

N° d'ordre : 694

55376
1986
3

55376
1986
3

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Vlad SERGIESCU

**QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES FEUILLETAGES
ET LES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES**



030 021703 3

Thèse soutenue le 27 juin 1986 devant la Commission d'Examen :

Président : L. GRUSON (Université de Lille I)

Rapporteurs : { A. HAEFLIGER (Université de Genève)
P. MOLINO (Université de Montpellier II)
D. LEHMANN (Université de Lille I)

Examineur : B. CENKL (Northeastern University Boston)

Les discussions que j'ai pu avoir avec André Haefliger et l'attention qu'il m'a montrée m'ont beaucoup stimulé ces dernières années. Je suis heureux de le remercier aujourd'hui.

Gilbert Hector m'a initié aux feuilletages. Pour tout ce qu'il m'a appris, je lui exprime ma reconnaissance sincère.

Daniel Lehmann est à l'origine de l'équipe de Géométrie de Lille. Il a porté un intérêt constant à mon travail. Il m'encourage une nouvelle fois et je l'en remercie.

Mes recherches doivent beaucoup aux travaux de Pierre Molino. Je le remercie chaleureusement d'avoir bien voulu s'y intéresser.

Je remercie Laurent Gruson qui m'a proposé un beau sujet de seconde thèse et m'a permis d'approfondir la théorie des courbes algébriques.

Je suis reconnaissant à Bohumil Cenkl d'être présent dans ce jury. Plusieurs conversations que nous avons eues m'ont été d'une réelle utilité.

Ce que je dois à mon ami Etienne Ghys dépasse le domaine mathématique. Aussi, je me contenterai de souligner sa disponibilité peu commune dont j'ai maintes fois bénéficié.

Les nombreuses discussions et la collaboration amicale de Yves Carrière, Gérard Duminy et Aziz El-Kacimi Alaoui sont présentes dans ces pages. Je les remercie ainsi que les autres participants de nos séminaires : Bernard Callenaere, Youssef Hantout, Yves Félix, Daniel Tanré, Jean-Claude Thomas, Philippe Tilleul et aussi Jean-Jacques Loeb et Alain Pajor.

Enfin, que Raymonde Bérat, Claudine Evrard, Arlette Lengaigne qui ont dactylographié mes articles, Monique Lloret, Françoise Wdowczyk, Albert Gournay et Michel Provost qui ont assuré la reprographie trouvent ici l'expression de ma gratitude.

INTRODUCTION

Les travaux réunis dans cette thèse portent sur plusieurs aspects de la théorie des feuilletages.

Nous souhaitons donner dans l'introduction une image d'ensemble des questions abordées et des résultats obtenus. Nous les avons présentés en trois parties :

I. Feuilletages sur les variétés de dimension 3.

[1] Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages (en collaboration avec E. Ghys) - *Topology*, Vol 19 (1980), pp. 179-197.

II. Groupes de difféomorphismes du cercle.

[2] Sur la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey (en collaboration avec G. Duminy) - *C.R.A.S.*, t. 292, (1981), pp. 821-824.

[3] Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle (en collaboration avec E. Ghys) - Preprint I.H.E.S. (1985).

III. Cohomologie des feuilletages riemanniens.

[4] La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie (en collaboration avec A. El-Kacimi Alaoui et G. Hector) - *Math. Zeit.* 188, (1985), 593-599.

[5] Sur la suite spectrale d'un feuilletage riemannien - preprint Lille (1986).

[6] Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens - *Ann. Inst. Fourier*, tome 35, (1985), 137-158.

[7] Deux remarques sur les flots riemanniens (en collaboration avec P. Molino)
Manuscripta Mathematica 51 (1985), 145-161.

Pour simplifier l'exposition nous supposons les structures différentiables de classe C^∞ . Les objets considérés sont supposés orientés.

1. Feuilletages sur les variétés de dimension 3.

Un résultat fondamental dans la théorie des feuilletages, dû à Lickorish, établit l'existence sur toute variété de dimension 3 d'un feuilletage de codimension 1. Pour étudier et classifier les feuilletages sur ces variétés, il est naturel de leur imposer des restrictions de nature topologique.

Mentionnons deux théorèmes allant dans ce sens. Le premier, dû à Rosenberg, affirme qu'un feuilletage par plans est topologiquement conjugué à un feuilletage linéaire sur le tore T^3 . Le deuxième est le théorème de Novikov selon lequel tout feuilletage sur la sphère S^3 admet une feuille compacte.

L'étude que nous proposons dans [1] concerne les feuilletages sur les variétés à groupe fondamental résoluble.

Ce cadre est suffisamment large pour contenir de nombreux exemples. Certains ont une dynamique compliquée, due à la présence d'holonomie sur les feuilles non-compactes. Leurs propriétés sont assez intéressantes.

Par ailleurs, la topologie des variétés considérées est assez bien comprise. Ceci nous permet d'aboutir à des résultats précis de classification.

Décrivons brièvement une partie des exemples mentionnés plus haut.

Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ une matrice unimodulaire qui induit un difféomorphisme \bar{A} du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Notons T_A^3 le fibré en tores sur le cercle dont la monodromie est \bar{A} .

Les variétés à groupe fondamental résoluble obtenues sont celles qui admettent des feuilletages sans feuilles compactes. Les feuilles sont nécessairement des plans et des cylindres. S'il n'y a pas de mélange, Hector et Rosenberg ont montré que $\text{tr}A = 2$. Ils ont aussi classé ces feuilletages à conjugaison topologique près.

Pour aller plus loin il faut considérer les feuilletages par cylindres et plans. Lorsque $\text{tr}A > 2$, deux tels feuilletages existent sur la variété T_A^3 , chacun associé à une valeur propre de la matrice A . Nous les appelons dans [1] modèles.

Nous démontrons que tout feuilletage par cylindres et plans est conjugué à un modèle. Grâce au théorème d'Herman sur les difféomorphismes du cercle, nous mettons en évidence que la conjugaison obtenue est différentiable.

Nous en déduisons une propriété forte de stabilité, phénomène auparavant inconnu pour un feuilletage **sans** feuille compacte : toute petite perturbation d'un tel feuilletage sur T_A^3 lui est C^∞ conjuguée.

L'aspect topologique de ces résultats est utilisé ensuite pour montrer que sur une sphère d'homologie dont le groupe fondamental est résoluble, il y a toujours une feuille compacte. Certains recollements de fibrés en intervalles sur la bouteille de Klein entrent dans le champ d'application de ce résultat (et pas dans celui des résultats de Novikov).

Tout ceci permet alors d'aboutir à une classification topologique des feuilletages sans composante de Reeb sur les variétés à groupe fondamental résoluble.

Nous considérons plus particulièrement les feuilletages analytiques. Un tel feuilletage a forcément comme variété ambiante un fibré T_A^3 . Nous les classifions lorsque la trace de A est différente de 2.

II. Groupes de difféomorphismes du cercle.

L'étude du groupe des difféomorphismes (préservant l'orientation) du cercle est relié de près à celle des feuilletages de codimension 1. Désignons ce groupe par $\text{Diff}^+(S^1)$ (et par $\text{Diff}_\delta^+(S^1)$ lorsqu'il est muni de la topologie discrète).

Pour une variété M , les morphismes $\Pi_1(M) \rightarrow \text{Diff}^+(S^1)$ (qui s'identifient aux classes d'homotopie $[M, B \text{Diff}_\delta^+(S^1)]$) correspondent exactement aux feuilletages transverses à une S^1 -fibration. Les propriétés qualitatives et quantitatives d'un tel feuilletage se lisent sur l'action de groupe correspondante.

Au niveau universel, les propriétés homologiques du groupe discret $\text{Diff}_\delta^+(S^1)$ sont liées à celles du classifiant de Haefliger $B\Gamma_1$. Elles interviennent dans les problèmes de construction et de classification homotopique des feuilletages.

Le groupe $\text{Diff}^+(S^1)$ est simple. Dans l'espace $H^2(\text{Diff}_\delta^+(S^1); \mathbb{R})$ on connaît actuellement deux éléments : la classe d'Euler χ et la classe de Godbillon-Vey gv . Par le morphisme caractéristique d'un feuilletage transverse à une S^1 -fibration, ces invariants correspondent respectivement à la classe d'Euler de la fibration et à la classe de Godbillon-Vey du feuilletage intégrée sur la fibre.

Désignons par $H_c^*(\text{Diff}^+(S^1))$ la cohomologie du complexe des chaînes continues d'Eilenberg-MacLane sur le groupe $\text{Diff}^+(S^1)$. D'après le théorème de van Est on sait que $H_c^*(\text{Diff}^+(S^1))$ s'identifie à la cohomologie des champs de vecteurs sur S^1 , relative à l'action du sous groupe des rotations. Les classes χ et gv proviennent en réalité de $H_c^2(\text{Diff}^+(S^1))$. En fait, Gelfand-Fuks et Haefliger ont montré que $H_c^*(\text{Diff}^+(S^1))$ s'identifie à une algèbre de polynômes tronquée $R[\chi, gv]/\chi \cdot gv$.

Dans un sens, les travaux [2] et [3] portent sur différents aspects, qualitatifs et quantitatifs, des classes χ et gv .

Le problème abordé dans [2] est une interprétation dynamique de la classe gv .

Soit $\Gamma \subset \text{Diff}^+(S^1)$ un sous-groupe quelconque. Une trajectoire de Γ est dite ressort si elle "s'accumule sur elle-même". Le théorème démontré dans [2] est alors le suivant : si l'action de Γ n'a pas de trajectoire ressort, la classe gv est nulle dans $H^2(\Gamma; \mathbb{R})$.

Des actions sans feuille ressort proviennent des groupes abéliens (dans ce cas le résultat est dû à Wallet et Herman). C'est le cas aussi lorsque les trajectoires ont une croissance non-exponentielle : le résultat répond alors à un problème de Moussu-Sullivan, dans sa version relative à $\text{Diff}^+(S^1)$.

En termes de feuilletages, le théorème d'annulation s'énonce ainsi : la classe de Godbillon-Vey d'un feuilletage sans feuille ressort, transverse à une S^1 -fibration, est nulle. Formulé ainsi, le théorème est vrai en réalité sans l'hypothèse de transversalité à la fibration. C'est ce que Duminy a démontré depuis, à l'aide d'une approche très conceptuelle.

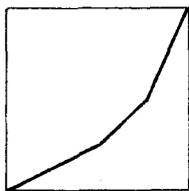
Comme nous l'avons déjà mentionné, l'analyse de la cohomologie de $\text{Diff}^+(S^1)$ et de ses sous-groupes est reliée à des problèmes géométriques : classification homotopique, cobordisme de feuilletage, etc...

A part le cas abélien (les classes caractéristiques continues sont nulles dans ce cas), seules les actions issues de celle de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le cercle avaient été considérées. Du point de vue homologique, on connaît $H_2(SL_2(\mathbb{R})_\delta)$ et, à un moindre degré, $H_3(SL_2(\mathbb{R})_\delta)$.

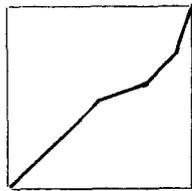
Dans [3], nous étudions une nouvelle famille de sous-groupes de $\text{Diff}^+(S^1)$ qui présente un mélange intéressant de propriétés géométriques et cohomologiques.

Le point de départ de la construction est un groupe G d'homéomorphismes linéaires par morceaux du cercle. Les "pentes" des éléments de G sont des puissances de 2 sur chaque morceau. Les "singularités" des dérivées sont des nombres dyadiques $\frac{p}{2^q} \bmod 1$ ($p, q \in \mathbb{Z}$). En outre l'ensemble des dyadiques est invariant par G .

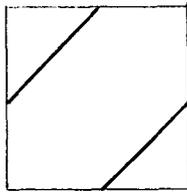
Voici quatre éléments de ce groupe :



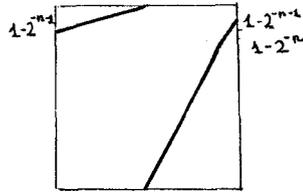
g_1



g_2



g_3



h_n

Le groupe G a été introduit par R.J. Thompson (1965) comme intermédiaire dans la construction de groupes dont le problème des mots n'est pas résoluble. Thompson a par ailleurs prouvé qu'il s'agit d'un groupe simple infini et de présentation finie : c'est le premier exemple découvert qui a ces propriétés simultanément. Il est possible de montrer que les éléments g_1, g_2, g_3 engendrent G ; quant à h_n , sa particularité réside dans son ordre qui est exactement $n+2$ ($n \geq 1$).

Un des problèmes abordés dans [3] est d'expliciter la cohomologie de G et de certains de ses sous-groupes. On montre par exemple que $H^*(G; \mathbb{R})$ s'identifie à une algèbre de polynômes tronquée $\mathbb{R}[e, \alpha]/e\alpha$, ou $\deg \alpha = \deg e = 2$. Elle est donc isomorphe à la cohomologie continue du groupe $\text{Diff}^+(S^1)$!

Le générateur e s'identifie à la classe d'Euler de l'action de G sur S^1 . Le générateur α apparaît à son tour comme un analogue discrétisé de l'invariant de Godbillon-Vey.

Plus précisément, un cocycle dans la classe α est donné par :

$$(u, v) \longmapsto \sum_{x \in S^1} \begin{vmatrix} \text{Log}_2 v'_d & \text{Log}_2 (u \circ v)'_d \\ \Delta \text{Log}_2 v'_d & \Delta \text{Log}_2 (u \circ v)'_d \end{vmatrix} \quad (x)$$

ou $\Delta\psi(x) = \psi(x_+) - \psi(x_-)$.

On remarque que la somme s'étend en fait à un nombre fini de dyadiques.

L'expression de ce cocycle est à comparer avec celle du cocycle de Thurston pour la classe $gv \in H^2(\text{Diff}^+(S^1); \mathbb{R})$:

$$(u, v) \longmapsto \frac{1}{2} \int_{S^1} \begin{vmatrix} \text{Log } Dv & \text{Log } D(u \circ v) \\ D\text{Log } Dv & D\text{Log } D(u \circ v) \end{vmatrix} dx .$$

Bien que l'action naturelle de G sur S^1 n'est pas différentiable, il est possible de construire des morphismes $\psi : G \rightarrow \text{Diff}^+(S^1)$, nécessairement injectifs puisque G est simple.

La classe gv des actions différentiables ainsi obtenues est nulle. A l'opposée, la classe d'Euler n'est pas nulle. En fait, nous montrons que, pour toute une famille de sous-groupes de $\text{Diff}^+(S^1)$, la classe d'Euler et toutes ses puissances sont non-nulles. Il s'agit d'une version constructive d'un résultat récent de Morita. Puisque Thurston a montré un résultat similaire pour la classe de Godbillon-Vey, ceci peut s'exprimer en disant que la cohomologie continue $H_c^*(\text{Diff}^+(S^1))$ s'injecte dans la cohomologie du groupe discret $H^*(\text{Diff}_\delta^+(S^1); \mathbb{R})$.

Les morphismes $\psi : G \rightarrow \text{Diff}^+(S^1)$ fournissent des actions minimales ainsi que des actions qui laissent invariant un ensemble de Cantor.

Ces dernières nous permettent de montrer que la classe d'Euler d'un sous-groupe de $\text{Diff}^+(S^1)$ peut être non-nulle en présence d'un minimal exceptionnel. Ce phénomène ne se produit jamais pour un sous-groupe de $\text{Diff}_\omega^+(S^1)$, résultat dû à Ghys.

Les actions différentiables de G sur le cercle sont assez rigides. Nous établissons qu'une telle action est semi-conjugée à l'inclusion naturelle $G \subset \text{Homéo}(S^1)$.

Pour terminer, mentionnons que plusieurs de ces propriétés conduisent à comparer G à un sous-groupe discret d'un groupe de Lie simple. Cette analogie est accentuée par le fait que G peut se réaliser comme sous-groupe discret de $\text{Diff}^+(S^1)$ tout en soulevant un certain nombre de questions.

III. Cohomologie des feuilletages riemanniens.

Les classes caractéristiques secondaires, comme la classe de Godbillon-Vey sont des éléments dans la cohomologie réelle de la variété ambiante.

Il est aussi tentant d'associer, à une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) des espaces de cohomologie ayant un intérêt géométrique.

Une telle théorie cohomologique a été introduite par Reinhart dans les années 60. Désignons par $\Omega_b^*(M)$ l'algèbre des formes différentielles transverses invariantes ω , c'est-à-dire vérifiant $i_X \omega = \theta_X \omega = 0$ pour tout champ X tangent à \mathcal{F} .

La cohomologie $H_b^*(M)$ de cette algèbre est appelée basique.

Il s'agit d'un invariant de la structure transverse du feuilletage. Contrairement à ce qui se passe pour les variétés compactes, la cohomologie basique n'est pas de dimension finie en général.

Une classe de feuilletages pour laquelle la cohomologie basique s'est avérée intéressante est celle des feuilletages riemanniens. Il s'agit des feuilletages pour lesquels le pseudogroupe transverse préserve une métrique. De façon équivalente, il existe une métrique sur la variété telle que le champ de plans orthogonal au feuilletage est totalement géodésique : toute géodésique issue orthogonalement à une feuille reste orthogonale au feuilletage.

Dans deux articles de 1959, Reinhart a commencé l'étude des questions de finitude et de dualité pour les feuilletages riemanniens. Complétés et précisés par Kamber-Tondeur en 1982, ces travaux établissent un théorème de dualité de Poincaré pour un feuilletage riemannien sur une variété compacte lorsque les feuilles sont des sous-variétés minimales.

Il s'agit là d'une restriction certaine. Voici un exemple n'ayant pas cette propriété.

Reprenons le fibré en tores sur S^1 de monodromie hyperbolique considéré au paragraphe I. L'intersection d'un feuilletage modèle avec les fibres de la fibration est un feuilletage (flot) riemannien de dimension 1.

Carrière a montré que ce flot n'est pas minimalisable et que sa cohomologie basique ne vérifie pas la dualité de Poincaré : le groupe H_b^2 est nul alors que H_b^0 est de dimension 1.

Nous avons reconsidéré ces questions sous l'éclairage des résultats de Molino concernant la structure des feuilletages riemanniens.

Nous démontrons ainsi dans [4] le théorème de finitude : sur une variété compacte, la cohomologie basique de tout feuilletage riemannien est de dimension finie.

Quelque chose de plus général est en fait vrai.

A tout feuilletage il est possible d'associer une suite spectrale différentiable de Leray-Serre. Ceci a été souvent remarqué. Les termes $E_2^{*,0}$ s'identifient à la cohomologie basique du feuilletage. Les termes $E_2^{*,n}$ (n étant la dimension des feuilles) s'identifient à la cohomologie de Haefliger-Rummler, significative dans l'étude des feuilletages minimalisables.

A l'aide d'un résultat partiel de Sarkaria, nous montrons dans [5] que le terme E_2 de la suite de Leray-Serre différentiable d'un feuilletage riemannien est de dimension finie.

Nous nous intéressons dans [6] aux questions de dualité pour la cohomologie basique.

Il s'agit d'abord de la dualité de Poincaré. Pour l'énoncer dans sa généralité, nous utiliserons un faisceau en droites \mathcal{P} , "dérivé" du faisceau transverse central du feuilletage. Ces faisceaux sont structurels ;

ils ne dépendent qu'accessoirement de l'orientation.

Notons $H_{b,c}^*(M, \mathcal{P})$ la cohomologie des formes basiques à valeurs dans \mathcal{P} dont le support se projette sur un compact de l'espace des adhérences des feuilles.

Nous montrons dans [6] qu'il existe un isomorphisme $\phi : H_b^p(M) \rightarrow H_{b,c}^{q-p}(M, \mathcal{P})^*$, ($q = \text{codim } F$), induit par le produit extérieur des formes. Ceci a lieu pour tout feuilletage riemannien complet, ce qui est toujours le cas sur une variété compacte.

Un théorème du même type a été démontré à l'aide de la théorie de Hodge par El-Kacimi et Hector dans le cas compact.

Un second théorème de dualité de "de Rham" relie la cohomologie basique à l'homologie des courants transverses invariants. Ces derniers sont caractérisés par l'annulation sur les formes F -triviales (formes nulles lorsque $n = \dim F$ arguments sont dans une feuille) et sur leur différentielles. Désignons par $H_*^F(M)$ leur homologie.

Chaque forme basique détermine un courant d'intégration transverse invariant. Nous démontrons dans [6] qu'on obtient ainsi un isomorphisme $\psi : H_b^p(M) \rightarrow H_{m-p}^F(M)$ ($m = \dim M$).

Une question intéressante concernant les feuilletages riemanniens est le rapport entre leur géométrie et les invariants homologiques qu'ils déterminent. Nous apportons dans [7] une contribution à ce problème dans le cas où les feuilles sont de dimension 1.

Soit F un flot riemannien de codimension q sur M . Nous montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le flot F soit isométrique (c'est-à-dire ses orbites soient celles d'un champ de Killing) est que l'espace $H_b^q(M)$ soit non-nul.

De plus, F admet une section transverse si et seulement si l'image de l'application $H_b^q(M) \rightarrow H^q(M)$ est non-nulle.

STABILITE ET CONJUGAISON DIFFERENTIABLE
POUR CERTAINS FEUILLETAGES

E. Ghys et V. Sergiescu

STABILITE ET CONJUGAISON DIFFERENTIABLE POUR CERTAINS FEUILLETAGES

E. GHYS et V. SERGIESCU

(Received 8 January 1979)

INTRODUCTION

UNE CLASSE remarquable de feuilletages est celle obtenue à l'aide d'actions localement libres de groupes de Lie. Les actions des groupes abéliens et, à un degré moindre, celles des groupes nilpotents, sont bien connues. Il est donc intéressant d'étudier les cas du premier exemple de groupe résoluble non nilpotent, à savoir le groupe affine de la droite réelle. Si l'on cherche à construire des exemples de telles actions, on est amené tout naturellement à considérer les fibrés en tores sur le cercle. Un feuilletage défini par une action de groupe ne contenant pas de cycles évanouissants, nous avons été amenés à étudier les feuilletages sans composantes de Reeb sur ces fibrés.

Les théorèmes de conjugaison entre feuilletages sont habituellement topologiques. En utilisant les résultats de Herman sur les difféomorphismes du cercle, nous avons pu mettre en évidence un phénomène plus fort. Sur les fibrés dits hyperboliques (cf. partie I.A), nous construisons deux feuilletages modèles que l'on pourrait qualifier de "linéaires", et tout feuilletage de classe C^∞ sans feuilles compactes est alors C^∞ conjugué à l'un des modèles (cf. partie I.B).

Ce résultat peut s'énoncer en termes de stabilité. La définition habituelle d'un feuilletage stable \mathcal{F} est la suivante: tout feuilletage de classe C^x qui est C^x proche de \mathcal{F} est C^0 conjugué à \mathcal{F} . Nous avons ici la propriété évidemment plus fine: (partie I.C): tout feuilletage de classe C^∞ qui est C^1 proche de \mathcal{F} est C^∞ conjugué à \mathcal{F} . Une telle stabilité forte a déjà été remarquée par Rosenberg et Langevin pour certaines fibrations à fibres compactes. A la différence de ces fibrations, les feuilletages dont il s'agit ici sont sans feuilles compactes.

Après avoir établi ces résultats dans la première partie de ce travail, nous en donnons quelques applications dans la seconde. La première de ces applications (partie II.A) est une classification des feuilletages transversalement orientables sans composantes de Reeb sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble. La seconde (partie II.B) répond en partie à notre problème initial puisqu'elle classe les actions localement libres du groupe affine sur ces mêmes variétés. Enfin, le paragraphe II.C donne un certain nombre de propriétés des feuilletages analytiques, toujours sur ces mêmes variétés. Par ailleurs, nous avons donné en appendice quelques propriétés techniques des fibrés en tores sur le cercle qui nous sont utiles dans les parties précédentes ainsi que le calcul de la croissance du groupe fondamental du recollement de deux composantes cylindriques.

Pendant le temps où nous rédigeons une première version de ce travail, Plante a présenté une classification topologique des feuilletages sans composantes de Reeb sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble. Dans cette direction son étude va plus loin que la nôtre et en particulier, elle ne contient pas d'hypothèses d'orientabilité et parfois les hypothèses de différentiabilité sont plus faibles. Nous avons cru bon de donner ici nos démonstrations car elles nous étaient souvent nécessaires pour

la suite de nos applications. En outre, elles illustrent nos méthodes, comme c'est le cas de la Proposition II.A.2. démontrée indépendamment mais toutefois après Plante.

D. Sullivan nous a indiqué que le théorème de stabilité I.C est une conséquence du théorème de conjugaison I.B. Nous l'en remercions, ainsi que H. Rosenberg et L. Conlon pour les remarques qu'ils ont bien voulu nous faire.

Ce travail s'est fait grâce à l'ambiance stimulante de l'équipe de feuilletages de Lille. Nous remercions tout particulièrement G. Hector pour la façon dont il nous a guidés et pour ses nombreux conseils et encouragements qui nous ont permis de mener à bien ce travail.

SI. FEUILLETAGES SANS FEUILLES COMPACTES SUR LES FIBRES HYPERBOLIQUES

Pour tout $A \in GL_2(\mathbb{Z})$, on désigne par T_A^3 le fibré en tores sur le cercle obtenu en quotientant $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence identifiant (m, t) à $(Am, t + 1)$. On peut encore dire que T_A^3 est obtenu en identifiant $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ dans $T^2 \times [0, 1]$ à l'aide de A . Un tel fibré est dit hyperbolique si A est hyperbolique, c'est-à-dire si $|\text{tr} A| > 2$. Nous noterons p_A la fibration de T_A^3 sur le cercle induite par l'application $(m, t) \in T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow t \in \mathbb{R}$.

(A) Etude des modèles

L'automorphisme A étant hyperbolique, il a deux directions propres réelles distinctes, de pentes irrationnelles. Le feuilletage du plan par droites parallèles à l'une des directions propres passe au quotient sur le tore en un feuilletage linéaire par droites. Le feuilletage produit sur $T^2 \times \mathbb{R}$ est évidemment invariant par l'application $(m, t) \rightarrow (Am, t + 1)$ et définit donc un feuilletage du fibré T_A^3 . Sur chaque fibré hyperbolique, nous obtenons ainsi deux feuilletages (un pour chaque direction propre). Nous dirons que ces feuilletages sont "les feuilletages modèles sur T_A^3 " (ou plus brièvement "les modèles").

Les feuilles des modèles sont des cylindres et des plans si la valeur propre correspondante est positive; des cylindres, des plans et des bandes de Möbius si cette valeur propre est négative. Ces feuilles sont bien sûr toutes denses. Nous nous limiterons aux variétés orientables et aux feuilletages transversalement orientables, c'est-à-dire que nous imposerons les conditions: $\det A = 1$ et $\text{tr} A > 2$. Les feuilletages par plans ainsi que ceux par cylindres sont entièrement classifiés (cf. [1, 9]). Les feuilletages modèles donnent une première famille de feuilletages par cylindres et plans (mélange effectif); il est donc intéressant de les étudier de plus près.

PROPOSITION 1. *Les feuilletages modèles possèdent une infinité dénombrable de cylindres.*

Démonstration. Introduisons tout d'abord la notion d'ordre d'un cylindre. Soit n un entier naturel; on dira qu'un cylindre est d'ordre n si sa trace sur une fibre de p_A est constituée de n droites. Réciproquement, soit Δ une droite de la trace d'un modèle sur une fibre T^2 de p_A .

La feuille du modèle contenant Δ est un cylindre d'ordre n si et seulement si n est le plus petit entier tel que A^n préserve Δ . D'autre part, on voit facilement que si A^n préserve Δ , alors A^n possède un unique point fixe sur Δ . On en déduit qu'il existe sur une fibre T^2 exactement n points périodiques d'ordre n de A par cylindre d'ordre n . Or, l'ensemble des points périodiques d'un difféomorphisme linéaire hyperbolique du tore est exactement l'ensemble des points à coordonnées rationnelles (cf. [1]). Il existe donc bien une infinité dénombrable de cylindres. ■

Remarquons, d'autre part, que l'on peut démontrer (par des calculs assez rébarbatifs) que, pour tout n , il existe au moins un cylindre d'ordre n .

PROPOSITION 2. *Tous les cylindres des modèles ont de l'holonomie et toutes les feuilles sont à croissance exponentielle.*

Démonstration. Si un des cylindres était sans holonomie, on pourrait utiliser les mêmes arguments que dans la classification des feuilletages par cylindres (cf. lemme fondamental de [9]), ce qui montrerait que toutes les feuilles seraient des cylindres sans holonomie. Or, on sait que les modèles contiennent des plans; ce qui montre que tous les cylindres ont de l'holonomie. La conclusion relative à la croissance des feuilles est alors une conséquence immédiate du corollaire 6.4 de [17]. ■

Remarquons que cette démonstration est valable pour tout feuilletage par cylindres et plans et c'est pourquoi nous l'avons préférée à un argument direct.

Dans l'étude des feuilletages par plans ou de ceux par cylindres, la clef de la démonstration réside dans le fait qu'ils sont sans holonomie. Pour les feuilletages modèles, le point fondamental est qu'ils sont *transversalement affines*. Rappelons qu'un feuilletage est dit transversalement affine si l'on peut choisir un atlas de cartes distinguées tel que les changements de cartes soient affines dans la direction transverse. Ces feuilletages peuvent être définis de manière équivalente par un couple de formes (ω, ω_1) vérifiant:

- (1) $d\omega = \omega \wedge \omega_1$.
- (2) $d\omega_1 = 0$.
- (3) Le feuilletage a pour équation $\omega = 0$ (cf. [2]).

PROPOSITION 3. *Tout feuilletage modèle (M, \mathcal{F}) est transversalement affine.*

Démonstration. Soit λ la valeur propre correspondant à \mathcal{F} et y la seconde coordonnée propre. La forme $\omega = \lambda' dy$ sur $T^2 \times \mathbb{R}$ passe au quotient sur le fibré T_A^3 et définit le feuilletage modèle. D'autre part, la forme $\omega_1 = -\log \lambda dt$ passe aussi au quotient sur T_A^3 et on a $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ et $d\omega_1 = 0$. Ce qui montre que les modèles sont transversalement affines. ■

On sait déjà que l'holonomie de tout cylindre est non triviale. En fait, grâce à la structure transversalement affine, on a ici un résultat plus précis (voir aussi [2]).

PROPOSITION 4. *Soit C un cylindre et ω_{1C} la restriction de ω_1 à C . Le groupe d'holonomie de C est un groupe d'homothéties, chacune d'entre elles ayant pour pente l'exponentielle d'une période de ω_{1C} .*

Démonstration. Soit m un point périodique d'ordre k de A . L'image dans T_A^3 du chemin $m \times [0, k]$ de $T^2 \times \mathbb{R}$ est un générateur γ du groupe fondamental d'un cylindre d'ordre k et tout cylindre possède un générateur de ce type. Pour calculer l'holonomie de ce cylindre, utilisons γ comme générateur du groupe fondamental du cylindre et, comme sous-variété transverse, prenons une sous-variété se relevant dans $T^2 \times \mathbb{R}$ dans la seconde direction propre de A . L'holonomie ainsi obtenue est le germe de l'application $x \rightarrow (1/\lambda)^k x$. (Remarquons que $1/\lambda$ est la seconde valeur propre.) Cette holonomie est donc bien linéaire, le logarithme de sa pente est: $-k \log \lambda = \int_\gamma \omega_1$. Ce qui démontre la proposition et montre que tous les cylindres ont de l'holonomie. ■

Pour la suite, il nous sera utile de considérer le nombre de rotation d'un feuilletage de T^2 comme un élément de la droite projective des directions de $H_1(T^2; \mathbb{R})$. Soit alors \mathcal{F} un feuilletage de $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $\hat{\mathcal{F}}$ son relevé dans \mathbb{R}^2 et soit (x_n) une suite de points

de \mathbb{R}^2 dans une même feuille de \mathcal{F} tendant vers l'infini. La droite passant par l'origine et par x_n tend vers une certaine droite indépendante du choix de la suite x_n . Cette droite limite définit un élément de la droite projective réelle $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ que nous représenterons par un couple (α, β) défini à une constante multiplicative près. Si α est non nul nous l'identifierons au réel β/α qui n'est rien d'autre que le nombre de rotation classique. Nous utiliserons les propriétés suivantes de ce nombre (cf. [24] Chap. III-4):

(1) Le feuilletage \mathcal{F} n'a pas de feuilles compactes si et seulement si β/α est irrationnel.

(2) Soit f un homéomorphisme du tore et f_* l'automorphisme de $H_1(T^2; \mathbb{R})$ induit. Si le nombre de rotation de \mathcal{F} est (α, β) , alors le nombre de rotation de l'image $(f^{-1})^*(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} par f est $f_*(\alpha, \beta)$. On a identifié ici \mathbb{R}^2 à $H_1(T^2; \mathbb{R})$ en choisissant comme base canonique de $H_1(T^2; \mathbb{R})$ les classes d'homologie des lacets images des chemins $t \rightarrow (t, 0)$ et $t \rightarrow (0, t)$.

(3) Si l'on munit l'espace des feuilletages de la topologie C^1 (c'est-à-dire la topologie C^0 sur l'espace des champs de droites), alors le nombre de rotation dépend de façon continue du feuilletage.

(4) Si \mathcal{F} est un feuilletage de $T^2 \times \mathbb{R}$ transverse aux fibres $T^2 \times \{t\}$, le nombre de rotation de la trace de \mathcal{F} sur $T^2 \times \{t\}$ est indépendant de t . Ce nombre sera appelé nombre de rotation du feuilletage \mathcal{F} .

PROPOSITION 5. *Les deux feuilletages modèles de T_A^3 sont topologiquement conjugués si et seulement si il existe une matrice $B \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que $ABA = B$ (c'est-à-dire que A et A^{-1} sont conjuguées dans $GL_2(\mathbb{Z})$). Dans ce cas les deux modèles sont analytiquement conjugués.*

Démonstration. Soit f une conjugaison entre les deux modèles. L'homéomorphisme f se relève dans $T^2 \times \mathbb{R}$ en F (cf. Appendice 1, Prop. 1). Soit

$$B = F_*: \pi_1(T^2 \times \mathbb{R}) \rightarrow \pi_1(T^2 \times \mathbb{R})$$

l'homomorphisme induit. D'après l'Appendice 1 (Prop. 2), deux cas sont possibles a priori:

(1) $BA = AB$. Dans ce cas, B et A ont mêmes directions propres. Or, f envoyant le premier modèle sur le second, B doit envoyer le nombre de rotation du premier sur celui du second. Ces nombres étant donnés par les directions propres de A , la matrice B doit permuter les directions propres de A , ce qui est impossible si A et B commutent.

(2) $ABA = B$, ce qui est précisément la conclusion de la proposition.

Réciproquement, si $ABA = B$, on vérifie facilement que l'application affine $(m, t) \rightarrow (Bm, -t)$ de $T^2 \times \mathbb{R}$ dans $T^2 \times \mathbb{R}$ passe au quotient sur le fibré T_A^3 et envoie l'un des modèles sur l'autre (car B permute les directions propres de A). ■

Remarque. On peut se demander quels sont les fibrés T_A^3 pour lesquels les deux modèles sont conjugués, c'est-à-dire quelles sont les matrices $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ qui sont conjuguées à leur inverse dans $GL_2(\mathbb{Z})$. La réponse est la suivante: ce sont les matrices A qui sont conjuguées à une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $a = d$ ou $b = c$ ou $b = -c$ ou $a + b = d$ ou $d + c = a$. Il existe effectivement des fibrés pour lesquels les deux modèles ne sont pas conjugués.

Pour démontrer ces assertions, on écrit que A et A^{-1} sont conjuguées en utilisant la structure de produit libre $Z/2Z * Z/3Z$ de $PSL_2(Z)$.

Remarquons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ souvent utilisée dans la littérature (exemple de Smale) vérifie deux des conditions données plus haut. Dans l'exemple de Smale, les deux modèles sont donc conjugués.

(B) Classification des feuilletages sans feuilles compactes

On se propose de démontrer que tout feuilletage transversalement orientable, de classe C^r ($r \geq 2$), sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable est C^{r-2} conjugué à l'un des feuilletages modèles.

Ceci est notre résultat essentiel. Il donne un exemple de classification de feuilletages à conjugaison différentiable près ce qui est bien sûr assez surprenant. Le théorème de stabilité de la partie (C) sera une conséquence assez rapide de ce théorème.

La méthode employée va consister à faire la construction précédente "à l'envers". Pour cela, il va falloir couper le fibré T_A^3 le long d'un tore T_0^2 transverse au feuilletage; modifier par isotopie le feuilletage obtenu sur $T_0^2 \times I$ de façon à obtenir un feuilletage produit; conjuguer le feuilletage induit sur $T_0^2 \times \{0\}$ à un feuilletage linéaire de T_0^2 et enfin modifier par isotopie l'automorphisme de recollement pour que celui-ci devienne linéaire tout en préservant le résultat des étapes antérieures.

Dans la suite, on utilisera souvent la notion classique de composante de Reeb et son analogue deux dimensionnel, la composante de Reeb plane. Rappelons qu'un théorème fondamental de Novikov affirme l'existence d'une telle composante en dimension trois si le groupe fondamental d'une feuille ne s'injecte pas dans le groupe fondamental de la variété (cf. [15]).

Etant donné une transversale fermée a un feuilletage, il est toujours possible de modifier celui-ci en introduisant une composante de Reeb dont l'âme est la transversale donnée. C'est le tourbillonnement de Reeb (cf. [8]). Lorsque la transversale est située dans le bord d'une variété, on appelle demi-tourbillonnement la modification analogue.

Si l'holonomie du bord d'une composante de Reeb est cyclique et sans points fixes on peut effacer la composante par un détourbillonnement (cf. [14]) pour le cas analytique où ceci est toujours possible).

On dira qu'un feuilletage \mathcal{F} de $T^2 \times I$ transverse au bord, sans composantes de Reeb, contient une demi-composante de Reeb si le feuilletage double $2\mathcal{F}$ sur $T^3 = 2(T^2 \times I)$ contient une composante de Reeb. Nous utiliserons la théorème de Moussu et Roussarie (cf. Théorème III-3 de [14]) suivant lequel un feuilletage de $T^2 \times I$, de classe C^r ($r \geq 2$), sans demi-composantes de Reeb et sans feuilles compactes intérieures est C^r isotope (modulo $T^2 \times \{0\}$) à un feuilletage produit $f_0 \times I$ où f_0 est le feuilletage induit sur $T^2 \times \{0\}$.

Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) transversalement orientable, sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable. Le théorème de Novikov permet d'affirmer que le groupe fondamental de toute feuille est résoluble; en outre, toutes les feuilles sont orientables et non-compactes, ce sont donc des cylindres ou des plans.

D'autre part, puisqu'il n'existe pas de feuilles compactes toute fibre de la fibration est C^r -isotope à un tore T_0^2 transverse au feuilletage \mathcal{F} (cf. Théorème I-1 de [23]). En coupant le long de ce tore on obtient un feuilletage \mathcal{F} de $T_0^2 \times I$, transverse au bord, sans feuilles compactes intérieures. Inversement, le feuilletage initial \mathcal{F} s'obtient en

recollant les deux bords de $T_0^2 \times I$ à l'aide d'un difféomorphisme ψ , de classe C' , préservant les feuilletages induits.

LEMME 1. *Le feuilletage \mathcal{F} de $T_0^2 \times I$ est isotope modulo $T_0^2 \times \{0\}$ à un feuilletage produit $f_0 \times I$, modifié par un nombre fini de demi-tourbillonnements autour de transversales fermées situées dans le bord de $T_0^2 \times I$.*

Démonstration. Soit $C(\mathcal{F})$ l'ensemble des feuilles de \mathcal{F} qui sont homéomorphes à $S^1 \times I$ et dont les deux composantes du bord sont simultanément dans $T_0^2 \times \{0\}$ ou dans $T_0^2 \times \{1\}$. Chaque F de $C(\mathcal{F})$ sépare $T_0^2 \times I$ en deux composantes connexes dont une seule a un bord connexe. Notons $c(F)$ cette composante. On introduit sur $C(\mathcal{F})$ une relation d'ordre par $F \leq F'$ is et seulement si $c(F) \subset c(F')$. L'ensemble $C(\mathcal{F})$ devient ainsi un ensemble ordonné inductif car la réunion des feuilles fermées de \mathcal{F} est un fermé (cf. [20]).

Montrons, tout d'abord, que $C(\mathcal{F})$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments maximaux. Pour cela, considérons le feuilletage double $2\mathcal{F}$ sur $T^3 = 2(T_0^2 \times I)$. Chaque feuille F de $C(\mathcal{F})$ définit par passage au double une feuille torique $2F$ telle que le groupe fondamental de $2F$ ne s'injecte pas dans celui de $2c(F)$. (Le double de $c(F)$ est un tore plein.) Le théorème de Novikov permet alors d'affirmer que pour toute feuille F de $C(\mathcal{F})$, le double de $c(F)$ contient une composante de Reeb. Cette composante de Reeb n'est pas contenue dans $c(F)$ car le feuilletage \mathcal{F} ne contient pas de composantes de Reeb, elle coupe donc le tore $T_0^2 \times \{0\}$ sur une composante de Reeb plane. Un feuilletage du tore ne contient qu'un nombre fini de composantes de Reeb planes. D'autre part, si F et F' sont des feuilles de $C(\mathcal{F})$, deux cas sont possibles; soit F et F' sont ordonnées; soit $c(F)$ et $c(F')$ sont disjoints. Il est alors clair que $C(\mathcal{F})$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments maximaux. Notons F_1, \dots, F_n ces éléments.

Dans le double $2\mathcal{F}$, les feuilles toriques $2F_i$ ont une holonomie cyclique car ce sont des doubles. De plus, cette holonomie est sans points fixes sur la face extérieure à $2c(F_i)$ car les F_i sont maximaux. On peut donc effectuer un nombre fini de détournements de Reeb sur le feuilletage $2\mathcal{F}$ de façon à supprimer les feuilles $2F_i$ et donc toutes les feuilles $2F$ où F est un élément de $C(\mathcal{F})$.

La trace de ces détournements sur $T_0^2 \times \{0\}$ (ou sur $T_0^2 \times \{1\}$) est un "détournement de dimension deux" du feuilletage induit par \mathcal{F} sur $T_0^2 \times \{0\}$ (ou sur $T_0^2 \times \{1\}$). Remarquons que si un détournement sur le tore fait apparaître une nouvelle feuille compacte, alors le nouveau feuilletage du tore est une suspension c'est-à-dire qu'il ne contient pas de composantes de Reeb plane. Il s'ensuit qu'après les détournements sur $2(T_0^2 \times I)$, deux cas sont possibles; soit aucune nouvelle feuille compacte n'apparaît; soit la trace du nouveau feuilletage sur $T_0^2 \times \{0\}$ (ou $T_0^2 \times \{1\}$) est sans composantes de Reeb planes. Dans les deux cas, le nouveau feuilletage sur $2(T_0^2 \times I)$ est sans composantes de Reeb, et il est le double d'un feuilletage de $T_0^2 \times I$ sans demi-composantes de Reeb. D'après le résultat de Moussu et Roussarie déjà cité, ce feuilletage de $T_0^2 \times I$ est C' isotope à un feuilletage produit $f_0 \times I$. ■

LEMME 2. *Le feuilletage \mathcal{F} est en fait C' isotope (mod $T_0^2 \times \{0\}$) à un feuilletage produit $f_0 \times I$, où f_0 est le feuilletage induit sur $T_0^2 \times \{0\}$. Le feuilletage f_0 est un feuilletage par droites.*

Démonstration. Choisissons un tore T_1^2 transverse à \mathcal{F} dans le domaine où les tourbillonnements n'ont pas affecté le produit $f_0 \times I$. Montrons que si l'on coupe le

fibré le long de T_1^2 , le feuilletage \mathcal{F}' obtenu sur $T_1^2 \times I$ ne contient pas de demi-composantes de Reeb. Pour cela, distinguons deux cas. Si f_0 ne contient pas de composantes de Reeb planes, il est clair que \mathcal{F} ne contient pas de demi-composantes de Reeb. Si f_0 contient une composante de Reeb plane, toutes les transversales fermées à f_0 ont même classe d'homotopie; notons $[\gamma]$ cette classe. Après tourbillonnements sur le tore, toutes les feuilles compactes obtenues sur le tore auront toujours $[\gamma]$ comme classe d'homotopie. Un difféomorphisme de recollement ψ' doit envoyer $\mathcal{F}'_{[T_1^2 \times \{0\}]}$ sur $\mathcal{F}'_{[T_1^2 \times \{1\}]}$. L'homomorphisme ψ'_* induit sur le groupe fondamental doit donc envoyer $[\gamma]$ sur $\pm[\gamma]$. Or ceci est impossible car ψ'_* étant hyperbolique, il n'a pas la valeur propre ± 1 . Le feuilletage \mathcal{F}' ne contient donc pas de demi-composantes de Reeb, et il est donc C^r isotope à un produit. Il est alors clair qu'il en est de même pour le feuilletage \mathcal{F} c'est-à-dire que:

$$(M, \mathcal{F}) \stackrel{C^r}{\cong} f_0 \times I/(x, 0) \sim (\Psi(x), 1)$$

où Ψ est un C^r difféomorphisme préservant f_0 .

