

55376  
1986  
5

55376  
1986  
5

N° d'ordre : 1346



T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE  
LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

Le grade de Docteur de 3ème cycle

en MECANIQUE

par



030 019990 2

Abderrahman HAFID

ECOULEMENT D'UN FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN ENTRE  
DEUX DISQUES COAXIAUX VOISINS EN ROTATION.

Soutenue le : 30 Juin 1986

devant la Commission d'Examen :

Président : R. ZEYTOUNIAN, Professeur à l'U.S.T.L.F.A.

Rapporteurs : A. DYMENT, Professeur à l'U.S.T.L.F.A.

G. LALVEE, Maître de Conférences à l'U.S.T.L.F.A.

Examineurs: F. PARSY, Professeur à l'U.S.T.L.F.A.

M. LOFFICIAL, Maître de Conférences à l'U.S.T.L.F.A.

ECOULEMENT D'UN FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN ENTRE  
DEUX DISQUES COAXIAUX VOISINS EN ROTATION.

A ma femme,

A mes oncles,

A ma famille.

Je tiens à remercier Monsieur G. LALVEE, Maître de Conférences et Monsieur le Professeur A. DYMENT qui m'ont dirigé au cours de cette étude. Leurs précieux conseils et leurs fructueuses discussions m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur R. Kh. ZEYTOUNIAN qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur F. PARSY a accepté de juger ce travail : qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements.

Je remercie Monsieur M. LOFFICIAL, Maître de Conférences avec qui j'ai eu des discussions enrichissantes et qui a accepté de participer à ce jury.

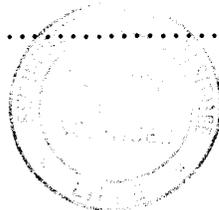
Je tiens à remercier particulièrement Madame Françoise PÉTIAUX de sa gentillesse, de sa patience et de la finition qu'elle a apportées à ce travail.

Ma reconnaissance va également au personnel du C.I.T.I. au personnel du service de reproduction de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées pour leur dévouement et leur gentillesse.

II

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	V
NOTATIONS .....	X
CHAPITRE I.- CINEMATIQUE, LOIS DE CONSERVATION, LOIS DE COMPORTEMENT .....	1
I.1.- CINEMATIQUE .....	2
I.1.1.- Description .....	2
I.1.2.- Vitesse .....	3
I.1.3.- Configuration de référence .....	3
I.1.4.- Description Lagrangienne - Description Eulérienne .	4
I.1.5.- Dérivée matérielle .....	5
I.1.6.- Conservation de la masse .....	6
I.1.7.- Conservation des quantités de mouvement-Equation du mouvement .....	6
I.1.8.- Conservation de l'énergie - Equation de l'énergie .	8
I.1.9.- Second principe de la thermodynamique .....	9
I.1.10.- Bilan équations-inconnues .....	10
I.2.- GRADIENT DE LA DEFORMATION, TENSEURS DE CAUCHY-GREEN, FINGER, RIVLIN-ERICKSEN ET WHITE-METZNER .....	11
I.2.1.- Gradient de la déformation .....	11
I.2.2.- Déformation pure, rotation locale, tenseurs de Cauchy-Green et tenseurs de Finger .....	13
I.2.3.- Gradient de la vitesse, tenseur des taux de dilatation et tenseur des taux de rotation .....	15
I.2.4.- Tenseur de RIVLIN-ERICKSEN et tenseurs de WITHE-METZNER .....	16



III

I.3.- LOIS DE COMPORTEMENT ET FLUIDES DE RIVLIN-ERICKSEN .....	47
I.3.1.- Définition de l'histoire d'une fonction <i>jusqu'à l'instant</i> .....	17
I.3.2.- Principe du déterminisme .....	18
I.3.3.- Principe de localisation spaciale .....	18
I.3.4.- Principe de l'indifférence matériel .....	19
I.3.5.- Matériau simple .....	21
I.3.6.- Formes réduites des lois de comportement .....	22
I.3.7.- Corps homogènes .....	24
I.3.8.- Le groupe des parités .....	25
I.3.9.- Les matériaux isotropes .....	26
I.3.10.- Les fluides .....	28
I.3.11.- Fluides de Stokes .....	30
I.3.12.- Fluide de Reiner-Rivlin .....	32
I.3.13.- Fluide de Rivlin-Ericksen de complexité $n$ .....	33
I.3.14.- Mouvements lents et fluides de Rivlin-Ericksen de degré $n$ .....	35
ANNEXE : ECOULEMENT DE CISAILLEMENT LAMINAIRE PERMANENT D'UN FLUIDE SIMPLE .....	47
CHAPITRE II.- ECOULEMENT A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS D'UN FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN INCOMPRESSIBLE DE DEGRE DEUX OU TROIS ENTRE DEUX DISQUES COAXIAUX EN ROTATION .....	53
II.1.- Problème de GRIFFITHS, JONES et WALTERS .....	53
II.2.- Problème de SHARMA H.G. et SHARMA U.P. ....	62

CHAPITRE III.- ECOULEMENT D'UN FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN INCOMPRESSIBLE DE DEGRE TROIS ENTRE DEUX DISQUES COAXIAUX EN ROTATION ...	70
III.1.- Formulation du problème .....	70
III.2.- Première approximation .....	75
III.3.- Deuxième approximation .....	78
III.4.- Présentation des résultats .....	117
III.5.- Confrontation des résultats avec ceux de GRIFFITHS et de SHARMA .....	135
III.6.- Forces de portance et couple.....	145
REFERENCES .....	149

## INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de degré  $n$  entre deux disques coaxiaux en rotation a été étudié par GRIFFITHS, JONES et WALTERS [25] et par SHARMA H.G. et SHARMA U.P. [23]. Les premiers considèrent le cas  $n=3$ , fluide ayant six coefficients visqueux (un pour le degré un, deux pour le degré deux et trois pour le degré trois). Les disques sont supposés l'un fixe et l'autre animé d'une rotation  $\Omega$  uniforme. Les seconds étudient le cas  $n=2$ , fluide ayant deux coefficients caractéristiques [21] (un pour le degré un et un autre pour le degré deux). Ce cas paraît a priori plus simple. En fait, la complication introduite par les auteurs vient de ce que les deux disques sont en rotation et de ce que à travers l'un des disques, supposé perméable, du fluide est injecté avec une vitesse normale constante.

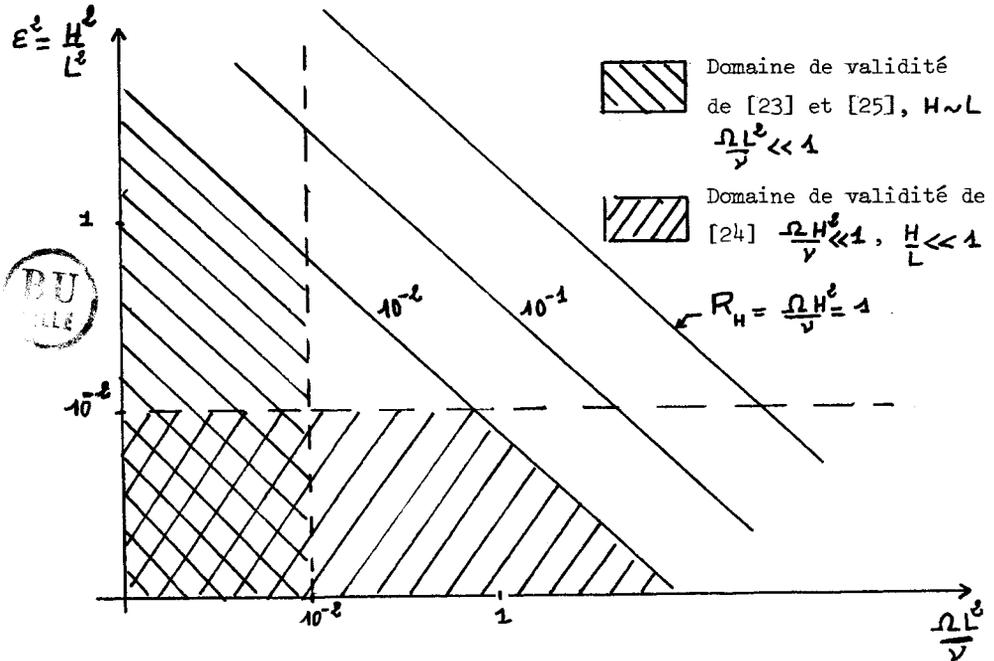
Les auteurs des deux articles cités [23] et [25] s'intéressent seulement aux écoulements à très faible nombre de Reynolds  $R_H$ , dans un domaine caractérisé par une seule longueur, à savoir la distance  $H$  séparant les deux disques. Les ordres de grandeurs des paramètres sans dimensions représentatifs des effets du second et du troisième degré de la loi de comportement du fluide sont supposés tels que les premiers s'introduisent dans les équations de la première approximation et les seconds dans les équations de la deuxième approximation. Dans le cas où  $R = \frac{\Omega H^2}{\nu}$  est petit devant l'unité les équations de la dynamique se simplifient considérablement ce qui permet le calcul de la solution asymptotique à condition de négliger les effets de bord.

Un autre point de vue, introduit par DYMENT [24] dans le cas d'un fluide newtonien, consiste à supposer la distance  $H$  entre les disques très petite à l'égard de leur rayon  $L$ . Pour tenir compte de cette distorsion géométrique on

VI

fait intervenir le paramètre de forme  $\epsilon = H/L$ . Le paramètre  $R_H = \frac{\Omega H^2}{\nu}$  est toujours supposé petit, mais à cause de la distorsion du domaine de l'écoulement le nombre de Reynolds  $\frac{\Omega L^2}{\nu}$  peut être très grand. A ce propos, il convient de noter que l'usage a consacré l'utilisation de  $R_H$  comme paramètre, alors que c'est plutôt  $\frac{\Omega L^2}{\nu}$  qui est le véritable nombre de Reynolds significatif du phénomène, car il associe la vitesse caractéristique donnée  $\Omega L$  à la longueur représentative de l'ordre de grandeur des distances parcourues avec cette vitesse.

Puisque  $\frac{\Omega L^2}{\nu}$  peut être très grand le point de vue de DYMENT [24] s'avère être par certains côtés plus général que celui adopté en [23] et [25], comme l'indique le schéma de principe ci-dessous.



Les deux méthodes ont un domaine de recouvrement commun : c'est le domaine  $R_H \ll 1$  et  $\epsilon \ll 1$  où les solutions doivent être identiques.

## VII

L'intérêt de l'approche de DYMENT réside essentiellement dans le fait qu'elle englobe le cas fréquent dans la pratique où  $\frac{\Omega L^2}{\nu}$  est grand. De plus, puisque  $H \ll L$ , les effets de bord ont une influence relative moindre sur l'écoulement entre les disques et la solution asymptotique obtenue en négligeant ces effets s'approche davantage de la réalité physique.

C'est pour ces raisons que nous avons repris la formulation de DYMENT avec les deux petits paramètres  $R_H$  et  $\epsilon$ . Nous étudions le cas d'un fluide de degré trois avec les mêmes conditions aux limites que celles de SHARMA [23], qui comprennent celles de GRIFFITHS [25] comme cas particulier. Nous faisons deux hypothèses qui nous paraissent intéressantes pour les écoulements des fluides non newtoniens dans des domaines avec distorsion géométrique. Nous supposons d'une part que les forces du deuxième et du troisième degré ne peuvent pas être prépondérantes devant celles de la viscosité classique. Nous exigeons d'autre part de l'équation de la dynamique suivant la direction perpendiculaire à celle du cisaillement d'exprimer, en première approximation, que la contrainte normale au plan de direction principale de l'écoulement est indépendante de la variable d'espace suivant la normale à ce plan.

SHARMA [23] et GRIFFITHS [25] imposent a priori les valeurs des exposants de  $R_H$  du développement asymptotique et donnent des solutions particulières. Le premier calcul les trois premières approximations et le dernier les deux premières. Dans notre étude, nous procédons de manière plus systématique : les coefficients du développement asymptotique qui sont fonction de  $\epsilon$  et  $R_H$  sont déterminés par le principe de moindre dégénérescence et aucune forme particulière n'est imposée à l'avance aux solutions.

Le Chapitre I fait l'objet de rappel de mécanique des milieux continus et d'une synthèse des lois de comportement, visant à bien situer le fluide de Rivlin-Ericksen de degré  $n$ . Y sont explicités les fluides de Stokes, de Reiner-Rivlin, de Rivlin-Ericksen de complexité  $n$  et la notion des mouvements retardés.

## VIII

Le chapitre II expose les formulations et les solutions de GRIFFITHS [25] et SHARMA [23]. Nous avons apporté des corrections à quelques erreurs de calcul rencontrées dans les deux solutions. D'autre part, nous avons calculé la première approximation de la pression hydrostatique de la solution de GRIFFITHS qui n'avait calculé que le champ des vitesses.

Le chapitre III est consacré à l'étude de l'écoulement d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de degré trois entre deux disques coaxiaux en rotation très voisins, avec une faible vitesse d'injection du fluide à travers l'un des disques. Nous donnons les solutions des approximations d'ordre zéro et un. Une comparaison de ces solutions avec celles des auteurs [23] et [25] est faite. Pour le fluide de degré deux, du fait que notre hypothèse concernant l'ordre de grandeur de la vitesse d'injection diffère de celle de SHARMA [23] on trouve un simple décalage dans les ordres d'approximations pour le champ des vitesses et pour la pression hydrostatique. On vérifie que dans le domaine de validité commun les solutions obtenues par les deux méthodes coïncident.

En ce qui concerne le fluide de degré trois, des différences plus marquées apparaissent. Les champs de vitesses ne coïncident pas dès l'ordre d'approximation zéro. Il s'avère que dans notre solution les termes visqueux du troisième degré peuvent influencer notablement l'écoulement dans le plan méridien. Cependant, on vérifie là encore que les solutions coïncident dans le domaine de recouvrement commun.

Nous calculons la force de portance et le couple en première approximation et nous l'appliquons dans le cas d'intérêt pratique où dans le domaine extérieur du domaine compris entre les deux disques le fluide est immobile et à pression constante.

Il s'avère qu'une combinaison de deux coefficients du troisième degré intervient dans l'expression du couple et qu'elle doit être positive pour que la solution ait un sens physique. Cela étant, le couple est plus grand que celui

obtenu en fluide newtonien. Pour les valeurs positives d'une certaine combinaison des coefficients du second degré la force de portance se trouve améliorée par rapport au résultat obtenu en fluide visqueux classique. Pour les valeurs négatives de cette même combinaison, il y a une détérioration des conditions de lubrification.

En fluide du second degré les conditions de lubrification sont plus favorables qu'en fluide newtonien : le couple reste inchangé et la force de portance tend à écarter les deux disques.

NOTATIONS

Nous récapitulons ci-dessous les notations principales de chaque chapitre. Les symboles sont classés par ordre alphabétique pour le Chapitre I et par ordre d'introduction pour le chapitre II et III.

CHAPITRE I

$A_m$  : tenseur de Rivlin-Ericksen de degré  $n$  .

$\alpha$  : coefficient du second degré pour un fluide de degré deux.

$\alpha_1, \alpha_2$  : coefficients du second degré pour un fluide de degré trois.

$B$  : tenseur de Cauchy-Green à gauche.

$\beta_i, i = 1, 2, 3$  : coefficients du troisième degré pour un fluide de degré trois.

$C$  : tenseur de Cauchy-Green à droite.

$D$  : tenseur des taux de déformation.

$\text{Div}(\cdot)$  : opérateur divergence.

$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$  : dérivée par rapport au temps.

$\mathcal{E}$  : espace euclidien à trois dimensions.

$E_T$  : énergie totale d'un corps.

$e$  : énergie interne massique.

$\dot{F}$  : dérivée matérielle d'une quantité  $F$  .

$F'$  : dérivée partielle de  $F$  par rapport au temps.

$\mathcal{B}$  : densité massique de forces.

$F_{,K}$  : gradient de la déformation par rapport à  $K$  .

$F_t$  :  $F$  rapporté à la configuration de référence actuelle.

$F^t$  : l'histoire de la fonction  $F$  jusqu'à l'instant  $t$  .

$\mathcal{F}$  : fonctionnelle ou fonction de comportement.

$\text{Grad}(\cdot)$  : gradient Lagrangien.

$\text{grad}(\cdot)$  : gradient Eulérien.

$\chi$  : application de  $\mathcal{B}$  sur l'ensemble  $\chi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$  .

$\chi(\mathcal{B}, t)$  : configuration du corps  $\mathcal{B}$  à l'instant  $t$  .

$\mathcal{K}$  : configuration de référence.

$K$  : énergie cinétique de  $\mathcal{B}$  .

$\kappa$  : gradient de la vitesse en écoulement viscométrique.

$\mu$  : viscosité dynamique.

$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  : première et deuxième différences de contraintes normales en écoulement viscométrique  $\mathcal{N}_1 = T^{(11)} - T^{(22)}, \mathcal{N}_2 = T^{(22)} - T^{(33)}$  .

$\nu$  : viscosité cinématique.

$P_u$  : puissance des forces extérieures appliquées sur un corps matériel.

$P$  : pression hydrostatique.

$Q$  : flux de chaleur entrant dans un corps matériel.

$q$  : vecteur flux de chaleur.

$\mathcal{Q}$  : tenseur orthogonal.

$R$  : taux de chaleur spécifique.

$\mathcal{R}$  : tenseur de rotation locale.

$\mathcal{S}$  : entropie spécifique.

$s$  : variable temps pour l'histoire d'une fonction jusqu'à l'instant  $t$  :

$$s = \bar{t} - t .$$

$\mathcal{S}$  : défini à partir de  $\mathcal{S}$  par  $\mathcal{S}^R = \mathcal{R}^T \mathcal{S} \mathcal{R}$  .

$t$  : variable temps.

$\bar{t}$  : variable temps lorsque  $t$  est pris comme un temps de référence.

$T$  : température en un point  $x$  .

$\bar{T}$  : fonction viscométrique définie par  $T^{(12)} = \bar{T}(\kappa)$  .

- $T^{(ij)}$  : composantes du tenseur des contraintes en écoulement viscométrique.  
 $\mathbf{T}$  : vecteur contrainte en un point  $\mathbf{x}$  .  
 $\mathbb{T}$  : tenseur des contraintes.  
 $\mathbb{U}$  : tenseur de déformation pure.  
 $\mathbb{1}$  : tenseur unité.  
 $\mathbb{W}$  : tenseur des taux de rotation.  
 $\mathcal{G}$  : point matériel d'un corps.  
 $\mathbf{x}$  : position du point matériel  $\mathcal{G}$  à l'instant  $t$  .  
 $\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  : vitesse et accélération d'un point matériel.  
 $\dot{\mathbf{x}}^{(n)}$  : vitesse d'ordre  $n$  d'un point matériel.  
 $\mathbf{x}$  : position d'un point matériel dans la configuration de référence.

## CHAPITRE II

- $(0, x, \theta, Z)$  : système de coordonnées cylindriques.  
 $U, V, W$  : composantes du vecteur vitesse.  
 $\Omega$  : vitesse de rotation angulaire.  
 $L$  : rayon des disques.  
 $H$  : distance séparant les disques.  
 $R$  : nombre sans dimension défini par  $R_H = \frac{\Omega H^2}{\nu}$  .  
 $\bar{x}, \bar{z}$  : variable sans dimension définies par  $\bar{x} = X/H$  et  $\bar{z} = Z/H$  .  
 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  : composantes adimensionnelles de la vitesse :  $\bar{u} = U/\Omega H R_H$ ,  
 $\bar{v} = V/\Omega H$  ,  $\bar{w} = W/\Omega H R_H$  .  
 $\bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m$  : composantes de la vitesse de l'approximation d'ordre  $m$  .  
 $\bar{p}$  : pression hydrostatique sans dimension :  $\bar{p} = P/\rho \Omega^2 H^2$  .  
 $\bar{p}_m$  : pression hydrostatique d'ordre  $m$  .  
 $R$  : nombre de Reynolds défini par  $R = \frac{\Omega L^2}{\nu}$  .

- $\bar{\alpha}_i, i = 1, 2$  : coefficients du second degré sans dimension :  $\bar{\alpha}_i = \alpha_i / \rho H^2$ .  
 $\bar{\beta}_i, i = 1, 2, 3$  : coefficients du troisième degré sans dimension :  $\bar{\beta}_i = \beta_i / \rho H^3$ .  
 $\bar{\alpha}$  : coefficient du second degré sans dimension pour un fluide de degré deux :  $\bar{\alpha} = \alpha / \rho H^2$ .  
 $m$  : différence relative des vitesses angulaires des deux disques.  
 $\Phi$  : vitesse d'injection ou aspiration.  
 $F, G$  : des fonctions de la variable  $z$  définies par  $W = -\Omega H F(z)$ ,  
 $V = \Omega X G(z)$ .  
 $\lambda$  : fonctions indépendantes des variables  $\bar{x}$  et  $z$  intervenant dans la pression hydrostatique.  
 $\tilde{p}$  : fonction indépendante de la variable  $\bar{x}$  intervenant dans la pression hydrostatique.  
 $\tilde{\Phi}$  : vitesse d'injection sans dimension définie par  $\tilde{\Phi} = \Phi / \Omega H$ .  
 $f_i, g_i, \lambda_i$  : coefficient de  $R_H^i$  dans le développement asymptotiques de la vitesse et la pression hydrostatique :  $F = \sum_{m=0}^{\infty} R_H^m f_m$ ,  
 $G = \sum_{m=0}^{\infty} R_H^m g_m$ ,  $\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} R_H^m \lambda_m$ .

### CHAPITRE III

- $x$  : variable sans dimension définie par  $x = X / L$ .  
 $u, v, w$  : composantes adimensionnelles de la vitesse définies par  
 $u = U / \Omega L \eta$ ,  $v = V / \Omega L$ ,  $w = W / \Omega H \eta w$ .  
 $p$  : pression hydrostatique sans dimension :  $p = P / \rho \Omega^2 L^2 E$ .  
 $\eta, E$  : des ordres de grandeurs de  $U / \Omega L$  et  $P / \rho \Omega^2 L^2$ .  
 $\varepsilon$  : paramètre sans dimension défini par  $\varepsilon = H / L$ .  
 $\eta_1, \sigma_1, E_1$  : sont telles que  $\Omega L \eta_1$ ,  $\Omega L \sigma_1$ ,  $\rho \Omega^2 L^2 E E_1$  soient des ordres de grandeurs de l'approximation d'ordre deux de  $U, V$  et  $P$ .

$u_i, v_i, w_i, p_i$  : composantes de la vitesse et pression d'ordre un du développement asymptotique.

$U_0$  : vitesse caractéristique définie par  $U_0 = \Omega L$ .

$\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  : paramètres sans dimension définis par :  $\hat{\alpha}_i = \alpha_i / \rho L^2$  ,  
 $\hat{\beta}_i = \beta_i U_0 / \rho L^3$  .

$\phi$  : vitesse d'injection ou aspiration sans dimension définie par  
 $\phi = \Phi / \Omega H \eta$  .

$\bar{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$  : paramètres sans dimension définis par  $\bar{\alpha}_i = \alpha_i / \rho H^2$  ,  
 $\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i \cdot \frac{R_H}{\epsilon^4}$  .

$\bar{\alpha}', \bar{\alpha}'', \bar{\alpha}'''$  : combinaisons des coefficients du second degré sans dimension définies par :  $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$  ,  $\bar{\alpha}'' = 2\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$  ,  $\bar{\alpha}''' = 6\bar{\alpha}_1 + 5\bar{\alpha}_2$  .

$R, \bar{M}$  : quantités sans dimension définies par  $R = (1 + \tilde{\beta} m^2 x^2)^{-1}$  ,  
 $\bar{M} = (1 + 3\tilde{\beta} m^2 x^2)^{-1}$  .

$F_i, P_i$  : quantités intervenant dans la solution d'ordre un (voir pages 82 à 112 ).

$F_0$  : force de portance.

$\mathcal{C}_0$  : couple.

CHAPITRE 1

CINEMATIQUE.

LOIS DE CONSERVATION.

LOIS DE COMPORTEMENT.

Note

Nous adopterons dans ce chapitre la règle suivante :

- toute quantité scalaire ou fonction à valeurs scalaires sera représentée par une lettre à trait fin;
- toute quantité vectorielle ou fonction à valeurs vectorielles sera représentée par une lettre à trait gras.
- toute quantité tensorielle ou fonction à valeurs tensorielles sera représentée par une lettre à trait double.
- un point matériel sera représenté par la lettre  $\mathcal{X}$  .

1.1.- CINEMATIQUE1.1.1.- Description

En mécanique des milieux continus, on définit le mouvement d'un corps matériel  $\mathcal{B}$  , dans un référentiel donné, par une application  $\chi$  de  $\mathcal{B}$  sur un ensemble  $\chi(\mathcal{B}, t)$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  à trois dimensions.

A chaque instant  $t$  fixé, on a :

$$x = \chi(\mathcal{X}, t), \quad \mathcal{X} \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathcal{E}.$$

L'écriture (1) signifie que le point matériel  $\mathcal{X}$  occupe, à l'instant  $t$  , la position  $x$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  . L'image  $\chi(\mathcal{B}, t)$  de  $\mathcal{B}$  , par  $\chi$  , est appelée la configuration de  $\mathcal{B}$  à l'instant  $t$  .

On suppose par la suite que :

- $\chi$  est différentiable autant de fois qu'il est nécessaire;
- $\chi$  possède une fonction inverse, notée  $\chi^{-1}$  ;
- $\chi$  et  $\chi^{-1}$  sont continues par rapport à leurs arguments.

### 1.1.2.- Vitesse

On définit la vitesse  $\dot{\mathcal{X}}$ , l'accélération  $\ddot{\mathcal{X}}$  et la vitesse d'ordre  $n$ , soit  $\overset{(n)}{\mathcal{X}}$ , d'un point matériel  $\mathcal{X}$ , par les dérivées successives de  $\mathcal{X}$ :

$$\dot{\mathcal{X}} = \dot{\mathcal{X}}(\mathcal{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathcal{X}(\mathcal{X}, t),$$

$$\ddot{\mathcal{X}} = \ddot{\mathcal{X}}(\mathcal{X}, t),$$

$$\overset{(n)}{\mathcal{X}} = \overset{(n)}{\mathcal{X}}(\mathcal{X}, t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{X}(\mathcal{X}, t).$$

### 1.1.3.- Configuration de référence

On peut choisir une configuration particulière de  $\mathcal{B}$ , notée  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ , et y rapporte toutes quantités concernant  $\mathcal{B}$  et son mouvement.

$\mathcal{K}(\mathcal{B})$  est appelée la configuration de référence. Elle peut être n'importe quelle image régulière de  $\mathcal{B}$ . L'application

$$(I.1,2) \quad \mathcal{X} = \mathcal{K}(\mathcal{X})$$

donne la position  $\mathcal{X}$  occupée par le point matériel  $\mathcal{X}$  dans la configuration de référence  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ ; on a aussi

$$(I.1,3) \quad \mathcal{X} = \mathcal{K}^{-1}(\mathcal{X})$$

et

$$(I.1,4) \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{K}^{-1}(\mathcal{X}), t) = \mathcal{X}_{\mathcal{K}}(\mathcal{X}, t).$$

Dans cette dernière équation, le mouvement de  $\mathcal{B}$  est décrit par l'application  $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$  de la configuration de référence  $\mathcal{K}(\mathcal{B})$  sur la configuration actuelle  $\mathcal{X}(\mathcal{B}, t)$ .

Dans ce qui suit, pour simplifier, nous appellerons la configuration de référence l'application  $\mathcal{K}$  elle-même, et  $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$  la configuration du corps  $\mathcal{B}$  par rapport à  $\mathcal{K}$ .

#### 1.1.4.- Description Lagrangienne - description Eulérienne

##### 1.1.4-a.- Description Lagrangienne (ou référentielle)

Dans cette description, on choisit une configuration particulière effectivement occupée à un instant donné, appelé "initial", par le corps  $\mathcal{B}$  au cours de son mouvement. Le point matériel  $\mathcal{X}$  est alors repéré par sa position  $\mathbf{x}$ , à l'instant  $t=0$ .

Toute fonction  $F(\mathcal{X}, t)$  à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles, peut être remplacée d'après (3), par une fonction  $F_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}, t)$  prenant les mêmes valeurs pour les arguments  $\mathcal{X}$  et  $\mathbf{x}$  qui se correspondent par  $\mathcal{K}$  :

$$(I.1,5) \quad F(\mathcal{X}, t) = F(\mathcal{K}^{-1}(\mathbf{x}), t) = F(\mathbf{x}, t).$$

Pour la suite,  $\mathbf{x}$  désignera toujours la variable de Lagrange.

##### 1.1.4-b.- Description Eulérienne (ou spatiale)

Dans cette description, la position  $\mathbf{x}$  du point matériel  $\mathcal{X}$  et l'instant  $t$  sont considérés comme variables indépendantes. Toute fonction  $F(\mathcal{X}, t)$  peut être remplacée d'après (1), par une fonction de  $\mathbf{x}$  et  $t$  prenant les mêmes valeurs pour les arguments  $\mathcal{X}$  et  $\mathbf{x}$  correspondants :

$$(I.1,6) \quad F(\mathcal{X}, t) = F(\mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \equiv f(\mathbf{x}, t).$$

Ainsi par exemple, nous écrirons pour les vitesses d'ordre  $n$

$$(I.1,7) \quad \dot{x} = \dot{x}(x, t), \quad \frac{d^{(n)}}{dt} x = \frac{d^{(n)}}{dt} x(x, t) \quad (I.1-7)$$

où, pour des raisons de simplification,  $\frac{d^{(n)}}{dt}$  représente à la fois la fonction et la valeur de cette fonction (suivant qu'elle est écrite à droite ou à gauche de l'égalité).

### 1.1.5.- Dérivée matérielle

Dans tout ce qui va suivre :

$$(I.1,8) \quad \dot{f} \text{ et } \text{Grad } f$$

désigneront la dérivée partielle par rapport au temps et le gradient de la fonction  $G$  telle que

$$(I.1,9) \quad f = G(x, t);$$

tandis que

$$(I.1,10) \quad f' \text{ et } \text{grad } f$$

désignerons la dérivée partielle par rapport au temps et le gradient de la fonction  $g$  telle que

$$(I.1,11) \quad f = G(X^{-1}(x, t), t) = g(x, t).$$

Il en sera de même quand  $f$  représente une quantité vectorielle ou tensorielle. On obtient, en particulier, compte tenu de (4), les formules d'Euler :

$$\dot{f} = f' + (\text{grad } f) \cdot \dot{x},$$

(I.1,12)

$$\dot{f} = f' + (\text{grad } f) \dot{x}.$$

L'opérateur appliqué à  $f$  ou  $\mathcal{F}$  qui donne (12) est appelé dérivée matérielle ou dérivée particulaire.

### 1.1.6.- Conservation de la masse

Principe de conservation de la masse : la masse de la matière contenue dans un corps matériel  $\mathcal{B}$  en mouvement est indépendante du temps. On a donc :

$$(I.1,13) \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{X}(\mathcal{B},t)} dM = 0,$$

où  $dM$  désigne l'élément de masse élémentaire et  $\frac{d}{dt} ( )$  désigne  $(\frac{\dot{\quad}}{\quad})$ .

L'hypothèse de continuité sur  $\mathcal{X}$  entraîne que l'équation intégrale (13) est équivalente à l'équation locale.

$$\dot{\rho} + \rho \text{ div } \dot{x} = 0$$

ou aussi

$$(I.1,13_1) \quad \rho' + \text{div}(\rho \dot{x}) = 0.$$

### 1.1.7.- Conservation des quantités de mouvement - équation du mouvement

Dans ce qui suit, nous nous supposons être placés, une fois pour toutes, dans un référentiel absolu.

La loi de conservation des quantités de mouvement postule, à chaque instant, l'égalité du torseur des forces extérieures exercées sur une partie arbitraire  $\mathcal{P}$  du corps  $\mathcal{B}$  et du torseur des quantités de mouvement de cette

même partie. On a donc, formellement,

$$(I.1,14) \quad \mathbf{F}_{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{X}(\mathcal{P})} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv ,$$

$$(I.1,15) \quad \mathcal{M}_{\mathbf{x}_0} [\mathbf{F}] \Big|_{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{P}} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \dot{\mathbf{x}} \, dv ,$$

où :

- $\mathbf{F}$  et  $\mathcal{M}_{\mathbf{x}_0} [\mathbf{F}]$  sont la résultante et le moment résultant en un point  $\mathbf{x}_0$  du torseur des forces extérieures exercées sur la partie matérielle  $\mathcal{P}$  ;
- $\mathcal{X}(\mathcal{P})$  est la restriction de  $\mathcal{X}$  à  $\mathcal{P}$  ;
- le signe " $\wedge$ " désigne le produit vectoriel ;
- les arguments des fonctions sont omis par commodité d'écriture.

Il convient de distinguer deux forces extérieures de nature différente :

- Une force appliquée à distance et donnée par une densité massique  $\mathbf{f}$  ;
- Une force de contact, de densité  $\mathbf{T}$ , appliquée sur la frontière  $\partial \mathcal{X}(\mathcal{P}, t)$  de  $\mathcal{X}(\mathcal{P}, t)$ .

Un point  $\mathbf{x}$  de  $\partial \mathcal{X}(\mathcal{P})$  est commun aux frontières d'une infinité de parties de  $\mathcal{P}$ . D'après un postulat de Cauchy, le vecteur  $\mathbf{T}$ , en  $\mathbf{x}$ , ne dépend que de la normale orientée  $\mathbf{n}$  à la surface frontière :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}).$$

$\mathbf{n}$  est dirigé vers l'extérieur de  $\mathcal{X}(\mathcal{P}, t)$  et le vecteur  $\mathbf{T}$  est appelé contrainte en  $\mathbf{x}$  pour la direction  $\mathbf{n}$ .

Théorème fondamental de Cauchy : si  $\mathbf{T}(\cdot, \mathbf{n})$  est une fonction continue de  $\mathbf{x}$ , il existe un champ de tenseurs  $\mathbb{T}(\cdot)$  tel que :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbb{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}.$$

$\mathbb{T}(\mathbf{x})$  est appelé tenseur des contraintes en  $\mathbf{x}$ .

Théorème : si l'équation (14) est satisfaite pour toutes les parties  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$ , alors, en tous les points intérieurs aux régions de  $\mathcal{X}(\mathcal{B}, t)$  où  $\rho \ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\rho \mathbf{b}$  et  $\operatorname{div} \mathbb{T}$  sont continus, on a :

$$(I.1,16) \quad \rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbb{T} + \rho \mathbf{b}.$$

Réciproquement, si (16) est satisfaite en tous les points intérieurs à une région, et si  $\mathbb{T}$  est continue sur la frontière de celle-ci, alors (14) est vérifiée à l'instant  $t$  pour le corps occupant cette région.

Si  $\mathbb{T}$  est continu dans  $\mathcal{X}(\mathcal{P})$  et que (16) est satisfaite, alors, d'après le théorème de l'intégrale nulle, (15) est équivalente à

$$(I.1,17) \quad \mathbb{T}^T = \mathbb{T},$$

où  $\mathbb{T}^T$  désigne le transposé de  $\mathbb{T}$ .

La relation (17) est la définition d'un tenseur symétrique et constitue dans ce cas la seconde loi de Cauchy du mouvement.

### I.1.8.- Conservation de l'énergie - équation de l'énergie

La loi de conservation de l'énergie constitue en fait le premier principe de la thermodynamique : dans un référentiel absolu, à chaque instant, la somme du flux de chaleur  $Q$  entrant dans  $\mathcal{B}$  et de la puissance  $P_u$  des forces extérieures appliquées sur  $\mathcal{B}$ , est égale au taux d'accroissement de l'énergie totale  $E_T$  de  $\mathcal{B}$ .

$$(I.1,18) \quad \dot{E}_T = P_u + Q,$$

avec

$$E_T = E + K$$

où  $E$  est l'énergie interne de  $\mathcal{B}$  et  $K$  l'énergie cinétique.

L'équation (18) est équivalente à l'équation locale

$$(I.1,19) \quad \rho \dot{e} = \mathbb{T} : \text{grad } \mathbf{x} + \text{div } \mathbf{q} + \rho R$$

dans laquelle :

- $e$  est l'énergie interne massique ;
- $\mathbf{q}$ , le vecteur densité de flux de chaleur qui a un rôle analogue à celui du tenseur de contrainte  $\mathbb{T}$  (Principe de Fourier-Stokes);
- $R$ , le taux de chaleur spécifique (rayonnement, réaction chimique, etc...);
- le signe ":" désigne une double contraction tensorielle.

La dépendance des arguments est sous-entendue dans l'écriture (18) et (19).

