produit scalaire sur M.

Preuve : On fait la démonstration dans le cas localement compact, le cas compact s'en déduisant facilement.

Soit donc μ une mesure à signe bornée non régulière sur $\mathcal{B}$ (tribu borélienne de X). On peut associer à μ une forme linéaire Λ sur $C_o(X)$

définie par :

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu \qquad (\forall f \in C_o(X))$$

puisque f étant continue est mesurable et f étant dans $C_o(X)$ est bornée, par conséquent f est bien intégrable par rapport à la mesure à signe bornée μ. De plus Λ est continue puisque : $|\Lambda(f)| = |\int_X f \, d\mu| \leq ||f||_\infty \, |\mu|(X)$.
Alors d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure à signe bornée <u>régulière</u> μ' telle que : $\Lambda(f) = \int f \, d\mu'$ $(\forall f \in C_o(X))$.

Comme μ est non régulière, on a bien sûr : $\mu \neq \mu'$.

Ceci montre que l'espace $C_o(X)$ et donc a fortiori H_K ne suffit pas à caractériser les mesures de M.

Plus explicitement : on ne peut trouver de noyau K tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in X , & K(x,.) \in C_o(X) \\ \forall \nu \in M , & \nu \neq 0 \quad \exists x_o \in X \quad \int K(x_o,.) \, d\nu \neq 0 \end{cases} .$$

(Prendre $\nu = \mu - \mu'$).

III.1. - <u>Cas</u> X <u>compact</u>.

<u>*Proposition III.1.*</u>- Si X est un espace topologique compact et s'il existe un noyau reproduisant continu définissant un produit scalaire sur M alors l'application $\zeta : x \longmapsto K(x,.)$ est un homéomorphisme de X sur son image dans H_K .

<u>*Corollaire*</u>.- X est alors métrisable, donc aussi séparable, donc H_K est nécessairement séparable.

Démonstration :

- La surjectivité de ζ est évidente.

- L'injectivité provient de l'injectivité de $\mathcal{J}$:

  $x \neq y \Longrightarrow \delta_x \neq \delta_y$ puisque $\mathcal{B}$ sépare les points (puisque X est compact) et comme $\zeta(x) = K(x,.) = \mathcal{J}(\delta_x)$ et $\zeta(y) = \mathcal{J}(\delta_y)$ on a bien $\zeta(x) \neq \zeta(y)$.

- La continuité de ζ résulte de la continuité de K via la relation :

  $||\zeta(x) - \zeta(y)||_K^2 = ||K(x,.) - K(y,.)||_K^2 = K(x,x) + K(y,y) - 2K(x,y)$.

- La continuité de ζ^{-1} est moins immédiate. On raisonne par l'absurde : Si ζ^{-1} n'était pas continue, il existerait $x \in X$ et V voisinage ouvert de x tels que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists y \in X \ , \ \begin{cases} ||K(x,.) - K(y,.)||_K < \eta \\ \text{et} \\ y \notin V \end{cases} .$$

Posons $\eta = \eta(p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\eta(p) \downarrow 0$ quand $p \to +\infty$ et notons $y = y_p$ l'élément correspondant (Le choix de $\eta(p)$ sera précisé ultérieurement).

X est compact donc complètement régulier. Il existe par conséquent une fonction continue f égale à 1 en x et nulle en dehors de V de sorte que :

$$\begin{cases} f(x) = 1 \\ f(y_p) = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \end{cases} .$$

On sait que H_K est dense dans $C(X)$ pour la $|| \ ||_\infty$ (cf. II.1.). On peut donc approcher f en $|| \ ||_\infty$ à 1/4 près par une combinaison linéaire finie non nulle $\sum_{i=1}^{n} a_i K(x_i,.)$.

On a alors :

$$\sup_{z\in X} \left|f(z) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,z)\right| \leqslant \frac{1}{4}\ . \tag{1}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y_p)| &\leqslant \left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,x)\right| + \\ &+ \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,x) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,y_p)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,y_p) - f(y_p)\right| \end{aligned} \tag{2}$$

Le 1^{er} et le $3^{ème}$ termes du deuxième membre de (2) sont majorés par $\frac{1}{4}$.

Pour majorer le deuxième terme on écrit :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,x) - \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,y_p)\right| &= \left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.)\ ,\ K(x,.) - K(y_p,.)\right\rangle\right| \\ &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.)\right\|_K \, \|K(x,.)-K(y_p,.)\|_K \end{aligned} \tag{3}$$

En choisissant alors $\eta(p) = \dfrac{1}{p \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\, K(x_i,.)\right\|_K}$ on aboutit dès que

$p \geqslant 4$ à une contradiction puisque (1), (2) et (3) impliquent $|f(x)-f(y_p)| \leqslant \frac{3}{4}$

alors que par construction de f : $f(x) = 1$ et $f(y_p) = 0$

ζ^{-1} est donc bien continue.

On peut donc définir la topologie de X par une distance qui est l'image par ζ^{-1} de la distance trace de celle de $\| \ \|_K$ sur $\{K(x,.),\ x \in X\}$:

$$d_K(x,y) = \|K(x,.) - K(y,.)\| \ .$$

X est donc un compact métrisable donc nécessairement séparable et comme K est continu si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans X, $\{K(x_n,.),\ n \in \mathbb{N}\}$ est totale dans H_K qui est donc forcément séparable.

III.2. - Cas X localement compact.

Proposition III.2.- Si X est un espace topologique localement compact, s'il existe un noyau K sur X^2 reproduisant, continu borné et tendant vers zéro séparément à l'infini et définissant un produit scalaire sur M alors l'application $\zeta : x \longmapsto K(x,.)$ est un homéomorphisme de X sur son image dans H_K.

Corollaire.- X est alors métrisable. Si de plus H_K est séparable X est alors nécessairement séparable.

Démonstration : Elle est identique à celle de III.1. moyennant les modifications suivantes :

- H_K est dense dans $C_o(X)$ pour la $\| \ \|_\infty$ (cf. II.4.2.)

- On remplace V par un voisinage compact de x ce qui est toujours possible puisque dans un espace localement compact tout point admet un système fondamental de voisinages compacts. f est alors à support compact donc dans $C_o(X)$ et on peut bien l'approcher en $\| \ \|_\infty$ par $\sum a_i K(x_i,.)$.

Pour le corollaire, un localement compact métrisable n'est pas forcément séparable. Si on rajoute l'hypothèse H_K séparable alors $\zeta(X)$ l'est, donc aussi X.

III.3. - Proposition.- (cf. [10] lemme 1.B.I. p. 7).

Si $\mathcal{B}$ est une tribu de type dénombrable séparant les points de X, si H_K est séparable et si les $K(x,.)$ sont mesurables, il existe une métrique séparable d sur X ayant $\mathcal{B}$ pour tribu borélienne et rendant

$K \quad d \otimes d$ continu.

Preuve : (cf. [10] lemme 1.B.I. p. 7-8).

IV - MESURABILITE DE $\mathcal{V}(M)$ ET $\mathcal{V}(M^+)$.-

Pour l'étude des mesures aléatoires à signe (resp. positives) considérées comme variables aléatoires à valeurs dans H_K, il importe de savoir si $\mathcal{V}(M)$ et $\mathcal{V}(M^+)$ sont des boréliens de H_K. Dans toute cette section nous supposerons H_K séparable et X métrique. Nous étudions les cas suivants :

- X compact : on sait déjà que $\mathcal{V}(M)$ est borélien de H_K (cf. II.3.).
- X localement compact avec K continu tendant vers zéro séparément à l'infini : $\mathcal{V}(M)$ est aussi un borélien de H_K (cf. II.4.3. (iii)).
- X est métrique séparable complet et la topologie trace de $|| \;||_K$ sur M^+ est la topologie faible.
- X métrique séparable complet.

Pour les deux premiers cas, il reste à vérifier que $\mathcal{V}(M^+)$ est aussi borélien de H_K (1) pour les deux derniers, on prouve ci-dessous que $\mathcal{V}(M^+)$ est borélien de H_K.

Pour le cas le plus "usuel" : $X \subseteq \mathbb{R}^n$ on aura ainsi le choix entre des noyaux pour lesquels on sait que $\mathcal{V}(M)$ est borélien (2ème cas) ou des noyaux dont la topologie trace sur M^+ est la topologie faible (3ème cas) comme ceux des exemples I.5. ex. 3, 4 et 5.

Remarquons que le fait que $\mathcal{V}(M)$ soit un sous-espace vectoriel de H_K ne garantit pas qu'il soit borélien.

---

(1) Dans le cas X localement compact en ajoutant l'hypothèse que X est dénombrable à l'infini.

IV.1. - Remarque :

Il existe des s.e.v. denses non boréliens dans H_K .

Justification : Pour le prouver on utilise le théorème du graphe borélien qui est une généralisation par L. Schwartz du théorème du graphe fermé de Banach (cf. [24]).

" *Théorème* : Si E et F sont deux espaces de Banach et si u est une application linéaire de E dans F dont le graphe est un borélien de $E \times F$ alors u est continue " .

Pour avoir un s.e.v. dense non borélien de H_K on applique ce théorème en prenant $E = H_K$, $F = \mathbb{R}$ et u forme linéaire non continue sur H_K .

Alors le graphe G de u n'est pas borélien dans $H_K \times \mathbb{R}$. D'autre part puisque u n'est pas continue $\operatorname{Ker} u$ est un s.e.v. dense de H_K .

$\operatorname{Ker} u$ ne peut pas être borélien de H_K car la projection canonique $\pi : H_K \times \mathbb{R} \longrightarrow H_K$ étant continue est mesurable et $G = \pi^{-1}(\operatorname{Ker} u)$.

IV.2. - Proposition :

Si X est compact et si K est un noyau reproduisant continu sur X^2 définissant un produit scalaire sur M alors $\varnothing(M^+)$ est borélien dans H_K .

Preuve : On sait que dans ce cas $(M^+ , < >_K)$ est complet (cf. [10] p. 17) donc $\varnothing(M^+)$ est fermé dans H_K .

IV.3. - <u>Proposition</u> :

Si X est localement compact dénombrable à l'infini et si K est un noyau reproduisant continu borné sur X^2, tendant vers zéro séparément à l'infini et définissant un produit scalaire sur M alors $\mathcal{J}(M^+)$ est borélien dans H_K.

Démonstration :

Lemme IV.3.1.- Soit X un espace topologique et $A \subset U \subset X$.

Si U est borélien dans X et si A est borélien dans U alors A est borélien dans X (cf. L. Schwartz, [23] p. 521-4 t.I).

Grâce à ce lemme et à II.4.3. (iii), il nous suffit de montrer que $\mathcal{J}(M^+)$ est borélien de $\mathcal{J}(M)$.

On peut caractériser les mesures positives bornées sur X de la façon suivante :

$$\mu \in M^+ \Longleftrightarrow |\mu|(X) = \mu(X) \quad .$$

Pour montrer que $\mathcal{J}(M^+)$ est borélien de $\mathcal{J}(M)$ ou ce qui est équivalent que M^+ est borélien de M il suffit donc de prouver que l'application θ :

$$M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \mu \longrightarrow |\mu|(X) - \mu(X)$$

et mesurable (puisque $M^+ = \theta^{-1}(\{0\})$.

La mesurabilité de $\mu \longrightarrow |\mu|(X)$ résulte de II.4.3. (ii) :

$$|\mu|(X) = \sup_{f\in H_K,\ ||f||_\infty \leq 1} |\langle\mathcal{J}(\mu),f\rangle| = \sup_{\substack{h_n\in H_K,\ ||h_n||_\infty\leq 1 \\ n\in\mathbb{N}}} |\langle\mathcal{J}(\mu),\ h_n\rangle|$$

où h_n est une suite dense dans $\{f \in H_K \, , \, ||f||_\infty \leq 1\}$.

Les fonctions $|<\emptyset(.), h_n>|$ étant continues pour tout n , on en déduit la mesurabilité de la fonction $\theta_1 = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |<\emptyset(.), h_n>|$ et $\theta_1(\mu) = |\mu|(X)$.

Pour prouver la mesurabilité de $\theta_2 : \mu \longrightarrow \mu(X)$ on montre qu'il existe dans H_K une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépendant pas de μ telle que

$$\theta_2(\mu) = \mu(X) = \lim_{n \to +\infty} <\emptyset(\mu), g_n> = \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n \, d\mu \quad .$$

X étant dénombrable à l'infini peut s'écrire comme réunion croissante d'une suite de compacts C_n . On applique alors le lemme d'Urysohn (cf. [20] 2.12 p. 38) qui nous garantit l'existence d'une fonction continue f_n à <u>support compact</u> telle que :

$$1_{C_n} \leq f_n \leq 1 \quad .$$

f_n étant à support compact est bien un élément de $C_o(X)$.

On sait d'autre part (cf. II.4.2.) que H_K est dense dans $C_o(X)$ pour la $|| \; ||_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc g_n dans H_K telle que $||f_n - g_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$.

On a alors : $|\mu(X) - \int_X g_n \, d\mu| \leq \int_X |1_X - g_n| \, d|\mu|$

$$\leq \int_X |1_X - f_n| \, d|\mu| + \int_X ||f_n - g_n||_\infty \, d|\mu| \leq |\mu|(X \setminus C_n) + \frac{1}{n} |\mu|(X) \; .$$

Comme $|\mu|$ est une mesure positive bornée et $C_n \uparrow X$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} \{|\mu|(X \setminus C_n) + \frac{1}{n} |\mu|(X)\} = 0$$ d'où la conclusion.

Remarque : A cause de la mesurabilité de θ_1 et θ_2, un corollaire immédiat de cette démonstration est que $\mathcal{J}(P)$ où P est l'espace des probabilités sur X est borélien de H_K. De même que $\mathcal{J}(\{\mu \in M , |\mu|(X) \leq a\})$ et $\mathcal{J}(\{\mu \in M^+ , \mu(X) \leq a\})$ etc ...

IV.4. - Proposition.

Si X est un espace métrique séparable et complet, si K est un noyau reproduisant définissant un produit scalaire sur M tel que la topologie trace de $|| \, ||_K$ sur M^+ soit la topologie faible, alors $\mathcal{J}(M^+)$ est un borélien de H_K.

Démonstration :

- On sait que l'espace M^+ muni de la topologie faible est métrisable comme espace métrique complet si X est lui même métrique complet.

- Par ailleurs on sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'étant donné un espace métrique (E,d) il existe une métrique équivalente d' telle que (E,d') soit complet est que (E,d) soit un G_δ dense de son complété pour la métrique d. Autrement dit, que E soit "topologiquement complet" (cf. [18]).

- Par conséquent, X étant métrique complet $\mathcal{J}(M^+)$ sera un G_δ dense de son complété $\overline{\mathcal{J}(M^+)}$ pour la $|| \, ||_K$.

Donc $\mathcal{J}(M^+)$ est un borélien de $\overline{\mathcal{J}(M^+)}$ et comme $\overline{\mathcal{J}(M^+)}$ est fermé donc borélien dans H_K, on peut conclure en utilisant le lemme IV.3.1.

IV.5. - Proposition.

Si X est un espace métrique séparable et complet, si K est un noyau reproduisant continu sur X^2 et borné définissant un produit scalaire sur M alors $\mathcal{J}(M^+)$ est un borélien de H_K.

IV.5.1. - Démonstration :

- Notons M_1^+ l'ensemble des mesures positives sur X dont la variation totale est inférieure ou égale à 1.