Supposons que f_0 possède une feuille compacte. Le difféomorphisme Ψ préservant f_0 , la classe d'homotopie de cette feuille compacte est un point fixe de Ψ_* . Ceci est impossible car Ψ_* est hyperbolique. Le feuilletage f_0 est donc par droites; ce qui termine la démonstration du Lemme 2. ■

LEMME 3. Il existe un feuilletage h_0 linéaire par droites du tore T^2 et un C^{r-2} difféomorphisme χ du tore préservant h_0 tels que le feuilletage (M, \mathcal{F}) soit C^{r-2} conjugué à $h_0 \times I/(x, 0) \sim (\chi(x), 1)$.

Démonstration. Soit f_0 le feuilletage de T^2 introduit dans le lemme précédent. On montre d'abord que son nombre de rotation (α, β) est tel que β/α est quadratique sur \mathbb{Q} . Ceci nous permettra d'utiliser le résultat fondamental d'Herman sur les difféomorphismes du cercle et de conclure.

Si Ψ est le difféomorphisme du Lemme 2, Ψ_* préserve l'élément (α, β) de la droite projective. On a donc:

$$\Psi_*(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta).$$

Le vecteur (α, β) est donc vecteur propre de Ψ_* .

Un calcul simple montre alors que les pentes des directions propres d'un automorphisme linéaire hyperbolique de $Gl_2(\mathbb{Z})$ sont quadratiques sur \mathbb{Q} . (Il suffit de calculer explicitement ces directions). On en déduit que β/α est quadratique sur \mathbb{Q} .

Aussi β/α admet un développement en fraction continue qui est périodique est ses coefficients sont bornés.

On peut alors appliquer le principal résultat d'Herman sur les difféomorphismes du cercle (cf. [11]): le feuilletage f_0 est C^{r-2} conjugué à un feuilletage linéaire du tore, ce qui démontre le lemme. ■

Il s'agit maintenant de modifier le difféomorphisme χ par isotopie pour obtenir un difféomorphisme linéaire, de façon à retrouver les modèles. Cette isotopie doit cependant préserver le résultat du lemme précédent, c'est-à-dire qu'à chaque étape, elle doit préserver le feuilletage h_0 .

Pour cela, soit F un relevé dans \mathbb{R}^2 du difféomorphisme χ . Ecrivons F sous la forme:

$$(x, y) \rightarrow (f(x, y), f'(x, y)).$$

Soit $\delta = (\beta/\alpha)$ la pente du feuilletage h_0 . Le difféomorphisme χ préservant h_0 , la quantité $f'(x, y) - \delta f(x, y)$ ne dépend que de $y - \delta x$. On dira que χ est transversalement affine si $f'(x, y) - \delta f(x, y)$ est une fonction affine de $y - \delta x$.

LEMME 4. Soit χ un difféomorphisme du tore, de classe C^r ($r \geq 0$). Si χ préserve le feuilletage h_0 linéaire par droites de pente irrationnelle δ , alors χ est transversalement affine.

Démonstration. Soit Φ la fonction telle que:

$$f'(x, y) - \delta f(x, y) = \Phi(y - \delta x).$$

Les fonctions f et f' s'écrivent de façon unique comme somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique, soit:

$$f = l + p \quad \text{et} \quad f' = l' + p'.$$

On en déduit:

$$(l' - \delta l)(x, \delta x) + (p' - \delta p)(x, \delta x) = \Phi(0).$$

La fonction $(p' - \delta p)$ est périodique, donc bornée. La fonction associant $(l' - \delta l)(x, \delta x)$ à x est donc linéaire bornée, elle est donc nulle. Par suite, la fonction $(p' - \delta p)$ est constante sur une droite de pente irrationnelle, elle est donc constante. On a alors:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= f'(0, y) - \delta f(0, y) = (l' - \delta l)(0, y) + (p' - p)(0, y) \\ &= ay + b. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que:

$$f'(x, y) - \delta f(x, y) = a(y - \delta x) + b.$$

Le difféomorphisme χ est donc bien transversalement affine. ■

LEMME 5. Soit χ un C^r difféomorphisme du tore ($r \geq 0$) préservant le feuilletage h_0 linéaire par droites de pente irrationnelle δ . Alors χ est C^r -isotope à un difféomorphisme linéaire par une isotopie χ_t telle que, pour tout t , le difféomorphisme χ_t préserve le feuilletage h_0 .

Démonstration. D'après le lemme précédent, χ est de la forme:

$$(x, y) \rightarrow (F(x, y), a(y - \delta x) + b + \delta f(x, y)).$$

Posons:

$$f_t = tl + (1-t)f$$

et

$$\chi_t(x, y) = (f_t(x, y), a(y - \delta x) + (1-t)b + \delta f_t(x, y)).$$

Montrons que χ_t est l'isotopie cherchée.

- (1) On a bien $\chi_0 = \chi$; de plus, χ_1 est linéaire et χ_1 préserve le feuilletage h_0 .
 (2) L'application χ_t passe au quotient sur le tore. En effet:

$$\begin{aligned} f_t(x+n, y+p) &= tf(x+n, y+p) + (1-t)f(x, y+p) \\ &= f_t(x, y) + l(n, p) \quad \text{et} \quad l(n, p) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(y+p - \delta(x+n)) + (1-t)b + \delta f_t(x+n, y+p) &= [a(y-\delta x) + (1-t)b + f_t(x, y)] \\ &\quad + [ap - a\delta n + \delta l(n, p)] \end{aligned}$$

et la quantité $ap - a\delta n + \delta l(n, p)$ est entière car on sait que l'application:

$$(x, y) \rightarrow a(y - \delta x) + \delta f(x, y) - b$$

passé au quotient de tore dans le cercle.

(3) L'application χ_t est un C^r difféomorphisme. Pour montrer que χ_t est injective, il faut montrer que:

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \quad \text{et} \quad y_1 - y_2 = \delta(x_1 - x_2)$$

implique que:

$$(1-t)(f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)) + tl(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \neq 0.$$

Pour $t = 0$, l'expression $f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)$ est non nulle car χ est bijectif. Pour $t = 1$, l'expression $l(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ est non nulle car δ est irrationnel et l est à coefficients entiers. Si l'on montre que ces deux quantités sont de même signe, on aura montré que χ_t est injectif. Pour cela, il suffit de montrer que les deux fonctions:

$$t \xrightarrow{q} f(x+t, y+t\delta)$$

et

$$t \rightarrow l(x+t, y+t\delta) = l(x, y) + tl(1, \delta)$$

ont même sens de variation. La fonction q est injective, donc monotone. Supposons la, par exemple, croissante, et montrons que $l(1, \delta)$ est strictement positif.

Soit (m, n) deux entiers tels que m/n soit proche de δ (on choisit n positif). Alors

$$\begin{aligned} nl(1, \delta) &= l(n, n\delta) \text{ est proche de } l(n, m) \\ l(n, m) &= f(x+n, y+m) - f(x, y) \text{ est proche de} \\ f(x+n, y+n\delta) - f(x, y) &= q(n) - q(0) > 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $l(1, \delta)$ est strictement positif. L'injectivité de χ_t est donc établie.

La surjectivité de χ_t découle du fait que χ_t est injectif et que l'homomorphisme $(\chi_t)_* = \chi_*$ induit sur le groupe fondamental est bijectif.

Il reste à voir que χ_t est un difféomorphisme local. Son Jacobien est:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_t) + \delta \frac{\partial}{\partial y}(f_t) = t \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial y} \right) + (1-t)l(1, \delta).$$

On sait que $((\partial f/\partial x) + \delta(\partial f/\partial y))$ est non nul, de même que $l(1, \delta)$ et ces deux nombres sont de même signe car ce sont les dérivées des fonctions considérées précédemment. Le Jacobien de χ_t est donc non nul; ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème.

THÉORÈME 1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orientable, de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$), sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable. Alors \mathcal{F} est C^{r-2} conjugué à l'un des feuilletages modèles.*

Démonstration. Soit χ_t l'isotopie du lemme précédent et

$$\begin{aligned} X: T^2 \times I &\rightarrow T^2 \times I \\ (m, t) &\rightarrow (\chi_t \chi_0^{-1}(m), t) \end{aligned}$$

Le difféomorphisme X préserve le feuilletage $h_0 \times I$ et envoie le point $(m, 0)$ sur lui-même et le point $(\chi(m), 1)$ sur le point $(\chi_1(m), 1)$. Le feuilletage (M, \mathcal{F}) est donc C^{r-2} conjugué à:

$$h_0 \times I / (m, 0) \sim (\chi_1(m), 1)$$

où h_0 est un feuilletage linéaire par droites de T^2 et χ_1 un difféomorphisme linéaire, ce qui est précisément l'un des feuilletages modèles. ■

Donnons tout de suite un corollaire immédiat du théorème:

COROLLAIRE 1. *Tout feuilletage transversalement orientable, sur un fibré hyperbolique orientable, sans feuilles compactes, de classe C^4 est transversalement affine.* ■

(C) Propriétés de stabilité

Nous dirons que deux feuilletages de dimension deux sont C^1 proches s'ils sont C^0 proches au sens de la topologie des champs de plans.

Comme Sullivan nous l'a fait remarquer, le lemme suivant est un corollaire immédiat du Théorème II.17 de [25] suivant lequel la croissance exponentielle est une propriété C^1 stable. Nous en donnerons cependant une démonstration élémentaire.

LEMME 1. *Un feuilletage suffisamment C^1 proche d'un modèle n'a pas de feuilles compactes.*

Démonstration. Les modèles étant transverses à la fibration, les feuilletages C^1 proches des modèles le sont aussi. Considérons alors le relevé $\hat{\mathcal{F}}$ dans $T^2 \times \mathbb{R}$ d'un feuilletage \mathcal{F} suffisamment C^1 proche d'un modèle. Ce feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est évidemment invariant par l'application $(m, t) \rightarrow (Am, t + 1)$; le nombre de rotation (α, β) de $\hat{\mathcal{F}}$ est donc vecteur propre de A et β/α est donc irrationnel. Il s'ensuit que la trace de \mathcal{F} sur toute fibre de T_A^3 est sans feuilles compactes; ce qui achève la démonstration. ■

LEMME 2. *Soit T_A^3 un fibré hyperbolique sur lequel les deux modèles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ne sont pas conjugués. Alors, il existe un voisinage de chacun des modèles (dans la topologie C^1) ne contenant aucun feuilletage de classe C^1 qui soit topologiquement conjugué à l'autre modèle.*

Démonstration. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'homéomorphismes g_n de T_A^3 tels que $g_n^*\mathcal{F}_1$ soit de classe C^1 et tende vers le modèle \mathcal{F}_2 . Les homéomorphismes g_n se relèvent dans $T^2 \times \mathbf{R}$ en G_n . Soit:

$$B_n = (G_n)_*: \pi_1(T^2 \times \mathbf{R}) \rightarrow \pi_1(T^2 \times \mathbf{R})$$

l'homomorphisme induit. D'après l'appendice, deux cas sont possibles: Soit $AB_n = B_nA$, soit $AB_nA = B_n$. Comme les modèles ne sont pas conjugués, B_n commute avec A d'après (I.A.—Prop. 5). Alors A et B_n ont mêmes directions propres et le nombre de rotation du relevé de $g_n^*\mathcal{F}_1$ dans $T^2 \times \mathbf{R}$ est donc le même que celui du relevé de \mathcal{F}_1 . Or, ceci est impossible car $g_n^*\mathcal{F}_1$ tend vers \mathcal{F}_2 alors que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ont des nombres de rotation différents. ■

THÉORÈME 1. *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orientable de classe C^r ($3 \leq r \leq \omega$), sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable. Alors, tout feuilletage de classe C^r , suffisamment C^1 proche de \mathcal{F} est C^{r-2} conjugué à \mathcal{F} .*

Démonstration. D'après la partie B, le feuilletage \mathcal{F} est C^1 conjugué à un modèle. Comme la C^1 conjugaison est continue dans la C^1 topologie, on peut supposer que \mathcal{F} est un modèle. Le feuilletage \mathcal{F} étant transversalement orientable, tout feuilletage \mathcal{G} suffisamment C^1 proche l'est aussi. D'après le Lemme 1, le feuilletage \mathcal{G} ne possède pas de feuilles compactes et \mathcal{G} est donc C^{r-2} conjugué à l'un des modèles. Si les deux modèles sont conjugués, le théorème est démontré car alors \mathcal{G} et \mathcal{F} sont C^{r-2} conjugués. Si les deux modèles ne sont pas conjugués, le Lemme 2 montre que \mathcal{G} n'est pas conjugué au modèle différent de \mathcal{F} et donc que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont C^{r-2} conjugués. ■

Remarque. On ne peut pas remplacer la relation de conjugaison par celle d'isotopie dans le Théorème 1. En effet, soit U_n une suite de vecteurs de \mathbf{R}^2 à coordonnées entières, et soit f_n la suite de difféomorphismes de $T^2 \times I$ définie par:

$$f_n(m, t) = (m + tU_n, t).$$

On vérifie facilement que f_n passe au quotient dans T_A^3 et que si l'on choisit pour U_n une suite de vecteurs dont les pentes tendent vers la pente de la direction propre utilisée pour construire le modèle \mathcal{F} , alors $f_n^*\mathcal{F}$ tend vers \mathcal{F} bien que $f_n^*\mathcal{F}$ et \mathcal{F} ne soient pas isotopes.

Remarquons, d'autre part, que si l'on choisit pour U_n une suite dont la seconde coordonnée propre tend vers l'infini, cette même suite de difféomorphismes f_n envoie le feuilletage modèle considéré sur un feuilletage qui tend vers la fibration, ce qui montre que la fibration n'est pas stable. Ceci pouvait être prévu à l'aide du théorème de Rosenberg et Langevin affirmant qu'une fibration est stable si et seulement si l'homologie de la fibre est triviale (cf. [13, 21]).

§II. QUELQUES APPLICATIONS

(A) Feuilletages sans composantes de Reeb sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble

Dans cette partie, on se propose de montrer comment le Théorème 1 permet de terminer la classification des feuilletages de classe C^2 , transversalement orientables, sans composantes de Reeb, sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble, commencée par Goodman[7].

Soit (M, \mathcal{F}) un tel feuilletage. Si \mathcal{F} possède une feuille sphérique M est homéomorphe à $S^1 \times S^2$ et le feuilletage est conjugué au feuilletage produit (cf. [20]). S'il n'y a pas de feuilles sphériques, deux cas sont à distinguer:

1er cas: Il existe une feuille compacte qui est un tore puisque son groupe fondamental est résoluble.

Si ce tore ne sépare pas M , en coupant le long du tore, on obtient une variété M_1 à bord incompressible non connexe. La variété M_1 est alors $T^2 \times I$ (cf. Théorème 4-2 de [5]). Les feuilletages de $T^2 \times I$ tangents au bord, sans composantes de Reeb sont classifiés dans [14].

Si ce tore sépare M , les deux composantes M' et M'' sont des fibrés non triviaux en intervalles sur une bouteille de K ein. Goodman a montré que tout feuilletage sur M' et M'' s'obtient en recollant une composante cylindrique avec un feuilletage quelconque de $T^2 \times I$ tangent au bord (cf. Lemme 2-3 de [7]). Remarquons que les variétés obtenues ainsi ont un premier nombre de Betti égal à 0 ou 1.

2ème cas: Il n'existe pas de feuille compacte. D'après un théorème de Goodman, (Théorème 3.2 de [7]) deux cas sont possibles: soit M est un fibré en tores sur le cercle, soit M est Q sphère d'homologie et admet alors un revêtement fini qui est un fibré en tores sur le cercle. Nous étudierons successivement ces deux cas.

Soit donc (T_A^3, \mathcal{F}) un feuilletage transversalement orientable sans feuilles compactes sur un fibré orientable.

PROPOSITION 1. *On a $tr A \geq 2$. De plus (i) si $tr A > 2$, \mathcal{F} est conjugué à un modèle (ii) si $tr A = 2$, \mathcal{F} est un feuilletage par plans ou par cylindres sans holonomie.*

Ces derniers sont classifiés dans [9, 21].

Démonstration. Si $tr A < -2$, \mathcal{F} étant conjugué à un modèle qui dans ce cas n'est pas transversalement orientable, on aboutit à une contradiction.

Si $|tr A| \leq 2$, le groupe fondamental de M est à croissance polynomiale. Par l'argument habituel toutes les feuilles de \mathcal{F} sont à croissance polynomiale. D'après un théorème bien connu, \mathcal{F} est sans holonomie et toutes les feuilles sont simultanément difféomorphes à des plans ou des cylindres.

Or, seul T^3 est feuilletable par plans (cf. [21]) et les variétés feuilletables par cylindres sont les fibrés définis par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cf. [9]), toutes de trace 2. D'après l'appendice 1 la trace étant la même pour les matrices définissant des fibrés homéomorphes, on en déduit que si $|tr A| \leq 2$ et $tr A \neq 2$ alors il existe une feuille compacte. Ceci démontre la proposition. ■

Remarquons que l'hypothèse d'orientation transverse est importante dans la proposition, car les modèles sur les fibrés de trace inférieure à -2 sont sans feuilles compactes mais ces feuilletages ne sont pas transversalement orientables.

Pour terminer la classification, il reste à examiner le cas des sphères d'homologie rationnelles à groupe fondamental résoluble.

PROPOSITION 2. *Tout feuilletage transversalement orientable d'une Q -sphère d'homologie résoluble orientable possède une feuille compacte.*

Démonstration. On considère un revêtement galoisien fini qui est un fibré en tores sur le cercle, soit T_A^3 avec $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Soit \mathcal{F} le relevé de feuilletage dans T_A^3 . On montre que \mathcal{F} possède une feuille compacte.

Supposons le contraire et remarquons qu'un feuilletage transversalement orientable sans feuilles compactes sur une sphère d'homologie résoluble orientable est un

feuilletage par cylindres et plans et son groupe fondamental est à croissance exponentielle (cf. [9, 21]). La même chose est alors vraie pour (T_A^3, \mathcal{F}) , c'est-à-dire que A est hyperbolique, de trace strictement supérieure à 2, et \mathcal{F} est C^{r-2} conjugué à l'un des modèles.

On peut donc supposer que le groupe Γ des automorphismes du revêtement est un groupe de C^{r-2} difféomorphismes qui préservent le modèle. Pour la suite de la démonstration on considère que $r \geq 3$. Dans le cas où $r = 2$, la proposition peut être démontrée par une méthode similaire en faisant apparaître un cycle dans l'homologie singulière de T_A^3 dual à la forme utilisée plus bas et invariant par l'action de Γ .

Soit $\omega = \lambda^t dy$ et $\omega_1 = -\log \lambda dt$ les formes qui définissent la structure affine du modèle. Montrons que la classe de cohomologie de ω_1 (qui est non nulle) est invariante par Γ . Ce sera la contradiction cherchée car la classe de ω_1 définira un élément non nul dans la cohomologie du quotient T_A^3/Γ .

Soit ψ un élément de Γ ; ψ préserve \mathcal{F} , donc, il existe une fonction \mathcal{F} partout non nulle telle que:

$$\psi^* \omega = F \omega$$

Donc:

$$\psi^*(d\omega) = d(F\omega)$$

Or $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ et $d\omega_1 = 0$, donc

$$\psi^* \omega \wedge \psi^* \omega_1 = F d\omega + dF \omega$$

$$F \omega \wedge \psi^* \omega_1 = F \omega \wedge \omega_1 + dF \omega$$

$$\omega \wedge (\psi^* \omega_1 - d(\log |F|) - \omega_1) = 0.$$

La forme ω étant non singulière, il existe une fonction G telle que

$$\psi^* \omega_1 = \omega_1 - d(\log |F|) + G\omega.$$

Montrons que $G = 0$. Pour ceci, écrivons

$$G\omega = H(x, y, t) dy.$$

Or $G\omega$ est fermée, donc en fait,

$$G\omega = H(y) dy.$$

La fonction H étant constante pour y constant, H est constant sur les feuilles du modèle, or ces feuilles sont denses. La fonction H est donc constante. Ceci entraîne que H est nul car la forme dy de $T^2 \times \mathbb{R}$ ne passe pas au quotient sur T_A^3 . D'où finalement $[\psi^* \omega_1] = [\omega_1]$. ■

Remarques. (1) Soit $M = \mathcal{X} \cup_f \mathcal{X}$ le recollement de deux composantes cylindriques le long de leur bord qui est un tore. La variété obtenue a un premier nombre de Betti égal à 0 ou 1. Pour un choix convenable de f , son groupe fondamental est à croissance exponentielle (cf. Appendice 2). La proposition précédente montre que tout feuilletage transversalement orientable sur M possède une feuille compacte. Lorsque la croissance est polynomiale, ceci est prouvé dans [17]. Remarquons aussi que toute \mathbb{Q} -sphère d'homologie résoluble suffisamment grande est de ce type.

(2) Soit M^3 une \mathbb{Q} -sphère d'homologie résoluble non suffisamment grande. Si le groupe fondamental de M^3 est à croissance non exponentielle, il existe toujours une composante de Reeb[7]. C'est le cas de certains fibrés de Seifert. La proposition précédente entraîne la même chose si le groupe fondamental de M est à croissance exponentielle. Toutefois, on ne sait pas si cette situation existe effectivement.

(b) Actions localement libres du groupe affine

Les actions du groupe \mathbb{R}^n sont bien connues (cf. [21]) celles des groupes nilpotents ont été étudiées dans [4, 10]. L'étape suivante consiste à étudier les actions de groupes résolubles dont le prototype est le groupe affine \mathcal{A} de la droite réelle. Nous donnons, ci-dessous, une classification des actions localement libres de \mathcal{A} sur les 3-variétés à groupe fondamental résoluble.

PROPOSITION 1. *Les feuilletages modèles orientables peuvent être définis par une action localement libre de \mathcal{A} . Il en est donc de même de tout feuilletage transversalement orientable sur les fibrés hyperboliques orientables.*

Démonstration. Nous présentons cette action de deux manières différentes. Pour la première, il suffit de construire deux champs de vecteurs X et Y , linéairement indépendants en tout point, tangents aux feuilles du modèle, et qui vérifient la relation de commutation $[X, Y] = -X$ des générateurs canoniques de l'algèbre de Lie de \mathcal{A} . Posons:

$$X(x, y, t) = (\lambda', 0, 0)$$

et

$$Y(x, y, t) = \left(0, 0, \frac{1}{\log \lambda}\right).$$

Ces deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^3 où les deux premières coordonnées sont relatives à la base propre et où λ est la valeur propre considérée, passent au quotient sur le fibré. On peut voir sans peine que X et Y vérifient la relation de commutation souhaitée.

Une autre façon de présenter cette action est la suivante. Considérons le groupe de Lie résoluble G dont les éléments sont les triplets (t, x, y) et où la loi de groupe est:

$$(t, x, y)(t'x', y') = (t + t', A'(x', y') + (x, y)).$$

Soit G_z le sous-groupe de G constitué des éléments dont les trois coordonnées sont entières. L'appendice montre que le fibré en tores T_A^3 est difféomorphe à l'espace homogène G/G_z . Remarquons alors que le groupe affine \mathcal{A} se plonge dans G de la façon suivante. Soit U le vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ . A l'application affine

$$x \rightarrow ax + b,$$

associons l'élément $((\log a/\log \lambda), bU)$ de G . On vérifie facilement que ceci définit un morphisme injectif de \mathcal{A} dans G . Le groupe \mathcal{A} opère sur G par translation à gauche, donc il opère sur G/G_z . Il est facile de voir que cette action est localement libre et définit le feuilletage modèle.

PROPOSITION 2. Soit M^3 une 3-variété compacte à groupe fondamental résoluble admettant une action localement libre, de classe C^r ($r \geq 2$), de \mathcal{A} . Alors M^3 est un fibré hyperbolique et le feuilletage obtenu \mathcal{F} est C^{r-2} conjugué à un feuilletage modèle.

Démonstration. On sait que les seuls sous-groupes discrets de \mathcal{A} sont cycliques. Ainsi, les feuilles de \mathcal{F} sont des cylindres ou des plans. En particulier, la variété M^3 doit être sans bord. D'autre part, on vérifie [3] que la croissance de ces feuilles est exponentielle. Ainsi, il y a toujours mélange [9, 21] de cylindres et de plans. La proposition est alors une conséquence de la classification des feuilletages sans feuilles compactes donnée (Théorème I.A.1).

Remarque. Le théorème de stabilité montre le caractère très différent des actions du groupe affine par rapport à celles de \mathbb{R}^2 qui ne sont jamais stables.

(c) Feuilletages analytiques

Le premier résultat remarquable sur les feuilletages analytiques est dû à Haefliger [8] qui a montré qu'il n'existe pas de tels feuilletages sur une variété à groupe fondamental fini. Plus récemment, Plante, Thurston et Goodman ([7, 19]) ont montré qu'il en est de même si la croissance du groupe fondamental est non exponentielle et le premier groupe d'homologie réelle est nul. Dans le même ordre d'idées, on établit ici le résultat suivant:

PROPOSITION 1. Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement analytique, transversalement orientable, d'une 3-variété fermée M à groupe fondamental résoluble. Alors m fibre sur le cercle.

Démonstration. On montre tout d'abord qu'il existe sur M un feuilletage transversalement analytique sans composantes de Reeb. Puisque \mathcal{F} est transversalement analytique, il en est de même de l'holonomie. Supposons que \mathcal{F} possède une composante de Reeb. On peut alors modifier le feuilletage par un détournement qui fait disparaître le bord de la composante de Reeb. Deux cas peuvent se présenter; soit on a une infinité de feuilles compactes, auquel cas toutes les feuilles sont compactes et le feuilletage est une fibration; soit le nombre fini de feuilles (compactes) qui ne rencontrent pas de transversales fermées diminue strictement (Remarquons que les nouvelles feuilles compactes introduites éventuellement ne possèdent pas cette dernière propriété). On continue le processus tant qu'il reste des composantes de Reeb et que le nombre de feuilles compactes reste fini. Donc, après un nombre fini d'étapes, égal au plus au nombre de feuilles compactes ne rencontrant pas de transversales fermées, il n'y a plus de composantes de Reeb.

On peut alors appliquer le Théorème 3.2 de [7], suivant lequel une variété admettant un tel feuilletage est soit un fibré en tores sur le cercle, soit une \mathbb{Q} -sphère d'homologie résoluble. En fait, Goodman exige aussi dans les hypothèses l'absence de composantes cylindriques, mais une légère modification de la démonstration permet d'éviter cette hypothèse.

Il reste à éliminer le cas d'une sphère d'homologie. On a vu (Proposition 2 partie II.A) qu'il existe alors une feuille compacte. Cette feuille est alors un tore qui sépare la variété. La variété M s'obtient en recollant deux composantes cylindriques sur les deux bords d'un produit $T^2 \times I$ (voir II.A). L'holonomie du bord de chaque composante cylindrique M_1 et M_2 est cyclique; et le difféomorphisme de recollement identifie un lacet γ_1 supportant de l'holonomie de M_1 à un lacet γ_2 supportant de l'holonomie de M_2 . Puisque ces lacets représentant des éléments non-nuls dans l'homologie rationnelle de M_1 et de M_2 , il s'ensuit que M n'est pas une \mathbb{Q} sphère

d'homologie. Les \mathbf{Q} sphères d'homologie résolubles ne sont donc pas feuilletable de manière transversalement analytique. ■

PROPOSITION 2. *Soit \mathcal{F} un feuilletage analytique sur T_A^3 , sans composante de Reeb, avec $|\text{tr } A| \neq 2$. Si \mathcal{F} a une feuille compacte toutes les feuilles sont compactes et le feuilletage est une fibration.*

Démonstration. Si \mathcal{F} a une feuille compacte, cette feuille est un tore incompressible donc elle ne disconnecte pas. Coupant le long de ce tore, on obtient un feuilletage analytique de $T^2 \times I$. Le fibré s'obtient en recollant $T^2 \times 0$ et $T^2 \times 1$ à l'aide de A' (où A' est conjuguée à A ou A^{-1}). Le condition de recollement d'holonomie va nous montrer que cette holonomie est triviale si A "tord" trop le tore T^2 .

Soit \mathcal{C} l'ensemble des couples de germes de difféomorphismes analytiques de \mathbf{R} en 0 qui apparaissent comme générateurs de l'holonomie d'un certain feuilletage analytique de $T^2 \times I$ pour le feuille $T^2 \times 0$. Le couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}$ détermine le voisinage feuilleté de $T^2 \times 0$ donc tout le feuilletage de $T^2 \times I$ car le feuilletage est analytique. Au couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}$, faisons correspondre l'holonomie de la feuille $T^2 \times 1$ ainsi déterminée. On obtient ainsi une application

$$\Phi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Nous utiliserons deux propriétés de Φ . Tout d'abord, Φ est involutive, i.e. $\Phi^2 = \text{id}$. D'autre part, il est clair que le groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ opère sur \mathcal{C} par:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (f_1, f_2) = (f_1^a f_2^c, f_1^b f_2^d).$$

Nous noterons cette opération par $A(f_1, f_2)$. On a alors: $A\Phi(f_1, f_2) = \Phi(A(f_1, f_2))$. En effet, soit \mathcal{F} un feuilletage analytique de $T^2 \times I$ ayant (f_1, f_2) et $\Phi(F_1, F_2)$ comme holonomie en $T^2 \times 0$ et $T^2 \times 1$. Le difféomorphisme analytique de $T^2 \times I$ qui envoie (m, t) sur (Am, t) envoie \mathcal{F} sur un feuilletage de $T^2 \times I$ ayant comme holonomie $A(f_1, f_2)$ et $A\Phi(f_1, f_2)$ en $T^2 \times 0$ et $T^2 \times 1$. Donc $\Phi(A(f_1, f_2)) = A\Phi(f_1, f_2)$.

Nous pouvons alors démontrer la proposition. Puisque le feuilletage obtenu après avoir coupe le long d'une feuille compacte doit se recoller analytiquement à l'aide de A , on doit avoir:

$$(f_1, f_2) = A\Phi(f_1, f_2)$$

d'où

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= A\Phi(A\Phi(f_1, f_2)) \\ &= A^2\Phi^2(f_1, f_2) \\ &= A^2(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Donc, si A^2 n'a pas la valeur propre 1 (ce qui est équivalent à $|\text{tr } A| \neq 2$), alors $(f_1, f_2) = (\text{id}, \text{id})$; ce qui montre que le feuilletage \mathcal{F} de $T^2 \times I$ est un produit. Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont donc compactes. ■

Combinant cette proposition avec la proposition 1 de la partie II.A, on obtient le

THÉORÈME 1. *Soit T_A^3 un fibré en tores sur le cercle. Si $|\text{tr } A| < 2$, le seul feuilletage analytique de T_A^3 sans composante de Reeb est la fibration. Si $|\text{tr } A| > 2$, les seuls feuilletages analytiques de T_A^3 sans composantes de Reeb sont la fibration et les modèles (à conjugaison C^ω près).*

Remarques. (1) Nous ne savons pas s'il existe des feuilletages analytiques de T_A^3 avec des composantes de Reeb. (2) Le théorème précédent ne règle pas le cas où $|\text{tr } A| = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. T. BANCHOF et M. I. ROSEN: Periodic points of Anosov diffeomorphisms, *Proc. of Symp. in Pure Math.* 14 (1970), 17-21.
2. S. BOBO: *Thèse de 3ème cycle* (1978) Strasbourg.
3. J. P. BOULENGUEZ: Actions du groupe affine (à paraître).
4. G. CHATELET: Sur les feuilletages induits par l'action de groupes de Lie nilpotents. *Ann. Inst. Fourier* 27(2) (1977), 161-190.
5. B. EVANS et L. MOSER: Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds, *Transactions of the A.M.S.* 168 (1972), 189-210.
6. E. FÉDIRA Feuilletages du plan: *Feuilletages de Lie, Thèse* (1973). Université Louis Pasteur, Strasbourg.
7. S. GOODMAN: On the structure of foliated 3-manifolds separated by a compact leaf, *Inventiones Math.* 39 (1977), 213-221.
8. A. HAEFLIGER: Variétés feuilletées, *Ann. Ec. Norm. Sup. de Pise, Série III, Vol. 16*, (1962) 367-397.
9. G. HECTOR: Feuilletages en cylindres, IIIe ELAM, Rio de Janeiro, *Lecture Notes* No. 594 (1976), 252-271.
10. G. HECTOR: On manifolds admitting locally free nilpotent Lie group actions of codimension one (à paraître).
11. M. HERMAN: *Thèse* (1976) Orsay.
12. I. KUPKA et N. V. QUE: Formes différentielles fermées non singulières, *Lectures Notes* No. 484 (1974), 239-256.
13. R. LANGEVIN et H. ROSENBERG: On stability of compact leaves and fibrations, *Topology* (1977).
14. R. MOUSSU et R. ROUSSARIE: Relations de conjugaison et de cobordismes entre certains feuilletages. *Publ. I.H.E.S.* No. 43 (1974), 143-168.
15. S. P. NOVIKOV: Topology of foliations. *Trudy Mark. Math. obsch.* 14 (1965).
16. F. PELLETIER: *Thèse de 3ème cycle*, Dijon (1973).
17. J. PLANTE: Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* 102 (1975), 327-361.
18. J. PLANTE: Foliations without Reeb components on closed 3-manifolds with solvable fundamental group (preprint).
19. J. PLANTE et W. THURSTON: Polynomial growth in holonomy groups of foliations. *Commentarii Math. Helvetici* 39 (1976), 567-584.
20. G. REEB: Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Actualités scientifiques et industrielles, Hermann* (1952).
21. H. ROSENBERG: Foliations by planes. *Topology* 7 (1968), 131-138.
22. H. ROSENBERG, R. ROUSSARIE et D. WEIL: A classification of 3-manifolds of rank two. *Ann. Math.* 91-3 (1970), 449-469.
23. R. ROUSSARIE: Plongements dans les variétés et classification des feuilletages sans holonomie. *Publ. I.H.E.S.* No. 43 (1974), 101-142.
24. S. STERNBERG, *Celestial mechanics*, Benjamin (1969).
25. D. SULLIVAN: Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Inventiones Math.* 36 (1976), 225-255.

Université des Sciences et Techniques de Lille
Villeneuve d'Ascq, France

APPENDICE 1

Quelques remarques sur les fibres en tores sur le cercle

On considère les fibrés T_A^3 définis comme quotient de $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence identifiant (x, y, t) à $(A(x, y), t + 1)$ où $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. Le groupe fondamental de T_A^3 est le groupe des transformations de \mathbb{R}^3 engendré par:

$$\begin{aligned}(x, y, t) &\longrightarrow (x + 1, y, t) \\ (x, y, t) &\longrightarrow (x, y + 1, t) \\ (x, y, t) &\longrightarrow (A(x, y), t + 1).\end{aligned}$$

Ce groupe peut être défini comme l'ensemble des triplets $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ avec la loi:

$$(m, n, p)(m', n', p') = (m + m', A^m(n', p') + (n, p)).$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_1(T^2) \longrightarrow \pi_1(T_A^3) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$$

est ici

$$\begin{aligned}(n, p) &\longrightarrow (0, n, p) \\ (m, n, p) &\longrightarrow m.\end{aligned}$$

On notera H l'image de $\pi_1(T^2)$ dans $\pi_1(T_A^3)$.

PROPOSITION 1.

(1) $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(T_A^3, \mathbb{Q}) = 3$ $T_A^3 = T^3$ (i.e. si $A = id$)
 $= 2 \Leftrightarrow A$ conjugué à $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= 1$ dans les autres cas.

(2) Si $H_1(T_A^3, \mathbb{Q})$ est de dimension 1, tout automorphisme de $\pi_1(T_A^3)$ préserve le sous-groupe H image de $\pi_1(T^2)$. Ceci implique que tout homéomorphisme de T_A^3 se relève dans $T^2 \times \mathbb{R}$.

Démonstration: En étudiant le groupe dérivé de $\pi_1(T_A^3)$, on trouve que:

(1) Si A n'a pas la valeur propre 1, $D\pi_1$ est d'indice fini dans H . Le groupe $\pi_1/D\pi_1$ est alors une extension de \mathbb{Z} par un groupe fini.

(2) Si A a la valeur propre 1, A s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une certaine base. Si α est non nul $D\pi_1$ est de rang 1, et si α est nul, $D\pi_1$ est de rang 0. Ceci donne la première partie de la proposition.

Pour la seconde partie, considérons un automorphisme de $\pi_1(T_A^3)$ avec A hyperbolique. Cet automorphisme doit préserver le premier groupe dérivé. Or, ce groupe dérivé est d'indice fini dans H . On voit alors facilement que l'automorphisme doit préserver H .

PROPOSITION 2. Les seuls automorphismes de $\pi_1(T_A^3)$ (avec $|tr A| > 2$) sont les suivants:

$$\begin{aligned} (m, n, p) &\longrightarrow (m, (I + A + \dots + A^{m-1})(b) + B(n, p)) && \text{pour } m \geq 0 \\ &\longrightarrow (m, (I + A^{-1} + \dots + A^{-m+1})(b) + B(n, p)) && \text{pour } m \leq 0 \end{aligned}$$

où $b \in \mathbb{Z}$ et $B \in GL_2(\mathbb{Z})$ est tel que $AB = BA$.

$$\begin{aligned} (m, n, p) &\longrightarrow (-m, (I + A^{-1} + \dots + A^{-m+1})(b) + B(n, p)) && \text{pour } m \geq 0 \\ &\longrightarrow (-m, (I + A + \dots + A^{m-1})(b) + B(n, p)) && \text{pour } m \leq 0 \end{aligned}$$

où $b \in \mathbb{Z}^2$ et $B \in GL_2(\mathbb{Z})$ est tel que $ABA = B$.

Démonstration. On sait que l'automorphisme préserve l'image de $\pi_1(T^2)$. Il existe donc $B \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que $(0, n, p)$ s'envoie sur $(0, B(n, p))$. Notons (a, b) l'image de $(1, 0, 0)$ (on a $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^2$). L'image de (m, n, p) est alors:

$$(ma, (I + A^a + \dots + A^{(m-1)a})(b) + B(n, p)).$$

Puisque l'on s'intéresse aux automorphismes, on a $a = \pm 1$. En écrivant que l'application ainsi décrite doit être un morphisme de groupe, on obtient que si $a = 1$, les matrices A et B commutent, et que si $a = -1$, les matrices A et B vérifient $ABA = B$. Ce qui démontre la proposition.

Remarque. On peut vérifier que tous ces automorphismes proviennent d'un difféomorphisme de T_A^3 . En appliquant un résultat de Kupka et Que[12], affirmant que deux difféomorphismes de T_A^3 induisant le même automorphisme au niveau du groupe fondamental sont isotopes, on en déduit une description explicite du groupe des difféomorphismes de T_A^3 à isotopie près.

En cherchant par la même méthode les isomorphismes entre $\pi_1(T_A^3)$ et $\pi_1(T_{A'}^3)$, on obtiendrait la:

PROPOSITION 3. Les fibrés T_A^3 et $T_{A'}^3$ (avec $|tr A| > 2$ et $|tr A'| > 2$) sont homéomorphes si et seulement si: (1) soit A et A' sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{Z})$; (2) soit A^{-1} et A' sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{Z})$.

APPENDICE 2

La croissance du groupe fondamental d'un recollement de composantes cylindriques

Soit \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 deux exemplaires de la composante cylindrique, a, b (respectivement x, y) des générateurs canoniques de $\pi_1(\mathcal{X}_1)$ (respectivement $\pi_1(\mathcal{X}_2)$) vérifiant $bab^{-1} = a^{-1}$ et $xyx^{-1} = x^{-1}$.

Soit $f: \partial\mathcal{X}_1 \rightarrow \partial\mathcal{X}_2$ un difféomorphisme linéaire et $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ la matrice de f_* : $\pi_1(\partial\mathcal{X}_1) \rightarrow \pi_1(\partial\mathcal{X}_2)$ relative aux bases $\{a, b^2\}$ et $\{x, y^2\}$.

On a une suite exacte provenant du revêtement des orientations de la bouteille de Klein:

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}_i) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1 \quad i = 1, 2$$

où les générateurs canoniques de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ s'identifient à $\{a, b^2\}$ pour $i = 1$ et $\{x, y^2\}$ pour $i = 2$.

On en déduit une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}_1 \cup_f \mathcal{X}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

où $\pi_1(\mathcal{X}_1 \cup_f \mathcal{X}_2)$ est engendré par a, b, x, y et les relations $bab^{-1} = a^{-1}$, $xyx^{-1} = x^{-1}$, $a = x^p y^{2q}$, $b^2 = x^r y^{2s}$, les générateurs canoniques de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ s'identifient à a et b^2 .

Si on regarde le sous-groupe infini cyclique distingué d'indice 2 de $Z_2 * Z_2$ engendré par l'image de l'élément by $\epsilon\pi_1(\mathcal{X}_1 \cup_f \mathcal{X}_2)$ on obtient la suite exacte

$$1 \rightarrow Z \oplus Z \rightarrow G \rightarrow Z \rightarrow 1$$

où G est un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(\mathcal{X}_1 \cup_f \mathcal{X}_2)$ donc ayant la même croissance que lui.

Un calcul direct montre que l'action de Z sur $Z \oplus Z$ est donnée par la matrice $\pm \begin{pmatrix} ps + qr & 2rs \\ 2pq & ps + qr \end{pmatrix}$.

Considérons G comme le groupe fondamental d'un fibré en tores sur S^1 dont le difféomorphisme caractéristique est donné par la matrice ci-dessus. La proposition suivante est alors une conséquence d'un résultat de [16]:

PROPOSITION 1. La croissance de $\pi_1(\mathcal{X}_1 \cup_f \mathcal{X}_2)$ est polynomiale si $|ps + qr| \leq 1$ et exponentielle si $|ps + qr| > 1$.

(Remarquons que la condition $|ps + qr| \leq 1$ est équivalente à $pqr \leq 0$).

SUR LA NULLITE DE L'INVARIANT DE GODBILLON-VEY

G. Duminy et V. Sergiescu

TOPOLOGIE. — *Sur la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey.* Note (*) de Gérard Duminy et Vlad Sergiescu, présentée par Henri Cartan.

On démontre la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey pour tout feuilletage de codimension un, à croissance non exponentielle, transverse à une fibration d'une variété compacte.

We prove the vanishing of the Godbillon-Vey invariant of a codimension one foliation with non-exponential growth which is transverse to a fibration of a compact manifold.

1. PRÉSENTATION DU RÉSULTAT. — Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée de classe C^∞ avec M compacte et \mathcal{F} de codimension un, transversalement orienté et tangent au bord (éventuellement vide) de M . Son invariant de Godbillon-Vey [1] se trouve dans $H^3(M, \hat{c}M; \mathbb{R})$; on le notera $gv(\mathcal{F})$.

La nullité de cet invariant a été établie pour deux classes particulières de feuilletages à croissance polynomiale ([2], [3]). Par ailleurs, dans les exemples classiques d'invariant non nul, on peut mettre en évidence la présence de feuilles ressort (type particulier de feuilles à croissance exponentielle; voir [4]). Nous démontrons ici :

THÉORÈME 1. — *Lorsque M est fibrée en cercles ou en intervalles et \mathcal{F} transverse à la fibration, si \mathcal{F} est sans feuille ressort, alors $gv(\mathcal{F})$ est nul.*

Ceci permet de répondre partiellement à la question n° 17.3 de [5] :

COROLLAIRE. — *Dans les mêmes conditions, si \mathcal{F} est à croissance non exponentielle, alors $gv(\mathcal{F})$ est nul.*

La démonstration du théorème se ramène au cas où la fibre type est un intervalle : si \mathcal{F} , transverse à une S^1 -fibration, possède une feuille compacte, il suffit de couper M le long de cette feuille; sinon, par le théorème du point fixe de Sacksteder, \mathcal{F} est sans holonomie et le résultat est prouvé dans [6].

Supposons donc que M soit un I -fibré de base N ; \mathcal{F} est alors caractérisé, à conjugaison près, par son holonomie globale $hol : \pi_1(N) \rightarrow \text{Diff}_+^2(I)$. D'après Thurston (voir par exemple [3]), $gv(\mathcal{F})$, considéré dans $H^2(N; \mathbb{R}) \simeq H^3(M, \hat{c}M; \mathbb{R})$, est égal à $i^* hol^*[A]$, où $i : N \hookrightarrow K(\pi_1(N), 1)$ et $[A] \in H^2(\text{Diff}_+^2(I); \mathbb{R})$ est défini par :

$$(*) \quad A(f, g) = \frac{1}{2} \int_1^2 \left| \begin{array}{cc} \text{Log } g' & \text{Log}(f \circ g)' \\ (\text{Log } g')' & (\text{Log}(f \circ g))' \end{array} \right| dx; \quad f, g \in \text{Diff}_+^2(I).$$

L'absence de feuille ressort se traduit par le fait que le groupe d'holonomie $G = \text{Im } hol$ de \mathcal{F} est sans trajectoire ressort, c'est-à-dire vérifie la condition : si $y \in G(x)$ et s'il existe $g \in G$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(y) = x$, alors $y = x$.