L'équation (19) s'appelle l'équation réduite de conservation de l'énergie en mécanique des milieux continus.

### 1.1.9.- Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique postule, à chaque instant  $t$ , l'inégalité locale :

$$\rho \dot{\mathcal{S}} + \text{div}(\mathbf{q}/T) + \rho RT \gg 0;$$

ou, d'après (19)

$$(I.1,20) \quad \rho(\dot{\mathcal{S}} - \dot{e}) + \mathbb{T} : \text{grad } \mathbf{x} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \text{grad } T \gg 0.$$

$\mathcal{S}$  et  $T$  désignent respectivement l'entropie spécifique et la température du point matériel qui occupe la position  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ .

L'inégalité (20) est appelée l'inégalité de Clausius-Duhem.

### I.1.10.- Bilan équations-inconnues

Nous avons établi trois équations de conservation, à savoir :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}), \\ \rho \dot{\mathbf{e}} - \operatorname{div} \mathbb{T} - \rho \mathbf{f} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{e}} - \mathbb{T} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho R &= 0. \end{aligned}$$

Les cinq équations scalaires, établies à partir des hypothèses générales communes à tous les milieux continus, sont insuffisantes pour déterminer les quatorze inconnues.

i) trois composantes de la vitesse,

ii) six composantes du tenseur des contraintes ( $\mathbb{T}$  étant symétrique).

iii) la masse volumique  $\rho$ , l'énergie spécifique  $\mathbf{e}$  et les trois composantes du vecteur courant de chaleur  $\mathbf{q}$ .

$\mathbf{f}$  et  $R$  sont souvent considérés connus.

Il est évident que les milieux continus ne s'opposent pas tous de la même manière aux sollicitations auxquelles ils sont sujets. Il s'impose donc de rechercher des relations qui tiennent compte de la nature du milieu continu considéré. Ces relations sont connues sous le nom de "lois de comportement" ou "lois spécifiques".

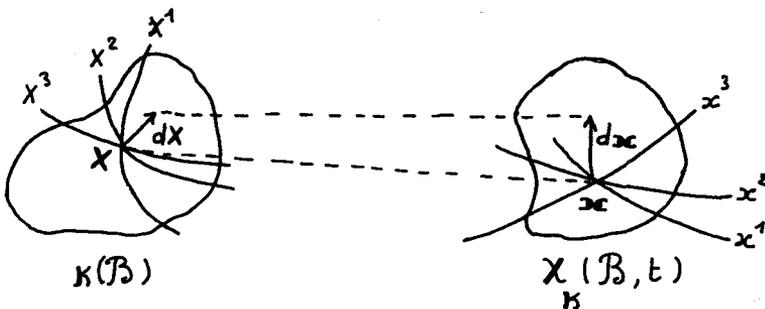
Dans le paragraphe (I.2) qui va suivre, nous faisons un rappel utile à l'introduction des lois de comportement, et ces dernières seront étudiées au paragraphe (I.3).

1.2.- GRADIENT DE LA DEFORMATION, TENSEUR DE CAUCHY, FINGER, RIVLIN-ERICKSEN  
ET WHITE METZNER.

Les lois de comportement font intervenir des relations entre le tenseur des contraintes dans un corps  $\mathcal{B}$  et le gradient de  $\chi$  ou certains tenseurs définis à partir de l'application  $\chi$  sur  $\mathcal{B}$ . Ce sont ces principaux tenseurs que nous allons rappeler dans ce paragraphe.

1.2.1.- Gradient de la déformation

Considérons le corps  $\mathcal{B}$  dans ses configurations respectives  $\kappa(\mathcal{B})$  et  $\chi(\mathcal{B}, t)$  définies par (I.1.2) et (I.1.5). Avant la déformation et par rapport à un système de coordonnées et une origine arbitraire, un point matériel  $\mathcal{X}$  occupe la position  $P$  et a pour coordonnées  $X(X^1, X^2, X^3)$ . Après la déformation et par rapport à un système de coordonnées et une origine arbitraire, le point matériel  $\mathcal{X}$  occupe la position  $p$  et a pour coordonnées  $x(x^1, x^2, x^3)$ . Un point matériel voisin de  $\mathcal{X}$  a pour coordonnées  $(X + dX)(X^1 + dX^1, X^2 + dX^2, X^3 + dX^3)$  et  $(x + dx)(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$  respectivement avant et après la déformation.



L'hypothèse de différentiabilité imposée à l'application  $\chi_{\mathcal{K}}$  permet d'écrire [1] :

$$d\mathbf{x} = \mathbb{F} d\mathbf{X}$$

où  $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{Grad } \chi(\mathbf{X}, t)$ .

$\mathbb{F}$  est appelé le gradient de la déformation. Pour un point matériel donné,  $\mathbb{F}$  est une fonction du temps :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}(t).$$

En description relative, la configuration de  $\mathcal{B}$  à l'instant présent  $t$  est choisie comme configuration de référence. Si  $\xi$  et  $\mathbf{x}$  désignent les positions occupées par le point matériel  $\mathcal{O}\mathcal{B}$  aux instants respectifs  $\tau$  et  $t$ , on a

$$\xi = \chi(\mathcal{O}\mathcal{B}, \tau),$$

$$\mathbf{x} = \chi(\mathcal{O}\mathcal{B}, t).$$

D'où

$$(I.2,1) \quad \xi = \chi[\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \tau] \equiv \chi(\mathbf{x}, \tau).$$

L'application  $\chi_t$  ainsi définie est appelée la déformation relative, et son gradient

$$(I.2,2) \quad \mathbb{F}_t \equiv \mathbb{F}_t(\tau) \equiv \text{grad } \chi_t,$$

le gradient de la déformation relative. La déformation de deux points matériels voisins est alors donnée par

$$d\xi = F_t d x ;$$

et on a, à l'instant  $\tau = t$ ,

$$(I.2,3) \quad F_t(t) = \mathbb{1}$$

$\mathbb{1}$  désigne le tenseur unité.

La règle de dérivation des fonctions continues donne

$$F(\tau) = F_t(\tau) F(t).$$

I.2.2.- Déformation pure, rotation locale, tenseurs de Cauchy-Green et tenseurs de Finger

Puisque  $F$  est inversible, le théorème de décomposition polaire de Cauchy permet de le décomposer de façon unique sous chacune des deux formes suivantes :

$$(I.2,4) \quad F = R U = V R,$$

où  $V$  et  $U$  sont des tenseurs symétriques, définis positifs et  $R$  un tenseur orthogonal. On a alors les propriétés

$$\begin{aligned} V^T &= V, & U^T &= U \\ \text{et} & & R^T &= R^{-1} \end{aligned}$$

En description relative, le tenseur orthogonal  $R_t$  et les tenseurs symétriques  $U_t$  et  $V_t$  sont définis par

$$(I.2,5) \quad \mathbb{F}_t = \mathbb{R}_t \mathbb{U}_t = \mathbb{V}_t \mathbb{R}_t.$$

Les tenseurs symétriques  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{B}$  définis par

$$(I.2,5_1) \quad \mathbb{C} = \mathbb{W}^e = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$$

et

$$\mathbb{B} = \mathbb{V}^e = \mathbb{F} \mathbb{F}^T$$

sont les tenseurs de Cauchy-Green, ou tenseurs de dilatation, à droite et à gauche, leurs inverses sont les tenseurs de Finger.

Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  désignent les positions, dans la configuration de référence  $\mathcal{K}$ , de deux points matériels voisins, leurs positions à un instant sont  $\mathbf{x}\mathbf{c}$  et  $\mathbf{x}\mathbf{c} + d\mathbf{x}\mathbf{c}$  et on a :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}\mathbf{c} &= \mathbb{F}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ d\text{où} \quad (d\mathbf{x}\mathbf{c})^e &= d\mathbf{x} \mathbb{W}^e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= d\mathbf{x} \mathbb{C}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

On a pu dire, ainsi, que  $\mathbb{W}$  est un tenseur de déformation pure à droite, tandis que  $\mathbb{R}$  est un tenseur de rotation locale.

En description relative, les tenseurs de dilatation relative  $\mathbb{C}_t$  et  $\mathbb{B}_t$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_t &= \mathbb{W}_t^e \\ \mathbb{B}_t &= \mathbb{V}_t^e \end{aligned}$$

1.2.3.- Gradient de la vitesse, tenseur des taux de dilatation  
et tenseur des taux de rotation

La position du point matériel  $\mathcal{X}$  étant  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ ,  
 on pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=t} \\ &= \dot{\mathbf{F}}_t(t) \end{aligned}$$

et on a d'après (2) et (1)

$$\mathbf{G} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}}$$

Ainsi  $\mathbf{G}$  est appelé le gradient de la vitesse.

D'une façon générale, le gradient de la vitesse d'ordre  $n$  est défini par

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{z}^n} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=t}.$$

On pose :

$$\mathbf{G}_0 \equiv \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}.$$

Si maintenant on dérive la première égalité de (5) par rapport à  $\mathbf{z}$   
 et puis si on fait  $\mathbf{z} = t$ , il vient compte tenu de (3)

$$(I.2,6) \quad \mathbf{G}_1(t) = \dot{\mathbf{R}}_t(t) + \dot{\mathbf{W}}_t(t).$$

En dérivant, par rapport à  $\mathbf{z}$ , la relation  $\mathbf{R}_t(\mathbf{z}) \mathbf{R}_t^T(\mathbf{z}) = \mathbf{1}$   
 puis en faisant  $\mathbf{z} = t$ , on obtient :

$$\dot{\mathbf{R}}_t(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^T(t) = \mathbf{0}.$$

Cette relation est la définition d'un tenseur antisymétrique.

D'autre part,  $\underline{U}_t(t)$  étant symétrique, il en est de même pour  $\underline{W}_t(t)$ .

Ainsi la décomposition unique de  $\underline{G}_1$  en partie symétrique et antisymétrique est donnée par (6).

On pose

$$\underline{V} = \dot{\underline{R}}_t(t) = \frac{1}{2} (\underline{G}_1 - \underline{G}_1^T)$$

et

$$\underline{D} = \dot{\underline{U}}_t(t) = \frac{1}{2} (\underline{G}_1 + \underline{G}_1^T),$$

et on appelle  $\underline{V}$  et  $\underline{D}$ , respectivement, le tenseur des taux de rotation et le tenseur de taux de déformation.

#### I.2.4.- Tenseurs de Rivlin-Ericksen et tenseurs de White-Metzner

Les dérivées matérielles successives par rapport à  $\underline{z}$ , pour  $\underline{z} = t$ , du tenseur  $\underline{C}_t(\underline{z})$  (respectivement du tenseur  $(-\underline{C}_t^{-1}(\underline{z}))$ ) sont les tenseurs de Rivlin-Ericksen  $\underline{A}_m$  (respectivement les tenseurs de White-Metzner  $\underline{B}_m$ ) :

$$\underline{A}_m = \frac{\partial^m}{\partial \underline{z}^m} \underline{C}_t(\underline{z}) \Big|_{\underline{z}=t},$$

(I.2,6<sub>1</sub>)

$$\underline{B}_m = -\frac{\partial^m}{\partial \underline{z}^m} \underline{C}_t^{-1}(\underline{z}) \Big|_{\underline{z}=t}.$$

On a en particulier

$$\underline{A}_1 = \underline{2D},$$

(I.2,7)

$$\underline{A}_2 = \underline{2G}_1^T \underline{G}_1 + \underline{G}_2 + \underline{G}_2^T$$

et d'une façon générale :

$$A_n = G_n + G_n^T + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} G_j^T G_{n-j}$$

et

$$A_{n+1} = \dot{A}_n + A_n G_1 + (A_n G_1)^T,$$

avec  $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ .

Dans le paragraphe suivant, nous ferons un bref historique sur les lois de comportement des fluides afin de bien situer le fluide de Rivlin-Ericksen de degré  $n$  qui a fait l'objet de notre étude, dans un écoulement particulier, pour  $n=2$  et  $m=3$ .

### I.3.- LOIS DE COMPORTEMENT ET FLUIDES DE RIVLIN-ERICKSEN

#### I.3.1.- Définition de "l'histoire" d'une fonction jusqu'à l'instant $t$ .

Soit  $\Psi$  une fonction du temps à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles. Si  $t$  est un instant présent, nous représentons un instant passé  $t_p$  par la quantité  $t-s$  :

$$t_p = t-s, \quad s \geq 0,$$

l'histoire de  $\Psi$  jusqu'à l'instant  $t$  est une fonction notée  $\Psi^t$  et ses valeurs sont données par

$$(I.3.1) \quad \Psi^t(s) = \Psi(t-s), \quad t \text{ fixé}, \quad s \geq 0$$

### 1.3.2.- Principe du déterminisme<sup>(\*)</sup>

Il fut énoncé pour la première fois par CAUCHY [2] en 1828. Selon ce principe, les contraintes, dans la configuration à l'instant  $t$  du point matériel  $\mathcal{X}$  sont déterminées par l'histoire  $\chi^t$  du mouvement du corps  $\mathcal{B}$  jusqu'à l'instant  $t$ . Formellement, ceci s'écrit :

$$(I.3,2) \quad \mathbb{T}(\chi(\mathcal{X}, t), t) = \mathbb{F}(\chi^t; \mathcal{X}, t)$$

où  $\chi^t$  varie dans l'ensemble des mouvements possibles du corps  $\mathcal{B}$ .

La relation (2) constitue la loi de comportement, du matériau ou milieu matériel, défini par  $\mathbb{F}$ .

$\mathbb{F}$  est appelée "fonctionnelle mémoire" ou encore "fonctionnelle de réponse". Quand la fonctionnelle  $\mathbb{F}$  dépend effectivement des valeurs  $\chi^t(\mathcal{X}, s)$  de l'histoire  $\chi^t$  aux instants passés, on dit que le matériau fait preuve de certaine mémoire. Quand  $\mathbb{F}$  dépend de  $\chi^t$  seulement par l'intermédiaire de sa valeur actuelle, on dit qu'il y a absence de mémoire. Il se peut, aussi, que  $\mathbb{F}$  dépende de  $\chi^t$  seulement par l'intermédiaire de ses valeurs actuelles et de ses dérivées temporelles actuelles; ceci correspond à une mémoire infiniment courte.

### 1.3.3.- Principe de la localisation spatiale

Selon ce principe, le mouvement des points matériels situés à distance finie de  $\mathcal{X}$  n'intervient pas dans la détermination des contraintes en  $\mathcal{X}$ . Formellement, NOLL [3] traduit ce principe par

---

\*) Pour les corps avec liaisons internes, ce principe est énoncé à la page 30.

$$\mathbb{F}(\bar{\chi}^t; \mathcal{X}, t) = \mathbb{F}(\chi^t; \mathcal{X}, t).$$

dès que  $\bar{\chi}^t \equiv \chi^t$  dans un voisinage arbitraire<sup>(\*)</sup> de  $\mathcal{X}$ .

#### 1.3.4.- Principe de l'indifférence matérielle

Ce principe n'a été fort connu qu'à travers la publication importante d'Oldroyd [4] en 1950. OLDROYD exige que la fonctionnelle  $\mathbb{F}$  doit être invariante dans tout changement de repère et il conclut, à propos des lois de comportement faisant intervenir des dérivées temporelles, que ces dérivées doivent être de type d'OLDROYD [4]. En 1958, NOLL [3] a donné une forme explicite et générale pour ce principe. Nous donnons ici cette formulation avec les notations de TRUESDELL [5].

Si dans un référentiel  $\phi$ , le tenseur des contraintes est donné par :

$$(I.3,3) \quad \mathbb{T}(\mathcal{X}, t) = \mathbb{F}(\chi^t; \mathcal{X}, t)$$

alors dans tout référentiel  $\phi^*$  tel que

$$t^* = t + a$$

et

$$(I.3,4) \quad \chi^*(\mathcal{X}, t^*) = \mathcal{X}_0^*(t) + Q(t)(\chi(\mathcal{X}, t) - \mathcal{X}_0)$$

(\*) Désormais, on peut écrire la loi de comportement (I.3,2) sous la forme

$$\mathbb{T}(\chi(\mathcal{X}, t), t) = \mathbb{F}(\chi_{\mathcal{V}(\mathcal{X})}^t; \mathcal{X}, t)$$

où  $\mathcal{V}(\mathcal{X})$  désigne un voisinage arbitraire de  $\mathcal{X}$ .

la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  doit satisfaire la condition

$$(I.3,5) \quad \mathbb{T}^*(\mathcal{X}, t^*) = \mathcal{F}(\mathcal{X}^{*t^*}; \mathcal{X}, t^*)$$

Dans les deux relations (4),  $\mathcal{X}_0$  et  $a$  sont une position et un instant;  $\mathcal{X}_0^*(\cdot)$  représente une fonction à valeurs dans l'espace des positions et  $\mathcal{Q}(\cdot)$  une fonction à valeurs tensorielles orthogonales indiquant l'orientation relative de  $\phi^*$  par rapport à  $\phi$ . On dira de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  qui vérifie (5) qu'elle satisfait le principe de l'indifférence matérielle (ou le principe d'objectivité). On montre (voir TRUESDELL [5], p. 123) que le tenseur des contraintes est lui même une quantité intrinsèque, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\mathbb{T}^*(\mathcal{X}^*, t^*) = \mathcal{Q}(t) \mathbb{T}(\mathcal{X}, t) \mathcal{Q}^T(t)$$

où  $\mathcal{X}^*$  et  $t^*$  se déduisent de  $\mathcal{X}$  et  $t$  grâce à (4), et  $\mathcal{Q}(\cdot)$  est la même fonction intervenant dans (4).

Finalement, si on a :

$$\mathbb{T}(\mathcal{X}, t) = \mathcal{F}(\mathcal{X}^t; \mathcal{X}, t),$$

le principe de l'indifférence matérielle exige que  $\mathcal{F}$  satisfasse la relation

$$(I.3,6) \quad \mathcal{Q} \mathcal{F}(\mathcal{X}^t; \mathcal{X}, t) \mathcal{Q}^T = \mathcal{F}(\mathcal{X}^{*t^*}; \mathcal{X}, t^*)$$

pour tout changement de référentiel de type

$$t^* = t + a$$

$$\chi^*(\mathcal{X}, t^*) = \mathcal{X}_0^*(t) + \Phi(t)(\chi(\mathcal{X}, t) - \mathcal{X}_0).$$

### 1.3.5.- Matériau simple

Une première approximation de  $\chi_K^t$  au voisinage<sup>(\*)</sup> de  $\mathbf{x}$  nous est donnée, pour chaque  $t$ , par son gradient en  $\mathbf{x}$ . NOLL [3] définit un matériau simple comme un matériau dont les valeurs de la fonctionnelle de réponse ne sont pas affectées si l'on remplace  $\chi_K^t$  par  $F_K^t$  pour toute histoire de déformation  $\chi$ . La loi de comportement d'un tel matériau peut donc s'écrire :

$$\mathbb{T}(\mathcal{X}, t) = \mathbb{T}(\chi_K(\mathbf{x}, t), t) = \mathfrak{g}_K(F_K^t(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t).$$

On montre [3] que, à cause du principe d'objectivité, la fonctionnelle  $\mathfrak{g}_K$  ne dépend pas explicitement de  $t$ , d'où

$$(I.3,7) \quad \mathbb{T}(\mathcal{X}, t) = \mathfrak{g}_K(F_K^t(\mathbf{x}), \mathbf{x}).$$

L'existence d'une telle fonctionnelle de réponse est un fait indépendant de la configuration de référence (voir TRUESDELL [5], p. 136). Par conséquent, la définition (7), même si elle fait mention d'une configuration de référence, pourrait être posée indépendamment de la référence.

(\*) On s'intéresse seulement au mouvement du voisinage arbitraire du point matériel  $\mathcal{X}$  (voir note en bas de la page 19).

Par la suite, nous ne considérerons que les milieux matériellement simples. En général, nous aurons choisi une fois pour toutes une configuration de référence  $\mathcal{K}$  ; nous écrirons alors la loi de comportement (7) sous la forme condensée

$$(I.3,8) \quad \mathbb{T} = \mathfrak{g}(\mathbb{F}^t).$$

Définition : On dit qu'on a affaire à un matériau élastique lorsque  $\mathfrak{g}$  se réduit à une fonction ordinaire du gradient de la déformation actuel  $\mathbb{F}(\mathbf{x}, t)$  et ne dépend pas des valeurs  $\mathbb{F}^t(\mathbf{x}, \Delta)$  de l'histoire  $\mathbb{F}^t$  pour  $\Delta > 0$ .

### 1.3.6.- Formes réduites des lois de comportement

La loi de comportement écrite sous la forme (8) satisfait le principe du déterminisme et le principe de localisation spatiale : on doit alors restreindre la fonctionnelle  $\mathfrak{g}$  de façon à satisfaire le principe de l'indifférence matérielle.

Après un changement de référentiel défini par (4), le gradient de la déformation  $\mathbb{F}$  suit la règle de transformation

$$\mathbb{F}^* = \mathbb{Q}\mathbb{F}$$

et son histoire  $\mathbb{F}^t$  suit la règle

$$\mathbb{F}^{*t*} = \mathbb{Q}^t \mathbb{F}^t$$

La fonctionnelle  $\mathfrak{g}$  doit satisfaire la relation (6) qui exprime le principe de l'indifférence matérielle; soit

$$(I.3,9) \quad \mathfrak{g}(\mathbb{Q}^t \mathbb{F}^t) = \mathbb{Q}(t) \mathfrak{g}(\mathbb{F}^t) \mathbb{Q}^T(t)$$

pour toute histoire tensorielle orthogonale  $\mathbb{Q}^t$  et toute histoire tensorielle non singulière  $\mathbb{F}^t$ .

NOLL [3] se sert de la décomposition polaire (I.2,4) et résoud une fois pour toutes l'équation (9) en  $\mathfrak{g}$ . Il obtient le

Théorème de réduction

Soit  $\mathfrak{g}$  une fonctionnelle des histoires tensorielles symétriques définies positives, à valeurs tensorielles symétriques. Alors la loi de comportement de tout milieu matériellement simple peut s'écrire, par rapport à une configuration de référence fixe, sous la forme :

$$(I.3,10) \quad T = R \mathfrak{g}(\omega^t) R^T$$

et inversement, toute fonctionnelle de ce type définit un milieu matériellement simple.

Dans (10),  $\omega^t$  désigne l'histoire de la dilatation et  $R$  la rotation actuelle.

La relation (10) n'est plus sujette à aucune condition. On dit qu'elle est écrite sous forme réduite.

NOLL [3] a montré aussi, dans le cas où l'on veut utiliser  $F_t^t$  au lieu de  $F^t$ , que la loi de comportement (10) est équivalente à

$$(I.3,11) \quad T^R = \mathfrak{g}((\omega_t^t)^R; \omega(t))$$

où l'on a posé pour tout tenseur  $S$

$$S^R \equiv R^T S R$$

étant la rotation actuelle.

TRUESDELL ([5], p. 145) propose une expression équivalente plus commode, en faisant intervenir le tenseur  $C$  de CAUCHY :

$$(I.3,12) \quad \mathbb{T}^R = \mathcal{G}((\mathbb{C}_t^t)^R; \mathbb{C}(t)).$$

La fonctionnelle  $\mathcal{G}$  utilisée dans (12) n'est pas en général celle qui figure dans (11).

Les formes réduites de NOLL (11) et (12) montrent que l'utilisation d'une configuration de référence fixe est inévitable pour exprimer  $\mathbb{R}(t)$ ,  $\mathbb{U}(t)$  et  $\mathbb{C}(t)$ .

### 1.3.7.- Corps homogène

Définition (NOLL) : notons  $\mathcal{G}_K$  la fonctionnelle de réponse d'un milieu matériellement simple relativement à la configuration de référence  $K$ . Les points  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  de  $\mathcal{B}$  sont dits matériellement isomorphes s'il existe deux configurations  $K_1$  et  $K_2$  telles que  $\rho_{K_1}(\mathbf{x}_1) = \rho_{K_2}(\mathbf{x}_2) = \mathbb{C}_t^t$  au voisinage de  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ , et telle que

$$\mathcal{G}_{K_1}(\mathbb{F}^t, \mathbf{x}_1) = \mathcal{G}_{K_2}(\mathbb{F}^t, \mathbf{x}_2)$$

pour toute histoire tensorielle non singulière  $\mathbb{F}^t$ . Notons que dans cette formule  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont donnés évidemment par

$$\mathbf{x}_1 = K_1(\mathcal{X}_1) \text{ et } \mathbf{x}_2 = K_2(\mathcal{X}_2).$$

On dit aussi, de deux points matériels isomorphes, qu'ils sont faits du même matériau.

Si chaque point de  $\mathcal{B}$  est matériellement isomorphe à tout autre, et, si l'on peut établir l'isomorphisme de tous les points de  $\mathcal{B}$  à l'aide d'une seule configuration de référence  $K$ , on dit que le corps  $\mathcal{B}$  est homogène.

On a alors

$$g_K(F^t, x_1) = g_K(F^t, x_2)$$

pour tout  $x_1$  et  $x_2$  de  $K(\mathcal{B})$  et pour tout argument  $F^t$  inversible.

Par la suite nous ne considérons plus que les corps homogènes. Pour de tels corps,  $g$  ne dépend pas de  $x$ .

### 1.3.8.- Le groupe des parités

Soit  $K_1$  une configuration de référence et soit  $\mathcal{G}$  un point matériel de  $\mathcal{B}$ . S'il existe une configuration de référence  $K_2$ , distincte de  $K_1$ , et telle que

$$g_{K_1}(F^t, x) = g_{K_2}(F^t, x)$$

pour tout argument inversible  $F^t$ , on dit qu'il y a parité entre les configurations  $K_1$  et  $K_2$  en  $x$ .

Les applications qui font passer d'une configuration à une autre configuration isomorphe à la première, forment un groupe qui dépend des propriétés de  $g_K$ . Les gradients de ces applications forment eux aussi, un groupe noté  $g_K$  et appelé groupe des parités de  $K$  en  $x$ .

Puisque les  $K$  mises en correspondance par les éléments de  $g_K$  ont la même masse volumique, ces éléments sont unimodulaires\* et forment donc un sous groupe du groupe unimodulaire  $\mathcal{U}$  :

$$g_K \subset \mathcal{U}$$

---

\*) On dit d'un tenseur qu'il est unimodulaire si son déterminant est égal à

On montre (voir par exemple TRUESDELL [5] p. 136 et p. 164) que les éléments du groupe des parités  $g_K$  sont des tenseurs  $H$  unimodulaires tels que l'on ait, pour tout  $F^t$ ,

$$(I.3,13) \quad g_K(F^t H) = g_K(F^t),$$

et inversement, tout  $H$  de ce type est un élément de  $g_K$ . NOLL [3] a établi la relation suivante entre les groupes des parités :

$$(I.3,14) \quad g_{K_2} = P g_{K_1} P^{-1}$$

où l'on a posé  $P = \text{Grad } \lambda$  et  $\lambda: K_1 \rightarrow K_2$ .

Définition : on dit que le matériau en  $\mathcal{C}$  est égalitaire, si

$$g_{K_1} = g_{K_2}$$

pour tous les couples  $(K_1, K_2)$  possibles.

On montre que les seuls groupes correspondants à des matériaux égalitaires sont

$$g = \{1, -1\} \text{ et } g = \mathcal{U}.$$

### 1.3.9.- Les matériaux isotropes

Définition (Cauchy, Noll) : un matériau est isotrope s'il existe une configuration de référence  $K$  telle que l'on ait

$$(I.3,15) \quad g_K > 0,$$

où  $\mathcal{O}$  est le groupe orthogonal. Une telle configuration  $\mathcal{K}$  est dite "naturelle".

En vertu d'un théorème de la théorie des groupes, le groupe qui vérifie (15) ne peut être que le groupe orthogonal  $\mathcal{O}$  ou le groupe unimodulaire :

$$g_{\mathcal{K}} = \mathcal{O} \quad \text{ou bien} \quad g_{\mathcal{K}} = \mathcal{U}$$

Il découle de la définition précédente que, pour un matériau isotrope, la relation (13) est satisfaite pour tout  $\mathcal{H}$  orthogonal. La même relation montre alors que, pour un tel matériau, la valeur de la contrainte  $\mathbb{T}$  n'est pas changée si l'on remplace  $\mathbb{F}^t$  par  $\mathbb{F}^t \mathcal{Q}$ , où  $\mathcal{Q}$  est un tenseur orthogonal constant.

On montre (voir par exemple TRUESDELL [5], p. 168-169) que, pour un matériau isotrope, la forme réduite (12), par rapport à une configuration de référence naturelle, est équivalente à

$$(I.3,16) \quad \mathbb{T} = \mathcal{R} [ \mathbb{C}_t^t ; \mathbb{B} ]$$

dans laquelle la rotation est absente.

Plus encore, on montre, à partir de (14) et (9), que la fonctionnelle  $\mathcal{R}$  doit vérifier l'identité

$$(I.3,17) \quad \mathcal{R} (\mathcal{Q} \mathbb{C}_t^t \mathcal{Q}^T ; \mathcal{Q} \mathbb{B} \mathcal{Q}^T) = \mathcal{Q} \mathcal{R} (\mathbb{C}_t^t ; \mathbb{B}) \mathcal{Q}^T$$

pour tout tenseur orthogonal  $\mathcal{Q}$ , pour toute histoire tensorielle symétrique  $\mathbb{C}_t^t$ , et pour tout tenseur symétrique défini positif  $\mathbb{B}$ .

Une fonctionnelle vérifiant cette condition pour tout  $\mathbb{Q}$  orthogonal est dite isotrope.

Inversement, si  $\mathcal{R}$  vérifie (17), alors (16) représente bien la loi de comportement d'un matériau isotrope relativement à une configuration de référence naturelle.

### 1.3.10.- Les fluides

Nous donnons ici la définition de NOLL [3].

Définition : Un matériau est dit un fluide si, pour une certaine configuration  $\mathcal{K}$ , on a

$$(I.3,18) \quad g_{\mathcal{K}} = \mathcal{U}.$$

Puisque le groupe orthogonal  $\mathcal{O}$  est inclus dans le groupe unimodulaire  $\mathcal{U}$ , les définitions (15) et (18) montrent qu'un fluide est forcément isotrope.

NOLL [3] a montré que, si un matériau est un fluide, alors, (18) est vérifiée pour toute configuration de référence  $\mathcal{K}$ . Il s'ensuit qu'un fluide est égalitaire, avec  $g_{\mathcal{K}} = \mathcal{U}$ , et que toute configuration de référence est une configuration naturelle.

Théorème fondamental des fluides (NOLL 1958) :

Tout fluide a une loi de comportement de la forme

$$(I.3,19) \quad \mathbb{T} = \mathcal{R} (C_t^t; p(t))$$

avec la propriété d'isotropie

$$(I.3,20) \quad \mathcal{R} (\mathcal{Q} C_t^t \mathcal{Q}^T; p) = \mathcal{Q} \mathcal{R} (C_t^t; p) \mathcal{Q}^T,$$

et inversement, toute fonctionnelle des histoires tensorielles symétriques définies positives, à valeurs dans l'espace des tenseurs symétriques, et de ce type, définit un fluide.

Une conséquence de (20) est qu'on doit avoir

$$\mathcal{R}(\mathbb{1}^t, \rho) = -P(\rho)\mathbb{1}.$$

Ce dernier résultat exprime qu'un fluide ne peut pas supporter des contraintes de cisaillement lorsqu'il demeure au repos, à tout instant, passé ou présent, et ce, quelque puisse être sa configuration.

TRUESDELL [5] préfère exprimer la loi de comportement (19) sous la forme

$$(I.3,21) \quad \mathbb{T} = -P(\rho)\mathbb{1} + \mathbb{L}(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}; \rho).$$

La fonctionnelle  $\mathbb{L}$  est isotrope et s'annule lorsque son argument  $(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1})$  est l'histoire  $\mathbb{0}^t$  dont la valeur est toujours nulle.

Par la suite, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux fluides incompressibles ( $\rho = c\frac{t}{t}$ ) dont la loi de comportement (21) devient simplement

$$(I.3,22) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mathbb{L}(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}),$$

avec  $\mathbb{L}(\mathbb{0}^t) = \mathbb{0}$ .

Pour des milieux matériellement simples avec des liaisons internes, il importe de modifier le principe du déterminisme (voir TRUESDELL [5], p. 148) de façon à tenir compte de ces liaisons.

Principe du déterminisme pour des matériaux simples soumis à des liaisons :

La contrainte est déterminée par l'histoire du mouvement seulement à un tenseur arbitraire près, dont la puissance est nulle dans tout mouvement compatible avec la liaison. En d'autres termes,

$$\mathbb{T} = \mathbb{N} + \mathfrak{g}(\mathbb{F}^t)$$

$\mathbb{N}$  étant une contrainte dont la puissance s'annule dans tout mouvement satisfaisant la liaison, et  $\mathfrak{g}$  n'ayant à être définie que pour des arguments  $\mathbb{F}^t$  satisfaisant la liaison.

$(\mathbb{T} - \mathbb{N})$  représente ce qu'on appelle la contrainte déterminée.

En particulier, on montre [3] que, pour un fluide incompressible, le mouvement détermine la contrainte à une pression hydrostatique arbitraire près, si bien que dans (22),  $P$  est arbitraire.

### 1.3.11.- Fluide de Stokes

En 1845, STOKES [6] a exposé les principes sur lesquels est basée sa théorie des fluides visqueux. Ces principes l'on conduit à poser

$$(I.3,23) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mathfrak{F}(A_1),$$

avec 
$$\mathfrak{F}(0) = 0.$$

Il fait les deux hypothèses sur  $\mathfrak{F}$  :

- i)  $\mathfrak{F}$  est linéaire par rapport à  $A_1$  ;
- ii)  $\mathfrak{F}$  est une fonction isotrope de  $A_1$  .

En résolvant la fonction  $\mathfrak{F}$  en  $A_1$ , Stokes aboutit, dans le cas des fluides incompressibles, à ce que l'on appelle un fluide newtonien dont la loi de comportement est de la forme :

$$\mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mu A_1 \quad \text{avec} \quad \mu = \text{constante}$$

ou encore d'après (I.2,7)

$$\mathbb{T} = -P\mathbb{1} + 2\mu \mathbb{D}.$$

Les équations de la dynamique qui résultent de la loi de Stokes sont appelées équations de Navier-Stokes. Notons que, si on pose

$$\mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mathcal{F}(\dot{\mathbb{F}}) = -P\mathbb{1} + \mathcal{F}(\mathbb{D} + \mathbb{W}),$$

le principe d'objectivité exclut la présence du tenseur des taux de rotation, actuel  $\mathbb{W}$  et force  $\mathcal{F}$  à être isotrope. Si bien que nous retrouvons l'équation (23) de Stokes :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= -P\mathbb{1} + \mathcal{F}(\dot{\mathbb{F}}) \\ &= -P\mathbb{1} + \mathcal{F}(A_1) \end{aligned}$$

avec 
$$\mathbb{Q}\mathbb{T}\mathbb{Q}^T = \mathcal{F}(\mathbb{Q}A_1\mathbb{Q}^T)$$

quelque soit  $\mathbb{Q}$  orthogonal.

On voit que  $\mathcal{F}$  dépend de  $\mathbb{F}^t$  seulement par l'intermédiaire de sa dérivée matérielle temporelle actuelle  $\dot{\mathbb{F}}$ . La loi de comportement de Stokes ne peut donc décrire que des fluides dont la mémoire est infiniment courte. Notons aussi que le fluide newtonien (ou de Stokes) conduit à des différences de contraintes normales nulles dans la classe des écoulements de cisaillement laminaire (voir annexe), ce qui n'est pas le cas de beaucoup de fluides réels. Il fallait donc chercher une loi de comportement pour les fluides qui soit plus générale que celle de Stokes.

### 1.3.12.- Fluide de Reiner-Rivlin

Dans le but de trouver une explication à ce que REYNOLDS [7] appelle "dilatancy" et qui est un phénomène dû à la compressibilité, REINER [8], en 1945, propose sa loi de comportement pour les fluides :

$$\mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mathbb{F}(A_1)$$

avec

$$\mathbb{F}(0) = 0.$$

Il développe  $\mathbb{F}$  en série de puissances de  $A_1$ , puis applique le théorème de Cayley-Hamilton pour les tenseurs. Il trouve finalement, pour les fluides incompressibles, la loi de comportement

$$(I.3,24) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \phi_1(a_1, a_2)A_1 + \phi_2(a_1, a_2)A_1^2$$

où les coefficients  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont fonction du deuxième et du troisième invariants scalaires  $a_1$  et  $a_2$  de  $A_1$ . Dans son article de 1948, RIVLIN [9] montre que la solution la plus générale de (23), pour un fluide incompressible, est donnée par (24) ou se ramène à celle-ci. RIVLIN applique cette théorie à certains écoulements de cisaillement laminaire permanent. Ainsi l'équation de comportement (24) a pris le nom d'équation de Reiner-Rivlin pour les fluides.