L'homothétie de rapport $\frac{1}{n}$ étant continue il est clair que si $\mathcal{J}(M_1^+)$ est borélien alors $\mathcal{J}(M_n^+) = n\ \mathcal{J}(M_1^+)$ l'est également. ($M_n^+ = \{\mu \in M^+ , \mu(X) \leqslant n\}$) . Comme $\mathcal{J}(M^+) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{J}(M_n^+)$ il nous suffira donc de prouver que $\mathcal{J}(M_1^+)$ est borélien de H_K.

- Soit $c^2 = \operatorname{Sup}_{X^2} K$ $(c > 0)$.

Alors $\mathcal{J}(M_1^+)$ est contenu dans la boule fermée.

$$B = B_K(0;c) = \{h \in H_K , ||h||_K \leqslant c\} .$$

En effet si $\mu \in M_1^+$: $||\mathcal{J}(\mu)||_K = (\int_X K\, d\mu \otimes \mu)^{1/2} \leqslant (c^2|\mu|(X)^2)^{1/2} \leqslant c.$

Comme X est séparable et K continu, H_K est séparable. H_K étant réflexif la boule B est $\sigma(H_K,H_K')$ - compacte. On sait que la trace de la topologie faible $\sigma(H_K,H_K')$ est métrisable séparable sur B. Notons δ une distance "métrisant" cette topologie. Par exemple $\delta(h,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\langle h-g, f_n\rangle}{2^n}\right|$ où $\{f_n , n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans la boule unité de H_K. Alors (B,δ) est compact donc en particulier complet.

- Soit ρ la métrique de Prokhorov sur M_1^+. Puisque X est métrique séparable complet, (M_1^+,ρ) est métrique séparable complet. Notons

$\mathcal{B}(M_1^+,\rho)$ sa tribu borélienne et $\mathcal{B}(B,\delta)$ celle de l'espace métrique (B,δ).

L'application $\vartheta_1 : (M_1^+,\rho) \longrightarrow (B,\delta)$ définie par :

$$\vartheta_1(\mu) = \vartheta(\mu) \quad \text{pour} \quad \mu \in M_1^+$$

est (ρ,δ) continue donc $[\mathcal{B}(M_1^+,\rho) \; ; \; \mathcal{B}(B,\delta)]$-mesurable. En effet : si μ_n est une suite quelconque convergeant vers μ dans (M_1^+,ρ) :

$$\mu_n \xrightarrow{\rho} \mu \iff \forall f \in C(X) \int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu \implies \forall f \in H_K \int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu$$

donc $\vartheta(\mu_n) \xrightarrow{\sigma(H_K,H_K')} \vartheta(\mu)$ donc $\vartheta(\mu_n) \xrightarrow{\delta} \vartheta(\mu)$.

- On utilise alors le théorème de Kuratowski :

" Soit X_1 et X_2 deux espaces métriques séparables complets, $E_1 \subseteq X_1$, $E_2 \subseteq X_2$. On suppose que E_1 est borélien de X_1 et que ϑ est une injection mesurable de X_1 dans X_2 telle que $\vartheta(E_1) = E_2$. Alors E_2 est borélien de X_2 " (cf. [18] p. 12).

On applique ce théorème à ϑ_1 avec $E_1 = X_1 = (M_1^+,\rho)$ $E_2 = \vartheta(M_1^+)$ $X_2 = (B,\delta)$. On voit ainsi que $\vartheta(M_1^+)$ est un borélien de (B,δ).

Il résulte du lemme IV.5.2. ci-dessous que si H_K est séparable la topologie forte $\| \; \|_K$ et la topologie faible $\sigma(H_K,H_K')$ ont la même tribu borélienne :

$$\mathcal{B}(H_K, \| \; \|_K) = \mathcal{B}(H_K, \sigma(H_K,H_K')) .$$

On en déduit que $\mathcal{B}(B, \| \; \|_K) = \mathcal{B}(B, \sigma(H_K, H_K')) = \mathcal{B}(B,\delta)$.

Par conséquent $\vartheta(M_1^+)$ est borélien d'un borélien de $\mathcal{B}(H_K, \| \; \|_K)$ et on conclut en appliquant le lemme IV.3.1.

IV.5.2. - Lemme :

Si H_K est séparable alors $\mathcal{B}(H_K , \| \|_K) = \mathcal{B}(H_K , \sigma(H_K,H_K'))$.

Preuve :

- Tout ensemble $\sigma(H_K, H_K)$ - fermé étant $\| \|_K$ - fermé on a bien sûr $\mathcal{B}(H_K , \sigma) \subset \mathcal{B}(H_K , \| \|_K)$.

- H_K étant séparable, $\mathcal{B}(H_K , \| \|_K)$ est engendrée par les boules fortes fermées qui étant convexes sont aussi $\sigma(H_K, H_K)$ - fermées donc $\mathcal{B}(H_K,\sigma)$ mesurables donc $\mathcal{B}(H_K, \| \|_K) \subset \mathcal{B}(H_K, \sigma)$.

V - RELATIVE COMPACITE DANS H_K ET $\mathcal{D}(M^+)$.-

On se propose maintenant d'établir des critères de relative compacité dans les espaces H_K et $\mathcal{D}(M)$. Ces critères seront utilisés dans l'étude des divers modes de convergence des suites de mesures aléatoires. On commence par donner une caractérisation générale des sous-ensembles relativement compacts d'un espace de Hilbert quelconque en utilisant un résultat de la théorie des espaces de Banach :

V.1. - Théorème :

Soit H un espace de Hilbert et d la distance définie par sa norme. Une partie G de H est relativement compacte si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad G \text{ est } \|\ \|_H - \text{bornée} \\ \quad\quad \text{et} \\ \text{(ii)} \quad \forall \varepsilon > 0 \,, \quad \exists V \text{ s.e.v. de dimension finie de } H \text{ tel que} \end{cases}$$

$$\sup_{g \in G} d(g,V) < \varepsilon \quad .$$

V.1.1. - Démonstration : Supposons d'abord G relativement compacte. Alors (i) est vraie. Pour prouver (ii) on utilise le résultat suivant vrai pour tout espace de Banach donc en particulier pour H .

Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad \text{(au sens } \|\ \|_H) & (1) \\ \text{et} & \\ G \subset \overline{co} \, \{u_n \,,\, n \in \mathbb{N}\} & (2) \end{cases}$$

($\overline{co}$ désignant l'enveloppe convexe équilibrée fermée).

Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé. D'après (1) il existe un entier m tel que :

$$\forall n > m \quad , \qquad ||u_n|| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Notons $V = [u_n \ , n \leq m]$ le sous-espace vectoriel de H engendré par les u_n $(n \leq m)$. Si g est un élément quelconque de G, on peut d'après (2) l'approcher à $\frac{\varepsilon}{2}$ près par un élément de $\text{co}\,\{u_n \ , n \in \mathbb{N}\}$ donc de la forme $\sum\limits_{i\in I} t_i\, u_i$ où : I est une partie finie de $\mathbb{N}$, et les réels t_i $(i \in I)$ vérifient : $\sum\limits_{i\in I} |t_i| \leq 1$.

Par conséquent :
$$d(g,V) \leq \frac{\varepsilon}{2} + d\Big(\sum_{i\in I} t_i\, u_i \ , V\Big) \ .$$

Or en désignant par pr_V la projection orthogonale de H sur V on a :

$$d\Big(\sum_{i\in I} t_i\, u_i, V\Big) = \Big|\Big| \sum_{i\in I} t_i\, u_i - pr_V\Big(\sum_{i\in I} t_i\, u_i\Big)\Big|\Big| = \Big|\Big| \sum_{\substack{i\in I\\ i>m}} t_i\, (u_i - pr_V(u_i))\Big|\Big|$$

$$\leq \sum_{\substack{i\in I\\ i>m}} |t_i|\ ||u_i|| \leq \Big(\sum_{\substack{i\in I\\ i>m}} |t_i|\Big) \sup_{i>m} ||u_i|| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Donc, pour tout g dans G : $\qquad d(g,V) < \varepsilon$.

Réciproque : On suppose maintenant que (i) et (ii) sont vraies. Pour montrer la relative compacité de G dans H, on prend une suite quelconque $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G et on prouve qu'elle a une sous-suite qui est de Cauchy dans H.

H étant réflexif, ses boules fermées sont $\sigma(H,H')$ compactes. Il résulte donc de (i) que G est $\sigma(H,H')$-relativement compact.

Le théorème d'Eberlein Smulian nous permet alors d'extraire de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(h_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui soit $\sigma(H,H')$ - convergente (cf. [26]).

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et V un s.e.v. de dimension finie de H vérifiant (ii) pour cet ε. Dans V, $pr_V(h_{n_p})$ converge au sens $\sigma(H,H')$ donc aussi au sens $\sigma(V,V')$ donc aussi en norme puisque V est de dimension finie.
Il en résulte que $(pr_V(h_{n_p}))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de V. En choisissant alors $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mathrm{Min}(p,q) > m \Longrightarrow \|pr_V(h_{n_p}) - pr_V(h_{n_q})\| < \varepsilon \quad . \tag{3}$$

On a alors la majoration :

$$\|h_{n_p}-h_{n_q}\| \leq \|h_{n_p}-pr_V(h_{n_p})\| + \|pr_V(h_{n_p})-pr_V(h_{n_q})\| + \|pr_V(h_{n_q})-h_{n_q}\| \quad .$$

Le 1er et le 3ème termes sont majorés par ε d'après (ii), le deuxième terme aussi d'après (3), $(h_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite de Cauchy.

V.1.2. - Remarque :

Si G est compact, pr_V étant continue, $pr_V(G)$ est alors aussi compact et on a :

$$d(g,V) = d(g,pr_V(G)) \qquad (\forall g \in G)$$

Compte-tenu du théorème V.1. on en déduit que les compacts de H sont exactement les fermés dont on peut approcher uniformément les éléments par ceux d'un compact de dimension finie (donc fermé borné de dimension finie).

V.2. - Exemple : les cubes de Hilbert.

V.2.1. - Définition :

Soit $\{g_i\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée de H et $\{\alpha_i\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$ une suite de réels positifs vérifiant :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^2 < + \infty \quad .$$

On appelle cube de Hilbert construit sur $(g_i,\ i \in \mathbb{N})$ et $(\alpha_i,\ i \in \mathbb{N})$ le sous-ensemble C de H défini par :

$$C = \{h \in H\ ,\quad h = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\ g_i \qquad |a_i| \leq \alpha_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}\}\ .$$

Avec le théorème V.1. la compacité de C est immédiate.

V.2.2. - Remarque :

Si $(g_i\ ,\ i \in \mathbb{N})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}(M)$ avec $g_i = \mathcal{V}(\nu_i)$ (cf. I.4.3. et V.5.1.) et si les α_i vérifient la condition supplémentaire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\alpha_i|\ |\nu_i|(X) < + \infty$$

alors C est un compact inclus dans $\mathcal{V}(M)$.

V.3. - Proposition.

On suppose H séparable

i) G bornée est relativement compacte dans H si et seulement si il existe une base hilbertienne $\{g_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists m \in \mathbb{N} \ , \quad \sup_{g \in G} \sum_{n \geq m} \langle g, g_n \rangle^2 < \varepsilon \qquad \text{(V.3.1.)}$$

ii) Si la condition (V.3.1.) est vérifiée pour une base hilbertienne de H, elle l'est pour toute base hilbertienne.

Preuve de (i) : D'après le théorème V.1. la condition (V.3.1.) est évidemment suffisante pour la relative compacité de G. Pour prouver sa nécessité on procède par itération :

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$ dans le théorème V.1. :

- Pour $\varepsilon = 1$ on a un sous-espace de dimension finie V_1 tel que $\sup_{g \in G} d(g, V_1) < 1$. On choisit alors dans V_1 une base orthonormée $g_1, \ldots, g_{m_1}$.

- Ensuite pour $m = 2$, il existe un s.e.v. de dimension finie V'_2 tel que $\sup_{g \in G} d(g, V'_2) < \frac{1}{2}$. Soit V_2 le s.e.v. engendré par V_1 et V'_2 on aura a fortiori $\sup_{g \in G} d(g, V_2) < \frac{1}{2}$ et on pourra compléter la base $\{g_1, \ldots, g_{m_1}\}$ de V_1 en une base orthonormée de V_2 etc ...

G est alors inclus dans le s.e.v. fermé de H engendré par la famille orthonormée ainsi construite de sorte que si on complète cette famille pour en faire une base hilbertienne de H (que nous noterons encore $(g_n, n \in \mathbb{N})$) on a $\langle g, g_n \rangle = 0$ $(g \in G)$ pour tous les g_n ainsi "rajoutés" et (V.3.1.) est ainsi vérifiée.

Preuve de (ii) : Soit G une partie bornée de H vérifiant (V.3.1.). Notons $\{h_n , n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne quelconque de H. Considérons alors la suite de fonctions θ_m définies par :

$$\theta_m \quad : \begin{cases} \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ g \longrightarrow \sum_{n \geq m} \langle g,h_n \rangle^2 = \theta_m(g) \end{cases}$$

$(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues décroissant vers 0 sur le compact $\bar{G}$. D'après le théorème de Dini elle converge uniformément vers 0 sur $\bar{G}$ ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists m \in \mathbb{N}^* \ , \quad n \geq m \Longrightarrow \sup_{g\in\bar{G}} \sum_{n\geq m} \langle g,h_n \rangle^2 < \varepsilon \ .$$

V.4. - Application au cas où $G = \mathcal{V}(M)$, $M \subset \mathcal{M}$.

Dans le cas où G est l'image par $\mathcal{V}$ d'un ensemble M de mesures bornées on peut donner, compte tenu de la proposition V.3. la traduction suivante du théorème V.1.

V.4.1. - Proposition :

Soit M une partie de $\mathcal{M}$. $\mathcal{V}(M)$ est relativement compact dans H_K si et seulement si :

i) $\sup_{\mu\in M} \int K \, d\mu \otimes \mu < +\infty$

et

ii) Il existe une base hilbertienne $\{g_i \ , \ i \in \mathbb{N}\}$ de H_K telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists n \in \mathbb{N} \ , \quad \sup_{\mu\in M} \left(\int K \, d\mu \otimes \mu - \sum_{i=0}^{n} \left(\int g_i \, d\mu \right)^2 \right) < \varepsilon \ .$$

V.4.2. - Corollaire :

S'il existe une mesure positive bornée ν telle que pour toute mesure μ de M on ait $|\mu| \leq \nu$ alors $\vartheta(M)$ est relativement compact dans H_K .

