

55376  
1986  
31

55376  
1986  
31

N° d'ordre : 1352



T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE  
FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de  
Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Mécanique des Fluides

par

MOHAMMED HASNAOUI

THEORIE ASYMPTOTIQUE DES ONDES DE BOUSSINESQ  
DANS LE CHAMP DE LA FORCE DE CORIOLIS.

*Exemplaire corrigé après avis du jury*

Soutenue le 12 Septembre 1986

devant la Commission d'examen

Président : F. PARSY, Professeur à l'U.S.T.L.F.A.  
Rapporteur : P.A. BOIS, Professeur à l'U.S.T.L.F.A.  
Membres : St. GODTS, Docteur, Chercheur au Laboratoire de Mécanique de Lille.  
R. Kh. ZEYTOUNIAN, Professeur à l'U.S.T.L.F.A.



" A MES PARENTS "

Je tiens à adresser mes très respectueux remerciements à Monsieur ZEYTOUNIAN qui a accepté d'être mon Directeur de recherche et qui a suivi régulièrement l'avancement de cette étude.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur BOIS qui a explicité régulièrement les résultats de ses travaux qui ont servi de base à cette étude. Je le remercie tout particulièrement de m'avoir apporté une aide précieuse en suivant attentivement l'élaboration de ces pages.

Je tiens également à remercier :

Messieurs F. PARSY, St. GODTS qui ont accepté de participer au Jury de cette thèse.

Enfin, je remercie Mme Françoise PÉTTAUX pour la rapidité, l'amabilité et l'efficacité avec lesquelles elle a assuré la frappe de ce manuscrit ainsi que toutes les personnes ayant participé à la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

	Pages
I.- INTRODUCTION .....	1
1. PREMIERE PARTIE : THEORIE ASYMPTOTIQUE DES ONDES DE BOUSSINESQ EN PRESENCE DU CHAMP DE CORIOLIS .....	5
I.- Les équations de départ .....	6
II.- Modèle Mathématique des ondes de Boussinesq .....	10
1.- L'approximation de Boussinesq .....	10
2.- Linéarisation .....	12
3.- Méthode des échelles multiples .....	15
III.- Solution des ondes de Boussinesq .....	18
1.- Solution formelle à l'ordre 0 en $M_\infty$ .....	18
2.- Solution à l'ordre 1 en $M_\infty$ .....	19
IV.- Annexe (1) .....	23
2. DEUXIEME PARTIE : ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION POUR $(1/R_0)$ PETIT DEVANT UN .....	26
I.- Les développements asymptotiques des phases et des amplitudes.	27
1.- Le calcul de $\varphi_i'(z; R_0)$ pour $1/R_0$ petit .....	27
2.- Le calcul des amplitudes pour $1/R_0$ petit .....	29
3.- Le comportement des phases et des amplitudes à l'infini ..	31
II.- Etude au voisinage des points tournants .....	32
1.- La solution extérieure .....	32
2.- La solution intérieure .....	33
3.- Les développements intérieurs de $\overline{W}_{0(+)}^*$ et $\overline{W}_{0(-)}^*$ , au voisinage de $z_0$ .....	40
3.1.- Le développement des phases au voisinage de $z = z_0$ .	41
3.2.- Le développement des amplitudes au voisinage de $z_0$ .	45

4.- Le raccord .....	50
III.- Réflexion d'une onde par un point tournant .....	52
IV.- Annexe (2) .....	56
3. TROISIEME PARTIE : ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION POUR $\epsilon$ PETIT .....	61
I.- Le développement asymptotique des phases et des amplitudes..	62
1.- Le calcul de $\phi'_1(z; \epsilon)$ pour $\epsilon \ll 1$ .....	62
2.- Le calcul de $A_{0j}^j(z; \epsilon)$ pour $\epsilon \ll 1$ .....	63
II.- Etude au voisinage du point tournant .....	65
1.- La solution extérieure .....	65
2.- La solution intérieure .....	66
3.- Les développements des phases et des amplitudes, au voisinage de $z_0$ .....	69
3.1.- Le développement des phases .....	69
3.2.- Le développement des amplitudes .....	71
4.- Conditions de réflexion .....	74
III.- Réflexion par un point tournant .....	76
4. DERNIERE PARTIE : INFLUENCE DE LA FORCE DE CORIOLIS SUR LES ONDES DE BOUSSINESQ STATIONNAIRES EN PRESENCE D'UNE MONTAGNE .....	79
1.- Les équations linéarisées pour les ondes de relief .....	80
1.1.- Les équations du mouvement .....	80
1.2.- Choix d'une solution de base .....	83
1.3.- Linéarisation .....	86
1.4.- L'approximation de Boussinesq .....	87

2.- L'équation différentielle de la vitesse verticale suivant l'altitude .....	88
2.1.- La transformée de Fourier .....	88
2.2.- L'équation différentielle pour $W(\zeta)$ .....	89
3.- Solution de l'équation (188), par la méthode des échelles multiples .....	91
3.1.- Variation rapide .....	92
3.2.- Variation lente .....	94
4.- Problème du point tournant dans le cas des ondes longitudinales.....	94
5.- Propagation des ondes transversales .....	99
 VI. CONCLUSION .....	 101
 VII. BIBLIOGRAPHIE .....	 102

## I. INTRODUCTION

Dans la mécanique des fluides, il y a une très grande variété d'équations susceptibles de décrire les phénomènes atmosphériques; une première étude théorique a été faite par KIBEL (1940).

Sachant que, certaines ondes, comme par exemple les ondes internes courtes acoustiques, n'ont pas de sens du point de vue météorologique. Ce qui justifie bien, en particulier, le filtrage quasi-statique.

D'autre part, les ondes de la dimension de celle de Rossby, sont des ondes longues relativement lentes, et constituent des rouages essentiels de la machine atmosphérique. C'est pourquoi, on est conduit à sélectionner les écoulements à analyser selon leurs dimensions dans l'espace et dans le temps, et à employer des "équations modèles" - c'est ce que l'on appelle habituellement le filtrage.

Rendre sans dimensions ces équations, nous conduit à définir des nombres sans dimensions décrivant les propriétés de l'atmosphère; ce sont ceux de : STROUHAL, ROSSBY, MACH, BOUSSINESQ, etc...

Il s'avère alors que le filtrage est, en fait intimement lié au concept d'écoulements limites, lorsque ces nombres sans dimensions sont supposés petits ou grands devant l'unité, ces derniers étant souvent des paramètres de perturbations singulières.

Dans l'étude des écoulements atmosphériques, qui sont des écoulements compressibles pesants à vitesse lente devant la vitesse du son, il est usuel de considérer une atmosphère dite standard qui se présente sous la forme d'une situation thermodynamique de référence, fonction uniquement de l'altitude  $z_{\infty}$ , et qui n'est que "légèrement" perturbée par le temps :  $\rho = \rho_{\infty}(z_{\infty})$ ,  $P = P_{\infty}(z_{\infty})$  et  $T = T_{\infty}(z_{\infty})$ .

La justification de cette approximation, originellement due à Boussinesq pour un fluide incompressible, et habituellement présentée pour un fluide compressible dans le cas d'écoulements confinés verticalement [1] sur une hauteur faible. Pour la simulation dans le plan tangent, d'écoulements dans l'atmosphère, il faut se libérer de la contrainte liée au confinement vertical.

Dans certaines conditions on peut montrer, comme l'a fait ZEYTOUNIAN [2] que la première approximation dans un schéma asymptotique correspond bien au modèle de Boussinesq, mais les résultats ne sont valables que localement.

On se propose d'étudier ici la propagation d'ondes atmosphériques dans l'approximation du plan tangent, et cela de manière à suivre l'évolution de ces ondes sur des hauteurs qui peuvent être considérables en comparaison de la longueur d'onde.

Les équations de départ sont celles d'Euler régissant les phénomènes adiabatiques de l'atmosphère libre, dans un repère en mouvement avec la rotation de terre (voir par exemple ZEYTOUNIAN, [3]). Comme il s'agit d'examiner les problèmes liés à la variation de la température avec l'altitude, il est clair que le cadre théorique doit être celui de l'approximation de Boussinesq parce qu'alors les effets de stratification peuvent contrarier (ou au contraire se cumuler avec) les effets de pesanteur. Cette hypothèse conduit à n'étudier que des écoulements quasi-incompressibles, donc à faible nombre de Mach ( $M_\infty$ ). Il est nécessaire pour obtenir des équations de Boussinesq qui sont valables partout, d'introduire parallèlement à la variable  $z$  une variable lente  $\bar{z} = M_\infty z$ . L'écoulement est caractérisé par cinq nombres sans dimensions qui sont  $M_\infty$ ,  $R_\infty$  (Rossby),  $S$  (Strouhal),  $\varepsilon$  (paramètre hydrostatique) et  $B_\infty$  (Boussinesq).

Dans la première partie, on écrit les équations généralisées à la Boussinesq dites "avec effets de Coriolis". Ensuite ces équations sont linéarisées autour de la solution de repos, et utilisées pour étudier la propagation d'ondes

périodiques. La méthode utilisée consiste en une application de la technique des développements asymptotiques raccordés (voir à ce sujet, [4]) et de celle des échelles multiples (voir BOIS, [5], [6] par exemple). Cette dernière permet de prendre en compte la variation de la fréquence de Brünt-Väisälä avec l'altitude, et fait apparaître le mouvement du milieu comme résultant de la modulation d'onde locale par la variation lente des paramètres de l'atmosphère avec l'altitude.

Dans la deuxième partie, on examine ce que donnent ces résultats dans le cas où  $(1/R_0) \ll 1$  et  $\varepsilon = o(1)$ . En effet, on constate qu'il n'existe plus de points tournants véritables et cela est dû à la propagation d'ondes transversales qui est mise en évidence. Ces points singuliers apparaissent dans le cas où on néglige la rotation de la Terre (voir Bois, [7]); mais en analysant le comportement de ces points dans le cas où  $\frac{1}{R_0} \neq 0$ , on montre que les ondes sont oscillatoires d'un côté, et deviennent lentement oscillatoire de l'autre. De plus, on constate que l'un des aspects les moins satisfaisants de la théorie des ondes de gravité atmosphériques en fluide parfait, est la croissance régulière de l'amplitude de ces ondes comme  $(\rho_{\infty}(z))^{-1/2}$ , mais on montre que cette dernière est une croissance modérée [8]. Ensuite, en analysant la réflexion d'une onde par un point tournant, on trouve que le coefficient de réflexion est égal à l'unité [9].

Dans la troisième partie, on considère le cas :  $\varepsilon \ll 1$  et  $R_0 = o(1)$ . On observe tout d'abord, quand  $\varepsilon = 0$ , que l'une des caractéristiques de cet écoulement est la disparité de l'échelle de hauteur  $H$  et de l'échelle de longueur horizontale  $L$  normalisant les variables d'espaces, et par suite on met en évidence des points tournants pour lesquels les ondes oscillatoires d'un côté du point tournant, deviennent aperiodiques de l'autre. Par contre, en analysant ces points tournants dans le cas  $\varepsilon \neq 0$ , on constate que le phénomène qui se produit est le même que celui qui a été mis en évidence dans la partie précédente.

Enfin, dans la dernière partie, on étudie les ondes stationnaires dans le cas du filtrage quasi-statique ( $\epsilon = 0$ ). La modélisation asymptotique d'écoulements autour de montagnes un peu étendues conduit à envisager autour de telles montagnes l'influence de la rotation de la Terre. On décrit ces écoulements par l'approximation de Boussinesq, et par suite, on montre dans une théorie linéarisée, sous des conditions d'approximations suffisantes, qu'on peut étudier la propagation d'ondes de gravité stationnaires dans un courant cisailé. Ainsi en utilisant la méthode des échelles multiples, on met en évidence des effets originaux dûs à l'influence de la force de Coriolis sur la propagation de ces ondes. En particulier, il existe pour les ondes non purement longitudinales une oscillation lente caractéristique. Il apparaît en outre des points tournants liés à la fois à la force de Coriolis et au cisaillement de l'écoulement.

1. PREMIERE PARTIE :

THEORIE ASYMPTOTIQUE DES ONDES DE BOUSSINESQ

EN PRESENCE DU CHAMP DE CORIOLIS

## I.- LES EQUATIONS DE DEPART

Dans notre étude, on se limitera aux écoulements atmosphériques pour lesquels l'échelle caractéristique horizontale  $L$  est beaucoup plus petit que le rayon  $a_0$  moyen de la sphère terrestre.

Sous cette hypothèse  $(\frac{L}{a_0} \ll 1)$  on peut repérer, avec une très bonne approximation, les écoulements atmosphériques dans un système de coordonnées cartésiennes lié au plan normal à l'accélération gravitationnelle  $\vec{g}^p$ . Le vecteur de la rotation de la terre  $\vec{\Omega}^p$  étant dirigé selon l'axe des pôles, du sud vers le nord, on peut l'exprimer sous la forme suivante :

$$(1) \quad \vec{\Omega}^p = \Omega_0 \cdot \vec{e}^p = |\vec{\Omega}^p| (\sin \varphi \vec{k}^p + \cos \varphi \vec{j}^p),$$

$\varphi$  étant la latitude algébrique du point  $P_0$  d'observation sur la surface de la terre au voisinage duquel l'écoulement est analysé.

On considère le cas adiabatique, et l'on analyse l'écoulement dans une atmosphère libre; en effet, on suppose dans ce qui suit que l'atmosphère est un fluide compressible, pesant, soumis à la force de Coriolis. La loi d'état du milieu étant celle d'un gaz parfait. Les variables sont normalisées à l'aide d'une vitesse  $U_0$ , d'une longueur  $L_0$ , selon l'horizontale, et d'une longueur  $H_0$ , selon la verticale, d'un temps  $t_0 = \frac{L_0}{U_0}$ , d'une pression  $P_0$ , d'une masse volumique  $\rho_0$  et d'une température  $T_0 = \frac{P_0}{R \rho_0}$ , où  $R$  est la constante des gaz parfaits. Toutes ces quantités sont supposées caractériser l'état au repos du milieu au niveau du sol.

Sous ces hypothèses, on peut retenir pour les équations d'Euler la forme suivante [3] :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} S \frac{Du}{Dt} - \frac{1}{R_0} v + \frac{\varepsilon}{R_0 \text{tg} \varphi_0} w + \frac{1}{S} \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 ; \\ S \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{R_0} u + \frac{1}{S} \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 ; \\ \varepsilon^2 S \frac{Dw}{Dt} - \frac{\varepsilon}{R_0 \text{tg} \varphi_0} u + \frac{1}{S} \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{B_0}{\gamma M_0^2} = 0 ; \\ S \frac{D\rho}{Dt} + S \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = 0 ; \\ S S \frac{D\pi}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} S \frac{DP}{Dt} = 0 ; \\ P = S \pi . \end{array} \right.$$

Les équations d'Euler adimensionnelles (2) forment un système fermé pour  $u, v, w, \rho, \pi$  et  $P$ .

L'écoulement est caractérisé par cinq paramètres :  $S, R_0, M_0, \varepsilon,$

$B_0$ , définis par :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{L_0}{t_0 U_0} : \text{étant le nombre de Strouhal qui caractérise les effets} \\ \text{instationnaires;} \end{array} \right.$$

et tel que :

$$S \frac{D(\cdot)}{Dt} = S \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + w \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} ;$$

$$(4) \quad R_0 = \frac{U_0/L_0}{2 \Omega_0 \sin \varphi_0} : \text{étant le nombre de Rossby qui caractérise l'effet de la rotation de la terre;}$$

$$(5) \quad M_\infty^2 = \frac{U_0^2 \rho_0}{\gamma P_0} : \text{nombre de Mach qui caractérise les effets de compressibilité;}$$

$$(6) \quad \varepsilon = \frac{H_0}{L_0} : \text{paramètre quasi-statique;}$$

$$(7) \quad B_0 = \frac{H_0 \cdot g}{R T_0} : \text{nombre de Boussinesq qui met en évidence la gravitation de la terre.}$$

On sait que dans l'atmosphère, les fonctions qui sont significatives du point de vue thermodynamique, sont celles qui tiennent compte des "écarts" relativement à l'atmosphère standard.

En effet, il est judicieux de postuler l'existence d'une atmosphère dite standard qui est supposée exister de jour en jour sous la forme d'une situation thermodynamique de référence, fonction uniquement de l'altitude, et qui n'est que "légèrement" perturbée par le temps proprement dit.

Si l'on note par  $z_{\infty}$ , l'altitude dans cette atmosphère standard, et par  $P_{\infty}$ ,  $\rho_{\infty}$ ,  $T_{\infty}$ , la pression, la masse volumique, la température (absolue) dans cette dernière, et qui sont fonctions seulement de  $z_{\infty}$  [1]; elles vérifient les relations suivantes :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\infty}(z_{\infty}) = \rho_{\infty}(z_{\infty}) T_{\infty}(z_{\infty}) ; \\ \frac{dP_{\infty}}{dz_{\infty}} + B_0 \rho_{\infty}(z_{\infty}) = 0 ; \\ z_{\infty} = B_0 z . \end{array} \right.$$

Ainsi, il faut introduire dans les équations (2) les perturbations thermodynamiques :

$$(9) \quad \pi = \frac{P - P_0(z_0)}{P_0(z_0)} ; \quad \omega = \frac{S - S_0(z_0)}{S_0(z_0)} ; \quad \theta = \frac{T - T_0(z_0)}{T_0(z_0)},$$

d'où, on obtient pour les fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $\pi$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  et  $w$ , le système d'équations suivant :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+\omega) \left\{ S \frac{Du}{Dt} - \frac{1}{R_0} v + \frac{\varepsilon}{R_0 + \gamma g_0} w \right\} + \frac{T_0(z_0)}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0 ; \\ (1+\omega) \left\{ S \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{R_0} u \right\} + \frac{T_0(z_0)}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \pi}{\partial y} = 0 ; \\ (1+\omega) \left\{ \varepsilon^2 S \frac{Dw}{Dt} - \frac{\varepsilon}{R_0 + \gamma g_0} u \right\} + \frac{T_0(z_0)}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \pi}{\partial z} - (1+\omega) \frac{B_0}{\gamma M_0^2} \theta = 0 ; \\ S \frac{D\omega}{Dt} + (1+\omega) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - (1+\omega) B_0 \left[ 1 + \frac{dT_0}{dz_0} \right] \frac{w}{T_0} = 0 ; \\ (1+\omega) S \frac{D\theta}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} S \frac{D\pi}{Dt} + (1+\pi) B_0 \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_0}{dz_0} \right] \frac{1}{T_0} w = 0 ; \\ \pi = \omega + \theta + \omega \theta . \end{array} \right.$$

Au niveau de (10), on voit apparaître la quantité suivante

$$B_0 \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_0}{dz_0} \right] \frac{1}{T_0} \quad \text{qui n'est que la fréquence de Brunt-Väisälä}$$

dont on verra son utilité plus loin.

En plus, on voit intervenir deux échelles verticales qui sont dans un rapport égal à  $B_0$ .

Aussi, quand  $B_0 \ll 1$ , on présente déjà qu'il doit nécessairement apparaître un phénomène de double échelle relativement à l'altitude.

## II.- MODELE MATHEMATIQUE DES ONDES DE BOUSSINESQ

### 1.- L'approximation de Boussinesq

L'hypothèse fondamentale qui permet de décrire les écoulements atmosphériques, est que le nombre de Mach  $M_\infty$ , caractérisant le mouvement, est petit. L'écoulement limite est donc un écoulement quasi incompressible à condition que  $B_0 \ll 1$ . Il existe donc une situation privilégiée correspondant à :

$$(11) \quad \frac{B_0}{M_\infty} = \frac{g \cdot H_0}{\mu_0} \left( \frac{\gamma}{R T_0} \right)^{1/2} = \hat{B} = o(1),$$

lorsque  $B_0$  et  $M_\infty$  tendent vers zéro, simultanément et à la même vitesse, cette situation conduit à l'approximation de Boussinesq, d'après ZEYTOUNIAN [2] ; soit le passage à la limite :

$$(12) \quad B_0 = \hat{B} M_\infty, \quad \hat{B} = o(1) \quad \text{et} \quad M_\infty \rightarrow 0,$$

et les fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\pi$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  sont supposées être de la forme :

$$(13) \quad \begin{cases} u = u^* + \dots; & v = v^* + \dots; & w = w^* + \dots; \\ \pi = \delta_1(M_\infty) \pi^* + \dots; & \theta = \delta_2(M_\infty) \theta^* + \dots; & \omega = \delta_3(M_\infty) \omega^* + \dots \end{cases}$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  étant des fonctions de jauge qui tendent vers zéro avec  $M_\infty$ .

Ces fonctions de jauge sont déterminées d'après le principe de moindre dégénérescence, qui consiste à garder le maximum de termes dans le système (10), lorsque (12) et (13) sont satisfaits.

