N° d'ordre : 1334

55376
1986
35

55376
1986
35

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{me} CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures

par

OUADGHIRI Anisse

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

UN MODELE DE SULLIVAN EN HOMOTOPIES MODEREES

Membres du Jury

Président	: D. LEHMANN (Professeur à l'Université de Lille I)
Rapporteur	: J.C. THOMAS (Maître de Conférence - Université de Lille I)
Examinateurs	H. BAUES (Professeur Max Planck Inst. Bonn) B. CENKL (Professeur Northeast Université de Boston) Y. FELIX (Chercheur F.N.R.S. de Louvain) D. TANRE (Maître de Conférence - Université de Lille I)
Membres Invités	S. HALPERIN (Professeur Université de Toronto) J.M. LEMAIRE (Professeur Université de Nice) H. SCHEERER (Professeur Université de Berlin W)

Soutenue le 19 juin 1986

0300120357

A mes parents

INTRODUCTION

Soit $\mathbb{Q}_p$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$, contenant les inverses de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à p. Un système d'anneaux R_*, est une suite croissante d'anneaux, $R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_k \subset \ldots$, telle que : $\mathbb{Q}_{\bar{k}} \subset R_k = \mathbb{Q}_{\hat{k}}$, où $\bar{k}$ désigne la partie entière de $\frac{k+3}{2}$, et $\hat{k}$ un entier dépendant de k.

Un espace topologique X, (r-1)-connexe ($r \geqslant 3$) est dit R_*-modéré (tame), si pour tout $k \geqslant 0$: $\pi_{r+k}(X)$ est un R_k-module.

W. Dwyer (1979) a établi une équivalence entre la catégorie homotopique des espaces R_*-modérés et une certaine catégorie d'algèbres de Lie différentielles. Il généralise ainsi le résultat fondamental de D. Quillen (1969) en homotopie rationnelle. En 1970, D. Sullivan a construit un modèle minimal en algèbres différentielles graduées commutatives (en abrégé a.d.g.c) sur $\mathbb{Q}$. Alors s'est posée la question d'associer aux espaces topologiques une a.d.g.c. sur $\mathbb{Z}$. Ce programme a été réalisé en 1980 par B. Cenkl et R. Porter qui ont établi un théorème de De Rham ainsi que l'existence d'un modèle modéré. En 1976, S. Halperin a développé la théorie algébrique du KS-modèle rationnel.

L'objet de notre travail est la construction algébrique d'un KS-modèle modéré. Pour cela, nous constatons d'abord, l'existence de plusieurs types de théories modérées en a.d.g.c., essentiellement :

- les théories modérées uniformes (cf. 4.2, 4.3 et 4.4)
- les théories modérées admissibles (cf. 4.5).

Pour chacune de ces théories, nous introduisons les T (reps. T(+1))-a.d.g.c, (cf. 1.3), qui reflètent la structure de tours de Postnikov de l'espace, et nous construisons un KS-modèle (cf. 2.3.2) pour une application entre deux T-a.d.g.c.. Pour toute théorie admissible, nous démontrons un théorème de rigidité (cf. 5.3) du modèle.

A partir de ces résultats, les auteurs de [B et al], établissent une équivalence entre la catégorie homotopique des espaces R_*-modérés où R_* est admissible (cf. 4.5.1) et la catégorie homotopique des T-a.d.g.c.

Le cadre naturel des théories modérées est celui des $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.. Une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. (A,d) est une $\mathbb{Z}$-a.d.g.c. (cf. 0.2) munie d'une filtration, dite en poids, compatible avec la graduation :

$$\mathbb{Z} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_q \subset \ldots \subset A$$

et vérifiant pour tout q et $q' \geqslant 0$:

i) A_q est un $\mathbb{Q}_q$-module

ii) $d_{|A_q} : A_q \to A_q$

iii) $A_q . A_{q'} \subset A_{q+q'}$.

Dans une théorie uniforme, pour $r \geqslant 3$, nous définissons la notion de modèle pour un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. augmentées (df. 1.1.11) de la manière suivante.

Soit $\eta : (B,d_B,\varepsilon) \to (A,d_A,\varepsilon')$ un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. augmentées. Un modèle de η est la donnée :

- d'une extension

$$(E) : (B,d_B) \xrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} (M,\bar{d})$$

où M est muni d'une filtration en sous-$\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.,

$$M^{(0)} \subset M^{(1)} \subset \ldots \subset M^{(k)} \subset \ldots \subset M.$$

- d'un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., $\rho : (B \otimes M,d) \to (A,d_A)$ tels que :

i) le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & (A,d_A) & \\
E : (B,d_B) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r] & (B \otimes M,d) \arrow[u, "\rho"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1"] & (M,\bar{d})
\end{tikzcd}$$

ii) pour tout entier k, et pour tout R_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{\underline{k-1}} ; W_k) \longrightarrow H^{r+\ell}(A_{\underline{k-1}} ; W_k)$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant k$

- un monomorphisme pour $\ell = k+1$.

Lorsque M est un KS-complexe (cf. 2.1.5), muni de la filtration en tours (cf. 2.1.10), nous dirons que (E,ρ) est un KS-modèle.

Notre premier résultat s'énonce alors :

<u>Théorème</u> I (2.5.2). Soit B une $T(+1)$-a.d.g.c. et A une T-a.d.g.c., libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-modules (cf. 1.1.1) et à cohomologie de type fini (cf. 2.5.1.). Soit $\eta : B \to A$ un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., tel que : pour tout R_o-module W_o,

$$\eta^* : H^r(B_1 ; W_o) \to H^r(A_1 ; W_o)$$

est un monomorphisme.
Alors η admet un KS-modèle.

Sous les hypotèses du théorème I, la condition (ii) dans la définition d'un KS-modèle, est équivalente à la condition :

(ii)' pour tout entier k, et pour tout R_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+\ell}(B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-1}} ; W_k) \to H^{r+\ell}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)$$

est : - un isomorphisme pour $\underline{\ell = k}$
- un monomorphisme pour $\ell = k+1$

Contrairement à ce qui se passe pour le modèle de Sullivan en homotopie rationnelle, cette condition n'est pas constructible. Le premier pas dans la construction du modèle est la réduction de la condition (ii)' à quatre conditions constructibles qui lui sont équivalentes. Ce résultat (lemme principal (2.4.10)), ainsi que la construction du modèle, font l'objet du chapitre II.
Au chapitre III, nous explicitons l'homotopie à gauche entre deux homomorphismes de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.
Au chapitre IV, nous définissons la notion de théorie modérée, et nous en donnons quatre exemples, où notre construction du modèle s'applique.
Finalement, au chapitre V, nous étudions les théories modérées admissibles, pour lesquelles, nous établissons le "lemme de relèvement" (cf. 5.2.), qui nous permet de démontrer le théorème de rigidité du modèle :

<u>Théorème II</u> (5.3). Si $(B,d_B) \to (B \otimes M,d) \to (M,\bar{d})$ et $(B,d_B) \to (B \otimes M',d') \to (M',\bar{d}')$ sont deux KS-modules d'un même morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c, il existe des B-morphismes :

$$\theta : (B \otimes M,d) \to (B \otimes M',d')$$

$$\text{et} \qquad \theta' : (B \otimes M',d') \to (B \otimes M,d) \quad \text{tels que :}$$

i) θ et θ' respectent les filtrations en tours de ces modèles :

$$\theta : (B \otimes M^{(k)}) \to (B \otimes M'^{(k)}), \qquad \theta' : (B \otimes M'^{(k)}) \to (B \otimes M^{(k)})$$

ii) $\theta' \circ \theta \simeq \mathrm{id}$.

Ceci nous permet alors, dans le cadre des théories admissibles, de définir le KS-modèle (unique à "équivalence faible" près, au sens de [B. et al]) d'un espace topologique. Quelques exemples sont traités en 5.4.

Remarquons finalement, que bien que les théories admissibles soient plus simples que les théories uniformes, nous avons donné la construction du modèle dans une théorie uniforme, car :

- Pour $r \geqslant 3$, la théorie la plus "performante" ($R_k = \dot{\mathbb{Q}}_{\underline{k}}$), n'est pas admissible.

- Cette construction présente toutes les techniques rencontrées lors de la construction du modèle dans le cadre des autres théories.

Pour terminer la présentation de ce travail, je dirai tout ce que celui-ci doit à J.C. THOMAS, dont les exigences et la patience m'ont accompagné tout au long de son élaboration. Je remercie H. SHEERER, E. VOGT et leur équipe pour l'accueil qu'ils m'ont réservé et les conversation stimulantes que nous avons eues en février 1986 à Berlin. L'intérêt que m'a porté D. TANRÉ a été pour moi un soutien constant. J'exprime ma reconnaissance à B. CENKL pour son attention, et à Y. FÉLIX pour m'avoir invité à exposer mes résultats au colloque de Louvain-la-Neuve.
Que H. BAUES, S. HALPERIN, D. LEHMANN et J.M. LEMAIRE, qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury, trouvent ici l'expression de ma gratitude.
Enfin, je remercie Madame C. EVRARD pour le soin et la compétence qu'elle a apportés à la frappe de ce texte, ainsi que le service de reprographie.

PLAN

0. RAPPELS.

0.1. Bifoncteur Tor (-,-)

0.2. $\mathbb{Z}$-adgc

0.3. $\mathbb{Q}_p$-modules.

0.1. Bifoncteur Tor(-,-).

R désignera un anneau principal.

Soit A un R-module ; on note Tor(A) le sous-module de torsion de A

$$\mathrm{Tor}(A) = \{m \in A / \exists r \in R \text{ et } rm = 0\}$$

Si A et B sont deux R-modules, le produit de torsion de A et de B, noté $\mathrm{Tor}^R(A,B)$, est un bifoncteur covariant. Il commute avec les sommes et les limites directes. La proposition suivante donne quelques propriétés établies dans [Sp.5.2.].

0.1.1. Proposition. Soit A et B deux R-modules

1) $\mathrm{Tor}^R(A,B) = \mathrm{Tor}^R(\mathrm{Tor}(A),\mathrm{Tor}(B))$

2) A ou B libre, $\mathrm{Tor}^R(A,B) = 0$

3) $\mathrm{Tor}^R(A,B) = \mathrm{Tor}^R(B,A)$

4) si $A = R/vR$, $\mathrm{Tor}^R(A,B) = \{b \in B / vb = 0\}$

0.1.2. Corollaire.

1) $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}) = 0$

2) $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_q) = \mathbb{Z}_{\mathrm{pgcd}(p,q)}$

0.1.3. Soit A et B deux R-modules. $\mathrm{Tor}^R(A,B)$ est caractérisé par la propriété suivante : si

$$0 \to C_1 \to C_0 \to A \to 0$$

est une résolution libre de A, alors on a la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathrm{Tor}^R(A,B) \to C_1 \otimes B \to C_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

0.1.4. Proposition [Sp.5.2.9.].

Soit $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$, une suite exacte courte de R-modules et soit A un R-module. On a la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathrm{Tor}^R(A,B') \to \mathrm{Tor}^R(A,B) \to \mathrm{Tor}^R(A,B'') \to A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0$$

0.1.5. Théorème des coefficients universels [Sp.5.2.8.].

Soit $C = \bigoplus_{i\geq 0} C^i$ un complexe de cochaînes libre sur R, et G un R-module. On a la suite exacte suivante :

$$0 \to H^q(C) \otimes G \to H^q(C\,;\,G) \to \mathrm{Tor}^R(H^{q+1}(C),G) \to 0$$

cette suite admet une scission, qui n'est pas naturelle pour les morphismes de complexes.

Rappel. $H^*(C;G)$ désigne l'homologie du complexe de cochaînes $(C \otimes C)$.

0.1.6. Exemple. Soit $C = \bigoplus_{i\geq 0} C^i$, un complexe de cochaînes, libre sur $\mathbb{Z}$. Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \to H^q(C) \otimes \mathbb{Z}_p \to H^q(C ; \mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^{q+1}(C),\mathbb{Z}_p) \to 0$$

Soit $[y] \in H^{q+1}(C)$ tel que $[y] \in \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^{q+1}(C),\mathbb{Z}_p)$.
D'après (0.1.1.4), $[py] = 0$.
Il existe donc $x \in C^q$ tel que $dx = py$; ce qui détermine une section σ de la suite exacte des coefficients universels :

$$\sigma : \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^{q+1}(C),\mathbb{Z}_p) \to H^q(C ; \mathbb{Z}_p)$$

$$[y] \to [x]$$

où x est tel que $dx = py$.

0.2. $\mathbb{Z}$-adgc.

* Une $\mathbb{Z}$-algèbre graduée commutative, en abrégé $\mathbb{Z}$-a.g.c, est une $\mathbb{Z}$-algèbre associative $\mathbb{N}$-graduée : $A = \sum_{p\geq 0} A^p$, telle que A^o contienne l'unité 1, et vérifie :

i) $ab = (-1)^{pq} ba$ si $a \in A^p$ et $b \in A^q$

ii) $aa = 0$ si $a \in A^p$ et p est impair.

On note $\sum_{p>0} A^p = A^+$.

* Une dérivation d'algèbre θ de degré p dans A, est une application linéaire de degré p,

$$\theta : A^q \to A^{p+q},$$

$$\text{telle que : } \theta(ab) = \theta(a)\cdot b + (-1)^{p.\deg a} a\cdot\theta(b)$$

* Une $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée commutative, en abrégé $\mathbb{Z}$-a.d.g.c., est une paire (A,d) où A est une $\mathbb{Z}$-a.g.c., et d une dérivation de degré 1, telle que $d^2 = 0$.
La cohomologie de (A,d) est l'a.g.c. $H(A)$, donnée par :

$$H(A) = \ker d/\mathrm{Im}\, d.$$

* Un homomorphisme $\phi : (A,d_A) \to (B,d_B)$ est un homomorphisme de degré 0, préservant l'unité 1, et commutant avec les différentielles : $\phi d_A = d_B \phi$.
Un tel homomorphisme induit un homomorphisme d'a.g.c.,

$$\phi^* : H(A) \to H(B).$$

Notons finalement que $(\phi\Psi)^* = \phi^*\Psi^*$.

0.3. $\mathbb{Q}_p$-modules.

0.3.1. Notations : Soit $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels.

Soit p un entier ; $\mathbb{Q}_p$ désignera le plus petit sous-anneau de $\mathbb{Q}$, contenant les inverses de tous les nombres premiers, inférieurs ou égaux à p : $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{p}\right]$.

BU LILLE

$$\mathbb{Q}_o = \mathbb{Q}_1 = \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$\mathbb{Q}_3 = \mathbb{Q}_4 = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right]\dots.$$

Il est facile de vérifier que pour tout entier p, $\mathbb{Q}_p$ est un anneau principal. Tout $\mathbb{Q}_p$-module R de type fini est donc, [Sp.0.5.14.], somme directe d'un $\mathbb{Q}_p$-module libre L et d'un $\mathbb{Q}_p$-module de torsion T décomposable en :

$$T = (\mathbb{Q}_p/\alpha_1\,\mathbb{Q}_p) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Q}_p/\alpha_n\,\mathbb{Q}_p)$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{Q}_p$ et α_i divise α_j si $i \leq j$.

Les éléments $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, sont uniques modulo la multiplication par des éléments inversibles de $\mathbb{Q}_p$. Avec le rang du module, ils caractérisent le module à isomorphisme près.

0.3.2. Définition. Un entier sera dit $\mathbb{Q}_p$-entier, si sa décomposition en facteurs premiers ne contient aucun élément inversible dans $\mathbb{Q}_p$.

0.3.3. Proposition. Soit α un $\mathbb{Q}_p$-entier. Alors :

$$\mathbb{Q}_p/\alpha\,\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}/\alpha\,\mathbb{Z}.$$

Preuve : l'homomorphisme de groupes abéliens induit par l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$:

$$\psi : \mathbb{Z}/\alpha\,\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p/\alpha\,\mathbb{Q}_p$$

est :

- injectif : en effet, soit $x \in \mathbb{Z}$ et $\bar{x}$ sa classe dans $\mathbb{Z}/\alpha\,\mathbb{Z}$, tel que, $\psi(\bar{x}) = 0$.

Il existe donc $\frac{a}{b} \in Q_p$ avec $(a,b) = 1$ tel que :

$$x = \frac{a}{b}\,\alpha.$$

Il s'ensuit que b divise α ; puisque α est $\mathbb{Q}_p$-entier, b est égal à 1, et $x = a\alpha$ d'où $\bar{x} = 0$.

- surjectif : Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_p$ avec $(a,b) = 1$ et $\overline{(\frac{a}{b})}$ sa classe dans $\mathbb{Q}_p/\alpha\,\mathbb{Q}_p$. b est premier avec α, puisqu'il est inversible dans $\mathbb{Q}_p$. Il existe u,v, éléments de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$bu + v\alpha = 1$$

d'où : $\frac{a}{b} = au + \frac{av}{b}\alpha$ et dans $\mathbb{Q}_p/\alpha\,\mathbb{Q}_p$, on a : $(\overline{\frac{a}{b}}) = \overline{\overline{au}}$ et on a alors

$$\psi(\overline{\overline{au}}) = (\overline{\frac{a}{b}}) \quad \blacksquare$$

I. $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.

1.1. $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.

1.1.1. Définitions et conventions

1) Un $\mathbb{Q}_*$-module X est un $\mathbb{Z}$-module muni d'une filtration :

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_q \subset \ldots \subset X$$

tel que pour tout q, X_q soit un $\mathbb{Q}_q$-module.