Démonstration :

- (i) est vérifiée puisque :

$$\forall \mu \in M : \int K \, d\mu \otimes \mu \leq \int_{X^2} (\operatorname{Sup} |K|) \, d|\mu \otimes \mu| =$$

$$= |\mu| \otimes |\mu| (X^2) \operatorname*{Sup}_{X^2} K \leq \nu (X)^2 \operatorname*{Sup}_{X^2} K .$$

- Vérification de (ii) :

Soit $\{g_i , i \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormée quelconque de H_K . On a alors :

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x) \, g_i(y) \qquad (x,y) \in X^2 .$$

Et cette série est absolument convergente puisque :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |g_i(x) \, g_i(y)| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} (g_i(x)^2 + g_i(y)^2) \leq K(x,x) + K(y,y) < + \infty .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et n un entier dont le choix sera précisé ultérieurement. On a alors :

$$\int K \, d\mu \otimes \mu = \int (\sum_{i=0}^{+\infty} g_i \otimes g_i) \, d\mu \otimes \mu = \int [\sum_{i=0}^{n} g_i \otimes g_i + \sum_{i>n} g_i \otimes g_i] \, d\mu \otimes \mu$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (\int_X g_i \, d\mu)^2 + \int_{X^2} (\sum_{i>n} g_i \otimes g_i) \, d\mu \otimes \mu \qquad \text{de sorte que :}$$

$$\int K\, d\mu \otimes \mu - \sum_{i=0}^{n} \left(\int g_i\, d\mu\right)^2 \leqslant \int_{X^2} \sum_{i>n} |g_i(x)\, g_i(y)|\, |\mu \otimes \mu|(dx,dy)$$

$$\leqslant \int_{X^2} \sum_{i>n} |g_i(x)\, g_i(y)|\, \nu \otimes \nu\, (dx,dy)\ .$$

Il ne nous reste plus alors qu'à appliquer le théorème de convergence monotone pour rendre ce dernier majorant inférieur à ε pour n assez grand :

Justification :

- $\int_{X^2} \sum_{i=0}^{+\infty} |g_i(x)\, g_i(y)|\, \nu \otimes \nu(dx,dy) < +\infty$ car ν est une mesure positive bornée sur X et : $\sum_{i=0}^{+\infty} |g_i(x)\, g_i(y)| \leqslant K(x,x) + K(y,y)$

$$\leqslant 2 \sup_{X^2} K < +\infty$$

- $\sum_{i>n} |g_i(x)\, g_i(y)|$ tend vers 0 en décroissant quand n tend vers $+\infty$ à cause de la convergence absolue de $\sum g_i(x)\, g_i(y)$.

L'entier n étant ainsi fixé on a alors

$$\sup_{\mu \in M} \left(\int K\, d\mu \otimes \mu - \sum_{i=0}^{n} \left(\int g_i\, d\mu\right)^2\right) < \varepsilon\ .$$

Avec des hypothèses légèrement moins générales sur le noyau K , on obtient la condition suffisante de relative compacité beaucoup plus maniable suivante :

V.4.3. - Proposition :

S'il existe une base orthonormée $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de H_K telle que la série : $\sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)^2$ converge uniformément sur X, et si : $\sup_{\mu \in M} |\mu|(X) < +\infty$ alors $\vartheta(M)$ est relativement compact dans H_K .

Démonstration :

On utilise V.3. (i). Posons $c = \operatorname{Sup}_{\mu \in M} |\mu|(X)$.

D'après l'inégalité de Hölder on a :

$$\forall \mu \in M \, , \quad \forall i \in \mathbb{N} \, , \quad \left(\int g_i \, d\mu\right)^2 \leq \left(\int |g_i| \times 1_X \, d|\mu|\right)^2 \leq \left(\int |g_i|^2 \, d|\mu|\right) \times |\mu|(X)$$

d'où
$$\sum_{i \geq m} \left(\int g_i \, d\mu\right)^2 \leq c \sum_{i \geq m} \int g_i^2 \, d|\mu| = c \int \left(\sum_{i \geq m} g_i^2\right) d|\mu|$$
$$\leq c^2 \, \Big|\Big| \sum_{i \geq m} g_i^2 \Big|\Big|_\infty$$

et ce dernier majorant tend vers 0 par hypothèse. Donc :

$$\operatorname{Sup}_{\mu \in M} \sum_{i \geq m} \left(\int g_i \, d\mu\right)^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \quad m \to +\infty \; .$$

V.5. - Relative compacité dans $\mathcal{I}(M)$.

Le théorème V.1. ou la proposition V.3. permettent de caractériser tous les compacts de H_K . Pour autant ils ne résolvent pas la question de la (relative) compacité dans $\mathcal{I}(M)$. En effet si $\mathcal{I}(M)$ est relativement compact dans H_K , sa fermeture peut contenir des éléments qui ne soient pas dans $\mathcal{I}(M)$.

Or dans l'étude des théorèmes de convergence des suites de mesures aléatoires il peut être utile de disposer de critères de relative compacité dans $\mathcal{I}(M)$.

On se propose donc dans ce paragraphe d'obtenir des compacts non triviaux formés uniquement d'éléments de $\mathcal{I}(M)$. On commence par quelques compléments relatifs aux bases hilbertiennes de H_K .

V.5.1. - Une base orthonormée de $\mathcal{V}(M)$.

V.5.1.1. - Proposition : Dans les conditions du théorème I.4.1. et en supposant μ finie la base orthonormée $\{\sqrt{c_n}\, h_n \ , \ n \in N\}$ de H_K est constituée en fait uniquement d'éléments de $\mathcal{V}(M)$.

Preuve : D'après I.4.1. (iii) on a :

$$\forall n \in N \quad , \quad c_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{c_n}\, h_n = \int K(.,y) \frac{h_n(y)}{\sqrt{c_n}} \, d\mu(y) \qquad (1)$$

On sait que h_n est un élément de $L^2(\mu)$. Comme μ est finie il en résulte que h_n est aussi dans $L^1(\mu)$. Il en résulte que la fonction d'ensemble ν_n définie par :

$$\nu_n(A) = \int_A \frac{h_n(y)}{\sqrt{c_n}} \, d\mu(y) \qquad A \in \mathcal{B}$$

est une mesure à signe sur $\mathcal{B}$, absolument continue par rapport à μ et de densité $\frac{h_n}{\sqrt{c_n}}$. La formule (1) peut alors s'écrire

$$\sqrt{c_n}\, h_n = \mathcal{V}(\nu_n) \quad .$$

On a donc bien ainsi une base orthonormée d'éléments de H_K $\{\mathcal{V}(\nu_i), \ i \in N\}$ où les ν_i sont toutes absolument continues par rapport à μ .

Remarquons d'ailleurs que réciproquement si on connaît une base hilbertienne de H_K de la forme $\{\mathcal{V}(\nu_i) \ , \ i \in \mathbb{N}\}$ alors les ν_i sont absolument continues par rapport à une même mesure positive bornée. Il suffit de poser $\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i |\nu_i|(X)} \, |\nu_i|$.

V.5.2. - Proposition : Si X est métrique séparable et si M est une partie de M pour laquelle il existe un élément ν de M^+ tel que :

$$\forall \mu \in \mathrm{M} \ , \quad |\mu| \leqslant \nu \quad .$$

Alors $\overline{\psi(\mathrm{M})}$ est un compact de H_K , inclus dans $\psi(M)$.

Démonstration :

- On commence par remarquer que l'on a : $\forall \mu \in \mathrm{M}$, $|\mu| \leqslant \nu + \eta$ où η est une mesure positive bornée chargeant les ouverts. Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas cas où ν charge les ouverts. On peut alors appliquer le théorème I.4.1. (en remplaçant μ par ν dans les notations du théorème).

- Pour tout μ dans M on a : μ est absolument continue par rapport à ν et $|\frac{d\mu}{d\nu}| \leqslant 1$ ν-presque partout puisque $|\mu| \leqslant \nu$.

Par conséquent : $\frac{d\mu}{d\nu} \in L^2(\nu)$ et de plus $||\frac{d\mu}{d\nu}||_{L^2(\nu)} \leqslant \nu(X)$, $\{\frac{d\mu}{d\nu}$, $\mu \in \mathrm{M}\}$ est donc borné dans $L^2(\nu)$ donc faiblement $(\sigma(L^2(\nu), \ L^2(\nu)))$ relativement compact.

- On sait d'après le corollaire V.4.2. que $\overline{\psi(\mathrm{M})}$ est un compact de H_K. Il reste à montrer que $\overline{\psi(\mathrm{M})} \subset \psi(M)$.

Pour cela on se donne une suite quelconque $(\psi(\mu_n), \ n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\psi(\mathrm{M})$ convergeant en $|| \ ||_K$ vers l'élément g de H_K et on démontre que g est en fait dans $\psi(M)$.

$\{\frac{d\mu_n}{d\nu}$, $n \in \mathbb{N}\}$ est faiblement relativement compact dans $L^2(\nu)$ donc on peut extraire de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(\mu_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que quand $p \to +\infty$ $\quad \dfrac{d\mu_{n_p}}{d\nu} \xrightarrow{\sigma(L^2(\nu),L^2(\nu))} h \qquad h \in L^2(\nu)$.

- Pour tout x de X, $K(x,.)$ est dans $L^2(\nu)$. On en déduit donc :

$$\forall x \in X \int_X K(x,y) \frac{d\mu_{n_p}}{d\nu}(y)\ \nu(dy) \longrightarrow \int_X K(x,y)\ h(y)\ \nu(dy) \quad \text{quand } p \to +\infty .$$

Autrement dit $\psi(\mu_{n_p})$ converge simplement sur X vers $\int K(.,y)\ h(y)\ \nu(dy)$.

- Comme ν est bornée h est aussi dans $L^1(\nu)$ et la mesure γ de densité h par rapport à ν est bien définie et est dans M.

On a alors $\quad \psi(\gamma) = \int K(.,y)\ h(y)\ \nu(dy)$.

- D'autre part la convergence en norme $\|\ \|_K$ de $\psi(\mu_n)$ vers g entraîne sa convergence simple sur X vers la même limite donc aussi celle de $\psi(\mu_{n_p})$ on en déduit $g = \psi(\gamma)$ ce qui achève la démonstration.

V.6. - Relative compacité et équitension.

On étudie maintenant des conditions suffisantes de relative compacité de $\psi(M)$ dans H_K, $\psi(M^+)$ ou $\psi(M)$ inspirées du théorème de Prokhorov sur la relative compacité d'un ensemble de mesures pour la topologie faible.

V.6.1. - Théorème : Soit X un espace métrique, K un noyau reproduisant continu borné sur X^2 définissant un produit scalaire sur M. Soit M une partie de M^+ vérifiant :

a) $\operatorname{Sup} \{\mu(X)\ ,\ \mu \in M\} < +\infty$,

b) $\forall \eta > 0\ ,\ \exists\ C$ compact de X, $\operatorname{Sup} \{\mu(X \setminus C),\ \mu \in M\} < \eta$

Alors $\psi(M)$ est relativement compact dans H_K .

<u>*Démonstration*</u> : On prouve que $\mathcal{J}(M)$ vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème V.1.

- La preuve de (i) est immédiate :

$$\forall \mu \in M \qquad ||\mathcal{J}(\mu)||_K^2 = \int_{X^2} K \, d\mu \otimes \mu \leq \sup_{X^2} K \; \mu(X)^2$$

et on conclut avec (a).

- Pour prouver (ii), soit $\varepsilon > 0$ fixé, nous allons construire un s.e.v. V de dimension finie de H_K tel que

$$\sup_{\mu \in M} d(\mathcal{J}(\mu), V) < \varepsilon \quad .$$

Soit $\delta > 0$, $r > 0$ et $\eta > 0$ trois réels dont le choix en fonction de ε sera précisé ultérieurement. Soit C un compact associé à η par l'hypothèse (b). Il existe un recouvrement fini $\bigcup_{i=0}^{m} B(x_i,r)$ de C par des boules de même rayon. Notons alors V le s.e.v. de H_K engendré par $\{K(x_i,.), \ i = 0,\dots,m\}$. Comme

$$d(\mathcal{J}(\mu),V) = \sup \{|\langle f,\mathcal{J}(\mu)\rangle| \ , \ ||f||_K = 1 \ \text{ et } \ f \in V^{\perp}\}$$

on va prouver d'abord que les f de $V^{\perp}$ tels que $||f||_K = 1$ sont uniformément "petits" sur C :

Soit $f \in V^{\perp}$: $\forall i \in \{0,\dots,m\} \quad f \perp K(x_i,.)$ donc $f(x_i) = 0$.

De plus : $\forall x \in C$, $\exists i \in \{0,\dots,m\}$, tel que $x \in B(x_i,r)$.

On a alors :

$$|f(x)|^2 = |f(x)-f(x_i)|^2 = |\langle f,K(x,.)-K(x_i,.)\rangle|^2 \leq ||f||_K^2 \; ||K(x,.)-K(x_i,.)||^2$$

$$\leq K(x,x) + K(x_i,x_i) - 2K(x,x_i) \quad . \tag{1}$$

Comme K est continu sur X^2 donc uniformément continu sur le compact C^2 , le dernier majorant dans (1) peut être rendu inférieur à δ^2 en prenant r

suffisamment petit. (Ce choix de r dépend alors de C donc de η, de K et de δ mais non de f).

Donc : $\forall x \in C \quad , \quad \forall f \in V^{\perp}$ tel que $||f||_K = 1 \; , \; |f(x)| < \delta$. (2)

On en déduit la suite de majorations :

$$\sup_{\mu\in M} d(V,\psi(\mu)) = \sup_{\mu\in M} ||pr_{V^{\perp}}(\psi(\mu))||_K = \sup_{\mu\in M} \sup_{\substack{f\in V^{\perp} \\ ||f||_K=1}} |\langle f,\psi(\mu)\rangle|$$

$$= \sup_{\mu\in M} \sup_{\substack{||f||_K=1 \\ f\in V^{\perp}}} \left|\int f \, d\mu\right| \leq \sup_{\mu\in M} \sup_{\substack{||f||_K=1 \\ f\in V^{\perp}}} \left[\delta\mu(X) + \left|\int_{X\setminus C} f \, d\mu\right|\right]$$

$$\leq \delta \sup_{\mu\in M} \mu(X) + \sup_{\mu\in M} \sup_{\substack{f\in V^{\perp} \\ ||f||_K=1}} \left[||f||_K \, . \, ||\psi(1_{X\setminus C} \, . \, \mu)||_K\right]$$

$$\leq \delta \sup_{\mu\in M} \mu(X) + \sup_{X^2} |K|^{1/2} \sup_{\mu\in M} \mu(X \setminus C)$$

$$\leq \delta \sup_{\mu\in M} \mu(X) + \eta \sup_{X^2} |K|^{1/2} \qquad (3)$$

Les hypothèses (a) et (b) nous permettent de choisir δ et η de façon à rendre le dernier majorant de (3) inférieur à ε. Les choix de C , de r et des x_i donc de V en découlent.

V.6.2. - Remarque : Si X est métrique séparable le théorème V.6.1. peut se déduire plus simplement du théorème de Prokhorov et du théorème de faible comparaison de C. Guilbart :

<u>*1^er cas*</u> : Si la topologie trace de $|| \ ||_K$ sur M^+ est la topologie faible alors V.6.1. n'est que la condition suffisante de relative compacité du théorème de Prokhorov (remarquons que pour cette partie du théorème de Prokhorov la complétude de X n'est pas nécessaire (cf. [8] p. 362-365).

<u>*2^ème cas*</u> : Si la topologie trace de $|| \ ||_K$ sur M^+ n'est pas la topologie faible, on sait d'après le théorème de faible comparaison de C. Guilbart (1) (cf. [10] p. 14) qu'elle est moins fine que la topologie faible. M étant alors séquentiellement relativement compact dans M^+ pour la topologie faible (Prokhorov) l'est a fortiori pour une topologie moins fine.

V.6.3. - Corollaire :

Si X est métrique séparable, le théorème V.6.1. fournit une condition suffisante de relative compacité dans $\psi(M^+)$ (et pas seulement dans H_K).

<u>*Preuve*</u> : Il faut montrer que $\overline{\psi(M)} \subset \psi(M^+)$.