Si la fonction  $\phi_2$  n'est pas nulle, (24) conduit à des différences de contraintes normales non nulles dans des écoulements viscométriques (voir par exemple [1], p. 137). Cependant les résultats expérimentaux rendent douteux l'existence réelle d'un fluide de Reiner-Rivlin pour lequel  $\phi_2 \neq 0$ . En effet, comme le remarque W.R. SCHOWALTER [1], les différences de contraintes normales non nulles semblent caractéristiques des fluides à mémoire longue, alors que (24) concerne les fluides à mémoire infiniment courte. Plus encore, dans un écoulement de cisaillement laminaire (voir annexe), (24) conduit à

$$\bar{\zeta}(k) = \frac{1}{2} \phi_1(k) \cdot k,$$

$$\mathcal{N}'_1(k) = 0$$

et

$$\mathcal{N}'_2(k) = \frac{1}{4} \phi_2(k) k^2$$

alors que la plupart des données expérimentales sur les solutions des polymères, montrent d'une façon caractéristique que  $|\mathcal{N}'_1| \gg |\mathcal{N}'_2|$ .

A côté de toutes ces anomalies, la loi de comportement de Reiner-Rivlin bénéficie, aussi, de certaines critiques favorables (voir [1], p. 137).

### 1.3.15.- Fluides de Rivlin-Ericksen de complexité $n$ .

En 1955, RIVLIN et ERICKSEN [10] ont publié leur théorie, devenue célèbre, sur les matériaux dits de type différentiel. Ces matériaux sont ceux pour lesquels les contraintes, en un point matériel  $\mathcal{X}$ , à l'instant  $t$ , ne dépendent que de l'histoire du mouvement aux instants  $\tau \in [t-\delta, t]$ ,  $\delta$  étant un nombre positif arbitrairement petit. Ces matériaux ont donc une mémoire infiniment courte. Dans le cas des fluides, la théorie de Rivlin-Ericksen généralise celles de Stokes et de Reiner-Rivlin. Nous allons expliciter cette théorie selon la formulation de NOLL [3].

Si l'histoire du gradient de la déformation  $F^t$  est suffisamment différentiable, elle peut être approchée, pour  $\delta$  petit, par son développement en série de Taylor jusqu'à un certain ordre  $n$ . Cette série est déterminée par les valeurs de  $F^t$  et ses premières dérivées

Définition : un matériau est dit de type différentiel si sa fonctionnelle de comportement  $\mathcal{G}$  ne dépend que de la série d'ordre  $n$ ,  $n$  fixé, de l'histoire  $F^t$ . En d'autres termes, pour tout couple d'histoires  $F^t$  et  $\tilde{F}^t$ ,  $\mathcal{G}$  vérifie

$$\mathfrak{g}(\mathbf{F}^t) = \mathfrak{g}(\tilde{\mathbf{F}}^t)$$

dès que

$$\underset{(k)t}{\mathbf{F}}(0) = \underset{(k)t}{\tilde{\mathbf{F}}}(0), \quad k=0, 1, \dots, n.$$

La loi de comportement (8) s'écrit donc sous la forme

$$(I.3,25) \quad \mathbb{T} = \mathcal{F}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \dots, \overset{(n-1)}{\mathbf{F}}, \overset{(n)}{\mathbf{F}})$$

NOLL a montré que le principe de l'indifférence matérielle, dans le cas des fluides, réduit (25) à

$$(I.3,26) \quad \mathbb{T} = \mathcal{H}(A_1, A_2, \dots, A_m; \rho)$$

où la fonction  $\mathcal{H}$  est une fonction isotrope :

$$(I.3,27) \quad \mathcal{H}(\mathcal{Q}A_1\mathcal{Q}^T, \mathcal{Q}A_2\mathcal{Q}^T, \dots, \mathcal{Q}A_n\mathcal{Q}^T) = \mathcal{Q}\mathcal{H}(A_1, A_2, \dots, A_n)\mathcal{Q}^T$$

pour tous les arguments possibles de  $\mathcal{H}$  et pour tous les tenseurs orthogonaux  $\mathcal{Q}$ .

La loi de comportement écrite sous la forme (26) a été donnée pour la première fois par RIVLIN et ERICKSEN [10]. Ainsi on a appelé un fluide dont la loi de comportement a la forme (26) et où  $\mathcal{H}$  dépend des  $n$  premières valeurs actuelles  $A_i$ , un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité  $n$ .

On trouve la forme générale des solutions de l'équation (27) dans l'article de WANG [11]. Par exemple, la loi de comportement d'un fluide incompressible de complexité 1, a la forme explicite

$$(I.3,28) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \phi_1 A_1 + \phi_2 A_1^2,$$

où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont des fonctions arbitraires de  $\text{trace } A_1$ ,  $\text{trace}(A_1^2)$  et  $\text{trace}(A_1^3)$ , et  $P$  une fonction arbitraire dans le sens qu'elle n'est pas déterminée par le mouvement. La loi de comportement d'un fluide incompressible de complexité 2 est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{T} = & -P\mathbb{1} + \phi_1 A_1 + \phi_2 A_1^2 + \phi_3 A_2 + \phi_4 A_4 \\ & + \phi_5 (A_1 A_2 + A_2 A_1) + \phi_6 (A_1^2 A_2 + A_2 A_1^2) \\ & + \phi_7 (A_1 A_2^2 + A_2^2 A_1) + \phi_8 (A_1^2 A_2^2 + A_2^2 A_1^2) \end{aligned} \quad (\text{I.3,29})$$

où les coefficients de  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8$  sont des fonctions des traces de  $A_1^2, A_1^3, A_2^2, A_2^3, A_1 A_1, A_1 A_2^2, A_1^2 A_2$  et  $A_1^2 A_2^2$ , et  $P$  est arbitraire.

Dans (28) et (29), ou plus généralement pour les fluides de complexité  $n$ , les  $\phi_i$  ne sont pas déterminés de façon unique mais, sauf dans des cas particuliers, il n'existe aucune relation donnant l'un d'entre eux, quelconque, comme fonction univoque des autres.

#### 1.3.14.- Mouvements lents et fluides de Rivlin-Ericksen de degré $n$

La loi de comportement d'un fluide simple est donnée par (21), à savoir

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \mathfrak{g}(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}; \rho) \\ &= -P(\rho) \mathbb{1} + \mathbb{L}(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}; \rho), \end{aligned} \quad (\text{I.3,21})$$

où  $\mathbb{L}$  est une fonctionnelle isotrope et s'annule lorsque son argument  $(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1})$  est l'histoire nulle.

Pour un fluide incompressible, on supprime la dépendance par rapport à

$\rho$  :

$$(I.3,22) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mathbb{L}(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}).$$

La théorie des fluides de Rivlin-Ericksen de degré  $n$  a été introduite pour la première fois en 1960 par COLEMAN et NOLL [12]. Ils ont constaté, expérimentalement, que certains matériaux, n'obéissant pas en général à une loi de comportement de type newtonien, deviennent convenablement décrits par celle-ci lorsqu'ils sont en mouvements lents. S'inspirant de cette remarque, ils ont pensé à des matériaux dont la loi de comportement peut être approchée par une approximation d'ordre supérieur. Pour obtenir ces approximations, COLEMAN et NOLL ont introduit la notion des mouvements "retardés" et exploité la propriété selon laquelle un fluide oublie les déformations qu'il a subies il y a suffisamment longtemps. Des matériaux ayant une telle propriété sont dits "à mémoire évanescence".

L'idée physique de la mémoire évanescence est traduite formellement par le

Principe faible de la mémoire évanescence (COLEMAN et NOLL) :

la fonctionnelle  $\mathbb{L}$  qui figure dans (21) est continue pour l'histoire du repos  $(\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}) = \mathbb{0}$ .

La topologie qui sert à la définition de la continuité a été construite de sorte que la norme, appelée "souvenir",  $\|\mathbb{F}^t\|$  d'une histoire  $\mathbb{F}^t$  soit plus sensible aux valeurs  $\mathbb{F}^t(\lambda)$  dans le passé récent que dans le passé lointain.

Notons aussi que cette topologie, par sa construction, est adaptée pour les matériaux à mémoire longue évanescence et ne peut être adaptée pour des matériaux

ayant une mémoire infiniment courte tels que les fluides de Navier-Stokes et les fluides de Rivlin-Ericksen en général.

Si une suite d'histoires  $\{\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}\}$  a un souvenir qui tend vers zéro, alors, en admettant le principe de continuité ci-dessus, on peut écrire pour la contrainte

$$(I.3,30) \quad \mathbb{T} = -P(\rho) \mathbb{1} + \mathcal{O}(1)$$

pour 
$$\|\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}\| \rightarrow 0.$$

Pour obtenir les approximation d'ordre supérieur COLEMAN et NOLL posent le principe fort d'ordre  $n$  pour une mémoire évanescence : la fonctionnelle  $\mathbb{L}$  est  $n$  fois Frechet différentiable pour l'histoire du repos

Supposer la fonctionnelle  $\mathbb{L}$ ,  $n$  fois différentiable au sens de Frechet, revient à supposer qu'elle admet une sorte de développement de Taylor au  $n$ -ième ordre. Dans le cas présent, on peut écrire

$$\mathbb{T} = -P(\rho) \mathbb{1} + \sum_{i=1}^n \mathbb{L}_i (\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}) + \mathcal{O}(\|\mathbb{C}_t^t - \mathbb{1}\|),$$

où  $\mathbb{L}_i$  est une fonctionnelle polynomiale homogène de degré  $i$ , bornée, et dépendant de  $\rho$  comme paramètre.

A partir d'une histoire  $\mathbb{C}_t^t$  donnée, COLEMAN et NOLL construisent une suite d'histoires  $(\mathbb{C}_t^{t(n)} - \mathbb{1})$  à faible souvenir en posant

$$(I.3,32) \quad \mathbb{C}_t^{t(n)} = \mathbb{C}_t^t(n\lambda)$$

avec  $0 < n \leq 1.$

$\mathbb{C}_t^{t(n)}$  est appelée histoire retardée de la fonction  $\mathbb{C}_t^t$ .

Intuitivement, nous voyons que, lorsque  $\kappa \rightarrow 0$ , le souvenir

$\|C_t^{(\kappa)} - \mathbb{1}\|$  doit en faire autant.

Si  $C_t^{(\kappa)}$  possède  $m$  dérivées continues en  $\lambda = 0$ , le théorème de Taylor donne pour l'histoire  $C_t^{(\kappa)}$ .

$$C_t^{(\kappa)}(\lambda) - \mathbb{1} = \sum_{j=1}^m \frac{(-\kappa \lambda)^j}{j!} A_j^{(n)}(\lambda) + R_m^{(n)}(\lambda, \lambda),$$

avec

$$|R_m^{(n)}(\lambda, \lambda)| = O(\kappa^m \lambda^m) \text{ lorsque } \kappa \lambda \rightarrow 0.$$

$|R_m^{(n)}(\lambda, \lambda)|$  désigne la norme de la valeur  $R_m^{(n)}(\lambda, \lambda)$ . La norme d'un tenseur  $A$  est définie par  $|A| = (\text{trace } A^2)^{1/2}$ . Nous voyons d'après (34) que, pour  $\kappa$  fixé, l'amplitude de l'erreur  $R_m^{(n)}$  peut croître infiniment lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Mais le théorème du retardement de COLEMAN et NOLL [12] nous assure, qu'en terme de souvenir, on a

$$\|R_m^{(n)}\| = O(\kappa^m) \text{ pour } \kappa \rightarrow 0.$$

En substituant (33) dans (31), on obtient la loi de comportement retardée, de COLEMAN et NOLL, pour la contrainte  $T^{(n)}$  du mouvement retardé :

$$(I.3,35) \quad T^{(n)} = -P(\rho) \mathbb{1} + \sum_{j_k=1}^n \ell_{j_1 \dots j_k} (A_{j_1}^{(n)}, \dots, A_{j_k}^{(n)}) + O(\kappa^m)$$

où  $A^{(n)}$  est le tenseur de Rivlin-Ericksen actuel, relatif au mouvement retardé et défini par

$$A_i^{(n)} = \left. \frac{\partial^i}{\partial z^i} C_t^t(nz) \right|_{nz=nt} = n^i A_i.$$

et où les  $\mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}$  sont des fonctions tensorielles multilinéaires de  $k$  variables et dépendent de  $\rho$  comme paramètre, et où la somme porte sur les indices tels que

$$1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n$$

et

(I.3,36)

$$j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq n.$$

Les fonctions  $\mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}$  sont déterminées de façon unique par la donnée de la fonctionnelle  $\mathbb{L}$ . Si le fluide est incompressible, la dépendance par rapport à  $\rho$ , dans (35) est à supprimer.

Mis à part le reste  $\mathcal{O}(n^m)$ , (35) est une loi de comportement particulière d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité  $n$ .

Définition : Un fluide dont la loi de comportement est de la forme

$$\mathbb{T} = \mathcal{G}(C_t^t - \mathbb{1}) = -P(\rho) \mathbb{1} + \sum_{j_1 \dots j_k} \mathcal{L}_{j_1 \dots j_k} (A_{j_1}, \dots, A_{j_k}),$$

où les  $\mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}$  sont des fonctions tensorielles multilinéaires et où les indices vérifient (36), est appelé "un fluide de Rivlin-Ericksen de degré  $n$ ".

Selon le résultat remarquable (35), la loi de comportement d'un fluide simple possédant une mémoire évanescence de COLEMAN et NOLL d'ordre  $n$ , peut être approchée, dans des mouvements lents, par celle d'un fluide de RIVLIN-ERICKSEN de degré  $n$ . La réciproque n'est pas vraie ([5], p. 336), la théorie des fluides de Rivlin-Ericksen de degré  $n$  peut éventuellement s'appliquer à des déformations rapides, comme cela semble être le cas du fluide de Stokes qui, comme nous allons le voir, est un fluide de degré 1.

Dans les chapitres II et III, nous étudierons un écoulement particulier des fluides de Rivlin-Ericksen de degrés 2 et 3. La fonctionnelle de comportement  $\mathbb{L}$  étant isotrope, cette propriété permet d'obtenir une loi de comportement plus explicite pour les fluides de Rivlin-Ericksen de degré quelconque. Nous allons donner ces résultats, seulement pour  $n=1$ ,  $n=2$  et  $n=3$ .

Revenons maintenant à l'équation (35), nous voyons que,

pour  $n=1$ ,

$$(I.3,37) \quad \mathbb{T}^{(n)} = -P\mathbb{1} + \mathcal{L}_1(A_1^{(n)}) + \mathcal{O}(n),$$

pour  $n=2$

$$\mathbb{T}^{(n)} = -P\mathbb{1} + \mathcal{L}_1(A_1^{(n)}) + \mathcal{L}_{11}(A_1^{(n)}, A_1^{(n)}) + \mathcal{L}_2(A_2^{(n)}) + \mathcal{O}(n^2),$$

et pour  $n=3$

$$(I.3,39) \quad \begin{aligned} \mathbb{T}^{(n)} = & -P\mathbb{1} + \mathcal{L}_1(A_1^{(n)}) + \mathcal{L}_{11}(A_1^{(n)}, A_1^{(n)}) + \mathcal{L}_2(A_2^{(n)}) \\ & + \mathcal{L}_{111}(A_1^{(n)}, A_1^{(n)}, A_1^{(n)}) + \mathcal{L}_{12}(A_1^{(n)}, A_2^{(n)}) + \mathcal{L}_3(A_3^{(n)}) \\ & + \mathcal{O}(n^3). \end{aligned}$$

Pour les fluides compressibles, les fonctions  $\mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}$  et  $P$  sont sous-entendu dépendantes de  $\rho$ .

Dans (21), la fonctionnelle  $\mathbb{L}$  étant isotrope, on montre qu'il en est de même pour les fonctions multilinéaires  $\mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}$ . De façon précise, nous devons avoir

$$(I.3,40) \quad \mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}(\mathbb{Q}u_1\mathbb{Q}^T, \dots, \mathbb{Q}u_k\mathbb{Q}^T) = \mathbb{Q} \mathcal{L}_{j_1 \dots j_k}(u_1, \dots, u_k) \mathbb{Q}^T$$

pour tous les tenseurs symétriques  $U_1, \dots, U_k$  et pour tout tenseur orthogonal  $Q$ .

SPENCER et RIVLIN [13] ont donné la forme générale des solutions de (40). En particulier, toute fonction tensorielle linéaire isotrope  $\mathcal{L}(\cdot)$  admet la représentation

$$(I.3,41) \quad \mathcal{L}(A) = \mu_1 (\text{tr. } A) \mathbb{1} + \mu_2 A;$$

toute fonction tensorielle bilinéaire  $\mathcal{L}(\dots)$  dont les arguments sont symétriques, admet la représentation

$$(I.3,42) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(A, B) = & (\mu_1 \text{tr. } A \text{tr. } B + \mu_2 \text{tr. } (AB)) \mathbb{1} \\ & + \mu_3 (\text{tr. } B) A + \mu_4 (\text{tr. } A) B \\ & + \mu_5 (AB + BA) \end{aligned}$$

et toute fonction tensorielle trilinéaire  $\mathcal{L}(\dots)$  dont les arguments sont symétriques, admet la représentation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, B, C) = & [\mu_1 \text{tr. } A \text{tr. } B \text{tr. } C + \mu_2 \text{tr. } A \text{tr. } (BC) \\ & + \mu_3 \text{tr. } B \text{tr. } (AC) + \mu_4 \text{tr. } C \text{tr. } (AB) \\ & + \mu_5 \text{tr. } (ABC)] \mathbb{1} + [\mu_6 \text{tr. } B \text{tr. } C \\ & + \mu_7 \text{tr. } (BC)] A + [\mu_8 \text{tr. } A \text{tr. } C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_9 \operatorname{tr.} A [C] B + [\mu_{10} \operatorname{tr.} A \operatorname{tr.} B + \mu_{11} \operatorname{tr.} A B] C \\
& + \mu_{12} \operatorname{tr.} C (A B + B A) + \mu_{13} \operatorname{tr.} B (A C + C A) \\
& + \mu_{14} \operatorname{tr.} A (B C + C B) + \mu_{15} (A B C + C B A) \\
& + \mu_{16} (A C B + B C A) + \mu_{17} (C A B + B A C).
\end{aligned}$$

(I.3,43)

Dans les trois cas (41), (42) et (43), les  $\mu_i$  sont des constantes. Compte tenu de (41), (42) et (43), les équations (37), (38) et (39) deviennent, respectivement, pour un fluide incompressible, avec un changement de notations près

$$(I.3,44) \quad T^{(n)} = -P \mathbb{1} + \mu A_1^{(n)} + O(n)$$

$$(I.3,45) \quad T^{(n)} = -\tilde{P} \mathbb{1} + \mu A_1^{(n)} + \alpha_1 A_2^{(n)} + \alpha_2 (A_1^{(n)})^2 + O(n^3)$$

$$\begin{aligned}
(I.3,46) \quad T^{(n)} = & -\tilde{P} \mathbb{1} + \mu A_1^{(n)} + \alpha_1 A_2^{(n)} + \alpha_2 (A_1^{(n)})^2 \\
& + \beta_1 (\operatorname{tr.} A_2^{(n)}) A_1^{(n)} + \beta_2 (A_1^{(n)} A_2^{(n)} + A_2^{(n)} A_1^{(n)}) \\
& + \beta_3 A_3^{(n)} + O(n^3).
\end{aligned}$$

où  $\mu$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des constantes et la fonction  $\tilde{P}$  diffère de  $P$  à cause de l'introduction des termes proportionnels à  $\mathbb{1}$  provenant de  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_{11}$ ,  $\mathcal{L}_{12}$  et  $\mathcal{L}_{111}$ . Le fluide étant incompressible, la fonction  $P$  (ou  $\tilde{P}$ ) reste indéterminée en ce sens qu'elle peut prendre ses valeurs indépendamment du mouvement.

Nous pouvons, finalement, au sens des mouvements retardés et de

la mémoire évanescence de COLEMAN et NOLL, énoncer les résultats (30), (44), (45) et (46) comme suit :

- la loi de comportement générale d'un fluide simple incompressible possédant une mémoire évanescence d'ordre zéro\* , est approchée par la loi

$$(I.3,47) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1}$$

à  $\mathcal{O}(1)$  près;

- la loi de comportement générale d'un fluide simple incompressible possédant une mémoire évanescence d'ordre 1, est approchée par la loi

$$(I.3,48) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mu A_1$$

à  $\mathcal{O}(\pi)$  près;

- la loi de comportement générale d'un fluide simple incompressible possédant une mémoire évanescence d'ordre 2, est approchée par la loi

$$(I.3,49) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2$$

à  $\mathcal{O}(\pi^2)$  près;

- la loi de comportement générale d'un fluide simple incompressible possédant une mémoire évanescence d'ordre 3, est approchée par la loi

$$(I.3,50) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 + \beta_1 (k \cdot A_2) A_1 \\ + \beta_2 (A_1 A_2 + A_2 A_1) + \beta_3 A_3$$

à  $\mathcal{O}(\pi^3)$  près.

---

\* ) Quand la fonctionnelle obéit au principe faible de la mémoire évanescence, on dit que le fluide possède une mémoire évanescence d'ordre zéro.

Les lois de comportement données par (47), (48), (49) et (50) sont, respectivement, celles des fluides de Rivlin-Ericksen incompressibles de degré 0 (ou fluide élastique), 1, 2 et 3.

\* La mémoire évanescence au sens de Wang et fluides de Rivlin-Ericksen

Comme nous l'avons signalé, les fluides Newtoniens et les fluides de Rivlin-Ericksen en général n'obéissent ni au principe faible ni au principe fort de la mémoire évanescence au sens de Coleman et Noll. Ceci est une conséquence de la nature de la topologie utilisée. En 1965, WANG [14] et [15] a publié sa théorie sur la mémoire évanescence où il utilise une topologie différente de celle de COLEMAN et NOLL [12]. Dans la théorie de Wang, un fluide général de Rivlin-Ericksen satisfait le principe faible de la mémoire évanescence si sa fonction de comportement est continue de ses arguments. un tel fluide obéit au principe fort de la mémoire évanescence d'ordre  $n$ , si sa fonction de comportement est continuellement différentiable jusqu'à cet ordre.

Dans des mouvements lents (32), la loi de comportement d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité  $n$  possédant une mémoire évanescence de Wang d'ordre  $m$  peut être approchée par celle d'un fluide de Rivlin-Ericksen de degré  $m$  (si  $m < n$ ) ou d'un fluide de degré  $n$  (si  $m \geq n$ ).

\*\*\* Un peu d'histoire sur le fluide du second degré

Depuis l'introduction de la théorie des fluides de Rivlin-Ericksen de degré  $n$ , de nombreuses études théoriques et expérimentales ont été consacrées en particulier au fluide du second degré. Parce que, d'une part, sa loi de comportement est invariante, simple et moins restrictive que celle du fluide de REINER-RIVLIN (24) avec des coefficients constants, et, d'autre part, parce que la loi de comportement du fluide du second degré constitue la deuxième approximation, en terme des mouvements lents, des fluides simples à mémoire évanescence.

En 1964, COLEMAN et MARKOVITZ [16] et [17] ont affirmé, en s'appuyant sur des évidences expérimentales en viscoélasticité finie du second ordre, que l'on doit avoir dans (49)  $\mu > 0$  et  $\alpha_1$  négatif. Peu de temps après, TRUESDELL [18] donne aussi un argument purement mécanique qui justifie  $\alpha_1$  négatif.

En 1965 et 1966 COLEMAN, DUFFIN et MITZEL [19] puis COLEMAN et MITZEL [20], ont démontré l'instabilité, la non existence et la rupture des mouvements de cisaillement pur pour les fluides du second degré avec  $\alpha < 0$ . De ce fait, de graves doutes se sont posés sur l'existence réelle d'un fluide du second degré. Cependant, en 1974, DUNN et FOSDICK [21] publient un article important sur la compatibilité thermodynamique et la stabilité des mouvements des fluides incompressibles du second degré. Ils établissent un théorème selon lequel, la condition

$$\mu \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que la loi de comportement (49) soit compatible<sup>(\*)</sup> avec la thermodynamique et pour que l'énergie libre de Helmotz ait une valeur minimale à l'équilibre. DENN et FOSDICK montrent que l'argument de TRUESDELL en faveur de  $\alpha_1 < 0$ , lorsqu'il est affronté à cette compatibilité thermodynamique, tombe en défaut. Ils montrent aussi que si  $\alpha_1 < 0$  avec  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  maintenue, alors, dans une classe d'écoulements beaucoup plus large que celle de COLEMAN, DUFFIN et MITZEL [19], l'instabilité et la non existence des mouvements sont inévitables.

En 1979, FOSDICK et RAJAGOPAL [22] ont montré que même dans le cas<sup>(\*\*)</sup>

(\*) Pour la définition de la compatibilité thermodynamique (voir [21], pages 196-198).

(\*\*) Ce cas est en accord avec les relevés expérimentaux concernant certains fluides réels que les rhéologues considéraient comme des fluides du second degré.

$$\mu > 0, \alpha_1 < 0 \text{ et } \alpha_1 + \alpha_2 \neq 0,$$

des anomalies d'instabilité d'une grande classe de mouvements sont inévitables.

Il importe donc, compte tenu de ces travaux concernant le fluide incompressible du second degré, de retenir l'hypothèse

$$(I.3,51) \quad \mu > 0, \alpha_1 > 0 \text{ et } \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Ainsi, la loi de comportement (49) se réduit, en posant  $\alpha_1 = \alpha, \bar{\alpha}$

$$(I.3,52) \quad T = -P\mathbb{1} + \mu A_1 + \alpha (A_2 - A_1^2).$$

ANNEXEÉCOULEMENT DE CISAILLEMENTLAMINAIRE PERMANENT D'UNFLUIDE SIMPLE

Considérons les écoulements laminaires et permanents qui satisfont les deux hypothèses suivantes :

$H_1$  : Il existe un système de coordonnées orthogonales par rapport auquel les composantes contravariantes de la vitesse  $\dot{x}^i$  sont de la forme

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= v(x^{(2)}) \\ \dot{x}^{(2)} &= \dot{x}^{(3)} = 0 \end{aligned}$$

$H_2$  : Le système de coordonnées possède une base dans laquelle les composantes du tenseur métrique ne dépendent pas de la coordonnée suivant la direction de l'écoulement. Ceci s'écrit formellement

$$g_{ii} = [h_i(x^{(2)}, x^{(3)})]^2,$$

où  $g_{ij}$  est défini par le produit scalaire des vecteurs de la base:

$$(2) \quad g_{ij} = e_i \cdot e_j$$

Les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  constituent la définition d'un écoulement de cisaillement permanent.

La loi de comportement d'un fluide simple incompressible est (voir (I.3,9)) de la forme

$$(3) \quad T = -P \mathbb{1} + \mathbb{L} (\alpha_t^t - \mathbb{1}).$$

Cette équation peut s'écrire aussi sous la forme

$$\mathbb{T} = -\tilde{P}\mathbb{1} + \mathcal{F}(\mathbb{C}_t^t),$$

de sorte qu'on ait

$$\text{tr.}\mathbb{T} = -3\tilde{P},$$

où  $P$  et  $\tilde{P}$  diffèrent par la partie isotrope de la valeur de  $\mathbb{L} \cdot \tilde{P}$  reste une fonction du point et indéterminée par le mouvement.

La contrainte déterminée, notée  $\mathbb{T}'$ , est donnée par

$$\mathbb{T}' = \mathbb{T} + \tilde{P}\mathbb{1},$$

et on a alors

$$(4) \quad \mathbb{T}' = \mathcal{F}'(\mathbb{C}_t^t)$$

et

$$(5) \quad \text{tr.}\mathbb{T}' = 0.$$

Compte tenu des hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  et les deux définitions (I.2,5<sub>1</sub>) et I.3,1) concernant l'histoire  $\mathbb{C}_t^t$ , on trouve en composantes contravariantes

$$(6) \quad [\mathbb{C}_t^t(\lambda)] = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa\lambda & 0 \\ -\kappa\lambda & 1 + \kappa^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on compare (6) et la définition des tenseurs de Rivlin-Ericksen (I.2,6<sub>1</sub>), on constate que

$$(7) \quad \mathbb{C}_t^t(\lambda) = \mathbb{1} - \lambda \mathbb{A}_1 + \frac{\lambda^2}{2} \mathbb{A}_2,$$

avec

$$[\mathbb{A}_1] = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbb{A}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$(8) \quad \mathbb{A}_n = 0 \quad \text{pour tout } n > 2$$

et où l'on a posé  $\kappa = \frac{h_1}{h_2} \frac{dv}{dx^{(2)}}$ .

D'après (7), l'histoire  $\mathbb{C}_t^t$ , dans tout écoulement vérifiant les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ , est connue dès que  $\mathbb{A}_1$  et  $\mathbb{A}_2$  sont connus; si bien que (4) se réduit à

$$(9) \quad T' = \mathfrak{g}(A_1, A_2)$$

Dans de tels écoulements, l'équation (9) nous montre qu'un fluide simple quelconque se comporte comme un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité

2. La mémoire du fluide n'a pas l'occasion de se manifester ici puisque la contrainte est déterminée, à une pression arbitraire près, par les valeurs actuelles  $A_1$  et  $A_2$ .

La fonction  $\mathfrak{g}$  doit satisfaire le principe de l'indifférence matérielle, et par conséquent elle doit être isotrope :

$$(10) \quad QT'Q^T = \mathfrak{g}(QA_1Q^T, QA_2Q^T)$$

pour tout tenseur orthogonal  $Q$  et pour tous les arguments possibles de  $\mathfrak{g}$ .  
En particulier si  $Q$  représente la réflexion

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

on trouve

$$QA_1Q^T = A_1$$

et

$$QA_2Q^T = A_2.$$

et par conséquent, on doit avoir

$$(11) \quad Q U' Q^T = U'$$

On vérifie facilement que (11) entraîne que  $U'$  a la forme

$$(12) \quad [U'] = \begin{bmatrix} T^{(11)} & T^{(21)} & 0 \\ T^{(21)} & T^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & T^{(33)} \end{bmatrix}.$$

On pose

$$\begin{aligned} T^{(12)} &= \bar{c}(\kappa) \\ T^{(11)} - T^{(22)} &= \mathcal{N}'_1(\kappa) \\ T^{(22)} - T^{(33)} &= \mathcal{N}'_2(\kappa) \end{aligned}$$

Le tenseur  $U'$  est complètement déterminé par la donnée des fonctions  $\bar{c}$ ,  $\mathcal{N}'_1$  et  $\mathcal{N}'_2$  et par la condition  $\text{tr. } U' = 0$ . Les fonctions  $\mathcal{N}'_1$  et  $\mathcal{N}'_2$  sont appelées 1-ière et 2-ième différence de contraintes normales.

On vérifie aisément, en faisant dans (10)

$$[Q] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que  $\bar{\tau}$  est une fonction impaire de  $\kappa$  et que  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  sont des fonctions paires.  $\bar{\tau}$ ,  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  sont appelées les fonctions viscométriques. Si on arrive à les déterminer dans un écoulement particulier vérifiant les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ , la loi de comportement du fluide considéré est complètement déterminée dans la classe entière des écoulements de cisaillement laminaire permanent.

Les conditions (7) et (8) constituent la définition d'un écoulement viscométrique si, la base  $\{e_i\}$  supposée orthogonale, peut, en plus, dépendre du point matériel et du temps. La classe des écoulements de cisaillements laminaires permanents est donc une sous classe de celle des écoulements viscométriques.

Pour un fluide de Stokes,  $\mathcal{N}_1$  et  $\mathcal{N}_2$  sont des fonctions nulles.

Pour un fluide de Reiner-Rivlin (I.3,24), on a ([1], p. 137)

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} \phi_1(\kappa) \kappa,$$

$$\mathcal{N}_1 = 0,$$

$$\mathcal{N}_2 = \frac{1}{4} \phi_2(\kappa) \kappa^2.$$

CHAPITRE II

ÉCOULEMENT A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS D'UN FLUIDE DE  
RIVLIN-ERICKSEN INCOMPRESSIBLE DE DEGRÉ DEUX OU TROIS  
ENTRE DEUX DISQUES COAXIAUX, EN ROTATION.

Dans ce chapitre, nous exposons les problèmes résolus par GRIFFITHS, JONS et WALTERS [25] et par SHARMA, H.G. et SHARMA, V.P. [23] en corrigeant quelques erreurs de calcul que nous avons rencontrées dans leurs solutions.

II.1. PROBLEME DE GRIFFITHS, JONS et WALTERS.

Le fluide de Rivlin-Ericksen incompressible de degré trois [2], remplit l'espace entre deux disques coaxiaux séparés par une distance  $H$ . Le disque inférieur est fixe et l'autre est animé en rotation autour de son axe à vitesse angulaire constante  $\Omega$ .

La loi de comportement du fluide s'écrit :

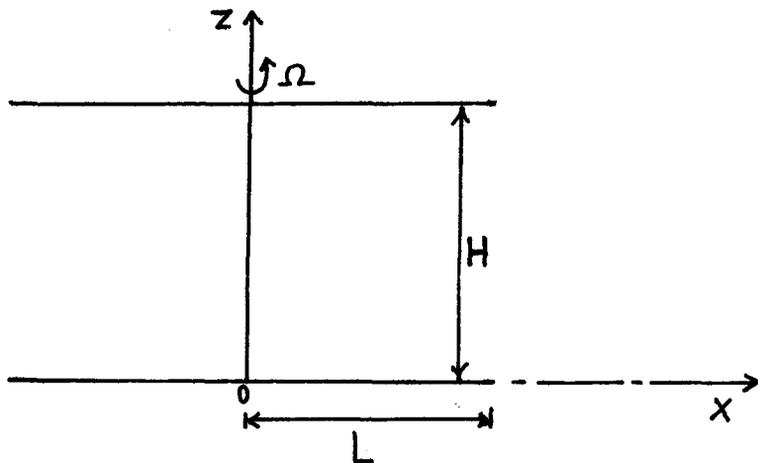
$$(II.1,1) \quad \begin{aligned} \mathbb{T} = & -P \mathbb{1} + \mu \mathbb{A}_1 + \alpha_1 \mathbb{A}_2 + \alpha_2 \mathbb{A}_1^2 + \beta_1 (\text{trace } \mathbb{A}_2) \mathbb{A}_1 \\ & + \beta_2 (\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_2 \mathbb{A}_1) + \beta_3 \mathbb{A}_3. \end{aligned}$$

-  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{1}$  et  $\mathbb{A}_i$  désignent le tenseur des contraintes, le tenseur unité et le  $i$ ème tenseur de Rivlin-Ericksen.

-  $\mu$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des constantes caractéristiques du fluide et  $P$ , une fonction arbitraire dépendant du point appelé pression hydrostatique.

On adopte un système de coordonnées cylindriques  $(O, X, \theta, Z)$ , l'axe  $OZ$  est confondu avec l'axe des disques et dirigé vers le disque en

rotation. L'origine  $O$  est choisie au centre du disque fixe. La position d'un point  $M$  est repérée par ses coordonnées  $(X, \theta, Z)$ . On désigne par  $(U, V, W)$  les composantes de la vitesse du point matériel et on suppose que l'écoulement est axisymétrique autour de  $OZ$ .



