N° d'ordre : 1347

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3e CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

JARRAR Abderrahmane

SUR L'INFERENCE NON PARAMETRIQUE D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF NON LINEAIRE

Thèse non corrigée après avis du jury

Membres du Jury : P. JACOB, Président
D. BOSQ, Rapporteur
C. GOURIEROUX
A. BERLINET (Université de Grenoble I)
J.P. LECOUTRE (Université de Paris II)
} Examinateurs

Soutenue le 26 Juin 1986

Nous remercions tous les membres du Jury qui, à une période de l'année chargée par de nombreuses obligations, ont accepté la tâche supplémentaire de juger ce travail.

Monsieur le Professeur Pierre JACOB nous fait le grand honneur de présider le Jury de cette thèse. Nous tenons à lui exprimer notre respectueuse gratitude.

Nous tenons à exprimer notre profonde et très sincère reconnaissance à Monsieur le Professeur Denis BOSQ qui nous a proposé le sujet de cette thèse, qui a su nous initier à la recherche avec compétence et efficacité, et sans qui, finalement, ce travail ne serait.

Nos remerciements vont également à Monsieur le Professeur Christian GOURIEROUX qui a accepté de participer au Jury et dont les conseils nous ont été précieux.

Monsieur le Professeur Jean-Pierre LECOUTRE nous fait l'honneur de juger ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur Alain BERLINET a bien voulu faire partie de la Commission d'Examen. Nous lui adressons nos vifs remerciements.

Nous remercions enfin Arlette LENGAIGNE et toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse, pour la compétence et la gentillesse dont elles ont fait preuve.

P L A N

INTRODUCTION.-

L'analyse statistique d'une série chronologique observée comporte trois phases principales : la modélisation, l'inférence (estimation et tests) et la prévision.

Dans la méthode de Box et Jenkins, la modélisation s'effectue à l'aide d'un modèle linéaire (ARIMA). Cette méthode s'est révélée efficace dans de nombreuses situations concrètes, elle permet de faire des prévisions assez précises. Elle a donné lieu à un très grand nombre de publications dans les trente dernières années. Pour une étude détaillée nous renvoyons à C. Gouriéroux et A. Monfort [4] et [5]. Par ailleurs des études récentes ont montré que certaines séries observées se modélisent naturellement d'une façon non linéaire Howell Tong [27], donne en particulier l'exemple suivant : l'étude du niveau d'eau dans un canal sur la côte de Wellington en Nouvelle Zélande, Wittle en 1954 a montré le rapport entre les sommets et les oscillations de la densité spectrale estimée, dûe à un mécanisme non linéaire et il a donné une explication qualitative en utilisant le modèle :

$$L(X(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(t) \geq h \\ k & \text{si} \quad X(t) < h \end{cases}$$

où $X(t)$ représente le niveau d'eau à l'instant t, L est un opérateur différentiel linéaire et k est une constante qui explique le courant, quand $X(t)$ est inférieur à h où h est le niveau d'eau critique.

Parallèlement, l'estimation fonctionnelle se développe depuis 1956 [M. Rosenblatt].

Les premiers travaux traitaient l'estimation de la densité. Dans un deuxième temps certains auteurs ce sont intéressés à l'estimation de la régression parmi eux : D. Bosq [1], J.P. Lecoutre [2], G. Collomb [28] ...
Il était alors naturel de faire le lien entre le problème de la régression et les modèles non linéaires en analyse des séries chronologiques ;
P. Doukhan - M. Ghindes [17] A. Mokkadam (Comptes Rendus Acad. Sci. 301 (1985)) ont utilisé la méthode du noyau pour estimer le paramètre fonctionnel d'un processus autorégressif non linéaire d'ordre un.

Par ailleurs D. Bosq [3] a traité le même problème en utilisant la méthode du noyau conditionnel. Dans cette thèse nous continuons les recherches précédentes en utilisant un processus autorégressif non linéaire d'ordre k et nous posons le problème du choix entre le modèle linéaire et le modèle non linéaire.

Cette thèse se compose de trois parties :

La première contient l'étude probabiliste d'un processus autorégressif non linéaire d'ordre k, $(k \geq 1)$ de la forme :

$$X_{n+1} = \varphi(X_n , X_{n-1} , \dots, X_{n+1-k}) + \varepsilon_{n+1} , \quad n \geq 0$$

où X_n et ε_n sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^h$; pour démarrer la chaîne on considère les variables X_o , X_{-1} ,..., X_{1-k} supposées connues et indépendantes de (ε_n).

Les variables aléatoires ε_n sont i.i.d., avec une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une densité g. φ est une application mesurable surjective de $\mathbb{R}^{hk}$ dans $\mathbb{R}^h$.

Dans un premier temps par vectoralisation on se ramène à une chaîne de Markov d'ordre 1.

Posant $\quad Y_{n+1} = (X_{n+1}, X_n, \dots, X_{n+2-k}) \quad$ on a :

$$Y_{n+1} = \mathcal{V}(Y_n) + (\varepsilon_{n+1}, 0, \dots, 0), \quad \forall n \geq 0$$

avec $\mathcal{V}$ une application de $\mathbb{R}^{hk}$ dans $\mathbb{R}^{hk}$, définie par $\mathcal{V}(x) = (\psi(x), x_1, \dots, x_{k-1})$, pour tout $x = (x_1, \dots, x_k)$ élément de $\mathbb{R}^{hk}$.

Dans un deuxième temps on montre que sous les conditions : ψ différentiable, $||\psi||_\infty + ||D\psi||_\infty + E||\varepsilon_o|| < +\infty$, la chaîne est irréductible, récurrente, apériodique et géométriquement ergodique sur la tribu $\mathcal{C}$ formé par les cylindres de $\mathbb{R}^{hk}$. Sa probabilité invariante sur $\mathcal{C}$ est notée $\tilde{\pi}$.

Sur cette classe $\mathcal{C}$ on montre que la probabilité de transition $q(.,.)$ de la chaîne (Y_n) s'écrit sous la forme $q(y,x) = g(x-\psi(y))$, pour tout x élément de $\mathbb{R}^h$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^{hk}$, et sous l'hypothèse (X_n, X_{n+1}) converge en loi vers une variable aléatoire, on prolonge la probabilité invariante $\tilde{\pi}$ en une probabilité invariante sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$ notée π, ce qui nous permet d'avoir une relation avec la loi limite de (X_n, X_{n+1}). Cette relation est écrite comme suit :

$$A(y,z) = \pi(y)\, q(y,z), \quad y \in \mathbb{R}^{hk} \text{ et } z \in \mathbb{R}^h .$$

On propose ensuite des estimateurs de $\pi(.)$, $A(.,.)$ et de $B(.) = \pi(.)\,\psi(.)$ par la méthode du noyau, et on en déduit des estimateurs de $q(.,.)$, $\psi(.)$ et de g. Nous déterminons alors des majorations des risques quadratiques intégrés d'ordre un et deux correspondant à chaque estimateur.

Dans la deuxième partie, on considère un modèle statique reliant deux processus X et Y de telle sorte que $Y_n = \psi(X_n) + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$

où (ε_n) est une suite de variable aléatoire i.i.d. dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, de densité notée g ; on suppose que celle-ci atteint son unique maximum à l'origine.

ε_n est indépendante de X_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (X_n,Y_n) est une suite de variable aléatoire i.i.d.. On suppose que sa loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, de densité $f(.,.)$. φ est une fonction continue. On retient comme estimateur de $f(.,.)$ celui donné par la méthode du noyau :

$$\hat{f}_n(x,y) = \frac{1}{n\,h_n^2} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) K\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right) \quad ; \quad \forall x\ ,\ y \in \mathbb{R}$$

où h_n est une suite décroissante vers zéro et K est une fonction réelle mesurable positive symétrique, dérivable et d'intégrale 1.

On en déduit un estimateur de $\varphi(t)$ en utilisant la méthode du noyau conditionnel.

L'estimateur $\hat{\varphi}_n(t)$ est une fonction mesurable vérifiant :

$$\hat{f}_n(t, \hat{\varphi}_n(t)) = \sup_{|y| \leq A_n} \hat{f}_n(t,y)$$

où A_n tend vers $+\infty$, avec n.

On s'est intéressé au test de linéarité. L'hypothèse nulle est : il existe un réel a tel que $\varphi(t) = at$, $\forall t \in I$ compact de $\mathbb{R}$, et l'alternative est : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists t \in I$ $\varphi(t) \neq at$.

L'idée générale est de trouver la loi limite de

$$T_n = \sup_{t\in I} (n\,h_n^4)^{1/2} \frac{|\hat{\varphi}_n(t) - \varphi(t)|}{\left[\int K^2(x)\,dx \int K'^2(x)\,dx\right]^{1/2}} \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\varphi}_n(t))\right|$$

sous l'hypothèse nulle du test.

Pour cela on utilise une approximation du processus T_n par un processus gaussien stationnaire, puis on applique un théorème de Bickel-Rosenblatt pour en déduire la loi limite de T_n. Cette loi dépend du paramètre a on peut alors construire une région de concentration au niveau $1-\alpha$ pour l'estimateur $\hat{\psi}_n(t)$.

Pour en déduire une statistique de test de l'hypothèse de linéarité, il nous faudra distinguer le cas où a est connu de celui où il est inconnu.

$T_n^W = (2 \operatorname{Log} \frac{1}{h_n})^{1/2} (T_n - d_n(a))$ suit asymptotiquement la loi de Gumbel (notée G) sous H_o, où $d_n(a)$ est une constante qui dépend de n et de a.

Donc le test de linéarité aura pour région critique asymptotique : $\{T_n^W \geq G_{1-\alpha}\}$.

Dans la troisième partie on considère le processus donné dans la deuxième partie, et en utilisant une idée d'Eddy [25] , on montre que pour tout $t \in I$, $(n\, h_n^4)^{1/2} (\hat{\psi}_n(t) - \psi(t))$ converge en loi vers une loi normale, cette démonstration est tout à fait différente de celle qui a été donnée dans la partie 2.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LES CHAINES DE MARKOV

De nombreux phénomènes aléatoires ont la propriété suivante : la connaissance de l'état du phénomène à un instant donné apporte sur le futur autant d'information que la connaissance de tout son passé. Ce sont les processus de Markov, appelés chaînes de Markov si le temps est discret.

Pour certaines chaînes qui reviennent infiniment souvent et assez vite en un point, on obtient une loi des grands nombres et un théorème de limite centrale.

I - PRELIMINAIRES - NOTATIONS.-

Nous commençons par rappeler quelques résultats de la théorie des chaînes de Markov, qui a été l'objet de nombreux travaux ([20] ; [19] ; [10] ; [11] ; [24] ... etc). Un espace de probabilité (Ω,G,P) est partout donné. Soit (X,X') une fonction mesurable à valeurs dans $(E \times E', \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$, X ayant la loi F_X. On peut, pour tout Γ élément de $\mathcal{E}'$, définir, à une F_X-équivalence près, la fonction $E(1_\Gamma(X') \mid X = .)$ que l'on appelle aussi probabilité de $(X' \in \Gamma)$ conditionnelle à $(X = .)$ et que l'on note $P(X' \in \Gamma | X = .)$.

Pour (Γ_n) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{E}'$, on a,

$$F_X - \text{p.s.} \quad \sum_n P(X' \in \Gamma_n \mid X = .) = P(X' \in \bigcup_n \Gamma_n \mid X = .).$$

Définition I.1.1.- On appelle transition de $(E_1, \mathcal{E}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{E}_2)$ une fonction de $E_1 \times \mathcal{E}_2$ dans $[0,1]$, $(x,\Gamma) \longrightarrow P(x, \Gamma)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

a) Pour tout $\Gamma \in \mathcal{E}_2$, $P(.,\Gamma)$ est une variable aléatoire sur $(E_1, \mathcal{E}_1)$.

b) Pour tout $x \in E_1$, $P(x,.)$ est une probabilité sur $(E_2, \mathcal{E}_2)$.

Remarque : Une probabilité conditionnelle est une transition. Soit f une variable aléatoire sur $(E_2, \mathcal{E}_2)$ positive (ou négative ou bornée). Alors, pour tout x élément de E_1, on pose :

$$Pf(x) = \int P(x,dy)\ f(y)$$

la fonction Pf ainsi définie est une variable aléatoire sur $(E_1, \mathcal{E}_1)$ (cf. [8]).

A P, on peut aussi associer la transition $\tilde{P}$ de $(E_1, \mathcal{E}_1)$ dans $(E_1, \mathcal{E}_1) \times (E_2, \mathcal{E}_2)$ définie par $\tilde{P}(x,.) = \delta_x \otimes P(x,.)$; pour une variable aléatoire h sur $(E_1, \mathcal{E}_1) \times (E_2, \mathcal{E}_2)$ positive, on a :

$$\tilde{P}h(x) = \int P(x,dy)\ h(x,y)$$

et confondant P et $\tilde{P}$ on note cette fonction Ph.

Enfin la composition des transitions est fort utile : pour P_1 une transition de $(E_1, \mathcal{E}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{E}_2)$ et P_2 une transition de $(E_2, \mathcal{E}_2)$ dans $(E_3, \mathcal{E}_3)$ on définit les transitions $P_1\ P_2$ de $(E_1, \mathcal{E}_1)$ dans $(E_3, \mathcal{E}_3)$ et $P_1 \otimes P_2$ de $(E_1, \mathcal{E}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{E}_2) \otimes (E_3, \mathcal{E}_3)$

Par :
$$P_1\ P_2(x,\Gamma) = \int P_1(x_1,dx_2)\ P_2(x_2,\Gamma)$$
$$P_1 \otimes P_2(x,\Gamma') = \int P_1(x_1,dx_2) \int P_2(x_2,dx_3)\ 1_{\Gamma'}(x_2,x_3)$$
$$(P_1 \otimes P_2) = P_1\ \tilde{P}_2) \quad .$$

Pour une transition P de $(E,\mathcal{E})$ dans $(E,\mathcal{E})$, on note P^n et $P^{\otimes n}$ les produits de n transitions P.

On note enfin $U(x,.) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,.)$

où $$P^n(x,.) = \int P^{n-1}(x,dy)\; P(y,.) \;\; ; \;\; \forall x \in E \; .$$

II - CHAINE DE MARKOV.-

Considérons la transmission d'un message "oui" ou "non" dans une population. On suppose que chaque personne transmet le message reçu avec la probabilité $1-p$ et le contraire avec la probabilité p.

Soit X_n le message transmis par le n^e individu.

On a :

$$P(X_n = \text{oui} \mid X_{n-1} = \text{oui}) = P(X_n = \text{non} \mid X_{n-1} = \text{non}) = 1 - p$$

$$P(X_n = \text{oui} \mid X_{n-1} = \text{non}) = P(X_n = \text{non} \mid X_{n-1} = \text{oui}) = p \; .$$

Ces quatre nombres déterminent une probabilité de transition P de $\{\text{oui},\text{non}\}$ dans lui-même, qui permet d'étudier la transmission du message, si on connaît le message initial. Une caractéristique est que seul le message transmis X_{n-1} influence X_n, il ne sert à rien de connaître toute l'histoire du message.

Définition I.II.2.- On appelle chaîne de Markov sur (Ω,G,P) une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ d'observations à valeurs dans un espace $(E,\mathcal{E})$ d'états, telle que, pour tout Γ élément de $\mathcal{E}$ et $n \geq 0$

$$P(X_{n+1} \in \Gamma \mid X_o, \ldots, X_n) = P(X_{n+1} \in \Gamma \mid X_n) \; .$$

Définition I.II.3.- Soit P une transition de $(E,\mathcal{E})$ dans $(E,\mathcal{E})$, et ν une probabilité sur $(E,\mathcal{E})$. La chaîne de Markov précédente est une chaîne de Markov homogène de loi initiale ν et de transition P si on a :

$$P(X_o \in \Gamma) = \nu(\Gamma)$$

$$P(X_{n+1} \in \Gamma \mid X_o ,\dots, X_n) = P(X_n,\Gamma) \quad .$$

Remarque : Soit (X_n) une chaîne de Markov sur (Ω,G,P) à valeurs dans un espace $(E,\mathcal{E})$ d'états, alors pour tout $\Gamma_1 , \Gamma_2 ,\dots, \Gamma_p$ élément de $\mathcal{E}$ et $n \geq 0$ on a :

$$P(X_{n+1} \in \Gamma_1 , X_{n+2} \in \Gamma_2 ,\dots, X_{n+p} \in \Gamma_p \mid X_o , X_1 ,\dots, X_n)$$
$$= P(X_{n+1} \in \Gamma_1 ,\dots, X_{n+p} \in \Gamma_p \mid X_n) \quad .$$

Propriété : Soit f une variable aléatoire positive (ou bornée) sur $(E,\mathcal{E})^{p+1}$. Dans la définition I.II.3. :

$$E\left[f(X_n, X_{n+1} ,\dots, X_{n+p}) \mid X_o, X_1,\dots,X_n\right] =$$

$$= \int P(X_n, dx_{n+1}) \int P(x_{n+1}, dx_{n+2}) \dots \int P(x_{n+p-1} , dx_{n+p})\, f(X_n, x_{n+1},\dots,x_{n+p})$$

$$= \int P^{\otimes p}(X_n, dx_{n+1} ,\dots, dx_{n+p})\, f(X_n, x_{n+1} ,\dots, x_{n+p}) = E\left[f(X_n ,\dots, X_{n+p}) \mid X_n\right].$$

Donc la loi de $(X_{n+1} ,\dots, X_{n+p})$ conditionnelle à $(X_o ,\dots, X_n)$ est $P^{\otimes p}(X_n,.)$: c'est aussi sa loi conditionnelle à X_n.

La loi de X_{n+p} conditionnelle à $(X_o,\dots,X_n)$ (ou à X_n) est $P^p(X_n,.)$.

Exemple 1 : Considérons une chaîne de Markov (X_n) sur $E = \{1,2,\ldots,k\}$, espace fini, une transition est alors définie par une matrice $k \times k$, $P = \{P(i,j)\}_{1 \leq i,j \leq k}$ où $\forall i$, $\{P(i,.)\}$ est une probabilité c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{k} P(i,j) = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq P(i,j) \ , \ \forall j \ .$$

Une telle matrice est dite stochastique. On vérifie facilement que $\{P^n(i,j)\}_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$ est la matrice P^n, puissance n^e de P.

Pour $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$, on obtient par récurrence :

$$2P^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (1-2p)^n \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Alors, pour $0 < p < 1$, P^n tend, si n tend vers ∞, vers $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Pour n assez grand "oui" et "non" ont presque la même probabilité d'être transmis.

III - FONCTIONS EXCESSIVES ET INVARIANTES.-

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur (Ω,G,P) et à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$.

Sur $\Omega = E^N$, l'opérateur de transition θ est défini par $\theta(\omega) = \{X_{n+1}(\omega)\}_{n \geq 0}$, autrement dit $X_n \circ \theta = X_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, son $p^{\text{ième}}$ itéré est noté $\theta_p : X_n \circ \theta_p = X_{n+p}$.

Définition I.III.3.- Une fonction invariante (resp. excessive) pour P est une variable aléatoire positive h sur E, satisfaisant $Ph = h$ (resp. $Ph \leq h$).

Si h est invariante (resp. excessive) ; $(h(X_n))$ est une F-martingale (resp. surmartingale) sur (Ω, G, P_ν), quel que soit ν, loi initiale.

En effet :

$$E_\nu(h(X_{n+1}) \mid X_n) = \int_\Omega h(X_{n+1})\, P_\nu^{X_n}(d\omega)$$

$$= Ph(X_n) = (\text{resp} \leq)\ h(X_n) \quad .$$

Cas particulier :

Soit $\Gamma \in \mathcal{E}$. Considérons T_Γ et R_Γ, le temps d'entrée et l'ensemble de récurrence en Γ, définis par :

$$T_\Gamma = \inf\{n \ ; \ n > 0 \ , \ X_n \in \Gamma\} \quad (\text{par convention}$$

$$\inf\{n : n \in \phi\} = +\infty) \quad .$$

$$R_\Gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \{X_n \in \Gamma\} = \{\omega : \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{(X_n \in \Gamma)}(\omega) = \infty\}$$

la fonction $x \longmapsto P_x(T_\Gamma < \infty)$ est excessive

et la fonction $x \longmapsto P_x(R_\Gamma)$ est invariante .

IV - ETAT RECURRENT OU TRANSIENT.-

Supposons ici que $\mathcal{E}$ contient $\{x\}$ pour tout $x \in E$.

On note $P(y,x) = P(y,\{x\})$ et $U(y,x) = U(y,\{x\})$. Le $p^{\text{ième}}$ instant de passage de la chaîne dans $\Gamma \in \mathcal{E}$ et le temps d'arrêt T_Γ^p défini par les

les relations de récurrence

$$T_\Gamma^o = 0 \quad , \quad T_\Gamma^1 = \inf \{n \ ; \ n > 0 \ , \ X_n \in \Gamma\} = T_\Gamma$$

$$T_\Gamma^{p+1} = \inf \{n \ ; \ n > T_\Gamma^p \ , \ X_n \in \Gamma\}$$

pour $x \in E$, notons T_x^p pour $T_{\{x\}}^p$ et R_x pour $R_{\{x\}}$.

Théorème I.IV.4.- Soit $x \in E$. Il n'y a que deux possibilités :

a) $P_x(T_x < \infty) = 1$. Alors $P_x(R_x) = 1$; $U(x,x) = \infty$

b) $P_x(T_x < \infty) < 1$. Alors $P_x(R_x) = 0$; $U(x,x) < \infty$.

Dans le premier cas on dit que x est récurrent et dans le second qu'il est transient.

Pour la démonstration nous renvoyons à [9].

Définition I.IV.5.- Soit π une mesure sur $(E,\mathcal{E})$. Elle est invariante pour P si $\pi P = \pi$. Elle est excessive si $\pi P \leq \pi$ (c'est-à-dire $\forall A \in \mathcal{E}$ on a : $\pi P(A) \leq \pi(A)$).

Exemple 2.- Soit a un étant récurrent.

La mesure μ sur E , $\quad \Gamma \longrightarrow \mu(\Gamma) = Ea(\sum_{n=1}^{T_a} 1_{(X_n \in \Gamma)})$,

est σ-finie et invariante pour P .

En effet :

Considérons un point c n'appartenant pas à E et "tuons" la chaîne à l'instant T_a : autrement dit,

Considérons $Y_n = X_n \ 1_{(n \leq T_a)} + c \ 1_{(n > T_a)}$; (Y_n) est une chaîne de Markov sur $E \cup \{c\}$, de transition $\tilde{P}$ avec $\tilde{P}(x,.) = P(x,.)$ pour $x \neq a$, $\tilde{P}(a,.) = \delta_c$.

Pour cette chaîne, a est transient, et tout point de E conduit à a. D'après la proposition 4.8.2. [9], E est limite croissante d'ensembles Γ_p de $\mathcal{E}$ tels que $\tilde{U}(.,\Gamma_p) = \sum_n \tilde{P}^n(.,\Gamma_p)$ soit fini. On a $\mu\{a\} = 1$, et pour $\Gamma = \Gamma_p - \{a\}$.

$$\mu(\Gamma) = E_a\left[1_{(T_\Gamma < T_a)} \tilde{U}(X_{T_\Gamma}, \Gamma)\right] < \infty \ . \quad \text{Donc } \mu \text{ est } \sigma\text{-finie} .$$

La mesure μ est invariante. En effet, soit Γ de μ-mesure finie :

$$\mu P(\Gamma) = \int P(y,\Gamma)\,\mu(dy) = E_a\left[\sum_{0 \leq n < T_a} P(X_n,\Gamma)\right]$$

$$= \sum_n E_a\left[P(X_n,\Gamma)\, 1_{(n<T_a)}\right] = \sum_n E_a\left[1_{(n<T_a)} P_{X_n}(X_1 \in \Gamma)\right]$$

$$= \sum_n E_a\left[1_{(n<T_a)} 1_{(X_{n+1}\in\Gamma)}\right]$$

$$= \sum_n E_a\left[(1_{(n+1<T_a)} + 1_{(T_a=n+1)})\, 1_{(X_{n+1}\in\Gamma)}\right]$$

$$= P_a(X_{T_a}\in\Gamma) - P_a(X_o\in\Gamma) + E_a\left[\sum_n 1_{(n<T_a)} 1_\Gamma(X_n)\right]$$

$$= \mu(\Gamma) + 1_\Gamma(a) - 1_\Gamma(a) = \mu(\Gamma) \ .$$

Définition I.IV.6.- Soient (X_n) une chaîne de Markov définie sur (Ω,G,P) à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$, et ν une mesure σ-finie sur $(E,\mathcal{E})$, on dit que :

1) La chaîne (X_n) est ν-irréductible sur $(E,\mathcal{E})$ si :

$$\forall x \in E \ , \ \forall B \in \mathcal{E} : P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \in B)\right) > 0 \quad \text{lorsque} \quad \nu(B) > 0 \ .$$

2) La chaîne (X_n) est ν-récurrente sur $(E,\mathcal{E})$ si :

$$\forall x \in E \ , \ \forall B \in \mathcal{E} : P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \in B)\right) = 1 \quad \text{lorsque} \quad \nu(B) > 0 \ .$$

3) Une chaîne (X_n) possède un cycle de longueur ℓ si il existe un ℓ-uplet $(C_1,\dots,C_\ell)$ de boréliens disjoints éléments de $\mathcal{E}$ tels que :

$$P(x, C_{j+1}) = 1 \quad , \quad \forall j = 1,\dots,\ell-1 \ , \ \forall x \in C_j$$

et

$$P(x, C_1) = 1 \quad , \quad \forall x \in C_\ell \ .$$

4) La chaîne (X_n) est dite périodique de période d , si d est le p.g.d.c. des entiers ℓ, dans le cas où $d = 1$, la chaîne est dite apériodique.

V - DISTANCE EN VARIATION.-

Soit E un espace muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$. On considère $\mathcal{M}$: l'espace de Banach des fonctions définies sur $(E,\mathcal{E})$ mesurables, bornées et à valeurs réelles ; muni de la norme uniforme.