2) Soit M (resp. N) un $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{Q}_q$)-module. Soit $\ell = \inf(p,q)$ et $L = \sup(p,q)$. On note $(M \otimes N)$ le $\mathbb{Q}_L$-module (et c'est ainsi qu'il sera toujours considéré) :

$$M \otimes N = M \underset{\mathbb{Q}_\ell}{\otimes} N$$

3) Si X est un $\mathbb{Q}_*$-module, X_q sera toujours considéré comme $\mathbb{Q}_q$-module.

4) Si X et Y sont deux $\mathbb{Q}_*$-modules, on note $(X \otimes Y)$ le $\mathbb{Q}_*$-module défini par :

$$(X \otimes Y)_q = \sum_{r+s=q} (X_r \otimes X_s) \otimes \mathbb{Q}_q$$

5) Le gradué associé à un $\mathbb{Q}_*$-module X, noté gr X, est défini par :

$$\operatorname{gr} X = \bigoplus_{q \geq 0} X^q \qquad \text{où} \qquad X^q = X_q \big/ (X_{q-1} \otimes \mathbb{Q}_q) \ .$$

6) Un $\mathbb{Q}_*$-module X est dit libre si pour tout q : X_q et X^q sont des $\mathbb{Q}_q$-modules libres.

1.1.2. Exemple. On pose pour tout q : $X_q = \mathbb{Q}_q$.

Cela définit le $\mathbb{Q}_*$-module trivial, noté $\mathbb{Q}_*$. Son gradué associé est réduit à une seule composante :

$$(\operatorname{gr} \mathbb{Q}_*) = (\mathbb{Q}_*)^o = \mathbb{Z}.$$

1.1.3. Définitions et notations :

1) Un $\mathbb{Q}_*$-module gradué X est un $\mathbb{Z}$-module gradué, $X = \bigoplus_{p \geq 0} X^p$, muni pour tout p d'une filtration :

$$X_0^p \subset X_1^p \subset \ldots \subset X_q^p \subset \ldots \subset X^p$$

faisant de X^p un $\mathbb{Q}_*$-module, et tel que :

$$X_0^0 = \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad X_0^p = 0 \qquad \text{pour} \quad p \neq 0.$$

2) Nous noterons X_q, le $\mathbb{Q}_q$-<u>module</u> gradué : $X_q = \bigoplus_{p\geq 0} X_q^p$.

Cela définit sur X une filtration : $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_q \subset \ldots X$, qui en fait un $\mathbb{Q}_*$-module. $\operatorname{gr} X$ est alors muni d'une bigraduation :

$$\operatorname{gr} X = \bigoplus_{p,q\geq 0} X^{p,q} \qquad \text{où} \qquad X^{p,q} = X_q^p \Big/ (X_{q-1}^p \otimes \mathbb{Q}_q)$$

3) Un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-modules gradués, $f : X \to Y$, est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules gradués vérifiant : $f(X_q) \subset Y_q$. La restriction de f à X_q, $f_q : X_q \to Y_q$, est alors $\mathbb{Q}_q$-linéaire.

1.1.4. <u>Notation</u>. Si $x \in X^p$, on note $|x| = p$ <u>son degré</u>. Si $x \in X_q$ et $x \notin X_{q-1}$, on note $||x|| = q$ <u>son poids</u>.

1.1.5. <u>Définition</u>. <u>Une $\mathbb{Q}_*$-algèbre graduée commutative</u>, en abrégé $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. est une $\mathbb{Z}$-a.g.c., $A = \bigoplus_{p\geq 0} A^p$, munie pour tout p d'une filtration, qui en fait un $\mathbb{Q}_*$-module gradué, et qui vérifie : $A_q^* \cdot A_{q'}^* \subset A_{q+q'}^*$.

Le bigradué associé à A, $\operatorname{gr} A$, est alors muni canoniquement d'une multiplication :

$$A^{*,q} \cdot A^{*,q'} \to A^{*,q+q'}.$$

1.1.6. <u>Définition</u>. Un <u>$\mathbb{Q}_*$-module différentiel gradué</u> X, est un $\mathbb{Q}_*$-module gradué, muni d'une différentielle d de degré $(+1)$, respectant la filtration, telle que

$$d : X_q \to X_q, \quad \text{est} \quad \mathbb{Q}_q\text{-linéaire.}$$

1.1.7. <u>Notation</u>. Dans toute la suite, si W désigne un $\mathbb{Q}_q$-module, nous noterons $H^*(X_q ; W)$ l'homologie du complexe de cochaînes $(X_q \otimes W)$.

1.1.8. <u>Définition.</u> Une $\mathbb{Q}_*$-algèbre différentielle graduée commutative, en abrégé $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., est une $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. munie d'une différentielle de degré (+1), respectant la filtration, et qui est une dérivation d'algèbres. (c'est en particulier un $\mathbb{Q}_*$-module différentiel)

1.1.9. <u>Définitions</u> :

* Un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-modules différentiels gradués est un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-modules gradués commutant aux différentielles.

* Un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. est à la fois un morphisme de $\mathbb{Z}$-a.d.g.c. et de $\mathbb{Q}_*$-modules différentiels gradués.

1.1.10. Soit $f : A \to B$, un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. Il induit pour tout q, un morphisme de $\mathbb{Q}_q$-modules gradués :

$$(f_q)^* : H^*(A_q) \to H^*(B_q),$$

et pour tout $\mathbb{Q}_q$-module, W_q un morphisme de $\mathbb{Q}_q$-modules gradués :

$$(f_q)^*_{W_q} : H^*(A_q \ ; W_q) \to H^*(B_q \ ; W_q)$$

Dans la suite, nous nous permettrons de noter ces applications par $(f_q)^*$ ou f^*, si aucune confusion n'est possible.

D'autre part, f induit un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. :

$$f^* : H^*(A) \to H^*(B).$$

1.1.11. Définitions. Le $\mathbb{Q}_*$-module $\mathbb{Q}_*$, a une structure triviale de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.

* une augmentation de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., $\varepsilon : A \to \mathbb{Q}_*$, est un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. L'idéal d'augmentation de (A,ε) est le noyau $\ker \varepsilon$, noté $\bar{A}$.

* un morphisme $f : (A,\varepsilon) \to (A',\varepsilon')$, de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. augmentées, est un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. vérifiant : $f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f$.

1.1.12. Définition. Soit un entier $r \geq 1$.

* Un $\mathbb{Q}_*$-module gradué A est dit r-connexe si pour tout q :

i) $A_q^o = \mathbb{Q}_q$.

ii) pour tout p : $0 < p \leq r$: $A_q^p = 0$.

* Un $\mathbb{Q}_*$-module gradué différentiel A est dit r-c-connexe si :

i) $H(A)$ en tant que $\mathbb{Q}_*$-module est r-connexe

ii) pour tout q : $H^{r+1}(A_q^*)$ est un $\mathbb{Q}_q$-module libre.

1.1.13. Définition. Soit A et B deux $\mathbb{Q}_*$-a.g.c.. Le produit tensoriel de A et de B, noté $(A \otimes B)$, est la $\mathbb{Q}_*$-a.g.c., dont la filtration est définie par :

$$(A \otimes B)_q^p = \sum_{\substack{r+s=q \\ r'+s'=p}} (A_r^{r'} \otimes A_s^{s'}) \otimes \mathbb{Q}_q .$$

On vérifie que le produit tensoriel ainsi construit, correspond à la somme dans la catégorie des $\mathbb{Q}_*$-a.g.c.. Le produit tensoriel de deux $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. est la $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. produit tensoriel ainsi définie, munie de la "différentielle produit" classique.

1.2. Algèbre de Cenkl et Porter [C.P.I.3.]

1.2.1. Soit I^N le cube standard de $\mathbb{R}^N$

$$I^N = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \ / \ 0 \leq x_i \leq 1\}$$

une p-forme de poids q sur I^N est une forme différentielle :

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots\ldots x_{i_j}^{\alpha_j} x_{k_1}^{\beta_1} dx_{k_1} \ldots x_{k_p}^{\beta_p} dx_{k_p}$$

où $\{i_1 ; \ldots ; i_j\}$ et $\{k_1 ; \ldots ; k_p\}$ sont des sous-ensembles disjoints de $\{1 ; 2 ; \ldots ; N\}$ et où :

$$q = \sup\{\alpha_1 ; \ldots ; \alpha_j ; \beta_1 + 1 ; \ldots ; \beta_p + 1\}$$

Notons $T_q^p(I^N)$ le $\mathbb{Q}_q$-module libre engendré par les p-formes de poids inférieur ou égal à q.

La différentielle usuelle sur les formes s'étend en une $\mathbb{Q}_q$-différentielle : $d : T_q^p(I^N) \to T_q^{p+1}(I^N)$, et la multiplication des formes s'étend en une multiplication

$$T_{q_1}^{p_1}(I^N) \otimes T_{q_2}^{p_2}(I^N) \xrightarrow{\Lambda} T_{q_1+q_2}^{p_1+p_2}(I^N).$$

$T(I^N)$ est munie d'une structure de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., libre en tant que $\mathbb{Q}_*$-module, puisque pour tout q, $T_q^p(I^N)$ est un $\mathbb{Q}_q$-module libre, et que $T^{p,q}(I^N)$ est le $\mathbb{Q}_q$-module libre engendré par les formes de poids égal à q. [cf. 1.1.1.]

A partir de cette $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. standard, Cenkl et Porter construisent une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. de formes différentielles pour tout complexe simplicial X, muni d'uns subdivision en cubes non dégénérés.

1.2.2. <u>Remarque</u>. Tout simplexe standard admet une subdivision en cubes non dégénérés. Par exemple :

1.2.3. <u>Définition</u>. ω est une <u>p-forme de X de poids inférieur ou égal à</u> q, si ω associe à chaque N-cube F de X, un élément $\omega(F)$, p-forme sur I^N de poids inférieur ou égal à q, tel que pour toute face J de F, $\omega(J)$ soit la restriction de $\omega(F)$ à la face J.

$T_q^p(X)$ est le $\mathbb{Q}_q$-module libre engendré par les p-formes de poids inférieur ou égal à q.

$T(X)$ est une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., libre en tant que $\mathbb{Q}_*$-module.

Nous donnons les théorèmes suivants, sous une forme plus générale que celle de [C.P.I] (mais qui s'en déduit facilement), et tels qu'ils paraissent dans [C.P.II.1.6.2].

1.2.4. Théorème [C.P.I.4.1.]

Pour $q \geq 1$, l'intégration des formes, $I_q : T_q^*(X) \to C^*(X ; \mathbb{Q}_q)$, induit pour tout $\mathbb{Q}_q$-module W_q, un isomorphisme :

$$(I_q)^*_{W_q} : H^*(T_q^*(X) ; W_q) \longrightarrow H^*(X ; W_q) .$$

Tout $\mathbb{Q}_q$-module W_q étant un $\mathbb{Q}_{q-1}$-module, on en déduit :

1.2.5. Corollaire. Pour $q \geq 1$, l'inclusion $i : T_{q-1}^*(X) \to T_q^*(X)$ induit pour tout $\mathbb{Q}_q$-module W_q, un isomorphisme :

$$(i)^*_{W_q} : H^*(T_{q-1}^*(X) ; W_q) \longrightarrow H^*(T_q^*(X) ; W_q)$$

1.2.6. Théorème [C.P.I.4.2.]

Soit W_1, W_2 et W_3 des $\mathbb{Q}_{q_1}$, $\mathbb{Q}_{q_2}$ et $\mathbb{Q}_{q_3}$-modules respectivement, où $q_i \geq 1$ et $q_1+q_2 \leq q_3$. Et soit $\rho : W_1 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} W_2 \to W_3$ une application de $\mathbb{Z}$-modules. Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
H^{p_1}(T^*_{q_1}(X) ; W_1) \otimes H^{p_2}(T^*_{q_2}(X) ; W_2) & \xrightarrow{\quad\Lambda\quad} & H^{p_1+p_2}(T^*_{q_3}(X) ; W_3) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle (I_{q_1})^*_{W_1} \otimes (I_{q_2})^*_{W_2}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle (I_{q_3})^*_{W_3}} \\
H^{p_1}(X ; W_1) \otimes H^{p_2}(X ; W_2) & \xrightarrow{\quad\cup\quad} & H^{p_1+p_2}(X ; W_3)
\end{array}$$

commute, où Λ est l'application induite par le produit des formes et par l'application ρ, et où $\cup$ est le cup produit induit par ρ.

1.3. T-a.d.g.c. et T(+1)-a.d.g.c.

De même que la cohomologie de toute $\mathbb{Z}$-a.d.g.c. n'est pas l'algèbre de cohomologie d'un espace topologique (apparition des opérations de Steenrod, par exemple), toute $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. n'est pas géométrique. Nous introduisons ici les T-a.d.g.c. (T pour tame), qui reflètent la structure de tours de Postnikov de l'espace.

1.3.1. Notations. Soit k un entier positif ; nous noterons dans toute la suite $\bar{k} = \left[\frac{k+3}{2}\right]$ où $[-]$ désigne la partie entière.

> Soit R_* une suite de sous-anneaux : $R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_k$ ..., telle que pour tout $k \geq 0$: $\mathbb{Q}_{\bar{k}} \subset R_k = \mathbb{Q}_{\hat{k}}$ où $\hat{k}$ est un entier.
> R_* est appelé système d'anneaux. Soit r un entier supérieur ou égal à 3 ($r \geq 3$). Nous supposerons dans toute la suite, la paire (r,R_*) fixée.

1.3.2. Définition. Soit (A,d) un $\mathbb{Q}_*$-module différentiel $(r-1)$-c-connexe. (A,d) vérifie la condition T_k^n, si pour tout R_{k+1}-module W_{k+1}, l'application induite par l'inclusion $i : \underline{A}_{k-1} \to \underline{A}_k$:

$$i^* : H^{r+\ell}(\underline{A}^*_{k-1} ; W_{k+1}) \to H^{r+\ell}(\underline{A}_k ; W_{k+1})$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$

1.3.3. Définition. Soit (A,d) un $\mathbb{Q}_*$-module différentiel $(r-1)$-c-connexe. (A,d) est un T_k-module (resp. un $T_k(+1)$-module) si pour tout $p \leqslant k$, il vérifie la condition T_p^p (resp. T_p^{p+1}).

Explicitement :

* (A,d) est un T_k-module si pour tout $p \leqslant k$, et pour tout R_{p+1}-module W_{p+1} : $$i^* : H^{r+\ell}(\underline{A}_{p-1} ; W_{p+1}) \to H^{r+\ell}(\underline{A}_p ; W_{p+1})$$ est un isomorphisme pour $\ell \leqslant p$, et un monomorphisme pour $\ell = p+1$.
* (A,d) est un $T_k(+1)$-module si : pour tout $p \leqslant k$, et pour tout R_{p+1}-module W_{p+1} : $$i^* : H^{r+\ell}(\underline{A}_{p-1} ; W_{p+1}) \to H^{r+\ell}(\underline{A}_p ; W_{p+1})$$ est un isomorphisme pour $\ell \leqslant p+1$, et un monomorphisme pour $\ell = p+2$.

1.3.4. Remarques :

1) Un $T_k(+1)$-module est un T_k-module.

2) la réciproque est fausse.

1.3.5. Définitions.

1) (A,d) est un T-module (resp. T(+1)-module) si c'est un T_k-module (resp. $T_k(+1)$-module) pour tout k.

2) Une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. est une T_k (resp. $T_k(+1)$, T, T(+1))-a.d.g.c. si c'est un T_k (resp. $T_k(+1)$, T, T(+1))-module.

1.3.6. Remarques.

1) l'algèbre de Cenkl et Porter est une T(+1)-a.d.g.c., propriété que l'on établit facilement à partir de [1.2.4.].

2) Une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. $(r-1)$-c-connexe n'est pas nécessairement une T-a.d.g.c. Soit (A,d) une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. $(r-1)$ connexe vérifiant :

BU LILLE

$$A_1^r = 0 \quad \text{et} \quad A_2^r = \langle x\rangle\cdot\mathbb{Q}_2 \quad \text{avec} \quad dx = 0.$$

En prenant $k = 1$, on a : $\overline{k-1} = 1$, $\bar{k} = 2$

$$H^r(A_1^* \; ; R_2) = 0$$

$$\text{et} \quad H^r(A_2^* \; ; R_2) = [x]\cdot R_2$$

(A,d) n'est évidemment pas une T_1-a.d.g.c.