Soit donc $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente quelconque de M. Notons $h = \lim\limits_{n\to+\infty} \psi(\mu_n)$ (au sens de $|| \ ||_K$).

(μ_n) admet une sous-suite convergeant vers une mesure positive bornée μ pour la topologie faible puisque M est relativement compact dans M^+ pour cette topologie (Prokhorov).

Soit $(\mu_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite. On a :

---

(1) Les seuls produits scalaires que nous envisageons ici sont continus et se réintégrent i.e. $\langle\mu,\nu\rangle_K = \int \langle\delta_x,\delta_y\rangle \ \mu \otimes \nu \ (dx,dy)$ et $\langle\delta_x,\delta_y\rangle$ est une fonction continue de (x,y). On est donc bien dans les hypothèses du théorème de faible comparaison.

$$\forall f \in C(X) \qquad \lim_{p\to\infty} \int f \, d\mu_{n_p} = \int f \, d\mu \quad .$$

En particulier, puisque H_K est formé de fonctions continues bornées sur X :

$$\forall f \in H_K \qquad \lim_{p\to+\infty} \int f \, d\mu_{n_p} = \int f \, d\mu \quad .$$

En faisant $f = K(x,.)$ on en déduit $h = \psi(\mu)$ donc $h \in \psi(\mathcal{M}^+)$.

V.6.4.

Le théorème V.6.1. et son corollaire V.6.3. se généralisent aux mesures à signe à condition de remplacer partout μ par $|\mu|$ dans les majorations des énoncés et des démonstrations.

Théorème : Soit X un espace métrique, K un noyau reproduisant continu borné sur X^2 définissant un produit scalaire sur $\mathcal{M}$. Soit M une partie de $\mathcal{M}$ vérifiant :

a) $\operatorname{Sup} \{|\mu|(X), \mu \in M\} < +\infty$

b) $\forall \eta > 0 , \exists C$ compact de X , $\operatorname{Sup} \{|\mu|(X \setminus C), \mu \in M\} < \eta$.

Alors $\psi(M)$ est relativement compacte dans H_K .

Si de plus X est séparable, $\psi(M)$ est relativement compacte dans $\psi(\mathcal{M})$.

Pour le théorème de relative compacité pour la topologie faible sur $\mathcal{M}$ (au lieu de $\mathcal{M}^+$) cf. [25].

VI - COMPLEMENTS.-

VI.1. - Une généralisation de la construction d'un produit scalaire sur l'espace des mesures.

L'examen des résultats de densité dans $C(X)$ ou $C_o(X)$, ainsi que de mesurabilité de $\mathcal{J}(M)$ obtenus dans les cas X compact et X localement compact nous a suggéré la construction abstraite suivante qui généralise le procédé du I.1.) tout en englobant des résultats déjà obtenus.

VI.1.1. - Proposition :

Soit X un espace métrique, $C(X)$ l'espace de Banach pour la norme $\|\ \|_\infty$, des fonctions continues bornées sur X. On suppose qu'il existe un sous-espace fermé séparable $F(X)$ de $C(X)$, caractérisant les mesures. Soit L l'ensemble des formes linéaires continues sur $(F(X), \|\ \|_\infty)$. $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant une suite totale de $F(X)$ vérifiant :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (\|f_i\|_\infty)^2 < +\infty \quad .$$

On pose :

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u(f_i)\ v(f_i) \qquad (u,v) \in L^2 \tag{1}$$

et

$$K(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\ f_i(y) \qquad (x,y) \in X^2 \quad . \tag{2}$$

Alors K est un noyau reproduisant défini positif, l'espace de Hilbert H_K associé est formé d'éléments de $F(X)$, (1) définit un produit scalaire sur L et $(L, \langle\ \rangle)$ est isométrique à un sous-espace dense de H_K. $(M, \langle\ \rangle)$ est dense dans $(L, \langle\ \rangle)$.

Démonstration :

- *Définition du produit scalaire sur* L :

$F(X)$ étant fermé dans $C(X)$ est lui-même un espace de Banach. Notons $|| \ ||_{F'}$ la norme de son dual : $||u||_{F'} = \sup_{\substack{f \in F \\ ||f||_\infty \leq 1}} |u(f)|$.

L'hypothèse $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} ||f_i||_\infty^2 < +\infty \right)$ assure la convergence absolue de la série dans la définition de $\langle u,v \rangle$:

$$\forall u \in L, \quad \forall v \in L \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |u(f_i)\ v(f_i)| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} ||u||_{F'} \cdot ||v||_{F'} \ (||f_i||_\infty)^2$$

$$\leq ||u||_{F'} \cdot ||v||_{F'} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} (||f_i||_\infty)^2 < +\infty .$$

La bilinéarité de $\langle \ \rangle$ est alors évidente.

Pour la définie positivité il suffit de noter que :

$$\langle u,u \rangle = 0 \iff \sum_{i \in \mathbb{N}} u(f_i)^2 = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N} \quad u(f_i) = 0 \quad .$$

Et comme $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est totale dans $F(X)$ cette dernière condition équivaut à la nullité de u.

- K *est un noyau reproduisant de type positif et* $H_K \subset F(X)$:

L'hypothèse " $\sum_{i \in \mathbb{N}} (||f_i||_\infty)^2 < +\infty$ " entraîne la convergence uniforme sur tout X de la série de fonctions définissant $K(x,.)$. Il en résulte que pour tout $x \in X$ la fonction $K(x,.)$ est un élément de $F(X)$. La même hypothèse assure la convergence de la série définissant K dans (2) et de plus K est borné sur X^2 .

Il est clair que K est un noyau de type positif (et même défini positif dès que la topologie de X est séparée : faire $u = v = \sum_{i\in I} a_i \delta_{x_i}$ dans (1)).

Les éléments de l'espace autoreproduisant H_K étant limites pour la norme $\| \ \|_K$ donc aussi pour la norme $\| \ \|_\infty$ de combinaisons linéaires finies des $K(x,.)$ et les $K(x_i,.)$ étant dans $F(X)$ on en déduit que H_K est un sous-espace vectoriel (au sens purement algébrique) de $F(X)$.

- *Plongement isométrique de* L *dans* H_K :

La démonstration est identique à celle de (I.2.1.) à ceci près que les théorèmes d'intégration sont remplacés par la continuité de u pour la norme $\| \ \|_\infty$.

On définit $\psi(u)$ $(u \in L)$ par :

$$\forall x \in X \qquad \psi(u)(x) = u(K(x,.)) \quad .$$

La convergence uniforme de la série définissant $K(x,.)$ nous permet alors d'écrire comme dans (I.2.1.) (1) :

$$\psi(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(f_i)\, f_i \quad . \tag{1'}$$

On note H_1 l'espace vectoriel de fonctions réelles sur X défini par

$$H_1 = \{\psi(u) \ , \ u \in L\} \quad .$$

Remarquons que H_1 est un s.e.v. de $F(X)$ à cause de la convergence uniforme de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} u(f_i)\, f_i$ $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u(f_i)\, f_i| \leq \|u\|_{F'} \sum_{i=0}^{+\infty} (\|f_i\|_\infty)^2\right)$.

ψ est une bijection linéaire de L sur H_1 : le seul point à vérifier est l'injectivité : $\psi(u) = 0 \Longrightarrow u(\psi(u)) = 0$ (car $\psi(u) \in F(X)$)

$$\Longrightarrow u\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u(f_i)\, f_i\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} u(f_i)^2 = 0$$ à cause de la

convergence uniforme de la série (1'). Donc $\langle u,u\rangle = 0$ donc $u = 0$

ψ est donc bien injective.

On munit alors H_1 du produit scalaire

$$\langle g,h\rangle = \langle \psi^{-1}(g),\ \psi^{-1}(h)\rangle \quad . \tag{2'}$$

Les lemmes 1, 2 et 3 de la démonstration de (I.2.1.) restent valables mutatis mutandis :

Lemme 1 : H_1 contient $\{K(x,.),\ x \in X\}$ et vérifie la propriété d'autoreproduction pour K.

Preuve : . $K(x,.) = \psi(\delta_x)$

$$\langle K(x,.),\ K(y,.)\rangle = \langle \delta_x, \delta_y\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x)\, f_i(y)$$

$$= K(x,y) \ .$$

Si $f = \psi(u)$, $\langle f,\ K(x,.)\rangle = \langle u,\delta_x\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u(f_i)\, f_i(x) = \psi(u)(x) = f(x)$.

Lemme 2 : $\forall f \in H_1$, $\forall u \in L$ $\langle f,\ \psi(u)\rangle = u(f)$.

Preuve : Si $f \in H_1$, $f = \psi(v)$

$$\langle \psi(v),\ \psi(u)\rangle = \langle v,u\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} v(f_i)\, u(f_i) = u\left(\sum_{i=0}^{+\infty} v(f_i)\, f_i\right) = u(\psi(v)) = u(f) \ .$$

(L'interversion de u et $\sum$ provenant de la convergence uniforme de la série $\sum_{i=0}^{+\infty} v(f_i)\, f_i$) .

Lemme 3 : $\forall u \in L \;, \qquad \|\psi(u)\|_\infty \leq (\sup_{X^2} K)^{1/2} \; \|\psi(u)\|.$

Même démonstration qu'au § I.2.1.

A partir de là, on peut reproduire mot pour mot la fin de la démonstration I.2.1. en remplaçant simplement le mot "mesure" par "forme linéaire continue sur $F(X)$" les notations M et $\int f\, d\mu$ par L et $u(f)$ respectivement ... (On prouve de même la proposition I.2.2. :

$$\forall f \in H_K \quad \forall u \in L \qquad \langle f, \psi(u)\rangle = u(f) \;) \;.$$

L'injection isométrique de L dans H_K par ψ est donc démontrée.

En notant M_o (resp. H_o) l'espace des combinaisons linéaires finies des mesures de Dirac (resp. des $K(x,.)$, $x \in X$) , la situation peut se résumer dans le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_o \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[r, phantom, "\subset"] & L \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\psi"'] & \bar{L} \\
H_o \arrow[r, phantom, "\subset"] & \psi(M) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \psi(M) \arrow[r, phantom, "\subset"] & H_K
\end{tikzcd} \qquad (\bar{L} \text{ étant complété de } (L, \langle\ \rangle))$$

Comme H_o est dense dans H_K et ψ est isométrique il est alors clair que $\bar{L}$ et H_K sont isométriques par le prolongement de ψ à $\bar{L}$ et que $(M, \langle\ \rangle)$ est un s.e.v. dense de $(L, \langle\ \rangle)$.

VI.1.2. - Corollaires :

Avec les hypothèses de VI.1.1. on a alors :

i) $(H_K \,,\, \|\ \|_\infty)$ est dense dans $F(X)$.

ii) Les éléments de $\psi(L)$ dans H_K sont caractérisés par :

$$h \in \mathcal{V}(L) \iff \sup_{\substack{f \in H_K \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle h,f\rangle| < +\infty \ .$$

iii) $\mathcal{V}(L)$ est un borélien de H_K .

Preuve :

i) On sait déjà que : $H_K \subset F(X)$. Si u est un élément de F s'annulant sur H_K on a alors $\forall f \in H_K \quad u(f) = 0$.

Mais $u(f) = \langle f, \mathcal{V}(u)\rangle$ donc $\mathcal{V}(u) = 0$ donc $u = 0$ et H_K est bien dense dans $F(X)$ pour la $\|\ \|_\infty$ d'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach.

ii) Se démontre exactement comme (II.2.) en remplaçant partout $\int f\, d\mu$ par $u(f)$, $C(X)$ par $F(X)$ et le théorème de Riesz par ... la définition de L !

iii) H_K étant séparable par construction (théorème de séparabilité de C. Guilbart) on peut reprendre la démonstration de (II.3.) en remplaçant $\mathcal{V}(M)$ par $\mathcal{V}(L)$.

VI.1.3. - Remarques :

- La construction VI.1.1. englobe les principaux cas étudiés auparavant :

Si X est compact on prend $F(X) = C(X)$ et on retrouve (II.1. , II.2. et II.3.),

Si X est localement compact, on prend $F(X) = C_o(X)$ et on retrouve II.4. , Si X est séparable, on prend $F(X) = U(X)$ espace des fonctions réelles uniformément continues [1] bornées sur X et on retrouve la construction d'un noyau induisant la topologie faible sur M^+ donnée par C. Guilbart.

- Il serait souhaitable de disposer d'une caractérisation des éléments de M dans L permettant de démontrer que M est un borélien de $(L, < >)$. Il en résulterait alors la mesurabilité de $\mathcal{J}(M)$ dans $\mathcal{J}(L)$ puis comme $\mathcal{J}(L)$ est lui même borélien de H_K celle de $\mathcal{J}(M)$ dans H_K. A défaut d'une telle caractérisation, on pourrait adopter un point de vue légèrement différent : définir les "pseudo-mesures aléatoires" comme des variables aléatoires à valeur dans $\mathcal{J}(L)$ presque sûrement et utiliser des critères de relative compacité dans $\mathcal{J}(M)$ pour pouvoir passer de résultats sur les pseudo-mesures à des résultats sur les mesures.

VI.2. - Non-extension aux mesures de Radon.

On peut se demander si la construction d'un produit scalaire telle que nous l'avons développée en I.1. ou VI.1. est adaptable à l'espace des mesures de Radon sur un espace localement compact X. La réponse est négative. Nous en esquissons ci-dessous la démonstration.

Une mesure de Radon réelle μ sur l'espace localement compact X est une forme linéaire sur l'espace $C_c(X)$ des fonctions continues à support compact dans X vérifiant :

$$\forall C \text{ compact de } X, \quad \exists M_c > 0 \quad \text{tel que : } |\mu(f)| \leq M_c \, ||f||_\infty$$

pour toute f continue à support dans C.

$C_c(X)$ étant muni de la topologie limite inductive des topologies de la convergence uniforme sur les sous-espaces $C_c(C)$ (C compact de X)

---

(1) pour une distance d' équivalente à d convenablement choisie (cf. démonstration du th. d'existence de C. Guilbart).

l'espace des mesures de Radon est le dual topologique de $\mathcal{C}_c(X)$.

Supposons alors que l'on dispose d'une suite de fonctions $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ totale dans $\mathcal{C}_c(X)$ et qu'en remplaçant chaque f_i par un homothétique suffisamment petit en $\| \ \|_\infty$ on puisse définir $\langle\mu,\nu\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f_i)\,\nu(f_i)$ pour tout couple (μ,ν) de mesures de Radon.

Il serait alors nécessaire que pour toute mesure de Radon μ on ait : $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f_i)^2 < +\infty$. Nous indiquons sans détailler les démonstrations la construction possible d'un contre-exemple.

Lemme 1 : L'existence de la suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ implique la dénombrabilité à l'infini de X.

Lemme 2 : $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{Supp}(f_i)}}$.

Lemme 3 : On peut extraire de $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(f_{i_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \cdot\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{Supp}(f_{i_n})}} = X \\ \cdot\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{Supp}(f_{i_n})}} \cap \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{Supp}(f_{i_k})\right) \neq \emptyset \ . \end{cases}$$

Lemme 4 : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de points de X vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n \in \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{Supp}(f_{i_n})}} \cap \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{Supp}(f_{i_k})\right)$$

alors il n'y a qu'un nombre fini de termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans tout compact C de X.