Soient μ et ν deux mesures définies sur $(E,\mathcal{E})$, nous définissons donc la distance en variation par :

$$||\mu-\nu||_v = \sup_{\substack{f\in\mathcal{M} \\ ||f||_\infty<1}} \left|\int f\, d\mu - f\, d\nu\right| = 2 \sup_{A\in\mathcal{E}} |\mu(A)-\nu(A)| = 2 \sup_{A\in\mathcal{E}} (\mu(A)-\nu(A))$$

Définition I.V.7.- On dit qu'un processus est géométriquement ergodique de probabilité invariante π si : il existe deux constantes a et k réelles positives, avec $k < 1$ tels que : $\forall \nu$ loi initiale du processus on a :

$$||\nu p-\pi||_v \leq a\, k^n \ .$$

CHAPITRE II

ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE TRANSITION D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF NON LINEAIRE

I - INTRODUCTION.-

On considère deux processus (X_n) et (ε_n) définis sur un même espace probabilisé (Ω,G,P), ayant leurs valeurs dans $\mathbb{R}^h$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$ et de sa mesure de Lebesgue λ, ces deux processus sont reliés par l'équation :

$$X_{n+1} = \phi(X_n, \dots, X_{n+1-k}) + \varepsilon_{n+1} \ , \quad \forall n \geq 0 \tag{2.1}$$

où ϕ est une fonction de $\mathbb{R}^{hk}$ dans $\mathbb{R}^h$.

Les variables x_o , x_{-1} ,..., x_{1-k} sont réelles connues indépendantes de (ε_n), qui est une suite de v.a. centrées i.i.d.

Posons $$Y_{n+1} = (X_{n+1} , X_n , \dots, X_{n+2-k}) \ , \quad \forall n$$

Donc l'équation (2.1) devient :

$$Y_{n+1} = \Phi(Y_n) + (\varepsilon_{n+1} , 0 , \dots, 0) \tag{2.2}$$

qui est une chaîne de Markov d'ordre 1.

Avec $\quad \tilde{\psi} : (\mathbb{R}^{hk} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}} , \lambda^{\otimes k}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{hk} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}} , \lambda^{\otimes k})$

$$x = (x_1,\dots,x_k) \longmapsto \tilde{\psi}(x) = (\psi(x) , x_1 ,\dots, x_{k-1}) .$$

A l'aide de l'équation (2.2), nous allons montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov possédant certaines caractéristiques, qui vont nous permettre d'estimer la probabilité de transition de la chaîne, le filtre ψ et la loi du bruit blanc (ε_n).

Notons $B_m = \sigma(X_j , 1 \leq j \leq m)$, la tribu engendrée par les variables aléatoires (X_j) , $1 \leq j \leq m$.

H_o $\left\{\right.$ i) la loi P_{ε_o} de ε_o est absolument continue par rapport à λ $(P_{\varepsilon_o} < \lambda)$ et que sa densité est notée g , positive .

ii) pour tout m et n , $m < n$; ε_n est indépendante de $\mathcal{B}_m$.

Si on désigne par F la fonction de répartition de ε_o , on a :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}} , \quad \forall y^o = (y_1^o ,\dots, y_k^o) \in \mathbb{R}^{hk} ,\dots\dots$$

$$\forall y^n = (y_1^n ,\dots, y_k^n) \in \mathbb{R}^{hk}$$

$$P(Y_{n+1} \in B \mid Y_o = y^o ,\dots, Y_n = y^n)$$

$$= P(\tilde{\psi}(Y_n) + (\varepsilon_{n+1} , 0 , \dots, 0) \in B \mid Y_o = y^o ,\dots, Y_n = y^n)$$

$$= P(\tilde{\psi}(Y_n) + (\varepsilon_{n+1} ,\dots, 0) \in B \mid Y_n = y^n)$$

$$= P(\tilde{\psi}(y^n) + (\varepsilon_{n+1} , 0 , \dots, 0) \in B) \qquad \text{d'après (ii) de } H_o$$

$$= F \otimes \delta_{(0,\dots,0)} (B - \tilde{\psi}(y^n)) . \tag{2.3}$$

où $\delta_{(0,\dots,0)}$ est le Dirac en $(0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{h(k-1)}$.

Pour éviter certains problèmes, nous définissons la classe $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C} = \{A \times \mathbb{R}^{h(k-1)}, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}\}$, cette classe est une sous-tribu de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$; donc au lieu de travailler sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$, nous allons travailler sur $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{N}$ où $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}} : \lambda^{\otimes k}(N) = 0\}$, si $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}$; c'est-à-dire $\tilde{B} = B + N$, notre équation (2.3) devient

$$F \otimes \delta_{(0,\dots 0)} (\tilde{B} - \tilde{\psi}(y^n)) = \int_A g(z - \psi(y^n))\, dz \tag{2.4}$$

B s'écrivant sous la forme $A \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$.

De plus la probabilité de transition $P(x,B)$ définie sur $\mathbb{R}^{hk} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$ reste une probabilité de transition sur $\mathbb{R}^{hk} \times \tilde{\mathcal{C}}$. En effet :

1) pour tout $\tilde{B}$ élément de $\tilde{\mathcal{C}}$, $P(.,\tilde{B})$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{kh}} - B_{[0,1]}$ mesurable, car $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$.

2) pour tout x élément de $\mathbb{R}^{hk}$, $P(x,.)$ est une vraie probabilité sur $\tilde{\mathcal{C}}$, car $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$.

II - L'EXISTENCE D'UNE MESURE DE PROBABILITE INVARIANTE SUR $\tilde{\mathcal{C}}$ POUR LA CHAINE (Y_n).-

Sur la tribu $\tilde{\mathcal{C}}$ nous définissons la mesure $\lambda^{\bullet}$ comme suit :

Pour tout élément $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}$ ($\exists N \in \mathcal{N} : \tilde{B} = B + N$) ; on pose $\lambda^{\bullet}(\tilde{B}) = \lambda^{\bullet}(B) = \lambda(A)$, car B s'écrivant sous la forme $A \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$, avec $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$.

H_1 $\quad \psi$ est surjective , $||\psi||_\infty + ||D\psi||_\infty < +\infty$, et $E\, ||\varepsilon_o|| < \infty$.

Proposition II.II.1.- Sous H_o et H_1 on montre que :

La chaîne (Y_n) vérifie les résultats suivants :

1) (Y_n) est $\lambda^{\bullet}$-irréductible sur $(\mathbb{R}^{hk}, \tilde{\mathcal{C}})$

2) (Y_n) est $\lambda^{\bullet}$-récurrente sur $(\mathbb{R}^{hk}, \tilde{\mathcal{C}})$

3) (Y_n) est géométriquement ergodique sur $(\mathbb{R}^{hk}, \tilde{\mathcal{C}})$

4) (Y_n) est apériodique.

Démonstration :

1) Pour la $\lambda^{\bullet}$-irréductibilité, nous allons utiliser la définition I.IV.6.

Soient $y \in \mathbb{R}^{hk}$, et $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}$ où $\lambda^{\bullet}(\tilde{B}) > 0$.

$$P_y\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \in \tilde{B})\right) \geq P_y(Y_1 \in \tilde{B})$$

$$P_y(Y_1 \in \tilde{B}) = \int_A g(z - \varphi(y))\, dz \quad .$$

$\tilde{B} = B + N$ et B s'écrivant sous la forme $A \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$.

$$\lambda^{\bullet}(\tilde{B}) = \lambda^{\bullet}(B) = \lambda(A) > 0 \quad .$$

Donc $P_y(Y_1 \in \tilde{B})$ est positive, d'après la positivité de g d'où :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} \quad . \quad P_y\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y_n \in \tilde{B})\right) > 0 \quad , \quad \text{lorsque } \lambda^{\bullet}(\tilde{B}) > 0 \ .$$

Pour démontrer la $\lambda^{\bullet}$-récurrence nous utilisons le lemme suivant donné par Richard L. Tweedie dans [20 , p. 390].

Lemme II.II.2.- Soit (Y_n) une chaîne de Markov définie sur un espace probabilisé (Ω,G,P) et à valeurs dans un espace $(E,\mathcal{E},\nu)$, ν-irréductible.

Une condition suffisante pour que cette chaîne soit récurrente est :

1) Il existe un ensemble K élément de

$$\mathcal{E}_\nu = \{A \in \mathcal{E} : 0 < \nu(A) < +\infty\} ,$$

et une fonction h mesurable sur E, non négative tels que :

$$\int_E P(x,dy)\, h(y) \leq h(x) , \qquad \forall x \notin K .$$

2) Pour toute constante M assez grande, il existe un $K_M \in \mathcal{E}_\nu$ tel que : $h(x) \geq M$ pour $x \in K_M^c$.

Posons $\qquad h(y) = ||y_1||_{\mathbb{R}^h} \qquad \forall y = (y_1 ,\ldots, y_k) \in \mathbb{R}^{hk}$

et $\qquad K = \{y_1 \in \mathbb{R}^h : ||y_1||_{\mathbb{R}^h} \leq ||\vartheta||_\infty + E\,||\varepsilon_o||\} \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$

$$\lambda^*(K) = \lambda(\{y_1 \in \mathbb{R}^h : ||y_1||_{\mathbb{R}^h} \leq ||\vartheta||_\infty + E\,||\varepsilon_o||\})$$

$$\leq (||\vartheta||_\infty + E\,||\varepsilon_o||)^h .$$

Soit x un élément de $\mathbb{R}^{hk}$ qui n'appartient pas à K.

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} h(y)\, P(x,dy) = \int_{\mathbb{R}^h} ||y_1||_{\mathbb{R}^h}\, g(y_1 - \vartheta(x_1 ,\ldots, x_k))\, dy_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}^h} ||\vartheta(x_1 ,\ldots, x_k) + y_1||_{\mathbb{R}^h}\, g(y_1)\, dy_1$$

$$\leq ||\vartheta||_\infty + E\,||\varepsilon_o|| .$$

Comme $x \notin K$, on a $||x_1||_{\mathbb{R}^h} > ||\varphi||_\infty + E\,||\varepsilon_o||$ et donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} h(y)\, P(x,\, dy) \leq ||x_1||_{\mathbb{R}^h} = h(x)$$

la première condition est satisfaite.

2) Si M est une constante donnée, il suffit de prendre $K_M = \{x_1 \in \mathbb{R}^h : ||x_1||_{\mathbb{R}^h} \leq M\} \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$ donc : $0 < \lambda^\bullet(K_M) < \infty$

et $$h(x) = ||x_1||_{\mathbb{R}^h} > M\,, \quad \forall x \notin K_M\,.$$

Pour montrer le 3°), on applique le lemme suivant donné par Richard L. - Tweedie dans [20, p. 390].

Lemme II.II.3.- Soit (Y_n) une chaîne de Markov définie sur espace probabilisé (Ω,G,P) et à valeurs dans un espace $(E,\mathcal{E},\nu)$, ν-irréductible.

Une condition suffisante d'ergodicité est :

1) Il existe un ensemble K élément de $\mathcal{E}_\nu = \{A \in \mathcal{E} : 0 < \nu(A) < \infty\}$ et une fonction h mesurable sur E, non négative tels que :

$$\int_E P(x,dy)\, h(y) \leq h(x) - 1\,, \quad \forall x \notin K\,.$$

2) Pour une constante M_o fixé, on a :

$$\ell(x) = \int_E P(x,dy)\, h(y) \leq M_o < \infty\,, \quad \forall x \in K\,.$$

Il suffit de prendre $h(x) = ||x_1||_{\mathbb{R}^h}$, $\forall x = (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^{hk}$

$$K = \{x_1 \in \mathbb{R}^h : ||x_1||_{\mathbb{R}^h} \leq ||\vartheta||_\infty + E\,||\varepsilon_o|| + 1\} \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$$

et
$$M_o = ||\vartheta||_\infty + E\,||\varepsilon_o||.$$

Enfin pour montrer l'apériodicité de la chaîne (Y_n), nous utilisons la proposition 3.1. de Orey [16].

Soit $C_1, \ldots, C_\ell$, le cycle qui existe, avec $C_i \in \tilde{\mathcal{C}}$ pour $i = 1, \ldots, \ell$.

$$P(x,C_1) = 1 \Longrightarrow P(x,C_1^c) = 0 \Longrightarrow \lambda^\bullet(C_1^c) = 0 \quad ,$$

donc le cycle est de longueur 1.

La chaîne de Markov (Y_n) définie par l'équation (2.2.) est ergodique et irréductible, elle admet donc une mesure de probabilité invariante sur $\tilde{\mathcal{C}}$, notée $\tilde{\pi}$, cette mesure $\tilde{\pi}$ est unique à une constante multiplicative près, d'après [16].

Remarquons que cette mesure $\tilde{\pi}$ est absolument continue par rapport à $\lambda^\bullet$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$.

En effet : soit $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}$, donc ils existent un $N \in \mathcal{N}$ et $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$ tels que :

$$\tilde{B} = B + N \qquad \text{et} \qquad B = A \times \mathbb{R}^{h(k-1)}$$

$$\lambda^\bullet(\tilde{B}) = \lambda^\bullet(B) = \lambda(A) = 0$$

$$\tilde{\pi}(\tilde{B}) = \tilde{\pi}P(\tilde{B}) = \int \tilde{\pi}(dy)\, P(y,\tilde{B}) \quad .$$

(2.4) $$\Longrightarrow \quad P(y,\tilde{B}) = \int_A g(z - \vartheta(z))\, dz = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\pi}(\tilde{B}) = 0 \quad .$$

Dans toute la suite, nous allons noté $\tilde{\pi}$: la densité correspondante. C'est-à-dire nous allons confondre mesure de probabilité et densité.

III - PROLONGEMENT DE LA MESURE DE PROBABILITE $\tilde{\pi}$ SUR $\tilde{\mathcal{C}}$, EN UNE MESURE DE PROBABILITE π SUR $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$.-

Nous faisons l'hypothèse : $(X_n, X_{n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z$. Montrons la relation qui existe entre cette hypothèse et l'ergodicité de la chaîne (Y_n).

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$

$$P(X_{n+1} \in B \text{ , } X_n \in A) = P(Y_{n+1} \in B \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \text{ , } Y_n \in A \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$= \int_{A\times\mathbb{R}^{h(k-1)}} P(Y_{n+1} \in B \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_n = y) \; P_{Y_n}(dy)$$

$$= \int_{A\times\mathbb{R}^{h(k-1)}} F(B - \psi(y)) \; P_{Y_n}(dy)$$

$$\int_{A\times\mathbb{R}^{h(k-1)}} F(B - \psi(y)) \; P_{Y_n}(dy) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{A\times\mathbb{R}^{h(k-1)}} F(B - \psi(y)) \; \tilde{\pi}(dy) \quad .$$

Ceci est d'après la propriété d'ergodicité de la chaîne et comme sous l'hypothèse faite on a :

$$P(X_{n+1} \in B \text{ , } X_n \in A) \xrightarrow[n\to\infty]{} P_Z(A \times B) \quad .$$

on déduit que :

$$\int_{A\times\mathbb{R}^{h(k-1)}} F(B - \psi(y)) \; \tilde{\pi}(dy) = \int_{A\times B} P_Z(dy,dz) \quad .$$

Pour prolonger $\tilde{\pi}$ en une mesure π sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$, il suffit de montrer que $\tilde{\pi}$ est prolongeable sur les pavés de $\mathbb{R}^{hk}$.

Soit B un pavé de $\mathbb{R}^{hk}$ noté $\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} B_i$ avec B_i élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$ $\forall i = 1,\dots,k$.

$$P(Y_n \in B) = P(X_n \in B_1 , X_{n-1} \in B_2 ,\dots, X_{n+1-k} \in B_k)$$

$$= P(Y_n \in B_1 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} ,\dots, Y_{n+1-k} \in B_k \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$= P(Y_n \in B_1 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} ,\dots, Y_{n+1-k} \in B_k \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$\times P(Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} ,\dots, Y_{n+1-k} \in B_k \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$= P(Y_n \in B_1 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)}) \times$$

$$P(Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n-2} \in B_3 \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$\vdots$$

$$\times P(Y_{n+2-k} \in B_{k-1} \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n+1-k} \in B_k \times \mathbb{R}^{h(k-1)}) \times P(Y_{n+1-k} \in B_k \times \mathbb{R}^{h(k-1)}).$$

$$P(Y_n \in B_1 \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$= \frac{P(Y_n \in B_1 \times \mathbb{R}^{h(k-1)}, Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)})}{P(Y_{n-1} \in B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)})}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\int_{B_2\times R^{h(k-1)}} P(y, B_1 \times \mathbb{R}^{h(k-1)}) \, \tilde{\pi}(dy)}{\tilde{\pi}(B_2 \times \mathbb{R}^{h(k-1)})}$$

donc la limite de $P(Y_n \in B)$ existe pour tout B pavé de $\mathbb{R}^{hk}$.

Donc la mesure π sera définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$ par

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}} \quad , \quad \pi(B) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n \in B) \ .$$

Remarquons que π est absolument continue par rapport à $\lambda^{\otimes k}$, en effet : soit $B = \overset{k}{\underset{i=1}{\times}} B_i$ un pavé de $\mathbb{R}^{hk}$ tel que

$$\lambda^{\otimes k}(B) = 0 = \lambda^{\otimes k}(\overset{k}{\underset{i=1}{\times}} B_i)$$

$$\Longrightarrow \exists \ i_o = 1,\dots,k \quad \text{tel que} \quad \lambda(B_{i_o}) = 0 \ .$$

$$\{P(X_{n+1-i_o} \in B_{i_o} , X_{n-i_o} \in B_{i_o-1})\}$$

$$= \int_{B_{i_o-1} \times \mathbb{R}^{h(k-1)}} P(Y_{n+1-i_o} \in B_{i_o} \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n-i_o} = y) \ P_{Y_{n-i_o}}(dy)$$

$$P(Y_{n+1-i_o} \in B_{i_o} \times \mathbb{R}^{h(k-1)} \mid Y_{n-i_o} = y) = \int_{B_{i_o}} g(z - \vartheta(y)) \ dz = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(Y_n \in B) = 0 = \pi(B) \ .$$

La densité de cette mesure de probabilité sera notée par $\pi(x)$ dans toute la suite.

$\forall x \in \mathbb{R}^{hk}$, $P(x,.) < \lambda^{\bullet}$ sur $\tilde{C}$, notons par $q(x,y)$ la densité de $P(x,.)$ par rapport à $\lambda^{\bullet}$, $y \in \mathbb{R}^h$.

De plus, on a : $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$, $\forall C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h}$

$$P(Y_n \in B \ , \ Y_{n+1} \in C \times \mathbb{R}^{h(k-1)})$$

$$= \int_B P(Y_{n+1} \in C \times \mathbb{R}^{h(k-1)} / Y_n = y) \ P_{Y_n}(dy)$$

$$= \int_B \int_C q(y,z) \ dz \ P_{Y_n}(dy)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_B \int_C q(y,z) \ \pi(y) \ dy$$

pour cela on pose : $A(y,z) = \pi(y)\, q(y,z)$, $\forall y \in \mathbb{R}^{hk}$, $\forall z \in \mathbb{R}^{h}$.

Propriétés :

1) $\tilde{\pi} = \pi$ sur $\tilde{C}$,

2) π est une mesure de probabilité invariante par rapport à la probabilité de transition P.

* la première : est évidente car π est le prolongement de $\tilde{\pi}$.

* la seconde : soit $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$

$$\pi P(A) = \int_{\mathbb{R}^{hk}} P(y,A)\ \pi(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{hk}} P(y,A)\ P_{Y_n}(dy)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(Y_{n+1} \in A\ ,\ Y_n \in \mathbb{R}^{hk}) = \pi(A) \ .$$

IV - DEFINITION DES ESTIMATEURS.-

Définition II.IV.4.- On dit qu'un noyau vérifie l'hypothèse (H), si c'est une application positive, paire, et bornée de $\mathbb{R}^{s}$ dans $\mathbb{R}^{+}$, ($s = hk$ ou $h(k+1)$) , qui admet des moments d'ordre 1 et 2 , dont l'intégrale vaut 1 . En plus on suppose que la borne supérieure est atteinte.

Si K et U sont deux noyaux vérifiant l'hypothèse (H) , nous définissons les estimateurs de $\pi(y)$, de $A(y,x)$, et de $B(y) = \int_{\mathbb{R}^h} x\, A(y,x)\, dx$ respectivement par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} \quad , \quad \hat{\pi}_n(y) = \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^{n} U_{\beta_n}(Y_j - y)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} , \forall x \in \mathbb{R}^{h} , \quad \hat{A}_n(y,x) = \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^{n} K_{\alpha_n}(Y_j - y, X_{j+1} - x)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} \quad \hat{B}_n(y) = \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^{n} X_{j+1} U_{\beta_n}(Y_j - y) \quad .$$

α_n et β_n sont deux suites réelles qui tendent vers zéro quand n tend vers l'infini.

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} , \quad U_{\beta_n}(y) = \frac{1}{\beta_n^{hk}} U(\frac{y}{\beta_n})$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} , \quad \forall x \in \mathbb{R}^{h} \quad K_{\alpha_n}(y,x) = \frac{1}{\alpha_n^{h(k+1)}} K(\frac{y}{\alpha_n}, \frac{x}{\alpha_n}) \quad .$$

V - CALCUL DES RISQUES.-

Lemme II.V.5.- Soit I une fonction mesurable de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}$ positive et d'intégrale 1 , et soit Δ un réel positif ; de plus soit G une fonction de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

1) G est différentiable presque partout, de dérivées directionnelles localement bornées.

2) G est différentiable au sens des distributions.

3) G est localement lipschitzienne.

Supposons qu'il existe un $q \geq 1$: $DG \in L^q(\mathbb{R}^s, \lambda)$

$$||DG||_q^q = \int ||DG(x)||^q \lambda(dx) \quad , \qquad 1 \leq q < +\infty$$

$$||DG||_\infty = \text{Sup } \{||DG(x)|| \ , \ x \in \mathbb{R}^s\} < +\infty \quad ; \qquad q = +\infty \quad .$$

Alors :

$$||G-G_\Delta||_q \leq \Delta \left[\int_{\mathbb{R}^s} ||x||^q \, K(x) \, \lambda(dx)\right]^{1/q} ||DG||_q \quad ; \quad \text{si} \quad 1 \leq q < +\infty$$

$$||G-G_\Delta||_q \leq \Delta \left[\int_{\mathbb{R}^s} ||x|| \, K(x) \, \lambda(dx)\right] ||DG||_\infty \quad ; \quad \text{si} \quad q = +\infty ,$$

où $G_\Delta = G * I_\Delta$; $*$ est le produit de convolution

et $I_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta^s} I(\frac{x}{\Delta})$; $\forall x \in \mathbb{R}^s$

Proposition II.V.6.- Soit (Y_n) la chaîne de Markov définie par l'équation (2.2), et $q(.,.)$ la densité de sa probabilité de transition sur $\tilde{C}$.

Si $q(.,.)$ et $\pi(.)$ vérifient :

$$\sup_x \{||Dq_x||_p \; ; \; x \in \mathbb{R}^{hk}\} + \sup_x \{||q_x||_p \; ; \; x \in \mathbb{R}^{hk}\} < +\infty$$

$$||D\pi||_p + ||\pi||_p < +\infty$$

$$||q||_\infty < +\infty , \quad ||\pi||_\infty < \infty$$

et si de plus $q(.,.)$ et $\pi(.)$ vérifient l'une des hypothèses du lemme II.V.5. alors on a :

1) $||E_\nu \hat{\pi}_n - \pi||_1 \leq C \beta_n + \dfrac{D_o}{n-k+1}$.

2) $R_\nu(\hat{\pi}_n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{hk}} E_\nu(\hat{\pi}_n(x) - \pi(x))^2 \, dx \leq \frac{D_1}{\beta_n^{hk}(n-k+1)} + D_2 \beta_n^2$

où ν est une loi initiale quelconque de la chaîne (Y_n). C, D_o , D_1 et D_2 sont des constantes indépendantes de n .

$$C = \left[\int_{\mathbb{R}^{hk}} ||x||_{\mathbb{R}^{hk}}\ u(x)\ dx\right]\ ||D\pi||_1$$

$$D_o = \sup_{x\in\mathbb{R}^{hk}}\ \sup_n\ \left|\left|\sum_{j=k}^{n} (P^j(x,.) - \pi(.))\right|\right|_v < \infty \qquad (\text{cf. } [23])$$

$$D_1 = 7\ ||u||_\infty\ \sup_{x\in\mathbb{R}^{hk}}\ \sup_n\ \left|\left|\sum_{j=1}^{n} (P^j(x,.) - \pi(.))\right|\right|_v$$

$$D_2 = \left[\int_{\mathbb{R}^{hk}} ||x||^2_{\mathbb{R}^{hk}}\ u(x)\ dx\right] ||D\pi||_2^2\ .$$

Nous optimisons le risque en prenant $\beta_n = (n-k+1)^{-1/2+hk}$.