1.3.7. <u>Proposition. Un $\mathbb{Q}_*$-module libre</u> A <u>vérifie la condition</u> T_k^k (<u>resp.</u> T_k^{k+1}) <u>si et seulement si, pour tout</u> R_{k+1}-<u>module</u> W_{k+1}, <u>on a</u> : <u>pour tout</u> $\ell \leqslant k$ (resp. $\ell \leqslant k+1$) :

$$H^{r+\ell}(A^{*,\bar{k}} \; ; W_{k+1}) = 0.$$

<u>Preuve</u> :On considère la suite exacte de $\mathbb{Q}_{\bar{k}}$-modules :

$$0 \to A^*_{\overline{k-1}} \otimes \mathbb{Q}_{\bar{k}} \to A^*_{\bar{k}} \to A^{*,\bar{k}} \to 0$$

A étant $\mathbb{Q}_*$-libre, il s'ensuit par définition que ces trois modules sont libres, et on a alors, d'après (0.1.4), la suite exacte scindée :

$$0 \to A^*_{\overline{k-1}} \otimes W \to A^*_{\bar{k}} \otimes W \to A^{*,\bar{k}} \otimes W \to 0$$

et cela pour tout $\mathbb{Q}_{\bar{k}}$-module W. En particulier si W est un R_{k+1}-module.
L'examen de la suite exacte longue d'homologie associée à cette suite permet alors de conclure. ■

1.3.8. <u>Corollaire. Un $\mathbb{Q}_*$-module libre</u> A <u>est un T_k-module (resp. $T_k(+1)$-module) si et seulement si pour tout</u> $p < k$, <u>on a : pour tout</u> R_{p+1}-<u>module</u> W_{p+1} <u>et pour tout</u> $\ell \leqslant p$ (<u>resp.</u> $\ell \leqslant p+1$) :

$$H^{r+\ell}(A^{*,\bar{p}} \; ; W_{p+1}) = 0$$

1.3.9. <u>Théorème de Künneth</u> : <u>Soit</u> A <u>et</u> B <u>deux T_k-a.d.g.c. libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-modules. L'inclusion de</u> $\mathbb{Q}_{\overline{k-1}}$-<u>modules gradués</u> : $i : (A \otimes B)_{\overline{k-1}} \to A_{\overline{k-1}} \otimes B_{\overline{k-1}}$, <u>induit pour tout</u> R_k-<u>module</u> W_k, <u>l'homomorphisme</u> :

$$i^* : H^{r+\ell}((A \otimes B)_{\overline{k-1}} \; ; W_k) \to H^{r+\ell}(A_{\overline{k-1}} \otimes B_{\overline{k-1}} \; ; W_k)$$

<u>qui est un isomorphisme pour</u> $\ell \leqslant k$ <u>et un monomorphisme pour</u> $\ell = k+1$.

<u>Preuve</u> : Soit W_k un R_k-module. Considérons la suite exacte :

$$0 \to (A \otimes B)_{\overline{k-1}} \to A_{\overline{k-1}} \otimes B_{\overline{k-1}} \to I \to 0$$

où $I = \sum\limits_{\substack{q+q' > \overline{k-1} \\ q,q' \leqslant \overline{k-1}}} (A^{*,q} \otimes B^{*,q'} \otimes \mathbb{Q}_{\overline{k-1}})$, est un $\mathbb{Q}_{\overline{k-1}}$-module libre. On a alors la suite exacte :

$$(1.3.7) \qquad 0 \to (A \otimes B)_{\overline{k-1}} \otimes W_k \to A_{\overline{k-1}} \otimes B_{\overline{k-1}} \otimes W_k \to I \otimes W_k \to 0$$

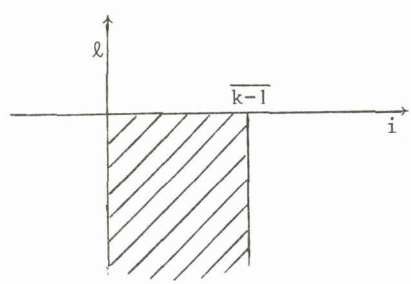
Filtrons $(I \otimes W_k)$ de la manière suivante :

$$F_i(I \otimes W_k) = \sum_{q+q' \leqslant i} (A^{*,q} \otimes B^{*,q'} \otimes W_k)$$

on obtient une suite spectrale d'homologie dont le terme E^o est donné par :

$$E^o_{i,-\ell} = \sum_{q+q'=i} (A^{*,q} \otimes B^{*,q'} \otimes W_k)^{\ell}$$

Cette suite spectrale a son support dans la partie hachurée du schéma suivant :



BU LILLE

Le terme E^1 est donné par :

$$\boxed{E^1_{i,-\ell} = \sum_{q+q'=i} H^{\ell}(A^{*,q} \; ; \; H^*(B^{*,q'} \; ; \; W_k))}$$

$*$ Si $q = 0$ ou $q' = 0$, il est évident que :

$$H^{\ell}(A^{*,q} \; ; \; H^*(B^{*,q'} \; ; \; W_k)) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell \leqslant k+1$$

$*$ Si $q \neq 0$ et $q' \neq 0$, on a d'après (1.3.7) :

$$H^*(A^{\ell',q} \; ; \; H^*(B^{*,q'} \; ; \; W_k)) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell' \leqslant u+r \qquad \text{où } q = \bar{u}$$

$$\text{et} \qquad H^{\ell''}(B^{*,q'} \; ; \; W_k) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell'' \leqslant v+r \qquad \text{où } q' = \bar{v}$$

et on vérifie facilement que :

$$H^{\ell}(A^{*,q} \; ; \; H^*(B^{*,q'} \; ; \; W_k)) = 0 \qquad \text{pour } \ell \leqslant k+1.$$

En conclusion, $E^1_{i,-\ell} = 0$ pour $\ell \leqslant k+1$, d'où $H\,(I \otimes W_k) = 0$, pour $\ell \leqslant k+1$.
L'examen de la suite exacte longue d'homologie associée à (1.3.7) permet de conclure. ■

1.3.10. *Corollaire. Soit* A *et* B *deux T-a.d.g.c libres en tant que* $\mathbb{Q}_*$*-modules. Pour tout* k *et pour tout* R_k*-module* W_k*, l'inclusion naturelle*

$$i \; : \; (A \otimes B)_{\overline{k-1}} \to A_{\overline{k-1}} \otimes B_{\overline{k-1}} \quad ,$$

induit un homomorphisme :

$$i^* \; : \; H^{r+\ell}((A \otimes B)_{\overline{k-1}} \; ; \; W_k) \to \left[H^*(A_{\overline{k-1}} \otimes B_{\overline{k-1}} \; ; \; W_k)\right]^{r+\ell}$$

qui est un isomorphisme pour $\ell \leqslant k$, *et un monomorphisme pour* $\ell = k+1$.

II. *MODELES.*

2.1. KS-complexes.

2.1.1. $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. librement engendrée par un $\mathbb{Z}$-module bigradué.

Soit $X = \bigoplus_{p,q>0} X^{p,q}$ un $\mathbb{Z}$-module libre bigradué.

La $\mathbb{Z}$-a.g.c. librement engendrée par X, notée ΛX est alors naturellement munie d'une bigraduation induite par celle de X.

$$\Lambda X = \bigoplus_{p,q\geq 0} (\Lambda X)^{p,q} \quad \text{telle que :} \quad (\Lambda X)^{0,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } q \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \qquad (\Lambda X)^{p,0} = 0 \qquad \text{pour } p \neq 0.$$

Notons : $(\Lambda X)_m = \bigoplus_{q\leq m} (\Lambda X)^{*,q}$ et posons :

$$(\Lambda_* X)_m = (\Lambda X)_m \otimes \mathbb{Q}_m .$$

Ceci définit une $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. notée $\Lambda_* X$, libre en tant que $\mathbb{Q}_*$-module.

L'a.g.c. $\Lambda_* X$ vérifie la propriété universelle suivante : étant donné un homomorphisme $\mathbb{Z}$-linéaire, $\varphi : X \to A$, où A est une $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. et tel que φ vérifie : $\varphi(X^{*,q}) \subset A^*_q$, alors φ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.g.c., $\hat{\varphi}$, rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \\ \Lambda_* X \arrow[ur, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Lambda_* X$ est un objet libre dans la catégorie des $\mathbb{Q}_*$-a.g.c.. Par abus de langage, et puisque nous ne considérerons pas d'autres objets libres, nous dirons dans la suite que $\Lambda_* X$ est la $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. libre engendrée par X.

2.1.2. Soit maintenant A une $\mathbb{Q}_*$-a.g.c. augmentée par ε.

Soit $\bar{A} = \ker \varepsilon$ et $QA = \bar{A}/\bar{A}\cdot\bar{A}$. La filtration de A induit sur QA une filtration :

$$(QA)_q = \bar{A}_q \Big/ \bigoplus_{i+j=q} (\bar{A}_i \cdot \bar{A}_j \otimes \mathbb{Q}_q)$$

QA est alors un $\mathbb{Q}_*$-module gradué dont le bigradué associé est noté :

$$GA = \bigoplus_{\substack{p\geq 0 \\ q>0}} Q^{p,q} A = gr(QA) \qquad \text{(cf 1.1.3.)}$$

GA est le terme E_o de la suite spectrale associée à la filtration naturelle de QA, en tant que $\mathbb{Q}_*$-module. Les termes E_1 et E_∞ de cette suite spectrale sont :

$$E_1 = H(GA, Gd) \qquad \text{et} \qquad E_\infty = H(QA, Qd)$$

2.1.3. Si on considère $A = \Lambda_* X$, l'a.g.c. librement engendrée par le Z-module libre bigradué $X = \bigoplus_{p,q>0} X^{p,q}$, A est canoniquement augmentée, et munie d'une filtration suivant la longueur des mots en X, définie par :

$$(\Lambda_*^{\geq p} X)_m = (\Lambda^{\geq p} X)_m \otimes \mathbb{Q}_m .$$

Alors : $(QA)_p = (\Lambda_*^{\geq 1} X \big/ \Lambda_*^{\geq 2} X)_p \cong X_p \otimes \mathbb{Q}_p$; où $X_p = \bigoplus_{m \leq p} X^{*,m}$.

$$(QA)^{p,q} = X^{p,q} \otimes \mathbb{Q}_q$$

$$Q(d) : X^{p,q} \otimes \mathbb{Q}_q \to X_q^{p+1} \otimes \mathbb{Q}_q$$

$$G(d) : X^{p,q} \otimes \mathbb{Q}_q \to X^{p+1,q} \otimes \mathbb{Q}_q .$$

2.1.4. Notons η la projection:

$$GA \cap \ker(Gd) \longrightarrow H(GA, Gd)$$

Alors $\eta^{-1}[\mathrm{Tor}(H(GA,Gd))]$ est un $\mathbb{Q}_*$-sous-module gradué de $GA \cap \ker(Gd)$.

2.1.5. Définition. Une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. (r-1)-connexe $(\Lambda_* X,d)$, libre en tant qu'a.g.c au sens de (2.1.1) est un KS-complexe s'il existe une décomposition en somme directe : $X = Y \oplus Z$, telle que :

i) $Y^{p,q} \otimes \mathbb{Q}_q = (\eta^{-1}[\mathrm{Tor}(H(GA,Gd))])^{p,q}$

ii) $X^s = 0$ si $s < r$ et $X^{r+k} = Y^{r+k,\overline{k-2}} \oplus Z^{r+k,\overline{k-1}}$

iii) Il existe une base bihomogène de X, respectant cette décomposition, et un ordre I sur les générateurs de Y^{r+k+1}, tel que : pour tout $y_i \in Y^{r+k+1}$, il existe $z_i \in Z^{r+k}$, tel que :

$$Qd(z_i) = f_i\, y_i + \sum_{j<i} f_{i,j}\, y_j$$

où les $f_{i,j}$ et f_i sont des éléments de $\mathbb{Q}_{\overline{k-1}}$, et où $f_i \neq 0$.

2.1.6. Remarque. Pour un KS-complexe, on a :

$$Qd = Gd$$

Et plus précisément :

$$Q(d)(Y^{r+k,\overline{k-2}}) = 0$$
$$Q(d)(Z^{r+k,\overline{k-1}}) \subset Y^{r+k+1,\overline{k-1}} .$$

En particulier, la suite spectrale décrite en (2.1.2) dégénère au niveau E_1.

2.1.7. Lemme. Soit $A = (\Lambda_* X)$ un KS-complexe, et Ω un élément décomposable de A. Si $|\Omega| \leqslant k+r+1$ alors $||\Omega|| \leqslant \overline{k-1}$.

Preuve : Il suffit de démontrer la propriété pour un monôme $(x_1 \ldots x_n)$ où $n \geqslant 2$. Supposons donc que $|x_1 \ldots x_n| \leqslant k+r+1$. Ecrivons $|x_i| = k_i + r$. De :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) + nr \leqslant k+r+1$$

On déduit :

$$|| x_1 \ldots x_n || = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{k_i - 1} \leqslant \overline{k-1}$$

en utilisant le fait que $r \geqslant 3$. ■

2.1.8. Remarque. Pour un KS-complexe, tout élément de degré inférieur ou égal à (k+r) est de poids inférieur ou égal à $\overline{k-1}$ (par définition pour les générateurs, et par le lemme (2.1.7) pour les éléments décomposables).
Il s'ensuit que : $A^{\leqslant k+r}_{\overline{k-1}} \otimes \mathbb{Q}_{\bar{k}} = A^{\leqslant k+r}_{\bar{k}}$, et donc, pour tout $k \geqslant 0$: $A^{\leqslant k+r,\bar{k}} = 0$.

D'après (1.3.8), nous obtenons :

2.1.9. <u>Proposition</u>. <u>Tout KS-complexe est une T-a.d.g.c.</u>

2.1.10. <u>Filtration en tours d'un KS-complexe</u>.

Soit $A = \Lambda_* X$ un KS-complexe. Notons $A^{(k)} = \Lambda_*(X^{r+k} \oplus Y^{r+k+1})$. D'après (2.1.6), $A^{(k)}$ est une sous-$\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. de A. C'est évidemment un KS-complexe, de même que pour $A/A^{(k)}$. La $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. $A^{(k)}$ est en fait la plus petite sous $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. de A, libre en tant que $\mathbb{Q}_*$-module, engendrée par les <u>générateurs</u> de degré inférieur ou égal à (r+k).

On a les inclusions suivantes qui peuvent être strictes :

$$\Lambda_*(X^{\leqslant r+k}) \subset A^{(k)} \subset \Lambda_*(X^{\leqslant r+k+1}).$$

<u>La filtration en tours de</u> A est la filtration en sous $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. libres :

$$A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset \ldots \subset A^{(k)} \subset \ldots \subset A$$

Pour tout k, la $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. $A^{(k)}$ est une T-a.d.g.c ; elle vérifie donc pour tout p, la condition T_p^p. Nous allons établir une propriété supplémentaire pour cette $\mathbb{Q}_*$-algèbre.

2.1.11. <u>Propriété</u>. $A^{(k)}$ <u>vérifie la condition</u> T_p^{p+1}, <u>pour tout</u> $p \geqslant k$.

<u>Preuve</u> : Soit $p \geqslant k$. Considérons $(A^{(k)})^{\leqslant r+p+1,\bar{p}}$. Tout générateur de $A^{(k)}$ est de poids inférieure ou égal à $\overline{k-1}$, donc inférieur ou égal à $\overline{p-1}$. Soit Ω un élément décomposable de $A^{(k)}$ de degré inférieur ou égal à (r+p+1). D'après (2.1.7.), Ω est de poids inférieur ou égal à $\overline{p-1}$.

On en conclut que : $(A^{(k)})^{\leqslant r+p+1,\bar{p}} = 0$ et la condition de la proposition (1.3.7) est alors trivialement réalisée. ■

2.2. <u>KS-EXTENSIONS</u>.

2.2.1. <u>Définition</u>. Soit (B, d_B, ε) une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. augmentée (r-1)-c-connexe. Une KS-extension est une suite de morphismes de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. :

$$(E) : (B, d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M, d) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} (M, \bar{d})$$

où M est un KS-complexe.

Dans ce cas, on dira que $(B \otimes M, d)$ est un B-KS-complexe.

2.2.2. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $(B, d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M, d) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} (M, \bar{d})$ <u>une suite de morphismes de</u> $\mathbb{Q}_*$-<u>a.d.g.c.</u>, (r-1)-<u>c-connexes</u>.

<u>Si</u> (B, d_B) <u>et</u> $(M, \bar{d})$ <u>sont des</u> T_k-<u>a.d.g.c., libres en tant que</u> $\mathbb{Q}_*$-<u>modules, alors</u> $(B \otimes M, d)$ <u>est une</u> T_k-<u>a.d.g.c.</u>

Preuve : Remarquons tout d'abord que si B et M sont libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-modules, il en est de même de $(B \otimes M)$. Il s'agit donc de démontrer d'après (1.3.8) que : pour tout $p \leqslant k$ et pour tout R_{p+1}-module, W_{p+1}, on a :

$$H^{\ell}((B \otimes M)^{*,\bar{p}} \; ; W_{p+1}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell \leqslant p+1.$$

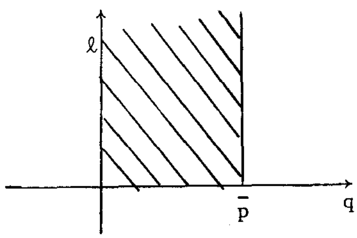
Notons I le complexe différentiel $(B \otimes M)^{*,\bar{p}} \otimes W_{p+1}$, et filtrons I de la manière suivante : (filtration suivant le poids basique).

$$F_q(I) = \sum_{q' \geqslant q} B^{*,q'} \otimes M^{*,\bar{p}-q'} \otimes W_{p+1}.$$

Le terme E_o, de la suite spectrale associée à cette filtration est :

$$E_o^{q,\ell} = (B^{*,q} \otimes M^{*,p-q} \otimes W_{p+1})^{\ell}$$

Cette suite spectrale de cohomologie a son support dans la partie hachurée du schéma suivant :



D'autre part :

$$\boxed{E_1^{q,\ell} = H^{\ell}(B^{*,q} \; ; \; H^*(M^{*,\bar{p}-q} \; ; W_{p+1}))}$$

* (B,d_B) étant une T_k-a.d.g.c, pour tout $q \leqslant k$, on a d'après (1.3.7) :

$$H^*(B^{\ell',q} \; ; H^*(M^{*,\bar{p}-q} \; ; W_{p+1})) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell' \leqslant u+r \qquad \text{avec} \quad \bar{u} = q.$$

u pouvant être choisi comme un entier pair si $q \neq 0$. Et de même pour $(M,\bar{d})$, pour tout q tel que $(\bar{p}-q) \leqslant k$ et pour tout W_{p+1}, R_{p+1}-module, nous avons :

$$H^{\ell''}(M^{*,\bar{p}-q} \; ; W_{p+1}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell'' \leqslant v+r \qquad \text{avec} \quad \bar{v} = \bar{p}-q$$

v pouvant être choisi comme un entier pair si $q \neq \bar{p}$.