Les équations de continuité et du mouvement sont écrites ci-dessous : les points de suspension désignent des termes qui ne seront pas utiles dans les calculs, la variable  $X$  ou  $Z$  portée comme indice signifie une dérivation partielle par rapport à celle-ci et  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide.

$$(XU)_X + (XW)_Z = 0,$$

$$(II.1,2) \quad \rho \left( UU_X + WU_Z - \frac{V^2}{X} \right) + P_X = \mu \left[ U_{ZZ} + \left( U_X + \frac{U}{X} \right)_X \right] \\ + \alpha_1 \left[ \rho \left( V_Z \left( V_X - \frac{V}{X} \right) \right)_Z + \left( (UU_X + U_Z W)_Z + \rho U_X U_Z \right)_Z \right. \\ \left. + \rho \left( \left( V_X - \frac{V}{X} \right)^2 \right)_X + \frac{\rho}{X} \left( V_X - \frac{V}{X} \right)^2 + \dots \dots \right] + \alpha_2 \left[ \left( V_Z \left( V_X \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{v}{x})_z - \frac{1}{x} v_z^2 + (u_z^2)_x + \frac{1}{x} u_z^2 + e(u_z(u_x + w_z))_z + (v_x \\
& - \frac{v}{x})_x^2 + \dots] + \beta_1 [e(v_z^2 u_z)_z + e(u_z^3)_z + 4(u_x v_z^2)_x \\
& + e(w_x v_z^2 - u_z(v_x - \frac{v}{x})^2)_z + 4v_z^2(\frac{1}{x} u_x - \frac{u}{x^2}) + \dots] \\
& + \beta_3 [e(v_z^2 u_z)_z + e(u_z^3)_z + 4(u_z v_z(v_x - \frac{v}{x}))_x \\
& + ((v_x - \frac{v}{x})(u v_x - \frac{u v}{x} + w v_z)_z + e(u_z(v_x - \frac{v}{x})) \\
& + v_z(v_z(2w_x - \frac{w}{x}) + \frac{3}{x} u(v_x - \frac{v}{x}) + (v_x u - \frac{u v}{x} + \frac{v w}{x^2}))_z \\
& + \frac{2}{x} v_z^2(2u_z(v_x - \frac{v}{x}) - (u v_x - \frac{u v}{x} + v_z w)_z - \frac{4}{x} v_z u) + \dots] \\
& + \beta_3 [-\frac{3}{x}(v_x v u + v_z v w)_{zz} + 3(-\frac{1}{x} u_x(v_z^2)_z + v_x(u v_x \\
& + \frac{u v}{x} + w v_z)_z - (\frac{v_z^2}{x})_x u_z + v_z((v_x u)_x + (\frac{u v}{x})_x \\
& + (\frac{u v}{x})_x + (v_z w)_x) + \dots],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(u v_x + w v_z + \frac{u v}{x}) &= \mu [v_{zz} + (v_x + \frac{v}{x})_x] \\
& + \alpha_1 [(u v_x + \frac{u v}{x} + w v_z)_z + e(\frac{u v}{x} v_z - \frac{u v}{x})_z + \dots] \\
& + \alpha_2 [(u_z v_z)_x + \frac{2}{x} u_z v_z + (u_z(v_x - \frac{v}{x}) + \frac{2}{x} u v_z + \frac{2}{x} v w_z)_z \\
& + \dots] + \beta_1 [e(v_z^3)_z + (u_z^2 v_z)_z + e(v_z^2(v_x - \frac{v}{x}))_x \\
& + e(v_z(v_x - \frac{v}{x})^2)_z + \frac{4}{x} v_z^2(v_x - \frac{v}{x}) + \dots] + \beta_2 [e(v_z^3)_z \\
& + e(v_z u_z^2)_z + e(v_z^2(v_x - \frac{v}{x}))_x + e(v_z(v_x - \frac{v}{x})^2)_z \\
& + \frac{4}{x} v_z^2(v_x - \frac{v}{x}) + \dots] + \beta_3 [\dots],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(\mu w_x + w w_z) + P_z &= \mu(w_{zz} + w_{xx} + \frac{w_x}{x}) \\
&+ \alpha_1 [ \varrho (v_z^2)_z + \varrho (\mu_z^2)_z + \varrho (v_z (v_x - \frac{v}{x}))_z + \frac{\varrho}{x} v_z (v_x - \frac{v}{x}) \\
&+ \dots ] + \alpha_2 [ (v_z^2)_z + (\mu_z^2)_z + (v_z (v_x - \frac{v}{x}))_x + \frac{1}{x} v_z (v_x \\
&- \frac{v}{x}) + \dots ] + \beta_1 [ \varrho (v_z^2 \mu_z)_x + 4(v_z^2 w_z)_z + \frac{\varrho}{x} v_z^2 \mu_z \\
&+ \dots ] + \beta_2 [ \varrho (\mu_z v_z^2)_x + \varrho (v_z (-\frac{3}{x} v \mu_z + 3 \mu_z v_x \\
&+ v_x z \mu + \frac{3}{x} \mu v_z + v_{zz} w + 5 w_z v_z)) + \frac{\varrho}{x} \mu_z v_z^2 + \dots ] \\
&+ \beta_3 [ 6(v_z (\mu v_x + \frac{\mu v}{x} + v_z w))_z - \frac{\varrho}{x} \mu v v_z + \dots ].
\end{aligned}$$

Les conditions aux limites imposées sont :

$$(II.1,3) \quad U = V = W = 0 \text{ en } Z = 0,$$

$$U = W = 0, \quad V = \Omega X \text{ en } Z = H.$$

GRIFFITHS et col. [25] cherchent une solution asymptotique quand le nombre  $R_H$  défini par

$$(II.1,4) \quad R_H = \frac{\Omega H^2}{\nu}$$

où  $\nu$  est la viscosité cinétique ( $\nu = \mu/\rho$ ), est petit devant l'unité :

$$(II.1,5) \quad R_H \ll 1.$$

Ils adoptent les grandeurs sans dimension représentées par des lettres minuscules (\*)

$$(II.1,6) \quad X = H \bar{x}, \quad Z = H \bar{z}, \quad U = \Omega H R_H \bar{u},$$

$$V = \Omega H \bar{v}, \quad W = \Omega H R_H \bar{w}, \quad P = \rho \Omega^2 H^2 \bar{p}.$$

Etant donné que l'adimensionnalisation est faite à l'aide d'une unique longueur de référence, ceci signifie que les distances axiale et radiale sont du même ordre de grandeur. Autrement dit, le rayon des disques est de l'ordre de grandeur de la distance qui les sépare. L'écoulement considéré est donc en fait un écoulement à faible nombre de Reynolds significatif de l'écoulement qui est :

$$(II.1,7) \quad R = \frac{\Omega L^2}{\nu}$$

Sous forme adimensionnelle, les équations (II.1,2) s'écrivent :

$$(\bar{x} \bar{u})_{\bar{x}} + (\bar{x} \bar{w})_{\bar{z}} = 0,$$

$$R_H^2 (\bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{w} \bar{u}_{\bar{z}}) - \frac{\nu^2}{\bar{x}} + \bar{p}_{\bar{x}} = [R_H^{-1} \text{div} \alpha_1]^{(\bar{x})}$$

$$+ (\alpha_1 / \rho H^2) [\text{div} \alpha_2]^{(\bar{x})} + (\bar{\alpha}_2 / \rho H^2) [\text{div} \alpha_1]^{(\bar{x})}$$

(II.1,8)

$$+ (\beta_1 \nu / \rho H^4) R_H^2 [R_H^{-1} \text{div} ((\text{tr} \cdot \alpha_2) \alpha_1)]^{(\bar{x})}$$

---

\*) Dans la suite  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{p}$  désigneront des grandeurs sans dimension selon la formulation de GRIFFITHS [25] et celle de SHARMA [23].

Dans notre formulation (page : 71), nous adoptons les grandeurs sans dimension  $x$ ,  $z$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $p$ .

$$+(\beta_2 \nu / \rho H^4) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1)]^{(\bar{x})}$$

$$+(\beta_3 \nu / \rho H^4) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} \alpha_3]^{(\bar{x})},$$

$$R_H^2 [\bar{u} \bar{v}_{\bar{x}} + \bar{w} \bar{v}_{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{x}} \bar{u} \bar{v}] = [\operatorname{div} \alpha_1]^{(\theta)}$$

$$+(\alpha_1 / \rho H^2) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} \alpha_2]^{(\theta)} + (\alpha_2 / \rho H^2) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} \alpha_1]^{(\theta)}$$

$$+(\beta_1 \nu / \rho H^4) R_H^2 [\operatorname{div} (\operatorname{tr} \alpha_2) \alpha_1] + (\beta_2 \nu / \rho H^4) R_H^2 [\operatorname{div} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1)]^{(\theta)} + (\beta_3 \nu / \rho H^4) R_H^2 [\operatorname{div} \alpha_3]^{(\theta)}$$

$$R_H^2 [\bar{u} \bar{w}_{\bar{x}} + \bar{w} \bar{w}_{\bar{z}}] + \bar{p}_{\bar{z}} = [R_H^{-1} \operatorname{div} \alpha_1]^{(\bar{z})}$$

$$+(\alpha_1 / \rho H^2) [\operatorname{div} \alpha_2]^{(\bar{z})} + (\alpha_2 / \rho H^2) [\operatorname{div} \alpha_1]^{(\bar{z})}$$

$$+(\beta_1 \nu / \rho H^4) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} (\operatorname{tr} \alpha_2) \alpha_1]^{(\bar{z})}$$

$$+(\beta_2 \nu / \rho H^4) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1)]^{(\bar{z})}$$

$$+(\beta_3 \nu / \rho H^4) R_H^2 [R_H^{-1} \operatorname{div} \alpha_3]^{(\bar{z})}$$

avec

$$- \alpha_i = \Omega^{-1} A_i, \operatorname{div}(\cdot) = H \operatorname{Div}(\cdot).$$

- l'indice supérieur  $(\bar{x})$  ou  $(\theta)$  ou  $(\bar{z})$  porté par un vecteur, désigne

la composante de ce dernier suivant le vecteur de base  $e_{\bar{x}}$  ou  $e_{\theta}$  ou  $e_{\bar{z}}$ .

- Une quantité écrite entre crochets est sans dimension et de l'ordre de l'unité constituée uniquement de sommes ou produits de  $\frac{1}{x}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  ou de leurs dérivées partielles par rapport à  $\bar{x}$  ou  $\bar{z}$ .

On pose par la suite :

$$(II.1,9) \quad \bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\rho H^2}, \quad i=1,2 \quad \text{et} \quad \bar{\beta}_i = \frac{\beta_i \nu}{\rho H^4}$$

Pour des raisons qui ne sont pas justifiées, GRIFFITHS et col. [25] posent les hypothèses :

$$(II.1,10) \quad \bar{\alpha}_i \sim 1 \quad \text{et} \quad \bar{\beta}_i R_H^e \sim R_H^e$$

Ils cherchent la solution asymptotique sous la forme :

$$(II.1,11) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{m=0}^{\infty} R_H^{2m} \bar{u}_m, & \bar{v} &= \sum_{m=0}^{\infty} R_H^{2m} \bar{v}_m, \\ \bar{w} &= \sum_{m=0}^{\infty} R_H^{2m} \bar{w}_m, & \bar{p} &= \sum_{m=0}^{\infty} R_H^{2m} \bar{p}_m. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites (II.1,6) sont écrites, sous forme adimensionnelle, comme suit :

$$\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = \bar{w}_0 = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = 0,$$

$$(II.1,12) \quad \bar{u}_0 = \bar{w}_0 = 0, \quad \bar{v}_0 = \bar{x} \quad \text{en} \quad \bar{z} = 1,$$

$$\bar{u}_m = \bar{v}_m = \bar{w}_m = 0 \quad \text{en} \quad \bar{z} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{z} = 1 \quad \text{pour} \quad m \geq 1.$$

Nous verrons qu'avec l'hypothèse (II.1,10).

- la vitesse d'ordre zéro coïncide avec celle obtenue en fluide newtonien;
- les coefficients du deuxième degré  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  interviennent dans la solution

d'ordre un pour les trois composantes de la vitesse tandis que ceux du troisième degré  $\beta_1$  et  $\beta_2$  n'interviennent que dans  $u_1$  et  $w_1$ .

On introduit (II.1,11) dans le système d'équations (II.1,8). Les équations d'ordre zéro s'obtiennent en omettant les termes en  $R_H^2$ . Ces équations aux dérivées partielles sont très compliquées; GRIFFITHS et col. [25] proposent la solution suivante qui vérifie les conditions aux limites (II.1,12).

$$(II.1,13) \quad \begin{aligned} \bar{u}_0 &= \frac{\bar{x}}{60} (-5\bar{z}^4 + 9\bar{z}^2 - 4\bar{z}), \quad \bar{v}_0 = \bar{x}\bar{z}, \\ \bar{w}_0 &= \frac{1}{60} (2\bar{z}^5 - 6\bar{z}^3 + 4\bar{z}^2). \end{aligned}$$

On constate que la vitesse d'ordre zéro ne dépend pas des coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ , elle coïncide avec celle obtenue en fluide newtonien (fluide de degré 1).

Par extraction des termes proportionnels à  $R_H^2$  des équations (II.1,8) GRIFFITHS et col. [25] obtiennent les équations d'ordre un et proposent la solution qui vérifie les conditions aux limites (II.1,12). On obtient :

$$(II.1,14) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{x}_1, \quad \bar{v}_1 = \frac{\bar{x}}{6300} [-20\bar{z}^7 + 63\bar{z}^5 - 35\bar{z}^4 - 4\bar{z} \\ &+ (\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) (210\bar{z}^5 - 630\bar{z}^3 + 420\bar{z}^2)], \quad \bar{w}_1 = -\frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{x}_1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_1 = & - \frac{\bar{x}^2}{4536000} [ 332 \bar{z}^2 - 579 \bar{z}^3 + 192 \bar{z}^5 + 252 \bar{z}^6 - 162 \bar{z}^7 \\
& - 30 \bar{z}^8 - 15 \bar{z}^9 + 10 \bar{z}^{11} + \bar{\alpha}_1 ( 44 16 \bar{z}^2 + 56 \bar{z}^3 - 15 120 \bar{z}^4 \\
& + 13608 \bar{z}^5 - 3360 \bar{z}^6 + 400 \bar{z}^9 ) + \bar{\alpha}_2 ( 1896 \bar{z}^2 + 33 56 \bar{z}^3 \\
& - 15 120 \bar{z}^4 + 13608 \bar{z}^5 - 3360 \bar{z}^6 - 1080 \bar{z}^7 + 700 \bar{z}^9 ) \\
& + [ ( 4 \bar{\alpha}_1 + 3 \bar{\alpha}_2 ) ( \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 ) - ( 7 \bar{\beta}_2 + 6 \bar{\beta}_1 ) ] ( - 11 520 \bar{z}^2 - 720 \bar{z}^3 \\
& + 50 400 \bar{z}^4 - 45 360 \bar{z}^5 + 7 200 \bar{z}^7 ) ] - \frac{\bar{x}^4}{30} ( \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 ) ( 2 \bar{z}^2 - 3 \bar{z}^3 \\
& + \bar{z}^5 ),
\end{aligned}$$

Il est à noter que l'expression de  $\bar{\chi}_1$  donnée dans [25] a dû être corrigée : le coefficient de  $\bar{z}^{11}$ , les coefficients du polynôme en  $\bar{z}$  facteur de  $\bar{\alpha}_2 \bar{x}^2$  et le facteur  $(4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2)(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2)$  tels qu'ils sont donnés dans [25] sont incorrects.

La pression hydrostatique n'a pas été calculée par GRIFFITHS, nous avons effectué ce calcul pour l'approximation d'ordre zéro. On trouve :

$$(II.1,15) \quad \bar{p}_0 = \frac{3}{20} \bar{x}^2 - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_2 \bar{x}^2 + \bar{w}_0 \bar{z} + \text{constante.}$$

## II.2. PROBLEME DE SHARMA H.G. et SHARMA U.P.

En 1975, SHARMA H.G. et SHARMA U.P. [23] ont étudié l'écoulement d'un fluide de Rivlin-Ericksen incompressible de degré deux entre deux disques coaxiaux. La complication introduite par ces auteurs par rapport à l'étude de GRIFFITHS, JONES et WALTERS [25] (1969), vient de ce que les deux disques sont en rotation et de ce que à travers l'un des disques, supposé perméable, du fluide est injecté avec une vitesse normale constante.

On désigne par  $\Omega$  et  $(m+1)\Omega$  les vitesses de rotations angulaires des disques inférieur et supérieur et par  $\Phi$  la vitesse d'injection à travers ce dernier.

La loi de comportement du fluide de degré deux s'obtient de (II.1,1) en faisant  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  :

$$(II.2,1) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^e$$

En 1978 FOSDICK et RAJAGOPAL [22] ont établi pour un fluide de degré deux les inégalités et la relation suivantes

$$(II.2,2) \quad \mu \gg 0, \quad \alpha_1 \gg 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

La loi de comportement (II.2,1) s'écrit :

$$(II.2,3) \quad \mathbb{T} = -P\mathbb{1} + \mu A_1 + \alpha (A_2 - A_1^2)$$

où nous avons posé  $\alpha_1 = \alpha$ .

Dans ce qui suit, nous écrivons les équations et la solution de SHARMA

et col. [23] en adoptant (II.2,3) au lieu de (II.2,1).

Dans le système de coordonnées cylindriques décrit au paragraphe II.1, les équations régissant le mouvement s'écrivent :

$$(II.2,4) \quad (XU)_X + (XW)_Z = 0,$$

$$\begin{aligned} & UU_X + WU_Z - \frac{V^2}{X} + \frac{1}{\rho} P_X = \nu \left[ \left( U_X + \frac{U}{X} \right)_X + U_{ZZ} \right] \\ & + \frac{\alpha}{\rho} \left[ 2U_X U_{XX} + 2UU_{XXX} - \frac{2}{X} V_X V_{XX} + \frac{U}{Z} W_{XX} + \frac{U}{XZ} W_{XX} \right. \\ & + 2WU_{XXZ} + 2V_X V_{XX} + 2W_X W_{XX} + \frac{U}{ZZ} U_X + UU_{XZZ} \\ & - \frac{V}{X} V_{ZZ} + WU_{ZZZ} - \frac{U}{Z} W_{ZZ} - \frac{U}{X} W_{XZ} + UW_{XXZ} + 2W_X W_{XZ} \\ & + WW_{XZZ} + W_{ZZ} W_X + V_Z V_{XZ} + \frac{V}{X} V_{ZZ} + \frac{2}{X} UU_{XX} + \frac{2}{X} U_X W \\ & \left. + \frac{1}{X} W_X^2 - \frac{2}{X^2} UU_X - \frac{2}{X^2} WU_Z + \frac{2}{X^3} U^2 - \frac{1}{X} \frac{U^2}{Z} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & UV_X + WV_Z + \frac{UV}{X} = \nu \left[ \left( V_X + \frac{V}{X} \right)_X + V_{ZZ} \right] + \frac{\alpha}{\rho} \left[ -U_{XX} V_X \right. \\ & + UV_{XXX} - \frac{1}{X} U_X V_X + \frac{2}{X} UU_{XX} + \frac{V}{X^2} U_X + V_{XXZ} W + \frac{1}{X} WU_{XZ} \\ & \left. - \frac{1}{X^2} WV_Z + UV_{XZZ} - \frac{1}{X} U_Z V_Z + \frac{U}{X} V_{ZZ} + WV_{ZZZ} - \frac{V}{Z} W_{ZZ} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{U}{XZ} \frac{V}{Z} + \frac{1}{X} \frac{VW}{XZ} - \frac{V}{X} \frac{W}{XZ} \Big], \\
UW_X + W_Z W + \frac{1}{\rho} \frac{P}{Z} &= \nu [W_{XX} + \frac{1}{X} W_X + W_{ZZ}] + \frac{\alpha}{\rho} [UU_{XZ} \\
& + \frac{U}{Z} \frac{U}{XX} + \frac{UU}{XXZ} - \frac{V}{X} \frac{V}{XZ} + \frac{WU}{XZZ} + \frac{WU}{XZZ} - \frac{WU}{Z} \frac{U}{XZ} + \frac{UW}{Z} \frac{U}{XZ} \\
& - \frac{U}{XX} \frac{W}{X} + \frac{WW}{XXZ} + \frac{W}{XX} \frac{W}{Z} + \frac{UW}{XXX} + \frac{V}{Z} \frac{V}{XX} + \frac{V}{X} \frac{V}{XZ} \\
& + \frac{2U}{Z} \frac{U}{ZZ} + \frac{2V}{Z} \frac{V}{ZZ} + \frac{2W}{Z} \frac{W}{ZZ} + \frac{2UW}{XZZ} + \frac{2W}{Z} \frac{W}{ZZZ} \\
& + \frac{1}{X} \frac{U}{Z} \frac{U}{X} + \frac{1}{X} \frac{UU}{XZ} + \frac{1}{X} \frac{WU}{ZZ} - \frac{1}{X} \frac{W}{Z} \frac{U}{Z} - \frac{1}{X} \frac{U}{X} \frac{W}{X} \\
& + \frac{1}{X} \frac{UW}{XX} + \frac{1}{X} \frac{WW}{XZ} + \frac{1}{X} \frac{W}{X} \frac{W}{Z} \Big].
\end{aligned}$$

La variable  $X$  ou  $Z$  portée comme indice signifie une dérivation partielle par rapport à celle-ci.

Aux équations (II.2,4), sont associées les conditions aux limites, en supposant les disques infinis

$$U = W = 0, \quad V = \Omega X \quad \text{en } Z = 0, \quad (\text{II.2,5})$$

$$U = 0, \quad V = (m+1)\Omega X, \quad W = \Phi \quad \text{en } Z = H.$$

SHARMA et col. cherchent une solution asymptotique à faible  $R_H = \frac{\Omega H^2}{\nu}$ .

Ils adoptent l'adimensionnalisation suivante :

$$Z = H z ,$$

$$(II.2,6) \quad U = \Omega X F'(z) , \quad V = \Omega X G(z) , \quad W = -\varepsilon \Omega H F(z) ,$$

$$P = \mu \Omega \left\{ -\tilde{p}(z) + \frac{X^2}{H^2} \left[ \frac{\alpha \Omega}{\mu} (F'' + G') + \lambda \right] \right\}$$

où  $\lambda$  est une constante.

L'apport de (II.2,6) dans les équations (II.2,4) donne

$$R_H (F'' - G'' - \varepsilon FF'') = F''' - \bar{\alpha} R_H (F'' + G'' + \varepsilon FF'') - \varepsilon \lambda ,$$

$$(II.2,7) \quad \varepsilon R_H (FG - FG') = G'' - \varepsilon \bar{\alpha} R_H (FG'' - F'G''') ,$$

$$4 R_H FF' = \tilde{p}' - \varepsilon F'' + 4 \bar{\alpha} R_H (4F'F'' + FF''').$$

L'équation de continuité est identiquement vérifiée.  $\bar{\alpha}$  est défini par  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\rho H^2}$  et supposé de l'ordre de l'unité :

$$(II.2,8) \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\rho H^2} \sim 1 .$$

En fait, l'écoulement considéré est à faible nombre de Reynolds; dans l'adimensionnalisation (II.2,6) de la pression  $\frac{\lambda}{H}$  est considéré de l'ordre de l'unité, ce qui signifie que  $H$  est de l'ordre de grandeur du rayon  $L$  des disques.

Les conditions aux limites (II.2,5) s'écrivent, sous forme adimensionnelle :

$$(II.2,9) \quad F = F' = 0, \quad G = 1 \quad \text{en } z = 0,$$

$$F' = 0, \quad F = \tilde{\Phi}, \quad G = m+1 \quad \text{en } z = 1$$

avec

$$(II.2,10) \quad \tilde{\Phi} = \frac{-\Phi}{2\Omega H}$$

SHARMA fait l'hypothèse :

$$(II.2,11) \quad \tilde{\Phi} \ll 1.$$

Nous pensons que cette hypothèse est faite pour que l'écoulement sans injection dont la vitesse caractéristique est  $\Omega H$ , soit très peu perturbée par  $\tilde{\Phi}$ .

La solution est cherchée sous la forme :

$$(II.2,12) \quad F = \sum_{m=0}^{\infty} R_H^m f_m, \quad G = \sum_{m=0}^{\infty} R_H^m g_m, \quad \lambda = \sum_{m=0}^{\infty} R_H^m \lambda_m.$$

En portant (II.2,12) dans les équations (II.2,7), on trouve après intégration :

$$\begin{aligned}
 \text{(II.2,13)} \quad F' &= \frac{U}{\Omega X} \\
 &= 3\tilde{\Phi} (z^2 - z) - R_H \left\{ \frac{1}{60} [ (10m + 4m^2)z - (30m + 9m^2)z^2 \right. \\
 &\quad \left. + 20mz^3 + 5m^2z^4 ] - \frac{\tilde{\Phi}^2}{140} (26z - 54z^2 + 42z^5 - 14z^6) \right\} \\
 &\quad + R_H^2 \left\{ -\frac{\tilde{\Phi}}{25200} [ (540 + 510m + 5m^2)z - (3060 + 1590m \right. \\
 &\quad \left. - 4m^2)z^2 + (4200 + 420m)z^3 + (2100m + 210m^2)z^4 - (2520 \right. \\
 &\quad \left. + 1680m + 546m^2)z^5 + (840 + 252m^2)z^6 + (240m + 60m^2)z^7 \right. \\
 &\quad \left. + 15m^2z^8 ] + \frac{\tilde{\Phi}}{1050} [ (-210m + 40m^2)z - (-525m \right. \\
 &\quad \left. + 75m^2)z^2 - 525mz^4 + 210mz^5 + 35m^2z^6 ] - \frac{\tilde{\Phi}^3}{107800} (416z \right. \\
 &\quad \left. - 1725z^2 + 6160z^5 - 2772z^6 - 5775z^8 + 4620z^9 - 924z^{10}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\tilde{\Phi}^3}{700} (170z - 350z^2 + 630z^6 - 600z^7 + 150z^8) \right\}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{3\tilde{\alpha}^2 \tilde{\Phi}^3}{175} (-472z + 1452z^2 - 3920z^3 + 9660z^4 - 10080z^5 + 3360z^6) \}$$

$$G = \frac{V}{\Omega X} = 1 + mz + \frac{\tilde{\Phi}}{20} R_H [ (10+m)z - 20z^3 - (5m - 10)z^4 + 4mz^5 ] + R_H^2 \left\{ \frac{1}{6300} [ (35m - 8m^3)z - (350m + 140m^2)z^3 + (525m + 70m^2 - 35m^3)z^4 - (210m - 210m^2 - 63m^3)z^5 - 140m^2z^6 - 20m^3z^7 ] + \frac{\tilde{\Phi}^2}{25200} [ (1590 + 281m)z + 1560z^3 + (75m - 4770)z^4 + (2520 - 396m)z^5 - 2520z^6 + (2160 - 900m)z^7 - (540 - 1260m)z^8 - 320mz^9 ] + \frac{\tilde{\Phi}^2 \tilde{\alpha}}{700} [ (490 + 140m)z - 1050z^4 + 840z^5 - (280 + 140m)z^6 ] + \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\Phi}^3 m}{5} [ 6z + 18z^2 - 32z^3 + 30z^4 - 30z^5 + 8z^6 ] \right\},$$

(II.2, 14)

$$\begin{aligned}
 \text{(II.2,15)} \quad \lambda = & 3 \tilde{\phi}^2 + R_H \left[ \frac{1}{20} (10 + 10m + 3m^2) - \frac{1}{2} \bar{\alpha} m^2 \right. \\
 & - \frac{\tilde{\phi}^2}{140} (54 + 630 \bar{\alpha}) + R_H^2 \left[ -\frac{17}{70} - \frac{53}{420} m \right. \\
 & + \left. \frac{1}{3150} m^2 \right] \frac{\tilde{\phi}}{2} + \frac{\bar{\alpha} \tilde{\phi}}{700} (225 m^2 + 350 m) \\
 & \left. - \frac{69}{4312} \tilde{\phi}^3 - \frac{179}{175} \bar{\alpha} \tilde{\phi}^3 \right].
 \end{aligned}$$

$\tilde{\phi}$  qui est indépendante de  $\bar{\alpha}$  s'obtient en intégrant la dernière équation de (II.2,7) une fois par rapport à  $z$  :

$$\text{(II.2,16)} \quad \tilde{\phi} = 2 R_H F^2 + 2 F' - 4 \bar{\alpha} R_H \left( 2 F' + \int F F''' dz \right).$$

Puisque le calcul de  $F$  est effectué pour les trois premières approximations, nous ne retenons pour  $\tilde{\phi}$  que les termes proportionnels à  $R_H^i$  avec  $i=0,1,2$  :

$$\begin{aligned}
 \text{(II.2,16)} \quad \tilde{\phi} = & 2 R_H f_0^2 + 4 R_H^2 f_0 f_1 + 2 f_0' + 2 R_H f_1' - 8 \bar{\alpha} R_H f_0' + 2 R_H^2 f_1' \\
 & - 4 \bar{\alpha} R_H \int ( f_0 f_0''' + R_H f_0'' f_1 + R_H f_0 f_1''' ) dz.
 \end{aligned}$$

Notons que le coefficient de  $z^6$  de l'avant dernier polynôme en  $z$  dans l'expression de  $F'$  tel qu'il est donné dans [23] est incorrect. Il a été corrigé. De même, nous avons corrigé le coefficient de  $z^4$  du polynôme en  $z$  facteur de  $R_H^2/6300$  de l'expression de  $G$ .

CHAPITRE III

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN  
 INCOMPRESSIBLE DE DEGRÉ TROIS ENTRE DEUX  
 DISQUES COAXIAUX TRÈS VOISINS, EN ROTATION.

INTRODUCTION

GRIFFITHS et col [25] et SHARMA et col. [23] (chapitre II) ont étudié l'écoulement à faible nombre de Reynolds d'un fluide de Rivlin-Ericksen incompressible de degré deux et de degré trois entre deux disques coaxiaux en rotation.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'aborder le problème dans le cas où les disques sont très rapprochés, mais sans imposer de restriction à priori sur le nombre de Reynolds. Nous introduisons ainsi un petit paramètre  $\epsilon$  lié à la distorsion géométrique du domaine de l'écoulement.  $\epsilon$  est égal au rapport de la distance séparant les deux disques à leur rayon. La solution sera donnée sous forme asymptotique à faibles valeurs de  $\epsilon$  et  $R_H$ .

Puisque  $R_H = R \epsilon^2$ , le nombre de Reynolds  $R$  significatif de l'écoulement peut donc être très grand, ce qui généralise, en quelque sorte, les points de vue de GRIFFITHS [25] et SHARMA [23]. Les conditions aux frontières que nous considérons seront celles de SHARMA [23]; étant donné que le fluide considéré est de degré trois, ceci entraîne une autre complication par rapport aux travaux rappelés dans [23] et [25].

III.1. FORMULATION DU PROBLÈME

La loi de comportement et les équations régissant le mouvement, sont données par (II.1,1) et (II.1,2). Les conditions aux limites que nous imposons sont données par (II.2,5), à savoir :

$$(III.1,1) \quad U = W = 0, \quad V = \Omega X \quad \text{en} \quad Z = 0,$$

$$U = 0, \quad V = (m+1)\Omega X, \quad W = \bar{\Phi} \quad \text{en} \quad Z = H.$$

Nous nous plaçons dans le cas où  $\bar{\Phi}$  n'est pas prépondérante devant la vitesse axiale due à la rotation des disques. Par ailleurs,  $\Omega L$  est une vitesse caractéristique pour  $V$ , ce qui suppose :

$$(III.1,2) \quad |m| \ll 1 \quad \text{ou} \quad \sim 1.$$

Pour des disques très voisins et un écoulement à faible  $R_H$ , nous pouvons adopter les grandeurs sans dimension et de l'ordre de l'unité représentées par des lettres minuscules (DYMENT [24]) :

$$(III.1,3) \quad X = Lx, \quad Z = Hz, \quad U = \eta \Omega L u, \quad V = \Omega L v,$$

$$W = \eta \Omega H w, \quad P = E \rho \Omega^2 L^2 p.$$

avec

$$(III.1,4) \quad \eta \sim 1 \quad \text{ou} \quad \ll 1.$$

On a :

$$(III.1,5) \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1, \quad R_H \ll 1.$$

On cherche la solution sous la forme :

$$(III.1,6) \quad u = u_0 + \eta_1 u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \sigma_1 v_1 + \dots$$

$$w = w_0 + \eta_1 w_1 + \dots, \quad p = p_0 + E_1 p_1 + \dots$$

$\eta$ ,  $E$ ,  $\eta_i$ ,  $\sigma_i$  et  $E_i$  seront exprimés en fonction de  $\varepsilon$  ou  $R_H$ .  
Les paramètres  $\eta_1$ ,  $\sigma_1$  et  $E_1$  sont tels que :

$$(III.1,7) \quad \eta_1, \sigma_1, E_1 \ll 1.$$

Portons (III.1,6) dans les équations (II.1,2). On définit  $\hat{\alpha}_i$  et  $\hat{\beta}_i$  par :

$$(III.1,8) \quad \hat{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\rho L^2}, \quad i=1,2, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\beta_i U_0}{\rho L^3} \quad \text{avec} \quad U_0 = \Omega L.$$

On obtient :

$$(III.1,9) \quad (x u_0)_x + (x w_0)_z = O(\eta_1),$$

$$(III.1,10) \quad \eta^2 (u_0 u_{0x} + w_0 u_{0z}) - \frac{v_0^2}{x} + E p_{0x} = \frac{\eta}{R_H} u_{0zz} + \frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon^2} [2(v_{0z}(v_{0x} - \frac{v_0}{x})_x)_z + \eta^2(\sim 1)] + \frac{\hat{\alpha} \varepsilon}{\varepsilon^2} [(v_{0z}(v_{0x} - \frac{v_0}{x})_x)_z - \frac{1}{x} v_{0z}^2 + \eta^2(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_1 \eta}{\varepsilon^4} [2(v_{0z}^2 u_{0z})_z + \eta^2(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_2 \eta}{\varepsilon^4} [2(v_{0z}^2 u_{0z})_z$$

$$+ \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_2 \eta}{\varepsilon^2} [(\sim 1)] + [O(e_1)]:$$

$$e_1 \ll \text{Sup}(\eta^e, 1, \varepsilon, \frac{\eta}{R_H}, \frac{\hat{\alpha}_i \eta}{\varepsilon^2}, \frac{\hat{\beta}_1 \eta}{\varepsilon^4}, \frac{\hat{\beta}_2 \eta}{\varepsilon^4}, \frac{\hat{\beta}_3 \eta}{\varepsilon^2}),$$

(III.1,11)

$$\begin{aligned} \eta(u_0 v_{0x} + w_0 v_{0z} + \frac{u_0 v_0}{x}) &= \frac{1}{R_H} v_{0z} z + \frac{\hat{\alpha}_1 \eta}{\varepsilon^2} [(\sim 1)] \\ &+ \frac{\hat{\alpha}_2 \eta}{\varepsilon^2} [(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_1}{\varepsilon^4} [e(v_{0z}^3)_z + \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_2}{\varepsilon^4} [e(v_{0z}^3)_z \\ &+ \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_3}{\varepsilon^2} [\eta^e(\sim 1)] + [O(e_2)]: \end{aligned}$$

$$e_2 \ll \text{Sup}(\eta, \frac{1}{R_H}, \frac{\hat{\alpha}_i \eta}{\varepsilon^2}, \frac{\hat{\beta}_1}{\varepsilon^4}, \frac{\hat{\beta}_2}{\varepsilon^4}, \frac{\hat{\beta}_3}{\varepsilon^2}),$$

(III.1,12)

$$\begin{aligned} \eta^e(u_0 w_{0x} + w_0 w_{0z}) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} p_{0z} &= \frac{\eta}{R_H} w_{0z} z + \frac{\hat{\alpha}_1}{\varepsilon^4} [e(v_{0z}^2)_z \\ &+ \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\alpha}_2}{\varepsilon^4} [(w_{0z}^2)_z + \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_1 \eta}{\varepsilon^4} [(\sim 1) \\ &+ \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_2 \eta}{\varepsilon^4} [(\sim 1) + \eta^e(\sim 1)] + \frac{\hat{\beta}_3 \eta}{\varepsilon^4} [(\sim 1) \\ &+ \eta^e(\sim 1)] + [O(e_3)]: e_3 \ll \text{Sup}(\eta^e, \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}, \frac{\eta}{R_H}, \frac{\hat{\alpha}_i}{\varepsilon^4}, \frac{\hat{\beta}_i \eta}{\varepsilon^4}), \end{aligned}$$

Le symbole ( $\sim 1$ ) désignant une quantité de l'ordre de l'unité qui ne sera pas utile pour le calcul de l'approximation d'ordre zéro.

Nous écrivons les conditions aux limites (III.1,1) sous forme adimensionnelle comme suit :

$$u_0 = w_0 = 0, \quad v_0 = x \quad \text{en } z = 0,$$

$$(III.1,13) \quad u_0 = 0, \quad w_0 = \phi, \quad v_0 = (m+1)x \quad \text{en } z = 1,$$

$$u_i = v_i = w_i = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1 \quad \text{pour } i \geq 1.$$

avec

$$(III.1,14) \quad \phi = \bar{\Phi} / \Omega H \eta.$$

On a, compte tenu de l'hypothèse faite sur  $\bar{\Phi}$ :

$$(III.1,15) \quad \phi \sim 1 \text{ ou } \ll 1$$

On sait que pour tous les écoulements de cisaillement en fluide visqueux, et en particulier pour les écoulement de type lubrification, l'équation de la dynamique suivant la direction perpendiculaire à celle du cisaillement exprime, en première approximation, que la contrainte normale au plan de direction principale de l'écoulement est indépendante de la variable d'espace suivant la normale à ce plan. Il en est de même dans les écoulements plans par droites parallèles en

fluide simple, dont les fluides de Rivlin-Ericksen de degré  $n$  sont des cas particuliers (voir SCHOWALTER [1], page 72).