Construction du contre-exemple :

On choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant l'hypothèse du lemme 4 (c'est possible d'après le lemme 3). On pose alors :

$$\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \, \delta_{x_j}$$

où les réels a_j vérifient la relation de récurrence :

$$f_{i_n}(x_n) \, . \, a_n = 1 + \|f_{i_n}\|_\infty \sum_{k\leq n-1} |a_k| \, .$$

La conclusion du lemme 4 assure que μ est bien une mesure de Radon.

On a alors :

$$\mu(f_{i_n}) = 1 + \|f_{i_n}\|_\infty \sum_{k\leq n-1} |a_k| + \sum_{k\leq n-1} a_k \, f_{i_n}(x_k) \geq 1$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(f_{i_n})^2 = +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f_i)^2 = +\infty$.

DEUXIEME PARTIE

MESURES ALEATOIRES

INTRODUCTION.

Nous envisageons maintenant l'application à l'étude des mesures aléatoires des résultats obtenus dans la $1^{ère}$ partie.

D'une manière générale une mesure aléatoire est une variable aléatoire à valeur dans un espace de mesures muni de la tribu borélienne d'une certaine topologie. Des auteurs comme Jagers, Kallenberg ont étudié les mesures aléatoires sur un espace localement compact à base dénombrable en prenant pour espace de mesures l'espace des mesures de Radon positives muni de la topologie vague (cf. [13]).

J. Geffroy a d'autre part introduit la topologie faible à distance finie sur l'espace des mesures positives finies sur les boréliens bornés. L'utilisation de cette topologie constitue le point de départ des travaux de Geffroy, Jacob, Quidel, Zéboulon ,... sur les mesures aléatoires positives (cf. [6], [7], [11], [19]). Pour l'étude des mesures aléatoires à signe, signalons en outre un article de P. Jacob (cf. [12]).

Si l'on se restreint à un espace de mesures bornées alors la topologie induite sur M par $\| \ \|_K$ (avec les notations de la $1^{ère}$ partie) peut permettre l'étude des mesures aléatoires. Un cas important sera dans cette optique celui où la topologie trace sur M^+ est la topologie faible (théorème d'existence de C. Guilbart).

Par ailleurs, les travaux évoqués ci-dessus concernent essentiellement les mesures positives. L'étude des mesures à signe soulève d'importantes difficultés. Par exemple lorsque X est métrique séparable M muni de la topologie faible n'est pas métrisable contrairement à M^+ .

Pourtant les mesures aléatoires à signe apparaissent naturellement même dans l'étude des mesures aléatoires positives, par exemple si l'on souhaite centrer une suite de mesures aléatoires positives pour étudier son comportement asymptotique. Le cadre H_K où la topologie sur M est définie par une métrique euclidienne semble alors relativement bien adapté à une étude des mesures aléatoires à signe.

Une fois que l'on a décidé de munir M de la topologie définie par la norme $|| \; ||_K$, deux alternatives se présentent pour la définition d'une mesure aléatoire :

On peut définir une mesure aléatoire comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace M muni de la tribu borélienne associée à la topologie du produit scalaire $< \; >_K$ sur M. Ce point de vue a été adopté par Sbai qui dans [21] a donné une étude de divers modes de convergence de suites de mesures aléatoires. L'avantage est d'éviter "par construction" les problèmes de mesurabilité de $\mathcal{J}(M)$ dans H_K . Un tel choix nous semble cependant avoir un double inconvénient :

- $(M, < \; >_K)$ n'étant pas complet, on ne pourra parler de suite convergente dans M sans connaissance a priori de la limite qui ne pourrait être qu'un élément de M.

- Les propriétés des lois de probabilité sur un espace de Hilbert séparable ne pourront être pleinement exploitées.

La deuxième alternative, que nous choisirons pour la suite de ce travail, est de définir une mesure aléatoire comme variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Hilbert H_K prenant ses valeurs dans M avec une probabilité

1 (en identifiant H_K avec le complété de $(M, < >_K)$. On voit que cette construction suppose la mesurabilité de $\mathcal{V}(M)$ (ou de $\mathcal{V}(M^+)$ si l'on se limite aux mesures aléatoires positives). En effet la donnée d'une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ équivaut alors à celle d'une loi de probabilité $P_{\mu^\bullet}$ sur la tribu borélienne de H_K telle que : $P_{\mu^\bullet}(\mathcal{V}(M)) = 1$. Avec cette construction, on pourra ultérieurement exploiter les résultats connus concernant les lois de probabilité sur un espace de Hilbert séparable.

Dans [3] A. Berlinet a donné une étude de la mesure empirique en la considérant comme variable aléatoire à valeur dans H_K . La mesure empirique étant une mesure aléatoire, cette étude peut s'insérer dans le cadre que nous venons d'évoquer.

VII - MESURES ALEATOIRES COMME V.A. A VALEURS DANS H_K.-

Dans toute la suite, nous supposerons X métrique séparable et muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. K sera un noyau définissant un produit scalaire sur M. Nous identifierons M avec $\psi(M)$ et H_K avec le complété $\bar{M}_K$ de M pour $< >_K$.

Nous supposerons également que $\psi(M)$ ou $\psi(M^+)$ est un borélien de H_K. Nous avons vu en IV que cette hypothèse était légitime avec un choix convenable du noyau notamment dans les cas suivants :

X métrique compact

X métrique localement compact

X métrique séparable et complet.

La tribu borélienne de H_K sera notée $\mathcal{B}_K$. Nous supposerons *systématiquement que* H_K *est séparable.*

VII.1. - Définitions.

(Ω,A,P) étant un espace probabilisé on appelle mesure aléatoire (resp. mesure aléatoire positive) toute variable aléatoire $\mu^{\bullet}$ à valeurs dans $\bar{M}_K$ prenant ses valeurs P-presque sûrement dans M (resp. M^+).

$\psi \circ \mu^{\bullet}$ est alors une application de Ω dans H_K , $(A,\mathcal{B}_K)$-mesurable telle que :

$$P(\{\psi(\mu^{\bullet}) \in \psi(M)\}) = 1$$

resp. $$P(\{\psi(\mu^{\bullet}) \in \psi(M^+)\}) = 1 \quad .$$

La donnée d'une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ (resp. m.a. positive) sur $(X,\mathcal{B})$ équivaut ainsi à la donnée d'une mesure de probabilité notée

$P_{\mu^\bullet}$ et appelée loi de $\mu^\bullet$ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_K$ de H_K définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_K \qquad P_{\mu^\bullet}(B) = P(\{\psi(\mu^\bullet) \in B\})$$

et vérifiant $\quad P_{\mu^\bullet}(\psi(M)) = 1 \quad$ resp. $\quad P_{\mu^\bullet}(\psi(M^+)) = 1$

VII.2. - Proposition.

L'application $\nu^\bullet$ de Ω dans $\bar{M}_K$ est une mesure aléatoire si et seulement si :

i) $\exists \Omega' \in A \;,\quad P(\Omega') = 1 \quad$ et $\quad \nu^\bullet(\Omega') \subset M$

ii) Pour tout élément f de H_K, $\int_X f \, d\nu^\bullet$ est une variable aléatoire réelle.

Preuve : Bien sûr dans (ii) $\int f \, d\nu^\bullet$ n'est défini que P-presque sûrement.

La condition (i) est nécessaire d'après la définition des mesures aléatoires.

La nécessité de la condition (ii) se vérifie ainsi :

$$\forall \omega \in \Omega' \qquad \nu^\omega \in M \qquad \text{donc} \quad \int_X f \, d\nu^\omega = \langle f, \psi(\nu^\omega)\rangle_K \,.$$

On a alors la factorisation :

$$\forall \omega \in \Omega' \qquad \omega \longmapsto \nu^\omega \longmapsto \psi(\nu^\omega) \longmapsto \langle f, \psi(\nu^\omega)\rangle_K$$

de sorte que $\int f \, d\nu^\bullet$ est bien $(A, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mesurable puisque :

- $\nu^{\bullet}$ est $(A, \mathcal{B}_{\bar{M}_K})$ - mesurable comme mesure aléatoire ,
- ψ est une isométrie donc $(\mathcal{B}_{\bar{M}_K}, \mathcal{B}_K)$ - mesurable ,
- $\langle f,.\rangle_K$ est une forme linéaire continue donc $(\mathcal{B}_K, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - mesurable.

Comme H_K est supposé séparable, la suffisance des conditions (i) et (ii) résulte du lemme IV.5.2.

VII.3. - Remarques.

- Il résulte de l'interprétation des variables aléatoires réelles $\int f\, d\mu^{\bullet}$ $(f \in H_K)$ comme des produits scalaires $\langle f, \psi(\mu^{\bullet})\rangle$ qu'une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ est entièrement déterminée par la famille de variables aléatoires réelles $(\int f\, d\mu^{\bullet},\ f \in H_K)$.

- Ces variables aléatoires réelles jouent pour la théorie des mesures aléatoires considérées comme variables aléatoires à valeurs dans H_K un rôle analogue à celui joué par les v.a.r. $\mu^{\bullet}(B)$ pour B borélien borné dans la théorie des mesures aléatoires bâtie sur la topologie faible à distance finie. On peut les interpréter comme des "observations" de la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$.

- Dans [21] SBAI a montré que si la topologie trace de $\|\ \|_K$ sur M^+ est la topologie faible alors pour toute mesure aléatoire positive $\mu^{\bullet}$ et tout borélien borné B , $\mu^{\bullet}(B)$ est une variable aléatoire réelle. Sa démonstration dépend étroitement des propriétés de la topologie faible et ne semble pas généralisable à d'autres produits scalaires ni aux mesures à signe.

- D'une manière générale, le cadre H_K pour l'étude des mesures aléatoires est mieux adapté à une caractérisation "fonctionnelle" des mesures qu'à leur caractérisation comme "fonctions d'ensembles". De ce point de vue il peut être utile de disposer de v.a.r. de la forme $\int f\, d\mu^{\bullet}$ pour des f appartenant à un espace de fonctions plus large que H_K. Nous envisageons maintenant une telle extension dans les 3 principaux cas. On verra un exemple d'utilisation de ces résultats dans le théorème sur la loi des grands nombres.

VII.4. - Proposition.

Si X est métrique localement compact et si le noyau K définissant un produit scalaire sur M est continu sur X^2 et tend vers 0 séparément à l'infini, si $\mu^{\bullet}$ est une m.a. alors pour tout élément f de $C_o(X)$, $\int f\, d\mu^{\bullet}$ est une variable aléatoire réelle.

Corollaire : Si X est métrique compact et si le noyau K définissant un produit scalaire sur M est continu sur X^2, alors pour tout élément f de $C(X)$, $\int f\, d\mu^{\bullet}$ est une variable aléatoire réelle.

Démonstration : Soit $\mu^{\bullet}$ une mesure aléatoire.

Cas X localement compact :

Soit f un élément de $C_o(X)$. On sait que H_K est dense dans $C_o(X)$ pour la norme $\|\ \|_\infty$. Il est donc possible de choisir une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H_K vérifiant :

. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|h_n\|_\infty \leqslant 2\, \|f\|_\infty$

. quand $n \to +\infty \qquad h_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$.

$\mu^{\bullet}$ étant une mesure aléatoire, il existe un événement Ω' de probabilité 1 de la tribu $\mathcal{A}$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega' \qquad \mu^{\omega} \in \mathcal{M} \ .$$

On a alors par le théorème de convergence dominée (puisque f est bornée et μ^{ω} est une mesure à signe bornée) :

$$\forall \omega \in \Omega' \qquad \lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu^{\omega} = \int f \, d\mu^{\omega}$$

d'où : $\int f \, d\mu^{\bullet} = \lim_{n\to+\infty}$ p.s. $(\int h_n \, d\mu^{\bullet})$ ce qui prouve que $\int f \, d\mu^{\bullet}$ est bien une variable aléatoire réelle.

Cas X compact : Même démonstration en utilisant la densité de $(H_K \,, \|\ \|_{\infty})$ dans $C(X)$.

VII.5. - Proposition.

Si X est métrique séparable et si H_K est dense pour la norme $\|\ \|_{\infty}$ dans l'espace $U(X)$, si $\mu^{\bullet}$ est une mesure aléatoire positive, alors pour toute fonction continue bornée f sur X $\int f \, d\mu^{\bullet}$ est une variable aléatoire réelle.

Démonstration : Ces hypothèses sont vérifiées dans le cas du théorème d'existence de C. Guilbart où la topologie trace de $\|\ \|_K$ sur $\mathcal{M}^+$ est la topologie faible.

- La densité de H_K dans $U(X)$ pour la norme $\|\ \|_{\infty}$ nous permet grâce au théorème de convergence dominée de prouver exactement comme dans VII.4. que pour toute $f \in U(X)$, $\int f \, d\mu^{\bullet}$ est une variable aléatoire réelle.

Ceci va nous permettre de démontrer le :

Lemme : Avec les hypothèses de VII.5., si F est un fermé de $\mathcal{X}$ alors $\mu^{\bullet}(F)$ est une variable aléatoire réelle.

Preuve : Notons qu'on ne suppose pas nécessairement F borné.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :
$f_n(x) = [1 - n\, d(x,F)]^+$.

Il s'agit bien d'une suite de fonctions uniformément continues bornées sur $\mathcal{X}$. Si μ est une mesure bornée positive quelconque on a :

$$\int f_n\, d\mu = \mu(F) + \int_{\{x\in\mathcal{X},\, 0<d(x,F)\leq\frac{1}{n}\}} f_n\, d\mu$$

donc $\left|\int f_n\, d\mu - \mu(F)\right| \leq \mu(F^{1/n} \setminus F)$.

On en déduit par continuité séquentielle monotone de μ que
$\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n\, d\mu = \mu(F)$.

Par conséquent $\mu^{\bullet}(F)$ est limite presque sûre de la suite de v.a.r. $\left(\int f_n\, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est donc aussi une v.a.r. .

Soit maintenant f un élément de $C(\mathcal{X})$. On peut se ramener sans perdre de généralité au cas où $f(\mathcal{X}) \subset [0,1]$. On a alors :

$$\int f\, d\mu^{\bullet} = \lim_{n\to+\infty} \int \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\, 1_{f^{-1}([\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}[)} + 1_{f^{-1}(\{1\})} \right\} d\mu \quad \text{presque sûrement.}$$

$\int f\, d\mu^{\bullet}$ est ainsi limite presque sûre d'une suite de combinaisons linéaires finies de v.a.r. du type $\mu^{\bullet}(F)$ pour F fermé de $\mathcal{X}$. C'est donc encore une variable aléatoire réelle.

VIII - CONVERGENCE PRESQUE SURE.-

VIII.1. - Définition.

La suite $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures aléatoires est dite presque sûrement convergente lorsque la suite $(\mathcal{J}(\mu_n^\bullet))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\|\ \|_K$ - convergente dans H_K avec une probabilité 1.

Si une suite $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est p.s. convergente, sa limite est donc en général une variable aléatoire à valeurs dans H_K. Bien entendu, le cas le plus intéressant est celui où la limite est encore une mesure aléatoire. Nous disposons d'un critère d'identification des éléments de $\mathcal{J}(M)$ dans les cas X compact et X localement compact. Par ailleurs l'utilisation de critères de relative compacité dans $\mathcal{J}(M)$ peut aussi nous fournir des conditions suffisantes de convergence p.s. vers une mesure aléatoire.