On trouve alors que :

$$(14) \quad \delta_1(M_\infty) = M_\infty^2 \quad ; \quad \delta_2(M_\infty) = \delta_3(M_\infty) = M_\infty .$$

Si on tient compte des relations : (11) et (13) - (14), on peut écrire à la place du système (10), les équations généralisées "A la Boussinesq" suivantes :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} S \frac{Du^*}{Dt} - \frac{1}{R_0} v^* + \frac{\epsilon}{R_0 \gamma \rho_0} w^* + \frac{\pi_\infty}{\gamma} \frac{\partial \pi^*}{\partial x} = -M_\infty \left\{ S \frac{Du^*}{Dt} - \frac{1}{R_0} v^* + \frac{\epsilon}{R_0 \gamma \rho_0} w^* \right\}; \\ S \frac{Dv^*}{Dt} + \frac{1}{R_0} u^* + \frac{\pi_\infty}{\gamma} \frac{\partial \pi^*}{\partial y} = -M_\infty \omega^* \left\{ S \frac{Dv^*}{Dt} + \frac{1}{R_0} u^* \right\}; \\ \epsilon^2 S \frac{Dw^*}{Dt} - \frac{\epsilon}{R_0 \gamma \rho_0} u^* + \frac{\pi_\infty}{\gamma} \frac{\partial \pi^*}{\partial z} - \hat{B} \theta^* = M_\infty \omega^* \left\{ \frac{\hat{B}}{\gamma} \theta^* - \epsilon^2 S \frac{Dw^*}{Dt} + \frac{\epsilon}{R_0 \gamma \rho_0} u^* \right\}; \\ \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = -M_\infty \left\{ S \frac{D\omega^*}{Dt} + \omega^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) - \hat{B} \left( 1 + \frac{d\pi_\infty}{dz_\infty} \right) \frac{w^*}{\pi_\infty} \right\} + M_\infty^2 \omega^* \hat{B} \left( 1 + \frac{d\pi_\infty}{dz_\infty} \right) \frac{w^*}{\pi_\infty}; \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned}
 S \frac{D\theta^*}{Dt} + \hat{B} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}^*}{dz_{\infty}} \right) \frac{w^*}{\pi_{\infty}^*} &= -M_{\infty} \left\{ \omega^* S \frac{D\theta^*}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} S \frac{D\pi^*}{Dt} \right\} \\
 &\quad - M_{\infty}^2 \pi^* \hat{B} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}^*}{dz_{\infty}} \right) \frac{w^*}{\pi_{\infty}^*}; \\
 \omega^* + \theta^* &= M_{\infty} (\pi^* - \omega^* \theta^*) .
 \end{aligned} \right.$$

## 2. Linéarisation des équations

Dans tout ce qui suit nous étudions des solutions à l'ordre  $M_{\infty}$  compris et on va linéariser le système (15) autour de la solution de repos :

$u^* = v^* = w^* = 0$ ,  $\pi^* = 0$ ,  $\omega^* = \theta^* = 0$ . Ainsi, on peut écrire les développements, supposés uniformément valables, suivants :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{c} u^* \\ v^* \\ w^* \\ \pi^* \\ \omega^* \\ \theta^* \end{array} \right\} = \eta \left\{ \begin{array}{c} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \end{array} \right\} + \dots,$$

dans les développements ci-dessus, on a désigné par  $\eta$  le petit paramètre qui caractérise l'amplitude, supposée petite (Théorie linéaire), des ondes de Boussinesq. Si l'on substitue (16) dans le système (15), il n'est pas nécessaire d'écrire les termes dont l'ordre en  $M_{\infty}$  est supérieur à un et il en est de même, pour les termes d'ordre  $\eta^2$  et  $\eta^2 M_{\infty}$ , (pour notre étude linéaire qui suit). Ainsi, le système linéaire s'écrit :

$$(17) \left\{ \begin{aligned} S \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{1}{R_0} \tilde{u} + \frac{\varepsilon}{R_0 + \rho_0} \tilde{w} + \frac{\Gamma_\infty}{\gamma} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x} &= 0 ; \\ S \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{R_0} \tilde{v} + \frac{\Gamma_\infty}{\gamma} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial y} &= 0 ; \\ \varepsilon^2 S \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{R_0 + \rho_0} \tilde{u} + \frac{\Gamma_\infty}{\gamma} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial z} - \frac{\hat{B}}{\gamma} \tilde{\theta} &= 0 ; \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= -M_\infty \left\{ S \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \hat{B} \left( 1 + \frac{d\Gamma_\infty}{dz_\infty} \right) \frac{\tilde{w}}{\Gamma_\infty} \right\} ; \\ S \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \hat{B} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\Gamma_\infty}{dz_\infty} \right) \frac{\tilde{w}}{\Gamma_\infty} &= M_\infty \frac{\gamma-1}{\gamma} S \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t} ; \\ \tilde{\omega} + \tilde{\theta} &= M_\infty \tilde{\pi} . \end{aligned} \right.$$

Pour ce système linéaire, on va chercher des solutions de la forme :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \tilde{u} &= \bar{u}(\zeta; M_\infty; \varepsilon; R_0) e^{i\left(\frac{\Delta}{s}t - kx - ly\right)} , \\ \tilde{v} &= \bar{v}(\zeta; M_\infty; \varepsilon; R_0) e^{i\left(\frac{\Delta}{s}t - kx - ly\right)} , \\ \tilde{w} &= \bar{w}(\zeta; M_\infty; \varepsilon; R_0) e^{i\left(\frac{\Delta}{s}t - kx - ly\right)} , \\ \begin{pmatrix} \tilde{\pi} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\pi} \\ \bar{\theta} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{\Delta}{s}t - kx - ly\right)} , \end{aligned} \right.$$

où  $\Delta$ ,  $R$  et  $l$ , suivant les problèmes étudiés, sont des données ou des inconnues. Pour les problèmes abordés ici,  $\Delta$ ,  $R$  et  $l$  sont donnés et supposés  $O(1)$ .

Après élimination des autres variables, on déduit de (17) pour  $\overline{W}$  la composante verticale de la vitesse l'équation (\*) fondamentale suivante, qui va servir de point de départ à l'étude effectuée dans cette première partie :

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & \left\{ \left[ \Delta \varepsilon^2 - \frac{1}{\Delta} \frac{\hat{B}}{\gamma} \cdot \hat{B} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz_{\infty}} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} - \left( \frac{\varepsilon}{R_0 \tan \varphi_0} \right)^2 \frac{l^2}{\Delta(R^2 + P^2)} \right] \right. \\
 & + M_{\infty} \left[ \hat{B} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz_{\infty}} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} \left( \frac{\varepsilon}{R_0 \tan \varphi_0} \right) \frac{R\Delta + i l/R_0}{\Delta(R^2 + P^2)} \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\varepsilon}{R_0 \tan \varphi_0} \frac{R\Delta - i l/R_0}{\Delta(R^2 + P^2)} \frac{\hat{B}}{\gamma \pi_{\infty}} \right] \right\} \overline{W} \\
 & + \left\{ \left[ -2i \frac{l/R_0}{\Delta(R^2 + P^2)} \frac{\varepsilon}{R_0 \tan \varphi_0} \right] + M_{\infty} \left[ \frac{\hat{B}}{\Delta(R^2 + P^2)} \left( 1 + \frac{d\pi_{\infty}}{dz_{\infty}} \right) \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\pi_{\infty}} \right] \right\} \frac{d\overline{W}}{dz} \\
 & - \left\{ \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta(R^2 + P^2)} \right\} \frac{d^2 \overline{W}}{dz^2} = 0.
 \end{aligned}$$

(\*) pour le détail du calcul, voir Annexe (1).

Les problèmes étudiés ne sont caractérisés par aucune condition aux limites, de sorte que l'hypothèse  $\delta, R, l = o(1)$  indique les quantités caractéristiques des ondes étudiées (par exemple une fréquence et une longueur d'onde) sont celles qui servent pour définir  $H_0, L_0$  et  $U_0$  du problème.

### 3. Méthode des échelles multiples

On introduit maintenant la variable "lente"

$$(20) \quad \bar{Z} = M_\infty \mathcal{Z} ;$$

au niveau de l'équation différentielle (19); il apparaît alors (tout en tenant compte de l'approximation de Boussinesq) deux échelles verticales :

l'une, caractérisée par la variable  $\mathcal{Z}$ , variable du phénomène considéré.

la seconde, est l'échelle caractérisée par la variable  $\bar{Z}$ , et l'approximation de Boussinesq implique que le rapport des deux échelles est très petit devant l'unité; en effet d'après (20), on a :

$$(21) \quad \frac{\bar{Z}}{\mathcal{Z}} = M_\infty \ll 1 .$$

Sous cette hypothèse, on doit utiliser une méthode d'échelle multiple suggérée par les deux échelles  $\bar{Z}$  et  $\mathcal{Z}$ . Comme cela se produit en général (voir [4], [5] et [6]) on ne peut pas prendre  $\mathcal{Z}$  comme variable rapide, mais celle-ci doit dépendre non linéairement de  $\bar{\mathcal{Z}}$ . Cette nécessité apparaît intuitivement si l'on remarque que les ondes doivent avoir localement une forme harmonique liée à la fréquence de Brunt-Väisälä, qui dépend non linéairement de  $\bar{\mathcal{Z}}$ . On est ainsi amené à poser :

$$(22) \quad X = \frac{1}{M_{\infty}} \varphi(\bar{z}; R_0; \varepsilon)$$

où la fonction  $\varphi(\bar{z}; R_0; \varepsilon)$  devra être déterminée au cours de la construction de la solution en double échelle. On désigne par  $\overline{W}^*$  l'inconnue de notre problème, supposée une fonction de  $\bar{z}$ ,  $X$  et des paramètres :  $M_{\infty}$ ,  $R_0$ ;  $\varepsilon$  de telle façon que :

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{d\varphi}{d\bar{z}} \frac{\partial}{\partial X} + M_{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Puis on fait le développement asymptotique par rapport à  $M_{\infty}$  (bien entendu que  $M_{\infty} \ll 1$ ) suivant :

$$(24) \quad \overline{W}^*(\bar{z}, X; M_{\infty}, R_0; \varepsilon) = \overline{W}_0^*(\bar{z}, X; R_0; \varepsilon) + M_{\infty} \overline{W}_1^* + \dots$$

Ainsi, en tenant compte des relations ci-dessus, et en les substituant dans (19) et en identifiant les termes proportionnels à 1, puis à  $M_{\infty}$ , on obtient deux équations différentielles limites, relativement à  $\overline{W}_0^*$  et  $\overline{W}_1^*$ .

En effet, à l'ordre 0 en  $M_{\infty}$ , on obtient une équation différentielle pour  $\overline{W}_0^*$ , telle que :

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \left( \frac{d\varphi}{d\bar{z}} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 \overline{W}_0^*}{\partial X^2} + \left\{ \varepsilon i \frac{\rho/R_0}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \frac{\varepsilon}{R_0 \operatorname{tg} \varphi_0} \left( \frac{d\varphi}{d\bar{z}} \right) \right\} \frac{\partial \overline{W}_0^*}{\partial X} \\ & + \left\{ \frac{\Gamma_{\infty}(\bar{z})}{\Delta} - \Delta \varepsilon^2 + \left( \frac{\varepsilon}{R_0 \operatorname{tg} \varphi_0} \right)^2 \frac{\rho^2}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \right\} \overline{W}_0^* \equiv 0; \end{aligned} \right.$$

$$(26) \quad \Gamma_{\infty}(z) = \frac{\hat{B}}{\gamma} \left\{ \hat{B} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{\infty}(z)}{dz} \right\} \frac{1}{\Gamma_{\infty}(z)},$$

étant la fréquence de Brunt-Vaisälä.

On remarque ainsi que pour la variable  $X$ , l'équation (25) est à coefficients constants.

Ensuite, à l'ordre 1 en  $M_{\infty}$ , l'équation différentielle pour  $\overline{W_1}^*$  est de la forme :

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 \overline{W_1}^*}{\partial X^2} + \left\{ 2i \frac{\ell/R_0}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \frac{\varepsilon}{R_0 + \gamma \varphi_0} \left( \frac{d\varphi}{dz} \right) \right\} \frac{\partial \overline{W_1}^*}{\partial X} \\ & + \left\{ \frac{\Gamma_{\infty}(z)}{\Delta} - \Delta \varepsilon^2 + \left( \frac{\varepsilon}{R_0 + \gamma \varphi_0} \right)^2 \frac{\rho^2}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \right\} \overline{W_1}^* = \\ & \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \left\{ \left( \hat{B} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_{\infty}} \frac{d\varphi}{dz} - \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right\} \frac{\partial \overline{W_0}^*}{\partial X} + \left( \frac{\varepsilon}{R_0 + \gamma \varphi_0} \right) \left\{ \left( \hat{B} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_{\infty}} \right. \\ & \left. \frac{R\Delta + i\ell/R_0}{\Delta(R^2 + \rho^2)} - \frac{R\Delta - i\ell/R_0}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \frac{\hat{B}}{\gamma \Gamma_{\infty}} \right\} \overline{W_0}^* + \left\{ -2i \frac{\ell/R_0}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \frac{\varepsilon}{R_0 + \gamma \varphi_0} \right\} \frac{\partial \overline{W_0}^*}{\partial z} \\ & - 2 \left\{ \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta(R^2 + \rho^2)} \frac{d\varphi}{dz} \right\} \frac{\partial \overline{W_0}^*}{\partial z \partial X} \end{aligned} \right.$$

On remarque, au niveau de cette équation, qu'elle a les mêmes coefficients que celle de (25); par contre elle a un terme à droite de l'égalité, qui est fonction de  $\overline{W_0}^*$ .

Par suite, le choix de  $\overline{W_0}^*$  va nous permettre à l'aide de ces deux équations différentielles et sous certaines hypothèses, qu'on verra ultérieurement, de construire la solution.

### III.- SOLUTION DES ONDES DE BOUSSINESQ

#### 1.- Solution formelle à l'ordre 0 en $M_{\infty}$

On pose :

$$(28) \quad N^2 = R^2 + P^2 .$$

L'équation différentielle satisfaite à l'ordre 0 en  $M_{\infty}$  par  $\overline{w}_0^*$  va nous fournir la fonction  $\varphi(z; R_0; \varepsilon)$ ; en effet, on ne restreint pas la généralité en cherchant la solution sous la forme :

$$(29) \quad \overline{w}_0^* = A_0(z; R_0; \varepsilon) e^{\chi} ,$$

ce qui donne pour  $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$  l'équation de dispersion :

$$(30) \quad \left\{ \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + 2i \frac{P/R_0}{\Delta N^2} \frac{\varepsilon}{R_0 \operatorname{tg} \varphi_0} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) + \left\{ \frac{\Gamma_{\infty}(z)}{\Delta} - \Delta \varepsilon^2 + \left(\frac{\varepsilon}{R_0 \operatorname{tg} \varphi_0}\right)^2 \frac{P^2}{\Delta N^2} \right\} \right\} = 0 .$$

Les solutions de (30) sont :

$$(31) \quad \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = -i \frac{P \varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \pm i N \sqrt{\frac{\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 P^2 \Delta^2}{N^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2}}{\Delta^2 - 1/R_0^2}} ,$$

et cette formule donne la manière dont la variable

$$X = \frac{1}{M_\infty} \varphi(z; R_0; \varepsilon) \quad \text{dépend de la variable lente } z .$$

Pour le cas-limite où on fait l'hypothèse que  $1/R_0$  tend vers zéro et  $\varepsilon = o(1)$  (voir à ce sujet P.A. BOIS [7] ), on retrouve l'expression classique :

$$(32) \quad \varphi'(z) = \pm i \frac{N}{\Delta} \left[ \Gamma_\infty(z) - \Delta^2 \varepsilon^2 \right]^{1/2} .$$

Cette formule (32) montre que lorsque  $\Gamma_\infty(z) = \Delta^2 \varepsilon^2$ ,  $\varphi'(z)$  s'annule. Les points pour lesquels se produit ce phénomène, s'appellent les "points tournants". Ils apparaissent à cause de l'effet d'inhomogénéité des rayons de propagation.

### 2.- Solution à l'ordre 1 en $M_0$

Si on introduit la solution de  $\overline{W}_0^*$  donnée par (29) dans l'équation différentielle (27), alors  $\overline{W}_1^*$  satisfait à l'équation :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 \overline{W}_1^*}{\partial X^2} + \left\{ 2i \frac{\ell/R_0}{\Delta N^2} \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} \left( \frac{d\varphi}{dz} \right) \right\} \frac{\partial \overline{W}_1^*}{\partial X} \\ & + \left\{ \frac{\Gamma_\infty(z)}{\Delta} - \Delta \varepsilon^2 + \left( \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} \right)^2 \frac{\ell^2}{\Delta N^2} \right\} \overline{W}_1^* = \\ & \left\{ A_0(z; R_0; \varepsilon) \left[ \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} \left( (\hat{B} \frac{\delta-1}{\delta} + \frac{d\Gamma_\infty}{dz}) \frac{1}{\Gamma_\infty} \frac{R_0 + i\ell/R_0}{\Delta N^2} - \frac{R_0 - i\ell/R_0}{\Delta N^2} \frac{\hat{B}}{\delta \Gamma_\infty} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left( (\hat{B} + \frac{d\Gamma_\infty}{dz}) \frac{1}{\Gamma_\infty} \varphi' - \varphi'' \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{dA_0}{dz} \left[ i \frac{\ell/R_0}{\Delta N^2} \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \varphi' \right] \right\} e^X . \end{aligned} \right.$$

Ainsi, on déduit pour  $\overline{W}_1^*$  la solution suivante :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{W}_1^* &= A_1(z; R_0; \varepsilon) e^X + \frac{1}{2} \frac{\Delta N^2}{\left[ \left( \Delta^2 - \frac{1}{R_0^2} \right) \varphi' + i \frac{\rho \varepsilon}{R_0^2 \tan \varphi_0} \right] \varphi'} \\ &A_0(z; \varepsilon; R_0) \left[ \frac{\varepsilon}{R_0 \tan \varphi_0} \left( \widehat{B} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} \frac{R_0 \Delta + i \frac{\rho}{R_0}}{\Delta N^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_0 \Delta - i \frac{\rho}{R_0}}{\Delta N^2} \frac{\widehat{B}}{\gamma \pi_{\infty}} \right] + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left( \widehat{B} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} \varphi' - \varphi'' \Big] \\ &- 2 \frac{dA_0}{dz} \left[ i \frac{\rho \varepsilon}{R_0^2 \tan \varphi_0} \frac{1}{\Delta N^2} + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \varphi' \right] \Big\} X e^X. \end{aligned} \right.$$

Comme les développements (16) et (24) doivent être uniformément valables quelque soit les valeurs prises par les variables indépendantes, on constate qu'il faut éliminer les termes séculaires proportionnels à  $X e^X$  au niveau de l'équation (34), ce qui nous fournit l'équation satisfaite par  $A_0$  :

$$(35) \quad \left\{ \frac{\frac{dA_0}{dz}}{A_0(z; R_0; \varepsilon)} = \frac{\left( \frac{\varepsilon}{R_0 \tan \varphi_0} \right) \left[ \left( \widehat{B} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} \frac{R_0 \Delta + i \frac{\rho}{R_0}}{\Delta N^2} - \frac{R_0 \Delta - i \frac{\rho}{R_0}}{\Delta N^2} \frac{\widehat{B}}{\gamma \pi_{\infty}} \right]}{2 \left[ i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta N^2 \tan \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta N^2} + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \varphi' \right]} \right.$$

$$+ \frac{\frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left[ \left( \hat{B} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \varphi' - \varphi'' \right]}{2 \left[ i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta N^2} \frac{1/R_0^2}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \varphi' \right]}$$

dont la solution est :

$$(36) \quad A_0(z; \varepsilon; R_0) = A_0^* \cdot \exp \left\{ \int_0^z \frac{G(\bar{z})}{F(\bar{z})} d\bar{z} \right\},$$

où l'on a posé :

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} G(z) &= \frac{\varepsilon}{R_0 \operatorname{tg} \varphi_0} \left[ \left( \hat{B} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \frac{R_0 + i\rho/R_0}{\Delta N^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_0 - i\rho/R_0}{\Delta N^2} \frac{\hat{B}}{\gamma \pi_0} \right] + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left[ \left( \hat{B} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \varphi' - \varphi'' \right], \\ F(z) &= 2 \left[ i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta N^2} \frac{1/R_0^2}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \varphi' \right]. \end{aligned} \right.$$

Observons, d'après (37), que la fonction  $F(z)$  est le polynôme dérivée  $P'(\varphi')$  d'un polynôme  $P(\varphi')$  du second degré défini par :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} P(\varphi') &= \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} (\varphi')^2 + 2i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta N^2} \frac{1/R_0^2}{\operatorname{tg} \varphi_0} (\varphi') \\ &\quad + \left\{ \frac{\pi_0(z)}{\Delta} - \Delta \varepsilon^2 + \left( \frac{\varepsilon}{R_0 \operatorname{tg} \varphi_0} \right)^2 \frac{\rho^2}{\Delta N^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

et ce polynôme est nul (équation (30) ) mais ces zéros sont distincts pour toute valeur finie de  $z$  ; donc  $P'(z) \neq 0$  lorsque  $P(z) = 0$  .

Pour le comportement de  $G(z)/F(z)$  quand  $z \rightarrow +\infty$  , il est nécessaire de faire quelques hypothèses sur le comportement de  $\mathcal{T}_0(z)$  à l'infini, sur lesquelles nous revenons un peu plus loin, dans la deuxième partie.