Démonstration :

$$E_\nu\ \hat{\pi}_n(y) = (E_\nu - E_\pi)\ \hat{\pi}_n(y) + E_\pi\ \hat{\pi}_n(y)$$

$$E_\pi\ \hat{\pi}_n(y) = u_{\beta_n} * \pi(y)$$

$$(E_\nu - E_\pi)\ \hat{\pi}_n(y) = \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^{n} \int_{\mathbb{R}^{hk}} u_{\beta_n}(z-y)\ (\nu P^j(dz) - \pi\ P^j(dz))$$

$$1)\ ||E_\nu\ \hat{\pi}_n - \pi||_1 = \int_{\mathbb{R}^{hk}} |E_\nu\ \hat{\pi}_n(y) - \pi(y)|\ dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{hk}} |(E_\nu - E_\pi)\ \hat{\pi}_n(y)|\ dy + \int_{\mathbb{R}^{hk}} |E_\pi\ \hat{\pi}_n(y) - \pi(y)|\ dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{hk}} |(E_\nu - E_\pi)\ \hat{\pi}_n(y)|\ dy + \int_{\mathbb{R}^{hk}} |u_{\beta_n} * \hat{\pi}_n(y) - \pi(y)|\ dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{hk}} |(E_\nu - E_\pi)\ \hat{\pi}_n(y)|\ dy + ||\pi - \pi_{\beta_n}||_1$$

le lemme II.V.5. $\Longrightarrow \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{hk}} |(E_\nu - E_\pi)\ \hat{\pi}_n(y)|\ dy + C\ \beta_n$

il reste donc à trouver la majoration de $\int_{\mathbb{R}^{hk}} |(E_\nu - E_\pi)\, \hat{\pi}_n(y)|\, dy$

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} |(E_\nu - E_\pi)\, \hat{\pi}_n(y)|\, dy = \frac{1}{n-k+1} \int_{\mathbb{R}^{hk}} \Big| \sum_{j=k}^{n} \int_{\mathbb{R}^{hk}} u_{\beta_n}(z-y)\, (\nu P^j(dz) - \pi(dz)) \Big|\, dy$$

$$\leq \frac{1}{n-k+1} \sup_z \sup_n \Big\| \sum_{j=k}^{n} (P^j(z,.) - \pi(.)) \Big\|_v \ .$$

La première conclusion est donc satisfaite.

2) $R_\nu(\hat{\pi}_n) = \int_{\mathbb{R}^{hk}} E_\nu(\hat{\pi}_n(y) - \pi(y))^2\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^{hk}} (E_\nu - E_\pi)(\hat{\pi}_n(y) - \pi(y))^2\, dy + \int_{\mathbb{R}^{hk}} E_\pi(\hat{\pi}_n(y) - \pi(y))^2\, dy$$

$$E_\pi(\hat{\pi}_n(y) - \pi(y))^2 = \mathrm{Var}_\pi(\hat{\pi}_n(y)) + (u_{\beta_n} * \pi(y) - \pi(y))^2$$

$$\mathrm{Var}_\pi\, (\hat{\pi}_n(y)) = \frac{1}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n} E_\pi(u_{\beta_n}(Y_j - y) - E_\pi\, u_{\beta_n}(Y_j - y))^2$$

$$+ \frac{2}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n} E_\pi\Big[(u_{\beta_n}(Y_j - y) - E_\pi(u_{\beta_n}(Y_j - y))) \times (u_{\beta_n}(Y_{j'} - y) - E_\pi(u_{\beta_n}(Y_{j'} - y)))\Big]$$

posons :

$$L(y) = \frac{1}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n} E_\pi(u_{\beta_n}(Y_j - y) - E_\pi\, u_{\beta_n}(Y_j - y))^2 \qquad \text{et}$$

$$T(y) = \frac{1}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n} E_\pi\Big[(u_{\beta_n}(Y_j - y) - E_\pi(u_{\beta_n}(Y_j - y))) \times (u_{\beta_n}(Y_{j'} - y) - E_\pi\, u_{\beta_n}(Y_{j'} - y))\Big]$$

nous allons chercher des majorations pour $L(y)$ et $T(y)$

$$E_\pi\ u^2_{\beta_n}(Y_j-y) = \int_{\mathbb{R}^{hk}} u^2_{\beta_n}(z-y)\ \pi(z)\ dz \leqslant \frac{||u||_\infty}{\beta_n^{hk}}\ u_{\beta_n} * \pi(y)$$

$$[E_\pi\ u_{\beta_n}(Y_j-y)]^2 = [\int_{\mathbb{R}^{hk}} u_{\beta_n}(z-y)\ \pi(z)\ dz]^2 \leqslant \frac{||u||_\infty}{\beta_n^{hk}}\ u_{\beta_n} * \pi(y)$$

$$L(y) \leqslant \frac{1}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n} 2\ [E_\pi\ u^2_{\beta_n}(Y_j-y) + (E_\pi\ u_{\beta_n}(Y_j-y))^2]$$

$$\leqslant \frac{2}{\beta_n^{hk}(n-k+1)}\ ||u||_\infty\ u_{\beta_n} * \pi(y)$$

$$T(y) = \frac{2}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n} [\iint u_{\beta_n}(z-y)\ u_{\beta_n}(t-y)\ P^{j'-j}(z,dt)\ \pi(dz)$$

$$- \iint u_{\beta_n}(z-y)\ u_{\beta_n}(t-y)\ \pi(dz)\ \pi(dt)]$$

$$= \frac{2}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n-1} \sum_{j'=j+1}^{n} [\iint u_{\beta_n}(z-y)\ u_{\beta_n}(t-y)\ (P^{j'-j}(z,dt)-\pi(dt))\ \ \pi(dz)]$$

$$|T(y)| \leqslant \frac{2}{(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n-1} \int u_{\beta_n}(z-y)\ \left|\int \sum_{j'=j+1}^{n} u_{\beta_n}(t-y)(P^{j'-j}(z,dt)-\pi(dt))\right| \times \pi(dz)$$

$$\leqslant \frac{2\ ||u||_\infty}{\beta_n^{hk}(n-k+1)^2} \sum_{j=k}^{n-1} \int u_{\beta_n}(z-y)\ \left|\left| \sum_{j'=j+1}^{n} (P^{j'-j}(z,.)-\pi(.))\right|\right|_V \times \pi(dz)$$

$$\leqslant \frac{2\ ||u||_\infty}{(n-k+1)\ \beta_n^{hk}}\ \sup_{z\in\mathbb{R}^{hk}}\ \sup_n \left|\left| \sum_{k=1}^{n} (P^k(z,.)-\pi(.)\right|\right|_V \times u_{\beta_n} * \pi(y) \quad .$$

Les majorations de $L(y)$ et $T(y)$ nous permettent de déduire que :

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} L(y)\ dy \leqslant \frac{2\ ||u||_\infty}{\beta_n^{hk}(n-k+1)}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} T(y)\ dy \leqslant \frac{2\ ||u||_\infty}{\beta_n^{hk}(n-k+1)}\ \sup_{z\in\mathbb{R}^{hk}}\ \sup_n \left|\left| \sum_{k=1}^{n} (P^k(z,.)-\pi(.))\right|\right|_V \quad .$$

Ces majorations nous donnent :

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} \operatorname{var}_\pi(\hat{\pi}_n(y))\, dy \leq \frac{2\,||u||_\infty}{(n-k+1)\,\beta_n^{hk}} (1 + D_o) \quad .$$

En revanche le lemme II.V.5. nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} (u_{\beta_n} * \pi(y) - \pi(y))^2\, dy = ||u_{\beta_n} * \pi - \pi||_2^2$$

$$\leq \beta_n^2 \left[\int_{\mathbb{R}^{hk}} ||y||^2_{\mathbb{R}^{hk}} u(y)\, dy\right] ||D\pi||_2^2 \quad .$$

Enfin on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{hk}} (E_\nu - E_\pi)(\hat{\pi}_n(y) - \pi(y))^2\, dy = \int_{\mathbb{R}^{hk}} (E_\nu - E_\pi)\, \hat{\pi}_n(y)\, dy$$

$$- 2 \int_{\mathbb{R}^{hk}} \pi(y)(E_\nu - E_\pi)\, \hat{\pi}_n(y)\, dy$$

$$\leq \frac{5\,||u||_\infty}{(n-k+1)\,\beta_n^{hk}} \sup_{z \in \mathbb{R}^{hk}} \sup_{n \geq 1} \left|\left| \sum_{j=1}^{n} (P^j(z,.) - \pi(.))\right|\right|_v$$

d'où le résultat final

$$R_\nu(\hat{\pi}_n) \leq \frac{7\,||u||_\infty}{(n-k+1)\,\beta_n^{hk}} D_o + D_2\, \beta_n^2 \quad .$$

Remarque : Pour que le risque $R_\nu(\hat{\pi}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il faut choisir la suite (β_n) de telle façon que

$$\beta_n^{hk}(n-k+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \; .$$

Proposition II.V.7.- Sous les hypothèses de la proposition II.V.6. on a :

$$R_\nu(\hat{A}_n) = \int_{\mathbb{R}^{hk} \times \mathbb{R}^h} E_\nu(\hat{A}_n(y,x)-A(y,x))^2 \, dy \, dx$$

$$\leq \frac{C_1}{(n-k+1)\,\alpha_n^{h(k+1)}} + C_2\,\alpha_n^2 \quad .$$

Cette proposition se démontre de la même façon que la proposition II.V.6. ; et pour que $R_\nu(\hat{A}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il faut choisir la suite (α_n) de telle sorte que :

$$(n-k+1)\,\alpha_n^{h(k+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad .$$

Nous optimisons le risque en prenant $\alpha_n = (n-k+1)^{-1/2+h(k+1)}$.

Lemme II.V.8.- S'il existe un borélien $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$ tels que :

1) $0 < \lambda^{\otimes k}(C) < +\infty$

2) $\inf\{\pi(y),\ y \in C\} \geq 2\delta > 0$

et si les hypothèses de la proposition II.V.6. sont vérifiées alors :

$$\int_C P_\nu(\hat{\pi}_n(y) \leq \delta)\, dy \leq \frac{D_1}{\delta^2 (n-k+1)\,\beta_n^{hk}} + \frac{D_2\,\beta_n^2}{\delta^2}$$

Démonstration : Supposons qu'il existe un borélien $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{hk}}$ tels 1°) et 2°) soient vérifiées.

Alors

$$R_\nu(\hat{\pi}_n) \geq \int_C E_\nu(\hat{\pi}_n(y)-\pi(y))^2 \, 1_{\{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y)\, dy$$

$$\Longrightarrow \quad R_\nu(\hat{\pi}_n) \geq \delta^2 \int_C P_\nu(\hat{\pi}_n(y) \leq \delta)\, dy$$

$$R_\nu(\hat{\pi}_n) \leq \frac{D_1}{(n-k+1)\,\beta_n^{hk}} + D_2\,\beta_n^2$$ d'après la proposition II.V.6.

On obtient donc :

$$\int_C P\,(\hat{\pi}_n(y) \leq \delta)\, dy \leq \frac{D_1}{\delta^2\,\beta_n^{hk}(n-k+1)} + \frac{D_2\,\beta_n^2}{\delta^2} .$$

Pour définir un estimateur de $\psi(y)$; nous utilisons $B(y)$.

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} \quad ; \quad B(y) = \int_{\mathbb{R}^h} x\, A(y,x)\, dx = \psi(y)\,\pi(y)$$

si le lemme II.V.8. est vérifié, nous choisissons comme estimateur de ψ, celui donné comme suit :

$$\hat{\psi}_n(y) = \frac{\hat{B}_n(y)}{\max(\hat{\pi}_n(y),\, \delta)} \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^{hk} .$$

<u>*Proposition II.V.9.*</u>- Si les hypothèses de la proposition II.V.6. sont vérifiées, alors on a :

$$R_\nu(\hat{\psi}_n, C) = \int_C E_\nu\, ||\hat{\psi}_n(y)-\psi(y)||^2_{\mathbb{R}^h}\, dy$$

$$\leq \frac{4\,C_o}{(n-k+1)\delta^2} + \frac{4\,C_1}{\delta^2(n-k+1)\,\beta_n^{hk}} + \frac{4\,C_2}{\delta^2(n-k+1)^2\,\beta_n^{hk}} +$$

$$+ \frac{2}{\delta^2}\,||\psi||^2_\infty \left(\frac{(||\pi||_\infty + \delta)^2}{\delta^2} + 1\right) R_\nu(\hat{\pi}_n) .$$

Démonstration :

$$R_\nu(\hat{\varphi}_n,C) = \int_C E_\nu \; ||\hat{\varphi}_n(y)-\varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \, dy$$

$$= \int_C E_\nu \; ||\hat{\varphi}_n(y)-\varphi(y)||^2 \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y) \, dy$$

$$+ \int_C E_\nu \; ||\hat{\varphi}_n(y)-\varphi(y)||^2 \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)>\delta\}}(y) \, dy$$

$$\int_C E_\nu \; ||\hat{\varphi}_n(y)-\varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y) \, dy$$

$$= \int_C E_\nu \; ||\frac{\hat{B}_n(y)}{\delta} - \varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y) \, dy$$

$$\leq 2 \; (\int_C E_\nu \; ||\frac{\hat{B}_n(y)}{\delta} - \frac{\pi(y)\;\varphi(y)}{\delta}||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y) \, dy$$

$$+ \int_C E_\nu \; ||\frac{\pi(y)\;\varphi(y)}{\delta} - \varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y) \, dy)$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2} \; R_\nu(\hat{B}_n) + \frac{2\;||\varphi||^2_\infty}{\delta^2} \int_C ||\pi(y)-\delta||^2 \; P_\nu(\hat{\pi}_n(y)\leq\delta) \, dy$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2} \; R_\nu(\hat{B}_n) + \frac{2\;||\varphi||^2_\infty}{\delta^2} \; (\delta+||\pi||_\infty)^2 \; \frac{R_\nu(\hat{\pi}_n)}{\delta^2} \quad .$$

$$\int_C E_\nu \; ||\hat{\varphi}_n(y)-\varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)>\delta\}}(y) \, dy$$

$$= \int_C E_\nu \; ||\frac{\hat{B}_n(y)}{\hat{\pi}_n(y)} - \varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)>\delta\}}(y) \, dy$$

$$\leq 2 \; (\int_C E_\nu \; ||\frac{\hat{B}_n(y)}{\hat{\pi}_n(y)} - \frac{\pi(y)\;\varphi(y)}{\hat{\pi}_n(y)}||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)>\delta\}}(y) \, dy$$

$$+ \int_C E_\nu \; ||\frac{\pi(y)\;\varphi(y)}{\hat{\pi}_n(y)} - \varphi(y)||^2_{\mathbb{R}^h} \; 1_{\{\hat{\pi}_n(y)>\delta\}}(y) \, dy$$

$$\leq \frac{2}{\delta^2} \; R_\nu(\hat{B}_n) + \frac{2\;||\varphi||^2_\infty}{\delta^2} \; R_\nu(\hat{\pi}_n) \quad .$$

d'où le résultat final de la proposition

$$R_\nu(\hat{\varphi}_n, C) \leq \frac{4}{\delta^2} R_\nu(\hat{B}_n) + \frac{2\ ||\varphi||^2_\infty}{\delta^2} \left(\frac{(||\pi||_\infty + \delta)^2}{\delta^2} + 1\right) R_\nu(\hat{\pi}_n)$$

pour avoir les constantes C_o , C_1 et C_2 , il suffit de suivre la même démarche de la proposition II.V.6. pour avoir

$$R_\nu(\hat{B}_n) \leq \frac{C_1}{(n-k+1)} + \frac{C_2}{(n-k+1)\ \beta_n^{hk}} + \frac{C_3}{(n-k+1)^2\ \beta_n^{hk}} .$$

Remarque : S'il existe une suite de boréliens (C_n) qui tend en croissance vers $\mathbb{R}^{hk}$, et si $\inf\{\pi(y)\ ;\ y \in C_n\} \geq 2\ \delta_n > 0$, on peut donc donner

$$R_\nu(\hat{\varphi}_n,\ C_n) \leq \frac{4}{\delta_n^2}\ R_\nu(\hat{B}_n) + \frac{2\ ||\varphi||^2_\infty}{\delta_n^2} \left(\frac{(||\varphi||_\infty + \delta)^2}{\delta_n^2} + 1\right) \times R_\nu(\hat{\pi}_n) .$$

1°) Si $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta > 0$

alors $R_\nu(\hat{\varphi}_n,\ C_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2°) Si $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en décroissant

alors $R_\nu(\hat{\varphi}_n,\ C_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, si $\delta_n^2(n-k+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\delta_n^2(n-k+1)\ \beta_n^{hk} \longrightarrow \infty$; $\delta_n^2(n-k+1)^2\ \beta_n^{hk} \longrightarrow \infty$; $\delta_n^4\ \beta_n^{hk}(n-k+1) \longrightarrow \infty$;

et $\dfrac{\beta_n^2}{\delta_n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

C'est-à-dire, il faut que :

$$\text{et} \quad \begin{cases} \delta_n^4\ \beta_n^{hk}(n-k+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \\ \dfrac{\beta_n^2}{\delta_n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases} .$$

Nous allons maintenant donner des estimateurs de $q(.,.)$ et de $g(.)$ qui sont respectivement la densité de la probabilité de la chaîne (Y_n) sur $\tilde{C}$ et la densité de la loi de ε_o .

Soit a un réel supérieur à $||g||_\infty$, et C un borélien vérifiant le lemme II.V.8.

On pose :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{hk} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}^h \qquad \hat{q}_n(y,x) = \frac{\hat{A}_n(y,x)}{\max(\hat{\pi}_n(y),\delta)} \tag{2.5}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^h \; ; \; \hat{g}_n(x) = \frac{1}{\lambda^{\otimes k}(C)} \int_C (a \wedge \hat{q}_n)\ (y,\ x + \hat{\vartheta}_n(y))\ dy \quad . \tag{2.6}$$

Pour l'estimateur défini par (2.5) on introduit $\max(\hat{\pi}_n(y),\ \delta)$ pour soulever les problèmes qui vont se poser surtout pour les points qui annulent $\hat{\pi}_n(y)$.

Par contre pour l'estimateur défini par (2.6), on a pris $a \wedge \hat{q}_n$ pour avoir un estimateur convergent, et comme chaque estimateur dépend d'un point $y \in \mathbb{R}^{hk}$, nous avons pris l'estimateur moyen sur C.

Proposition II.V.10.- Si les hypothèses de la proposition II.V.6. sont vérifiées alors, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^h} : 0 < \lambda(B) < +\infty$ on a :

1) $$||E_\nu \hat{A}_n - A||_1 \leqslant C\ \alpha_n + \frac{D_o}{(n-k+1)} \tag{2.7}$$

2) $$||E\ \hat{q}_n - q\ ||_{1,C\times B} = \int_{C\times B} |E_\nu\ \hat{q}_n(y,x) - q(y,x)|\ dy\ dx$$

$$\leqslant \frac{3}{2\delta}\left(\frac{D_o}{(n-k+1)} + C\ \alpha_n\right) + ||\pi||_\infty \frac{||\pi||_\infty + \delta}{2\ \delta^4}\left(\frac{D_1}{\beta_n^{hk}(n-k+1)} + D_2\ \beta_n^2\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda(B)}}{2\ \delta^2}\ (R_\nu^{1/2}(\hat{\pi}_n)\ R_\nu^{1/2}(\hat{A}_n)) \ .$$

<u>*Démonstration*</u> :

1) est évident.

2) $$||E_\nu \hat{q}_n - q||_{1,C\times B} = ||E_\nu \frac{\hat{A}_n}{\max(\hat{\pi}_n,\delta)} - \frac{A}{\pi}||_{1,C\times B}$$

$$\leq ||E_\nu (\frac{\hat{A}_n}{\delta} - \frac{A}{\pi})\, 1_{\{\hat{\pi}_n \leq \delta\}}||_{1,C\times B} + ||E_\nu (\frac{\hat{A}_n}{\hat{\pi}_n} - \frac{A}{\pi})\, 1_{\{\hat{\pi}_n > \delta\}}||_{1,C\times B}$$

$$\leq ||E_\nu (\frac{\hat{A}_n}{\delta} - \frac{A}{\delta})\, 1_{\{\hat{\pi}_n \leq \delta\}}||_{1,C\times B} + ||E_\nu (\frac{A}{\delta} - \frac{A}{\pi})\, 1_{\{\hat{\pi}_n \leq \delta\}}||_{1,C\times B}$$

$$+ ||E_\nu (\frac{\hat{A}_n}{\hat{\pi}_n} - \frac{\hat{A}_n}{\pi})\, 1_{\{\hat{\pi}_n > \delta\}}||_{1,C\times B} + ||E_\nu (\frac{A}{\pi} - \frac{\hat{A}_n}{\pi})\, 1_{\{\hat{\pi}_n > \delta\}}||_{1,C\times B}$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\, ||E_\nu (\hat{A}_n - A)||_{1,C\times B} + \frac{(||\pi||_\infty + \delta)}{2\,\delta^2}\, ||A\, P_\nu(\hat{\pi}_n(.) \leq \delta||_{1,C\times B}$$

$$+ \frac{1}{2\delta}\, ||E_\nu (\hat{A}_n - A)||_{1,C\times B} + ||E_\nu\, \hat{A}_n (\frac{1}{\hat{\pi}_n} - \frac{1}{\pi})\, 1_{\{\hat{\pi}_n > \delta\}}||_{1,C\times B}$$

ceci est d'après la proposition II.V.6.

(2.7) $\Longrightarrow$ $$||E_\nu (\hat{A}_n - A)||_{1,C\times B} \leq C\, \alpha_n + \frac{D_o}{(n-k+1)} .$$

$$||A\, P_\nu(\hat{\pi}_n \leq \delta)||_{1,C\times B} = \int_{C\times B} A(y,x)\, P_\nu(\hat{\pi}_n(y) \leq \delta)\, dy\, dx$$

$$= \int_{C\times B} \pi(y)\, q(y,x)\, P_\nu(\hat{\pi}_n(y) \leq \delta)\, dy\, dx$$

$$\leq ||\pi||_\infty \int_C P_\nu(\hat{\pi}_n(y) \leq \delta)\, dy$$

$$\leq ||\pi||_\infty \left[\frac{D_1}{\delta^2 (n-k+1)\beta_n^{hk}} + \frac{D_2\, \beta_n^2}{\delta^2}\right] .$$

$$\| E_\nu (\hat{A}_n (\frac{1}{\hat{\pi}_n} - \frac{1}{\pi}) \, 1_{\{\hat{\pi}_n \geq \delta\}} \|_{1,C\times B}$$

$$\leq \frac{1}{2\delta^2} \int_{C\times B} E_\nu^{1/2} (\hat{A}_n(y,x))^2 \, E_\nu^{1/2} (\hat{\pi}_n(y) - \pi(y))^2 \, dy \, dx$$

$$\leq \frac{R_\nu^{1/2} (\hat{\pi}_n)}{2\delta^2} \left[\int_C \left\{\int_B E_\nu^{1/2} (\hat{A}_n(y,x))^2 \, dx\right\}^2 dy\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{R_\nu^{1/2} (\hat{\pi}_n)}{2\delta^2} \left[\int_C \lambda(B) \int_B E_\nu (\hat{A}_n(y,x))^2 \, dx \, dy\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{R_\nu^{1/2} (\hat{\pi}_n)}{2\delta^2} \sqrt{\lambda(B)} \, R_\nu^{1/2} (\hat{A}_n)$$

on obtient donc

$$\| E_\nu \, \hat{q}_n - q \|_{1,C\times B} \leq \frac{3}{2\delta} \left(C \, \alpha_n + \frac{D_o}{(n-k+1)}\right) +$$

$$\frac{\|\pi\|_\infty + \delta}{2\delta^4} \left(\frac{D_1}{(n-k+1)\beta_n^{hk}} + D_2 \, \beta_n^2\right) \|\pi\|_\infty + \frac{\sqrt{\lambda(B)}}{2\delta^2} R_\nu^{1/2} (\hat{\pi}_n) \, R_\nu^{1/2} (\hat{A}_n) \, .$$

Proposition II.V.11.- Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1°) Soit B un borélien de $\mathbb{R}^h$ tel que $0 < \lambda(B) < +\infty$,

C un borélien vérifiant le lemme II.V.8. et

$$\int_B \sup_{y\in C} \left|\frac{\partial q}{\partial y} (y,z) \, dz\right| < +\infty \, .$$

2°) Les hypothèses de la proposition II.V.6.