Le théorème 1 découle donc du suivant, dans lequel $gv(G)$ désigne $j^*[A]$, où $j : G \hookrightarrow \text{Diff}_+^2(I)$.

THÉORÈME 1'. — *Si G est un sous-groupe de $\text{Diff}_+^2(I)$, sans trajectoire ressort, alors $gv(G)$ est nul.*

La nullité de $gv(G)$ est connue lorsque G est abélien (voir [3]). Dans le cas plus général du théorème 1', notre démonstration nécessite :

2. UN PROLONGEMENT DU COCYCLE A. — Pour tout $h \in \text{Homéo}_+(I)$, la fonction $\text{Log } h'$ est définie presque partout et, lorsque sa variation totale $V(\text{Log } h')$ est finie, on a $\text{Log } h' \in L^\infty$ et $(\text{Log } h')' \in L^1$. Un tel homéomorphisme permettant les changements de variable (h et h^{-1} sont alors lipschitziens) on vérifie que :

(i) $\mathcal{D}(I) = \{ h \in \text{Homéo}_+(I) \mid V(\text{Log } h') < \infty \}$ est un sous-groupe de $\text{Homéo}_+(I)$ (voir aussi [7], p. 74-75);

(ii) la relation (\star) définit un cocycle sur $\mathcal{D}(I)$, encore noté A, et

(iii) $d : (f, g) \mapsto V(\text{Log}(f \circ g^{-1})')$ est une métrique sur l'ensemble $\mathcal{D}(I)$, pour laquelle l'application $(f, g) \mapsto A(f \circ g^{-1}, g)$ est continue.

Dans la suite, la notation $gv(G)$ sera naturellement étendue à tout sous-groupe G de $\mathcal{D}(I)$. De plus, on pourra toujours se ramener au cas où l'ensemble $\text{Fix } G = \bigcap_{g \in G} \text{Fix } g$ des points fixes de G se réduit au bord de I , car :

LEMME 0. — Pour $G \subset \mathcal{D}(I)$, $gv(G)$ est nul si $gv(G_{\bar{J}})$ est nul pour toute composante connexe J de $I - \text{Fix } G$.

3. LA SITUATION GÉNÉRIQUE. — Est celle où $G \subset \mathcal{D}(I)$ admet, dans \hat{I} , une trajectoire fermée discrète non triviale. Cette trajectoire est de la forme $G(\xi) = \{ f^n(\xi) \mid n \in \mathbb{Z} \}$, où $\xi \in \hat{I}$ et $f \in G$, $f > \text{id}$ dans \hat{I} . Notons G^* le sous-groupe des éléments de G fixant $G(\xi)$; G est alors le produit semi-direct $\langle f \rangle \cdot G^*$ et la suite exacte de Wang s'écrit :

$$\dots \rightarrow H_2(G^* : \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_*} H_2(G : \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(G^* : \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_* - \text{id}} H_1(G : \mathbb{Z}) \rightarrow \dots,$$

où $i : G^* \hookrightarrow G$ et f_* est associé à l'automorphisme $g \rightarrow fgf^{-1}$ de G^* . L'action de f_* sur $H_1(G^* : \mathbb{Z})$ s'identifie à celle de f sur l'abélianisé G^*/DG^* , ceci prouve le :

LEMME 1. — $gv(G)$ est nul si $gv(G^*)$ est nul et si G satisfait à la condition suivante :

(W₁) tout $g \in G$ vérifiant $[f, g] \in DG^*$ est dans DG^* .

En dehors du cas trivial où $G^* = \{\text{id}\}$, on en déduit le :

LEMME 2. — $gv(G)$ est nul si $gv(G^*_{\bar{J}})$ est nul pour toute composante connexe J de $I - \text{Fix } G^*$ et si G satisfait à la condition suivante :

(W₂) les germes de G^* aux extrémités a et b de J sont abéliens.

La démonstration consiste à « grossir » G à l'aide de « morceaux » de G^* de façon à satisfaire à (W₁) : on définit H comme le sous-groupe de $\mathcal{D}(I)$ engendré par G et tous les homéomorphismes obtenus en prolongeant par l'identité les restrictions des éléments de G^* à l'un des segments $[f^p(\xi), f^{p+1}(\xi)]$, $p \in \mathbb{Z}$. Le sous-groupe H^* , défini comme ci-dessus, coïncidant avec G^* sur toute composante de $I - \text{Fix } G^*$, il suffit, d'après le lemme 0, de montrer que H satisfait à (W₁).

Soit donc $h \in H^*$ tel que $[f, h] \in DH^*$. Le groupe H vérifiant (W₂), une extension à $\mathcal{D}(I)$ du lemme de N. Koppel (voir [8]) permet d'affirmer que les germes de h en a et b sont ceux de l'identité. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, h et $[h, f^n]$ ont alors même restriction au support de h et, vu la construction de H , il suffit de vérifier que $[h, f^n] \in DH^*$, ce qui est immédiat.

4. ACTIONS DE GROUPE SANS TRAJECTOIRE RESSORT. — Soit G un sous-groupe de $\text{Homéo}_+(I)$. Pour toute composante connexe J d'un ouvert G -saturé, notons $G_J = \{ g_{\bar{J}} \mid g \in G \text{ et } g(J) = J \}$ et considérons les ensembles minimaux de l'action de G_J sur J (fermés non vides de J , G_J -saturés, minimaux pour l'inclusion). Leur réunion M_J , éventuellement vide, est un fermé

G_J -saturé de J . On peut alors définir une suite croissante $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fermés G -saturés de I par les conditions :

$$M^0 = \text{Fix } G \text{ et } M^{p+1} - M^p = \bigcup \{ M_J \mid J \text{ est composante connexe de } I - M^p \}.$$

Nous appellerons G -intervalle toute composante connexe d'un ouvert non vide $I - M^p$. Lorsque G est un sous-groupe de type fini de $\text{Diff}_+^2(I)$, cette suite vérifie, d'après [9], la :

PROPRIÉTÉ (\mathcal{P}_1) . — *La réunion des ensembles M^p est dense dans I .*

Supposons, de plus, G sans trajectoire ressort. Alors, pour tout G -intervalle J , l'action de G_J sur M_J [non vide d'après (\mathcal{P}_1)] est sans point fixe. Puisque, d'après [4], le théorème de Sacksteder s'étend aux actions des groupes G_J , l'ensemble M_J ne peut contenir de minimal exceptionnel et la classification habituelle des minimaux s'énonce :

PROPRIÉTÉ (\mathcal{P}_2) . — *Tout G -intervalle J est de l'un des deux types suivants :*

- (A) $M_J = J$ et G_J est sans point fixe dans J ;
- (B) M_J , distinct de J , est réunion de trajectoires fermées discrètes non triviales.

Nous qualifierons de régulière l'action de tout groupe $G \subset \text{Homéo}_+(I)$ vérifiant ces deux propriétés et appellerons dimension de l'action le nombre $n \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$ de saturés de G -intervalles.

Pour une telle action et tout G -intervalle J de type (A), le groupe G_J est abélien (théorème de Hölder); d'autre part :

LEMME 3. — *Si $G \subset \mathcal{L}(I)$ a une action régulière de dimension finie, alors, pour tout G -intervalle J de type (B), G_J satisfait à la condition (W_2) du lemme 2.*

Il suffit en effet de vérifier que, pour tout $h \in G_J$, les composantes connexes de $J - \text{Fix } h$ sont des G -intervalles de type (A) sauf peut-être un nombre fini d'entre elles; cette vérification est effectuée dans [8].

LEMME 4. — *Si G est un sous-groupe de type fini de $\text{Diff}_+^2(I)$, sans trajectoire ressort, alors il existe une famille de morphismes $\pi_\varepsilon : G \rightarrow \mathcal{L}(I)$, $\varepsilon > 0$, telle que :*

- (i) l'action de $G_\varepsilon = \pi_\varepsilon(G)$ est régulière, de dimension finie;
- (ii) pour tout $h \in G_\varepsilon$ et tout G_ε -intervalle J de type (A), $h|_J$ est de classe C^2 ;
- (iii) pour tout $g \in G$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_\varepsilon(g) = g$ dans $\mathcal{L}(I)$.

En effet, l'action de G est régulière et la propriété (\mathcal{P}_1) entraîne l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un entier p_ε tel que les composantes connexes de $I - M^{p_\varepsilon}$ soient de longueur inférieure à ε .

On peut donc construire un fermé G -saturé M_ε , contenu dans M^{p_ε} et vérifiant les conditions :

- (a) pour tout entier p , les G -saturés des composantes connexes de $I - (M_\varepsilon \cap M^p)$ sont en nombre fini,
- (b) les composantes de $I - M_\varepsilon$ qui ne sont pas des G -intervalles de type (A) sont de longueur inférieure à ε .

On obtiendra alors les morphismes π_ε cherchés de la façon suivante : si x est dans l'une des composantes $]\alpha, \beta[$ de $I - M_\varepsilon$ qui n'est pas de type (A), on pose $\pi_\varepsilon(g)(x) = h(x)$, où h est l'unique homographie coïncidant avec g en α et β et vérifiant :

$$\frac{h'(\alpha)}{h'(\beta)} = \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)};$$

sinon on pose $\pi_\varepsilon(g)(x) = g(x)$.

5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1'. — On peut évidemment supposer G de type fini et, puisque l'application $(f, g) \mapsto A(f \circ g^{-1}, g)$ est continue sur $\mathcal{L}(1)^2$, il suffit de montrer la nullité de $g_1(H)$ pour tout $H \subset \mathcal{L}(1)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 4.

Cette nullité s'obtient par récurrence sur la dimension n de l'action de H . Triviale pour $n=0$, elle se ramène, lorsque $n \geq 1$, à celle de H_J , où J est une composante de $1-M'$ (cf. lemme 0). Si J est du type (A) elle est connue (cf. § 1), sinon elle découle des lemmes 2 et 3 et de l'hypothèse de récurrence.

(*) Remise le 27 avril 1981.

- [1] C. GODBILLON et J. VEY, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 92.
- [2] T. NISHIMORI, *Tohoku Math. J.*, 32, 1980, p. 9-34.
- [3] T. MIZUTANI, S. MORITA et T. TSUBOI, *Foliated J-Bundles and the Godbillon-Vey Class of Codimension one Foliation* [*Annals of Math.* (à paraître)].
- [4] G. HECTOR, *Lecture Notes in Math.*, n° 652, 1978, p. 141-182.
- [5] P. A. SCHWEITZER, *Lecture Notes in Math.*, n° 652, 1978, p. 247.
- [6] S. MORITA et T. TSUBOI, *Topology*, 19, 1980, p. 43-49.
- [7] M. R. HERMAN, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 49, 1979.
- [8] G. DIMNY, *Feuilletages de codimension un sur les variétés compactes à groupe fondamental résoluble* (à paraître).
- [9] J. CANTWELL, L. CONLON, *Poincaré-Bendixon theory for leaves*, *T.A.M.S.* 265, (1981) 181-209.

Université des Sciences et Techniques de Lille-I,
U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées,
E.R.A., C.N.R.S. 07-590, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex.

SUR UN GROUPE REMARQUABLE DE DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE

Etienne GHYS et Vlad SERGIESCU

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, Rte de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette (France)

Décembre 1985

IHES/M/85/65

INTRODUCTION.

L'étude de la cohomologie du groupe discret des difféomorphismes du cercle est motivée par son lien avec les problèmes de classification homotopique des feuilletages de codimension 1 (voir par exemple [Ser]). Pour détecter des classes de cohomologie non triviales, on est ramené à la recherche de sous-groupes dont l'homologie est calculable. A part les groupes abéliens, les sous-groupes étudiés jusqu'à présent se construisent essentiellement à partir de l'action projective de $SL(2, \mathbb{R})$ sur le cercle $S^1 \simeq P^1(\mathbb{R})$. ([Bot], [Tsu1], [Tsu2] ...). Dans ce travail, nous nous intéressons aux propriétés homologiques et dynamiques d'un groupe de nature différente.

Soit \tilde{G} le groupe des homéomorphismes g de \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

1. $g(x+1) = g(x)+1$
2. g est affine par morceaux.
3. Si x est un point de discontinuité de la dérivée de g , alors x et $g(x)$ sont des nombres dyadiques, c'est-à-dire des rationnels du type $p.2^q$ avec p et q entiers relatifs
4. En tout point, les dérivées à gauche et à droite de g sont des puissances entières de 2.
5. $g(0)$ est un nombre dyadique.

la propriété 1 montre qu'un élément de \tilde{G} définit naturellement un homéomorphisme du cercle S^1 , identifié à \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On désigne par G le groupe des homéomorphismes de S^1 ainsi obtenu.

On note F le sous-groupe de G formé des éléments qui fixent O (mod \mathbb{Z}) et F' le sous-groupe de F constitué des éléments dont le germe en O est trivial.

Ces groupes sont apparus dans plusieurs contextes : logique, algèbre, topologie. R.-J. Thomson ([MK-TH],[?]) , motivé par le "problème des mots", a construit un groupe infini, simple de présentation finie, plongé dans le groupe des homéomorphismes du cercle. Il s'avère que l'image de ce plongement n'est autre que G (bien que nous n'utiliserons pas ce fait). Le groupe F est relié au problème des idempotents homotopiques [Dyd] , [Fr-He] ; récemment K. Brown et R. Geoghegan ont démontré que F est un groupe de type FP_∞ , de dimension cohomologique infinie, bien que sans torsion [Br-Ge] . Par ailleurs, F ne contient pas de sous-groupes libres à deux générateurs [Br-Sq] .

L'étude que nous proposons du groupe G est basée sur la dynamique de son action sur le cercle. Nous verrons que des méthodes apparues précédemment en théorie des feuilletages permettent le calcul explicite de la cohomologie de G et éclairent sa structure. Inversement, les propriétés algébriques et homologiques de G sont reliées à d'intéressantes propriétés qualitatives des feuilletages qui lui sont associés.

Les discussions et la correspondance que nous avons eues avec plusieurs mathématiciens nous ont constamment stimulées. D. Sullivan nous a suggéré d'étudier ce groupe d'un point de vue dynamique. Nous avons utilisé avec profit les preprints que P. Greenberg et S. Jekel nous ont communiqués. C'est grâce à R. Geoghegan et R. Strebel que nous avons eu connaissance, entre autres, de [?]. D. McDuff et A. Haefliger se sont intéressés à ce travail et nous ont encouragés durant sa rédaction.

Nous les remercions tous pour leur gentillesse.

Le premier auteur remercie par ailleurs l'IHES pour son hospitalité.

I. ENONCE DES RESULTATS.

Tel que nous l'avons défini, le groupe G est un groupe d'homéomorphismes du cercle. Le théorème suivant montre qu'il est possible de "lisser" ce groupe sans changer sa dynamique topologique.

THEOREME A. Il existe un homéomorphisme h du cercle tel que hGh^{-1} est constitué de difféomorphismes de classe C^∞ de S^1 .

Nous verrons plus loin qu'il existe un grand nombre de tels homéomorphismes h . Par ailleurs, nous construirons d'autres plongements de G dans le groupe $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ des difféomorphismes de S^1 , de classe C^∞ , qui respectent l'orientation.

Un théorème fondamental de J. Mather établit une équivalence homologique entre le classifiant du groupe discret $\text{Diff}_C^\infty(\mathbb{R})$ des difféomorphismes C^∞ de \mathbb{R} à support compact d'une part, et l'espace des lacets du classifiant $B\Gamma_1^\infty$ des Γ -structures de Haefliger de codimension 1 d'autre part ([Mat]). W. Thurston a donné une version de ce théorème pour le groupe $\widetilde{\text{Diff}}_+^\infty(S^1)$, revêtement universel de $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$. Une approche de ces théorèmes et de certaines généralisations, basée sur l'utilisation des monoïdes de plongements, est due à D. McDuff et G. Segal [McD1], [Seg3]. Nous étendons cette méthode aux groupes qui nous intéressent. En utilisant un théorème récent de P. Greenberg sur le classifiant des pseudo-groupes linéaires par morceaux, nous explicitons des espaces simples ayant le même type d'homologie que les espaces d'Eilenberg-MacLane BG , $B\widetilde{G}$ et BF' . Notre démarche est en quelque sorte inverse de celle de J. Mather et W. Thurston qui utilisaient l'équivalence d'homologie pour analyser $B\Gamma_1^\infty$ à partir du groupe $\text{Diff}_C^\infty(\mathbb{R})$.

Si X est un espace topologique pointé; nous noterons ΩX l'espace des lacets pointés et LX l'espace X^{S^1} des lacets libres. Le groupe S^1 opère sur

LX de façon naturelle; nous noterons \underline{LX} le "quotient homotopique", c'est-à-dire le quotient de $LX \times ES^1$ par l'action diagonale de S^1 (où ES^1 désigne l'espace total du S^1 -fibré universel).

THEOREME B. Il existe des applications continues

$$BF' \rightarrow \Omega S^3$$

$$\tilde{B}\tilde{G} \rightarrow LS^3$$

$$BG \rightarrow \mathcal{L}S^3$$

qui induisent des isomorphismes en homologie entière.

Ce théorème permet la détermination des anneaux de cohomologie des groupes F, F', \tilde{G}, G . Rappelons d'abord quelques notations. Si A est un anneau commutatif, on note $A[x]$ la A -algèbre graduée des polynômes en une variable x de degré pair $|x|$. Soit $\Lambda(u)$ la \mathbb{Z} -algèbre extérieure engendrée par un générateur u de degré impair $|u|$. Enfin, on note $\Gamma[x]$ l'anneau gradué des puissances divisées engendré par un générateur x de degré pair; c'est par définition l'anneau libre engendré par des éléments x_n ($n \geq 1$) tels que $x_1 = x$ et $x_n \cdot x_p = \frac{(n+p)!}{n!p!} x_{n+p}$.

La cohomologie entière de $\mathcal{L}S^3$ n'est pas connue. C'est pour cette raison que nous n'explicitons que la structure rationnelle de la cohomologie de G . Voir cependant [Hin] pour des informations sur la cohomologie de $\mathcal{L}S^3$ à coefficients dans \mathbb{Z}_2 .

COROLLAIRE C. Les anneaux de cohomologie entière de F, F', \tilde{G} sont respectivement :

$$H^*(F; \mathbb{Z}) \simeq \Lambda(u_1, u_2) \otimes \Gamma[\alpha] \quad \text{avec} \quad |u_1| = |u_2| = 1 \quad \text{et} \quad |\alpha| = 2$$

$$H^*(F'; \mathbb{Z}) \simeq \Gamma[\alpha] \quad \text{avec} \quad |\alpha| = 2$$

$$H^*(\tilde{G}; \mathbb{Z}) \simeq \Gamma[\alpha] \otimes \Lambda(\beta) \quad \text{avec} \quad |\alpha| = 2 \quad \text{et} \quad |\beta| = 3$$

De plus, on a :

$$H^1(G; \mathbb{Z}) = 0$$

Le groupe $H^2(G; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il existe des générateurs α et χ de $H^2(G; \mathbb{Z})$, naturels dans $H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z})$, tels que :

$$H^*(G; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\alpha, \chi] / \alpha \cdot \chi = 0 \quad \text{avec} \quad |\alpha| = 2 \quad \text{et} \quad |\chi| = 2.$$

Par une méthode différente, K. Brown et R. Geoghegan avaient déjà calculé la structure additive de $H^*(F; \mathbb{Z})$ ([Br-Ge]).

En prenant des coefficients réels, ces résultats présentent une analogie surprenante avec les cohomologies continues (ou de Gelfand-Fuchs) de $\text{Diff}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{Diff}^\infty(S^1)$. Rappelons que celles-ci sont respectivement isomorphes à $\mathbb{R}[gv]$ et $\mathbb{R}[gv, eu]/gv \cdot eu = 0$ où gv est la classe de Godbillon-Vey (intégrée sur la fibre) et eu est la classe d'Euler [Ha2]. Il est naturel d'interpréter les générateurs α et χ à partir de cette analogie.

THEOREME D. L'élément χ de $H^2(G; \mathbb{Z})$ n'est autre que la classe d'Euler de l'extension

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Les puissances de la classe d'Euler sont non nulles dans

$H^*(G; \mathbb{Q})$ et donc dans $H^*(\text{Diff}_+^\infty(S^1); \mathbb{Q})$. (D'après le théorème A).

La non nullité des puissances de la classe d'Euler dans $H^*(\text{Diff}_+^\infty(S^1), \mathbb{Q})$ est un résultat de S. Morita [Mor]. Il nous semble intéressant de retrouver ce phénomène dans un groupe explicite aussi "petit" que G .

L'interprétation de la classe α est plus délicate. Rappelons tout d'abord que la classe de Godbillon-Vey dans $H^2(\text{Diff}_+^\infty(S^1), \mathbb{R})$ peut être représentée par le "2-cocycle de Bott-Thurston" suivant (voir[Bott]) :

$$gv(u, v) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left| \begin{array}{cc} \text{Log } Dv & \text{Log } D(u \circ v) \\ D \text{Log } Dv & D \text{Log } D(u \circ v) \end{array} \right| dx$$

Ce cocycle, bien qu'ayant un sens si u et v sont deux éléments de G est évidemment nul dans ce cas car $D \text{Log } Du$ est alors nul presque partout.

La classe α apparaît cependant comme un analogue discrétisé de gv où la différentielle D est remplacée par une différence finie. Plus précisément, si $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction admettant des limites latérales en tout point, on notera $\Delta\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Delta\varphi(x) = \varphi(x_+) - \varphi(x_-)$. En notant u'_d la dérivée à droite, on a

THEOREME E. La fonction $\overline{gv} : G \times G \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\overline{gv}(u, v) = \sum_{x \in S^1} \left| \begin{array}{cc} \text{Log}_2 v'_d & \text{Log}_2(u \circ v)'_d \\ \Delta \text{Log}_2 v'_d & \Delta \text{Log}_2(u \circ v)'_d \end{array} \right| (x)$$

est un cocycle dont la classe de cohomologie est l'élément 2α de $H^2(G; \mathbb{Z})$ décrit dans le corollaire C.

On remarquera que la somme définissant \overline{gv} est en fait finie.

Pour un plongement de G dans $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ donné par le théorème 1, on pourrait être tenté d'interpréter α comme étant l'image réciproque de la classe de Godbillon-Vey par ce plongement. Il n'en est rien, comme le montre le théorème suivant.

THEOREME F. Soit $\phi : G \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$ un morphisme quelconque. Alors l'image de l'invariant de Godbillon-Vey par ϕ^* est nulle dans $H^2(G; \mathbb{R})$.

Nous abordons maintenant l'étude qualitative des actions de G sur le cercle.

Rappelons que si un groupe agit sur le cercle, sa dynamique topologique peut être de trois types différents (voir par exemple [He-Hi]) :

1. Il existe une orbite finie.
2. Toutes les orbites sont denses.
3. Il existe une orbite dont l'adhérence est un ensemble de Cantor, appelé minimal exceptionnel.

Il est clair que les actions de G sur S^1 fournies par le théorème A ont toutes leurs orbites denses. Nous verrons qu'une action non triviale de G sur S^1 ne peut avoir d'orbite finie. Par contre, le cas 3 peut effectivement se produire :

THEOREME G. Il existe des représentations $\phi : G \rightarrow \text{Diff}^\infty(S^1)$ possédant un minimal exceptionnel.

Il résulte facilement des théorèmes D et F et de la formule de Hopf qu'il existe une surface compacte orientée Σ et une représentation $\phi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(S^1)$ ayant un minimal exceptionnel et telle que le nombre d'Euler est non nul. Nous avons réussi à construire un exemple explicite :

THEOREME H. Soit Σ_{12} la surface compacte orientée de genre 12. Il existe une représentation $\phi : \pi_1(\Sigma_{12}) \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(S^1)$ qui a un minimal exceptionnel et tel que le nombre d'Euler du S^1 -fibré associé est égal à 1 .

Ce théorème contraste avec le résultat de [Gh1] où il est montré que la classe d'Euler rationnelle d'un groupe de difféomorphismes analytiques du cercle est nulle en présence d'un minimal exceptionnel. Remarquons que si $\phi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}_+^\infty(S^1)$ possède un minimal exceptionnel, alors son nombre d'Euler $eu(\phi)$ satisfait l'inégalité de Milnor-Wood "forte" $|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma)|$ [Gh1] . On pourrait se demander dans quelle mesure cette dernière inégalité est optimale.

Le théorème G entraîne le résultat suivant :

COROLLAIRE I. Les groupes F et G sont isomorphes à des sous-groupes discrets de $\text{Diff}_c^1(\mathbb{R})$ et $\text{Diff}_+^1(S^1)$, munis de la topologie C^1 .

Ainsi F et G sont des sous-groupes discrets de "groupes de Lie" simples de dimension infinie; ceci pourrait être relié au fait qu'ils sont de type FP_∞ (voir [Br-Ge]) .

Une conséquence d'un théorème classique de Denjoy et du théorème G est le

COROLLAIRE J. Tous les éléments de G ont un nombre de rotation rationnel. Par ailleurs, tout rationnel est le nombre de rotation d'un élément de G .

Enfin, nous nous intéressons à la classification des actions de G sur S^1 .

Rappelons que si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux représentations de G dans $\text{Homéo}^+(S^1)$, on dit que ϕ_1 est semi-conjugué à ϕ_2 s'il existe une application continue monotone h de S^1 dans S^1 de degré 1 telle que, pour tout g de G , on a $h \circ \phi_1(g) = \phi_2(g) \circ h$.

THEOREME K. Soit $\phi : G \rightarrow \text{Diff}^2(S^1)$ une représentation non triviale. Alors, ϕ est semi-conjuguée à l'injection de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

En fait, nous donnerons une description précise de toutes les représentations $\phi : G \rightarrow \text{Diff}^r(S^1)$ ($r \geq 2$) à C^r -conjugaison près (voir théorème III-3-17).

COROLLAIRE L. Il existe des représentations non triviales de G dans $\text{Diff}^r(S^1)$ ($r \geq 2$) qui sont semi-structurellement stables dans le sens suivant : toute représentation ϕ' proche de ϕ est semi-conjuguée à ϕ .

Ce corollaire nous semble intéressant car ces actions stables sont de nature différente des exemples déjà connus : essentiellement les groupes abéliens et les groupes fuchsien.

En conclusion, ces résultats semblent confirmer l'idée de K. Brown et R. Geoghegan suivant laquelle G est l'analogue d'un sous-groupe arithmétique Γ

d'un groupe de Lie simple H de \mathbb{R} -rang supérieur à 2. Dans notre cas, $\text{Diff}^1(S^1)$ joue le rôle de H (Corollaire I) et l'action de G sur S^1 est analogue à l'action de Γ sur H/P où P est un sous-groupe parabolique. La théorie des groupes arithmétiques montre que les propriétés de Γ sont proches de celles de H (voir [Zim]). Par exemple, Γ est "résiduellement simple" (de même de G est simple). Il existe un rapport étroit entre la cohomologie de Γ et la cohomologie continue de H (de même la cohomologie de G est analogue à la cohomologie de Guelfand-Fuchs de S^1). De la même façon, le théorème K est semblable au théorème de Margulis affirmant que sous des conditions très générales, un morphisme de $\Gamma \subset H$ dans H se prolonge à H . Il serait intéressant de trouver un cadre général qui puisse contenir les groupes arithmétiques ainsi que des groupes tels que G . Par ailleurs, cette analogie soulève naturellement quelques problèmes : F est-il moyennable ([Br-Sq]), G possède-t-il la propriété T de Kazhdan ?

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la partie II, consacrée aux questions cohomologiques, nous démontrons successivement les théorèmes B,C,D,E. La partie III est consacrée aux propriétés qualitatives; on y démontre les théorèmes A,G,J,H,I,K,L,F,M. Bien que la partie III s'appuie sur la partie II; sa lecture pourrait être faite directement après avoir pris connaissance des notations générales en II-1.

PLAN.

II. PROPRIETES QUANTITATIVES.

II.1 : Préliminaires.

II.2 : Des espaces ayant la même homologie que les groupes F', \tilde{G}, G .

II.3 : La cohomologie des groupes F', F, \tilde{G}, G .

II.4 : L'interprétation des générateurs de la cohomologie de G .

III. PROPRIETES QUALITATIVES.

III.1 : Construction des lissages

III.2 : Corollaires de l'existence de minimaux exceptionnels.

III.3 : "Unicité" des lissages.

III.4 : Corollaires du théorème K.

Bibliographie.

II. PROPRIETES QUANTITATIVES.

II. 1. PRELIMINAIRES.

Dans cette section nous fixons des notations et nous faisons quelques rappels.

Notons $\mathbb{Q}_2 \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dyadiques et soit $GA(\mathbb{Q}_2)$ le groupe affine dyadique, c'est-à-dire le groupe des bijections affines de \mathbb{R} du type

$$x \longrightarrow 2^n x + \frac{p}{2^q} \quad \text{avec } n, p, q \text{ entiers relatifs.}$$

Si x est un réel, nous noterons T_x la translation d'amplitude x . Soit R_x la rotation de S^1 correspondant à T_x .

On désigne par $\Gamma_2(\mathbb{R})$ le pseudo-groupe des homéomorphismes locaux de \mathbb{R} qui sont $GA(\mathbb{Q}_2)$ par morceaux : $h \in \Gamma_2(\mathbb{R})$ si pour toute composante connexe I de son domaine de définition il existe une suite strictement croissante de nombres dyadiques $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sans point d'accumulation et une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $GA(\mathbb{Q}_2)$ tels que $h|_{[x_n, x_{n+1}]} = \gamma_n|_{[x_n, x_{n+1}]}$.

Le monoïde des auto-plongements de \mathbb{R} qui appartiennent à $\Gamma_2(\mathbb{R})$ est noté $M_2(\mathbb{R})$. Il est clair que le groupe \tilde{G} défini dans l'Introduction est contenu dans $M_2(\mathbb{R})$. Soit $PL_2(\mathbb{R})$ le groupe des homéomorphismes de \mathbb{R} qui appartiennent à $\Gamma_2(\mathbb{R})$.

On définit de même le pseudo-groupe $\Gamma_2(S^1)$. Le monoïde $M_2(S^1)$ qui lui correspond est alors précisément le groupe G .

Un argument dans [McD 1] montre que les classifiants $B\Gamma_2(\mathbb{R})$ et $B\Gamma_2(S^1)$ ont même type d'homotopie que nous noterons parfois $B\Gamma_2$ simplement.

Passons à quelques rappels sur l'homologie et l'homotopie des monoïdes (voir aussi [McD2] et [Seg 1],[Seg 2] , [Seg 3]).

Soit M un monoïde topologique qui agit à gauche sur un espace topologique X . On désigne par $C(M \times X)$ la catégorie topologique dont l'espace des objets est X et celui des morphismes est $M \times X$. Soit $M \backslash X$ la réalisation géométrique du nerf de $C(M \times X)$ c'est-à-dire du complexe semi simplicial associé. On note $BM = M \backslash *$ le classifiant du monoïde M . Lorsque M est un groupe discret, BM est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(M,1)$.

Dans la suite les réalisations géométriques sont prises au sens fin sauf pour les classifiants $B\Gamma$ des groupoïdes ou en relation avec eux (voir [McD2] §3 et [Seg2] pour des détails sur ceci ainsi que sur des questions connexes). En particulier, si e est l'élément neutre d'un monoïde M alors $Be \subset BM$ est le point base de BM .

Avant de rappeler deux résultats sur les classifiants des monoïdes, introduisons les notions clé de fibrations homologiques et homotopiques.

Soit B un espace connexe pointé en b_0 , $p : E \rightarrow B$ une application continue et $F \subset p^{-1}(b_0)$ un sous-espace de $p^{-1}(b_0)$.

DEFINITION 1.1. La donnée $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une fibration homologique (resp. homotopique) si l'inclusion naturelle de F dans la fibre homotopique de p en b_0 est une équivalence d'homologie entière (resp. une équivalence d'homotopie faible).

En particulier, une suite spectrale relie les homologies des espaces F, E et B .

La proposition suivante est due à G. Segal et McDuff.

Proposition 1.2 [MD-Se]. Si le monoïde M agit sur l'espace X par des équivalences d'homologie (resp. d'homotopie faible) alors

$$X \longrightarrow M \backslash X \longrightarrow M \backslash *$$

est une fibration homologique (resp. homotopique). \square

En considérant des actions à droite, nous obtenons des notions duales et 1.2. reste vrai.

En particulier, soit K un sous-monoïde du monoïde discret M et soit $M \backslash K$ le classifiant de l'action droite de K sur M .

COROLLAIRE 1.3.[Seg 3]. Si $M \backslash K$ est un espace contractile alors l'inclusion $BK \rightarrow BM$ est une équivalence d'homotopie. Ceci a lieu en particulier si la condition suivante est vérifiée :

(*) Le monoïde M est régulier à gauche et pour $m_1, m_2 \in M$, il existe $m \in M$, $k_1, k_2 \in K$ tels que $mk_1 = m_1$ et $mk_2 = m_2$.

Une deuxième conséquence très utile de 1.2. est :

COROLLAIRE 1.4. [Seg 3]. Soit $1 \rightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 1$ une suite exacte de monoïdes discrets (i.e. i injective, π est surjective et $\text{Im}(i) = \pi^{-1}(e)$) telle que :

(i) Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $s_n \in M$ tel que l'application $k \rightarrow s_n k$ de

K dans $\pi^{-1}(n)$ est bijective.

(ii) L'endomorphisme $C_n : K \rightarrow K$ défini par la relation $ks_n = s_n C_n(k)$ est une équivalence d'homologie. (Cette condition est vérifiée si pour $k_1, \dots, k_p \in K$ il existe $k \in K$ inversible tel que $C_n(k_i) = k^{-1} k_i k$ ($i = 1, \dots, p$)). Alors, $BK \rightarrow BM \rightarrow BN$ est une fibration homologique.

Dans la suite, les équivalences et le type d'homotopie sont considérés au sens faible.

II. 2. DES ESPACES AYANT MÊME HOMOLOGIE QUE LES GROUPES F', \tilde{G} ET G .

Dans cette section, nous commençons la démonstration du théorème B. Nous nous inspirons des techniques employées par D. McDuff et G. Segal dans leur démonstration du théorème de Mather-Thurston et de ses généralisations.

Nous nous proposons d'établir des équivalences homologiques entre l'espace BF' (resp. $B\tilde{G}$) et l'espace $\Omega B\Gamma_2$ (resp. $LB\Gamma_2$).

La situation présente diffère de celle traitée par D. McDuff et G. Segal dans la mesure où les groupes qui nous intéressent sont dénombrables et ne possèdent pas de topologie "continue" comme c'est le cas pour $\text{Diff}(S^1)$ par exemple. Pour cette raison, la démonstration de [McD1] ne s'adapte pas automatiquement et nous allons donc nous attacher à donner une preuve qui explicite les points où la structure de F et G est importante.

Nous avons cherché également à rendre cette démonstration accessible au lecteur qui n'est pas familier avec [Seg3] et [McD1]. Par ailleurs, le fait que nous nous intéressons à des groupes qui agissent sur le cercle ou sur la droite simplifie sensiblement les démonstrations de sorte que cette section pourrait aussi être considérée comme une introduction à [McD1].

Nous remercions D. McDuff pour nous avoir aidé spontanément dans la présentation de cette section.

Nous commençons avec une proposition qui exprime une connexité faible dans le pseudo-groupe $\Gamma_2(\mathbb{R})$. Elle permet de lui appliquer certains raisonnements qui dans [McD1] et [Seg3] sont faits pour le pseudogroupe C^∞ .

PROPOSITION 2.1. Soient $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 < \beta_2$ quatre nombres dyadiques. Il existe

$\varphi \in PL_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$, $i = 1, 2$.

DEMONSTRATION. Quitte à composer avec des translations dyadiques, nous pouvons supposer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Il suffira alors de construire pour un dyadique $\gamma > 0$, un homéomorphisme $\varphi_\gamma \in PL_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_\gamma(0) = 0$ et $\varphi_\gamma(1) = \gamma$. En effet, le composé $\varphi_{\beta_2} \circ \varphi_{\alpha_2}^{-1}$ enverra alors α_2 sur β_2 . De plus, on peut supposer que $\gamma < 1$, en utilisant éventuellement pour ceci une homothétie.

$$\text{Ecrivons alors } \gamma = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \quad i_0 < \dots < i_n .$$

Posons $\varphi_\gamma(x) = x$ pour $x \leq 0$,

$$\varphi_\gamma(x) = x-1+\gamma \quad \text{pour } x \geq 1$$

et définissons φ_γ sur $[0, 1]$ en imposant que sa pente soit égale à $\frac{1}{2^{i_k - k - 1}}$ sur les intervalles $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$, $0 \leq k \leq n-1$ et à $\frac{1}{2^{i_n - n}}$ sur l'intervalle $[1 - \frac{1}{2^n}, 1]$. \square

Nous allons maintenant décrire une équivalence d'homologie entre les espaces BF' et $\Omega B\Gamma_2$. Nous identifions librement F' au sous-groupe des éléments de $PL_2(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans $]0, 1[$.

Notons $I_0 =]-\infty, 0]$ et $I_1 = [1, \infty[$ et soit $M_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0)$ le sous-monoïde de $M_2(\mathbb{R})$ formé des plongements φ tels que $\varphi = \text{id}$ au voisinage de I_0 et $\varphi(I_1) \subset I_1$. Soit $\hat{M}(I_1)$ le monoïde des germes au voisinage de I_1 des plongements de $\Gamma_2(\mathbb{R})$ qui envoient I_1 dans I_1 . Ainsi si $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \hat{M}(I_1)$ alors $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$ s'il existe un ouvert $V \supset I_1$ tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ pour $x \in V$.

Un morphisme de monoïdes

$$M_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0) \xrightarrow{p} \widehat{M}(I_1)$$

est défini par restriction. Il est clair que son noyau est exactement F' .

PROPOSITION 2.2. La suite des monoïdes discrets $1 \rightarrow F' \rightarrow M_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0) \xrightarrow{p} \widehat{M}(I_1) \rightarrow 1$ est exacte et induit une fibration homologique des espaces classifiants.

DEMONSTRATION. Soit $\hat{\psi} \in \widehat{M}(I_1)$. On choisit deux dyadiques $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ tels que $\hat{\psi}$ est défini au voisinage de $] \alpha_2, \infty[$. D'après 2.1, il existe $\varphi \in PL_2(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(\alpha_1) = \alpha_1$, et $\varphi(\alpha_2) = \hat{\psi}(\alpha_2)$. L'élément de $M_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0)$ qui est égal à id. (resp. $\varphi, \hat{\psi}$) sur $]-\infty, \alpha_1]$ (resp. $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_2, +\infty[$) se projette sur $\hat{\psi}$ par l'application p . La suite de monoïdes est donc exacte.

La deuxième affirmation est une application de 1.4. (voir [Seg3]). Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in M_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0)$. Si $p(\varphi_1) = p(\varphi_2)$ alors $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ est bien définie ce qui assure la condition 1.4.i.

Si $s_1, \dots, s_p \in F'$, $\varphi \in M_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0)$, on choisit à l'aide de 2.1 un élément $\psi \in F'$ qui coïncide avec φ sur $\varphi^{-1}(\bigcup_{i=1}^p \text{supp } s_i)$. Ainsi $\varphi^{-1} s_i \varphi = \psi^{-1} s_i \psi$ et la condition 1.4.ii est vérifiée. \square

La proposition 2.2. est utile grâce au :

LEMME 2.3. L'espace $BM_{I_1}(\mathbb{R}, \text{rel } I_0)$ est contractile.

DEMONSTRATION (voir [Seg 3]). Rappelons qu'une catégorie est filtrante si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Si f et g sont deux morphismes entre les objets y et z , il existe un objet x et un morphisme $h : x \rightarrow y$ tels que $f \circ h = g \circ h$.

2. Si x et y sont deux objets, il existe un objet z et deux morphismes $f : z \rightarrow x$ et $g : z \rightarrow x$.

Le classifiant d'une catégorie filtrante est contractile (Voir [Quil]).

Le monoïde $M(\mathbf{R}, \text{rel } I_0)$ des éléments de $M_2(\mathbf{R})$ qui fixent un voisinage de I_0 a un classifiant contractile. En effet, la catégorie $C(M(\mathbf{R}, \text{rel } I_0) \backslash \ast)$ est filtrante.

Il résulte de 1.3 (*) que l'inclusion $M_{I_1}(\mathbf{R}, \text{rel } I_0) \subset M(\mathbf{R}, \text{rel } I_0)$ est une équivalence d'homotopie. Ainsi, $BM_{I_1}(\mathbf{R}, \text{rel } I_0)$ est contractile. \square

Rappelons qu'un résultat fondamental de Segal ([Seg 3]) assure que le classifiant du monoïde discret des auto-plongements C^∞ de \mathbf{R} a même type d'homotopie que le classifiant de Haefliger $B\Gamma_\infty^1$. Ce résultat et sa démonstration restent vrais pour le monoïde $M_2(\mathbf{R})$ et le pseudo-groupe $\Gamma_2(\mathbf{R})$.

On arrive alors à la description du type d'homologie de F' .

THEOREME 2.4. Il existe une équivalence d'homologie entre les espaces BF' et $\Omega B\Gamma_2$.

DEMONSTRATION. Il est assez simple de montrer que l'espace $\widehat{BM}(I_1)$ a même type d'homotopie que le classifiant des auto-plongements de $]1, \infty[$, donc que $BM_2(\mathbf{R})$.

Il résulte de 2.2, 2.3 et du résultat de Segal cité plus haut qu'il existe une fibration homologique d'espace total contractile, d'espace de base équivalent à $B\Gamma_2(\mathbf{R})$ et dont la fibre est équivalente à BF' . Dans cette situation, il est classique que BF' a même type d'homologie que $\Omega B\Gamma_2$. \square

Dans la dernière partie de cette section nous construisons une équivalence d'homologie entre l'espace $B\tilde{G}$ et l'espace des lacets libres $LB\Gamma_2(\mathbb{R})$. Pour un modèle convenable, cette équivalence sera munie d'une propriété d'équivariance qui permettra d'en déduire une équivalence d'homologie $BG \rightarrow \mathcal{L}B\Gamma_2$.

Dans un premier temps, nous relierons l'homologie des groupes F' et \tilde{G} . Il n'est pas possible de plonger F' dans \tilde{G} comme sous-groupe normal. Cependant, il existe une fibration homologique dont la fibre et l'espace total ont les homologies des groupes F' et \tilde{G} .

Soit \tilde{I} l'intervalle $] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} [$ et $M_{\tilde{I}}$ le sous-monoïde de \tilde{G} formé des éléments qui préservent \tilde{I} . La proposition qui suit joue un rôle essentiel. C'est une version de 2.1 de [McD2]. Sa démonstration est repoussée à la fin de cette section.

PROPOSITION 2.5. L'inclusion $M_{\tilde{I}} \subset \tilde{G}$ induit une équivalence d'homotopie entre les classifiants.

Soit I l'image de l'intervalle \tilde{I} par la projection $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Notons $M(S^1, \text{rel } I)$, M_I , (resp $\hat{M}(I)$) les sous-monoïdes de G formé des éléments qui sont égaux à id au voisinage de \bar{I} , qui préservent I (resp. le monoïde des germes en \bar{I} des plongements $(V, I) \rightarrow (S^1, I)$ où V est un voisinage de \bar{I}).

PROPOSITION 2.6. Il existe une suite exacte de monoïdes

$$1 \rightarrow M(S^1, \text{rel } I) \rightarrow M_I \rightarrow \hat{M}(I) \rightarrow 1 \quad \text{qui induit une fibration homologique.}$$

DEMONSTRATION. L'exactitude de la suite se démontre comme dans 2.2 à l'aide de 2.1.

De même la propriété homologique est une application de 1.4.

Notons $H(S^1, \text{rel } I)$, H_I , $\hat{H}(I)$ les monoïdes de tous les homéomorphismes de S^1 définis de façon similaire à $M(S^1, \text{rel } I)$, M_I , $\hat{M}(I)$ et munis de leurs topologies naturelles.

COROLLAIRE 2.7. Il existe une fibration homologique :

$$M(S^1, \text{rel } I) \cong H(S^1, \text{rel } I) \rightarrow M_I \rtimes H_I \rightarrow \hat{M}(I) \rtimes \hat{H}(I)$$

DEMONSTRATION. Il suffit de comparer cette suite d'espaces à celle de la proposition précédente compte tenu de 1.2 et de la contractibilité des monoïdes $H(S^1, \text{rel } I)$, H_I et $\hat{H}(I)$. \square

Soit $j : S^1 \rightarrow B\Gamma_2(S^1)$ l'application naturelle qui envoie $x \in S^1$ sur l'objet $\{x\}$ de la catégorie associée à $\Gamma_2(S^1)$. Désignons par $L^{\text{rel } I} B\Gamma_2(S^1)$ l'espace des applications $S^1 \rightarrow B\Gamma_2(S^1)$ qui coïncident avec j_0 sur un voisinage de \bar{I} .