## IV. ANNEXE (1)

On remplace les relations (18) dans le système (17), on obtient :

$$(A_1) \left\{ \begin{array}{l} i \Delta \bar{u} - \frac{1}{R_0} \bar{v} + \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma c_0} \bar{w} - i k \frac{\pi_{\infty}}{\gamma} \bar{\pi} = 0 ; \\ i \Delta \bar{v} + \frac{1}{R_0} \bar{u} - i l \bar{\pi} \frac{\pi_{\infty}}{\gamma} = 0 ; \\ i \Delta \varepsilon^2 \bar{w} - \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma c_0} \bar{u} + \frac{\pi_{\infty}}{\gamma} \frac{d\bar{\pi}}{dz} - \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \bar{\theta} = 0 ; \\ -i (k \bar{u} + l \bar{v}) + \frac{d\bar{w}}{dz} = -M_{\infty} \left[ i \Delta \bar{w} - \hat{\beta} \left( 1 + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{\bar{w}}{\pi_{\infty}} \right] ; \\ i \Delta \bar{\theta} + \hat{\beta} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{\bar{w}}{\pi_{\infty}} = i M_{\infty} \Delta \frac{\gamma-1}{\gamma} \bar{\pi} ; \\ \bar{w} + \bar{\theta} = M_{\infty} \bar{\pi} . \end{array} \right.$$

Pour obtenir une seule équation différentielle pour  $\bar{w}$ , on procède de la manière suivante :

à partir de la 1er et 2ème équation du système (A<sub>1</sub>) on déduit les relations suivantes (tout en supposant que  $1/R_0^2 \neq \Delta^2$ ) :

$$(A_2) \quad \bar{u} = \frac{1}{\Delta^2 - \frac{1}{R_0^2}} \left[ i \Delta \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma c_0} \bar{w} + \frac{\pi_{\infty}}{\gamma} \left( k \Delta - i \frac{l}{R_0} \right) \bar{\pi} \right] ;$$

$$(A_3) \quad \bar{v} = \frac{1}{\Delta^2 - \frac{1}{R_0^2}} \left[ - \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma c_0} \bar{w} + \frac{\pi_{\infty}}{\gamma} \left( l \Delta + i \frac{k}{R_0} \right) \bar{\pi} \right] .$$

On substitue ces deux relations ( $A_2$ ) et ( $A_3$ ) dans la 4ème équation du système ( $A_1$ ); on obtient :

$$(A_4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dz} - \left( i \frac{\gamma^2 - 1}{R_0^2} \right) \left[ \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} (i k \alpha - \frac{\ell}{R_0}) \bar{W} + \Delta N^2 \frac{\pi_{00}}{\gamma} \bar{\pi} \right] = \\ - i M_{00} \Delta \bar{W} + M_{00} \hat{B} \left( 1 + \frac{d\pi_{00}}{dz_{00}} \right) \frac{1}{\pi_{00}} \bar{W} . \end{aligned} \right.$$

Ensuite, de la 5ème et dernière équation de ( $A_1$ ), on déduit :

$$(A_5) \quad i \Delta \bar{W} = i \Delta M_{00} \bar{\pi} - i \Delta M_{00} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \bar{\pi} + \hat{B} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{d\pi_{00}}{dz_{00}} \right) \frac{\bar{W}}{\pi_{00}}$$

qu'on remplace dans ( $A_4$ ), pour obtenir une relation entre  $\bar{\pi}$ ,  $\bar{W}$  et  $\frac{d\bar{W}}{dz}$  :

$$(A_6) \quad \frac{\pi_{00}}{\gamma} \bar{\pi} = i \frac{\gamma^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \left[ M_{00} \frac{\hat{B}}{\gamma \pi_{00}} \bar{W} - \frac{d\bar{W}}{dz} \right] - \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} \left( \frac{-\ell/R_0 + i k \alpha}{\Delta N^2} \right) \bar{W} ,$$

d'où une relation pour  $\frac{d\bar{\pi}}{dz}$  :

$$(A_7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi_{00}}{\gamma} \frac{d\bar{\pi}}{dz} = & \left[ i M_{00} \frac{\gamma^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \frac{\hat{B}}{\pi_{00}} \frac{d\pi_{00}}{dz_{00}} \right] \frac{d\bar{W}}{dz} \\ & + \left[ M_{00} \frac{\hat{B}}{\pi_{00}} \frac{d\pi_{00}}{dz_{00}} \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} \frac{i k \alpha - \ell/R_0}{\Delta N^2} \right] \bar{W} \\ & + \left[ i M_{00} \frac{\hat{B}}{\gamma \pi_{00}} \frac{\gamma^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \right] \frac{d\bar{W}}{dz} \\ & - \left[ i \frac{\gamma^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \right] \frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} \\ & - \left[ \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi_0} \frac{-\ell/R_0 + i k \alpha}{\Delta N^2} \right] \frac{d\bar{W}}{dz} . \end{aligned} \right.$$

Une fois que l'on remplace (A<sub>7</sub>) dans (A<sub>2</sub>), on obtient une relation pour  $\bar{u}$  en fonction de  $\bar{w}$  et  $\frac{d\bar{w}}{dz}$ ; de même pour  $\bar{\theta}$ . En effet, on a :

$$(A_8) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{u} &= \left[ i \left( \frac{\epsilon}{R_0 \gamma c_p} \right) \frac{\rho^2}{\Delta N^2} \right] \bar{w} \\ &+ \left[ i M_\infty \frac{R_0 - i \rho / R_0}{\Delta N^2} \frac{\hat{B}}{\gamma \pi_\infty} \right] \bar{w} \\ &- \left[ i \frac{R_0 - i \rho / R_0}{\Delta N^2} \right] \frac{d\bar{w}}{dz} . \end{aligned} \right.$$

De même, on trouve :

$$(A_9) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\theta} &= \left[ i \frac{\hat{B}}{\Delta} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_\infty}{dz_0} \right) \frac{1}{\pi_\infty} \right] \bar{w} \\ &- \left[ M_\infty \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \frac{\epsilon}{R_0 \gamma c_p} \right) \frac{-\rho/R_0 + i R_0 \delta}{\Delta N^2} \right] \bar{w} \\ &- \left[ i M_\infty \frac{\gamma-1}{\pi_\infty} \frac{\Delta^2 - 1/R_0^2}{\Delta N^2} \right] \frac{d\bar{w}}{dz} . \end{aligned} \right.$$

Finalement, une fois qu'on remplace dans la 3<sup>ème</sup> équation du système (A<sub>1</sub>), les relations (A<sub>7</sub>), (A<sub>8</sub>), et (A<sub>9</sub>), on retrouve l'équation différentielle pour  $\bar{w}(z; M_\infty; R_0; \epsilon)$ .

2. DEUXIEME PARTIE

ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION

POUR  $\frac{1}{R_0}$  PETIT DEVANT UN.

## 1.- LES DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES PHASES ET DES AMPLITUDES

On sait bien que le filtrage est intimement lié au concept d'écoulements limites, qui s'obtiennent lorsque les paramètres sans dimensions, caractérisant l'atmosphère en mouvement, tendent vers leur valeur limite (c'est-à-dire zéro ou l'infini). Le filtrage conduit ainsi, à partir des équations obtenues dans la première partie à sélectionner des équations modèles. Dans cette étude, il est intéressant d'examiner le cas où la force de Coriolis est faible.

Pour cela, il est judicieux de faire l'hypothèse suivante :

$$(39) \quad R_0 \gg 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = O(1).$$

Ainsi, il sera plus simple d'effectuer directement pour  $1/R_0$  petit devant l'unité, le développement asymptotique de chaque quantité :  $\varphi'(z; R_0)$  et  $A_0(z; R_0)$  ... introduite précédemment.

### 1.- Le calcul de $\varphi'_i(z; R_0)$ pour $1/R_0$ petit

Le développement asymptotique de  $\varphi'_i(z; R_0)$  par rapport à  $1/R_0$  ( $\ll 1$ ) est :

$$(40) \quad \varphi'_i(z; R_0) = \varphi'_{i0}(z) + \frac{1}{R_0} \varphi'_{i1}(z) + \frac{1}{R_0^2} \varphi'_{i2}(z) + \dots$$

D'après la relation (31), on pose :

$$(41) \quad \varphi'_{11}(z, R_0) = \left[ -i \frac{\rho \varepsilon}{\gamma g \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right] + iN \sqrt{\frac{(\Gamma_0(z) - \delta^2 \varepsilon^2) + \frac{\rho^2 \delta^2 \varepsilon^2}{N^2 \gamma g \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2}}{\Delta^2 - 1/R_0^2}};$$

et

$$(42) \quad \varphi'_{22}(z, R_0) = \left[ -i \frac{\rho \varepsilon}{\gamma g \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right] - iN \sqrt{\frac{(\Gamma_0(z) - \delta^2 \varepsilon^2) + \frac{\rho^2 \delta^2 \varepsilon^2}{N^2 \gamma g \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2}}{\Delta^2 - 1/R_0^2}}.$$

Donc, en tenant compte des relations (40), (41) et (42), on obtient :

$$(43) \quad \varphi'_{110}(z) = i \frac{N}{\Delta} \sqrt{\Gamma_0(z) - \delta^2 \varepsilon^2}, \quad \varphi'_{220}(z) = -i \frac{N}{\Delta} \sqrt{\Gamma_0(z) - \delta^2 \varepsilon^2},$$

qui représentent le cas où on ne tient pas compte de la force de Coriolis. De même, on trouve :

$$(44) \quad \varphi'_{11}(z) = \varphi'_{21}(z) = 0.$$

Et finalement :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi'_{12}(z) = -i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta^2 \gamma g \varphi_0} - \frac{\frac{\rho^2 \varepsilon^2}{\gamma g \varphi_0} - [\varphi'_{110}(z)]^2}{2 \Delta^2 \varphi'_{110}(z)}, \\ \varphi'_{22}(z) = -i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta^2 \gamma g \varphi_0} + \frac{(\rho^2 \varepsilon^2 / \gamma g \varphi_0) - [\varphi'_{110}(z)]^2}{2 \Delta^2 \varphi'_{110}(z)}. \end{array} \right.$$

On observe d'après les formules (45), que  $\varphi'_{10}(z)$  nulle représente une singularité pour  $\varphi'_{12}$  et  $\varphi'_{22}$ .

On note ainsi, d'après ce qui précède, que l'existence des points tournants est définie dans le cas où  $\frac{1}{R_0} = 0$ . Par contre, dans le cas contraire, on a vu que  $\varphi'_1(z, R_0)$  ne s'annule jamais, et a, lorsque  $\frac{1}{R_0} \neq 0 (\ll 1)$ , une partie réelle et une partie imaginaire.

## 2.- Le calcul des amplitudes pour $1/R_0$ petit

De la même manière que précédemment, on développe  $A_0^{(i)}(z, R_0)$  par rapport à  $1/R_0 (\ll 1)$ , et on obtient :

$$(46) \quad A_0^{(i)}(z, R_0) = A_{00}^{(i)}(z) + \frac{1}{R_0} A_{01}^{(i)}(z) + \frac{1}{R_0^2} A_{02}^{(i)}(z) + \dots$$

Ainsi, en tenant compte de la solution (36) et du développement (46), on déduit alors (\*) :

$$(47) \quad A_{00}^{(i)}(z) = \frac{I_0 i}{[\varphi_{00}(z) \varphi'_{10}(z)]^{1/2}}, \text{ } I_0 \text{ étant une constante d'intégration.}$$

De même, on trouve :

$$(48) \quad A_{01}^{(i)}(z) = A_{00}^{(i)}(z) \cdot \frac{R_0 \epsilon}{2 \sqrt{\varphi_0}} \cdot \int_0^z \frac{(\beta \frac{x-z}{z} + \frac{d\varphi_0}{dz}) \frac{1}{\sqrt{\varphi_0}}}{\varphi'_{10}(z)} dz.$$

et

---

\*) Pour le détail du calcul, voir Annexe (2).

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{02}^{(i)}(z) &= A_{00}^{(i)}(z) \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{p\varepsilon}{2\Delta t g \varphi_0} \right)^2 \int_0^z \frac{\varphi_{i0}''(z)}{[\varphi_{i0}'(z)]^3} dz \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{p\varepsilon}{2\Delta t g \varphi_0} \right)^2 \left( \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\gamma-2}{\gamma} + \frac{d\eta_0}{dz} \right) \frac{1}{\eta_0} dz \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Finalement, on déduit :

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0^{(i)}(z; R_0) &= \frac{\rho_{0i}}{[S_0(z) \varphi_{i0}'(z)]^{1/2}} \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{R_0} \right) \frac{p\varepsilon}{2\Delta t g \varphi_0} \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\gamma-2}{\gamma} + \frac{d\eta_0}{dz} \right) \frac{1}{\eta_0} dz}{\varphi_{i0}'(z)} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{R_0^2} \right) \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{p\varepsilon}{2\Delta t g \varphi_0} \right)^2 \int_0^z \frac{\varphi_{i0}''(z)}{[\varphi_{i0}'(z)]^3} dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{p\varepsilon}{2\Delta t g \varphi_0} \right)^2 \left( \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\gamma-2}{\gamma} + \frac{d\eta_0}{dz} \right) \frac{1}{\eta_0} dz \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

### 3.- Le comportement des phases et des amplitudes à l'infini

Pour connaître le comportement des phases et des amplitudes à l'infini, il est nécessaire de faire quelques hypothèses sur le comportement de  $\rho_{\infty}(z)$  à l'infini. Pour cela, nous appliquons une hypothèse faite par P.A. BOIS [8]:

Hypothèse :

$\Gamma_{\infty}(z)$  est une fonction positive  $n$  fois continûment dérivable, ayant pour  $z$  grand le comportement de  $z^{\alpha}$ , où  $\alpha \geq 0$ . Sa dérivée à l'ordre  $p$  a le comportement de  $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)z^{\alpha-p}$ ,  $\forall p \leq n$ .  
D'où, il résulte le lemme suivant:

LEMME (1)

- (i)  $|\Gamma_{\infty}(z)| < +\infty$  dans  $[0, +\infty[$  ;
- (ii)  $\exists K_1$  et  $\beta > 0$  tels que  $|\Gamma_{\infty}(z)|^{-1} < K_1 z^{\beta}$ , pour  $z$  assez grand;
- (iii)  $\exists K_2$  et  $\delta^* > 0$  tels que  $\rho_{\infty}(z) > K_2 e^{-\delta^* z}$  dans  $[0, +\infty[$ .

On note ainsi que  $\rho_{\infty}(z) \longrightarrow 0$  pour  $z$  infini sous les hypothèses du lemme (1), et cela découle essentiellement de ce que  $\Gamma_{\infty}(z)$  est une fonction croissante au sens large. Dans ce cas, on observe d'après la relation (50) que  $A_0^{(1)}(z; R_0)$  est proportionnelle à  $[\rho_{\infty}(z)]^{-1/2}$  et par suite croît indéfiniment avec l'altitude, même sous l'influence de la force de Coriolis.

En tenant compte des deux assertions (ii) et (iii) du lemme (1), on déduit d'après (50) que :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} |A_0^{(i)}(z; R_0)| \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} |l_0 [q_{i_0}'(z)]^{-1/2} [p_{\infty}(z)]^{-1/2}| \\ \ll l_0^* z^{\beta^*} e^{\delta_1^* z} ; \end{array} \right.$$

Ainsi, pour  $z$  assez grand,  $A_0^{(i)}(z; R_0)$  est majorée par une fonction  $l_0^* z^{\beta^*} e^{\delta_1^* z}$ , d'où il existe deux constantes  $l_0^*$  et  $\delta_1^*$  telles que si  $z \rightarrow +\infty$ , toute solution de la forme (29) vérifie l'inégalité :

$$(52) \quad |A_0^{(i)}(z; R_0)| < l_0^* e^{\delta_1^* z}$$

(cette relation états une conclusion du lemme (2) établi par P.A. BOIS (1979)).

Donc, en particulier, la croissance ou la décroissance des ondes à l'infini, est valable à condition que l'amplitude  $A_0^{(i)}(z; R_0; \epsilon)$  définie dans (29) ait une croissance modérée.

## II .- ETUDE AU VOISINAGE DES POINTS TOURNANTS

### 1.- La solution extérieure

D'après ce qu'on a établi précédemment; si  $\Gamma_{\infty}(z) - \delta^2 \epsilon^2 > 0$ , alors  $\varphi_i^{(+)}(z; R_0)$  est imaginaire pure, et si  $\Gamma_{\infty}(z) - \delta^2 \epsilon^2 < 0$  alors  $\varphi_i^{(-)}(z; R_0)$  admet une partie réelle et une partie imaginaire non nulles. La solution extérieure s'écrit :

$$(53) \left\{ \begin{array}{l} \overline{W}_0^{*(+)} = A_{0(+)}^{(1)}(z; R_0) e^{\frac{\varphi_1^{(+)}(z)}{M_0}} + A_{0(+)}^{(2)}(z; R_0) e^{\frac{\varphi_2^{(+)}(z)}{M_0}}, \\ \text{quand } \Gamma_\infty(z) > \delta^2 \varepsilon^2; \\ \overline{W}_0^{*(-)} = A_{0(-)}^{(1)}(z; R_0) e^{\frac{\varphi_1^{(-)}(z)}{M_0}} + A_{0(-)}^{(2)}(z; R_0) e^{\frac{\varphi_2^{(-)}(z)}{M_0}}, \\ \text{quand } \Gamma_\infty(z) < \varepsilon^2 \delta^2. \end{array} \right.$$

On sait que le phénomène de coupure se présente lorsque la fréquence de Brünt-Vaisälä devient égale à la fréquence de l'onde; donc l'existence, pour certaines fréquences, des points tournants qui correspondent à un changement de type du régime de propagation des ondes. Dans ce cas, le problème se pose alors de savoir comment se fait la transition entre les deux types de solutions  $\overline{W}_0^{*(+)}$  et  $\overline{W}_0^{*(-)}$ , valables de part et d'autre des points tournants. En dehors de tout voisinage de ces points, l'équation est celle donnée par (25).

## 2.- La solution intérieure

Quand  $1/R_0$  tend vers zéro, il n'existe plus de points tournants véritables, c'est-à-dire des points tels que  $\varphi'_i(z; R_0)$  s'annule. Il est donc intéressant dans ce cas d'examiner le voisinage d'un point  $z_0$  tel que  $\varphi'_{i0}(z_0) = 0$  (on suppose par la suite qu'il existe un seul point tournant), et de supposer qu'au voisinage de ce point  $z_0$ , on a :

$$(54) \quad \Gamma_\infty(z_0) = \delta^2 \varepsilon^2.$$

Ainsi, en effectuant une étude asymptotique au voisinage de  $z_0$ , il faut écrire que :

$$(55) \quad \Gamma_{\infty}(z) = \Delta^2 \varepsilon^2 + (z - z_0) \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \Big|_{z_0} + \dots;$$

Et on suppose pour fixer les idées que :

$$(56) \quad \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \Big|_{z_0} < 0.$$

Maintenant, il faut partir en toute généralité de l'équation différentielle (19) linéarisée puisqu'on s'intéresse à une théorie linéaire, avec

$\eta \ll M_{\infty}$ . Ainsi, une fois que l'on fait le changement suivant :

$$(57) \quad \bar{W}(z; M_{\infty}; R_0) = e^{-i \left( \frac{\varepsilon}{R_0 + \eta \varphi_0} \cdot \frac{l/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right) \cdot z} \cdot \hat{V}(z; M_{\infty}; R_0),$$

et que l'on remplace dans l'équation (19), on obtient pour  $\hat{V}$  l'équation différentielle suivante :

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 \hat{V}}{dz^2} - M_{\infty} \left[ \left( \hat{B} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_{\infty}} \right] \frac{d\hat{V}}{dz} \\ & + \left[ \frac{N^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left( \Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2 + \left( \frac{\varepsilon}{R_0 + \eta \varphi_0} \right)^2 \frac{\Delta^2 \rho^2}{N^2 (\Delta^2 - 1/R_0^2)} \right) \right. \\ & \left. - M_{\infty} \left( \frac{\varepsilon R_0}{\eta \varphi_0} \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left\{ \beta \frac{\delta - 2}{z} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right\} \frac{1}{\Gamma_{\infty}} \right) \right] \hat{V} = 0. \end{aligned} \right.$$

Par la suite, il nous faut poser  $z_0 = M_{\infty} z_0$  et  $\Gamma_{\infty}(z)$  au voisinage de  $z_0$  à l'aide de (55) (tout en tenant compte que  $1/R_0 \ll 1$ ).

Maintenant, il faut caractériser l'épaisseur de la zone où le problème de point tournant est significatif à l'ordre considéré :  $O(M_\infty)$ .

Introduisons donc dans (58) la variable intérieure :

$$(59) \quad \hat{z} = M_\infty^\alpha (z - z_0) ,$$

et développons  $\hat{V}$  par rapport à  $M_\infty (\ll 1)$ , de la manière suivante :

$$(60) \quad \hat{V}(z; M_\infty) = \hat{V}_0(\hat{z}) + M_\infty^\beta \hat{V}_1(\hat{z}) + \dots ,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminées à partir du "principe de moindre dégénérescence".

