

N° d'ordre : 1369

55376
1986
27



T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

Le grade de Docteur de 3ème cycle

en MECANIQUE

par

GUISSO Atchélé

SUR LES OSCILLATIONS PERIODIQUES DES PLAQUES
EXCITEES PAR DES EXCITATIONS CONTINUES ET
PERCUSSIONS. ETUDE DE DEUX CAS DISTINCTS.

Corrections faites après avis du jury

Membres du Jury : Messieurs les Professeurs F. PARSY, Président,
P.A. BOIS, Examineur,
R. FAURE, Rapporteur.

Soutenue le 11 Décembre 1986

Je tiens à témoigner toute ma gratitude à Monsieur le Professeur PARSY qui me fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer à Monsieur le Professeur FAURE ma profonde reconnaissance pour avoir été l'instigateur de ce travail, et m'avoir permis de le mener à bien par ses précieux conseils et nombreuses suggestions.

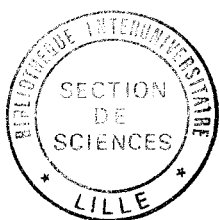
Je remercie très vivement Monsieur le Professeur BOIS qui s'est intéressé à mon travail en y apportant des critiques constructives.

Que soit également remerciée Madame Françoise PÉTIAUX qui avec gentillesse, compétence et efficacité a assuré dans les délais rapides la réalisation matérielle de ce mémoire.

Que Mademoiselle Becket IMBOUA, Monsieur N'DRIN IMBOUA, Monsieur et Madame OPELY trouvent ici ma reconnaissance; leurs nombreux encouragements ont été d'une aide inappréciable.

Je remercie les originaires et habitants du village de TIPADIPA, les nombreux amis et connaissances qui m'ont apporté un soutien constant.

Je tiens enfin à remercier mes parents qui par leur patience, leur compréhension, ont eu une part non négligeable dans l'élaboration de cette thèse.



A mes parents.

A mon fils, Armel-Franck GUISSO.

" Si une forêt surgit pour vous empêcher d'avancer,
écartez les arbres. Les ronces vous suivront".

Eugène IONESCO.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	VI
NOTATIONS	XIII
FLEXION DES PLAQUES RECTANGULAIRES - EQUATIONS DE VON KARMAN (CHAPITRE 1)	1
I - FLEXION DES PLAQUES SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE REPARTIE LATERALEMENT	2
I.1.- Flexion simple	2
I.2.- Flexion forte	5
II - FLEXION D'UNE PLAQUE SOUS L'ACTION DE CHARGE DANS SON PLAN	15
EQUATIONS TEMPORELLES DU MOUVEMENT TRANSVERSAL (CHAPITRE 2)	17
I - FORMULATION DU PROBLEME	18
I.1.- Géométrie du modèle	18
I.2.- Equations de base	20
I.3.- Conditions aux limites	20
II - METHODE DE RESOLUTION	21
II.1.- Expression de F et W	21
II.2.- Choix des fonctions d'approximation	22
II.3.- Equation temporelle du mouvement	26
EXISTENCE DE SOLUTION DES EQUATIONS TEMPORELLES DU MOUVEMENT (CHAPITRE 3)	38
I - POSITION DU PROBLEME	39
II - EXISTENCE D'UNE SOLUTION	40

II.1.- Préliminaires	40
II.1.1.- Structure et propriétés de l'espace $B(T)$	40
II.1.2.- Mesure de Dirac - Distributions	44
II.1.3.- Equations de synchronisation	44
II.2.- Théorème	47
II.2.1.- Suite récurrentes $(u_1, n) \in B_1(T)$	48
et $(u_2, n) \in B_2(T)$	48
II.2.2.- Majoration de $\ u_1, n\ $ et $\ u_2, n\ $	51
II.2.3.- Convergence des suites (u_1, n) et (u_2, n) dans $B_1(T)$ et $B_2(T)$ respectivement	62
ETUDE DE LA STABILITE DYNAMIQUE (CHAPITRE 4).....	76
I - INTRODUCTION	77
II - ETUDE DE LA STABILITE	77
II.1.- Etude de l'équation :	
$x'' + \lambda c x' + [\omega^2 + \lambda(\varphi(t) + \varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})]x = 0$	78
II.1.1.- Théorie de Floquet	78
II.1.2.- Applications	84
II.2.- Etude de l'équation complète :	
$x'' + p(t)x' + q(t)x = \lambda x e(t)$ avec	
$p(t) = \lambda c$	
$q(t) = \omega^2 + \lambda(\varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1} + \varphi(t))$	87
LIAISONS SPATIALES INSTANTANÉES AVEC SYNCHRONISATION ENTRE DEUX OSCILLATEURS (CHAPITRE 5)	109
I - FORMULATION DU PROBLEME	110

II - EXISTENCE DES SOLUTIONS PERIODIQUES DU SYSTEME (5-1), (5-2)	
(5-3)	112
II.1.- Préliminaires	112
II.2.- Equations de synchronisation	113
II.3.- Preuve du Théorème 1	120
III - APPLICATIONS - ETUDE DE LA STABILITE	130-144
ANNEXE	151
A) - ORTHOGONALITE DES FAMILLES (X_m) , (Y_m) , (Φ_i) , (Ψ_q)	152
B) - EXPRESSIONS DES K_c ET L_c	156
BIBLIOGRAPHIE	159

INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans le cadre des études consacrées à la Mécanique non linéaire dont les applications sont répandues dans les domaines physiques et techniques : problèmes des structures sous l'action des forces périodiques [8, 9, 10] ou non périodiques [5, 6, 7]; vibration des structures mécaniques : problème de stabilité associé [1, 6, 8, 9, 10], etc...

Il concerne plus précisément la résolution de quelques équations différentielles régissant le mouvement des plaques rectangulaires et des oscillateurs voisins. Les plaques sont simplement posées et excitées longitudinalement par des percussions périodiques :

où

$$f(t) = e(t) + \varphi(t)$$

$$e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

$\omega T = 2\pi$, ω est la pulsation excitatrice;

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\alpha_p| < \infty$$

Ces percussions sont uniformément réparties le long des quatre arêtes.

Le système d'équations différentielles régissant les mouvements de deux oscillateurs voisins est de la forme :

$$x_1'' + \omega^2 x_1 = \lambda [\varepsilon_1 x_1 + P_1(x_1, x_1', t) + K e(t)]$$

$$x_2'' + \omega^2 x_2 = \lambda [\varepsilon_2 x_2 + P_2(x_2, x_2', t) - K e(t)]$$

avec une condition de coïncidence instantanée :

$$x_1(0) = x_2(0)$$

et où K est une inconnue ;

$$e(t) = \sum_{i,n} x_i S(t - t_i - nT) \quad \text{avec}$$

$$\sum_i |x_i| < \infty, \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_p < T, \quad p \text{ fini.}$$

Les P_i sont des fonctions périodiques de t et des coordonnées x_1, x_1', x_2, x_2' , satisfaisant certaines hypothèses à préciser plus loin.

Ce mémoire est d'une part, une extension des problèmes étudiés par OSTIGUY [8, 9] et E. M'HAMEDE [10] et d'autre part, une extension d'un problème étudié par R. FAURE [20]. En effet OSTIGUY et E. M'HAMEDE ont étudié respectivement la stabilité dynamique des plaques excitées paramétriquement par des forces de la forme :

$$N(t) = N_{y_0} + N_{y_t} \cos \theta(t); \text{ la fréquence excitatrice étant } \eta = \frac{d\theta(t)}{dt}, \text{ [8, 9] ; et}$$

$$N(t) = N_{y_0} + N_{y_t} e(t)$$

où

$$e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(t - nT)$$

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega \text{ est la}$$

pulsation excitatrice [10]; ces forces étant distribuées uniformément le long de deux arêtes opposées dans les deux cas.

R. FAURE a étudié dans le cadre des théories des percussions, le système d'équation différentielles régissant les mouvements de deux oscillateurs en liaison par chocs [20]. Le système est de la forme :

$$\begin{aligned} x_1'' + \omega^2 x_1 &= \lambda \left[\varepsilon_1 x_1 + P_1(x_1, x_1') + K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \right] \\ x_2'' + \omega^2 x_2 &= \lambda \left[\varepsilon_2 x_2 + P_2(x_2, x_2') - K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau) \right] \end{aligned}$$

avec la condition de coïncidence

$$x_1(0) = x_2(0)$$

et

$$P_i(0,0) = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(0,0) = \frac{\partial P_i}{\partial x_i'}(0,0) = 0 \quad i=1,2.$$

On peut séparer l'étude de la mécanique non linéaire en gros en deux branches :

Méthodes analytiques : recherche de l'existence des solutions particulières.

Etude de la stabilité.

Méthodes qualitatives et quantitatives des solutions :

(i) Méthodes topologiques : la réduction du problème à l'étude des points fixes d'un opérateur dans un espace de fonctions périodiques.

(ii) Résolution à l'aide des méthodes numériques.

Cet exposé n'a pas pour but d'énoncer une méthode de résolution universelle mais plutôt d'utiliser et contribuer au développement des applications de celles déjà existantes. Il est scindé en cinq chapitres. Le développement de certains chapitres est précédé d'une introduction qui les situe dans l'ensemble de l'exposé et en précise la portée.

Le Chapitre 1 est consacré à la théorie approchée des plaques. Le lecteur y trouvera un résumé des chapitres concernant la flexion forte des plaques traitées par : G. DUVAUT et J.L. LIONS [1]; LANDAU L. et LIFSCHITZ E. [4]; TIMOSHENKO S. et GERE J. [6] et les rappels des équations de Von Karman.

Le Chapitre 2 illustre une application de la méthode de Galerkin [8, 9, 10] pour établir l'équation différentielle vérifiée par le déplacement transversal de la plaque soumise à des percussions longitudinales.

Le Chapitre 3 traite d'un point de vue mathématique le problème d'existence de la solution périodique de l'équation différentielle généralisée :

$$y'' + \lambda c y' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) y = \lambda [y f(t) + \varphi(y)]$$

où

$$\varphi(y) = \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_r y^r, \quad r \text{ entier naturel quelconque;}$$

$$f(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \varepsilon)$$

avec

$$\sum_p |\alpha_p| < \infty.$$

La solution de cette équation différentielle a été cherchée dans l'espace :

$$B(T) = \left\{ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\omega t}, \quad \bar{x}_n = x_{-n} \text{ et } \|x(t)\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

des séries périodiques absolument convergentes. La méthode exposée est inspirée d'un travail de R. FAURE [19].

Nous étudions dans le chapitre 4 la stabilité d'une solution particulière régie par la flèche de la plaque. Pour cette étude nous utilisons la THEORIE DE FLOQUET.

Dans le Chapitre 5, nous étudions le système d'équations différentielles régissant les vibrations de deux oscillateurs voisins en liaison par chocs :

$$x_1'' + \omega^2 x_1 = \lambda [\varepsilon_1 x_1 + P_1(x_1, x_1', t) + K e(t)]$$

$$x_2'' + \omega^2 x_2 = \lambda [\varepsilon_2 x_2 + P_2(x_2, x_2', t) - K e(t)]$$

avec la condition de coïncidence instantanée $x_1(0) = x_2(0)$ et où K amplitude des percussions, est une inconnue

$$e(t) = \sum_{i, n} x_i \cdot \delta(t - t_i - nT) \quad \text{avec} \quad \omega T = 2\pi$$

les P_j sont des fonctions de période T :

$$P_j(x_j, x_j', t) = Q_j(x_j, x_j') + q(t), \quad j=1, 2$$

où

• Q_j est un polynome.

$q(t)$ est une fonction de t , de période T .

Nous déterminons K en deux étapes : $K = K_0 + K'$ en nous inspirant d'un travail de FAURE [20] :

- la première étape consiste à trouver K_0 , valeur principale de K à l'aide des équations de synchronisation du système considéré.
- la deuxième étape concernant K' utilise une méthode d'approximation à partir de la solution du système et de K_0 .

L'existence de la solution périodique a été démontré en utilisant des résultats obtenus par R. FAURE dans le cadre de l'étude des équations différentielles [15, 16, 17, 18, 19, 20].

Dans la dernière partie de ce chapitre, le problème de la synchronisation est étudié en détail dans le cas des équations de la forme :

$$\ddot{w}_1 + \omega^2 w_1 = \lambda [K e(t) - 2c \dot{w}_1 - \delta_1 w_1^3 - \varepsilon_1 \omega^2 w_1]$$

$$\ddot{w}_2 + \omega^2 w_2 = \lambda [-K e(t) - 2c \dot{w}_2 - \delta_2 w_2^3 - \varepsilon_2 \omega^2 w_2]$$

$$w_1(0) = w_2(0)$$

ainsi que le problème de la stabilité au voisinage d'un point de synchronisation.

Dans l'ANNEXE, nous démontrons l'orthogonalité des fonctions propres intervenant dans la représentation du déplacement vertical $W(x, y, t)$ de la plaque et de la fonction d'Airy $F(x, y, t)$ dans le Chapitre 2.

XIII

DEFINITIONS

NOTATIONS

XIV.

D : rigidité de la plaque à la flexion.

E : module de Young.

F : fonction d'Airy (fonction de contrainte).

h : épaisseur de la plaque.

M_x, M_y, M_{xy} : moments fléchissants et de torsion par unité de distance.

N_x, N_y : tensions du plan moyen de la plaque suivant x, y .

Q_x, Q_y : efforts tranchants par unité de longueur suivant x, y .

u_x, u_y : déplacements de la plaque suivant x, y .

w : déplacement normal.

x, y, z : coordonnées cartésiennes.

ϵ_x, ϵ_y : allongements unitaires suivant x, y .

ν : coefficient de Poisson.

ρ : densité volumique de la plaque.

σ_x, σ_y : contraintes selon les directions x, y .

τ_{xy}, τ_{yz} : cisaillements selon xz, yz .

C : coefficient de viscosité (ou coefficient d'amortissement).

C_{pq} : coefficient de viscosité associé à un mode particulier (p, q) de vibration.

$N_x(t), N_y(t)$: charges dans le plan de la plaque par unité de distance :

$$N_x(t) = N_{x0} + N_{xt} \cdot f(t)$$

$$N_y(t) = N_{y0} + N_{yt} \cdot f(t)$$

N_{x0}, N_{y0} : charges statiques par unité de distance dans le plan de la plaque.

N_{xt}, N_{yt} : amplitudes des percussions (ou des charges harmoniques) par unité de distance.

T : période d'excitation.

a : demi-largeur (ou largeur) de la plaque.

b : demi-longueur (ou longueur) de la plaque.

a/b : rapport de forme de la plaque.

CHAPITRE I

FLEXION DES PLAQUES RECTANGULAIRES

EQUATIONS DE VON KARMAN

1.- FLEXION DES PLAQUES SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE REPARTIE LATERALEMENT

Considérons le cas de la flexion d'une plaque par une charge répartie, agissant perpendiculairement à son plan médian; on suppose ce plan horizontal et contenant les axes des x et des y , l'axe de z étant perpendiculaire à ce plan et dirigé de haut en bas. Soit q l'intensité de la charge que l'on considère comme une fonction de x et de y .

Dans l'étude de la flexion de cette plaque, il faut distinguer deux cas :

1.1) Flexion simple

Les tensions sont faibles par rapport aux tensions critiques et l'on peut négliger l'effet qu'elles produisent sur la flexion de la plaque et admettre que les tensions totale s'obtiennent avec une approximation suffisante en superposant les tensions dues à la déformation du plan moyen, et celles produites par la charge.

En découpant un élément de la plaque par deux paires de plans parallèles aux xz et yz (Fig. 1), on déduit qu'en raison de l'action de la charge q il se produira sur les faces latérales de cet élément, des moments de flexion et de torsion et des efforts tranchants verticaux représentés sur la figure 1 et dont les valeurs par unité de longueur seront définies par les formules (1.1a) et (1.1b) suivantes :

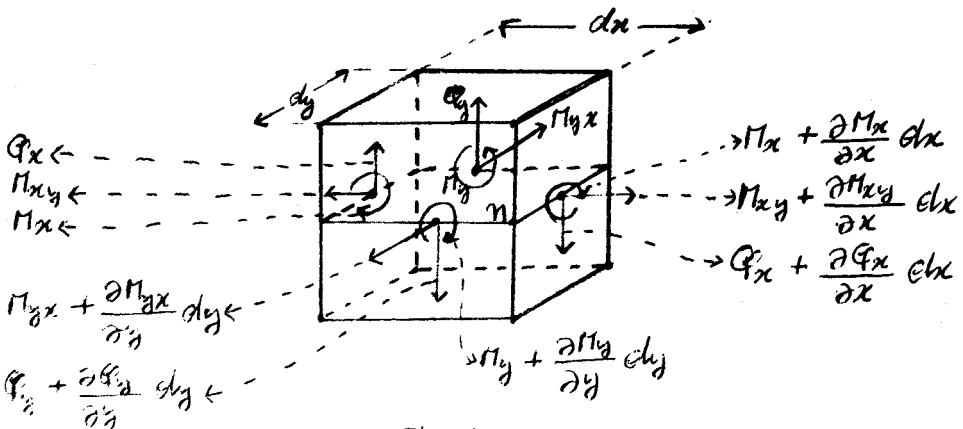


Fig. 1

Désignons par M_x et M_y les moments fléchissants et par M_{xy} et M_{yx} les moments de torsion; on a :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz \quad , \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz \quad (1-1a)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \, dz \quad , \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \, dz$$

Soient Q_x et Q_y les efforts tranchants verticaux, on a :

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz \quad , \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz \quad (1-1b)$$

On peut négliger la variation de τ_{xz} et τ_{yz} le long des petites distances dy et dx et supposer que les efforts tranchants résultant $Q_x \cdot dy$ et $Q_y \cdot dx$ passent par les centres de gravité des faces de l'élément.

NOTATIONS

h : épaisseur de la plaque

σ_x , σ_y : contraintes selon les directions x , y .

τ_{xz} , τ_{yz} : cisaillements selon xz , yz .

Les efforts tranchants (1.1b), les moments fléchissants et les moments de torsions (1.1a) sont tous fonctions de coordonnées x et y . Par suite, en employant les notations Q_x , M_x et M_{xy} pour la force gauche de l'élément de la figure 1 les quantités correspondantes pour la face droite distante de la face gauche de la quantité dx , seront :

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx, \quad M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx, \quad M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

comme le montre la figure. On fait de même pour les autres faces (faces parallèles au plan xz).

Si l'on considère les conditions d'équilibre de l'élément de la figure (1), on remarque qu'il est soumis à des forces qui sont parallèles à l'axe des z et que les couples sont représentés par des vecteurs perpendiculaires à l'axe de z .

En tenant donc compte des directions des forces, leurs projections sur l'axe des z nous donnent :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + Q dx dy = 0$$

ou, après simplification,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + Q = 0 \quad (1-2)$$

Le poids de la plaque elle-même peut être considéré comme compris dans la valeur de Q .

En prenant les moments de toutes les forces agissant sur l'élément par rapport à l'axe des x et, en observant des directions indiquées sur la figure, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0$$

Le moment de la charge Q et le moment dû à la variation de la charge Q_y peuvent être négligés dans cette équation, comme infiniment petits d'ordre supérieur à celui des quantités conservées dans l'équation. Après simplification, cette équation devient :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (1-3)$$

De même, en prenant les moments par rapport à l'axe des y , on trouve :

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (1-4)$$

Si l'on tire les valeurs de Q_x et de Q_y des équations (1-4) et (1-3) et qu'on les porte dans l'équation (1-2), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -Q$$

Si l'on remarque que $M_{yx} = -M_{xy}$, parce que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ on arrive finalement à l'équation de l'équilibre :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -Q \quad (1-5)$$

1.2) Flexion forte

Les tensions qui prennent naissance dans le plan moyen ne sont pas négligeables et leur effet sur la flexion de la plaque intervient dans le calcul. Pour établir les équations différentielles de la surface élastique dans ce cas,

on considère, de nouveau, l'équilibre d'un petit élément découpé dans la plaque par deux paires de plans parallèles aux xz et yz . Aux forces déjà considérées précédemment (Fig. 1), il faut ajouter celles qui agissent sur le plan moyen de la plaque et dont les notations par unité de longueur sont indiquées sur la Figure 2. En projetant ces forces sur les axes des x et y et en supposant qu'il n'y a pas de forces de volume s'exerçant dans ces directions, on obtient les équations suivantes, pour les conditions d'équilibre,

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0$$

(1-6)

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

On constate que ces équations sont entièrement indépendantes de trois équations de l'équilibre considérées au paragraphe précédent.

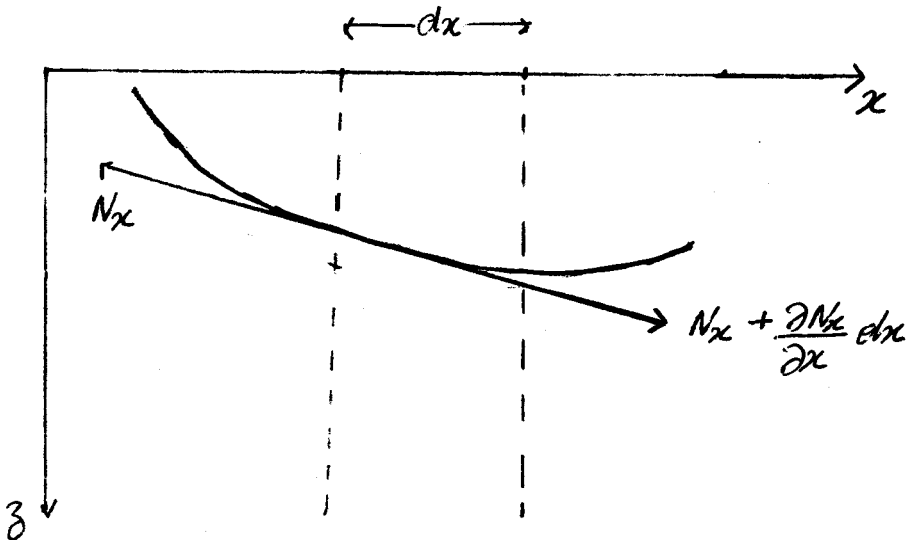
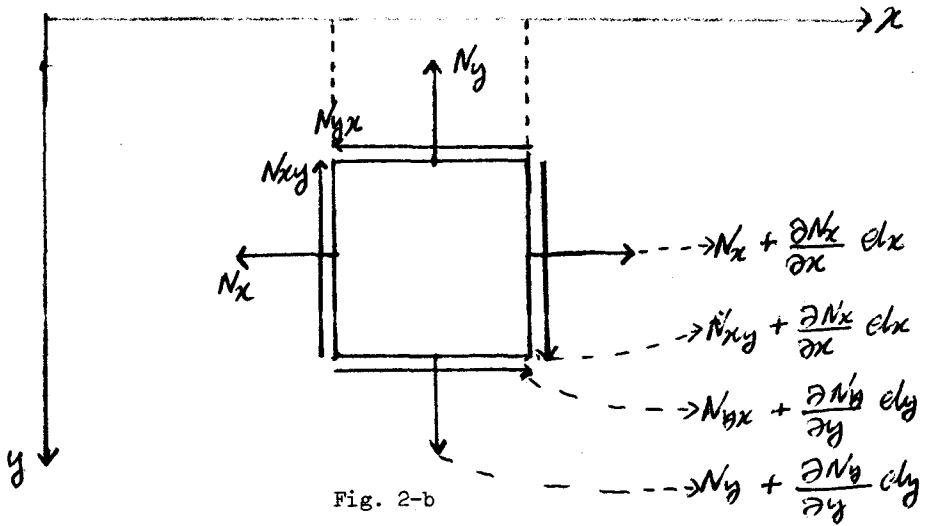


Fig. 2-a



Pour étudier la projection des forces, indiquées sur la figure 2 sur l'axe des ξ , il faut tenir compte de la flexion de la plaque. En raison de la courbure de la plaque dans le plan $x\xi$ (Fig. 2-a), la projection des forces normales N_x sur l'axe des ξ donne :

$$- N_x dy \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) (\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx) dy.$$

Après simplification et en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur, cette projection devient :

$$N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad (1-7a)$$

De même, la projection des forces normales N_y sur l'axe des ξ donne

$$N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad (1-7b)$$

Pour déterminer la projection sur l'axe des z des efforts tranchants N_{xy} , considérons la flexion d'un élément $dx dy$ du plan moyen (Fig. 3).

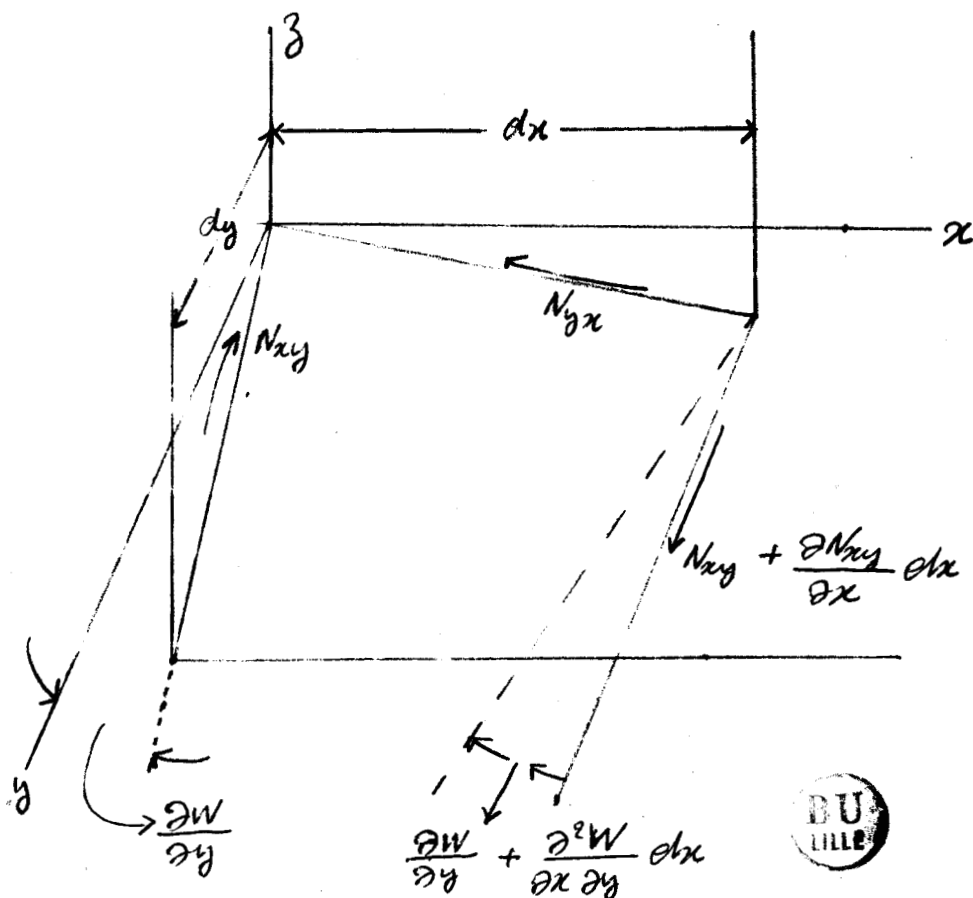


Fig. 3

En raison des angles :

$$\frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx$$

indiqués sur la figure, les efforts tranchants N_{xy} ont pour projection sur

l'axe des z

$$N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} dx dy$$

Les projections sur l'axe des z des efforts tranchants $N_{yx} = N_{xy}$ sont données par une expression analogue et finalement la projection de tous les efforts tranchants est :

$$\textcircled{2} N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad (1-7c)$$

En ajoutant à la charge $q dx dy$ agissant sur l'élément les expressions (1-7a), (1-7b), (1-7c) et en utilisant les équations (1-6), on aura l'équation suivante, pour les conditions d'équilibre,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left(q + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)$$

En remplaçant M_x , M_y et M_{xy} par leurs expressions; soient :

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

On a :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \quad (1-8)$$

où

D : désigne la rigidité de plaque à la flexion.

ν : coefficient de Poisson.

W : déplacement normal.

Dans le cas général, de grandes déformations d'une plaque sont accompagnées d'une extension du plan moyen. Pour étudier les flèches importantes des plaques, on peut continuer à utiliser l'équation (1-8) mais les forces N_x , N_y , N_{xy} dépendent ici non seulement des forces extérieures appliquées au plan xy , mais aussi de l'étirement de la surface moyenne par suite de la flexion. Les équations d'équilibre dans le plan xy sont toujours :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

On obtiendra la troisième équation pour déterminer N_x , N_y et N_{xy} par la condition de déformation du plan moyen de la plaque pendant la flexion.