* Ecrivons $E_1^{q,\ell} = \bigoplus_{\ell'+\ell''=\ell} (H(B^{\ell',q} \; ; H^{\ell''}(M^{*,\bar{p}-q} \; ; W_{p+1}))$. Il est évident que si $q = 0$ ou $q = \bar{p}$, on a :

$$E_1^{q,\ell} = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell \leqslant p+r.$$

Si $q \neq 0$ et $q \neq \bar{p}$, on a :

$$E_1^{q,\ell} = 0 \quad \text{si} \quad \ell = \ell'+\ell'' \leqslant u+r+v+r.$$

Etant donné le choix de u et de v, on montre facilement que :

$$p+r \leqslant u+r+v+r \quad .$$

D'où $E_1^{q,\ell} = 0$ si $\ell \leqslant p+r$, dans tous les cas. ■

2.2.3. <u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (M,\bar{d})$ <u>une suite de morphismes de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-modules et</u> $(r-1)$ <u>c-connexes, où</u> ε <u>est l'augmentation de</u> B.
<u>Si</u> (B,d_B) <u>et</u> $(M,\bar{d})$ <u>sont des T-a.d.g.c., il en est de même pour</u> $(B \otimes M,d)$.

2.2.4. <u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (M,\bar{d})$ <u>une KS-extension</u>.
<u>Si</u> (B,d_B) <u>est une T-a.d.g.c.,</u> $\mathbb{Q}_*$<u>-libre en tant que</u> $\mathbb{Q}_*$<u>-module, il en est de même pour</u> $(B \otimes M,d)$.

<u>Preuve</u> : Claire d'après (2.1.9) et (2.2.3). ■

Nous aurons besoin par la suite, d'une autre propriété des KS-extensions. Comme elle est de même nature que la proposition (2.2.4), nous préférons l'insérer dans ce chapitre.

2.2.5. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (M,\bar{d})$ <u>une suite de morphismes de T-a.d.g.c., libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-modules, où</u> ε <u>est l'augmentation de</u> B.
<u>Si</u> B <u>est une</u> $T_k(+1)$<u>-a.d.g.c. et si</u> M <u>vérifie la condition</u> T_k^{k+1}, <u>alors</u> $(B \otimes M)$ <u>vérifie la condition</u> T_k^{k+1}.

<u>Preuve</u> : La démonstration est la réplique exacte de celle du lemme (2.2.2), limitée au cas $p = k$, et "rehaussée" d'un degré. ■

2.2.6. <u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (M,\bar{d})$ <u>une KS-extension, où</u> B <u>est une T(+1)-a.d.g.c., libre en tant que</u> $\mathbb{Q}_*$<u>-module</u>.
<u>Alors, pour tout</u> $k \geqslant 0$, <u>et pour tout</u> $p \geqslant k$, <u>on a :</u>

$$B \otimes M^{(k)} \quad \underline{\text{vérifie la condition}} \quad T_p^{p+1} \quad .$$

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence immédiate de (2.1.11) et (2.2.5). ■

2.3. <u>KS-MODELE D'UN HOMOMORPHISME DE $\mathbb{Q}_*$-A.D.G.C.</u>

2.3.1. Soit $\eta : (B,d_B) \to (A,d_A)$ un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., $(r-1)$ c-connexes. Soit $E : (B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (M,\bar{d})$ une extension où M est muni d'une filtration en sous $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., $M^{(0)} \subset \ldots \subset M^{(k)} \subset \ldots \subset M$ et $\rho : (B \otimes M,d) \to (A,d_A)$ un homomorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. tel que : $\rho i = \eta$. En particulier, pour tout k, nous avons le diagramme commutatif :

BU LILLE

$$\begin{tikzcd}
 & (A,d_A) & \\
(B,d_B) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, hook, "i"] & (B \otimes M^{(k)},d) \arrow[u, "\rho^{(k)}"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"] & (M,\bar{d})
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est une extension $E^{(k)}$.(Dans la suite, nous omettrons souvent l'indice (k) afin de ne pas alourdir les notations.)

2.3.2. <u>Définitions</u>.

1) ρ vérifie la condition Π_k^n, si pour tout R_k-module W_k,

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-1}} \,;\, W_k) \to H^{r+\ell}(A_{\overline{k-1}} \,;\, W_k)$$

est : - un isomorphisme si $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme si $\ell = n+1$.

2) ρ vérifie la condition Π_k s'il vérifie la condition Π_p^p pour tout $p \leqslant k$.

On dit alors que (E,ρ) est un k-modèle de η. En résumé :

(E,ρ) est un k-modèle de η si : pour tout $p \leqslant k$, et pour tout R_p-module W_p : $\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(p)})_{\overline{p-1}} \,;\, W_p) \to H^{r+\ell}(A_{\overline{p-1}} \,;\, W_p)$ est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant p$ - un monomorphisme pour $\ell = p+1$.

3) (E,ρ) est un <u>modèle</u> de η si la condition Π_k est vérifiée pour tout k.

4) Un k-modèle (resp. un modèle) de l'inclusion canonique $(\mathbb{Q}_*,0) \hookrightarrow (A,d_A)$ est un k-modèle (resp. un modèle) de la $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. (A,d_A).

5) Si M est un KS-complexe, et si muni de sa filtration <u>naturelle en tours</u>, (cf. 2.1.10), (E , ρ) est un k-modèle (resp. modèle), nous dirons que (E,ρ) est un k-KS-modèle (resp. KS-modèle).

2.3.3. <u>Remarque</u>. La condition Π_k^n utilise la filtration de M en sous $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.

Afin de démontrer l'existence d'un KS-modèle, pour une certaine catégorie de morphismes (Théorème 2.5.2), nous devons établir quelques résultats préliminaires.

2.3.4. <u>Proposition</u>. <u>Si</u> (A,d_A) <u>et</u> (B,d_B) <u>sont des T-a.d.g.c., les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

a) ρ <u>est un k-KS-modèle.</u>

b) ρ <u>est un (k-1)-KS-modèle ; et pour tout R_k-module</u> W_k,

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-1}} ; W_k) \longrightarrow H^{r+\ell}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)$$

<u>est</u> : - <u>un isomorphisme pour $\ell = k$</u>

- <u>un monomorphisme pour</u> $\ell = k+1$.

<u>Preuve</u> : Sans hypothèses sur A et B, a) entraîne b). Etablissons la réciproque.

Supposons que ρ est un (k-1)-modèle. Pour montrer que ρ est un k-KS-modèle, il suffit alors de montrer que ρ vérifie la condition Π_k^k.

M étant un KS-complexe, on a (cf. 2.1.8.) :

$$\left(B \otimes M^{(k-1)}\right)^{\leqslant k+r-1}_{\overline{k-2}} = \left(B \otimes M^{(k)}\right)^{\leqslant k+r-1}_{\overline{k-2}} .$$

Pour tout R_k-module W_k, on a le diagramme commutatif :

(2.3.5)
$$\begin{tikzcd}
H^{r+\ell}[(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-2}} ; W_k] \arrow[d, equal] \arrow[drr, "(\rho^*)_1", "\cong"'] & & \\
H^{r+\ell}[(B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-2}} ; W_k] \arrow[rr, "(\rho^*)_2"] \arrow[d, "i_1^*"', "\cong"] & & H^{r+\ell}[A_{\overline{k-2}} ; W_k] \arrow[d, "i_2^*"', "\cong"] \\
H^{r+\ell}[(B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-1}} ; W_k)] \arrow[rr, "(\rho^*)_3"] & & H^{r+\ell}[A_{\overline{k-1}} ; W_k]
\end{tikzcd}$$

Si $\ell \leqslant k-1$,

i_2^* est un isomorphisme puisque A est une T-a.d.g.c. B étant une T-a.d.g.c, il en est de même de $B \otimes M^{(k)}$ d'après (2.1.9) et (2.2.3). Il s'ensuit que i_1^* est un isomorphisme. $(\rho^*)_1$ est un isomorphisme puisque ρ est un (k-1)-modèle. Il s'ensuit que $(\rho^*)_2$ et $(\rho^*)_3$ sont des isomorphismes. On a donc, pour tout $\ell \leqslant k-1$ et pour tout R_k-module W_k, l'isomorphisme :

$$\rho^* : H^{r+\ell}[(B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-1}} ; W_k] \to H^{r+\ell}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)$$

Si on suppose, en outre que cette flèche est un isomorphisme pour $\ell = k$ et un monomorphisme pour $\ell = k+1$, et ceci pour tout R_k-module W_k, alors ρ vérifie la condition Π_k^k. ■

2.3.6. Proposition. Supposons A et B libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-modules. Si B est une $T(+1)$-a.d.g.c., A une T-a.d.g.c., et si ρ est un (k-1)-KS-modèle, alors, pour tout R_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+k}\left[(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; W_k\right] \to H^{r+k}\left[A_{\overline{k-1}} ; W_k\right]$$

est un monomorphisme.

Preuve : On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^{r+k}\left[(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-2}} ; W_k\right] \arrow[r, "(\rho)_1^*"] \arrow[d, "i_1^*"', "\cong"] & H^{r+k}(A_{\overline{k-2}} ; W_k) \arrow[d, "i_2^*"] \\
H^{r+k}\left[(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; W_k\right] \arrow[r, "(\rho^*)_2"] & H^{r+k}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)
\end{tikzcd} \tag{2.3.7}$$

où : i_1^* est un isomorphisme puisque $B \otimes M^{(k-1)}$ vérifie la condition T_{k-1}^k d'après (2.2.6).

i_2^* est un monomorphisme puisque A est une T-a.d.g.c. et

$(\rho)_1^*$ est un monomorphisme puisque ρ est un (k-1)-modèle, d'où la proposition. ■

2.3.8. Commentaire. Les propositions (2.3.4) et (2.3.6) indiquent que lorsqu'on a réalisé un (k-1)-KS-modèle, et donc en particulier, réalisé la condition Π_{k-1}^{k-1}, portant sur le poids $\overline{k-2}$, on hérite de cette réalisation au poids $\overline{k-1}$; et cela, évidemment pour tout R_k-module W_k.

2.4. Lemme principal. Le processus de construction du KS-modèle du théorème (2.5.2), se fera suivant une récurrence ; on supposera avoir construit un (k-1)-KS-modèle, et pour avoir un k-modèle, il suffira d'après (2.3.4) de réaliser la condition suivante :

> Pour tout R_k-module W_k,
>
> $$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{\overline{k-1}} ; W_k) \to H^{r+\ell}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)$$
>
> est : - un isomorphisme pour $\ell = k$
>
> - un monomorphisme pour $\ell = k+1$.

Le but de ce lemme est d'établir des conditions plus "maniables", équivalentes à ces deux conditions.

Pour tout ce paragraphe, soit $R = \mathbb{Q}_p$ fixé et $\rho : M \to A$, un morphisme de R-modules gradués libres différentiels à cohomologie de type fini (en chaque degré, la cohomologie est finiment engendrée en tant que R-module).

2.4.1. <u>Lemme d'isomorphisme</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>pour tout R-module</u> W :

$$\rho^* : H^{r+k}(M\ ;\ W) \to H^{r+k}(A\ ;\ W) \quad \underline{\text{est un isomorphisme}}.$$

b) i) $\rho^* : H^{r+k}(M) \to H^{r+k}(A)$ <u>est un isomorphisme</u>

ii) $(\mathrm{Tor}\ \rho)^* : \mathrm{Tor}(H^{r+k+1}(M)) \to \mathrm{Tor}(H^{r+k+1}(A))$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r+k}(M)\otimes W \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "\rho^*\otimes 1"] & H^{r+k}(M\ ;\ W) \arrow[r, "j_M"] \arrow[d, "(\rho)^*_W"] & \mathrm{Tor}^R(H^{r+k+1}(M),W) \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{Tor}\ \rho)^*_W"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{r+k}(A)\otimes W \arrow[r, "i_A"] & H^{r+k}(A\ ;\ W) \arrow[r, "j_A"] & \mathrm{Tor}^R(H^{r+k+1}(A),W) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

* <u>b) entraîne a)</u> : si i) et ii) sont réalisées, on a un isomorphisme pour les flèches extrêmes puisque :

- d'une part, la tensorisation par W préserve l'isomorphisme.
- d'autre part, le foncteur $\mathrm{Tor}(-,W)$ ne dépend que des sous-modules de torsion.

Le lemme des cinq permet alors de conclure.

* <u>a) entraîne b)</u> : Il est clair que i) est réalisée (il suffit de prendre $W = R$).

i) étant réalisée, pour tout R-module W, $\rho^* \otimes 1$, du diagramme précédent, est un isomorphisme. $(\rho)^*_W$ étant un isomorphisme, on en déduit : pour tout R-module W, $(\mathrm{Tor}\ \rho)^*_W$ est un isomorphisme.

Ecrivons $\mathrm{Tor}(H^{r+k+1}(M)) = R/\alpha_1 R \oplus \dots \oplus R/\alpha_1 R$

et $\mathrm{Tor}(H^{r+k+1}(A)) = R/\beta_1 R \oplus \dots \oplus R/\beta_m R$.

Soit $\gamma = \mathrm{ppcm}\ (\alpha_1;\alpha_2;\ \dots\ ;\alpha_n;\ \beta_1;\ \dots\ ;\beta_m)$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}^R(H^{r+k+1}(M),R/\gamma R) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\cong"', "(\mathrm{Tor}\ \rho)^*_{R/\gamma R}"] & \mathrm{Tor}(H^{r+k+1}(M)) \arrow[d, "(\mathrm{Tor}\ \rho)^*"] \\
\mathrm{Tor}^R(H^{r+k+1}(A),R/\gamma R) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Tor}(H^{r+k+1}(A))
\end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit ii). ■

2.4.2. <u>Lemme de monomorphisme</u> : <u>conditions et notations.</u>

Nous nous plaçons dans les conditions du lemme précédent : ρ^* induit un isomorphisme en degré $(r+k)$, et ceci à coefficients dans tout R-module W.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{cccccc} 0 \to H^{r+k+1}(M)\otimes W & \xrightarrow{i_M} & H^{r+k+1}(M\ ;\ W) & \longrightarrow & Tor^R(H^{r+k+2}(M),W) & \to 0 \\ \Big\downarrow \rho^*\otimes 1 & & \Big\downarrow \rho^*_W & & & \\ 0 \to H^{r+k+1}(A)\otimes W & \xrightarrow{i_A} & H^{r+k+1}(A\ ;\ W) & & & \end{array} \tag{2.4.3}$$

Supposons que $\rho^* \otimes 1$ soit injective ; on a alors le diagramme :

$$\begin{array}{cccccc} 0 \to H^{r+k+1}(M)\otimes W & \xrightarrow{i_M} & H^{r+k+1}(M;W) & \to & Tor^R(H^{r+k+2}(M);W) & \longrightarrow 0 \\ \Big\| & & \Big\downarrow \rho^*_W & & \Big\downarrow \bar{\rho}^*_W & \\ 0 \to H^{r+k+1}(M)\otimes W & \xrightarrow{i_A\circ(\rho^*\otimes 1)} & H^{r+k+1}(A;W) & \to & E^{r+k+1}_W = H^{r+k+1}(A;W)\Big/H^{r+k+1}(M)\otimes W & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{2.4.4}$$

(2.4.5) <u>Proposition</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>pour tout R-module</u> W,

$\rho^* : H^{r+k+1}(M\ ;\ W) \to H^{r+k+1}(A\ ;\ W)$ <u>est un monomorphisme</u>.

b) i) $\rho^* : H^{r+k+1}(M) \to H^{r+k+1}(A)$ <u>est un monomorphisme</u>.

ii) <u>le conoyau de l'application ci-dessus est sans torsion</u>.

iii) <u>pour tout R-module</u> W,

$$\bar{\rho}^*_W : Tor^R(H^{r+k+2}(M)\ ;\ W) \to E^{r+k+1}_W,$$ <u>est un monomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : a) entraîne b).

Si ρ^*_W du diagramme (2.4.3) est un monomorphisme pour tout R-module W, c'est en particulier vrai pour $W = R$, ce qui donne i). On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \to H^{r+k+1}(M) \xrightarrow{\rho^*} H^{r+k+1}(A) \to \text{coker}\ \rho^* \to 0.$$

D'après (0.1.4), (2.4.1. b) ii), la suite précédente donne la suite exacte suivante :

$$0 \to Tor(\text{coker}\ \rho^*\ ;\ W) \to H^{r+k+1}(M)\otimes W \xrightarrow{\rho^*\otimes 1} H^{r+k+1}(A)\otimes W \to \text{coker}(\rho^*)\otimes W \to 0$$

Dans le diagramme (2.4.3), le monomorphisme de ρ^*_W, entraîne celui de $\rho^* \otimes 1$.
On en déduit que coker (ρ^*) est sans torsion (condition ii).

il est alors possible d'écrire le diagramme (2.4.4), et une simple "chasse" dans le diagramme permet d'obtenir iii).

<u>b) entraîne a)</u> : Réciproquement, si on a les conditions i) et ii), nous pouvons écrire le diagramme (2.4.4), et si on a iii), une simple "chasse" permet de conclure que ρ^*_W est injective. ■

2.4.6. Ecrivons $\mathrm{Tor}(H^{r+k+2}(M)) = R/\alpha_1 R \oplus \ldots \oplus R/\alpha_n R$ où les α_i sont des R-entiers tels que : α_i divise α_j si $i \leqslant j$.