On déduit alors, l'équation qui découle de (55), (58), (59) et (60) :

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 \hat{V}_0}{d\hat{z}^2} + \left\{ \frac{N^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left( \frac{d\pi_\infty}{dz} \Big|_{z_0} M_\infty^{1-3\alpha} \hat{z} + M_\infty^{-2\alpha} \left( \frac{\varepsilon \Delta l}{NR_0 \gamma \varphi_0} \right)^2 \left( 1/\frac{1}{4} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - M_\infty^{1-2\alpha} \frac{\varepsilon R \Delta}{\gamma \varphi_0} \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left[ \left( \hat{\beta} \frac{\gamma - 2}{\gamma} + \frac{d\pi_\infty}{dz} \right) \frac{1}{\pi_\infty} \right] z_0 \right\} \hat{V}_0 \\ & \quad - M_\infty^{1-\alpha} \left[ \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_\infty}{dz} \right) \frac{1}{\pi_\infty} \right] z_0 \frac{d\hat{V}_0}{d\hat{z}} \\ & \quad + M_\infty^\beta \frac{d^2 \hat{V}_1}{d\hat{z}^2} + \dots = 0 , \end{aligned} \right.$$

d'où on constate qu'il faut imposer :

$$(62) \quad \alpha = 1/3 \quad \text{et} \quad \beta = 2/3 .$$

Donc, en ne conservant que les termes dominants par rapport à  $1/R_0$ , mais aussi par rapport à  $M_\infty$ , l'équation différentielle pour  $\hat{V}_0$  est :

$$(63) \quad \frac{d^2 \hat{V}_0}{d\hat{z}^2} + \left[ \frac{N^2}{\Delta^2} \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \hat{z} + \frac{1}{R_0^2 M_\infty^{2/3}} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{\Delta^2 \frac{1}{g} \varphi_0} \right] \hat{V}_0 = 0 ,$$

où l'on a posé :

$$(64) \quad \hat{z} = M_\infty^{1/3} (z - z_0) = \frac{z - z_0}{M_\infty^{2/3}} ;$$

Le terme d'ordre  $\frac{1}{M_\infty^{2/3} R_0^2}$  figurant dans (63) doit être conservé parce qu'il est d'ordre de grandeur a priori arbitraire et cela conduit à supposer que :  $M_\infty \rightarrow 0$  et  $R_0 \rightarrow \infty$  de telle façon que :  $M_\infty^{1/3} R_0 = O(1)$ .

Si on opère ensuite dans (63) le changement de variable (\*) :

$$(65) \quad \tilde{z} = \left( \frac{N}{\Delta} \right)^{2/3} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right|^{1/3} \left\{ \hat{z} + \frac{1}{M_\infty^{2/3} R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 \frac{1}{g} \varphi_0} \left( 1 / \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right) \right\}$$

alors (63) prend la forme simple :

$$(66) \quad \frac{d^2 \hat{V}_0}{d\tilde{z}^2} + \tilde{z} \hat{V}_0(\tilde{z}) = 0 ,$$

(\*) Pour le détail du calcul, voir Annexe (2).

qui est une équation d'Airy pour la variable  $\tilde{z}$ . En particulier le point tournant de l'équation (63), qui est  $\tilde{z} = 0$ , correspond à une valeur réelle de la variable  $\hat{z}$ , qui tend vers zéro en même temps que  $1/R_0$ . La solution générale de (66) s'écrit :

$$(67) \quad \hat{V}_0(\tilde{z}) = a A_i(\tilde{z}) + b B_i(\tilde{z}).$$

On sait que  $A_i(\tilde{z})$  et  $B_i(\tilde{z})$  sont les fonctions d'Airy de première et seconde espèce; et lorsque  $\tilde{z} \rightarrow -\infty$ , elles ont un comportement oscillatoire, tandis que lorsque  $\tilde{z} \rightarrow +\infty$ , leur comportement est apériodique (c'est-à-dire exponentielle). En outre, on observe que :

$$(68) \quad \tilde{z} = \left(\frac{N}{\alpha}\right)^{2/3} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right|^{1/3} \left[ \frac{z - z_0}{M_\infty^{2/3}} + \frac{1}{M_\infty^{2/3} R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 \gamma^2 \varphi_0} \frac{1}{\frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0}} \right],$$

est bien une variable intérieure relativement aux variables extérieures :

$$z_{(+)} (z_{(+)} < z_0) \text{ et } z_{(-)} (z_{(-)} > z_0).$$

. Lorsque  $\tilde{z} \rightarrow -\infty$ , le développement asymptotique des fonctions d'Airy, est :

$$(69) \quad \begin{cases} A_i(\tilde{z}) \sim (\pi)^{-1/2} (-\tilde{z})^{-1/4} \sin(\Psi_1 + \pi/4), \\ B_i(\tilde{z}) \sim (\pi)^{-1/2} (-\tilde{z})^{-1/4} \cos(\Psi_1 + \pi/4), \end{cases}$$

avec :  $\Psi_1 = \frac{2}{3} (-\tilde{z})^{3/2}$ , c'est-à-dire :

$$(70) \quad \Psi_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{\alpha}\right) \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right|^{1/2} \frac{|z - z_0|^{3/2}}{M_\infty} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{R_0^2 N^2 \gamma^2 \varphi_0} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right|} \right]$$

car  $z < z_0$ .

et

$$(71) \quad \left(\frac{\tilde{z}}{\beta}\right)^{-1/4} = \mathcal{L}_0 M_\infty^{1/6} |z-z_0|^{-1/4} \left[ 1 - \frac{1}{4R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 \frac{1}{\beta} \varphi_0} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} |z_0| \right|} \right],$$

où l'on a posé :

$$\mathcal{L}_0 = \left[ \left(\frac{N}{\beta}\right)^{2/3} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} |z_0| \right|^{1/3} \right]^{-1/4}.$$

. Lorsque  $\frac{\tilde{z}}{\beta} \rightarrow +\infty$ , le développement asymptotique des fonctions d'Airy est :

$$(72) \quad \begin{cases} \text{Ai}(\frac{\tilde{z}}{\beta}) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tilde{z}}{\beta}\right)^{-1/4} e^{-\Psi_2} ; \\ \text{Bi}(\frac{\tilde{z}}{\beta}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tilde{z}}{\beta}\right)^{-1/4} e^{+\Psi_2} , \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$(73) \quad \begin{cases} \Psi_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\tilde{z}}{\beta}\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{\beta}\right) \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} |z_0| \right|^{1/2} \frac{|z-z_0|^{3/2}}{M_\infty} \left[ 1 - \frac{3}{4R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 \frac{1}{\beta} \varphi_0} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} |z_0| \right|} \right] \\ \text{Car } z > z_0 , \\ \left(\frac{\tilde{z}}{\beta}\right)^{-1/4} = \mathcal{L}_0 M_\infty^{1/6} |z-z_0|^{-1/4} \left[ 1 + \frac{1}{4R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 \frac{1}{\beta} \varphi_0} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} |z_0| \right|} \right] . \end{cases}$$

On remarque ainsi que si on fait tendre  $1/R_0$  vers zéro, on retrouve :

$$\left(-\frac{\tilde{z}}{\delta}\right)^{-1/4} = \left(\frac{\tilde{z}}{\delta}\right)^{-1/4} = \mathcal{L}_0 M_\infty^{1/6} |z-z_0|^{-1/4}, \text{ et,}$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 = \frac{\mathcal{L}_0}{3} \left(\frac{N}{\Delta}\right) \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} z_0 \right|^{1/2} \frac{|z-z_0|^{3/2}}{M_\infty}$$

(résultats classiques; voir à ce sujet P.A. BOIS [7]).

Par contre, si on tient compte de la rotation de la terre ( $1/R_0 \neq 0$ ), la zone où le problème du point tournant est significative se manifeste sur un intervalle de longueur  $|z-z_0| = O(M_\infty^{-2/3})$ , d'après la relation (64), et que le point tournant correspond à une valeur de  $\tilde{z}$  telle que :

$$(74) \quad \tilde{z}_1 = z_1 - z_0 = \frac{1}{R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 + \eta^2 \rho_0} \left( 1 / \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} z_0 \right| \right).$$

Ce qui montre que celle-ci (en variable  $\tilde{z}$ ) est un  $O(1/R_0^2)$ , et qu'on tend vers de véritables points tournants lorsque  $1/R_0 \rightarrow 0$ .

Ainsi, on peut raccorder les solutions extérieures  $\overline{W}_0^{*(+)} (z < z_0)$  et  $\overline{W}_0^{*(-)} (z > z_0)$  par l'intermédiaire de la solution intérieure  $\overline{W}_0(\tilde{z})$  valable dans le voisinage de  $z = z_0$ ; soit :

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\tilde{z} \rightarrow -\infty} \overline{W}_0^{(+)}(\tilde{z}) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (z < z_0)}} \overline{W}_0^{*(+)}(z, X; R_0), \\ \lim_{\tilde{z} \rightarrow +\infty} \overline{W}_0^{(-)}(\tilde{z}) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (z > z_0)}} \overline{W}_0^{*(-)}(z, X; R_0), \end{array} \right.$$

$\overline{W}_0^{(+)}(\tilde{z})$  étant la solution intérieure dans la région  $z < z_0$ , et telle que :

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{W}_0^{(+)}(\tilde{z}) &= \frac{\mathcal{L}_0 M_{00}^{1/6}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(i/R_0^2\right)\left(\frac{\varepsilon \ell}{\delta^2 + \gamma \varphi_0}\right) \frac{z_0}{M_{00}}} \\ &|z - z_0|^{-1/4} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{4R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \ell^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right|_{z_0}} \right] \\ &[(a-b) \sin \psi_1 + (a+b) \cos \psi_1]. \end{aligned} \right.$$

Et  $\overline{W}_0^{(-)}(\tilde{z})$  étant la solution intérieure dans la région  $z > z_0$ , telle que :

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{W}_0^{(-)}(\tilde{z}) &= \frac{\mathcal{L}_0 M_{00}^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(i/R_0^2\right)\left(\frac{\varepsilon \ell}{\delta^2 + \gamma \varphi_0}\right) \frac{z_0}{M_{00}}} \\ &|z - z_0|^{-1/4} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{4R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \ell^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right|_{z_0}} \right] \\ &[(a/2) e^{-\psi_2} + b e^{\psi_2}]. \end{aligned} \right.$$

3.- Les développements intérieurs de  $\overline{W}_0^{* (+)}$  et  $\overline{W}_0^{* (-)}$ , au voisinage de  $z_0$ .

On doit élucider le comportement des phases  $\varphi_i^{(+)}(z; R_0)/M_{00}$  lorsque  $z \rightarrow z_0$  ( $z < z_0$ ), et de  $\varphi_i^{(-)}/M_{00}$  lorsque  $z \rightarrow z_0$  ( $z > z_0$ ). De même pour les amplitudes  $A_i^{(+)}(z; R_0)$  et  $A_i^{(-)}(z; R_0)$ .

3.1.- Le développement des phases au voisinage de  $z = z_0$ .

On sait que :

$$(78) \quad X = \frac{1}{M_{\infty}} \varphi(z; R_0) = \frac{1}{M_{\infty}} \int_0^z \frac{d\varphi}{dz}(\bar{z}; R_0) d\bar{z}, \quad \varphi(0) = 0.$$

Ainsi, au voisinage de  $z_0$ , on a que (pour  $z < z_0$ ) :

$$(79) \quad X = \frac{1}{M_{\infty}} \varphi_i^{(+)}(z; R_0) = \frac{1}{M_{\infty}} \left[ \int_0^{z_0} \frac{d\varphi_i^{(+)}}{dz} dz - \int_0^z \frac{d\varphi_i^{(+)}}{dz} dz \right],$$

d'où, il vient pour  $\varphi_1^{(+)}(z; R_0)/M_{\infty}$  l'expression suivante, tout en tenant compte des relations (40), (43) et (45) :

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi_1^{(+)}(z; R_0)}{M_{\infty}} = & i \frac{\rho_0}{M_{\infty}} + i \frac{\rho_1 + \rho_2}{M_{\infty} R_0^2} + \frac{1}{M_{\infty}} \left[ \frac{1}{R_0^2} \int_0^{z_0} \frac{-i \rho \varepsilon}{\varepsilon^2 \gamma \varphi_0} dz \right. \\ & - i \frac{N}{\Delta} \int_z^{z_0} \sqrt{\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2} dz + \frac{i}{R_0^2} \frac{\rho \varepsilon}{\varepsilon^2 \gamma \varphi_0} \int_z^{z_0} \frac{dz}{z} \\ & - \frac{i}{R_0^2} \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{2 \Delta^2 \gamma \varphi_0} \int_z^{z_0} \frac{\Delta}{N \sqrt{\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2}} dz \\ & \left. - \frac{i}{R_0^2} \frac{1}{2 \Delta^2} \int_z^{z_0} \frac{N}{\Delta} \sqrt{\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2} dz \right], \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé :

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \frac{N}{\Delta} \int_0^{z_0} |\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{1/2} dz, \\ \mathcal{J}_1 &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{\Delta N t_{j_0}^2} \int_0^{z_0} |\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{-1/2} dz, \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{N}{\Delta^3} \right) \int_0^{z_0} |\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{1/2} dz. \end{aligned} \right.$$

Observons tout d'abord que les intégrales sont toujours définies.

En effet :

La fonction  $|\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{1/2}$  est continue et définie sur l'intervalle  $[0, z_0]$ , donc intégrable. Par suite  $\mathcal{J}_0$  et  $\mathcal{J}_2$  existent, et sont définies sur cet intervalle.

Par contre, la fonction  $|\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{-1/2}$  est continue et définie sur  $[0, z_0[$ . Le seul comportement singulier de  $\mathcal{J}_1$  est lorsque

$z \rightarrow z_0$ . Donc il convient d'étudier plus finement le comportement de  $|\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{-1/2}$  quand  $z \rightarrow z_0$ . Au voisinage de  $z_0$ , on

$$(82) \quad \int_{m_0}^{z_0} \frac{dz}{|\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{1/2}} \sim \int_{m_0}^{z_0} \frac{|z - z_0|^{-1/2}}{\left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz}(z_0) \right|^{1/2}} = \frac{1}{\left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz}(z_0) \right|^{1/2}} \int_{m_0}^{z_0} \frac{dz}{|z - z_0|^{1/2}}$$

qui est une intégrale de Riemann, donc convergente.

Par suite  $\mathcal{J}_1$  est bien définie sur  $[0, z_0]$ .

Toujours au voisinage de  $z_0$ , on trouve, après calcul,

$$(83) \quad \int_z^{z_0} \left( \frac{N}{\Delta} \right) |\Gamma_\infty(z) - \delta^2 \varepsilon^2|^{1/2} dz \sim -\frac{2}{3} \left( \frac{N}{\Delta} \right) \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz}(z_0) \right|^{1/2} |z - z_0|^{3/2},$$

$$(84) \text{ et } \int_{z_0}^{z_0} \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{2 \Delta N + \gamma^2 \varphi_0} |\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2|^{-1/2} dz \sim - \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{N \Delta \gamma^2 \varphi_0} \frac{|z - z_0|^{1/2}}{\left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} / z_0 \right|^{1/2}}.$$

D'où l'on déduit d'après (83) et (84),

$$(85) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{M_{\infty}} \left[ -i \frac{N}{\Delta} \int_{z_0}^{z_0} |\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2|^{1/2} dz \right. \\ & \quad \left. - \frac{i}{R_0^2} \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{2 \Delta^2 \gamma^2 \varphi_0} \int_{z_0}^{z_0} \frac{\Delta}{N} |\Gamma_{\infty}(z) - \Delta^2 \varepsilon^2|^{-1/2} dz \right] \\ & = i \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{N}{\Delta} \right) \left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} / z_0 \right|^{1/2} \frac{|z - z_0|^{3/2}}{M_{\infty}} \left( 1 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{3}{2 R_0^2} \frac{\rho^2 \varepsilon^2}{N^2 \gamma^2 \varphi_0} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} / z_0 \right|} \right) \right] = i \Psi_1. \end{aligned} \right.$$

Donc, en tenant compte des relations ci-dessus, et en sachant que

$\varphi_{20}'(z) = -\varphi_{10}'(z)$ , on déduit alors :

$$(86) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varphi_{11}^{(+)}(z; R_0)}{M_{\infty}} = i \left[ \frac{\rho_0}{M_{\infty}} + \frac{\rho_{11} + \rho_{22}}{M_{\infty} R_0^2} \right] + i \Psi_1 \\ & \quad - i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta^2 \gamma^2 \varphi_0} \frac{z}{M_{\infty} R_0^2} \\ & \quad + i \frac{N}{3 \Delta^3} \left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} / z_0 \right|^{1/2} \frac{|z - z_0|^{3/2}}{M_{\infty} R_0^2}; \end{aligned} \right.$$

et

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi_2^{(+)}(z; R_0)}{M_{00}} &= -i \left[ \frac{p_0}{M_{00}} + \frac{p_1 + p_2}{M_{00} R_0^2} \right] - i \psi_1 \\ &- i \frac{p_2}{\Delta^2 \gamma_0} \frac{z}{M_{00} R_0^2} \\ &- i \frac{N}{3\Delta^3} \left| \frac{d\Gamma}{dz} \right|_{z_0}^{1/2} \frac{|z - z_0|^{3/2}}{M_{00} R_0^2} \end{aligned} \right.$$

De la même manière, que précédemment, on montre qu'au voisinage de  $z = z_0$ , on a ( $z > z_0$ ):

$$(88) \quad \chi = \frac{1}{M_0} \left[ \int_0^{z_0} \frac{d\varphi}{dz} dz + \int_{z_0}^z \frac{d\varphi}{dz} dz \right], \quad \varphi(0) = 0.$$

Et par suite, on a :

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi_1^{(-)}(z; R_0)}{M_{00}} &= \left[ -\frac{p_0}{M_{00}} + \frac{p_1 - p_2}{M_{00} R_0^2} \right] - \psi_2 - i \frac{p_2}{\Delta^2 \gamma_0} \frac{z}{M_{00} R_0^2} \\ &- \frac{N}{3\Delta^3} \left| \frac{d\Gamma}{dz} \right|_{z_0}^{1/2} \frac{|z - z_0|^{3/2}}{M_{00} R_0^2} ; \end{aligned} \right.$$

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi_2^{(+)}(z; R_0)}{M_{00}} &= \left[ \frac{\rho_0}{M_{00}} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{M_{00} R_0^2} \right] + \psi_2 - i \frac{\rho \varepsilon}{\Delta^2 \rho_0} \frac{z}{M_{00} R_0^2} \\ &+ \frac{N}{3\Delta^3} \left| \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right|^{1/2} \frac{|z - z_0|^{3/2}}{M_{00} R_0^2} \end{aligned} \right.$$

3.2.- Le développement des amplitudes au voisinage de  $z_0$ .

Au voisinage de  $z = z_0$ , on a que ( $z < z_0$ ):

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{10}^{(+)}(z) &\sim i \frac{N}{\Delta} \left| \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right|^{1/2} |z - z_0|^{1/2}; \\ \varphi_{20}^{(+)}(z) &= - \varphi_{10}^{(+)}(z). \end{aligned} \right.$$

D'après la relation (50), on observe que :

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^z \frac{z \left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_{00}} dz}{\varphi_{10}^{(+)}(z)} &= \int_0^{z_0} \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_{00}} dz}{\varphi_{10}^{(+)}(z)} \\ &- \int_z^{z_0} \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_{00}} dz}{\varphi_{10}^{(+)}(z)}, \end{aligned} \right.$$

car  $z < z_0$ .

Cette intégrale est bien définie, la démonstration est analogue à celle faite pour  $\oint_{\gamma_1}$  (voir la section 3,1 ci-dessus).