On a une fibration homotopique

$$L^{\text{rel } I} B\Gamma_2(S^1) \rightarrow LB\Gamma_2(S^1) \rightarrow \text{Map}(I, B\Gamma_2(S^1))$$

où les flèches sont l'inclusion et la restriction. Puisque I est contractile, il s'agit essentiellement de la fibration :

$$\Omega B\Gamma_2 \rightarrow LB\Gamma_2 \rightarrow B\Gamma_2 \quad (\text{voir [McD1]}).$$

Nous allons la comparer à la fibration de 2.7. Soit H le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation.

PROPOSITION 2.8. Il existe une application $F : (G \rtimes H) \times S^1 \rightarrow B\Gamma_2(S^1)$ qui induit des applications f_i , $i = 1, 2, 3$ et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 M(S^1, \text{rel } I) \rtimes H(S^1, \text{rel } I) & \longrightarrow & M_I \rtimes H_I & \longrightarrow & \hat{M}(I) \rtimes \hat{H}(I) \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 L^{\text{rel } I}(B\Gamma_2) & \longrightarrow & LB\Gamma_2 & \longrightarrow & \text{Map}(I, B\Gamma_2)
 \end{array}$$

DEMONSTRATION. Le groupe G agit sur $H \times S^1$ par $g.(h, \theta) = (gh, \theta)$. Les espaces $(G \rtimes H) \times S^1$ et $G \rtimes (H \times S^1)$ sont homéomorphes.

Rappelons qu'au pseudo-groupe $\Gamma_2(S^1)$, on associe la catégorie topologique $\mathcal{C}(\Gamma_2(S^1))$ dont les objets sont les points et les morphismes sont les germes d'homéomorphismes locaux de $\Gamma_2(S^1)$. Il suffira de définir un foncteur continu $\bar{F} : \mathcal{C}(G \rtimes H \times S^1) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma_2(S^1))$. Pour un objet $(h, \theta) \in H \times S^1$ on pose $\bar{F}(h, \theta) = h(\theta)$. Si $g : (h, \theta) \rightarrow (h', \theta)$ est un morphisme, on définit $\bar{F}(g)$ comme étant le germe de g en $h(\theta)$. On vérifie alors que \bar{F} induit naturellement les applications f_1, f_2 et f_3 qui font commuter le diagramme de 2.8. \square

REMARQUE 2.9. Considérons l'application $f : G \rtimes H \rightarrow LB\Gamma_2(S^1)$ induite par \bar{F} . Le groupe S^1 agit naturellement à droite sur $G \rtimes H$ et sur $LB\Gamma_2(S^1)$. Pour $\lambda \in LB\Gamma_2(S^1)$, $\theta \in S^1$ on pose $\lambda \cdot \theta = \lambda \circ R_\theta$. Si $h \in H$ on pose $h \cdot \theta = h \circ R_\theta$ et si g est un morphisme de h à h' , on pose $g \cdot \theta = g \circ R_\theta$: on a en effet, $g \circ h \circ R_\theta = h' \circ R_\theta$.

L'application f est équivariante par rapport à l'action de S^1 . La

vérification est immédiate à partir de la définition du foncteur \bar{F} .

On peut maintenant démontrer le

THEOREME 2.10. L'application f induit une équivalence d'homologie $G \cong H \longrightarrow \text{LB}\Gamma_2(S^1)$. Par ailleurs, les espaces $B\tilde{G}$ et $G \cong H$ ont même type d'homotopie.

DEMONSTRATION. Montrons d'abord que l'application $f_2 : M_I \cong H_I \rightarrow \text{LB}\Gamma_2$ est une équivalence d'homologie. En effet, $\pi_1(B\Gamma_2) = 0$ par un argument direct ou bien en utilisant le fait (voir II 3) que $B\Gamma_2$ est une sphère S^3 . On peut alors appliquer le théorème classique de comparaison des suites spectrales, pourvu que f_1 et f_3 soient des équivalences d'homologie. Le fait que f_3 est une équivalence d'homotopie est essentiellement le résultat de Segal $\text{BM}_2(\mathbb{R}) \simeq B\Gamma_2(\mathbb{R})$.

Nous avons vu dans 2.4 que BF' et $\Omega B\Gamma_2$ ont même type d'homologie. La preuve donnée s'adapte pour montrer que f_1 est une équivalence d'homologie. Notons pour ceci J_0, J_1 et J l'image sur S^1 des intervalles $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}]$ et $[\frac{1}{8}, \frac{7}{8}]$. La preuve de 2.2 donne une fibration homologique.

$$\text{BM}(J, \text{rel } J_0 \cup J_1) \rightarrow \hat{\text{BM}}_{J_1}(J, \text{rel } J_0) \rightarrow \hat{\text{BM}}(J_1) .$$

L'application f permet de la comparer à la fibration suivante comme en 2.8.

$$\text{Map}_{\text{rel } J_0 \cup J_1}(J, B\Gamma_2) \rightarrow \text{Map}_{\text{rel } J_0}(J, B\Gamma_2) \rightarrow \text{Map}(J_1, B\Gamma_2) .$$

(Les notations sont similaires à celles déjà utilisées). Le même argument basé sur le théorème de comparaison des suites spectrales donne alors que f_1 est une équivalence d'homologie.

Nous avons donc montré que $f_2 : M_I \cong H_I \rightarrow LBF_2$ est une équivalence d'homologie. Pour terminer, montrons que l'inclusion naturelle $M_I \cong H_I \rightarrow G \cong H$ induit une équivalence d'homotopie. D'après 2.5, l'inclusion $M_I \subset \tilde{G}$ et une équivalence d'homotopie. Par ailleurs, les monoïdes M_I et M_I sont évidemment isomorphes. Si \tilde{H} désigne le groupe (contractile) des homéomorphismes de \mathbf{R} qui commutent avec la translation T_1 , il suffit de montrer qu'il existe une équivalence d'homotopie $\tilde{G} \cong \tilde{H} \rightarrow G \cong H$. Le lecteur se persuadera lui-même de ceci en considérant le diagramme naturel :

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \longleftarrow & Z \cong \tilde{H} & \longrightarrow & Z \cong * \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G \cong H & \longleftarrow & \tilde{G} \cong \tilde{H} & \longrightarrow & \tilde{G} \cong * \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G \cong * & \equiv & G \cong * & \equiv & G \cong * \quad \square
 \end{array}$$

COROLLAIRE 2.11. L'espace classifiant BG et l'espace $\mathcal{L}BF_2$ ont même type d'homologie.

DEMONSTRATION. Nous avons déjà remarqué que l'application $f : G \cong H \rightarrow LBF_2(S^1)$ est équivariante par rapport à l'action naturelle de S^1 . Elle induit alors un morphisme de fibrations :

$$\begin{array}{ccc}
 G \cong H & \longrightarrow & B\Gamma_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (G \cong H) \cong S^1 & \longrightarrow & LB\Gamma_2 // S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * // S^1 & \longrightarrow & * // S^1
 \end{array}$$

D'après le théorème précédent, et en comparant les suites spectrales des deux

fibrations, il résulte que $(G \rtimes H) \rtimes S^1 \rightarrow \text{LB}\Gamma_2 // S^1$ est une équivalence homologique. On conclut en remarquant que $(G \rtimes H) \rtimes S^1 \simeq G \rtimes (H \rtimes S^1) \simeq G \rtimes *$ et que $\text{LB}\Gamma_2 // S^1$ est un modèle pour l'espace $\mathcal{L}\text{B}\Gamma_2$ comme il est bien connu. \square

Nous terminons ce paragraphe avec la démonstration de la proposition 2.5, c'est-à-dire du fait que l'inclusion $\text{BM}_{\mathbb{I}} \rightarrow \text{BG}$ est une équivalence d'homotopie. Pour ceci, nous montrons que l'espace $\text{M}_{\mathbb{I}} \rtimes \tilde{\mathcal{G}}$ est contractile. Malheureusement, la condition $*$ de 1.3 n'est pas vérifiée, ce qui complique la démonstration.

DEMONSTRATION DE 2.5. Soit $\text{Top } \mathbf{R}$ la catégorie des ouverts de \mathbf{R} avec les inclusions comme morphismes et soit $F: \mathcal{C}(\text{M}_{\mathbb{I}} \rtimes \tilde{\mathcal{G}}) \rightarrow \text{Top } \mathbf{R}$ le foncteur défini ainsi : pour $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ on pose $F(g) = g^{-1}(\tilde{\mathbb{I}})$; si $m: g \rightarrow mg$ est un morphisme, alors $F(m)$ est l'inclusion $g^{-1}(\tilde{\mathbb{I}}) \subset g^{-1}m^{-1}(\tilde{\mathbb{I}})$.

Soit $F \rtimes \mathcal{C}$ la réalisation de la catégorie dont les objets sont les couples (g, x) où $x \in F(g) = g^{-1}(\tilde{\mathbb{I}})$ et l'ensemble des morphismes de (g, x) à (g', x') est égal à $\text{Hom}(g, g')$ si $x = x'$ et à l'ensemble vide sinon. Une application naturelle $F \rtimes \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}$ est définie en envoyant (g, x) sur x .

D'après [Seg 3] (A.5) il résulte que cette application est une équivalence d'homotopie si la condition suivante est vérifiée :

Pour $x \in \mathbf{R}$, la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}(\text{M}_{\mathbb{I}} \rtimes \tilde{\mathcal{G}})$ dont les objets sont les éléments $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ tels que $x \in g^{-1}(\tilde{\mathbb{I}}) = F(g)$ a un classifiant contractile. Ceci se produit effectivement puisque \mathcal{C}_x est une catégorie filtrante. Il suffit pour ceci de produire pour $g, h \in \text{Ob}(\mathcal{C}_x)$ un objet k et des morphismes de k à g et h . Pour ceci, choisissons $k \in \tilde{\mathcal{G}}$ tel que $x \in k^{-1}(\tilde{\mathbb{I}}) \subset g^{-1}(\tilde{\mathbb{I}}) \cap h^{-1}(\tilde{\mathbb{I}})$ à l'aide de la proposition 2.1. Alors, $k \in \text{Ob}\mathcal{C}_x$ et $gk^{-1} \in \text{M}_{\mathbb{I}}$, $hk^{-1} \in \text{M}_{\mathbb{I}}$ sont les morphismes cherchés. Finalement, l'espace $F \rtimes \mathcal{C}$ est contractile.

Pour finir la démonstration considérons l'action diagonale de $M_{\tilde{I}}$ sur $\tilde{I} \times \tilde{G}$. La projection $I \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ est équivariante et induit une équivalence d'homotopie $M_{\tilde{I}} \backslash \tilde{I} \times \tilde{G} \rightarrow M_{\tilde{I}} \backslash \tilde{G}$. Par ailleurs les espaces $F \backslash C$ et $M_{\tilde{I}} \backslash \tilde{I} \times \tilde{G}$ sont les réalisations de catégories isomorphes. Ainsi $M_{\tilde{I}} \backslash \tilde{G}$ est un espace contractile. \square

II. 3. LA COHOMOLOGIE DES GROUPES F' , F , \tilde{G} , G .

Dans cette section, nous démontrons le théorème B et C . Nous présentons d'abord un théorème de P. Greenberg sous une forme qui nous est convenable. Un corollaire de ce théorème sera le fait que le classifiant $B\Gamma_2$ a le type d'homotopie de la sphère S^3 .

Soit K un groupe d'homéomorphismes de \mathbf{R} qui préservent l'orientation et agit analytiquement sur \mathbf{R} c'est-à-dire tel que pour tout ouvert U , si $g|_U = \text{id}|_U$ alors $g = \text{id}$.

Soit Γ le pseudo groupe des restrictions des éléments de K à des ouverts de \mathbf{R} . Soit Γ^P le pseudo-groupe des homéomorphismes locaux qui sont " Γ par morceaux". Plus précisément $h \in \Gamma^P$ s'il existe un ensemble discret de "singularités" appartenant à l'orbite $K(0)$ en dehors duquel h est un élément de Γ .

Désignons par K_0 le stabilisateur de K en 0 et par Γ_0^P le groupe des germes en 0 des éléments de Γ^P qui fixent 0 . Le lemme suivant est clair.

LEMME 3.1. Γ_0^P est isomorphe à $K_0 \times K_0$. \square

Soient p_d et p_α les projections naturelles de Γ_0^P sur K_0 . Désignons par R le "push out" homotopique du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 B\Gamma_0^P & \xrightarrow{Bp_g} & BK_0 \\
 Bp_d \downarrow & & \downarrow \\
 BK_0 & \dashrightarrow & R
 \end{array}$$

c'est-à-dire le double "mapping cylinder" qui lui est associé.

Considérons les applications naturelles $BK_0 \rightarrow B\Gamma_0^P$ et $BK_0 \rightarrow BK$. A l'aide du diagramme précédent, elles donnent lieu au diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & BK_0 & \longrightarrow R \\
 ** & \downarrow & \\
 & BK &
 \end{array}$$

THEOREME 3.2. (P. Greenberg) [Gr-2]. L'espace classifiant $B\Gamma^P$ a le même type d'homotopie faible que le "push-out" homotopique du diagramme **.

Supposons à partir de maintenant que K et le groupe affine dyadique $GA(\mathbb{Q}_2)$.

LEMME 3.3. L'espace R , "push out" du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & B\Gamma_0^P & \xrightarrow{Bp_g} BK_0 \\
 * & \downarrow Bp_d & \\
 & BK_0 &
 \end{array}$$

est une sphère S^3

DEMONSTRATION. Il est clair que $K_0 \simeq \mathbb{Z}$, $\Gamma_0^P \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il est classique que le "double mapping cylinder" du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\
 \downarrow & & \\
 S^1 & &
 \end{array}$$

est une sphère S^3 . □

Pour déterminer le type d'homotopie du classifiant $B\Gamma_2$ il nous reste, d'après le théorème 3.2 et le lemme précédent à déterminer le "push-out homotopique" du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 BK_0 \simeq S^1 & \xrightarrow{\quad} & R \simeq S^3 \\
 \downarrow & & \\
 BK & &
 \end{array}$$

**

COROLLAIRE 2.4. L'espace $B\Gamma_2$ a le type d'homotopie de S^3

DEMONSTRATION. Appliquons au "double mapping-cylinder" les théorèmes de van-Kampen et de Mayer-Vietoris.

Montrons d'abord que $\pi_1(B\Gamma_2) = 0$. Il suffit pour cela de prouver que le sous-groupe normal engendré par K_0 est tout le groupe dyadique $K = GA(\mathbb{Q}_2)$. Soit $N(K_0)$ ce sous-groupe. Il est clair que la conjugaison intérieure de l'homothétie $x \rightarrow 2x$ par la translation $x + \frac{1}{2^n}$ $n \geq 0$ est dans $N(K_0)$. C'est dire que l'application $x \rightarrow 2(x + \frac{1}{2^n}) - \frac{1}{2^n} = 2x + \frac{1}{2^n}$ est dans $N(K_0)$, d'où $x \rightarrow x + \frac{1}{2^n}$ est dans $N(K_0)$. Donc $N(K_0) = K$.

Montrons maintenant que l'inclusion $K_0 \rightarrow K$ est une équivalence d'homologie entière. La suite de Wang de l'extension :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathbb{Q}_2 & \rightarrow & K & \rightarrow & \mathbb{Z} \rightarrow 0 & \text{ donne :} \\
 & & & & & & & \\
 \dots & \rightarrow & H_k(\mathbb{Q}_2) & \xrightarrow{A_* - \text{id}_*} & H_k(\mathbb{Q}_2) & \rightarrow & H_k(K) \rightarrow H_{k-1}(\mathbb{Q}_2) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

où $A : \mathbb{Q}_2 \rightarrow \mathbb{Q}_2$ est la multiplication par 2.

Si $k \geq 2$ le groupe $H_k(\mathbb{Q}_2)$ est nul car tout sous-groupe de type fini de \mathbb{Q}_2 est cyclique. On en déduit que $H_k(K) = 0$ pour $k \geq 3$.

Puisque $A \cdot \text{id} = \text{id}$, la suite exacte

$$0 \rightarrow H_2(K) \rightarrow H_1(\mathbb{Q}_2) \longrightarrow H_1(\mathbb{Q}_2) \rightarrow H_1(K) \rightarrow H_0(\mathbb{Q}_2) \rightarrow H_0(K)$$

donne $H_2(K) = 0$ et $H_1(K) \simeq \mathbb{Z}$. Il en résulte que l'inclusion $BK_0 \rightarrow BK$ est une équivalence d'homologie.

Finalement, l'application $S^3 \simeq \mathbb{R} \rightarrow B\Gamma_2$ déduite du diagramme ****'** est une équivalence d'homotopie; ceci résulte de la suite de Mayer-Vietoris de ****'**, compte tenu de la 1-connexité de $B\Gamma_2$ et de l'équivalence d'homologie $BK_0 \rightarrow BK$. \square

REMARQUE 3.5. Il résulte de 2.4. et de [Gr1] qu'une équivalence homotopique $S^3 \rightarrow B\Gamma_2$ est obtenue en classifiant le "feuilletage de Reeb affine" sur S^3 .

Nous arrivons à la :

DEMONSTRATION DU THEOREME B. Elle résulte de 2.4, 2.10, 2.11 et 3.4. \square

Dans la seconde partie de la section nous démontrons le théorème C .

Nous précisons d'abord la cohomologie des groupes F' et G . D'après le théorème B , le premier a l'homologie de l'espace des lacets ΩS^3 . Le deuxième a même homologie que l'espace des lacets libres LS^3 . Remarquons que LS^3 s'identifie à $\Omega S^3 \times S^3$ à l'aide de la structure multiplicative de S^3 . Puisque la cohomologie de l'espace ΩS^3 est une algèbre de puissances divisées ([Spa]) engendrée par un générateur de degré 2, on en déduit la :

PROPOSITION 3.6. La cohomologie $H^*(F';\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'algèbre des puissances divisées $\Gamma[\alpha]$ avec $|\alpha| = 2$.

La cohomologie $H^*(\tilde{G};\mathbb{Z})$ est isomorphe au produit tensoriel $\Gamma[\alpha] \otimes \Lambda(\beta)$, $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$, d'une algèbre de puissances divisées et d'une algèbre extérieure. \square

Nous explicitons maintenant la cohomologie entière de F .

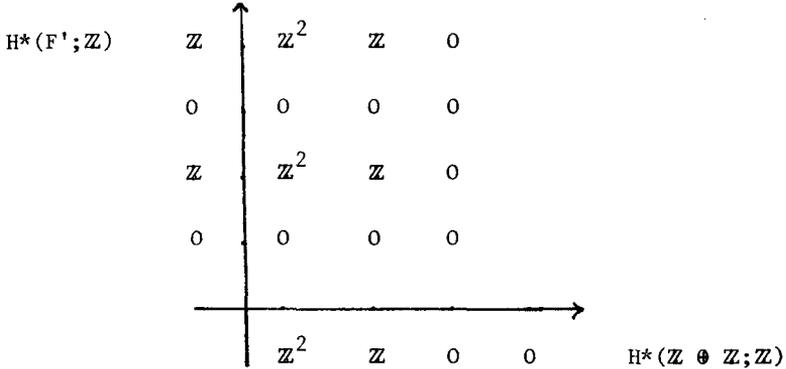
PROPOSITION 3.7. Pour tout $n \geq 1$, on a $H^n(F;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

DEMONSTRATION. Considérons la suite exacte :

$$1 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0 .$$

Remarquons d'abord que $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ opère trivialement sur $H^*(F';\mathbb{Z})$. Ceci résulte du fait qu'il existe des éléments de F dont la dérivée en 0 (resp. 1) est égale à 2 et dont le support est arbitrairement proche de 0 (resp. 1) .

Le terme E_2 de la suite spectrale de l'extension considérée est :



La proposition en résulte car la suite spectrale dégénère au terme E_2 . □

COROLLAIRE 3.8. Le groupe $H^1(F; \mathbb{Z})$ est engendré par les préimages u_1, u_2 des générateurs de $H^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$. Le groupe $H^2(F; \mathbb{Z})$ est engendré par la préimage $u_1 u_2$ du générateur de $H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ et par un élément qui est la restriction à F du générateur α de $H^2(\tilde{G}; \mathbb{Z})$.

DEMONSTRATION. La première affirmation est une conséquence immédiate de la suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F'; \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad .$$

Le groupe F se plonge naturellement dans \tilde{G} . L'inclusion $F' \rightarrow \tilde{G}$ correspond en homologie à l'application $H_*(\Omega S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(LS^3; \mathbb{Z})$. C'est donc un isomorphisme en dimension paire. Il en résulte que la restriction du générateur α de $H^2(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ et l'élément $u_1 u_2$ engendrent $H^2(F; \mathbb{Z})$. □

REMARQUE 3.9. Dans la suite, on notera α le générateur de $H^2(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ et ses restrictions à F et F' . Remarquons que $\frac{\alpha^n}{n!}$ existe dans $H^*(F; \mathbb{Z})$ également.

La proposition qui suit donne la structure multiplicative de $H^*(F; \mathbb{Z})$.

PROPOSITION 3.10. L'anneau de cohomologie entière $H^*(F; \mathbb{Z})$ est isomorphe au produit tensoriel $\Lambda(u_1, u_2) \otimes \Gamma[\alpha]$ où $|u_1| = |u_2| = 1$ et $|\alpha| = 2$.

DEMONSTRATION. Nous devons montrer que pour $k \geq 0$,

$$H^{2k+1}(F; \mathbb{Z}) \text{ est engendré par } u_1 \frac{\alpha^k}{k!} \text{ et } u_2 \frac{\alpha^k}{k!}$$

$$H^{2k+2}(F; \mathbb{Z}) \text{ est engendré par } u_1 u_2 \frac{\alpha^k}{k!} \text{ et } \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!} .$$

La suite spectrale donne un isomorphisme :

$$H^{2k+1}(F; \mathbb{Z}) \simeq E_{\infty}^{1, 2k} \simeq E_{\infty}^{1, 0} \otimes E_{\infty}^{0, 2k} \simeq H^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \otimes H^{2k}(F'; \mathbb{Z}) .$$

Il en résulte facilement que $u_1 \frac{\alpha^k}{k!}$ et $u_2 \frac{\alpha^k}{k!}$ engendrent $H^{2k+1}(F; \mathbb{Z})$.

Considérons maintenant la suite exacte :

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{2, 2k} \rightarrow H^{2k+2}(F; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{\infty}^{0, 2k+2} \rightarrow 0 .$$

L'image de $\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}$ dans $E_{\infty}^{0, 2k+2} \simeq H^{2k+2}(F'; \mathbb{Z})$ engendre ce groupe. Pour terminer, il suffit de remarquer que l'élément $u_1 u_2 \frac{\alpha^k}{k!}$ est un générateur de $E_{\infty}^{2, 2k} \simeq E_{\infty}^{2, 0} \otimes E_{\infty}^{0, 2k}$. \square

Nous nous intéressons enfin à la cohomologie de G . Nous savons déjà, d'après le théorème B, que l'espace BG a la même homologie que $\mathcal{L}S^3$. Soit χ la classe d'Euler du fibré $S^1 \rightarrow LS^3 \times ES^1 \rightarrow \mathcal{L}S^3$.

PROPOSITION 3.11. Le groupe $H^1(G; \mathbb{Z})$ est nul. Le groupe $H^2(G; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

DEMONSTRATION. Puisque $LS^3 = \Omega S^3 \times S^3$ est simplement connexe, $\mathcal{L}S^3$ l'est également et donc $H^1(G; \mathbb{Z}) = 0$. De plus la suite de Gysin :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\nu \chi} H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(LS^3; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

montre que $H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre à deux générateurs. \square

Considérons le générateur β du groupe cyclique $H^3(LS^3; \mathbb{Z})$.

PROPOSITION 3.12. $H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z})$ est engendré par χ et par l'image $\alpha = \int \beta$ où $\int : H^3(LS^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z})$ est l'intégration sur la fibre.

DEMONSTRATION. Il résulte de la suite de Gysin que χ et α engendrent $H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z})$ pourvu que le composé $\mathbb{Z} \simeq H^3(LS^3; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\int} H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z}) \xrightarrow{P_*} H^2(LS^3; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ soit un isomorphisme.

Soit $\pi : T_1 S^3 \rightarrow S^3$ le fibré tangent unitaire à S^3 . Une application $f : T_1 S^3 \rightarrow LS^3$ est définie en associant à un élément $(x, v) \in T_1 S^3$ la géodésique issue de x dans la direction v . Il est facile de voir que f est équivariante par rapport aux actions de S^1 sur $T_1 S^3$ et LS^3 et induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \simeq H_2(T_1 S^3; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{P_*} & H_2(T_1 S^3/S^1; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\int} & H_3(T_1 S^3; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \\ \downarrow f_2 & & \downarrow & & \downarrow f_3 \\ \mathbb{Z} \simeq H_2(LS^3; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{P_*} & H_2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\int} & H_3(LS^3; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \end{array}$$

Remarquons que $T_1 S^3$ est homéomorphe à $S^2 \times S^3$.

Nous allons montrer que f_2 et le composé $H_2(T_1 S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(T_1 S^3/S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(T_1 S^3; \mathbb{Z})$ sont des multiplications par ± 2 et que f_3 est un isomorphisme.

Ceci implique que le composé $H_2(LS^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(LS^3; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et démontre la proposition.

Considérons une fibre $S = \pi^{-1}(x_0)$ comme générateur de $H_2(T_1S^3; \mathbb{Z})$. Il est clair que $f|_S : S \rightarrow LS^3$ envoie un élément $(x_0, v) \in S$ sur la géodésique issue en x_0 dans la direction v . Il résulte de [Spa], théorème 8.5.9 que $f(S)$ représente le double d'un générateur de $H_2(LS^3; \mathbb{Z}) = H_2(\Omega S^3; \mathbb{Z})$. L'application f_2 est donc bien la multiplication par ± 2 .

Le fait que f_3 soit un isomorphisme résulte du triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H_3(T_1S^3; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad} & H_3(LS^3; \mathbb{Z}) \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 & H_3(S^3; \mathbb{Z}) &
 \end{array}$$

dans lequel les projections sur S^3 induisent des isomorphismes.

Finalement, justifions que le composé

$H_2(T_1S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(T_1S^3/S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(T_1S^3; \mathbb{Z})$ est la multiplication par ± 2 . L'image de la fibre $S = \pi^{-1}(x_0)$ par ce composé est égale au S^1 -saturé de S . En utilisant l'involution $\sigma : T_1S^3 \rightarrow T_1S^3$ qui est l'application antipodale dans chaque fibre, on vérifie que le nombre d'intersection de S avec son S^1 -saturé est égal à ± 2 . Donc, le composé $H_2(T_1S^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(T_1S^3/S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(T_1S^3; \mathbb{Z})$ est la multiplication par ± 2 . Ceci achève la démonstration de 3.12. \square

Considérons maintenant la classe $\chi \in H^2(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Q})$.

PROPOSITION 3.13. Pour $k \geq 1$, les puissances $\chi^k \in H^{2k}(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Q})$ sont non nulles.

DEMONSTRATION. Il s'agit d'un argument classique. L'action de S^1 sur LS^3 a des points fixes, i.e. les lacets constants. Soit $\{\omega\}$ un tel lacet. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} BS^1 \cong \{\omega\} \times ES^1 & \longrightarrow & \mathcal{L}S^3 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ BS^1 & \xrightarrow{\text{id}} & BS^1 \end{array}$$

produit une section de l'application $\mathcal{L}S^3 \rightarrow BS^1$ et le résultat suit de la structure multiplicative de $\mathbb{C}P^\infty$. \square

Le théorème suivant est en fait connu. Nous en donnons une démonstration élémentaire.

THEOREME 3.14. Les classes α et χ engendrent librement la cohomologie $H^*(\mathcal{L}S^3; \mathbb{Q})$ modulo la relation $\alpha \cdot \chi = 0$.

DEMONSTRATION. Il est clair, d'après la suite de Gysin, que $\chi \cup \alpha = \chi \cup \beta = 0$. Montrons par récurrence que

$$H^{2n-2}(\mathcal{L}S^3) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$H^{2n}(\mathcal{L}S^3) \text{ est engendré par } \chi^n \text{ et } \alpha^n \text{ pour } n \geq 0.$$

(tous les coefficients dans \mathbb{Q}). Supposons que ceci soit vrai pour $n \leq p$. La suite de Gysin donne :

$$H^{2p-1}(\mathcal{L}S^3) \longrightarrow H^{2p+1}(\mathcal{L}S^3) \longrightarrow H^{2p+1}(LS^3) \xrightarrow{f} H^{2p}(\mathcal{L}S^3).$$

Comme $H^{2p-1}(\mathcal{L}S^3) = 0$, il suffit de montrer que \mathfrak{f} est injective. Ceci résulte de ce que $\mathfrak{f}_{\beta} p^*(\alpha^{p-1}) = \alpha^p$ est non-nulle d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $H^{2p+1}(\mathcal{L}S^3) = 0$.

Pour déterminer $H^{2p+2}(\mathcal{L}S^3)$, on considère la suite exacte

$$H^{2p+1}(\mathcal{L}S^3) \rightarrow H^{2p}(\mathcal{L}S^3) \xrightarrow{\forall \chi} H^{2p+2}(\mathcal{L}S^3) \xrightarrow{p^*} H^{2p+2}(\mathcal{L}S^3) \rightarrow 0$$

Il est clair que $p^*(\alpha^{p+1}) \neq 0$. D'après l'hypothèse de récurrence et 3.13., l'image $H^{2p}(\mathcal{L}S^3) \xrightarrow{\chi} H^{2p+2}(\mathcal{L}S^3)$ est engendrée par l'élément non-nul χ^{p+1} . Finalement, α^{p+1} et χ^{p+1} engendrent librement $H^{2p+2}(\mathcal{L}S^3)$. \square

DEMONSTRATION DU THEOREME C. Elle résulte du théorème B et de 3.6., 3.10 et 3.14. \square

Enfin, signalons brièvement que les résultats de cette section permettent de retrouver la simplicité des groupes F' et G qui sera utilisée dans la partie III. \square

THEOREME 3.15. Les groupes F' et G sont simples.

DEMONSTRATION. Il résulte de 3.6. et de 3.11. que F' et G sont des groupes parfaits. L'argument classique de Higman-Epstein [Eps], appliqué à l'aide de 2.1, montre que ces groupes sont simples. \square

II. 4. L'INTERPRETATION DES GENERATEURS DE LA COHOMOLOGIE DU GROUPE G.

Dans cette section, nous démontrons les théorèmes D et E .

Rappelons que le second groupe de cohomologie $H^*(G; \mathbb{Z})$ est engendré par les générateurs α et χ . Le résultat suivant identifie le générateur χ et prouve le théorème D .

THEOREME 4.1. Le générateur χ est exactement la classe d'Euler de l'action de G sur S^1 . Ses puissances sont non-nulles dans $H^*(G; \mathbb{Q})$.

DEMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la naturalité de la classe d'Euler et les diagramme considérés à la fin de la preuve de 2.10. et dans 2.11. pour identifier l'élément χ . La non-nullité des puissances de χ et une conséquence de 3.11. \square

L'identification de la classe $\alpha \in H^2(G; \mathbb{Z})$ est liée à la classe de Godbillon-Vey et au cocycle correspondant en cohomologie des groupes.

Faisons d'abord quelques conventions jusqu'à la fin de cette section. Nous allons considérer la cohomologie des groupes à l'aide des cochaînes normalisées homogènes ou non homogènes. Les conventions habituelles sont respectées à l'exception du fait que nous travaillons avec des cochaînes homogènes à droite. Le passage d'une n-cochaîne homogène \bar{c} à la n-cochaîne non-homogène, c sera alors donné par

$$c(g_1, \dots, g_n) = \bar{c}(g_1 \dots g_n, g_2 \dots g_n, \dots, g_n, e) \ .$$

Pour un groupe K nous notons $\hat{C}^*(K)$ (resp. $C^*(K)$) les cochaînes homogènes à droite (resp. non homogènes).

La différentielle $d : \widehat{C}^n(K) \rightarrow \widehat{C}^{n+1}(K)$ est donnée par la formule

$$d\widehat{c}(k_0, \dots, k_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \widehat{c}(k_1, \dots, k_i, \dots, k_{n+1}) .$$

La différentielle $\delta : C^n(K) \rightarrow C^{n+1}(K)$ est

$$\begin{aligned} \delta c(k_1, \dots, k_{n+1}) &= c(k_2, \dots, k_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i c(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} c(k_1, \dots, k_n) . \end{aligned}$$

Rappelons la suite exacte de Gysin-Hochschild-Serre de l'extension centrale

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{G} \xrightarrow{P} G \rightarrow 1 .$$

PROPOSITION 4.2. [Ho-Se] . Il existe une longue suite exacte

$$\rightarrow H^{k-1}(G; \mathbb{Z}) \xrightarrow{vX} H^{k+1}(G; \mathbb{Z}) \xrightarrow{P^*} H^{k+1}(\widetilde{G}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} H^k(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+2}(G; \mathbb{Z}) \dots$$

REMARQUE 4.3. Il sera important pour la suite de bien contrôler la définition de l'intégrale sur la fibre $f : H^{k+1}(\widetilde{G}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(G; \mathbb{Z})$.

La description suivante peut-être extraite de [Ho-Se] .

Soit $[\varphi] \in H^{k+1}(\widetilde{G}; \mathbb{Z})$. En utilisant la suite spectrale de l'extension

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \widetilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1 ,$$

On peut choisir le cocycle non-homogène φ tel qu'il soit identiquement nul dès que deux arguments se trouvent dans le centre \mathbb{Z} . C'est dire que φ est de filtration 2.

Considérons la cochaîne non homogène $\varphi(i(1), \dots) \in C^k(\tilde{G}; \mathbb{Z})$.

Il résulte de [Ho-Se] p. 132 et 125 que cette cochaîne est en fait un cocycle et se trouve dans $C^k(G; \mathbb{Z}) \hookrightarrow C^k(\tilde{G}; \mathbb{Z})$. Sa classe de cohomologie est bien définie et est égale à $\{[\varphi]\}$. \square

Nous allons définir maintenant une famille de cocycles dans $H^2(G; \mathbb{Z})$.

Soit $[\varphi] \in H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ la classe de cohomologie d'un cocycle homogène normalisé φ . Il est immédiat qu'on peut choisir φ dans une classe donnée tel que sa restriction au sous-groupe diagonal $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ soit identiquement nulle. Avec ce choix, on a :

PROPOSITION 4.4. Soit $A_\varphi \in C^2(G; \mathbb{Z})$ la cochaîne normalisée donnée par :

$$A_\varphi(f, g, h) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2 / \mathbb{Z}} \varphi \begin{pmatrix} \text{Log}_2 f'_g(x) & \text{Log}_2 g'_g(x) & \text{Log}_2 h'_g(x) \\ \text{Log}_2 f'_d(x) & \text{Log}_2 g'_d(x) & \text{Log}_2 h'_d(x) \end{pmatrix}$$

Alors A_φ est bien définie. C'est en fait un cocycle de G .

DEMONSTRATION. Il est clair qu'en dehors d'un nombre fini de points x , les dérivées à gauche et à droite de f, g, h sont respectivement égales. Puisque φ s'annule sur le sous-groupe diagonal $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, la somme qui définit A est en fait finie.

Montrons que la cochaîne A_φ est homogène. Si $k \in G$, on a :

$$A_\varphi(f \circ k, g \circ k, h \circ k) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2 / \mathbb{Z}} \varphi \begin{pmatrix} \text{Log}_2 f'_g(k(x)) + \text{Log}_2 k'_g(x), \text{Log}_2 g'_g(k(x)) + \text{Log}_2 k'_g(x), \text{Log}_2 h'_g(k(x)) + \text{Log}_2 k'_g(x) \\ \text{Log}_2 f'_d(k(x)) + \text{Log}_2 k'_d(x), \text{Log}_2 g'_d(k(x)) + \text{Log}_2 k'_d(x), \text{Log}_2 h'_d(k(x)) + \text{Log}_2 k'_d(x) \end{pmatrix}$$

Puisque φ est homogène, cette somme est égale à :

$$\sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi \begin{pmatrix} \text{Log}_2 f'_g(k(x)) & \text{Log}_2 g'_g(k(x)) & \text{Log}_2 h'_g(k(x)) \\ \text{Log}_2 f'_d(k(x)) & \text{Log}_2 g'_d(k(x)) & \text{Log}_2 h'_d(k(x)) \end{pmatrix}$$

Il est donc clair que

$$A_\varphi(f \circ k, g \circ k, h \circ k) = A_\varphi(f, g, h)$$

Le fait que A_φ soit un cocycle est immédiat à partir du fait que, pour chaque x , A_φ est un cocycle. \square

COROLLAIRE 4.5. La cochaîne non-homogène $\overline{gv} \in \hat{C}^2(G; \mathbb{Z})$ définie par :

$$\overline{gv}(f, g) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \begin{vmatrix} \text{Log}_2 g'_g(x) & \text{Log}_2 (f \circ g)'_g(x) \\ \text{Log}_2 g'_d(x) & \text{Log}_2 (f \circ g)'_d(x) \end{vmatrix}$$

est un cocycle.

DEMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que ce cocycle est bien celui décrit dans l'énoncé des résultats. Il suffit pour cela de soustraire la première ligne à la seconde dans le déterminant.

Soit $\varphi \in \hat{C}^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ la cochaîne

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} .$$

On vérifie sans peine que φ est un cocycle et la cochaîne non homogène qui lui correspond est précisément \overline{gv} . \square

La démonstration du théorème E , c'est-à-dire du fait que $[\overline{gv}] = 2\alpha$ dans $H^2(G; \mathbb{Z})$ se fait en plusieurs temps.

LEMME 4.6. Il existe un entier p tel que $[\overline{gv}] = p.\alpha$

DEMONSTRATION. Considérons l'intégrale sur la fibre ;

$$f : H^3(\tilde{G}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{Z}) .$$

De par sa définition (section II-3) , α est l'image par f du générateur de $H^3(\tilde{G}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que \overline{gv} est aussi dans l'image de f . Pour cela, nous allons construire un cocycle ω de $C^3(\tilde{G}, \mathbb{Z})$ tel que $f[\omega] = [\overline{gv}]$ dans $H^2(G; \mathbb{Z})$.

Considérons tout d'abord la cochaîne $\hat{\omega} \in C^3(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ définie par :

$$\hat{\omega}(f, g, h, k) \sum_{x \in \mathbb{Q}_2 \cap [0, 1[} \begin{array}{c} \mathcal{L} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ [f(x)] & [g(x)] & [h(x)] & [k(x)] \\ \text{Logf}'_g(x) & \text{Logg}'_g(x) & \text{Logh}'_g(x) & \text{Logk}'_g(x) \\ \text{Logf}'_d(x) & \text{Logg}'_d(x) & \text{Logh}'_d(x) & \text{Logk}'_d(x) \end{array} \right| \end{array}$$

où $[]$ désigne ici la partie entière. Comme précédemment, on vérifie que $\hat{\omega}$ est un cocycle. Il en résulte que la cochaîne non homogène ω associée à $\hat{\omega}$ est un cocycle :

$$\omega(f, g, h) = \sum_{x \in \mathbb{Q}_2 \cap [0, 1[} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ [fgh(x)] & [gh(x)] & [h(x)] & [x] \\ \text{Log}(fgh)'_g(x) & \text{Log}(gh)'_g(x) & \text{Log}h'_g(x) & 0 \\ \text{Log}(fgh)'_d(x) & \text{Log}(gh)'_d(x) & \text{Log}h'_d(x) & 0 \end{vmatrix}$$

Une vérification immédiate montre que ω est de filtration 2, c'est-à-dire, s'annule dès que deux arguments se trouvent dans le centre $\mathbb{Z} \hookrightarrow \tilde{G}$. D'après la remarque 4.3. $\{[\omega]\}$ est la classe de cohomologie du cocycle :

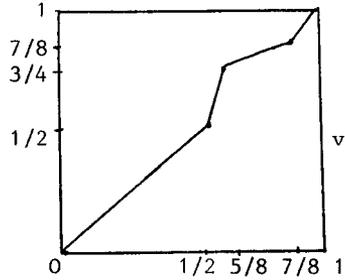
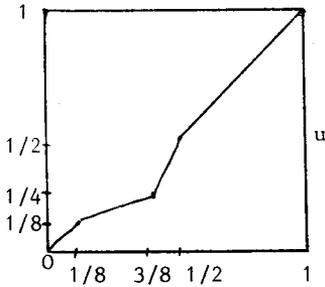
$$(f, g) \mapsto \omega(x+1, f, g) ,$$

c'est-à-dire :

$$(f, g) \rightarrow \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ [fg(x)]+1 & [fg(x)] & [g(x)] & [x] \\ \text{Log}(fg)'_g(x) & \text{Log}(fg)'_g(x) & \text{Log}g'_g(x) & 0 \\ \text{Log}(fg)'_d(x) & \text{Log}(fg)'_d(x) & \text{Log}g'_d(x) & 0 \end{vmatrix} = \overline{gv}(f, g) . \quad \square$$

Pour montrer le théorème E, c'est-à-dire que $[\overline{gv}] = 2\alpha$, nous allons évaluer chaque membre de l'égalité $[\overline{gv}] = \alpha$ sur un cycle bien choisi.

Considérons les éléments u et v de F' dont les graphes sont les suivants :



Comme u et v commutent, la chaîne $\sigma = (u,v) - (v,u)$ est un cycle (non homogène).

LEMME 4.7. La classe d'homologie de σ est un générateur de $H_2(F'; \mathbb{Z})$.

DEMONSTRATION. Soit $\varphi \in \hat{C}^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ un cocycle choisi comme dans la proposition 4.3. et tel que $[\varphi] \in H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ soit le générateur qui vaut 1 sur le cycle non-homogène $(e_1, e_2) - (e_2, e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit \bar{A}_φ la cochaîne non homogène associée à φ par 4.3. Alors

$$\begin{aligned} \bar{A}_\varphi((u,v)-(v,u)) &= \sum_{x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}} \varphi \left(\begin{array}{l} \text{Log}(u \circ v)'_g(x), \text{Log } v'_g(x), 0 \\ \text{Log}(u \circ v)'_d(x), \text{Log } v'_d(x), 0 \end{array} \right) \\ &\quad - \sum_{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \varphi \left(\begin{array}{l} \text{Log}(v \circ u)'_g(x), \text{Log } u'_g(x), 0 \\ \text{Log}(v \circ u)'_d(x), \text{Log } u'_d(x), 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Puisque $\text{Supp}(u) \cap \text{Supp}(v) = \frac{1}{2}$, et que le cocycle φ est normalisé, la sommation se réduit à sa valeur en $x = \frac{1}{2}$.

On obtient alors :

$$\overline{A}_\varphi((u,v)-(v,u)) = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

d'après le choix de φ . \square

Le lemme suivant, joint à 4-6, termine la démonstration du théorème E car α n'est défini qu'au signe près.

LEMME 4.8. On a $\overline{gv}(\sigma) = 2$ et $\alpha(\sigma) = \pm 1$.

DEMONSTRATION. La première égalité est un calcul semblable à celui du lemme précédent. Quant à l'égalité $\alpha(\sigma) = \pm 1$, nous avons déjà vu que l'inclusion $F' \rightarrow G$ induit un isomorphisme entre $H^2(G; \mathbb{Z})$ et $H^2(F'; \mathbb{Z})$. Comme, d'après II-3, l'application $H^2(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\tilde{G}; \mathbb{Z})$ envoie α sur le générateur de $H^2(G; \mathbb{Z})$, il résulte que α définit un générateur de $H^2(F'; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Par conséquent $\alpha(\sigma) = \pm 1$. \square

III. PROPRIETES QUALITATIVES.

III. 1: CONSTRUCTION DES LISSAGES.

Le but de cette section est de démontrer les théorèmes A et G, c'est-à-dire de construire des morphismes du groupe G dans $\text{Diff}^\infty(S^1)$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme vérifiant les propriétés suivantes :

(I) Pour tout réel x , on a $f(x+1) = f(x) + 2$.

(II) $f(0) = 0$.

Nous nous proposons d'associer à chaque homéomorphisme f satisfaisant (I) et (II) une représentation φ_f de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. L'image de φ_f sera constituée de difféomorphismes de classe C^∞ si f vérifie une condition supplémentaire décrite plus bas. Dans le cas particulier où $f(x) = 2x$, la représentation φ_f sera l'inclusion canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

Rappelons que nous avons noté respectivement \mathbb{Q}_2 , $\text{GA}(\mathbb{Q}_2)$ et $\text{PL}_2(\mathbb{R})$ les groupes des nombres dyadiques, des bijections affines dyadiques et des homéomorphismes qui sont $\text{GA}(\mathbb{Q}_2)$ par morceaux (voir II-1). La transformation $x \rightarrow 2^n x + \frac{p}{2^q}$ de $\text{GA}(\mathbb{Q}_2)$ est notée $(2^n, \frac{p}{2^q})$. En identifiant un nombre dyadique x à la translation T_x , on obtient les inclusions naturelles :

$$\mathbb{Q}_2 \subset \text{GA}(\mathbb{Q}_2) \subset \text{PL}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons tout d'abord construire une représentation θ_f de $\text{PL}_2(\mathbb{R})$ dans $\text{Homéo}(\mathbb{R})$. Celle ci sera définie sur \mathbb{Q}_2 puis étendue successivement à $\text{GA}(\mathbb{Q}_2)$ et à $\text{PL}_2(\mathbb{R})$.