2.4.7. <u>Proposition</u>. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Pour tout R-module</u> W, $\bar{\rho}^*_W : \mathrm{Tor}^R(H^{r+k+2}(M)\ ;\ W) \to E_W^{r+k+1}$, <u>est un monomorphisme</u>.

b) $\bar{\rho}^*_{R/\alpha_n R} : \mathrm{Tor}(H^{r+k+2}(M), R/\alpha_n R) \to E^{r+k+1}_{R/\alpha_n R}$, <u>est un monomorphisme</u>.

<u>Preuve</u> : a) entraîne b) : Evident.

b) entraîne a). Supposons que $\bar{\rho}^*_{R/\alpha_n R} : \mathrm{Tor}^R(H^{r+k+2}(M), R/\alpha_n R) \to E^{r+k+1}_{R/\alpha_n R}$ soit injective.

Il suffit de démontrer a) pour tout R-module, $W = R/p\,R$.

Si p est premier avec α_n, $\mathrm{Tor}^R(H^{r+k+2}(M),\ R/\alpha_n R) = 0$, et la condition est trivialement réalisée.

pour p non premier avec α_n, nous allons distinguer deux cas :

<u>1er cas</u> : p est diviseur de α_n

$$\alpha_n = qp.$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & E^k_{R/p R} \arrow[rr] & & E^k_{R/\alpha_n R} \\
\mathrm{Tor}(H^{r+k+2}(M);R/p R) \arrow[ur, "\bar{\rho}^*_{R/pR}"] \arrow[rr, "\overline{id\otimes q}"] & & \mathrm{Tor}(H^{r+k+2}(M);R/\alpha_n R) \arrow[ur] & \\
 & H^{r+k+1}(A;R/p R) \arrow[uu] \arrow[rr] & & H^{r+k+1}(A;R/\alpha_n R) \arrow[uu] \\
H^{r+k+2}(M\ ;\ R/p R) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "id\otimes q"] & & H^{r+k+1}(M\ ;\ R/\alpha_n R) \arrow[uu, "j_2"] \arrow[ur] & \\
 & H^{r+k+1}(M) \otimes R/p R \arrow[uu] \arrow[rr] & & H^{r+k+1}(M)\otimes R/\alpha_n R \arrow[uu] \\
H^{r+k+2}(M) \otimes R/p R \arrow[uu] \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "id\otimes q"] & & H^{r+k+2}(M) \otimes R/\alpha_n R \arrow[uu] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Soit $[x] \in \mathrm{Tor}(H^{r+k+2}(M)\ ;\ R/p\,R)$. On en déduit qu'il existe y tel que $dy = px$.
On définit ainsi une section de j_1 par $\sigma : [x] \to [y]$, (voir 0.1.6).

$$(id \otimes k)[y] = [qy].$$

On a alors : $d(qy) = q\,px = \alpha_n x$ d'où $j_2[qy] = [x]$ et

$$(j_2 \circ (id \otimes q) \circ \sigma)[x] = [x]$$

Donc : $\overline{id \otimes q} = id.$
Soit maintenant $[x] \in \ker \bar{\rho}^{*}_{R/p\,R}$, cela implique :

$$[x] \in \ker \bar{\rho}^{*}_{R/\alpha_n R}, \quad \text{d'où} \quad [x] = 0.$$

<u>2ème cas</u> : p quelconque, non premier avec α_n. Soit $q = \mathrm{pgcd}(p,\alpha_n) \neq 1$.
Ecrivons :

$$p = p'q$$
$$\alpha_n = \alpha' q.$$

Soit $[x] \in \mathrm{Tor}(H^{r+k+2}(M)\ ,\ R/p\,R)$. Donc : $[qx] = 0$. Il existe donc y tel que $dy = qx$ et on a alors

$$d(p'y) = px.$$

Si $[x] \in \ker \bar{\rho}^{*}_{R/p\,R}$, $\rho(p'y) = p\Omega + dt + \rho(c)$ où Ω et t sont des éléments de A, et c un cycle de A.

$$\rho(c) = p'(\rho(y) - q\Omega) - dt$$

d'où

$$\rho^{*}[c] = p'[\rho(y) - q\Omega]$$

Le coker de $(\rho^{*})^{r+k+1}$ étant sans torsion, il s'ensuit que : il existe $c' \in H^{r+k+1}(M)$ tel que : $\rho(c') = \rho(y) - q\Omega + dt'$

$$\rho(y) = q\Omega - dt' + \rho(c')$$

d'où $\rho^{*}_{R/q\,R}[x] = 0$. q étant un diviseur de α_n, il s'ensuit que $[x] = 0$, d'après le 1er cas. ■

2.4.9. Résumant les résultats de (2.4.1), (2.4.5) et (2.4.7), les conditions suivantes sont équivalentes :

* pour tout R-module W :

$$\rho^{*} : H^{r+k}(M\ ;\ W) \to H^{r+k}(A\ ;\ W) \text{ est un isomorphisme.}$$

$$\rho^{*} : H^{r+k+1}(M\ ;\ W) \to H^{r+k+1}(A\ ;\ W) \text{ est un monomorphisme.}$$

* i) $\rho^{*} : H^{r+k}(M) \to H^{r+k}(A)$ est un isomorphisme
  ii) $\mathrm{Tor}\,\rho^{*}$: Torsion $H^{r+k+1}(M) \to$ torsion $H^{r+k+1}(A)$ est un isomorphisme
  iii) $\rho^{*} : H^{r+k+1}(M) \to H^{r+k+1}(A)$ est un monomorphisme.
  iv) le cocker de l'application ci-dessus est sans torsion

v) $\bar{\rho}^{*}_{R/\alpha_n R} : \mathrm{Tor}^R(H^{r+k+2}(M), R/\alpha_n R) \to E^{r+k+1}_{R/\alpha_n R}$ est un monomorphisme.

En remarquant que iv) jointe à iii) entraînent ii), nous pouvons énoncer :

2.4.10. Lemme principal. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout R-module W :

$$\rho^* : H^{r+k}(M ; W) \to H^{r+k}(A ; W) \text{ est un isomorphisme}$$

$$\rho^* : H^{r+k+1}(M ; W) \to H^{r+k+1}(A ; W) \text{ est un monomorphisme.}$$

ii) a) $\rho^* : H^{r+k+1}(M) \to H^{r+k+1}(A)$ est un monomorphisme

b) $\rho^* : H^{r+k}(M) \to H^{r+k}(A)$ est un isomorphisme

c) $\mathrm{Tor}(\mathrm{coker}(\rho^* : H^{r+k+1}(M) \to H^{r+k+1}(A))) = 0$

d) $\bar{\rho}^{*}_{R/\alpha_n R} : \mathrm{Tor}^R(H^{r+k+2}(M), R/\alpha_n R) \to E^{r+k+1}_{R/\alpha_n R}$, est un monomorphisme.

2.5. CONSTRUCTION DU KS-MODELE D'UN MORPHISME DE $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.

2.5.1. Définition. Une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. A est dite à cohomologie de type fini si pour tout $p \geq 0$: $H^*(A^*_p)$ est un $\mathbb{Q}_p$-module gradué de type fini.

2.5.2. Théorème. Soit B une T(+1)-a.d.g.c. et A une T-a.d.g.c. libres en tant que $\mathbb{Q}_*$-module, et à cohomologie de type fini. Soit $\eta : B \to A$ un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. tel que : pour tout R_o-module W_o,

$$\eta^*_{W_o} : H^r(B_1 ; W_o) \to H^r(A_1 ; W_o)$$

est un monomorphisme.

Alors η admet un KS-modèle.

2.5.3. Plan de la construction.

La construction du modèle se fera suivant une récurrence, de la manière suivante :

On suppose avoir construit un (k-1)-modèle:

$$\rho : (B \otimes M^{(k-1)}, d) \to (A, d_A)$$

où $M^{(k-1)}$ est un KS-complexe finiment engendré.

Il s'agira alors de construire $M^{(k)}$, puis de prolonger ρ à $B \otimes M^{(k)}$ de telle manière qu'il satisfasse la condition Π^k_k. La proposition (2.3.4) nous assure alors qu'il suffit de réaliser une condition d'isomorphisme en degré (r+k), et une condition de monomorphisme en degré (r+k+1).

Le pas inductif qui consiste à réaliser ces deux dernières conditions, repose sur le lemme principal (2.4.10).

Nous réaliserons les conditions a) b) c) et d) de (2.4.10) dans cet ordre.

D'autre part, le cas $k = 0$, se traitant de la même manière que le cas général nous

en déduirons l'existence d'un KS-modèle $\rho : (B \otimes M, d) \to (A, d_A)$, pour η.
Enfin, nous réaliserons ces conditions en tenant compte de "l'héritage" de (2.3.6) :

> Pour tout R_k-module W_k,
> $$\rho^* : H^{r+k}((B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; W_k) \to H^{r+k}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)$$
> est un monomorphisme.

2.5.4. <u>Normalisation</u>. Soit A et B deux $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.. Soit $q \geq p$ et

$$a_1, \ldots, a_n \in (A_p \otimes \mathbb{Q}_q)$$
$$\text{et} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in (B_p \otimes \mathbb{Q}_q.)$$

Soit N le plus petit entier tel que pour tout $i : 1 \leq i \leq n : N a_i \in A_p$ et pour tout $j : 1 \leq j \leq m : N \alpha_j \in B_p$.
On dira que la famille $\{Na_1 ; \ldots ; Na_n ; N\alpha_1 ; \ldots ; N\alpha_m\}$ est la famille <u>normalisée</u> à p de $\{a_1 ; \ldots ; a_n ; \alpha_1 ; \ldots ; \alpha_m\}$. Remarquons que N est inversible dans $\mathbb{Q}_q$.

2.5.5. Supposons avoir construit un $(k-1)$-modèle $\rho : (B \otimes M^{(k-1)}, d) \to (A, d_A)$, de η, où $M^{(k-1)}$ est un KS-complexe finiment engendré.

2.5.6. <u>Réalisation de a)</u>. Considérons

$$\ker(\rho^* : H^{r+k+1}[(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; R_k] \to H^{r+k+1}(A_{\overline{k-1}} ; R_k))$$

Notons $(\ker \rho^*)$ cet espace.

* Ecrivons : $\mathrm{Tor}(\ker \rho^*) = [a_1]\, R_k \big/ p_1 [a_1] R_k \oplus \ldots . \oplus [a_m] R_k \big/ p_m [a_m] R_k$ où les p_i sont des R_k-entiers tels que p_i divise p_j si $i \leq j$; et où les a_i sont des cocycles de $B \otimes M^{(k-1)} \otimes R_k$.
Il existe alors pour chaque i, un élément b_i de $B \otimes M^{(k-1)} \otimes R_k$ et un élément μ_i de $A_{\overline{k-1}} \otimes R_k$ tels que :

$$db_i = p_i a_i \quad \text{et} \quad (b_i) = d\mu_i .$$

En normalisant la famille $\{a_i ; b_i ; \mu_i\}$ à $\overline{k-1}$, on ne modifie pas les deux relations précédentes et on conserve une écriture analogue en somme directe pour $\mathrm{Tor}(\ker \rho^*)$. Ainsi, nous pouvons supposer que :

$$a_i, b_i \in (B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} \quad \text{et} \quad \mu_i \in A_{\overline{k-1}} .$$

Par suite : $(\rho(b_i) - p_i \mu_i)$ est un cocycle de $A_{\overline{k-1}}$.

2.5.7. <u>Lemme</u>. . <u>La famille</u> $([\rho(b_i) - p_i \mu_i])_{i=1,\ldots,m}$, <u>est une famille libre du</u> R_k<u>-module</u> : $\mathrm{coker}[\rho^* : H^{r+k}((B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; R_k) \to H^{r+k}(A_{\overline{k-1}} ; R_k)]$.

<u>Preuve</u> : Soit $\beta \in (A_{\underline{k-1}} \otimes R_k)$ et $g_1,\dots,g_n$, des éléments non nuls de R_k tels que :

$$d\beta = g_1(\rho(b_{\dot 1})-p_{\dot 1}\mu_{\dot 1}) + \dots + g_n[\rho(b_{\dot n})-p_{\dot n}\mu_{\dot n}] + \rho(c)$$

où $(\dot 1,\dot 2,\dots,\dot n) \hookrightarrow (1,2\dots,m)$ est une application strictement croissante, et où $[c] \in H^{r+k}((B \otimes M^{(k-1)})_{\underline{k-1}} ; R_k)$.

On peut toujours se ramener au cas où $g_1,\dots,g_n$ sont des entiers, et avoir une relation analogue. Supposons donc, que, $g_1,\dots,g_n$, sont des entiers. Soit ℓ le plus grand entier tel que $(p_{\dot 1})^{\ell}$ divise $g_1,g_2,\dots,g_n$. On a :

$$d\beta = (p_{\dot 1})^{\ell}[(g'_1[\rho(b_{\dot 1})-p_{\dot 1}\mu_{\dot 1}] + \dots + g'_n[\rho(b_{\dot n})-p_{\dot n}\mu_{\dot n}]] + \rho(c)$$

Nous allons utiliser le fait que :

$$\rho^* : H^{r+k}[(B \otimes M^{(k-1)})_{\underline{k-1}} ; W_k] \to H^{r+k}(A_{\underline{k-1}} ; W_k)$$

est un monomorphisme pour tout R_k-module W_k.

En particulier, prenons $W = R_k \Big/ (p_{\dot 1})^{\ell+1} R_k$; alors dans $(B \otimes M^{(k-1)})_{\underline{k-1}} \otimes W$:

$$d(g_1 b_{\dot 1} + \dots + g_n b_{\dot n}) = g_1 p_{\dot 1} a_{\dot 1} + \dots + g_n p_{\dot n} a_{\dot n} = 0$$

$$\rho(c) + \rho(g_1 b_{\dot 1} + \dots + g_n b_{\dot n}) = d\beta.$$

On a donc :

$$c + g_1 b_{\dot 1} + \dots + g_n b_{\dot n} = (p_{\dot 1})^{\ell+1} L + dL'$$

et en différentiant :

$$g_1 p_{\dot 1} a_{\dot 1} + \dots + g_n p_{\dot n} a_{\dot n} = (p_{\dot 1})^{\ell+1} dL$$

En divisant par $(p_{\dot 1})^{\ell+1}$, on obtient :

$$g'_1 a_{\dot 1} + \dots + g'_n \frac{p_{\dot n}}{p_{\dot 1}} a_{\dot n} = dL.$$

De la décomposition en somme directe de $\mathrm{Tor}(\ker \rho^*)$, on déduit alors : $g'_1,\dots,g'_n$ sont des multiples de $p_{\dot 1}$, ce qui par définition des g'_i entraîne qu'ils sont tous nuls. ■

2.5.8. D'après (2.5.6), $[\rho(b_i)-p_i\mu_i]$ est une classe libre de $H^{r+k}(A_{\underline{k-1}} ; R_k)$.

Soit N_i le plus grand R_k-entier tel que l'on puisse écrire :

$$[\rho(b_i)-p_i\mu_i] = N_i[\theta_i] \text{ , où } [\theta_i] \in H^{r+k+1}(A_{\underline{k-1}} ; R_k).$$

Remarquons que $[\theta_i]$ est un élément de :

$$\operatorname{coker}\left[\rho^* : H^{r+k}((B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; R_k) \longrightarrow H^{r+k}(A_{\overline{k-1}} ; R_k)\right].$$

2.5.9. <u>Lemme</u>. <u>Pour tout</u> i, N_i <u>est premier avec</u> p_i.

<u>Preuve</u> : Nous allons utiliser le fait que, pour tout R_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+k}[(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} ; W_k] \to H^{r+k}(A_{\overline{k-1}} ; W_k)$$

est un monomorphisme.

Soit $q = \operatorname{pgcd}(N_i ; p_i)$ et $W = R_k/q\, R_k$; alors dans $(B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} \otimes W$:

$$d(b_i) = p_i\, a_i = 0$$

$$\rho[b_i] = [N_i\, \theta_i + p_i\, \mu_i] = [0]$$

Il existe donc $E, E' \in (B \otimes M^{(k-1)})_{\overline{k-1}} \otimes R_k$ tels que :

$$dE' = b_i + q\, E$$

d'où : $db_i = q\, dE = p_i\, a_i$ et $dE = \frac{p_i}{q}\, a_i$. Comme p_i est le plus petit R_k-entier tel que $p_i\, [a_i] = 0$, on en conclut que $q = 1$.■

2.5.10. N_i étant premier avec p_i, il existe u_i et v_i tels que :

$$u_i\, N_i + v_i\, p_i = 1.$$

D'autre part, on peut toujours supposer que pour tout i la famille $\{a_i ; b_i ; \mu_i ; \theta_i\}$ est normalisée à $\overline{k-1}$, sans changer les relations et les données précédentes.

2.5.11. Créons alors : $x_1 ; \ldots ; x_m$ avec $|x_i| = k+r$ $\quad ||x_i|| = \overline{k-1}$
$dx_i = u_i\, a_i$ et $\rho(x_i) = u_i \mu_i - v_i \theta_i$.

2.5.12. <u>Vérifications</u>.