Alors :

$$\int_B |E_\nu \hat{g}_n(x)-g(x)|\, dx \leqslant \frac{R_\nu^{1/2}(\hat{\psi}_n,C)}{\sqrt{\lambda^{\otimes k}(C)}} \int_B \sup_{y\in C} |\frac{\partial q}{\partial y}(y,z)|\, dz$$

$$+ \frac{2a}{||\psi||_\infty^2} \frac{R_\nu(\hat{\psi}_n,C)}{\lambda^{\otimes k}(C)} \lambda(B) + \frac{||A||_\infty \lambda(B)}{2\delta^2 \sqrt{\lambda^{\otimes k}(C)}} R_\nu^{1/2}(\hat{\pi}_n,C)$$

$$+ \frac{||A||_\infty (\delta+||\pi||_\infty)\ \lambda(B)}{2\delta^2\ \lambda^{\otimes k}(C)} \int_C P_\nu(\hat{\pi}_n(y)\leqslant\delta)\, dy$$

$$+ \frac{2}{\delta} \frac{\sqrt{\lambda(B+B(0,\ 3\ ||\psi||_\infty)}}{\sqrt{\lambda^{\otimes k}(C)}} R_\nu^{1/2}(\hat{A}_n) \quad .$$

<u>*Démonstration*</u> :

$$E_\nu \hat{g}_n(x) = E_\nu \frac{1}{\lambda^{\otimes k}(C)} \int_C (a \wedge \hat{q}_n)\ (y\ ,\ x + \hat{\psi}_n(y))\, dy$$

$$|E_\nu \hat{g}_n(x)-g(x)| = \frac{1}{\lambda^{\otimes k}(C)} \left|\int_C \left[E_\nu(a \wedge \hat{q}_n)\ (y,\ x + \hat{\psi}_n(y)) - g(x)\right] dy\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^{\otimes k}(C)} \left|\int_C E_\nu((a \wedge \hat{q}_n)\ (y,x + \hat{\psi}_n(y)) - q(y,\ x + \hat{\psi}_n(y)))\, dy\right|$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{\otimes k}(C)} \left|\int_C E_\nu(q(y,x+ \hat{\psi}_n(y)) - q(y,x+\psi(y)))\, dy\right| .$$

On a : $\left|\int_C E_\nu(q(y,x+\hat{\psi}_n(y))-q(y,x+\psi(y)))dy\right| \leqslant ||\frac{\partial q}{\partial y}||_\infty \int_C E_\nu||\hat{\psi}_n(y)-\psi(y)||$

$$\leqslant ||\frac{\partial q}{\partial y}||_\infty\ (\lambda^{\otimes k}(C))^{1/2}\ R_\nu^{1/2}(\hat{\psi}_n,C)$$

et $\left|\int_C E_\nu(a \wedge \hat{q}_n(y,x+\hat{\psi}_n(y))-q(y,x+\hat{\psi}_n(y)))dy\right|$

$$\leqslant \left|\int_C E_\nu(a \wedge \hat{q}_n(y,x+\hat{\psi}_n(y))-q(y,x+\hat{\psi}_n(y)))\ 1_{\{||\hat{\psi}_n(y)||\leqslant 2||\psi||_\infty\}}(y)\, dy\right|$$

$$+ \left|\int_C E_\nu(a \wedge \hat{q}_n(y,x+\hat{\psi}_n(y))-q(y,x+\hat{\psi}_n(y)))\ 1_{\{||\hat{\psi}_n(y)||>2||\psi||_\infty\}}(y)\, dy\right|$$

$$\leq \left|\int_C E_\nu(a \wedge \hat{q}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))-q(y,x+\hat{\vartheta}_n(y)))\ 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}}(y)\ dy\right|$$

$$+ 2a \int_C P_\nu(||\hat{\vartheta}_n(y)|| > 2\ ||\vartheta||_\infty)\ dy\ .$$

$$\int_C P_\nu(||\hat{\vartheta}_n(y)||>2||\vartheta||_\infty)\ dy \leq \int_C P_\nu(||\hat{\vartheta}_n(y)-\vartheta(y)||>||\vartheta||_\infty)\ dy$$

$$\leq R_\nu(\hat{\vartheta}_n,C)\ ||\vartheta||_\infty^{-2}$$

il reste seulement à majorer

$$\left|\int_C E_\nu(a \wedge \hat{q}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))-q(y,x+\hat{\vartheta}_n(y)))\ 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}}(y)\ dy\right|$$

puisque $a \geq ||g||_\infty$ on a : $|a \wedge \hat{q}_n - q| \leq |\hat{q}_n - q|$

ce qui nous permet d'écrire :

$$|E_\nu(a \wedge \hat{q}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))-q(y,x+\hat{\vartheta}_n(y)))\ 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}}(y)|$$

$$\leq E_\nu|\hat{q}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))-q(y,x+\hat{\vartheta}_n(y)))|\ 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}}(y)$$

$$\leq E_\nu\left|\frac{\hat{A}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))}{\max(\hat{\pi}_n(y),\delta)} - \frac{A(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))}{\pi(y)}\right|\ 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}}(y)$$

$$\leq E_\nu\left|\frac{\hat{A}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))}{\hat{\pi}_n(y)} - \frac{A(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))}{\pi(y)}\right|\times 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}\cap\{\hat{\pi}_n(y)>\delta\}}(y)\ +$$

$$E_\nu\left|\frac{\hat{A}_n(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))}{\delta} - \frac{A(y,x+\hat{\vartheta}_n(y))}{\pi(y)}\right|\ \times\ 1_{\{||\hat{\vartheta}_n(y)||\leq 2||\vartheta||_\infty\}\ \cap\ \{\hat{\pi}_n(y)\leq\delta\}}(y)$$

$$\leq \frac{1}{\delta} E_\nu \, |\hat{A}_n(y,x+\hat{\psi}_n(y))-A(y,x+\hat{\psi}_n(y))| \; 1_{\{||\hat{\psi}_n(y)||\leq 2||\psi||_\infty\}}(y)$$

$$+ \frac{||A||_\infty}{2\delta^2} E_\nu |\hat{\pi}_n(y)-\pi(y)| + \frac{1}{\delta} E_\nu \, |\hat{A}_n(y,x+\hat{\psi}_n(y))-A(y,x+\hat{\psi}_n(y))|$$

$$+ \frac{||A||_\infty}{2\delta^2} (\delta+||\pi||_\infty) \, P_\nu(\hat{\pi}_n(y)\leq\delta) \quad .$$

Donc pour avoir le résultat de la proposition, il suffit de prendre l'intégrale sur le borélien B.

CHAPITRE III

TEST DE LINEARITE POUR UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF

I - INTRODUCTION.-

On considère trois processus (X_n) ; (Y_n) et (ε_n) ; $n \in \mathbb{N}$, définis sur un même espace probabilisé (Ω, A, P) et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et une fonction ψ mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, bornée et qui relie les processus comme suit :

$$Y_n = \psi(X_n) + \varepsilon_n , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.0}$$

. (ε_n) est une suite de v.a.i.i.d., dont la loi est absolument continue par rapport à λ, de densité notée g, on suppose que celle-ci atteint son unique maximum à l'origine et que $E\,\varepsilon_o^2 < +\infty$.

. ε_n est indépendante de X_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

. La loi de (X_n, Y_n) est absolument continue par rapport λ^2, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, de densité notée $f(.,.)$.

Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, on s'intéresse au test de linéarité : l'hypothèse nulle : il existe un réel a tel que $\psi(t) = at$ pour tout t élément de I. Contre l'alternative : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\psi(t) \neq at$ pour tout t élément de I.

II - DEFINITION DES ESTIMATEURS.-

Soient K une fonction réelle mesurable positive, symétrique, dérivable ; une suite d'intervalles $[-A_n , A_n]$ de $\mathbb{R}$ avec $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et une suite h_n décroissant vers zéro.

On pose comme estimateur de $f(.,.)$ celui donné par la méthode du noyau :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad , \qquad \hat{f}_n(x,y) = \frac{1}{n\, h_n^2} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) K\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)$$

le noyau choisit ici, n'est pas le même que celui qui a été donné dans le chapitre II, seulement pour simplifier certaines majorations.

On retient comme estimateur de $\vartheta(t)$, une fonction $\hat{\vartheta}_n(t)$ mesurable vérifiant :

$$\hat{f}_n(t, \hat{\vartheta}_n(t)) = \sup_{|y|\leq A_n} \hat{f}_n(t,y) .$$

L'estimateur utilisé est un estimateur du mode conditionnel.

Pour les convergences de $\hat{\vartheta}_n(t)$ et $\hat{f}_n(t,y)$ nous renvoyons à [3].

L'idée générale pour tester l'hypothèse nulle contre l'hypothèse alternative est de trouver la loi limite de

$$T_n = \sup_{t\in I} (n\, h_n^4)^{1/2} \frac{|\hat{\vartheta}_n(t)-\vartheta(t)|\, \left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(t, \hat{\vartheta}_n(t))\right|}{\left|\int K^2(x)\, dx \int K'^2(x)\, dx\right|^{1/2}} \quad \text{sous l'hypothèse nulle.}$$

Pour cela nous allons utilisé l'approximation du processus T_n par un processus gaussien stationnaire.

Nous posons :

1) $I = [0,1]$, car la démonstration sera la même pour tout intervalle I compact de $\mathbb{R}$.

2) $A_n = n^{+\gamma}$ avec $0 < \gamma < \frac{5}{4}$

et $h_n = n^{-\eta}$ avec $\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{5}$

pour avoir une bonne convergence de notre processus T_n.

3) les fonctions de répartition de (X_t) ; $(Y_t|X_t)$ seront notées G et F, de plus la densité de la loi marginale de (X_t) sera notée $f^{\bullet}(x)$.

Proposition III.II.1.- Sous les hypothèses :

H_2 : $\operatorname{supp} K = [-C , C]$

H_3 : $K(C) = K'(C) = 0$

H_4 : $n\, h_n^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

H_5 : $\|\frac{\partial f}{\partial x}\|_\infty + \|\frac{\partial f}{\partial y}\|_\infty + \|\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\|_\infty + \|f\|_\infty + \|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\|_\infty + \|\psi\|_\infty < +\infty$

H_6 : K est 3 fois dérivable.

H_7 : les fonctions inverses F^I, G^I, $\frac{\partial F^I(v|G^I(u))}{\partial u}$, $\frac{\partial F^I(v|G^I(u))}{\partial v}$

$\frac{\partial^2 F(v|G^I(u))}{\partial u\, \partial v}$ existent et soient bornées.

H_8 : $\inf\limits_{t\in[0,1]} f^{\bullet}(t) > 0$

H_9 : $\inf\{f(u,v)\ u \in [-1, C+1],\ |v| \leq \|\psi\|_\infty + C\} > 0$

H_{10} : $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ existe et soit bornée.

on a le résultat suivant :

$$P\left(\left(2 \log \frac{1}{h_n}\right)^{1/2} \left(\sup_{0 \le t \le 1} (n h_n^4)^{1/2} \frac{|\hat{\psi}_n(t)-\psi(t)| \left| \frac{\partial^2 f_n}{\partial y^2}(t, \hat{\psi}_n(t)) \right|}{\left[\int K^2(x)\, dx \int K'^2(x)\, dx\right]^{1/2}} - d_n(a) \right) < z \right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left[- 2 \exp - z\right] \qquad \text{sous l'hypothèse nulle du test}$$

avec

$$d_n(a) = \left(2 \log \frac{1}{h_n}\right)^{1/2} + \frac{1}{\left(2 \log \frac{1}{h_n}\right)^{1/2}} \log \left(\frac{\frac{\int K'^2(x)\, dx}{2 \int K^2(x)\, dx} + a^2 \frac{\int K''^2(x)\, dx}{\int K'^2(x)\, dx}}{2 \pi^2} \right)^{1/2}$$

Pour démontrer cette proposition on va procéder autrement, pour cela appliquons la formule de Taylor à $\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t,.)$ on obtient donc :

$$\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t,\psi(t)) - \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t, \hat{\psi}_n(t)) = (\psi(t) - \hat{\psi}_n(t)) \frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\psi}_n^*(t)) \tag{3.1}$$

où $\hat{\psi}_n^*(t)$ est un point aléatoire situé entre $\psi(t)$ et $\hat{\psi}_n(t)$. Pour n assez grand $\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\psi}_n^*(t))$ est p.s. non nul. Comme $\hat{\psi}_n(t)$ est le maximum de $\hat{f}_n(t,.)$ sur $[- A_n , A_n]$ l'équation (3.1) devient :

$$\psi(t) - \hat{\psi}_n(t) = \frac{\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t, \psi(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n^*(t))} \quad \text{p.s.}$$

posons

$$T_n(t) = (n h_n^4)^{1/2} \frac{|\hat{\psi}_n(t) - \psi(t)| \left| \frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\psi}_n(t)) \right|}{\left[\int K^2(x)\, dx \int K'^2(x)\, dx\right]^{1/2}}$$

d'après l'équation (3.2), $T_n(t)$ s'écrit comme suit :

$$T_n(t) = (n\, h_n^4)^{1/2} \frac{\left|\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t, \theta(t))\right|}{\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\theta}_n^*(t))\right|} \frac{\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\theta}_n(t))\right|}{\left[\int K^2(x)\, dx \int K'^2(x)\, dx\right]^{1/2}}$$

donc la loi limite de $\sup\limits_{t\in[0,1]} T_n(t)$ est la même que celle de

$$(n\, h_n^4)^{1/2} \sup_{t\in[0,1]} \frac{\left|\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t, \theta(t))\right|}{\left[\int K'^2(x)\, dx \int K^2(x)\, dx\right]^{1/2}}$$

à condition de montrer que :

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\theta}_n(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\theta}_n^*(t))}\right| \xrightarrow{P} 1 \quad , \quad n \to \infty \quad .$$

et

$$\inf_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\theta}_n(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\theta}_n^*(t))}\right| \xrightarrow{P} 1 \quad , \quad n \to \infty \quad .$$

III - RECHERCHE DE LA LOI LIMITE DE :

$$T_n = (n\,h_n^4)^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{\left|\frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t, \psi(t))\right|}{\left[\int K'^2(x)\,dx \int K^2(x)\,dx\right]^{1/2}}$$ sous l'hypothèse nulle.

Soit $\tilde{F}_n(x,y)$ la f.d.r. empirique de (X_t, Y_t)

$F_o(x,y)$ la f.d.r. théorique de (X_t, Y_t) .

Considérons la fonction empirique $Z_n(u,v)$ définie par

$$Z_n(u,v) = \sqrt{n}\,(\tilde{F}_n(u,v) - F_o(u,v))$$

et posons

$$V_n^o(t) = (n\,h_n^4)^{1/2} \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial y}(t, \psi(t)) \tag{3.3}$$

$$V_n(t) = V_n^o(t) - E\,V_n^o(t) \tag{3.4}$$

donc $$V_n^o(t) = V_n(t) + E\,V_n^o(t) .$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$V_n(t) = \frac{1}{h_n} \iint_\Delta K\left(\frac{t-u}{h_n}\right) K'\left(\frac{\psi(t) - v}{h_n}\right) dz_n(u,v) . \tag{3.5}$$

où

$$\Delta = [t - c\,h_n , t + c\,h_n] \times [\psi(t) - c\,h_n, \psi(t) + c\,h_n] .$$

Proposition III.III.2.- Sous les hypothèses H_2 , H_3 , H_4 et H_5 on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |E\,V_n^o(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Démonstration :

$$E\, V_n^o(t) = \frac{(n\, h_n^4)^{1/2}}{h_n} \iint K(u)\, K'(v)\, f(t + u\, h_n, \vartheta(t) + v\, h_n)\, du\, dv$$

$$= \frac{(n\, h_n^4)^{1/2}}{h_n} \iint K(u)\, K'(v)\, \left[f(t + u\, h_n, \vartheta(t) + v\, h_n) - f(t, \vartheta(t))\right] du\, dv$$

$$|E\, V_n^o(t)| \leq (n\, h_n^4)^{1/2} \iint K(u)\, K'(v)\, \left[|u|\, \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_\infty + |v|\, \left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_\infty\right] du\, dv$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \; .$$

Pour déterminer la loi limite de T_n sous l'hypothèse nulle du test, nous allons introduire certains processus notés $V_{n,o}(t)$; $V_{n,1}(t)$; $V_{n,2}(t)$ et $V_{n,3}(t)$ qui seront précisés au fur et à mesure ultérieurement, et on écrit :

$$\left\| \frac{V_n(.)}{\left[\int K^2(x)\, dx \int K'^2(x)\right]^{1/2}} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{V_{n,o}(.) - V_n(.)}{\left[\int K^2(x)\, dx \int K'^2(x)\right]^{1/2}} \right\|_\infty$$

$$+ \left\| \frac{V_{n,o}(.) - V_{n,1}(.)}{\left[\int K^2(x) \int K'^2(x)\right]^{1/2}} \right\|_\infty + \left\| \frac{V_{n,1}(.)}{\left[\int K^2(x) \int K'^2(x)\right]^{1/2}} - \frac{V_{n,2}(.)}{\left[\int K^2(x)\, dx\right]^{1/2}} \right\|_\infty$$

$$+ \left\| \frac{V_{n,2}(.)}{\left[\int K^2(x)\, dx\right]^{1/2}} - \frac{V_{n,3}(.)}{\left[\int K^2(x)\, dx\right]^{1/2}} \right\|_\infty + \left\| \frac{V_{n,3}(.)}{\left[\int K^2(x)\, dx\right]^{1/2}} \right\|_\infty$$

Puis on va démontrer que : $\|V_{n,o} - V_{n,1}\|_\infty$; $\|V_{n,1} - V_{n,2}\|_\infty$; $\|V_{n,2} - V_{n,3}\|_\infty$; $\|V_{n,o} - V_n\|_\infty$ tendent vers zéro en probabilité quand $n \to \infty$ suivant une certaine vitesse, et donner la loi limite de $\|V_{n,3}\|_\infty$.

Définition III.III.3.- Soit U_1 , U_2 , U_3 ,..., U_n , une suite de variables aléatoires réelles uniformément distribuées sur $[0,1]^p$, $p \geq 1$. Soit $E_n(x)$ la fonction de répartition empirique basée sur l'échantillon U_1 ,..., U_n , alors : pour tout $x : (x_1,\ldots,x_p) \in [0,1]^p$

$$Z_n^*(x) = \sqrt{n}\ (E_n(x) - \prod_{j=1}^{p} x_j)$$

est appelée le processus empirique basé sur $U_1,\ldots,U_n$.

Définition III.III.4.- Un pont brownien $\{B(x),\ x \in [0,1]^p\}$ est un processus gaussien vérifiant :

$$EB(x) = 0$$

$$EB(x)\ B(y) = \prod_{j=1}^{p} \min(x_j,y_j) - \prod_{j=1}^{p} x_j\ y_j$$

$$x = (x_1,\ldots,x_p) \quad \text{et} \quad y = (y_1,\ldots,y_p)\ .$$

Remarques :

1) Un pont brownien $\{B(x)\}$ peut être représenté en terme d'un processus de Wiener standard W , pour cela il suffit de poser :

$$B(x) = W(x) - x_1\ x_2 \ldots x_p\ W(1,\ldots,1)$$

où $EW(x) = 0$

et $$EW(x)\ W(y) = \prod_{j=1}^{p} \min(x_j,y_j) \quad .$$

2) Z_n^* et B sont considérés comme des éléments de l'espace $D([0,1]^p)$.

Considérons la transformation T donnée par :

$$T(X,Y) = (G(X), F(Y|X)) = (X^*,Y^*) \quad ,$$

d'après un théorème de M. Rosenblatt [21], (X^*,Y^*) est uniformément distribuée sur $[0,1]^2$.

Posons :

$$Z_n^*(u^*,v^*) = \sqrt{n}(\tilde{F}_n^*(u^*,v^*) - F^*(u^*,v^*))$$

$\tilde{F}_n^*(u^*,v^*)$ est la f.d.r. empirique de l'échantillon (X_t^*,Y_t^*)

$F^*(u^*,v^*)$ est la f.d.r. théorique de l'échantillon (X_t^*,Y_t^*)

et écrivons :

$$V_{n,o}(t) = \frac{1}{h_n} \iint_\Delta K(\frac{t-u}{h_n})\ K'(\frac{\varphi(t)-v}{h_n})\ dz_n^*(T(u,v))$$

$$= \frac{1}{h_n} \iint_{T(\Delta)} K(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n})\ K'(\frac{\varphi(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n})\ dz_n^*(u^*,v^*) \qquad (3.6)$$

où $\quad T(\Delta) = T([t - c\ h_n\ ,\ t + c\ h_n] \times [\varphi(t) - c\ h_n\ ,\ \varphi(t) + c\ h_n])$

$$= [x_\ell^*,\ x_u^*] \times [y_\ell^*,\ y_v^*]\ .$$

Nous pouvons remarquer que les intégrales données par les équations (3.5) et (3.6) sont égales, donc

$$||V_n - V_{n,o}||_\infty = 0 \ .$$

Pour montrer que $||V_{n,o} - V_{n,1}||_\infty$ tend vers zéro suivant une certaine vitesse, nous avons besoin du théorème suivant :

<u>*Théorème III.III.5.*</u> [2].- Sur un espace probabilisé (Ω,G,P) il existe deux versions $\bar{Z}_n^*$ et B_n de Z_n^* et de B tel que :

$$\sup_{u\in[0,1]^p} |\bar{Z}_n^*(u) - B_n(u)| = O((\text{Log } n)^p\, n^{-1/2})$$

avec une probabilité égale à 1.

Posons :

$$V_{n,1}(t) = \frac{1}{h_n} \iint_\Delta K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\psi(t)-v}{h_n})\, dB_n(T(u,v))$$

$$= \frac{1}{h_n} \iint_{T(\Delta)} K(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n})\, K'(\frac{\psi(t)-F^I(v^*|G^I(u^*)}{h_n})\, dB_n(u^*,v^*) \qquad (3.7)$$

Proposition III.III.6.- Sous les hypothèses H_2 ; H_3 ; H_6 ; H_7 ; H_8 on a :

$$\sup_{t\in[0,1]} |V_{n,o}(t)-V_{n,1}(t)| = ||V_{n,o}-V_{n,1}||_\infty = O((nh_n^2)^{-1/2}(\text{Log } n)^2)$$

avec une probabilité égale à 1.

Démonstration : On pose :

$$p_{n,t}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\psi(t)-v}{h_n})$$

$$V'_{n,o}(t) = \sqrt{h_n}\, V_{n,o}(t) = \iint_\Delta p_{n,t}(u,v)\, dz_n^*(T(u,v))$$

$$T_u*(\Delta) = [x_\ell^*,x_u^*]$$

$$T_v*(\Delta) = [y_\ell^*,y_v^*]$$

$$T(\Delta) = T_u*(\Delta) \times T_v*(\Delta)$$

$$p^1_{n,t}(u^*,v^*) = p_{n,t}(G^I(u^*),\, F^I(v^*|G^I(u^*)) = p_{n,t}(T^I(u^*,v^*)) ,$$

par intégration par parties (cf. appendice 2) on obtient :

$$V'_{n,o}(t) = [p^1_{n,t}(u^*,v^*)\ Z^*_n(u^*,v^*)]_{T(\Delta)} + \int_{T_u{}^*(\Delta)} [\frac{\partial p_{n,t}}{\partial u^*}(T^I(u^*,y^*_u))\ Z^*_n(u^*,y^*_u)$$

$$- \frac{\partial p_{n,t}}{\partial u^*}(T^I(u^*,y^*_\ell))\ Z^*_n(u^*,y^*_\ell)]\ du^*$$

$$+ \iint_{T(\Delta)} \frac{\partial^2 p_{n,t}}{\partial u^*\ \partial v^*}(T^I(u^*,v^*))\ Z^*_n(u^*,v^*)\ du^*\ dv^*$$

$$- \int_{T_v{}^*(\Delta)} [\frac{\partial p_{n,t}}{\partial v^*}(T^I(x^*_u,v^*))\ Z^*_n(x^*_u,v^*)$$

$$- \frac{\partial p_{n,t}}{\partial v^*}(T^I(x^*_\ell,V^*))\ Z^*_n(x^*_\ell,v^*)]\ dv^*$$

Sous H_2 et H_3 $V'_{n,o}$ devient :

$$V'_{n,o}(t) = \iint_{T(\Delta)} \frac{\partial^2}{\partial u^*\ \partial v^*}\ (p_{n,t}(T^I(u^*,v^*))\ Z^*_n(u^*,v^*)\ du^*\ dv^*$$

$$\frac{\partial p_{n,t}}{\partial v^*}(T^I(u^*,v^*)) = - \frac{1}{h_n\sqrt{h_n}}\ \frac{\partial F^I(v^*|G^I(u^*))}{\partial v^*} \times$$

$$K(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n})\ K''(\frac{\emptyset(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n})$$

$$\frac{\partial^2 p_{n,t}}{\partial u^*\ \partial v^*}(T^I(u^*,v^*)) = - \frac{1}{h_n\sqrt{h_n}}\ \frac{\partial^2 F^I(v^*|G^I(u^*))}{\partial u^*\ \partial v^*}\ K(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n}) \times K''(\frac{\emptyset(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n}$$

$$+ \frac{1}{h_n^2\sqrt{h_n}}\ \frac{\partial G^I(u^*)}{\partial u^*}\ \frac{\partial F^I(v^*|G^I(u^*))}{\partial v^*}\ K'(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n})$$

$$\times K''(\frac{\emptyset(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n})$$

$$+ \frac{1}{h_n^2\sqrt{h_n}}\ \frac{\partial F^I(v^*|G^I(u^*))}{\partial v^*}\ \frac{\partial F^I(v^*|G^I(u^*))}{\partial u^*}$$

$$\times K(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n})\ K''(\frac{\emptyset(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n})$$

par un calcul similaire appliqué à

$$V'_{n,1}(t) = \sqrt{h_n}\, V_{n,1}(t) = \iint_{T(\Delta)} \frac{\partial^2}{\partial u^* \, \partial v^*} (p_{n,t}(T^I(u^*,v^*))) \quad B_n(u^*,v^*)\, du^*\, dv^* \ .$$

On obtient :

$$|V_{n,1}(t)-V_{n,o}(t)| \leq \frac{1}{h_n^2} \left|\left|\frac{\partial^2 F^I}{\partial u^* \, \partial v^*}\right|\right|_\infty \iint_{T(\Delta)} K\left(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n}\right) \times$$

$$\left|K''\left(\frac{\vartheta(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n}\right)\right| \ ||B_n-Z_n^*||_\infty\, du^*\, dv^*$$

$$+ \frac{1}{h_n^3} \left|\left|\frac{\partial G^I}{\partial u^*}\right|\right|_\infty \left|\left|\frac{\partial F^I}{\partial v^*}\right|\right|_\infty \iint_{T(\Delta)} \left|K'\left(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n}\right)\right|$$

$$\left|K''\left(\frac{\vartheta(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n}\right)\right| \ ||B_n-Z_n^*||_\infty\, du^*\, dv^*$$

$$+ \frac{1}{h_n^3} \left|\left|\frac{\partial F^I}{\partial u^*}\right|\right| \ \left|\left|\frac{\partial F^I}{\partial v^*}\right|\right|_\infty \iint_{T(\Delta)} K\left(\frac{t-G^I(u^*)}{h_n}\right) \times$$

$$\left|K'''\left(\frac{\vartheta(t)-F^I(v^*|G^I(u^*))}{h_n}\right)\right| \ ||B_n-Z_n^*||_\infty\, du^*\, dv^*$$

par application des hypothèses citées et le théorème III.III.5. on obtient :

$$||V_{n,o}-V_{n,1}|| = O((n\, h_n^2)^{-1/2}\, (\mathrm{Log}\ n)^2)$$

avec une probabilité égale à 1.

Théorème III.III.7.- [5]

Soit $U(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$; un processus gaussien stationnaire avec une moyenne nulle et dont la fonction de covariance $R(t)$ vérifie :

1°) $R(t) = 1 - D|t|^\beta + O(|t|^\beta)$ $\quad 0 < \beta \leq 2$, quand $t \to 0$

2°) $\int_{\mathbb{R}} R^2(t)\, dt < +\infty$.