LEMME 1.1. L'application

$\theta_f : \frac{p}{2^q} \in \mathbb{Q}_2 \longrightarrow f^{-q} \circ T_p \circ f^q \in \text{Homéo}(\mathbb{R})$ est bien définie et donne un morphisme de groupes.

DEMONSTRATION. Il s'agit tout d'abord de vérifier que $\theta_f(\frac{p}{2^q})$ ne dépend que du rationnel $\frac{p}{2^q}$. Pour cela, nous devons montrer que $\theta_f(\frac{p}{2^q}) = \theta_f(\frac{2p}{2^{q+1}})$ c'est-à-dire :

$$f^{-q} \circ T_p \circ f^q = f^{-q-1} \circ T_{2p} \circ f^{q+1}$$

$$T_p = f^{-1} \circ T_{2p} \circ f$$

ou encore

$$f(x+p) = f(x) + 2p \quad .$$

Ceci est une conséquence de la propriété (I) .

Le fait que θ_f est un morphisme est clair :

$$\begin{aligned} \theta_f\left(\frac{p}{2^q} + \frac{p'}{2^q}\right) &= f^{-q} \circ T_{p+p'} \circ f^q = f^{-q} \circ T_p \circ T_{p'} \circ f^q = f^{-q} \circ T_p \circ f^q \circ f^{-q} \circ T_{p'} \circ f^q \\ &= \theta_f\left(\frac{p}{2^q}\right) + \theta_f\left(\frac{p'}{2^q}\right) \quad . \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 1.2. La propriété (I) et la définition de θ_f montrent que si p est un entier, alors $\theta_f(p) = T_p$.

Nous étendons maintenant θ_f à $GA(\mathbb{Q}_2)$:

LEMME 1.3. L'application :

$$(2^n, \frac{p}{2^q}) \in GA(\mathbb{Q}_2) \longrightarrow \theta_f(\frac{p}{2^q}) \circ f^n \in \text{Homéo}(\mathbb{R})$$

est un morphisme de groupes que nous noterons encore θ_f .

Démonstration. Ceci résulte immédiatement de la propriété suivante que l'on vérifie sans difficulté

$$f \circ \theta_f(x) \circ f^{-1} = \theta_f(\frac{x}{2}) \quad \text{si } x \in \mathbb{Q}_2 . \quad \square$$

Enfin, nous étendons θ_f à $PL_2(\mathbb{R})$. Soit $h \in PL_2(\mathbb{R})$. Par définition, il existe une suite strictement croissante et sans points d'accumulation $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres dyadiques et une suite γ_n dans $GA(\mathbb{Q}_2)$ telles que :

$$h|_{[x_n, x_{n+1}]} = \gamma_n|_{[x_n, x_{n+1}]} .$$

Cette suite n'est pas unique pour un h fixé : il est toujours possible d'ajouter de nouveaux points dans un intervalle $[x_n, x_{n+1}]$, même si h est affine sur cet intervalle. Notons \bar{x}_n le réel $\theta_f(x_n)(0)$.

LEMME 1.4. La suite de réels \bar{x}_n est strictement croissante et sans points d'accumulation dans \mathbb{R} .

DEMONSTRATION. Puisque f est un homéomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} , la définition de θ_f montre que si $\frac{p}{2^q}$ est positif, on a :

$$\theta_f(\frac{p}{2^q})(x) > x \quad \text{pour tout réel } x .$$

Par conséquent, si x_1 et x_2 sont deux nombres dyadiques tels que $x_1 > x_2$, on a $\theta_f(x_1)(0) > \theta_f(x_2)(0)$. \square

Nous définissons alors une application $\theta_f(h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, à priori discontinue, de la façon suivante :

$$\theta_f(h) \Big|_{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}[} = \theta_f(\gamma_n) \Big|_{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}[}.$$

Il est clair que $\theta_f(h)$ est bien défini et ne dépend pas du choix de la suite x_n . Il est tout aussi clair que θ_f est une extension de la représentation préalablement définie $\theta_f : \text{GA}(\mathbb{Q}_2) \rightarrow \text{Homéo}(\mathbb{R})$.

LEMME 1.5. Si $h \in \text{PL}_2(\mathbb{R})$, l'application $\theta_f(h)$ est continue.

DEMONSTRATION. Il s'agit de vérifier la continuité de $\theta_f(h)$ au point \bar{x}_n .

Nous devons montrer que :

$$\theta_f(\gamma_n)(\bar{x}_n) = \theta_f(\gamma_{n-1})(\bar{x}_n),$$

c'est-à-dire :

$$\theta_f(\gamma_n \circ T_{x_n})(0) = \theta_f(\gamma_{n-1} \circ T_{x_n})(0)$$

ou encore :

$$\theta_f(T_{-x_n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \gamma_n \circ T_{x_n})(0) = 0.$$

Puisque h est continue, on a $\gamma_n(x_n) = \gamma_{n-1}(x_n)$ et $T_{-x_n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \gamma_n \circ T_{x_n}$ est donc un élément de $\text{GA}(\mathbb{Q}_2)$ qui fixe 0, c'est-à-dire un élément du type $(2^N, 0)$. L'égalité que nous voulons montrer est alors claire car :

$$\theta_f(2^N, 0) = f^N$$

et f fixe 0 d'après (II) . \square

LEMME 1.6. $\theta_f : PL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Homéo}(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes.

DEMONSTRATION. En effet, pour évaluer $\theta_f(h_1 \circ h_2)$, on peut choisir une suite x_n telle que h_2 est affine sur les intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ et h_1 est affine sur les intervalles $[h_2(x_n), h_2(x_{n+1})]$. La définition de θ_f montre alors que $\theta_f(h_1) \circ \theta_f(h_2) = \theta_f(h_1 \circ h_2)$. \square

LEMME 1.7. Si $\tilde{g} \in \tilde{G}$, c'est-à-dire si $\tilde{g} \in PL_2(\mathbb{R})$ et $\tilde{g}(x+1) = \tilde{g}(x)+1$, alors $\theta_f(\tilde{g})(x+1) = \theta_f(\tilde{g})(x) + 1$.

DEMONSTRATION. Ceci est une conséquence, d'une part, du fait que θ_f est un morphisme et, d'autre part, de la remarque 1.2 suivant laquelle $\theta_f(p) = T_p$. \square

D'après le lemme précédent, θ_f permet de définir, par passage au quotient, une représentation φ_f de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. Avant de décrire plus précisément les propriétés de φ_f , nous allons montrer qu'il est possible de choisir f pour que $\varphi_f(G)$ soit constitué de difféomorphismes du cercle.

Considérons la propriété suivante ($1 \leq r \leq \infty$) : (III_r) f est de classe C^r , $f'(0) = 1$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $2 \leq k \leq r$.

LEMME 1.8. Si f vérifie la condition (III_r), alors l'image de θ_f (et donc de φ_f) est constituée de difféomorphismes de classe C^r .

DEMONSTRATION. En reprenant les notations de la démonstration du lemme 1.5, il s'agit de montrer que, pour $1 \leq k \leq r$, on a :

$$\theta_f(\gamma_n)^{(k)}(\bar{x}_n) = \theta_f(\gamma_{n-1})^{(k)}(\bar{x}_n) .$$

Ceci est une conséquence du fait que le $r^{\text{ème}}$ jet de $\theta_f(T_{-x_n} \circ \gamma_{n-1}^{-1} \circ \gamma_n \circ T_{x_n}) = f^N$ est celui de l'identité au point 0. \square

Nous montrons maintenant que toutes les représentations φ_f que nous venons de construire sont semi-conjuguées à l'inclusion canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 1.9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme vérifiant les conditions (I) et (II). Alors, il existe une application continue croissante $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$H(x+1) = H(x) + 1$$

$$H(f(x)) = 2H(x) .$$

DEMONSTRATION. Nous avons déjà observé que l'application $i : \mathbb{Q}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i(x) = \theta_f(x)(0)$ est strictement croissante :

Soit $H : i(\mathbb{Q}_2) \rightarrow \mathbb{Q}_2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ l'inverse de i . Puisque H est strictement croissante, H se prolonge en une application croissante, encore notée H , de $\overline{i(\mathbb{Q}_2)}$ dans \mathbb{R} . Comme \mathbb{Q}_2 est dense dans \mathbb{R} , l'application $H : \overline{i(\mathbb{Q}_2)} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On prolonge alors H à \mathbb{R} en imposant à H d'être constante sur les composantes connexes de $\mathbb{R} - \overline{i(\mathbb{Q}_2)}$. On obtient ainsi une application H continue croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Le fait que H vérifie les propriétés requises provient du fait que :

$$i(x+1) = \theta_f(x+1)(0) = \theta_f(1) \circ \theta_f(x)(0) = \theta_f(x)(0) + 1 = i(x) + 1$$

$$i(2x) = \theta_f(2x)(0) = f \circ \theta_f(x)(0) = f(i(x)) . \quad \square$$

COROLLAIRE 1.10. Si f vérifie les conditions (I) et (II), la représentation φ_f est semi-conjuguée à l'injection canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

DEMONSTRATION. L'application H donnée par le lemme précédent définit une application continue \bar{H} de S^1 dans S^1 . Par construction même de φ_f et

puisque $H(f(x)) = 2H(x)$, cette application \bar{H} est une semi-conjugaison entre φ_f et l'injection canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. \square

Pour démontrer le théorème A, il faut montrer qu'il est possible de choisir f vérifiant (I), (II) et (III) et tel que l'application H donnée par le lemme 1-9 est un homéomorphisme. Pour montrer ce fait, nous allons d'abord montrer que les orbites de φ_f peuvent s'obtenir simplement à partir de f .

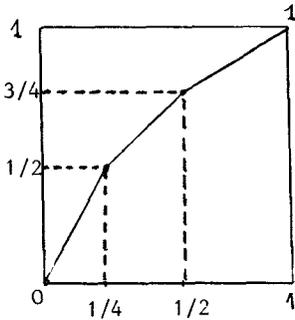
Si f vérifie (I) et (II), f définit évidemment une application continue $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ de degré topologique 2. Par "relation d'équivalence engendrée par \bar{f} ", nous entendons la relation d'équivalence \sim sur S^1 engendrée par $x \sim \bar{f}(x)$ pour tout x de S^1 .

LEMME 1.11. Les orbites de φ_f sont exactement les classes d'équivalences de la relation d'équivalence engendrée par \bar{f} .

DEMONSTRATION. Il est évident que les classes d'équivalences de la relation engendrée par \bar{f} sont les projections sur S^1 des classes d'équivalence de la relation R_f sur \mathbb{R} engendrée par $x \sim x+1$ et $f(x) \sim x$. Nous allons montrer que les classes d'équivalences de R_f sont exactement les orbites de la représentation θ_f de \tilde{G} dans $\text{Homéo}(\mathbb{R})$.

Considérons tout d'abord deux points x_1 et x_2 de \mathbb{R} qui sont dans la même orbite de \tilde{G} . Il existe donc un élément \tilde{g} de \tilde{G} tel que $x_2 = \theta_f(\tilde{g})(x_1)$. Par définition de G , il existe un intervalle fermé contenant x_1 tel que la restriction de $\theta_f(\tilde{g})$ à cet intervalle est égale à la restriction d'un homéomorphisme du type $\theta_f(\gamma)$ où $\gamma \in \text{GA}(\mathbb{Q}_2)$. Comme $\theta_f(\text{GA}(\mathbb{Q}_2))$ est engendré par f et par la translation T_1 , les orbites de $\theta_f(\tilde{G})$ sont contenues dans les classes d'équivalence de R_f .

Réciproquement, considérons l'élément \tilde{g} de \tilde{G} dont la restriction à l'intervalle $[0,1]$ est donnée par le graphe suivant :



Sur l'intervalle $[\overline{0}, \overline{1/4}]$, \tilde{g} coïncide avec l'application $x \rightarrow 2x$. Par conséquent, sur l'intervalle $[\overline{0}, \overline{1/4}]$, $\varphi_f(\tilde{g})$ coïncide avec f . (Rappelons que nous avons noté $\bar{x} = \theta_f(x)(0)$). Par conséquent, si $x \in [\overline{0}, \overline{1/4}]$, x et $f(x)$ sont dans la même orbite de $\varphi_f(G)$. Si $x \in [\overline{1/4}, \overline{1/2}]$, on considère l'élément $\tilde{g}' = T_{1/2} \circ \tilde{g} \circ T_{1/4}^{-1}$ de G . Celui-ci coïncide avec l'application $x \rightarrow 2x$ sur l'intervalle $[1/4, 1/2]$ et on conclut de la même façon. On procède de manière similaire sur $[\overline{1/2}, \overline{3/4}]$, $[\overline{3/4}, \overline{1}]$, Par conséquent, pour tout x de \mathbb{R} , les points x et $f(x)$ sont dans la même orbite de $\theta_f(\tilde{G})$. Puisque, par ailleurs, $x+1 = \theta_f(T_1)(x)$, les classes d'équivalence de R_f sont contenues dans les orbites de $\theta_f(\tilde{G})$. \square

LEMME 1.12. Supposons que f vérifie les conditions (I), (II) et la condition (IV) ci-dessous :

$$(IV) \quad |f(x)-f(y)| > |x-y| \text{ pour tout couple de réels distincts } (x,y)$$

Alors, l'application H fournie par le lemme 1-9 est un homéomorphisme.

DEMONSTRATION. Cette condition (IV) signifie que \bar{f} est "topologiquement expansive" (voir [Shu]).

Nous avons déjà vu que H est surjective. Supposons que H n'est pas injective et notons $\Omega \subset \mathbb{R}$ la réunion des intervalles ouverts maximaux sur lesquels H est constante. Supposons Ω non vide. D'après 1-9, on a :

$$T_1(\Omega) = \Omega$$

$$f(\Omega) = \Omega .$$

D'après la première égalité, le maximum des longueurs des composantes connexes de Ω est atteint. Soit Ω_0 une composante de longueur maximale. D'après la seconde égalité, $f(\Omega_0)$ est aussi une composante connexe de Ω . Mais la condition (IV) montre que la longueur de $f(\Omega_0)$ est strictement supérieure à celle de Ω_0 , ce qui est contraire au choix de Ω_0 . \square

Nous avons donc montré le théorème A :

THEOREME 1.13. Si f vérifie les conditions (I), (II), (III $_{\infty}$) et (IV), alors φ_f est une représentation de G dans $\text{Diff}^{\infty}(S^1)$ qui est topologiquement conjuguée à l'inclusion canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

DEMONSTRATION. En effet, d'après 1.12, la semi-conjugaison \bar{H} est en fait une conjugaison topologique. \square

Nous montrons maintenant que φ_f peut posséder un minimal exceptionnel, c'est-à-dire le théorème G.

PROPOSITION 1.1.4. Supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les conditions I, II et la condition V suivante :

(V) f possède au moins deux points fixes.

Alors, φ_f possède un minimal exceptionnel.

DEMONSTRATION. La condition (I) montre que si α et β sont deux points fixes de f , alors $|\beta - \alpha| < 1$. L'intervalle $]\alpha, \beta[$ de \mathbb{R} se projette alors injectivement sur un ouvert V de S^1 tel que $\bar{f}^n(V) = V$ pour tout $n \geq 0$. Observons que l'ouvert $\bar{f}^{-1}(V)$ est la réunion de deux composantes connexes dont l'une est V . De la même façon, $\bar{f}^{-n}(V)$ est la réunion de 2^n intervalles disjoints dont 2^{n-1} forment $f^{-(n-1)}(V)$. Par conséquent, la réunion $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{f}^{-n}(V)$ est un ouvert de S^1 qui n'est pas S^1 tout entier. Comme il est clair que $\bar{f}(\Omega) = \Omega$ et $\bar{f}^{-1}(\Omega) = \Omega$, on en déduit que Ω est un ouvert propre de S^1 saturé par la relation d'équivalence engendrée par \bar{f} et donc invariant par $\varphi_f(G)$ d'après 1.11. En particulier, les points de $S^1 - \Omega$ ont une orbite non dense. Comme, par ailleurs, φ_f ne peut avoir d'orbite finie d'après 1.10, c'est donc que φ_f possède un minimal exceptionnel. \square

II. 2. COROLLAIRES DE L'EXISTENCE DE MINIMAUX EXCEPTIONNELS

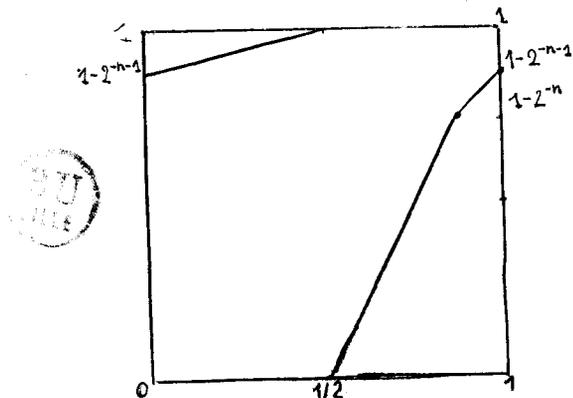
Le premier corollaire immédiat est le corollaire J .

THEOREME 2.1. Si $g \in G$, alors le nombre de rotation de l'homéomorphisme g de S^1 est rationnel.

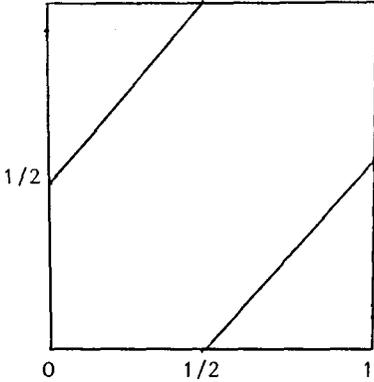
DEMONSTRATION. Deux homéomorphismes du cercle qui sont semi-conjugués ont le même nombre de rotation. Il suffit donc de montrer que $\varphi_f(g)$ a un nombre de rotation rationnel. Si f satisfait les conditions I, II, III₂ et V alors $\varphi_f(g)$ est un difféomorphisme de S^1 , de classe C^2 , dont les orbites ne peuvent être denses, d'après 1.14. Le théorème est alors une conséquence du théorème de Denjoy selon lequel un difféomorphisme du cercle de classe C^2 dont le nombre de rotation est irrationnel a toutes ses orbites denses (voir par exemple [Hc-Hi]). \square

PROPOSITION 2.1. Pour tout nombre rationnel, il existe un élément de G dont le nombre de rotation est égal à ce rationnel.

DEMONSTRATION. Soit n un entier supérieur ou égal à 0 . On considère l'élément g_n de G dont le graphe est le suivant :

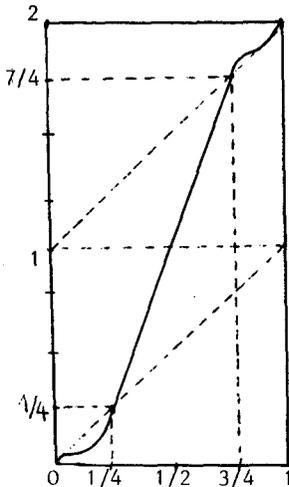


Le graphe de g_0 est particulier :



Le lecteur vérifiera aisément que g_n est un élément dont l'ordre est exactement $n+2$. (L'idée de considérer ces éléments g_n provient de [?]). Par conséquent, les puissances de g_n fournissent des éléments dont les nombres de rotation sont les éléments de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} du type $\frac{p}{n+2} \bmod \mathbb{Z}$. On obtient ainsi tous les éléments de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . \square

Nous abordons maintenant la démonstration du corollaire I. Nous allons montrer que $\varphi_f(G)$ est discret dans $\text{Diff}^1(S^1)$ muni de la topologie C^1 pour un choix très particulier de f . Le même résultat resterait vrai pour une classe plus générale de difféomorphismes f , mais nous faisons ce choix pour simplifier les calculs. Choisissons donc f du type suivant :



Le difféomorphisme f est affine de pente 3 sur $[1/4, 3/4]$ et vérifie les propriétés (I), (II), (III_∞) et (V).

THEOREME 2.3. Si f est du type décrit ci-dessus, alors $\varphi_f(G)$ (resp. $\varphi_f(F)$) est discret dans $\text{Diff}_+^1(S^1)$ (resp. $\text{Diff}_c^1(\mathbb{R})$) muni de la topologie C^1 .

DEMONSTRATION. Soit $K \subset [0,1]$ l'ensemble de Cantor "standard" construit sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$. Précisément K est obtenu de la façon suivante; on définit inductivement des ouverts Ω_n par $\Omega_0 = \emptyset$ et Ω_{n+1} est la réunion des intervalles ouverts I_i dont les centres sont les centres des composantes connexes J_i de $[1/4, 3/4] - \Omega_n$ et dont les longueurs $|I_i|$ sont les tiers des longueurs $|J_i|$ des intervalles correspondants. L'ensemble de Cantor K est alors $[1/4, 3/4] - \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$. Soit $\bar{K} \subset S^1$ l'ensemble de Cantor obtenu par projection de $[0,1] \subset \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} . L'examen du graphe de f montre que \bar{K} est invariant (positivement et négativement) par \bar{f} . Rappelons que nous avons noté \bar{f} l'application de degré 2 induite par f sur le cercle. En fait, on peut vérifier que \bar{K} est l'unique minimal exceptionnel de $\varphi_f(G)$.

Observons que la dérivée de f sur K est égale à 3. On en déduit que, si $g \in G$, alors la dérivée de $\varphi_f(g)$ sur \bar{K} ne prend comme valeurs que des puissances entières de 3. Plus précisément, soit $h : S^1 \rightarrow S^1$ la semi-conjugaison entre $\varphi_f : G \rightarrow \text{Diff}(S^1)$ et l'inclusion naturelle de G dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ donnée par le corollaire 1.10. Si x est un point de \bar{K} qui est un point d'accumulation bilatéral de \bar{K} (i.e. $x \notin \partial(S^1 - \bar{K})$), alors $h(x)$ est un point de S^1 qui n'est pas dans \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} . On a alors la propriété suivante : La dérivée de g en $h(x)$ (qui existe car $h(x) \notin \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$) est 2^n si et seulement si la dérivée de $\varphi_f(g)$ en x est 3^n .

Nous devons montrer que $\varphi_f(G)$ est discret dans $\text{Diff}_+^1(S^1)$. D'après l'observation précédente, si la dérivée de $\varphi_f(g)$ est uniformément proche de 1 sur S^1 , elle est nécessairement égale à 1 sur \bar{K} . La dérivée de g aux points non dyadiques de S^1 est alors elle aussi égale à 1 ce qui signifie que g est une rotation.

Il nous reste à montrer que si g est une rotation telle que $\varphi_f(g)$ est suffisamment C^1 -proche de l'identité, alors g est l'identité. Nous n'utiliserons en fait que la C^0 -proximité. Notons que l'affirmation correspondante pour le plongement canonique de G dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ serait fausse : Les rotations dyadiques forment évidemment un sous-groupe non discret de $\text{Homéo}^+(S^1)$. Supposons donc $\varphi_f(g)$ suffisamment C^0 -proche de l'identité : Observons que $\varphi_f(g)$ permute les composantes connexes de $S^1 - \bar{K}$ qui sont de longueur $\frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$ ($n \in \mathbb{N}$). L'intervalle de longueur maximale de $S^1 - \bar{K}$ est unique : C'est $I =]-1/4, +1/4[\pmod{\mathbb{Z}}$ et sa longueur est $+1/2$. Si $\varphi_f(g)$ est C^0 -proche de l'identité : $\varphi_f(g)(I)$ est un intervalle de $S^1 - \bar{K}$ de longueur proche de $1/2$ et donc de longueur $1/2$. Dans ce cas $\varphi_f(g)(I)$ ne peut qu'être égal à I . Par conséquent, g fixe l'image de I par h qui est un point car h "écrase" les composantes connexes de $S^1 - \bar{K}$ sur un point. Puisqu'une rotation ayant un point fixe est l'identité, ceci termine la démonstration du théorème dans le cas de $\varphi_f(G)$. Le cas de $\varphi_f(F)$ est tout à fait similaire. \square

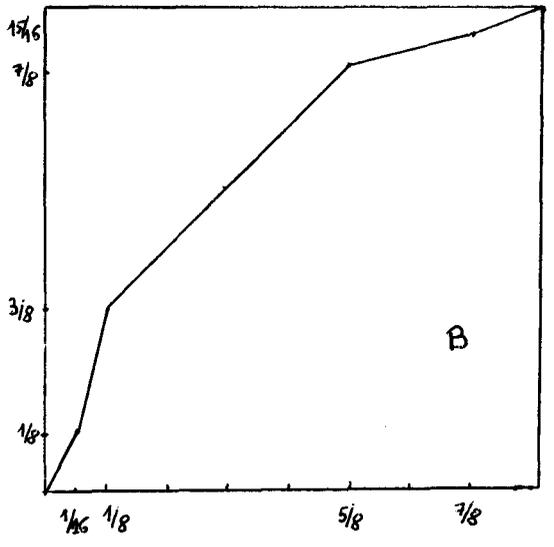
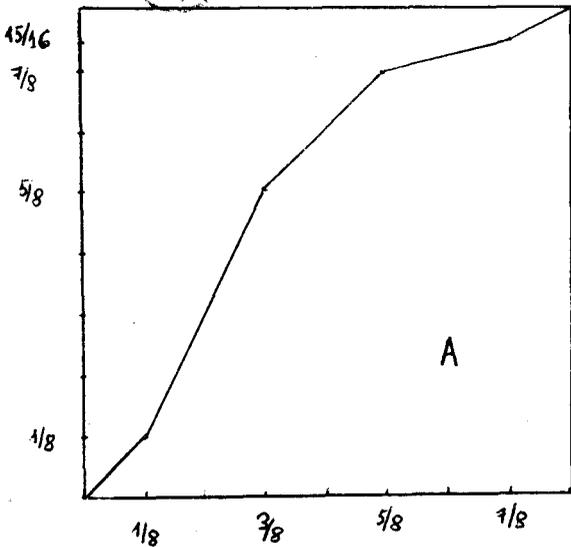
Avant de démontrer le théorème H, montrons tout d'abord le résultat suivant :
PROPOSITION 2.4. Il existe une surface compacte orientée Σ et une représentation $\varphi : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \text{Diff}^\infty(S^1)$ ayant les propriétés suivantes :

- i) φ possède un minimal exceptionnel.
- ii) Le nombre d'Euler du fibré en cercles au dessus de Σ associé à φ est égal à 1.

DEMONSTRATION. Nous savons que la classe d'Euler χ est non nulle dans G . Il existe donc, d'après le théorème de Hopf, une surface orientée Σ et un morphisme $i : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$ tels que l'évaluation de $i^*\chi$ sur la classe fondamentale de Σ est égale à 1. Si f vérifie les conditions I, II, III $_{\infty}$, la représentation $\varphi = \varphi_f \circ i$ vérifie évidemment la propriété ii). Si, de plus, f vérifie les conditions V, $\varphi(\pi_1(\Sigma))$ preserve un ensemble de Cantor contenu dans S^1 . Pour montrer que Σ vérifie la condition i), il nous reste à montrer que $\varphi(\pi_1(\Sigma))$ ne peut pas avoir d'orbite finie. Mais, sans une telle situation, l'orbite finie fournirait une "section multiforme" pour le S^1 -fibré associé au dessus de Σ et le nombre d'Euler de ce fibré serait nul contrairement à ce qu'affirme la propriété ii). \square

La démonstration précédente n'est pas constructive et ne donne aucune information sur le genre de Σ . L'intérêt du théorème H par rapport à la proposition 2.4 est donc son aspect explicite.

Soient A et B les éléments de G dont les graphes sont les suivants :



On pose :

$$A_1 = A_5 = A_7 = A_{11} = R_{1/8} A R_{-1/8}$$

$$A_2 = A_6 = A_8 = A_{12} = R_{-1/8} A R_{1/8}$$

$$A_3 = A_9 = R_{5/8} A R_{-5/8}$$

$$A_4 = A_{10} = R_{3/8} A R_{-3/8}$$

On définit de même B_i ($1 < i \leq 12$) en remplaçant A par B dans les formules précédentes.

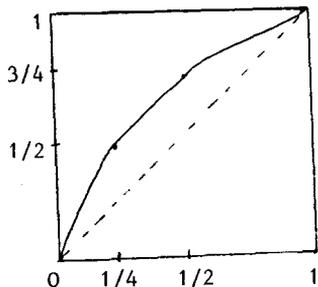
THEOREME 2.5. Avec les notations précédentes, on a :

$$\prod_{i=1}^{12} [A_i, B_i] = \text{id}$$

Cette égalité définit une représentation ρ du groupe fondamental de la surface Σ_{12} de genre 12 dans G . La classe d'Euler $\rho^* \chi$ évaluée sur la classe fondamentale de Σ est égale à $+1$.

DEMONSTRATION. Evidemment, le lecteur pourra vérifier par lui-même l'égalité annoncée ! Nous allons nous contenter d'indiquer la méthode utilisée pour obtenir cette représentation explicite.

Soit $g \in G$ l'élément dont le graphe est le suivant :



On vérifie immédiatement que $(gR_{1/2})^3 = \text{id}$, ce qui peut s'écrire

$$gR_{1/2}gR_{-1/2}g = R_{1/2} \quad (1)$$

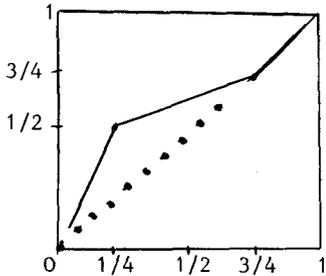
Par conséquent,

$$[g(R_{1/2}gR_{-1/2})g]^2 = \text{id} \quad (2)$$

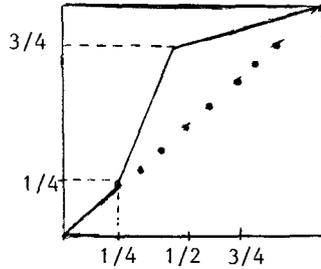
Si l'on parvient à écrire g comme un produit de deux commutateurs, l'égalité précédente fournit un produit de douze commutateurs égal à l'identité : Vérifions tout d'abord que le nombre d'Euler de la représentation $i : \pi_1(\Sigma_{12}) \rightarrow G$ correspondant à cette relation est non nul. Pour cela, rappelons l'algorithme de Milnor (voir [He-Hi], par exemple), permettant de calculer le nombre d'Euler associé à une représentation du type $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i] = \text{id}$ dans $\text{Diff}_+(S^1)$. On choisit des relevés \tilde{a}_i et \tilde{b}_i de a_i et b_i dans $\widetilde{\text{Diff}}_+(S^1)$ et on forme le produit $\prod_{i=1}^k [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$. Celui ci ne dépend pas des choix de \tilde{a}_i et \tilde{b}_i ; c'est une translation entière. L'amplitude de cette translation est le nombre d'Euler recherché.

Dans notre cas, si g est un produit $[a_1, b_1] [a_2, b_2]$ notre relation s'écrit $\prod_{i=1}^{12} [a_i, b_i] = \text{id}$ où les a_i, b_i sont obtenus simplement à partir de la relation (2). Par exemple $a_3 = R_{1/2} a_1 R_{-1/2}$ et $b_3 = R_{1/2} b_1 R_{-1/2}$. Si l'on choisit un relevé $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2$ pour a_1, b_1, a_2, b_2 , on en déduit des relevés "naturels" \tilde{a}_i, \tilde{b}_i pour a_i, b_i ($1 < i \leq 12$). Par exemple, on pose $\tilde{a}_3 = T_{1/2} \tilde{a}_1 T_{-1/2}$ où $T_{1/2}$ est la translation d'amplitude $1/2$. Dans ces conditions, la quantité $\prod_{i=1}^{12} [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ que nous cherchons à évaluer est le carré de $\prod_{i=1}^6 [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ car $\tilde{a}_{6+i} = \tilde{a}_i$ et $\tilde{b}_{6+i} = \tilde{b}_i$ ($1 \leq i \leq 6$). Par ailleurs, la relation (1) montre que $\prod_{i=1}^6 [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ est une translation du type $x \rightarrow x+n+1/2$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). Son carré est donc une translation d'amplitude impaire et donc non nulle comme nous voulions le montrer.

Il nous reste donc à exprimer g comme un produit de deux commutateurs. On vérifie que g est le produit des deux éléments α, β de G dont les graphes sont :

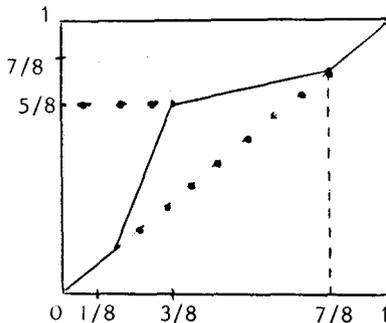


α



β

Il est clair que $R_{1/8} \circ R_{-1/8}$ et $R_{-1/8} \circ R_{1/8}$ sont tous les deux égaux à l'élément γ suivant :



Pour terminer, il nous suffit donc de montrer que γ est un commutateur. Dans [Fr-He], il est montré que F' est le premier groupe de commutateurs de F . La démonstration de ce fait est suffisamment constructive et permet effectivement d'exprimer γ comme un commutateur ce qui permet finalement de terminer la détermination de la représentation $\varphi : \pi_1(\Sigma_{12}) \rightarrow G$ que nous cherchions. Pour

terminer, disons simplement que le caractère explicite de cette construction permet d'évaluer précisément le nombre d'Euler associé (nous avons vu qu'il est impair).
Le résultat est celui annoncé dans le théorème, c'est-à-dire 1. □

III. 3 : "UNICITE" DES LISSAGES.

L'essentiel de cette section consiste à démontrer le théorème K, c'est-à-dire qu'une représentation non triviale de G dans $\text{Diff}^2(S^1)$ est semi-conjugée à l'inclusion canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

Fixons donc un morphisme non trivial $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$ ($r \geq 2$). Puisque G est simple (voir II-3.15), φ est injective. Nous identifions souvent \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} au sous-groupe de G (et donc de $\text{Homéo}(S^1)$) formé des rotations d'angle dyadique. Pour simplifier l'exposition, nous commencerons par faire l'hypothèse suivante :

(H) Pour tout x de S^1 , l'orbite de x par $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est dense dans S^1 .

PROPOSITION 3.1. Si l'hypothèse (H) est vérifiée, il existe un homéomorphisme h de S^1 tel que $h \circ \varphi \circ h^{-1}(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est formé de rotations du cercle d'angles dyadiques.

DEMONSTRATION. Puisque $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est un sous-groupe abélien de $\text{Homéo}_+(S^1)$, il préserve une mesure de probabilité μ sur S^1 .

Sous l'hypothèse (H), μ est sans atomes et son support est le cercle tout entier. Si l'on utilise μ pour paramétrer le cercle, on obtient alors un homéomorphisme h de S^1 tel que $h \circ \varphi \circ h^{-1}(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$ est formées de rotations. En considérant l'angle de ces rotations, on obtient un morphisme ρ de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Il est immédiat que l'image d'un tel morphisme est contenue dans \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} . \square

Remarquons que $\varphi : \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est injectif. On vérifie qu'une telle injection est nécessairement un automorphisme de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} .

LEMME 3.2. L'automorphisme ρ de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} est égal à $+\text{id}$ ou $-\text{id}$. En composant

éventuellement h avec une symétrie, l'image de la rotation R_x de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} par $h \circ \varphi \circ h^{-1}$ est donc précisément cette même rotation R_x .

Ce lemme sera une conséquence rapide du suivant :

LEMME 3.3. Soit eu la classe d'Euler dans $H^2(\text{Diff}_+^r(S^1); \mathbb{Z})$. Pour démontrer le théorème K, on peut toujours supposer que $\varphi^*(eu) = \pm\chi$.

DEMONSTRATION DE 3.2 A PARTIR DE 3.3. D'après 3.3., ρ se relève en un morphisme

$\tilde{\rho} : \mathbb{Q}_2 \rightarrow \mathbb{Q}_2$ tel que $\tilde{\rho}(1) = \pm 1$. On a donc $\rho(x) = \pm x$. \square

DEMONSTRATION de 3.3. Nous savons que $\varphi(eu) = n\alpha + p\chi$ ($n, p \in \mathbb{Z}$) (théorème c).

Montrons que n est nul. Soit $\sigma = (u, v) - (v, u)$ le 2-cycle de G décrit en II. 4-8. Nous avons vu que $\alpha(\sigma) = \pm 1$. Puisque toute représentation de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dans $\text{Homéo}^+(S^1)$ a une classe d'Euler nulle (voir par exemple [He-Hi]), les entiers $\varphi^*(eu)(\sigma)$ et $\chi(\sigma)$ sont nuls. L'égalité $\varphi^*(eu) = n\alpha + p\chi$ évaluée sur σ donne alors $n = 0$.

Supposons que $p \neq \pm 1$, et considérons le revêtement à p feuillets de $\text{Diff}_+^r(S^1)$ identifié au groupe $\text{Diff}_+^r(S^1, R_{1/p})$ formé des difféomorphismes commutant avec $R_{1/p}$. Dans ces conditions, φ se relève en un morphisme φ_1 de G dans $\text{Diff}_+^r(S^1, R_{1/p})$. On a évidemment $\varphi_1^*(eu) = \pm\chi$. Si l'on démontre le théorème K pour les représentations telles que $\varphi^*(eu) = \pm\chi$, on en déduira que φ_1 est semi-conjugue à l'inclusion de G dans $\text{Homéo}^+(S^1)$. Mais ceci est impossible car un groupe semi-conjugue à G ne peut évidemment pas commuter avec la rotation non triviale $R_{1/p}$. \square

Soit I un intervalle fermé de S^1 dont les deux extrémités sont dyadiques (i.e. éléments de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}). Notons G_I le sous-groupe de G formé des éléments dont le support est contenu dans l'intérieur de I . Ces sous-groupes G_I sont sans torsion et simples car ils sont évidemment isomorphes à F' (voir II 3.15). L'observation de base est la suivante : les intérieurs de deux intervalles I_1 et I_2 sont disjoints si et seulement si tous les éléments de G_{I_1} commutent avec tous les éléments de G_{I_2} . Une telle situation est analysée par le lemme suivant :

LEMME 3.4. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes simples, non triviaux et sans torsion de $\text{Diff}^2(S^1)$. On suppose que les éléments de Γ_1 commutent avec ceux de Γ_2 . Alors, si $\gamma_1 \in \Gamma_1$ et $x \in S^1$ sont tels que $\gamma_1(x) \neq x$, on a nécessairement $\gamma_2(x) = x$ pour tout γ_2 de Γ_2 .

DEMONSTRATION. Nous utiliserons un théorème de N. Koppel [Kop] dont une version peut s'exprimer de la façon suivante [Tsu1] ; si γ_1 et γ_2 sont deux difféomorphismes de S^1 , de classe C^2 , qui commutent et tels que $\text{Fix}(\gamma_1) \neq \emptyset$ et $\text{Fix}(\gamma_2) \neq \emptyset$, alors $\partial(\text{Fix}(\gamma_1)) \subset \text{Fix}(\gamma_2)$.

Commençons par supposer que tous les éléments de Γ_1 et de Γ_2 ont des points fixes. Fixons un élément γ_1 de Γ_1 et considérons l'ouvert $S^1 - \partial(\text{Fix}(\gamma_1))$. Les composantes connexes de cet ouvert sont de deux types : ou bien γ_1 est l'identité sur cette composante, ou bien γ_1 n'a pas de point fixe sur cet intervalle. Notons A_i les composantes du premier type et B_j celles du second; on a $S^1 - \partial(\text{Fix}(\gamma_1)) = (UA_i) \cup (UB_j)$. Si $\gamma_2 \in \Gamma_2$, le théorème de N. Koppel montre que $\partial(\text{Fix}(\gamma_1))$ est formé de points fixes de γ_2 . Par conséquent, Γ_2 opère sur chacune des composantes A_i et B_j . En fixant j , on obtient ainsi une représentation :

$$\gamma_2 \in \Gamma_2 \longrightarrow \gamma_2|_{\overline{B}_j} \in \text{Diff}(\overline{B}_j) .$$

Comme Γ_2 commute avec γ_1 , l'image de ce morphisme est contenue dans le groupe des difféomorphismes de l'intervalle \overline{B}_j qui commutent avec $\gamma_1|_{\overline{B}_j}$. Comme $\gamma_1|_{\overline{B}_j}$ n'a pas de point fixe, ce dernier groupe est abélien (c'est aussi un corollaire du théorème de N. Koppel, voir [Tsu1]). Puisque Γ_2 est simple, ce morphisme est trivial, ce qui montre que γ_2 est l'identité sur les intervalles où γ_1 n'est pas l'identité et c'est précisément ce que nous voulions montrer.

Il nous reste à montrer que l'hypothèse suivant laquelle tous les éléments de Γ_1 et Γ_2 ont des points fixes est inutile.

Montrons d'abord qu'un élément γ de Γ_1 ou de Γ_2 a nécessairement un point périodique. Dans le cas contraire, d'après le théorème de Denjoy, γ serait conjugué à une rotation irrationnelle et le groupe des homéomorphismes de S^1 qui commutent avec γ serait donc conjugué au groupe des rotations et donc abélien. Or le commutant d'un élément de Γ_1 (resp. Γ_2) n'est certainement pas abélien, car il contient le groupe simple Γ_2 (resp. Γ_1).

Soit γ_2 un élément non trivial de Γ_2 . D'après ce que nous venons de voir, une puissance non triviale γ_2^q de γ_2 possède un point fixe. Comme Γ_1 commute avec Γ_2 , le groupe Γ_1 préserve globalement $\text{Fix}(\gamma_2^q)$ et donc $\partial(\text{Fix}(\gamma_2^q))$ (qui est non vide car Γ_2 est sans torsion). On obtient ainsi un morphisme :

$$\psi : \Gamma_1 \longrightarrow \text{Homéo}(\partial\text{Fix}(\gamma_2^q)) .$$

Si γ_1 est un élément non trivial de Γ_1 , une de ses puissances γ_1^ℓ a un point fixe et on peut donc appliquer le lemme de N. Koppel à γ_1^ℓ et γ_1^q . On obtient ainsi $\psi(\gamma_1^\ell) = \text{id}$ et ψ n'est donc pas injective (Γ_1 est sans torsion). Puisque Γ_1 est simple, ψ est trivial, ce qui montre que tous les éléments de Γ_1 ont des points fixes (au moins $\partial\text{Fix}(\gamma_2^q)$). Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Appliquons ce lemme à la situation qui nous intéresse. Notons $\varphi' = h \circ \varphi \circ h^{-1}$ où h désigne encore l'homéomorphisme donné par 3-1. Si I est un intervalle fermé de S^1 d'extrémités dyadiques, on note

$$U_I = \{x \in S^1 \mid \exists \gamma \in G_I, \varphi'(\gamma)(x) \neq x\} \subset S^1.$$

Le lemme précédent montre que si I_1 et I_2 sont deux intervalles dont les intérieurs sont disjoints, alors U_{I_1} et U_{I_2} sont deux ouverts (non vides) et disjoints.

Les lemmes suivants résultent de la définition de U_I et d'une observation précédente.

LEMME 3.5. Si $g \in G$ et si I est un intervalle fermé de S^1 d'extrémités dyadiques, on a $U_{g(I)} = \varphi'(g)(U_I)$. \square

LEMME 3.6. Si $x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ et I est un intervalle, on a $U_I \cap U_{I+x} = \emptyset$ si et seulement si $\overset{\circ}{I} \cap \overset{\circ}{(I+x)} = \emptyset$. \square

C'est cette dernière propriété qui permet essentiellement de caractériser ces ouverts U_I . Le lemme suivant est élémentaire, nous en laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 3-7. Soit $I \subset S^1$ un intervalle fermé de longueur $|I|$ strictement inférieure à $1/2$ et Ω un ouvert de S^1 ayant la propriété suivante :

$$\overset{\circ}{I} \cap \overset{\circ}{(I+x)} = \emptyset \text{ si et seulement si } \Omega \cap (\Omega+x) = \emptyset \quad (x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}).$$

Alors, il existe un unique intervalle fermé J de longueur minimale qui contient Ω et la longueur de J est égale à celle de I . \square

Revenant à notre situation, on voit que, si $|I| < 1/2$, il existe un unique intervalle fermé V_I contenant U_I et de longueur $|I|$. Il est clair que si $I_1 \subset I_2$, alors $V_{I_1} \subset V_{I_2}$.

LEMME 3-8. Quitte à conjuguer φ' par une rotation, on a $V_I = I$ pour tout I tel que $|I| < 1/2$.