Composantes du tenseur de déformation

Nous déduirons au préalable l'expression du tenseur de déformation déterminant la traction de la plaque (considérée comme surface) soumise simultanément à une flexion et à une traction dans son plan.

Soit u le vecteur déplacement à deux dimensions (de composantes u_x , u_y) en traction pure; w désigne comme avant le déplacement transversal de flexion. Alors, l'élément de longueur $dl^2 = dx^2 + dy^2$ de la plaque non déformée devient après déformation dl'^2 , de carré [4] :

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + dw^2$$

or

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

$$du_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

$$\begin{aligned} (dx + du_x)^2 &= dx^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} dx^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} dx dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (dy + e u_y)^2 &= dy^2 + 2 \frac{\partial u_y}{\partial x} dy dx + 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} dy^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} dy \right)^2 \\
 &\quad + 2 \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy
 \end{aligned}$$

on ne garde que les termes linéaires des dérivées $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial u_y}{\partial x}$,
 $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, quand à dw^2 , on le garde sans simplification car il ne présente
pas de termes linéaires :

$$dw^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy$$

Donc :

$$df'^2 = e e^2 + 2 E_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

où

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \frac{\partial w}{\partial x_\beta}$$

soit :

$$E_{xx} = E_{11} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$E_{yy} = E_{22} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

(1-9)

$$E_{xy} = E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

En manipulant les dérivées des déformations afin d'éliminer u_x , u_y entre les expressions de ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} on a :

$$\epsilon_{xx,yy} - 2\epsilon_{xy,xy} + \epsilon_{yy,xx} = \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \quad (1-10)$$

En introduisant la fonction d'Airy F , (fonction de contrainte) définie par :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma_{yy}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma_{xx}, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \sigma_{xy} \quad (1-11)$$

et d'après les relations de contraintes-déformations (loi de Hooke).

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \end{aligned} \quad (1-12)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

(1-11) et (1-12) donnent :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \\ \epsilon_{xy} &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1-13)$$

(1-10) et (1-13) donnent :

$$\Delta^2 F = E [W_{,xy}^2 - W_{,xx} W_{,yy}] \quad (1-14)$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$W_{,xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

En posant :

$$\frac{N_x}{h} = \sigma_x = F_{,yy} \quad , \quad \frac{N_y}{h} = \sigma_y = F_{,xx}$$

$$\frac{N_{xy}}{h} = \tau_{xy} = -F_{,xy}$$

et en utilisant ces équations et l'équation (1-8) on obtient :

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D} \left(\frac{q}{h} + F_{,yy} W_{,xx} + F_{,xx} W_{,yy} - 2 F_{,xy} W_{,xy} \right) \quad (1-15)$$

Les équations (1-14) et (1-15) associées aux conditions au contour, déterminent les deux fonctions W et F .

Pour tenir compte des effets dynamiques, on doit, dans les équations d'équilibre, ajouter aux forces et moments extérieurs des forces et moments d'inertie. L'équation (1-15) devient donc, en ajoutant au deuxième membre le terme $\frac{h}{D} \left(-\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right)$:

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D} \left(\frac{q}{h} + F_{yy} W_{,xx} + F_{xx} W_{,yy} - 2 F_{xy} W_{,xy} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right) \quad (1-16)$$

II.- FLEXION D'UNE PLAQUE SOUS L'ACTION DE CHARGE DANS SON PLAN

Considérons une plaque rectangulaire d'épaisseur uniforme, excitée dans son plan par des forces uniformément distribuées le long de deux arêtes opposées (Fig. 4).

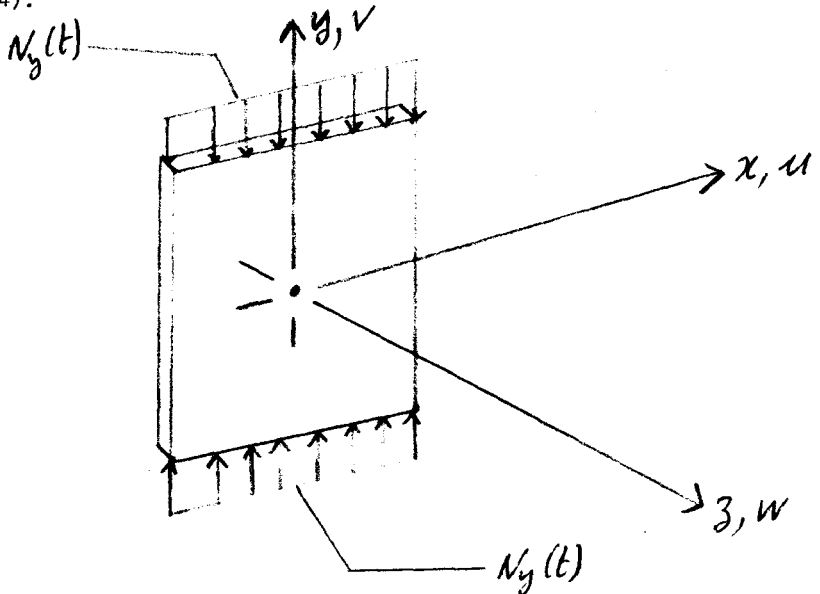


Fig. 4.- Plaque excitée longitudinalement (dans son plan) par la charge $N_y(t)$.

Les forces ayant la même intensité $N_y(t)$ mais exposées, la somme des forces extérieures agissant sur la plaque est nulle. L'équation différentielle (1-16) vérifiée par la flèche devient donc :

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D} \left(F_{,yy} W_{,xx} + F_{,xx} W_{,yy} - 2F_{,xy} W_{,xy} - \rho W_{,tt} \right) \quad (1-17)$$

CHAPITRE II

EQUATIONS TEMPORELLES

DU

MOUVEMENT TRANSVERSAL

I.- FORMULATION DU PROBLEME

I.1) Géométrie du modèle

Le modèle conceptuel considéré dans cette étude consiste en une plaque rectangulaire mince initialement plate, d'épaisseur uniforme h , homogène, élastique, simplement supportée sur son pourtour et excitée dans son plan par deux forces périodiques $N_x(t)$ et $N_y(t)$, uniformément distribuées le long des quatre arêtes (Fig. 5). Les forces $N_x(t)$ et $N_y(t)$ ayant pour expressions :

$$N_x(t) = N_{x_0} + N_{x_t} \times f(t)$$

$$N_y(t) = N_{y_0} + N_{y_t} \times f(t)$$

où N_{x_t} et N_{y_t} sont les amplitudes de la force périodique :

$$f(t) = \varphi(t) + \epsilon(t)$$

$$\epsilon(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad T = \text{période}$$

$$\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau), \quad \omega T = 2\pi$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\alpha_p| < K \quad K = \text{constante.}$$

L'origine du système est choisie au centre de la plaque non déformée (voir fig. 5).

Le cas d'une plaque rectangulaire mince initialement plate, d'épaisseur uniforme homogène, élastique, simplement supportée sur son pourtour et excitée dans son plan par une force périodique uniformément distribuée le long de deux arêtes opposées a été étudié dans [8], [9] et [10].

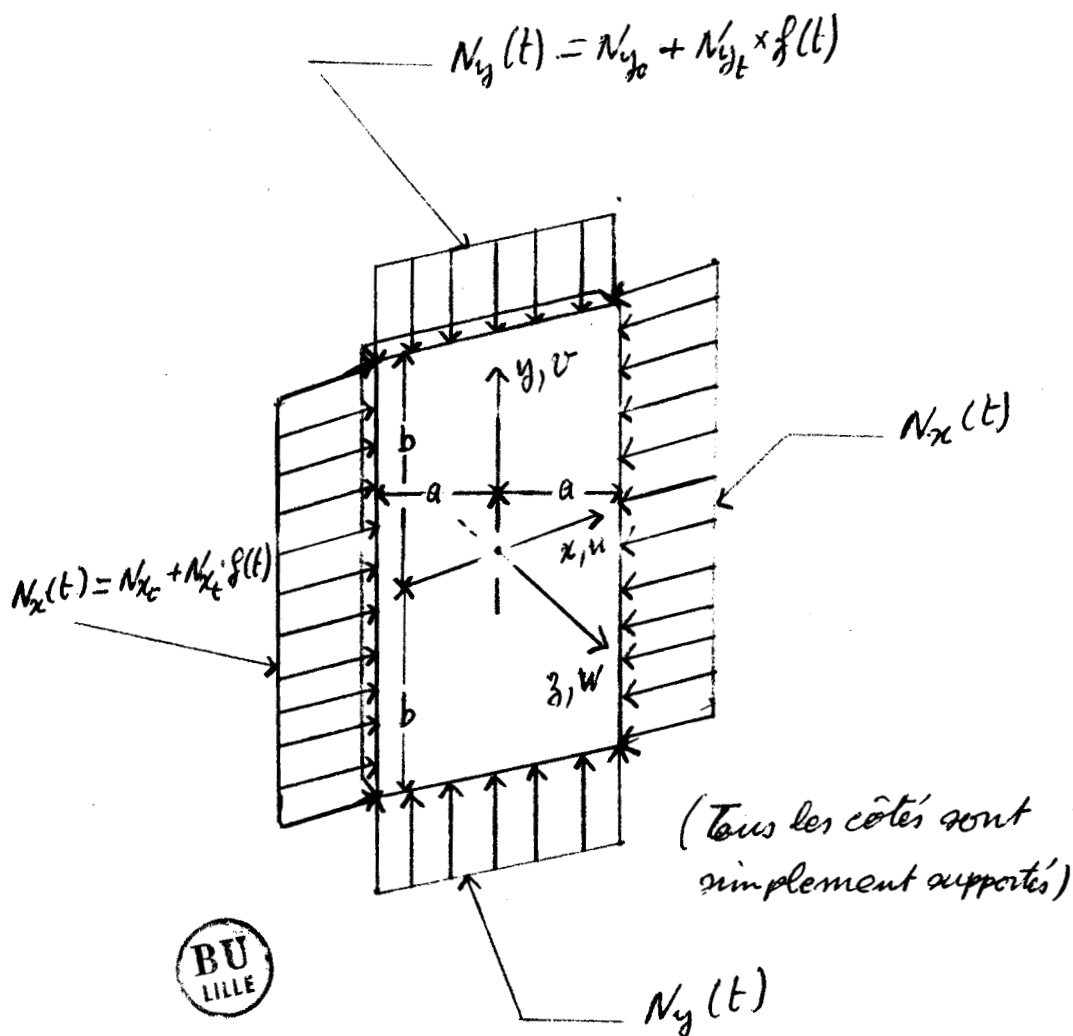


Fig. 5.- Plaque rectangulaire soumise à une excitation paramétrique et continue.

Dans [8] et [9], $f(t)$ a pour expression $f(t) = \cos \theta(t)$.

Dans [10], $f(t)$ est une percussion δ et a pour expression.

$$f(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

1.2) Equations de base

L'analyse est basée sur les équations (1-14) et (1-17) non linéaires correspondant à la version dynamique des équations de Von Karman pour le cas de grandes déformations; tient compte de l'étirement de la surface moyenne mais où l'on néglige le moment d'inertie (car la plaque est mince). Ces équations, exprimées en fonction de la fonction d'Airy F et du déplacement latéral W , sont :

$$\begin{aligned} \nabla^4 F &= E [W_{,xy}^2 - W_{,xx} W_{,yy}] \\ \nabla^4 W &= \frac{G}{D} [F_{,yy} W_{,xx} + F_{,xx} W_{,yy} - 2F_{,xy} W_{,xy} - \rho W_{,tt}] \end{aligned} \quad (2-1)$$

où les indices inférieurs placés après la virgule représentent des dérivées partielles par rapport à ces indices et où D , E et ρ désignent respectivement la rigidité en flexion, le module d'élasticité et la densité de la plaque.

1.3) Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont reliées à la fois à la fonction d'Airy F et au déplacement latéral W . La plaque étant comprimée dans son plan moyen par des forces uniformément réparties le long des arêtes $x = -a$, $x = +a$,

$y = -b$, $y = +b$ nous avons :

$$F_{yy} = -\frac{N_x(t)}{h} ; F_{xy} = 0 \quad \text{à } x = \pm a \quad (2-2)$$

$$F_{xx} = -\frac{N_y(t)}{h} ; F_{xy} = 0 \quad \text{à } y = \pm b$$

Les plaques considérées dans cette étude étant simplement supportées sur leur pourtour, les déflexions latérales et les moments fléchissants le long des arêtes sont nuls et par conséquent :

$$W = W'_{xx} + \nu W'_{yy} = 0 \quad \text{à } x = \pm a$$

$$W = W'_{yy} + \nu W'_{xx} = 0 \quad \text{à } y = \pm b \quad (2-3)$$

Le problème consiste à déterminer les fonctions F et W qui vont satisfaire à la fois les équations du mouvement dans le domaine et les conditions aux limites.

II.- METHODE DE RESOLUTION

II.1) Expression de F et W .

Dans cette étude, le déplacement latéral de la plaque est représenté par une double série des fonctions propres du système linéaire associé :

$$W(x, y, t) = \sum_p \sum_q W_{pq}(t) \Phi_p(x) \Psi_q(y) \quad (2-4)$$

où $W_{pq}(t)$ sont les coordonnées généralisées du système. Les indices p et q correspondent au nombre de demi-ondes dans la direction des axes Ox et Oy , respectivement.

La solution pour la fonction d'Airy est supposée sous la forme d'une double série de fonctions propres de poutre qui satisfont les conditions de contraintes aux rives :

$$F(x, y, t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) - x^2 \frac{N_y(t)}{2h} - y^2 \frac{N_x(t)}{2h} \quad (2-5)$$

où $f_{mn}(t)$ sont les coefficients généralisés de contrainte.

Les familles de fonctions $(X_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$; $(Y_n)_{1 \leq n \leq +\infty}$; $(\Phi_p)_{1 \leq p \leq +\infty}$ et $(\Psi_q)_{1 \leq q \leq +\infty}$ doivent être des familles complètes dans leurs domaines de définition, soit pour $x \in [-a, +a]$ et $y \in [-b, +b]$.

11.2) Choix des fonctions d'approximation

Les expressions analytiques des fonctions propres utilisées dans cette étude sont les mêmes que celles utilisées par OSTIGUY [8, 9]; soit :

$$X_m = \frac{\cosh \alpha_m x}{\cosh \alpha_m a} - \frac{\cos \alpha_m x}{\cos \alpha_m a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2-6)$$

$$Y_n = \frac{\cosh \beta_n y}{\cosh \beta_n b} - \frac{\cos \beta_n y}{\cos \beta_n b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Phi_p = \cos \frac{p\pi x}{2a}, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$\Psi_q = \cos \frac{q\pi y}{2b}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (2-7)$$

ou

$$\Psi_q = \sin \frac{q\pi y}{2b}, \quad q = 1, 2, \dots$$

Avec un choix particulier de α_m et β_n ; F et W vérifiant les conditions aux limites, en effet :

$$F_{,yy} = \sum_{m,n} \delta_{mn} X_m Y_n'' - \frac{N_x(t)}{h}$$

$$F_{,xx} = \sum_{m,n} \delta_{mn} X_m'' Y_n - \frac{N_y(t)}{h}$$

et

$$F_{,xy} = \sum_{m,n} \delta_{mn} X_m' Y_n'$$

et on a bien :

$$F_{,yy}(x = \pm a) = -\frac{N_x(t)}{h} \quad \text{car } X_m(\pm a) = 0$$

$$F_{,xx}(y = \pm b) = -\frac{N_y(t)}{h} \quad \text{car } Y_n(\pm b) = 0$$

et pour avoir :

$$F_{,xy}(\pm a) = 0 \quad \text{il faut : } \tanh \alpha_m a + \tan \alpha_m a = 0$$

et

$$F_{,xy}(\pm b) = 0 \quad \text{il faut : } \tanh \beta_n b + \tan \beta_n b = 0$$

soit en posant $\lambda_n = \beta_n b$, $\lambda_m = \alpha_m a$,

$$\tanh \lambda_p + \tan \lambda_p = 0$$

L'équation (2-8) est appelée équation transcendante. Cette équation admet en général autant de solutions que les fonctions $(-\tan x)$ et $\tanh x$ se rencontrent (fig. 6).

Choix des solutions des équations (2-8)

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, les abscisses des points d'intersection des courbes de $(-\tan x)$ et $\tanh x$. Les dimensions a et b de la plaque étant connues, on peut choisir :

$$\beta_n = \frac{\alpha_0}{b} \quad \text{et} \quad \alpha_m = \frac{\alpha_0}{a}$$

ou

$$\beta_n = \frac{\alpha_1}{b} \quad \text{et} \quad \alpha_m = \frac{\alpha_0}{a}$$

ou

$$\beta_n = \frac{\alpha_0}{b} \quad \text{et} \quad \alpha_m = \frac{\alpha_1}{b}, \dots$$

ou bien α_m et β_n étant fixés on peut choisir les dimensions convenables de la plaque pour que le mouvement soit stable.

Pour la fonction W ; avec le choix de $\Phi_p(x)$ et $\Psi_q(y)$ on a bien :

$$W(x = \pm a) = 0, \quad W(y = \pm b) = 0$$

et

$$\begin{aligned} W_{,xx} + \nu W_{,yy} &= -\frac{p^2 \pi^2}{(2a)^2} W - \nu \frac{q^2 \pi^2}{(2b)^2} W \\ &= \left[-\frac{p^2 \pi^2}{(2a)^2} - \nu \frac{q^2 \pi^2}{(2b)^2} \right] W \end{aligned}$$

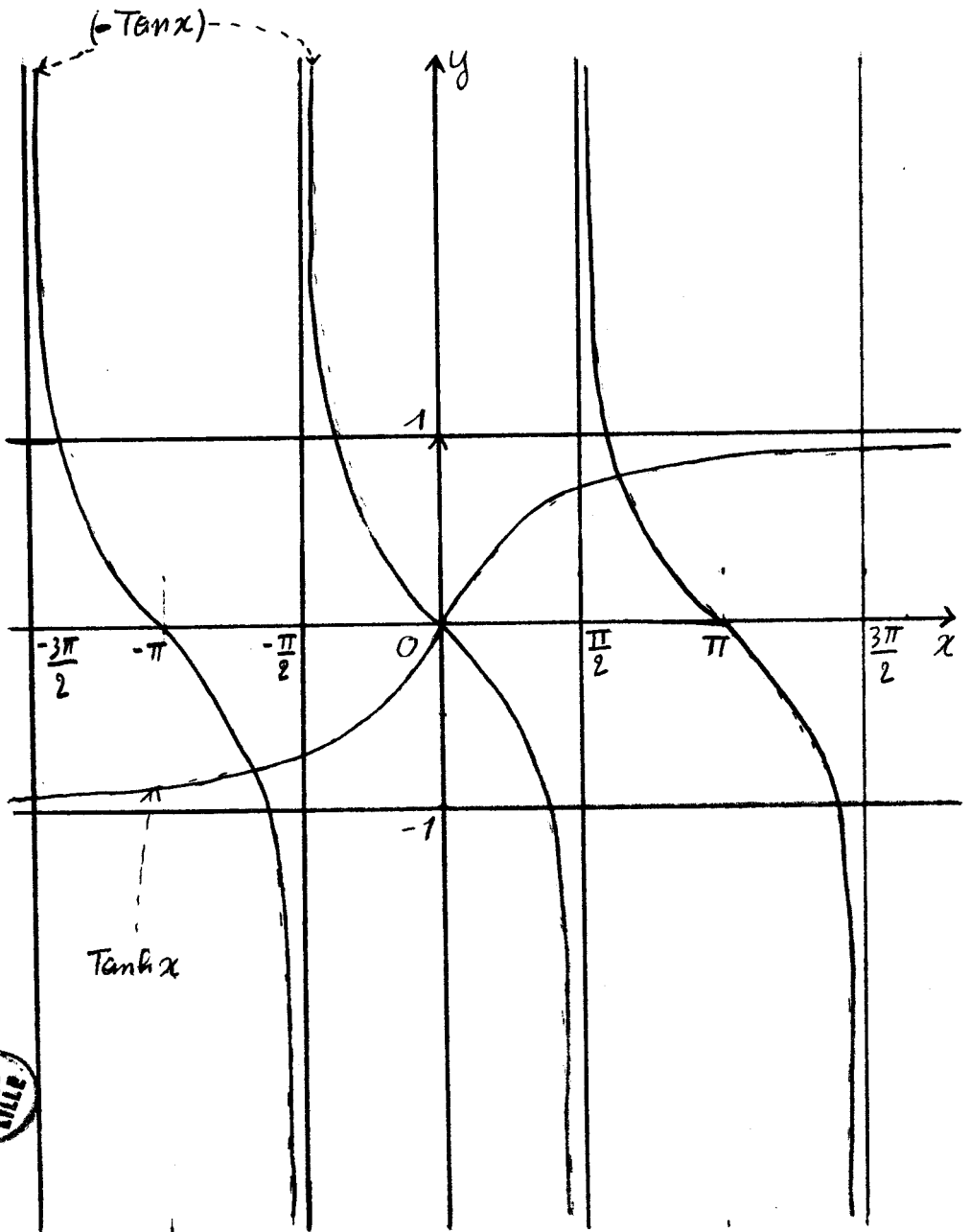


Fig. 6

donc

$$W_{,xx} + \nu W_{,yy} = 0 \quad \text{pour } x = \pm a$$

De même pour

$$W_{,yy} + \nu W_{,xx} = \left[-\frac{q^2 \pi^2}{(2b)^2} - \nu \frac{p^2 \pi^2}{(2a)^2} \right] W$$

et

$$W_{,yy} + \nu W_{,xx} \quad \text{pour } y = \pm b.$$

On montre (voir ANNEXE, § A) que les familles (X_m) , (Y_n) , (Φ_p) et (Ψ_q) sont orthogonales.

11.3) Equation temporelle du mouvement

Dans ce paragraphe nous déterminons l'équation différentielle vérifiée par les coordonnées généralisées $W_{pq}(t)$ du système. δ_i^m et δ_j^n désignent les symboles de Kronecker.

Portons les développements (2-4) et (2-5) supposés pour W et F dans les équations de base (2-1); on obtient [8, 9, 10] :

$$\sum_m \sum_n \delta_{mn} (X_m^{IV} Y_n + 2 X_m'' Y_n'' + X_m Y_n^{IV}) \quad (2-9)$$

$$= F \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq} W_{rs} (\Phi_p' \Phi_r' \Psi_q' \Psi_s' - \Phi_p'' \Phi_r'' \Psi_q \Psi_s'')$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_p \sum_q W_{pq} (\Phi_p'' \Psi_q + \mathcal{O} \Phi_p'' \Psi_q'' + \Phi_p \Psi_q''') \\
&= \frac{H}{D} \left[\sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \delta_{mn} W_{pq} (X_m \Phi_p'' Y_n'' \Psi_q + X_m'' \Phi_p Y_n \Psi_q'' \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{O} X_m' \Phi_p' Y_n' \Psi_q') + \sum_p \sum_q \left(-\frac{N_2(t)}{L} W_{pq} \Phi_p \Psi_q'' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{N_2(t)}{L} W_{pq} \Phi_p'' \Psi_q - \rho \frac{\partial^2 W_{pq}}{\partial t^2} \Phi_p \Psi_q \right) \right] \quad (2-10)
\end{aligned}$$

Exprimons comme dans [90], les fonctions X_i'' ; $\Phi_p' \Phi_r$; $\Phi_p'' \Phi_r$ dans la base $(X_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$ de même pour les fonctions Y_j'' ; $\Psi_q' \Psi_s$; $\Psi_q \Psi_s''$ dans la base $(Y_n)_{1 \leq n \leq +\infty}$. Soit :

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad X_i'' &= \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sum_m K_1^{mi} X_m; \quad Y_j'' = \frac{\lambda_j^2}{b^2} \sum_n L_1^{nj} Y_n \\
\text{(ii)} \quad \Phi_p' \Phi_r' &= \frac{pr\pi^2}{4a^2} \sum_m K_2^{mpr} X_m; \quad \Psi_q' \Psi_s' = \frac{qs\pi^2}{4b^2} \sum_n L_2^{nqs} Y_n \\
\text{(iii)} \quad \Phi_p'' \Phi_r &= \frac{p^2\pi^2}{4a^2} \sum_m K_3^{mpr} X_m; \quad \Psi_q \Psi_s'' = \frac{s^2\pi^2}{4b^2} \sum_n L_3^{nqs} Y_n \\
\text{(iv)} \quad (\Phi_p' \Phi_r') \cdot (\Psi_q' \Psi_s') &= \frac{prqs\pi^4}{16a^2b^2} \sum_m \sum_n K_2^{mpr} L_2^{nqs} X_m Y_n \\
\text{(v)} \quad (\Phi_p'' \Phi_r) (\Psi_q \Psi_s'') &= \frac{p^2s^2}{16a^2b^2} \sum_m \sum_n K_3^{mpr} L_3^{nqs} X_m Y_n
\end{aligned}$$

Désignons par δ_i^l le symbole de Kronecker; en remplaçant les expressions (i), (ii), (iii), (iv) et (v) ci-dessus dans l'équation (2-9), le premier membre de celle-ci devient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_m \sum_n f_{mn} (X_m^{IV} Y_n + 2 X_m'' Y_n'' + X_m Y_n^{IV}) \\
 &= \sum_m \sum_n f_{mn} \left[X_m^{IV} Y_n + \frac{2 \lambda_m^2 \lambda_n^2}{a^2 b^2} \sum_i \sum_j K_1^{im} L_1^{jn} X_i Y_j + X_m Y_n^{IV} \right] \\
 &= \sum_m \sum_n f_{mn} \left[\alpha_m^4 \sum_i \sum_j \delta_i^m \delta_j^n X_i Y_j + \beta_n^4 \sum_i \sum_j \delta_i^m \delta_j^n X_i Y_j + \frac{2 \lambda_m^2 \lambda_n^2}{a^2 b^2} \sum_i \sum_j K_1^{im} L_1^{jn} X_i Y_j \right] \\
 &= \frac{1}{a^2 b^2} \sum_i \sum_j \left\{ \sum_m \sum_n f_{mn}(t) \left[\delta_i^m \delta_j^n (\alpha_m^4 a^2 b^2 + \beta_n^4 a^2 b^2) + 2 \lambda_m^2 \lambda_n^2 K_1^{im} L_1^{jn} \right] \right\} X_i Y_j \\
 &= \frac{1}{a^2 b^2} \sum_i \sum_j \left\{ \sum_m \sum_n f_{mn}(t) \left[\delta_i^m \delta_j^n (c^2 \lambda_m^4 + \lambda_n^4 / c^2) + 2 \lambda_m^2 \lambda_n^2 K_1^{im} L_1^{jn} \right] \right\} X_i Y_j \\
 &= \frac{1}{a^2 b^2} f_{mn}(t) A_{ij}^{mn} X_i Y_j
 \end{aligned}$$

en adoptant les règles habituelles de sommation; c'est-à-dire la répétition d'un indice dénote une sommation par rapport à cet indice et en posant :

$$\boxed{A}_{ij}^{mn} = \delta_i^m \delta_j^n \left[c^2 \lambda_m^4 + \lambda_n^4 / c^2 \right] + 2 \lambda_m^2 \lambda_n^2 K_1^{imjn} L_1$$

$C = b/a$ est le rapport de forme de la plaque.
membre

Le secondéde (2-9) devient :

$$\begin{aligned} E \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s W_{pq} W_{rs} (\Phi'_p \Phi'_r \Psi'_q \Psi'_s - \Phi''_p \Phi''_r \Psi''_q \Psi''_s) \\ = \sum_i \sum_j \left\{ \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s E W'_{pq} W'_{rs} \left[\frac{pqrs \pi^4}{16 a^2 b^2} K_2^{iprjq s} L_2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{p^2 s^2 \pi^4}{16 a^2 b^2} K_3^{iprjq s} L_3 \right] \right\} X_i Y_j \\ = \frac{1}{a^2 b^2} B_{ij}^{pqrs} W_{pq} W_{rs} X_i Y_j \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{B}_{ij}^{pqrs} = \frac{E \pi^4}{16} \left[pqrs K_2^{iprjq s} L_2 - p^2 s^2 K_3^{iprjq s} L_3 \right]$$

D'où

$$\boxed{A}_{ij}^{mn} f_{mn}(t) = \boxed{B}_{ij}^{pqrs} W_{pq} W_{rs} \quad (2-11)$$