On pose maintenant :

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{z_0} \frac{(\hat{B} \frac{\gamma-z}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz}) \frac{1}{\Gamma_{\infty}}}{\varphi_{\lambda_0}^{(+)}(z)} dz = \frac{I_0}{i \nu_j} , \\ \text{où } I_0 \text{ est une valeur finie; et :} \\ \nu_j = \begin{cases} +1 & \text{si } j=1 \\ -1 & \text{si } j=2 \end{cases} . \end{array} \right.$$

Et :

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_z^{z_0} \frac{(\hat{B} \frac{\gamma-z}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz}) \frac{1}{\Gamma_{\infty}}}{\varphi_{\lambda_0}^{(+)}(z)} dz = - \frac{J_0}{i \nu_j} |z-z_0|^{1/2} \\ \text{où :} \\ J_0 = 2 \frac{[(\hat{B} \frac{\gamma-z}{\gamma} + \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz}) \frac{1}{\Gamma_{\infty}}]_{z_0}}{(N/\Delta) \left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right|_{z_0}^{1/2}} . \end{array} \right.$$

De même :

$$(95) \quad I_1 = - \int_0^{z_0} \frac{\varphi_{\lambda_0}^{(+)}(z)}{[\varphi_{\lambda_0}^{(+)}(z)]^3} dz , \quad \text{qui est une intégrale définie,}$$

puisque :

$$(96) \quad \int_z^{z_0} \frac{\varphi_{i_0}''^{(+)}(z)}{[\varphi_{i_0}'^{(+)}(z)]^3} dz = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{N}\right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left|\frac{d\Gamma_0}{dz}(z_0)\right|}$$

On déduit alors :

$$(97) \quad A_{0(+)}^{(1)}(z; R_0) = \frac{\Lambda_0 |z-z_0|^{-1/4}}{\left[\rho_{\infty}(z_0) \frac{N}{\Delta} \left|\frac{d\Gamma_0}{dz}(z_0)\right|^{1/2}\right]^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{4R_0^2} \frac{\rho_{\infty}^2 \varepsilon}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{|z-z_0|^{-2}}{\left|\frac{d\Gamma_0}{dz}(z_0)\right|}\right) \phi_1(z)$$

où l'on a posé :

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_1(z) &= 1 + \frac{-\frac{1}{R_0} \frac{\rho_{\infty} \varepsilon}{2\delta \gamma \varphi_0} (iI_0 + iJ_0 |z-z_0|^{1/2})}{1 - \frac{1}{4R_0^2} \left(\frac{\rho_{\infty} \varepsilon}{N \gamma \varphi_0}\right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left|\frac{d\Gamma_0}{dz}(z_0)\right|}} \\ &+ \frac{\frac{1}{2R_0^2} \left(\frac{\rho_{\infty} \varepsilon}{2\delta \gamma \varphi_0}\right)^2 I_1 - \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{\rho_{\infty} \varepsilon}{2\delta \gamma \varphi_0}\right)^2 (I_0 + J_0 |z-z_0|^{1/2})^2}{1 - \frac{1}{4R_0^2} \left(\frac{\rho_{\infty} \varepsilon}{N \gamma \varphi_0}\right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left|\frac{d\Gamma_0}{dz}(z_0)\right|}} \end{aligned} \right.$$

avec  $\lim_{z \rightarrow z_0} \phi_1(z) = 1$

De même, on a :

$$(99) \quad A_0^{(+)}(z; R_0) = \frac{\Lambda_1 |z-z_0|^{-1/4}}{\left[ \rho(z_0) \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left( 1 - \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{p\epsilon}{N + \gamma\phi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \right) \phi_2$$

où l'on a posé :

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_2(z) = \phi_1(z) + \mathcal{L} \frac{\frac{1}{R_0} \left( \frac{p\epsilon}{2\delta + \gamma\phi_0} \right) (iI_0 + iJ_0 |z-z_0|^{1/2})}{1 - \frac{1}{4R_0^2} \frac{\rho^2 \epsilon^2}{N^2 + \gamma\phi_0} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}}} ; \\ \text{avec : } \lim_{z \rightarrow z_0} \phi_2(z) = 1. \end{array} \right.$$

De même, au voisinage de  $z_0$  et dans la région ( $z > z_0$ ) on trouve :

$$(101) \quad A_0^{(-)}(z; R_0) = \frac{\Delta_0 |z-z_0|^{-1/4}}{\left[ \rho(z_0) \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left( 1 + \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{p\epsilon}{N + \gamma\phi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \right) \phi_3$$

où l'on a posé :

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_3(z) = 1 + \frac{-(1/R_0) \left( \frac{p\epsilon}{2\delta + \gamma\phi_0} \right) (I_0 + J_0 |z-z_0|^{1/2})}{1 + \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{p\epsilon}{N + \gamma\phi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\frac{1}{2R_0^2} \left( \frac{\rho \varepsilon}{\delta \tan \varphi_0} \right)^2 I_1}{1 + \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{\rho \varepsilon}{N \tan \varphi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}}} \\
 & + \frac{\left( 1/R_0^2 \right) \left( \frac{\rho \varepsilon}{\delta \delta \tan \varphi_0} \right)^2 \left( I_0 + \delta_0 |z-z_0|^{1/2} \right)^2}{1 + \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{\rho \varepsilon}{N \tan \varphi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}}}
 \end{aligned}$$

avec  $\lim_{z \rightarrow z_0} \phi_3(z) = 1$

Et aussi :

$$(103) \quad A_{0(-)}^{(2)}(z; R_0) = \frac{\Delta_1 |z-z_0|^{-1/4}}{\left[ \frac{\rho(z_0)}{\delta_0} \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}^{1/2} \right]^{1/2}} \left( 1 + \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{\rho \varepsilon}{N \tan \varphi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \right) \phi_4$$

où l'on a posé :

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \phi_4(z) &= \phi_3(z) + \varepsilon \frac{\left( 1/R_0 \right) \left( \frac{\rho \varepsilon}{\delta \delta \tan \varphi_0} \right) \left( I_0 + \delta_0 |z-z_0|^{1/2} \right)}{1 + \frac{1}{4R_0^2} \left( \frac{\rho \varepsilon}{N \tan \varphi_0} \right)^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}}} \\
 \text{et } \lim_{z \rightarrow z_0} \phi_4(z) &= 1.
 \end{aligned} \right.$$

On note aussi que lorsque  $(1/R_0) \rightarrow 0$ , les fonctions  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\phi_4$  tendent vers 1.

4.- Le raccord

Maintenant, si on applique les conditions de raccord définies par les relations (75), on obtient les relations qui lient les constantes  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Delta_0, \Delta_1$  avec  $a$  et  $b$  :

$$(105) \quad \left\{ \begin{aligned} a+b &= \frac{M_\infty^{-1/6} \sqrt{2\pi}}{\alpha_0 \left[ \rho_\infty(z_0) \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left( \Lambda_0 e^{i\left(\frac{\rho_0}{M_\infty} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{M_\infty R_0^2}\right)} + \Lambda_1 e^{-i\left(\frac{\rho_0}{M_\infty} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{M_\infty R_0^2}\right)} \right) \\ a-b &= \frac{i M_\infty^{-1/6} \sqrt{2\pi}}{\alpha_0 \left[ \rho_\infty(z_0) \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left( \Lambda_0 e^{i\left(\frac{\rho_0}{M_\infty} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{M_\infty R_0^2}\right)} - \Lambda_1 e^{-i\left(\frac{\rho_0}{M_\infty} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{M_\infty R_0^2}\right)} \right) \end{aligned} \right.$$

et

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{2\sqrt{\pi} M_\infty^{-1/6}}{\alpha_0 \left[ \rho_\infty(z_0) \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \cdot \Delta_0 \cdot e^{\left(-\frac{\rho_0}{M_\infty} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{M_\infty R_0^2}\right)}, \\ b &= \frac{\sqrt{\pi} M_\infty^{-1/6}}{\alpha_0 \left[ \rho_\infty(z_0) \frac{N}{\delta} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \cdot \Delta_1 \cdot e^{-\left(-\frac{\rho_0}{M_\infty} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{M_\infty R_0^2}\right)}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de  $a$  et  $b$  entre (105) et (106) fournit deux relations entre les quatre constantes d'intégrations  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$ ,  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ . Soit :

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\Delta_0} e^{(-\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{M_\infty R_0^2})} + \Delta_1 e^{-(-\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{M_\infty R_0^2})} = \\ \sqrt{e} \left[ \lambda_0 e^{i(\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{M_\infty R_0^2})} + \lambda_1 e^{-i(\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{M_\infty R_0^2})} \right], \\ e^{\Delta_0} e^{(-\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{M_\infty R_0^2})} - \Delta_1 e^{-(-\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{M_\infty R_0^2})} = \\ i\sqrt{e} \left[ \lambda_0 e^{i(\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{M_\infty R_0^2})} - \lambda_1 e^{-i(\frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{M_\infty R_0^2})} \right]. \end{array} \right.$$

Les formules (107) permettent de relier les coefficients de l'amplitude d'un régime oscillatoire à un régime adjacent aperiodique (qui reste oscillatoire).

Si l'on impose à  $\overline{W}_0^{(*)}(-)$  de satisfaire une condition d'amortissement (en altitude), alors le coefficient  $\Delta_1$  est nul, et dans ce cas on peut éliminer le coefficient  $\Delta_0$  entre les deux relations (107), et par suite on obtient une relation entre  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ .

Une seconde relation entre  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  peut être obtenue en écrivant une condition de glissement sur une paroi limitant inférieurement l'écoulement considéré (cette dernière condition devant être linéarisée, relativement au petit

paramètre  $\eta$ , qui peut alors s'interpréter comme étant une épaisseur relative, petite, de la paroi en comparaison de la position  $z = 0$ ).

### III.- REFLEXION D'UNE ONDE PAR UN POINT TOURNANT

On considère tout d'abord le cas où  $(1/R_0) \rightarrow \infty$ . Comme  $\frac{d\sqrt{G}}{dz}|_{z_0} < 0$ , la solution amortie, en  $z$  infini, sera celle qui au voisinage du point tournant, vaut :

$$(108) \quad w = a A_i \left( \frac{z}{z_0} \right).$$

La solution extérieure s'écrit :

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0 = \frac{1}{[\rho_{\infty}(z) \varphi'_{10}(z)]^{1/2}} \left[ l_0 e^{i \frac{\varphi_0}{M_0}} + l_1 e^{-i \frac{\varphi_0}{M_0}} \right], z < z_0; \\ w_0 = \frac{1}{[\rho_{\infty}(z) \varphi'_{10}(z)]^{1/2}} l_2 e^{-i \frac{\varphi_0}{M_0}}, z > z_0. \end{array} \right.$$

avec  $\forall z: \quad \varphi'_{10}(z) = \frac{N}{\Delta} |G(z) - \Delta^2 \varepsilon^2|^{1/2}.$

La solution  $w_0$  étant amortie exponentiellement pour  $z > z_0$ , tout se passe comme si l'onde oscillatoire pour  $z < z_0$ , était composée d'une onde incidente  $l_0 e^{i \frac{\varphi_0}{M_0}}$  qui en  $z = z_0$  se réfléchit par l'onde  $l_1 e^{-i \frac{\varphi_0}{M_0}}$ , la vitesse étant inexistante au delà de  $z_0$ .

Dans le cas où  $(1/R_0) \neq 0$  la solution extérieure s'écrit :

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_0 = A_{0(+)}^{(1)}(z; R_0) e^{\frac{\varphi_{10}^{(+)}}{M_{\infty}} + \frac{\varphi_{12}^{(+)}}{M_{\infty} R_0^2}} + A_{0(+)}^{(2)} e^{\frac{\varphi_{20}^{(+)}}{M_{\infty}} + \frac{\varphi_{22}^{(+)}}{M_{\infty} R_0^2}}, \\ \text{si } z < z_0 ; \\ W_0 = A_{0(-)}^{(1)}(z; R_0) e^{\frac{\varphi_{10}^{(-)}}{M_{\infty}} + \frac{\varphi_{12}^{(-)}}{M_{\infty} R_0^2}}, \text{ si } z > z_0. \end{array} \right.$$

Et on observe que dans la région  $z > z_0$ , la solution  $W_0$  continue à osciller, mais d'une façon non accentuée. D'après la relation (50), on déduit alors :

$$(111) \quad A_{0(+)}^{(1)}(z; R_0) = \frac{l_{01}}{[\rho(z) \varphi_{10}^{(+)}(z)]^{1/2}} [F_0(z) - i F_1(z)] ;$$

$$(112) \quad A_{0(+)}^{(2)}(z; R_0) = \frac{l_{02}}{[\rho(z) \varphi_{10}^{(+)}(z)]^{1/2}} [F_0(z) + i F_1(z)] ,$$

où l'on a posé :

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(z) = 1 + \left( \frac{\rho \varepsilon}{R_0 \Delta \rho \varphi_0} \right)^2 \frac{1}{z} \int_0^z \frac{\varphi_{10}^{(+)}(z)}{[\varphi_{10}^{(+)}]^3} dz \\ - \left( \frac{\rho \varepsilon}{2 \Delta R_0 \rho \varphi_0} \right)^2 \left[ \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\sigma-1}{r} + \frac{d\tau_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\tau_{00}} dz \right]^2 \end{array} \right.$$

qui est bien une fonction réelle;

$$F_1(z) = \left( \frac{k \epsilon}{2 R_0 \Delta \gamma \varphi_0} \right) \int_0^z \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\delta} + \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_\infty}}{| \varphi_{10}'^{(+)}(z) |} dz .$$

Le raccord entre les solutions extérieure et intérieure pour  $z < z_0$ ,  
 donne alors :

$$(114) \quad l_{01} = \gamma_0^* \exp \left[ -i \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{M_\infty R_0^2} \right) \right]; \quad l_{02} = \gamma_0^* \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_0}{M_\infty} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{M_\infty R_0^2} \right) \right]$$

$$\text{où : } \gamma_0^* = \frac{\alpha_0 M_\infty^{1/6}}{8 \sqrt{2} \pi} \left( \rho_{\infty}(z_0) \frac{N}{\Delta} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \right|_{z_0}^{1/2} \right)^{1/2} a .$$

Ainsi, on déduit le coefficient de réflexion qui est le rapport des  
 grandeurs d'amplitudes de l'onde réfléchie  $W_r$  et de l'onde incidente  $W_i$  :

$$(115) \quad C_r(z) = \left| \frac{W_r}{W_i} \right| = \left| \frac{F_0(z) + i F_1(z)}{F_0(z) - i F_1(z)} \right| = 1 .$$

Ce qui montre que les ondes sont bien réfléchies à la traversée du  
 point tournant. En plus on remarque qu'il n'y a pas d'absorption d'ondes, cela est  
 dû au fait qu'on décrit ce phénomène dans un cas non dissipatif, tout en sachant  
 que la viscosité absorbe des ondes faibles. Ainsi, les ondes étudiées sont des  
 ondes longues et la rotation de la terre modifie la propagation de ces ondes.

zone du point  
tournant:  
 $O(M_\infty^{2/3})$

figure - 1.

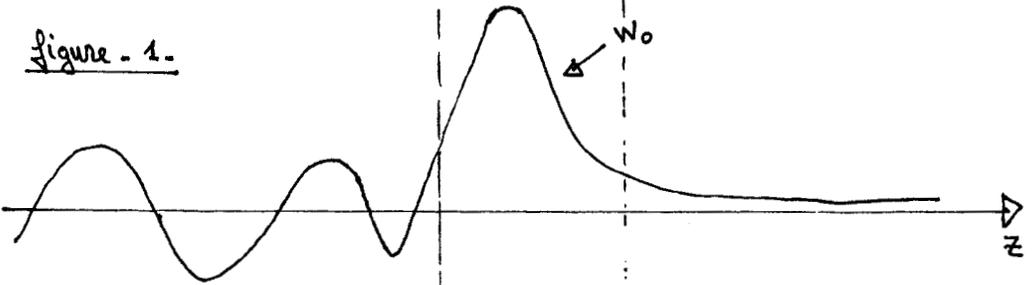
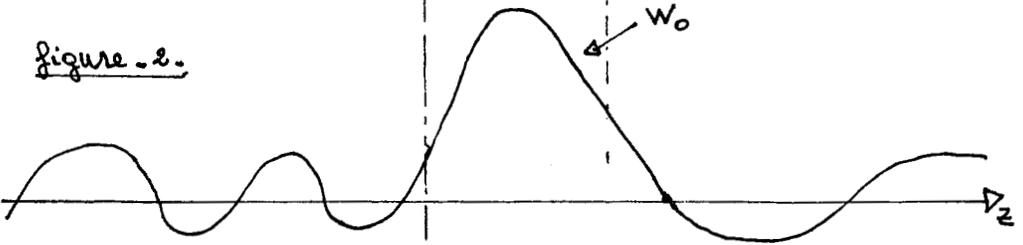


figure - 2.



Comparaison schématique des effets de phase à la traversée  
d'un point tournant dans l'atmosphère, dans le cas où  $(1/R_0) = 0$   
(figure 1) et dans le cas où  $(1/R_0) \neq 0$  (figure 2).

## IV. ANNEXE (2)

1. On part de l'équation différentielle (27), et on désigne par  $\mathcal{L}$  l'opérateur du premier membre de cette équation. On fait les développements asymptotiques suivants par rapport à  $\frac{1}{R_0} \ll 1$  :

$$(B_1) \quad A_0^{(i)}(z; R_0) = A_{00}^{(i)}(z) + \frac{1}{R_0} A_{01}^{(i)}(z) + \frac{1}{R_0^2} A_{02}^{(i)}(z) + \dots;$$

$$(B_2) \quad \overline{W}_0^*(z, X; R_0) = \overline{W}_{00}^*(z, X) + \frac{1}{R_0} \overline{W}_{01}^*(z, X) + \frac{1}{R_0^2} \overline{W}_{02}^*(z, X) + \dots;$$

$$(B_3) \quad \mathcal{L}(\overline{W}_1^*) = \mathcal{L}_0(\overline{W}_1^*) + \frac{1}{R_0} \mathcal{L}_1(\overline{W}_1^*) + \frac{1}{R_0^2} \mathcal{L}_2(\overline{W}_1^*) + \dots$$

En plus, on pose :

$$(B_4) \quad \left\{ \begin{aligned} D(z; R_0) &= \frac{1}{R_0} \left\{ \left( \beta \frac{\delta-1}{\delta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \cdot \frac{\varepsilon}{\tan \varphi_0} \frac{R\delta + i\rho/R_0}{\delta N^2} - \frac{R\delta - i\rho/R_0}{\delta N^2} \frac{\varepsilon \beta}{\delta \pi_0^2} \right\} \\ E(R_0) &= -2i \frac{\rho \varepsilon}{\delta N^2 \tan \varphi_0} (1/R_0)^2; \quad F(z; R_0) = -2 \frac{\delta^2 - 1/R_0^2}{\delta N^2} \varphi_i'; \\ G(z; R_0) &= \frac{\delta^2 - 1/R_0^2}{\delta N^2} \left\{ \left( \beta + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \varphi_i' - \varphi_i'' \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, si on développe ces fonctions par rapport à  $(1/R_0) \ll 1$ .

On trouve :

$$(B_5) \quad D_0 = 0; \quad D_1 = \frac{R\epsilon}{N^2 + \gamma\varphi_0} \left[ \hat{\beta} \frac{\delta - 2}{\gamma} + \frac{d\pi_0}{dz} \right] \frac{1}{\pi_0}; \quad D_2 = i \frac{f\epsilon}{\Delta N^2 + \gamma\varphi_0} \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0};$$

$$(B_6) \quad E_0 = 0; \quad E_1 = 0; \quad E_2 = -2i \frac{f\epsilon}{\Delta N^2 + \gamma\varphi_0};$$

$$(B_7) \quad F_0 = \delta \frac{\Delta}{N^2} \varphi'_{i_0}(z); \quad F_1 = 0; \quad F_2 = -\frac{1}{\Delta N^2} \left[ -2\varphi'_{i_0}(z) + 2\delta^2 \varphi'_{i_2}(z) \right];$$

Enfin, on a :

$$(B_8) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_0 = \frac{\Delta}{N^2} \left[ \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \varphi'_{i_0} - \varphi''_{i_0} \right]; \quad G_1 = 0; \\ G_2 = \frac{1}{N^2} \left\{ -\frac{1}{\delta} \left[ \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \varphi'_{i_0} - \varphi''_{i_0} \right] + \delta \left[ \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} \varphi'_{i_2} - \varphi''_{i_2} \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Maintenant, une fois qu'on remplace tous ces développements dans l'équation différentielle (27), on obtient :

\* Relativement à 1

$$(B_9) \quad \mathcal{L}_0(\overline{W}_1^*) = F_0 \frac{\partial^2 \overline{W}_0^*}{\partial z \partial x} + G_0 \frac{\partial \overline{W}_0^*}{\partial x},$$

qu'on écrit, une fois qu'on choisit une solution de la forme (29) :

$$(B_{10}) \quad \mathcal{L}_0(\overline{w}_1^*) = \left[ F_0 \frac{dA_{00}^{(i)}}{dz} + G_0 A_{00}^{(i)} \right] e^X.$$

Ainsi, pour la régularité de  $\overline{w}_{00}^*$ , on doit avoir :

$$(B_{11}) \quad - \frac{dA_{00}^{(i)}}{dz} / A_{00}^{(i)} = \frac{G_0}{F_0} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \beta + \frac{d\pi_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{00}} - \frac{\varphi_{i0}''}{\varphi_{i0}'} \right],$$

d'où :

$$(B_{12}) \quad A_{00}^{(i)}(z) = \frac{f_{0i}}{\left[ \beta_{00}(z) \varphi_{i0}'(z) \right]^{1/2}}.$$

\* Relativement à  $1/R_0$

$$(B_{13}) \quad \mathcal{L}_1(\overline{w}_1^*) = \left[ G_0 A_{01}^{(i)}(z) + F_0 \frac{dA_{01}^{(i)}}{dz} + D_1 A_{00}^{(i)}(z) \right] e^X,$$

toujours pour la régularité de  $\overline{w}_0^*$ , on doit avoir :

$$(B_{14}) \quad G_0 A_{01}^{(i)} + F_0 \frac{dA_{01}^{(i)}}{dz} = -D_1 A_{00}^{(i)}.$$

La résolution de cette équation sans second membre, donne :

$$(B_{15}) \quad A_{01}^{(i)}(z) = C_0 A_{00}^{(i)}(z), \quad \text{et par suite en faisant}$$

varier la constante, on trouve :

$$(B_{16}) \quad C_0 = \frac{1}{2} \frac{k\epsilon}{\Delta \operatorname{tg} \varphi_0} \int_0^z \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} dz}{\varphi'_{i_0}(z)} ;$$

On déduit ainsi :

$$(B_{17}) \quad A_{0,1}^{(i)}(z) = \frac{A_{0,0}^{(i)}}{2} \frac{k\epsilon}{\Delta \operatorname{tg} \varphi_0} \int_0^z \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} dz}{\varphi'_{i_0}(z)} .$$

\* Relativement à  $1/A_0^2$

On a :

$$(B_{18}) \quad \mathcal{L}_2(\bar{w}_1^*) = \left[ G_0 A_{0,2}^{(i)} + F_0 \frac{dA_{0,2}^{(i)}}{dz} + D_1 A_{0,1}^{(i)} + (G_2 + D_2) A_{0,0}^{(i)} + (E_2 + F_2) \frac{dA_{0,0}^{(i)}}{dz} \right] X,$$

pour la régularité de  $\bar{w}_0^*$ , on doit avoir :

$$(B_{19}) \quad F_0 \frac{dA_{0,2}^{(i)}}{dz} + G_0 A_{0,2}^{(i)} = -D_1 A_{0,1}^{(i)} - (G_2 + D_2) A_{0,0}^{(i)} - (E_2 + F_2) \frac{dA_{0,0}^{(i)}}{dz} ,$$

dont la solution est :

$$(B_{20}) \quad A_{0,2}^{(i)}(z) = C_1^{(i)} A_{0,0}^{(i)}(z) \quad (\text{sans second membre}),$$

ainsi après avoir fait varier la constante, on obtient :

$$(B_{21}) \quad C_1^{(i)} = \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{k\epsilon}{\Delta \operatorname{tg} \varphi_0} \right)^2 \int_0^z \frac{\varphi''_{i_0}(z)}{[\varphi'_{i_0}(z)]^3} dz + \left( \frac{k\epsilon}{\Delta \operatorname{tg} \varphi_0} \right)^2 \left[ \int_0^z \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\pi_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\pi_{\infty}} dz}{\varphi'_{i_0}(z)} \right]^2 \right\}$$

ainsi, on en déduit finalement  $A_{0,2}^{(i)}(z)$ .