* vérifions que $[a_i]$ est atteinte comme bord :

$$d(N_i x_i + v_i a_i) = N_i u_i a_i + v_i p_i a_i = a_i$$

* vérifions que $[\theta_i]$ est atteinte par ρ^* :

$$\begin{aligned}\rho^*[u_i b_i - p_i x_i] &= [u_i\, \rho(b_i) - p_i(u_i \mu_i - v_i \theta_i)] \\ &= [u_i(\rho(b_i) - p_i \mu_i) + p_i v_i \theta_i] \\ &= [u_i\, N_i \theta_i] + [p_i v_i \theta_i] \\ &= [\theta_i].\end{aligned}$$

2.5.13. Notons $\mathbb{M} = M^{(k-1)} \otimes \Lambda_*(x_1,\dots,x_m)$.

* la famille $([\theta_i])$ est une famille libre du R_k-module libre (cf 2.4.5) :

$$\mathrm{coker}\left[\rho^* : H^{r+k}((B \otimes M^{(k-1)})_{\underline{k-1}} ; R_k) \to H^{r+k}(A_{\underline{k-1}} ; R_k)\right]$$

on est donc assuré que :

$$\rho^* : H^{r+k}((B \otimes (\mathbb{M}))_{\underline{k-1}} ; R_k) \to H^{r+k}(A_{\underline{k-1}} ; R_k)$$

est un monomorphisme.

* d'autre part, étant donné le choix de la famille (θ_i), on est assuré que le conoyau de cette application est sans torsion. D'après (0.1.4) et pour tout R_k-module W_k, on a :

$$\rho^* : H^{r+k}((B \otimes (\mathbb{M}))_{\underline{k-1}}) \otimes W_k \to H^{r+k}(A_{\underline{k-1}}) \otimes W_k$$

est un monomorphisme.

* Puisque dans $(B \otimes (\mathbb{M}))$, pour tout i, $[a_i]$ est atteinte comme bord, on a :

$$(\mathrm{Tor}\ \rho^*) : \mathrm{Tor}\left[H^{r+k+1}((B \otimes (\mathbb{M}))_{\underline{k-1}} ; R_k\right] \to \mathrm{Tor}\left[H^{r+k+1}(A_{\underline{k-1}} ; R_k)\right]$$

est un monomorphisme.

Ce qui d'après (0.1.4), donne pour tout R_k-module W_k :

$$\mathrm{Tor}(\rho^* ; W_k) : \mathrm{Tor}\left[H^{r+k+1}(B \otimes (\mathbb{M}))_{\underline{k-1}}, W_k\right] \to \mathrm{Tor}\left[H^{r+k+1}(A_{\underline{k-1}}), W_k\right]$$

est un monomorphisme.

Une simple chasse dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{r+k}((B\otimes(\mathbb{M}))_{\underline{k-1}})\otimes W_k \arrow[r] \arrow[d, "\rho^*\otimes 1"] & H^{r+k}((B\otimes(\mathbb{M}))_{\underline{k-1}} ; W_k) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^*"] & \mathrm{Tor}^{R_k}\left[H^{r+k+1}((B\otimes(\mathbb{M}))_{\underline{k-1}}, W_k\right] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}(\rho^* ; W_k)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{r+k}(A_{\underline{k-1}}) \otimes W_k \arrow[r] & H^{r+k}(A_{\underline{k-1}} ; W_k) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^{R_k}\left[H^{r+k+1}(A_{\underline{k-1}}), W_k\right] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

permet de conclure :

2.5.14. <u>Lemme</u>. <u>Pour tout R_k-module W_k</u> :

$$\rho^* : H^{r+k}((B \otimes (\mathbb{M}))_{\underline{k-1}} ; W_k) \to H^{r+k}(A_{\underline{k-1}} ; W_k)$$

<u>est un monomorphisme</u>.

2.5.15. Considérons $\ker \rho^*\left[H^{r+k+1}((B \otimes (\mathbb{M}))_{\underline{k-1}} ; R_k\right] \to H^{r+k+1}(A_{\underline{k-1}} ; R_k)$. D'après ce qui vient d'être réalisé, cet espace est libre de torsion.

Soit $[a'_1]\dots[a'_n]$ une de ses bases, avec $\rho(a'_i) = d\mu'_i$ où (a'_i) et (μ'_i) sont des familles d'éléments, respectivement de $(B \otimes (1M))_{\overline{k-1}} \otimes R_k$ et de $A_{\overline{k-1}} \otimes R_k$.
On peut toujours supposer la famille $(a'_i\ ;\ \mu'_i)_{i=1,\dots,n}$ normalisée à $\overline{k-1}$, sans modifier les relations : $\rho(a'_i) = d\mu'_i$.

* On crée alors $y_1\ ;\ \dots\ ;\ y_n$ avec :

$$|y_i| = k+r \qquad ||y_i|| = \overline{k-1}$$

$$\rho(y_i) = \mu'_i \quad \text{et} \quad dy_i = a'_i$$

on réalise ainsi la condition a).

Notons $(2M) = (1M) \otimes \Lambda_*(y_1\ ;\ \dots\ ;\ y_n)$.

2.5.16. Réalisation de b). Considérons

$$\operatorname{cocker}[\rho^* : H^{r+k}((B \otimes (2M))_{\overline{k-1}}\ ;\ R_k) \to H^{r+k}(A_{\overline{k-1}}\ ;\ R_k)]$$

Ce cocker est libre de torsion.
Soit $[\beta_1]\dots[\beta_j]$ une de ses bases normalisée à $\overline{k-1}$. Créons $z_1,\dots,z_j$ avec :

$$|z_i| = k+r \qquad ||z_i|| = \overline{k-1}$$

$$\rho(z_i) = \beta_i \qquad d(z_i) = 0$$

On réalise ainsi b). Notons $(3M) = (2M) \otimes \Lambda_*(z_1\ ;\ \dots\ ;\ z_j)$.

2.5.17. Réalisation de c). Considérons

$$(\operatorname{cocker}[\rho^* : H^{r+k+1}((B \otimes (3M))_{\overline{k-1}}\ ;\ R_k) \to H^{r+k+1}(A_{\overline{k-1}}\ ;\ R_k)]$$

$$\text{Torsion cocker}(\rho^*) = [\gamma_1]R_k \big/ q_1[\gamma_1]R_k \oplus \dots\dots \oplus [\gamma_\ell]R_k \big/ q_\ell[\gamma_\ell]R_k$$

pour tout i, il existe e_i, cocycle de $(B \otimes (3M))_{\overline{k-1}} \otimes R_k$ tel que :

$$\rho^*[e_i] = q_i\gamma_i$$

d'où :

$$\rho(e_i) = q_i\gamma_i + d\Gamma_i$$

On peut toujours supposer la famille $\{e_i\ ;\ \gamma_i\ ;\ \Gamma_i\}$ normalisée à $\overline{k-1}$, sans modifier ces relations.
On crée alors une famille de générateurs $(t_{1,i}\ ;\ t_{2,i})$ $0 \leqslant i \leqslant \ell$, avec :

$$||t_{1,i}|| = ||t_{2,i}|| = \overline{k-1}$$

$$|t_{1,i}| = k+r+1 \quad \text{et} \quad |t_{2,i}| = k+r$$

$$d(t_{1,i}) = 0 \qquad\qquad \rho(t_{1,i}) = \gamma_i$$

$$d(t_{2,i}) = e_i - q_i t_{1,i} \quad \text{et} \quad \rho(t_{2,i}) = \Gamma_i$$

et on a ainsi réalisé c) en atteignant comme "cobord", la torsion du conoyau. Notons

$$(4M) = (3M) \otimes \Lambda_*(t_{1,i} \,;\, t_{2,i} \,;\, \dots \,;\, t_{1,\ell} \,;\, t_{2,\ell}).$$

2.5.18. <u>Réalisation de d)</u>. Considérons

$$\ker(\bar{\rho}^*_{R_k/\alpha_n R_k} : \operatorname{Tor}(H^{r+k+2}((B \otimes (3M))_{\underline{k-1}}), R_k/\alpha_n R_k) \to E^{r+k+1})$$

avec : $$\operatorname{Tor}[H^{r+k+2}((B \otimes (3M))_{\underline{k-1}} \,;\, R_k)] = R_k/\alpha_1 R_k \oplus \dots \oplus R_k/\alpha_n R_k ,$$

où les α_i sont des R_k-entiers tels que α_i divise α_j si $i \leqslant j$.
Pour les autres notations, se reporter à (2.4.2).

Ecrivons : $\ker(\bar{\rho}^*_{R_k}/\alpha_n R_k) = [F_1]R_k/h_1[F_1]R_k \oplus \dots \oplus [F_u]R_k/h_u[F_u]R_k$ où (F_i) est une famille d'éléments de $(B \otimes (3M))_{\underline{k-1}} \otimes R_k$, et (h_i) une famille de R_k-entiers tel que h_i divise h_j si $i \leqslant j$.
Il existe une famille (G_i) d'éléments de $(B \otimes (3M))_{\underline{k-1}} \otimes R_k$, tel que :

$$d(G_i) = h_i F_i .$$

On a alors la situation suivante traduisant que $[F_i] \in \ker(\bar{\rho}^*_{R_k}/\alpha_n R_k)$

$$\begin{tikzcd}
\underline{r+k+2} & h_i F_i \arrow[r, "\times k_i"] & \alpha_n F_i \arrow[r, "\rho"] & \alpha_n d \emptyset_i \\
\underline{r+k+1} & G_i \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\times k_i"] & k_i G_i \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\rho"] & \alpha_n \emptyset_i + d\Psi'_i + \rho(O'_i) \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}$$

où $h_i \times k_i = \alpha_n$.

O'_i est un cocycle de $((B \otimes (4M))_{\underline{k-1}} \otimes R_k)$

$\emptyset_i$, Ψ'_i, sont des éléments de $A_{\underline{k-1}} \otimes R_k$.

On a alors : $[\rho(O'_i)] = k_i[\rho(G_i) - h_i \emptyset_i]$. D'après ce qui a été réalisé en 2.5.16) on a :

$$\operatorname{cocker}[\rho^* : H^{r+k+1}((B \otimes (4M))_{\underline{k-1}} \,;\, R_k) \to H^{r+k+1}(A_{\underline{k-1}} \,;\, R_k)] ,$$

est sans torsion. Il existe O_i cocycle de $((B \otimes (4M))_{\underline{k-1}} \otimes R_k)$, tel que :

$$[O_i] = k_i[O'_i]$$

$$O_i = k_i\, O'_i + ds_i \qquad \text{où} \qquad s_i \in (B \otimes (4M))_{\underline{k-1}} \otimes R_k .$$

On a alors : $d(\Psi'_i - \rho(s_i)) = k_i(\rho(G_i) - k_i \emptyset_i + O_i)$. Le conoyau en degré $(r+k+1)$ étant sans torsion, il existe $\Psi_i \in A_{\underline{k-1}} \otimes R_k$ tel que :

$$d\Psi_i = (\rho(G_i)-k_i\emptyset_i+O_i).$$

Nous pouvons supposer la famille $(F_i ; G_i ; O_i ; \emptyset_i ; \psi_i)_{i=1,\dots,u}$ normalisée à $\overline{k-1}$ sans changer les relations les reliant.

* On crée alors une famille $(W_{1,i} ; W_{2,i})$ $i = 1,\dots u$ avec :

$$|W_{1,i}| = k+r+1$$

$$|W_{2,i}| = k+r$$

$$||W_{2,i}|| = ||W_{1,i}|| = \overline{k-1}$$

avec $\quad dW_{1,i} = F_i \qquad dW_{2,i} = h_i\, W_{1,i} - G_i - O_i$

$\quad \rho(W_{1,i}) = \emptyset_i \qquad \rho(W_{2,i}) = -\psi_i.$

$[F_i]$ étant "tuée", on a réalisé la condition d), en ne changeant pas "l'acquis", puisque la nouvelle classe de cohomologie créée $[h_i\, W_{1,i} - G_i]$ est identifiée à $[O_i]$. On pose alors :

$$M^{(k)} = (4M) \otimes \Lambda_*(W_{1,1} ; W_{2,1} ; \dots ; W_{1,u} ; W_{2,i}).$$

2.5.19. $M^{(k)}$ est un KS-complexe finiment engendré puisque :

i) $M^{(k)}/M^{(k-1)} = Y^{r+k+1} \oplus Z^{r+k}$ (cf 2.14 et 2.1.5) avec

$$Y^{r+k+1} = t_{2,1} \oplus \dots \oplus t_{2,\ell} \oplus W_{2,1} \oplus \dots \oplus W_{2,u}$$

$$Z^{r+k} = x_1 \oplus \dots \oplus x_m \oplus z_1 \oplus \dots \oplus z_j \oplus t_{1,1} \oplus \dots \oplus t_{1,\ell} \oplus W_{1,1} \oplus \dots \oplus W_{1,u}$$

ii) Par construction on a :

$$Y^{r+k+1} = Y^{r+k+1,\overline{k-1}}$$

$$Z^{r+k} = Z^{r+k,\overline{k-1}}$$

iii) La condition iii) de (2.1.5) est réalisée par construction avec, pour tout i, $\underline{f_i \text{ est } R_k\text{-entier}}$. ■

III. HOMOTOPIE.

3.1. $\mathbb{Q}_*$-acyclicité.

3.1.1. Définition. Une $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. A est dite $\mathbb{Q}_*$-acyclique si :

$$H^{o}(A) = \mathbb{Q}_* \quad \text{et} \quad H^{i}(A) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq 0$$

3.1.2. Soit X un $\mathbb{Z}$-module bigradué $X = \bigoplus_{\substack{p\geqslant 0\\ q>0}} X^{p,q}$, et $\bar{X}$ une copie de X avec, pour tout élément x de X

$$|\bar{x}| = |x| + 1$$

$$||\bar{x}|| = ||x||$$

On pose :

$$d(x) = \bar{x} \qquad \text{et} \qquad d(\bar{x}) = 0.$$

Et on étend d en une différentielle sur $\Lambda_*(X \oplus \bar{X})$.

3.1.3. Proposition. $(\Lambda_*(X \oplus \bar{X},d)$ est $\mathbb{Q}_*$-acyclique.

Preuve : Il suffit de démontrer la propriété dans le cas où X est réduit à un seul générateur x. Soit donc $\Lambda_*(x \oplus \bar{x})$ avec :

$$|x| \geqslant 0, \qquad |\bar{x}| = |x| + 1$$

et

$$||x|| = ||\bar{x}|| \geqslant 1.$$

- si $|x|$ est impair, la formule :

$$d(x\,\bar{x}^{n}) = \bar{x}^{n+1}$$

nous assure la $\mathbb{Q}_*$acyclité.

- si $|x|$ est pair, on a :

$$d(x^{n}\,\bar{x}) = 0 \qquad \text{et} \qquad d(x^{n+1}) = (n+1)x^{n}\,\bar{x}$$

Mais comme $||x^{n+1}|| \geqslant n+1$, cela nous assure que $(x^{n}\,\bar{x})$ est un bord, puisqu'on peut inverser $(n+1)$. ∎

3.2. Notion d'exponentielle.

Soit $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes \Lambda_* X,d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (\Lambda_* X,\bar{d})$ une KS-extension

On pose $\bar{X} = \hat{X} = X$ en tant qu'espaces avec :

$$|\bar{x}| = |x| - 1, \qquad |\hat{x}| = |x| \qquad \text{et} \qquad ||\bar{x}|| = ||\hat{x}|| = ||x||$$

On étend d en une différentielle D, sur $B \otimes \Lambda_*(X \oplus \bar{X} \oplus \hat{X})$, en posant : $D\bar{x} = \hat{x}$ et $D\hat{x} = 0$. On note :

$$(B \otimes \Lambda_* X,d)_I = (B \otimes \Lambda_*(X \oplus \bar{X} \oplus \hat{X}),D)$$

$\lambda_o : (B \otimes \Lambda_* X,d) \rightarrow (B \otimes \Lambda_* X,d)_I$ l'injection canonique et

$p : (B \otimes \Lambda_* X,d)_I \rightarrow (B \otimes \Lambda_* X,d)$ la projection.

3.2.1. Posons maintenant dans $(B \otimes \Lambda_* X,d)_I$:

$$\begin{aligned} i(b) &= 0 \quad \text{si} \quad b \in B \\ i(x) &= \bar{x} \\ i(\bar{x}) &= i(\hat{x}) = 0 \end{aligned}$$

i s'étend en une B-dérivation de bidegré $(-1 ; 0)$. On pose alors :

$$\theta = Di + iD.$$

θ est une B-dérivation de bidegré $(0 ; 0)$. Considérons la série formelle :

$$e^\theta = \sum_{i \geq 0} \frac{\theta^n}{n!}$$

3.2.2. <u>Proposition.</u> <u>e^θ est un automorphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.</u>

<u>Preuve</u> : Introduisons tout d'abord la notation suivante : si $\alpha \in (B \otimes \Lambda_* X,d)_I$, notons :

$$\mathrm{nil}(\alpha) = \inf\{n \in \mathbb{N} \ / \ \theta^{n+1}(\alpha) = 0\}.$$

Il s'agit donc de montrer que :

Pour tout $\alpha \in (B \otimes \Lambda X,d)_I$: $\mathrm{nil}(\alpha) \leq ||\alpha||$.

Nous allons démontrer la propriété par récurrence sur la filtration en sous-$\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c. de $(B \otimes M)_I$:

$$B \subset (B \otimes M^{(0)})_I \subset (B \otimes M^{(1)})_I \subset \ldots \subset (B \otimes M^{(n)})_I \subset \ldots \subset (B \otimes M)_I \ .$$

Remarquons que $e^\theta_{|B} = id_B$. Supposons avoir montré la propriété pour $(B \otimes M^{(k-1)})_I$.