Pour les équations (2-10) nous posons

$$(vi) X'_m \Phi'_r = \frac{r\pi\lambda_m}{a^2} \sum_u K_u^{umr} \Phi_u; Y'_n \Psi'_s = \frac{s\pi\lambda_n}{b^2} \sum_v L_v^{vns} \Psi_v$$

$$(vii) X''_m \Phi''_r = \frac{\lambda_m^2}{a^2} \sum_u K_5^{umr} \Phi_u; Y''_n \Psi''_s = \frac{\lambda_n^2}{b^2} \sum_v L_5^{vns} \Psi_v$$

$$(viii) X_m \Phi''_r = \frac{r^2\pi^2}{4a^2} \sum_u K_6^{umr} \Phi_u; Y_n \Psi''_s = \frac{s^2\pi^2}{4b^2} \sum_v L_6^{vns} \Psi_v$$

En remplaçant dans l'équation (2-10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_u \sum_v \left\{ W_{uv}(t) \left[\frac{u^4\pi^4}{16a^4} + 2 \frac{u^2\pi^2}{4a^2} \frac{v^2\pi^2}{4b^2} + \frac{v^4\pi^4}{16b^4} \right] \right. \\ & - \frac{1}{D} \left[N_y(t) \frac{v^2\pi^2}{4b^2} + N_x(t) \frac{u^2\pi^2}{4a^2} \right] W_{uv} + \frac{\hbar}{D} \rho \ddot{W}_{uv} \left. \right\} \Phi_u \Psi_v \\ & + \sum_u \sum_v \left\{ \frac{\hbar}{D} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s f_{mnr} W_{rs} \left[\frac{2rs\pi^2}{4a^2b^2} \lambda_m \lambda_n K_u^{umr} L_4^{vns} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r^2\lambda_n^2\pi^2}{4a^2b^2} K_6^{umr} L_5^{vns} - \frac{s^2\lambda_m^2\pi^2}{4a^2b^2} K_5^{umr} L_6^{vns} \right] \right\} \Phi_u \Psi_v \\ & = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} & \sum_u \sum_v \left\{ \frac{\pi^4}{16a^4 c^2} W_{uv}(t) \left[c^2 u^4 + 2u^2 v^2 + v^4/c^2 \right] \right. \\ & - \frac{\pi^2}{4Da^2 c^2} \left[c^2 u^2 N_x(t) + v^2 N_y(t) \right] W_{uv}(t) + \frac{\hbar}{D} \rho \ddot{W}_{uv}(t) \left. \right\} \Phi_u^\dagger \Psi_v \\ & + \sum_u \sum_v \left\{ \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \frac{\hbar}{D} \frac{\pi^2}{4a^4 c^2} f_{mn}(t) W_{rs}(t) \left[2rs \lambda_m \lambda_n K_u^{umr, vns} \right. \right. \\ & \left. \left. - s^2 \lambda_m^2 K_5^{umr, vns} L_6 - r^2 \lambda_n^2 K_6^{umr, vns} L_5 \right] \right\} \Phi_u^\dagger \Psi_v = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 D}{16\rho\hbar a^4 c^2} \left[c^2 u^4 + 2u^2 v^2 + v^4/c^2 \right] W_{uv}(t) \\ & - \frac{\pi^2 D}{4Da^2 c^2 \rho a} \left[c^2 u^2 N_x(t) + v^2 N_y(t) \right] W_{uv}(t) + \ddot{W}_{uv}(t) \\ & + G_{uv}^{mnrs} f_{mn}(t) W_{rs}(t) = 0 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$G_{uv}^{mnrs} = \frac{\pi^2}{4\rho a^4 c^2} \left[2rs \lambda_m \lambda_n K_u^{umr, vns} \right.$$

$$-s^2 \Delta_m^2 K_5^{umr} L_6^{vns} - r^2 \Delta_n^2 K_6^{umr} L_5^{vns} \Big]$$

Finalement on obtient :

$$\ddot{W}_{uv} + \omega_{uv}^2 W_{uv} - \frac{\pi^2}{4\rho h a^2 c^2} \left[c^2 u^2 N_x(t) + v^2 N_y(t) \right] W_{uv} \\ + \left[\sum_{mnrs}^{mnr s} \right]_{uv} S_{mn}(t) W_{rs} = 0 \quad (2-12)$$

où les pulsations propres sont données par

$$\omega_{uv}^2 = \frac{\pi^4 D}{16\rho h a^4 c^2} \left[c^2 u^4 + 2u^2 v^2 + v^4/c^2 \right]$$

$c = b/a$ est le rapport de forme de la plaque et où la répétition d'un indice dénote une sommation par rapport à cet indice.

L'équation différentielle (2-12) représente l'équation temporelle d'excitation paramétrique d'une plaque rectangulaire simplement posée; cette plaque étant soumise dans son plan à des percussions dans les directions $x'ox$ et $y'oy$.

Les expressions des K_i et L_i qui dépendent des fonctions propres utilisées sont données dans l'ANNEXE § A.

Les équations (2-11) établissent les relations existant entre les coefficients de contrainte $\mathcal{G}_{mn}(t)$ et les coordonnées généralisées $W_{pq}(t)$.
La résolution du système d'équations (2-11) en fonction des $\mathcal{G}_{mn}$ nous donne :

$$\mathcal{G}_{mn}(t) = \begin{bmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{bmatrix}^{pqrs} W_{pq}(t) W_{rs}(t) \quad (2-13)$$

$\swarrow$
 ij

où

$$\begin{bmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{bmatrix}^{pqrs} = \begin{bmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{bmatrix}^{mn-1}_{ij} \begin{bmatrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{bmatrix}^{pqrs}_{ij}$$

En portant les relations (2-13) dans les équations (2-12), on peut

$$N_{uv} = \frac{\pi^2 D}{4a^2} \left(C^2 u^4 + 2 u^2 V^2 + V^4 / C^2 \right)$$

et sachant que

$$N_x(t) = N'_{x0} + N'_{xt} f(t)$$

$$N_y(t) = N'_{y0} + N'_{yt} f(t)$$

avec

$$f(t) = e(t) + q(t)$$

$$e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad , \quad T = \text{période}$$

$$q(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

$$\sum_p |\alpha_p| < \infty$$

on peut écrire les équations temporelles du mouvement sous la forme :

$$\ddot{W}_{uv} + \omega_{uv}^2 \left[1 - \frac{(c^2 u^2 N_{x_0} + v^2 N_{y_0}) + (c^2 u^2 N_{x_t} + v^2 N_{y_t}) f(t)}{N_{uv}} \right] W_{uv} \\ + M_{uv}^{klpqrs} \cdot W_{kl} W_{pq} W_{rs} = 0$$

où

$$\left[M_{uv}^{klpqrs} \right] = \left[G_{uv}^{mnkl} \right] \left[R_{mn}^{pqrs} \right] = \text{matrice}$$

des coefficients non linéaires d'élasticité. Transformons quelque peu cette

équation; nous obtenons :

$$\ddot{W}_{uv} + \omega_{uv}^2 \left[1 - \frac{(c^2 u^2 N_{x_0} + v^2 N_{y_0})}{N_{uv}} \right] \left[1 - \frac{(c^2 u^2 N_{x_t} + v^2 N_{y_t}) f(t)}{N_{uv} \left(1 - \frac{(c^2 u^2 N_{x_0} + v^2 N_{y_0})}{N_{uv}} \right)} \right] W_{uv} + M_{uv}^{klpqrs} W_{kl} W_{pq} W_{rs} = 0$$

Posons de même

$$\Omega_{uv} = \omega_{uv} \left[1 - \frac{e^2 \mu^2 N_{x_0} + v^2 N_{y_0}}{N_{uv}} \right]^{1/2} \quad \text{qui est la}$$

pulsation naturelle de la vibration de la plaque chargée par N_{x_0} et N_{y_0} .

et

$$J_{uv} = \frac{e^2 \mu^2 N_{x_0} + v^2 N_{y_0}}{2 (N_{uv} - e^2 \mu^2 N_{x_0} + v^2 N_{y_0})} \quad : \text{excitation}$$

en charge paramétrique.

Avec ces notations nous avons l'équation non linéaire vérifiée par W_{uv} :

$$\ddot{W}_{uv} + \Omega_{uv}^2 (1 - 2J_{uv} f(t)) W_{uv} + M_{uv}^{klpqrs} W_{kl} W_{pq} W_{rs} = 0 \quad (2-14)$$

En ajoutant, pour plus de généralité, l'effet de l'amortissement linéaire dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$\ddot{W}_{uv} + 2C_{uv} \dot{W}_{uv} + \Omega_{uv}^2 (1 - 2J_{uv} f(t)) W_{uv} + M_{uv}^{klpqrs} W_{kl} W_{pq} W_{rs} = 0 \quad (2-15)$$

Pour éviter la présence de nombreux termes non linéaires basiques (d'ordre trois) qui crée un couplage modal important, nous prendrons $u=p=k=x$ et $v=q=l=y$ soit $W_{kl} = W_{pq} = W_{rs}$. L'équation (2-15) devient alors :

$$\ddot{W}_{pq} + 2C_{pq} \dot{W}_{pq} + \Omega_{pq}^2 (1 - 2J_{pq} f(t)) W_{pq} + M_{pq} W_{pq}^3 = 0$$

soit en omettant les indices

$$\ddot{W} + 2C \dot{W} + \Omega^2 (1 - 2J f(t)) W + M W^3 = 0 \quad (2-16)$$

Dans la suite nous nous placerons dans le cas des deux hypothèses suivantes :

a) La viscosité C , l'excitation paramétrique J et le coefficient de non linéarité M sont petits, nous posons pour la commodité de l'écriture :

$$C = \lambda c \quad J = \lambda J \quad \gamma = M = \lambda \gamma$$

λ étant un petit paramètre ($\lambda \rightarrow 0$)

b) Dans le cas d'excitation paramétrique nous devons envisager le cas de la résonance (pour avoir des vibrations non nulles); soit :

$$\Omega^2 = \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon)$$

ε étant une constante non nulle.

L'équation (2-16) devient :

$$\ddot{W} + \omega^2 W = \lambda [2J W f(t) - 2C \dot{W} - \varepsilon W \omega^2 - \gamma W^3] \quad (2-17)$$

Cette équation représente un oscillateur linéaire $(\ddot{W} + \omega^2 W)$ perturbé par $(2J W f(t) - \gamma W^3 - 2C \dot{W} - \varepsilon \omega^2 W)$

Nous retiendrons la forme finale suivante de l'équation (2-17) :

$$\ddot{W} + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) W + 2C \dot{W} = \lambda [2J W f(t) - \gamma W^3] \quad (2-18)$$

où

$$f(t) = e(t) + \varphi(t)$$

$$e(t) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S(t - mT)$$

$$\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau) \quad \text{avec} \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\alpha_p| < K$$

Nous étudions dans les chapitres III et IV l'existence de solutions périodiques de l'équation (2-18) et la stabilité.

CHAPITRE III

EXISTENCE DE SOLUTION
DES EQUATIONS TEMPORELLES
DU MOUVEMENT.

I.- POSITION DU PROBLEME

R. FAURE a étudié la question des solutions périodiques de l'équation différentielle [15, 16] :

$$y'' + \lambda c y' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) y = \lambda [Q(y) + e(t)]$$

où $e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ et $Q(y)$ est un polynôme à coefficients constants vérifiant $Q(0) = 0$ et $Q'(0) = 0$, λ un paramètre.

Que se passe-t-il dans le cas de l'équation différentielle :

$$y'' + \lambda c y' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) y = \lambda [Q(y) + y f(t)] \quad (3-1)$$

pour laquelle l'ensemble des fonctions $e(t)$, $\varphi(t)$ et des constantes λ , ε , c satisfait les conditions (H) suivantes :

1°) $e(t)$, $\varphi(t)$ sont toutes des fonctions périodiques de t , de même période T ; T et l'ensemble des fonctions sont indépendants de λ .

2°) $f(t) = \varphi(t) + e(t)$ est la combinaison d'une percussion $e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ et d'une force périodique $\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \gamma)$ avec $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\alpha_p| = K < \infty$.

3°) $Q(y)$ est un polynôme à coefficients constants :

$$Q(y) = a_2 y^2 + \dots + a_r y^r \quad ; \text{ donc } Q(0) = Q'(0) = 0.$$

4°) c et ε sont des constantes non nulles.

5°) $|\lambda|$ est supposée petite et $\lambda \neq 0$?

Des hypothèses supplémentaires (6°, 7°, 8°) portant sur la convergence des suites définissant la solution du problème seront précisées plus loin.

Existe-t-il une solution périodique non nulle ?

Dans les paragraphes ci-dessus, après avoir rappelé la structure et quelques propriétés de l'ensemble $B(T)$ des séries absolument convergentes de période T , nous montrons l'existence de solution de l'équation différentielle (3-1) dans cet ensemble.

II.- EXISTENCE D'UNE SOLUTION

II.1) Préliminaires [10, 23]

Nous donnons dans ce paragraphe un certain nombre de propriétés et de définitions dont nous aurons besoin pour montrer l'existence d'une solution de l'équation (3-1).

$$B(T) = \left\{ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\omega t}, \sum_n |x_n| < +\infty \right.$$

et $\bar{x}_n = x_{-n}$ } désigne l'espace des séries absolument convergentes de période T .

On définit dans cet espace la norme par :

si $x(t) \in B(T)$ alors : $\|x(t)\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|$

II-1-1.- Structure et propriétés de l'espace $B(T)$

a) $B(T)$ est isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \sum |x_n| < +\infty \right\}$

Soit l'application :

$$T: \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow B(T)$$

$$T[(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\omega t} \quad \text{telle que}$$

T est linéaire et bijective.

Si on définit la norme de T par :

$$\|T\| = \sup \frac{\|T(x_n)\|_{B(T)}}{\|(x_n)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}} = 1$$

Puisque $\ell^1(\mathbb{Z})$ est un espace de Banach alors on peut en déduire que $B(T)$ est aussi un espace de Banach.

b) L'application $B(T) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, T)$ muni de la norme "sup" est injective et de norme 1. $B(T)$ est donc un espace fermé de $C^0(\mathbb{R}, T)$ et la convergence dans $B(T)$ implique la convergence uniforme car :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| \leq \|x(t)\|_{B(T)}$$

on a l'égalité pour $x(t) = e^{im\omega t}$ ($m \in \mathbb{Z}$).

c) $\ell^1(\mathbb{Z}) = E_1 \oplus E_2$ avec

$$E_1 = \left\{ (x_m)_{m \in \mathbb{Z}} \mid x_m = 0 \text{ si } |m| \neq 1 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (x_m)_{m \in \mathbb{Z}} \mid x_1 = x_{-1} = 0 \right\}$$

Grâce à l'isomorphisme T nous avons :

$$B(T) = B_1(T) \oplus B_2(T)$$

où

$$B_1(T) = \left\{ x_{-1} e^{-i\omega t} + x_1 e^{i\omega t} \mid |x_{-1}| + |x_1| < +\infty \right\}$$

$$B_2(T) = \left\{ \sum_{|p| \neq 1} x_p e^{ip\omega t} \mid \sum_{|p| \neq 1} |x_p| < +\infty \right\}$$

Nous appellerons P_1 et P_2 deux projecteurs suivant $B_1(\tau)$ et $B_2(\tau)$ respectivement :

$$P_1: \mu \in B(\tau) \longmapsto P_1 \mu = \mu_1 \in B_1(\tau)$$

$$P_2: \mu \in B(\tau) \longmapsto P_2 \mu = \mu_2 \in B_2(\tau)$$

$$\mu = P_1 \mu + P_2 \mu = \mu_1 + \mu_2$$

a) $B(\tau)$ a une structure d'algèbre de Banach.

Puisque la multiplication est associative dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et distributive par rapport à l'addition, elle l'est aussi dans $B(\tau)$.

Propriété - Si $x(t) \in B(\tau)$, $y(t) \in B(\tau)$

$$\text{alors : } \|x(t) \cdot y(t)\| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$$

Preuve

Il suffit de montrer cette propriété dans $\ell^1(\mathbb{Z})$

Posons $x = (x_p)$; $y = (y_p)$; $z = (z_p)$, x, y, z sont des éléments de $\ell^1(\mathbb{Z})$. On définit la convolution des suites de la manière suivante.

$$z = x * y \iff \forall n \in \mathbb{Z}, z_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p y_{p-n}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|z\| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x_p y_{p-n}| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x_p| |y_{p-n}| = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |x_p| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_{p-n}| \end{aligned}$$

or

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_{p-n}| = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |y_q| \Rightarrow \|z\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Soit alors $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $y \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$\|x * y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

et puisque

$$T(x * y) = T(x) \times T(y)$$

On a alors pour $x(t) \in B(T)$ et $y(t) \in B(T)$

$$\|x(t) \cdot y(t)\| \leq \|x(t)\| \cdot \|y(t)\|$$

et si $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\|(x(t))^n\| \leq \|x(t)\|^n$

II.1.2.- Mesure de Dirac - Distribution.

a) Nous définissons la percussion par une mesure de Dirac $\delta(t-nT)$ agissant pour tous les instants $t = nT$, n prenant toutes les valeurs entières négatives et positives ou nulles.

La force extérieure est représentée par

$$f(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

On montre (cf. L. SCHWARTZ [23]) que la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\omega t}}{T}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution périodique $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ comportant une masse en chaque point (instant) d'abscisse multiple entier de T .

Soit :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\omega x}}{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nT)$$

b) Soit μ une fonction périodique et δ étant la distribution de Dirac, alors :

$$\langle \mu \delta, g \rangle = \langle \delta, \mu g \rangle = \mu(0) g(0)$$

donc $\mu \delta = \mu(0) \delta$

Nous définissons le produit $\mu \delta(t-nT)$ par :

$$\mu \delta(t-nT) = \mu(nT) \delta(t-nT) = \mu(0) \delta(t-nT)$$

car μ est périodique de période T .

II.1.3.- Equations de synchronisation

Nous allons chercher une solution de l'équation (3-1) sous la forme

$$y_0 = A e^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}, \quad A = R e^{i\theta}$$

vérifiant la condition de synchronisation :

$$y_0 f(t) - c y'_0 - \varepsilon \omega^2 y_0 + Q(y_0) \in \mathcal{B}_2(T) \quad (3-2)$$

et où A^* désigne le conjugué du nombre complexe A .

Nous posons par la suite :

$$B = A^*$$

et

$$\psi(y_0, y'_0, t) = y_0 f(t) - c y'_0 - \varepsilon \omega^2 y_0 + Q(y_0)$$

Pour satisfaire la condition de synchronisation (3-2), il suffit d'annuler les coefficients de $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$ dans le développement en série de Fourier de $\psi(y_0, y'_0, t)$. En effet, nous remplaçons la distribution périodique $e(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ par la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega t}$ au sens des distributions et la force périodique $\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$ par la série de Fourier : $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p (\cos \tau) e^{ip\omega t}$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi(y_0, y'_0, t) &= y_0 e(t) + y_0 \varphi(t) - c y'_0 - \varepsilon \omega^2 y_0 + Q(y_0) \\ &= (A+B) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\omega t} + \cos \tau \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p (A e^{i(p-1)\omega t} + B e^{i(p+1)\omega t}) \\ &\quad - c(-i\omega A e^{-i\omega t} + i\omega B e^{i\omega t}) - \varepsilon \omega^2 (A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t}) \\ &\quad + \sum_{j=2}^r a_j (A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t})^j \end{aligned}$$

$$\text{car } y_0 \delta(t - nT) = y_0(nT) \delta(t - nT) = y_0(0) \delta(t - nT)$$

donc

$$y_e(t) = y_e(e) T \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(t - pT) = y_e(e) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ip\omega t}$$

$$\begin{aligned} \Psi(y_0, y'_0, t) = & (A+B)e^{-i\omega t} + (A+B)e^{i\omega t} \\ & + \alpha_0 \cos \tau (Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}) \\ & + \alpha_2 \cos \tau A e^{i\omega t} + \alpha_2 \cos \tau B e^{-i\omega t} \\ & + (A+B) \sum_{|p| \neq 1} e^{ip\omega t} + \sum_{p \neq 0, 2} (A \cos \tau) \alpha_p e^{i(p-1)\omega t} \\ & + \sum_{p \neq 0, -2} (B \cos \tau) \alpha_p e^{i(p+1)\omega t} \\ & + i c \omega A e^{-i\omega t} - i c \omega B e^{i\omega t} - \varepsilon \omega^2 A e^{-i\omega t} \\ & - \varepsilon \omega^2 B e^{i\omega t} + \sum_{j=2}^r \alpha_j \left[\sum_{p=0}^j C_j^p (A e^{-i\omega t})^{j-p} (B e^{i\omega t})^p \right] \end{aligned}$$

où

$$C_j^p = \frac{j!}{(j-p)! p!}.$$

Pour $j = 2, \dots, r$; l'expression

$$\sum_{p=0}^j (A e^{-i\omega t})^{j-p} (B e^{i\omega t})^p C_j^p$$
 contient les termes $e^{-i\omega t}$ et $e^{i\omega t}$ pour j impair. Donc $\psi(y_0, y_0', t) \in \mathcal{B}_2(\pi)$ si : pour j impair tel que $j-2p=1$ dans le développement de

$$\sum_{p=0}^j C_j^p (A e^{-i\omega t})^{j-p} (B e^{i\omega t})^p :$$

$$(A+B) + (\alpha_2 A + \alpha_0 B) \cos \tau - i\omega B - \varepsilon \omega^2 B + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j C_j^p A^p B^{j-p} = 0 \quad (3-3)$$

$$(A+B) + (\alpha_0 A + \alpha_2 B) \cos \tau + i\omega A - \varepsilon \omega^2 A + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j C_j^p A^{j-p} B^p = 0$$

$$A = R e^{i\theta} \quad \text{et} \quad B = A^*$$

Ces équations (3-3) s'appellent équations de synchronisation.

On suppose résolu le système numérique (3-3) et soit :

$$R = \bar{R} ; \quad \theta = \bar{\theta}$$

le système de solutions non identiquement nulles.

$y_0 = \bar{R} \cos(\omega t + \bar{\theta})$ est appelée solution de synchronisation,

$\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$ sont les coefficients intervenant dans l'expression de la force périodique :

$$\psi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

II.2) Théorème

Si la solution de synchronisation y_0 existe et est non nulle,

l'équation différentielle (3-1) satisfaisant les hypothèses $(1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ)$ admet en général une solution périodique appartenant à l'espace des séries périodiques absolument convergentes :

$$\mathcal{B}(\tau) = \left\{ x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\omega t}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n| < +\infty \text{ et } x_n^* = x_{-n} \right\}$$

pourvu que $|\lambda|$ soit petite.

PREUVE DU THEOREME

II.2.1.- Suites récurrentes $(u_{1,n}) \in \mathcal{B}_1(\tau)$ et $(u_{2,n}) \in \mathcal{B}_2(\tau)$

Pour démontrer le théorème, nous allons définir deux suites récurrentes $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ et montrer que toute solution y de (3-1) est la somme de y_0 et des limites, si elles existent, de ces suites; c'est-à-dire :

$$y = y_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{1,n} + u_{2,n})$$

Posons pour cela : $y = y_0 + u$ où y_0 est la solution de synchronisation déterminée et $u \in \mathcal{B}(\tau)$. L'équation :

$$y'' + \lambda \epsilon y' + \omega^2 (1 + \lambda \epsilon) y = \lambda [y f(t) + Q(y)]$$

où

$$f(t) = \tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(t - nT) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(\phi \omega t + \tau)$$

et

$$Q(y) = a_2 y^2 + \dots + a_r y^r ;$$

devient alors :

$$u'' + \lambda c u' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) u = \lambda \left[u f(t) + \varphi(y_0 + u) - \varphi(y_0) \right]$$

ou d'après le développement de Taylor du polynôme $\varphi(y)$ au voisinage de y_0 on a :

$$u'' + \lambda c u' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) u = \lambda \left[u f(t) + \varphi'(y_0) u + \frac{1}{2} \varphi''(y_0) u^2 + \frac{1}{3!} \varphi'''(y_0) u^3 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0) u^r \right]$$

Puisque $u \in B(T) = B_1(T) \oplus B_2(T)$ posons :

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{avec } u_1 \in B_1(T) \\ u_2 \in B_2(T)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle ci-dessus on obtient :

$$u_1'' + \lambda c u_1' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) u_1 + u_2'' + \lambda c u_2' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) u_2 = \lambda \left[(u_1 + u_2) f(t) + \varphi'(y_0) (u_1 + u_2) + \frac{1}{2} \varphi''(y_0) (u_1 + u_2)^2 + \frac{1}{3!} \varphi'''(y_0) (u_1 + u_2)^3 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0) (u_1 + u_2)^r \right] \quad (3-7)$$

Projetons les deux membres de (3-7) suivant $B_1(T)$ et $B_2(T)$.

On obtient alors :

$$u_1'' + \lambda C u_1' + \omega^2(1 + \lambda \varepsilon) u_1 - \lambda P_1[u_1 f(t)]$$

$$- \lambda P_1[\Phi'(y_0) u_1] = \lambda P_1[u_2 f(t) + \Phi'(y_0) u_2$$

$$+ \frac{1}{2} \Phi''(y_0)(u_1 + u_2)^2 + \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(y_0)(u_1 + u_2)^r] \quad (3-8)$$

et

$$u_2'' + \lambda C u_2' + \omega^2(1 + \lambda \varepsilon) u_2$$

$$= \lambda P_2[(u_1 + u_2) f(t) + \Phi'(y_0)(u_1 + u_2)$$

$$+ \frac{1}{2} \Phi''(y_0)(u_1 + u_2)^2 + \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(y_0)(u_1 + u_2)^r] \quad (3-9)$$

Nous définissons les suites récurrentes $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ de la

manière suivante :

$$\begin{aligned} u_{1,n}'' + \lambda C u_{1,n}' + \omega^2(1 + \lambda \varepsilon) u_{1,n} - \lambda P_1[u_{1,n} f(t)] \\ - \lambda P_1[\Phi'(y_0) u_{1,n}] = \lambda P_1[u_{2,n-1} f(t) + \Phi'(y_0) u_{2,n-1} \\ + \frac{1}{2} \Phi''(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 + \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r] \end{aligned} \quad (3-10)$$

et

$$u_{1,0} = 0$$

et

$$\begin{aligned} u_{2,n}'' + \lambda c u_{2,n}' + \omega^2 (1 + \lambda c) u_{2,n} \\ = \lambda P_2 [(u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) f(t) + \varphi'(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \\ + \frac{1}{2} \varphi''(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r] \end{aligned}$$

et

(3-11)

$$u_{2,0} = 0$$

Les équations (3-10) et (3-11) définissent une transformation S

telle que :

$$(u_{1,n}, u_{2,n}) = S(u_{1,n-1}, u_{2,n-1})$$

où $u_{1,n}, u_{2,n}, u_{1,n-1}, u_{2,n-1} \in B(T)$

II-2-2.- Majoration de $\|u_{1,n}\|$ et $\|u_{2,n}\|$

Puisque $u_{1,n} \in B_1(T)$, il existe $\alpha_{1,n}$ et $\chi_{1,n}$ tels que :

$$u_{1,n} = x_{-1,n} e^{-i\omega t} + x_{1,n} e^{i\omega t}$$

Posons :

$$P_1[u_{2,n-1} f(t)] = \varphi_{-1,n-1} e^{-i\omega t} + \varphi_{1,n-1} e^{i\omega t} = \varphi_{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} P_1 \left[\varphi'(y_0) u_{2,n-1} + \frac{1}{2} \varphi''(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r \right] \\ = \varphi_{-1,n-1} e^{-i\omega t} + \varphi_{1,n-1} e^{i\omega t} = \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

D'après la propriété $u.\delta = u(0)\delta$, on a :

$$P_1[u_{1,n} e(t)] = (x_{-1,n} + x_{1,n})(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$$

et puisque :

$$\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \chi_p \cos(p\omega t + \tau) ; \text{ on a :}$$

$$u_{1,n} \varphi(t) = (\alpha_{1,n} e^{-i\omega t} + \alpha_{-1,n} e^{i\omega t}) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \chi_p \frac{e^{i(p\omega t + \tau)} + e^{-i(p\omega t + \tau)}}{2}$$

donc

$$\begin{aligned} P_1[u_{1,n} \varphi(t)] &= \left[\frac{1}{2} \chi_2 \alpha_{-1,n} e^{-i\tau} + \chi_0 \alpha_{1,n} \cos \tau + \frac{1}{2} \chi_2 \alpha_{-1,n} e^{i\tau} \right] e^{i\omega t} \\ &+ \left[\frac{1}{2} \chi_2 \alpha_{1,n} e^{i\tau} + \chi_0 \alpha_{-1,n} \cos \tau + \frac{1}{2} \chi_2 \alpha_{1,n} e^{-i\tau} \right] e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Si $\varphi'(y_0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_p e^{ip\omega t}$ on a :

$$u_{1,n} \varphi'(y_0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_p e^{ip\omega t} (\alpha_{1,n} e^{-i\omega t} + \alpha_{-1,n} e^{i\omega t})$$

donc

$$P_1[u_{1,n} \varphi'(y_0)] = (\gamma_0 \alpha_{1,n} + \gamma_2 \alpha_{-1,n}) e^{i\omega t} + (\gamma_0 \alpha_{-1,n} + \gamma_2 \alpha_{1,n}) e^{-i\omega t}$$

En remplaçant dans (3-10) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left[(\lambda \varepsilon \omega^2 - \lambda - i \lambda c \omega - \lambda \alpha_0 \cos \tau) \alpha_{1,n} \right. \\
& - \left(\lambda + \frac{1}{2} \alpha_2 \lambda e^{i\tau} + \frac{1}{2} \lambda \alpha_2 e^{-i\tau} \right) \alpha_{1,n} \\
& \left. - \lambda (\alpha_0 \alpha_{1,n} + \alpha_2 \alpha_{1,n}) \right] e^{-i\omega t} \\
& + \left[- \left(\lambda + \frac{1}{2} \lambda \alpha_2 e^{-i\tau} + \frac{1}{2} \lambda \alpha_2 e^{i\tau} \right) \alpha_{1,n} \right. \\
& \quad + (\lambda \varepsilon \omega^2 - \lambda + i \lambda c \omega - \alpha_0 \lambda \cos \tau) \alpha_{1,n} \\
& \quad \left. - \lambda (\alpha_0 \alpha_{1,n} + \alpha_2 \alpha_{1,n}) \right] e^{i\omega t} \\
& = (\lambda \phi_{1,n-1} + \lambda \psi_{1,n-1}) e^{-i\omega t} + (\lambda \phi_{1,n-1} + \lambda \psi_{1,n-1}) e^{i\omega t} \\
& \text{soit :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon \omega^2 - 1 - i c \omega - \alpha_0 \cos \tau - \alpha_0) \alpha_{1,n} \\
& - \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{i\tau} + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{-i\tau} + \alpha_2 \right) \alpha_{1,n} \\
& = \phi_{1,n-1} + \psi_{1,n-1}
\end{aligned}$$

et

(3-12)

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{-i\tau} + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{i\tau} + \alpha_2 \right) \alpha_{1,n} \\
& + (\varepsilon \omega^2 - 1 + i c \omega - \alpha_0 \cos \tau - \alpha_0) \alpha_{1,n} \\
& = \phi_{1,n-1} + \psi_{1,n-1}
\end{aligned}$$

Posons :

$$\beta_1 = \varepsilon \omega^2 - 1 - \alpha_0 \cos \tau - i \varepsilon \omega - \beta_0$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{i\tau} + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{-i\tau} + \beta_{-2}$$

$$\beta_3 = 1 + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{-i\tau} + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{i\tau} + \beta_2$$

Le système (3-12) devient alors :

$$\begin{aligned} \beta_1 \alpha_{1,n} - \beta_2 \alpha_{1,n} &= \varphi_{-1,n-1} + \psi_{-1,n-1} \\ -\beta_3 \alpha_{1,n} + \bar{\beta}_1 \alpha_{1,n} &= \varphi_{1,n-1} + \psi_{1,n-1} \end{aligned} \quad (3-12a)$$

où $\bar{\beta}_1$ désigne le nombre complexe conjugué de β_1 .