C'est ce résultat que nous exigeons par la suite de cette équation.

Faisons maintenant une hypothèse qui semble être vérifiée pour tous les fluides non newtoniens connus :

Admettons que les forces de degré deux et de degré trois ne peuvent pas devenir prépondérantes devant les forces de viscosité.

Nous supposons également que les coefficients du même degré de la loi de comportement, sont du même ordre de grandeur :  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  et  $\beta_1 \sim \beta_2 \sim \beta_3$ .

### III.2.- PREMIERE APPROXIMATION

Du fait que le caractère visqueux newtonien doit avoir une influence au moins aussi importante que celles des degrés deux et trois, le calcul d'approximation fait pour un fluide newtonien peut être repris tel quel, or, en fluide newtonien, l'examen des deux premières équations du mouvement entraîne  $E = 1$  et  $\eta = R_H$  (DYMENT [24]). Pour obtenir le cas le plus général on pose donc ici :

$$E = 1, \quad \eta = R_H,$$

(III.2,1)

$$\frac{\hat{\alpha}_i}{E^2} \sim \hat{\beta}_i \frac{R_H}{E^4} \sim 1.$$

On doit vérifier que ces relations sont compatibles avec ce que doit fournir, en première approximation, la dernière équation du mouvement.

Compte tenu de (III.2,1), les équations (III.1,9) à (III.1,12) donnent, à l'ordre zéro :

$$(III.2.2) \quad (x u_0)_x + (x w_0)_z = 0,$$

$$-\frac{v_0^2}{x} + p_{0x} = u_{0zz} + \bar{\alpha}'' [v_{0z}(v_{0x} - \frac{v_0}{x})]_z - \frac{\bar{\alpha}'}{x} v_{0z}^2 + \tilde{\beta} (v_{0z}^2 u_{0z})_z,$$

$$(1 + 3\tilde{\beta} v_{0z}^2) v_{0zz} = 0,$$

$$p_{0z} = \bar{\alpha}'' (v_{0z}^2)_z$$

où nous avons posé :

$$(III.2,3) \quad \frac{\hat{\alpha}_i}{\varepsilon^2} = \bar{\alpha}_i, \quad \hat{\beta}_i \frac{R_H}{\varepsilon^4} = \tilde{\beta}_i, \quad \text{et } \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}'', \quad \text{et } (\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) = \tilde{\beta}$$

Le calcul de la contrainte normale pour la direction de vecteur unitaire  $\vec{n}(0,0,1)$ , donne en première approximation

$$(\mathbb{T} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \rho \Omega^2 L^2 (-p_0 + \alpha'' v_{0z}^2).$$

La dernière équation de (III.2,2) montre bien que cette contrainte est indépendante de  $z$ .

La solution de (III.2,2) qui vérifie les conditions aux limites (III.1,13) est

$$(III.2,4) \quad u_0 = \frac{x\bar{K}}{60} [-5m^2 z^4 - 20m z^3 + (9m^2 + 30m) z^2 - (4m^2 + 10m) z] + 3\phi x (z^2 - z),$$

$$v_0 = x(mz + 1),$$

$$w_0 = \frac{1}{120} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}) [2m^2 z^5 + 10mz^4 - (6m^2 + 20m)z^3 + (4m^2 + 10m)z^2] + \phi(3z^2 - 2z^3),$$

$$p_0 = -\frac{1}{2} m^2 \alpha_2 x^2 + \frac{1}{20} (3m^2 + 10m + 10)x^2 + 3\phi x^2 + 3\tilde{\beta} m^2 \phi x^4 + \text{constante}$$

avec

$$\bar{K} = (1 + \tilde{\beta} m^2 x^2)^{-1}.$$

On constate qu'à l'ordre zéro,

- les vitesses  $u_0$  et  $w_0$  dépendent de la somme des coefficients du troisième degré  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et de la vitesse d'injection  $\Phi$ . Les coefficients du deuxième degré  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  n'y interviennent pas.
- la vitesse orthoradiale  $v_0$  est indépendante de  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\Phi$ .
- la pression hydrostatique dépend de  $\Phi$ ,  $\alpha_2$  et du produit  $(\beta_1 + \beta_2)\Phi$ .

DYMENT [24] a étudié, en fluide newtonien, le cas où l'un des disques est fixe et en absence d'injection. Si on fait dans (III.2,4)  $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \phi = 0$  et  $m = -1$  retrouve la solution obtenue par [24] (il importe de procéder à un changement de repère en remplaçant  $z$  par  $(1-z)$ , car dans [24] c'est le disque supérieur qui est supposé fixe).

### III.3. DEUXIEME APPROXIMATION

Avec les résultats (III.2,1), (III.2,2) et (III.2,4) les équations (III.1,9) à (III.1,12) s'écrivent :

$$(III.3,1) \quad (x u_1)_x + (x w_1)_z = O(\eta \varepsilon),$$

$$(III.3,2) \quad R_H^e (u_0 u_{0x} + w_0 u_{0z}) - \sigma_1 \frac{\partial v_0 v_1}{x} + E_1 p_{1x} = \eta_1 u_{1zz} + \varepsilon^e (u_{0x} + \frac{u_0}{x})_x + \bar{\alpha}_1 \left\{ \sigma_2 \left[ 2v_{0z} (v_{1x} - \frac{v_1}{x}) \right]_z + R_H^e \left[ (u_0 u_{0x} + w_0 u_{0z})_z + 2u_{0x} u_{0z} \right]_z \right\} + \bar{\alpha}_3 \left\{ \sigma_1 \left[ (v_{0z} (v_{1x} - \frac{v_1}{x}))_z - \frac{\partial v_{0z} v_{1z}}{x} \right] + R_H^e \left[ (u_{0z}^2)_x + \frac{1}{x} u_{0z}^2 + 2(u_{0z} (u_{0x} + w_{0z}))_z \right] \right\} + \tilde{\beta}_1 \left\{ \sigma_1 (4v_{0z} u_{0z} v_{0z})_z + \eta_1 (2v_{0z}^2 u_{1z})_z + R_H^e (6u_{0z}^2 u_{0zz}) + \varepsilon^e \left[ 4(u_{0x} v_{0z}^2)_x + (w_{0x} v_{0z}^2)_z + \frac{4}{x} v_{0z}^2 (u_{0x} - \frac{u_0}{x}) \right] \right\} + \tilde{\beta}_2 \left\{ \sigma_1 (2v_{0z} v_{1z} u_{0z})_x + \eta_1 (2v_{0z}^2 u_{1z})_z + R_H^e (6u_{0z}^2 u_{0zz}) + \varepsilon^e \left[ (2v_{0z}^2 w_{0x} - \frac{\partial w_0 v_{0z}^2}{x} + v_{0z} (v_{0x} u_0 - \frac{u_0 v_0}{x} + v_{0z} w_{0x}))_z - \frac{\partial v_{0z} (u_0 v_{0x} - \frac{u_0 v_0}{x} + v_{0z} w_0)_z - \frac{\partial}{x} v_{0z}^2 u_0 \right] \right\} + \tilde{\beta}_3 \left\{ \varepsilon^e \left[ -3(v_{0x} v_0 u_0 + v_{0z} v_0 w_0) \right]_z + 3 \left( -\frac{\partial}{x} u_{0x} v_0 v_{0z} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{0x} (u_0 v_{0x} + \frac{u_0 v_0}{x} + w_0 v_{0z})_z - (\frac{v_0^2}{x})_x u_{0z} + v_{0z} (v_{0x} u_0)_x \\
& + v_{0z} (v_{0z} w_0)_x)_z \} + [O(e_1): e_1 \ll \sup(R_H^2, \sigma_1, E_1, \eta_1, \xi^2)],
\end{aligned}$$

(III.3,3)

$$\begin{aligned}
R_H^2 (2u_0 v_{0x} + w_0 v_{0z}) &= \sigma_1 v_{1z} z + \bar{\alpha}_1 R_H^2 \left\{ [ (2u_0 v_{0x} + w_0 v_{0z})_z \right. \\
& + \frac{2}{x} u_0 v_{0z} - \frac{2}{x} u_{0z} v_0 ]_z \} + \bar{\alpha}_2 R_H^2 \left\{ (u_{0z} v_{0z})_x + \frac{2}{x} u_{0z} v_{0z} \right. \\
& + \left. \left( \frac{2}{x} u_0 v_{0z} + 2 v_{0z} w_{0z} \right)_x \right\} + \tilde{\beta} \left\{ \sigma_1 (3v_{0z}^2 v_{1z})_z + R_H^2 (u_{0z}^2 v_{0z})_z \right\} \\
& + [O(e_2): e_2 \ll \sup(R_H^2, \sigma_1)],
\end{aligned}$$

(III.3,4)

$$\begin{aligned}
R_H^2 (u_0 w_{0x} + w_0 w_{0z}) + \frac{E_1}{E^2} p_{1z} &= w_{0z} z + \frac{\bar{\alpha}''}{E^2} \left\{ \sigma_1 (2v_{0z} v_{1z})_z \right. \\
& + R_H^2 (2u_{0z}^2)_z \} + \tilde{\beta}_1 \left\{ 2(v_{0z}^2 u_{0z})_x + 4(v_{0z}^2 w_0)_z + \frac{2}{x} v_{0z}^2 u_{0z} \right\} \\
& + \tilde{\beta}_2 \left\{ 2(u_{0z} v_{0z}^2)_x + \left( -\frac{6}{x} u_{0z} v_0 v_{0z} + 6u_{0z} v_{0x} v_{0z} + 2u_0 v_{0z} v_{0xz} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{6}{x} u_0 v_{0z}^2 + 3w_0 v_{0z} v_{0z} z + 10w_{0z} v_{0z}^2 \right)_z \right\} + [O(e_3): \\
& e_3 \ll \sup(\frac{E_1}{E^2}, 1, \frac{\bar{\alpha}''}{E^2} \sigma_1, \frac{\bar{\alpha}''}{E^2} R_H^2)].
\end{aligned}$$

Compte tenu de (III.2,1) et (III.2,3), les ordres de grandeurs connus sont :  $R_H^e$ ,  $\varepsilon^e$  pour l'équation (III.3,2),  $R_H^e$  pour (III.3,3) et  $R_H^e$ ,  $\frac{R_H^e}{\varepsilon^e}$ , 1 pour l'équation (III.3,4). Le cas le plus général est obtenu en posant :

$$(III.3,5) \quad \sigma_1 = R_H^e, \quad E_1 = \eta_1 \sim R_H^e = \varepsilon^e.$$

Le système d'équations (III.3,1) à (III.3,4) donne alors, en deuxième approximation :

$$(III.3,6) \quad (x u_1)_x + (x w_1)_z = 0,$$

$$(III.3,7) \quad -\eta_1 (1 + \tilde{\beta} v_{0z}^e) u_{1zz} + E_1 p_{1x} = R_H^e \left( \frac{\varepsilon v_0 v_1}{x} - u_0 u_{0x} + w_0 u_{0z} \right) \\ + \varepsilon^e \left( u_{0x} + \frac{u_0}{x} \right)_x + \bar{\alpha}_1 R_H^e \left\{ [\varepsilon v_{0z} (v_{1x} - \frac{v_1}{x})]_z + [(u_0 u_{0x} + w_0 u_{0z})_z \right. \\ \left. + \varepsilon u_{0x} u_{0z}]_z \right\} + \bar{\alpha}_2 R_H^e \left\{ [v_{0z} (v_{1x} - \frac{v_1}{x})]_z - \frac{\varepsilon}{x} v_{0z} v_{1z} + (u_{0z}^2)_x \right. \\ \left. + \frac{1}{x} u_{0z}^2 + \varepsilon [u_{0z} (u_{0x} + w_{0z})]_z \right\} + \tilde{\beta}_1 \left\{ R_H^e [4 v_{0z} u_{0z} v_{1z}]_z \right. \\ \left. + (6 u_{0z}^2 u_{0zz}) \right\} + \varepsilon^e \left[ 4 (u_{0x} v_{0z}^2)_x + (w_{0x} v_{0z}^2)_z + \frac{4}{x} (u_{0x} - \frac{u_0}{x}) \right] \\ + \tilde{\beta}_2 \left\{ R_H^e [2 (v_{0z} v_{1z} u_{0z})_z + 6 (u_{0z}^2 u_{0zz})] \right\} \\ + \varepsilon^e \left[ (\varepsilon v_{0z}^2 w_{0x} - \frac{\varepsilon}{x} w_0 v_{0z}^2 + v_{0z} (v_{0x} u_0 - \frac{u_0 v_0}{x})) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + v_{0z} w_{0x})_z - \frac{e}{x} v_{0z} (u_0 v_{0x} - \frac{u_0 v_0}{x} + v_{0z} w_0)_z - \frac{8}{x^2} v_{0z}^2 u_0 \Big\} \\
& + \tilde{\beta}_3 \cdot \varepsilon^2 \left\{ -\frac{3}{x} (v_{0x} u_0 v_0 + v_{0z} v_0 w_0)_z + 3 \left[ \left( -\frac{e}{x} u_{0x} v_0 v_{0z} \right. \right. \right. \\
& + v_{0x} (u_0 v_{0x} + \frac{u_0 v_0}{x} + w_0 v_{0z})_z - \left. \left. \left( \frac{v_0^2}{x} \right)_x u_{0z} + v_{0z} (v_{0x} u_0)_x \right. \right. \\
& \left. \left. + v_{0z} (v_{0z} w_0)_x \right]_z \right\},
\end{aligned}$$

(III.3,8)

$$\begin{aligned}
& - (1 + 3 \tilde{\beta} v_{0z}^2) v_{1z} = -e u_0 v_{0x} - w_0 v_{0z} + \bar{\alpha}_1 [ (e u_0 v_{0x} \\
& + w_0 v_{0z})_z + \frac{e}{x} u_0 v_{0z} - \frac{e}{x} u_{0z} v_0 ]_z + \bar{\alpha}_2 [ (u_{0z} v_{0z})_x \\
& + \frac{e}{x} u_{0z} v_{0z} + (\frac{e}{x} u_0 v_{0z} + e v_{0z} w_{0z})_x ] + \tilde{\beta} (u_{0z}^2 v_{0z})_z,
\end{aligned}$$

(III.3,9)

$$\begin{aligned}
E_1 p_{1z} &= \varepsilon^2 w_{0z} + \bar{\alpha}' R_H^2 [ (e v_{0z} v_{1z})_z + (e u_{0z}^2)_z ] \\
& + \tilde{\beta}_1 \varepsilon^2 [ e (v_{0z}^2 u_{0z})_x + 4 (v_{0z}^2 w_0)_z + \frac{e}{x} v_{0z}^2 u_{0z} ] \\
& + \tilde{\beta}_2 [ e (u_{0z} v_{0z}^2)_x + (-\frac{6}{x} u_{0z} v_0 v_{0z} + 6 u_{0z} v_{0x} v_{0z} \\
& + e u_0 v_{0z} v_{0x} + \frac{6}{x} u_0 v_{0z}^2 + 3 w_0 v_{0z} v_{0z} + 10 w_{0z} v_{0z}^2)_z ].
\end{aligned}$$

On définit  $\bar{\alpha}'$ ,  $\bar{\alpha}''$  et  $\bar{M}$  par

$$(III.3,10) \quad \bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\alpha}'' = 6\bar{\alpha}_1 + 5\bar{\alpha}_2, \quad \bar{M} = (1 + 3\tilde{\beta} m^2 x^2)^{-1}$$

Avec les conditions aux limites (III.1,13), l'intégration du système d'équations (III.3,6) à (III.3,9) donne

$$(III.3,11) \quad \eta_1 u_1 = \sum_{i=1}^{39} R_H^2 F_i P_i, \quad v_1 = \sum_{i=40}^{46} F_i P_i, \quad \eta_1 w_1 = \sum_{i=47}^{85} R_H^2 F_i P_i$$

où  $F_i$  et  $P_i$  sont définis ci-dessous.

La pression hydrostatique  $E_1 p_1$  est donnée plus loin : (page : 113).

$$F_1 = \frac{1}{498960000} \bar{K} \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}),$$

$$F_2 = \frac{1}{49896000} \bar{K}^2 \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}),$$

$$F_3 = \frac{1}{16800} \phi \bar{K} \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}),$$

$$F_4 = \frac{1}{70} \phi^2 x \bar{K},$$

$$F_5 = \frac{1}{12600} \phi x \bar{K}^2,$$

$$F_6 = - \frac{1}{24948000} x \bar{M} \bar{K}^2,$$

$$F_7 = - \frac{1}{49896000} \bar{K} \bar{M} \frac{d(x^2 \bar{K})}{dx},$$

$$F_8 = - \frac{1}{8400} \phi x \bar{M} \bar{K},$$

$$F_9 = - \frac{1}{12600} \bar{\alpha}' (1 + \tilde{\beta} m^2 x^2) x \bar{M} \bar{K}^2,$$

$$F_{10} = - \frac{1}{210} \alpha' \phi x \bar{M} \bar{K} - \frac{1}{35} \tilde{\beta} \phi^2 x^3 \bar{M} \bar{K},$$

$$F_{11} = - \frac{1}{6237000} \tilde{\beta} x^3 \bar{M} \bar{K}^3,$$

$$F_{12} = \frac{1}{4200} \tilde{\beta} \phi x^3 \bar{M} \bar{K}^2,$$

$$F_{13} = \frac{1}{12600} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d(x^2 \bar{K})}{dx} \right) \right) \bar{K} + \frac{1}{12600} \bar{\alpha}' [\alpha''' (\bar{M} \bar{K} \\ + \tilde{\beta} m^2 x^3 \bar{M} \bar{K}^2) + \bar{\alpha}'' x \frac{d}{dx} (x \bar{M} \bar{K} + \tilde{\beta} m^2 x^3 \bar{M} \bar{K}^2)] m^2 \bar{K} \\ - \frac{1}{25200} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} [4 \tilde{\beta}_1 (x \bar{K} - 3x \frac{d}{dx} (x \bar{K}) - x^2 \frac{d^2}{dx^2} (x \bar{K}))$$

$$+ \tilde{\beta}_e (7x\bar{K} - 11x \frac{d}{dx}(x\bar{K}) - 5x^2 \frac{d^2}{dx^2}(x\bar{K})) + 3\tilde{\beta} (x\bar{K} - x \frac{d}{dx}(x\bar{K}) - x^2 \frac{d^2}{dx^2}(x\bar{K}))] m^2 \bar{K},$$

$$F_{14} = \frac{1}{151200} [\bar{\alpha}''' x \bar{M} \bar{K} + \bar{\alpha}'' x \frac{d}{dx}(x \bar{M} \bar{K})] \bar{K},$$

$$F_{15} = \frac{1}{302400} \bar{K} [\bar{\alpha}''' \bar{M} \frac{d}{dx}(x^2 \bar{K}) + \bar{\alpha}'' x \frac{d}{dx}(\bar{M} \frac{d}{dx}(x^2 \bar{K}))],$$

$$F_{16} = \frac{1}{840} \phi (\bar{\alpha}''' x \bar{M} + \bar{\alpha}'' x \frac{d}{dx}(x \bar{M})) \bar{K},$$

$$F_{17} = -\frac{1}{10} \phi [\bar{\alpha}' \bar{\alpha}''' x \bar{M} + \bar{\alpha}' \bar{\alpha}'' x \frac{d}{dx}(x \bar{M}) + 6\tilde{\beta} \bar{\alpha}''' \phi x^3 \bar{M} + 6\tilde{\beta} \bar{\alpha}'' \phi x \frac{d}{dx}(x^3 \bar{M})] m^2 \bar{K} + \frac{6}{5} \bar{\alpha}' \phi^2 x \bar{K} - \frac{1}{5} \frac{\varepsilon^2}{R_H} (\varepsilon \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_e) \phi m^2 x \bar{K} + \frac{18}{5} \bar{\alpha}' \tilde{\beta} \phi^2 m^2 x^3 \bar{M} \bar{K} - \frac{54}{5} \tilde{\beta} \phi^3 x^3 \bar{K},$$

$$F_{18} = -\frac{1}{378000} \tilde{\beta} (\bar{\alpha}''' x^3 \bar{M} \bar{K}^e + \bar{\alpha}'' x \frac{d}{dx}(x^3 \bar{M} \bar{K}^e)) \bar{K} + \frac{1}{378000} \frac{1}{m^2} (\varepsilon \bar{\alpha}'_1 \frac{d}{dx}(x^2 \bar{K}^e) - \bar{\alpha}'_2 x \bar{K}^e) \bar{K},$$

$$F_{19} = \frac{1}{2100} \left[ \tilde{\beta} \phi (\tilde{\alpha}''' x^3 \bar{M} \bar{K} + \tilde{\alpha}'' x \frac{d}{dx} (x^3 \bar{M} \bar{K})) \right] \bar{K},$$

$$F_{20} = \frac{-1}{756000} \left[ 2\tilde{\alpha}_1 \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}^2) - 2\tilde{\alpha}_2 x \bar{K}^2 - 4\tilde{\beta} \tilde{\alpha}' m^2 x (1 + \tilde{\beta} m^2 x^2) x^2 \bar{K}^2 \bar{M} \right] \bar{K},$$

$$F_{21} = -\frac{1}{2100} \tilde{\alpha}_1 \phi x \bar{K}^2,$$

$$F_{22} = -\frac{1}{2100} \tilde{\alpha}_1 \phi x \bar{K} \frac{d}{dx} (x \bar{K}),$$

$$F_{23} = -\frac{1}{756000} \tilde{\alpha}_1 \bar{K}^2 \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}),$$

$$F_{24} = -\frac{1}{700} \tilde{\alpha}_1 \phi \bar{K} \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}),$$

$$F_{25} = -\frac{1}{2100} \tilde{\alpha}_1 \phi x \bar{K}^2,$$

$$F_{26} = \frac{1}{700} \tilde{\alpha}_2 \phi x \bar{K}^2,$$

$$F_{27} = - \frac{1}{4158000} \tilde{\beta} m x^3 \bar{M} \bar{K}^3,$$

$$F_{28} = - \frac{1}{4200} \tilde{\beta} m \phi x^3 \bar{M} \bar{K}^2,$$

$$F_{29} = - \frac{1}{8316000} \tilde{\beta} m x^2 \bar{M} \bar{K}^2 \frac{d(x^2 \bar{K})}{dx},$$

$$F_{30} = - \frac{1}{25200} \tilde{\beta} m \phi x^2 \bar{M} \bar{K} \frac{d(x^2 \bar{K})}{dx},$$

$$F_{31} = - \frac{1}{70} \tilde{\beta} m \phi^2 x^3 \bar{M} \bar{K},$$

$$F_{32} = \frac{1}{1050} \tilde{\beta} \bar{\alpha} m \phi x^3 \bar{M} \bar{K}^2,$$

$$F_{33} = - \frac{1}{1050} \tilde{\beta} \bar{\alpha} (1 + \tilde{\beta} m^2 x^2 \bar{K}) m \phi x^3 \bar{M} \bar{K}^2,$$

$$F_{34} = \frac{1}{20790000} \tilde{\beta}^2 m x^5 \bar{M} \bar{K}^4,$$

$$F_{35} = -\frac{1}{10500} \tilde{\beta} m \phi x^5 \bar{M} \bar{K}^3,$$

$$F_{36} = -\frac{1}{175} \tilde{\beta}^2 m \phi^2 x^5 \bar{M} \bar{K}^6,$$

$$F_{37} = -\frac{1}{83160000} \tilde{\beta} x^3 \bar{K}^4,$$

$$F_{38} = -\frac{1}{21000} \tilde{\beta} \phi x^3 \bar{K}^3,$$

$$F_{39} = -\frac{1}{700} \tilde{\beta} \phi^2 x^3 \bar{K}^6,$$

$$F_{40} = \frac{1}{12600} x \bar{M} \bar{K},$$

$$F_{41} = \frac{1}{25200} \bar{M} \frac{d}{dx} (x^2 \bar{K}),$$

$$F_{42} = \frac{1}{20} \phi x \bar{M},$$

$$F_{43} = \frac{1}{30} \bar{\alpha}' (1 + \tilde{\beta} m^2 x^2 \bar{K}) x \bar{M} \bar{K},$$

$$F_{44} = -\bar{\alpha}' \phi m x \bar{M} - 6\tilde{\beta} \phi^2 m x^3 \bar{M},$$

$$F_{45} = -\frac{1}{6300} \tilde{\beta} x^3 \bar{M} \bar{K}^0,$$

$$F_{46} = \frac{1}{10} \tilde{\beta} \phi x^3 \bar{M} \bar{K},$$

$$F_i = -\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} (x F_{i-46}) \text{ pour } i \geq 47.$$

$$\begin{aligned} P_1 = & 19250 m^4 z_f^{10} + 192500 m^3 z_f^9 - (111375 m^4 \\ & + 371250 m^3 - 495000 m^2) z_f^8 + (66000 m^4 \\ & - 429000 m^3 - 1980000 m^2) z_f^7 + (187110 m^4 \\ & + 1617000 m^3 + 3003000 m^2) z_f^6 - (249480 m^4 \\ & + 1455300 m^3 + 2079000 m^2) z_f^5 + (32400 m^4 \\ & + 462000 m^3 + 577500 m^2) z_f^4 - (4185 m^4 \\ & + 16500 m^3 + 16500 m^2) z_f^3 + (280 m^4 + 550 m^3) z_f^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2 = & -3080 \text{ m}^4 z_f^{10} - 30800 \text{ m}^3 z_f^9 + (19305 \text{ m}^4 \\
 & + 64350 \text{ m}^3 - 74250 \text{ m}^2) z_f^8 - (11520 \text{ m}^4 \\
 & - 52800 \text{ m}^3 - 297000 \text{ m}^2) z_f^7 - (24948 \text{ m}^4 \\
 & + 231000 \text{ m}^3 + 438900 \text{ m}^2) z_f^6 + (33264 \text{ m}^4 \\
 & + 194040 \text{ m}^3 + 277200 \text{ m}^2) z_f^5 - (3240 \text{ m}^4 \\
 & + 46200 \text{ m}^3 + 57750 \text{ m}^2) z_f^4 - (1251 \text{ m}^4 \\
 & + 4950 \text{ m}^3 + 4950 \text{ m}^2) z_f^2 + (470 \text{ m}^4 \\
 & + 1760 \text{ m}^3 + 1650 \text{ m}^2) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_3 = & -45 \text{ m}^2 z_f^8 + (80 \text{ m}^2 - 200 \text{ m}) z_f^7 + (84 \text{ m}^2 \\
 & + 700 \text{ m}) z_f^6 - (252 \text{ m}^2 + 840 \text{ m}) z_f^5 + (140 \text{ m}^2 \\
 & + 350 \text{ m}) z_f^4 - 3 \text{ m}^2 z_f^2 - (4 \text{ m}^2 + 10 \text{ m}) z_f,
 \end{aligned}$$

$$P_4 = -7 z_f^6 + 21 z_f^5 - 27 z_f^2 + 13 z_f,$$

$$\begin{aligned}
 P_5 = & 150 \text{ m}^2 z_f^8 - (300 \text{ m}^2 - 600 \text{ m}) z_f^7 - (252 \text{ m}^2 \\
 & + 2100 \text{ m}) z_f^6 + (651 \text{ m}^2 + 2100 \text{ m}) z_f^5 \\
 & - (210 \text{ m}^2 + 525 \text{ m}) z_f^4 - (59 \text{ m}^2 + 105 \text{ m}) z_f^2 \\
 & + (20 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_6 = & -2200 \text{ m}^4 z_0^{10} - 22000 \text{ m}^3 z_0^9 + (13365 \text{ m}^4 \\
 & + 44550 \text{ m}^3 - 54450 \text{ m}^2) z_0^8 - (13200 \text{ m}^4 \\
 & - 14520 \text{ m}^3 - 158400 \text{ m}^2 + 39600 \text{ m}) z_0^7 \\
 & - (55440 \text{ m}^3 + 97020 \text{ m}^2 - 138600 \text{ m}) z_0^6 \\
 & - (55440 \text{ m}^2 + 138600 \text{ m}) z_0^5 + (330 \text{ m}^4 \\
 & + 11550 \text{ m}^3 + 23100 \text{ m}^2) z_0^4 + (660 \text{ m}^3 \\
 & + 23100 \text{ m}^2 + 46200 \text{ m}) z_0^3 + (3321 \text{ m}^4 \\
 & + 13200 \text{ m}^3 + 13200 \text{ m}^2) z_0^2 - (1616 \text{ m}^4 \\
 & + 7040 \text{ m}^3 + 10880 \text{ m}^2 + 6600 \text{ m}) z_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_7 = & 440 \text{ m}^4 z_0^{10} + 4400 \text{ m}^3 z_0^9 - (4455 \text{ m}^4 \\
 & + 14850 \text{ m}^3 - 4950 \text{ m}^2) z_0^8 + (6600 \text{ m}^4 \\
 & + 10560 \text{ m}^3 - 19800 \text{ m}^2) z_0^7 + (9240 \text{ m}^3 \\
 & + 23100 \text{ m}^2) z_0^6 - (5610 \text{ m}^4 + 11550 \text{ m}^3) z_0^4 \\
 & - (11220 \text{ m}^3 + 23100 \text{ m}^2) z_0^3 + (4563 \text{ m}^4 \\
 & + 18150 \text{ m}^3 + 18150 \text{ m}^2) z_0^2 - (1538 \text{ m}^4 \\
 & + 4730 \text{ m}^3 + 3300 \text{ m}^2) z_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_8 = & 60 \text{ m}^2 z_0^8 - (100 \text{ m}^2 - 280) z_0^7 - (400 \text{ m} \\
 & - 280) z_0^6 - 840 z_0^5 + (700 \text{ m} + 70 \text{ m}^2) z_0^4
 \end{aligned}$$

$$+ (140 \text{ m} + 1400) z^3 - (41 \text{ m}^2 + 600 \text{ m} + 1020) z^2 + (11 \text{ m}^2 + 180 \text{ m} + 180) z,$$

$$P_9 = 15 \text{ m}^4 z^8 + 120 \text{ m}^3 z^7 - (84 \text{ m}^4 + 280 \text{ m}^3 - 140 \text{ m}^2) z^6 + (84 \text{ m}^4 + 84 \text{ m}^3 - 420 \text{ m}^2) z^5 + (140 \text{ m}^3 + 350 \text{ m}^2) z^4 - (23 \text{ m}^4 + 90 \text{ m}^3 + 90 \text{ m}^2) z^3 + (8 \text{ m}^4 + 26 \text{ m}^3 + 20 \text{ m}^2) z,$$

$$P_{10} = -28 \text{ m}^2 z^6 + (63 \text{ m}^2 - 42 \text{ m}) z^5 - (35 \text{ m}^2 - 105 \text{ m}) z^4 - 70 \text{ m} z^3 - 3 \text{ m}^2 z^2 + (3 \text{ m}^2 + 7 \text{ m}) z,$$

$$P_{11} = -2200 \text{ m}^6 z^{10} - 22000 \text{ m}^5 z^9 + (8910 \text{ m}^6 + 29700 \text{ m}^5 - 69300 \text{ m}^4) z^8 - (3300 \text{ m}^6 - 48180 \text{ m}^5 - 188100 \text{ m}^4 + 59400 \text{ m}^3) z^7 - (12474 \text{ m}^6 + 106260 \text{ m}^5 + 133980 \text{ m}^4 - 207900 \text{ m}^3) z^6 + (12474 \text{ m}^6 + 54054 \text{ m}^5 - 48510 \text{ m}^4 - 277200 \text{ m}^3) z^5 - (3135 \text{ m}^6 - 3465 \text{ m}^5 - 98175 \text{ m}^4 - 173250 \text{ m}^3) z^4 - (6270 \text{ m}^5 + 34650 \text{ m}^4 + 46200 \text{ m}^3) z^3 - (540 \text{ m}^6 + 2145 \text{ m}^5 + 2145 \text{ m}^4) z^2 + (265 \text{ m}^6 + 1276 \text{ m}^5 + 2310 \text{ m}^4 + 1650 \text{ m}^3) z,$$

$$\begin{aligned}
 P_{12} = & 120 m^4 z^8 - (100 m^4 - 760 m^3) z^7 \\
 & - (336 m^4 + 1820 m^3 - 840 m^2) z^6 \\
 & + (546 m^4 + 1146 m^3 - 2520 m^2) z^5 \\
 & - (280 m^4 - 210 m^3 - 2800 m^2) z^4 \\
 & - (560 m^3 + 1400 m^2) z^3 + (77 m^4 + 300 m^3 \\
 & + 300 m^2) z^2 - (27 m^4 + 66 m^3 + 20 m^2) z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{13} = & 70 m^2 z^6 + 420 m z^5 - (315 m^2 + 1050 m) z^4 \\
 & + (280 m^2 + 700 m) z^3 - 3 m^2 z^2 - (32 m^2 \\
 & + 70 m) z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{14} = & -75 m^4 z^8 - 600 m^3 z^7 + (378 m^4 + 1260 m^3 \\
 & - 840 m^2) z^6 - (336 m^4 + 84 m^3 - 2520 m^2) z^5 \\
 & - (840 m^3 + 2100 m^2) z^4 + (37 m^4 + 330 m^3 \\
 & + 540 m^2) z^2 - (4 m^4 + 66 m^3 + 120 m^2) z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{15} = & 15 m^4 z^8 + 120 m^3 z^7 - (126 m^4 + 420 m^3) z^6 \\
 & + (168 m^4 + 420 m^3) z^5 - (101 m^4 + 210 m^3) z^4 \\
 & + (44 m^4 + 90 m^3) z,
 \end{aligned}$$

$$P_{16} = 28m^2z^6 - (42m^2 - 84m)z^5 - 210mz^4 \\ + (24m^2 + 210m)z^2 - (10m^2 + 84m)z,$$

$$P_{17} = 5z^4 - 10z^3 + 6z^2 - z,$$

$$P_{18} = 750m^6z^8 + 6000m^5z^7 - (8400m^5 + 2520m^6 \\ - 12600m^4)z^6 + (840m^6 - 9240m^5 - 37800m^4)z^5 \\ + (2835m^6 + 23100m^5 + 42000m^4)z^4 \\ - (2520m^6 + 14700m^5 + 21000m^4)z^3 \\ + (647m^6 + 3450m^5 + 4500m^4)z^2 - (32m^6 \\ + 210m^5 + 300m^4)z,$$

$$P_{19} = 280m^4z^6 - (210m^4 - 1260m^3)z^5 - (630m^4 \\ + 3150m^3)z^4 + (910m^4 + 2800m^3)z^3 \\ - (411m^4 + 1050m^3)z^2 + (61m^4 + 140m^3)z,$$

$$P_{20} = 2625m^4z^8 + 21000m^3z^7 - (9450m^4 + 31500m^3 \\ + 136500m^2)z^6 - (7560m^4 + 44100m^3 \\ + 63000m^2)z^5 + (1756m^4 + 8700m^3 + 10800m^2)z^4 \\ - (76m^4 + 300m^3 + 300m^2)z,$$