Soit $$d(t) = (2 \log t)^{1/2} + \{\frac{1}{2}(\frac{2}{\beta} - 1) \log \log t + \log \frac{H_\beta}{(2\pi)^{1/2}} D^{1/\beta}\, 2^{(\frac{2}{\beta}-1)\frac{1}{2}}\} (2 \log t)^{-1/2}$$

où $$H_\beta = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^{+\infty} e^s \,(\sup_{0\leq x\leq T} Z(x) > s)\, ds \quad ,$$

et $Z(x)$ est un processus gaussien vérifiant

$$EZ(x) = -|x|^\beta$$

$$\mathrm{Cov}(Z(x), Z(y)) = |x|^\beta + |y|^\beta - |x-y|^\beta$$

si

$$M_T = \max\{U(t),\ 0 \leq t \leq T\} \quad .$$

Alors :

$$P((2 \log T)^{1/2} (M_T - d(T)) < z) \xrightarrow[T\to+\infty]{} e^{-2e^{-z}} \quad .$$

Posons :

$$V_{n,2}(t) = \frac{1}{h_n} \frac{\iint_\Delta K(\frac{u-t}{h_n})\, K'(\frac{v-\varphi(t)}{h_n})\, (f(u,v))^{1/2}}{[\int K'^2(x)\, dx]^{1/2}} dW_n(u,v)$$

et

$$V_{n,3}(t) = \frac{1}{h_n} \frac{\iint_\Delta K(\frac{u-t}{h_n})\, K'(\frac{v-\varphi(t)}{h_n})}{[\int_{-c}^{c} K'^2(x)\, dx]^{1/2}} dW_n(u,v)$$

sous l'hypothèse nulle du test (i.e. $\vartheta(t) = at \quad \forall t \in [0,1]$) $V_{n,3}(t)$ est un processus gaussien centré stationnaire, sa fonction de covariance est donnée par :

$$R_3(t,s) = \frac{1}{h_n^2 \int K'^2(x)\,dx} \iint 1_{\Delta_t \cap \Delta_s}(u,v)\, K(\frac{u-t}{h_n})\, K'(\frac{v-at}{h_n}) \times K(\frac{u-s}{h_n})\, K'(\frac{v-as}{h_n})\, du\, dv$$

donc

$$R_3(t) = R_3(t,o) = \frac{1}{h_n^2 \int K'^2(x)\,dx} \int K(\frac{u+t}{h_n})\, K(\frac{u}{h_n})\, du \int K'(\frac{v+at}{h_n})\, K'(\frac{v}{h_n})\, dv$$

on peut vérifier facilement que pour tout $t \in [0, \frac{1}{h_n}]$, le processus $V_{n,3}(t\, h_n)$ a pour fonction de covariance

$$R_{n,3}(t\, h_n) = \frac{1}{\int K'^2(x)\,dx} \int K(u+t)\, K(u)\, du \int K'(v+at)\, K'(v)\, dv$$

si on pose

$$U(t) = \int \frac{K(t-x)\, K'(\vartheta(t)-y)}{\left[\int K'^2(x)\,dx\right]^{1/2}}\, dW_n(x,y)$$

on constate que sous l'hypothèse nulle du test $U(t)$ est un processus gaussien centré stationnaire dont la fonction de covariance est donnée par

$$R(t) = \frac{\int K(t+x)\, K(x)\, dx \int K'(x+at)\, K'(x)\, dx}{\int K'^2(x)\,dx} .$$

On peut donc conclure que $U(t)$ et $V_{n,3}(t\, h_n)$ ont même loi pour tout $t \in [0, \frac{1}{h_n}]$.

Lemme III.III.8.- Sous l'hypothèse nulle du test ; et sous H_2 ; H_3 on a :

$$P\left(\left(2\log\frac{1}{h_n}\right)^{1/2}\left(\max_{t\in[0,1/h_n]}\left|\frac{V_{n,3}(t\,h_n)}{\left[\int K^2(x)\,dx\right]^{1/2}}\right| - d\left(\frac{1}{h_n}\right)\right) < z\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2e^{-z}}$$

où $d(\frac{1}{h_n})$ est la constante donnée dans le théorème III.III.7.

Démonstration : Soit

$$R^1(t) = \int K(t+x)\,K(x)\,dx$$

$$R^2(t) = \int K(x+at)\,K'(x)\,dx$$

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{h_n}\right]$$

Sous l'hypothèse nulle du test :

$$\vartheta(t) = at\ ,\quad \forall t \in [0,1]$$

$$R^1(t) = \int K^2(x)\,dx - \left(\int (K'(x))^2 dx\right)\frac{t^2}{2} + O(t^2)\quad ;\quad \text{quand}\quad t \to 0$$

$$R^2(t) = \int (K'(x))^2\,dx - \left(\int (K''(x))^2\,dx\right)\frac{(at)^2}{2} + O(t^2)\ ;\quad \text{quand}\quad t \to 0$$

$$\begin{aligned} R^1(t)R^2(t) = {} & \left(\int K^2(x)\,dx\right)\left(\int K'^2(x)\,dx\right) - \frac{1}{2}\left(\int K^2(x)\,dx\right)\left(\int K''^2(x)\,dx\right)(at)^2 \\ & - \frac{t^2}{2}\left(\int K'^2(x)\,dx\right)\left(\int K'^2(x)\,dx\right) + \\ & + \frac{a^2t^4}{4}\left(\int K'^2(x)\,dx\right)\left(\int K''^2(x)\,dx\right) + O(t^2),\quad t \to 0 \end{aligned}$$

d'où

$$R(t) = \int K^2(x)\,dx - \frac{t^2}{2}\left[\int K'^2(x)\,dx + \frac{a^2\int K^2(x)\,dx\int K''^2(x)\,dx}{\int K'^2(x)\,dx}\right]$$

$$+ O(t^2)\ ;\quad \text{quand}\quad t \to 0\quad .$$

Si on considère le processus $U_o(t)$ définie par :

$$U_o(t) = \frac{U(t)}{\left[\int K^2(x)\,dx\right]^{1/2}} \quad \text{pour tout} \quad t \in \left[0, \frac{1}{h_n}\right]$$

on a :

$$R_o(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\left[\frac{\int K'^2(x)\,dx}{\int K^2(x)\,dx} + a^2 \frac{\int K''^2(x)\,dx}{\int K'^2(x)\,dx}\right] + O(t^2) \ ; \text{ quand } \ t \longrightarrow 0$$

si on compare $R_o(t)$ avec les données du théorème III.III.7., on voit que :

$$\beta = 2$$

$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{\int K'^2(x)\,dx}{\int K^2(x)\,dx} + a^2 \frac{\int K''^2(x)\,dx}{\int K'^2(x)\,dx}\right]$$

de plus $\int R^2(t)\,dt$ est finie.

Donc les 2 conditions du théorème III.III.7. sont vérifiées par le processus $U_o(t)$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{h_n}\right]$; d'où le résultat :

$$P\left(\left(2 \log \frac{1}{h_n}\right)^{1/2} \left(\max_{t\in[0,1/h_n]} |U_o(t)| - d\left(\frac{1}{h_n}\right)\right) < z\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2e^{-z}}$$

$$\Longleftrightarrow P\left(\left(2 \log \frac{1}{h_n}\right)^{1/2} \left(\max_{t\in[0,1/h_n]} \left|\frac{U(t)}{\left[\int K^2(x)\,dx\right]^{1/2}}\right| - d\left(\frac{1}{h_n}\right)\right) < z\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2e^{-z}}$$

$V_{n,3}(t\,h_n)$ et $U(t)$ ont même loi pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{h_n}\right]$ d'où le résultat du lemme.

<u>*Remarques*</u> :

1) pour $\beta = 2$ on a $H_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

2) pour $\beta = 1$ on a $H_1 = 1$, pour les vérifier [cf. 18].

Lemme III.III.9. [26].-

Soit $\{X(x,t)\ ;\ t,\ s \in (0, +\infty)\}$ un processus gaussien centré de covariance

$$R(s_1,t_1,s_2,t_2) = \min(s_1,s_2)\ \min(t_1,s_2)$$

pour (s_1,t_1), $(s_2,t_2) \in [0,S] \times [0,T]$ $(S;T \geq 1)$. Alors :

$$P(\omega : \limsup_{\substack{|s_2-s_1|=\varepsilon\downarrow 0 \\ |t_2-t_1|=\eta\downarrow 0}} \frac{\Delta \times [(s_2,t_2),(s_1,t_1),\omega]}{[2\varepsilon\eta \log \frac{1}{\varepsilon\eta}]^{1/2}} = 1) = 1$$

où $\Delta \times [(s_2,t_2),(s_1,t_1)]$ est l'accroissement du processus X sur $[t_1,t_2] \times [s_1,s_2]$.

Proposition III.III.10.- Sous les hypothèses H_2 , H_3 , H_5 et H_9 on a :

$$||V_{n,2}-V_{n,3}||_\infty = \sup_{0\leq t\leq 1} |V_{n,2}(t)-V_{n,3}(t)| = O((h_n^2 \log \frac{1}{h_n^2})^{1/2})$$

avec une probabilité égale à 1.

Démonstration : Posons $\mu = |\int K'^2(x)\ dx|^{1/2}$

$$V_{n,2}(t) = \frac{1}{h_n \cdot \mu [f(t,\varphi(t))]^{1/2}} \iint K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\varphi(t)}{h_n})\ \sqrt{f(u,v)}\ dW_n(u,v)$$

par intégration par parties (appendice 2) on obtient

$$V_{n,2}(t) = -\frac{1}{h_n \cdot \mu} \iint \frac{\partial}{\partial u} [K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\varphi(t)}{h_n})\ \sqrt{f(u,v)}]\ W_n(u,dv)$$

$$+ \frac{1}{h_n \cdot \mu} \int_{\Delta_v} [K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\varphi(t)}{h_n})\ \sqrt{f(u,v)}\ W_n(u,dv)]_{\Delta_u}$$

sous H_2 et H_3 , le second terme du second membre est nul.

Appliquons l'intégration par partie une deuxième fois

$$V_{n,2}(t) = -\frac{1}{h_n\mu}\int_{\Delta_u}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\sqrt{f(u,v)}\ W_n(u,v)\right]_{\Delta_v} du$$

$$+\frac{1}{\mu h_n}\iint_{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v}\left[K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\times\sqrt{f(u,v)}\right] W_n(u,v)\ du\ dv$$

sous H_2 , H_3 le premier terme est nul, il reste :

$$V_{n,2}(t) = \frac{1}{\mu h_n}\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v}\left[K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\times\sqrt{f(u,v)}\right] W_n(u,v)\right) du\ dv\ .$$

Explicitons $\dfrac{\partial^2}{\partial u\ \partial v}\left[K\left(\dfrac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\dfrac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\ \sqrt{f(u,v)}\right]$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\sqrt{f(u,v)}\right] = \frac{1}{h_n}\ K'\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\sqrt{f(u,v)}$$

$$+\frac{1}{2}\,K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)}{\sqrt{f(u,v)}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v}\left[K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\sqrt{f(u,v)}\right] = \frac{1}{h_n^2}\,K'\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K''\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\sqrt{f(u,v)}$$

$$+\frac{1}{2h_n}\,K'\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\frac{\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\sqrt{f(u,v)}}$$

$$+\frac{1}{2h_n}\,K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K''\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)}{\sqrt{f(u,v)}}$$

$$+K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u\ \partial v}(u,v)\ f(u,v) - \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{4\left[f(u,v)\right]^{3/2}}$$

par un calcul similaire on obtient :

$$V_{n,3}(t) = \frac{1}{\mu h_n}\iint_{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v}\left[K\left(\frac{u-t}{h_n}\right) K'\left(\frac{v-\psi(t)}{h_n}\right)\right]\ W_n(u,v)\ du\ dv$$

d'où

$$|V_{n,2}(t)-V_{n,3}(t)| = \frac{1}{\mu h_n} \left|\iint_\Delta \left[\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v} (K(\frac{u-t}{h_n})\ K(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\ \sqrt{f(u,v)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v} (K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\right]\ W_n(u,v)\ du\ dv\right|$$

H_2 et H_3 entraînent :

$$|V_{n,2}(t)-V_{n,3}(t)| = \frac{1}{\mu h_n} \left|\iint_\Delta \right|\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v} \left[(K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})(\sqrt{f(u,v)} - 1)\right]$$

$$\left[W_n(u,v) + W_n(t-ch_n,\ \psi(t)-ch_n) - W_n(u,\psi(t)-ch_n)-W_n(t-ch_n,v)\right] du\ dv$$

$\Delta W_n\left[(u,v),\ (t-ch_n,\psi(t)-ch_n)\right]$ est l'accroissement du processus W_n sur $[t-ch_n,u] \times [\psi(t)-ch_n,v]$

$$\Delta W_n\left[(u,v),(t-ch_n,\psi(t)-ch_n)\right] = W_n(u,v) + W_n(t-ch_n,\psi(t)-ch_n)$$

$$- W_n(u,\psi(t)-ch_n) - W_n(t-ch_n,v)|$$

$$\Longrightarrow |V_{n,2}(t)-V_{n,3}(t)| \leq \frac{1}{\mu h_n} \iint_\Delta \left|\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v} \left[K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\ (\sqrt{f(u,v)} - 1)\right]\right|$$

$$\times \left|\Delta W_n\left[(u,v),(t-ch_n,\psi(t)-ch_n)\right]\right|\ du\ dv$$

$$\cdot \left|\frac{\partial^2}{\partial u\ \partial v} \left[K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\ \sqrt{f(u,v)} - K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{h_n^2} \left|K'(\frac{u-t}{h_n})\ K''(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\right|\ \left|\sqrt{f(u,v)} - 1\right|$$

$$+ \frac{1}{h_n} \left|K'(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\right|\ \left|\frac{\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}}{2[f(u,v)]^{1/2}}\right|$$

$$+ \frac{1}{h_n} \left|K(\frac{u-t}{h_n})\ K''(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\right|\ \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial v}\ (u,v)}{2[f(u,v)]^{1/2}}\right|$$

$$+ \frac{1}{h_n} \left|K(\frac{u-t}{h_n})\ K'(\frac{v-\psi(t)}{h_n})\right|\ \left|\frac{2\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\ (u,v)\ f(u,v)\ -\ \frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}}{4[f(u,v)]^{3/2}}\right|$$

donc par application des hypothèses H_5 , H_9 et le lemme III.III.9. on obtient

$$|V_{n,2}(t)-V_{n,3}(t)| \leq (h_n^2 \log \frac{1}{h_n^2})^{1/2} \times \text{cste} \quad p.s.$$

d'où le résultat de la proposition :

$$||V_{n,2}-V_{n,3}||_\infty = O((h_n^2 \log \frac{1}{h_n^2})^{1/2})$$

avec une probabilité égale à 1.

$$V_{n,1}(t) = \frac{1}{h_n} \iint_\Delta K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\vartheta(t)-v}{h_n})\, dB_n(T(u,v))$$

d'après la remarque de la définition III.III.4., on peut écrire $V_{n,1}(t)$ comme suit :

$$V_{n,1}(t) = \frac{1}{h_n} \iint_\Delta K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\vartheta(t)-v}{h_n})\, dW_n(T(u,v)) -$$

$$\frac{1}{h_n} \iint_\Delta K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\vartheta(t)-v}{h_n})\, f(u,v)\, du\, dv\, W_n(1,1)$$

on peut remarquer que $\dfrac{\iint_\Delta K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\vartheta(t)-v}{h_n})}{h_n \left[\int K'^2(x)\, dx\right]^{1/2}} dW_n(T(u,v))$ et $V_{n,2}(t)$ sont 2 processus équivalents et que

$$\frac{1}{h_n} \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\left|\iint K(\frac{t-u}{h_n})\, K'(\frac{\vartheta(t)-v}{h_n})\, f(u,v)\, du\, dv\right|\, |W_n(1,1)|}{\left[\int K'^2(x)\, dx\right]^{1/2}}$$

tend en probabilité vers zéro quand n tend vers ∞ .

IV - CONSTRUCTION D'UNE REGION DE CONCENTRATION ET D'UN TEST.-

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))\right|}{\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right|} \quad \text{et} \quad \inf_{0\leq t\leq 1} \frac{\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))\right|}{\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n)\right|}$$

Proposition III.IV.1.- Sous les hypothèses H_2 , H_3 , H_5 et H_{10} on a :

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \sup_{|y|\leq A_n} \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

Démonstration :

Posons
$$L_n(x,y) = \frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(x,y)$$

$$L(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \quad .$$

Soit k_n une suite d'entier qui tend vers l'infini avec n .

$$\Delta_{n,i,j} = \sup_{\frac{i}{k_n}\leq x\leq\frac{i+1}{k_n}} \ \sup_{\frac{j\,A_n}{k_n}\leq y\leq\frac{(j+1)A_n}{k_n}} |L_n(x,y) - L(x,y)| \tag{3.8}$$

avec $i = 0,\ldots,k_n-1$

$j = -k_n ,\ldots, 0 ,\ldots, k_n-1$

$$\Delta_n = \sup_{0\leq i\leq k_n-1} \ \sup_{-k_n\leq j\leq k_n-1} \Delta_{n,i,j}$$

$$\Delta_{n,j} = \sup_{\frac{j A_n}{k_n}\leq y\leq \frac{(j+1)}{k_n} A_n} |L_n(x,y) - E\, L_n(x,y)|$$

$$\leq |L_n(x, \frac{j A_n}{k_n}) - E\, L_n(x, \frac{j A_n}{k_n})| +$$

$$+ \sup_{\frac{j A_n}{k_n}\leq y\leq \frac{(j+1)A_n}{k_n}} |E\, L_n(x,y) - E\, L_n(x, \frac{jA}{k_n})|$$

$$+ \sup_{\frac{j A_n}{k_n}\leq y\leq \frac{(j+1)A_n}{k_n}} |L_n(x,y) - L_n(x, \frac{j A_n}{k_n})|$$

. $$|E\, L_n(x,y) - E\, L_n(x, \frac{j A_n}{k_n})| = \frac{1}{n\, h_n^4} \left| \sum_{j=1}^{n} EK(\frac{x-X_i}{h_n}) \left[K''(\frac{y-Y_i}{h_n}) - K''(\frac{\frac{j A_n}{k_n} - Y_i}{h_n})\right]\right.$$

$$\leq \frac{1}{h_n^2\, k_n} A_n \left|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|_\infty \int |K(u)| \quad |K''(v)| \,du\, dv \,. \tag{3.9}$$

. $$\sup_{\frac{j A_n}{k_n}\leq y\leq \frac{(j+1)A_n}{k_n}} |L_n(x,y) - L_n(x, \frac{j A_n}{k_n})| \leq \frac{||K||_\infty\, ||K^{(3)}||_\infty A_n}{k_n\, h_n^5} \,. \tag{3.10}$$

(3.9) et (3.10) $\Longrightarrow$ $$\Delta_{n,j} \leq |L_n(x, \frac{j A_n}{k_n}) - E\, L_n(x, \frac{j A_n}{k_n})|$$

$$+ \frac{||K||_\infty\, ||K^{(3)}||_\infty\, A_n}{k_n\, h_n^5} + \frac{A_n \left|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|_\infty \int K(u)\, du \int |K''(v)|\, dv}{k_n\, h_n^2}$$

(3.11)

$$(3.8) \Longrightarrow \Delta_{n,i,j} \leqslant \sup_{\frac{i}{k_n} \leqslant x \leqslant \frac{i+1}{k_n}} \sup_{\frac{j A_n}{k_n} \leqslant y \leqslant \frac{(j+1)A_n}{k_n}} |L_n(x,y) - E\, L_n(x,y)|$$

$$+ \sup_{\frac{i}{k_n} \leqslant x \leqslant \frac{i+1}{k_n}} \sup_{\frac{j A_n}{k_n} < y \leqslant \frac{(j+1)A_n}{k_n}} |E\, L_n(x,y) - L(x,y)|$$

$$\leqslant \sup_{\frac{i}{k_n} \leqslant x \leqslant \frac{i+1}{k_n}} \Delta_{n,j} + \sup_{x \in [0,1]} \sup_{|y| \leqslant A_n} |E\, L_n(x,y) - L(x,y)| \qquad (3.12)$$

Le $2^{\text{ème}}$ terme de cette inégalité tend vers zéro quand n tend vers l'infini, en effet :

$$E\, L_n(x,y) = \frac{1}{h_n^2} \int K(u)\, K''(v)\, f(x+uh_n, y+vh_n)\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{h_n^2} \int K(u)\, \left[f(x+uh_n, y+vh_n)\, K'(v) \right]_{-c}^{c} du$$

$$- \frac{h_n}{h_n^2} \int K(u)\, K'(v)\, \frac{\partial f}{\partial y}(uh_n+x, y+h_n v)\, du\, dv$$

$$H_2\ ,\ H_3 \Longrightarrow E\, L_n(x,y) = \int K(u)\, K(v)\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+uh_n, y+h_n v)\, du\, dv$$

donc

$$|E\, L_n(x,y) - L(x,y)| \leqslant \int K(u)\, K(v) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+uh_n, y+h_n v) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \right| du\, dv \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(3.11) et (3.12) $\Longrightarrow$

$$\Delta_{n,i,j} \leq \left|L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right) - E\,L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right)\right|$$

$$+ \frac{1}{k_n\,h_n^5}\,||K''||_\infty + \frac{1}{k_n\,h_n^2}\,\left|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|_\infty \int |K''(x)|\,dx$$

$$+ \frac{||K||_\infty\,||K^{(3)}||_\infty\,A_n}{k_n\,h_n^5} + \frac{A_n}{k_n\,h_n^2}\,\left|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|_\infty \int |K''(x)|\,dx$$

$$+ \sup_{x\in[0,1]}\ \sup_{|y|\leq A_n} |E\,L_n(x,y) - L(x,y)|\ .$$

Donc pour un choix convenable de k_n tels que :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_n}{k_n\,h_n^5} \longrightarrow 0 \\[2ex] k_n\,h_n^5 \longrightarrow \infty \\[2ex] k_n \longrightarrow \infty \end{array}\right\} \qquad (3.13)$$

il reste à prouver que

$$\Delta'_n = \sup_{0\leq i\leq k_n-1}\ \sup_{-k_n\leq j\leq k_n-1} \left|L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right) - E\,L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.}$$

soit $\varepsilon > 0$,

$$P(\Delta'_n>\varepsilon) = P\left(\sup_{0\leq i\leq k_n-1}\ \sup_{-k_n\leq j\leq k_n-1} \left|L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right) - E\,L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right)\right| > \varepsilon\right) \leq \sum_{i=0}^{k_n-1}\ \sum_{j=-k_n}^{k_n-1}$$

$$P\left(\left|L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right) - E\,L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2\,k_n^2}\right)$$

Lemme III.IV.2.-

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad P\left(\left|L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right) - E\,L_n\left(\frac{i}{k_n}, \frac{j\,A_n}{k_n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2\,k_n^2}\right) \leq 2\,e^{-\varepsilon \frac{nh_n^4}{2.k_n^2 2\alpha^2}}\; e^{-n\left(\frac{2\alpha-1}{4\alpha^2}\right)}$$

avec $\alpha = \max(1 , (||K||_\infty \; ||K''||_\infty)^3)$.

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'utiliser l'inégalité de Bernstein Fréchet généralisée par P. Jacob dans [13]. Le lemme III.IV.2. entraîne :

$$P(\Delta_n' > \varepsilon) \leq \sum_{i=0}^{k_n-1} \sum_{j=-k_n}^{k_n-1} e^{-nC_o^2}\, e^{-\varepsilon 2.k_n^2 \frac{nh_n^4}{2\alpha^2}} \leq 2\,k_n^2\, e^{-nC_o^2}\, e^{-\varepsilon \frac{nh_n^4}{2.k_n^2\,2\alpha^2}} = u_n$$

avec $C_o = \dfrac{2\alpha-1}{4\alpha^2}$ et $\alpha = \max(1, (||K||_\infty \; ||K''||_\infty)^3)$

il faut choisir k_n de telle sorte que :

- (3.13) soit vérifié
- et
- la série du terme général u_n soit convergente.

. Prenons $k_n = \dfrac{n^{5/2}}{(\log n)^{1/2}}$ et $A_n = n^\gamma$ $(0 < \gamma < \frac{5}{4})$.

$$k_n\, h_n^5 = \frac{n^{5/2}\; n^{-5\eta}}{(\log n)^{1/2}} = \frac{n^{5(\frac{1}{2} - \eta)}}{(\log n)^{1/2}}$$

nous avons choisit :

$$\frac{1}{4} < \eta < \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{5} \Longrightarrow k_n\, h_n^5 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$$\frac{A_n}{k_n\, h_n^5} = \frac{n^\gamma (\log n)^{1/2}}{n^{5(\frac{1}{2}-\eta)}} = n^{(\gamma+5\eta-\frac{5}{2})} (\log n)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

. $$\sqrt[n]{u_n} = (2\, k_n^2)^{1/n}\, e^{-c_o^2}\, e^{-\frac{\varepsilon h_n^4}{2\alpha^2 k_n^2}}$$

$$= e^{\frac{\log 2}{n}}\, e^{2(\frac{5}{2n}\log n - \frac{1}{2n}\log\log n)}\, e^{-\frac{\varepsilon\, h_n^4}{k_n^2\, 2\,\alpha^2} - c_o^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-c_o^2} = e^{-\frac{2\alpha-1}{4\alpha^2}} < 1 \quad \text{car} \quad \frac{2\alpha-1}{4\alpha} > 0$$

donc la série de terme général u_n est convergente, d'où le résultat de la proposition.

Proposition III.IV.3.- Sous les hypothèses H_2 , H_3 et H_5 .

On a :

$$\sup_{0\leq t\leq 1}\ \sup_{|y|\leq A_n} |\hat{f}_n(t,y) - f(t,y)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$$

Démonstration : Il suffit de suivre la même démarche que celle de la proposition III. IV.1.