2. Pour ramener l'équation différentielle (63) à une équation du Type d'Airy, on fait le changement de variable suivant :

$$(B_{22}) \quad \tilde{z} = a_0 \hat{z} + a_1 \quad ,$$

où :  $a_0$  et  $a_1$  sont des constantes non nulles, qui sont déterminées une fois qu'on remplace (B<sub>22</sub>) dans l'équation (63). En effet, on obtient :

$$(B_{23}) \quad \frac{d^2 V_0}{d\hat{z}^2} + \left\{ \left( \frac{N^2}{\delta^2} \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right) \frac{1}{a_0^3} \tilde{z} - \left( \frac{N^2}{\delta^2} \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right) \frac{a_1}{a_0^3} + \left( \frac{1}{M_\infty^{2/3} R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{\delta^2 \gamma_0^2} \right) \frac{1}{a_0^2} \right\} V_0 = 0$$

Ainsi, on constate qu'il faut que  $a_0$  et  $a_1$  vérifient les relations suivantes :

$$(B_{24}) \quad a_0 = \left( \frac{N}{\delta} \right)^{2/3} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right|^{1/3} ;$$

$$(B_{25}) \quad a_1 = \left( \frac{N}{\delta} \right)^{2/3} \left| \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right|^{1/3} \left\{ \frac{1}{M_\infty^{2/3} R_0^2} \frac{\varepsilon^2 \rho^2}{N^2 \gamma_0^2} \left( \frac{d\Gamma_\infty}{dz} \Big|_{z_0} \right)^{-1} \right\} ;$$

D'où la variable intérieure  $\tilde{z}$ , donnée par la formule (65).

3. TROISIEME PARTIE

ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE LA

SOLUTION POUR  $\epsilon$  PETIT

## I.- LE DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DES PHASES ET DES AMPLITUDES

Comme on veut toujours tenir compte de la force de Coriolis et étudier l'influence du paramètre  $\varepsilon$  quasi-statique sur la propagation des ondes considérées, on fait l'hypothèse suivante :

$$(116) \quad \varepsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad R_0 = O(1).$$

Sachant tout de même que dans le cas du filtrage quasi-statique qui correspond à l'existence d'une situation particulièrement privilégiée :  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on doit considérer l'écoulement en dehors d'une zone équatoriale (c'est-à-dire pour les  $\varphi_0$  suffisamment loin de la valeur  $\varphi_0 = 0$ , de telle façon que le terme  $\varepsilon / \eta \varphi_0$  disparaisse, avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Sous l'hypothèse (116), on va effectuer le développement de chaque quantité :  $\varphi'_i(z; \varepsilon)$  et  $A_0^{(i)}(z; \varepsilon)$  données respectivement par les relations (31) et (35).

### 1.- Le calcul de $\varphi'_i(z; \varepsilon)$ pour $\varepsilon \ll 1$ .

Le développement asymptotique de  $\varphi'_i(z; \varepsilon)$  par rapport à  $\varepsilon$ , est défini par :

$$(117) \quad \varphi'_i(z; \varepsilon) = \varphi'_{i0}(z) + \varepsilon \varphi'_{i1}(z) + \varepsilon^2 \varphi'_{i2}(z) + \dots$$

Après calcul, il vient pour les fonctions  $\varphi'_{i0}(z)$ ,  $\varphi'_{i1}(z)$  et  $\varphi'_{i2}(z)$  ..., les relations suivantes :

$$(118) \quad \varphi'_{10}(z) = i \frac{N}{\sqrt{\lambda^2 - 1/R_0^2}} (\Gamma_0(z))^{1/2} \quad \text{et} \quad \varphi'_{20}(z) = -\varphi'_{10}(z)$$

qui correspondent au cas du filtrage quasi-statique.

Puis :

$$(119) \quad \varphi'_{11}(z) = \varphi'_{21}(z) = -i \frac{l}{\frac{1}{2} \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \quad \text{qui sont}$$

indépendantes de la variable  $z$ .

Et finalement :

$$(120) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi'_{12}(z) = -\frac{1}{2} \frac{N^2 \delta^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \left[ \frac{\rho^2}{N^2 \frac{1}{2} \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - 1 \right] \frac{1}{\varphi'_{10}(z)} ; \\ \varphi'_{22}(z) = -\varphi'_{12}(z) . \end{array} \right.$$

On observe ainsi d'après les formules (120), que  $\varphi'_{12}(z)$  et  $\varphi'_{22}(z)$  sont inversement proportionnelles à  $\varphi'_{10}(z)$ , et présentent une singularité dans le cas où  $\varphi'_{10}(z)$  s'annule.

2.- Le calcul de  $A_0^{(i)}(z; \varepsilon)$  pour  $\varepsilon \ll 1$ .

$A_0^{(i)}(z; \varepsilon)$  est développée de la façon suivante :

$$(121) \quad A_0^{(i)}(z; \varepsilon) = A_{00}^{(i)}(z) + \varepsilon A_{01}^{(i)}(z) + \varepsilon^2 A_{02}^{(i)}(z) + \dots ;$$

et par suite, les amplitudes  $A_{00}^{(i)}(z)$ ,  $A_{01}^{(i)}(z)$  et  $A_{02}^{(i)}(z)$  sont définies par :

$$(122) \quad A_{00}^{(i)}(z) = \frac{\Delta_{0i}}{[\mathcal{L}_{00}(z) \varphi'_{i0}(z)]^{1/2}}, \text{ où } \Delta_{0i} \text{ est une constante d'intégration.}$$

De plus l'amplitude  $A_{00}^{(i)}(z)$  est celle du cas du filtrage quasi-statique :

$$(123) \quad A_{01}^{(i)}(z) = \frac{A_{00}^{(i)}(z)}{2} \left( \frac{\Delta R}{\gamma \varphi_0} \right) \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\pi_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\mathcal{L}_{00}} dz}{\varphi'_{i0}(z)}$$

et

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{02}^{(i)}(z) &= A_{00}^{(i)}(z) \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R}{\gamma \varphi_0} \right)^2 \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\delta - z}{\gamma} + \frac{d\pi_{00}}{dz} \right) \frac{1}{\mathcal{L}_{00}} dz}{\varphi'_{i0}(z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{N^2 \Delta^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left( \frac{\rho^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - 1 \right) \int_0^z \frac{\varphi''_{i0}}{[\varphi'_{i0}]^3} dz \right\}. \end{aligned} \right.$$

On remarque ainsi que l'amplitude  $A_0^{(i)}(z; \varepsilon)$  est proportionnelle à  $[\mathcal{L}_{00}(z)]^{1/2}$ , et par suite croît avec l'altitude<sup>(\*)</sup>, et que le paramètre  $\varepsilon$  n'atténue pas cette croissance.

\*) Voir à ce sujet le comportement de  $\pi_{00}$  à l'infini, et les conclusions déduites (voir la section 3 de I de la deuxième Partie).

## II.- ETUDE AU VOISINAGE DU POINT TOURNANT

### 1.- La solution extérieure

Dans le cas où  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il y a un phénomène de coupure au point tournant  $z = z_0$ . En ce point, on a :

$$(125) \quad \Gamma_\infty(z_0) = 0 .$$

Ainsi, on est amené à distinguer deux cas :

- Premier cas :  $\Gamma_\infty(z) > 0$ , alors on a une onde oscillatoire.

- Deuxième cas :  $\Gamma_\infty(z) < 0$ , alors on a une onde apériodique<sup>(\*)</sup>.

Pour  $\varepsilon \neq 0$ , la solution extérieure s'écrit :

$$(126) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{W}_{0(+)}^*(z, X; \varepsilon) = A_{0(+)}^{(1)}(z; \varepsilon) e^{c_{p_1}^{(+)} / M_\infty} + A_{0(+)}^{(2)}(z; \varepsilon) e^{c_{p_2}^{(+)} / M_\infty} , \\ \text{quand } \Gamma_\infty(z) > 0 ; \\ \overline{W}_{0(-)}^*(z, X; \varepsilon) = A_{0(-)}^{(1)}(z; \varepsilon) e^{c_{p_1}^{(-)} / M_\infty} + A_{0(-)}^{(2)}(z; \varepsilon) e^{c_{p_2}^{(-)} / M_\infty} , \\ \text{quand } \Gamma_\infty(z) < 0 . \end{array} \right.$$

(\*) L'instabilité thermique naturelle est liée à des profils de température inverses. Cette instabilité, qui se manifeste en milieu borné sous forme d'apparition d'écoulements cellulaires, est étudiée habituellement en considérant un milieu confiné dans une bande dans laquelle le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä est négatif. Par contre, dans cette étude on considère un problème d'oscillation libre en milieu non borné adiabatique.

Dans ce cas, on a établi qu'il n'existe pas de point tournant; mais il sera intéressant d'examiner le problème au voisinage de ce point.

En plus, d'après les relations (118), (119) et (120), on déduit :

- si  $\Gamma_0(z) > 0$  , alors  $\varphi_1^{(+)}(z; \varepsilon)$  est imaginaire pure, et par suite on a dans cette région une onde oscillatoire;
- si  $\Gamma_0(z) < 0$  , alors  $\varphi_1^{(-)}(z; \varepsilon)$  est complexe, d'où dans cette région, on a une onde qui est une combinaison d'une onde oscillatoire et d'une onde apériodique.

## 2.- La solution intérieure

Au voisinage du point tournant  $z_0$  , le développement de  $\Gamma_0(z)$

est :

$$(127) \quad \Gamma_0(z) = (z - z_0) \frac{d\Gamma_0}{dz} \Big|_{z_0} + \dots \quad (\text{on suppose toujours que}$$

l'hypothèse (56) est satisfaite).

Par une méthode analogue à celle du cas  $1/R_0$  petit, on trouve :

$$(128) \quad \frac{d^2 \hat{V}_0}{d\hat{z}^2} + \frac{N^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \left[ \frac{d\Gamma_0}{dz} \Big|_{z_0} \hat{z} + \frac{\varepsilon^2}{M_0^{2/3}} \left( \frac{\rho^2 \delta^2}{N^2 \frac{1}{R_0^2} \rho_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right) \right] \hat{V}_0 = 0$$

où l'on a posé :

$$\hat{z} = \frac{z - z_0}{M_0^{1/3}} ,$$

et on constate qu'il faut que :

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad M_0 \rightarrow \infty , \quad \text{de telle façon que} \quad \varepsilon / M_0^{1/3} = o(1) .$$

L'équation différentielle (128), prend la forme simple suivante (celle du type d'Airy) :

$$(129) \quad \frac{d^2 \hat{V}_0}{d\tilde{z}^2} + \tilde{z} \hat{V}_0(\tilde{z}) = 0,$$

où l'on a posé :

$$(130) \quad \tilde{z} = \left( \frac{N^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right)^{1/3} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}^{1/3} \left[ \hat{z} + \frac{\varepsilon^2}{M_0^{2/3}} \frac{\frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 + \frac{1}{2} \rho_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2}{\frac{d\Gamma_0}{dz} |_{z_0}} \right].$$

On observe que l'équation (129) admet un point tournant en  $\tilde{z} = 0$ , qui correspond à une valeur réelle pour  $\hat{z}$  ; soit :

$$(131) \quad \frac{z_1 - z_0}{M_0^{2/3}} = \hat{z}_1 = - \frac{\varepsilon^2}{M_0^{2/3}} \frac{\frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 + \frac{1}{2} \rho_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2}{\frac{d\Gamma_0}{dz} |_{z_0}}, \text{ qui tend}$$

vers zéro en même temps que  $\varepsilon$ .

Ainsi, on en déduit le développement de la solution intérieure :

- Pour la région  $\tilde{z} < \tilde{z}_0$ , on a :

$$(132) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{W_0^{(+)}(\tilde{z})} &= \frac{L_0 M_0^{-1/6}}{\sqrt{2\pi}} |z - z_0|^{-1/4} \cdot \exp \left\{ -i\varepsilon \left( \frac{\rho}{\frac{1}{2} \rho_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right) \frac{z_0}{M_0} \right\} \\ &\left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 + \frac{1}{2} \rho_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right) \right] \\ &\left[ (a-b) \sin \psi_1^* + (a+b) \cos \psi_1^* \right]; \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé :

$$(133) \left\{ \begin{aligned} \Psi_1^* &= \frac{2}{3} \left(-\frac{z}{\sigma}\right)^{3/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{N^2}{\sigma^2 - 1/R_0^2}\right)^{1/2} \left|\frac{d\Gamma_\infty}{dz}\right|_{z_0}^{1/2} \frac{|z-z_0|^{3/2}}{M_\infty} \\ &\left[ 1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left|\frac{d\Gamma_\infty}{dz}\right|_{z_0}} \left( \frac{\rho^2 \sigma^2}{N^2 + \rho^2 \sigma_0^2} \frac{1/R_0^2}{\sigma^2 - 1/R_0^2} - \sigma^2 \right) \right] \\ \text{car } z &< z_0 ; \end{aligned} \right.$$

et

$$(134) \quad L_0 = \left[ \left(\frac{N^2}{\sigma^2 - 1/R_0^2}\right)^{1/3} \left|\frac{d\Gamma_\infty}{dz}\right|_{z_0}^{1/3} \right]^{-1/4}$$

- Pour la région  $z > z_0$ , on a :

$$(135) \left\{ \overline{W}_0^{(-)} = \frac{L_0 M_\infty^{-1/6}}{\sqrt{\pi}} |z-z_0|^{-1/4} \cdot \exp \left\{ -i \varepsilon \left( \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1/R_0^2}{\sigma^2 - 1/R_0^2} \right) \frac{z_0}{M_0} \right\} \right.$$

$$\left[ \begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 \gamma_0^2} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \zeta^2 \right) \right] \\ & \cdot \left[ \frac{a}{2} e^{-\Psi_2^*} + b e^{\Psi_2^*} \right]; \end{aligned} \right]$$

où

$$(136) \left\{ \begin{aligned} \Psi_2^* &= \frac{2}{3} \left( \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right)^{3/2} = \frac{2}{3} \left( \frac{N^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right)^{1/2} \frac{|z-z_0|^{3/2}}{M_{00}} \\ & \left[ 1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 \gamma_0^2} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \zeta^2 \right) \right] \\ \text{car } z > z_0. \end{aligned} \right.$$

On supposera que :

$$(137) \quad \Delta^2 - 1/R_0^2 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 \gamma_0^2} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \zeta^2 > 0.$$

3.- Les développements des phases et des amplitudes, au voisinage de  $z_0$ .

Ici, on va se contenter de donner les résultats puisque la démonstration est analogue à celle du cas où  $1/R_0 \neq 0$ , mais petit.

3.1.- Le développement des phases

On trouve :

$$(137) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1^{(+)}(z; \varepsilon)/M_\infty &= i \frac{g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_\infty} + i \psi_1^* - i \varepsilon \left( \frac{\ell}{\gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \right) \frac{z}{M_\infty}; \\ \varphi_2^{(+)}(z; \varepsilon)/M_\infty &= -i \frac{g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_\infty} - i \psi_1^* - i \varepsilon \left( \frac{\ell}{\gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \right) \frac{z}{M_\infty}. \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé :

$$(138) \left\{ \begin{aligned} g_0 &= \int_0^{z_0} \frac{N}{(\delta^2 - 1/R_0^2)^{1/2}} |\Gamma_\infty(z)|^{1/2} dz, \\ g_1 &= \int_0^{z_0} \frac{1}{2} \frac{N}{(\delta^2 - 1/R_0^2)^{1/2}} \left[ \frac{\ell^2 \delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right] |\Gamma_\infty(z)|^{1/2} dz. \end{aligned} \right.$$

On observe que les intégrales  $g_0$  et  $g_1$  sont bien définies (même démonstration que dans le cas où  $(1/R_0) \ll 1$ ).

De même, on trouve :

$$(139) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1^{(-)}(z; \varepsilon)/M_\infty &= - \frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_\infty} - \psi_2^* - i \varepsilon \left( \frac{\ell}{\gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \right) \frac{z}{M_\infty}; \\ \varphi_2^{(-)}(z; \varepsilon)/M_\infty &= \frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_\infty} + \psi_2^* - i \varepsilon \left( \frac{\ell}{\gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \right) \frac{z}{M_\infty}. \end{aligned} \right.$$

3.2.- Le développement des amplitudes

Dans la région  $z < z_0$  et au voisinage de  $z_0$ , on trouve :

$$(140) \quad A_{0(+)}^{(1)}(z; \varepsilon) = \frac{q_0^* |z - z_0|^{-1/4}}{\left[ \rho_{\infty}(z_0) \frac{N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho_{\infty}^2 \delta^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right) \right] \phi_0^*$$

où l'on a posé :

$$(141) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_0^*(z) &= 1 + \frac{-\varepsilon \frac{R_0 \delta}{2 + \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0}{\delta^2 - 1/R_0^2} (i I_0^* + i |z - z_0|^{1/2} J_0^*)}{1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho_{\infty}^2 \delta^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right)} \\ &+ \frac{(\varepsilon^2/2) \left( \frac{N^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \right) \left( \frac{\rho_{\infty}^2 \delta^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right) I_1^*}{1 - \varepsilon^2/4 \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho_{\infty}^2 \delta^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right)} \\ &- \frac{\varepsilon^2 \left( \frac{R_0 \delta}{2 + \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} \right)^2 (I_0^* + J_0^* |z - z_0|^{1/2})^2}{1 - \varepsilon^2/4 \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho_{\infty}^2 \delta^2}{N^2 + \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right)} \end{aligned} \right.$$

avec  $\lim_{z \rightarrow z_0} \phi_0^*(z) = 1$  ,

où :

$$(142) \quad \left\{ \begin{aligned} I_0^* &= \int_0^{z_0} \frac{\left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\delta} + \frac{d\Gamma_0}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_0}}{\frac{N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} |\Gamma_0(z)|^{1/2}} dz, \\ I_1^* &= - \int_0^{z_0} \frac{\varphi_{i_0}''(z)}{[\varphi_{i_0}'(z)]^3} dz, \\ J_0^* &= 2 \frac{\int_z^{z_0} \left( \hat{\beta} \frac{\delta - z}{\delta} + \frac{d\Gamma_0}{dz} \right) \frac{1}{\Gamma_0} dz}{\frac{N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}^{1/2}}. \end{aligned} \right.$$

De même pour  $A_{0(+)}^{(2)}(z; \varepsilon)$ , on trouve :

$$(143) \quad A_{0(+)}^{(2)}(z; \varepsilon) = \frac{q_1^* |z - z_0|^{-1/4}}{\left[ \frac{\rho(z_0) N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}^{1/2} \right]^{1/2}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho^2 \delta^2}{N^2 \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right) \right] \phi_1^*$$

où

$$(144) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_1^*(z) &= \phi_0^*(z) + 2 \frac{\varepsilon \frac{\rho \delta}{2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0}{\delta^2 - 1/R_0^2} (i I_0^* + i J_0^* |z - z_0|^{1/2})}{1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{\rho^2 \delta^2}{N^2 \gamma^2 \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right)}, \\ \text{avec } \lim_{z \rightarrow z_0} \phi_1^*(z) &= 1. \end{aligned} \right.$$

Dans la région  $z > z_0$ , et au voisinage de  $z_0$ , les amplitudes  $A_{0(-)}^{(1)}(z; \varepsilon)$  et  $A_{0(-)}^{(2)}(z; \varepsilon)$  ont les développements suivants :

$$(145) \quad A_{0(-)}^{(1)}(z; \varepsilon) = \frac{C_0^* |z-z_0|^{-1/4} \cdot \phi_2^*(z)}{\left[ \frac{S_0(z_0) N}{\sqrt{\Delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{P^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right) \right]$$

où l'on a posé :