* Les générateurs de $M^{(k)}/M^{(k-1)}$, sont en degré $(k+r)$ et $(k+r+1)$. Soit x un tel générateur :

$$dx = Q\bar{d}(x) + \Omega \qquad \text{où} \qquad \Omega \in (B \otimes M^{(k-1)})_I$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= (Di+iD)(x) = \widehat{Q\bar{d}(x)} + \overline{Q\bar{d}(x)} + i(\Omega) \\ \theta^2(x) &= \theta(i(\Omega)) \end{aligned}$$

d'où :

d'où :

$$\underline{nil(x) \leqslant nil(i(\Omega)) + 1} \qquad (1)$$

* On peut supposer que : $\Omega = \beta \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ où $\beta \in B$ et $x_1,\ldots,x_n \in (X \oplus \bar{X} \oplus \hat{X}$

$$\begin{aligned} nil(i(\Omega)) &\leqslant \sup\{nil(\bar{x}_1 x_2 \ldots x_n) \; ; \; \ldots \; ; \; nil(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}\bar{x}_n)\} \\ &\leqslant [\sum_{i=1}^{n} (nil\ x_i)] - 1 \\ &\leqslant [\sum_{i=1}^{n} ||x_i||] - 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant ||\Omega|| - 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\underline{nil(i(\Omega)) \leqslant ||\Omega|| - 1} \qquad (2)$$

(1) et (2) nous donnent alors, pour tout générateur de $M^{(k)}/M^{(k-1)}$:

$$\boxed{nil(x) \leqslant ||\Omega|| \leqslant ||x||.}$$

* Montrons que cette relation est aussi vraie pour tout monôme $\emptyset$ de $(B \otimes M^{(k)})_I$.

$$\emptyset = \beta \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, \qquad \text{où } \beta \in B \text{ et } x_1,\ldots,x_n \in (X \oplus \bar{X} \oplus \hat{X}).$$

En effet :

$$\begin{aligned} nil(\emptyset) &\leqslant nil(\beta) + \sum_{i=1}^{n} nil(x_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \end{aligned}$$

Comme $||\emptyset|| = ||\beta|| + \sum_{i=1}^{n} ||x_i||$, on en déduit :

$$\underline{nil(\emptyset) \leqslant ||\emptyset||.}$$

Ceci montre que e^{θ} est bien définie. Et de la définition même, il résulte que e^{θ} est compatible au produit et à la différentielle, et que c'est un isomorphisme ■

3.3. <u>Homotopie gauche</u>.

On pose $\lambda_1 = e^{\theta} : (B \otimes \Lambda_* X) \to (B \otimes \Lambda_* X)_I$.

<u>Définition</u>. Soit $f_o, f_1 : (B \otimes \Lambda_* X, d) \to (A, d_A)$. f_o <u>est homotope à gauche à f_1</u>, s'il existe un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., F, tel que le diagramme suivant commute :

BU LILLE

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes \Lambda_* X, d) \arrow[d, "\lambda_0"'] \arrow[drr, "f_o"] & & \\
(B \otimes \Lambda_* X, d)_I \arrow[rr, "F"] & & (A, d_A) \\
(B \otimes \Lambda_* X, d) \arrow[u, "\lambda_1"] \arrow[urr, "f_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nous noterons $f_o \simeq f_1$ (rel. B).

IV. THEORIES MODEREES.

4.1. Définition. Une théorie modérée est la donnée :

1) du degré de connexité $(r-1)$

2) d'un système d'anneaux R_* : $R_k = \mathbb{Q}_{\hat{k}}$

3) d'une notion de KS-complexe

4) de deux conditions T_k^n et Π_k^n.

4.2. Exemple 1. Théories modérées uniformes pour $r \geq 3$, considérées jusqu'à maintenant :

1) $r \geq 3$

2) $\hat{k} \geq \bar{k} = [\frac{k+3}{2}]$

3) une notion de KS-complexe (cf 2.1.5)

4) T_k^n et Π_k^n (cf 1.3.2 et 2.3.2).

Dans ces théories, nous avons un KS-modèle pour une certaine catégorie de morphismes (théorème 2.5.2), ainsi qu'une notion d'homotopie entre des morphismes de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c.

4.3. Exemple 2. Théories modérées uniformes pour $r \geq 4$, où on a l'analogue du théorème (2.5.2) ainsi qu'une notion d'homotopie.

1) $r \geq 4$

2) $\hat{k} \geq \bar{k} = [\frac{k+3}{2}]$

3) Pour un KS-complexe (cf 2.1.5), on ne change que la condition (ii) qui devient :

$$X^s = 0 \text{ si } s < r \quad \text{et} \quad X^{r+k} = Y^{r+k,\overline{k-1}} \oplus Z^{r+k,\bar{k}} \quad \text{(cf 2.2.1)}.$$

4) Un $\mathbb{Q}_*$-module différentiel A, $(r-1)$ c-connexe vérifie la condition T_k^n si pour tout R_{k+1}-module W_{k+1} :

$$i^*_{W_{k+1}} : H^{r+\ell}(A_{\bar{k}} ; W_{k+1}) \to H^{r+\ell}(A_{\overline{k+1}} ; W_{k+1})$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$ (cf 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5).

Avec les conditions de (2.3.1) :

ρ vérifie la condition Π_k^n, si pour tout R_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{\bar{k}} ; W_k) \to H^{r+\ell}(A_{\bar{k}} ; W_k)$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$.

4.4. <u>Exemple</u> 3. <u>Théories modérées uniformes pour $r \geqslant 2$</u>, où on a l'analogue du théorème (2.5.2) ainsi qu'une notion d'homotopie.

1) $r \geqslant 2$

2) $\hat{k} \geqslant k+1$

3) Pour un KS-complexe (cf 2.1.5), on ne change que la condition (ii) qui devient :

$$X^s = 0 \text{ si } s < r \quad \text{ et } X^{r+k} = Y^{r+k,k} \oplus Z^{r+k,k+1} \qquad \text{(cf 2.2.1)}$$

4) Un $\mathbb{Q}_*$-module différentiel A, $(r-1)$ c-connexe vérifie la condition T_k^n si pour tout R_{k+1}-module W_{k+1} :

$$i^*_{W_{k+1}} : H^{r+\ell}(A_{k+1} ; W_{k+1}) \to H^{r+\ell}(A_{k+2} ; W_{k+1})$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$ (cf 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5)

Avec les conditions de (2.3.1) :

ρ vérifie la condition Π_k^n, si pour tout R_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{k+1} ; W_k) \to H^{r+\ell}(A_{k+1} ; W_k)$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$

4.5. <u>Exemple</u> 4. <u>Théories modérées admissibles</u>.

Rappelons la notation $R_k = \mathbb{Q}_{\hat{k}}$, où R_* est le système d'anneaux.

4.5.1. Définition. Soit $r \geqslant 2$. Un système d'anneaux R_* est dit r-admissible si :

i) $\hat{k} \geqslant \bar{k} = \left[\frac{k+3}{2}\right]$

ii) Pour tout $k > 0$, $n > 1$ et $k_1, \ldots, k_n \geqslant 0$, si $\sum_{i=1}^{n} r+k_i \leqslant r+k$, alors $\sum_{i=1}^{n} \hat{k}_i \leqslant \widehat{k-1}$.

4.5.2. Exemples.

* $R_k = \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]}$ est admissible pour $r \geqslant 4$, mais pas pour $r = 3$.

* $R_k = \mathbb{Q}_{k+1}$ est admissible pour $r \geqslant 2$.

* $R_k = \mathbb{Q}_{\left[\frac{2k+4}{3}\right]}$ est admissible pour $r \geqslant 3$, mais pas pour $r = 2$.

4.5.3. A un système r-admissible, nous associons une théorie modérée admissible de la manière suivante :

1) $r \geqslant 2$.

2) le système d'anneaux r-admissible considéré.

3) Pour un KS-complexe (cf 2.1.5), on ne change que la condition ii) qui devient :

$$X^s = 0 \quad \text{si} \quad s < r \quad \text{et} \quad X^{r+k} = Y^{r+k,\widehat{k-1}} \oplus Z^{r+k,\hat{k}} \qquad \text{(cf 2.2.1)}$$

4) Un $\mathbb{Q}_*$-module différentiel A, (r-1)-c-connexe vérifie la condition T_k^n si, pour tout $\mathbb{Q}_{k+1}$-module W_{k+1} :

$$i^*_{W_{k+1}} : H^{r+\ell}(A_{\hat{k}} ; W_{\widehat{k+1}}) \qquad H^{r+\ell}(A_{\widehat{k+1}} ; W_{\widehat{k+1}})$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$ (cf 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5).

Avec les conditions de (2.3.1) :

ρ véfifie la condition Π_k^n si, pour tout, $\mathbb{Q}_{\hat{k}}$-module $W_{\hat{k}}$:

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_{\hat{k}} ; W_{\hat{k}}) \to H^{r+\ell}(A_{\hat{k}} ; W_{\hat{k}})$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant n$.

- un monomorphisme pour $\ell = n+1$.

4.5.4. Remarque. Pour les exemples 2, 3 et 4, la construction du modèle se fait exactement de la même manière que la construction faite pour l'exemple 1.
Pour l'exemple 4, notons qu'elle est un peu plus simple dans la mesure où on n'a pas besoin de "normaliser", les différentes variables intervenant dans le construction.

4.6. Homotopie rationnelle.

L'homotopie rationnelle peut être traitée dans un cadre de théorie admissible avec $\hat{k} = \infty$, puisque pour tout k, $R_k = \mathbb{Q}$.

4.7. $\mathbb{Z}_p$-homotopie.

Supposons être dans l'exemple 1, 2, 3 ou 4. Soit $T_0, T_1, \ldots, T_k, \ldots$, une suite de $\mathbb{Z}$-modules tels que : pour tout k, T_k est un R_k-module, où R_* est le système d'anneaux considéré.

Le modèle construit nous donne alors, pour tout k, et pour tout T_k-module W_k :

$$\rho^* : H^{r+\ell}((B \otimes M^{(k)})_\Delta ; W_k) \longrightarrow H^{r+\ell}(A_\Delta ; W_k)$$

est : - un isomorphisme pour $\ell \leqslant k$

- un monomorphisme pour $\ell = k+1$

Δ désignant le poids pris dans la définition du modèle suivant l'exemple considéré. Cela définit un modèle pour le système T_*.

Exemple. En posant $\mathbb{Z}_p = T_0 = \ldots . = T_k$

$0 = T_{k+1} = T_{k+2} = \ldots$

où k est le plus grand entier tel que $\mathbb{Z}_p$, soit un R_k-module, on obtient un $\mathbb{Z}_p$-modèle.

V. *RIGIDITE DU MODELE - MODELE D'UN ESPACE.*

5.1. Rigidité du modèle. Nous nous plaçons dans une théorie admissible, comme définie en (4.5), cela afin d'y établir un lemme de relèvement.

5.1.1. Un $\mathbb{Q}_*$-module (r-1)-c-connexe A est dit acyclique si : pour tout $\mathbb{Q}_{\hat{k}}$-module $W_{\hat{k}}$, on a :

$$H^{r+\ell}(A_{\hat{k}} \; ; \; W_{\hat{k}}) = 0 \qquad \text{pour} \quad \ell \leqslant k+1.$$

5.1. . Proposition. Soit $f_o, f_1 : (B \otimes \Lambda X, d) \to (A, d_A)$. Soit K un idéal de A, stable par différentielle et acyclique. Si $\mathrm{Im}(f_1 - f_o) \subset K$, alors il existe une homotopie gauche entre f_o et f_1 telle que : $F(\bar{X}) \subset K$.

Preuve : Supposons avoir construit F sur $(B \otimes M^{(k-1)})_I$.

Soit y un générateur de $M^{(k)}/M^{(k-1)}$ tel que :

$$|y| = k+r+1$$

$\lambda_1(y) - \lambda_o(y) = \hat{y} + \Omega(y)$, où $\Omega(y) \in i\ (B \otimes M^{(k-1)})_I$ puisque $dy \in (B \otimes M^{(k-1)})_I$.

$$\begin{aligned} d\left[f_1(y) - f_o(y) - F(\Omega(y))\right] &= y_1(dy - f_o(dy) - F(D\Omega(y)) \\ &= F\left[\lambda_1(dy) - \lambda_o(dy) - D\Omega(y)\right] \\ &= FD\left[\lambda_1(y) - \lambda_o(y) - \Omega(y)\right] = 0 \end{aligned}$$

D'où : $f_1(y) - f_o(y) - F(\Omega(y))$ est un bord de $K^{k+r+1}_{\hat{k}}$,

$$f_1(y) - f_o(y) - F(\Omega(y)) = du, \quad \text{où} \quad u \in K_{\hat{k}}.$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} F(\bar{y}) &= u \\ F(\hat{y}) &= du. \end{aligned}$$

Soit maintenant un générateur de $M^{(k)}/M^{(k-1)}$ tel que :

$$|x| = k+r$$

$$\text{et} \quad dx = Qd(x) + \Omega$$

Sachant qu'on a construit l'image de (dx) par F, on procède de la même manière que pour l'élément précédent, pour construire l'image de $\bar{x}$ et de $\hat{x}$. ■

Ayant cette propriété, on démontre exactement de la même manière que dans [Ha. 5.14 et 5.15] les propriétés suivantes :

5.1.3. Proposition. 1) L'existence d'une homotopie gauche ne dépend pas du choix de l'espace vectoriel bigradué X.

2) L'homotopie gauche est une relation d'équivalence.

5.1.4. Proposition. Soient $(B \otimes \Lambda_* X, d)$ et $(B \otimes \Lambda_* Y, d)$ deux B-KS-complexes et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes \Lambda_* Y, d) \arrow[r, "h"] & (B \otimes \Lambda_* X) \arrow[r, shift left, "f_o"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] & (C,d) \arrow[r, "g"] & (A,d) \\
(B,d) \arrow[u] \arrow[r, equal] & (B,d) \arrow[u] \arrow[r, equal] & (B,d) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Si $f_o \sim f_1$ (rel. B) alors :

1) $g \circ f_o \simeq g \circ f_1$ (rel. B)

2) $f_o \circ h \simeq f_1 \circ h$ (rel. B)

3) Si $g : (C,d) \to (A,d)$ est un B-modèle, alors : $g \circ f_o \simeq g \circ f_1$ (rel.) est équivalent à $f_o \simeq f_1$ (rel. B).

5.2. Lemme de relèvement.

5.2.1. Enoncé. Considérons le diagramme commutatif formé des flèches en traits pleins

$$\begin{tikzcd}
& (M', \bar{d}') & & \\
& (B \otimes M', d') \arrow[u, "\varepsilon \otimes 1"] \arrow[r, "\gamma"] & (A, d_A) & \\
E : & (B, d_B) \arrow[u, "i'"] \arrow[r, "i"] & (B \otimes M, d) \arrow[u, "\eta"'] \arrow[ul, dashed, shift left, "\theta"] \arrow[ul, dashed, shift right, "\theta'"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1"] & (M, \bar{d})
\end{tikzcd}$$

$$E'$$

où (E',γ) est un B-modèle de (A,d_A) et (E) une B-KS-extension. Alors :

1) <u>il existe un morphisme</u> $\theta : (B \otimes M,d) \to (B \otimes M',d')$ <u>tel que</u>

a) $\theta i = i'$

b) $\gamma\theta \simeq \eta$ (rel. B)

2) si $\theta' : (B \otimes M,d) \to (B \otimes M',d')$ <u>vérifie aussi les conditions a) et b)</u> <u>alors</u> $\theta' \simeq \theta$ (rel. B).

3.4.2. <u>Preuve de 1)</u>.

– <u>1er cas</u> : Supposons que pour tout k, l'homomorphisme $\gamma : (B \otimes M'^{(k)},d') \to (A^{\geq r,*},d_A)$, soit surjectif.

Supposons avoir construit $\theta : (B \otimes M^{(k-1)},d) \to (B \otimes M'^{(k-1)},d')$ vérifiant les conditions a) et b).

Nous allons prolonger θ à $(B \otimes M^{(k)},d)$. $M^{(k)}/M^{(k-1)}$ est engendrée par :

$$Z^{r+k,\widehat{k-1}} \oplus Y^{r+k+1,\widehat{k-1}} .$$

* Soit I l'ordre sur les générateurs de Y^{r+k+1}. $I = [1;\dots;n]$. Supposons avoir construit θ pour $(y_1 ; y_2 ; \dots ; y_{m-1})$ et pour les générateurs de Z^{r+k} qui leur correspondent dans (2.1.5 III)), $(x_1 ; \dots ; x_{m-1})$. Il existe $z_m \in Z^{r+k}$ tel que :

$$dz_m = f_m y_m + \sum_{j<m} f_{m,j} y_j + \Omega'$$

<u>Posons</u> : $f_m = f'_m p_m$ où f'_m est inversible dans $\mathbb{Q}_{\hat{k}}$, et où p_m est $\mathbb{Q}_{\hat{k}}$-entier. (1)

$$dz_m = f_m p_m y_m + \Omega$$

où θ est définie sur Ω.