$$\begin{aligned}
 P_{24} = & -700 \text{ m}^2 z_f^6 + (840 \text{ m}^2 - 2520 \text{ m}) z_f^5 + (945 \text{ m}^2 \\
 & + 6300 \text{ m}) z_f^4 - (1540 \text{ m}^2 + 4900 \text{ m}) z_f^3 \\
 & + (429 \text{ m}^2 + 1050 \text{ m}) z_f^2 + (26 \text{ m}^2 + 70 \text{ m}) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{22} = & -350 \text{ m}^2 z_f^6 + (210 \text{ m}^2 - 1680 \text{ m}) z_f^5 \\
 & + (945 \text{ m}^2 + 4200 \text{ m}) z_f^4 - (1190 \text{ m}^2 + 3500 \text{ m}) z_f^3 \\
 & + (414 \text{ m}^2 + 1050 \text{ m}) z_f^2 - (29 \text{ m}^2 + 70 \text{ m}) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{23} = & -4200 \text{ m}^4 z_f^8 - 33600 \text{ m}^3 z_f^7 + (16380 \text{ m}^4 \\
 & + 54600 \text{ m}^3 - 63000 \text{ m}^2) z_f^6 - (9240 \text{ m}^4 \\
 & - 33600 \text{ m}^3 - 189000 \text{ m}^2) z_f^5 - (11340 \text{ m}^4 \\
 & + 105000 \text{ m}^3 + 199500 \text{ m}^2) z_f^4 \\
 & + (10080 \text{ m}^4 + 58800 \text{ m}^3 + 84000 \text{ m}^2) z_f^3 \\
 & - (1528 \text{ m}^4 + 7800 \text{ m}^3 + 9900 \text{ m}^2) z_f^2 \\
 & - (152 \text{ m}^4 + 600 \text{ m}^3 + 600 \text{ m}^2) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{24} = & -105 \text{ m}^2 z_f^6 + (140 \text{ m}^2 - 350 \text{ m}) z_f^5 \\
 & + (105 \text{ m}^2 + 875 \text{ m}) z_f^4 - (210 \text{ m}^2 + 700 \text{ m}) z_f^3 \\
 & + (71 \text{ m}^2 + 175 \text{ m}) z_f^2 - \text{m}^2 z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{25} = & 1400 \text{ m}^2 z_f^6 - (2100 \text{ m}^2 - 4200 \text{ m}) z_f^5 \\
 & - (1260 \text{ m}^2 + 10500 \text{ m}) z_f^4 + (2170 \text{ m}^2 \\
 & + 7000 \text{ m}) z_f^3 + 213 \text{ m}^2 z_f^2 - (423 \text{ m}^2 + 700 \text{ m}) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{26} = & -350 \text{ m}^2 z_f^6 + (350 \text{ m}^2 - 1400 \text{ m}) z_f^5 \\
 & + (630 \text{ m}^2 + 3500 \text{ m}) z_f^4 - (810 \text{ m}^2 \\
 & + 2800 \text{ m}) z_f^3 + (281 \text{ m}^2 + 700 \text{ m}) z_f^2 \\
 & - \text{m}^2 z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{27} = & 7700 \text{ m}^5 z_f^{10} + 77000 \text{ m}^4 z_f^9 - (34650 \text{ m}^5 \\
 & + 115500 \text{ m}^4 - 231000 \text{ m}^3) z_f^8 + (19800 \text{ m}^5 \\
 & - 138600 \text{ m}^4 - 627000 \text{ m}^3 + 198000 \text{ m}^2) z_f^7 \\
 & + (31185 \text{ m}^5 + 315700 \text{ m}^4 + 408100 \text{ m}^3 \\
 & - 693000 \text{ m}^2) z_f^6 - (30492 \text{ m}^5 + 127974 \text{ m}^4 \\
 & - 207900 \text{ m}^3 - 877800 \text{ m}^2) z_f^5 + (6105 \text{ m}^5 \\
 & - 26565 \text{ m}^4 - 288750 \text{ m}^3 - 462000 \text{ m}^2) z_f^4 \\
 & + (12100 \text{ m}^4 + 53900 \text{ m}^3 + 61600 \text{ m}^2) z_f^3 \\
 & + (570 \text{ m}^5 + 5665 \text{ m}^4 + 20350 \text{ m}^3 \\
 & + 23100 \text{ m}^2) z_f^2 - (218 \text{ m}^5 + 1826 \text{ m}^4 \\
 & + 5500 \text{ m}^3 + 5500 \text{ m}^2) z_f,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{28} = & -525 \text{ m}^3 z^8 + (500 \text{ m}^3 - 3200 \text{ m}^2) z^7 \\
 & + (1050 \text{ m}^3 + 7000 \text{ m}^2 - 4200 \text{ m}) z^6 \\
 & - (11442 \text{ m}^3 + 2324 \text{ m}^2 - 12600 \text{ m}) z^5 \\
 & + (385 \text{ m}^3 - 2940 \text{ m}^2 - 11200 \text{ m}) z^4 \\
 & + (980 \text{ m}^2 + 1400 \text{ m}) z^3 + (41 \text{ m}^3 \\
 & + 670 \text{ m}^2 + 1860 \text{ m}) z^2 - (9 \text{ m}^3 + 186 \text{ m}^2 \\
 & + 460 \text{ m}) z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{29} = & -1540 \text{ m}^5 z^{10} - 15400 \text{ m}^4 z^9 + (10395 \text{ m}^5 \\
 & + 34650 \text{ m}^4 - 34650 \text{ m}^3) z^8 - (9240 \text{ m}^5 \\
 & - 18480 \text{ m}^4 - 138600 \text{ m}^3) z^7 - (10395 \text{ m}^5 \\
 & + 103180 \text{ m}^4 + 200200 \text{ m}^3) z^6 \\
 & + (13860 \text{ m}^5 + 80850 \text{ m}^4 + 115500 \text{ m}^3) z^5 \\
 & - (2145 \text{ m}^5 + 13475 \text{ m}^4 + 19250 \text{ m}^3) z^4 \\
 & + (3740 \text{ m}^4 + 7700 \text{ m}^3) z^3 - (1269 \text{ m}^5 \\
 & + 7425 \text{ m}^4 + 9900 \text{ m}^3) z^2 + (334 \text{ m}^5 \\
 & + 1760 \text{ m}^4 + 2200 \text{ m}^3) z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{30} = & 105 \text{ m}^3 z^8 + (720 \text{ m}^2 - 60 \text{ m}^3) z^7 - (630 \text{ m}^3 \\
 & + 2520 \text{ m}^2) z^6 + (1050 \text{ m}^3 + 2940 \text{ m}^2) z^5 \\
 & - (420 \text{ m}^3 + 1050 \text{ m}^2) z^4 - (104 \text{ m}^3 \\
 & + 210 \text{ m}^2) z^2 + (59 \text{ m}^3 + 120 \text{ m}^2) z,
 \end{aligned}$$

$$P_{31} = 140 \text{ m } z_1^5 - (252 \text{ m} - 336) z_1^5 + (105 \text{ m} - 840) z_1^4 + 420 z_1^3 + (15 \text{ m} + 210) z_1^2 - (8 \text{ m} + 126) z_1,$$

$$P_{32} = 350 \text{ m}^3 z_1^6 - (210 \text{ m}^3 - 1680 \text{ m}^2) z_1^5 - (945 \text{ m}^3 + 4200 \text{ m}^2) z_1^4 + (1190 \text{ m}^3 + 3500 \text{ m}^2) z_1^3 - (414 \text{ m}^3 + 1050 \text{ m}^2) z_1^2 + (29 \text{ m}^3 + 70 \text{ m}^2) z_1,$$

$$P_{33} = -700 \text{ m}^3 z_1^6 + (840 \text{ m}^3 - 2520 \text{ m}^2) z_1^5 + (770 \text{ m}^3 + 6300 \text{ m}^2) z_1^4 - (1540 \text{ m}^3 + 5600 \text{ m}^2) z_1^3 + (744 \text{ m}^3 + 2100 \text{ m}^2) z_1^2 - (114 \text{ m}^3 + 280 \text{ m}^2) z_1,$$

$$P_{34} = -154000 \text{ m}^9 z_1^{10} - 1540000 \text{ m}^6 z_1^9 + (519750 \text{ m}^7 + 1732500 \text{ m}^6 - 5199500 \text{ m}^5) z_1^8 - (132000 \text{ m}^9 - 3234000 \text{ m}^6 - 11880000 \text{ m}^5)$$

$$\begin{aligned}
& + 5940000 \text{ m}^4) z_0^7 - (623700 \text{ m}^7 + 5082000 \text{ m}^6 \\
& + 3003000 \text{ m}^5 - 20790000 \text{ m}^4) z_0^6 \\
& + (332640 \text{ m}^7 - 304920 \text{ m}^6 - 13860000 \text{ m}^5 \\
& - 29106000 \text{ m}^4) z_0^5 + (239415 \text{ m}^7 \\
& + 3842300 \text{ m}^6 + 16362500 \text{ m}^5 \\
& + 20790000 \text{ m}^4) z_0^4 - (219180 \text{ m}^7 \\
& + 2451900 \text{ m}^6 + 7777000 \text{ m}^5 \\
& + 8008000 \text{ m}^4) z_0^3 + (76743 \text{ m}^7 \\
& + 638550 \text{ m}^6 + 1765500 \text{ m}^5 \\
& + 1617000 \text{ m}^4) z_0^2 - (9368 \text{ m}^7 \\
& + 68530 \text{ m}^6 + 170500 \text{ m}^5 + 143000 \text{ m}^4) z_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{35} = & -5250 \text{ m}^5 z_0^8 + (3000 \text{ m}^5 - 36000 \text{ m}^4) z_0^7 \\
& + (12600 \text{ m}^5 + 63000 \text{ m}^4 - 63000 \text{ m}^3) z_0^6 \\
& - (10920 \text{ m}^5 - 11760 \text{ m}^4 - 189000 \text{ m}^3) z_0^5 \\
& - (6405 \text{ m}^5 + 92400 \text{ m}^4 + 220500 \text{ m}^3) z_0^4 \\
& + (10710 \text{ m}^5 + 75600 \text{ m}^4 + 126000 \text{ m}^3) z_0^3 \\
& - (4196 \text{ m}^5 + 24600 \text{ m}^4 + 35100 \text{ m}^3) z_0^2 \\
& + (461 \text{ m}^5 + 2640 \text{ m}^4 + 3600 \text{ m}^3) z_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{36} = & 2100 \text{ m}^3 z^6 - (2520 \text{ m}^3 - 7560 \text{ m}^2) z^5 \\
 & - (2135 \text{ m}^3 + 18900 \text{ m}^2) z^4 + (4620 \text{ m}^3 \\
 & + 17500 \text{ m}^2) z^3 - (2547 \text{ m}^3 + 7350 \text{ m}^2) z^2 \\
 & + (482 \text{ m}^3 + 1190 \text{ m}^2) z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{37} = & -308000 \text{ m}^6 z^{10} - 3080000 \text{ m}^5 z^9 \\
 & + (1039500 \text{ m}^6 + 3465000 \text{ m}^5 - 10395000 \text{ m}^4) z^8 \\
 & - (264000 \text{ m}^6 - 6468000 \text{ m}^5 - 23760000 \text{ m}^4 \\
 & + 11880000 \text{ m}^3) z^7 - (1247400 \text{ m}^6 \\
 & + 10164000 \text{ m}^5 + 6006000 \text{ m}^4 - 41580000 \text{ m}^3) z^6 \\
 & + (665280 \text{ m}^6 - 609840 \text{ m}^5 - 27720000 \text{ m}^4 \\
 & - 58212000 \text{ m}^3) z^5 + (468930 \text{ m}^6 \\
 & + 7646100 \text{ m}^5 + 32686500 \text{ m}^4 \\
 & + 41580000 \text{ m}^3) z^4 - (198960 \text{ m}^6 \\
 & + 4943400 \text{ m}^5 + 15708000 \text{ m}^4 \\
 & + 16170000 \text{ m}^3) z^3 + (171306 \text{ m}^6 \\
 & + 1405800 \text{ m}^5 + 3831300 \text{ m}^4 \\
 & + 3465000 \text{ m}^3) z^2 - (26656 \text{ m}^6 \\
 & + 187660 \text{ m}^5 + 448800 \text{ m}^4 + 363000 \text{ m}^3) z,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P_{38} = & 5250 \text{ m}^4 z_8^8 - (3000 \text{ m}^4 - 36000 \text{ m}^3) z_8^7 \\
 & - (12600 \text{ m}^4 + 63000 \text{ m}^3 - 63000 \text{ m}^2) z_8^6 \\
 & + (10920 \text{ m}^4 - 11760 \text{ m}^3 - 189000 \text{ m}^2) z_8^5 \\
 & + (6405 \text{ m}^4 + 92400 \text{ m}^3 + 220500 \text{ m}^2) z_8^4 \\
 & - (10710 \text{ m}^4 + 75600 \text{ m}^3 + 126000 \text{ m}^2) z_8^3 \\
 & + (4196 \text{ m}^4 + 24600 \text{ m}^3 + 35100 \text{ m}^2) z_8^2 \\
 & - (461 \text{ m}^4 + 2640 \text{ m}^3 + 3600 \text{ m}^2) z_8,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{39} = & -1400 \text{ m}^2 z_8^6 + (1680 \text{ m}^2 - 5040 \text{ m}) z_8^5 \\
 & + (1365 \text{ m}^2 + 12600 \text{ m}) z_8^4 - (3080 \text{ m}^2 \\
 & + 11900 \text{ m}) z_8^3 + (1803 \text{ m}^2 + 5250 \text{ m}) z_8^2 \\
 & - (368 \text{ m}^2 + 910 \text{ m}) z_8,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{40} = & -50 \text{ m}^3 z_8^7 - 350 \text{ m}^2 z_8^6 + (189 \text{ m}^3 + 630 \text{ m}^2 - 420 \text{ m}) z_8^5 \\
 & - (140 \text{ m}^3 + 35 \text{ m}^2 - 1050 \text{ m}) z_8^4 - (280 \text{ m}^2 + 700 \text{ m}) z_8^3 \\
 & + (m^3 + 35 \text{ m}^2 + 70 \text{ m}) z_8,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{41} = & 10 \text{ m}^3 z_8^7 + 70 \text{ m}^2 z_8^6 - (63 \text{ m}^3 + 210 \text{ m}^2) z_8^5 + (70 \text{ m}^3 \\
 & + 175 \text{ m}^2) z_8^4 - (17 \text{ m}^3 + 35 \text{ m}^2) z_8,
 \end{aligned}$$

$$P_{42} = 4 \text{ m} z_8^5 + (10 - 5 \text{ m}) z_8^4 - 20 z_8^3 + (m + 10) z_8,$$

$$P_{43} = m^3 z^5 + 5m^2 z^4 - (3m^3 + 10m^2) z^3 + (2m^3 + 5m^2) z^2,$$

$$P_{44} = 2z^3 - 3z^2 + z,$$

$$P_{45} = 100m^5 z^7 + 700m^4 z^6 - (252m^5 + 840m^4 - 1260m^3) z^5 \\ - (-70m^5 + 770m^4 + 3150m^3) z^4 + (189m^5 + 1540m^4 \\ + 2300m^3) z^3 + (126m^5 + 735m^4 + 1050m^3) z^2 + (19m^5 \\ + 105m^4 + 140m^3) z],$$

$$P_{46} = 8m^3 z^5 - (5m^3 - 30m^2) z^4 - (12m^3 + 60m^2) z^3 + (13m^3 \\ + 40m^2) z^2 - (4m^3 + 10m^2) z,$$

$$P_{47} = 3500m^4 z^{11} + 38500m^3 z^{10} - (24750m^4 \\ + 82500m^3 - 110000m^2) z^9 + (16500m^4 \\ - 107250m^3 - 495000m^2) z^8 \\ + (53460m^4 + 462000m^3 + 858000m^2) z^7 \\ - (83160m^4 + 485100m^3 + 693000m^2) z^6 \\ + (36960m^4 + 184800m^3 + 231000m^2) z^5 \\ - (2990m^4 + 11000m^3 + 11000m^2) z^3 \\ + (280m^4 + 550m^3) z^2,$$

$$\begin{aligned}
 P_{48} = & -560 \text{ m}^4 z_y^{11} - 6160 \text{ m}^3 z_y^{10} + (4290 \text{ m}^4 \\
 & + 14300 \text{ m}^3 - 16500 \text{ m}^2) z_y^9 - (3630 \text{ m}^4 \\
 & - 13200 \text{ m}^3 - 74250 \text{ m}^2) z_y^8 - (7128 \text{ m}^4 \\
 & + 66000 \text{ m}^3 + 125400 \text{ m}^2) z_y^7 + (11088 \text{ m}^4 \\
 & + 64680 \text{ m}^3 + 92400 \text{ m}^2) z_y^6 - (3696 \text{ m}^4 \\
 & + 18480 \text{ m}^3 + 23100 \text{ m}^2) z_y^5 - (834 \text{ m}^4 \\
 & + 3300 \text{ m}^3 + 3300 \text{ m}^2) z_y^3 + (170 \text{ m}^4 \\
 & + 1760 \text{ m}^3 + 1650 \text{ m}^2) z_y^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{49} = & -10 \text{ m}^2 z_y^9 + (20 \text{ m}^2 - 50 \text{ m}) z_y^8 + (24 \text{ m}^2 \\
 & + 200 \text{ m}) z_y^7 - (84 \text{ m}^2 + 280 \text{ m}) z_y^6 \\
 & + (56 \text{ m}^2 + 140 \text{ m}) z_y^5 - 2 \text{ m}^2 z_y^3 \\
 & - (4 \text{ m}^2 + 10 \text{ m}) z_y^2,
 \end{aligned}$$

$$P_{50} = -2 z_y^7 + 7 z_y^6 - 18 z_y^3 + 13 z_y^2,$$

$$\begin{aligned}
 P_{51} = & \frac{1}{9} [300 \text{ m}^2 z_y^9 - (675 \text{ m}^2 - 1350 \text{ m}) z_y^8 \\
 & - (648 \text{ m}^2 + 5400 \text{ m}) z_y^7 + (1953 \text{ m}^2 \\
 & + 6300 \text{ m}) z_y^6 - (756 \text{ m}^2 + 1890 \text{ m}) z_y^5 \\
 & - (354 \text{ m}^2 + 630 \text{ m}) z_y^3 + (180 \text{ m}^2 \\
 & + 270 \text{ m}) z_y^2],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{52} = & -400 \text{ m}^4 z_y^{11} - 4400 \text{ m}^3 z_y^{10} + (2970 \text{ m}^4 \\
 & + 9900 \text{ m}^3 - 12100 \text{ m}^2) z_y^9 - (3300 \text{ m}^4 \\
 & - 3630 \text{ m}^3 - 39600 \text{ m}^2 + 9900 \text{ m}) z_y^8 \\
 & - (15840 \text{ m}^3 + 27720 \text{ m}^2 - 39600 \text{ m}) z_y^7 \\
 & - (18480 \text{ m}^2 + 46200 \text{ m}) z_y^6 + (132 \text{ m}^4 \\
 & + 4620 \text{ m}^3 + 9240 \text{ m}^2) z_y^5 + (330 \text{ m}^3 \\
 & + 11550 \text{ m}^2 + 23100 \text{ m}) z_y^4 + (2214 \text{ m}^4 \\
 & + 8800 \text{ m}^3 + 8800 \text{ m}^2) z_y^3 - (1616 \text{ m}^4 \\
 & + 7040 \text{ m}^3 + 10890 \text{ m}^2 + 6600 \text{ m}) z_y^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{53} = & 80 \text{ m}^4 z_y^{11} + 880 \text{ m}^3 z_y^{10} - (990 \text{ m}^4 \\
 & + 3300 \text{ m}^3 - 1100 \text{ m}^2) z_y^9 + (1650 \text{ m}^4 \\
 & + 2640 \text{ m}^3 - 4950 \text{ m}^2) z_y^8 + (2640 \text{ m}^3 \\
 & + 8600 \text{ m}^2) z_y^7 - (2244 \text{ m}^4 + 4620 \text{ m}^3) z_y^5 \\
 & - (5610 \text{ m}^3 + 11550 \text{ m}^2) z_y^4 + (3042 \text{ m}^4 \\
 & + 12100 \text{ m}^3 + 12100 \text{ m}^2) z_y^3 - (1538 \text{ m}^4 \\
 & + 4730 \text{ m}^3 + 3300 \text{ m}^2) z_y^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{54} = & \frac{1}{3} [40 \text{ m}^2 z_y^9 - (75 \text{ m}^2 - 210 \text{ m}) z_y^8 - (600 \text{ m} \\
 & - 240) z_y^7 - 840 z_y^6 + (84 \text{ m}^2 + 840 \text{ m}) z_y^5 \\
 & + (210 \text{ m} + 2100) z_y^4 - (82 \text{ m}^2 + 1200 \text{ m} \\
 & + 2040) z_y^3 + (33 \text{ m}^2 + 540 \text{ m} + 540) z_y^2],
 \end{aligned}$$

$$P_{55} = \frac{1}{3} [10 m^4 z^9 + 90 m^3 z^8 - (72 m^4 + 240 m^3 - 120 m^2) z^7 + (84 m^4 + 84 m^3 - 420 m^2) z^6 + (168 m^3 + 420 m^2) z^5 - (46 m^4 + 180 m^3 + 180 m^2) z^3 + (24 m^4 + 78 m^3 + 60 m^2) z^2],$$

$$P_{56} = -8 m^2 z^7 + (21 m^2 - 14 m) z^6 - (14 m^2 - 42 m) z^5 - 35 m z^4 - 2 m^2 z^3 + (3 m^2 + 7 m) z^2,$$

$$P_{57} = -400 m^6 z^{11} - 4400 m^5 z^{10} + (1980 m^6 + 6600 m^5 - 15400 m^4) z^9 - (825 m^6 - 12045 m^5 - 47025 m^4 + 14850 m^3) z^8 - (3564 m^6 + 30360 m^5 + 38280 m^4 - 59400 m^3) z^7 + (4158 m^6 + 18018 m^5 - 16170 m^4 - 92400 m^3) z^6 - (1254 m^6 - 1386 m^5 - 39270 m^4 - 69300 m^3) z^5 - (3135 m^5 + 17325 m^4 + 23100 m^3) z^4 - (360 m^6 + 1430 m^5 + 1430 m^4) z^3 + (265 m^6 + 1276 m^5 + 2310 m^4 + 1650 m^3) z^2,$$

$$P_{58} = \frac{1}{3} [80 m^4 z^9 - (75 m^4 - 570 m^3) z^8 - (288 m^4 + 1560 m^3 - 720 m^2) z^7 + (546 m^4$$

$$\begin{aligned}
 & + 1176 \text{ m}^3 - 2520 \text{ m}^2) z^6 - (336 \text{ m}^4 \\
 & + 252 \text{ m}^3 - 3360 \text{ m}^2) z^5 - (840 \text{ m}^3 \\
 & + 2100 \text{ m}^2) z^4 + (154 \text{ m}^4 + 600 \text{ m}^3 \\
 & + 600 \text{ m}^2) z^3 - (81 \text{ m}^4 + 198 \text{ m}^3 \\
 & + 60 \text{ m}^2) z^2 \Big]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{59} = & 20 \text{ m}^2 z^7 + 140 \text{ m} z^6 - (126 \text{ m}^2 \\
 & + 420 \text{ m}) z^5 + (140 \text{ m}^2 + 350 \text{ m}) z^4 \\
 & - 2 \text{ m}^2 z^3 - (32 \text{ m}^2 + 70 \text{ m}) z^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{60} = & \frac{1}{3} [-50 \text{ m}^4 z^9 - 450 \text{ m}^3 z^8 + (324 \text{ m}^4 + 1080 \text{ m}^3 \\
 & - 720 \text{ m}^2) z^7 - (336 \text{ m}^4 + 84 \text{ m}^3 - 2520 \text{ m}^2) z^6 \\
 & - (1008 \text{ m}^3 + 2520 \text{ m}^2) z^5 + (74 \text{ m}^4 \\
 & + 660 \text{ m}^3 + 1080 \text{ m}^2) z^4 - (12 \text{ m}^4 + 198 \text{ m}^3 \\
 & + 360 \text{ m}^2) z^3],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{61} = & \frac{1}{3} [10 \text{ m}^4 z^9 + 90 \text{ m}^3 z^8 - (108 \text{ m}^4 + 360 \text{ m}^3) z^7 \\
 & + (168 \text{ m}^4 + 420 \text{ m}^3) z^6 - (202 \text{ m}^4 + 420 \text{ m}^3) z^5 \\
 & + (132 \text{ m}^4 + 270 \text{ m}^3) z^4],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{62} = & 8 \text{ m}^2 z^7 - (14 \text{ m}^2 - 28 \text{ m}) z^6 - 84 \text{ m} z^5 \\
 & + (16 \text{ m}^2 + 140 \text{ m}) z^4 - (10 \text{ m}^2 + 84 \text{ m}) z^3,
 \end{aligned}$$

$$P_{63} = 2z^5 - 5z^4 + 4z^3 - z^2,$$

$$P_{64} = \frac{1}{3} [500 m^6 z^3 + 4500 m^5 z^8 - (7200 m^5 + 2160 m^6 - 10800 m^4) z^7 + (840 m^6 - 9240 m^5 - 37800 m^4) z^6 + (3402 m^6 + 27720 m^5 + 50400 m^4) z^5 - (3780 m^6 + 22050 m^5 + 31500 m^4) z^4 + (1294 m^6 + 6900 m^5 + 9000 m^4) z^3 - (96 m^6 + 630 m^5 + 900 m^4) z^2],$$

$$P_{65} = 80 m^4 z^7 - (70 m^4 - 420 m^3) z^6 - (252 m^4 + 1260 m^3) z^5 + (455 m^4 + 1400 m^3) z^4 - (274 m^4 + 700 m^3) z^3 + (61 m^4 + 140 m^3) z^2,$$

$$P_{66} = \frac{2}{3} [875 m^4 z^8 + 7875 m^3 z^8 - (4050 m^4 + 13500 m^3 - 18000 m^2) z^7 + (2100 m^4 - 13650 m^3 - 63000 m^2) z^6 + (5103 m^4 + 44100 m^3 + 81900 m^2) z^5 - (5670 m^4 + 33075 m^3 + 47250 m^2) z^4 + (1756 m^4 + 8400 m^3 + 10800 m^2) z^3 - (114 m^4 + 450 m^3 + 450 m^2) z^2],$$

$$\begin{aligned}
 P_{67} = & -200 \text{ m}^2 z^7 + (280 \text{ m}^2 - 840 \text{ m}) z^6 \\
 & + (378 \text{ m}^2 + 2520 \text{ m}) z^5 - (770 \text{ m}^2 \\
 & + 2450 \text{ m}) z^4 + (286 \text{ m}^2 + 700 \text{ m}) z^3 \\
 & + (26 \text{ m}^2 + 70 \text{ m}) z^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{68} = & -100 \text{ m}^2 z^7 + (70 \text{ m}^2 - 560 \text{ m}) z^6 \\
 & + (378 \text{ m}^2 + 1680 \text{ m}) z^5 - (595 \text{ m}^2 \\
 & + 1750 \text{ m}) z^4 + (276 \text{ m}^2 + 700 \text{ m}) z^3 \\
 & - (29 \text{ m}^2 + 70 \text{ m}) z^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{69} = & \frac{2}{3} [-1400 \text{ m}^4 z^9 - 12600 \text{ m}^3 z^8 + (7020 \text{ m}^4 \\
 & + 23400 \text{ m}^3 - 27000 \text{ m}^2) z^7 - (4620 \text{ m}^4 \\
 & - 16800 \text{ m}^3 - 84500 \text{ m}^2) z^6 - (6804 \text{ m}^4 \\
 & + 63000 \text{ m}^3 + 119700 \text{ m}^2) z^5 \\
 & + (7560 \text{ m}^4 + 44100 \text{ m}^3 + 63000 \text{ m}^2) z^4 \\
 & - (1528 \text{ m}^4 + 7800 \text{ m}^3 + 9900 \text{ m}^2) z^3 \\
 & - (228 \text{ m}^4 + 900 \text{ m}^3 + 900 \text{ m}^2) z^2],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{70} = & \frac{2}{3} [-90 \text{ m}^2 z^7 + (140 \text{ m}^2 - 350 \text{ m}) z^6 \\
 & + (126 \text{ m}^2 + 1050 \text{ m}) z^5 - (315 \text{ m}^2 \\
 & + 1050 \text{ m}) z^4 + (142 \text{ m}^2 + 350 \text{ m}) z^3 \\
 & - 3 \text{ m}^2 z^2],
 \end{aligned}$$

$$P_{71} = 400 \text{ m}^2 z^7 - (700 \text{ m}^2 - 1400 \text{ m}) z^6 \\ - (504 \text{ m}^2 + 4200 \text{ m}) z^5 + (1085 \text{ m}^2 \\ + 3500 \text{ m}) z^4 + 142 \text{ m}^2 z^3 - (423 \text{ m}^2 \\ + 700 \text{ m}) z^2,$$

$$P_{72} = \frac{1}{3} [-300 \text{ m}^2 z^7 + (350 \text{ m}^2 - 1400 \text{ m}) z^6 \\ + (756 \text{ m}^2 + 4200 \text{ m}) z^5 - (1365 \text{ m}^2 \\ + 4200 \text{ m}) z^4 + (562 \text{ m}^2 + 1400 \text{ m}) z^3 \\ - 3 \text{ m}^2 z^2],$$

$$P_{73} = \frac{1}{3} [4200 \text{ m}^5 z^{11} + 46200 \text{ m}^4 z^{10} \\ - (23100 \text{ m}^5 + 77000 \text{ m}^4 - 154000 \text{ m}^3) z^9 \\ + (14850 \text{ m}^5 - 103950 \text{ m}^4 - 470250 \text{ m}^3 \\ + 148500 \text{ m}^2) z^8 + (26730 \text{ m}^5 + 270600 \text{ m}^4 \\ + 349800 \text{ m}^3 - 594000 \text{ m}^2) z^7 \\ - (30492 \text{ m}^5 + 127974 \text{ m}^4 - 207900 \text{ m}^3 \\ - 877800 \text{ m}^2) z^6 + (7326 \text{ m}^5 - 31878 \text{ m}^4 \\ - 346500 \text{ m}^3 - 554400 \text{ m}^2) z^5 + (18150 \text{ m}^4 \\ + 80850 \text{ m}^3 + 92400 \text{ m}^2) z^4 + (1140 \text{ m}^5 + 11330 \text{ m}^4 \\ + 40700 \text{ m}^3 + 46200 \text{ m}^2) z^3 - (654 \text{ m}^5 + 5478 \text{ m}^4 \\ + 16500 \text{ m}^3 + 16500 \text{ m}^2) z^2],$$

$$\begin{aligned}
 P_{74} = & \frac{1}{3} \left[ -350 \text{ m}^3 z^9 + (375 \text{ m}^3 - 2400 \text{ m}^2) z^8 \right. \\
 & + (900 \text{ m}^3 + 6000 \text{ m}^2 - 3600 \text{ m}) z^7 \\
 & - (1442 \text{ m}^3 + 2324 \text{ m}^2 - 12600 \text{ m}) z^6 \\
 & + (462 \text{ m}^3 - 3528 \text{ m}^2 - 13440 \text{ m}) z^5 \\
 & + (1470 \text{ m}^2 + 2100 \text{ m}) z^4 + (82 \text{ m}^3 \\
 & + 1340 \text{ m}^2 + 3720 \text{ m}) z^3 - (27 \text{ m}^3 \\
 & \left. + 558 \text{ m}^2 + 1380 \text{ m}) z^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{75} = & 2 \left[ -140 \text{ m}^5 z^{11} - 1540 \text{ m}^4 z^{10} + (1155 \text{ m}^5 \right. \\
 & + 3850 \text{ m}^4 - 3850 \text{ m}^3) z^9 - (1155 \text{ m}^5 \\
 & - 2310 \text{ m}^4 - 17325 \text{ m}^3) z^8 - (1485 \text{ m}^5 \\
 & + 14740 \text{ m}^4 + 28600 \text{ m}^3) z^7 \\
 & + (2310 \text{ m}^5 + 13475 \text{ m}^4 + 19250 \text{ m}^3) z^6 \\
 & - (429 \text{ m}^5 + 2695 \text{ m}^4 + 3850 \text{ m}^3) z^5 \\
 & + (935 \text{ m}^4 + 1925 \text{ m}^3) z^4 - (423 \text{ m}^5 \\
 & + 2475 \text{ m}^4 + 3300 \text{ m}^3) z^3 + (167 \text{ m}^5 \\
 & \left. + 880 \text{ m}^4 + 1100 \text{ m}^3) z^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{76} = & \frac{1}{3} \left[ 70 \text{ m}^3 z^9 + (540 \text{ m}^2 - 45 \text{ m}^3) z^8 \right. \\
 & - (540 \text{ m}^3 + 2160 \text{ m}^2) z^7 + (1050 \text{ m}^3 \\
 & + 2940 \text{ m}^2) z^6 - (504 \text{ m}^3 + 1260 \text{ m}^2) z^5 \\
 & - (208 \text{ m}^3 + 420 \text{ m}^2) z^3 + (177 \text{ m}^3 \\
 & \left. + 360 \text{ m}^2) z^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$P_{77} = 2[20 \text{ m} z^7 - (42 \text{ m} - 56) z^6 + (21 \text{ m} - 168) z^5 + 105 z^4 + (5 \text{ m} + 70) z^3 - (4 \text{ m} + 63) z^2],$$

$$P_{78} = 100 \text{ m}^3 z^7 - (70 \text{ m}^3 - 560 \text{ m}^2) z^6 - (378 \text{ m}^3 + 1680 \text{ m}^2) z^5 + (595 \text{ m}^3 + 1750 \text{ m}^2) z^4 - (276 \text{ m}^3 + 700 \text{ m}^2) z^3 + (29 \text{ m}^3 + 70 \text{ m}^2) z^2,$$

$$P_{79} = -200 \text{ m}^3 z^7 + (280 \text{ m}^3 - 840 \text{ m}^2) z^6 + (308 \text{ m}^3 + 2520 \text{ m}^2) z^5 - (770 \text{ m}^3 + 2800 \text{ m}^2) z^4 + (496 \text{ m}^3 + 1400 \text{ m}^2) z^3 - (114 \text{ m}^3 + 280 \text{ m}^2) z^2,$$

$$P_{80} = -28000 \text{ m}^7 z^{11} - 308000 \text{ m}^6 z^{10} + (115500 \text{ m}^7 + 385000 \text{ m}^6 - 1155000 \text{ m}^5) z^9 - (33000 \text{ m}^7 - 808500 \text{ m}^6 - 2970000 \text{ m}^5 + 1485000 \text{ m}^4) z^8 - (178200 \text{ m}^7 + 1452000 \text{ m}^6 + 858000 \text{ m}^5 - 5940000 \text{ m}^4) z^7 + (110880 \text{ m}^7 - 101640 \text{ m}^6 - 4620000 \text{ m}^5 - 9702000 \text{ m}^4) z^6 + (95766 \text{ m}^7 + 1536920 \text{ m}^6 + 6545000 \text{ m}^5 + 8316000 \text{ m}^4) z^5 - (124740 \text{ m}^7 + 1225950 \text{ m}^6 + 3888500 \text{ m}^5$$

$$\begin{aligned}
 & + 4004000 \text{ m}^4) z_0^4 + (51162 \text{ m}^7 + 425700 \text{ m}^6 + 1177000 \text{ m}^5 \\
 & + 1078000 \text{ m}^4) z_0^3 - (9368 \text{ m}^7 + 68530 \text{ m}^6 + 170500 \text{ m}^5 \\
 & + 143000 \text{ m}^4) z_0^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{81} = \frac{1}{3} [ & -3500 \text{ m}^5 z_0^3 + (2250 \text{ m}^5 - 27000 \text{ m}^4) z_0^8 \\
 & + 10800 \text{ m}^5 + 54000 \text{ m}^4 - 54000 \text{ m}^3) z_0^7 \\
 & - (10920 \text{ m}^5 - 11760 \text{ m}^4 - 189000 \text{ m}^3) z_0^6 \\
 & - (7686 \text{ m}^5 + 110880 \text{ m}^4 + 264600 \text{ m}^3) z_0^5 \\
 & + (16065 \text{ m}^5 + 113400 \text{ m}^4 + 189000 \text{ m}^3) z_0^4 \\
 & - (8392 \text{ m}^5 + 49200 \text{ m}^4 + 70200 \text{ m}^3) z_0^3 \\
 & + (1383 \text{ m}^5 + 7920 \text{ m}^4 + 10800 \text{ m}^3) z_0^2 ],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{82} = & 600 \text{ m}^3 z_0^7 - (840 \text{ m}^3 - 2520 \text{ m}^2) z_0^6 \\
 & - (854 \text{ m}^3 + 7560 \text{ m}^2) z_0^5 + (2310 \text{ m}^3 \\
 & + 8750 \text{ m}^2) z_0^4 - (1698 \text{ m}^3 + 4900 \text{ m}^2) z_0^3 \\
 & + (482 \text{ m}^3 + 1190 \text{ m}^2) z_0^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{83} = & -28000 \text{ m}^6 z_0^{11} - 308000 \text{ m}^5 z_0^{10} + (115500 \text{ m}^6 \\
 & + 385000 \text{ m}^5 - 1155000 \text{ m}^4) z_0^9 - (33000 \text{ m}^6 \\
 & - 808500 \text{ m}^5 - 2970000 \text{ m}^4 + 1485000 \text{ m}^3) z_0^8 \\
 & - (178200 \text{ m}^6 + 1452000 \text{ m}^5 + 858000 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5940000 \text{ m}^3) z^7 + (110880 \text{ m}^6 - 101640 \text{ m}^5 \\
& -4620000 \text{ m}^4 - 9702000 \text{ m}^3) z^6 + (93786 \text{ m}^6 \\
& + 1529220 \text{ m}^5 + 6537300 \text{ m}^4 + 8316000 \text{ m}^3) z^5 \\
& - (124740 \text{ m}^6 + 1235850 \text{ m}^5 + 3927000 \text{ m}^4 \\
& + 4042500 \text{ m}^3) z^4 + (57102 \text{ m}^6 + 468600 \text{ m}^5 \\
& + 1277100 \text{ m}^4 + 1155000 \text{ m}^3) z^3 - (13328 \text{ m}^6 \\
& + 93830 \text{ m}^5 + 224400 \text{ m}^4 + 181500 \text{ m}^3) z^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{84} = \frac{1}{3} [ & 3500 \text{ m}^4 z^9 - (2250 \text{ m}^4 - 27000 \text{ m}^3) z^8 \\
& - (10800 \text{ m}^4 + 54000 \text{ m}^3 - 54000 \text{ m}^2) z^7 \\
& + (10920 \text{ m}^4 - 11760 \text{ m}^3 - 189000 \text{ m}^2) z^6 \\
& + (7686 \text{ m}^4 + 110880 \text{ m}^3 + 264600 \text{ m}^2) z^5 \\
& - (16065 \text{ m}^4 + 113400 \text{ m}^3 + 189000 \text{ m}^2) z^4 \\
& + (8392 \text{ m}^4 + 48200 \text{ m}^3 + 70200 \text{ m}^2) z^3 \\
& - (1383 \text{ m}^4 + 7920 \text{ m}^3 + 10800 \text{ m}^2) z^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{85} = 2 [ & -200 \text{ m}^2 z^7 + (280 \text{ m}^2 - 840 \text{ m}) z^6 \\
& + (273 \text{ m}^2 + 2520 \text{ m}) z^5 - (770 \text{ m}^2 \\
& + 2975 \text{ m}) z^4 + (601 \text{ m}^2 + 1750 \text{ m}) z^3 \\
& - (184 \text{ m}^2 + 455 \text{ m}) z^2],
\end{aligned}$$