DEMONSTRATION. L'intervalle $V_{[0,1/4]}$ est de longueur $1/4$. En conjugant φ' par une rotation, on peut donc supposer que $V_{[0,1/4]} = [0,1/4]$. On a alors $V_{[1/4,1/2]} = V_{[0,1/4]+1/4} = 1/4+[0,1/4] = [1/4,1/2]$ d'après 3-5 et 3-2. De même $V_{[1/2,3/4]} = [1/2,3/4]$ et $V_{[3/4,1]} = [3/4,1]$. Les deux intervalles $V_{[0,1/8]}$ et $V_{[1/8,1/4]}$ sont de longueur $1/8$, différent l'un de l'autre par la rotation d'angle $1/8$ et sont contenus dans $V_{[0,1/4]} = [0,1/4]$. C'est donc que $V_{[0,1/8]} = [0,1/8]$ et $V_{[1/8,3/4]} = [1/8,3/4]$. Par des arguments similaires, on montre que $V_I = I$ pour tout intervalle I d'extrémités dyadiques tel que $|I| < 1/2$. \square

PROPOSITION 3.9. Si φ vérifie l'hypothèse (H), φ est topologiquement conjugué à l'injection de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

DEMONSTRATION. Nous allons montrer que $\varphi' = \text{id}$. Soit $g \in G$, $x \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ et I un intervalle fermé d'extrémités dyadiques dont l'extrémité gauche est x et tel que $|I| < 1/2$ et $|g(I)| < 1/2$. On a :

$$\begin{aligned} V_{g(I)} &= g(I) \quad (\text{lemme 3-8}) \\ &= \varphi'(g)(V_I) \quad (\text{lemme 3-5}) \\ &= \varphi'(g)(I) \quad (\text{lemme 3-8}) \end{aligned}$$

Puisque $g(I) = \varphi'(g)(I)$, leurs extrémités gauches sont égales, c'est-à-dire que $\varphi'(g)(x) = x$. Par densité de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} dans S^1 , on conclut que $\varphi' = \text{id}$. \square

Nous cherchons maintenant à nous débarrasser de l'hypothèse (H).

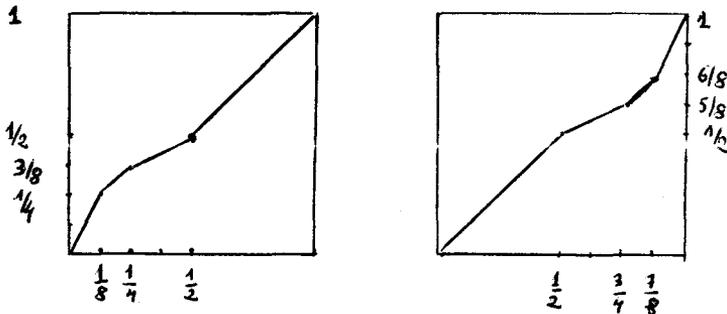
LEMME 3.10. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^2(S^1)$ une représentation quelconque. Alors, il existe un point x de S^1 fixe par $\varphi(F)$.

DEMONSTRATION. Soit I_n l'intervalle $[2^{-n}, 1-2^{-n}]$ de S^1 et U_n l'ouvert de S^1 défini par :

$$U_n = \{x \in S^1 \mid \exists \gamma \in G_{I_n} \quad \varphi(\gamma)(x) \neq x\}.$$

Le fermé $S^1 - U_n$ est non vide car il contient les points non fixes de $\varphi(g)$ où g est à support dans $[0, 2^{-n+1}]$ d'après 3-4. Soit $K \subset S^1$ l'intersection décroissante de ces fermés $S^1 - U_n$. La définition même de K montre que $\varphi(F')$ est l'identité sur K .

Soient g_1 et g_2 les deux éléments de G dont les graphes sont les suivants :



Comme $I_n \subset g_1(I_n) \subset I_{n-1}$ et $I_n \subset g_2(I_n) \subset I_{n-1}$ ($n \geq 2$), on a $U_n \subset \varphi(g_1)(U_n) \subset U_{n-1}$ et $U_n \subset \varphi(g_2)(U_n) \subset U_{n-1}$. Il en résulte que $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ préservent globalement K . Comme nous avons vu que $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ ont au moins un point fixe (voir la démonstration de 3-4), et comme $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ commutent, on en déduit que $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ ont un point fixe commun x_0 dans K . Observons maintenant que tout élément de F s'écrit sous la forme $g_1^n g_2^m g$ où $g \in F'$. Comme $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g_2)$ fixent x_0 et que $\varphi(F')$ est l'identité sur K , on conclut que x_0 est fixé par $\varphi(F)$. \square

LEMME 3.11. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^2(S^1)$ une représentation non triviale. Alors $\varphi(G)$ possède un unique minimal dans S^1 qui est aussi l'unique minimal de $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})$.

DEMONSTRATION. Montrons tout d'abord que $\varphi(G)$ ne peut avoir d'orbite finie. En effet, une telle orbite fournirait une représentation de G sur un groupe fini cyclique et la simplicité de G entraîne alors que l'orbite finie devrait être un point fixe. Mais le groupe des homéomorphismes de S^1 qui fixent un point est un groupe sans torsion, de sorte que ce groupe ne peut contenir $\varphi(G)$ dont la torsion est non triviale.

Deux cas sont alors possibles :

i) Les orbites de $\varphi(G)$ sont denses dans S^1 , i.e. $\varphi(G)$ possède un unique minimal M qui est S^1 .

ii) $\varphi(G)$ possède un unique minimal exceptionnel $M \subset S^1$.

Dans les deux cas M est contenu dans l'ensemble des points d'accumulations de n'importe quelle orbite de $\varphi(G)$.

Les actions effectives de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} sur le cercle peuvent être décrites de la façon suivante :

- a) L'action possède un unique minimal $N \subset S^1$.
- b) Il existe une semi-conjugaison $h : S^1 \rightarrow S^1$ entre l'action considérée et une action de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} sur S^1 par rotations.
- c) Si $N \neq S^1$ et si γ est un élément non trivial de \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} , alors γ envoie une composante connexe de $S^1 - N$ sur une composante connexe distincte.

Ces trois propriétés se montrent facilement en utilisant une mesure de probabilité μ sur S^1 invariante par \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} . Le support de μ est le minimal N et l'intégrale de μ définit la semi-conjugaison h .

La propriété c) montre que si $x \in S^1$, l'orbite de x par \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} ne peut contenir qu'au plus un point dans chaque composante de $S^1 - N$. Il en résulte que, pour tout x de S^1 , l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite de x par \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z} coïncide avec N .

Soit x_0 un point de S^1 fixé par $\varphi(F)$ (lemme 3-8). Comme tout élément de G s'écrit sous la forme $g_1 \cdot g_2$ où $g_1 \in \mathbb{Q}_2/\mathbb{Z}$ et $g_2 \in F$, on a $\varphi(G)(x_0) = \varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})(x_0)$. En considérant les points d'accumulation de $\varphi(\mathbb{Q}_2/\mathbb{Z})(x_0)$, on obtient $M \subset N$. Comme N est clairement contenu dans M , on obtient l'égalité cherchée $M = N$. \square

Nous pouvons démontrer le théorème K.

THEOREME 3.12. Toute représentation non triviale $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^2(S^1)$ est semi-conjugée à l'inclusion canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$.

DEMONSTRATION. Si les orbites de $\varphi(G)$ sont denses, le lemme précédent montrent que φ vérifie la propriété (H) et nous avons déjà montré le théorème (3-9).

Si $\varphi(G)$ possède un minimal exceptionnel M , on considère une application continue monotone $h : S^1 \rightarrow S^1$ de degré topologique 1, telle que $h(M) = S^1$ et h est constante sur les composantes connexes de $S^1 - M$. On peut alors construire une représentation $\varphi' : G \rightarrow \text{Homéo}(S^1)$ qui est semi-conjugue à φ par h . Evidemment, les orbites de φ' sont denses dans S^1 .

On vérifie qu'un groupe d'homéomorphismes de S^1 qui est semi-conjugue à un groupe de difféomorphismes de classe C^2 vérifie lui aussi le théorème de N. Koppel. Tous les arguments précédents peuvent donc s'appliquer à φ' de sorte que φ' est topologiquement conjugué à l'inclusion de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. \square

Pour terminer cette section, nous allons décrire les représentations de G dans $\text{Diff}^2(S^1)$ à conjugaison différentiable près et non pas seulement à semi-conjugaison près. Le cas où les orbites de $\varphi(G)$ sont denses est facile.

THEOREME 3.13. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}_+^r(S^1)$ ($r \geq 2$) une représentation non triviale telle que toutes les orbites de $\varphi(G)$ sont denses. Alors, il existe un difféomorphisme f de \mathbb{R} satisfaisant les conditions (I), (II) et (III_r) tel que φ et φ_f sont conjugués par une rotation.

DEMONSTRATION. L'application $m : x \in S^1 \rightarrow 2x \in S^1$ n'est pas un élément de G , mais il existe un recouvrement de S^1 par des intervalles ouverts I_i et des éléments g_i de G tels que $m|_{I_i} = g_i|_{I_i}$. Soit h une conjugaison topologique entre φ et l'inclusion naturelle de G dans $\text{Homéo}(S^1)$ et soit $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ l'application définie par $\bar{f}|_{h^{-1}(I_i)} = \varphi(g_i)|_{h^{-1}(I_i)}$. Il est clair que \bar{f} est bien défini et ne dépend pas du choix des I_i et des g_i . De plus, \bar{f} est évidemment de classe C^r .

Evidemment, $f(h^{-1}(0)) = h^{-1}(0)$, de sorte que, en conjuguant φ par une rotation, on peut supposer que \bar{f} fixe 0. Le relevé f de \bar{f} à \mathbb{R} tel que $f(0) = 0$ satisfait alors les conditions I, II, et III_R. Les constructions précédentes montrent alors que, après conjugaison par une rotation, on a $\varphi = \varphi_f$. \square

Les représentations φ qui ne sont que semi-conjugées à l'inclusion de G dans $\text{Homéo}(S^1)$ sont plus délicates à décrire complètement. Commençons par montrer un lemme :

LEMME 3.14. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^2(S^1)$ une représentation non triviale et h une semi-conjugaison entre φ et l'inclusion de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. Soit I un intervalle fermé de S^1 d'extrémités dyadiques et g un élément de G tel que $g|_I = \text{id}$. Alors $\varphi(g)|_{h^{-1}(I)} = \text{id}$.

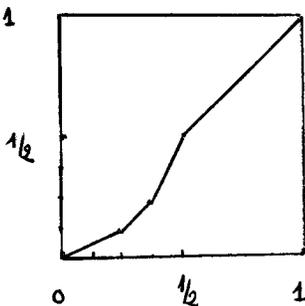
DEMONSTRATION. Soit M l'unique minimal de $\varphi(g)$. On pose :

$$W_I = \{x \in S^1 \mid \forall g \in G, g|_I = \text{id} \Rightarrow \varphi(g)(x) = x\}$$

La semi-conjugaison montre que :

$$W_I \cap M = h^{-1}(I) \cap M.$$

Pour simplifier, prenons $I = [0, 1/2]$ et considérons alors l'élément g_1 de G dont le graphe est le suivant :



Soit $g \in G$ tel que $g|_I = \text{id}$. Les éléments $\varphi(g_1)$ et $\varphi(g)$ commutent et préservent l'intervalle $J = h^{-1}(]0, 1/2[)$. Par ailleurs, $\varphi(g_1)$ n'a pas de points fixes sur J alors que $\varphi(g)$ fixe tous les points de $M \cap J$. On peut donc appliquer le théorème de N. Koppel pour conclure que $\varphi(g)|_J = \text{id}$ et donc que $\varphi(g)|_{h^{-1}(I)} = \text{id}$. \square

Le théorème suivant montre que les représentations φ ayant une orbite non denses sont "presque" conjuguées à une représentation du type φ_f .

THEOREME 3.15. Soit $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^r(S^1)$ ($r \geq 2$) une représentation non triviale ayant une orbite non dense et h une semi-conjugaison entre φ et l'inclusion de G dans $\text{Homéo}(S^1)$. Il existe un difféomorphisme f de \mathbb{R} satisfaisant les conditions (I), (II) et (III_r) et une rotation R de S^1 ayant la propriété suivante. Si $g \in G$ et si x_1, x_2, \dots, x_k sont les points de S^1 où g n'est pas différentiable, alors $\varphi(g)$ et $R\varphi_f R^{-1}(g)$ coïncident sur $S^1 - h^{-1}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

DEMONSTRATION. On reprend les notations de la démonstration du théorème 3.13. Le lemme précédent montre précisément que l'application $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f|_{h^{-1}(I_i)} = \varphi(g_i)|_{h^{-1}(I_i)}$ est bien définie et ne dépend pas du choix des I_i et de g_i . Cette application est de classe C^r et nous verrons plus bas qu'il existe un point fixe pour \bar{f} tel que le $r^{\text{ème}}$ jet de \bar{f} en ce point est celui de l'identité. En conjuguant φ par une rotation R , on peut donc supposer qu'un relevé f de \bar{f} à \mathbb{R} satisfait les propriétés (I), (II), et (III_r). Le fait que $\varphi(g)$ et $R\varphi_f R^{-1}(g)$ coïncident sur $S^1 - h^{-1}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ résulte alors de la définition de f . \square

Il nous reste à décrire $\varphi(g)$ sur $h^{-1}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Remarquons que $h^{-1}(0)$ est la projection dans S^1 de l'intervalle maximal J de \mathbb{R} dont les

extrémités sont des points fixes de f .

LEMME 3.16 . On se place dans les conditions du théorème 3.15. Si $g \in F$, le difféomorphisme $\varphi(g)$ de l'intervalle $J = h^{-1}(0) = [\alpha, \beta]$ ne dépend que des dérivées à gauche et à droite de g en 0 . Ceci définit donc une représentation ψ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dans $\text{Diff}(J)$ ayant les propriétés suivantes :

- i) Le $r^{\text{ème}}$ jet de $\psi(m, n)$ en α est celui de f^m en α .
- ii) Le $r^{\text{ème}}$ jet de $\psi(m, n)$ en β est celui de f^m en β .
- iii) $\psi(1, 1) = f|_{[\alpha, \beta]}$.

DEMONSTRATION. La première assertion est une conséquence du lemme 3.14 ; si g_1 et g_2 sont des éléments de F ayant mêmes dérivées à droite et à gauche en 0 , alors le germe de $g_1^{-1} g_2$ en 0 est trivial et le germe de $\varphi(g_1^{-1} g_2)$ au voisinage de $h^{-1}(0)$ est donc lui aussi trivial. Les propriétés i) et ii) résultent du théorème 3.15; si g est un élément de F dont les dérivées à gauche et à droite en 0 sont 2^m et 2^n , alors d'après 3.13, $\varphi(g)$ coïncide avec \bar{f}^m sur un "demi-voisinage gauche" de α et avec \bar{f}^n sur un "demi-voisinage droit de β ". La propriété iii) résulte aussi de 3.15; si les dérivées à gauche et à droite de $g \in F$ en 0 sont égales à 2, alors g est différentiable en 0 et $\varphi(g)$ coïncide donc avec $\varphi_{\bar{f}}(g)$ au voisinage de $h^{-1}(0)$, c'est-à-dire avec \bar{f} au voisinage de $h^{-1}(0) = [\alpha, \beta]$. \square

Si un C^r -difféomorphisme de $[0, 1]$ ne possède pas de point fixe où son $r^{\text{ème}}$ jet est celui de l'identité, il en est de même pour tout difféomorphisme non trivial qui commute avec lui (voir [Tsu 1]). Comme le jet de $\psi(0, 1)$ est trivial en α , cette remarque montre qu'il existe au moins un point de $[\alpha, \beta]$ fixe par \bar{f} et

tel que le $r^{\text{ème}}$ jet de \bar{f} en ce point est trivial. C'est cette affirmation qui manquait à la démonstration de 3.15.

Nous pouvons décrire maintenant les représentations non triviales $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^r(S^1)$ à conjugaison différentiable près.

THEOREME 3.17. A conjugaison par une rotation près, la donnée d'une représentation non triviale φ de G dans $\text{Diff}^r(S^1)$ est équivalente à la donnée des deux objets suivants :

- 1) Un difféomorphisme f de \mathbb{R} satisfaisant I, II, et III_r.
- 2) Un morphisme $\psi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Diff}^r([\alpha, \beta])$ (où $[\alpha, \beta]$ est l'intervalle maximal fixe par f) vérifiant i), ii) et iii).

La donnée de 2) est inutile lorsque les orbites de $\varphi(G)$ sont denses car alors $\alpha = \beta$.

DEMONSTRATION. Nous avons déjà vu comment associer un couple (f, ψ) à une représentation φ . Montrons comment construire φ à partir d'un tel couple.

Soit h une semi-conjugaison entre \bar{f} et $x \in S^1 \rightarrow 2x \in S^1$ (Lemme 1-9). Soit $g \in G$ et $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ les points de S^1 où g n'est pas différentiable.

Posons $y_i = g(x_i)$. Sur $X = S^1 - h^{-1}\{x_1, \dots, x_k\}$, on pose $\varphi(g)|_X = \varphi_f(g)|_X$. Il nous reste à définir $\varphi(g)$ sur les intervalles du type $h^{-1}(x_1)$. Observons

que $R_{-y_1} g R_{x_1}$ est un élément de F

et que R_{-y_1} et R_{x_1} sont différentiables partout, de sorte que $\varphi(R_{x_1})$ et $\varphi(R_{-y_1})$ sont déjà définis. Pour définir $\varphi(g)$ sur $h^{-1}(x_1)$, il nous suffit donc de définir $\varphi(g)$ sur $h^{-1}(0) = [\alpha, \beta]$ lorsque $g \in F$. On pose alors

$\varphi(g)|_{h^{-1}(0)} = \psi(m, n)$ où 2^m et 2^n sont les dérivées à gauche et à droite de g en 0. Il est facile de vérifier que l'on définit bien ainsi une représentation

φ de G dans $\text{Diff}^r(S^1)$. \square

III. 4. COROLLAIRES DU THEOREME K.

Le corollaire L est maintenant clair : si $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}^\infty(S^1)$ est topologiquement conjugué à l'inclusion canonique de G dans $\text{Homéo}(S^1)$, alors φ est évidemment semi-structurellement stable.

Nous démontrons maintenant le théorème F relatif à l'invariant de Godbillon-Vey. Commençons par quelques rappels concernant cet invariant. Soit $B\Gamma_2^1$ le classifiant de Haefliger des Γ -structures transversalement orientées, de codimension 1 et de classe C^2 . L'invariant de Godbillon-Vey est une classe de cohomologie, que nous notons GV , dans $H^3(B\Gamma_2^1; \mathbb{R})$. Le S^1 -fibré au-dessus de $B\text{Diff}_+^2(S^1)$ associé à l'action de $\text{Diff}_+^2(S^1)$ sur S^1 a le type d'homotopie de $\widetilde{B\text{Diff}_+^2(S^1)}$. Ce fibré est muni d'une Γ_2^1 -structure "horizontale" qui est classifiée par une application $q : \widetilde{B\text{Diff}_+^2(S^1)} \rightarrow B\Gamma_2^1$ définie à homotopie près. L'image réciproque q^*GV est une classe de cohomologie, notée encore GV dans $H^3(\widetilde{B\text{Diff}_+^2(S^1)}; \mathbb{R}) \simeq H^3(\widetilde{\text{Diff}_+^2(S^1)}; \mathbb{R})$. L'image de GV par le morphisme d'intégration sur la fibre $H^3(\widetilde{\text{Diff}_+^2(S^1)}; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(\text{Diff}_+^2(S^1); \mathbb{R})$ est une classe de cohomologie que nous notons gv (voir par exemple [Mi-TS] ou [Mor]). Nous nous proposons de montrer que, pour toute représentation $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$, on a $\varphi^*(gv) = 0$ dans $H^2(G; \mathbb{R})$. Soit eu la classe d'Euler dans $H^2(\text{Diff}_+^2(S^1); \mathbb{Z})$.

LEMME 4.19. Si $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$ est un morphisme non trivial, on a $\varphi^*(eu) = \pm \chi$.

DEMONSTRATION. La façon la plus rapide de montrer ce lemme est d'utiliser le théorème K et d'observer que la classe d'Euler est invariante par semi-congaison respectant l'orientation (voir [Gh2]). \square

Quitte à conjuguer φ par une symétrie, nous pouvons donc supposer que $\varphi^*(eu) = \chi$. Nous avons donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \widetilde{\text{Diff}}_+^2(S^1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xrightarrow{\varphi} & \text{Diff}_+^2(S^1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 & & 1
 \end{array}$$

LEMME 4.10. Pour toute représentation $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$, il existe un réel k tel que $\varphi^*(gv) = k\alpha$ dans $H^2(G; \mathbb{R})$.

DEMONSTRATION. On peut supposer que φ est non triviale. La naturalité de l'intégration sur la fibre montre que $\tilde{\varphi}^*(gv)$ est aussi l'image de $\varphi^*(GV)$ par l'intégration sur la fibre $H^3(\tilde{G}; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G; \mathbb{R})$. Comme $H^3(\tilde{G}; \mathbb{R})$ est engendré par la classe β et que l'intégrale sur la fibre de β n'est autre que $\alpha \in H^2(G; \mathbb{R})$, on obtient le résultat. \square

Nous terminons maintenant la démonstration du théorème F.

THEOREME 4.11. Pour toute représentation $\varphi : G \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$, on a $\varphi^*(gv) = 0$.

DEMONSTRATION. Utilisons de nouveau le cycle $\sigma = (u,v) - (v,u)$ fourni par le lemme II-4.8. Comme l'invariant de Godbillon-Vey d'une représentation de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

dans $\text{Diff}_+^2(S^1)$ est nul (voir [Her]), on a $\varphi^*(gv)(\sigma) = 0$. Par ailleurs, nous savons que $\alpha(\sigma) = 1$ (lemme II. 4.8). En évaluant l'égalité $\varphi^*(gv) = k\alpha$ sur σ , on obtient alors que k est nul. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [Bot] R. Bott, On some formulas for the characteristic classes of group actions, Springer Lecture Notes N° 652, p. 25-61 (1978), appendice par R. Brooks.
- [Br-Sq] M.G. Brin, C.C. Squier, Groups of piece-wise linear homeomorphisms of the real line, Invent. Math. 79, 485-498 (1985).
- [Br-Ge] K.S. Brown, R. Geoghegan, An infinite dimensional torsion free FP_{∞} group, Invent. Math. 77, 367-381 (1984).
- [Dyd] J. Dydak, A simple proof that pointed FANR-spaces are regular fundamental retracts of A.N.R's. Bull Acad. Pol. Sci. (Ser. Sci. Math. Astr. Phys.) 25, 55-62 (1977).
- [Eps] D. Epstein, The simplicity of certain groups of homeomorphisms, Compositio Math. 22, 165-173 (1970).
- [Fr-He] P. Freyd, A. Heller, Splitting homotopy idempotents, II, Mimeographed, U. Penn., 1979.
- [Gh-1] E. Ghys, Classe d'Euler et minimal exceptionnel, à paraître dans Topology.
- [Gh-2] E. Ghys, Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée, A paraître dans Contemporary Mathematics, Proceedings colloque Lefschetz, Mexico 1984.
- [Gr-1] P. Greenberg, Classifying spaces for foliations with isolated singularities, preprint.
- [Gr-2] P. Greenberg, Actions of pseudo-groups, preprint.
- [Ha-1] A. Haefliger, Homotopy and integrability, in Springer Lecture Notes n° 179 (1971), 133-163.

- [Ha-2] A. Haefliger, Sur les classes caractéristiques des feuilletages, Séminaire Bourbaki, exposé 412, 1970-71.
- [He-Hi] G. Hector, U. Hirsch, Introduction to the geometry of foliations, Part B, Vieweg, Wiesbaden, 1983.
- [Her] M. Herman, The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3 , Geometry and Topology, Rio de Janeiro, Springer Lecture Notes, n° 597 (1976) 294-307.
- [Hin] N. Hingston, Equivariant Morse theory and closed geodesics, J. Differential Geometry, 19 (1984) 85-116.
- [Ho-Se] G. Hochschild, J.-P. Serre, Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953) 110-134.
- [Kop] N. Koppel, Commuting diffeomorphisms, Global Analysis, Symp. Pure Math. Vol. XIV, A.M.S. (1970) 165-184.
- [McD1] D. McDuff, Foliations and monoids of embeddings, in Geometric Topology; ed. Cantrell, Academic Press (1979), 429-444.
- [McD2] D. McDuff, The homology of some groups of diffeomorphisms, Comment. Math. Helvetici 55 (1980) 97-129.
- [MD-Se] D. McDuff, G.B. Segal, Homology fibrations and the group completion theorem, Invent. Math. 31, (1976), 279-284.
- [MK-Th] R. Mc-Kenzie, R.J. Thomson, An elementary construction of unsolvable problems in group theory, Word Problems, W.W., Cannonito F.B., Lyndon, R.C. (eds). Amsterdam North Holland.
- [Mat] J. Mather, Integrability in codimension one, Comment. Math. Helv., 48 (1973), 1925-233.
- [Mi-Ts] T. Mizutani, T. Tsuboi, Foliations without holonomy and foliated bundles, Sci. Rep. Satama Univ., 9, 45-55, (1979).

- [Mor] S. Morita, Nontriviality of the Gelfand-Fuchs characteristic classes for flat S^1 -bundles, Osaka J. Math. 21 (1984) 545-563.
- [Qui] D.G. Quillen, Higher algebraic K-theory I, in Algebraic K-theory I, 85-147. Lecture Notes in Mathematics, n° 341. Springer 1973.
- [Seg1] G.B. Segal, Classifying spaces and spectral sequences, Pub. Math. I.H.E.S., 34 (1968), 105-112.
- [Seg2] G.B. Segal, Categories and cohomology theory, Topology, 13 (1974), 293-312.
- [Seg3] G.B. Segal, Classifying spaces related to foliations, Topology, 17 (1978) 367-382.
- [Ser] F. Sergeraert, BF (d'après Mather et Thurston), Séminaire Bourbaki exposé n° 524 (1978).
- [Shu] M. Shub, Expanding maps, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 14 (1970) Amer. Math. Soc., 273-276.
- [Spa] E.H. Spanier, Algebraic topology, McGrawHill, New-York 1966.
- [Tsu1] T. Tsuboi, On 2-cycles of $B\text{Diff}(S^1)$ which are represented by foliated S^1 -bundles over T^2 , Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31, 2 (1981), 1-59.
- [Tsu2] T. Tsuboi, Foliated cobordism classes of certain foliated S^1 -bundles over surfaces, Topology Vol. 23, n° 2, p. 233-244, 1984.
- [Zim] R.J. Zimmer, Ergodic theory and semisimple groups, Monographs in Mathematics, Vol. 81, Birkhäuser (1984).
- [?] Notes manuscrites d'auteur inconnu décrivant des groupes simples, infinis, de présentation finie (dûs à R.J. Thomson). L'un de ces groupes est G .

LA COHOMOLOGIE BASIQUE D'UN FEUILLETAGE

RIEMANNIEN EST DE DIMENSION FINIE

Aziz El Kacimi-Alaoui, Vlad Sergiescu et Gilbert Hector

La cohomologie basique d'un feuilletage Riemannien est de dimension finie

Aziz El Kacimi-Alaoui, Vlad Sergiescu et Gilbert Hector

Université des Sciences et Techniques de Lille I, ERA au CNRS 07590,
UER de Mathématiques, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

0. Introduction

Le complexe des formes basiques sur une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) a été introduit par Reinhart dans [12]. Ses éléments sont les formes différentielles ω sur M , qui, pour tout champ X tangent à \mathcal{F} vérifient les conditions:

- i) $i_X \omega = 0$.
- ii) $i_X d\omega = 0$.

Désignons par $H^*(M/\mathcal{F})$ la cohomologie de ce complexe. On peut envisager $H^*(M/\mathcal{F})$ comme cohomologie de la structure transverse, voire de l'espace des feuilles de \mathcal{F} . Ainsi, lorsque \mathcal{F} provient d'une fibration, la cohomologie $H^*(M/\mathcal{F})$ s'identifie à la cohomologie de de Rham de l'espace de base de la fibration.

Lorsque la variété M est fermée, il est immédiat que les espaces vectoriels $H^0(M/\mathcal{F})$ et $H^1(M/\mathcal{F})$ sont de dimension finie. A l'opposé, tous les autres espaces vectoriels $H^k(M/\mathcal{F})$, $k \leq \text{cod } \mathcal{F}$, peuvent être de dimension infinie comme le montrent les exemples de G.W. Schwarz [15].

Si on suppose que \mathcal{F} est un feuilletage riemannien, Reinhart affirme dans [13] que la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie et vérifie la dualité de Poincaré. Toutefois, un exemple dû à Y. Carrière [3] montre que cette seconde affirmation n'est pas exacte. L'erreur détectée compromet aussi la preuve de l'assertion de finitude. Celle-ci devient désormais une question ouverte.

Récemment, Kamber et Tondeur [10] ont montré que le résultat de Reinhart reste vrai si le feuilletage est minimalisable (taut). Ils démontrent également un théorème de finitude pour les feuilletages étirés (tense). Les démonstrations dans [13], ainsi que dans [10] sont basées sur les méthodes de la théorie de Hodge.

Dans le même esprit, on trouvera une étude de la cohomologie basique des feuilletages riemanniens dans [7].

Le but de ce travail est de démontrer à l'aide d'une approche différente le:

Théorème 0. Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien de codimension n sur une variété fermée M . Alors la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie. De plus, $H^n(M/\mathcal{F})$ est isomorphe à 0 ou \mathbb{R} .

Notre preuve utilise un théorème de P. Molino [11] qui décrit la structure d'un feuilletage riemannien à l'aide de deux fibrations. Les cohomologies des différentes variétés et des feuilletages qui interviennent dans ce théorème sont reliées à l'aide de deux suites spectrales du type Leray-Serre. Celles-ci nous permettent de conclure.

Le premier paragraphe contient des préliminaires. Dans le paragraphe II, nous traitons le cas des feuilletages transversalement parallélisables. La démonstration du théorème 0 est donnée dans le paragraphe III.

I. Préliminaires

Ce paragraphe est destiné au rappel de quelques notions et résultats utiles par la suite. Nous donnons également deux exemples pour les illustrer.

Toutes les structures considérées dans ce travail sont de classe C^∞ .

Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une variété fermée M . On note $C^\infty(M)$ l'anneau des fonctions C^∞ sur M et $\Gamma(\mathcal{F})$ le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs tangents à \mathcal{F} .

Le complexe des formes basiques sur (M, \mathcal{F}) sera noté $\Omega^*(M/\mathcal{F})$. La condition $\omega \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$ est équivalente à : si $X \in \Gamma(\mathcal{F})$ on a :

- i) $i_X \omega = 0$
- ii) $\theta_X \omega = 0$

où θ_X est la dérivée de Lie associée à X .

Définition 1.1. Le feuilletage \mathcal{F} est transversalement parallélisable s'il existe sur M n -champs de vecteurs transverses indépendants en chaque point qui le laissent invariant.

Un tel feuilletage est riemannien. Sa structure est donnée par le théorème suivant, dû à Conlon [5] en codimension deux et à Molino [11] en général :

Théorème 1.2. Supposons que \mathcal{F} est transversalement parallélisable sur M . Alors :

- i) Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont les fibres d'une fibration localement triviale $F \hookrightarrow M \xrightarrow{\Pi} W$.
- ii) Il existe un groupe de Lie 1-connexe G tel que le feuilletage induit dans chaque fibre est transversalement de Lie de groupe G .

L'application Π est appelée la fibration basique de \mathcal{F} .

Remarque 1.3. Les trivialisations locales de Π peuvent être choisies de façon à respecter le feuilletage sur chaque fibre [11].

Exemple 1.4 ([3]). Soient $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique et λ une de ses valeurs propres. La direction propre associée à λ définit sur $T^2 \times I$ un flot ϕ invariant par l'identification $(m, 0) \sim (A(m), 1)$. On obtient ainsi sur la variété quotient T_A^3 un flot transversalement de Lie le groupe affine de \mathbb{R} , donc

transversalement parallélisable. La fibration basique s'identifie à la fibration naturelle $T^2 \rightarrow T_A^3 \rightarrow S^1$. \square

Supposons que \mathcal{F} est un feuilletage riemannien. Soit \hat{M} le fibré des repères orthonormés transverses à \mathcal{F} . En utilisant la connexion de Levi-Civita transverse, il est démontré dans [11] le:

Théorème 1.5. *Le feuilletage \mathcal{F} se relève sur \hat{M} en un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de même dimension qui est transversalement parallélisable.*

Exemple 1.6 (voir aussi [3]). Considérons la sphère S^3 plongée dans \mathbb{C}^2 comme $\{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$.

Soit (φ_t) le flot riemannien sur S^3 défini comme suit:

$$\varphi_t(z_1, z_2) = (e^{i\lambda t} z_1, e^{i\mu t} z_2)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si λ et μ sont indépendants sur \mathbb{Q} , le flot (φ_t) a deux orbites fermées.

Dans ce cas, en regardant les relevés d'une orbite fermée on constate que la fibration basique a comme fibre le tore T^2 .

La fibration des repères $SO(2) \hookrightarrow \hat{S}^3 \rightarrow S^3$ induit un isomorphisme $\pi_1(SO(2)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\hat{S}^3)$. Il en résulte que l'application $\pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(\hat{S}^3)$ est surjective. D'où $\pi_1(W) = 0$ et donc W est une sphère S^2 . \square

II. Le cas transversalement parallélisable

Dans ce paragraphe, on établit à l'aide du théorème 1.2 l'existence d'une suite de Mayer-Vietoris généralisée pour la cohomologie basique et celle d'une suite spectrale qui converge vers cette cohomologie. Pour ceci nous utilisons un complexe double de Čech-de Rham. Notre référence dans ce paragraphe est [1].

Supposons d'abord que dans le théorème 1.2 la variété W est un point. Le feuilletage \mathcal{F} est alors transversalement de Lie de groupe G et à feuilles denses. Soit \tilde{M} le revêtement universel de M . D'après Fedida [8], il existe une fibration $D: \tilde{M} \rightarrow G$ dont les fibres sont des revêtements des feuilles de \mathcal{F} . De plus, il existe une représentation $h: \pi_1(M) \rightarrow G$ dont l'image est dense et telle que $D(\alpha \cdot \tilde{m}) = h(\alpha)D(\tilde{m})$. Ceci permet d'identifier le complexe $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ au complexe des formes invariantes à gauche sur G . On en déduit la:

Proposition II.1 [6]. *La cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ est isomorphe à la cohomologie de l'algèbre de Lie du groupe G .* \square

On suppose dorénavant que la variété W n'est pas réduite à un point.

Soit $\mathcal{U} = \{\tilde{U}_i\}_{i=1, \dots, k}$ un recouvrement de W et posons pour tout $i: U_i = \Pi^{-1}(\tilde{U}_i)$. On munit U_i du feuilletage induit par \mathcal{F} .

Pour tout multi-indice (i_0, \dots, i_p) on note $U_{i_0 \dots i_p}$ l'ouvert $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$. On a une suite de restrictions:

$$\Omega^*(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{r} \prod_{i_0} \Omega^*(U_{i_0}/\mathcal{F}) \xrightarrow[\delta_1]{\delta_0} \prod_{i_0 < i_1} \Omega^*(U_{i_0 i_1}/\mathcal{F}) \rightrightarrows \dots \quad (1)$$

En définissant le cobord $\delta = \sum_i (-1)^i \delta_i$ on obtient une suite:

$$0 \rightarrow \Omega^*(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{r} \prod_{i_0} \Omega^*(U_{i_0}/\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \prod_{i_0 < i_1} \Omega^*(U_{i_0 i_1}/\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \dots \quad (2)$$

Les feuilles de \mathcal{F} sont contenues dans les fibres de Π . En relevant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\check{\mathcal{U}}$ on obtient une partition de l'unité basique sur M , permettant de montrer que la suite (2) est exacte.

Posons $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q_{\mathcal{F}}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^q(U_{i_0 \dots i_p}/\mathcal{F})$ et $D = \delta + (-1)^p d$. On obtient alors le

Théorème II.2. *L'application de restriction:*

$$r: \Omega^*(M/\mathcal{F}) \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \Omega^*_{\mathcal{F}})$$

induit un isomorphisme

$$r^*: H^*(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^*_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*_{\mathcal{F}})\}. \quad \square$$

Dans la suite nous aurons besoin du:

Lemme II.3. *Soit \check{U} un ouvert contractile de W et posons $U = \Pi^{-1}(\check{U})$. Alors la cohomologie basique $H^*(U/\mathcal{F})$ est isomorphe à la cohomologie de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} du groupe G .*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition II.1 et de la remarque qui suit le théorème I.2. On peut en effet construire un isomorphisme naturel de complexes:

$$\Omega^*(U/\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\check{U}) \otimes \Lambda^*(\mathfrak{G}^*).$$

La conclusion est alors immédiate. \square

Supposons le recouvrement $\check{\mathcal{U}}$ simple. Considérons le double complexe K défini comme suit:

$$K^{p,q} = C^p(\mathcal{U}, \Omega^q_{\mathcal{F}})$$

muni de la différentielle $D = \delta + (-1)^p d$.

On obtient à partir de K une suite spectrale $\{E_r\}$ dont le terme E_1 est donné par:

$$E_1^{p,q} = C^p(\check{\mathcal{U}}, \mathcal{H}^q_{\mathcal{F}}),$$

où $\mathcal{H}^q_{\mathcal{F}}$ désigne le préfaisceau (ainsi que le faisceau associé) $\mathcal{H}^q_{\mathcal{F}}(\check{U}) = H^q(U/\mathcal{F})$ sur W . Le lemme II.3 implique que $\mathcal{H}^q_{\mathcal{F}}$ est localement isomorphe à $H^q(\mathfrak{G})$. D'autre part, comme $d_1 = \delta$ sur E_1 on aura:

$$E_2^{p,q} = H^p(\check{\mathcal{U}}, \mathcal{H}^q_{\mathcal{F}}).$$

La suite $\{E_r\}$ converge vers $H^*_D(K)$ qui est d'après le théorème II.2 isomorphe à $H^*(M/\mathcal{F})$. A l'aide du lemme II.3 on obtient finalement le

Théorème II.4. *Il existe une suite spectrale $\{E_r\}$ qui converge vers la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ et dont le terme E_2 est:*

$$E_2^{p,q} = H^p(W, \mathcal{H}^q_{\mathcal{F}}).$$

Corollaire II.5. *La cohomologie basique d'un feuilletage transversalement parallélisable sur une variété fermée est de dimension finie.*

Démonstration. La fibre du faisceau localement constant $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^q$ est un espace vectoriel de dimension finie. Dans ces conditions la variété W étant compacte, il en résulte que la cohomologie $H^*(W, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^q)$ est de dimension finie. Le théorème II.4 permet alors de conclure. \square

Remarques II.6. i) Le corollaire II.5 est aussi une conséquence d'un résultat de K.S. Sarkaria, basé sur les techniques de paramètrix [14].

ii) Une démonstration élémentaire de II.5 peut être donnée en utilisant l'exactitude de la suite (2) et une récurrence sur le nombre d'ouverts d'un recouvrement simple de W .

Corollaire II.7. *La cohomologie en dimension maximale $H^n(M/\mathcal{F})$ est isomorphe à 0 ou \mathbb{R} .*

Démonstration. Il résulte de l'existence de la suite spectrale précédente que

$$H^s(W, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^t) \simeq E_2^{s,t} \simeq E_{\infty}^{s,t} \simeq H^n(M/\mathcal{F})$$

où $s = \dim W$ et $t = n - s$ est la dimension de l'algèbre de Lie \mathfrak{G} .

Si \mathfrak{G} n'est pas unimodulaire $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^t = 0$. Sinon $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}^t$ est un faisceau localement constant de fibre \mathbb{R} . Soit \mathcal{O} le faisceau des orientations de W . La cohomologie $H^s(W, \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^t)$ s'identifie par dualité de Poincaré à $H^0(\mathcal{O} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{F}}^{t-1})$ qui est isomorphe à 0 ou \mathbb{R} .

Exemple II.8. Reprenons le feuilletage ϕ de l'exemple I.4. On recouvre S^1 par deux intervalles ouverts \check{U} et \check{V} . Alors:

$$U = \Pi^{-1}(\check{U}) \simeq T^2 \times [0, 1], \quad V = \Pi^{-1}(\check{V}) \simeq T^2 \times [0, 1]$$

et

$$K = U \cap V = T^2 \times [0, 1] \coprod T^2 \times [0, 1].$$

La suite exacte (2) devient:

$$0 \rightarrow \Omega^*(T_A^3/\phi) \rightarrow \Omega^*(U/\phi) \oplus \Omega^*(V/\phi) \rightarrow \Omega^*(K/\phi) \rightarrow 0.$$

Puisque $H^0(T^2 \times [0, 1]/\phi) \simeq H^1(T^2 \times [0, 1]/\phi) \simeq \mathbb{R}$, on en déduit la suite exacte de cohomologie:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^1(T_A^3/\phi) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\lambda^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^2(T_A^3/\phi) \rightarrow 0$$

où $\lambda^*(a, b) = (a - b, a - A^*b)$. On en déduit que $H^2(T_A^3/\phi) = 0$ et $H^1(T_A^3/\phi) = \mathbb{R}$. \square

Remarque II.9. La cohomologie $H^*(T_A^3/\phi)$ est calculée dans [3] par une méthode différente.

III. Le cas général

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème 0. Si \mathcal{F} est un feuilletage riemannien transversalement orientable on sait d'après le théorème I.5 que le

feuilletage relevé $\hat{\mathcal{F}}$ est transversalement parallélisable. On reliera leurs cohomologies basiques à l'aide d'une suite spectrale.

Rappelons que l'algèbre des formes différentielles sur le $SO(n)$ fibré principal $\hat{M} \rightarrow M$ est une $so(n)$ -A.D.G. ([4] ou [9]).

Revenons au complexe $\Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ pour prouver le :

Lemme III.1. *L'algèbre $\Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ est une $so(n)$ -sous-ADG de $\Omega^*(\hat{M})$.*

Démonstration. La seule chose à vérifier est que pour $X \in so(n)$ les opérateurs i_X et θ_X préservent $\Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$. Soient $\omega \in \Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ et $Y \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$. Alors $i_Y i_X \omega = -i_X i_Y \omega = 0$. Puisque $SO(n)$ préserve $\hat{\mathcal{F}}$, le crochet $[X, Y] \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$ (X étant vu comme champ fondamental). D'après une formule classique on a : $\theta_Y i_X \omega = i_{[X, Y]} \omega + i_X i_Y \omega = 0$. Ainsi $i_X \omega \in \Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$.

Montrons que $\theta_X \omega \in \Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$. D'abord, $i_Y \theta_X \omega = \theta_X i_Y \omega - i_{[X, Y]} \omega = 0$. Une autre formule donne :

$$\theta_Y \cdot \theta_X \omega = \theta_{[X, Y]} \omega - \theta_X \cdot \theta_Y \omega = 0. \quad \square$$

Considérons à présent, la connexion de Levi-Civita transverse sur \hat{M} . D'après [11] ω est transverse projetable. Ceci revient à dire que si $Y \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$, alors $\omega(Y) = 0$ et que si de plus $\omega(X) = 0$ alors $\omega([X, Y]) = 0$. Soit $\omega^* : so(n) \rightarrow \Omega^1(\hat{M})$ associée à ω ([4]).

Lemme III.2. *La connexion algébrique $\omega^* : so(n) \rightarrow \Omega^1(\hat{M})$ est en fait à valeurs dans $\Omega^1(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$.*

Preuve. Soient $h^* \in so(n)$, $Y \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$. Puisque $\omega(Y) = 0$ on a :

$$i_Y \omega^*(h^*) = \omega^*(h^*)(Y) = \langle h^*, \omega(Y) \rangle = 0.$$

Si X est un champ sur M on a :

$$d[\omega^*(h^*)](X, Y) = -Y\omega^*(h^*)(X) - \omega^*(h^*)[X, Y].$$

Distinguons deux cas :

i) Le champ X est horizontal. Alors $[X, Y]$ est aussi horizontal et la forme $\omega^*(h^*)$ s'annule sur ces champs.

ii) Le champ X est vertical. On peut supposer que c'est un champ fondamental. Puisque $\omega(X) = X$ on a $\omega^*(h^*)(X) = \langle h^*, X \rangle = \text{constante}$, d'où $Y[\omega^*(h^*)(X)] = 0$. Par ailleurs comme $[X, Y] \in \Gamma(\hat{\mathcal{F}})$, on a

$$\omega^*(h^*)[X, Y] = 0;$$

ce qui achève la démonstration. \square

Les lemmes précédents disent que les formes basiques $\Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ forment une $so(n)$ -A.D.G. munie d'une connexion algébrique. Il existe alors une suite spectrale $\{E_r\}$ qui converge vers $H^*(\Omega^*_I(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}}))$ et telle que $E_2^{p,q} \simeq H^p(M/\mathcal{F}) \otimes H^q(so(n))$ (voir [9], III.9.5).

Par ailleurs l'inclusion des formes basiques $SO(n)$ invariantes $\Omega^*_I(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ dans $\Omega^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ induit un isomorphisme en cohomologie par un argument classique de moyennisation.

Nous pouvons maintenant donner la :

Démonstration du théorème 0. En passant éventuellement à un revêtement à 2 feuillets on peut supposer le feuilletage \mathcal{F} transversalement orientable. D'après

le corollaire II.5 la cohomologie $H^*(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}})$ est de dimension finie. La première partie du théorème résulte en démontrant par récurrence l'affirmation.