γ étant surjective, il existe $u \in (B \otimes M'^{(k)})$ tel que :

$$|u| = r+k \qquad \text{et} \qquad \gamma(u) = \eta(z_m).$$

Et on a : $(du) = f_m p_m \eta(y_m) + \gamma\theta(\Omega)$ d'où :

$$\gamma(du-\theta(\Omega)) = f_m p_m \eta(y_m).$$

On se "place" à coefficients dans <u>$W = \mathbb{Q}_{\hat{k}}/p_m \mathbb{Q}_{\hat{k}}$</u> : $(du-\theta(\Omega))$ est un cycle de $(B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}} \otimes W$ et $\gamma^*_W[du-\theta(\Omega)] = 0$

$$\gamma^*_W : H^{r+k+1}((B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}} ; W) \to H^{r+k+1}(A_{\hat{k}} ; W)$$

étant injective, on en déduit qu'il existe t et v, éléments de $(B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}$ tels que :

$$dt = du - \theta(\Omega) + p_m v .$$

D'où :

$$\gamma(dt) = f_m p_m (y_m) + p_m \gamma(v).$$

D'après (2.4.10), le conoyau de l'application suivante est sans torsion :

$$\gamma^* : H^{r+k+1}((B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}) \to H^{r+k+1}(A_{\hat{k}}).$$

On en déduit en utilisant la "surjection" de γ, qu'il existe $w \in (B \otimes M'^{(k-1)})_{\hat{k}}$, tel que :

$$dw = 0$$

$$\gamma(w) = (f_m \eta(y_m+\gamma(v)) \qquad (1)$$

d'où : $\gamma(dt-p_m w) = 0$

$$\gamma^* : H^{r+k+1}((B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}) \to H^{r+k+1}(A_{\hat{k}})$$

étant injective, et en considérant $(\ker \gamma)$, on déduit qu'il existe $s \in (B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}$ tel que :

$$ds = dt - p_m w \ (1) \quad \text{et} \quad \gamma(s) = 0.$$

On pose alors : $\theta(z_m) = u+s$ et $\theta(y_m) = - \frac{1}{f'_m} (w-v)$.

On vérifie facilement que θ commute aux différentielles et que $\gamma \circ \theta = \eta$.

On a défini θ sur Y^{r+k+1} et une partie des générateurs de Z^{r+k} : $z_1;\ldots;z_n$.
Tout autre générateur de Z^{r+k}, vérifie alors $dz = \emptyset$, ou θ est définie pour $\emptyset$.
De $\gamma\theta(dz) = \eta(dz) = d\eta(z)$ et $d\theta(dz) = 0$, et puisque :

$$\gamma^* : H^{r+k+1}((B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}) \to H^{r+k+1}(A_{\hat{k}})$$

est un monomorphisme, on déduit qu'il existe $v' \in (B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}$, tel que :
$dv' = \theta(dz)$ (1) $(\gamma(v)-\eta(z))$ est cycle de $(A_{\hat{k}})$.

$$\gamma^* : H^{r+k}((B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}) \to H^{r+k}(A_{\hat{k}}),$$

étant bijective, et γ étant "surjective", il existe $w' \in (B \otimes M'^{(k)})_{\hat{k}}$ vérifiant

$$dw' = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma(w') = (\gamma(v)-\eta(z)). \qquad (1)$$

On pose alors : $\theta(z) = v'-w'$.

On vérifie facilement que θ commute aux différentielles et que : $\gamma \circ \theta = \eta$

2ème cas : Cas général.

Notons que (A,d_A) est (r-1)-c-connexe. Soit

$$(B \otimes M',d') \otimes (\Lambda_*(A^{\geq r,*} \oplus \bar{A}^{\geq r,*},d)) = \overline{(B \otimes M',d')}$$

où $\bar{A}^{\geq r,*}$ est une copie de $A^{\geq r,*}$ considéré comme $\mathbb{Q}_*$-module gradué avec, si $a \in A^{\geq r,*}$

$$|\bar{a}| = |a| + 1 \qquad \text{et} \qquad da = \bar{a}$$

Remarquons que $(\Lambda_*(A^{\geq r,*} \oplus \bar{A}^{\geq r,*}),d)$ est une algèbre $\mathbb{Q}_*$-acyclique. (3.1.1.)

Soit $p : \overline{(B \otimes M',d')} \to (B \otimes M',d')$ la projection canonique et $j : (B \otimes M',d') \to \overline{(B \otimes M',d')}$ l'injection canonique.

On définit un prolongement de γ, $\bar{\gamma}$, en posant

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(u) &= \gamma(u) && \text{si } u \in (B \otimes M') \\ \bar{\gamma}(a) &= a && \text{si } a \in A^{\geq r,*} \\ \text{et} \quad \bar{\gamma}(\bar{a}) &= da && \text{si } \bar{a} \in \bar{A}^{\geq r,*} \end{aligned}$$

$(\overline{(B \otimes M',d')},\bar{\gamma})$ est un modèle de (A,d_A), en étant muni de la filtration :

$$\overline{(B \otimes M',d')}^{(k)} = \overline{(B \otimes M'^{(k)},d')}.$$

On applique le résultat précédent ; il existe donc $\bar{\theta}$ tel que : $\bar{\gamma} \circ \bar{\theta} = \eta$

$\text{Im}(j \circ p \circ \bar{\theta} - \bar{\theta})$ étant inclus dans l'idéal $\mathbb{Q}_*$-acyclique $\ker p$, on obtient :

$$j \circ p \circ \bar{\theta} \simeq \theta$$

et

$$\bar{\gamma} \circ j \circ p \circ \bar{\theta} \simeq \bar{\gamma} \circ \bar{\theta} = \eta \quad \text{(rel. B)}.$$

Le morphisme cherché est $\theta = p \circ \bar{\theta}$.

5.2.3. Preuve de 2).

Soit θ' vérifiant les conditions a) et b) ;

D'après (5.1.4), il s'ensuit que :

$$\theta' \simeq \theta \quad \blacksquare$$

(1) C'est là qu'on utilise l'hypothèse "théorie admissible".

5.3. Rigidité du KS-modèle.

Soit $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M,d) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} (M,\bar{d})$ et $(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes M',d') \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} (M',\bar{d}')$ deux KS-modèles d'un morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., $\eta : (B,d_B) \to (C,d_C)$.

On a alors la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & (B \otimes M,d) \arrow[d, "\rho"] \\
(B \otimes M',d') \arrow[ur, "\theta'"] \arrow[r, "\rho'"] & (C,d_C) \\
 & (B \otimes M,d) \arrow[u, "\rho"'] \arrow[ul, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

où l'existence de θ et θ' est assurée par le lemme précédent, telles que :

$\rho' \circ \theta \simeq \rho$ (rel. B) et $\rho \circ \theta' \simeq \rho'$ (rel. B)

$$\theta(B \otimes M^{(k)}) \subset B \otimes M'^{(k)}$$
$$\theta'(B \otimes M'^{(k)}) \subset B \otimes M^{(k)}$$

Ces deux dernières conditions étant assurées par la construction même de θ et θ'.
D'autre part, d'après la deuxième partie du lemme :

$$\theta' \circ \theta \simeq \text{id} \quad (\text{rel. } B).$$

En conclusion :

<u>Théorème</u>. <u>Si</u> $(B,d_B) \hookrightarrow (B \otimes M,d) \to (M,\bar{d})$ <u>et</u> $(B,d_B) \hookrightarrow (B \otimes M',d') \to (M,\bar{d}')$ <u>sont</u> deux KS-modèles d'un même morphisme de $\mathbb{Q}_*$-a.d.g.c., il existe des B-morphismes :

$$\theta : (B \otimes M,d) \to (B \otimes M',d')$$

<u>et</u> $\quad \theta' : (B \otimes M',d') \to (B \otimes M,d)$ telles que :

i) θ et θ' respectent les filtrations en tours de ces modèles :

$\theta : (B \otimes M^{(k)}) \hookrightarrow (B \otimes M'^{(k)}) \qquad \theta' : (B \otimes M'^{(k)}) \hookrightarrow (B \otimes M^{(k)})$

ii) $\theta' \circ \theta \simeq \text{id}$.

5.4. <u>Lien avec la topologie</u>.

5.4.1. Dans chacune des théories modérées, où le modèle existe (exemples 1,2,3 et 4), on définit le modèle d'un espace (r-1)-connexe, comme étant un modèle de son algèbre de Cenkl et Porter des formes cubiques (cf. 1.2).
Dans une théorie admissible, il résulte du lemme de rigidité (5.3) que le modèle d'un espace est bien défini à "équivalence faible" près, au sens de [B. et al].
D'autre part, pour une <u>théorie admissible</u>, citons les résultats de [B et al. VII 3 et VII 5].

5.4.2. Proposition. Si M_X est un KS-modèle de X, l'application, $X \to ||M_X||$, qui à un espace topologique associe la réalisation géométrique de son modèle, est une équivalence d'homotopie modérée.

5.4.3. Proposition . Si M est un KS-complexe :

$$\pi_{r+k}(||M||) \overset{\sim}{=} H_{r+k}(\mathrm{Hom}((QM)^*_{\hat{k}} ; \mathbb{Q}_{\hat{k}}))$$

5.5. Exemples. Nous nous contentons de donner quelques constructions de modèles, dans le cadre d'une théorie admissible :

$$r = 4 \qquad \text{et} \qquad R_k = \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]} .$$

5.5.1. S^4

$M^{(0)} = \Lambda_*(x)$ avec $|x| = 4$, $||x|| = 1$ et $dx = 0$

$M^{(2)} = M^{(1)} = M^{(0)}$

$M^{(3)} = M^{(0)} \otimes \Lambda_*(y)$ avec $|y| = 7$, $||y|| = 3$ et $dy = x^2$

$$M = (\Lambda_*(x,y),d).$$

* Interprétation :

$\pi_4(S^4) = \mathbb{Z}$

$\pi_7(S^4) \otimes \mathbb{Q}_3 = \mathbb{Q}_3$

et $\pi_{4+k}(S^4) \otimes \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]} = 0$ pour $k \neq 0,3$.

5.5.2. $K(Z_5 ; 4)$

$M^{(0)} = (\Lambda_*(x,y),d)$ avec : $|x| = 4$, $|y| = 5$

$||x|| = ||y|| = 1$ et $dx = 5y$

$$M = (\Lambda_*(x,y),d).$$

5.5.3. $X = S^4 \underset{5}{\cup} e^5$.

$H_4(X) = H^5(X) = \mathbb{Z}_5$

$M^{(0)} = (\Lambda_*(x,y),d)$ avec $|x| = 4$, $|y| = 5$

$||x|| = ||y|| = 1$ et $dx = 5y$

$M^{(2)} = M^{(1)} = M^{(0)}$

$$M^{(3)} = (M^{(0)} \otimes \Lambda_*(u,v),d) \quad \text{avec :}$$

$$|u| = 7, \qquad |v| = 8 \qquad \text{et} \quad dv = xy$$

$du = 5v - \frac{1}{2}x^2.$

$$M = (\Lambda_*(x,y,u,v),d).$$

Interprétation.

$$\pi_4(X) = \mathbb{Z}_5$$

$$\pi_7(X) \otimes \mathbb{Q}_3 = \mathbb{Z}_5$$

$$\pi_{4+k}(X) \otimes \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]} = 0 \qquad \text{si} \quad k \neq 0,3.$$

5.5.4. $X = K(\mathbb{Z}_5\ ;\ 4) \vee K(\mathbb{Z}_5\ ;\ 4)$.

$M^{(0)} = \Lambda_*(x_1\ ;\ y_1\ ;\ x_2\ ;\ y_2)$ avec $|x_1| = |x_2| = 4$, $|y_1| = |y_2| = 5$,

$||x_1|| = ||x_2|| = ||y_1|| = ||y_2|| = 1$,

et $\quad d\,x_1 = 5\,y_1$

$d\,x_2 = 5\,y_2$

$M^{(1)} = M^{(0)}$

$M^{(2)} = M^{(0)} \otimes \Lambda_*(z_1\ ;\ z_2)$ avec :

$$|z_1| = 8, \quad |z_2| = 7, \qquad ||z_1|| = ||z_2|| = 2$$

$$d\,z_1 = y_1\,x_2 + y_2\,x_1$$

$$d\,z_2 = 5\,z_1 - x_1 x_2$$

$M^{(3)} = M^{(2)} \otimes \Lambda_*(t_1,t_2)$ avec :

$$|t_1| = 9, \quad |t_2| = 8, \qquad ||t_1|| = ||t_2|| = 3$$

$$d\,t_1 = y_1 y_2$$

$$d\,t_2 = 5t_1 - x_1 y_2$$

et

$$M = M^{(3)}$$

Interprétation :

$$\pi_4(X) = Z_5 \oplus Z_5\ , \qquad \pi_7(X) \otimes \mathbb{Q}_3 = Z_5\ , \qquad \pi_8(X) \otimes \mathbb{Q}_3 = Z_5$$

$$\pi_{4+k}(X) \otimes \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]} = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq 0,2 \text{ et } 3.$$

5.5.5. Exemple faisant apparaître les conditions d) et a) dans la construction du modèle.

Soit $[\alpha]$ le générateur de $H^5(K(\mathbb{Z}_7\ ;\ 4)\ ;\ \mathbb{Z})$ et $[\beta]$ le générateur de $H^4(K(\mathbb{Z}\ ;\ 4)\ ;\ \mathbb{Z})$.

Le cup produit $[\alpha] \cup [\beta]$, détermine une application :

$$f : K(\mathbb{Z}_7\ ;\ 4)\times K(\mathbb{Z}\ ;\ 4) \longrightarrow K(\mathbb{Z}\ ;\ 9).$$

Soit X l'espace obtenu par image réciproque de la fibration en chemins associés à $K(\mathbb{Z}\ ;\ 9)$:

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbb{Z}\ ;\ 8) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\mathbb{Z}\ ;\ 8) \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & P \arrow[d] \\
K(Z_7;4)\times K(Z;4) \arrow[r, "f"] & K(Z;9)
\end{tikzcd}$$

BU LILLE

L'examen de la suite de cohomologie de Serre associée à la fibration g, à ceoffi-cients dans $\mathbb{Z}_7$, permet de dire

(1) $$(g)^*_{Z_7}([\alpha] \cup [\beta]) = [\gamma]$$

où $[\gamma]$ est le générateur de $H^8(X\ ;\ \mathbb{Z})$.

Le modèle de X est alors : $M^{(0)} = \Lambda_*(x,y,z)$ avec

$$|x| = 4\ ,\quad |y| = 5\ ,\qquad dx = 7y.$$

$$|x| = 4 \qquad dz = 0$$

$$||x|| = ||y|| = ||z|| = 1$$

avec

$$\rho(y) = \alpha$$
$$\rho(z) = \beta$$

$$M^{(3)} = M^{(2)} = M^{(1)} = M^{(0)}.$$

On n'a pas rajouté de générateurs pour $M^{(3)}$ puisque la condition d) est triviale-ment réalisée. En effet, d'après (1) :

$$\bar{\rho}^{*}_{\mathbb{Z}_7} : \mathrm{Tor}(H^9((M^{(0)})_3 ; \mathbb{Z}_7) = \mathbb{Z}_7 \to E^8 = \mathbb{Z}_7$$

$$[yz] \longmapsto [\gamma]$$

La construction de $M^{(4)}$ se réduit à la réalisation de a).

$M^{(4)} = M^{(0)} \otimes \Lambda_{*}(t)$ avec

$$|t| = 8 \qquad dt = yz \qquad \text{et} \qquad ||t|| = 3.$$

<u>Interprétation</u> :

$$\pi_4(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\pi_8(X) \otimes \mathbb{Q}_3 = \mathbb{Q}_3$$

$$\pi_{4+k}(X) \otimes \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 0,4.$$

<u>*Rappel*</u> : Ces exemples ont été traités dans la théorie admissible $r = 4$ et $R_k = \mathbb{Q}_{\left[\frac{k+3}{2}\right]}$.

BIBLIOGRAPHIE

[B. et al.] P. BOULLAY, F. KIEFER, M. MAJEWSKI, H. SCHEERER, M. STELZER, M. UNSÖLD et E. VOGT
Tame homotopy via differential forms. Preprint (1986).

[C.P.I] B. CENKL et R. PORTER
De Rham theorem with cubical forms. Pac. J. Math. 112 (1984) 35-47.

[C.P.II] B. CENKL et R. PORTER
Foundations of De Rham theory. Preprint (1986).

[Dw] W. DWYER
Tame homotopy theory. Topology J. 18 (1979) 231-338.

[Ha] S. HALPERIN
Lectures on minimal models. Mémoires de la S.M.F. (1983) n°10.

[Sp] E.H. SPANIER
Algebraic topology, McGraw-Hill, New-York, 1966.

[Su] D. SULLIVAN
Infinitesimal computations in topology. Pub. I.H.E.S. n°47 (1977) 269-331.

RESUME

Le sujet de la thèse est l'étude de l'homotopie modérée des espaces topolotiques. Cette notion a été introduite en 1977 par W.G. Dwyer.

Le but de cette théorie est le calcul de la partie libre et d'une partie de la torsion des groupes d'homotopie des espaces en localisant suivant une suite de nombre premiers croissante avec la dimension des groupes. A partir des travaux de M. Lazard sur les anneaux de Lie, W.G. Dwyer établissait une équivalence entre les catégories homotopiques des espaces topologiques modérés et celle des algèbres de Lie différentielles graduées sur un système d'anneaux. Il généralise ainsi la construction de Quillen lorsque le système d'anneaux est constant et égal au corps des rationnels.

Le problème qui s'est posé dès cette époque était de mener des calculs d'homotopie. Un premier pas a été fait dans cette direction en 1979 par B. CENKL et R. PORTER qui ont établi un théorème de De Rham pour les espaces topologiques modérés.

C'est à partir de là que nous avons construit une algèbre différentielle graduée qui porte toute l'information de l'homotopie modérée de l'espace. Un tel objet, appelé modèle de l'espace, permet des calculs effectifs dont nous donnons quelques exemples dans le dernier chapitre de ce travail.