Pour la deuxième approximation de la pression hydrostatique, on

trouve :

$$\begin{aligned}
 (III.3,12) \quad E_1 \phi_1 = R_H \cdot \left\{ \frac{\varepsilon^2}{R_H} w_{03} + \bar{\alpha}'' (2v_{03} \sqrt{13} + u_{03}^2) + \frac{\varepsilon^2}{R_H} (4\tilde{\beta}_1 \right. \\
 + 12\tilde{\beta}_2 + 12\tilde{\beta}_3) \frac{u_0 v_{03}^2}{x} + \frac{\varepsilon^2}{R_H} (2\tilde{\beta}_1 + 8\tilde{\beta}_2 + 6\tilde{\beta}_3) v_{03}^2 w_0 \\
 - \frac{1}{16632000} (279 m^4 + 1100 m^3 + 1100 m^2) x^2 \bar{K}^2 \\
 - \frac{1}{5544000} (139 m^4 + 550 m^3 + 550 m^2) (x^2 \bar{K} + \frac{\bar{K}}{\tilde{\beta} m^2}) \\
 - \frac{1}{2800} \phi m^2 x^2 \bar{K} - \frac{27}{70} \phi^2 x^2 + \frac{1}{6300} (59 m^2 \\
 + 105 m) \frac{\phi}{2\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |\bar{K}| - \frac{1}{4158000} (1107 m^4 + 4400 m^3 \\
 + 4400 m^2) \frac{1}{4\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}| + \frac{1}{16632000} (1521 m^4 \\
 + 6050 m^3 + 6050 m^2) (x^2 \bar{K} - \frac{3}{2\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) \\
 - \frac{1}{50400} (41 m^2 + 600 m + 1020) \frac{2\phi}{\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |\bar{M}| \\
 + \frac{1}{25200} (23 m^4 + 90 m^3 + 90 m^2) \bar{\alpha}' (x^2 \bar{K} + \frac{1}{2\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) \\
 - \frac{1}{210} \frac{\phi \bar{\alpha}'}{\tilde{\beta}} \text{Log} |\bar{M}| + \frac{1}{4158000} (36 m^4 + 143 m^3 + 143 m^2) (x^2 \bar{K} \\
 - \frac{1}{2\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) + \frac{1}{35} \phi^2 (x^2 - \frac{1}{3\tilde{\beta} m^2} \text{Log} |M|)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{3150} (77m^2 + 300m + 300) \frac{\phi}{\beta m^2} (\text{Log } |\bar{M}| - 3 \text{Log } |\bar{K}| \\
& - \frac{1}{2100} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} \cdot \frac{m^2}{x} \frac{d(x^2 \bar{K})}{dx} + \frac{1}{75600} (31m^2 + 120m \\
& + 120) \left( \frac{\bar{\alpha}'}{\beta} \text{Log } |\bar{K}/\bar{M}| + \bar{\alpha}'' m^2 x^2 \bar{M} \bar{K} \right) - \frac{1}{151200} m^4 (\varepsilon \bar{\alpha}' x^2 \bar{K} \\
& - \frac{3\bar{\alpha}'}{\beta m^2} \text{Log } |\bar{K}/\bar{M}| - \bar{\alpha}'' x \bar{M} \frac{d(x^2 \bar{K})}{dx} - \frac{1}{420} \phi (3\bar{\alpha}'' m^2 x^2 \bar{M}) \\
& - \frac{\varepsilon \bar{\alpha}'}{\beta} \text{Log } |\bar{M}|) - \frac{1}{4200} \bar{\alpha}' m^2 \left[ \bar{\alpha}' (\varepsilon m^2 x^2 \bar{K} + \frac{1}{\beta} \text{Log } |\bar{K}/\bar{M}|) \right. \\
& \left. + \varepsilon \bar{\alpha}'' (\varepsilon m^2 x^2 \bar{M} \bar{K} + \varepsilon \beta m^4 x^4 \bar{M} \bar{K}^2) \right] \\
& - \frac{1}{15} \phi \bar{\alpha}' (3\bar{\alpha}'' m^2 x^2 \bar{M} - \frac{\varepsilon \bar{\alpha}'}{\beta} \text{Log } |\bar{M}|) - \frac{4}{15} \phi^2 \left( \frac{\bar{\alpha}'}{\beta m^2} \right. \\
& \left. + 3\bar{\alpha}' x^2 + 9\bar{\alpha}'' \beta m^2 x^4 \bar{M} \right) - \frac{1}{378000} (77m^2 + 300m \\
& + 300) (\varepsilon \bar{\alpha}' m^2 x^2 \bar{K} - \frac{\bar{\alpha}'}{\beta} \text{Log } |\bar{K}/\bar{M}| - \varepsilon \bar{\alpha}'' \beta m^2 x^4 \bar{M} \bar{K}^2) \\
& + \frac{1}{700} \phi \left[ 12\bar{\alpha}'' m^2 (x^2 \bar{M} - x^2 \bar{M} \bar{K}) + \frac{\varepsilon \bar{\alpha}'}{\beta} (\text{Log } |\bar{M}| \right. \\
& \left. - 3 \text{Log } |\bar{K}|) \right] - \frac{1}{378000} (193m^2 + 750m + 750) (4\bar{\alpha}_1 m^2 x^2 \bar{K}^2 \\
& + \frac{\bar{\alpha}_2 \varepsilon \bar{K}}{\beta}) - \frac{81}{80} (4\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) \phi^2 x^2 - \frac{3}{700} \phi (4\bar{\alpha}_1 m^2 x^2 \bar{K} \\
& + \frac{\bar{\alpha}_2}{\beta} \text{Log } |\bar{K}|) + \frac{9}{80} (4\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) \phi^2 x^2 - \frac{1}{94500} (38m^4 \\
& + 150m^3 + 150m^2) \bar{\alpha}_1 x^2 \bar{K}^2 + \frac{1}{240} \phi \frac{\bar{\alpha}_1}{\beta} \text{Log } |\bar{K}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{175} \phi \bar{\alpha}_1 m^2 x^2 \bar{K} - \frac{9}{5} \phi^2 \bar{\alpha}_1 x^2 - \frac{1}{378000} (38 m^2 + 150 m \\
& + 150 m) \bar{\alpha}_1 (2 m^2 x^2 \bar{K}^2 - \frac{2}{\beta} \bar{K}) - \frac{1}{350} \phi \bar{\alpha}_1 m^2 x^2 \bar{K} \\
& + \frac{18}{5} \phi^2 \bar{\alpha}_1 x^2 + \frac{1}{700} (211 m^2 + 350 m) \frac{\phi \bar{\alpha}_1}{\beta m^2} \text{Log} |\bar{K}| \\
& - \frac{1}{189000} (38 m^2 + 150 m + 150) \frac{\bar{\alpha}_2}{\beta} \bar{K} + \frac{9}{5} \phi^2 \bar{\alpha}_2 x^2 \\
& - \frac{1}{700} \frac{\phi \bar{\alpha}_2}{\beta} \text{Log} |\bar{K}| - \frac{1}{2100} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} m^2 \text{Log} |\bar{K}| - \frac{1}{2100} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} (4 \tilde{\beta}_1 \\
& - 2 \tilde{\beta}_2 - 3 \tilde{\beta}_3) m^4 x^2 \bar{K} - \frac{1}{2100} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} (5 \tilde{\beta}_2 + 3 \tilde{\beta}_3) m^4 x^2 \bar{K}^2 \\
& - \frac{6}{5} \frac{\varepsilon^2}{R_H^2} (2 \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2) \phi m^2 x^2 - \frac{1}{4158000} (471 m^2 + 1870 m \\
& + 1870) (2 m^2 x^2 \bar{K} - \frac{1}{\beta} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) - \frac{1}{25200} (24 m^2 \\
& + 240 m - 380) \frac{\phi}{\beta} (3 \text{Log} |\bar{K}| - \text{Log} |\bar{M}|) - \frac{1}{11088000} (69 m^2 \\
& + 275 m + 275) (12 m^2 x^2 \bar{K} - 4 m^2 x^2 \bar{K}^2 + \frac{4}{\beta} \bar{K} \\
& - \frac{6}{\beta} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) + \frac{1}{6300} \phi (2 m^2 x^2 \bar{K} - \frac{1}{\beta} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) \\
& + \frac{1}{105} \phi^2 (3 x^2 + \frac{1}{\beta m^2} \text{Log} |\bar{M}|) - \frac{1}{756000} (38 m^2 + 150 m \\
& + 150) (2 \bar{\alpha}' m^2 x^2 \bar{K} - 2 \bar{\alpha}' m^2 x^2 \bar{K}^2 - \frac{2}{\beta} \bar{\alpha}' \bar{K} - \frac{\bar{\alpha}'}{\beta} \text{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) \\
& - \frac{1}{2100} \frac{\phi \bar{\alpha}'}{\beta} (\text{Log} |\bar{M}| - 9 \text{Log} |\bar{K}| + 6 \bar{K}) + \frac{1}{2100} \frac{\bar{\alpha}' \phi}{\beta m} (\text{Log} |\bar{M}|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3 \operatorname{Log} |\bar{K}|) - \frac{4}{15} \bar{\alpha}' \phi^2 (3x^2 + \frac{1}{\tilde{\beta} m^2} \operatorname{Log} |\bar{M}|) - \frac{1}{184800} (277 m^2 \\
& + 1100m + 1100) (2m^2 x^2 + 2m^2 x^2 \bar{K}^2 + \frac{2}{\tilde{\beta}} \bar{K} - \frac{1}{\tilde{\beta}} \operatorname{Log} |\bar{K}/\bar{M}|) \\
& + \frac{1}{63000} (167 m^2 + 650m + 650) \frac{\phi}{\tilde{\beta} m^2} (\operatorname{Log} |\bar{M}| + 3 \operatorname{Log} |\bar{K}| \\
& - 6 \bar{K}) + \frac{3}{350} \phi^2 (6x^2 + \frac{9}{\tilde{\beta} m^2} \operatorname{Log} |\bar{K}| - \frac{1}{\tilde{\beta} m^2} \operatorname{Log} |\bar{M}|) \\
& - \frac{2}{5} (9 \tilde{\beta} m^2 x^4 - 3x^2 - \frac{1}{\tilde{\beta} m^2} \operatorname{Log} |\bar{M}|) \frac{\phi^3}{m^2} - \frac{1}{92400} (277 m^2 \\
& + 1100m + 1100) (\frac{\bar{K}^2}{\tilde{\beta}} - \frac{\bar{K}}{\tilde{\beta}}) + \frac{1}{10500} (212 m^2 + 825m \\
& + 825) \frac{\phi}{\tilde{\beta}} (\bar{K} - \operatorname{Log} |\bar{K}|) - \frac{27}{350} \phi^2 (x^2 + \frac{1}{\tilde{\beta} m^2} \operatorname{Log} |\bar{K}|) \\
& + \frac{81}{10} \tilde{\beta} \phi^3 x^4 + \text{constante} \}.
\end{aligned}$$

### III.4. PRESENTATION DES REUSULTATS

Dans chaque figure ci-dessous, nous traçons trois profils de l'une des composantes  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$ . Ces trois profils correspondent à trois valeurs différentes d'un seul et même paramètre, les autres sont fixés (pour la plupart d'entre eux sont nuls). Ceci donne une simple idée sur l'influence de chaque paramètre sur la solution. Les valeurs attribuées aux paramètres  $\bar{\alpha}_i$  et  $\tilde{\beta}_i$  sont choisies de l'ordre de l'unité et à titre indicatif. D'autre part, pour étudier l'influence des coefficients du second degré sur la deuxième approximation, nous nous plaçons dans le cas simple où  $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 0$ , relation vérifiée pour un fluide du second degré. Nous posons  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}$ .

#### a) Profils de la vitesse radiale $u_0$

- . La figure 1 représente le profil de la composante  $u_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$ :  $\phi = -0,001$ ,  $\phi = 0$  et  $\phi = 0,001$  dans le cas  $m = -1$  et  $\tilde{\beta} = 0$ .
- . La figure 2, celui de  $u_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$ :  $m = -2$ ,  $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \tilde{\beta} = 0$ .
- . La figure 3 donne celui de  $u_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}$ :  $\tilde{\beta} = 0$ ,  $\tilde{\beta} = 20/7$  et  $\tilde{\beta} = 40/7$  dans le cas  $m+1 = \phi = 0$ .

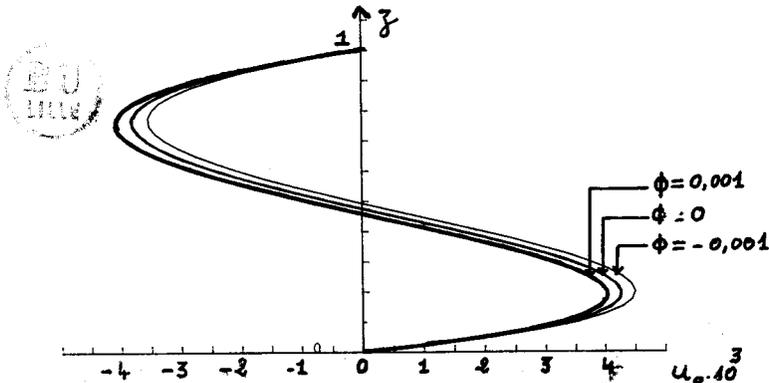


Figure 1 : Profils de  $u_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$  :  
 $\phi = -0,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $\phi = 0,001$  dans le cas  $m+1 = \tilde{\beta} = 0$ .

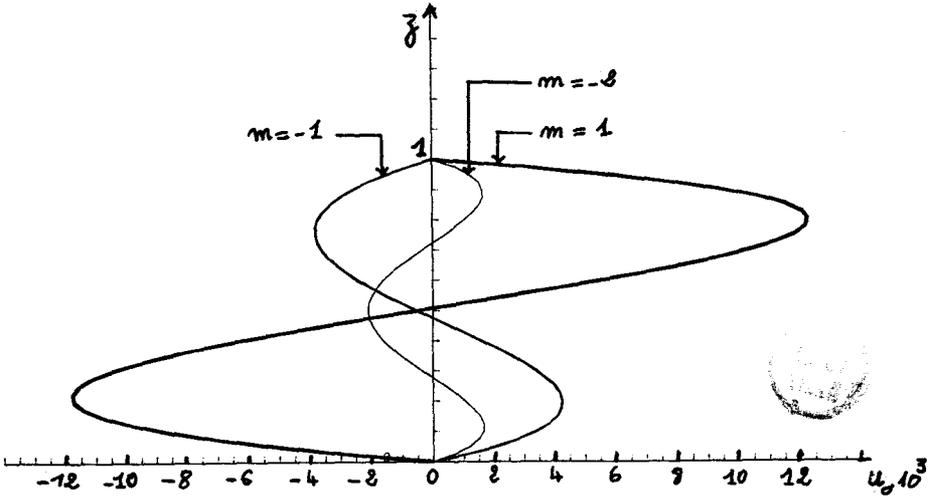


Figure 2 : Profils de  $u_0$  en  $\chi = 0,5$  pour trois valeurs de  $m$  :  
 $m = -2$  ,  $m = -1$  ,  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \tilde{\beta} = 0$ .

Selon la figure 1, une injection du fluide ( $\phi < 0$ ) tend à faire croître la valeur algébrique de la composante radiale quand le disque supérieur est fixe; tandis qu'une aspiration ( $\phi > 0$ ) tend à la faire décroître. De même le fluide "sort" ( $u_0 > 0$ ) du côté du disque inférieur et "rentre" du côté du disque supérieur.

Selon la figure 2, quand les deux disques tournent en sens contraire ( $m = -2$ ) le fluide "sort" aux voisinages de ceux-ci. Quand ils tournent dans le même sens, le fluide "rentre" du côté du disque qui a la plus faible vitesse et "sort" du côté de l'autre disque.

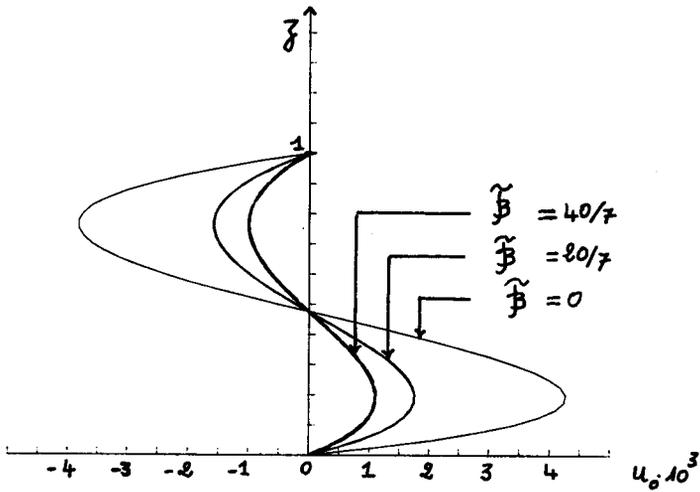


Figure 3 : Profil de  $u_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}$  :  $\tilde{\beta} = 0$  ,  $\tilde{\beta} = 20/7$  et  $\tilde{\beta} = 40/7$  dans le cas  $m+1 = \phi = 0$ .

Le module de  $u_0$  décroît avec  $\tilde{\beta}$  .

b) Profils de la vitesse axiale  $w_0$

- La figure 4 montre les profils de  $w_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$ :  $\phi = -0,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $\phi = 0,001$  dans le cas  $m+1 = \tilde{\beta} = 0$ .
- La figure 5, ceux de  $w_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$ :  $m = -2$ ,  $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \tilde{\beta} = 0$ .
- La figure 6, ceux de  $w_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}$ :  $\tilde{\beta} = 0$ ,  $\tilde{\beta} = 20/7$  et  $\tilde{\beta} = 40/7$  dans le cas  $m+1 = \phi = 0$ .

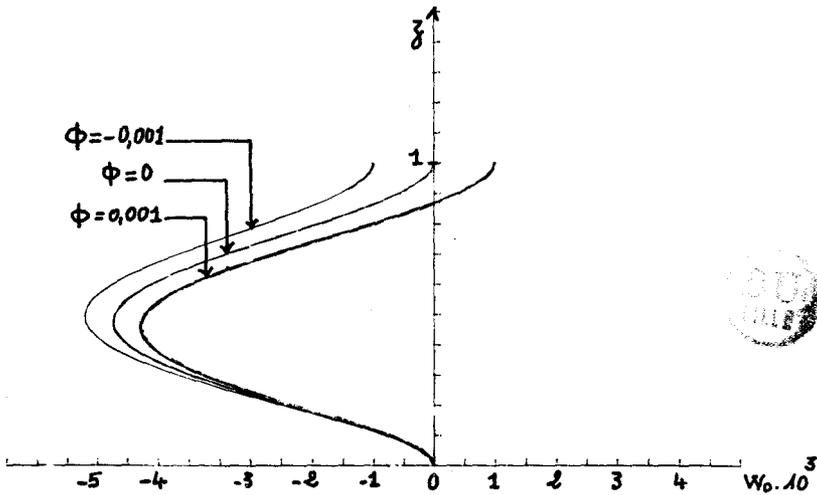


Figure 4 : Profils de  $w_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$  :

$\phi = -0,001$ ,  $\phi = 0$ ,  $\phi = 0,001$  dans le cas  $m+1 = \tilde{\beta} = 0$ .

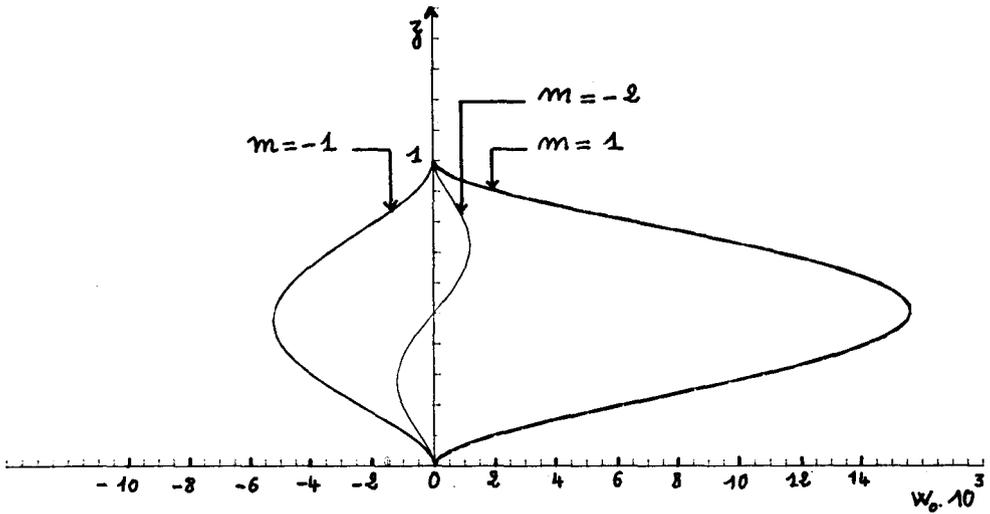


Figure 5 : Profils de  $w_0$  en  $x = 0,5$  pour trois valeurs de  $m$  :  $m = -2$   
 $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \tilde{\beta} = 0$ .

Selon la figure 3, quand le disque supérieur est fixe, la vitesse axiale  $w_0$  est négative. Une faible injection du fluide ( $\phi < 0$ ) tend à croître le module de  $w_0$ , tandis qu'une faible aspiration tend à le décroître.

D'après la figure 4, quand le disque supérieur est fixe, la composante axiale  $w_0$  est négative. Quand les vitesses de rotation des disques sont opposées ( $m = -1$ ), le profil de  $w_0$  est symétrique par rapport au point  $z = 0,5$ ;  $w_0$  est positive du côté du disque supérieur. Quand le disque supérieur tourne avec la vitesse  $2\Omega$ ,  $w_0$  est positive.



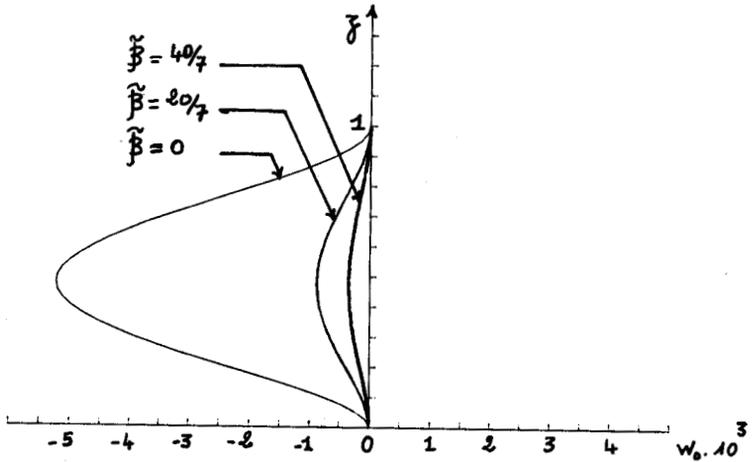


Figure 6 : Profil de  $w_0$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}$  :  $\tilde{\beta} = 0$ ,  $\tilde{\beta} = 20/7$  et  $\tilde{\beta} = 40/7$  dans le cas  $m+1 = \phi = 0$ .

Le module de  $w_0$  décroît avec  $\tilde{\beta}$ .



Profil des composantes de la vitesse  $u_1$ ,  $v_1$  et  $w_1$  .

Dans le cas où  $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = 0$ , les solutions  $\eta_1 u_1$  et  $\eta_1 w_1$  ne dépendent pas explicitement du rapport  $\varepsilon^2/R_H^2$ . Il n'en est pas ainsi quand  $\tilde{\beta}_1$ ,  $\tilde{\beta}_2$  et  $\tilde{\beta}_3$  ne sont pas tous nuls. Dans ce dernier cas, nous choisissons le cas général  $\varepsilon^2 \sim R_H^2$  pour étudier l'influence des

. Dans tous les cas nous posons  $\eta_1$  et nous présentons les profils de  $u_1$  et  $w_1$  .

#### a) Profils de $u_1$

. La figure 7 montre les profils de  $u_1$  en  $x = 0,5$  pour trois valeurs de  $m$ :  $m = -2$ ,  $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \bar{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_1 = 0$ . Dans la plus grande partie du domaine de l'écoulement, le module de  $u_1$  décroît avec  $\phi$  .

. La figure 8 montre les profils de  $u_1$  en  $x = 0,5$  pour trois valeurs de  $m$ :  $m = -2$ ,  $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \bar{\alpha}_1 = \tilde{\beta}_1 = 0$ . Pour  $m = -2$ , les valeurs de  $u_1$  sont très faibles et la courbe est presque confondue avec  $oz$ . Dans la plus grande partie du domaine de l'écoulement, le module de  $u_1$  croît avec  $m$  .

. La figure 9 montre les profils de  $u_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\bar{\alpha}$ :  
 $\bar{\alpha}=0$  ,  $\bar{\alpha}=1$  et  $\bar{\alpha}=2$  dans le cas  $m+1=\phi=\tilde{\beta}_i=0$ , on  
constate que, dans une grande partie du domaine de l'écoulement, le module  
de  $u_1$  croît avec  $\bar{\alpha}$  .

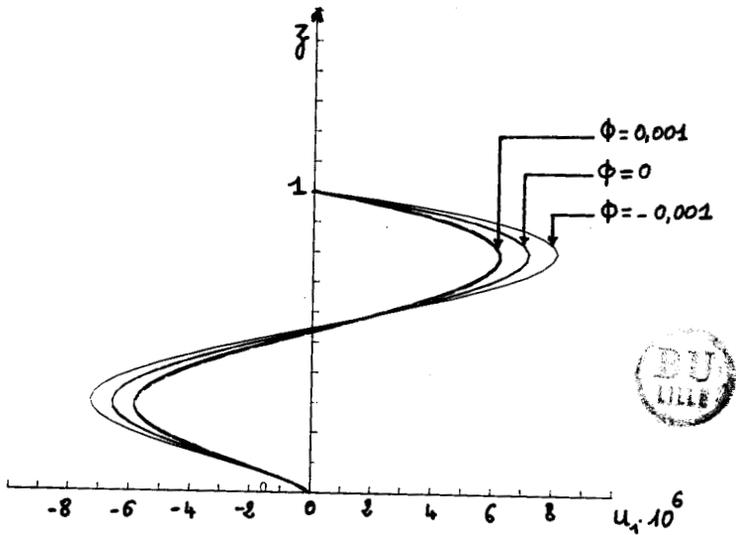


Figure 7 : Profils de  $u_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs  
de  $\phi$  :  $\phi=-0,001$  ,  $\phi=0$  et  $\phi=0,001$  dans  
le cas  $m+1=\bar{\alpha}_i=\tilde{\beta}_i=0$ .

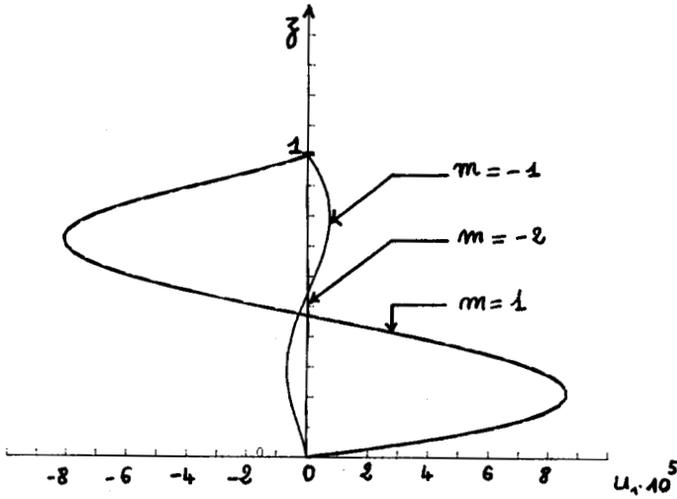


Figure 8 : Profils de  $u_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$  :  $m = -2$ ,  $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\phi = \bar{\alpha}_i = \tilde{\beta}_i = 0$ .

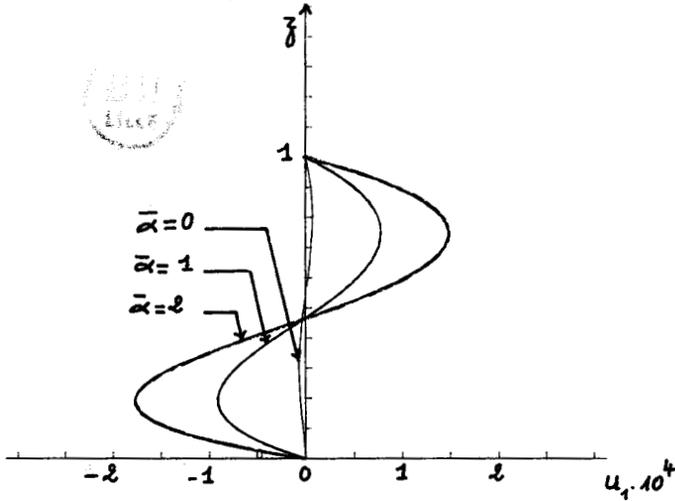


Figure 9 : Profils de  $u_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\bar{\alpha}$  :  $\bar{\alpha} = 0$ ,  $\bar{\alpha} = 1$  et  $\bar{\alpha} = 2$  dans le cas  $m+1 = \phi = \tilde{\beta}_i = 0$

Les figures 10 à 12 montrent les profils de  $u_1$  en  $x = 0,5$  pour trois valeurs prises par l'un des paramètres du troisième degré  $\tilde{\beta}_i$  :

$$\tilde{\beta}_i = 0, \quad \tilde{\beta}_i = 20/7 \text{ et } \tilde{\beta}_i = 40/7 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ dans le cas}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \phi = m+1 = \beta_j \quad (j \neq i) = 0 \text{ pour } i \neq 3, \quad \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \phi = m+1 = 0,$$

$$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 1 \text{ pour } i = 3 \text{ et } \frac{\varepsilon^2}{R_H} = 0,7.$$

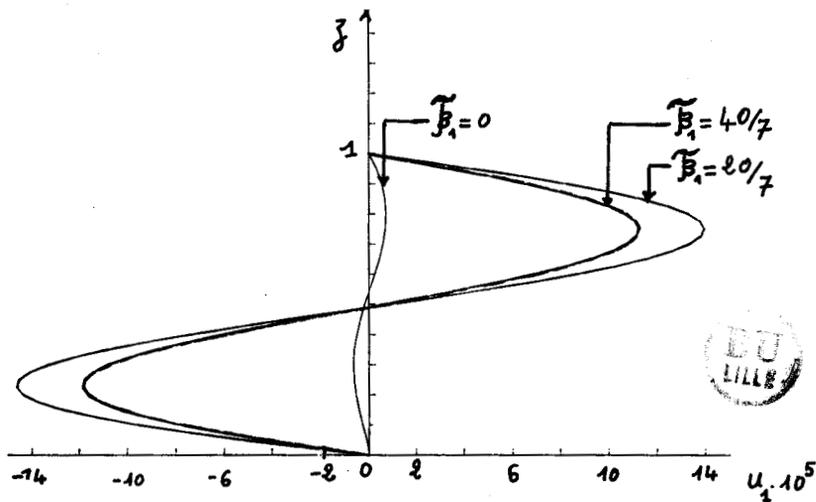


Figure 10 : Profil de  $u_1$  en  $x = 0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}_1$ :  $\tilde{\beta}_1 = 0$ ,  $\tilde{\beta}_1 = 20/7$  et  $\tilde{\beta}_1 = 40/7$  dans le cas  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = m+1 = \phi = 0$ , et  $\frac{\varepsilon^2}{R_H} = 0,7$ .

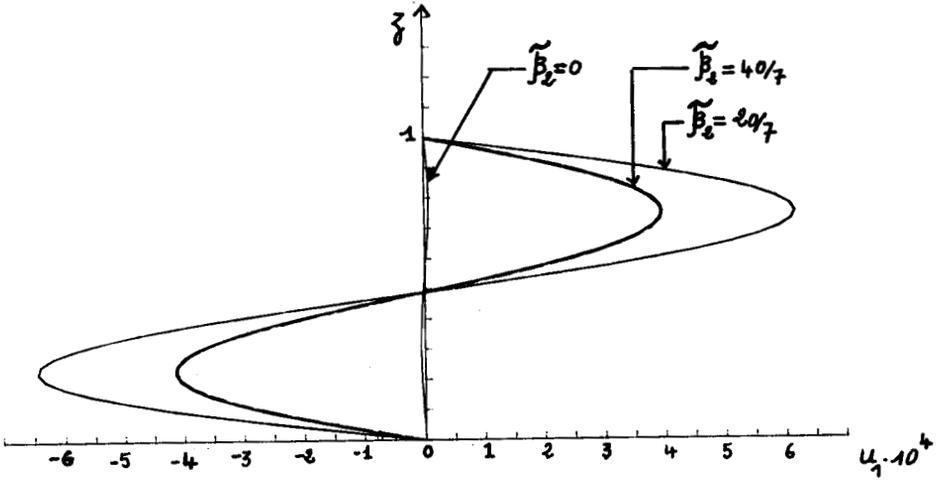


Figure 11 : Profil de  $u_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}_2$ :  $\tilde{\beta}_2=0$ ,  $\tilde{\beta}_2=20/7$  et  $\tilde{\beta}_2=40/7$  dans le cas  $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}_2=\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_3=m+1=\phi=0$ , et  $(\tilde{E}^e/R_H^e)=0,7$ .

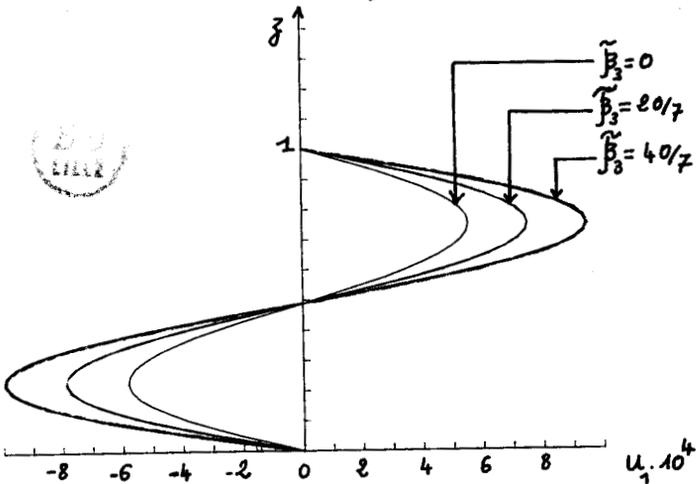


Figure 12 : Profil de  $u_2$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}_3$ :  $\tilde{\beta}_3=0$ ,  $\tilde{\beta}_3=20/7$  et  $\tilde{\beta}_3=40/7$  dans le cas  $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}_2=m+1=\phi=0$ ,  $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=1$  et  $\frac{\tilde{E}^e}{R_H^e}=0,7$ .

b) Profils de  $v_1$ 

. La figure 13 montre les profils de  $v_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$ :  $\phi=-0,001$ ,  $\phi=0$  et  $\phi=0,001$  dans le cas  $m+1=\tilde{\alpha}'=\tilde{\beta}=0$ .

Le module de  $v_1$  décroît avec  $\phi$ .

. La figure 14 montre les profils de  $v_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$ :  $m=-2$ ,  $m=-1$  et  $m=1$  dans le cas  $\phi=\alpha'=\tilde{\beta}=0$ .