Ce système est de Cramer si son déterminant :

$$K' = |\beta_1|^2 - \beta_2 \beta_3 \quad \text{est différent de zéro.}$$

Dans ces conditions on a :

$$\alpha_{1,n} = \frac{1}{K'} [\bar{\beta}_1 \varphi_{-1,n-1} + \beta_2 \varphi_{1,n-1} + \beta_3 \psi_{-1,n-1} + \beta_2 \psi_{1,n-1}]$$

$$\alpha_{1,n} = \frac{1}{K'} [\beta_3 \varphi_{-1,n-1} + \beta_1 \varphi_{1,n-1} + \beta_3 \psi_{-1,n-1} + \beta_1 \psi_{1,n-1}]$$

donc :

$$\begin{aligned} \|u_{1,n}\| &= |\alpha_{1,n}| + |\alpha_{1,n}| \leq \frac{1}{|K'|} \left[|\beta_1| |\varphi_{1,n-1}| \right. \\ &\quad + |\beta_2| |\varphi_{1,n-1}| + |\beta_1| |\psi_{1,n-1}| + |\beta_2| |\psi_{1,n-1}| \\ &\quad + |\beta_3| |\varphi_{1,n-1}| + |\beta_1| |\varphi_{1,n-1}| \\ &\quad \left. + |\beta_3| |\psi_{1,n-1}| + |\beta_1| |\psi_{1,n-1}| \right] \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \|u_{1,n}\| &\leq \frac{1}{|K'|} \left[(|\beta_1| + |\beta_3|) |\varphi_{1,n-1}| + (|\beta_1| + |\beta_2|) |\varphi_{1,n-1}| \right. \\ &\quad \left. + (|\beta_1| + |\beta_3|) |\psi_{1,n-1}| + (|\beta_1| + |\beta_2|) |\psi_{1,n-1}| \right] \end{aligned}$$

et finalement on a :

$$\|u_{1,n}\| \leq \frac{(|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3|)}{|K'|} (\|\varphi_{n-1}\| + \|\psi_{n-1}\|)$$

Posons :

$$K_1 = \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3|}{|K'|}$$

ce qui entraîne :

$$\|u_{1,n}\| \leq K_1 [\|\varphi_{n-1}\| + \|\psi_{n-1}\|] \quad (3-13)$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\|\varphi_{n-1}\| &= \|P_1[u_{2,n-1}(e(t) + \varphi(t))]\| \\ &\leq |u_{2,n-1}(0)| \|P_1[e(t)]\| + \|P_1[u_{2,n-1}\varphi(t)]\| \\ &\leq \varepsilon \|u_{2,n-1}\| + K \|u_{2,n-1}\|\end{aligned}$$

car $\varphi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$ avec $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\alpha_p| = K < \infty$

donc

$$\|\varphi_{n-1}\| \leq (2+K) \|u_{2,n-1}\|$$

et

$$\begin{aligned}\|\psi_{n-1}\| &= \|P_1\left[\varphi'(y_0)u_{2,n-1} + \frac{1}{2}\varphi''(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2\right. \\ &\quad \left.+ \dots + \frac{1}{r!}\varphi^{(r)}(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r\right]\| \\ &\leq Q_1'(1y_0)\|u_{2,n-1}\| + \frac{1}{2}Q_1''(1y_0)\|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^2 \\ &\quad + \dots + \frac{1}{r!}Q_1^{(r)}(1y_0)\|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^r\end{aligned}$$

où $Q_1(y)$ désigne le polynôme à coefficients positifs constants :

$$Q_1(y) = |Q_2|y^2 + \dots + |Q_r|y^r$$

(3-13) devient alors :

$$\begin{aligned} \|u_{1,n}\| \leq & K_1 \left[(\varrho + K + \Phi_1'(|y_0|)) \|u_{2,n-1}\| \right. \\ & + \frac{1}{2} \Phi_1''(|y_0|) \|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^2 \\ & \left. + \dots + \frac{1}{r!} \Phi_1^{(r)}(|y_0|) \|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^r \right] \end{aligned} \quad (3-14)$$

Donc si $\|u_{1,n-1}\| < \ell$ et $\|u_{2,n-1}\| < m$; ℓ et m étant deux nombres positifs, alors :

$$\begin{aligned} \|u_{1,n}\| \leq & K_1 \left[(\varrho + K + \Phi_1'(|y_0|)) m + \frac{1}{2} \Phi_1''(|y_0|) (\ell+m)^2 \right. \\ & \left. + \dots + \frac{1}{r!} |\Phi_1^{(r)}(|y_0|)| (\ell+m)^r \right] \end{aligned} \quad (3-15)$$

Nous poserons dans la suite :

$$\begin{aligned} F(\ell, m) = & K_1 \left[(\varrho + K + \Phi_1'(|y_0|)) m + \frac{1}{2} \Phi_1''(|y_0|) (\ell+m)^2 \right. \\ & \left. + \dots + \frac{1}{r!} \Phi_1^{(r)}(|y_0|) (\ell+m)^r \right] \end{aligned}$$

b) Majoration de $\|u_{2,n}\|$

Puisque $u_{2,n} \in B_2(T)$, il existe α_{2np} tel que :

$$u_{2,n} = \sum_{|p| \neq 1}^{+\infty} \alpha_{2np} e^{ip\omega t}$$

$$\begin{aligned} (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})e(t) &= (u_{1,n-1}^{(0)} + u_{2,n-1}^{(0)}) \sum_{|p| \neq 1} e^{ip\omega t} \\ &= P_{n-1} \sum_{|p| \neq 1} e^{ip\omega t} \end{aligned}$$

avec

$$P_{n-1} = u_{1,n-1}^{(0)} + u_{2,n-1}^{(0)}$$

un nombre complexe

Posons :

$$\begin{aligned} P_2 &\left[(u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \varphi(t) + \varphi'(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varphi''(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r \right] \\ &= Q_{n-1} = \sum_{|p| \neq 1} Q_{n-1,p} e^{ip\omega t} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3-11) nous obtenons les coefficients α_{2np} de $u_{2,n}$ sous la forme

$$\alpha_{2np} = \lambda z_p \left[P_{n-1} + \Phi_{n-1,p} \right] \quad (3-16)$$

où

$$z_p = \left[\Omega^2 - p^2 \omega^2 + p \lambda c i \omega \right]^{-1}, \quad |p| \neq 1$$

$$\Omega^2 = \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon)$$

donc

$$\|u_{2,n}\| \leq |\lambda| \left[|P_{n-1}| \sum_{|p| \neq 1} |z_p| + \sum_{|p| \neq 1} |z_p| |\Phi_{n-1,p}| \right]$$

Mais pour $|\lambda|$ suffisamment petite nous avons $\forall \lambda_0 > 0, |z_p|$ équivalente à $1/(p^2-1)\omega^2$ pour $|\lambda| < \lambda_0$. Donc il existe S_1 tel que

$$S = \sum_{|p| \neq 1} |z_p| \leq S_1 \quad \text{pour } |\lambda| < \lambda_0. \text{ Majorons } |z_p|; \text{ on a : } |z_p| < \frac{1}{\omega^2} \text{ car pour } |\lambda| \text{ suffisamment petite } |z_p| \text{ est équivalente à } \frac{1}{(p^2-1)\omega^2}$$

. Posons :

$$\eta = \sup |z_p|$$

Donc de (3-16) on a :

$$\|u_{2,n}\| \leq \left[S_1 |P_{n-1}| + \eta \|\Phi_{n-1}\| \right] |\lambda| \quad (3-17)$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} |P_{n-1}| &= |u_{1,n-1}(0) + u_{2,n-1}(0)| \\ &\leq \|u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n-1}\| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\| \Phi_{n-1} \| &= \| P_2 [(u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \Phi(t) + \Phi'(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \Phi''(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 + \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(y_0)(u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r] \| \\
&\leq (K + \Phi_1'(1/y_0)) (\|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|) \\
&\quad + \frac{1}{2} \Phi_1''(1/y_0) \|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^2 + \dots + \frac{1}{r!} \Phi_1^{(r)}(1/y_0) \|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^r
\end{aligned}$$

Car $\Phi(t) = \sum_p \alpha_p \exp(p\omega t + \tau)$ avec $\sum_p |\alpha_p| = K < \infty$

(3-17) devient alors :

$$\begin{aligned}
\|u_{2,n}\| &\leq |\lambda| \left\{ [S_1 + \mathcal{O}(K + \Phi_1'(1/y_0))] (\|u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n-1}\|) \right. \\
&\quad + \mathcal{O} \left[\frac{1}{2} \Phi_1''(1/y_0) \|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \dots + \frac{1}{r!} \Phi_1^{(r)}(1/y_0) \|u_{1,n-1} + u_{2,n-1}\|^r \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3-18}$$

Donc si $\|u_{1,n-1}\| < \epsilon$ et $\|u_{2,n-1}\| < m$ alors :

$$\begin{aligned}
\|u_{2,n}\| &\leq |\lambda| \left[(S_1 + D(K + \Phi_1''(1/2)))(\ell+m) \right. \\
&\quad + D\left(\frac{1}{2} \Phi_1''(1/2)(\ell+m)^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \dots + \frac{1}{r!} \Phi_1^{(r)}(1/2)(\ell+m)^r \right) \right] \\
&= G(\ell, m)
\end{aligned}$$

(3-19)

11-2-3.- Convergence des suites $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ dans $B_1(T)$ et $B_2(T)$ respectivement

En considérant les inégalités (3-25) et (3-19) nous voulons trouver les conditions sous lesquelles on a :

Si $\|u_{1,n}\| < \ell$ et $\|u_{2,n}\| < m$ on a alors :

$\|u_{1,n}\| < \ell$ et $\|u_{2,n}\| < m$; ℓ et m étant deux réels positifs non nuls.

Pour $|\lambda|$ suffisamment petite il est possible de rendre :

$$F(\ell, m) < \ell$$

et

$$G(\ell, m) < m$$

si λ_1 est une constante positive, $|\lambda| < \lambda_1$, nous prendrons $|\lambda| \leq \lambda_m$;
 $\lambda_m = \min(\lambda_0, \lambda_1)$.

En effet pour rendre $F(l, m) < l$, il suffit de choisir l et m

tels :

$$K_1 (2 + K + Q_1'(1y_0)) m < \frac{l}{r}$$

$$\frac{1}{2} K_1 Q_1''(1y_0) (l+m)^2 < \frac{l}{r}$$

$$\frac{1}{r} K_1 Q_1^{(2)}(1y_0) (l+m)^2 < \frac{l}{r}$$

Si nous choisissons l tel que :

$$\left(\frac{2l}{K_1 r Q_1''(1y_0)} \right)^{1/2} - l > 0, \quad \text{soit } l < \beta_1^2$$

$$\left(\frac{3! l}{K_1 r Q_1^{(3)}(1y_0)} \right)^{1/3} - l > 0 \quad \text{soit } l < \beta_2^{3/2}$$

$$\left(\frac{2! l}{K_1 r Q_1^{(2)}(1y_0)} \right)^{1/2} - l > 0 \quad \text{soit } l < \beta \frac{2}{r-1}$$

avec

$$\beta_1 = \frac{2}{K_1 r Q_1''(1y_0)}, \quad \beta_2 = \frac{3!}{K_1 r Q_1^{(3)}(1y_0)}, \quad \beta = \frac{2!}{K_1 r Q_1^{(2)}(1y_0)}$$

on obtient :

$$m < \frac{l}{k_1 r (2 + k + Q'_1(|y_0|))}$$

$$m < \left(\frac{2l}{k_1 r Q''_1(|y_0|)} \right)^{1/2} - l$$

$$m < \left(\frac{r! l}{k_1 r Q^{(r)}_1(|y_0|)} \right)^{1/r} - l$$

soit finalement :

$$l < \min \left[\beta_1^2, \beta_2^{3/2}, \dots, \beta_{r-1}^{\frac{r}{r-1}} \right]$$

et

$$m < \min \left[\frac{l}{k_1 r (2 + k + Q'_1(|y_0|))}, \left(\frac{2l}{k_1 r Q''_1(|y_0|)} \right)^{1/2} - l, \dots, \left(\frac{r! l}{k_1 r Q^{(r)}_1(|y_0|)} \right)^{1/r} - l \right]$$

Pour rendre $G(l, m) < m$, il suffit de choisir $|\lambda| < \lambda_1$ avec :

$$\lambda_1 = \frac{m}{\left(S_1 + \eta (k + Q'_1(|y_0|)) (l+m) + \eta \left(\frac{1}{2} Q''_1(|y_0|) (l+m)^2 + \dots + \frac{1}{r!} Q^{(r)}_1(|y_0|) (l+m)^r \right) \right)}$$

Ainsi avec ce choix de λ , ℓ et m on a :

si $\|u_{1,n}\| < \ell$ et $\|u_{2,n-1}\| < m$ on a alors :

$$\|u_{1,n}\| < \ell \quad (3-20a)$$

si $\|u_{1,n-1}\| < \ell$ et $\|u_{2,n-1}\| < m$ on a alors :

$$\|u_{2,n}\| < m \quad (3-20b)$$

Donc les suites $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ sont majorées.

3) Majoration de $\|u_{1,n+1} - u_{1,n}\|$

$$\begin{aligned} \|u_{1,n+1} - u_{1,n}\| &= \|(\alpha_{-1,n+1} - \alpha_{-1,n}) e^{-i\omega t} + (\alpha_{1,n+1} - \alpha_{1,n}) e^{i\omega t}\| \\ &= |\alpha_{-1,n+1} - \alpha_{-1,n}| + |\alpha_{1,n+1} - \alpha_{1,n}| \end{aligned}$$

$$\leq K_1 \left(\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| + \|\psi_n - \psi_{n-1}\| \right) \text{ d'après (3-13) }$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| &= \left\| P_1 \left[(u_{1,n} - u_{2,n-1}) f(t) \right] \right\| \\ &\leq (2+k) \|u_{1,n} - u_{2,n-1}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Psi_n - \Psi_{n-1}\| &= \left\| P_1 \left[(u_{2,n} - u_{2,n-1}) \Phi'(y_0) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''(y_0) \left((u_{1,n} + u_{2,n})^2 - (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 \right) \\ &+ \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(y_0) \left. \left((u_{1,n} + u_{2,n})^r - (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r \right) \right] \right\| \end{aligned}$$

En utilisant la formule :

$$X^k - Y^k = (X - Y)(X^{k-1} + X^{k-2}Y + \dots + XY^{k-2} + Y^{k-1})$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Psi_n - \Psi_{n-1}\| &= \left\| P_1 \left[(u_{2,n} - u_{2,n-1}) \Phi'(y_0) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''(y_0) \left((u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right) X \\ &\quad \left((u_{1,n} + u_{2,n}) + (u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \right) \\ &+ \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(y_0) \left((u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right) X \\ &\quad \left. \left. \left((u_{1,n} + u_{2,n})^{r-1} + \dots + (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^{r-1} \right) \right] \right\| \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \|u_{1,n+1} - u_{1,n}\| &\leq K_1 \left[(2 + K + \Phi'(1/2)) \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\| \right. \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''(1/2) (\|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|) \times \\ &\quad \left((\|u_{1,n}\| + \|u_{2,n}\|) + (\|u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n-1}\|) \right) \\ &+ \dots + \frac{1}{r!} \Phi^{(r)}(1/2) (\|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|) \times \\ &\quad \left. \left((\|u_{1,n}\| + \|u_{2,n}\|)^{r-1} + \dots + (\|u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n-1}\|)^{r-1} \right) \right] \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \|u_{1,n+1} - u_{1,n}\| &\leq K_1 \left[(2 + K + \Phi'(1/2)) + \Phi''(1/2)(\ell + m) \right. \\ &+ \dots + \frac{2(r-1)}{r!} \Phi^{(r)}(1/2) (\ell + m)^{r-1} \left. \right] \times \\ &\quad \left[\|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\| \right] \end{aligned}$$

$$\text{si } \|u_{1,n}\| < \ell \text{ et } \|u_{2,n}\| < m$$

Nous poserons dans la suite :

$$H(\ell, m) = (2 + K + \Phi'(\frac{1}{2}) + \Phi'(\frac{1}{2})(\ell+m) \\ + \dots + \frac{2(r-1)}{r!} \Phi^{(r)}(\frac{1}{2})(\ell+m)^{r-1}$$

D'où

$$\|u_{1,n+1} - u_{1,n}\| \leq K_1 H(\ell, m) (\|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|) \quad (3-24a)$$

4) Majoration de $\|u_{2,n+1} - u_{2,n}\|$

D'après (3-16) :

$$\alpha_{2np} = \lambda \mathcal{L}_p [P_{n-1} + Q_{n-1,p}]$$

donc :

$$\alpha_{2(n+1)p} - \alpha_{2np} = \lambda \mathcal{L}_p [(P_n - P_{n-1}) + (Q_{n,p} - Q_{n-1,p})]$$

où

$$P_n = u_{1,n}(c) + u_{2,n}(c)$$

et $Q_{n,p}$ est tel que :

$$\begin{aligned}
& P_2 \left[(u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \varphi(t) + \varphi'(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \varphi''(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r \right] \\
& = \sum_{|p| \leq 1} \Phi_{n-1,p} e^{ip\omega t} = \Phi_{n-1}
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\|P_n - P_{n-1}\| \leq \|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|$$

et

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n - \Phi_{n-1}\| &= \left\| P_2 \left[(u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right] \varphi(t) \right. \\
&\quad \left. + \varphi'(y_0) (u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \varphi''(y_0) \left((u_{1,n} + u_{2,n})^2 - (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y_0) \left((u_{1,n} + u_{2,n})^r - (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^r \right) \right] \Big\|
\end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$X^k - Y^k = (X - Y)(X^{k-1} + X^{k-2}Y + \dots + XY^{k-2} + Y^{k-1})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| &= \left\| P_2 \left[\left((u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right) \varphi(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi'(y) \left((u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \varphi''(y) \left((u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right) X \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left((u_{1,n} + u_{2,n}) + (u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(y) \left((u_{1,n} - u_{1,n-1}) + (u_{2,n} - u_{2,n-1}) \right) X \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left((u_{1,n} + u_{2,n})^{r-1} + (u_{1,n} + u_{2,n})^{r-2} (u_{1,n-1} + u_{2,n-1}) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \dots + (u_{1,n} + u_{2,n}) (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^{r-2} + (u_{1,n-1} + u_{2,n-1})^{r-1} \right) \right] \right\| \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\|u_{2,n+1} - u_{2,n}\| &\leq |\lambda| [S_1 |P_n - P_{n-1}| + \gamma \|Q_n - Q_{n-1}\|] \\
&\leq |\lambda| [S_1 + \gamma (K + \Phi'_1(1/2)) + \Phi''_1(1/2)(\ell+m) + \dots \\
&\quad \frac{\gamma(r-1)}{r!} \Phi^{(r)}_1(1/2)(\ell+m)^{r-1}] \times [\|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|]
\end{aligned} \tag{3-25}$$

Nous poserons dans la suite :

$$\begin{aligned}
K(\ell, m) &= K + \Phi'_1(1/2) + \Phi''_1(1/2)(\ell+m) \\
&\quad + \dots + \frac{\gamma(r-1)}{r!} (\ell+m)^{r-1}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|u_{2,n+1} - u_{2,n}\| &\leq |\lambda| [S_1 + \gamma K(\ell, m)] \times \\
&\quad [\|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| + \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|]
\end{aligned} \tag{3-25a}$$

Posons :

$$W_n = \|u_{1,n} - u_{1,n-1}\| \quad \text{et} \quad t_n = \|u_{2,n} - u_{2,n-1}\|$$

les relations (3-24a) et (3-25a) deviennent alors :

$$W_{n+1} \leq K_1 H(\ell, m) (t_n + W_n)$$

$$t_{n+1} \leq |\lambda| (S_1 + \gamma K(\ell, m)) (W_n + t_n) \tag{3-26}$$

Soient :

$$\gamma_1 = K_1 H(l, m)$$

$$\gamma_2 = |\lambda| (S_1 + \eta K(l, m))$$

et

$$S_m = W'_m + t_m$$

alors (3-26) donne :

$$\begin{aligned} S_{m+1} &\leq (\gamma_1 + \gamma_2) S_m \\ &\leq \gamma^n S_0 \quad \text{avec} \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \end{aligned}$$

La somme (S_m) serait convergente si on a :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 < 1$$

et

$$\gamma_1 < 1$$

Pour cela il suffit de choisir λ et K_1 tels que :

$$|\lambda| < \frac{1 - \gamma_1}{S_1 + \eta K(l, m)} = \lambda_2 \quad (3-27a)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_1} &> 2 + K + Q'_1(y_0) + Q''_1(y_0)(l+m) \\ &\quad + \dots + \frac{2(\lambda-1)}{n!} Q^{(n)}_1(y_0)(l+m)^{n-1} \end{aligned}$$

(3-27b)

Or (3-27b) ne peut être satisfaite que si $k_1 < 1$ car l'expression de droite de (3-27b) est strictement supérieur à 2.

$k_1 < 1$ équivaut à :

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| < |k'| \quad (3-27c)$$

car :

$$k_1 = \frac{|z_1| + |z_2| + |z_3|}{|k'|}$$

avec :

$$k' = |z_1|^2 - z_2 z_3$$

$$z_1 = \varepsilon \omega^2 - 1 - \alpha_0 \cos z - i c \omega - \gamma_0$$

$$z_2 = 1 + \frac{1}{2} \alpha_{-2} e^{iz} + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{-iz} + \gamma_{-2}$$

$$z_3 = 1 + \frac{1}{2} \alpha_{-2} e^{-iz} + \frac{1}{2} \alpha_2 e^{iz} + \gamma_2$$

α_0 , α_{-2} et α_2 étant les coefficients intervenant dans l'expression de $\varphi(t)$ et

γ_0 , γ_{-2} et γ_2 étant les coefficients intervenant dans le développement en série de Fourier de $\varphi'(y_0)$.

De (3-26) on tire :

$$W_{n+1} < \delta_1 \leq \delta^n$$

(3-28)

$$t_{n+1} < \delta_2 \leq \delta^n$$

5) $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ sont des suites de Cauchy

Montrons que $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ sont des suites de Cauchy.

$$\begin{aligned} \|u'_{1,n+p} - u'_{1,n}\| &= \| (u'_{1,n+p} - u'_{1,n+p-1}) + (u'_{1,n+p-1} - u'_{1,n+p-2}) \\ &\quad + \dots + (u'_{1,n+1} - u'_{1,n}) \| \\ &\leq \delta_1 \leq (\delta^{n+p-1} + \delta^{n+p-2} + \dots + \delta^n) \\ &\leq \delta_1 \delta^n (\delta^{p-1} + \delta^{p-2} + \dots + 1) \\ &\leq \frac{\delta_1 \leq}{1-\delta} \delta^n \quad (\delta < 1) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(u'_{1,n})$ est une suite de Cauchy; donc convergente dans $B_1(T)$.

On montre de même que :

$$\|u'_{2,n+p} - u'_{2,n}\| \leq \frac{\delta_2 \leq}{1-\delta} \delta^n \quad (\delta < 1)$$

donc $(u'_{2,n})$ est une suite de Cauchy; donc convergente dans $B_2(T)$

CONCLUSION

Pour $|\lambda|$ suffisamment petite, si les hypothèses supplémentaires suivantes sont satisfaites :

$$6^\circ) |\lambda| \leq \min(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$$

$$7^\circ) \frac{1}{K_1} > 2 + K + Q'_1(|y_0|) + Q'_1(|y_0|)(l+m) \\ + \dots + \frac{2(r-1)}{r!} Q_1^{(r)}(|y_0|) (l+m)^{r-1}$$

qui est une condition de convergence des suites : $u_{1,n}$ et $u_{2,n}$ avec :

$$8^\circ) |z_1| + |z_2| + |z_3| < |K'| \quad (\text{i.e. } K_1 < 1)$$

alors les suites $(u_{1,n})$ et $(u_{2,n})$ sont respectivement majorées par l et m et de Cauchy, donc $(u_{1,n})$ est convergente dans $B_1(T)$ et $(u_{2,n})$ dans $B_2(T)$. Par conséquent l'équation différentielle :

$$y'' + \lambda c y' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) y = \lambda [y f(t) + \varphi(y)]$$

où

$$Q(y) = a_2 y^2 + \dots + a_r y^r \\ f(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

$\sum_p |\alpha_p| < \infty$ admet une solution périodique non nulle :

$$y = y_0 + \lim_{h \rightarrow +\infty} (u_{1,h} + u_{2,h})$$

où est la solution de synchronisation.

CHAPITRE IV

ETUDE DE LA STABILITE DYNAMIQUE.

I.- INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé les équations de synchronisation de l'équation différentielle (3-1). Soit R et ϑ les solutions du système de synchronisation (3-3). Posons :

$$y_0 = R \cos(\omega t + \vartheta)$$

Nous étudions la stabilité ^{au voisinage} de cette solution particulière y_0 avec deux nouvelles hypothèses :

9) $\lambda > 0$, λ paramètre.