VIII.2.1. - Proposition.-

Soit $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires presque sûrement convergente alors :

i) Pour tout élément f de H_K la suite $(\int f\, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite p.s. convergente de variables aléatoires réelles.

ii) Si de plus la limite p.s. de $(\mu_n^\bullet)$ est une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n^\bullet = \int f\, d\mu^\bullet$ p.s.

Preuve :

i) Il suffit de remarquer que $\int f\, d\mu_n^\bullet = \langle f, \mathcal{J}(\mu_n^\bullet)\rangle$ et que la convergence en norme $\|\ \|_K$ implique la convergence $\sigma(H_K, H_K)$.

ii) Evident d'après (i).

VIII.2.2. - Remarques :

- La réciproque de VIII.2.1. est bien entendu fausse : si $(\overset{\bullet}{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures déterministes (i.e. : $\exists\Omega' \in A$, $P(\Omega') = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\omega \in \Omega'$ $\mu_n^\omega = \mu_n$) la condition (i) de convergence p.s. de $\int f\, d\overset{\bullet}{\mu}_n$ n'est autre que la convergence $\sigma(H_K,H_K)$ de $\mathcal{V}(\mu_n)$ et on sait qu'elle n'implique la convergence en norme $\|\ \|_K$ que si H_K est de dimension finie (cf. I.6.2.).

- Même avec les hypothèses supplémentaires : "$\overset{\bullet}{\mu}_n \in M^+$ et $\overset{\bullet}{\mu} \in M^+$ p.s. " la réciproque de (ii) reste fausse comme le montre le contrexemple suivant :

$$\text{On prend } X = \mathbb{R} \qquad K(x,y) = \exp\{-\frac{1}{2}(x-y)^2\} \qquad \text{(cf. I)}$$

$$\overset{\bullet}{\mu}_n = \delta_{\{n\}} \qquad \overset{\bullet}{\mu} = 0 \qquad \mathcal{V}(\overset{\bullet}{\mu}_n) = K(n,.) \quad .$$

La convergence simple de la suite des fonctions $\mathcal{V}(\overset{\bullet}{\mu}_n)$ vers 0 a donc lieu sur tout $\mathbb{R}$ et comme cette suite est bornée en $\|\ \|_K$ (puisque $\|K(n,.)\|_K = K(n,n) = 1$) on en déduit d'après I.6.3. la convergence $\sigma(H_K,H_K)$ de $\mathcal{V}(\mu_n)$ vers 0. Pourtant $\|K(n,.)\|_K$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- Pour pouvoir "remonter" de la convergence p.s. des v.a.r. $\int f\, d\overset{\bullet}{\mu}_n$ à celle de la suite de m.a. $(\overset{\bullet}{\mu}_n)$ nous sommes donc conduits à introduire des hypothèses de relative compacité soit dans H_K , soit dans $\mathcal{V}(M)$.

VIII.3. - Théorème de convergence presque sûre dans H_K.

VIII.3.1. - Théorème :

Avec les hypothèses :

i) Presque sûrement $\{\vartheta(\mu_n^{\bullet})\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H_K.

ii) Pour tout f de H_K la suite de v.a.r. $\int f\, d\mu_n^{\bullet}$ est presque sûrement convergente.

La suite $(\mu_n^{\bullet})_{n\in\mathbb{N}}$ est p.s. convergente.

Démonstration : Observons d'abord que l'hypothèse (ii) est plus faible que : " p.s. $\vartheta(\mu_n^{\bullet})$ converge $\sigma(H_K,H_K)$ " qui est la véritable conclusion de (VIII.2.1.).

Il nous faut prouver l'existence d'un Ω'' de $\mathcal{A}$ tel que :

$$P(\Omega'') = 1 \quad \text{et} \quad \forall\omega \in \Omega'' \quad \begin{cases} \{\vartheta(\mu_n^{\omega}),\ n \in \mathbb{N}\} & \text{est relativement compact dans } H_K \\ \vartheta(\mu_n^{\omega}) & \text{converge } \sigma(H_K,H_K)\ . \end{cases}$$

- D'après (i) il existe $\Omega' \in \mathcal{A}$ tel que : $P(\Omega') = 1$ et

$\forall\omega \in \Omega'$ $\{\vartheta(\mu_n^{\omega})\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H_K .

- Soit $(f_i\ ,\ i \in \mathbb{N})$ une base orthonormée de H_K . D'après (ii), il existe $\Omega_i \in \mathcal{A}$ tel que :

$$\begin{cases} P(\Omega_i) = 1 \\ \text{et} \quad \forall\omega \in \Omega_i \quad \left(\int f_i\, d\mu_n^{\omega}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Posons alors : $\Omega'' = \Omega' \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\right)$.

Il est clair que : $\Omega'' \in \mathcal{A}$ et $P(\Omega'') = 1$.

Nous allons prouver que la suite $(\psi(\mu_n^{\cdot}))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\sigma(H_K,H_K)$ convergente sur Ω'' .

Soit F le s.e.v. de H_K formé des combinaisons linéaires finies des f_i . Pour $\omega \in \Omega''$ et $f \in F$ définissons :

$$\ell^{\omega}(f) = \lim_{n\to+\infty} \int f \, d\mu_n^{\omega} .$$

- Alors ℓ^{ω} est une forme linéaire continue sur F puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \quad \left|\int f \, d\mu_n^{\omega}\right| \leq ||f||_K \; ||\psi(\mu_n^{\omega})||_K$$

donc
$$|\ell^{\omega}(f)| \leq ||f||_K \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\psi(\mu_n^{\omega})||_K$$

et $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\psi(\mu_n^{\omega})||_K$ est fini en raison de la relative compacité de $\{\psi(\mu_n^{\omega}), n \in \mathbb{N}\}$ dans H_K pour tout ω de Ω'' .

- F étant dense dans H_K , ℓ^{ω} se prolonge donc de manière unique en une forme linéaire continue sur H_K que l'on peut identifier par le théorème de Riesz à un unique élément g^{ω} de H_K :

$$\ell^{\omega} = \langle g^{\omega}, . \rangle \quad .$$

- On a alors :

$$\begin{cases} \cdot \; \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\psi(\mu_n^{\omega})||_K < +\infty \\ \cdot \; \forall f \in F \quad \langle g^{\omega}, f\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle \psi(\mu_n^{\omega}), f\rangle \end{cases}$$

F étant dense dans H_K on reconnaît là un critère classique de convergence faible dans les espaces de Banach. On a donc :

$$\forall\omega \in \Omega'' \qquad \emptyset(\mu_n^\omega) \xrightarrow{\sigma(H_K,H_K)} g^\omega \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

- Pour tout ω de Ω'' la suite $(\emptyset(\mu_n^\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $\sigma(H_K,H_K)$ - convergente vers g^ω et $||\ ||_K$ - relativement compacte. On en déduit sa convergence en norme $||\ ||_K$ vers g^ω .

Conclusion : $\emptyset(\mu_n^\bullet)$ converge presque sûrement vers $g^\bullet$.

$g^\bullet : \omega \longmapsto g^\omega$ est une variable aléatoire à valeur dans H_K (comme limite forte p.s. d'une suite de v.a. mais aussi comme limite $\sigma(H_K,H_K)$ de la même suite de v.a. puisque H_K étant séparable la tribu forte et la tribu faible coïncident).

Et on a de plus :

$$g^\bullet = \sum_{i\in\mathbb{N}} (\lim_{n\to+\infty} \int f_i \, d\mu_n^\bullet) f_i \qquad \text{p.s.} \quad .$$

VIII.3.2. - Corollaire :

S'il existe une base hilbertienne $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H_K telle que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)^2$ converge uniformément sur X et si :

i) Presque sûrement $\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n^\bullet|(X) < +\infty$.

ii) Pour tout $f \in H_K$, la suite de variables aléatoires réelles $(\int f \, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement convergente ,

alors la suite $\mu_n^\bullet$ est p.s. convergente .

Preuve : D'après V.4.3., (i) est une condition suffisante de relative compacité dans H_K .

VIII.4. - Convergence presque sûre vers une mesure aléatoire.

VIII.4.1. - Corollaire (du théorème VIII.3.1.).

Si les hypothèses (i) et (ii) suivantes sont vérifiées :

i) Presque sûrement $\{\mathcal{V}(\mu_n^\bullet)\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{V}(M)$.

ii) Pour tout f de H_K la suite de variables aléatoires réelles $(\int f\, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement convergente.

Alors il existe une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ telle que $\mu_n^\bullet \xrightarrow{p.s.} \mu^\bullet$ quand $n \to +\infty$.

VIII.4.2. - Corollaire :

Si X est métrique séparable et complet :

S'il existe une mesure aléatoire $\rho^\bullet$ positive telle que :

$$\text{p.s.}\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mu_n^\bullet| \leq \rho^\bullet$$

et si la suite de variables aléatoires réelles $(\int f_i\, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement pour tout f_i d'une famille totale dans H_K alors il existe une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ qui est limite presque sûre de la suite $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve : Comme corollaire du théorème V.6.4. on sait que la condition de majoration de $|\mu_n^\bullet|$ par $\rho^\bullet$ est une condition suffisante de relative compacité dans $\mathcal{V}(M)$.

VIII.4.3. - Proposition :

On suppose que X est métrisable séparable, K continu , H_K dense pour la topologie de la norme $|| \ ||_\infty$ dans $U(X)$ espace des fonctions uniformément continues bornées sur X pour une certaine métrique d définissant la topologie de X et telle que $(U(X), || \ ||_\infty)$ soit séparable. On suppose de plus que $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures aléatoires positives vérifiant les hypothèses (i) et (ii) suivantes :

i) Presque sûrement, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^\bullet(X) < +\infty$

ii) Il existe une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ telle que :

$$\forall f \in H_K \quad , \int f \, d\mu_n^\bullet \xrightarrow{p.s.} \int f \, d\mu^\bullet \quad .$$

Dans ces conditions, la suite $\mu_n^\bullet$ converge presque sûrement vers $\mu^\bullet$ au sens de la topologie de la norme $|| \ ||_K$ et au sens de la topologie faible.

Preuve : cf (I.6.4.).

VIII.4.4. - Proposition :

On suppose que X est métrique compact et K continu. On suppose de plus que la suite de mesures aléatoires à signes $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses (i) et (ii) suivantes :

i) Presque sûrement, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n^\bullet|(X) < +\infty$

ii) Pour toute fonction f élément de H_K, la suite de variables aléatoires réelles $(\int f \, d\mu_n^\bullet)$ est presque sûrement convergente.

Dans ces conditions, il existe une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ telle que $(\mu_n^\bullet)$ converge presque sûrement vers $\mu^\bullet$ au sens de la topologie de la norme $|| \ ||_K$ et au sens de la topologie faible.

Preuve : (cf. I.6.5.).

VIII.4.5. - Remarque :

Il est facile de vérifier que dans tous les énoncés ci-dessus de (VIII.3.1.) à (VIII.4.4.) on peut remplacer dans l'hypothèse (ii) : "pour tout f de H_K ..." par "pour tout f_i d'une famille totale de H_K ..." (Par exemple celle qui a servi à construire K, cf. : I.3.4.).

Si l'on veut conserver la formule de calcul explicite de g dans la conclusion de VIII.3.1. il faut supposer de plus que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H_K .

IX - CONVERGENCE EN PROBABILITE.-

IX.1. - Définition.

La suite de mesures aléatoires $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité s'il existe une variable aléatoire $g^\bullet$ à valeurs dans H_K telle que :

$$\forall\varepsilon > 0 , \qquad \lim_{n\to+\infty} P(\{||\vartheta(\mu_n^\bullet) - g^\bullet||_K > \varepsilon\}) = 0 .$$

IX.2.1. - Proposition :

Si la suite $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures aléatoires converge en probabilité vers la variable aléatoire $g^\bullet$, alors pour tout f de H_K la suite de variables aléatoires réelles $(\int f\, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $<g^\bullet,f>$. Si de plus $g^\bullet$ est une mesure aléatoire :

$$g^\bullet = \vartheta(\mu^\bullet) \quad \text{on a :}$$

$$\text{quand} \quad n \to +\infty , \quad \int f\, d\mu_n^\bullet \xrightarrow{Pr} \int f\, d\mu^\bullet .$$

Démonstration : Le cas $f = 0$ étant trivial, si $f \neq 0$ on utilise l'inégalité de Schwarz :

$$\left|\int f\, d\mu_n^\bullet - <f,g^\bullet>\right| = |<f,\vartheta(\mu_n^\bullet) - g^\bullet>| \leq ||f||_K \, ||\vartheta(\mu_n^\bullet) - g^\bullet||_K$$

donc :
$$\left|\int f\, d\mu_n^\bullet - <f,g^\bullet>\right| > \varepsilon \Longrightarrow ||\vartheta(\mu_n^\bullet) - g^\bullet||_K > \frac{\varepsilon}{||f||_K}$$

donc
$$P(\{\left|\int f\, d\mu_n^\bullet - <f,g^\bullet>\right| > \varepsilon\}) \leq P(\{||\vartheta(\mu_n^\bullet) - g^\bullet||_K > \frac{\varepsilon}{||f||_K}\}) .$$

Ce majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après l'hypothèse de convergence en probabiilté de $\vartheta(\mu_n^\bullet)$.

IX.2.2. - Remarque :

Comme pour la proposition (VIII.2.1.) dans le cas de la convergence p.s., la réciproque de (IX.2.1.) est fausse en général et même pour des suites de mesures aléatoires positives. Le même contrexemple peut servir à le vérifier.

On est donc conduit pour pouvoir "remonter" de la convergence en probabilité des suites de variables aléatoires réelles $(\int f \, d\mu_n^{\bullet})_{n \in \mathbb{N}}$ à la convergence en probabilité dans H_K à introduire une hypothèse supplémentaire de relative compacité dans H_K, adaptée à la convergence en probabilité des v.a. à valeurs dans H_K.

A priori le critère de relative compacité dans H_K le mieux adapté à la formulation d'une telle hypothèse est (V.3.) :

On fixe une base hilbertienne de H_K notée $(f_i \,, \, i \in \mathbb{N})$ et on suppose que la suite $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définie par :

$$Y_m = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \geq m} \left(\int f_i \, d\mu_n^{\bullet}\right)^2$$

converge en probabilité vers 0. Notons que d'après (V.3. (ii)) il est possible d'utiliser une seule et même base hilbertienne pour la caractérisation de tous les ensembles relativement compacts de H_K.

IX.3.1. - Théorème :

Si les hypothèses (i) et (ii) suivantes sont vérifiées : $(f_i, \, i \in \mathbb{N})$ étant une base hilbertienne

i) La suite $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définie par :

$$Y_m = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \geq m} \left(\int f_i \, d\mu_n^{\bullet}\right)^2$$

converge en probabilité vers 0.

ii) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite de variables aléatoires réelles $(\int f_i \, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité.

Alors il existe une variable aléatoire $g^\bullet$ à valeurs dans H_K telle que :

$$\text{quand } n \to +\infty \qquad \psi(\mu_n^\bullet) \xrightarrow{Pr} g^\bullet \ .$$

Démonstration :

- Il résulte de (i) que $\{\psi(\mu_n^\bullet) \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ est presque sûrement compact dans H_K : En effet $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0 donc elle admet une sous-suite $(Y_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge presque sûrement vers 0. Mais $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante presque sûrement on en déduit que c'est la suite $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ toute entière qui converge presque sûrement vers 0. Par application du critère (V.3.) il en résulte que $\{\psi(\mu_n^\bullet), \ n \in \mathbb{N}\}$ est bien presque sûrement relativement compact dans H_K .