Proposition III.IV.4.- Sous les hypothèses H_2 , H_3 et H_5 on a :

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\hat{\psi}_n(t) - \psi(t)| \xrightarrow[p.s.]{} 0 \quad , \quad n\to\infty \quad .$$

Démonstration :

$$|\hat{f}_n(t,\ \hat{\psi}_n(t)) - f(t,\psi(t))| \geq |f(t,\hat{\psi}_n(t)) - f(t,\psi(t))| - |\hat{f}_n(t,\hat{\psi}_n(t)) - f(t,\hat{\psi}_n(t))|$$

$$\Longrightarrow |\hat{f}_n(t,\hat{\varphi}_n(t))-f(t,\varphi(t))| + |\hat{f}_n(t,\hat{\varphi}_n(t))-f(t,\hat{\varphi}_n(t))| \geq |f(t,\hat{\varphi}_n(t))-f(t,\varphi(t))|$$

$$\Longrightarrow 2 \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_{|y|\leq A_n} |\hat{f}_n(t,y)-f(t,y)| \geq |\hat{\varphi}_n(t)-\varphi(t)| \; |\frac{\partial f}{\partial y}(t,\hat{\varepsilon}_n(t))|$$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |\hat{\varphi}_n(t)-\varphi(t)| \geq \varepsilon \Longrightarrow 2 \sup_{0\leq t\leq 1} \sup_{|y|\leq A_n} |\hat{f}_n(t,y)-f(t,y)| \geq \varepsilon \, ||\frac{\partial f}{\partial y}||_\infty$$

d'où le résultat de la proposition.

Proposition III.IV.5.- Sous H_2 , H_3 , H_5 , H_{10} et H'_9 : $\inf_{0\leq t\leq 1} |\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\varphi(t))| > 0$, on a :

1) $$\sup_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}_n(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}^*_n(t))} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$

2) $$\inf_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}_n(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}^*_n(t))} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$

Démonstration : 1)

$$\left| \sup_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}_n(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}^*_n(t))} \right| - 1 \right| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}_n(t)) - \frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}_n(t))}{\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\varphi}^*_n(t))} \right|$$

$$\leq \frac{\sup_t \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))\right|}{\inf_t \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right|} + \frac{\sup_t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right|}{\inf_t \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right|}$$

$$+ \frac{\sup_t \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t)) - \frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right|}{\inf_t \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right|}$$

la proposition III.IV.1. entraîne :

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))\right| \xrightarrow[p.s.]{} 0 \quad , \quad n \to \infty \tag{3.14}$$

et

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right| \xrightarrow[p.s.]{} 0 \quad , \quad n \to \infty \tag{3.15}$$

de plus on a :

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right| \leq |\hat{\psi}_n(t)-\hat{\psi}^*_n(t)| \left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right| \tag{3.16}$$

$$\Longrightarrow \sup_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}^*_n(t))\right| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} |\hat{\psi}_n(t)-\psi(t)| \; \left\|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ceci est d'après la proposition III.IV.4.

On peut montrer facilement que

$$\inf_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t, \hat{\psi}_n(t))\right| \xrightarrow[p.s.]{n\to\infty} \inf_{0\leq t\leq 1} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \psi(t))\right| \tag{3.17}$$

(3.14) ; (3.15) ; (3.16) et (3.17) entraînent le résultat 1°) de la proposition.

Pour démontrer le 2°) il suffit de suivre la même démarche que 1°).

Les propositions III.III.2. ; III.III.3. ; III.III.6. ; III.III.10. ; et III.IV.5. et le lemme III.III.8. nous permettent de conclure le résultat de la proposition III.II.1..

Cette loi dépend du paramètre a, on peut alors construire une région de concentration au niveau $1-\alpha$ pour l'estimateur $\hat{\vartheta}_n(t)$. Cette région dépend du paramètre, pour en déduire une statistique de test de l'hypothèse de linéarité, il nous faudra alors distinguer le cas où a est connu de celui où il est inconnu.

La région de concentration au niveau $1-\alpha$ est donnée comme suit :

$$P\left[-\left(\frac{z_\alpha}{(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}} + d_n(a)\right) \frac{\left[\int K^2(x)\,dx \int K'^2(x)\,dx\right]^{1/2}}{(n\,h_n^4)^{1/2}\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\vartheta}_n(t))\right|} + \hat{\vartheta}_n(t) < \vartheta(t) < \right.$$

$$\left. \hat{\vartheta}_n(t) + \left(\frac{z_\alpha}{(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}} + d_n(a)\right) \frac{\left[\int K^2(x)\,dx \int K'^2(x)\,dx\right]^{1/2}}{(n\,h_n^4)^{1/2}\left|\frac{\partial^2 \hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\vartheta}_n(t))\right|} \;;\; \forall t \in [0,1] \right]$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2e^{-z_\alpha}} = 1-\alpha \quad \text{sous l'hypothèse nulle du test.}$$

Si a n'est pas connu, alors considérons un estimateur $\hat{a}_n$ de a convergeant et montrons que la loi limite donnée dans la proposition III.II.1. reste la même lorsqu'on remplace a par $\hat{a}_n$.

Sous l'hypothèse nulle du test : $\vartheta(t) = a\,t\,,\quad \forall t \in [0,1]$

$$(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}\left(\max_{0\leq t\leq 1}(n\,h_n^4)^{1/2}\frac{|\hat{\psi}_n(t)-\hat{a}_n\,.\,t|\,|\frac{\partial^2\hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))|}{[\int K^2(x)\,dx\int K'^2(x)\,dx]^{1/2}}-d_n(\hat{a}_n)\right)$$

$$\leq(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}\left(\max_{0\leq t\leq 1}(n\,h_n^4)^{1/2}\frac{|\hat{\psi}_n(t)-at|\,|\frac{\partial^2\hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))|}{[\int K^2(x)\,dx\int K'^2(x)\,dx]^{1/2}}-d_n(a)\right)$$

$$+(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}\left(\max_{0\leq t\leq 1}(n\,h_n^4)^{1/2}\frac{|at-\hat{a}_n t|\,|\frac{\partial^2\hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))|}{[\int K^2(x)\,dx\int K'^2(x)\,dx]^{1/2}}\right.$$

$$+(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}(d_n(a)-d_n(\hat{a}_n))$$

Montrons que : $(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}(d_n(a)-d_n(\hat{a}_n))\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ p.s.

$$(2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}(d_n(a)-d_n(\hat{a}_n))=-\frac{1}{2}\log\left[\frac{\frac{\int K'^2(x)\,dx}{\int K^2(x)\,dx}+\hat{a}_n^2\frac{\int K''^2(x)\,dx}{\int K'^2(x)\,dx}}{\frac{\int K'^2(x)\,dx}{\int K^2(x)\,dx}+a^2\frac{\int K''^2(x)\,dx}{\int K'^2(x)\,dx}}\right]\xrightarrow[\text{p.s.}]{}0\ ,\ n\to\infty$$

$$.\ (2\log\frac{1}{h_n})^{1/2}(n\,h_n^4)^{1/2}\,|a-\hat{a}_n|\max_{0\leq t\leq 1}|\frac{\partial^2\hat{f}_n}{\partial y^2}(t,\hat{\psi}_n(t))|\xrightarrow[\text{p.s.}]{}0$$

ceci est vrai d'après la proposition III.IV.3.

CHAPITRE IV

THEOREME CENTRAL LIMITE DE $\hat{\psi}_n(t)$

On considère le processus $Y_n = \psi(X_n) + \varepsilon_n$ donné par l'équation (3.0) dans le chapitre III, $\hat{\psi}_n$ l'estimateur de ψ défini dans ce chapitre. On va montrer que pour p entier ≥ 2 ,

$$e = \lim_{n\to\infty} (n\, h_n^{4+2p})^{1/2} \quad , \quad Y(t) \sim N(0,\ f(t,\psi(t)) \int K^2(-u)\, du \int K'^2(u)\, du)$$

$B_p = \int x^p\, K(x)\, dx$ finie , on a : $\forall t \in [-T,T]$ $(0<T<+\infty)$

$$((n\, h_n^4)^{1/2}\ (\hat{\psi}_n(t) - \psi(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{L} (-1)^{p+1} \frac{e\ .\ B_p}{p!\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\psi(t))}$$

$$\left[\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\, \partial y}(t,\psi(t)) + \frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}(t,\psi(t))\right] - \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\ \psi(t))}\ .\ Y(t) \quad .$$

<u>*Définition IV.1.-*</u> On dit qu'un noyau K est un noyau d'Eddy si c'est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ bornée tels que :

1) K est absolument continue, dérivable et sa dérivée K' est bornée. $\int K(x)\, dx = B_o = 1$.

2) Soit $p \geq 2$:

   . $\int x^i\, K(x)\, dx = B_i = 0 \qquad \forall i = 1,\dots,p-1$

   . $\int x^p\, K(x)\, dx = B_p$ finie .

   . $\int x^{p+1}\, K(x)\, dx = B_{p+1}$ finie .

. $\int x[K'(x)]^2\, dx$ est finie .

pour t , $t \in [-T,T]$, $s \in [-L,L]$ on définit le processus $Z_n(t,s)$ par :

$$Z_n(t,s) = \frac{1}{(n\, h_n^4)^{-1}} \left[\hat{f}_n(t,\psi(t) + (n\, h_n^4)^{-1/2}\, s) - \hat{f}_n(t,\psi(t))\right]$$

et le processus $Z(t,s)$ par :

$$Z(t,s) = \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\psi(t)) + (-1)^p\, s\, \frac{e}{p!}\, B_p \left[\frac{\partial^{p+1}}{\partial y^{p+1}} f(t,\psi(t)) + \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\, \partial y}(t,\psi(t))\right] + s\, Y(t) .$$

$Y(t)$ suit la loi normale $N(o, f(t,\psi(t)) \int K'^2(x) \int K^2(x))$. Pour t fixé élément de $[-T , T]$ on va montrer que

$Z_{n,t} \Longrightarrow Z_t$ quand n tend vers l'infini et le théorème central limite sera une conséquence immédiate de cette convergence.

Proposition IV.2.- Etant donné un entier $p \geq 2$, et K un noyau d'Eddy sous les hypothèses suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (n\, h_n^6) = \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (n\, h_n^{6+2p})^{1/2} = 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (n\, h_n^{4+2p})^{1/2} = e$

4) $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$ existent et sont bornées pour $i = 0,\dots p+1$; et $j = 0,\dots,p+1$.

Alors : pour tout $t \in [-T,T]$ fixé on a :

$$Z_{n,t} \Longrightarrow Z_t$$

Démonstration :

Posons $b_n = (n\, h_n^4)^{-1/2}$.

$$Z_n(t,s) = \frac{1}{b_n^2} \left[\hat{f}_n(t,\varphi(t) + b_n s) - \hat{f}_n(t,\varphi(t))\right)$$

$$\hat{f}_n(t,\varphi(t)) = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n} K(\frac{t-X_i}{h_n})\, K(\frac{\varphi(t)-Y_i}{h_n})$$

$$Z_n(t,s) = (Z_n(t,s) - E\, Z_n(t,s)) + E\, Z_n(t,s)$$

$$+ s(Z_n(t,1) - E\, Z_n(t,1)) - s(Z_n(t,1) - E\, Z_n(t,1)) .$$

a) Montrons que : $(Z_n(t,s) - E\, Z_n(t,s)) - s(Z_n(t,1) - E\, Z_n(t,1))$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad \forall (t,s) \in [-T,T] \times [-L,L]$$

pour cela, il suffit de prouver que :

$$\mathrm{Var}((Z_n(t,s) - E\, Z_n(t,s)) - s(Z_n(t,1) - E\, Z_n(t,1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$$\mathrm{Var}((Z_n(t,s) - E\, Z_n(t,s)) - s(Z_n(t,1) - E\, Z_n(t,1)) = \mathrm{Var}(Z_n(t,s) - s\, Z_n(t,1))$$

Posons

$$R_n^i(t,s) = \frac{1}{h_n^2\, b_n^2} \{K(\frac{t-X_i}{h_n}) \left[K(\frac{\varphi(t) + b_n s-Y_i}{h_n}) - K(\frac{\varphi(t) - Y_i}{h_n})\right]$$

$$- s\, K(\frac{t-X_i}{h_n}) \left[K(\frac{\varphi(t)+b-Y_i}{h_n}) - K(\frac{\varphi(t)-Y_i}{h_n})\right]$$

donc

$$\mathrm{Var}(Z_n(t,s) - s\ Z_n(t,1)) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_n^i(t,s))$$

$$= \frac{1}{n} \mathrm{Var}(R_n^1(t,s)) \leq \frac{1}{n} E(R_n^1(t,s))^2$$

$$\frac{1}{n} E(R_n^1(t,s))^2 = \frac{1}{n\ h_n^4\ b_n^4} \int \Big\{ K(\frac{t-u}{h_n}) \Big[K(\frac{\varphi(t)+bs-v}{h_n}) - K(\frac{\varphi(t)-v}{h_n}) \Big] - s\ K(\frac{t-u}{h_n}) \Big[K(\frac{\varphi(t)+b-v}{h_n}) - K(\frac{\varphi(t)-v}{h_n}) \Big] \Big\}^2 f(u,v)\ du\ dv$$

$$= \frac{s^2\ b_n^2}{n\ h_n^4\ b_n^4}\ h_n^2 \int K^2(-u) \left[\frac{K(\frac{bs}{h_n} - v) - K(-v)}{\frac{bs}{h_n}} - \frac{K(\frac{b}{h_n} - v) - K(-v)}{h_n} \right]^2 f(t+u\ h_n,\ \varphi(t) + v\ h_n)\ du\ dv$$

$$\frac{b^2\ h_n^2}{n\ h_n^4\ b_n^4} = 1$$

il reste à montrer que l'intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini, pour cela cf. [25] , d'où

$$(Z_n(t,s) - E\ Z_n(t,s)) - s(Z_n(t,1) - E\ Z_n(t,1)) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad .$$

b) Montrons que :

$$E\ Z_n(t,s) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{s^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (t,\ \varphi(t)) + (-1)^p\ s\ \frac{e}{p!} B_p \left[\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\ \partial y} (t,\ \varphi(t)) + \frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}} (t,\ \varphi(t)) \right]$$

$$(4.1.)\quad E\ Z_n(t,s) = \frac{1}{h_n^2\ b^2} \int K(\frac{t-u}{h_n}) \left[K(\frac{\varphi(t)+bs-v}{h_n}) - K(\frac{\varphi(t)-v}{h_n}) \right] f(u,v)\ du\ dv$$

$$= \frac{1}{b^2} \int K(-u)\ [f(t+u\ h_n,\ \varphi(t)+bs+v\ h_n) - f(t+u\ h_n,\ \varphi(t) + v\ h_n)]\ K(-v) du\ dv$$

procédant par application de la formule de Taylor à $f(t+u\ h_n,\ \psi(t)+bs+v\ h_n)$ donc :

$$f(t+u\ h_n,\ \psi(t)+bs+v\ h_n) - f(t+u\ h_n,\ \psi(t)+v\ h_n)$$

$$= bs\ \frac{\partial f}{\partial y}(t+u\ h_n,\ \psi(t)+v\ h_n) + \frac{(bs)^2}{2!}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t+u\ h_n,\ \psi(t)+v\ h_n) + \frac{(bs)^3}{3!}\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t+u\ h_n,\ \hat{\xi}_{n_1})$$

où $\hat{\xi}_{n_1}$ est un point situé entre $\psi(t)+v\ h_n$ et $\psi(t)+v\ h_n+bs$.

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial y}(t+u\ h_n,\ \psi(t)+v\ h_n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(v\ h_n)^i}{i!}\ \frac{\partial^i}{\partial y^i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t+u\ h_n,\ \psi(t)) + \frac{(v\ h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\ \frac{\partial^{p+2} f}{\partial y^{p+2}}(t+u\ h_n,\ \hat{\xi}_{n_2})$$

$\hat{\xi}_{n_2}$ est un point situé entre $\psi(t)$ et $\psi(t)+v\ h_n$

$$\Longrightarrow \frac{bs}{b^2}\int \sum_{i=0}^{p} \frac{(v\ h_n)^i}{i!}\ \frac{\partial^{i+1}}{\partial y^{i+1}} f(t+u\ h_n,\ \psi(t))\ K(-u)\ K(-v)\ du\ dv$$

$$= \frac{s}{b}\int \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(v\ h_n)^i}{i!}\ \frac{\partial^{i+1}}{\partial y^{i+1}} f(t+u\ h_n,\ \psi(t))\ K(-u)\ K(-v)\ du\ dv$$

$$+ \frac{h_n^p}{p!}\ \frac{s}{b}\int v^p\ K(-v)\ dv \int \frac{\partial^{p+1}}{\partial y^{p+1}} f(t+u\ h_n,\ \psi(t))\ K(-u)\ du$$

$$= \frac{s}{b}\int \frac{\partial f}{\partial y}(t+u\ h_n,\ \psi(t))\ K(-u)\ du\ B_o +$$

$$+ \frac{s}{b}\ \frac{h_n^p}{p!}\int \frac{\partial^{p+1}}{\partial y^{p+1}} f(t+u\ h_n,\ \psi(t))\ v^p\ K(-v)\ K(-u)\ du\ dv \qquad (4.2)$$

Examinons le terme $\frac{\partial f}{\partial y}(t+u\ h_n,\ \psi(t))$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t + u\,h_n\,,\ \psi(t)) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(u\,h_n)^i}{i!}\,\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t,\psi(t))$$

$$+ \frac{(u\,h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+1}}{\partial x^{p+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\eta_n\,,\ \psi(t))$$

η_n est situé entre $t + u\,h_n$ et t , l'équation (4.2) devient égale à

$$\frac{s\,h_n^p}{b\,p!}\int u^p\,K(-u)\,du\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y\,\partial x^p}(t,\ \psi(t))\,du\,B_o$$

$$+ \frac{s\,h_n^p}{b\,p!}\int \frac{\partial^{p+1}}{\partial y^{p+1}}\,f(t + u\,h_n,\ \psi(t))\,K(-u)\,v^p\,K(-v)\,du\,dv$$

$$+ \frac{s\,h_n^{p+1}}{b(p+1)!}\int u^{p+1}\,\frac{\partial^{p+2} f}{\partial x^{p+1}\,\partial y}\,(\eta_n,\ \psi(t))\,K(-u)\,du$$

on peut montrer facilement que :

$$.\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t + u\,h_n,\ \psi(t) + v\,h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\ \psi(t))$$

$$.\ \frac{b^3}{b^2}\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t + u\,h_n\,,\ \xi_{n_1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$.\ s\left(\frac{h_n^p}{b}\right)\frac{1}{p!}\int \frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}\,(t + u\,h_n\,,\ \psi(t))\,v^p\,K(-u)\,K(-v)\,du\,dv$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} s\,\frac{e}{p!}\,\frac{\partial^{p+1} f(t,\psi(t))}{\partial y^{p+1}}\,B_p \times (-1)^p$$

$$.\ \frac{s\,h_n^p}{p!\,b}\int \frac{\partial^{p+1}}{\partial x^p\,\partial y}\,f(t,\ \psi(t))\,u^p\,K(-u)\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} s\,\frac{e}{p!}\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y}\,(t,\psi(t))\,B_p\,(-1)^p$$

d'où le résultat du b) :

$$\lim_{n\to\infty} E\, Z_n(t,s) = \frac{s^2}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\ \varphi(t)) + s\,\frac{e}{p!}\ \frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}(t,\varphi(t))\ B_p \times (-1)^p$$

$$+ (-1)^p\ s\,\frac{e}{p!}\ \frac{\partial^{p+1}}{\partial x^p\ \partial y}\ f(t,\ \varphi(t))\ B_p$$

c) Montrons que

$$Z_n(t,1) - E\ Z_n(t,1) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(o, f(t,\ \varphi(t)) \int K^2(u) \int K'^2(v))$$

$$Z_n(t,1) = \frac{1}{n\ h_n^2\ b^2} \sum_{i=1}^{n} K(\frac{t-X_i}{h_n}) \left[K(\frac{\varphi(t)+b-Y_i}{h_n}) - K(\frac{\varphi(t)-Y_i}{h_n})\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_n^i(t)$$

où $\quad U_n^i(t) = \dfrac{1}{h_n^2\ b^2} K(\dfrac{t-X_i}{h_n}) \left[K(\dfrac{\varphi(t)+b-Y_i}{h_n}) - K(\dfrac{\varphi(t)-Y_i}{h_n})\right]$

$(U_n^i(t))$ sont des v.a.r. i.i.d.

$$\mathrm{Var}(Z_n(t,1)) = \frac{1}{n}\ \mathrm{Var}(U_n^1(t)) = \frac{1}{n}\ \left[E(U_n^1(t))^2 - (E\ U_n^1(t))^2\right]$$

$$\cdot\ \frac{1}{n}\ (E\ U_n^1(t))^2 = \frac{1}{n\ h_n^4\ b^4} \left\{h_n^2 \int K(-u)\ K(-v)\ \left[f(t + u\ h_n,\ \varphi(t) + b + v\ h_n)\right.\right.$$

$$\left.\left. - f(t + u\ h_n\ ,\ \varphi(t) + v\ h_n)\right]\ du\ dv\right\}^2$$

$$\leq \frac{h_n^4}{n\ h_n^4\ b^4}\ \left|\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right|_\infty b_n^2\ (\int K(-u)\ du)^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\cdot\ \frac{1}{n}\ E(U_n^1(t))^2 = \frac{b^2}{n\ h_n^4\ b^4\ h_n^2}\ \ h_n^2 \int K^2(-u) \left[\frac{K(\frac{b}{h_n} - v) - K(-v)}{\frac{b}{h_n}}\right]^2$$

$$f(u\ h_n + t,\ \varphi(t) + v\ h_n)\ du\ dv$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} f(t,\varphi(t)) \int K^2(-u)\ K'^2(-v)\ du\ dv$$

donc

$$\mathrm{Var}(Z_n(t,1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t,\ \varphi(t)) \int K^2(-u)\ K'^2(-v)$$

pour chaque t fixé élément de $[-T,T]$.

Pour montrer la normalité asymptotique, on a appliqué le théorème de Lindeberg (théorème 7.2. Billingsley), pour cela, il suffit de vérifier que

$$n \int_{\left|\frac{U_n - E\,U_n}{n}\right| \geq \varepsilon} \left[\frac{U_n - E\,U_n}{n}\right]^2 f(u,v)\, du\, dv \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$|U_n| = \left|\frac{1}{h_n^2\, b^2}\left[K\left(\frac{\emptyset(t)+b-v}{h_n}\right) - K\left(\frac{\emptyset(t)-v}{h_n}\right)\right] K\left(\frac{t-u}{h_n}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{h_n^2\, b^2}\; 2\,||K||_\infty^2 = 2\,||K||_\infty^2\, n\, h_n^2$$

$$\Longrightarrow |U_n - E\,U_n| \leq 4\,||K||_\infty^2\, n\, h_n^2$$

$$\Longrightarrow \frac{|U_n - E\,U_n|}{n} \leq 4\,||K||_\infty^2\, h_n^2$$

$h_n \longrightarrow 0$, donc pour $\varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) : \forall n \geq n(\varepsilon)$: $\left|\frac{U_n - E\,U_n}{n}\right| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow n \int_{\left|\frac{U_n - E\,U_n}{n}\right| \geq \varepsilon} \left[\frac{U_n - E\,U_n}{n}\right]^2 f(u,v)\, du\, dv \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où le résultat $\forall t \in [-T,T]$.

$$(Z_n(t,1) - E\,Z_n(t,1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(o,\, f(t,\, \emptyset(t)) \int K^2(-u) \int K'^2(-v)) \quad .$$

Pour conclure au résultat de la proposition, il reste à prouver que le processus $Z_{n,t}(s) = Z_n(t,s)$ est équitendu par rapport à s (t étant fixé). Pour t fixé, $Z_{n,t}(s)$ est élément de $C([-L,L])$ car K est continue.

Donc pour prouver l'équitension, il suffit d'appliquer le théorème suivant [6 ; p. 95].

Théorème IV.3.- La suite $Z_{n,t}(.)$ est équitendue si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1) $Z_{n,t}(o)$ est équitendue

2) Il existe deux constantes $\rho \geq 0$ et $\alpha > 1$ et une fonction F non décroissante, continue tel que :

$$P(|Z_{n,t}(s_1) - Z_{n,t}(s_2)| \geq A) \leq \frac{1}{A^\rho} \quad |F(s_2) - F(s_1)|^\alpha$$

$\forall s_1 , s_2$; $\forall n \geq 1$, $\forall A > 0$.

Vérifions ces deux conditions :

1) $Z_{n,t}(o) = Z_n(t,o) = 0$ donc $Z_{n,t}(o)$ est équitendue .

2) pour vérifier la $2^{\text{ème}}$ condition, il suffit de montrer que : $\forall s_1 , s_2$; $\forall n \geq 1$, $\alpha > 1$ on a

$$E|Z_{n,t}(s_1) - Z_{n,t}(s_2)|^\rho \leq |F(s_2) - F(s_1)|^\alpha$$

posons $\rho = \alpha = 2$

$$E\{Z_{n,t}(s_1) - Z_{n,t}(s_2)\}^2 = E\left\{\frac{1}{n\, h_n^2\, b^2} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{h_n}\right)\right]\right\}^2$$

$$= \frac{1}{n^2\, h_n^4\, b^4} \sum_{i=1}^{n} E\, K^2\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{h_n}\right)\right]^2$$

$$+ \frac{1}{n^2\, h_n^4\, b^4} \sum_{i \neq j} E\, K\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{h_n}\right)\right]$$

$$\times K\left(\frac{t-X_j}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_j}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_j}{h_n}\right)\right]$$

posons

$$\Delta_n = E\, K^2\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{h_n}\right)\right]^2$$

$$= \frac{b^2(s_2-s_1)^2}{h_n^2}\, h_n^2 \int K^2(-u) \left[\frac{K\left(\frac{b(s_2-s_1)-v}{h_n}\right) - K(-v)}{\frac{b}{h_n}(s_2-s_1)}\right]$$

$$f(t + u\, h_n, \psi(t) + bs_1 + v)\, du\, dv$$

$$\leq ||f||_\infty^2\, b^2(s_2-s_1)^2 \left(\int K^2(-u)\, du\right) \left(\int \left(\frac{K(\delta-v) - K(-v)}{\theta}\right)^2 dv\right.$$

avec $\theta = \frac{b}{h_n}(s_2-s_1)$, cette intégrale est uniformément bornée par rapport à s_1 et s_2 [25 , p. 879].