(P_l) Les espaces vectoriels $H^k(M/\mathcal{F}) = E_2^{k,0}$ sont de dimension finie pour $k \leq l$.

L'hypothèse de récurrence implique que les termes $E_r^{p,q}$, $r \geq 2$, $p \leq l$ sont de dimension finie. Comme la différentielle d_r est nulle sur $E_r^{l+1,0}$, $r \geq 2$, et que $E_\infty^{l+1,0}$ est de dimension finie on en déduit que $H^{l+1}(M/\mathcal{F}) = E_2^{l+1,0}$ est de dimension finie.

Il reste à montrer que $H^n(M/\mathcal{F})$ est 0 ou \mathbb{R} . Puisque $E_r^{p,q} = 0$ dès que $p > n$ ou $q > m = \dim SO(n)$ on voit que

$$H^n(M/\mathcal{F}) \simeq E_2^{n,m} \simeq E_\infty^{n,m} \simeq H^{n+m}(\hat{M}/\hat{\mathcal{F}}).$$

Le résultat découle du corollaire II.7. \square

Remarque III.3. On peut avoir $H^n(M/\mathcal{F}) = 0$ même si \mathcal{F} est transversalement orientable - voir l'exemple II.8.

Pour terminer illustrons ce paragraphe par un:

Exemple III.4. Considérons le flot ϕ de l'exemple I.6. Tout d'abord $H^0(S^3/\phi) \simeq \mathbb{R}$. Comme $H^1(S^3/\phi)$ se plonge dans $H^1(S^3)$ on a $H^1(S^3/\phi) = 0$. On a vu que la fibration basique du feuilletage relevé a comme base S^2 .

Il résulte que le faisceau \mathcal{H}_ϕ^1 est constant. D'où

$$H^2(S^3/\phi) \simeq H^3(\hat{S}^3/\hat{\phi}) \simeq H^2(S^2; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}. \quad \square$$



Bibliographie

1. Bott, R., Tu, L.: Differential forms in Algebraic Topology. Graduate texts n° 82. Berlin Heidelberg New York: Springer 1982
2. Bredon, G.E.: Sheaf theory. McGraw Hill series in Higher Mathematics. New York: McGraw Hill Book, Inc. 1967
3. Carrière, Y.: Flots riemanniens. Journées sur les structures transverses. Toulouse 1982. Astérisque no. 116 (1984)
4. Cartan, H.: Notions d'algèbre différentielle - la transgression dans un groupe de Lie. Colloque de Topologie, Bruxelles (1950)
5. Conlon, L.: Transversally parallelisable foliations. Trans. Amer. Math. Soc. **194**, 79-102 (1974)
6. Drissen, H.: Sur la cohomologie des feuilletages de Lie et des feuilletages transversalement parallélisables. Thèse de 3ème cycle. Montpellier (1976)
7. El Kacimi-Alaoui, A., Hector, G.: Décomposition de Hodge sur l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien. C.R. Acad. Sci. Paris t. **298**, série I, n° 13 (1984)
8. Fedida, E.: Sur les feuilletages de Lie. C.R. Acad. Sci. **272**, 999-1002 (1971)
9. Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R.: Connections, curvature and cohomology. Vol. III. New York: Academic Press 1973-1975
10. Kamber, F., Tondeur, P.: Duality for riemannian foliations. Proc. Sym. Pure Math. Vol. **40** (1982)
11. Molino, P.: Géométrie globale des feuilletages riemanniens. Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser. A. **1**, **85**, 45-76 (1982)
12. Reinhart, B.: Foliated manifolds with bundle-like metrics. Ann. of Math. **69**, 119-132 (1959)
13. Reinhart, B.: Harmonic integrals on foliated manifolds. Am. J. of Math. 529-536 (1959)
14. Sarkaria, K.S.: A finiteness theorem for foliated manifolds. J. Math. Soc. Japan. Vol. **30**, n° 4, (1978)
15. Schwarz, G.W.: On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation. Topology **13**, 185-187 (1974)

SUR LA SUITE SPECTRALE D'UN FEUILLETAGE RIEMANNIEN

Vlad Sergiescu

1. Introduction.

L'objet de cette note est de prouver un résultat de finitude pour la suite spectrale différentiable d'un feuilletage riemannien. Nous complétons ainsi le théorème de finitude de la cohomologie basique démontré dans [1] et un résultat partiel de Sarkaria [6].

Soit \mathcal{F} un feuilletage C^∞ sur une variété M . Par extension du cas classique, de nombreux auteurs ont remarqué l'existence d'une suite spectrale différentiable de \mathcal{F} , qui converge vers la cohomologie $H^*(M)$ (voir par exemple [3], [6]).

Celle-ci est obtenue en filtrant le complexe des formes différentielles $\Omega^*(M)$ en posant :

$$F^p \Omega^n(M) = \{ \omega \in \Omega^n(M) \mid i_{X_1} \circ \dots \circ i_{X_{n-p+1}} \omega = 0, X_i \text{ champ tangent à } \mathcal{F} \}.$$

Le terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale s'identifie à la cohomologie $H^q(M, \Omega_b^p)$ où Ω_b^p est le faisceau des p -formes basiques, c'est-à-dire vérifiant $i_X \omega = \theta_X \omega = 0$ pour tout champ X tangent à \mathcal{F} .

Lorsque $q = 0$, $E_2^{p,0}$ est le p -ème espace de cohomologie basique de la variété feuilletée.

Lorsque $q = \dim \mathcal{F}$, les termes $E_2^{p, \dim \mathcal{F}}$ s'identifient à la cohomologie de Rummel-Haefliger [5] [2].

Il est bien connu que la cohomologie basique, donc le terme E_2 de la suite spectrale du feuilletage ne sont pas de dimension finie, même si M est une variété compacte [8].

Nous nous proposons de montrer ici le

Théorème. Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien sur une variété compacte. Alors le terme E_2 de la suite spectrale différentiable est de dimension finie.

Après quelques préliminaires, nous démontrons le théorème au paragraphe 3. Pour ceci nous utilisons le résultat déjà mentionné de [6] et nous développons une méthode qui est dans [1] et [7]. Nous supposons du lecteur une certaine connaissance de [1] et de [7].

Toutes les structures sont supposées de classe C^∞ .

2. Cohomologie k-basique d'un feuilletage.

Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une variété M . Nous introduisons une notion qui sera utile par la suite.

Définition 2.1. Une forme différentielle ω est dite k-basique ($k \geq 0$) si pour tous champs de vecteurs X_i , tangents à \mathcal{F} , on a :

$$i_{X_1} \circ \dots \circ i_{X_k} \omega = i_{X_1} \circ \dots \circ i_{X_k} d\omega = 0.$$

Notons ${}_k\Omega_b^*(M)$ le sous-complexe des formes k-basiques. Il est clair que $\omega \in {}_k\Omega_b^n(M)$ si et seulement si ω est de filtration $n-k+1$ et $d\omega$ est de filtration $n-k+2$.

Exemples 2.2. (a) Si $k = 0$, ${}_0\Omega_b^*(M) = \Omega^*(M)$.

(b) Si $k = 1$, ${}_1\Omega_b^*(M)$ est le complexe des formes appelées classiquement basiques, noté souvent $\Omega_b^*(M)$.

(c) si $k = \dim \mathcal{F}$, le complexe ${}_k\Omega_b^*(M)$ est considéré dans [5]. Plus précisément, Rummier utilise le complexe quotient $\frac{\Omega^*(M)}{{}_k\Omega_b^*(M)}$ ainsi que sa cohomologie dans l'étude des feuilletages dont les feuilles sont des sous-variétés minimales. Un complexe légèrement différent ayant la même cohomologie et qui ne dépend que de la structure transverse du feuilletage est introduit dans [2] par Haefliger.

Remarque 2.3. Les complexes ${}_k\Omega_b^*(M)$ ne sont pas des sous-algèbres de $\Omega^*(M)$ dès que $k \geq 2$.

L'intérêt de la cohomologie k-basique réside pour nous dans la :

Proposition 2.4. (voir aussi [6]). Supposons la variété M compacte. Le

terme E_2 de la suite spectrale différentiable de \mathcal{F} est de dimension finie si et seulement si la cohomologie $H_k^*(M)$ est de dimension finie pour tout $k \geq 0$.

Démonstration : La suite longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \rightarrow k\Omega_b^*(M) \rightarrow k^{+1}\Omega_b^*(M) \rightarrow \frac{k^{+1}\Omega_b^*(M)}{k\Omega_b^*(M)} \rightarrow 0$$

et le fait que la cohomologie $H^*(M)$ est de dimension finie impliquent que la finitude des espaces $k\Omega_b^*(M)$ est équivalente à celle des espaces $H^*\left(\frac{k^{+1}\Omega_b^*(M)}{k\Omega_b^*(M)}\right)$.

Pour démontrer la proposition nous remarquons que pour tout k il existe un morphisme de complexes $\frac{k^{+1}\Omega_b^*(M)}{k\Omega_b^*(M)} \rightarrow E_1^{*-k, k}$,

En effet, puisque $E_0^{p, q} = \frac{F^p\Omega_b^{p+q}(M)}{F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(M)}$, il résulte que

$$E_1^{p, q} = \frac{F^p\Omega_b^{p+q}(M) \cap d^{-1}F^{p+1}\Omega_b^{p+q+1}(M)}{d(F^p\Omega_b^{p+q-1}(M)) + F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(M)} = \frac{q^{+1}\Omega_b^{p+q}(M)}{d(F^p\Omega_b^{p+q-1}(M)) + F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(M)}$$

Comme $q\Omega_b^{p+q}(M) \subset F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(M)$, on obtient une surjection naturelle commutant avec les différentielles

$$\frac{k^{+1}\Omega_b^*(M)}{k\Omega_b^*(M)} \rightarrow E_1^{*-k, k} .$$

Pour finir justifions qu'elle induit un isomorphisme $H^*\left(\frac{k^{+1}\Omega_b^*(M)}{k\Omega_b^*(M)}\right) \rightarrow E_2^{*-k, k}$.

Considérons pour ceci la suite exacte de paires associée au triplet

$$(q^{+1}\Omega_b^{p+q}(M), d(F^p\Omega_b^{p+q-1}(M)) + F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(M), q\Omega_b^{p+q}(M)).$$

Le résultat voulu découle du lemme suivant laissé au lecteur :

Lemme 2.5. Pour q fixé, l'inclusion de complexes

$$q\Omega_b^{p+q}(M) \subset d(F^p\Omega_b^{p+q-1}(M)) + F^{p+1}\Omega_b^{p+q}(M)$$

induit un isomorphisme en cohomologie. La paire formée par ces complexes est acyclique.

3. Démonstration du théorème.

Durant tout ce paragraphe nous considérons un feuilletage riemannien sur une variété compacte. On suppose d'abord que le feuilletage \mathcal{F} est transversalement orientable.

Soit \hat{M} le $SO(r)$ fibré des repères orthonormés directs au feuilletage \mathcal{F} ou $r = \text{codim } \mathcal{F}$. D'après Molino [4], le feuilletage \mathcal{F} se relève sur \hat{M} dans un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$, de même dimension, qui est transversalement parallélisable. Ceci veut dire qu'il existe des champs de vecteurs non-nuls partout qui préservent le feuilletage et trivialisent le fibré normal. De plus, la connexion de Levi-Civita donne lieu à une connexion algébrique à valeurs dans $\Omega_b^*(\hat{M})$ (voir [1]).

Fixons l'entier $k \geq 0$.

Proposition 3.1. La cohomologie ${}_k H_b^*(\hat{M})$ est de dimension finie si et seulement si ${}_k H_b^*(M)$ est de dimension finie.

Preuve : Lorsque $k = 1$, l'assertion de la proposition a été démontrée dans [1], à l'aide de la suite spectrale de la $SO(r)$ A.D.G. munie d'une connexion ${}_1 \Omega_b^*(M)$.

Dans le cas général, l'argument est similaire une fois justifiée l'existence pour tout k , d'une suite spectrale ${}_k \hat{E}_r^{p,q}$ qui converge vers ${}_k H_b^*(\hat{M})$.

Bien que ${}_k \Omega_b^*(\hat{M})$ ne soit pas une algèbre, le produit extérieur d'une forme k -basique avec une forme l -basique est encore k -basique. En particulier ceci s'applique pour le produit d'une forme k -basique avec une forme qui est dans l'image de la connexion $SO(r) \rightarrow \Omega_b^1(\hat{M})$. Cette propriété permet de justifier l'existence de la suite spectrale cherchée. Nous renvoyons le lecteur à ([7], appendice) pour des détails ainsi que des exemples où se présentent des situations similaires.

Nous pouvons maintenant donner la

Preuve du théorème. Par un passage éventuel à un revêtement à deux

feuilletés, nous pouvons supposer que \mathcal{F} est transversalement orientable. Comme nous l'avons déjà rappelé, le feuilletage relevé $\hat{\mathcal{F}}$ sur \hat{M} est transversalement parallélisable. Il résulte du théorème démontré dans [6] que dans ce cas le terme E_2 de la suite spectrale de $\hat{\mathcal{F}}$ est de dimension finie.

D'après la proposition 2.4., pour tout $k \geq 0$ $H_b^*(\hat{M})$ est de dimension finie. D'où la même chose pour $H_b^*(M)$ par la proposition 3.1.

Le résultat découle d'une nouvelle application de 2.4.

Remarques 3.2.

(a) La démonstration du théorème ne donne aucune méthode pour calculer le terme E_2 . Pour la cohomologie basique $E_2^{*,0}$ ceci est toutefois possible (voir [1]).

(b) Pour une étude de la suite spectrale d'un flot isométrique voir [3].

(c) Il serait intéressant de relier les nombres $\dim E_2^{p,q}$ à la géométrie de la variété feuilletée.

Un exemple simple est donné par la relation élémentaire

$$\chi(M) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \dim E_2^{p,q}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EL-KACIMI-ALAOUI, HECTOR G, SERGIESCU V : *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie* - Math . Z. 188, (1985) 593-599.
- [2] HAEFLIGER A : *Some remarks on foliations with minimal leaves* - J. Diff. Geom, 15 (1980), 269-284.
- [3] KAMBER F, TONDEUR P. : *Foliations and metrics in "Differential Geometry"* - Ed. Brooks, Gray, Reinhart, Birkhäuser (1985).
- [4] MOLINO P. : *Géométrie globale des feuilletages riemanniens* - Proc. Kon. Ned. Akad, A1 85 (1982), 45-76.
- [5] RUMMLER H. : *Quelques notions simples en géométrie des feuilletages et leurs applications aux feuilletages compacts* - Comment. Math. Helvetici 54, (1979), 224-239.
- [6] SARKARIA K.S. : *A finiteness theorem for foliated manifolds* - J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 687-696.
- [7] SERGIESCU V. : *Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens* - Ann. Inst. Fourier, tome 35, (1985).
- [8] SCHWARZ G. : *On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation* - Topology, 13, (1974), 185-187.

Université des Sciences et Techniques
de Lille Flandres - Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
U.A. au C.N.R.S. 751
59655 - Villeneuve d'Ascq (France)

COHOMOLOGIE BASIQUE
ET DUALITE DES FEUILLETAGES
RIEMANNIENS

Vlad SERGIESCU

**COHOMOLOGIE BASIQUE
ET DUALITÉ DES FEUILLETAGES
RIEMANNIENS**

**par
Vlad SERGIESCU**

**EXTRAIT DES ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER
DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE**

Tome XXXV-Fascicule 3

1985

COHOMOLOGIE BASIQUE ET DUALITÉ DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS

par
Vlad SERGIESCU

0. Introduction.

Les feuilletages riemanniens ont été introduits par B. Reinhart (voir [17]). Plusieurs auteurs se sont intéressés depuis à la topologie algébrique de ces feuilletages en étudiant la cohomologie des formes différentielles basiques. Des questions de finitude et de dualité ont été abordées ([16], [15], [5], [6]).

Dans ces travaux, les résultats de dualité ont été obtenus en utilisant des méthodes d'opérateurs elliptiques. Reinhart a été à l'origine de cette direction dans [16]. A la suite d'un contre-exemple dû à Y. Carrière [4], les résultats de [16] ont été complétés par F. Kamber et P. Tondeur qui démontrent la dualité de Poincaré lorsque le feuilletage est minimalisable [11].

Le but de cet article est de poursuivre l'étude de ces questions à l'aide d'une approche topologique. Celle-ci nous permet d'obtenir des résultats dans un cadre général et, en particulier, sur des variétés non compactes.

Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien complet transversalement orientable de codimension n sur une variété M de dimension m . P. Molino a introduit dans [14] le faisceau transverse central de \mathcal{F} qui décrit la structure des adhérences des feuilles.

Il existe, sur M , un faisceau localement constant \mathcal{Q} d'espaces vectoriels de dimension 1, lié au faisceau transverse central, que l'on appellera faisceau d'orientation homologique de \mathcal{F} . On dira que \mathcal{F} est homologiquement orientable si \mathcal{Q} est trivial.

Soit $H_b^*(M)$ (resp. $H_{b,c}^*(M; \mathcal{Q})$) la cohomologie des formes basiques (resp. des formes basiques à valeurs dans \mathcal{Q} , dont le support se projette sur un compact de l'espace des adhérences des feuilles de \mathcal{F}).

Notre premier résultat concerne la dualité de Poincaré.

THEOREME I. — Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien complet. Alors :

(i) La cohomologie $H_{b,c}^n(M; \mathcal{R})$ est isomorphe à \mathbf{R} .

(ii) Le produit extérieur des formes différentielles induit un isomorphisme

$$\phi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{Q})^*.$$

Supposons la variété M compacte. La cohomologie basique est alors de dimension finie [5].

COROLLAIRE I. — (i) \mathcal{F} est homologiquement orientable si et seulement si $H_b^n(M) \neq 0$.

(ii) Si $H_b^n(M) \neq 0$, alors l'accouplement

$$H_b^p(M) \times H_b^{n-p}(M) \longrightarrow H_b^n(M) \simeq \mathbf{R}$$

est non-dégénéré.

A l'aide d'un théorème de Hodge pour les formes basiques, A. El-Kacimi et G. Hector démontrent indépendamment dans [6] la dualité de Poincaré sur une variété compacte telle que $H_b^n(M) \neq 0$.

L'exemple donné dans [4] montre qu'il existe des feuilletages qui ne sont pas homologiquement orientables, bien que transversalement orientables.

La démonstration du théorème I fait appel aux résultats de P. Molino sur la structure des feuilletages riemanniens. Nous les utilisons en conjonction avec une méthode qui remonte à André Weil et un argument de suite spectrale basé sur le théorème de comparaison.

Nous obtenons par cette même voie un second résultat. Désignons par $C_*^{\mathcal{F}}(M)$ le complexe des \mathcal{F} -courants invariants transverses (voir §.1). Ce complexe a été introduit par A. Haefliger dans [8].

Supposons M orientée. Dans [11], Kamber et Tondeur ont remarqué l'existence d'une application de "de Rham" :

$$\psi : \Omega_b^p(M) \longrightarrow C_{m-p}^{\mathcal{F}}(M)$$

tel que $\psi(\omega) \cdot \eta = \int_M \omega \wedge \eta$.

THEOREME II. — *Pour un feuilletage riemannien complet \mathcal{F} induit un isomorphisme*

$$\psi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{m-p}^{\mathcal{F}}(M).$$

Si \mathcal{F} est un feuilletage riemannien avec feuilles minimales, et plus généralement si \mathcal{F} est étiré (tense), Kamber et Tondeur esquissent une démonstration de ce résultat dans [11].

Nous remarquons à l'aide d'un exemple que l'énoncé ne s'étend pas à un feuilletage quelconque (ce qui contredit une affirmation dans [12]).

Le premier paragraphe est destiné aux rappels et aux notations. Nous abordons ensuite la dualité de Poincaré. Le troisième paragraphe traite de la dualité de de Rham. Nous exposons brièvement dans un appendice la suite spectrale d'une \mathcal{G} -algèbre différentielle graduée sous une forme qui nous est utile et qui s'étend aux situations nous concernant.

L'approche de la dualité des feuilletages riemanniens présentée dans ce travail est également connue d'André Haefliger. Je le remercie pour ses encouragements et pour ses suggestions qui m'ont permis d'améliorer le théorème I.

Je remercie également Etienne Ghys et Pierre Molino pour leur intérêt et leurs observations qui m'ont été utiles.

1. Préliminaires.

Nous rappellerons dans ce paragraphe les notions et les résultats utiles dans la suite. Nous fixons également quelques notations. Pour plus de détails, on renvoie à [13], [14], [15], [17].

Les structures considérées seront de classe C^∞ . Tous les feuilletages seront transversalement orientables.

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension n sur une variété M de dimension m . Une forme $\omega \in \Omega^*(M)$ est appelée basique si, pour tout champ X tangent à \mathcal{F} , elle vérifie :

$$(i) \quad i_X \omega = 0$$

$$(ii) \quad i_X d\omega = 0.$$

Nous noterons $\Omega_b^*(M)$ le complexe des formes basiques. Cette notation diffère de celle utilisée dans [5] ; nous l'adoptons pour la simplicité de l'écriture.

De même, si \mathcal{R} est un faisceau localement constant d'espaces vectoriels de dimension 1, nous noterons $\Omega_b^*(M; \mathcal{R})$ les formes C^∞ à valeurs dans \mathcal{R} vérifiant (i) et (ii) (voir [2], [9] pour des généralités). Ce complexe s'identifie aux formes basiques à valeurs dans le fibré vectoriel associé à \mathcal{R} , muni de sa trivialisation de fibré plat.

Rappelons, d'autre part, qu'une forme différentielle ω est dite \mathcal{F} -triviale si pour tous champs X_1, \dots, X_{m-n} tangents aux feuilles on a :

$$(i_{X_1} \circ \dots \circ i_{X_{m-n}})(\omega) = 0.$$

On désignera par $C_*(M)$ le complexe des courants de de Rham sur M . Soit $C_*^{\mathcal{F}}(M)$ le sous-complexe des courants qui s'annulent sur les formes \mathcal{F} -triviales ainsi que sur leur différentielles. Il est montré dans [8] qu'un élément de $C_*^{\mathcal{F}}(M)$ s'identifie à un courant invariant par l'holonomie sur une transversale complète à \mathcal{F} .

DEFINITION 1.1. — *Le feuilletage \mathcal{F} est dit transversalement parallélisable complet s'il existe n champs transverses complets qui le laissent invariant et qui sont indépendants en chaque point.*

Dans la mesure où il n'y aura pas de confusion possible nous appellerons \mathcal{F} simplement parallélisable. La structure d'un tel feuilletage est donnée par le théorème suivant, dû à Molino [13] (et à Conlon en codimension 2) :

THEOREME 1.2. — *Supposons \mathcal{F} transversalement parallélisable complet.*

(i) *Les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale $F \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} W$.*

(ii) Il existe une algèbre de Lie \mathcal{G} tel que le feuilletage induit sur chaque fibre soit un \mathcal{G} feuilletage de Lie à feuilles denses.

La fibration π est appelée basique. Son groupe structural peut être choisi pour préserver le feuilletage sur la fibre type.

Notons \mathcal{O} le faisceau des orientations transverses de la fibration π . Dire que \mathcal{O} est trivial est équivalent à dire que W est orientable.

Supposons que le feuilletage \mathcal{F} est riemannien. Soit \hat{M} le $SO(n)$ fibré des repères orthonormés directs. A l'aide de la connexion de Levi-Civita transverse, il est montré dans [13] le

THEOREME 1.3. — *Le feuilletage \mathcal{F} se relève sur \hat{M} en un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$, de même dimension, qui est $SO(n)$ -invariant. Les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sont des revêtements des feuilles de \mathcal{F} . De plus $\hat{\mathcal{F}}$ admet un parallélisme transverse canonique.*

DEFINITION 1.4. — *Le feuilletage riemannien \mathcal{F} est dit complet si le parallélisme transverse canonique de $\hat{\mathcal{F}}$ est complet.*

Dans ce cas, l'algèbre de Lie \mathcal{G} associée à la fibration basique de \hat{M} est un invariant structural du feuilletage.

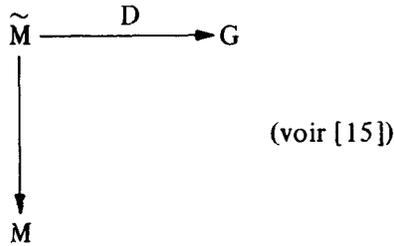
Puisque le groupe $SO(n)$ laisse le faisceau $\hat{\mathcal{O}}$ sur \hat{M} invariant, il résulte que celui-ci est le relevé d'un faisceau localement constant \mathcal{O} sur M .

La structure transverse d'un feuilletage complet est précisée par le faisceau transverse central [14], [15] noté $\mathcal{C}(\mathcal{F})$. Il s'agit d'un faisceau localement constant de germes de champs transverses, dont la fibre est naturellement isomorphe à l'opposée de l'algèbre de Lie \mathcal{G} .

Lorsque \mathcal{F} est parallélisable, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ est formé des germes de champs transverses commutant avec tout champ transverse complet.

De plus, si $\hat{\mathcal{F}}$ est le relevé de \mathcal{F} sur \hat{M} , le faisceau $\mathcal{C}(\hat{\mathcal{F}})$ est le relevé de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Si \mathcal{F} est un \mathcal{G} -feuilletage de Lie complet à feuilles denses, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ correspond aux germes des champs invariants à droite sur le groupe de Lie simplement connexe G associé à \mathcal{G} . On utilise pour ceci le diagramme développant de Fédida



Ici \tilde{M} est le revêtement universel de M qui fibre au-dessus du groupe G . De plus il existe un morphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow G$, à image dense, tel que la fibration D soit $\pi_1(M)$ -équivariante.

Désignons enfin par \mathcal{G} le faisceau $\Lambda^s \mathcal{C}(\mathcal{F})$ où s est la dimension de l'algèbre de Lie structurale et soit $\mathcal{R} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}$.

DEFINITION 1.5. — On appelle \mathcal{R} le faisceau d'orientation homologique de \mathcal{F} .

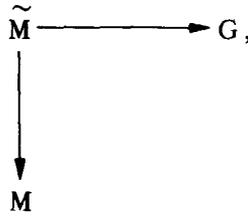
Nous noterons $\Omega_{b,c}^*(M; \mathcal{R})$ les formes basiques à valeurs dans \mathcal{R} dont le support se projette sur un compact de l'espace des adhérences des feuilles ; dans le cas parallélisable ce dernier est la variété basique W .

Dans ce travail notre référence pour la cohomologie des formes différentielles est la monographie [7]. Nous renvoyons à [3] pour les notions générales sur les faisceaux. Les références A.1-A.4. sont relatives à l'appendice.

2. Dualité de Poincaré.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème de dualité de Poincaré pour la cohomologie basique. Nous envisageons d'abord le cas des feuilletages de Lie et des feuilletages parallélisables.

Supposons que \mathcal{F} est un \mathcal{G} -feuilletage de Lie à feuilles denses de codimension n sur M . Il est bien connu (voir [5]) qu'à l'aide du diagramme développant



le complexe $\Omega_b^*(M)$ s'identifie au complexe $C^*(\mathcal{G}; \mathbb{R})$ des cochaînes sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} . Ceci se réalise à travers les formes basiques $\pi_1(M)$ -invariantes du feuilletage relevé sur \tilde{M} .

On montre de la même façon que le complexe $\Omega_b^*(M; \mathcal{R})$ (ici $\mathcal{R} = \mathcal{G}$) s'identifie à $C^*(\mathcal{G}; \Lambda^n \mathcal{G})$ où \mathcal{G} agit sur $\Lambda^n \mathcal{G}$ par l'application adjointe. La dualité de Poincaré, énoncée d'habitude pour une algèbre unimodulaire [7], fournit un accouplement non-dégénéré $H^*(\mathcal{G}) \times H^{n-*}(\mathcal{G}; \Lambda^n \mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{R}$. On obtient alors par transport la dualité de Poincaré pour la cohomologie basique sur M .

Supposons maintenant que \mathcal{F} est transversalement parallélisable complet sur M , que $\dim M = m$, $\text{codim } \mathcal{F} = n$. Posons $\ell = \dim W$, $k = m - \ell = \dim F$.

Nous allons construire une application "d'intégration transverse" $I : \Omega_{b,c}^n(M; \mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $I(d\eta) = 0$ si $\eta \in \Omega_{b,c}^{n-1}(M; \mathcal{R})$.

Soit \tilde{U} un ouvert trivialisant pour π et $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$. Le lemme qui suit est immédiat.

LEMME 2.1. — *Le complexe $\Omega_{b,c}^*(U; \mathcal{R})$ s'identifie à l'aide d'une trivialisaton locale à $\Omega_c^*(\tilde{U}; \mathcal{O}) \otimes \Omega_b^*(F; \mathcal{G})$.* □

On peut donc écrire une forme $\omega \in \Omega_{b,c}^n(U; \mathcal{R})$ d'une unique façon sous la forme $\omega = \alpha_\omega \otimes \beta$ où $0 \neq \beta \in \Omega_b^{n-\ell}(F; \mathcal{G})$ est un générateur fixé et $\alpha_\omega \in \Omega_c^\ell(\tilde{U}; \mathcal{O})$. On pose alors :

$$I(\omega) = \int_W \alpha_\omega.$$

Plus généralement, si $\omega \in \Omega_{b,c}^n(M; \mathcal{R})$, soit $(f_j)_{j \in J}$ une partition de 1 subordonnée à un recouvrement fini de $\pi(\text{supp } \omega)$

d'ouverts comme ci-dessus. On pose $I(\omega) = \sum_I I(f_i \omega)$, où $I(f_i \omega)$ est déjà défini plus haut.

PROPOSITION 2.2. — *L'application I est bien définie et induit une surjection $H_{b,c}^n(M; \mathfrak{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$.*

Preuve. — Soit $\chi : \tilde{U} \times F \longrightarrow \tilde{U} \times F$ un difféomorphisme au-dessus de \tilde{U} qui préserve le feuilletage dans chaque fibre. Un calcul immédiat donne :

$$\chi^*(\alpha \wedge \beta) = \chi^*(\alpha) \wedge \chi^*(\beta) = \alpha \wedge \beta.$$

La dernière égalité tient compte du fait que α et β proviennent des facteurs et que χ induit l'identité sur $\Omega_b^{n-\ell}(x \times F; \mathfrak{G})$. Il résulte que si $\pi(\text{supp } \omega) \subset \tilde{U}$, alors $I(\omega)$ est bien défini.

Pour une forme ω quelconque l'indépendance de $I(\omega)$ par rapport à la partition de 1 est similaire aux situations classiques ([2], [7]).

La définition locale montre que $I \neq 0$.

Soit $\eta \in \Omega_{b,c}^{n-1}(\tilde{U} \times F; \mathfrak{R})$. Si $\eta = \gamma \wedge \delta$ avec $\deg \gamma = \ell - 1$, alors $d\eta = d\gamma \wedge \delta$, d'où $I(d\eta) = 0$ puisque $\int_W d\gamma = 0$. Si $\eta = \gamma \wedge \delta$ avec $\deg \gamma = \ell$, on a $d\delta = 0$, d'où $d\eta = 0$. Il résulte que $I(d\eta) = 0$ dans tous les cas.

En général, si $\eta \in \Omega_{b,c}^{n-1}(M; \mathfrak{R})$ on peut écrire :

$$f_i d\eta = d(f_i \eta) - df_i \wedge \eta$$

et puisque $\sum df_i = 0$ on a que $\sum I(f_i d\eta) = \sum I(d(f_i \eta)) = 0$. Ceci termine la démonstration. \square

Avant de montrer la dualité de Poincaré, remarquons que la technique de Mayer-Vietoris s'applique pourvu qu'on se restreigne à des ouverts du type $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$:

LEMME 2.3. — *Soient \tilde{U} et \tilde{V} des ouverts de W . Les suites suivantes sont exactes :*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Omega_b^*(U \cup V) \longrightarrow \Omega_b^*(U) \oplus \Omega_b^*(V) \longrightarrow \Omega_b^*(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \Omega_{b,c}^*(U \cap V; \mathfrak{R}) \longrightarrow \Omega_{b,c}^*(U; \mathfrak{R}) \\ &\quad \oplus \Omega_{b,c}^*(V; \mathfrak{R}) \longrightarrow \Omega_{b,c}^*(U \cup V; \mathfrak{R}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Les flèches sont des restrictions ou des extensions par 0.

Preuve. — Elle utilise une partition de 1 sur W comme dans le cas classique. \square

La proposition 2.2 permet de construire un accouplement $\phi : \Omega_b^p(M) \times \Omega_{b,c}^{n-p}(M; \mathfrak{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ en posant $\phi(\omega, \eta) = I(\omega \wedge \eta)$. On peut donner alors la démonstration du théorème I dans le cas parallélisable :

PROPOSITION 2.4. — *L'accouplement ϕ induit un isomorphisme, noté encore $\phi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(M; \mathfrak{R})^*$.*

Preuve (voir aussi [7]). — Soit \mathcal{B} une base dénombrable d'ouverts de W , difféomorphes à \mathbf{R}^q . On peut supposer \mathcal{B} fermée par intersection finie. Notons \mathcal{B}_f et \mathcal{B}_d les réunions finies (respectivement dénombrables) d'éléments de \mathcal{B} . Pour $\check{U} \in \mathcal{B}$, le cas des feuilletages de Lie implique que la "restriction"

$$\phi_U : H_b^p(U) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(U; \mathfrak{R})^*$$

est un isomorphisme.

D'après le lemme 2.3. et le lemme des cinq, ceci reste vrai pour $\check{U} \in \mathcal{B}_f$. On en déduit facilement la même chose pour $\check{U} \in (\mathcal{B}_f)_d$, puis pour $\check{U} \in ((\mathcal{B}_f)_d)_f$. La conclusion vient de ce que $((\mathcal{B}_f)_d)_f$ est formée de tous les ouverts de W . \square

Remarque 2.5. — (i) Si M est compacte, le lemme 2.3. montre que $H_b^*(M)$ et $H_{b,c}^*(M; \mathfrak{R})$ sont de dimension finie (cf. [5]). On utilise pour ceci un recouvrement fini d'ouverts difféomorphes à \mathbf{R}^q .

(ii) Il est clair que l'hypothèse $H_b^n(M) \neq 0$ est équivalente à la trivialité du faisceau \mathfrak{R} .

Dans ce cas, on peut remplacer la proposition 2.3. en montrant directement que pour $\check{U} \subset W$, l'inclusion $\pi^{-1}(\check{U}) = U \subset M$ induit une surjection (donc une bijection) $H_{b,c}^n(U) \longrightarrow H_{b,c}^n(M)$.

(iii) Les résultats précédents restent valables pour un feuilletage transversalement complet (cf. [13]).

Passons au cas d'un feuilletage riemannien quelconque \mathfrak{F} . On considère toujours que $\text{codim } \mathfrak{F} = n$, $\dim M = m$. Posons

$$n_0 = \frac{n(n-1)}{2} = \dim \text{SO}(n).$$

Considérons les algèbres $\Omega_b^*(\hat{M})$ et $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$. Les opérateurs i_X et θ_X y agissent et en font des $\mathfrak{S}\mathfrak{O}(n)$ - A.D.G. (voir A.1 et [5]).

Puisque le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est parallélisable, il existe d'après 2.4. un accouplement $\hat{\phi} : \Omega_b^*(\hat{M}) \times \Omega_{b,c}^{n+n_0-*}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbf{R}$.

Nous allons d'abord le "descendre" à un accouplement $\phi : \Omega_b^*(M) \times \Omega_{b,c}^{n-*}(M, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}$, puis montrer que celui-ci induit la dualité de Poincaré cherchée.

Considérons l'application d'intégration sur la fibre $f_{\text{SO}(n)} : \Omega^*(\hat{M}) \rightarrow \Omega^{*-n_0}(M)$. Il est immédiat qu'elle préserve les formes basiques. Soit $\hat{I} : \Omega_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbf{R}$ l'application "d'intégration transverse" construite dans la proposition 2.2.

LEMME 2.6. — *Il existe une application $I : \Omega_{b,c}^n(M, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}$, tel que $I \circ f_{\text{SO}(n)} = \hat{I}$. Elle induit un isomorphisme $I : H_{b,c}^n(M, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}$.*

Preuve. — Remarquons d'abord que

$$f_{\text{SO}(n)} : H_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \rightarrow H_{b,c}^n(M, \mathcal{F}) \text{ est un isomorphisme.}$$

En effet, si γ est une n -forme volume le long des fibres obtenue à l'aide de la connexion transverse projetable, on vérifie que l'application $[\omega] \mapsto [\pi^*(\omega) \wedge \gamma]$ est l'inverse de

$f_{\text{SO}(n)}$. On pourrait également utiliser le fait que

$$f_{\text{SO}(n)} : \Omega_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \rightarrow \Omega_{b,c}^n(M, \mathcal{F}) \text{ est surjective et}$$

conclure parce que $H_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \cong H_{b,c}^n(M, \mathcal{F})$ d'après la suite spectrale de l'algèbre $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$ (voir A.4.a. et [5]).

Le lemme résulte en définissant I pour faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) & \longrightarrow & H_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \\
 \downarrow f_{SO(n)} & & \downarrow f_{SO(n)} \\
 \Omega_{b,c}^n(M, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{b,c}^n(M, \mathcal{F})
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \hat{I} \\
 \searrow I
 \end{array}
 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Nous définissons maintenant

$$\begin{aligned}
 \phi : \Omega_b^*(M) \times \Omega_{b,c}^{n-*}(M, \mathcal{F}) &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ par} \\
 \phi(\omega, \eta) &= I(\omega \wedge \eta).
 \end{aligned}$$

LEMME 2.7. — Les applications $\hat{\phi}$ et ϕ induisent le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_b^p(\hat{M}) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}))^* \\
 \uparrow \pi^* & & \uparrow (f_{SO(n)})^* \\
 \Omega_b^p(M) & \xrightarrow{\phi} & (\Omega_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{F}))^*
 \end{array}$$

Preuve. — Il s'agit de vérifier que si $\omega \in \Omega_b^p(M)$ et $\eta \in \Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}})$, alors $\hat{\phi}(\pi^* \omega, \eta) = \phi(\omega, f_{SO(n)} \eta)$.

Ceci revient à montrer que $\hat{I}(\pi^* \omega \wedge \eta) = I(\omega \wedge f_{SO(n)} \eta)$.

Une propriété de l'intégration sur la fibre ([7]) assure que $f_{SO(n)} \pi^* \omega \wedge \eta = f_{SO(n)} \omega \wedge \pi^* \eta$. On conclut à l'aide du lemme 2.6. □

Nous aurons besoin du :

LEMME 2.8. – *L'image de l'application*

$$\left(f_{\text{SO}(n)} \right)^* : (\Omega_{b,c}^{n-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^* \longrightarrow (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$$

est formée des éléments $\hat{\lambda} \in (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$ tels que $(i_X)^* \hat{\lambda} = 0$ et $(\theta_X)^* \hat{\lambda} = 0$, $X \in \mathfrak{S}\mathfrak{O}(n)$.

Preuve. – Le lemme est une conséquence de ce que l'application

$$f_{\text{SO}(n)} \text{ est égale, à signe près, au composé}$$

$$\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{R} {}_1\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{i_{X_1} \dots X_{n_0}} \Omega_{b,c}^{*-n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}),$$

où $R(\omega) = \int_{\text{SO}(n)} g^* \omega dg$ et X_1, \dots, X_{n_0} sont des champs fondamentaux (voir [7], II.6.5, exercice 4.4. et III.8.4 pour le cas classique, l'extension à notre situation étant immédiate). \square

Posons $A_{b,c}^p(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) = (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$. Muni des opérateurs duaux $\pm i_X^*$ et $-\theta_X^*$, le complexe $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ est un $\text{SO}(n)$ module (voir A.4. b.).

Il est convenable de se restreindre aux éléments $\text{SO}(n)$ -invariants.

LEMME 2.9. – Les inclusions ${}_1\Omega_b^*(\hat{M}) \hookrightarrow \Omega_b^*(\hat{M})$ et ${}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \hookrightarrow A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ induisent des isomorphismes en cohomologie.

Preuve. – Pour la première inclusion il s'agit d'une adaptation de la preuve du théorème d'E. Cartan pour un groupe compact (voir aussi [5]). En ce qui concerne l'inclusion ${}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \rightarrow A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$, il suffit de dualiser cette démonstration. \square

Rappelons que la connexion de Levi-Civita transverse définit une connexion algébrique dans $\Omega_b^*(\hat{M})$ (voir A.1., cf. aussi [5]).

Il existe deux suites spectrales $E_r^{p,q}$ et $\bar{E}_r^{p,q}$, qui convergent vers $H_b^*({}_1\Omega_b^*(\hat{M})) \simeq H_b^*(\hat{M})$, et vers $H^*({}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})) \simeq H^*(A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))$ telles que :

$$E_2^{p,q} \simeq H_b^p(\hat{M}) \otimes H^q(\text{SO}(n))$$

$$\bar{E}_2^{p,q} \simeq H^p(\underset{\theta=0}{i=0} A_{b,c}^p(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})) \otimes H^q(\text{SO}(n)) \simeq H_{b,c}^{n-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})^* \otimes H^q(\text{SO}(n))$$

La dernière identification tient compte du lemme 2.8.

On peut passer maintenant à la

Démonstration du théorème I. — Nous avons déjà vu dans le lemme 2.6. que $H_{b,c}^n(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \cong \mathbf{R}$.

L'accouplement $\hat{\phi} : \Omega_b^*(\hat{M}) \times \Omega_{b,c}^{n+n_0-*}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est tel que $\hat{\phi}(\theta_X \omega, \eta) + \hat{\phi}(\omega, \theta_X \eta) = \hat{I}(\theta_X(\omega \wedge \eta)) = 0$. Il induit donc par restriction :

$$\hat{\phi} : {}_1\Omega_b^*(\hat{M}) \longrightarrow {}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}).$$

Puisque $\hat{\phi}(i_X \omega, \eta) + (-1)^{\text{deg } \omega} \hat{\phi}(\omega, i_X \eta) = \hat{I}(i_X(\omega \wedge \eta)) = 0$, il résulte que $\hat{\phi}$ commute avec les filtrations. En particulier $\hat{\phi}$ définit un morphisme de suites spectrales $\hat{\phi}_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \bar{E}_r^{p,q}$.

Les remarques de A.3. et de A.4. impliquent la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} & \xrightarrow{\hat{\phi}_2^{p,q}} & \bar{E}_2^{p,q} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H_b^p(\mathbf{M}) \otimes H^q(\text{SO}(n)) & \xrightarrow{\phi \otimes id} & (H_{b,c}^{n-p}(\mathbf{M}, \mathcal{F}))^* \otimes H^q(\text{SO}(n)) \end{array}$$

On peut alors appliquer le théorème de comparaison de Moore [18] à $\hat{\phi}$. Celui-ci dit que si

(i) $\hat{\phi}^* : H_b^p(\hat{M}) \longrightarrow (H_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{F}}))^*$ est un isomorphisme pour $p \geq 0$,

(ii) $\hat{\phi}_2^{0,q} : H^0(\mathbf{M}) \otimes H^q(\text{SO}(n)) \xrightarrow{\phi \otimes id} (H_{b,c}^n(\mathbf{M}, \mathcal{F}))^* \otimes H^q(\text{SO}(n))$ est un isomorphisme pour $q \geq 0$, alors,

$$\hat{\phi}_2^{p,0} : H_b^p(\mathbf{M}) \otimes H^0(\text{SO}(n)) \xrightarrow{\phi \otimes id} (H_{b,c}^{n-p}(\mathbf{M}, \mathcal{F}))^* \otimes H^0(\text{SO}(n))$$

est une bijection pour tout $p \geq 0$.

La condition (i) est vérifiée par la proposition 2.4. La condition (ii) provient du lemme 2.6. On en déduit que

$$\phi : H_b^p(\mathbf{M}) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(\mathbf{M}, \mathcal{F})^*$$

est un isomorphisme, ce qui termine la démonstration.

Remarque 2.9. — Si M est compacte, les suites spectrales ci-dessus permettent de démontrer la finitude de $H_b^*(M)$ et de $H_b^*(M, \mathcal{A})$ (voir [5]).

3. Dualité de de Rham.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème II. Toutes les variétés seront supposées orientables.

Observons d'abord que pour un feuilletage de Lie complet l'application $\psi : \Omega_b^p(M) \longrightarrow C_{m-p}^{\mathcal{F}}(M)$ est un isomorphisme (voir [8]).

Supposons \mathcal{F} parallélisable.

LEMME 3.1. — Soit $\check{U} \subset W$ difféomorphe à \mathbf{R}^{ℓ} et $U = \pi^{-1}(\check{U})$. Alors $\psi_U : H_b^p(U) \longrightarrow H_{n-p}^{\mathcal{F}}(U)$ est bijectif.

Preuve. — Considérons d'abord l'intégration sur la fibre

$$f_{\check{U}} : \Omega_c^*(\check{U} \times F) \longrightarrow \Omega_c^{*- \ell}(F).$$

Il est clair que $f_{\check{U}}$ envoie une forme \mathcal{F} -triviale sur une forme \mathcal{F} -triviale. Puisque $f_{\check{U}} \circ d = d \circ f_{\check{U}}$, elle préserve aussi les différentielles des formes \mathcal{F} -triviales. Ainsi $f_{\check{U}}$ induit une application duale $f_{\check{U}}^* : C_*^{\mathcal{F}}(F) \longrightarrow C_{*+\ell}^*(\check{U} \times F)$.