10) $C > 0$.

II.- ETUDE DE LA STABILITE

Posons $y = x + y_0$ dans l'équation :

$$y'' + \lambda c y' + \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon) y = \lambda [y f(t) + Q(y)]$$

où

$$f(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

$$Q(y) = a_2 y^2 + \dots + a_r y^r;$$

nous trouvons en tenant compte de (3-2) et en supposant que l'on peut négliger les termes en x^2 , x^3 , ..., x^r :

$$x'' + \lambda c x' + \omega^2 x = \lambda [x f(t) - \varepsilon \omega^2 x + 2a_2 y_0 x + 3a_3 x y_0^2 + \dots + r a_r x y_0^{r-1}] \quad (4-1)$$

II-1) Etude de l'équation

$$x'' + \lambda c x' + [\omega^2 + \lambda(\psi(t) + \varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})] x = 0$$

avec $\lambda > 0$, $c > 0$, λ paramètre

$$\text{et } \psi(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p \cos(p\omega t + \tau)$$

Soit l'équation :

$$x'' + \lambda c x' + [\omega^2 + \lambda(\psi(t) + \varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})] x = 0 \quad (4-2)$$

Cette équation est linéaire et à coefficients périodiques de période T . Elle est sous la forme :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

où $p(t) = \lambda c$

$$q(t) = \omega^2 + \lambda(\varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - 3a_3 y_0^2 - \dots - r a_r y_0^{r-1} + \psi(t))$$

Donc pour l'étudier, nous allons appliquer les résultats de la théorie de Floquet rappelée dans le paragraphe ci-dessous.

II-1-1.- Théorie de FLOQUET [21, 22]

Soit l'équation

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (4-3)$$

avec $p(t+T) = p(t)$ et $q(t) = q(t+T)$;

l'équation (4-3) est linéaire, il existe deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ linéairement indépendantes et non identiquement nulles telles que toute autre solution

$$x(t) \text{ s'exprime sous la forme : } x = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

(4-4)

Le Wronkien de x_1 et x_2 est :

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \quad (5-4)$$

et doit être non identiquement nul pour que (x_1, x_2) forme un système fondamental de solutions.

En dérivant $\Delta(t)$ on trouve :

$$\frac{d \Delta(t)}{dt} = -p(t) \Delta(t)$$

soit :

$$\Delta(t) = \Delta_0 \exp \left[- \int_{t_0}^t p(z) dz \right] \quad (4-6)$$

L'idée de Floquet est d'exploiter le fait que $p(t)$ et $q(t)$ sont périodiques. En effet si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ forment un système fondamental de solutions, alors $x_1(t+T)$ et $x_2(t+T)$ aussi, car $p(t+T) = p(t)$ et $q(t+T) = q(t)$ et $\Delta(t+T) \neq 0$ (car $\Delta(t) \neq 0$).

Posons :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t+T) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) \\ x_2(t) &= x_2(t+T) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) \end{aligned} \quad (4-7)$$

Le wronkien de $(x_1(t), x_2(t))$ est :

$$\Delta(t+\tau) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Delta(t) \quad (4-8)$$

ce qui prouve que :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4-8a)$$

Parmi toutes les solutions, il peut exister celles vérifiant la propriété

$$x(t+\tau) = \sigma x(t) \quad (4-9)$$

Toute solution vérifiant (4-9) est appelée solution normale et toute solution normale peut s'exprimer sous la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \quad (4-10)$$

x vérifie (4-9) quand x_1 et x_2 vérifient (4-7), donc :

$$(\lambda_1(a_{11}-\sigma) + \lambda_2 a_{21})x_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2(a_{22}-\sigma))x_2 = 0$$

x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} \lambda_1(a_{11}-\sigma) + \lambda_2 a_{21} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2(a_{22}-\sigma) &= 0 \end{aligned}$$

Pour qu'il existe d'autres solutions que la solution nulle, il faut que :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

σ vérifie l'équation :

$$\sigma^2 - (a_{11} + a_{22})\sigma + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4-11)$$

(4-11) s'appelle équation caractéristique de l'équation de départ (4-3). Elle admet deux racines non nulles σ_1 et σ_2 car le terme constant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{t_0}$ d'après (4-8a).

Le produit des racines ~~est~~ d'après (4-6) (4-8) et (4-11) est :

$$P = \sigma_1 \sigma_2 = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \frac{\Delta(t_0 + \tau)}{\Delta(t_0)}$$

$$= \exp \left[- \int_{t_0}^{t_0 + \tau} p(\tau) d\tau \right]$$

(4-11a)

et la somme des racines :

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = a_{11} + a_{22}$$

En dérivant les égalités (4-7) et en éliminant a_{12} et a_{21} on trouve :

$$\begin{aligned}
 S &= \sigma_1 + \sigma_2 = a_{11} + a_{22} \\
 &= \frac{x_1(T) x_2'(0) - x_1'(T) x_2(0) + x_2'(T) x_1(0) - x_2'(0) x_1(T)}{x_1(0) x_2'(0) - x_2(0) x_1'(0)}
 \end{aligned}
 \tag{4-11b}$$

Puisque le produit $\sigma_1 \sigma_2 = P$ est non nul, nous devons envisager deux cas :

1°) L'équation (4-11) admet deux racines distinctes $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Donc il existe deux solutions normales linéairement indépendantes

x_i ($i=1,2$), nous pouvons écrire :

$$e^{-\alpha_i(t+T)} x_i(t+T) = \sigma_i e^{-\alpha_i T} e^{-\alpha_i t} x_i(t)$$

Nous introduisons deux solutions périodiques φ_i ($i=1,2$) telles

que : $\varphi_i(t) = e^{-\alpha_i t} x_i(t)$ avec $\sigma_i = e^{\alpha_i T}$

Ce qui nous donne pour solutions normales linéairement indépendantes :

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t)$$

$$x_2(t) = e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t)$$

(4-12)

où φ_i ($i=1,2$) est T périodique et $\sigma_i = e^{\alpha_i T}$

2°) L'équation (4-11) admet une racine double $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$

Les équations (4-7) deviennent dans ce cas

$$X_1(t) = x_1(t+T) = \sigma x_1(t) \quad (4-13)$$

$$\sigma = \text{constante}$$

$$X_2(t) = x_2(t+T) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

on a $\sigma = b$ car l'équation caractéristique (4-11) a une racine double.

(4-14) entraîne :

$$\frac{X_2(t)}{X_1(t)} = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} + \frac{a}{\sigma} \quad (4-14)$$

Considérons la fonction $\Psi(t) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} - \frac{a}{\sigma} \frac{t}{T}$.

Compte tenu de (4-15)

$$\begin{aligned} \Psi(t+T) &= \frac{x_2(t+T)}{x_1(t+T)} - \frac{a}{\sigma} \frac{t+T}{T} \\ &= \frac{x_2(t)}{x_1(t)} + \frac{a}{\sigma} - \frac{a}{\sigma} - \frac{at}{\sigma T} = \Psi(t) \end{aligned}$$

On a donc :

$$x_2(t) = x_1(t) \left[\frac{a}{\sigma} \frac{t}{T} + \Psi(t) \right]$$

Comme précédemment on introduit une fonction $\varphi_1(t)$ périodique telle que : $x_1(t) = e^{\lambda t} \varphi_1(t)$

où $\sigma = e^{\lambda T}$ et le système fondamental

de solutions est :

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= e^{\alpha t} \varphi_1(t) \\
 x_2(t) &= e^{\alpha t} \left[\frac{a t}{\sigma - T} \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4-15}$$

où $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi(t)$.

φ_1 et φ_2 sont T - périodiques; $\sigma = e^{\alpha T}$.

L'intérêt principal de cette théorie est de voir si les solutions de l'équation (4-3) restent bornées ou non quand t tend vers $+\infty$. Si toutes les solutions de (4-3) sont bornées, on peut dire que l'équation différentielle (4-3) caractérise un mouvement stable.

S'il existe une seule solution non bornée on dit que le mouvement est instable.

- Pour les équations (4-12) cette question se traduit par : les solutions sont bornées si et seulement si $|e^{\alpha_i t}|$ est borné pour $t \longrightarrow +\infty$. Soit $\operatorname{Re}(\alpha_i) \leq 0$ ou bien $|\sigma_i| \leq 1$.

- Pour les équations (4-15) les solutions sont bornées si et seulement si $|e^{\alpha t}|$ est borné pour $t \longrightarrow +\infty$. Soit $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$ ou bien $|\sigma| < 1$.

Si toutes $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$; pour avoir des solutions stables il faut que le coefficient α soit nul.

11.1.2.- Applications

Revenons au cas particulier où

$$p(t) = \lambda c$$

$$q(t) = \omega^2 + \lambda (\varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - 3a_3 y_0^2 - \dots - r_n y_0^{r-1} + p(t))$$

Commençons par le cas où l'équation caractéristique (4-11) admet deux solutions $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Donc il existe deux solutions x_1 et x_2 linéairement indépendantes telles que :

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. Or d'après la théorie de Floquet il existe deux fonctions T -périodique φ_1 et φ_2 :

$$\varphi_i(t) = e^{-\alpha_i t} x_i(t) \quad i = 1, 2$$

donc :

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t) \quad (4-16)$$

Puisque d'après (4-11-a), on a :

$$P = \sigma_1 \sigma_2 = \exp \left[- \int_{t_0}^{t_0+T} p(z) dz \right] \text{ avec } p(t) = \lambda c$$

alors :

$$\sigma_1 = \frac{S + (S^2 - 4e^{-\lambda c T})^{1/2}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{S - (S^2 - 4e^{-\lambda c T})^{1/2}}{2}$$

où

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{x_1(T)x_2'(0) - x_1'(T)x_2(0) + x_2'(T)x_1(0) - x_2'(0)x_1(T)}{x_1(0)x_2'(0) - x_1'(0)x_2(0)}$$

Les solutions de (4-2) sont bornées si et seulement si :

$$|s| = |\sigma_1 + \sigma_2| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2| \leq 2$$

soit :

$$\left| \frac{x_1(\tau) x_2'(0) - x_1'(0) x_2(\tau) + x_2'(\tau) x_1(0) - x_1'(0) x_2(\tau)}{x_1(0) x_2'(0) - x_1'(0) x_2(0)} \right| \leq 2$$

Si toutes les solutions de (4-2) sont bornées alors l'équation différentielle (4-2) caractérise un mouvement stable.

Dans le cas où l'équation (4-11) admet une solution double, il existe alors deux fonctions T -périodiques φ_1 et φ_2 telles que :

$$x(t) = e^{\alpha t} \left[c_1 \varphi_1(t) + c_2 \left(\frac{at}{\sigma T} \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \right) \right] \quad (4-17)$$

où

$$\sigma = e^{\alpha T}$$

Dans ce cas :

$$s^2 = 4 e^{-\lambda c T}$$

, c'est-à-dire que le discriminant de l'équation :

$$x^2 - s x + p = 0 \text{ est nul.}$$

$$s^2 = 4 e^{-\lambda c T} \Rightarrow s = \pm 2 e^{-\frac{1}{2} \lambda c T}$$

et donc

$$\sigma = e^{-\frac{1}{2} \lambda c T}$$

$$\text{ou } \sigma = -e^{-\frac{1}{2} \lambda c T}$$

$$\text{Les solutions sont bornées si et seulement si } |\sigma| = e^{-\frac{1}{2} \lambda c T} < 1$$

Et alors l'équation (4-2) caractérise un mouvement stable.

Remarque : S'il existe une solution non bornée, le mouvement est instable.

II-2.- Etude de l'équation complète $x'' + p(t)x' + q(t)x = \lambda x e(t)$

avec $p(t) = \lambda c$

$$q(t) = \omega^2 + \lambda (\varepsilon \omega^2 - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1} + \varphi(t))$$

Soit $h = \frac{2\pi}{\omega} m$; entier positif et $mT = t_0 + mh$;
 t_0 quelconque et $m = 1, 2, 3 \dots$

Nous désignons par E l'ensemble des fonctions définies et continues sur la demi-droite $[t_0; +\infty[$ dérivables sur les intervalles $]nT; (n+1)T[$;

. Nous définissons le produit de $f \in E$ par la mesure de Dirac $\delta(t - nT)$ par :

$$f \cdot \delta(t - nT) = f(nT - 0) \delta(t - nT)$$

au sens des distributions.

Considérons l'équation (4-1) au sens des distributions. Ses solutions seront des fonctions de E . La fonction x de E définie sur $[t_0, +\infty[$ est solution de (4-1); elle vérifie sur $[t_0; +\infty[$ l'équation aux impulsions :

$$x'' + \lambda c x' + q(t)x = \lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) x(nT - 0) \quad (4-18)$$

La restriction de (4-18) à chaque intervalle $]nT, (n+1)T[$ est l'équation (4-2) : $x'' + \lambda c x' + q(t)x = 0$. Donc la solution a sur chaque intervalle $]nT; (n+1)T[$ la forme (4-16) ou (4-17). Les constantes α et β étant différentes sur les divers intervalles :

$$x(t) = \alpha_n x_1(t) + \beta_n x_2(t) ; \quad nT < t < (n+1)T$$

Nous considérons dans la suite le cas où l'équation caractéristique

(4-11) admet deux solutions $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Alors :

$$x(t) = \alpha_n e^{\sigma_1 t} \varphi_1(t) + \beta_n e^{\sigma_2 t} \varphi_2(t)$$

$$nT < t < (n+1)T \quad \sigma_1 = e^{\sigma_1 T}, \quad \sigma_2 = e^{\sigma_2 T}$$

ou bien :

$$x(t) = a_n e^{-\sigma_1 n h} e^{\sigma_1 (t-t_0)} \varphi_1(t) + b_n e^{-\sigma_2 n h} e^{\sigma_2 (t-t_0)} \varphi_2(t)$$

$$nT \leq t < (n+1)T \quad nT = t_0 + nh$$

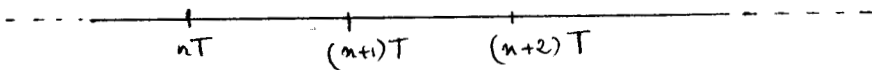
où :

$$a_n = \alpha_n e^{\sigma_1 n T} \quad \text{et} \quad b_n = \beta_n e^{\sigma_2 n T}$$

Pour établir les conditions de stabilité, nous devons trouver l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

reliant les coefficients de la solution dans deux intervalles consécutifs.



Nous chercherons alors le polynôme caractéristique de A . La position des modules des racines du polynôme caractéristique de A par rapport à 1 donnera les conditions de stabilité.

En effet pour trouver la relation entre $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ nous allons traduire deux conditions :

- la continuité de la solution au point $t = (n+1) \cdot T$
- le saut de la dérivée au point $t = (n+1)T$

a) Continuité de $x(t)$ en $t = (n+1)T$:

soit :

$$x((n+1)T - 0) = x((n+1)T + 0)$$

$$a_{n+1} \varphi_1((n+1)T) + b_{n+1} \varphi_2((n+1)T) =$$

$$\sigma_1 a_n \varphi_1((n+1)T) + \sigma_2 b_n \varphi_2((n+1)T) \quad (4-19)$$

b) Le saut de $x'(t)$ en $t = (n+1)T$:

$$S_{n+1} = x'((n+1)T + 0) - x'((n+1)T - 0)$$

avec :

$$x'((n+1)T + 0) = a_{n+1} [\alpha_1 \varphi_1((n+1)T) + \varphi_1'((n+1)T)]$$

$$+ b_{n+1} [\alpha_2 \varphi_2((n+1)T) + \varphi_2'((n+1)T)]$$

$$x'((n+1)T - 0) = a_n [\alpha_1 \varphi_1((n+1)T) + \varphi_1'((n+1)T)] \sigma_1$$

$$+ b_n [\alpha_2 \varphi_2((n+1)T) + \varphi_2'((n+1)T)] \sigma_2$$

Posons par la suite :

$$\phi_1 = \alpha_1 \psi_1 + \psi_1'$$

$$\phi_2 = \alpha_2 \psi_2 + \psi_2'$$

donc :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= x'((n+1)T+0) - x'((n+1)T-0) \\ &= (a_{n+1} - \sigma_1 a_n) \phi_1((n+1)T) + (b_{n+1} - \sigma_2 b_n) \phi_2((n+1)T) \end{aligned}$$

Donc $x(t)$ est solution de (4-18) si et seulement si :

$$\begin{aligned} & (a_{n+1} - \sigma_1 a_n) \phi_1((n+1)T) + (b_{n+1} - \sigma_2 b_n) \phi_2((n+1)T) \\ &= \lambda \left[\sigma_1 a_n \psi_1((n+1)T) + \sigma_2 b_n \psi_2((n+1)T) \right] \end{aligned} \quad (4-20)$$

Les équations (4-19) et (4-20) déterminent a_{n+1} , b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . Soit :

$$\begin{cases} a_{n+1} \phi_1 + b_{n+1} \phi_2 = \sigma_1 a_n (\phi_1 + \lambda \psi_1) + \sigma_2 b_n (\phi_2 + \lambda \psi_2) \\ a_{n+1} \psi_1 + b_{n+1} \psi_2 = \sigma_1 a_n \psi_1 + \sigma_2 b_n \psi_2 \end{cases} \quad (4-21)$$

où :

$$\phi_1 = \phi_1[(n+1)T]$$

$$\phi_2 = \phi_2[(n+1)T]$$

$$\psi_1 = \psi_1[(n+1)T]$$

$$\psi_2 = \psi_2[(n+1)T]$$

En résolvant (4-21) on a :

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \lambda \frac{\varphi_1 \varphi_2}{F}\right) \sigma_1 & -\lambda \frac{\varphi_2^2}{F} \sigma_2 \\ \lambda \frac{\varphi_1^2}{F} \sigma_1 & \left(1 + \lambda \frac{\varphi_1 \varphi_2}{F}\right) \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

où

$$F = \phi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \phi_2$$

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1[(n+1)T] \varphi_2[(n+1)T] = \varphi_1(0) \varphi_2(0) = x_1(0) x_2(0)$$

car φ_1 et φ_2 sont des fonctions T -périodiques telles que :

$$\varphi_i(t) = e^{-\alpha_i t} x_i(t) \quad i = 1, 2$$

Si on pose $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_2 x_1'$, qui est le wronkien de x_1 et x_2 ; on a :

$$W(x_1, x_2) = e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} (\varphi_1 \phi_2 - \varphi_2 \phi_1)$$

donc :

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(0) &= x_1(0) x_2'(0) - x_1'(0) x_2(0) \\ &= \phi_1 \varphi_1 - \varphi_2 \phi_1 = -F \end{aligned}$$

soit :

$$F = x_1'(0) x_2(0) - x_1(0) x_2'(0)$$

L'expression (4-22) en terme de $x_1(0)$ et $x_2(0)$ devient :

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} \left(1 + \lambda \frac{x_1(o) x_2(o)}{[x'_1(o) x_2(o) - x_1(o) x'_2(o)]}\right) \sigma_1 & \lambda \frac{x_2^2(o) \sigma_2}{[x'_1(o) x_2(o) - x_1(o) x'_2(o)]} \\ -\lambda \frac{x_1^2(o) \sigma_1}{[x'_1(o) x_2(o) - x_1(o) x'_2(o)]} & \sigma_2 \left(1 - \lambda \frac{x_1(o) x_2(o)}{[x'_1(o) x_2(o) - x_1(o) x'_2(o)]}\right) \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique $P(r)$ de A est :

$$P(r) = r^2 - \left[\sigma_1 + \sigma_2 + \lambda \frac{x_1(o) x_2(o)}{[x'_1(o) x_2(o) - x_1(o) x'_2(o)]} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] r + \sigma_1 \sigma_2 \quad (4-23)$$

avec $\sigma_1 \sigma_2 = e^{-\lambda c T}$

Soit r_1 et r_2 les deux racines de $P(r) = 0$ et posons R leur somme et P leur produit :

$$R = r_1 + r_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \lambda \frac{x_1(o) x_2(o)}{[x'_1(o) x_2(o) - x_1(o) x'_2(o)]} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4-24)$$

$$P = r_1 r_2 = e^{-\lambda c T}$$

avec $\lambda > 0$ et $c > 0$.

Ici puisque $P < 1$, les solutions sont stables si $|R| < 2$
et instables si $R > 2$.

Dans le paragraphe ci-dessous nous cherchons à simplifier l'expression de R :

11.2.1.- Développement de R à l'ordre deux en λ

A) Simplification de l'expression de R

Si (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de (4-2) tel que :

$$x_1(t+T) = a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t)$$

$$x_2(t+T) = a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t)$$

l'équation caractéristique de (4-2) est :

$$\sigma^2 - (a_{11} + a_{22})\sigma + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Si σ_1 et σ_2 sont racines de cette équation

$$\sigma_1 \sigma_2 = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \exp \left[\int_{t_0}^{t_0+T} p(\tau) d\tau \right]$$

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = a_{11} + a_{22}$$

$$= \frac{x_1(T)x_2'(0) - x_1'(T)x_2(0) + x_2'(T)x_1(0) - x_2'(0)x_1(T)}{[x_1(0)x_2'(0) - x_2(0)x_1'(0)]}$$

Puisque l'équation caractéristique est indépendante du choix des solutions fondamentales, nous choisissons un système de solutions (u, v) vérifiant des conditions simples. Soient u et v telles que :

$$\begin{aligned} \mu(0) &= 1 & \sigma(0) &= 0 \\ \mu'(0) &= 0 & \sigma'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (4-25)$$

Le système (μ, σ) est fondamental car le wronkien est non nul.

Toute autre solution de l'équation (4-2) s'écrit dans ce système, sous forme de combinaison linéaire. En particulier les solutions de Floquet x_1 et x_2 ;
donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \mu + \lambda_2 \sigma \\ x_2 &= \rho_1 \mu + \rho_2 \sigma \end{aligned} \quad (4-26a)$$

en dérivant, nous avons :

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_1 \mu' + \lambda_2 \sigma' \\ x'_2 &= \rho_1 \mu' + \rho_2 \sigma' \end{aligned} \quad (4-26b)$$

(4-25) entraîne que :

$$\lambda_1 = x_1(0) ; \lambda_2 = x'_1(0) ; \rho_1 = x_2(0) ; \rho_2 = x'_2(0)$$

Les relations (4-26a) deviennent :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0) \mu + x'_1(0) \sigma \\ x_2 &= x_2(0) \mu + x'_2(0) \sigma \end{aligned} \quad (4-26c)$$

Par définition des solutions de Floquet :

$$x_1(\tau) = \sigma_1 x_1(0) \text{ et } x_2(\tau) = \sigma_2 x_2(0)$$

donc en considérant (4-26c) :

$$x_1(0)u(T) + x_1'(0)v(T) = \sigma_1 [x_1(0)u(0) + x_1'(0)v(0)]$$

$$x_2(0)u(T) + x_2'(0)v(T) = \sigma_2 [x_2(0)u(0) + x_2'(0)v(0)]$$

soit :

$$x_1(0)u(T) + x_1'(0)v(T) = \sigma_1 x_1(0)$$

$$x_2(0)u(T) + x_2'(0)v(T) = \sigma_2 x_2(0) \quad (4-27)$$

(4-27) entraîne :

$$v(T) = \frac{x_2(0)x_1(0)(\sigma_2 - \sigma_1)}{[x_1(0)x_2'(0) - x_2(0)x_1'(0)]}$$

donc :

$$R = r_1 + r_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \lambda \frac{x_1(0)x_2(0)(\sigma_1 - \sigma_2)}{[x_1(0)x_2'(0) - x_2(0)x_1'(0)]}$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \lambda v(T)$$

$$P = r_1 r_2 = e^{-\lambda c T}$$

D'après (4-11-a) nous avons en fonction de u et v :

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = u(T) + v'(T)$$

soit finalement :

$$R = \sigma_1 + \sigma_2 + \lambda v(T) = u(T) + v'(T) + \lambda v(T)$$

$$P = r_1 r_2 = e^{-\lambda c T}$$

(4-28)

B) Calcul de R en fonction de $C, \varepsilon, r, \lambda$ et $(a_2, \dots, a_r)$

Cherchons à déterminer $R = y_1 + y_2$ en fonction de $C, \varepsilon, r, \lambda$ et $(a_2, \dots, a_r)$: r désignant l'amplitude de la solution de synchronisation :

$$y_0 = r \cos(\omega t + \theta)$$

et $(a_2, \dots, a_r)$ les coefficients du polynôme $Q(y)$.

Nous nous proposons de chercher μ et ν selon la méthode de Poincaré, suivant un développement en puissance de λ .

Soit :

$$\mu = \mu_0 + \lambda \mu_1 + \lambda^2 \mu_2 \dots$$

$$\nu = \nu_0 + \lambda \nu_1 + \lambda^2 \nu_2 \dots$$

vérifiant :

$$\begin{aligned} \mu_i(0) &= 1 \\ \mu'_0(0) \text{ et } \mu_i(0) = \mu'_i(0) &= 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4-29)$$

$$\begin{aligned} \nu_0(0) &= 0 \text{ et } \nu_i(0) = \nu'_i(0) = 0 \quad i = 1, 2 \\ \nu'_0(0) &= 1 \end{aligned} \quad (4-30)$$

Nous poserons par la suite $\omega = 1$ (il suffit d'un changement de variable), donc $T = 2\pi$. En remplaçant dans (4-2) les expressions de μ et ν nous avons :

$$\begin{aligned} \mu''_0 + \mu_0 &= 0 \\ \mu''_1 + \mu_1 &= -C \mu'_0 - \left(\varphi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - 3a_3 y_0^2 \dots \right. \\ &\quad \left. - r a_r y_0^{r-1} \right) \mu_0 = f_1(t) \end{aligned} \quad (4-31)$$

$$u_2'' + u_2 = -c u_1' - \left(\psi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1} \right) u_1 = f_2(t) \quad (4-31)$$

(4-29) et (4-31) entraînent :

$$u_0 = \cos t$$

$$u_1 = \int_0^t \sin(t-z) f_1(z) dz$$

$$u_2 = \int_0^t \sin(t-z) f_2(z) dz \quad (4-32)$$

De même pour V :

$$v_0'' + v_0 = 0$$

$$\begin{aligned} v_1'' + v_1 &= -c v_0' - \left(\varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1} + \psi(t) \right) v_0 \\ &= g_1(t) \end{aligned} \quad (4-33)$$

$$\begin{aligned} v_2'' + v_2 &= -c v_1' - \left(\psi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1} \right) v_1 \\ &= g_2(t) \end{aligned}$$

(4-30) et (4-33) donnent :

$$v_0 = \sin t$$

$$v_1 = \int_0^t \sin(t-z) g_1(z) dz$$

$$v_2 = \int_0^t \sin(t-z) g_2(z) dz \quad (4-34)$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 + \lambda \mu_1 + \lambda^2 \mu_2 \\ &= \cos t + \lambda \int_0^t \sin(t-z) f_1(z) dz + \lambda^2 \int_0^t \sin(t-z) f_2(z) dz \\ U &= \sin t + \lambda \int_0^t \sin(t-z) g_1(z) dz + \lambda^2 \int_0^t \sin(t-z) g_2(z) dz\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}f_1(t) &= -(\mu'_0 - (\psi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})) \mu_0 \\ f_2(t) &= -(\mu'_1 - (\psi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})) \mu_1 \\ g_1(t) &= -(\psi'_0 - (\psi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})) \psi_0 \quad (4-35) \\ g_2(t) &= -(\psi'_1 - (\psi(t) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - \dots - r a_r y_0^{r-1})) \psi_1\end{aligned}$$

Expression de R

$$R = \mu(2\pi) + \psi'(2\pi) + \lambda \psi(2\pi)$$

donc en négligeant les termes en λ^3 , l'expression de R est :

$$\begin{aligned}R &= 2 - \lambda \int_0^{2\pi} \sin z f_1(z) dz - \lambda^2 \int_0^{2\pi} \sin z f_2(z) dz \\ &\quad + \lambda \int_0^{2\pi} \cos z g_1(z) dz + \lambda^2 \int_0^{2\pi} \cos z g_2(z) dz \\ &\quad - \lambda^2 \int_0^{2\pi} \sin z g_1(z) dz + O(\lambda^3)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 R = & 1 + \lambda \int_0^{2\pi} [\cos \tau g_1(\tau) - \sin \tau f_1(\tau)] d\tau \\
 & + \lambda^2 \int_0^{2\pi} [\cos \tau g_2(\tau) - \sin \tau f_2(\tau)] d\tau \\
 & - \lambda^2 \int_0^{2\pi} \sin \tau g_1(\tau) d\tau + O(\lambda^3)
 \end{aligned}$$

(4-36)

Les expressions de f_1 , f_2 et g_1 , g_2 sont données par les formules (4-35). Soient :

$$f_1(\tau) = -C \sin \tau - F(\tau) \cos \tau$$

$$g_1(\tau) = -C \cos \tau - F(\tau) \sin \tau$$

$$f_2(\tau) = -C \int_0^{\tau} \cos(\tau - \varphi) f_1(\varphi) d\varphi - F(\tau) \int_0^{\tau} \sin(\tau - \varphi) f_1(\varphi) d\varphi$$

$$g_2(\tau) = -C \int_0^{\tau} \cos(\tau - \varphi) g_1(\varphi) d\varphi - F(\tau) \int_0^{\tau} \sin(\tau - \varphi) g_1(\varphi) d\varphi$$



où

$$F(\tau) = \varphi(\tau) + \varepsilon - 2a_2 y_0 - 2a_3 y_0^2 - \dots - r a_r y_0^{r-1}$$

Pour simplifier les calculs, nous supposons dans la suite que le polynôme $Q(y)$ et la force périodique $\varphi(t)$ sont de la forme :

$$Q(y) = -\gamma y^3$$

γ étant le coefficient non linéaire d'élasticité et

$$\varphi(t) = \cos 2(t + \theta_1)$$

C'est le cas d'une plaque rectangulaire excitée dans son plan par une percussion $e(t)$ et une force périodique $\varphi(t)$. L'équation temporelle du mouvement étant alors :

$$y'' + y = \lambda [2\mu(e(t) + \cos 2(t + \theta_1)) - 2cy' - \varepsilon y - \gamma y^3]$$

où $\int$ désigne l'excitation en charge paramétrique.