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^2\, h_n^4\, b^4} \sum_{i=1}^{n} E\, K^2\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{h_n}\right)\right]^2$$

$$\leq \frac{||f||_\infty^2 (s_2-s_1)^2}{n\, h_n^4\, b^2} \int K^2(-u)\, du \int \left(\frac{K(\delta-v)-K(-v)}{\theta}\right)^2 dv$$

$$= ||f||_\infty^2\, (s_2-s_1)^2 \int K^2(-u)\, du \int \left(\frac{K(\delta-v)-K(-\ v)}{\theta}\right)^2 dv$$

$$B_n = \left\{E\, K\left(\frac{t-X_i}{h_n}\right) \left[K\left(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}\right) - K\left(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{\theta}\right)\right]\right\}^2$$

$$= \left\{\int h_n^2\, K(-u)\, K(-v) \left[f(t + u\, h_n, \psi(t) + bs_2 + v\, h_n)\right.\right.$$

$$\left.\left. - f(t + u\, h_n, \psi(t) + bs_1 + v\, h_n)\right]\right\} du\, dv$$

$$f(t + u\,h_n,\ \psi(t) + bs_2 + v\,h_n) - f(t + u\,h_n\ ,\ \psi(t) + bs_1 + v\,h_n)$$

$$= b(s_2-s_1)\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(t + u\,h_n,\ \psi(t) + bs_1 + v\,h_n) + \frac{b^2(s_2-s_1)^2}{2!}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n,\ \xi_n)$$

$$= b(s_2-s_1)\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{(v\,h_n)^i}{i!}\,\frac{\partial^{i+1} f}{\partial y^{i+1}}\,(t + u\,h_n\ ,\ \psi(t) + bs_1)\right.$$

$$\left.+\frac{(v\,h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+2} f}{\partial y^{p+2}}\,(t + u\,h_n,\ \eta_n)\right] + \frac{b^2(s_2-s_1)^2}{2!}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n,\ \xi_n)$$

$$\Longrightarrow\ B_n = b^2(s_2-s_1)^2\,h_n^4\left\{\int K(-u)\,K(-v)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\,(t + u\,h_n,\ \psi(t) + bs_1)\right.\right.$$

$$+\frac{(v\,h_n)^p}{p!}\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}\,(t + u\,h_n,\ \psi(t) + bs_1)$$

$$+\frac{(v\,h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+2} f}{\partial y^{p+2}}\,(t + u\,h_n,\ \eta_n)$$

$$\left.\left.+\frac{b(s_2-s_1)}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n,\ \xi_n)\right]du\,dv\right\}^2$$

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(t + u\,h_n\ ,\ \psi(t) + bs_1) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(t + u\,h_n,\ \psi(t)) + bs_1\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n,\ \alpha_n)$$

$$= \sum_{i=0}^{p}\frac{(u\,h_n)^i}{i!}\,\frac{\partial^{i+1} f}{\partial x^i\,\partial y}\,(t,\ \psi(t)) + \frac{(u\,h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+2} f}{\partial x^{p+1}\,\partial y}\,(\beta_n\ ,\ \psi(t))$$

$$+\ bs_1\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n\ ,\ \alpha_n)$$

$$\Longrightarrow\ B_n = b^2(s_2-s_1)^2\,h_n^4\left\{\int K(-u)\,K(-v)\left[\frac{(u\,h_n)^p}{p!}\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y}\,(t,\ \psi(t))\right.\right.$$

$$+\frac{(u\,h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+2} f}{\partial x^{p+1}\,\partial y}\,(\beta_n,\ \psi(t)) + bs_1\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n\ ,\ \alpha_n)$$

$$+\frac{(v\,h_n)^p}{p!}\,\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}\,(t + u\,h_n,\ \psi(t) + bs_1)\ +$$

$$+\frac{(v\,h_n)^{p+1}}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+2} f}{\partial y^{p+2}}\,(t + u\,h_n\ ,\ \eta_n)$$

$$\left.\left.+\frac{b(s_2-s_1)}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(t + u\,h_n\ ,\ \xi_n)\right]\ du\,dv\right\}^2$$

donc on peut conclure à :

$$\frac{1}{n^2\, h_n^4\, b^4} \sum_{i\neq j} E\left\{K(\frac{t-X_i}{h_n}) \left[K(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_i}{h_n}) - K(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_i}{h_n})\right]\right.$$

$$\times K(\frac{t-X_j}{h_n}) \left[K(\frac{\psi(t)+bs_2-Y_j}{h_n}) - K(\frac{\psi(t)+bs_1-Y_j}{h_n})\right]$$

$$\leq A \;.\; (s_2-s_1)^2$$

A est une constante indépendante de n, d'où le résultat final

$$E\{Z_{n,t}(s_1) - Z_{n,t}(s_2)\}^2 \leq A\; |s_2-s_1|^2$$

donc le processus $Z_{n,t}(s)$ est équitendu par rapport à s.

$$\Longrightarrow \quad Z_{n,t} \;\overset{m}{\Longrightarrow}\; Z_t \;.$$

Remarque : Le résultat reste vrai pour tout $s \in (-\infty, +\infty)$ ceci est d'après le théorème 5 de Whitt [24].

Corollaire IV.4.- Sous les hypothèses de la proposition (IV.2), on a, pour tout t élément de $[-T,T]$.

$$((n\, h_n^4)^{1/2}\; (\hat{\psi}_n(t) - \psi(t))) \xrightarrow[n\to\infty]{L}$$

$$(-1)^{p+1}\; e \;.\; B_p \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\psi(t))\right]^{-1} \left[\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}(t,\psi(t)) + \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\,\partial y}(t,\psi(t))\right]$$

$$- \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,\psi(t))\right]^{-1} Y(t) \;.$$

Démonstration : Soit $t \in [-T,T]$.

On définit la fonction M_t par

$$M_t(g) = \inf\{\vartheta(t) \mid g(t, \vartheta(t)) = \sup_y g(t,y)\}$$

pour tout $g(t,.)$ élément de $C([-\infty, +\infty])$.

Cette fonction est mesurable d'après [25 , 881]. Appliquons cela à $Z_n(t,.)$ et $Z(t,.)$ qui sont deux éléments de $C([-\infty, +\infty])$ pour tout t élément de $[-T , T]$.

On a donc :

$$M_t(Z_n) = \inf\{\ell_n(t) \mid Z_n(t, \ell_n(t)) = \sup_y Z_n(t,y)\}$$

et

$$M_t(Z) = \inf\{\ell(t) \mid Z(t, \ell(t)) = \sup_y Z(t,y)\}$$

$$M_t(Z_n) = \hat{\ell}_n(t) = (n\, h_n^4)^{1/2}\, (\hat{\vartheta}_n(t) - \vartheta(t))$$

et

$$M_t(Z) = (-1)^{p+1}\, e\, B_p \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \vartheta(t))\right]^{-1}$$

$$\left[\frac{\partial^{p+1} f}{\partial y^{p+1}}(t, \vartheta(t)) + \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^p\, \partial y}(t, \vartheta(t))\right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, \vartheta(t))\right]^{-1} Y(t)$$

donc d'après un corollaire de Billingsley , on peut affirmer que :

$$\forall t \in [-T,T] \quad : \qquad (M_t(Z_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} (M_t(Z)) \qquad .$$

A P P E N D I C E 1

QUELQUES GENERALITES SUR LES CHAINES DE MARKOV

Soit E un espace quelconque muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$ et d'une mesure φ.

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $(E,\mathcal{E},\varphi)$ et ayant $P(x,A)$ comme probabilité de transition.

$P^n(x,A)$ désigne la $n^{\text{ième}}$ étape de cette probabilité de transition définie par :

$$P^n(x,A) = P(X_n \in A \mid X_o = x) \qquad n \geq 1$$

Posons
$$G_z(x,A) = \sum_{n\geq 0} z^n P^n(x,A) \; ; \quad x \in A \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{E}$$

Définition 1.1.-

1) On dit qu'une chaîne (X_n) est r-transiente $(r > 0)$ s'il existe un $\xi \in E$ et un $A \in \mathcal{E}$, avec $\varphi(A) > 0$, tel que $G_r(\xi,A) < \infty$.

2) (X_n) est dite r-récurrente si elle n'est pas r-transiente.

Remarque A : Si $(E,\mathcal{E},\varphi) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ alors la notion de λ-irréductibilité se traduit par

$$\lambda < G_z(x,.) \qquad \forall x \in E$$

Un temps d'arrêt est une fonction aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'exemple le plus important pour les temps d'arrêts est les temps de retour vers un ensemble $A \in \mathcal{E}$ noté par τ_A , c'est le premier $k \geq 1$ tel que

$$\begin{cases} X_k \in A & \text{si } k \text{ est fini} \\ \infty & \text{sinon ,} \end{cases}$$

de même on note $\tau_A^{(n)}$ le premier $k > \tau_A^{(n-1)}$ tel que

$$\begin{cases} X_k \in A & \text{si } k \text{ est fini} \\ \infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

On pose

$$L(x,A) = P_x(\tau_A < \infty) = P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \in A)\right)$$

$$Q(x,A) = P_x\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\tau_A^{(n)} < \infty)\right) .$$

<u>*Définition 1.2.*</u>- Supposons la chaîne de Markov (X_n) possède une mesure de probabilité invariante notée π.

1) On dit qu'un borélien A est proprement essentiel si

$$Q(x,A) > 0 \quad \text{lorsque} \quad \pi(A) > 0 .$$

2) On dit qu'un borélien A est fortement uniforme si

$$\sup_{x \in A} E_x \, \tau_B < \infty \quad \forall B \text{ , avec } \pi(B) > 0 .$$

3) On dit qu'un borélien A est un D-ensemble si le processus (X_n) est uniformément récurrent c'est-à-dire :

$$L(x,A) = 1 , \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad \pi(A) > 0 .$$

<u>*Lemme 1.3.*</u>- Soit A un borélien proprement essentiel, alors A est fortement uniforme si et seulement si A est un D-ensemble et $\sup_{x \in A} E_x \tau_A < \infty$.

<u>*Démonstration*</u> :

1) Si A est fortement uniforme et proprement essentiel, alors $\pi(A) > 0$ et $\sup_{x \in A} E_x \tau_A < \infty$, et d'après la proposition 2.4. [24] on a : A est un D-ensemble.

2) Soit $\pi(B) > 0$, alors $E_x \tau_B < \infty$ pour x π.p.s., alors il existe un $C \subset A$ avec $\pi(C) > 0$ et $\sup_{x \in C} E_x \tau_B < \infty$ soit $\Delta\tau_A^{(n)} = \tau_A^{(n+1)} - \tau_A^{(n)}$ et on considère l'égalité :

$$\tau_C = \tau_A + \sum_{n=1}^{\infty} X_{[\tau_C > \tau_A^{(n)}]} \Delta\tau_A^{(n)} .$$

Maintenant A est un D-ensemble, appliquons le lemme 1.3. [24] pour l'ensemble C , il existe $a < \infty$ et $o < b < 1$ tel que :

$$\sup_{x \in A} E_x \tau_C \leq \sup_{x \in A} E_x \tau_A + \sum_{n=1}^{\infty} E_x \{X_{(\tau_C > \tau_A^{(n)})} \; E_{X_{\tau_A^{(n)}}} (\Delta\tau_A^{(n)})\}$$

$$\leq \sup_{x \in A} E_x \tau_A \, (1 + \sum_{n=1}^{\infty} a\, b^n) < \infty$$

et d'après le lemme 3.1. [23], $\sup_{x \in A} E_x \tau_B < + \infty$.

Théorème 1.4.- Soit A un ensemble proprement essentiel alors

$$\sup_{x \in A} \sup_{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} (P^k(x,.) - \pi) \right\|_V < \infty \quad .$$

Démonstration : cf. [23].

STATIONNARITE D'UN PROCESSUS AUTOREGRESSIF GENERAL D'ORDRE 1.

Soit (X_n) , (ε_n) deux processus définis sur un même espace probabilisé (Ω,A,P) et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et soit φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue surjective tel que :

$$X_{n+1} = \varphi(X_n) + \varepsilon_{n+1} \qquad \forall n \geq 0 \tag{1}$$

X_o est connue pour qu'on puisse démarrer la récurrence.

On suppose que (ε_n) est une suite de v.a.r. i.i.d. centrée et $E\,|\varepsilon_o| < \infty$ dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$, sa densité sera notée g , que l'on suppose continue.

Soit $\mathcal{B}_m = \sigma(X_j\ ,\ j \leq m)$ la tribu engendrée par les $(X_j)_{j=1}^{m}$ on suppose de plus que ε_n est indépendante de $\mathcal{B}_m$ pour tout $m < n$.

On peut donc vérifier facilement que (X_n) défini par l'équation (1) est une chaîne de Markov homogène et que sa probabilité de transition vérifie

$$P(x,A) = \int_A g(y - \varphi(x))\, dy \qquad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ . \tag{2}$$

Définition 1.- La probabilité de transition $P(x,.)$ est dite fortement continue, si pour tout A élément de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $P(x,.)$ est une fonction continue en x .

Lemme 1.- La chaîne de Markov (X_n) définie par (1) est λ-irréductible.

Démonstration : Puisque la loi de (ε_o) est absolument continue par rapport à λ, pour montrer l'irréductible, il suffit de montrer que $\lambda \leqslant G_z(x,.)$ $\forall x$, $\forall z$.

Conditions suffisantes de récurrence et d'ergodicité.

Soit (X_n) une chaîne de Markov ϕ-irréductible à valeurs dans un espace X normé, cette norme est notée $||.||$; muni de sa tribu $\mathcal{E}$.

Posons : $$\gamma_x = E\{||X_{n+1}|| - ||X_n|| \mid X_n = x\} .$$

Théorème 1 [20] .- Si la probabilité de transition $P(x,.)$ est fortement continue alors, une condition suffisante pour la Φ-récurrence est l'existence d'un compact K, avec $\phi(K) > 0$, tel que $\gamma_x \leqslant 0$ pour tout $x \notin K$.

Corollaire 1.- Si l'espace X est de dimension finie, alors une condition suffisante pour la ϕ-récurrence est l'existence d'une constante $\alpha > 0$ tel que $\gamma_x \leqslant 0$ pour tout x, $||x|| > \alpha$.

Théorème 2 [20] .- Si $P(x,.)$ est fortement continue, alors une condition suffisante d'ergodicité et qu'il existe un compact K, avec $\phi(K) > 0$, et une constante $C > 0$ tels que :

$$\gamma_x \leqslant -C \qquad \forall x,\ x \notin K$$

et pour un $0 < B < \infty$ on a :

$$\gamma_x \leqslant B < \infty \quad \forall x \in K .$$

Corollaire 2.- Si $P(x,.)$ est fortement continue et si l'espace X est un espace de Banach de dimension finie, alors une condition suffisante d'ergodicité est qu'il existe des constantes α et $C > 0$ tels que

$$\gamma_x \leq - C \quad \text{pour tout } x \text{ , } \|x\| > \alpha$$

et γ_x reste bornée pour tout x , $\|x\| \leq \alpha$.

Proposition 1.- Si la fonction ϑ vérifie l'hypothèse suivante :

(H_o) : il existe une constante $A > 0$: $|\vartheta(x)| \leq |x| - 2\, E\, |\varepsilon_o|$, pour tout x , $|x| > A$ alors le processus (X_n) défini par l'équation (1) est

1) λ-récurrent
2) ergodiquement géométrique
3) apériodique.

Démonstration : 1) et 2) il suffit d'appliquer les corollaires (1), (2) et (3) et de voir [17].

Remarque : le lemme 1 et la proposition 1 nous permettent de dire que la chaîne (X_n) admet une mesure de probabilité invariante notée π , et que cette probabilité est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$, sa densité sera notée aussi par π.

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{on a} \quad \pi P(A) = \int \pi(x)\, P(x,A)\, dx \tag{3}$$

$$(2) \text{ et } (3) \Longrightarrow \qquad \pi(y) = \int \pi(x)\, g(y - \vartheta(x))\, dx \quad y \quad \lambda\text{-p.s.}$$

Proposition 2.- Si la loi initiale de la chaîne de Markov (X_n) est π, alors cette chaîne est stationnaire (dans le sens faible).

Démonstration : Soit ν la loi initiale de la chaîne

$\nu = \pi$

$$E_\pi X_n = \int x \quad \pi P^n(dx) = \int x\ \pi(x)\ dx = E_\pi X_1 \quad , \forall n$$

$$E_\pi X_n^2 = \int x^2 \quad \pi P^n(dx) = \int x^2 \pi(x)\ dx = E_\pi X_1^2 \quad , \forall n$$

$$E_\pi X_n X_{n+k} = \int xy\ (P_\pi)_{(X_n, X_{n+k})}(dx,dy) = \int xy\ P^k(x,\ dy)\quad \pi(x)\ dx$$

$$= E_\pi X_o X_k \qquad \forall k\ ,\ n\ .$$

Quelques exemples

1) Soit $\varphi(x) = a\ x$.

vérifie l'hypothèse (H_o) ssi $|a| < 1$.

Démontrons : $(H_o) \Longrightarrow (|a| < 1)$.

Supposons qu'il existe une constante $A > 0$ tel que

$$|\varphi(x)| \leq |x| - 2E\ |\varepsilon_o| \qquad \text{pour} \qquad |x| > A$$

$$\Longrightarrow (|ax| \leq |x| - 2E\ |\varepsilon_o|$$

$$\Longrightarrow (|a|-1)\ |x| \leq -\ 2E\ |\varepsilon_o|\ .$$

$(|a| < 1) \Longrightarrow (H_o)$

il suffit de poser $A = \dfrac{2E\ |\varepsilon_o|}{1-|a|} > 0$

$$|\varphi(x)| = |ax| = |x| + (|a|-1)\ |x| \leq |x| + \frac{(|a|-1)}{1-|a|}\ 2E\ |\varepsilon_o| = |x| - 2E\ |\varepsilon_o|$$

cela montre que pour $|a| < 1$ la chaîne définie par $X_{n+1} = a X_n + \varepsilon_{n+1}$ admet une probabilité invariante notée π et si $\nu = \pi$, alors le processus est stationnaire.

Si (ε_n) suit une loi normale centrée réduite alors $\pi \sim N(0 , \frac{1}{1-(a)^2})$ cf. [9] et on a

$$\begin{cases} E X_n = 0 \\ E X_n^2 = \dfrac{1}{1-a^2} \end{cases} , \quad \forall n .$$

2) Soit $(F_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{R}^*}$ une famille de lois absolument continues par rapport à λ de densité (ϕ_σ) où

$$\phi_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \phi(\frac{x}{\sigma})$$

si ψ est une fonction en escaliers, c'est-à-dire

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 1_{A_i} \quad , \quad A_i \cap A_j = \phi \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

la mesure invariante du processus (X_n^σ) existe, cette mesure est notée π_σ, et elle est donnée par

$$\pi_\sigma(y) = \sum_{i=1}^{k} \phi_\sigma(y - \alpha_i) \pi_\sigma(A_i)$$

donc si la loi initiale ν est égale à π_σ alors le processus (X_n^σ) est stationnaire.

A P P E N D I C E 2

INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A UNE MARTINGALE DE CARRE INTEGRABLE

On fait une suite d'observations afin de connaître un phénomène aléatoire (Ω, G, P), l'ensemble des événements observés jusqu'à l'instant $n \in T$, avec $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, constitue une tribu F_n ; on appelle filtration $F = (F_n)$ la suite de ces sous-tribus de G. C'est une suite croissante $(F_n \subset F_{n+1})$ car, à l'instant $n+1$ les événements antérieurs à n ont été observés.

Soit $F_\infty = \cup F_n$ et $F_{-\infty} = \cap F_n$.

Soit (Ω, G, P) un espace probabilisé pourvu d'une filtration $F = (F_t)_{t \geq 0}$ continue à droite.

Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une F-martingale à trajectoires nulles en 0, continues à droite et pourvues de limites à gauche (cad-lag) la fonction $t \rightarrow E(M_t^2)$ est croissante, supposons $||M||_2 = \sup_t \sqrt{E(M_t^2)}$ fini. Alors la martingale (M_t) converge p.s. si $t \rightarrow \infty$ vers une v.a. M_∞ pour cela cf. [9 ; p. 208], de plus, pour $s < t$.

$E(M_t - M_s)^2 = E(M_t^2) - E(M_s^2)$ et si s et t tendent vers $+\infty$, cette expression tend vers 0, donc (M_t) tend p.s. et dans L^2 vers une v.a. M_∞ : d'où :

$$E(M_\infty^2) = ||M||_2^2 .$$

Si $||M||_2^2$ est nulle, M est nulle à une modification près. On a ici plus, à cause de la continuité à droite de M. $P(M_t = 0$, pour tout $t) = P(M_q = 0$, pour q rationnel$) = 1$ on note $\Delta M_t = M_t - M_{t^-}$.

Définition 2.1.-

Deux processus définis sur le même espace probabilisé sont indistinguables si leurs trajectoires sont p.s. égales.

INTEGRALE STOCHASTIQUE

Soit A et $\tilde{A}$ deux F-processus croissants de carrés intégrables tels que $V = A - \tilde{A}$ soit une F-martingale et C un processus F-prévisible borné. Alors on a

$$C.V = \left(\int_0^t C_u \, dV_u\right)_{t\geq 0} \quad \text{est une F-martingale} \qquad (1)$$

En particulier, pour $C_u(\omega) = 1_{\Gamma\times]s,t]}(\omega,u)$ avec $0 \leq s < t$ et $\Gamma \in F_s$ l'équation (1) devient

$$(CV)_u = 1_\Gamma \, (V_{t\wedge u} - V_{s\wedge u}) \quad .$$

Il s'agit ici de généraliser ces formules et de définir une "intégrale stochastique".

$\int_0^t C_s \, dM_s = (CM)_t$ pour $M \in M^2(F)$ (c'est l'espace des

classes d'équivalence pour l'indistinguabilité des F-martingales nulles en 0 et cad-lag , $M = (M_t)_{t\geq 0}$ telles que $||M||_2^2 = \sup_t E(M_t^2)$ soit fini).

On ne suppose plus les trajectoires de M à variations bornées, c'est-à-dire on ne peut plus parler de l'intégrale de Stieltjes sur chaque trajectoire.

Proposition 2.2. [*Approximation de Y.M. par des découpages aléatoires*].

Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, (T_n^p) une suite de temps d'arrêt finis qui croît vers l'infini et telle que $T_o^p = 0$. On suppose que $\sup(T_{n+1}^p - T_n^p)$ tend vers 0, si $p \to \infty$. Alors, pour tout processus Y réel F-adapté borné et pourvu de limites à gauche,

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{T_n^p}(M_{T_{n+1}^p \wedge t} - M_{T_n^p \wedge t})\right\}_t \quad \text{est dans} \quad \mathcal{M}^2 = \mathcal{M}^2(F)$$

et converge dans $\mathcal{M}^2$ vers $Y^-.M$ avec $Y^- = (Y_{t^-})_{t \geq 0}$.

Démonstration :

Soit $Z^p = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{T_n^p} 1_{]T_n^p, T_{n+1}^p]}$

on a

$$(Z^p.M)_t = \sum_{n=0}^{\infty} (M_{T_{n+1}^p \wedge t} - M_{T_n^p \wedge t}) Y_{T_n^p}$$

mais si $Z^p = (Z_t^p)_{t \geq 0}$, Z_t^p tend vers Y_{t^-} si $p \to \infty$ et Y étant borné, la suite Z^p est borné par $\sup_s |Y_s|$. Donc (Z^p) tend vers Y dans $L^2(\mu_M)$, et $(Z^p.M)$ tend vers $(Y^-.M)$ dans $\mathcal{M}^2$.

Proposition 2.3. [9].-

Soit $M \in \mathcal{M}^2$. Il existe un F-processus croissant, noté $[M,M]$, satisfaisant les propriétés suivantes :

a) $M^2 - [M,M]$ est une F-martingale

b) Soit, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, (T_n^p) une suite de F - temps d'arrêt qui croît vers l'infini et telle que $T_o^p = 0$.

si $\lim\limits_{p\to\infty} \sup\limits_n |T^p_{n+1} - T^p_n| = 0$, alors quel que soit t la variation quadratique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (M_{T^p_{n+1}\wedge t} - M_{T^p_n \wedge t})^2$ converge en probabilité vers $[M,M]_t$ si $p \to \infty$.

c) $([M,M]_t - \sum \Delta M_s^2)$ est un F-processus croissant continu. Donc si M est continue, $[M,M]$ est continu.

Démonstration : Soit $A < \infty$ et $T_A = \inf\{s \,;\, |M_s| \geq A\}$; le processus $(M_s^{T_A})$ est continu à gauche donc prévisible et borné en module par A. Notons, pour alléger l'écriture, N au lieu de M^{T_A}.

$$N_t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (N^2_{T^p_{n+1}\wedge t} - N^2_{T^p_n\wedge t})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (N_{T^p_{n+1}\wedge t} - N_{T^p_n\wedge t})^2 + 2\sum_{n=0} N_{T^p_n\wedge t}(N_{T^p_{n+1}\wedge t} - N_{T^p_n\wedge t})$$

d'après la proposition 2.2. on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (N_{T^p_{n+1}\wedge t} - N_{T^p_n\wedge t})^2 \xrightarrow{L_2} N_t^2 - 2\int_0^t N_{s^-}\, dN_s \ .$$

Cette limite vaut, d'après la formule 8.1.8. (cf [9] p. 236)

$$[M,M]^A_t = M^2_{t\wedge T_A} - 2\int_0^{t\wedge T_A} M_{s^-}\, dM_s \ .$$

Soit $s < t$; on peut prendre des suites (T^p_n) dont deux des termes valent respectivement s et t. Alors :

$$\sum_{s\leq T^p_n<t} (N_{T^p_{n+1}} - N_{T^p_n})^2 \xrightarrow{P} [M,M]^A_t - [M,M]^A_s$$

ce qui prouve la croissance de $[M,M]^A$.