Une propriété de l'intégration sur la fibre assure que

$$\int_{\check{U} \times F} \pi^*(\omega) \wedge \eta = \int_F (\omega \wedge f_{\check{U}}^* \eta), \text{ où } \pi : \check{U} \times F \longrightarrow F \text{ est la}$$

projection naturelle. Il en résulte que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_b^*(\check{U} \times F) & \xrightarrow{\psi} & C_{m-\ell}^{\mathcal{F}}(\check{U} \times F) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow f_{\check{U}}^* \\ \Omega_b^*(F) & \xrightarrow{\sim \psi} & C_{m-\ell}^{\mathcal{F}}(F) \end{array}$$

Puisque \check{U} est contractile, π^* induit un isomorphisme en cohomologie. Par ailleurs $f_{\check{U}}$ admet un inverse en cohomologie qui envoie $\omega \in \Omega_b^*(F)$ sur $\omega \wedge v$ où v est une ℓ -forme fixée sur \check{U} tel que $f_w v = 1$. La duale de cette application est l'inverse de f'_U en cohomologie : il suffit de suivre pas à pas la situation classique ([2]).

Le lemme résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus dans lequel trois flèches sont bijectives. \square

On peut énoncer à présent la

PROPOSITION 3.2. — *Le théorème II est vrai dans le cas transversalement parallélisable complet.*

Preuve. — On a vu dans le lemme 2.3. que les formes basiques $\Omega_b^*(M)$ vérifient une suite de Mayer-Vietoris. De même, on démontre, à l'aide d'une partition de 1 sur W , l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow C_*^{\mathfrak{F}}(U \cup V) \longrightarrow C_*^{\mathfrak{F}}(U) \oplus C_*^{\mathfrak{F}}(V) \longrightarrow C_*^{\mathfrak{F}}(U \cap V) \longrightarrow 0$$

où $U = \pi^{-1}(\check{U})$, $V = \pi^{-1}(\check{V})$.

Il en résulte alors du lemme des cinq que si ψ est un isomorphisme sur U , V et $U \cap V$, alors la même chose est vraie sur $U \cup V$.

On conclut à l'aide du lemme 3.1. et d'un argument identique à celui utilisé pour la dualité de Poincaré. \square

Considérons maintenant le cas général d'un feuilletage riemannien complet.

Le complexe $C_*^{\hat{\mathfrak{F}}}(\hat{M})$ des courants transverses sur le fibré des repères orthonormés \hat{M} est muni des deux opérateurs obtenus en dualisant i_X et θ_X , $X \in \mathfrak{S}\mathfrak{O}(n)$ (voir A.4.c.)

L'application d'intégration sur la fibre

$$f_{\text{SO}(n)} : \Omega^*(\hat{M}) \longrightarrow \Omega^{*-n_0}(M)$$

admet une duale topologique $f'_{SO(n)} : C_*(M) \longrightarrow C_{*+n_0}(\hat{M})$ qui est injective et envoie $C_*^{\mathfrak{F}}(M)$ dans $C_{*+n_0}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$. La démonstration du lemme qui suit est similaire à celle du lemme 2.8.

LEMME 3.3. – *L'image de l'application*

$$f'_{SO(n)} : C_*^{\mathfrak{F}}(M) \longrightarrow C_{*+n_0}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$$

est formée des courants \hat{c} tel que $(i_X)' \hat{c} = 0$ et $(\theta_X)' \hat{c} = 0$. □

Remarquons aussi que l'inclusion des courants transverses $SO(n)$ -invariants ${}_1C_*^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ dans $C_*^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ induit un isomorphisme en homologie. Il suffit de dualiser la démonstration du résultat correspondant pour les formes différentielles sur un fibré principal.

Passons à la

Démonstration du théorème II. – Elle sera parallèle à la preuve du théorème I, une fois justifiée l'existence d'une suite spectrale convenable pour les courants transverses (voir A.4.c.).

Posons $A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M}) = C_{m-*}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$. Soit $E_r^{p,q}$ (resp. $\bar{E}_r^{p,q}$) la suite spectrale qui converge vers $H^*({}_1\Omega_b^*(\hat{M})) = H_b^*(\hat{M})$ (resp. $H^*({}_1A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M})) = H^*(A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M}))$) (A.2. et A.4.c.).

Puisque $\hat{\psi} : \Omega_b^*(\hat{M}) \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M})$ préserve la filtration, elle induit un morphisme de suites spectrales $\hat{\psi}_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \bar{E}_r^{p,q}$.

En particulier on a :

$$\hat{\psi}_2^{p,q} : E_2^{p,q} \simeq H_b^p(M) \otimes H^q(SO(n)) \longrightarrow \bar{E}_2^{p,q} \simeq H_{\theta=0}^p(A^p(\hat{M})) \otimes H^q(SO(n)) = H_{m-p}^{\mathfrak{F}}(M) \otimes H^q(SO(n)).$$

Remarquons que

$$H_m^{\mathfrak{F}}(M) \simeq \bar{E}_2^{0,0} \simeq \bar{E}_{\infty}^{0,0} \simeq H_{m+n_0}^{\mathfrak{F}}(\hat{M}) \simeq H_b^0(\hat{M}) \simeq \mathbf{R}.$$

Comme $H_b^0(M) \simeq \mathbf{R}$, il résulte à l'aide des identifications de l'appendice (A.4.d.) que :

$$\hat{\psi}_2^{0,q} : H_b^0(M) \otimes H^q(SO(n)) \xrightarrow{\psi \otimes id} H_m^{\mathfrak{F}}(M) \otimes H^q(SO(n))$$

est un isomorphisme.

Par ailleurs, $\hat{\psi} : H_b^*(\hat{M}) \longrightarrow H_{m+n_0-*}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ est bijectif (prop. 3.2.). On déduit alors du théorème de comparaison des suites spectrale [18] que

$$\hat{\psi}_2^{p,0} : H^p(M) \otimes H^0(\mathrm{SO}(n)) \longrightarrow H_{m-p}^{\mathfrak{F}}(M) \otimes H^0(\mathrm{SO}(n))$$

est un isomorphisme. Il s'identifie à l'isomorphisme de de Rham cherché. \square

Remarque 3.4. – Le théorème II tombe en général en défaut si le feuilletage n'est pas riemannien.

Soit X un champ de vecteurs C^∞ à orbites denses sur le tore T^2 qui n'est pas C^1 conjugué à un champ linéaire (cf. [1]). Dans ce cas il n'existe pas de 1-forme basique non-nulle et $H_b^1(T^2) = 0$.

D'autre part, X est topologiquement conjugué à un flot linéaire. Il admet une mesure transverse invariante qui est un élément non-nul dans $H_1(T^2)$, donc dans $H_1^{\mathfrak{F}}(T^2)$.

Ceci contredit l'énoncé 3.12. de [12]. \square

Appendice.

Nous rassemblons ici les principaux résultats sur la suite spectrale d'une \mathfrak{G} -A.D.G. qui possède une connexion. L'identification des termes E_r , $r = 0, 1, 2$, est faite par une méthode (connue des spécialistes) inspirée de [10]. Dans A.2., nous suivons pour ceci un exposé de séminaire de D. Lehmann. Pour une présentation différente voir [7]. L'approche utilisée ici convient à nos applications en s'étendant à des situations plus générales.

A.1. Soit \mathfrak{G} une algèbre de Lie. On appelle \mathfrak{G} -A.D.G. une algèbre différentielle graduée A munie :

– d'une application linéaire $X \mapsto i_X$ de \mathfrak{G} dans les antidérivations de A de degré -1 .

– d'une représentation linéaire $X \mapsto \theta_X$ de \mathfrak{G} dans les dérivations de degré 0 de A , vérifiant :

- (i) $i_X \circ i_X = 0$
- (ii) $i_{[X, Y]} = \theta_X \circ i_Y - i_Y \circ \theta_X$
- (iii) $\theta_X = i_X \circ d + d \circ i_X$.

On appelle connexion algébrique une application linéaire $\omega^* : \mathfrak{G}^* \longrightarrow A^1$, vérifiant pour $X \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{G}^*$

$$(i) i_X \omega^*(h^*) = h^*(X)$$

$$(ii) \theta_X \circ \omega^* = \omega^* \circ \theta_X.$$

Exemple (Voir aussi [5]). — L'algèbre des formes basiques sur le fibré des repères orthonormés directs transverses \hat{M} , munie du produit intérieur et de la dérivée de Lie par rapport aux champs fondamentaux est une \mathcal{G} -A.D.G. La connexion de Levi-Civita transverse induit une connexion algébrique à valeurs dans $\Omega_b^1(\hat{M})$.

A.2. Nous décrivons maintenant la suite spectrale associée à la \mathcal{G} -A.D.G. A munie de la connexion ω^* .

Nous supposons l'algèbre \mathcal{G} réductive de dimension n_o . Soit ${}_1A$ la sous-algèbre des éléments \mathcal{G} -invariants, S la sous-algèbre des éléments semi-basiques (annulés par les opérateurs i_X) et $B = {}_1A \cap S$ leur intersection, formée des éléments basiques.

On définit sur ${}_1A$ la filtration :

$$F^p {}_1A^n = \{\omega \mid i_{X_1} \circ \dots \circ i_{X_{n-p+1}} \omega = 0, X_i \in \mathcal{G}\}.$$

Soit $C^*(\mathcal{G}; S)$ le complexe des cochaînes sur \mathcal{G} à valeur dans S. C'est aussi une \mathcal{G} -A.D.G.

Pour $\omega \in F^p A^{p+q}$ on pose

$$\rho(\omega)(X_1, \dots, X_q) = (i_{X_q} \circ \dots \circ i_{X_1})(\omega).$$

On définit ainsi une application $\rho : F_1^p A^{p+q} \longrightarrow {}_1C^q(\mathcal{G}; S^p)$ qui induit un isomorphisme d'algèbres graduées $\rho : E_0^{p,q} \longrightarrow {}_1C^q(\mathcal{G}; S^p)$.

Pour démontrer la surjectivité de ρ , soit $\omega^1, \dots, \omega^{n_o} \in A^1$ et $X_1, \dots, X_{n_o} \in \mathcal{G}$ une base tels que $\omega^j(X_i) = \delta_i^j$. Si $\gamma \in {}_1C^q(\mathcal{G}; S^p)$,

on pose $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n_o} \omega^{i_1} \dots \omega^{i_q} \cdot \gamma(X_{i_1} \dots X_{i_q})$. On vérifie que $\rho(\alpha) = \gamma$ et que α est invariant.

Il résulte maintenant que $E_1^{p,q} \cong H^q({}_1C^*(\mathcal{G}; S^p))$. La cohomologie $H^q({}_1C^*(\mathcal{G}; S^p))$ s'identifie à son tour à $B^p \otimes {}_1C^q(\mathcal{G})$ (voir par exemple [7], III, 5.28), puisque B^p est formée des invariants de S^p .

Par ailleurs, la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ s'identifie à

$$(-1)^q d \otimes id : B^p \otimes H^q(\mathcal{G}; \mathbf{R}) \longrightarrow B^{p+1} \otimes H^q(\mathcal{G}; \mathbf{R}).$$

Pour ceci soit $\gamma = b \otimes c \in B^p \otimes_1 C^q(\mathcal{G})$. Alors $\gamma = \rho(\alpha)$

où
$$\alpha = (-1)^{p^q} b. \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n_0} c_{i_1, \dots, i_q} \omega^{i_q} \dots \omega^{i_1} \quad \text{et}$$

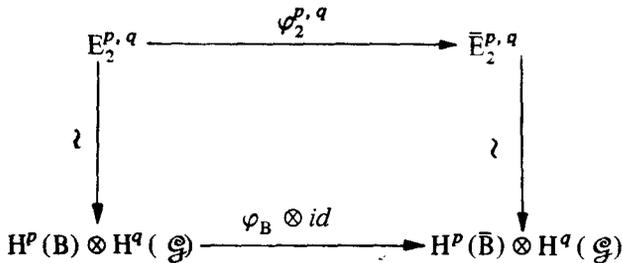
$$c_{i_1, \dots, i_q} = c(X_{i_1}, \dots, X_{i_q}).$$

En posant $\beta = \sum c_{i_1, \dots, i_q} \omega^{i_q} \dots \omega^{i_1}$ on démontre que $d_1 \gamma = \rho((-1)^{p^q} db \cdot \beta) = (-1)^q db \otimes c$. Il résulte de ce qui précède que

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B) \otimes H^q(\mathcal{G}).$$

A.3. Soit A et \bar{A} deux \mathcal{G} -A.D.G. Un morphisme $\varphi : A \longrightarrow \bar{A}$ est un \mathcal{G} -morphisme s'il commute avec les opérateurs d, i_X et θ_X .

Si $\omega^* : \mathcal{G} \longrightarrow A^1$ est une connexion, alors $\varphi \circ \omega^*$ l'est également. L'application φ induit un morphisme de suites spectrales $\varphi_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \bar{E}_r^{p,q}$. On vérifie aisément que pour les identifications de A.2. on a le diagramme commutatif :



où $\varphi_B : B \longrightarrow \bar{B}$ est le morphisme induit par φ .

A.4. Les résultats de A.2. ainsi que les remarques de A.3. s'appliquent encore aux situations suivantes :

(a) Soit $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{A}})$ l'algèbre des formes basiques sur \hat{M} à valeurs dans $\hat{\mathcal{A}}$ considérée aux §.1 et §.2. Il s'agit encore d'une $\mathcal{S}\mathcal{O}(n)$ -A.D.G. Les opérateurs i_X et θ_X sont définis de façon évidente.

On peut définir une suite spectrale, comme précédemment au A.2. Quoique $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{A}})$ ne possède pas de connexion, les mêmes identifications restent valables. Il suffit d'utiliser la

connexion à valeurs dans $\Omega_b^1(\hat{M})$ et le fait que le produit d'une forme de $\Omega_b^*(\hat{M})$ et d'une forme de $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ a un sens.

(b) Considérons le complexe dual $\text{hom}(\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}), \mathbf{R})$ et définissons le complexe $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) = \text{hom}(\Omega_{b,c}^{n+n_0-*}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}), \mathbf{R})$. La différentielle $\delta : A_{b,c}^k(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow A_{b,c}^{k+1}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ est définie tel que $\delta(\hat{\lambda}) = (-1)^{k+1} \hat{\lambda} \circ d$.

On munit $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ des opérateurs I_X et Θ_X qui vérifient pour $\hat{\lambda} \in A_{b,c}^k(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$:

$$I_X(\hat{\lambda}) = (-1)^{k+1} \hat{\lambda} \circ i_X$$

$$\Theta_X(\hat{\lambda}) = -\hat{\lambda} \circ \theta_X.$$

Les opérateurs δ, I_X et Θ vérifient les relations (i)-(iii) de A.1. et $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ devient un $\mathfrak{S}\mathcal{O}(n)$ -module différentiel gradué.

Remarquons que pour $\hat{\lambda} \in A_{b,c}^q(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ et $\omega \in \Omega_b^p(\hat{M})$ on peut définir leur produit $\hat{\lambda} \cdot \omega = \hat{\lambda}_\omega \in A_{b,c}^{p+q}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ tel que $\hat{\lambda}_\omega(\eta) = \hat{\lambda}(\omega \wedge \eta)$.

On vérifie que si on construit une suite spectrale comme au A.2., toutes les identifications restent valables pour le $\mathfrak{S}\mathcal{O}(n)$ -module $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$.

(c) Soit $C_*^{\hat{\mathcal{Q}}}(\hat{M})$ le complexe des courants transverses (cf. §.1) sur \hat{M} . Posons $A_{\hat{\mathcal{Q}}}^*(\hat{M}) = C_{m+n_0-*}^{\hat{\mathcal{Q}}}(\hat{M})$. On munit $A_{\hat{\mathcal{Q}}}^*(\hat{M})$ des opérateurs duaux δ, I_X et Θ_X qui vérifient pour $\hat{c} \in A_{\hat{\mathcal{Q}}}^k(\hat{M})$:

$$\delta(\hat{c}) = (-1)^{k+1} \hat{c} \circ d$$

$$I_X(\hat{c}) = (-1)^{k+1} \hat{c} \circ i_X$$

$$\Theta_X(\hat{c}) = -\hat{c} \circ \theta_X$$

$A_{\hat{\mathcal{Q}}}^*(\hat{M})$ devient ainsi un $\mathfrak{S}\mathcal{O}(n)$ -module différentiel gradué.

Le produit d'un courant transverse invariant avec une forme basique est un courant invariant et on a, ici aussi, un analogue de la suite spectrale de A.2., avec les mêmes identifications de ses termes.

(d) Des considérations similaires à celles de A.3. sont valables pour les complexes de A.4.a.-A.4.c. Ceci s'applique notamment aux $\mathfrak{S}\mathcal{O}(n)$ -morphisms $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ du §.2 et §.3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOLD, Small denominators. I. On maps of the circle onto itself, *Izv. Acad. Sci. USSR., Ser. Mat.*, 25, 1 (1961), 21-86.
- [2] R. BOTT, L. TU, Differential forms in Algebraic Topology, *Graduate texts*, n° 82, Springer-Verlag (1982).
- [3] G.E. BREDON, Sheaf theory, *Mac Graw Hill Series in Higher Math.*, (1967).
- [4] Y. CARRIERE, Flots riemanniens. Journées S.M.F. sur les structures transverses, *Astérisque*, 116 (1984).
- [5] A. EL-KACIMI, V. SERGIESCU, G. HECTOR, La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie, *Mathematische Zeitschrift*, 118 (1985), 593-599.
- [6] A. EL-KACIMI, G. HECTOR, Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien, *Ann. Inst. Fourier*, 36-2 (1986), (à paraître).
- [7] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology*, Academic Press, (1973-1975).
- [8] A. HAEFLIGER, Some remarks on foliations with minimal leaves, *Journal. Diff. Geom.*, 15 (1980), 269-284.
- [9] A. HATTORI, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fiber bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I*, VIII (1960), 289-331.
- [10] G. HOCHSCHILD, J.P. SERRE, Cohomology of Lie Algebras, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 591-603.
- [11] F. KAMBER, P. TONDEUR, Duality for Riemannian foliations, *Proc. Symp. Pure Math.*, 40 (1983).
- [12] F. KAMBER, P. TONDEUR, *Foliations and metrics* in "Differential Geometry", Ed. Brooks, Gray, Reinhart, Birkhäuser (1983).
- [13] P. MOLINO, Feuilletages transversalement complets et applications, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 10 (1977), 289-307.
- [14] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, *Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser. A.*, 1, 85 (1982), 45-76.

- [15] P. MOLINO, Feuilletages riemanniens, *Cours de III^e cycle*, Montpellier (1983).
- [16] B. REINHART, Harmonic integrals on foliated manifolds, *Am. J. of Math.*, (1959), 529-536.
- [17] B. REINHART, Differential geometry of foliations, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 99, Springer-Verlag (1983).
- [18] Séminaire H. Cartan, E.N.S., (1954-1955), exp. 3.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1984.

Vlad SERGIESCU,
Université des Sciences et Techniques
de Lille I
UER de Mathématiques Pures et Appliquées
59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex.

DEUX REMARQUES SUR LES FLOTS RIEMANNIENS

Pierre Molino et Vlad Sergiescu

DEUX REMARQUES SUR LES FLOTS RIEMANNIENS

Pierre Molino et Vlad Sergiescu

Let M be a connected oriented closed n -manifold. A riemannian flow \mathfrak{F} on M is an oriented one dimensional foliation which admits a bundle-like metric.

We give a characterization of isometric flows as riemannian flows whose basic cohomology $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ is non trivial in degree $(n-1)$. A second characterization involves the triviality of the central sheaf.

We show also that \mathfrak{F} has a section if and only if $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ has a non trivial image in $H^{n-1}(M)$.

Introduction

La différentiabilité est entendue au sens C^∞ . M est une variété compacte connexe orientée de dimension n . Soit \mathfrak{F} un flot sur M , c'est-à-dire un feuilletage orienté de dimension 1. Une métrique riemannienne g_M sur M est "bundle-like" au sens de B. Reinhart [12] pour (M, \mathfrak{F}) si la métrique transverse correspondante g_Γ sur le fibré

normal $Q = TM/T\mathfrak{F}$ est localement projetable suivant les feuilles. Un flot \mathfrak{F} est dit riemannien s'il admet des métriques bundle-like.

Le flot \mathfrak{F} est isométrique s'il existe une métrique sur M pour laquelle les feuilles sont les orbites d'un champ de Killing sans singularité.

Les flots isométriques et le flot normal a un feuilletage totalement géodésique sont des flots riemanniens [2], [4].

Y. Carrière a classifié [2] les flots riemanniens quand $n = 3$; il résulte de son étude que, dans ce cas, le flot riemannien \mathfrak{F} est isométrique si et seulement si l'espace de cohomologie basique en degré maximum $H_b^2(M, \mathfrak{F})$ est non nul (on rappelle que les formes basique sont localement des pull-backs de formes différentielles sur les variétés quotient locales du feuilletage). Ceci a motivé la

CONJECTURE (Y. Carrière) : Soit \mathfrak{F} un flot riemannien sur une n -variété compacte connexe orientée M . \mathfrak{F} est isométrique si et seulement si $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ n'est pas réduit à 0.

Rappelons qu'un champ de Killing transverse pour un feuilletage riemannien (M, \mathfrak{F}) muni de la métrique bundle-like g_M est une section X_T du fibré normal Q localement projetable suivant les feuilles et respectant la métrique transverse associée g_T .

Ceci étant la description des feuilletages riemanniens appliquée aux flots [9] [10] assure l'existence d'un faisceau localement trivial $\mathcal{C}(M, \mathfrak{F})$ d'algèbres de Lie de germes de champs de Killing transverses (faisceau transverse central). Il résulte, à l'aide des résultats de P. Caron et Y. Carrière [1], [2] que les orbites de $\mathcal{C}(M, \mathfrak{F})$ sont des tores et que la fibre est une algèbre abélienne \mathbb{R}^k .

Le premier auteur a conjecturé [10] que la trivialité du faisceau transverse central caractérise les flots isométriques.

Dans ce travail nous démontrons cette conjecture ainsi que celle de Y. Carrière.

THEOREME A : Pour un flot riemannien \mathfrak{F} sur une variété compacte connexe orientée M , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathfrak{F} est isométrique
- (ii) Le faisceau transverse central $\mathcal{C}(M, \mathfrak{F})$ admet une trivialisation globale.
- (iii) L'espace de cohomologie basique en degré maximum $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ n'est pas réduit à zéro.

Avant d'énoncer le second résultat rappelons qu'un flot \mathfrak{F} a une section s'il existe une sous-variété fermée transverse qui coupe chacune de ses orbites. Dans ce cas la variété M fibre sur le cercle S^1 .

THEOREME B : Un flot riemannien \mathfrak{F} a une section

si et seulement si l'application naturelle
 $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F}) \rightarrow H^{n-1}(M)$ est non nulle.

Les résultats de ce travail ont été obtenus par les deux auteurs simultanément, en partie par des méthodes différentes. Ceci les a conduit à la présentation qui est donnée ici.

Nous remercions Y. Carrière, E Ghys et A. Haefliger pour la correspondance et les discussions stimulantes que nous avons eues.

I - Réduction au cas des flots transversalement parallélisables.

Dans cette section (M, \mathfrak{F}, g_M) est un flot sur M muni d'une métrique bundle-like. On décrit le passage au flot relevé dans le fibré des repères transverses orthonormés et on montre comment ce passage au flot relevé permet de ramener la démonstration du théorème A au cas où le flot est supposé transversalement parallélisable.

■ \mathfrak{F} étant orienté, le fibré normal $Q = TM/T\mathfrak{F}$ est orienté. On considère alors la métrique transverse g_T définie par g_M sur Q et le fibré principal $E_T^1(M, p_T, SO(n-1, \mathbb{R}))$ des repères orthonormés directs de Q . Le glissement le long des feuilles de \mathfrak{F} définit de façon naturelle dans E_T^1 un flot relevé \mathfrak{F}_T^1 de codimension $\frac{n(n-1)}{2}$, invariant par les translations à droite. Si (T, g_T) est une variété riemannienne quotient locale de

(M, \mathfrak{F}) , le fibré $E^1(T)$ des repères orthonormés directs de (T, g_T) est une variété quotient locale de $(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$. La connexion de Levi-Civita ω sur $E^1(T)$ définit de façon classique un parallélisme absolu sur la variété $E^1(T)$. Par pull-back local sur E_T^1 , on obtient une connexion de Levi-Civita transverse ω_T et un parallélisme transverse canonique ; quoique la définition donnée de ces derniers soit locale, ils s'étendent globalement par unicité.

On voit ainsi que $(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ est un flot transversalement parallélisable. On en déduit [9] que les adhérences des feuilles de \mathfrak{F}_T^1 sont les fibres d'une fibration basique localement triviale $\pi_T : E_T^1 \rightarrow W_T$, et que sur chaque fibre de π_T le flot induit par \mathfrak{F}_T^1 est un flot de Lie dense. Le théorème de P. Caron - Y. Carrière [1] nous dit alors que la fibre-type $(N_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ de la fibration basique est un tore \mathbb{T}^{k+1} muni d'un flot linéaire dense.

Rappelons qu'un champ transverse sur une variété feuilletée est une section du fibré normal au feuilletage, localement projetable suivant les feuilles. Soit alors $\mathcal{C}(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ le faisceau des germes de champs transverses sur $(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ qui commutent avec tous les champs transverses globaux (et en particulier avec le parallélisme transverse canonique). On a montré [9] que $\mathcal{C}(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ est un faisceau localement trivial d'algèbres de Lie dont les "orbites transverses" (en un sens évident) sont les fibres de π_T . Compte tenu du théorème de P. Caron - Y. Carrière,

la fibre-type de \mathbf{C} est l'algèbre de Lie abélienne \mathbb{R}^k , qui joue donc ici le rôle d'algèbre de Lie structurale du flot. On a proposé d'appeler ce faisceau faisceau transverse central de $(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$.

Les sections locales de $\mathbf{C}(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$, commutant avec le parallélisme transverse canonique, sont localement des relevés de champs de Killing transverses sur (M, \mathfrak{F}, g_M) . Ainsi, $\mathbf{C}(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ est le faisceau relevé d'un faisceau localement trivial $\mathbf{C}(M, \mathfrak{F})$ de germes de champs de Killing transverses. $\mathbf{C}(M, \mathfrak{F})$ est le faisceau transverse central de (M, \mathfrak{F}) . Sa fibre-type est encore \mathbb{R}^k .

Observons également qu'à partir de g_M on définit une métrique associée $(g_M)_T^1$ sur E_T^1 qui est bundle-like pour \mathfrak{F}_T^1 de la façon suivante : on décide que l'espace horizontal de ω_T est orthogonal à l'espace vertical de la fibration $p_T : E_T^1 \rightarrow M$, on prend comme produit scalaire sur l'espace horizontal le pull-back du produit scalaire défini par g_M sur M , et pour produit scalaire sur l'espace vertical celui défini par une métrique biinvariante du groupe structural $SO(n-1, \mathbb{R})$.

■ La proposition suivante permet de ramener la démonstration de notre théorème au cas des flots transversalement parallélisables :

PROPOSITION I.1. (M, \mathfrak{F}, g_M) étant un flot riemannien sur une variété compacte connexe orientée, muni

- d'une métrique bundle-like, et $(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1, (g_M^1)_T^1)$
 le flot relevé muni de la métrique associée,
 - \mathfrak{F} est isométrique si et seulement si \mathfrak{F}_T^1 est
isométrique
 - $C(M, \mathfrak{F})$ admet une trivialisation globale si et
seulement si il en est de même de $C(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$
 - $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ est isomorphe à $H_b^{\frac{n(n-1)}{2}}(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$

Démonstration - \mathfrak{F} isométrique $\Leftrightarrow \mathfrak{F}_T^1$ isométrique

(voir aussi [5]) :

Si \mathfrak{F} est isométrique, soit g_M^1 une métrique sur M pour laquelle \mathfrak{F} est défini par un champ de Killing X . Soit $(g_M^1)_T^1$ la métrique sur E_T^1 définie de manière analogue à $(g_M^1)_T^1$ à partir de g_M^1 ; et soit X_T^1 le champ relevé tangent à \mathfrak{F}_T^1 . Alors X_T^1 est un champ de Killing pour la métrique $(g_M^1)_T^1$, et \mathfrak{F}_T^1 est donc isométrique.

Réciproquement, si g_T^1 est une métrique sur E_T^1 pour laquelle \mathfrak{F}_T^1 est défini par un champ de Killing X_T^1 , on remplace X_T^1 et le champ d'élément orthogonal, puis g_T^1 par leurs moyennes sous l'action de $SO(n-1, R)$. On se ramène ainsi au cas où g_T^1 et X_T^1 sont invariants par les translations à droite. g_T^1 définit alors par projection une métrique g_M sur M pour laquelle le champ projeté X est de Killing.

- $C(M, \mathfrak{F})$ admet une trivialisation globale si et
seulement si il en est de même de $C(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$: ce point

résulte immédiatement de la construction, le premier faisceau ayant pour relevé le second dans le fibré des repères transverses orthonormés.

$$\underline{H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})} = H_b^{\frac{n(n-1)}{2}}(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1) \quad (\text{voir aussi [3]}):$$

Le groupe $SO(n-1, \mathbb{R})$ opère par moyennisation sur les formes basiques de $(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1)$ et définit à partir de toute forme basique β_T^1 une forme basique équivariante $\tilde{\beta}_T^1$.

Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\}$ un système de champs fondamentaux sur le fibré E_T^1 qui correspond à une base de l'algèbre de Lie $\underline{so(n-1)}$.

On définit l'application d'intégration sur la fibre $\psi : \wedge_b(E_T^1, \mathfrak{F}_T^1) \rightarrow \wedge_b(M, \mathfrak{F})$ en posant $\psi(\beta_T^1) = i_{\lambda_{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} \dots \dots i_{\lambda_1} \tilde{\beta}_T^1$. A l'aide de la connexion ω_T on démontre que $\psi^n : H_b^{\frac{n(n-1)}{2}}(M, \mathfrak{F}) \rightarrow H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ est un isomorphisme. - //-

II - Démonstration du théorème A

On supposera désormais que le flot (M, \mathfrak{F}) est transversalement parallélisable. Notons $\pi : M \rightarrow W$ la fibration basique et (N_y, \mathfrak{F}_y) sa fibre en un point y de W , munie du feuilletage induit. On a vu que la fibre-type (N, \mathfrak{F}) de cette fibration est un tore \mathbb{T}^{k+1} , muni du flot linéaire \mathfrak{F}_v défini par un champ de vecteurs invariant v .

La dimension de W est $q = n-k-1$.

■ Précisons la description du feuilletage.

L'anneau $\bigwedge_b^0(M, \mathfrak{F})$ des fonctions basiques, c'est-à-dire des intégrales premières du flot, s'identifie à l'anneau $\bigwedge^0(W)$ des fonctions différentiables sur W . Soient $\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F})$ l'algèbre de Lie des champs feuilletés, $\mathfrak{J}(M, \mathfrak{F})$ l'idéal de cette algèbre de Lie formé des champs tangents aux feuilles. L'algèbre de Lie $\mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$ des champs transverses s'identifie au quotient $\mathfrak{L}(M, \mathfrak{F})/\mathfrak{J}(M, \mathfrak{F})$. Si X est un champ feuilleté, X_T le champ transverse correspondant, X est projetable en X_W sur W et cette projection ne dépend que de X_T . On en déduit [9] une suite exacte d'algèbre de Lie et de $\bigwedge^0(W)$ -modules

$$(II.1) \quad 0 \rightarrow \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \mathfrak{l}(M, \mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{L}(W) \rightarrow 0$$

où $\mathfrak{L}(W)$ est l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs sur W , et où $\underline{\mathcal{E}}$ est le module de tous les champs transverses π -verticaux. En fait, on voit que $\underline{\mathcal{E}}$ est le module des sections du fibré vectoriel \mathcal{E} de base W dont la fibre en $y \in W$ est l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{l}(N_y, \mathfrak{F}_y)$, isomorphe à \mathbb{R}^k .

Montrons que (i) \Rightarrow (ii)

Si (M, \mathfrak{F}) est isométrique, soit g_M une métrique sur M telle que \mathfrak{F} soit défini par un champ de Killing sans singularités X . Dans le groupe de Lie $\text{Isom}(M, g_M)$ des isométries de la variété, l'adhérence du groupe à un

paramètre de X est un tore K . Les orbites de K sont les adhérences des feuilles, donc K est de dimension $k+1$. Complétons X en une base $\{X, X_1, \dots, X_k\}$ de l'algèbre de Lie abélienne de champs de Killing définie par l'action de K sur M . Les champs X_1, \dots, X_k sont feuilletés et définissent des éléments X_{1T}, \dots, X_{kT} de $\mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$. La fibration basique $\pi : M \rightarrow W$ est dans ce cas une K -fibration principale, et les champs invariants à droite pour cette fibration sont feuilletés. Ils définissent un $\wedge^0(W)$ -sous-module \mathfrak{l}' de $\mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$. Comme la dimension locale de \mathfrak{l}' est la même que celle de \mathfrak{l} , on a $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$. Comme X_{1T}, \dots, X_{kT} commutent avec \mathfrak{l}' , ils sont dans le centre de $\mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$ et définissent donc une trivialisation globale de $\mathcal{C}(M, \mathfrak{F})$.

■ Montrons que (ii) \Rightarrow (iii)

A l'aide d'un revêtement à deux feuillets on voit facilement que l'on peut supposer W orientable.

Soient $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k$ des champs transverses qui forment une base du centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$ et β la forme volume transverse définie par la métrique bundle-like. Nous allons montrer que la classe $[\beta]$ dans $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F})$ est non-nulle.

Supposons que $\beta = du$ et posons $\bar{\beta} = i_{\bar{Y}_1} \circ \dots \circ i_{\bar{Y}_k} \beta$, $\bar{u} = i_{\bar{Y}_1} \circ \dots \circ i_{\bar{Y}_k} u$. Puisque les champs transverses

$\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k$ commutent avec $\mathfrak{l}(M, \mathfrak{F})$ il résulte que $L_{\bar{Y}_i} \bar{\beta} = 0$

et $L_{\bar{Y}_i} u = 0$. Ceci implique que les formes $\bar{\beta}$ et \bar{u} sont projetables sur W . De plus, $d i_{\bar{Y}_i} u = -i_{\bar{Y}_i} du$, d'où, par utilisation répétée, $d\bar{u} = (-1)^k \bar{\beta}$. Ceci contredit le fait que $\bar{\beta}$ se projette sur un volume de la variété orientable W .

■ Pour démontrer que (iii) \Rightarrow (i) nous pouvons supposer encore que W est orientable à l'aide d'un revêtement à deux feuillets.

La condition $H_b^n(M, \mathfrak{F}) \neq 0$ s'interprète en disant que le groupe $\pi_1(W)$ agit trivialement sur la cohomologie $H_b^k(N, \mathfrak{F})$ (voir [3], corollaire II.7). Comme la différentielle $d : \wedge_b^{k-1}(N, \mathfrak{F}) \rightarrow \wedge_b^k(N, \mathfrak{F})$ est nulle ceci signifie que le groupe structural de la fibration basique se réduit au sous-groupe $\text{Aut}'_0(N, \mathfrak{F})$ des automorphismes qui respectent une forme volume transverse.

Les lemmes suivants sont inspirés par E. Ghys [5] et M. Pierrot [11] :

LEMME III.2 : Soit \mathfrak{F}_v un flot linéaire dense sur le tore \mathbb{T}^{k+1} , défini par un champ de vecteurs invariant v . Si φ est un automorphisme du flot respectant une forme volume transverse, il respecte chaque champ transverse.

Démonstration du lemme : Soit P_φ la matrice de $\text{SL}(k+1, \mathbb{Z})$ induite par l'action de φ sur $H_1(\mathbb{T}^{k+1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k+1}$. Le vecteur v est vecteur propre de P_φ de valeur

propre λ_φ . Comme les coordonnées de v sont irrationnelles, $\lambda_\varphi = 1$ si et seulement si P_φ est la matrice identité.

P_φ définit un nouvel automorphisme du flot \mathfrak{F}_v , que l'on peut considérer comme le linéarisé de φ . Transversalement au flot, P_φ multiplie une forme transverse par λ_φ^{-1} .

Or φ et P_φ agissant de façon affine transversalement au flot ; de plus $P_\varphi^{-1} \circ \varphi$ respecte chaque feuille de \mathfrak{F}_v , donc agit transversalement de façon triviale sur les champs transverses. Par suite, φ et P_φ agissent de la même manière sur une forme volume transverse.

Pour que φ respecte une forme volume transverse, il faut que $\lambda_\varphi = 1$, donc que P_φ soit la matrice identité, et par suite que φ respecte chaque champ transverse - // -

LEMME II.2. (voir Mireille Pierrot [11]). Soit \mathfrak{F}_v un flot linéaire dense sur le tore \mathbb{T}^{k+1} défini par un champ de vecteurs invariant v . Le groupe $\text{Aut}_0(\mathbb{T}^{k+1}, \mathfrak{F}_v)$ des automorphismes du flot qui respectent un parallélisme transverse $\{Z_{1T}, \dots, Z_{kT}\}$ se rétracte par déformation sur le groupe des translations.

Démonstration : Soit $\text{Aut}_0(\mathbb{T}^{k+1}, \mathfrak{F}_v)$ le groupe des automorphismes du flot qui respectent chaque feuille. Fixons un point x_0 dans \mathbb{T}^{k+1} et notons additivement

le produit. Pour tout $\varphi \in \text{Aut}_0^n$, on définit $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}_0$ par

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + x_0 - \varphi(x_0)$$

Observons maintenant qu'en définissant de façon naturelle, pour tout vecteur λv avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{T}^{k+1}$, $x + \lambda v$ comme l'image de x par l'exponentielle du champ invariant λv , on peut écrire

$$\tilde{\varphi}(x) = x + f_\varphi(x)v$$

où $f_\varphi \in \Lambda^0(\mathbb{T}^{k+1})$ est astreint à la seule condition $(vf_\varphi)(x) > -1$ pour tout x . Posant alors

$\tilde{\varphi}_t(x) = x + (1-t)f_\varphi(x)v$ pour tout $t \in [0,1]$, on définit une rétraction de $\text{Aut}_0(\mathbb{T}^{k+1}, \mathfrak{F}_v)$ sur l'identité, d'où en posant $\varphi_t(x) = \tilde{\varphi}_t(x) - x_0 + \varphi(x_0)$ une rétraction de $\text{Aut}_0^n(\mathbb{T}^{k+1}, \mathfrak{F}_v)$ sur les translations -//-

Compte tenu de ce lemme, le groupe structural de la fibration basique se réduit au groupe des translations de la fibre-type $N = \mathbb{T}^{k+1}$. En d'autres termes, la fibration basique est une \mathbb{T}^{k+1} -fibration principale, le feuilletage \mathfrak{F} étant défini par les orbites du champ fondamental \tilde{v} associé au champ de vecteurs invariant v de \mathbb{T}^{k+1} . Soit alors g_M une métrique riemannienne invariante par les translations à droite ; v est un champ de Killing pour cette métrique, et par suite le flot \mathfrak{F} est isométrique.

Remarques

(1) Il est facile de voir qu'un flot riemannien est isométrique si et seulement s'il est géodésible [2]. On peut

alors donner une autre preuve de (iii) \Rightarrow (i) à l'aide du critère homologique de géodésibilité de Sullivan (voir [6]).

(2) Y. Carrière a aussi posé le problème de savoir si un feuilletage riemannien est minimalisable dès que la cohomologie basique est non-nulle en dimension maximum. Une démonstration de ce fait, lorsque l'algèbre de Lie structurelle du feuilletage est abélienne, nous a été communiquée par A. Haefliger.

(3) Il existe dans le fibré \mathcal{E} une connexion naturelle ∇ . Elle peut-être utilisée pour construire une 1-forme basique α sur M dont la classe de cohomologie $[\alpha] \in H_b^1(M, \mathfrak{F})$ est l'obstruction à trivialisier le faisceau $\mathcal{C}(M, \mathfrak{F})$.

III - Démonstration du théorème B

■ Commençons par rappeler quelques définitions.

Une forme ω est appelée \mathfrak{F} -triviale si $i_X \omega = 0$ lorsque X est un champ collinéaire à \mathfrak{F} .

Notons $\mathcal{C}(M)$ le complexe des courants de de Rham sur M et $\mathcal{C}_0(M, \mathfrak{F})$ le sous-complexe des courants transverses invariants (courants qui s'annulent sur les formes \mathfrak{F} -triviales et sur leurs différentielles) [7]. Toute mesure invariante, ou, de manière équivalente, tout cycle de feuilletage au sens de Sullivan est un élément de $\mathcal{C}_1(M, \mathfrak{F})$ (voir [6], [14]).

■ Passons à la démonstration proprement dite.

Il est immédiat que si \mathfrak{F} a une section la forme volume transverse est non-nulle dans $H^{n-1}(M)$. Supposons réciproquement que l'image de $H_b^{n-1}(M)$ dans $H^{n-1}(M)$ est non-nulle.

Le théorème de dualité de de Rham et sa version pour les feuilletages riemanniens ([8], [13]) entraîne la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(M) & \xrightarrow{\sim} & H_1(M) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F}) & \xrightarrow{\sim} & H_1(M, \mathfrak{F}) \end{array}$$

Les flèches verticales sont induites par des inclusions et les flèches horizontales, qui sont des isomorphismes, par l'application $\omega \mapsto C_\omega$ ou $C_\omega(\eta) = \int_M \omega \wedge \eta$

Puisque $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F}) \neq 0$, cet espace est isomorphe à $\mathbb{R}[3]$. Ainsi l'hypothèse sur l'application $H_b^{n-1}(M, \mathfrak{F}) \rightarrow H^{n-1}(M)$ implique que $H_1(M, \mathfrak{F})$ se plonge dans $H_1(M)$.

Nous allons appliquer un théorème de Schwartzman disant que le flot \mathfrak{F} a une section si tout cycle de Sullivan de \mathfrak{F} détermine un élément non-nul dans $H_1(M)$ (voir [6], [14])

Puisque \mathfrak{F} est isométrique par le théorème A, il existe une 1-forme χ telle que $\chi(X) > 0$ et $i_X d\chi = 0$ (le champ X détermine \mathfrak{F}) [2][6]. La première propriété

entraîne que pour tout cycle de feuilletage C on a $C(\chi) > 0$ [6] [14]. Par ailleurs si $\bar{c} \in C_2(M, \mathfrak{F})$ alors $\delta\bar{c}(\chi) = \bar{c}(d\chi) = 0$. Ainsi $\delta\bar{c} \neq C$ et la classe d'homologie de C est un élément non-nul de $H_1(M, \mathfrak{F})$ et donc de $H_1(M)$. Ceci achève la démonstration - // -

Bibliographie

- [1] P. Caron - Y. Carrière "Flots transversalement de Lie R^n , flots transversalement de Lie minimaux" C.R.Ac.Sc. Paris, 291 (1980), série A, pp. 477-478.
- [2] Y. Carrière "Flots riemanniens" - Journées sur les structures transverses, Toulouse 1982 - Asterisque (1984).
- [3] El Kacimi - G. Hector - V. Sergiescu "La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie". A paraître dans Mathematische Zeitschrift.
- [4] E. Ghys "Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un". Commentari Math. Helv. 58,4 (1983), pp. 543-572.
- [5] E. Ghys "Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes". Ann. Inst. Fourier (à paraître).
- [6] H. Gluck "Dynamical behaviour of geodesic flows" In Lectures Notes n° 819 .
- [7] A. Haefliger "Some remarks on foliations with minimal leaves". Journal Diff. Geom., 15 (1980), 269-284 .
- [8] F. Kamber, P. Tondeur "Duality for riemannian foliations". Proc. Symp. Pure Math 40 (1983) .
- [9] P. Molino "Géométrie globale des feuilletages riemanniens". Proc. Kon. Ned. Akad, A1, 85 (1982), pp. 45-76.
- [10] P. Molino "Flots riemanniens et flots isométriques". dans "Séminaire de Géométrie différentielle 1982-1983", Montpellier.

- [11] M. Pierrot "Groupe des automorphismes d'un flot linéaire sur le tore" dans "Séminaire de Géométrie Différentielle 1983-1984". Montpellier.
- [12] B. Reinhart "Foliated manifolds with bundle-like metrics". Ann. of Maths, 69 (1959), pp. 119-132.
- [13] V. Sergiescu "Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens" preprint Lille 1984
- [14] D. Sullivan "Cycles for the dynamical study of foliated manifolds" Inv. Math. 36 (1976) pp. 225-255.

Pierre Molino
Université Montpellier II
Place E. Bataillon
34060 Montpellier CEDEX France

Vlad Sergiescu
Université Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX France

SECONDE THESE

LE PROBLEME DE BRILL NOETHER