Les expressions de f_1 , f_2 et g_1 , g_2 deviennent alors

$$f_1(\tau) = 2C \sin \tau - F(\tau) \cos \tau$$

$$g_1(\tau) = -2C \cos \tau - F(\tau) \sin \tau$$

$$f_2(\tau) = -2C \int_0^\tau \cos(\tau - \varphi) f_1(\varphi) d\varphi - F(\tau) \int_0^\tau \sin(\tau - \varphi) f_1(\varphi) d\varphi \quad (4-37)$$

$$g_2(\tau) = -2C \int_0^\tau \cos(\tau - \varphi) g_1(\varphi) d\varphi$$

avec

$$F(\tau) = 2\mu \cos 2(\tau + \theta_1) + \varepsilon + 3\gamma y_0^2$$

Dans ce qui suit nous nous proposons de calculer les trois intégrales figurant dans l'expression (4-36) de R :

$$\int_0^{2\pi} [\cos z g_1(z) - \sin z f_1(z)] dz = I$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos z g_2(z) - \sin z f_2(z)] dz = J$$

$$\int_0^{2\pi} \sin z g_1(z) dz = K$$

soit :

$$I = \int_0^{2\pi} \left[-2C \cos^2 z - (2\mu \cos 2(z+\theta_1) + \varepsilon + 3\delta y_0^2) (\sin z \cos z) - 2C \sin^2 z + (2\mu \cos 2(z+\theta_1) + \varepsilon + 3\delta y_0^2) \sin z \cos z \right] dz$$

$$I = -4\pi C$$

Pour calculer J nous allons procéder par étapes : puis

$$y_0 = r \cos(z+\theta) \quad , \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= 2\mu \cos 2(z+\theta_1) + \varepsilon + 3\delta y_0^2 \\ &= \left(\varepsilon + \frac{3\delta r^2}{2} \right) + 2\mu \cos 2(z+\theta_1) + \frac{3\delta r^2}{2} \cos 2(z+\theta) \end{aligned}$$

Posons par la suite :

$$a_0 = \varepsilon + \frac{3}{2} \delta r^2$$

$$a_1 = 2\mu$$

$$a_2 = \frac{3}{2} \delta r^2$$

donc :

$$F(z) = a_0 + a_1 \cos 2(z + \theta_1) + a_2 \cos 2(z + \theta)$$

soit :

$$\begin{aligned} A(z) &= \cos z g_2(z) - \sin z f_2(z) \\ &= -2C \left\{ \int_0^z [\cos z \cos(z-\varphi) g_1(\varphi) - \sin z \cos(z-\varphi) f_1(\varphi)] d\varphi \right\} \\ &= F(z) \left\{ \int_0^z [\cos z \sin(z-\varphi) g_1(\varphi) \right. \\ &\quad \left. - \sin z \sin(z-\varphi) f_1(\varphi)] d\varphi \right\} \end{aligned}$$

donc :

$$A(z) = -2C \int_0^z B(\varphi) d\varphi - F(z) \int_0^z C(\varphi) d\varphi$$

où après toute simplification :

$$\begin{aligned} B(\varphi) &= -2C \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(z-\varphi) \right] + \frac{1}{2} a_0 \sin 2(z-\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{4} a_1 [\sin 2(z+\theta_1) + \sin 4(z-2\varphi-\theta_1)] \\ &\quad + \frac{1}{4} a_2 [\sin 2(z-\varphi) + \sin 4(z-2\varphi-\theta)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 C(\varphi) = & -2C \sin 2(\tau - \varphi) + \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}a_0 \cos 2(\tau - \varphi) \\
 & + \frac{a_1}{2} \cos 2(\varphi + \vartheta_1) - \frac{a_1}{4} \left[\cos 2(\tau + \vartheta_1) + \cos 4(\tau - \varphi + \vartheta_1) \right] \\
 & + \frac{a_2}{2} \cos 2(\varphi + \vartheta) - \frac{a_2}{4} \left[\cos 2(\tau + \vartheta) + \cos 4(\tau - \varphi + \vartheta) \right]
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^z B(\varphi) d\varphi = & -Cz - C \sin 2z + \frac{1}{4}a_0 (1 - \cos 2z) \\
 & + \frac{1}{4}a_1 z \sin 2(z + \vartheta_1) + \frac{a_1}{32} \left[\cos 4(z + \vartheta_1) \right. \\
 & \left. - \cos 4(z - \vartheta_1) \right] + \frac{a_2}{4} z \sin 2(z + \vartheta) \\
 & + \frac{a_2}{32} \left[\cos 4(z + \vartheta) - \cos 4(z - \vartheta) \right] \\
 = & D
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \int_0^z C(\varphi) d\varphi = & -C \left(1 - \cos 2z \right) + \frac{1}{2}a_0 z - \frac{a_0}{4} \sin 2z \\
 & + \frac{a_1}{4} \left[\sin 2(z + \vartheta_1) - \sin 2\vartheta_1 \right] - \frac{a_1}{4} z \cos 2(z + \vartheta_1) \\
 & + \frac{a_1}{32} \left[\sin 4(z + \vartheta_1) + \sin 4(z - \vartheta_1) \right] \\
 & + \frac{a_2}{4} \left[\sin 2(z + \vartheta) - \sin 2\vartheta \right] - \frac{a_2}{4} z \cos 2(z + \vartheta)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{a_2}{32} \left[\sin 4(\tau + \vartheta) + \sin 4(\tau - \vartheta) \right]$$

$$= E$$

Calcul de $\int_0^{2\pi} A(\tau) d\tau$

$$- 2C \int_0^{2\pi} D(\tau) d\tau = -2C \left[-2C\pi^2 + \frac{a_0}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\cos 2\vartheta_1 - \frac{\pi}{4}\cos 2\vartheta \right]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(\tau) E d\tau &= -2C \left[a_0\pi - \frac{a_1}{2}\pi \cos 2\vartheta_1 - \frac{a_2}{2}\pi \cos 2\vartheta \right] \\ &+ a_0^2\pi - \frac{a_1^2\pi^2}{4} - \frac{a_2^2\pi}{4} - \frac{a_1^2\pi}{16} \sin 4\vartheta_1 \\ &- \frac{a_2^2}{16}\pi \sin 4\vartheta - \frac{a_1 a_2}{2}\pi^2 \cos(2\vartheta + 2\vartheta_1) \\ &+ \frac{a_1 a_2}{8}\pi \sin(2\vartheta - 2\vartheta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} A(z) d\tau &= \pi \left[4c^2\pi + \frac{1}{2}a_0c - \frac{1}{2}c a_1 \cos 2\vartheta_1 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}c a_2 \cos 2\vartheta - a_0^2\pi + \frac{a_1^2}{4}\pi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_2^2}{4}\pi + \frac{a_1^2}{16} \sin 4\vartheta_1 + \frac{a_2^2}{16} \sin 4\vartheta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_1 a_2}{2} \pi \cos (2\vartheta + 2\vartheta_1) - \frac{a_1 a_2}{8} \sin 2(\vartheta - \vartheta_1) \right]
 \end{aligned}$$

Calcul de K

$$\begin{aligned}
 \sin \tau g(\tau) &= -2c \sin \tau \cos \tau - \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_0 \cos 2\tau \\
 &\quad - \frac{a_1}{2} \cos 2(\tau + \vartheta_1) - \frac{a_2}{2} \cos 2(\tau + \vartheta) \\
 &\quad + \frac{1}{4}a_1 [\cos (4\tau + 2\vartheta_1) + \cos 2\vartheta_1] \\
 &\quad + \frac{1}{4}a_2 [\cos (4\tau + 2\vartheta) + \cos 2\vartheta]
 \end{aligned}$$

et

$$K = \int_0^{2\pi} \sin \tau g_1(\tau) d\tau = -a_0 \pi + \frac{1}{2} \pi a_1 \cos 2\vartheta_1 + \frac{1}{2} \pi a_2 \cos 2\vartheta$$

Conclusion

La somme des racines de l'équation de stabilité au troisième ordre près en λ est :

$$\begin{aligned} R &= 2 + \lambda \Sigma + \lambda^2 J - 2J \lambda^2 K \\ &= 2 - 4\pi c \lambda + \lambda^2 \pi \left[4c^2 \pi + (c + 2j) a_0 - \frac{1}{2} (c+1) a_1 \cos 2\vartheta_1 - \frac{1}{2} (c + 2j) a_2 \cos 2\vartheta \right. \\ &\quad \left. - a_0^2 \pi + \frac{1}{4} \left(\pi + \frac{1}{4} \sin 4\vartheta_1 \right) a_1^2 + \frac{1}{4} \left(\pi + \frac{1}{4} \sin 4\vartheta \right) a_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 a_2}{2} \left(\pi \cos (2\vartheta + 2\vartheta_1) - \frac{1}{4} \sin (2\vartheta - 2\vartheta_1) \right) \right] \end{aligned}$$

où

$$a_0 = \varepsilon + \frac{3}{2} \gamma n^2$$

$$a_1 = 2j$$

$$a_2 = \frac{3}{2} \gamma n^2$$

c) Conditions de stabilité

Pour que les racines de l'équation :

$$x^2 - Rx + P = 0$$

soient comprises entre 1 et -1 il faut :

$$a) \quad -2 < R < 2$$

$$b) \quad 1 - R + P > 0$$

$$1 + R + P > 0$$

La première condition est vérifiée pourvu que $|\lambda|$ soit assez petit.

Pour la seconde on a :

$$P = e^{-4\lambda c \pi} = 1 - 4\lambda c \pi + 8c^2 \pi^2 \lambda^2 + O(\lambda^3)$$

et les conditions de stabilité sont :

$$4\pi c^2 + (c + 2\mu) a_0 - \frac{1}{2} (c + 2\mu) a_1 \cos 2\theta_1$$

$$- \frac{1}{2} (1 + c) a_2 \cos 2\theta - a_0^2 \pi + \frac{1}{4} \left(\pi + \frac{1}{4} \sin 4\theta_1 \right) a_1^2$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\pi + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) a_2^2 + \frac{a_1 a_2}{2} \left(\pi \cos (2\theta + 2\theta_1) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \sin (2\theta - 2\theta_1) \right) > 0$$

et

$$\begin{aligned}
& 4 - 8\lambda c\pi - \lambda^2\pi \left[-(c+2\mu)a_0 + \frac{1}{2}(c+1)a_1 \cos 2\vartheta_1 \right. \\
& + \frac{1}{2}(c+1)a_2 \cos 2\vartheta + a_0^2\pi - \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{1}{4}\sin 4\vartheta_1\right)a_1^2 \\
& - \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{1}{4}\sin 4\vartheta\right)a_2^2 - \frac{a_1 a_2}{2}\left(\pi \cos(2\vartheta + 2\vartheta_1) \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4}\sin(2\vartheta - 2\vartheta_1) - 12\pi c^2 \right) \right] > 0
\end{aligned}$$

Cette dernière condition est vérifiée si $|\lambda|$ est petite.

En résumé pour $|\lambda|$ petit, la condition de stabilité est :

$$\begin{aligned}
& 4c^2\pi + (c+2\mu)a_0 - \frac{1}{2}(c+2\mu)a_1 \cos 2\vartheta_1 \\
& - \frac{1}{2}(c+2\mu)a_2 \cos 2\vartheta - a_0^2\pi + \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{1}{4}\sin 4\vartheta_1\right)a_1^2 \\
& + \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{1}{4}\sin 4\vartheta\right)a_2^2 + \frac{a_1 a_2}{2}\left(-\pi \cos(2\vartheta + 2\vartheta_1) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}\sin(2\vartheta - 2\vartheta_1)\right) > 0
\end{aligned}$$

avec :

$$a_0 = \varepsilon + \frac{3}{2}\gamma\pi^2$$

$$a_1 = 2\mu$$

$$a_2 = \frac{3}{2}\gamma\pi^2$$

CHAPITRE V

LIAISONS SPATIALES INSTANTANÉES AVEC SYNCHRONISATION ENTRE DEUX OSCILLATEURS.

I.- FORMULATION DU PROBLEME

Dans ce chapitre, nous considérons deux oscillateurs voisins dépendant d'un paramètre λ , en liaison par choc et excités par des percussions de période T , $T\omega = 2\pi$ et d'amplitude K inconnue. Nous supposons que les pulsations respectives Ω_1, Ω_2 des vibrations de chacun des oscillateurs sont légèrement différentes; soit :

$$\Omega_1^2 = \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon_1)$$

$$\Omega_2^2 = \omega^2 (1 + \lambda \varepsilon_2)$$

ε_1 et ε_2 désignant des paramètres non nuls.

Le système étant réalisé, peut-on obtenir la synchronisation de la période T sur les périodes des oscillateurs pour certaines valeurs de l'amplitude K ?

Pour cette étude, nous supposons que les équations différentielles régissant les mouvements de ces oscillateurs sont de la forme :

$$\begin{aligned} x_1'' + \omega^2 x_1 &= \lambda [\varepsilon_1 x_1 + P_1(x_1, x_1', t) + K e(t)] \\ &= \lambda \Psi_1(x_1, x_1', t) \end{aligned} \quad (5-1)$$

$$\begin{aligned} x_2'' + \omega^2 x_2 &= \lambda [\varepsilon_2 x_2 + P_2(x_2, x_2', t) - K e(t)] \\ &= \lambda \Psi_2(x_2, x_2', t) \end{aligned} \quad (5-2)$$

où l'ensemble des fonctions et des constantes satisfait aux hypothèses (H_1) suivantes :

- 1) K doit être choisi pour que la condition de coïncidence instantanée

$$x_1(0) = x_2(0) \quad (5-3)$$

soit satisfaite.

- 2) $|A|$ est supposée petite et $\lambda \neq 0$.

- 3) On suppose $\varepsilon_1 \neq 0$ et $\varepsilon_2 \neq 0$.

- 4) $E(t)$ est une percussion ayant pour expression : $E(t) = \sum_i \alpha_i \cdot e_i(t)$

où les α_i sont des constantes telles que

$$\sum_i |\alpha_i| < \infty$$

$$e_i(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_i - nT)$$

les t_i sont des constantes vérifiant :

$$0 \leq t_1 < \dots < t_p < T ;$$

le nombre des t_i est arbitraire mais fini.

- 5) Les P_i sont des fonctions de t de période T et des coordonnées

$$x_1, x_1', x_2, x_2' \text{ avec : } P_i(x_i, x_i', t) = Q_i(x_i, x_i') + \varphi(t)$$

$\varphi(t)$ de période T ; les Q_i sont des polynômes et

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_i}(0, 0, t) = 0 \quad (5-4)$$

$$i = 1, 2$$

- 6) Les P_i satisfont par ailleurs à des hypothèses (H_2) précisées plus loin.

Dans la première partie de cette étude, nous étudions l'existence de solutions périodiques du système d'équations différentielles non linéaires (5-1) - (5-2) - (5-3). Nous déterminons K , amplitude des percussions en deux étapes : $K = K_0 + K'$.

- La première consiste à trouver K_0 , valeur principale de K à l'aide des équations de synchronisation;
- La deuxième étape concernant K' utilise une méthode d'approximation à partir de la solution du système et de K_0 .

Dans la dernière partie nous étudions la stabilité de la solution de synchronisation.

Dans la suite, pour simplifier les calculs nous supposons que $\omega = 1$.

II.- EXISTENCE DES SOLUTIONS PERIODIQUES DU SYSTEME (5-1)-(5-2)-(5-3)

II.1) Préliminaires

Dans le cadre des systèmes non linéaires excités par des percussions

R. FAURE [15, 18] a démontré les résultats suivants :

On considère le système :

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda \psi_j(x_k, t) \quad (j, k = 1, \dots, n; \lambda \rightarrow 0) \quad (E_1)$$

où

$$\psi_j = \theta_j(x_k, t) + \sum_{i=1}^n x_{ji} \delta(t - t_{ij} - nT)$$

les θ_j sont des fonctions de x_k, t deux fois continûment dérivables par rapport à x_k, t pour tout t et pour (x_k) appartenant à un domaine. Les x_{ji} sont des constantes facteurs des percussions $\delta(t - t_{ij} - nT)$.

Théorème 1

Si $(a_k)_{k=1, \dots, n}$ sont des constantes telles que les intégrales suivantes étant de Riemann,

$$\int_0^T \theta_j(x_k, t) dt + \sum_{i=1}^n x_{ji} = 0 \quad (E_2)$$

$j = 1, \dots, n$

les fonctions θ_j étant continûment dérivables au voisinage de (a_k) , alors le système (Σ_1) admet en général un système de solutions périodiques pour $|\lambda|$ suffisamment petite, ces solutions sont pour $|\lambda|$ petite, voisines de $(a_k)_{k=1, \dots, n}$.

En outre si on pose :

$$\bar{F}_j(x_k) = \frac{1}{T} \int_0^T \theta_j(x_k, t) dt \quad j, k = 1, \dots, n$$

la stabilité du système (Σ_1) au voisinage de (a_k) est donnée en général par la stabilité du système (Σ_3) au voisinage de (a_k) pour $|\lambda|$ assez petite :

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda \bar{F}_j(x_k) \quad ; \quad j, k = 1, \dots, n \quad (\Sigma_3)$$

les $\bar{F}_j$ sont les fonctions associées au système (Σ_1) .

Nous allons appliquer et démontrer ces résultats dans le cadre du système (5-1)-(5-2)-(5-3). Pour cela nous montrons dans le paragraphe ci-dessous que ce système d'équations différentielles conduit à un système du type en lui appliquant la méthode de la variation des constantes [17].

II.2) Equations de synchronisation

Cherchons une solution du système d'équations (5-1)-(5-2)-(5-3) sous la forme :

$$x_1(t) = a_1(t) \cos t + b_1(t) \sin t$$

$$x_2(t) = a_2(t) \cos t + b_2(t) \sin t$$

avec :

$$a_1'(t) \cos t + b_1'(t) \sin t = 0$$

$$a_2'(t) \cos t + b_2'(t) \sin t = 0$$

en appliquant la méthode de la variation des constantes. On a alors le système :

$$\begin{aligned}
 a_1' \cos t + b_1' \sin t &= 0 \\
 a_2' \cos t + b_2' \sin t &= 0 \\
 -a_1' \sin t + b_1' \cos t &= \lambda \varphi_1(t) \\
 -a_2' \sin t + b_2' \cos t &= \lambda \varphi_2(t)
 \end{aligned} \tag{5-5}$$

qui conduit à

$$\frac{da_1}{dt} = -\lambda \varphi_1 \sin t = \lambda \left[\varphi_1 - \left(K \sum_i x_i e_i(t) \right) \sin t \right]$$

$$\frac{db_1}{dt} = \lambda \varphi_1 \cos t = \lambda \left[\varphi_1 + \left(K \sum_i x_i e_i(t) \right) \cos t \right]$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\lambda \varphi_2 \sin t = \lambda \left[\varphi_2 + \left(K \sum_i x_i e_i(t) \right) \sin t \right] \tag{5-6}$$

$$\frac{db_2}{dt} = \lambda \varphi_2 \cos t = \lambda \left[\varphi_2 - \left(K \sum_i x_i e_i(t) \right) \cos t \right]$$

où

$$\varphi_1 = -(\varepsilon_1 x_1 + P_1(x_1, x'_1, t)) \sin t$$

$$\varphi_2 = (\varepsilon_1 x_1 + P_1(x_1, x'_1, t)) \cos t$$

$$\varphi_3 = -(\varepsilon_2 x_2 + P_2(x_2, x'_2, t)) \sin t$$

$$\varphi_4 = (\varepsilon_2 x_2 + P_2(x_2, x'_2, t)) \cos t$$

On est ainsi ramené comme dans le cas classique à un système d'équations de période $T = 2\pi$ qui a été étudié dans un cas plus général que le système (5-6) dans [15].

Les conditions (Σ_2) du Théorème 1 (cf. Préliminaires; § II-1 de ce chapitre) sont, compte tenu des percussions :

$$-\int_0^{2\pi} [P_1(x_1, x'_1, t) + \varepsilon_1 x_1] \sin t \, dt - K_0 \sum_i \alpha_i \sin t_i = 0 \quad (5-6a)$$

$$\int_0^{2\pi} [P_1(x_1, x'_1, t) + \varepsilon_1 x_1] \cos t \, dt + K_0 \sum_i \alpha_i \cos t_i = 0$$

$$-\int_0^{2\pi} [P_2(x_2, x'_2, t) + \varepsilon_2 x_2] \sin t \, dt + K_0 \sum_i \alpha_i \sin t_i = 0 \quad (5-6b)$$

$$\int_0^{2\pi} [P_2(x_2, x'_2, t) + \varepsilon_2 x_2] \cos t \, dt - K_0 \sum_i \alpha_i \cos t_i = 0$$

où K_0 est une valeur approchée de K .

(5-6a) - (5-6b) est le système des équations de Bifurcation-Synchronisation.

Les fonctions associées au système (5-6) sont définies par :

$$F_1(a_1, b_1) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(a_1, b_1, t) \sin t \, dt$$

$$F_2(a_1, b_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(a_1, b_1, t) \cos t \, dt$$

$$F_3(a_2, b_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_c^{2\pi} \Psi_2(a_2, b_2, t) \sin t \, dt$$

$$F_4(a_2, b_2) = \frac{1}{2\pi} \int_c^{2\pi} \Psi_2(a_2, b_2, t) \cos t \, dt$$

et la stabilité de (5-6) dépend donc du système :

$$\frac{da_1}{dt} = \lambda F_1(a_1, b_1)$$

$$\frac{db_1}{dt} = \lambda F_2(a_1, b_1)$$

(5-8)

$$\begin{aligned}\frac{da_2}{dt} &= \lambda \bar{F}_3(a_2, b_2) \\ \frac{db_2}{dt} &= \lambda \bar{F}_4(a_2, b_2)\end{aligned}\tag{5-8}$$

On cherche alors des solutions constantes pour a_1, b_1, a_2, b_2 et K_0 du système de bifurcation-synchronisation (5-6a) - (5-6b). Compte tenu de l'hypothèse de coïncidence spatiale (5-3) $x_1(0) = x_2(0)$ on a :

$$a_1 = a_2$$

On a alors les 5 équations nécessaires à la détermination des 5 constantes :

$$a_1, a_2, b_1, b_2, K_0$$

On suppose résolu le système numérique et que le système de solutions :

$$\begin{aligned}a_1 &= \bar{a} \\ a_2 &= \bar{a} \\ b_1 &= \bar{b}_1 \\ b_2 &= \bar{b}_2 \\ K_0 &= \bar{K}_0\end{aligned}\tag{5-9}$$

est non identiquement nul.

On considère les hypothèses supplémentaires (H_2) suivantes :

Les solutions $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{K}_0, \bar{a}_1 = \bar{a}_2$ n'étant pas identiquement nulles, on suppose que les fonctions $P_1(u, v, t)$,

$P_2(u, v, t)$ admettent au voisinage des solutions :

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 \cos t + \bar{b}_1 \sin t$$

$$\bar{a}_2 = \bar{a}_2 \cos t + \bar{b}_2 \sin t$$

des dérivées partielles premières et secondes dans un domaine $D(R_1)$.

avec :

$$a_1 = \bar{a}_1 + q_1$$

$$b_1 = \bar{b}_1 + q_2$$

$$a_2 = \bar{a}_2 + q_3$$

$$b_2 = \bar{b}_2 + q_4$$

$$D(R_1) \text{ défini par } \sum_{i=1}^4 q_i^2 \leq R_1^2$$

On désigne par $D(R)$ l'ensemble des points $M(q_1, q_2, q_3, q_4)$

défini par :

$$M(q_1, q_2, q_3, q_4) \in D(R) \text{ si } \sum_i q_i^2 \leq K^2 < R_1^2$$

En utilisant les hypothèses on a alors le système ci-dessous :

$$\frac{dq_1}{dt} = \lambda \left[P_{11} q_1 + P_{12} q_2 + \bar{a}_1(t) + K_1(q_1, q_2, t) - K \sum_{i=1, n} \alpha_i \sin t_i S(t - t_i - 2n\pi) \right] \quad (5-10a)$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \lambda \left[P_{21} q_1 + P_{22} q_2 + \bar{a}_2(t) + K_2(q_1, q_2, t) + K \sum_{i=1, n} \alpha_i \cos t_i S(t - t_i - 2n\pi) \right]$$

$$\frac{dq_3}{dt} = \lambda \left[P_{33} q_3 + P_{34} q_4 + \theta_3(t) + R_3(q_3, q_4, t) \right. \\ \left. + K \sum_{i,n} x_i \cdot \delta(t - t_i - 2n\pi) \sin t_i \right] \quad (5-10b)$$

$$\frac{dq_4}{dt} = \lambda \left[P_{43} q_3 + P_{44} q_4 + \theta_4(t) + R_4(q_3, q_4, t) \right. \\ \left. - K \sum_{i,n} x_i \cdot \cos t_i \cdot \delta(t - t_i - 2n\pi) \right]$$

avec

$$P_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}(c, c, t)$$

$$\theta_i = \varphi_i(\bar{x}_k, \bar{x}'_k, t) \quad \begin{array}{l} i=1, 2, k=1 \\ i=3, 4, k=2 \end{array}$$

$$R_i = \varphi_i(x_j, x'_j, t) - \varphi_i(\bar{x}_j, \bar{x}'_j, t) - \sum_j \frac{\partial \varphi_i(c, c, t)}{\partial q_j} q_j$$

les x_i calculés comme les $\bar{x}_i$ mais en remplaçant les $\bar{q}_j$ par

$\bar{q}_j + q_j$ avec pour $i=1, 2$, $j=1, 2$ et pour $i=3, 4$; $j=3, 4$.

La condition $\sum_i q_i^2 < R^2$ pour tout t entraîne :

$$|\max R_i| < \alpha R^2, \quad \alpha = \text{constante.}$$

Donc si les R_i sont calculés à partir de $q_{j,n-1}$ terme d'une récurrence avec $M(q_{j,n-1}) \in D(R)$ on a également :

$$|R_i(M(q_{j,n-1}))| < \alpha R^2$$

Dans le paragraphe ci-dessous nous démontrons le Théorème 1 (du § II-1 de ce Chapitre) dans le cadre du système (5-10a) - (5-10b). Nous montrons que la solution de ce système est la limite, si elle existe, d'une récurrence $(q_{j,n}) \in D(R)$.