- L'existence d'une sous-suite presque sûrement convergente pour toute suite de v.a.r. convergente en probabilité nous permet de construire à partir de l'hypothèse (ii) via le procédé diagonal une sous-suite $(\mu_{n_j}^\bullet)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \ , \qquad \left(\int f_i \, d\mu_{n_j}^\bullet\right)_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{converge p.s.} \ .$$

On applique alors le théorème (VIII.3.) qui nous assure l'existence d'une mesure aléatoire $g^\bullet$ à valeurs dans H_K telle que : quand $n \to +\infty$ $\psi(\mu_{n_j}^\bullet) \xrightarrow{p.s.} g^\bullet$. Il en résulte d'après (VIII.2.1.) que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \ , \qquad \lim_{j\to+\infty} \int f_i \, d\mu_{n_j}^\bullet = \langle f_i, g^\bullet \rangle \quad \text{p.s.}$$

puis : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\int f_i \, d\mu^{\bullet}_{n_j} \xrightarrow{Pr} \langle f_i, g^{\bullet} \rangle$ quand $n \to +\infty$.

La suite $(\int f_i \, d\mu^{\bullet}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant elle aussi d'après (ii) convergente en probabilité, par unicité de la limite (modulo l'égalité presque sûre) on en déduit :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \int f_i \, d\mu^{\bullet}_n \xrightarrow{Pr} \langle f_i, g^{\bullet} \rangle \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

- En posant : $h^{\bullet}_n = \psi(\mu^{\bullet}_n) - g^{\bullet}$

on déduit facilement de l'hypothèse (i) que la suite de v.a.r. $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$Z_m = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\geq m} \langle f_i, h^{\bullet}_n \rangle^2$$

converge vers 0 en probabilité.

- Fixons un réel ε strictement positif quelconque :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad , \quad P(\{\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\geq m} (\langle f_i, h_n \rangle)^2 > \frac{\varepsilon^2}{2}\}) < \eta \quad . \tag{1}$$

L'entier m étant ainsi choisi en fonction de η , l'hypothèse (ii) entraînant la convergence en probabilité vers 0 des suites de v.a.r. $(\langle f_i, h^{\bullet}_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ nous fournit maintenant un entier N_o tel que :

$$\forall n \geq N_o \qquad \forall i \in \{0,1,\ldots,m-1\} \quad P(\{|\langle f_i, h^{\bullet}_n \rangle| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2m}}\}) < \frac{\eta}{m} \quad . \tag{2}$$

Définissons alors :

$$\Omega_n = \{\sum_{i\geq m} (\langle f_i, h^{\bullet}_n \rangle)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\} \cap \left(\bigcap_{i=0}^{m-1} \{|\langle f_i, h^{\bullet}_n \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2m}}\}\right) \quad . \tag{3}$$

Il est clair que Ω_n est un élément de la tribu $\mathcal{A}$ et on déduit des points (1) et (2) que :

$$\forall n \geq N_o \qquad P(\Omega_n) \geq 1 - 2\eta \quad . \tag{4}$$

Comme par construction pour tout ω de Ω_n on a :

$$||h_n^\omega||_K^2 = \sum_{i=0}^{m-1} (\langle f_i, h_n^\omega \rangle)^2 + \sum_{i \geq m} (\langle f_i, h_n^\omega \rangle)^2 \leq \varepsilon^2 \quad ,$$

on a bien prouvé que $||h_n^\bullet||_K$ converge vers 0 en probabilité ce qui achève la démonstration.

IX.3.2. - Remarque :

Une formulation plus générale de l'hypothèse (i) évitant sa réduction en "relative compacité presque sûre dans H_K" nous fournirait l'énoncé suivant :

" *Hypothèse :* i)' : $\{\mathcal{V}(\mu_n^\bullet)\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour la topologie (métrisable) de la convergence en probabilité sur l'espace des classes d'équivalence (modulo l'égalité P-presque sûre) des variables aléatoires à valeurs dans H_K .

ii)' : Il existe une suite aléatoire $g^\bullet$ à valeurs dans H_K telle que :

$$\forall f \in H_K \quad , \quad \int f\, d\mu_n^\bullet \xrightarrow{Pr} \langle f, g^\bullet \rangle \quad \text{quand } n \to +\infty \quad .$$

Conclusion : $\mathcal{V}(\mu_n^\bullet) \xrightarrow{Pr} g^\bullet$ quand $n \to +\infty$ " .

Mais la nouvelle hypothèse (i)' serait, nous semble-t-il, moins bien adaptée que (i) à l'utilisation de critères de relative compacité dans H_K et dans $\mathcal{V}(M)$. De plus il semble moins facile de supprimer dans (ii)' l'existence a priori de $g^\bullet$ comme dans (ii).

Nous continuerons donc à utiliser des hypothèses de "relative compacité presque sûre dans H_K " pour remonter de la convergence $\sigma(H_K,H_K)$ à la convergence forte des suites de mesures aléatoires aussi bien pour la convergence en probabilité que pour la convergence en loi.

IX.3.3. - Corollaire :

Hypothèses : i) Il existe une base orthonormée $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H_K telle que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} g_i(x)^2$ converge uniformément sur X.

ii) Presque sûrement , $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n^\bullet|(X) < +\infty$.

iii) Pour tout f_i d'une base hilbertienne $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H_K , la suite de v.a.r. $(\int f_i \, d\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité.

Conclusion : Il existe une variable aléatoire $g^\bullet$ à valeurs dans H_K telle que :

$$\psi(\mu_n^\bullet) \xrightarrow{Pr} g^\bullet \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

Preuve : Grâce à (V.4.3.), les hypothèses (i) et (ii) impliquent la relative compacité presque sûre de $\{\psi(\mu_n^\bullet),\ n \in \mathbb{N}\}$ dans H_K laquelle entraîne par le théorème (V.3.) l'hypothèse (i) de IX.3.1.

IX.4. - Convergence en probabilité vers une mesure aléatoire.

IX.4.1. - Corollaire 1 :

Hypothèses : i) Presque sûrement $\{\psi(\mu_n^\bullet),\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans H_K .

ii) Il existe une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ telle que $(f_i, i \in \mathbb{N})$ étant une base hilbertienne de H_K :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad , \quad \int f_i \, d\mu_n^{\bullet} \xrightarrow{Pr} \int f_i \, d\mu^{\bullet} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \; .$$

<u>*Conclusion*</u> : $\mu_n^{\bullet} \xrightarrow{Pr} \mu^{\bullet}$ quand $n \to +\infty$.

<u>*IX.4.2. - Corollaire 2*</u> :

<u>*Hypothèses*</u> : i) Presque sûrement $\{\mathcal{V}(\mu_n^{\bullet}), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{V}(\mathcal{M})$.

ii) Pour tout f_i d'une base hilbertienne $(f_i , i \in \mathbb{N})$ de H_K la suite de variables aléatoires réelles $(\int f_i \, d\mu_n^{\bullet})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en probabilité.

<u>*Conclusion*</u> : Il existe une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ telle que : quand $n \to +\infty$ $\mu_n^{\bullet} \xrightarrow{Pr} \mu^{\bullet}$.

<u>*IX.4.3. - Corollaire 3*</u> :

<u>*Hypothèses*</u> : i) X est métrique séparable et complet.

ii) Il existe une mesure aléatoire positive $\rho^{\bullet}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mu_n^{\bullet}| \leq \rho^{\bullet} \quad \text{p.s.}$$

iii) Pour tout f_i d'une base hilbertienne $(f_i, i \in \mathbb{N})$ de H_K la suite de variables aléatoires réelles $(\int f_i \, d\mu_n^{\bullet})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en probabilité.

Conclusion :

Il existe une mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$ telle que : quand $n \to +\infty$, $\mu_n^{\bullet} \xrightarrow{Pr} \mu^{\bullet}$.

X - CONVERGENCE EN LOI.-

X.1. - Définition.

Soient $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires et $g^\bullet$ une variable aléatoire à valeurs dans H_K. La convergence en loi de la suite $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $g^\bullet$ est par définition la convergence faible de la suite de probabilités images $P_{\psi(\mu_n^\bullet)}$ vers $P_{g^\bullet}$ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_K$ de H_K. Le cas le plus intéressant est celui où $g^\bullet$ est une mesure aléatoire $\psi(\mu^\bullet)$. Nous noterons $\mu_n^\bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu^\bullet$ cette convergence :

$$\text{quand } n \to +\infty \quad \mu_n^\bullet \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu^\bullet \iff \text{quand } n \to +\infty \quad P_{\mu_n^\bullet} \Rrightarrow P_{\mu^\bullet} .$$

X.2. - Proposition.

Soit $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures aléatoires convergeant en loi vers la variable aléatoire $g^\bullet$. Alors pour toute famille finie $\{h_1,\dots,h_m\}$ d'éléments de H_K la suite de vecteurs aléatoires $(\int h_1\, d\mu_n^\bullet ,\dots, \int h_m\, d\mu_n^\bullet)$ de $\mathbb{R}^m$ converge en loi vers le vecteur aléatoire $(\langle h_1,g^\bullet\rangle ,\dots, \langle h_m,g^\bullet\rangle)$ de $\mathbb{R}^m$.

Démonstration : Soit m un entier quelconque et $\{h_1,\dots,h_m\}$ une partie finie quelconque de H_K. Notons $[h_1,\dots,h_m]$ le sous-espace vectoriel de H_K engendré par cette partie finie. On sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^m$ converge en loi vers un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^m$ est que toute combinaison linéaire de leurs composantes converge en loi dans $\mathbb{R}$ vers la même combinaison linéaire des composantes du vecteur limite. Ici il nous suffit donc de montrer que :

$$\forall h \in [h_1,\dots,h_m] \qquad \int h \, d\mu_n^\bullet \xrightarrow{L} \langle h,g^\bullet\rangle \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

Or ceci est immédiat puisque $\langle h,.\rangle$ étant une forme linéaire continue sur H_K , elle transforme la suite convergente en loi $\emptyset(\mu_n^\bullet)$ en une suite de variables aléatoires réelles convergente en loi.

X.3. - Théorème.

Si les hypothèses (i) et (ii) suivantes sont vérifiées :

i) $\{\emptyset(\mu_n^\bullet),\ n \in \mathbb{N}\}$ est presque sûrement relativement compact dans H_K

ii) Il existe une variable aléatoire $f^\bullet$ à valeurs dans H_K telle que :

$$\forall h \in H_K \qquad \int h \, d\mu_n^\bullet \xrightarrow{L} \langle h,f^\bullet\rangle \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

la suite de mesures aléatoires $\emptyset(\mu_n^\bullet)$ converge en loi vers $f^\bullet$. Si $f^\bullet$ est elle même une mesure aléatoire $\emptyset(\mu^\bullet)$ on a : $\mu_n^\bullet \xrightarrow{L} \mu^\bullet$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration :

Nous noterons $(g_i\ ,\ i \in \mathbb{N})$ une base hilbertienne de H_K .
Remarquons d'abord que l'hypothèse (i) équivaut à chacune des 3 hypothèses suivantes :

" La suite de v.a.r. $(Y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $Y_m = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{i\geq m} \left(\int g_i \, d\mu_n^\bullet\right)^2$ converge vers 0 en loi ou en probabilité ou presque sûrement ".
En effet la convergence en loi d'une suite de v.a.r. vers une constante implique sa convergence en probabilité donc aussi dans ce cas particulier sa convergence presque sûre (cf. démonstration de IX.3.1.) et la convergence

Par conséquent :

$$\{\psi(\mu_n^\bullet) \in F\} \subset \Omega_\eta^c \cup \{\pi_m(\psi(\mu_n^\bullet) \in F^\varepsilon \cap G_m\}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \qquad P(\{\psi(\mu_n^\bullet) \in F\}) \leq \eta + P(\{\pi_m(\psi(\mu_n^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m\}) \ . \tag{2}$$

Comme il n'y a qu'une seule topologie d'espace vectoriel normé en dimension finie, la convergence en loi d'une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^m$ équivaut à la convergence en loi de la suite de vecteurs de mêmes composantes dans G_m . Or il est facile de vérifier (en utilisant le même argument que dans la démonstration de X.2.) que l'hypothèse (ii) entraîne la convergence en loi dans $\mathbb{R}^m$ de $(\int g_o \, d\mu_n^\bullet , \ldots , \int g_{m-1} \, d\mu_n^\bullet)$ vers $(\langle g_o, f^\bullet \rangle , \ldots , \langle g_{m-1}, f^\bullet \rangle)$. On a donc :

$$\text{quand} \quad n \to +\infty \ , \qquad \pi_m(\psi(\mu_n^\bullet)) \xrightarrow{L} \pi_m(f^\bullet) \quad . \tag{3}$$

Or $F^\varepsilon \cap G_m$ étant un fermé de G_m le théorème de Billingsley Alexandroff appliqué à la convergence en loi dans G_m nous permet d'écrire :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \ P(\{\pi_m(\psi(\mu_n^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m\}) \leq P(\{\pi_m(f^\bullet) \in F^\varepsilon \cap G_m\}) \ . \tag{4}$$

Par ailleurs, en se souvenant que sur Ω_η on a : $||\pi_m(f^\bullet)-f^\bullet||_K \leq \varepsilon$ on a la suite d'inclusions :

$$\{\pi_m(f^\bullet) \in F^\varepsilon \cap G_m\} \subset \Omega_\eta^c \cup \{f^\bullet \in (F^\varepsilon \cap G_m)^\varepsilon\} \subset \Omega_\eta^c \cup \{f^\bullet \in F^{2\varepsilon}\}$$

d'où l'on déduit :

$$P(\{\pi_m(f^\bullet) \in F^\varepsilon \cap G_m\}) \leq \eta + P(\{f^\bullet \in F^{2\varepsilon}\}) \quad . \tag{5}$$

presque sûre de (Y_m) vers 0 équivaut à (i) (cf. V.3.).

Nous noterons A^ε le dilaté d'ordre ε d'une partie A de H_K défini ainsi : $A^\varepsilon = \{h \in H_K \,,\, d(h,A) \leq \varepsilon\}$ d désignant la distance euclidienne associée à la norme $\|\ \|_K$.

Pour prouver la convergence en loi de $\psi(\mu_n^\bullet)$ vers $f^\bullet$ il suffit, d'après le théorème de Billingsley-Alexandroff de démontrer que si F est un fermé quelconque de H_K :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ P(\{\ \psi(\mu_n^\bullet) \in F\}) \leq P(\{f^\bullet \in F\}) \quad .$$

Soit donc F un fermé de H_K , fixons $\varepsilon > 0$. Notons π_m la projection orthogonale de H_K sur le sous-espace vectoriel : $G_m = [g_o \,,\, g_1 \,,\dots,\, g_{m-1}]$.