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi_2^*(z) &= 1 + \frac{-\varepsilon \frac{R_0 \Delta}{2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} (I_0^* + J_0^* |z-z_0|^{1/2})}{1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{P^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right)} \\ &+ \frac{(\varepsilon^2/4) \frac{N^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left( \frac{P^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right) I_1^*}{1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{P^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right)} \\ &+ \frac{\varepsilon^2 \left( \frac{R_0 \Delta}{2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right)^2 (I_0^* + J_0^* |z-z_0|^{1/2})^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{P^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right)}, \\ \text{et } \lim_{z \rightarrow z_0} \phi_2^*(z) &= 1. \end{aligned} \right.$$

et pour  $A_{0(-)}^{(2)}(z; \varepsilon)$ , on trouve :

$$(147) \quad A_{0(-)}^{(2)}(z; \varepsilon) = \frac{C_1^* |z-z_0|^{-1/4} \cdot \phi_2^*(z)}{\left[ \frac{P(z_0) N}{\sqrt{\Delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z-z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} \right|_{z_0}} \left( \frac{P^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \Delta^2 \right) \right]$$

avec :

$$(148) \left\{ \begin{aligned} \phi_3^*(z) &= \phi_2^*(z) + 2 \frac{\varepsilon \frac{R_0}{2 + \gamma_0} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} (I_0^* + J_0^* |z - z_0|^{1/2})}{1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{|z - z_0|^{-1}}{\left| \frac{d\Gamma_0}{dz} |z_0| \right|} \left( \frac{\rho^2 \delta^2}{N^2 + \gamma_0^2} \frac{1/R_0^2}{\delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right)}, \\ \text{et } \lim_{z \rightarrow z_0} \phi_3^*(z) &= 1. \end{aligned} \right.$$

#### 4.- Conditions de réflexion

Le raccord entre les solutions extérieure et intérieure, suivant le côté du point tournant qui est considéré, fournit entre  $q_0^*$ ,  $q_1^*$ ,  $c_0^*$ ,  $c_1^*$  et  $a$ ,  $b$  les relations suivantes :

$$(149) \left\{ \begin{aligned} a + b &= \frac{M_\infty^{-1/6} \sqrt{2\pi}}{L_0 \left[ \rho_\infty(z_0) \frac{N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} |z_0| \right|^{1/2} \right]^{1/2}} \left( q_0^* e^{\frac{i g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_\infty}} + q_1^* e^{-\frac{i g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_\infty}} \right), \\ a - b &= \frac{i M_\infty^{-1/6} \sqrt{2\pi}}{L_0 \left[ \rho_\infty(z_0) \frac{N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_0}{dz} |z_0| \right|^{1/2} \right]^{1/2}} \left( q_0^* e^{\frac{i g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_\infty}} - q_1^* e^{-\frac{i g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_\infty}} \right); \end{aligned} \right.$$

et

$$(150) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{2\sqrt{\pi} M_{\infty}^{-1/6}}{L_0 \left[ \rho_{\infty}^2(z_0) \frac{N}{\sqrt{\Delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} c_0^* e^{-\frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}}; \\ b &= \frac{\sqrt{\pi} M_{\infty}^{-1/6}}{L_0 \left[ \rho_{\infty}^2(z_0) \frac{N}{\sqrt{\Delta^2 - 1/R_0^2}} \left| \frac{d\Gamma_{\infty}}{dz} \right|_{z_0} \right]^{1/2}} c_1^* e^{\frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de  $a$  et  $b$  entre (149) et (150) fournit, entre  $q_0^*$ ,  $q_1^*$ ,  $c_0^*$  et  $c_1^*$ , des relations que l'on peut interpréter comme des relations de réflexion au franchissement de ces points. En effet, on a :

$$(151) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{2} \left[ \begin{array}{l} q_0^* e^{i \frac{g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} + q_1^* e^{-i \frac{g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} \\ 2 c_0^* e^{-\frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} + c_1^* e^{\frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} \end{array} \right] &= \\ i\sqrt{2} \left[ \begin{array}{l} q_0^* e^{i \frac{g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} - q_1^* e^{-i \frac{g_0 + \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} \\ 2 c_0^* e^{-\frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} - c_1^* e^{\frac{g_0 - \varepsilon^2 g_1}{M_{\infty}}} \end{array} \right] &= \end{aligned} \right. ;$$

On remarque ainsi que si  $\overline{W}_0^*(-)$  peut satisfaire une condition d'amortissement en altitude, alors  $c_1^*$  est nul, et par suite en écrivant une condition de glissement (linéarisée), on peut déterminer les quatre constantes d'intégrations.

### III.- REFLEXION PAR UN POINT TOURNANT

On considère le cas du filtrage quasi-statique  $\varepsilon \rightarrow 0$  ; et on suppose que  $\overline{W}_0^*$  satisfait à une condition d'amortissement à l'infini. On déduit alors la solution extérieure, qui s'écrit :

$$(152) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_0 = \frac{1}{[\rho_0(z) \varphi'_{10}(z)]^{1/2}} \left[ K_0 e^{i \varphi_{10}/M_{\infty}} + K_1 e^{-i \varphi_{10}(z)/M_{\infty}} \right], \\ z < z_0 ; \\ \\ W_0 = \frac{1}{[\rho_0(z) \varphi'_{10}(z)]^{1/2}} K_2 e^{-\frac{\varphi_{10}(z)}{M_{\infty}}}, \quad z > z_0 ; \end{array} \right.$$

où :  $\forall z, \quad \varphi'_{10}(z) = \frac{N}{\sqrt{\delta^2 - 1/R_0^2}} |\Gamma_0(z)|^{1/2}.$

La solution  $W_0$  pour  $z > z_0$ , étant amortie exponentiellement,

et tout se passe comme si l'onde oscillatoire  $W_0$ , se compose d'une onde incidente  $K_0 e^{i \varphi_{10}/M_{\infty}}$  qui, en  $z = z_0$ , se réfléchit par l'onde  $K_1 e^{-i \varphi_{10}/M_{\infty}}$ .

En plus, on trouve que le coefficient de réflexion  $C_R^*(z)$  est défini par :

$$(153) \quad C_R^*(z) = \left| \frac{K_1}{K_0} \right| = 1, \quad \text{ce qui montre que}$$

les ondes sont bien réfléchies par le point tournant. Dans le cas où  $\varepsilon \neq 0$ , la solution extérieure s'écrit :

$$(154) \left\{ \begin{array}{l} w_0 = A_{0(+)}^{(1)}(z; \varepsilon) e^{\frac{\varphi_{10}^{(+)} + \varepsilon \varphi_{11}^{(+)} + \varepsilon^2 \varphi_{12}^{(+)}}{M_{\infty}}} \\ \quad + A_{0(+)}^{(2)} e^{\frac{\varphi_{20}^{(+)} + \varepsilon \varphi_{21}^{(+)} + \varepsilon^2 \varphi_{22}^{(+)}}{M_{\infty}}}, \\ \text{si } z < z_0; \\ w_0 = A_{0(-)}^{(1)}(z; \varepsilon) e^{\frac{\varphi_{10}^{(-)} + \varepsilon \varphi_{11}^{(-)} + \varepsilon^2 \varphi_{12}^{(-)}}{M_{\infty}}}, \text{ si } z > z_0. \end{array} \right.$$

On observe ainsi que la solution  $w_0$  pour  $z > z_0$ , continue à osciller mais faiblement, jusqu'à atténuation à l'infini. Le coefficient de réflexion, dans ce cas, étant défini par :

$$(155) \quad C_R^*(z) = \left| \frac{w_{\mathcal{R}}}{w_i} \right| = \left| \frac{A_{0(+)}^{(2)}(z; \varepsilon)}{A_{0(+)}^{(1)}(z; \varepsilon)} \right| = \left| \frac{F_0^*(z) + i F_1^*(z)}{F_0^*(z) - i F_1^*(z)} \right| = 1,$$

où l'on a posé :

$$(156) \left\{ \begin{array}{l} F_0^*(z) = 1 + \frac{J^*(z)}{2} \frac{\varepsilon^2 N^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \left( \frac{\rho^2 \Delta^2}{N^2 \gamma \varphi_0} \frac{1/R_0^2}{\Delta^2 - 1/R_0^2} - \delta^2 \right) - \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{\Delta R}{\gamma \varphi_0} \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} \right)^2 I^{*2} \\ F_1^*(z) = \varepsilon \left( \frac{R \delta}{2 \gamma \varphi_0} \right) \frac{1/R_0}{\Delta^2 - 1/R_0^2} I^*(z); \\ I^*(z) = \int_0^z \frac{\left( \beta \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{d\eta_{\infty}}{dz} \right) \frac{1}{\eta_{\infty}} dz}{|\varphi'_{10}^{(+)}(z)|} dz, \\ \int_0^z \frac{\varphi''_{10}^{(+)}(z)}{[\varphi'_{10}^{(+)}(z)]^3} dz = -J^*(z). \end{array} \right.$$

On remarque ainsi, que les ondes sont bien réfléchies par le point tournant; mais il reste des ondes qui oscillent à la traversée de ce point, et tendent à s'amortir au loin.

4. DERNIERE PARTIE

INFLUENCE DE LA FORCE DE CORIOLIS SUR LES ONDES DE BOUSSINESQ  
STATIONNAIRES EN PRESENCE D'UNE MONTAGNE

### 1.- Les équations linéarisées pour les ondes de relief

L'étude qui est présentée ici s'inscrit dans le cadre des recherches de R. Kh. ZEYTOUNIAN et P.A. BOIS sur la "Modélisation asymptotique d'écoulements atmosphériques". Il s'agit principalement de tester une formulation asymptotique de l'approximation de Boussinesq pour des phénomènes liés aux ondes de relief sous l'effet de la rotation de la terre.

#### 1.1.- Les équations du mouvement

On part des équations d'Euler (sans dimensions) sous l'hypothèse du plan tangent dans un système d'axe en mouvement avec la terre en rotation (voir par exemple ZEYTOUNIAN (1985) [3]):

$$(157) \left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R_0} v + \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \rho_0} w + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{R_0} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; \\ \varepsilon^2 \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \rho_0} u + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_0}{\gamma M_0^2} = 0 ; \\ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 ; \\ \rho \left( u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + w \frac{\partial \pi}{\partial z} \right) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 ; \\ p = \rho \pi . \end{array} \right.$$

En plus, on considère qu'à l'infini, loin en amont de la montagne, on a une solution de base des équations du système (157) de la forme suivante :

$$(158) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{quand } X \rightarrow -\infty : \\ u = U_{\infty}(y, z) \quad , \quad v = w = 0 \quad , \quad p = P_{\infty}(y, z) \\ \text{et} \quad T = T_{\infty}(y, z) \end{array} \right.$$

de telle façon que :

$$(159) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\rho_{\infty} U_{\infty} = \frac{R_0}{\gamma M_{\infty}^2} \frac{\partial P_{\infty}}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial P_{\infty}}{\partial z} + \beta_0 \rho_{\infty} = \frac{\varepsilon}{R_0 \gamma \varphi} \gamma M_{\infty}^2 \rho_{\infty} U_{\infty} \\ P_{\infty} = \rho_{\infty} T_{\infty} \end{array} \right.$$

Il nous faut aussi écrire une condition de glissement sur la paroi de la montagne, si cette dernière est simulée (toujours avec des grandeurs adimensionnées) par l'équation :

$$(160) \quad z = \Delta_0 h(x, y) \quad , \quad \Delta_0 = \frac{h_0}{H_0} \quad ,$$

où l'on a posé :

$$(161) \quad h_0 = \max_{(x, y) \in D_0} |h(x, y)| \quad , \quad D_0 \text{ étant la trace de la montagne sur le plan } z=0 \quad ; \text{ et on suppose que :}$$

$$h(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad h(\infty, \infty) = 0.$$

Ainsi, on déduit la condition de glissement, définie par :

$$(162) \quad w = \ll_0 \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad \text{sur} \quad z = \ll_0 h(x, y).$$

Comme on veut tenir compte de l'influence de la force de Coriolis, on fait l'hypothèse suivante :

$$(162a) \quad R_0 = o(1) \quad \text{et} \quad \varepsilon \ll 1.$$

La relation (162) implique que  $L_0 \simeq \frac{U_\infty^0}{f_0}$ , où  $f_0 = 2\Omega_0 \sin\varphi_0$  ;  
Comme  $f_0 = 1,4 \cdot 10^{-4}$  (1/s) et  $U_\infty^0$  quelques m/s, on a que  
 $L_0 \simeq 10^5$  m "au moins".

Dans ce cas :  $\varepsilon = \frac{H_0}{L_0} \simeq 1/10$ , puisque  $H_0 \simeq 10^4$  m au plus. En fait, comme par la suite  $B_0 = \hat{B} \frac{L_0}{M_\infty} \ll 1$  (d'après l'approximation de Boussinesq) on voit que :

$$H_0 \ll \frac{R_0 M_\infty}{g} \simeq 8 \cdot 10^3 \text{ m}, \quad \text{et de ce fait :}$$

$\varepsilon$  sera encore plus petit.

Donc, on va envisager au niveau des équations (159), le passage à la limite "dit hydrostatique" :

$$(163) \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \quad ; \quad x, y, z \text{ fixés.}$$

Et on obtient les équations dites "primitives" suivantes :

(164)

$$(164) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R_0} v + \frac{1}{S} \frac{1}{\delta M_\infty^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 ; \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R_0} u + \frac{1}{S} \frac{1}{\delta M_\infty^2} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 ; \\ \frac{\partial P}{\partial z} + B_0 \rho = 0 ; \\ u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 ; \\ \rho \left( u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + w \frac{\partial \pi}{\partial z} \right) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 ; \\ P = \rho \pi . \end{array} \right.$$

Il faut associer à (164) la solution de base :  $U_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $P_\infty$  et  $\pi_\infty$ , de telle façon que :

$$(165) \quad -\rho_\infty U_\infty = \frac{R_0}{\delta M_\infty^2} \frac{\partial P_\infty}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho_\infty}{\partial y} + \hat{B} M_\infty \rho_\infty = 0, \quad P_\infty = \rho_\infty \pi_\infty$$

(  $B_0 = \hat{B} M_\infty$ ,  $\hat{B} = O(1)$ ,  $M_\infty \ll 1$  : approximation de Boussinesq).

Et la condition de glissement est donnée par (162).

### 1.2.- Choix d'une solution de base

On a remarqué d'après ci-dessus, que l'effet de la rotation de la terre ne permet pas de choisir comme écoulement de base l'écoulement classique "cisailé"

$$\vec{u}^0 = U_\infty(z) \vec{x}^0, \quad P = P_\infty(z), \quad \rho = \rho_\infty(z) \quad \text{et} \quad \pi = \pi_\infty(z).$$

Par contre ici, le système possède une solution particulière :  $U_\infty(y, z)$ ,  $P_\infty(y, z)$ ,  $\pi_\infty(y, z)$  et  $\rho_\infty(y, z)$ , qui vérifient les équations du système (165).

Si on considère que  $U_\infty$  et  $\rho_\infty$  ne sont pas très grands (pour  $M_\infty \ll 1$ ) devant  $P_\infty$ , cela montre que les deux variables significatives décrivant  $P_\infty$  sont :

$$(166) \quad Z = M_\infty z, \quad \eta = M_\infty^2 y : \text{variables lentes.}$$

Si on suppose que  $P_\infty(z, \eta)$  est donnée, alors  $U_\infty(z, \eta)$  et  $\rho_\infty(z, \eta)$  vérifient les équations suivantes :

$$(167) \quad \rho_\infty(z, \eta) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial P_\infty}{\partial z}, \quad U_\infty(z, \eta) = (R_0 \hat{\beta} / \gamma) \frac{\frac{\partial P_\infty}{\partial \eta}}{\frac{\partial P_\infty}{\partial z}}.$$

Si on effectue le développement de Taylor de  $P_\infty(z, \eta)$  au voisinage du plan axial  $oxy$  (i.e. pour  $\eta$  petit) alors :

$$(168) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_\infty(z, \eta) = P_0(z) + \lambda P_1(z) + \dots ; \\ U_\infty(z, \eta) = U_0(z) + \lambda U_1(z) + \dots ; \\ \rho_\infty(z, \eta) = \rho_0(z) + \lambda \rho_1(z) + \dots ; \\ \pi_\infty(z, \eta) = \pi_0(z) + \lambda \pi_1(z) + \dots ; \end{array} \right.$$

où  $\lambda = \lambda(\eta) \rightarrow 0$ , avec  $\eta \rightarrow 0$ .

Si on tient compte des relations (167), on déduit alors :

$$(169) \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\infty}(z, \eta) = -\frac{1}{\beta} \left[ P_0'(z) + \lambda P_1'(z) + \lambda^2 P_2'(z) + \dots \right]; \\ \psi_{\infty}(z, \eta) = \frac{R_0 \hat{\beta}}{\gamma} \left[ \frac{P_1(z)}{P_0'(z)} + \lambda \left( \frac{2 P_2(z)}{P_0'(z)} - \frac{P_1(z) P_1'(z)}{P_0'^2(z)} \right) + \dots \right], \\ \text{de même pour } \pi_{\infty}(z, \eta). \end{array} \right.$$

Ainsi, d'après (169), tant que l'on ne considère pas des distances très considérables par rapport à  $y$ , c'est-à-dire  $\eta = o(1)$ , donc

$y = o(M_{\infty}^{-2})$ , on peut approcher la solution de base par les valeurs :

$$(170) \quad \rho_{\infty} = \rho_0(z), \quad \psi_{\infty} = \psi_0(z), \quad \psi_{\infty} = \psi_0(z) \text{ et } \pi_{\infty} = \pi_0(z),$$

où  $\rho_0$  et  $\psi_0$  vérifient la relation :

$$(171) \quad \psi_0(z) = -\frac{P_0'(z)}{\beta}.$$

$\psi_0(z)$  étant une fonction arbitraire. La donnée de  $\psi_0(z)$  permet, grâce à (169) de connaître l'évolution de  $\rho_0$  par rapport à la variable lente  $\eta$  :

$$(172) \quad P_1(z) \cdot \frac{R_0 \hat{\beta}}{\gamma} = \psi_0(z) P_0'(z).$$

Comme on se limite, dans les problèmes d'ondes de relief, à l'étude des distances  $\bar{z} = o(1)$  et  $M_{\infty} y = o(1)$ , l'approximation (170) reste donc valable.

En plus, dans le cas présent l'hypothèse de cisaillement faible, est nécessaire, et l'étude ci-dessus (formule (172)) montre comment  $\psi_0(z)$  est relié à un gradient transversal de pression.



$$\left. \begin{aligned} \mu_0(z) \rho_0(z) \frac{\partial \omega}{\partial x} + M_\infty \frac{d\rho_0}{dz} w' + \rho_\infty \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) &= 0; \\ \rho_0(z) \left( \mu_0(z) \pi_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + M_\infty \frac{d\pi_0}{dz} w' \right) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left( \mu_0(z) \rho_0(z) \frac{\partial \pi}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + M_\infty \frac{d\rho_0}{dz} w' \right) = 0; \\ \pi &= \omega + \theta. \end{aligned} \right\}$$

Et la condition de glissement associée linéarisée est :

$$(176) \quad w' = \mu_0(0) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{sur } z=0.$$

#### 1.4.- L'approximation de Boussinesq

Maintenant, il s'agit d'analyser le problème (175-176) sous l'hypothèse :

$$(177) \quad \left\{ \begin{aligned} M_\infty \ll 1 \quad &\text{mais fixé;} \\ u' = u'_0 + \dots, \quad v' = v'_0 + \dots, \quad w' = w'_0 + \dots, \\ \pi = M_\infty^2 \pi_2 + \dots, \quad \omega = M_\infty \omega_1 + \dots, \quad \theta = M_\infty \theta_1 + \dots \end{aligned} \right.$$

Une fois que l'on introduit les développements (177) au niveau du système (175), on déduit le système "d'équations primitives à la Boussinesq" :

$$(178) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_0(z) \frac{\partial u'_0}{\partial x} - \frac{v'_0}{R_0} + \frac{\pi_0(z)}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial x} &= -M_\infty \frac{d\mu_0}{dz} w'_0; \\ \mu_0(z) \frac{\partial v'_0}{\partial x} + \frac{u'_0}{R_0} + \frac{\pi_0(z)}{\gamma} \frac{\partial \pi_2}{\partial y} &= 0; \\ \pi_0(z) \frac{\partial \pi_2}{\partial z} &= \beta \theta_1; \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'_0}{\partial x} + \frac{\partial v'_0}{\partial y} + \frac{\partial w'_0}{\partial z} &= -M_\infty H_0(z) \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + M_\infty \left( \beta + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} w'_0 ; \\ H_0(z) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \left( \beta \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} w'_0 &= M_\infty \frac{\gamma-1}{\gamma} H_0(z) \frac{\partial \pi_2}{\partial x} ; \\ \omega_1 + \theta_1 &= M_\infty \pi_2 . \end{aligned} \right\}$$

## 2.- L'équation différentielle de la vitesse verticale suivant l'altitude

On étudie l'écoulement autour d'un obstacle, de faible hauteur, tridimensionnel. Compte tenu de la linéarisation, il suffit d'étudier l'écoulement autour d'une masse de DIRAC placé en  $O$ , une convolution par rapport à  $x$  et à  $y$ , permettant, en principe, de traiter ensuite le cas de n'importe quel obstacle.