II.3) Preuve du Théorème 1

Les équations (5-10a) - (5-10b) sont à coefficient périodiques de période 2π . On utilise alors pour déterminer les solutions périodiques la méthode classique valable pour le cas des équations différentielles [17, 18] :

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda \left[\sum_{j=1}^n P_{ij} x_j + h_i(t) + \dots \right] \quad (\Sigma_4)$$

$$i = 1, \dots, n$$

où h_i ici sont des fonctions continues, le système (Σ_4) étant de période 2π . On écrit alors pour le cas (Σ_4) .

$$x_i = \lambda \sum_j (a_j + \beta_j) y_{ij} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (\Sigma_5)$$

où les y_{ij} sont les solutions canoniques du système linéaire homogène à coefficients périodiques; c'est-à-dire celles qui vérifient les relations :

$$y_{ij}(2\pi) = S_j y_{ij}(0) \quad (\Sigma_6)$$

où les S_j sont les nombres de Floquet. Les a_j et le β_j sont alors déterminées de la manière suivante :

$$\beta_j(t) = \sum_k \int_0^t H'_{kj}(t, \lambda) h_k(t) dt \quad (\Sigma_7)$$

avec

$$H'_{kj} = \frac{H_{kj}(t, \lambda)}{H(t, \lambda)}$$

où $H_{kj}(t, \lambda)$ est le mineur des y_{ij} dans le déterminant $H(t, \lambda)$ des $y_{ij}(t, \lambda)$;

$$a_j = \frac{S_j}{1 - S_j} \beta_j(2\pi) \quad (\Sigma_8)$$

les nombres S_j de Floquet étant supposés distincts et différents de 1.

Nous appliquerons ces formules du cas continu au cas des systèmes à distribution δ en tenant compte de celle-ci; en remarquant qu'ici le nombre d'équations est quatre.

L'équation (5-3) de coïncidence instantanée $x_1(c) = x_2(c)$ devient ici :

$$q_1(c) = q_3(c)$$

avec

$$q_1(c) = \lambda \sum_j (a_j + \beta_j(c)) y_{1j}(c)$$

$$q_3(c) = \lambda \sum_j (a_j + \beta_j(c)) y_{3j}(c)$$

et

$$z_j(t) = \frac{1}{K} \int_0^t H'_{kj} h_k(\tau) d\tau$$

donc on ne doit tenir compte que des θ_j dans l'égalité $\theta_1(t) = \theta_3(t)$ et non des z_j car $z_j(0) = 0$.

Les expressions des $h_k(\tau)$ sont données ici par :

Pour $k = 1, 3$:

$$h_k(\tau) = \theta_k + R_k + \varepsilon K \sum_i x_i \sin t_i \cdot S(t - t_i - 2n\pi)$$

avec $\varepsilon = -1$ pour $k = 1$, $\varepsilon = +1$ pour $k = 3$

Pour $k = 2, 4$:

(5-11)

$$h_k(\tau) = \theta_k + R_k + \varepsilon K \sum_i x_i \cos t_i \cdot S(t - t_i - 2n\pi)$$

avec $\varepsilon = +1$ pour $k = 2$, $\varepsilon = -1$ pour $k = 4$.

On définit alors $K = K_0 + K'$, K_0 étant défini par les équations de bifurcation-synchronisation.

$H'_{kj} = H_{kj}(t, \lambda) / H(t, \lambda)$ est une fonction analytique de λ pour $|\lambda|$ suffisamment petite; $0 \leq t \leq 2\pi$.

On a :

$$H'_{kj} = H'_{kj0} + \lambda H'_{kj1} \quad (5-12)$$

où H'_{kj0} est une constante.

On a :

$$\int_0^{2\pi} H'_{kj} h_k(\tau) d\tau = H'_{kj0} \int_0^{2\pi} h_k(\tau) d\tau + \lambda \int_0^{2\pi} H'_{kj1} h_k(\tau) d\tau$$

En écrivant l'égalité $q_1(c) = q_3(c)$ on obtient :

$$\sum_{j=1}^p \left[\frac{s_j}{1-s_j} \right] \left(\int_{2\pi}^c H'_{kj} \cdot h_k(c) \alpha_j \right) \alpha_{j0} \left[\right]$$

(5-13)

$$= \sum_{j=1}^p \left[\frac{s_j}{1-s_j} \right] \left(\int_{2\pi}^c H'_{kj} \cdot h_k(c) \alpha_j \right) \alpha_{j0} \left[\right]$$

Posons :

$$s_i = 1 + \lambda R_i, \quad R_i = R_0 + \lambda R_1 + \dots$$

L'équation (5-12) devient alors :

$$\sum_{j=1}^p \left[\frac{s_j}{1-s_j} \right] \left(\int_{2\pi}^c H'_{kj} \cdot h_k(c) \alpha_j \right) \alpha_{j0} \left[\right]$$

$$= \sum_{j=1}^p \left[\frac{s_j}{1-s_j} \right] \left(\int_{2\pi}^c H'_{kj} \cdot h_k(c) \alpha_j \right) \alpha_{j0} \left[\right]$$

Dans cette équation remplaçons H'_{kj} et $h_k(c)$ par leurs expressions

respectives (5-11) et (5-12), en tenant compte des équations de synchronisation :

$$\int_{2\pi}^c h_k(\bar{a}_j, \bar{b}_j, c) \alpha_j + \varepsilon k_0 \sum_{i=1}^p \alpha_i \omega_i t_i = 0$$

avec $j=1$ et $\varepsilon=-1$ si $k=1$; $j=2$ et $\varepsilon=+1$ si $k=3$

$$\int_{2\pi}^c h_k(\bar{a}_j, \bar{b}_j, c) \alpha_j + \varepsilon k_0 \sum_{i=1}^p \alpha_i \omega_i t_i = 0$$

(5-14)

avec $j=1$ et $\varepsilon=+1$ si $k=2$, $j=2$ et $\varepsilon=-1$ si $k=1$
on obtient :

$$\begin{aligned}
 K' \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[(y_{3j0} - y_{1j0}) H'_{1j0} \sum_i \alpha_i \sin t_i \right. \right. \\
 \left. \left. + (y_{1j0} - y_{3j0}) H'_{2j0} \sum_i \alpha_i \cos t_i \right. \right. \\
 \left. \left. + (y_{1j0} - y_{3j0}) H'_{3j0} \sum_i \alpha_i \sin t_i \right. \right. \\
 \left. \left. + (y_{3j0} - y_{1j0}) H'_{4j0} \sum_i \alpha_i \cos t_i \right] \right\} = A
 \end{aligned} \quad (5-15)$$

avec

$$\begin{aligned}
 A = \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_{k=1}^4 \lambda \int_0^{2\pi} H'_{kj1} h_k(\gamma) d\gamma \right] \right\} y_{3j0} \\
 - \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_{k=1}^4 \lambda \int_c^{2\pi} H'_{kj1} h_k(\gamma) d\gamma \right] \right\} y_{1j0} \\
 + \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_k H'_{kj0} \int_c^{2\pi} R_k d\gamma \right] \right\} y_{3j0}
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_k H'_{kjc} \int_0^{2\pi} R_k ds \right] \right\} y_{j0}$$

Or $H'_{kj} = H'_{kjc} + \lambda H'_{kj1}$; donc : $H'_{kj1} = \frac{1}{\lambda} (H'_{kj} - H'_{kjc})$

D'où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_{k=1}^4 \int_0^{2\pi} (H'_{kj} - H'_{kjc}) R_k(\gamma) ds \right] \right\} y_{j0} \\ &= \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_{k=1}^4 \int_0^{2\pi} (H'_{kj} - H'_{kjc}) R_k(\gamma) ds \right] \right\} y_{j0} \\ &+ \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_{k=1}^4 H'_{kjc} \int_0^{2\pi} R_k ds \right] \right\} y_{j0} \\ &- \sum_{j=1}^4 \left\{ \frac{S_j}{\beta_j} \left[\sum_k H'_{kjc} \int_0^{2\pi} R_k ds \right] \right\} y_{j0} \end{aligned} \quad (5-16)$$

tous les β_i étant supposés différents de zéro.

Pour montrer l'existence de la solution, on procède par récurrence

dans (5-10a) - (5-10b) et (5-15); on suppose connus les $q_{i,p-1}$, K'_{p-1} ; on calcule alors K'_p à partir de (5-15). On porte alors la valeur de K'_p dans

les équations (5-10a) - (5-10b) considérées comme système (Σ_4) en calculant les $q_{i,p}$ à partir des $q_{i,p-1}$ et K'_{p-1} les $q_{i,p}$ étant des fonctions de période 2π , puis à nouveau on calcule K' et ainsi de suite. On prend pour valeurs initiales de récurrence :

$$K'_0 = q_{i,0} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Définissons maintenant les récurrences :

$$q_{i,p-1} \longrightarrow q_{i,p} \quad ; \quad K'_{p-1} \longrightarrow K'_p$$

On définit :

$$q_{i,p} = \lambda \sum_j (a_{j,p-1} + z_{j,p-1}) y_j \quad (5-17)$$

où les $a_{j,p-1}$ et $z_{j,p-1}$ sont calculés à partir des $q_{i,p-1}$ et K'_{p-1} ; les y_j sont les solutions canoniques du système (5-10a) - (5-10b) K'_p est défini à partir de (5-15).

Majoration de $q_{i,p}$ et K'_p

Nous voulons majorer les $q_{i,p}(t)$ dans l'ensemble de l'intervalle $[0, 2\pi]$ compte tenu des percussions éventuelles; ceci pour $|\lambda|$ petit, $|\lambda| < \lambda_0$, λ_0 constante. Nous devons pour cela majorer les différents termes a_j , $z_j(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$. On peut écrire comme ci-dessus $S_j = 1 + \lambda \beta_j + \lambda \varepsilon(\lambda)$; β_j étant des constantes supposées ici non toutes nulles. Alors le nombre correspondant $\lambda a_{j,p-1}$ est :

$$\lambda a_{j,p-1} = \frac{\lambda S_j}{1 - S_j} = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{2\pi} H'_{k,j}(\tau) h_{k,p-1}(\tau) d\tau$$

$$= \frac{S_j}{\beta_j} \leq \frac{1}{K} \int_0^{2\pi} H'_{k,j}(\tau) h_{k,p-1}(\tau) d\tau$$

il en résulte que pour :

$$|\lambda| < \lambda_0$$

$$|\lambda \alpha_{j,p-1}| \leq \beta \left| \frac{1}{K} \int_0^{2\pi} H'_{k,j}(\tau) h_{k,p-1}(\tau) d\tau \right|$$

avec

$$\beta = \sup_j \left(\frac{1 + \lambda_0 |\beta_j| + \lambda_0 |\varepsilon(\lambda)|}{|\beta_j|} \right)$$

mais

$$H'_{k,j} = H'_{k,j0} + \lambda H'_{k,j1}$$

où $H'_{k,j0}$ est constante par rapport à τ et à λ ; il en résulte que la partie principale de $\int_0^{2\pi} H'_{k,j} h_{k,p-1}(\tau) d\tau$ est donc celle de :

$$\begin{aligned} H'_{k,j0} \int_0^{2\pi} h_{k,p-1}(\tau) d\tau &= H'_{k,j0} \left[\int_0^{2\pi} \Theta_k(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} K_k(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \tau) d\tau + \varepsilon K_i \sum_i \alpha_i \cdot \text{oint}_i \right] \end{aligned}$$

avec $\varepsilon = -1$ pour $k=1$, $\varepsilon = +1$ pour $k=3$

$$H'_{kjo} \int_0^{2\pi} h_{k,p-1}(\lambda) d\lambda = H'_{kjo} \left[\int_0^{2\pi} \varphi_k(\bar{a}_i, \bar{b}_i, \lambda) d\lambda + \int_0^{2\pi} R_k(\bar{a}_i, \bar{b}_i, \lambda) d\lambda + \sum k \leq i \alpha_i \cos t_i \right]$$

avec $\varepsilon = 1$ pour $k = 2$; $\varepsilon = -1$ pour $k = 4$. Mais compte tenu

des équations de synchronisation (5-14), cette partie principale est réduite à

$H'_{kjo} \int_0^{2\pi} R_k(\lambda) d\lambda$; or $R_k(\lambda)$ est borné par αR^2 pour $\sum_{i,p-1} q_i^2 \leq R^2$;
par suite $|\lambda \alpha_{j,p-1} y_{ij}| < \alpha_1 R^2$, les $y_{ij}(t)$ étant bornés pour
 $t \in (0, 2\pi)$ et $|\lambda| < \lambda_0$.

Il reste à majorer $\lambda z_j y_{ij}$ avec :

$$z_j(t) = \sum_k \int_0^t H'_{kjo} h_k(\lambda) d\lambda.$$

Les $y_{ij}(t)$ étant toujours bornés, on voit que les expressions $\lambda z_j y_{ij}$,

en tenant compte des percussions, sont majorées, pour $0 < t < 2\pi$, par une constante :

$$(\alpha_2 R^2 + \alpha_3) |\lambda| \quad (5-18)$$

où α_2, α_3 sont des constantes. Les percussions interviennent dans le termes

$\alpha_3 |\lambda|$. D'où :

$$|q_{i,p}(t)| \leq \gamma R^2 + \eta |\lambda| \quad (5-19)$$

où γ et η sont des constantes indépendantes de λ et de R ; pour $|\lambda| < \lambda_0$,

pour $t \in (0, 2\pi)$ et supposant $(q_{i,p-1}) \in \mathcal{X}(R)$.

Par conséquent :

$$\max_{t \in (c, 2\pi)} |q_{i,p-1}| \leq \delta R^2 + D\lambda \quad (5-20)$$

La suite $(q_{i,p})$ appartiendra toujours à $D(R)$ si

$$\sum_t (\max_t |q_{i,p}|)^2 < R^2; \text{ ce qui a lieu si ; } \quad \mathcal{E}(\delta R^2 + D|\lambda|) < R ;$$

si cette condition est réalisée avec la condition avec la condition $q_{i,0} = 0$, on a toujours $(q_{i,p}) \in D(R)$.

Si nous voulons que la suite converge, après avoir remarqué que dans la différence $q_{i,p+1} - q_{i,p}$ n'interviennent ni $\mathcal{O}(\bar{q}_i, \bar{t}_i, t)$, ni les percussions on obtient une inégalité :

$$\max_t |q_{i,p+1} - q_{i,p}| \leq \delta_1 R \max_t |q_{i,p} - q_{i,p-1}| \quad (5-21)$$

On voit qu'il suffit alors que $\mathcal{E}\delta_1 R < 1$ pour qu'il y ait convergence car alors la suite $(q_{i,p})$ est Cauchy.

La convergence aura certainement lieu dans le domaine $D(R)$, $|\lambda| < \lambda_0$ si les conditions (5-20) et (5-21) sont réalisées avec $q_{i,0} = 0$; la réalisation de (5-20) et (5-21) aura certainement lieu si :

$$|\lambda| < \lambda_1 < \lambda_0$$

Compte tenu de la formule (5-15) donnant l'expression de K' , la majoration de K'_p se fait comme celle des $q_{i,p}$ et de même celle de

$$|K'_{p+1} - K'_p|$$

Les suites (q_n) et (K'_n) sont donc de Cauchy et par conséquent elles convergent vers des limites q_ℓ et K'_ℓ respectivement. Le Théorème 1 est démontré.

Les convergences étant uniformes; les équations (5-1) - (5-2) - (5-3)

ont une solution. D'où le théorème suivant :

Théorème 2

En général le système d'équations différentielles (5-1) - (5-2) - (5-3) satisfaisant aux hypothèses $H_1 + H_2$ admet des solutions périodiques de période 2π pour $|\lambda|$ petit. Lorsque λ tend vers zéro les solutions tendent vers les valeurs $\bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i$, K_0 définies par les équations de synchronisation (5-6a) - (5-6b).

III.- APPLICATIONS - ETUDE DE LA STABILITE

III.1) Position du problème

Dans ce paragraphe nous étudions en détails les problèmes de la synchronisation et de la stabilité dans le cas où le système (5-1) - (5-2) - (5-3) est composé d'équations différentielles régissant les mouvements de plaques rectangulaires excitées par des percussions périodiques de période $T = 2\pi$; soit avec λ suffisamment petit et C une constante positive :

$$\begin{aligned}\ddot{w}_1 + w_1 &= \lambda [K e(t) - 2C \dot{w}_1 - \gamma_1 w_1^3 - \varepsilon_1 w_1] \\ &= \lambda \varphi_1(w_1, \dot{w}_1, t)\end{aligned}\tag{5-19}$$

$$\begin{aligned}\ddot{w}_2 + w_2 &= \lambda [-K e(t) - 2C \dot{w}_2 - \gamma_2 w_2^3 - \varepsilon_2 w_2] \\ &= \lambda \varphi_2(w_2, \dot{w}_2, t)\end{aligned}\tag{5-20}$$

avec la condition de coïncidence :

$$W_1(e) = W_2(e) \quad (5-21)$$

K désignant ici encore l'amplitude de la percussion $e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(t-nT)T$

Dans ce qui suit nous nous proposons de chercher les équations de synchronisation, les points de synchronisation, de discuter les conditions de stabilité au voisinage de chacun de ces points.

Nous déterminons les conditions de synchronisation en couplant les deux éléments du système. Les conditions de stabilité sont étudiées séparément, mais nous déterminons les conditions sous lesquelles le système d'oscillateurs est globalement stable.

III-2) Equations de synchronisation

Cherchons une solution des équations (5-19) - (5-20) - (5-21) sous la forme :

$$W_1(t) = a_1(t) \cos t + b_1(t) \sin t$$

$$W_2(t) = a_2(t) \cos t + b_2(t) \sin t$$

en utilisant la méthode de la variation des constantes. On a le système suivant :

$$\frac{da_1}{dt} = a_1' = -\lambda \Psi_1(W_1, \dot{W}_1, t) \sin t$$

$$\frac{db_1}{dt} = b_1' = \lambda \Psi_1(W_1, \dot{W}_1, t) \cos t \quad (5-22)$$

$$\begin{aligned}\frac{da_2}{dt} = a'_2 &= -\lambda \psi_2(w_2, \dot{w}_2, t) \sin t \\ \frac{db_2}{dt} = b'_2 &= \lambda \psi_2(w_2, \dot{w}_2, t) \cos t\end{aligned}\quad (5.22)$$

Les fonctions associées à ce système sont définies par :

$$\begin{aligned}F_1(a_1, b_1) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(w_1, \dot{w}_1, t) \sin t \, dt \\ F_2(a_1, b_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(w_1, \dot{w}_1, t) \cos t \, dt \\ F_3(a_2, b_2) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(w_2, \dot{w}_2, t) \sin t \, dt \\ F_4(a_2, b_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(w_2, \dot{w}_2, t) \cos t \, dt\end{aligned}\quad (5.23)$$

avec en tenant compte du fait que $\sin 2n\pi = 0$ et $\cos 2n\pi = 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(w_1, \dot{w}_1, t) \sin t \, dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[K \frac{\pi}{n} S(t-n\pi) T - 2C (-a_1 \sin t + b_1 \cos t) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon_1 (a_1 \cos t + b_1 \sin t) - \delta_1 (a_1 \cos t + b_1 \sin t)^3 \right] \sin t \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[2C a_1 \sin^2 t - 2C b_1 \cos t \sin t - \varepsilon_1 a_1 \cos t \sin t \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon_1 b_1 \sin^2 t - \delta_1 a_1^3 \cos^3 t \sin t - 3\delta_1 a_1^2 b_1 \cos^2 t \sin t \right. \\
&\quad \left. - 3\delta_1 a_1 b_1^2 \cos t \sin^3 t - \delta_1 b_1^3 \sin^4 t \right] dt \\
&= 2\pi C a_1 - 2\pi \left[\frac{3\delta_1}{8} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\varepsilon_1}{2} \right] b_1
\end{aligned}$$

Des calculs analogues donnent :

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(w_1, \dot{w}_1, t) \cos t \, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[K \frac{\pi}{n} S(t-n\pi) T - 2C (-a_1 \sin t + b_1 \cos t) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon_1 (a_1 \cos t + b_1 \sin t) - \delta_1 (a_1 \cos t + b_1 \sin t)^3 \right] \cos t \, dt \\
&= K - 2\pi C b_1 - 2\pi \left[\frac{3\delta_1}{8} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\varepsilon_1}{2} \right] a_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_2(w_2, \dot{w}_2, t) \dot{w}_2 dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-K \sum_n \delta(t-nT) - 2c(-a_2 \sin t + b_2 \cos t) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon_2(a_2 \cos t + b_2 \sin t) - \mathcal{J}_2(a_2 \cos t + b_2 \sin t)^3 \right] \dot{w}_2 dt \\
&= 2\pi c a_2 - 2\pi \left[\frac{3\mathcal{J}_2}{8} (a_2^2 + b_2^2) + \frac{\varepsilon_2}{2} \right] b_2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_2(w_2, \dot{w}_2, t) \cos t dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-K T \sum_n \delta(t-nT) - 2c(-a_2 \sin t + b_2 \cos t) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon_2(a_2 \cos t + b_2 \sin t) - \mathcal{J}_2(a_2 \cos t + b_2 \sin t)^3 \right] \cos t dt \\
&= -K - 2\pi c b_2 - 2\pi \left[\frac{3\mathcal{J}_2}{8} (a_2^2 + b_2^2) + \frac{\varepsilon_2}{2} \right] a_2
\end{aligned}$$

La stabilité du système (5-22) dépend donc du système associé (5-24) suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} &= -\frac{\lambda}{2\pi} \left\{ 2\pi c a_1 - 2\pi \left[\frac{3\mathcal{J}_1}{8} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\varepsilon_1}{2} \right] b_1 \right\} \\
 \frac{db_1}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ K - 2\pi c b_1 - 2\pi \left[\frac{3\mathcal{J}_1}{8} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\varepsilon_1}{2} \right] a_1 \right\} \\
 &\hspace{25em} (5-24) \\
 \frac{da_2}{dt} &= -\frac{\lambda}{2\pi} \left\{ 2\pi c a_2 - 2\pi \left[\frac{3\mathcal{J}_2}{8} (a_2^2 + b_2^2) + \frac{\varepsilon_2}{2} \right] b_2 \right\} \\
 \frac{db_2}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ -K - 2\pi c b_2 - 2\pi \left[\frac{3\mathcal{J}_2}{8} (a_2^2 + b_2^2) + \frac{\varepsilon_2}{2} \right] a_2 \right\}
 \end{aligned}$$

Posons dans (5-24) le changement de fonctions suivant :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= V_1 \sin u_1 \\
 b_1 &= V_1 \cos u_1 \\
 a_2 &= V_2 \sin u_2 \\
 b_2 &= V_2 \cos u_2
 \end{aligned}$$

avec $V_1 > 0$ et $V_2 > 0$. Le système (5-24) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[-\frac{K \sin u_1}{V_1} + 2\pi \left(\frac{3\mathcal{J}_1}{8} V_1^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right] \\
 \frac{dV_1}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[K \cos u_1 - 2\pi c V_1 \right] \\
 \frac{du_2}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{K \sin u_2}{V_2} + 2\pi \left(\frac{3\mathcal{J}_2}{8} V_2^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \right] \\
 \frac{dV_2}{dt} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[-K \cos u_2 - 2\pi c V_2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{5-25}$$

Les équations de synchronisation sont :

$$F_1(u_1, v_1) = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{K_0 \sin u_1}{v_1} + 2\pi \left(\frac{3\mathcal{H}_1}{8} v_1^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right] = 0 \quad (5-26)$$

$$F_2(u_1, v_1) = \frac{1}{2\pi} \left[K_0 \cos u_1 - 2\pi c v_1 \right] = 0 \quad (5-27)$$

$$F_3(u_2, v_2) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{K_0 \sin u_2}{v_2} + 2\pi \left(\frac{3\mathcal{H}_2}{8} v_2^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \right] = 0 \quad (5-28)$$

$$F_4(u_2, v_2) = \frac{1}{2\pi} \left[-K_0 \cos u_2 - 2\pi c v_2 \right] = 0 \quad (5-29)$$

où K_0 est une approximation de l'amplitude de la percussion.

Compte tenu de l'équation de coïncidence spatiale $W_1(c) = W_2(c)$

on a : $\theta_1 = \theta_2$, soit

$$v_1 \sin u_1 = v_2 \sin u_2 \quad (5-30)$$

d'où les cinq équations (5-26) - (5-27) - (5-28) - (5-29) - (5-30) permettant de déterminer les cinq variables u_1, u_2, v_1, v_2 et K_0 .

Des équations (5-27) et (5-29) on tire :

$$K_0 \cos u_1 = 2\pi c v_1 \quad (5-31a)$$

$$-K_0 \cos u_2 = 2\pi c v_2 \quad (5-31b)$$

De (5-26) et (5-28) on tire :

$$K_0 \sin \alpha_1 = 2\pi V_1 \left(\frac{3\mathcal{H}_1}{8} V_1^2 + \frac{\mathcal{E}_1}{2} \right) \quad (5-32a)$$

$$K_0 \sin \alpha_2 = -2\pi V_2 \left(\frac{3\mathcal{H}_2}{8} V_2^2 + \frac{\mathcal{E}_2}{2} \right) \quad (5-32b)$$

On obtient de (5-31a) et (5-31b)

$$K_0 = \frac{2\pi C V_1}{\cos \alpha_1} = \frac{-2\pi C V_2}{\cos \alpha_2}$$

soit $V_1 \cos \alpha_2 = -V_2 \cos \alpha_1$

d'où, compte tenu de (5-30), l'équation aux déphasages :

$$\cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 = 0 \quad (5-33)$$

Cette équation est équivalente à

$$\cos \alpha_1 \sin \alpha_1 = -\cos \alpha_2 \sin \alpha_2$$

soit

$$\sin 2\alpha_1 = -\sin 2\alpha_2$$

donc

$$2\alpha_1 = -2\alpha_2 + k\pi$$

Comme ici :

$$0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi$$

et

$$0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$$

alors :

$$0 \leq u_1 + u_2 \leq 4\pi$$

$$0 \leq 2u_1 + 2u_2 \leq 8\pi$$

$$0 \leq k\pi \leq 8\pi$$

donc

$$0 \leq k \leq 8.$$

Cherchons à présent les équations aux amplitudes pour différentes valeurs de k .

1er cas : $k = 0$

Si $k = 0$ alors $u_1 = -u_2$, $\cos u_1 = \cos u_2$, $\sin u_1 = -\sin u_2$ et $V_1 = -V_2$; c'est impossible car V_1 et V_2 sont positifs, le cas $V_1 = V_2 = 0$ ne présentant aucun intérêt.

2ème cas : $k = 1$

Si $k = 1$ alors $u_1 + u_2 = \pi/2$, $\cos u_1 = \sin u_2$

$$\sin u_1 = \cos u_2$$

De (5-30) on tire $V_2 = V_1 \tan u_1$ d'où $\tan u_1 > 0$

. Mais de (5-31a) - (5-31b) :

$\frac{V_1}{\cos u_1} = -\frac{V_2}{\cos u_2}$, d'où $\tan u_1 < 0$, c'est impossible sauf si $u_1 = u_2 = 0$ mais alors on a $V_1 = -V_2$; or V_1 et V_2 sont positifs.

3ème cas : $k = 2$

Si $k = 2$ alors $u_1 + u_2 = \pi$; d'où

$$\sin u_1 = \sin u_2$$

$$\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2$$

$$V_1 = V_2 = V_0$$

De (5-31a) et (5-32a) on tire :

$$K_0^2 \cos^2 \alpha_1 = (2\pi c V_1)^2$$

$$K_0^2 \sin^2 \alpha_1 = 4\pi^2 V_1^2 \left(\frac{3\mathcal{H}_1}{8} V_1^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2$$

soit :

$$V_0^2 \left[4\pi^2 \left(\frac{3\mathcal{H}_1}{8} V_0^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2 + 4\pi^2 c^2 \right] = K_0^2 \quad (5-34a)$$

De même de (5-31b) et (5-32b) on obtient :

$$V_0^2 \left[4\pi^2 \left(\frac{3\mathcal{H}_2}{8} V_0^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right)^2 + 4\pi^2 c^2 \right] = K_0^2 \quad (5-34b)$$

car $V_1 = V_2 = V_0$.

(5-34a) et (5-34b) représentent les équations aux amplitudes des régimes synchronisés possibles.

Des équations (5-34a) et (5-34b) on obtient :

$$\begin{aligned} & V_0^2 \left[4\pi^2 \left(\frac{3\mathcal{H}_1}{8} V_0^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2 + 4\pi^2 c^2 \right] \\ &= V_0^2 \left[4\pi^2 \left(\frac{3\mathcal{H}_2}{8} V_0^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right)^2 + 4\pi^2 c^2 \right] \end{aligned}$$

D'où

$$V_0 = V_1 = V_2 = 0 \text{ solution triviale} \quad (5-35a)$$

et le carré de l'amplitude de synchronisation V_0 est donné par :

$$V_0^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right) , \quad \gamma_2 \neq -\gamma_1 \quad (5-35b)$$

et/ou

$$V_0^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) , \quad \gamma_2 \neq \gamma_1 \quad (5-35c)$$

L'équation (5-35b) admet une solution si :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 < 0 \end{cases} \quad (5-36a)$$

De même (5-35c) admet une solution si :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 < 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 < 0 \end{cases} \quad (5-36b)$$

Si les conditions (5-36a) et (5-36b) sont simultanément satisfaites, il existe deux valeurs possibles de V_0 données par (5-35b) et (5-35c).