L'hypothèse (i) implique la relative compacité presque sûre de $\{\psi(\mu_n^\bullet),\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^\bullet\}$ donc la convergence en probabilité vers 0 de la suite $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de v.a.r. définie par :

$$Z_m = \operatorname{Sup}\left[\operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\geq m} \left(\int g_i\, d\mu_n^\bullet\right)^2 \ ;\ \sum_{i\geq m} (\langle g_i, f^\bullet\rangle)^2\right] .$$

En fixant alors un réel arbitraire η dans $]0,1[$ on en déduit :

$$(1)\ \exists \Omega_\eta \in \mathcal{A} \quad \text{tel que} \begin{cases} P(\Omega_\eta) > 1 - \eta \\ \text{et} \\ \exists m \in \mathbb{N}\ \ \forall\omega \in \Omega_\eta \ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \|\psi(\mu_n^\omega) - \pi_m(\psi(\mu_n^\omega))\|_K \leq \varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \quad \|f^\omega - \pi_m(f^\omega)\|_K \leq \varepsilon \end{cases}$$

Remarquons alors que sur Ω_η :

$$(\psi(\mu_n^\bullet) \in F) \Longrightarrow (\pi_m(\psi(\mu_n^\bullet)) \in F^\varepsilon) \Longrightarrow (\pi_m(\psi(\mu_n^\bullet)) \in F^\varepsilon \cap G_m) \quad .$$

Les majorations (2), (4) et (5) nous permettent alors d'écrire :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} P(\{\psi(\mu_n^{\bullet}) \in F\}) \leq 2\eta + P(\{f^{\bullet} \in F^{2\varepsilon}\}) \quad . \tag{6}$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout choix de $\varepsilon > 0$ et de η dans $]0,1[$, en écrivant par exemple $F = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} F^{2/\ell}$ et en utilisant la continuité monotone séquentielle de la mesure de probabilité P on en déduit enfin :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} P(\{\psi(\mu_n^{\bullet}) \in F\}) \leq P(\{f^{\bullet} \in F\}) \quad .$$

XI - LOI DES GRANDS NOMBRES.-

XI.1. - Espérance et mesure moyenne d'une mesure aléatoire.

Une mesure aléatoire $\mu^\bullet$ étant une variable aléatoire à valeurs dans H_K, on peut définir les notions d'intégrabilité au sens de Pettis et au sens de Bochner par rapport à la mesure de probabilité $P_{\mu^\bullet}$. On trouvera dans [3] une étude de ces notions pour des variables aléatoires à valeurs dans H_K. En vue de la loi des grands nombres, nous nous intéresserons surtout à la Bochner-intégrabilité.

XI.1.1. - Définitions :

Soit $\mu^\bullet$ une mesure aléatoire. L'application $||\mu^\bullet||_K$ de Ω dans $\mathbb{R}^+$ est alors une variable aléatoire réelle. Nous supposerons que :

$$E(||\mu^\bullet||_K) < +\infty .$$

On sait qu'alors la variable aléatoire $\vartheta(\mu^\bullet)$ est P-Bochner intégrable. Nous noterons $E(\mu^\bullet)$ ou $E(\vartheta(\mu^\bullet))$ son intégrale au sens de Bochner que nous appellerons "espérance de la mesure aléatoire $\mu^\bullet$".

Le cas le plus intéressant est celui où $E(\mu^\bullet)$ est encore une mesure (ou $E(\vartheta(\mu^\bullet))$ un élément de $\vartheta(M)$). Dans ce cas là nous parlerons de "mesure moyenne de la mesure aléatoire $\mu^\bullet$" pour $E(\mu^\bullet)$.

Avant de donner des conditions suffisantes assurant l'existence d'une telle mesure moyenne notons que :

Si $E(\vartheta(\mu^\bullet)) \in \vartheta(M)$, en posant $\vartheta(\mu) = E(\vartheta(\mu^\bullet))$ on a :

$$\forall f \in H_K \qquad \int f\, d\mu = E\left(\int f\, d\mu^{\bullet}\right)$$

ou encore $$\int f\, dE(\mu^{\bullet}) = E\left(\int f\, d\mu^{\bullet}\right) \quad .$$

En effet la Bochner - intégrabilité implique la Pettis - intégrabilité donc :

$$\forall f \in H_K \quad \int f\, d\mu = \langle f, \mathcal{J}(\mu)\rangle = E(\langle f, \mathcal{J}(\mu^{\bullet})\rangle) = E\left(\int f\, d\mu^{\bullet}\right) \quad .$$

XI.1.2. - Proposition :

Si X est métrique localement compact (resp. métrique compact) et K continu tendant vers 0 séparément à l'infini (resp. continu) alors l'hypothèse :

$$E(|\mu^{\bullet}|(X)) < +\infty$$

est une condition suffisante d'existence de la mesure moyenne de la mesure aléatoire $\mu^{\bullet}$.

Preuve :

- Commençons par justifier l'écriture "$E(|\mu^{\bullet}|(X))$" en vérifiant que $|\mu^{\bullet}|(X)$ est une variable aléatoire réelle positive. C'est une conséquence de la formule :

$$|\mu|(X) = \sup_{\substack{f \in H_K \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |\langle \mathcal{J}(\mu), f\rangle|$$

obtenue dans les cas compact et localement compact (cf. II.2. Remarque 2 et II.4.3. (ii)). H_K étant séparable, considérons en effet une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\{f \in H_K \ , \ \|f\|_\infty \leq 1\}$ on a alors :

$$|\mu^{\bullet}|(X) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle \mathcal{J}(\mu^{\bullet}), f_n\rangle| \qquad \text{p.s.}$$

donc $|\mu^{\bullet}|(X)$ est bien mesurable.

- On utilise maintenant la caractérisation des mesures dans H_K obtenue dans les cas compact et localement compact (cf. II.2. et II.4.3. (i)) :

Puisque $E(|\mu^{\bullet}|(X))$ est fini, $E(||\mu^{\bullet}||_K)$ l'est aussi d'après la majoration :

$$\forall \mu \in M \qquad ||\mu||_K^2 = \int K \, d\mu \otimes \mu \leq (\text{Sup } K) \; |\mu|(X)^2$$

par conséquent $\mu^{\bullet}$ est P - Bochner intégrable. On a alors :

$$\forall f \in H_K \qquad |\langle f, E(\psi(\mu^{\bullet}))\rangle| = |E(\langle f, \psi(\mu^{\bullet})\rangle)| \leq E(|\int f \, d\mu^{\bullet}|) \leq ||f||_{\infty} \; E(|\mu^{\bullet}|(X))$$

par conséquent :

$$\sup_{\substack{f \in H_K \\ ||f||_{\infty} \leq 1}} |\langle f, E(\psi(\mu^{\bullet}))\rangle| \leq E(|\mu^{\bullet}|(X)) < +\infty$$

donc $E(\psi(\mu^{\bullet}))$ est un élément de $\psi(M)$.

XI.1.3. - Proposition :

Si X est métrique séparable et si la topologie définie par le noyau continu K sur M^+ est la topologie faible alors l'hypothèse :

$$E(\mu^{\bullet}(X)) < +\infty .$$

est une condition suffisante d'existence de la mesure moyenne $E(\mu^{\bullet})$ de la mesure aléatoire positive $\mu^{\bullet}$.

Preuve : . On sait (cf. lemme dans la démonstration de VII.5.) que $\mu^{\bullet}(X)$ est bien une variable aléatoire positive.

Comme nous venons de le voir dans les cas compact et localement compact l'hypothèse de finitude de $E(\mu^{\bullet}(X))$ implique la finitude de $E(||\mu^{\bullet}||_K)$. Donc $\mu^{\bullet}$ est bien Bochner - intégrable.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues bornées sur X décroissant vers 0 .

Pour P - presque tout ω on a par le théorème de convergence monotone appliqué à la mesure positive bornée μ^{ω} et à la suite (f_n) :

$$\int f_n \, d\mu^{\omega} \downarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

On sait que les $\int f_n \, d\mu^{\bullet}$ sont des variables aléatoires réelles (d'après VII.5.).
On a : $\int f_n \, d\mu^{\bullet} \downarrow 0$ p.s. quand $n \to +\infty$.

De plus comme $E(\mu^{\bullet}(X)) < +\infty$ on a :
$E(\int f_1 \, d\mu^{\bullet}) \leqslant ||f_1||_{\infty} \, E(\mu^{\bullet}(X) < +\infty$. En appliquant le théorème de convergence monotone avec la mesure de probabilité P et la suite de v.a.r. $(\int f_n \, d\mu^{\bullet})_{n\in\mathbb{N}}$ on en déduit :

$$E(\int f_n \, d\mu^{\bullet}) \downarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

Par conséquent d'après la proposition II.7.2. de [16] la forme linéaire positive Λ définie sur $C(X)$ par :

$$\Lambda(f) = E(\int f \, d\mu^{\bullet})$$

peut être représentée par une mesure positive bornée μ au sens où :

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu \qquad \forall f \in C(X) \quad . \, .$$

Par restriction à H_K on voit alors que :

$$\forall f \in H_K \qquad \langle f, E(\psi(\mu^\bullet))\rangle = E(\langle f, \psi(\mu^\bullet)\rangle) = E(\int f \, d\mu^\bullet) = \Lambda(f) = \int f \, d\mu = \langle f, \psi(\mu)\rangle \quad .$$

Donc : $E(\psi(\mu^\bullet)) = \psi(\mu)$ et μ est la mesure moyenne de $\mu^\bullet$.

XI.2. - Loi des grands nombres.

On sait que la loi forte des grands nombres est vérifiée dans un espace de Banach séparable :

XI.2.1. - Théorème (*cf* [4], *p. 47*).

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, F un espace de Banach séparable muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_F$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, A, P) à valeurs dans $(F, \mathcal{B}_F)$.
On suppose que les X_n sont P-Bochner intégrables, indépendantes et de même loi.

$$\text{Alors : p.s. : } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E(X_1) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \quad .$$

$E(X_1)$ désignant l'intégrale de Bochner de X_1 .

En appliquant ce théorème à $F = H_K$ on obtient :

XI.2.2. - Théorème :

Si $(\mu_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de mesures aléatoires Bochner - intégrables, indépendantes et de même loi :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xrightarrow{\text{p.s.}} E(\mu_1^\bullet) \qquad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

XI.2.3. - Corollaire :

Si X est métrique localement compact (resp. compact) et si K est continu et tendant vers 0 séparément à l'infini (resp. K continu). Si $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures aléatoires indépendantes et de même loi vérifiant : $E(|\mu_1^\bullet|(X)) < +\infty$ alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^\bullet \xrightarrow{p.s.} E(\mu_1^\bullet) \quad \text{quand } n \to +\infty$$

et $E(\mu_1^\bullet)$ est la mesure moyenne de $\mu_1^\bullet$.

XI.2.4. - Corollaire :

Si X est métrique séparable et si la topologie définie par le noyau continu K sur M^+ est la topologie faible. Si $(\mu_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures aléatoires positives indépendantes et de même loi vérifiant :

$$E(\mu_1^\bullet(X)) < +\infty$$

alors :
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^\bullet \xrightarrow{p.s.} E(\mu_1^\bullet) \quad \text{quand } n \to +\infty$$

et $E(\mu_1^\bullet)$ est la mesure moyenne de $\mu_1^\bullet$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN N. *"Théorie des noyaux reproduisants et applications". Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 39, 1943.*

[2] ARONSZAJN N. *"The theory of reproducing kernels". Transactions of the American Mathematical Society 68, 1950 p. 337-404.*

[3] BERLINET A. *"Espaces autoreproduisants et mesure empirique. Méthodes splines en estimation fonctionnelle". Thèse de 3ème cycle Lille I.*

[4] BOSQ D. *"Cours de D.E.A. rédigé par L. Nobécourt et A. Wibaux". Université de Lille I, 1974.*

[5] DUC-JACQUET M. *"Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens autoreproduisants". Thèse 1973 Université Scientifique et Médicale Grenoble.*

[6] GEFFROY et QUIDEL *"Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires". Revista de Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra vol. XLIX 1974.*

[7] GEFFROY et ZEBOULON *"Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels". Comptes rendus de l'Académie des Sciences 280 série A, 1975.*

[8] GIHMAN et SKOROHOD *"The theory of stochastic processes I". Die Grundlehren der mathématischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 210. Springer Verlag 1974.*

[9] GUILBART C. *"Caractérisation des produits scalaires sur l'espace des mesures bornées à signe dont la topologie trace sur l'espace des mesures de probabilité est la topologie faible et théorème de "Glivenko-Cantelli" associé". Université Lille I - Publications Internes de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées n° 108 (mars 1977).*

[10] GUILBART C. *"Etude des produits scalaires sur l'espace des mesures. Estimation par projections. Tests à noyaux". Thèse d'Etat Lille I, 1978.*

[11] JACOB P. *"Représentations convergentes de mesures et de processus ponctuels". Thèse d'Etat (Paris VI - Valenciennes) 1978.*

[12] JACOB P. "Convergence uniforme à distance finie de mesures signées".
Ann. Inst. Henri Poincaré Vol. XV n° 4 1979 p. 355-373.

[13] KALLENBERG O. "Random Measures".
Academic Press 1976.

[14] KOLMOGOROV FOMINE "Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle".
Edition MIR Moscou 1974.

[15] MARLE C.M. "Mesures et Probabilités".
Hermann 1974.

[16] NEVEU J. "Bases mathématiques du calcul des probabilités".
Masson, Paris, 1964.

[17] NEVEU J. "Processus aléatoires gaussiens".
Séminaire Math. Sup. (les presses de l'Université de Montréal).

[18] PARTHASARATHY K.R. "Probability measures on metric spaces".
Academic Press 1967.

[19] QUIDEL P. "Convergences stochastiques des répartitions ponctuelles aléatoires".
Thèse de 3ème cycle Paris VI, 1973.

[20] RUDIN W. "Analyse réelle et complexe".
Masson 1975.

[21] SBAI A. "Sur l'estimation par projection dans les ensembles de mesures".
Thèse de 3ème cycle, Lille I, 1984.

[22] SCHWARTZ L. "Topologie générale et analyse fonctionnelle".
Hermann 1970.

[23] SCHWARTZ L. "Cours d'analyse" (professé à l'Ecole Polytechnique).
Tome 1. Hermann 1967.

[24] SCHWARTZ L. "Sur le théorème du graphe fermé".
Compt. Rend. Acad. Sci. 263, 602, 1966.

[25] VARADARAJAN V.S. "Measures on Topological Spaces".
Amer. Math. Soc. Transl. Séries 2, t. 48, 1961, p. 161-228.

[26] YOSIDA K. "Functional Analysis".
Grundlehren des Mathématischen Wissenschaften
5ème édition Springer Verlag 1978.

RESUME

L'objectif de ce travail est d'étudier les fondements d'une théorie hilbertienne des mesures aléatoires.

Dans la première partie, suivant une méthode inaugurée par C. Guilbart, on construit sur l'espace des mesures à signes bornées un produit scalaire qui le rende isométrique à un sous-espace dense d'un espace de Hilbert autoreproduisant de fonctions. On donne des bases hilbertiennes de cet espace autoreproduisant. Les cas des espaces compacts et localement compacts sont étudiés. On prouve la mesurabilité de l'espace des mesures dans la tribu borélienne de son complété dans les principaux cas usuels. On donne des critères de relative compacité dans l'espace autoreproduisant et dans l'espace des mesures.

Dans la deuxième partie, on utilise les résultats obtenus pour construire les mesures aléatoires comme variables aléatoires à valeurs dans un espace autoreproduisant. Les divers modes de convergence des suites de mesures aléatoires sont alors étudiés ainsi qu'une loi forte des grands nombres.

MOTS CLES

- MESURE ALEATOIRE
- ESPACE AUTOREPRODUISANT
- BASE HILBERTIENNE
- RELATIVE COMPACITE
- CONVERGENCE STOCHASTIQUE