### 2.1.- La transformée de Fourier

Donc, on va chercher une solution sous la forme suivante :

$$(179) \quad u = \begin{pmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ \pi_2 \\ \omega_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{ke}(z) e^{-i(kx+ly)} dk dl .$$

Par suite, une fois que l'on substitue cette dernière dans le système d'équations (178), on obtient le système suivant (on supprime tous les indices) :

$$\begin{cases}
 -i k u_0(z) u(z) - \frac{v(z)}{R_0} - i k \frac{\pi_0(z)}{\gamma} \pi(z) = -M_\infty \frac{d u_0}{dz} w(z); \\
 -i k u_0(z) v(z) + \frac{u(z)}{R_0} - i k \frac{\pi_0(z)}{\gamma} \pi(z) = 0; \\
 \pi_0(z) \frac{d\pi}{dz} - \hat{\beta} \theta(z) = 0; \\
 -i (k u(z) + l v(z)) + \frac{dw}{dz} = i k M_\infty u_0(z) w(z) + M_\infty \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{w}{\pi_0}; \\
 -i k u_0(z) \theta(z) + \hat{\beta} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\hat{\beta}} \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{w(z)}{\pi_0(z)} = -i M_\infty \frac{\gamma-1}{\gamma} u_0(z) k \pi(z) \\
 \\
 w + \theta = M_\infty \pi.
 \end{cases}
 \quad (180)$$

La condition de glissement associée est :

$$\begin{cases}
 w = -i k \quad \text{sur } z=0, \\
 \\
 u_0(0) = 1.
 \end{cases}
 \quad (181) \text{ avec :}$$

## 2.2.- L'équation différentielle pour $W(z)$

En effet, en éliminant au niveau du système (180) toutes les fonctions sauf une, par exemple  $W(z)$ , on obtient alors l'équation différentielle satisfaite par cette dernière. En effet, la démonstration est analogue à celle faite dans les autres paragraphes. En définitive, on déduit :

$$\begin{cases}
 \frac{d^2 w}{dz^2} - N^2 \frac{\hat{\beta} \left( \hat{\beta} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0(z)}}{(1/R_0^2) - R^2 u_0^2(z)} w(z) \\
 \\
 + M_\infty \left\{ - \left( \hat{\beta} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} - \frac{1 + i l R_0 u_0}{1 - R_0^2 R^2 u_0^2(z)} \frac{\frac{d u_0}{dz}}{u_0} \right\} \frac{dw}{dz} = 0.
 \end{cases}
 \quad (182)$$

$\Gamma_{\infty}(z)$  étant le carré de la fréquence de Brunt-Väisälä du milieu :

$$(183) \quad \Gamma_{\infty}(z) = \frac{\hat{B}}{\gamma} \left( \hat{B} \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} ;$$

Cela étant dit, on voit apparaître dans (182) la quantité suivante (coefficient de  $W(z)$ ) :

$$(184) \quad H_g(z) = N^2 \frac{\Gamma_{\infty}(z)}{(1/R_0^2) - R^2 U_0^2(z)} ;$$

si on pose :

$$(185) \quad \cos \alpha = (R/N) ;$$

et on fait apparaître le paramètre de Scorer de l'écoulement :

$$(186) \quad h(z) = \frac{\Gamma_{\infty}(z)}{U_0^2(z)} ; \text{ alors } H_g(z) \text{ prend la forme}$$

suivante :

$$(187) \quad H_g(z) = - \frac{h(z)}{\cos^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2(z)} \right]} .$$

Donc plusieurs effets distincts sont intéressants à mettre en évidence dans (182). Certains sont liés à la propagation verticale des ondes, et apparaissent pour les ondes les plus simples (longitudinales). D'autres sont spécifiques des ondes transversales. Les deux effets se mélangent dans les ondes tridimensionnelles. Et on écrit l'équation différentielle (182) de la manière suivante :

$$(188) \quad \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{h(z)}{\cos^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2(z)} \right]} W(z) + M_{00} B_0(z) \frac{dW}{dz} = 0 ,$$

où l'on a posé :

$$(189) \quad B_0(z) = - \left( \beta + \frac{d\pi_0}{dz} \right) \frac{1}{\pi_0} - \frac{1 + i l R_0 U_0(z)}{1 - R^2 R_0^2 U_0^2(z)} \left( \frac{dU_0}{dz} / U_0 \right) ;$$

et on associe à (188) la condition de glissement linéarisée (181).

### 3.- Solution de l'équation (188), par la méthode des échelles multiples

En effet, l'équation différentielle (188) à coefficients constants, se traite par la méthode des échelles multiples, en introduisant les deux variables  $\bar{z}$  et  $X$  définies par :

$$(190) \quad \bar{z} = M_{00} z \quad \text{et} \quad X = \frac{1}{M_0} \varphi(\bar{z}; R; \rho) ;$$

et sont considérées comme indépendantes pour résoudre cette équation.

Ainsi, on obtient deux équations différentielles pour  $W^*(\bar{z}, X; M_{00})$  à l'ordre 0 et 1 en  $M_{00}$ .

A l'ordre 0 en  $M_{00}$ , on trouve :

$$(191) \quad \frac{\partial^2 W_0^*}{\partial X^2} + \frac{\frac{R(z)}{\cos^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2} \right]}}{[\varphi'(\bar{z})]^2} W_0^* = 0 .$$

Et à l'ordre 1 en  $M_{00}$ , on trouve aussi :

$$192) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} + \left( \frac{R(z)}{\cos^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2} \right]} \right) \sqrt{(C\varphi')^2} w_1^* = \\ & - \frac{1}{\left( \frac{d\varphi}{dz} \right)} \left[ z \frac{\partial w_0^*}{\partial z \partial x} + \left( B_0(z) + \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right.$$

### 3.1.- Variation rapide

La solution de (191) s'exprime toujours comme combinaison linéaire des deux solutions de la forme :

$$(193) \quad w_0^*(z, x) = A_0(z) e^x.$$

On déduit alors l'équation de dispersion dont la solution est :

$$(194) \quad \varphi^{-z}(z; R; P) = - \frac{R(z)}{\cos^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2} \right]}.$$

L'équation (194) met en évidence dans les solutions de (191) l'éventualité de la traversée de points tournants. La structure de ces points tournants est néanmoins différente de celle des points tournants obtenus en repère absolu : un point tournant classique est défini dans une équation de la forme :

$$(195) \quad \frac{d^2 w}{dz^2} + \Omega(z) w = \varepsilon f(z) \frac{dw}{dz},$$

comme un point tournant  $z_0$  où  $\Omega(z_0)$  s'annule et change de signe.

Dans le cas présent, et avec les notations (195),  $\Omega(z_0)$  change de signe en devenant infini.

Un point tournant dans l'équation (188) sera défini comme un point  $z_0$  annulant le dénominateur de (194). Ainsi, nous supposons qu'il existe un point tournant  $z_0$  de telle façon que :

$$(196) \quad \mu_0(z_0) = \frac{1}{k R_0} .$$

Supposons pour fixer les idées, que  $\mu_0(z)$  soit une fonction monotone croissante. Ceci entraîne que le régime oscillatoire n'a lieu que pour  $z \gg z_0$ .

Si l'on fait varier  $\alpha$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , avec  $N$  fixé, le point tournant varie de  $z_0$  à  $+\infty$ , et pour la valeur  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (ondes transversales) on n'a plus d'oscillations rapides. La disparition des oscillations peut même se produire pour une valeur de  $\alpha$  inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  si  $\mu_0(z)$  tend vers une valeur-limite  $\mu_{00}$  pour  $z \rightarrow +\infty$ . Cette valeur de  $\alpha$ , soit  $\alpha_0$ , est la racine de l'équation :

$$(197) \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{N R_0 \mu_{00}} .$$

Ainsi, de part et d'autre de ce point tournant  $z_0$ , la solution extérieure s'écrit :

$$(198) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_0^{*(+)} = A_0(z) e^{i \frac{\varphi_0}{M_0}} + B_0(z) e^{-i \frac{\varphi_0}{M_0}}, \text{ si } z > z_0; \\ \text{et} \\ W_0^{*(-)} = C_0(z) e^{\frac{\varphi_0}{M_0}} + D_0(z) e^{-\frac{\varphi_0}{M_0}}, \text{ si } z < z_0; \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$(199) \quad \varphi_0(z) = \int_0^z \left| \frac{R(z)}{\cos^2 \alpha \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2(z)} \right]} \right|^{1/2} dz .$$

### 3.2- Variation lente

Si maintenant, on introduit la solution (193) au niveau de (192), alors

$W_1^*$  satisfait l'équation différentielle suivante :

$$(200) \quad \mathcal{L}(W_1^*) = - \left( 1 / \frac{d\varphi}{dz} \right) \left[ \left( B_{00}(z) + \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) A_0(z) + z \frac{dA_0}{dz} \right] e^X ,$$

où  $\mathcal{L}(W_1^*)$  désigne un opérateur linéaire de  $W_1^*$  du terme gauche de l'équation (1982).

La résolution de cette dernière va faire apparaître des termes séculaires proportionnels à  $X e^X$ .

Ainsi, pour la régularité de  $W_0^*$ , il faut éliminer ces termes séculaires, et par suite on obtient l'équation qui nous fournit les variations de  $A_0(z)$  par rapport à la variable lente  $\bar{z}$ . Soit :

$$(201) \quad \frac{dA_0}{d\bar{z}} / A_0(z) = - \frac{1}{2} \left( B_{00}(z) + \frac{\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{\frac{d\varphi}{dz}} \right) ,$$

dont la solution est :

$$(202) \quad A_0(z) = \frac{a}{\left[ \varphi_0'(z) \right]^{1/2}} e^{-1/2 \int_0^z B_{00}^*(\bar{z}) d\bar{z}} ,$$

où l'on a posé :

$$(203) \quad B_{00}^*(z) = - \frac{1 + i l R_0 U_0}{1 - R^2 U_0^2 R_0^2} \frac{U_0'(z)}{U_0(z)} , \text{ qu'on peut écrire}$$

aussi :

$$(204) \quad B_{\infty}^*(z) = \frac{1}{2} \frac{f'(z)}{R(z)} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'} + i \frac{\ell R_0 \omega_0'}{R^2 \omega_0^2 R_0^2 - 1}.$$

Donc, la solution (202) peut s'écrire alors :

$$(205) \quad A_0(z) = \frac{a}{[\varphi_0'(z) \sqrt{R(z)}]^{1/2}} e^{-i/2 \int_0^z \frac{\ell R_0 \omega_0'}{R^2 \omega_0^2 R_0^2 - 1} dz}$$

finalement (205) prend la forme suivante (après quelques transformations) :

$$(206) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0(z) = \frac{a}{[\varphi_0'(z) \sqrt{R(z)}]^{1/2}} e^{i\theta(z)}, \\ \text{et avec : } \theta(z) = -\frac{\text{tg} \alpha}{4} \log \left| \frac{R \omega_0 R_0 - 1}{R \omega_0 R_0 + 1} \right|. \end{array} \right.$$

a est une constante d'intégration;

La relation (206) montre que la variation lente de  $W_0^*$  est composée d'une part d'une variation d'amplitude et d'autre part d'une oscillation lente représentée par  $\theta(z)$ .

Cette oscillation lente existe quelque soit le régime de propagation rapide (exponentiel ou oscillatoire) et ne disparaît que pour les ondes longitudinales ( $\ell=0$ ).

Par la suite, on va considérer seulement la propagation des ondes longitudinales.

#### 4.- Problème du point tournant dans le cas des ondes longitudinales

Comme ici, on s'intéresse au cas où  $\ell=0$ , alors on part de l'équation différentielle suivante :

$$(207) \quad \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2(z)} \right] \frac{d^2 W}{dz^2} + R(z) W(z) + M_\infty J_0(z) \frac{dW}{dz} = 0,$$

où l'on a posé :

$$(208) \quad J_0(z) = \frac{S_0'(z)}{S_0(z)} \left[ 1 - \frac{1}{R^2 R_0^2 U_0^2(z)} \right] - \frac{U_0'(z)}{U_0(z)}.$$

Ainsi nous étudions maintenant le voisinage d'un point  $z_0$  tel que :

$$(209) \quad U_0(z) = \frac{1}{R R_0} + (z - z_0) U_0'(z) + \dots$$

Maintenant, il nous faut caractériser l'épaisseur de la zone où le problème du point tournant est significatif à l'ordre  $M_\infty$  ; pour cela on considère la variable intérieure :

$$(210) \quad \hat{z} = M_\infty^\alpha (z - z_0) ;$$

où  $\alpha$  est déterminée d'après le principe de moindre dégénérescence.

On développe ensuite  $w(\hat{z}; M_\infty)$  de la façon suivante :

$$(211) \quad w(\hat{z}; M_\infty) = w_0(\hat{z}) + M_\infty^\beta w_1(\hat{z}) + \dots$$

On déduit alors l'équation différentielle pour  $w_0(\hat{z})$  :

$$(212) \quad \frac{d^2 w_0}{d\hat{z}^2} + \frac{H_0}{\hat{z}} M_\infty^{-(\alpha+2)} w_0 + \left[ \frac{S_0'(z_0)}{S_0(z_0)} M_\infty^{-\alpha} + \frac{1}{\hat{z}} \right] \frac{dw_0}{d\hat{z}} = 0;$$

Ainsi, on constate qu'il faut choisir  $\alpha$  telle que :

$$(213) \quad \alpha = -2$$

La forme simplifiée de (207) étant alors :

$$(214) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 w_0}{d\hat{z}^2} + \frac{H_0}{\hat{z}} w_0 + \frac{1}{2\hat{z}} \frac{dw_0}{d\hat{z}} = 0, \\ \text{avec :} \\ H_0 = \frac{h(z_0)}{2R_0 R \Delta'_0(z_0)}. \end{array} \right.$$

L'équation (214) se résout par le changement de variable :

$$(215) \quad \hat{z} = \tilde{z}^2$$

et s'écrit alors :

$$(216) \quad \frac{d^2 w_0}{d\tilde{z}^2} + I_0 w_0 = 0.$$

où l'on a posé :

$$(217) \quad I_0 = 4 H_0.$$

Comme  $\hat{z}$  peut-être positif ou négatif, (215) nécessite une détermination de la racine carrée :

$$(218) \quad \begin{cases} \hat{z} = |\hat{z}| e^{i\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \tilde{z} = \sqrt{|\hat{z}|} e^{i\theta/2}; \end{cases}$$

Supposons pour fixer les idées :  $I_0 > 0$ . La solution de (216) s'écrit :

$$(219) \quad w_0 = \tilde{p}_0 e^{i\omega \tilde{z}} + \tilde{p}_1 e^{-i\omega \tilde{z}}, \quad \omega = \sqrt{I_0}.$$

Et par conséquent si l'on réintroduit les variables physiques ( $\hat{z}$  ou  $z$ )

on a :

$$(220) \quad \begin{cases} \hat{z} < 0 : & w_0 = \tilde{p}_0 e^{-\frac{\omega}{M_0} \sqrt{z_0 - z}} + \tilde{p}_1 e^{\frac{\omega}{M_0} \sqrt{z_0 - z}} \\ \hat{z} > 0 : & w_0 = \tilde{p}_0 e^{i \frac{\omega}{M_0} \sqrt{z - z_0}} + \tilde{p}_1 e^{-i \frac{\omega}{M_0} \sqrt{z - z_0}}. \end{cases}$$

Les formules (220) se raccordent sans difficulté avec la solution dans la région "extérieure"  $|z - z_0| \geq 0(1)$ .

Cette solution a l'expression :

$$(221) \quad w_0^{*(+)} = \frac{1}{[\rho_0(z) |R(z)]^{1/2}} \left( a_0 e^{i \frac{\phi_0}{M_0}} + a_1 e^{-i \frac{\phi_0}{M_0}} \right) \text{ si } |z - z_0| > 0,$$

et une expression analogue (avec des exponentielles réelles) si  $|z - z_0| < 0$ , soit :

$$(222) \quad w_0^{*(-)} = \frac{1}{[\rho_0(z) |R(z)]^{1/2}} \left( b_0 e^{\frac{\phi_0}{M_0}} + b_1 e^{-\frac{\phi_0}{M_0}} \right).$$

Les relations (220) montrent en particulier comment les deux solutions extérieures sont liées l'une à l'autre de part et d'autre du point tournant.

Pour déterminer complètement les 4 constantes d'intégrations  $a_0, a_1, b_0$  et  $b_1$ , il nous faut une condition à l'infini. Par suite on peut déduire  $w(x, y, z, x; k)$  par la transformée inverse de Fourier. Et on pose pour des facilités de notation :

$$(223) \quad w(x, y, z, x; k) = I_1 + I_2,$$

où les  $I_i, i \in \{1, 2\}$ , sont les intégrales correspondants aux deux cas explicités précédemment.



(224) {

et

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[\rho_0(z) | R(z) ]^{1/2}} \left[ a_0 e^{iX} + a_1 e^{-iX} \right] e^{-ikx} dk,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[\rho_0(z) | R(z) ]^{1/2}} \left[ b_0 e^X + b_1 e^{-X} \right] e^{-ikx} dk.$$

### 5.- Propagation des ondes transversales

Ce qui correspond au cas où  $k=0$ . La méthode de calcul de  $w$  est la même que dans le cas précédent et fournit la solution :

$$(225) \quad W = \frac{e^{-i p R_0 \psi_0(z)/2}}{\sqrt{\rho_0(z)} \sqrt{R(z)}} \left( C e^X + D e^{-X} \right)$$

où  $X$  est relié à  $z$  par les relations :

$$(226) \quad X = \frac{1}{M_0} \varphi(z) ,$$

$$(227) \quad \varphi'^2(z) = h(z) \rho^2 R_0^2 \psi_0^2(z) .$$

(225) montre que les ondes transversales sont toujours amorties (dans le sens  $z$  croissant ou dans le sens  $z$  décroissant). La variation lente de ces ondes fait apparaître une oscillation de période  $T = O(M_0/R_0)$ . Mais cette oscillation n'a qu'un intérêt physique modéré, dans la mesure où elle affecte des ondes qui sont amorties exponentiellement. De plus, cette oscillation n'existe réellement que si l'écoulement est réellement cisailé, c'est-à-dire si  $\psi_0(z)$  varie avec l'altitude.

## VI. CONCLUSION

La prise en compte de la variation de température de l'atmosphère pour l'étude des ondes linéarisées, permet de mettre en évidence des phénomènes dont l'interaction avec des phénomènes non dissipatif comme l'influence de la force de Coriolis provoque des effets particuliers parce qu'ils se manifestent pour des longueurs d'ondes beaucoup plus importantes. Cette prise en compte a été faite en généralisant l'approximation de Boussinesq à un milieu adiabatique non borné.

En outre, la conséquence la plus apparente est l'oscillation lente de période  $O(R_0 M_0)^{-1}$  qui accompagne les ondes de gravité sous l'influence de la force de Coriolis.

Les résultats concernant l'éventualité des points tournants ne sont pas, pour leur part, directement comparables à ceux que l'on obtient lorsque l'on néglige la rotation : cela tient à la différence d'échelle de longueur horizontale caractéristique que l'on doit choisir dans les deux cas si l'on veut décrire des phénomènes réalistes.

Enfin, la méthode des échelles multiples s'avère être un outil très puissant, dans l'analyse des phénomènes liés aux propagations d'ondes. Pour les applications pratiques, cette méthode sera plus efficace en la complétant par des moyens numériques pour pouvoir traiter des problèmes précis collant encore de plus près à la réalité (par exemple des ondes de relief autour d'obstacles particuliers).

VII. BIBLIOGRAPHIE

- [1] MIHALJAN J., A Rigorous Exposition of the Boussinesq Approximation Applicable to a thin layer of Fluid (Astroph. J., vol. 136, 1962, p. 1126-1133).
- [2] ZEYTOUNIAN R. Kh., A Rigorous Derivation of the Equations of compressible viscous Fluid Motion with gravity at low Mach Number (Arch. Mech. Stos., vol. 26, 1974, p. 499-509).
- [3] ZEYTOUNIAN R. Kh., Int. J. Eng. Sc., vol. 23, 1985, p. 1239-1288.
- [4] NAYFEH A.H., Perturbation Methods, J. Wiley and Sons, New York, 1973.
- [5] P.A. BOIS, J. Méc., vol. 15, 1976, p. 781-811.
- [6] P.A. BOIS, J. Rech. Atm., vol. 16, 1982, p. 97-112.
- [7] P.A. BOIS, Bull. IRMA-Lille, Asymptotic Theory of Boussinesq waves in the Atmosphere, vol. VI - fasc. 4, n° 2, 1983, p. 25-33.
- [8] P.A. BOIS, J. Méc., vol. 18, n° 2, 1979, p. 405-408.
- [9] P.A. BOIS, J. Méc., vol. 18, n° 2, 1979, p. 414-415.

## RESUME

Le travail présenté a pour objet d'étudier l'influence de la force de Coriolis sur les ondes de gravité atmosphériques se propageant dans des courants cisailés.

On écrit les équations linéarisées du mouvement d'un fluide compressible pesant non dissipatif à faible nombre de Mach, dans le cadre asymptotique de l'approximation de Boussinesq.

Ces équations sont ensuite utilisées pour étudier la propagation des ondes par la méthode des échelles multiples.

On étudie l'influence de la variation de la fréquence de Brunt-Väisälä avec l'altitude, dont l'effet le plus important est de changer le mode de propagation des ondes dans la direction verticale.

Dans le cas du filtrage quasi-statique, on met en évidence des effets originaux dûs à la rotation de la terre sur la propagation des ondes stationnaires en présence d'une montagne. De plus, on montre l'existence de points tournants liés à la fois à la force de Coriolis et au cisaillement de l'écoulement.

## MOTS CLES

APPROXIMATION DE BOUSSINESQ  
PROBLEME DES POINTS TOURNANTS  
LINEARISATION  
INFLUENCE DE LA FORCE DE CORIOLIS  
TECHNIQUE DES DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDES  
ONDES DE GRAVITE ATMOSPHERIQUES  
METHODE DES ECHELLES MULTIPLES  
ONDES STATIONNAIRES EN PRESENCE D'UNE MONTAGNE.