Si l'une ou l'autre des conditions (5-36a) et (5-36b) est vérifiée, il n'existe qu'une seule valeur de V_0 donnée soit par (5-35b) soit par (5-35c). Nous étudions ci-dessous les éventualités où (5-36a) et (5-36b) sont simultanément satisfaites.

$$\text{Cas où } \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 > 0 \end{cases}$$

Dans ces conditions les amplitudes sont données par

$$V_e = e \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-37a)$$

$$V_e = e \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\delta_1 - \delta_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-37b)$$

$$K_e = V_e \left[4\pi^2 \left(\frac{3\delta_1}{8} V_e^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2 + 4\pi^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-37c)$$

$$K_e = V_e \left[4\pi^2 \left(\frac{3\delta_2}{8} V_e^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right)^2 + 4\pi^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-37d)$$

$$\mu_{1e} = \text{Arc cos} \left(\frac{2\pi c V_e}{K_e} \right) \quad (5-37e)$$

$$\begin{aligned} \mu_{2e} &= \pi - \mu_{1e} \quad \text{car } \mu_1 + \mu_2 = \pi \\ &= \text{Arc cos} \left(-\frac{2\pi c V_e}{K_e} \right) \end{aligned} \quad (5-37f)$$

Cas où $\begin{cases} -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0 \\ \delta_1 + \delta_2 > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 < 0 \\ \delta_1 - \delta_2 < 0 \end{cases}$

Dans ces conditions, V_e , K_e , μ_1 et μ_2 sont aussi données par (5-37a - b - c - d - e - f). Il en est de même des cas où :

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < 0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 < 0 \\ \delta_1 - \delta_2 > 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 < 0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 < 0 \\ \delta_1 - \delta_2 < 0 \end{cases}$$

RESUME

Dans l'une ou l'autre des éventualités ci-dessus les points de synchronisation ont pour coordonnées :

$$V_0 = 0 \quad \text{solution triviale}$$

$$V_0 = e^{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right]^{1/2}}$$

$$V_0 = e^{\left[\frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\beta_1 - \beta_2} \right) \right]^{1/2}} ; \quad |\beta_1| \neq |\beta_2|$$

$$K_0 = V_0 \left[4\pi^2 \left(\frac{3\beta_1}{8} V_0^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \right)^2 + 4\pi^2 C^2 \right]^{-1/2}$$

$$K_0 = V_0 \left[4\pi^2 \left(\frac{3\beta_2}{8} V_0^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right)^2 + 4\pi^2 C^2 \right]^{-1/2}$$

$$\theta_{10} = \text{Arc cos} \left(\frac{2\pi C V_0}{K_0} \right)$$

$$\theta_{20} = \pi - \theta_{10} \quad \text{car } \theta_1 + \theta_2 = \pi$$

$$= \text{Arc cos} \left(-\frac{2\pi C V_0}{K_0} \right)$$

Dans le cas où l'une des conditions (5-36a) est satisfaite et aucune des conditions (5-36b) n'est vérifiée on a alors :

$$V_0 = 2 \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-38a)$$

et les expressions de K_0 , μ_0 , μ_0 sont données par (5-37c - d - e - f).

De même si l'une ou l'autre des conditions (5-36b) est satisfaite et aucune des conditions (5-36a) ne l'est on a alors :

$$V_0 = 2 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-38b)$$

les expressions de K_0 , μ_0 , μ_0 étant toujours données par (5-37c - d - e - f).

4ème cas : $k = 3$

$$\text{Si } k=3 \text{ alors } \mu_1 + \mu_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ et } \cos \mu_1 = -\sin \mu_2 \\ \sin \mu_1 = -\cos \mu_2$$

$$\text{De (5-31a) - (5-31b) on tire : } -V_1 \sin \mu_1 = V_2 \sin \mu_2 ;$$

ce qui est impossible compte tenu de (5-30) sauf si $V_1 = V_2 = 0$.

5ème cas : $k = 4$

$$\text{Si } k=4 \text{ alors } \mu_1 + \mu_2 = 2\pi \text{ et}$$

$\cos \mu_1 = \cos \mu_2$; $\sin \mu_1 = -\sin \mu_2$. C'est le cas $k=0$ déjà étudié.

6ème cas : $k = 5$

$$\text{Si } k=5 \text{ alors } \mu_1 + \mu_2 = \frac{5\pi}{2} \text{ et } \cos \mu_1 = \sin \mu_2 ;$$

$\sin \mu_1 = \cos \mu_2$; c'est le cas $k=1$ déjà étudié.

7ème cas : $k = 6$

Si $k = 6$ alors $u_1 + u_2 = 3\pi$ et $\sin u_1 = \sin u_2$,
 $\cos u_1 = -\cos u_2$, et $V_1 = V_2$; c'est le cas où $k = 2$
 déjà étudié et qui conduit aux équations aux amplitudes (5-34a) - (5-34b) dont
 les solutions ont été étudiées ci-dessus :

8ème cas : $k = 7$

Si $k = 7$ alors $u_1 + u_2 = \frac{7\pi}{2}$; ce qui correspond au
 cas $k = 3$.

9ème cas : $k = 8$

Si $k = 8$ alors $u_1 + u_2 = 4\pi$. Ce cas équivaut aux cas
 $k = 0; 4$.

ETUDE DE LA STABILITE

Nous étudions la stabilité de chaque oscillateur du système au
 voisinage des points de synchronisation car ce système peut être globalement
 stable ou non.

On dira que le système est globalement stable si les conditions de
 stabilité de l'un et l'autre des éléments du système sont simultanément
 vérifiées. Si l'un des éléments est stable et l'autre ne l'est pas; on dira
 que le système est non stable.

Les équations associées au système (5-25) sont :

$$\frac{du_1}{dt} = A \bar{F}_1$$

$$\frac{dV_1}{dt} = A \bar{F}_2$$

(5-39)

$$\frac{d\mu_2}{dt} = \lambda \bar{F}_3 \quad (5-40)$$

$$\frac{d\nu_2}{dt} = \lambda \bar{F}_4$$

Cherchons les équations de stabilité des systèmes (5-39) et (5-40). Posons :

$$\mu_1 = \mu_0 + \xi_1$$

$$\nu_1 = \nu_0 + \eta_1$$

$$\mu_2 = (\pi - \mu_0) + \xi_2$$

$$\nu_2 = \nu_0 + \eta_2$$

donc au second ordre près en ξ_1 et η_1 et ξ_2 et η_2 on a :

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda \left[\xi_1 \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \mu_1} (\mu_0, \nu_0) + \eta_1 \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \nu_1} (\mu_0, \nu_0) \right] \quad (5-41)$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda \left[\xi_1 \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \mu_1} (\mu_0, \nu_0) + \eta_1 \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \nu_1} (\mu_0, \nu_0) \right]$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \lambda \left[\xi_2 \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \mu_2} (\pi - \mu_0, \nu_0) + \eta_2 \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial \nu_2} (\pi - \mu_0, \nu_0) \right] \quad (5-42)$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = \lambda \left[\xi_2 \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \mu_2} (\pi - \mu_0, \nu_0) + \eta_2 \frac{\partial \bar{F}_4}{\partial \nu_2} (\pi - \mu_0, \nu_0) \right]$$

Etudions le système (5-41), l'étude de (5-42) se fait de la même manière. Nous poserons par la suite :

$$a = \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(u_0, v_0) \quad ; \quad b = \frac{\partial F_1}{\partial v_1}(u_0, v_0)$$

$$a' = \frac{\partial F_2}{\partial u_1}(u_0, v_0) \quad ; \quad b' = \frac{\partial F_2}{\partial v_1}(u_0, v_0)$$

Nous cherchons une solution du système (5-41) sous la forme

$$x_1 = A e^{r\lambda t}, \quad y_1 = B e^{r\lambda t}.$$

Le système donnant A et B est :

$$\begin{aligned} (r-a)A - bB &= 0 \\ -a'A - (r-b')B &= 0 \end{aligned} \tag{5-43}$$

Pour avoir d'autres solutions que la solution triviale $A=0, B=0$; nous devons poser le déterminant du système (5-42) identiquement nul. D'où l'équation de stabilité :

$$r^2 - (a+b')r + ab' - a'b = 0 \tag{5-44}$$

que l'on appelle aussi équation caractéristique.

Les conditions de stabilité sont :

$$S_1 = (a+b') < 0$$

$$P_1 = ab' - a'b > 0 \tag{5-45}$$

Calculons S et P

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} = -h \frac{\cos u_1}{V_1} \quad ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial V_1} = h \frac{\sin u_1}{V_1^2} + 2\alpha_1 V_1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -h \sin u_1 \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial V_1} = -c$$

avec $\alpha_1 = \frac{3\chi_1}{8} \quad h = \frac{Kc}{2\pi}$

Donc au point de synchronisation

$$S_1 = a + b' = -h \frac{\cos u_1}{V_1} - c$$

où $h = \frac{Kc}{2\pi}$

d'où en tenant compte des équations de synchronisation :

$$S_1 = -2c < 0 \quad \text{car} \quad c > 0$$

la première condition de stabilité est donc toujours satisfaite.

Pour la deuxième condition de synchronisation et en posant :

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = V_1^2 \quad \text{en a :}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial V_1} - \frac{\partial F_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial V_1} \\ &= c h \frac{\cos u_1}{V_1} + h \sin u_1 \left(h \frac{\sin u_1}{V_1^2} + 2\alpha_1 V_1 \right) \\ &= 3\alpha_1^2 \beta^2 + 4\alpha_1 \beta_1 \beta + \beta_1^2 + c^2 \end{aligned} \quad (5-46a)$$

Considérant le système (5-42) et en posant :

$$\alpha_2 = \frac{3\chi_2}{8} \quad , \quad \beta_2 = \frac{\varepsilon_2}{2} \quad \text{et} \quad \beta = V_2^2$$

on obtient :

$$P_2 = 3\alpha_2^2 \beta^2 + 4\alpha_2 \beta_2 \beta + \beta_2^2 + c^2 \quad (5-46b)$$

Etudions à présent les signes de P_1 et P_2 pour déterminer la seconde condition de stabilité de chaque élément composant l'oscillateur considéré.

Les discriminants de P_1 et P_2 sont :

$$\Delta_1 = \alpha_1^2 (\beta_1^2 - 3c^2)$$

$$\Delta_2 = \alpha_2^2 (\beta_2^2 - 3c^2)$$

et nous avons les éventualités suivantes :

1°) Cas où $\beta_1^2 < 3c^2$ et $\beta_2^2 < 3c^2$

Si $\beta_1^2 < 3c^2$ et $\beta_2^2 < 3c^2$ nous avons $P_1 > c$ et $P_2 > c$

et les points de synchronisation $M_1(u_0, V_0, K_0)$ et $M_2(\pi - u_0, V_0, K_0)$ sont simultanément stables.

2°) Cas où $\beta_1^2 = 3c^2$ et $\beta_2^2 = 3c^2$

Si $\beta_1^2 = \beta_2^2 = 3c^2$ nous avons $P_1 > c$ et $P_2 > c$ et

les points de synchronisation correspondants sont simultanément stables. Il en

est de même si $\beta_1^2 < 3c^2$ et $\beta_2^2 = 3c^2$ ou $\beta_1^2 = 3c^2$ et $\beta_2^2 < 3c^2$

3°) Cas où $\beta_1^2 > 3c^2$ et $\beta_2^2 > 3c^2$

Si $\beta_1^2 > 3c^2$ et $\beta_2^2 > 3c^2$ alors :

$$P_1 = 3\alpha_1^2 (\beta - \beta_1') (\beta - \beta_1'')$$

avec
$$\beta_1' = \frac{-2\beta_1 - (\beta_1^2 - 3c^2)^{1/2}}{3\alpha_1}$$

$$\beta_1'' = \frac{-2\beta_1 + (\beta_1^2 - 3c^2)^{1/2}}{3\alpha_1}$$

et

$$P_2 = 3\alpha_2^2 (\beta - \beta_2')(\beta - \beta_2'')$$

avec

$$\beta_2' = \frac{-2\beta_2 - (\beta_2^2 - 3c^2)^{1/2}}{3\alpha_2}$$

$$\beta_2'' = \frac{-2\beta_2 + (\beta_2^2 - 3c^2)^{1/2}}{3\alpha_2}$$

Les racines β_1' et β_1'' sont de même signe car :

$$\beta_1' \cdot \beta_1'' = \frac{\beta_1^2 + c^2}{3\alpha_1^2}$$

Il en est de même pour β_2' et β_2'' .

Les solutions négatives ne conviennent pas car nous avons posé :

$$\beta = v_1^2 \text{ et } \beta = v_2^2.$$

Puisque :

$$\beta_1' + \beta_1'' = \frac{-4\beta_1}{3\alpha_1} \text{ et } \beta_2' + \beta_2'' = \frac{-4\beta_2}{3\alpha_2}$$

les racines sont positives si :

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} < 0 \quad (5-47)$$

et dans ces conditions β_1 et β_2 sont respectivement positifs sur les intervalles :

$$]0, \beta_1' [\cup]\beta_1'', +\infty [$$

et

$$]0, \beta_2' [\cup]\beta_2'', +\infty [$$

en supposant $\beta_1' < \beta_1''$ et $\beta_2' < \beta_2''$. Les points de synchronisation correspondants sont stables. P_1 et P_2 sont respectivement négatifs dans les intervalles

$$[\beta_1', \beta_1''] \quad \text{et} \quad [\beta_2', \beta_2''] .$$

Ces points de synchronisation correspondants sont instables. On rappelle que

$$\beta_1' = \frac{-2P_1 - (P_1^2 - 3C^2)^{1/2}}{3X_1}$$

$$\beta_1'' = \frac{-2P_1 + (P_1^2 - 3C^2)^{1/2}}{3X_1}$$

$$\beta_2' = \frac{-2P_2 - (P_2^2 - 3C^2)^{1/2}}{3X_2}$$

$$\beta_2'' = \frac{-2P_2 + (P_2^2 - 3C^2)^{1/2}}{3X_2}$$

ANNEXE

A) ORTHOGONALITE DES FAMILLES $(X_m); (Y_n); (\bar{\Phi}_p); (\Psi_q)$ [10]

Prenons par exemple la famille (X_m) : soit $i \neq j$, calculons

$\int_{-a}^{+a} X_i X_j dx$. En posant $\lambda_p = \alpha_p a$, en a :

$$\int_{-a}^{+a} X_i X_j dx = \frac{1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_i x \cosh \alpha_j x dx \quad (\text{I})$$

$$+ \frac{1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_i x \cosh \alpha_j x dx \quad (\text{II})$$

$$+ \frac{-1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_i x \cosh \alpha_j x dx \quad (\text{III})$$

$$+ \frac{-1}{\cosh \lambda_j \cosh \lambda_i} \int_{-a}^{+a} \cosh \alpha_j x \cosh \alpha_i x dx \quad (\text{IV})$$

soit :

$$\begin{aligned} (\text{I}) &= \frac{1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \left\{ \frac{1}{(\alpha_i + \alpha_j)} \left[\sinh \lambda_i \cosh \lambda_j + \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\alpha_i - \alpha_j)} \left[\sinh \lambda_i \cosh \lambda_j - \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right] \right\} \end{aligned}$$

$$(II) = \frac{1}{\cosh \lambda_i \cosh \lambda_j} \left\{ \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)} \left[\sinh \lambda_i \cosh \lambda_j + \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)} \left[\sinh \lambda_i \cosh \lambda_j - \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right] \right\}$$

$$(III) = \frac{-1}{\cosh \lambda_j \cosh \lambda_i} \left\{ \frac{2\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \sinh \lambda_i \cosh \lambda_j + \frac{2\lambda_j}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \cosh \lambda_i \sinh \lambda_j \right\}$$

$$(IV) = \frac{-1}{\cosh \lambda_j \cosh \lambda_i} \left\{ \frac{2\lambda_j}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \sinh \lambda_j \cosh \lambda_i + \frac{2\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \cosh \lambda_j \sinh \lambda_i \right\}$$

En considérant (I) et (II) :

$$(I) + (II) = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)} \left[(\tanh \lambda_i + \tanh \lambda_j) + (\tanh \lambda_j + \tanh \lambda_i) \right] \\ + \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)} \left[(\tanh \lambda_i + \tanh \lambda_j) - (\tanh \lambda_j + \tanh \lambda_i) \right]$$

En tenant compte de l'équation transcendante (2-8) (Chapitre II)

on a :

$$(I) + (II) = 0$$

De même en considérant (III) et (IV) :

$$(III) + (IV) = \frac{-2\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} (\tanh \lambda_i + \tanh \lambda_i) - \frac{2\lambda_i}{\lambda_j^2 + \lambda_i^2} (\tanh \lambda_j + \tanh \lambda_j)$$

et compte tenu de (2-8) on a :

$$(III) + (IV) = 0$$

D'où

$$\int_{-a}^{+a} \lambda_i \lambda_j \, dx = 0$$

Des calculs analogues en considérant la famille (λ_n) donnent :

$$\int_{-b}^{+b} \lambda_i \lambda_j \, dy = 0$$

Calculons maintenant :

$$\int_{-a}^{+a} \lambda_i^2(x) \, dx$$

$$\int_{-a}^{+a} \lambda_i^2(x) \, dx = \frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} \int_{-a}^{+a} \cosh^2 \lambda_i x \, dx \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} \int_{-a}^{+a} \cosh^2 \lambda_i x \, dx \quad (2)$$

$$+ \frac{-2}{\cosh \lambda_i \cdot \cosh \lambda_i} \int_{-a}^{+a} \cosh \lambda_i x \cosh \lambda_i x \, dx \quad (3)$$

$$(1) = \frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} \left(e + \frac{1}{\alpha_i} \sinh \lambda_i \cosh \lambda_i \right)$$

$$(2) = \frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} \left(e + \frac{1}{\alpha_i} \sinh \lambda_i \cosh \lambda_i \right)$$

$$(3) = \frac{-2}{\alpha_i \cosh \lambda_i \cosh \lambda_i} \left(\sinh \lambda_i \cosh \lambda_i + \cosh \lambda_i \sinh \lambda_i \right)$$

$$(1) + (2) = \frac{e}{\cosh^2 \lambda_i} + \frac{e}{\cosh^2 \lambda_i} + \frac{1}{\alpha_i} (\tanh \lambda_i + \tanh \lambda_i)$$

$$= \frac{e}{\cosh^2 \lambda_i} + \frac{e}{\cosh^2 \lambda_i}$$

$$(3) = \frac{-2}{\alpha_i} (\tanh \lambda_i + \tanh \lambda_i) = e \text{ d'après (2-8)}$$

Or $\frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} = 1 - \tanh^2 \lambda_i$; $\frac{1}{\cosh^2 \lambda_i} = 1 + \tanh^2 \lambda_i$

donc

$$(1) + (2) = 2e + e (\tanh^2 \lambda_i - \tanh^2 \lambda_i) = 2e$$

même calcul pour la famille $Y_n(y)$. Le calcul pour Φ_q et Ψ_q est

élémentaire. Donc :

$$\int_{-a}^{+a} X_i^2 dx = 2a \quad ; \quad \int_{-b}^{+b} Y_j^2 dy = 2b$$

$$\int_{-a}^{+a} \bar{\Phi}_p^2(x) dx = a \quad , \quad \int_{-b}^{+b} \bar{\Psi}_q^2(y) dy = b \quad (\text{A-I-1})$$

$$\int_{-a}^{+a} X_i X_j = \int_{-b}^{+b} Y_i Y_j = \int_{-a}^{+a} \bar{\Phi}_i \bar{\Phi}_j = \int_{-b}^{+b} \bar{\Psi}_i \bar{\Psi}_j = 0 \quad (\text{A-I-2})$$

si $i \neq j$

B) EXPRESSION DES K_i ET L_i [8, 9, 10]

Dans ce paragraphe nous nous proposons de déterminer les coefficients K_i et L_i intervenant dans l'écriture des fonctions :

$$X_i'' ; \bar{\Phi}_p' \bar{\Phi}_r' ; \bar{\Phi}_p'' \bar{\Phi}_r'' \quad \text{dans la base } (X_m)_{1 \leq m \leq +\infty}$$

$$Y_j'' ; \bar{\Psi}_q' \bar{\Psi}_s' ; \bar{\Psi}_q'' \bar{\Psi}_s'' \quad \text{dans la base } (Y_n)_{1 \leq n \leq +\infty}$$

$$X_m' \bar{\Phi}_r' ; X_m'' \bar{\Phi}_r'' ; X_m \bar{\Phi}_r'' \quad \text{dans la base } (\bar{\Phi}_u)_{1 \leq u \leq +\infty}$$

$$Y_n' \bar{\Psi}_s' ; Y_n'' \bar{\Psi}_s'' ; Y_n \bar{\Psi}_s'' \quad \text{dans la base } (\bar{\Psi}_v)_{1 \leq v \leq +\infty}$$

Ces coefficients sont déterminés en utilisant l'orthogonalité des fonctions X_m , Y_n , $\bar{\Phi}_r$, et $\bar{\Psi}_q$.

$$X_i'' = \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sum_j K_1^{ji} X_j$$

donc

$$X_i'' X_m = \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sum_j K_1^{ji} X_j X_m$$

et

$$\int_{-a}^{+a} X_i'' X_m dx = \frac{\lambda_i^2}{a^2} \sum_j K_1^{ji} \int_{-a}^{+a} X_j X_m dx$$

or

$$\int_{-a}^{+a} X_j X_m dx = 0 \quad \text{d'après (A-I-2) si } m \neq j$$

et

$$\int_{-a}^{+a} X_j X_m dx = 2a \quad \text{si } m = j \quad \text{d'après (A-I-1)}$$

donc

$$\int_{-a}^{+a} X_i'' X_m dx = \frac{\lambda_i^2}{a^2} K_1^{mi} 2a$$

et finalement

$$K_1^{mi} = \frac{a}{2 \lambda_i^2} \int_{-a}^{+a} X_i'' X_m dx$$

Des calculs analogues donnent :

$$K_2^{mpr} = \frac{2a}{pr \pi^2} \int_{-a}^{+a} \bar{\Phi}_r' \bar{\Phi}_r' X_m dx$$

$$K_3^{mpr} = \frac{2a}{p^2 \pi^2} \int_{-a}^{+a} \bar{\Phi}_r'' \bar{\Phi}_r X_m dx$$

$$L_3^{nqs} = \frac{2b}{s^2 \pi^2} \int_{-b}^{+b} \psi_q \psi_s'' \psi_n dy$$

$$L_4^{vns} = \frac{2b}{\pi s \lambda_n} \int_{-b}^{+b} \psi_n' \psi_s' \psi_v dy$$

$$L_5^{vns} = \frac{b}{\lambda_n^2} \int_{-a}^{+b} \psi_n'' \psi_s \psi_v dy$$

$$L_6^{vns} = \frac{2b}{s^2 \pi^2} \int_{-b}^{+b} \psi_n \psi_s'' \psi_v dy.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUVAUT G. et LIONS J.L., "Les inégalités en Mécanique et en Physique", Dunod, Paris 1972.
- [2] DUVAUT G. et LIONS J.L., "Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques" I) : "Le cas stationnaire", J. de Mécanique, vol. 13, n° 1, Mars 1974, pp. 51-74; II) : II) : "Le cas d'évolution", J. de Mécanique, vol. 13, n° 1, Juin 1974, pp. 245-266.
- [3] HAAG J., "Les mouvements vibratoires", Tome I et II, Paris Press universitaires 1952-1955; Collection Euclide.
- [4] LANDAU L. et LIFSCHITZ E., "Théorie de l'élasticité", T. VII, Edition MIR Moscou 1967.
- [5] TIMOSHENKO S. et WOINOWSKY-KRIEGER S., "Theory of plates and shells", International Student Edition, Mc Graw-Hill, 1970.
- [6] TIMOSHENKO S. et GERE J., "Théorie de la stabilité élastique", Deuxième édition, Paris Dunod 1966.
- [7] LLOYDS HAMILTON D., "Beams, Plates and Shelles", Mac Graw-Hill 1976.
- [8] OSTIGUY G.L., "Effects of aspect ratio on parametric response of nonlinear rectangular plates - analysis and experiment. Ph. D. Dissertation, Syracuse University, Syracuse, N.Y., Oct. 1976.

- [9] OSTIGUY G. et NGUYEN H., "Stabilité dynamique et résonance des plaques rectangulaires"; *Mécanique Matériaux Electricité*, n° 394-395 Oct/Nov. 1982.
- [10] ENNASSEF M., "Vibrations des plaques excitées par des percussions périodiques", Thèse 3ème cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I, Nov. 1984).
- [11] BASSILY S.F. and DICKINSON S.M., "Buckling and lateral vibration of rectangular plates subject to inplane Loads - A Ritz approach", *Journal of Sound and Vibration* (1972) 24 (2), p. 219-239.
- [12] BASSILY S.F., "The plane stress problem for rectangular regions treated using functions related to beam flexure"; *Int. J. Mech. Sci.* vol. 19, pp. 639-650, Pergamon Press 1977, Printed in Great Britain.
- [13] LEISSA A.W., "The force vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and vibration* (1973) 31 (3) p. 257-293.
- [14] SUNDARA R.I. and RAMAN P.V., "Free vibration of rectangular plates of arbitrary thickness with one or more edges clamped"; *Journal of Sound an vibration* (1980) 71 (4), 463-472.
- [15] FAURE R., "Percussions en mécanique non linéaire sur certaines solutions périodiques de phénomènes non linéaires excités par des percussions"; *Mécanique Matériaux Electricité* n° 394-395, Oct./Nov. 1982 pp. 486-492.

- [16] FAURE R., "Etude de problèmes non linéaire avec application à la Mécanique : cas des vibrations des plaques excitées paramétriquement par des percussions périodiques dans le cas de grandes déformations"; Mécanique Matériaux Electricité n° 404-Mars/Avril 1984, pp. 125-128.
- [17] FAURE R., "Application des percussions en mécanique non linéaire. Réalisation par percussions de liaisons spatiales instantanées avec synchronisation entre deux oscillateurs non linéaires"; Publication de l'U.E.R. Maths. Pures et Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille I, mai 1982.
- [18] FAURE R., "Solutions périodiques de certains systèmes d'équations différentielles non linéaires dépendant d'un paramètre; Journ. de Math., tome XL.- Fasc. 3, 1961.
- [19] FAURE R., "Periodic and almost periodic percussions and nonlinear oscillations". The 9th International Conference on nonlinear oscillations KIEV 1981, édité en 1984.
- [20] R. FAURE, "Percussions et Distributions de Dirac en Mécanique non Linéaire. Interaction par choc entre systèmes et théories des percussions presque périodiques".
- [21] STOKER J.J., "Nonlinear Vibrations".
- [22] STOKER J.J., "Nonlinear elasticity".
- [23] SCHWARTZ L., "Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques".



MOTS CLES

- 1) EQUATIONS DE VON KARMAN.
- 2) VIBRATIONS DES PLAQUES.
- 3) PERCUSSIONS.
- 4) EXCITATION CONTINUE.
- 5) STABILITE.
- 6) SYNCHRONISATION.
- 7) OSCILLATEURS EN LIAISON PAR CHOCS.
- 8) REGIMES PERMANENTS.

RESUME

"La thèse porte sur les vibrations faites des plaques et les équations différentielles qui en décrivent les mouvements.

On étudie les cas suivants de système non linéaire :

- 1°) Excitation paramétrique percussionnelle et une excitation non linéaire directe.
- 2°) Mouvement avec liaison spatiale instantanée avec synchronisation du mouvement par des percussions.

Cas général : étude d'un cas particulier et détermination dans ce cas des régimes permanents".

ABSTRACT

"In this work we study the movements of the plates excited by continuous excitations and percussions. There are two parts :

- 1°) Parametric excitation by percussion and non linear excitation direct.
- 2°) Problem of and instantaneous liaison between two non linear oscillators by δ periodic percussion.

General case : Study of a particular case and determination in this case of the periodical oscillation".