Les trajectoires $t \longmapsto [M,M]^2_{t \wedge T_A}$ sont cad-lag ; et, p.s. on a pour tout t :

$$\Delta[M,M]^A_t = \Delta M^2_{t \wedge T_A} - 2\, M_{t \wedge T_A^-}\, \Delta M_{t \wedge T_A} = (\Delta M_{t \wedge T_A})^2 \quad .$$

Mais d'après la proposition 7.2. cf [9 , p. 208].

On a $P(T_A \leq t) \leq \frac{1}{A^2} \, E(M^2_t)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver A tel que $P(T_A \leq t)$ soit inférieur à ε sur $\{T_A > t\}$, les processus N et M coïncident p.s. On peut donc définir un processus $[M,M]$ à trajectoires cad-lag tel que, pour tout $A \in N$.

$$[M,M]_t = [M,M]^A_t \quad \text{sur} \quad \{T_A > t\}$$

On a : $$P\{\Delta[M,M]_t = (\Delta M_t)^2 \quad \text{pour tout} \quad t\} = 1$$

donc $$[M,M]_t - \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 = [M,M]_t - \sum_{s \leq t} \Delta[M,M]_s$$

est un processus continu.

Conséquence. Soit M et N deux martingales de $\mathcal{M}^2$. Par l'inégalité de Minkowski :

$$\sum (M_{T^p_{n+1} \wedge t} - N_{T^p_{n+1} \wedge t} - M_{T^p_n \wedge t} + N_{T^p_n \wedge t})^2$$

$$= \sum (M_{T^p_{n+1} \wedge t} - M_{T^p_n \wedge t})^2 + \sum (N_{T^p_{n+1} \wedge t} - N_{T^p_n \wedge t})^2$$

$$- 2 \sum (M_{T^p_{n+1} \wedge t} - M_{T^p_n \wedge t})\,(N_{T^p_{n+1} \wedge t} - N_{T^p_n \wedge t})$$

$$\geq \sum (M_{T^p_{n+1} \wedge t} - M_{T^p_n \wedge t})^2 + \sum (N_{T^p_{n+1} \wedge t} - N_{T^p_n \wedge t})$$

$$- 2 \left[\sum (M_{T^p_{n+1} \wedge t} - M_{T^p_n \wedge t})^2 \sum (N_{T^p_{n+1} \wedge t} - N_{T^p_n \wedge t})^2\right]^{1/2}$$

passant à la limite pour $p \to +\infty$.

$$[M - N , M - N]_t \geqslant (\sqrt{[M,M]_t} - \sqrt{[N,N]_t})^2$$

donc si une suite (M^p) de $\mathcal{M}^2$ converge dans $\mathcal{M}^2$ vers M, alors

$$\sqrt{[M^p,M^p]_t} \xrightarrow[p]{L_2} \sqrt{[M,M]_t} \quad , \qquad \forall t \; .$$

Proposition 2.4.- Soit $M \in \mathcal{M}^2$.

a) Pour tout processus prévisible Y de $L^2(\mu_M)$, on a :

$$[YM, YM] = Y^2 [M,M] \; .$$

b) Supposons M bornée. Soit Y un processus réel adapté à F, borné et ayant des limites à gauche sur chaque trajectoire.

Pour toute famille (T_n^p) de temps d'arrêt telle que celle de la proposition (2.3.), on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (M_{T^p_{n+1}} - M_{T^p_n})^2 \, Y_{T^p_n} \xrightarrow{P} \int_0^t Y_{s^-} \, d[M,M]_s$$

quand $p \to \infty$.

Démonstration : D'après la remarque précédente, l'ensemble des Y satisfaisant la propriété a) est un fermé de $L^2(\mu_M)$. Il suffit donc de la prouver pour Y étagé de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, 1_{\Gamma_i \times]t_i,t_{i+1}]} \qquad \text{avec } 0 = t_1 < \ldots < t_{n+1} < \infty \qquad ,$$

mais, alors supposant $t_j < t \leq t_{j+1}$

$$\sum_{1\leq i<j} ((Y\, M)_{t_{i+1}\wedge t} - (Y\, M)_{t_i \wedge t})^2 = \sum_{1\leq i<j} \alpha_i^2\, 1_{\Gamma_i}\, (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

$$+ \alpha_j^2\, 1_{\Gamma_j}\, (M_t - M_{t_j})^2 .$$

Prenons une suite de partitions de $[o,t]$, plus fine que $t_1,\dots,t_j,t$ et dont le pas tend vers 0.

La somme des carrés des accroissements de $Y.M$ le long de cette partition tend en probabilité vers

$$\sum_{1\leq i<j} \alpha_i^2\, [[M,M]_{t_{i+1}}\, 1_{\Gamma_i} - [M,M]_{t_i}\, 1_{\Gamma_i}] + \alpha_j^2\, 1_{\Gamma_j}([M,M]_t - [M,M]_{t_j})$$

$$= \int_0^t Y_s^2\, d[M,M]_s \quad .$$

Prouvons b) séparant partie positive et négative, on peut supposer Y positif, donc prouver le résultat pour Y^2 .

Soit $Z^p = Y_{T_n^p}\, 1_{]T_n^p, T_{n+1}^p]}$, d'après la proposition (2) ; $(Z^p.M)$ tend dans M^2 vers

$$Y^- M = (\int_0^t Y_{s^-}\, dM_s)_{t\geq 0} \quad .$$ Mais :

$$(Z^p\, M)_t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{T_n^p}^2\, (M_{T_{n+1}^p \wedge t} - M_{T_n^p \wedge t})^2 +$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_{T_n^p}\, [Z^p.M]_{T_n^p}\, (M_{T_{n+1}^p \wedge t} - M_{T_n^p \wedge t})$$

d'où faisant tendre p vers ∞.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y^2_{T^p_n} (M_{T^p_{n+1} \wedge t} - M_{T^p_n \wedge t}) \xrightarrow{L_1} (\int_0^t Y_{s^-} \, dM_s)^2 -$$

$$- 2 \int_0^t Y_{s^-} - 2 \int_0^t Y_{s^-} (Y^- . M)_{s^-} \, dM_s .$$

cette limite vaut $[Y^- . M , Y^- M]_t = \int_0^t Y^2_{s^-} \, d[M,M]_s$.

Définition 2.5.-

a) un F-temps d'arrêt T est une v.a. de (Ω, G) dans $[0, \infty]$ telle que, pour tout $t \geq 0$; $\{T \leq t\}$ soit dans F_t .

La tribu F_t est l'ensemble des événements antérieurs à t (t compris).

b) si T est un temps d'arrêt, la tribu F_T est

$$F_T = \{A, A \in F_\infty , \; A \cap \{T \leq t\} \in F_t , \quad \forall t \geq 0\}$$

$$F_\infty = \bigcup F_t .$$

Définition 2.6.-

1°) On désigne par M_{loc} l'ensemble des F-martingales locales c'est-à-dire des processus M réels, à trajectoires cad-lag , tels qu'il existe une suite (T_n) de F-temps d'arrêt croissant vers ∞ pour laquelle M^{T_n} soit une F-martingale quel que soit n .

2°) M^2_{loc} est l'ensemble des $M \in M_{loc}$ tels qu'il existe une suite (T_n) de F-temps d'arrêt croissant vers ∞ pour laquelle M^{T_n} soit dans M^2 , quel que soit n .

3°) Un processus Y réel adapté à F est localement borné s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers ∞ telle que Y^{T_n} soit borné , quel que soit n .

Théorème 2.7. (*cf.* 9 , *p.* 240).

Soit $M \in M^2_{loc}$. Il existe un F-processus croissant $[M,M]$ satisfaisant les propriétés suivantes :

a) $M^2 - [M,M]$ est une F-martingale locale.

b) La propriété b) de la proposition 2.3. est vérifiée.

c) $\{[M,M]_t - \sum_{s\leq t} (\Delta M_s)^2\}$ est un F-processus croissant continu.

d) si M est continu ; $[M,M]$ est continu , et c'est l'unique processus croissant continu satisfaisant la propriété a).

Il existe une application linéaire unique $Y \mapsto Y \,.\, M = (\int_0^t Y_s \, dM_s)_{t\geq 0}$ de l'ensemble des processus prévisibles localement bornés dans M^2_{loc} satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1) $(Y\,M)^2 - Y^2[M,M]$ est dans M^2_{loc} .

2) si T et S sont deux F-temps d'arrêts finis et $S < T$ et si Y_S est une v.a. F_S-mesurable bornée alors

$$Y_S \, 1_{]S,T]} \,.\, M = \{Y_S \, (- M_{S\wedge t} + M_{T\wedge t})\}_{t\geq 0} ,$$

on a la relation : $M_t^2 = 2 \int_0^t M_{S^-} \, dM_S + [M,M]_t$. Si pour tout t ; $E[\int_0^t Y_S^2 \, d[M,M]_S]$ est finie, alors $Y\,M$ est une martingale.

Définition 2.8.- Une fonction $V : t \longrightarrow V_t$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est à variation bornée si pour tout t

$$T_t^V = \sup \{ \sum_{i=0}^{n} | V_{t_i+1} - V_{t_i} | \quad ; \quad 0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n = t \}$$

est fini. La fonction T^V est la variation totale de V.

<u>*Remarque*</u> : On admettra que $V : t \longrightarrow V_t$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continu à droite et à variation bornée si et seulement si, $V - V(o)$ est différence de deux fonctions A et B de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, croissantes continues à droites, nulle en 0. La variation totale T^V est égale à $A + B$ on a : $\left|\int_u^t f(s)\, dV_s\right| \leq \int_u^t |f(s)|\, dT_s^V$.

Enfin $\Delta V_t = V_t - V_{t^-}$ désigne le signe de saut de V en t, nul sauf pour un ensemble dénombrable de t ; $\sum_{s \leq t} |\Delta V_s| \leq T_t^V$.

L'étude de ces fonctions et de l'intégrale de Stieltjes figurent dans [14].

FORMULE DE ITO ET CALCUL STOCHASTIQUE

Théorème.- Formule de Ito ou "changement de variable". Soit M une martingale de $\mathcal{M}^2_{loc}$ adaptée à F, V un processus cad-lag à variations bornées adapté à F, et une fonction f de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On a p.s. pour tout t :

$$f(V_t,M_t) - f(V_o,M_o) = \int_0^t D_1 f(V_{s^-}, M_s)\, dV_s +$$

$$+ \int_0^t D_2 f(V_{s^-}, M_{s^-})\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t D_2^2 f(V_{s^-}, M_{s^-})\, d[M,M]_s +$$

$$+ \sum_{s\leqslant t} \left[f(V_s,M_s) - f(V_{s^-}, M_s) - D_1 f(V_{s^-}, M_s)\, \Delta V_s\right] +$$

$$+ \sum_{s\leqslant t} \left[f(V_{s^-}, M_s) - f(V_{s^-}, M_{s^-}) - D_2 f(V_{s^-}, M_{s^-})\, \Delta M_s \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} D_2^2 f(V_{s^-}, M_{s^-})(\Delta M_s)^2\right] .$$

Démonstration : Montrons le théorème pour M bornée et V de variation totale $T^V = (T^V_t)_{t\geqslant 0}$ bornée $\{\sup_t |M_t|$ et $\sup_t T^V_t$ sont bornées$\}$ si C est une constante majorant $\sup_s |M_s|$ et $\sup_s T^V_s$, alors sur $K = \{(x,y) : |x| \leqslant C$ et $|y| \leqslant C\}$ les dérivées permières et secondes de f sont uniformément continues. Soit $\eta > 0$; on lui associe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous (x,y) et (x',y') dans K et $|x-x'| \leqslant \varepsilon$ et $|y-y'| \leqslant \varepsilon$, Ces dérivées en (x,y) et (x',y') différent de moins de η. Considérons un $\alpha > 0$, et les temps d'arrêts T_n définis par :

$$T_o = 0 ,\dots, T_{n+1} = \inf\{s \; ; \; s > T_n \; ; \; |V_n - V_{T_n}| + |M_s - M_{T_n}| > \frac{\varepsilon}{2}\} \wedge (T_n+\alpha) \wedge t \; .$$

On a :

$$f(V_t,M_t) - f(V_o,0) = \sum_p \left[f(V_{T_{p+1}},M_{T_{p+1}}) - f(V_{T_p},M_{T_{p+1}})\right]$$

$$+ \sum_p \left[f(V_{T_p},M_{T_{p+1}}) - f(V_{T_p},M_{T_p})\right] \; .$$

Etudions la première somme. On peut la comparer avec

$$\sum_p D_1 \, f(V_{T_{p+1}^-} , M_{T_{p+1}}) \, . \, (V_{T_{p+1}} - V_{T_p})$$

qui tend, si η tend vers 0 , vers $\int_0^t D_1 \, f(V_{s^-} , M_s) \, dV_s$.

Soit $Y_p = f(V_{T_{p+1}} , M_{T_{p+1}}) - f(V_{T_p} , M_{T_{p+1}}) - D_1 \, f(V_{T_{p+1}^-} , M_{T_{p+1}}) \times (V_{T_{p+1}} - V_{T_p})$,

et $\beta_p = \sum_{s\leq t} \{f(V_s,M_s) - f(V_{s^-} , M_s) - D_1 \, f(V_{s^-} , M_s) \, \Delta V_s\}$.

On a $|\beta_p - \sum_{\{s\leq t, |\Delta V_s| \geq \varepsilon/2\}} \{f(V_s,M_s) - f(V_{s^-},M_s) - D_1 \, f(V_{s^-},M_s) \, \Delta V_s\}$

$$\leq \eta \sum_{s\leq t} |\Delta V_s| \leq \eta \, T_t^V \; ;$$

$$|\sum Y_p \, 1_{\{|\Delta V_{T_{p+1}}|<\varepsilon/2\}}| \leq \eta \sum |V_{T_{p+1}} - V_{T_p}| \leq \eta \, T_t^V \; .$$

Et, sur chaque trajectoire de V , il y a avant t au plus un nombre fini de sauts de module supérieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ qui se produisent à certains des instants T_p ;

$\sum Y_p \, 1_{\{|\Delta V_{T_{p+1}}| \geq \varepsilon/2\}}$ tend, si α tend vers 0 , vers

$$\sum_{\{s\leq t, |\Delta V_s| \geq \varepsilon/2\}} \{f(V_s,M_s) - f(V_{s^-},M_s) - D_1\, f(V_{s^-},M_s)\, \Delta V_s\} \; .$$

On fait tendre α vers 0 , puis η vers 0 ; $\sum\left[f(V_{T_{p+1}},M_{T_{p+1}})-f(V_{T_p},M_{T_p})\right]$ tend vers $\int_0^t D_1\, f(V_{s^-}, M_s)\, dV_s + \beta_t$

$$= \int_0^t D_1\, f(V_{s^-}, M_s)\, dV_s + \sum_{s\leq t} \Big[f(V_s, M_s) - f(V_{s^-}, M_s) - D_1\, f(V_{s^-}, M_s)\, \Delta V_s\Big] \; .$$

Etudions la seconde somme $\sum f(V_{T_p},M_{T_{p+1}}) - f(V_{T_p},M_{T_p})$. On va la comparer à son approximation de Taylor d'ordre 2 :

$$\sum D_2\, f(V_{T_p},M_{T_p})\, (M_{T_{p+1}}-M_{T_p}) + \frac{1}{2} \sum D_2^2\, f(V_{T_p},M_{T_p})\, (M_{T_{p+1}} - M_{T_p})^2$$

Si $\eta \longrightarrow 0$, cette approximation tend, d'après les propositions (2) et (4) vers $\int_0^t D_2\, f(V_{s^-}, M_{s^-})\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t D_2^2\, f(V_{s^-}, M_{s^-})\, d[M,M]_s$.

Considérons les v.a. :

$$Z_p = f(V_{T_p}, M_{T_{p+1}}) - f(V_{T_p}, M_{T_p}) - D_2\, f(V_{T_p}, M_{T_p})\, (M_{T_{p+1}} - M_{T_p}) - \frac{1}{2} D_2^2\, f(V_{T_p}, M_{T_p})\, (M_{T_{p+1}} - M_{T_p})^2 \; ,$$

$$\gamma_t = \sum_{s\leq t} \Big[f(V_{s^-}, M_s) - f(V_{s^-}, M_{s^-}) - D_2\, f(V_{s^-}, M_{s^-})\, \Delta M_s - \frac{1}{2} D_2^2\, f(V_{s^-}, M_{s^-})\, (\Delta M_s)^2\Big]$$

On a : $\sum Z_p \, 1_{\{|\Delta M_{T_{p+1}}| < \varepsilon/2\}} \leq \frac{1}{2}\, \eta \sum (M_{T_{p+1}} - M_{T_p})^2$ si $\alpha \longrightarrow 0$, $\sum (M_{T_{p+1}} - M_{T_p})^2 \longrightarrow [M,M]_t$, et le majorant tend vers $\frac{1}{2}\, \eta\, [M,M]_t$ en probabilité.

D'autre part, sur une trajectoire donnée de M, il y a avant t un nombre fini de sauts $\geq \varepsilon/2$ qui se produisent à certains des instants T_p. Si $\alpha \to 0$,

$$\sum Z_p \, 1_{\{|\Delta M_{T_{p+1}}| \geq \varepsilon/2\}} \longrightarrow \sum_{\{s \leq t, |\Delta M_s| \geq \varepsilon/2\}} \Big[f(V_{s^-}, M_s) - f(V_{s^-}, M_{s^-})$$

$$- D_2 f(V_{s^-}, M_{s^-}) \, \Delta M_s - \frac{1}{2} D_2^2 f(V_{s^-}, M_{s^-}) \, (\Delta M_s)^2\Big] .$$

Enfin :

$$\sum_{\{s \leq t, |\Delta M_s| < \varepsilon/2\}} \Big[f(V_{s^-}, M_s) - f(V_{s^-}, M_{s^-}) - D_2 f(V_{s^-}, M_{s^-}) \, \Delta M_s$$

$$- \frac{1}{2} D_2^2 f(V_{s^-}, M_{s^-}) \, (\Delta M_s)^2\Big] \leq \frac{\eta}{2} \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 \leq \frac{\eta}{2} [M,M]_t \quad .$$

Donc si η et ε tendent vers 0, cette expression tend vers 0.

Faisant tendre α vers 0, puis η et ε vers 0, on obtient

$$\sum Z_p - \gamma_t \xrightarrow{P} 0 \quad .$$

On a ainsi montré le théorème si $\sup_t |M_t|$ et $\sup_t |T_t^V|$ sont des v.a. bornées.

Prenons $M \in \mathcal{M}^2$ et V processus cad-lag à variations bornées.

$$P(\sup_s |M_s| \geq n) \leq \frac{1}{n^2} \, E(M_\infty^2) \quad .$$

Posons $S_n = \inf \{s \; ; \; |M_s| \geq n$ ou $T_s^V \geq n\}$, en notant T_s^V la variation totale (finie) de $(V_t)_{t \leq s}$ si l'on reprend les calculs précédents, on obtient la formule pour $t < S_n$. Comme (S_n) croît p.s. vers ∞, la formule de Ito est valable pour tout t.

De même pour $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$, on peut trouver une suite (R_n) de temps d'arrêt qui croît vers ∞, telle que M^{R_n} soit dans $\mathcal{M}^2$ quel que soit n. On applique le théorème à M^{R_n} et V^{R_n}, ce qui donne la formule pour $t \leq R_n$. Puis on fait tendre n vers ∞.

Remarque : Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Soit $[M,M]^c$ la partie continue de $[M,M]$;

$[M,M]^c_t = [M,M]_t - \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2$ on a :

$$f(M_t) - f(o) = \int_0^t f'(M_{s^-})\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_{s^-})\, d[M,M]^2_s$$
$$+ \sum_{s \leq t} \left[f(M_s) - f(M_{s^-}) - f'(M_{s^-})\, \Delta M_s\right] .$$

Exemple : Formule d'intégration par parties :

Prenant : $f : (x,y) \longrightarrow f(x,y) = xy$

on obtient : $V_t\, M_t = V_o\, M_o + \int_0^t M_s\, dV_s + \int_0^t V_{s^-}\, dM_s$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOSQ D. (1970) - Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle. Inst. de Stat. de l'Univ. de Paris, Vol. 19, Fasc. 2.

[2] BORISOV. I.S. (1980) - Abstracts of the Colloquium on non parametric statistical inference. "Budapest".

[3] BOSQ D. (1982) - Remarques sur l'estimation dans le modèle $Y_t = \psi(X_t) + \varepsilon_t$. Pub. IRMA Lille Vol. 4, Fasc. 3.

[5] BICKEL-ROSENBLATT M. (1973) - On some global measures of the derivations of density function estimates, the annals of stat, Vol. 1, n° 6 p. 1071-1095.

[6] BILLINGSLEY P. (1968) - Convergence of probability. Wiley New-York.

[8] DACUNHA CASTELLE D. - DUFLO M. (1982) - Prob. et Statistique. Tome 1 - Masson.

[9] DACUNHA CASTELLE D. - DUFLO M. (1983) - Prob. et Statistique. Tome 2 - Masson.

[25] EDDY WILLIAM F. (1980) - Optimum kernel estimators of the mode, the annals of statistics, vol. 8, n° 4, p. 870-882.

[10] GEORGE G - ROUSSAS - Non parametric estimation in Markov processes technical report n° 110, april 1967 departement of Statistic, the University of Wasconsin Madison, Wasconsin.

[11] GEORGE G. - ROUSSAS - Asymptotic normality of certain funciton defined on a Markov processes, technical report 109, departement of statistic, the University of Wasconsin Madison - Wasconsin.

[7] GOURIEROUX C. - MONFORT A. (1980) - Sufficient linear structures econometric applications. Econometrica, Vol. 48, n° 5.

[12] GOURIEROUX C. - MONFORT A. (1983) - Cours de séries temporelles Collection "Economie et Statistique avancées". Economica ESA.

[13] JACOB P. (1984-1985) - Cours de probabilité et intégration.
Université des Sciences et Techniques de Lille.
U.E.R. de Math. Pures et Appliquées.

[14] KOLMOGOROV A. - FOMINE S. (1974) - Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.
Mir.

[15] LECOUTRE J.P. (1980) - Estimation convergente de la régression pour une variable alaéatoire à valeurs dans un espace de Banach.
Pub. de l'ISUP, Vol. 25, Fasc. 1-2.

[4] MONFORT A. (1982) - Cours de Statistique mathématique.
Collection "Economie et statistique avancées".
Economica - ESA.

[16] OREY-STEVEN (1971) - Limit theorems of Markov chains transition probabilities Van Nostrand.

[17] DOUKHAN Paul - GHINDES M. (1980) - C.R.A.S. Paris Tome 290
p. 921-923.

[18] PICKANDS J.S. III (1960) - Upcrossing probabilities for gaussian processes Trans. Amer Math. Soc. 145 p. 51-73.

[19] RICHARD-TWEEDIE (1974) - R-Theory for chaîns on generad state space.
Vol. 2, n° 5, the annals of probabilitie
p. 840-864.

[20] RICHARD-TWEEDIE - Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains - stoch proc. and heir applic.
Vol. 3, p. 385-403.

[22] TONG-LIM (1980) - Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data.
J.R. Statist. Soc. 42, n° 3, pp. 245-292.

[23] COGBURN Robert (1975) - A uniform theory for sums of Markov chain transition probabilities. The annals of probability
Vol. 3, n° 2, p. 191-214.

[26] ZIMERMANN G. (1976) - Some function proprieties of the law parameter gaussian processes annals of the math. stat.
Vol. 43, p. 1235-1246.

[24] WHITT (1970) - Weak convergence of probability measures on the function space $C([0, +\infty])$, the annals of the math. Statistics. Vol. 41, n° 43
p. 934-944.

[21] ROSENBLATT M. (1976) - On the maximal derivatif of the k-dimensional density estimates, the annals of proba. vol. 4
p. 1009-1015.

[27] TONG-LIM (1983) - Threshold models in non linear time series analysis, Lectures Notes in Statistics 21, Springer-Verlag. New York.

[28] COLLOMB G. (1979) - Estimation de la régression. C.R.A.S.

R E S U M E

Cette thèse contient trois parties : la première partie contient l'étude probabiliste d'un processus autorégressif non linéaire d'ordre k. Toutes les variables sont à valeurs dans un espace réel de dimension h. On suppose que le bruit à l'instant n est indépendant de la tribu engendrée par toutes les variables jusqu'à l'instant n-1.

Dans un premier temps on établit des conditions suffisantes d'ergodicité sur la tribu formée par les cylindres. Puis on propose des estimateurs de la probabilité de transition, du filtre et de la densité du bruit, par la méthode du noyau. Nous déduisons en suite des majorations des risques correspondant à chaque estimateur. Dans la deuxième partie, on considère un modèle statique additif reliant deux processus. L'observation et le bruit à l'instant n sont indépendants. On estime le filtre en utilisant un estimateur du mode conditionnel. Puis on s'est intéressé au test de l'hypothèse H_0 : il existe un réel tel que le filtre est linéaire sur un compact réel contre l'alternative H_1 : pour tout réel le filtre est non linéaire sur le même compact.

L'idée générale est d'utiliser l'approximation d'un processus par un processus gaussien stationnaire. Dans la troisième partie on donne les conditions suffisantes pour montrer le théorème central limite.

M O T S C L E S

- CHAINE DE MARKOV
- ESTIMATION NON PARAMETRIQUE CONDITIONNELLE
- MOUVEMENT BROWNIEN
- TEST DE LINEARITE