Dans une grande partie du domaine de l'écoulement, le module de  $v_1$ , croît avec  $m$ .

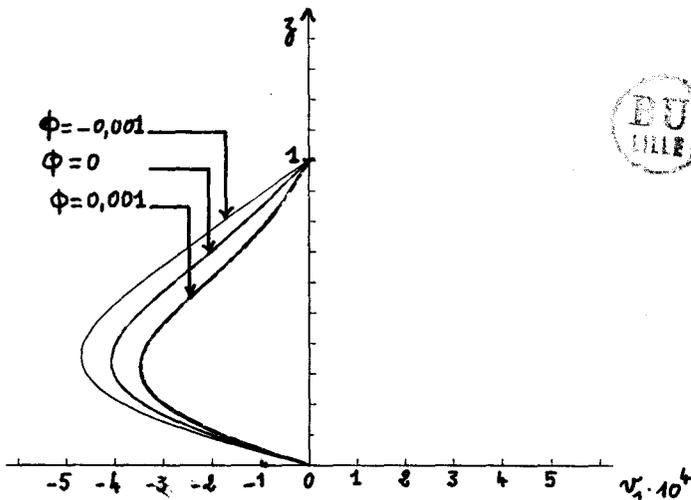


Figure 13 : Profils de  $v_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$  :

$$\phi = -0,001, \quad \phi = 0, \quad \phi = 0,001 \text{ dans le cas } m+1=\tilde{\alpha}'=\tilde{\beta}=0.$$

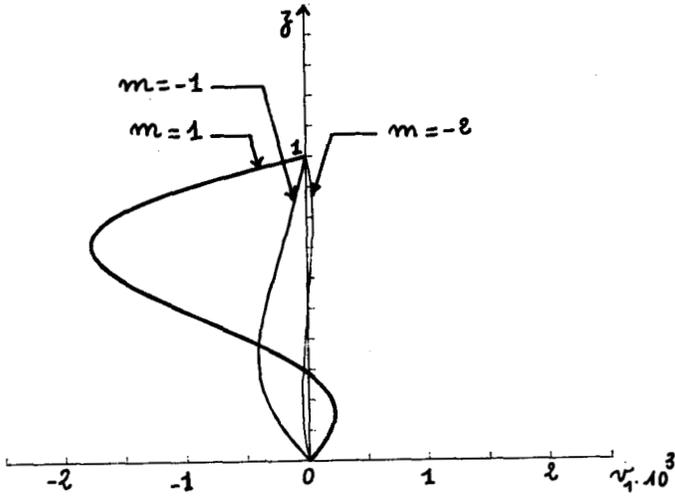


Figure 14 : Profils de  $v_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$  :

$m=-2$ ,  $m=-1$  et  $m=1$  dans le cas

$$\phi = \tilde{\alpha}' = \tilde{\beta} = 0.$$



. La figure ci-dessous montre le profil de  $v_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}$  :  $\tilde{\beta}=0$ ,  $\tilde{\beta}=20/7$  et  $\tilde{\beta}=40/7$  dans le cas  $\phi = m+1 = \tilde{\alpha}' = 0$ .

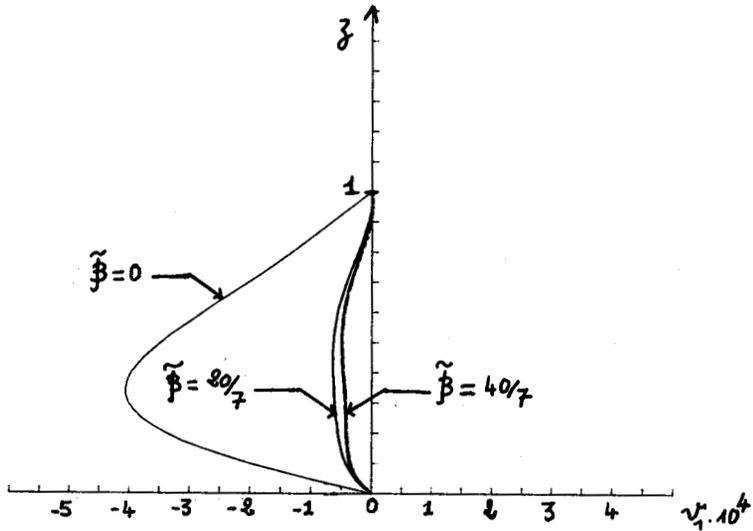


Figure 15 : Profil de  $v_1$  en  $\alpha = 0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}$  :  $\tilde{\beta} = 0$  ,  $\tilde{\beta} = 20/7$  et  $\tilde{\beta} = 40/7$  dans le cas  $\phi = m+1 = \tilde{\alpha} = 0$ .



On constate :

- le module de  $v_1$  décroît avec  $\tilde{\beta}$  ,
- le rapport  $v_1/v_0$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  , étant donné que  $v_0$  est de l'ordre de l'unité.

c) Profils de  $w_1$ 

. La figure 16 montre les profils de la composante axiale  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$ :  $\phi = -0,001$ ,  $\phi = 0$  et  $\phi = 0,001$  dans le cas  $m+1 = \bar{\alpha}' = \tilde{\beta}' = 0$ . Le module de  $w_1$  décroît avec  $\phi$ .

. La figure 17 montre les profils de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$ :  $m = -2$ ,  $m = -1$  et  $m = 1$  dans le cas  $\bar{\alpha}' = \phi = \tilde{\beta}' = 0$ . Quand  $m = -2$ , les valeurs de  $w_1$  sont très faibles et la courbe est presque confondue avec  $oz$ . Le module de  $w_1$  croît avec  $m$ .

. La figure 18 montre les profils de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\bar{\alpha}$ :  $\bar{\alpha} = 0$ ,  $\bar{\alpha} = 1$  et  $\bar{\alpha} = 2$  dans le cas  $m+1 = \bar{\alpha}' = \tilde{\beta}' = 0$ .  $w_1$  croît avec  $\bar{\alpha}$ .

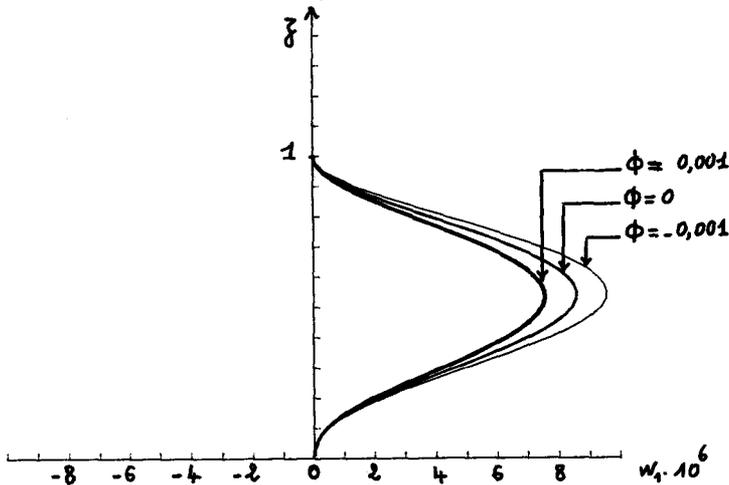


Figure 16 : Profils de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\phi$ :  $\phi = -0,001$ ,  $\phi = 0$  et  $\phi = 0,001$  dans le cas  $m+1 = \bar{\alpha}' = \tilde{\beta}' = 0$ .

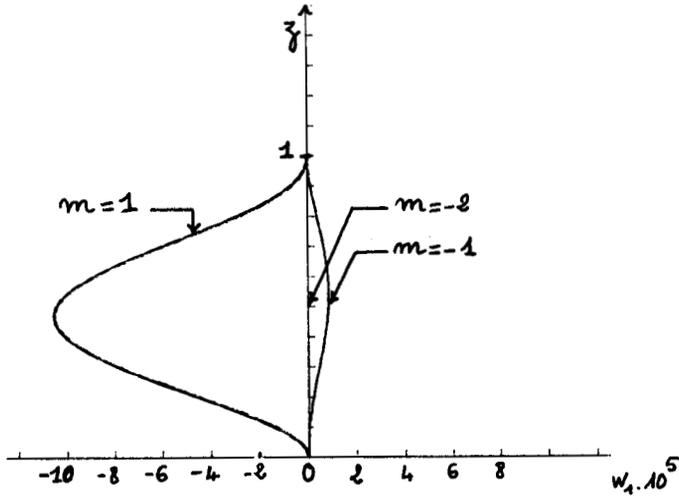


Figure 17 : Profils de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $m$  :  $m=-2$ ,  $m=-1$  et  $m=1$  dans le cas  $\phi = \bar{\alpha}' = \tilde{\beta}_1 = 0$ .

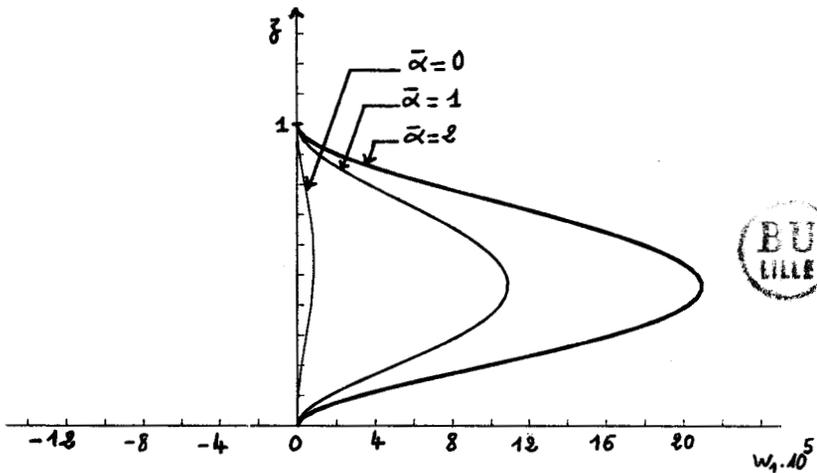


Figure 18 : Profils de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\bar{\alpha}$  :  $\bar{\alpha}=0$ ,  $\bar{\alpha}=1$  et  $\bar{\alpha}=2$  dans le cas  $m+1 = \phi = \bar{\alpha}' = \tilde{\beta}_1 = 0$

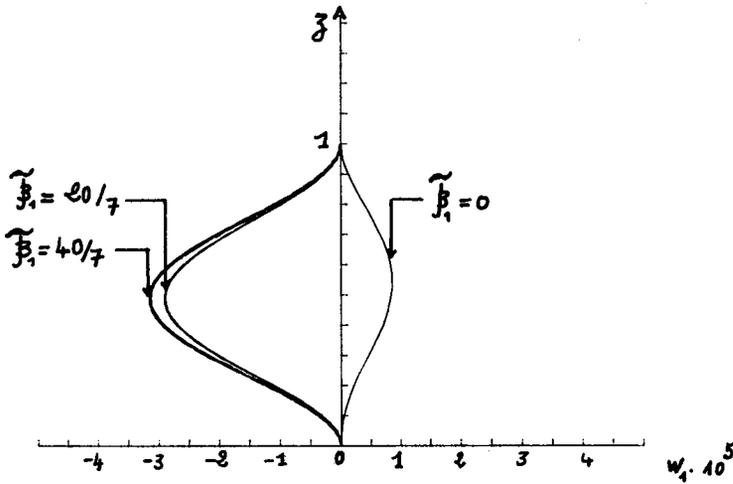


Figure 19 : Profil de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}_1$ :  $\tilde{\beta}_1=0$ ,  $\tilde{\beta}_1=20/7$  et  $\tilde{\beta}_1=40/7$  dans le cas  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_3 = \phi = m+1=0$  et  $\epsilon^e/R_H^e = 0,7$ .

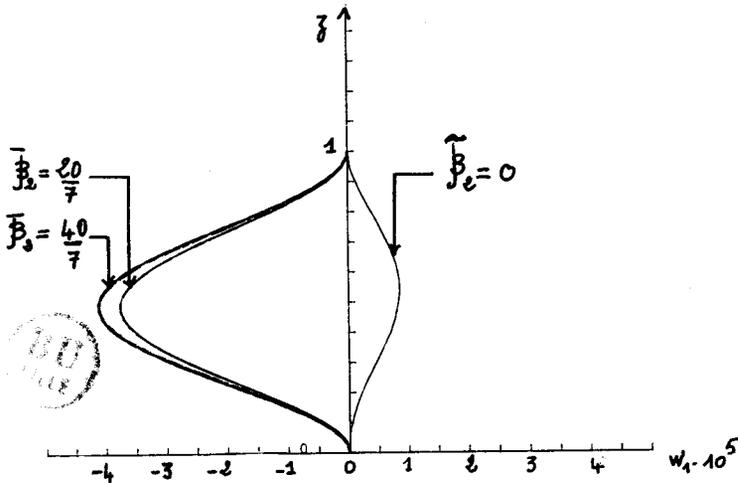


Figure 20 : Profil de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de  $\tilde{\beta}_2$ :  $\tilde{\beta}_2=0$ ,  $\tilde{\beta}_2=20/7$  et  $\tilde{\beta}_2=40/7$  dans le cas  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_3 = m+1=\phi=0$  et  $\epsilon^e/R_H^e = 0,7$ .

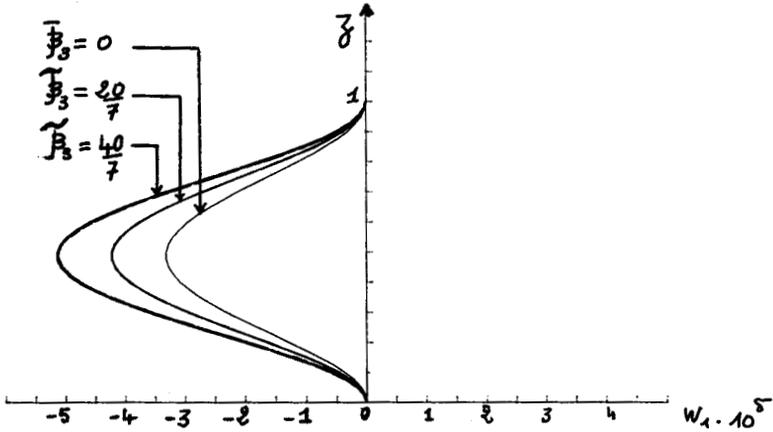


Figure 21 : Profil de  $w_1$  en  $x=0,5$  pour trois valeurs de

$$\tilde{\beta}_3 : \tilde{\beta}_3 = 0, \quad \tilde{\beta}_3 = \frac{20}{7} \text{ et } \tilde{\beta}_3 = \frac{40}{7} \text{ dans le cas}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = m+1 = \phi = 0, \quad \tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 1 \text{ et } \frac{E^e}{R_H^e} = 0,7.$$

Les figures 10, 11, 12, 19, 20 et 21 montrent que :

- le module de  $u_2$  décroît avec  $\tilde{\beta}_1$  ( $\tilde{\beta}_1 \neq 0$ ) , avec  $\tilde{\beta}_2$  ( $\tilde{\beta}_2 \neq 0$ )  
et croît avec  $\tilde{\beta}_3$
- le module de  $w_1$  croît avec  $\tilde{\beta}_1$  ,  $\tilde{\beta}_2$  et  $\tilde{\beta}_3$  .



### III.5. CONFRONTATION DES RESULTATS AVEC CEUX DE GRIFFITHS ET SHARMA

#### III.5.1. Confrontation des résultats avec ceux de GRIFFITHS

Pour définir le domaine de recouvrement commun rappelons la formulation et les hypothèses de GRIFFITHS et col. [25] et les nôtres.

##### . Hypothèses de GRIFFITHS

$$(III.5,1) \quad \bar{x} = X/L, \quad \bar{z} = Z/H, \quad \bar{u} = U/\Omega H R_H, \quad \bar{v} = V/\Omega H,$$

$$\bar{w} = W/\Omega H R_H, \quad \bar{p} = P/\rho \Omega^2 H^2$$

$$\varepsilon = (H/L) \ll 1, \quad R_H = R \varepsilon^2 \ll 1, \quad \bar{\alpha}_i \ll 1, \quad \bar{\beta}_i R_H^2 \ll R_H^2.$$

##### . Notre formulation et nos hypothèses

$$(III.5,2) \quad x = X/L, \quad z = Z/H, \quad u = U/\Omega L R_H, \quad v = V/\Omega L,$$

$$w = W/\Omega H R_H, \quad p = P/\rho \Omega^2 L^2,$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad R_H \ll 1, \quad \bar{\alpha}_i \ll 1, \quad \bar{\beta}_i R_H^2 \ll \varepsilon^2.$$

Dans le domaine d'étude (III.5,1),  $R \ll 1$  et  $\bar{\beta}_i R_H^2 \ll R^2$ . Dans (III.5,2),  $R \ll \varepsilon^{-2}$  et  $\bar{\beta}_i R^2 \ll \varepsilon^{-2}$  avec  $\varepsilon^{-2} \gg 1$ . Le domaine de recouvrement commun est donc défini par :

$$(III.5,3) \quad \varepsilon \ll 1, \quad R \ll 1, \quad \bar{\beta}_i R^2 \ll R^2 \text{ et } \bar{\alpha}_i \ll 1.$$

Dans ce domaine, nous écrirons les deux résultats à confronter avec des conditions aux limites identiques : nous posons  $\phi = m+1=0$  dans notre solution et nous procédons au changement de repère en remplaçant  $\xi$  par (1-3) pour écrire la solution de GRIFFITHS dans notre système de coordonnées. Pour les deux premières approximations, notre solution (III.2,4) et (III.3,11) donne pour la vitesse :

$$(III.5,4) \quad \begin{aligned} U &= \Omega L R_H (u_0 + R_H^e \sum_{i=1}^{39} F_i P_i), \\ V &= \Omega L (v_0 + R_H^e \sum_{i=40}^{46} F_i P_i), \\ W &= \Omega H R_H (w_0 + R_H^e \sum_{i=47}^{55} F_i P_i) \end{aligned}$$

où, en particulier,  $F_i$  sont fonctions de  $\bar{K} = (1 + \bar{\beta} R^e \varepsilon^e m^e x^e)^{-1}$  et  $\bar{M} = (1 + 3\bar{\beta} R^e \varepsilon^e m^e x^e)^{-1}$ . Dans le domaine de recouvrement (III.5,3),  $\bar{K}$  et  $\bar{M}$  s'écrivent :

$$(III.5,5) \quad \begin{aligned} \bar{K} &= 1 - \bar{\beta} R^e \varepsilon^e m^e x^e + O[(\bar{\beta} R^e \varepsilon^e)^2], \\ \bar{M} &= 1 - 3\bar{\beta} R^e \varepsilon^e m^e x^e + O[(\bar{\beta} R^e \varepsilon^e)^2]. \end{aligned}$$

Portons (III.5,5) dans (III.5,4), nous obtenons pour  $m+1 = \phi = 0$  :

$$(III.5,6) \quad \begin{aligned} U &= \Omega L R_H \left\{ \frac{x}{60} (1 - \bar{\beta} R^e \varepsilon^e x^e) P^{(0)} + R_H^e \left[ \frac{x}{4536000} P^{(1)} \right. \right. \\ &+ \frac{\bar{\alpha}_1 x}{198000} P^{(2)} + \frac{\bar{\alpha}_e x}{378000} P^{(3)} + \frac{x}{6300} [\bar{\alpha}' (4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2) \\ &\left. \left. - (6\bar{\beta}_1 + 7\bar{\beta}_e)] P^{(4)} \right] + O(\bar{\beta}^2 R^4 \varepsilon^4) \right\}, \end{aligned}$$

$$V = \Omega L [x P^{(5)} + R_H^2 \left( \frac{x}{12600} P^{(6)} + \frac{\bar{\alpha}' x}{30} P^{(7)} \right) + O(\bar{\beta} R^4 \varepsilon^6)],$$

$$W = \Omega H R_H \left\{ \frac{1}{60} (1 - 2\bar{\beta} R^2 \varepsilon^2) P^{(8)} - R_H^2 \left[ \frac{1}{2268000} P^{(9)} - \frac{\bar{\alpha}_1}{297000} P^{(10)} + \frac{\bar{\alpha}_2}{567000} P^{(11)} + \frac{1}{6300} [\bar{\alpha}' (4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2) - (6\bar{\beta}_1 + 7\bar{\beta}_2)] P^{(12)} \right] O(\bar{\beta}^2 R^4 \varepsilon^4) \right\}$$

où les  $P^{(i)}$  sont des polynômes en  $z$  définis par :

(III.5,7)

$$P^{(0)} = 6z - 21z^2 + 20z^3 - 5z^4,$$

$$P^{(1)} = 110z^{10} - 1100z^9 + 4815z^8 - 11880z^7 + 16506z^6 - 9828z^5 - 3240z^4 + 6480z^3 - 1737z^2 - 126z,$$

$$P^{(2)} = 150z^8 - 1200z^7 + 4200z^6 - 7560z^5 - 9135z^4 - 8820z^3 + 5257z^2 - 1162z,$$

$$P^{(3)} = 525 z^8 - 4200 z^7 + 14070 z^6 - 23940 z^5 + 24570 z^4 \\ - 17640 z^3 + 8189 z^2 - 1574 z,$$

$$P^{(4)} = 70 z^6 - 420 z^5 + 735 z^4 - 420 z^3 - 3 z^2 + 38 z,$$

$$P^{(5)} = 1 - z,$$

$$P^{(6)} = 40 z^7 - 280 z^6 + 714 z^5 - 840 z^4 + 420 z^3 - 54 z,$$

$$P^{(7)} = -z^5 + 5 z^4 - 7 z^3 + 3 z^2,$$

$$P^{(8)} = -6 z^2 + 14 z^3 - 10 z^4 + 2 z^5,$$

$$P^{(9)} = 10 z^{11} - 110 z^{10} + 535 z^9 - 1485 z^8 + 2358 z^7 - 1638 z^6 \\ - 648 z^5 + 1620 z^4 - 579 z^3 - 63 z^2,$$

$$P^{(10)} = 50 z^9 - 450 z^8 + 1800 z^7 - 3780 z^6 + 5481 z^5 - 6615 z^4 \\ + 5257 z^3 - 1743 z^2,$$

$$P^{(11)} = 175 z^9 - 1575 z^8 + 6030 z^7 - 11970 z^6 + 14742 z^5 \\ - 13230 z^4 + 8189 z^3 - 2361 z^2,$$

$$P^{(12)} = 10 z^7 - 70 z^6 + 147 z^5 - 105 z^4 - z^3 + 19 z^2.$$

En remplaçant dans la solution de GRIFFITHS (II.1,13) et (II.1,14)

$\bar{x}$  par  $x/\varepsilon$ , on obtient (III.5,6) hors mis les restes

$$\Omega L R_H O(\beta^2 R_H \varepsilon^4), \Omega L O(\beta R^4 \varepsilon^6) \text{ et } \Omega H R_H O(\beta^2 R^4 \varepsilon^4) \quad \text{qui}$$

sont négligeables devant les autres termes. Ainsi, les deux résultats coïncident dans le domaine de recouvrement commun.

En ce qui concerne la pression hydrostatique GRIFFITHS n'a pas donné la solution, mais la première approximation est donnée par (II.1,15). Nous faisons la comparaison seulement en première approximation.

La solution de GRIFFITHS donne, en remplaçant  $\bar{x}$  par  $x/\varepsilon$  :

$$P = \rho \Omega^2 H^2 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{3}{20} x^2 - \frac{1}{2\varepsilon^2} \bar{\alpha}_2 x^2 + \bar{w}_{0z} + \text{constante} \right)$$

ou encore :

$$(III.5,8) \quad P = \rho \Omega^2 L^2 \left( \frac{3}{20} x^2 - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_2 x^2 + \varepsilon^2 w_{0z} + \text{constante} \right)$$

$$\text{avec} \quad w_{0z} = \bar{w}_{0z} = \frac{1}{30} (-6z + 21z^3 - 20z^3 + 5z^4).$$

Notre solution (III.2,4) donne, pour  $m+1 = \phi = 0$  :

$$(III.5,9) \quad P = \rho \Omega^2 L^2 \left( \frac{3}{20} x^2 - \frac{1}{3} \bar{\alpha}_2 x^2 + \text{constante} \right).$$

Etant donné que dans le domaine de recouvrement commun  $\varepsilon^2 \ll 1$ , les solutions (III.5,8) et (III.5,9) coïncident.

### III.5.2. CONFRONTATION DES RESULTATS AVEC CEUX DE SHARMA.

Pour définir le domaine de recouvrement commun à notre méthode et celle de SHARMA et col. [23], rappelons les hypothèses adoptées par cet auteur :

$$(III.5,10) \quad \bar{x} = X/H, \quad \bar{z} = Z/H,$$

$$R_H = R\varepsilon^2 \ll 1, \quad \varepsilon \approx 1, \quad \bar{\alpha} \approx 1, \quad \frac{\Phi}{\Omega H} \ll 1.$$

Nos hypothèses sont rappelées par (III.5,2) et l'hypothèse sur  $\Phi$  à savoir :

$$(III.5,11) \quad \phi = (\Phi/\Omega H R_H) \approx 1.$$

Etant donné que l'étude de SHARMA porte sur un fluide du second degré, le domaine de recouvrement commun est défini par :

$$(III.5,12) \quad R \ll 1, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \bar{\alpha} \approx 1, \quad \phi \approx 1.$$

SHARMA et col. (23) ont calculé les trois premières approximations de (II.2,12) :

$$(III.5,13) \quad U = \Omega H \bar{x} (f'_0 + R_H f'_1 + R_H^2 f'_2),$$

$$V = \Omega H \bar{x} (g_0 + R_H g_1 + R_H^2 g_2),$$

$$W = -2\Omega H (f_0 + R_H f_1 + R_H^2 f_2),$$

$$P = \rho \Omega^2 H^2 \left[ 2R_H^{-1} F' + 2F^2 - 4\bar{\alpha} (2F' + \int FF''' dz) \right. \\ \left. + \bar{\alpha}'' \bar{x}^2 (F'' + G') + R_H^{-1} \bar{x}^2 (\lambda_0 + R_H \lambda_1 + R_H^2 \lambda_2) \right].$$

De notre part, nous nous avons calculé les deux premières approximations

$$(III.5,14) \quad U = \Omega L (R_H u_0 + R_H^3 u_1), \\ V = \Omega L (v_0 + R_H^2 v_1), \\ W = \Omega H (R_H w_0 + R_H^3 w_1), \\ P = \rho \Omega^2 L^2 (p_0 + R_H^2 p_1).$$

Vue la différence dans les ordres d'approximations de (III.5,13) et (III.5,14) nous procédons à la comparaison des résultats suivants :

$$(III.5,15) \quad U = \Omega H \bar{x} (f'_0 + R_H f'_1), \quad V = \Omega H \bar{x} (g_0 + R_H g_1 + R_H^2 g_2), \\ W = -2\Omega H (f_0 + R_H f_1), \quad P = \rho \Omega^2 H^2 \left[ 2R_H^{-1} f'_0 + 2f'_1 + 2f_0^2 - 8\bar{\alpha} f_0^2 \right. \\ \left. + \bar{\alpha}'' \bar{x}^2 (f_0'' + g_0') + R_H^{-1} \lambda_0 \bar{x}^2 + \lambda_1 \bar{x}^2 - 4\bar{\alpha} \int f_0 f_0''' dz \right]$$

et

$$(III.5,16) \quad U = \Omega L R_H u_0, \quad V = \Omega L (\nu_0 + R_H^2 \nu_1), \quad W = \Omega H R_H w_0,$$

$$P = \rho \Omega^2 L^2 p_0.$$

On doit avoir d'après (III.5,12) :

$$(III.5,17) \quad \text{Solution (III.5,15) = Solution (III.1,16).}$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad \phi \ll 1 \quad R \ll 1$$

La solution de SHARMA (III.5,15) est donnée par (II.2,13), (II.2,14), (II.2,15) et (II.2,17). Nous y posons  $\bar{\phi} = R_H \phi$  et  $\bar{x} = x/\varepsilon$ , nous obtenons :

$$(III.5,18) \quad \frac{U}{\Omega L} = R_H \left\{ \frac{x}{60} \left[ -5m^2 z^4 - 20m z^3 + (9m^2 + 30m) z^2 - (4m^2 + 10m) z \right] + 3\phi x (z^2 - z) \right\} - R_H^3 \frac{\phi^2 x}{140} (26z - 54z^2 + 42z^5 - 14z^6),$$

$$\frac{V}{\Omega L} = x(mz + 1) + R_H^2 \frac{x}{6300} \left[ (35m - 8m^3) z - (350m + 140m^2) z^3 + (525m + 70m^2 - 35m^3) z^4 - (210m - 210m^2 - 63m^3) z^5 - 140m^2 z^6 - 20m^3 z^7 \right] + R_H^2 \frac{\phi x}{20} \left[ (10$$

$$+ m)z - 20z^3 - (5m - 10)z^4 + 4mz^5] + O(\phi^6 R_H^4),$$

$$\frac{W}{\Omega_H} = R_H \left\{ \frac{1}{60} [2m^2 z^5 + 10m z^4 - (6m^2 + 20m)z^3 + (4m^2 + 10m)z^2] + \phi(3z^2 - 2z^3) \right\} + R_H^3 \frac{\phi^2}{70} (13z^2 - 18z^3 + 7z^6 - 2z^7),$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho \Omega^2 L^2} = & \frac{1}{2} m^2 \bar{\alpha} x^2 + \frac{1}{20} (3m^2 + 10m + 10)x^2 + 3\phi x^2 \\ & + \varepsilon^2 6\phi(z^2 - z) - R_H^2 \frac{\phi^2}{70} (27 + 315\bar{\alpha}) x^2 \\ & + R_H^2 \cdot 9\bar{\alpha} \phi^2 x^2 (z-1)^2 - \frac{\varepsilon^2}{30} [(10m + 4m^2)z \\ & - (30m + 9m^2)z^2 + 20mz^3 + 5m^2z^4] \\ & - \varepsilon^2 R_H \cdot 12\bar{\alpha} \phi^2 (2z^3 - 3z^2) + \varepsilon^2 R_H^2 \frac{\phi^2}{2} (2z^3 - 3z^2) \\ & - \varepsilon^2 R_H^2 \cdot 72\bar{\alpha} \phi^2 (z^2 - z)^2 + \text{constante.} \end{aligned}$$

Notre solution (III.5,16) est donnée par (III.2,4) et (III.3,11).

Nous y posons  $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = 0$ ,  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}_1 = 0$ , nous obtenons :

$$(III.5, 19) \quad \frac{U}{\Omega L} = R_H \left\{ \frac{x}{60} \left[ -5m^2 z^4 - 20m z^3 + (9m^2 + 30m) z^2 - (4m^2 + 10m) z \right] + 3\phi x (z^2 - z) \right\},$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{\Omega L} = x(mz + 1) + R_H^2 \left\{ \frac{x}{6900} \left[ (35m - 8m^3) z^3 - (350m + 140m^2) z^3 + (525m + 70m^2 - 35m^3) z^4 - (240m - 240m^2 - 63m^3) z^5 - 140m^2 z^6 - 20m^3 z^7 \right] + \frac{\phi x}{20} \left[ (10 + mz) z^3 - (5m - 10) z^4 + 4m z^5 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{W}{\Omega H} = R_H \left\{ \frac{1}{60} \left[ 2m^2 z^5 + 10m z^4 - (6m^2 + 20m) z^3 + (4m^2 + 10m) z^2 \right] + \phi (3z^2 - 2z) \right\}, \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{2} \bar{\alpha} m^2 x^2 + \frac{1}{20} (3m^2 + 10m + 10) x^2 + 3\phi x^2 + \text{constante.}$$

Les solutions (III.5, 18) et (III.5, 19) coïncident car on peut omettre dans (III.5, 18) les termes de  $U/\Omega L$  et  $W/\Omega H$  ayant en facteur  $R_H^3$ , le terme de l'ordre de grandeur de  $R_H^4$  dans  $V/\Omega L$  et les termes en facteur de  $R_H^2$  ou  $\varepsilon^2$  dans  $P/\rho \Omega L^2$ .

### III.6.- Force de portance et couple

Le vecteur contrainte pour la direction de vecteur unitaire  $\vec{n}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \cdot \vec{n} = & -P \mathbb{1} \cdot \vec{n} + \alpha_1 \mathbb{A}_2 \cdot \vec{n} + \alpha_2 (\mathbb{A}_1^e) \cdot \vec{n} + \beta_1 ((\text{tr} \mathbb{A}_2) \mathbb{A}_1) \cdot \vec{n} \\ & + \beta_2 (\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_2 \mathbb{A}_1) \cdot \vec{n} + \beta_3 \mathbb{A}_3 \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Calculons la contrainte pour la direction  $\vec{n}(0, 0, -1)$ . Etant donné que la contrainte radiale ne présente pas d'intérêt, elle ne sera pas calculée et sera désignée par le symbole (—).

$$\mathbb{T} \cdot \vec{n} = - \left( \begin{array}{l} (—) \\ \mu (\mathbb{A}_1)^{\theta Z} + \alpha_1 (\mathbb{A}_2)^{\theta Z} + \alpha_2 (\mathbb{A}_1^e)^{\theta Z} + \beta_1 ((\text{tr} \mathbb{A}_2) \mathbb{A}_1)^{\theta Z} \\ + \beta_2 (\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_2 \mathbb{A}_1)^{\theta Z} + \beta_3 (\mathbb{A}_3)^{\theta Z} \\ - P + \mu (\mathbb{A}_1)^{ZZ} + \alpha_1 (\mathbb{A}_2)^{ZZ} + \alpha_2 (\mathbb{A}_1^e)^{ZZ} + \beta_1 ((\text{tr} \mathbb{A}_2) \mathbb{A}_1)^{ZZ} \\ + \beta_2 (\mathbb{A}_1 \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_2 \mathbb{A}_1)^{ZZ} + \beta_3 (\mathbb{A}_3)^{ZZ} \end{array} \right)$$

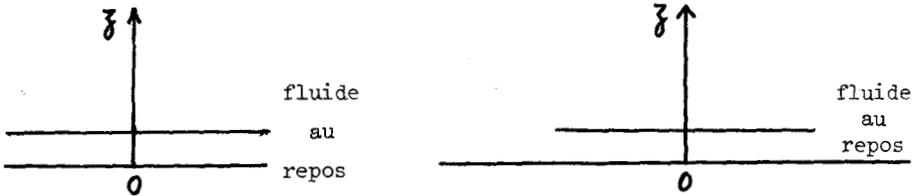
En première approximation, on a :

$$\text{(III.6,1)} \quad \mathbb{T} \cdot \vec{n} = -\rho \Omega^2 L^e \left( \begin{array}{l} (—) \\ \frac{\varepsilon}{R_H} (v_{\theta Z} + \tilde{\beta} v_{\theta Z}^3) \\ - p_0 + \alpha'' v_{\theta Z}^e \end{array} \right)$$

$v_0$  et  $p_0$  sont données par (III.2,4).

Nous nous proposons de calculer la force de portance et le couple dans les cas d'intérêt pratique indiqués sur la figure ci-dessous.

Deux disques coaxiaux sont séparés l'un de l'autre par une distance  $H$ . L'un de rayon  $L$ , est en rotation  $\Omega$  autour de son axe et l'autre de rayon supérieur ou égal à  $L$  est fixe. A l'extérieur du domaine  $X < L$  et  $0 < Z < L$  (c'est-à-dire  $x < 1$  et  $0 < z < 1$ ) le fluide est au repos à pression constante (qu'on prend pour origine des pressions).



On négligera les effets de bord, ce qui est légitime dans le cadre de notre approche. On écrira que notre solution est valable jusqu'à  $X = L$ , où on exprimera une condition sur la contrainte normale.

Etant donné que c'est le plan " $Z=0$ " qui est fixe, nous posons  $m = -1$  et nous procédons à un changement de repère en remplaçant  $z$  par  $(1-z)$  pour écrire (III.6.1). On a sur le disque supérieur, avec  $\vec{n}(0,0,1)$ :

$$\mathbb{T} \cdot \vec{n} = -\rho \Omega^2 L^2 \left( \begin{array}{l} ( - ) \\ \frac{\epsilon}{R_H} (x + \tilde{\beta} x^3) \\ \frac{1}{2} \bar{\alpha}_3 x^2 - \frac{z}{20} x^2 + (2\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) x^2 + \text{constante} \end{array} \right)$$

En négligeant les effets de bord et en écrivant que la contrainte normale précédente calculée en  $x = 1$  est égale à la pression extérieure, on obtient :

$$\Pi \cdot \vec{\pi} = \rho \Omega^2 L^2 \left| \begin{array}{l} ( - ) \\ \frac{\varepsilon}{R_H} (x + \tilde{\beta} x^3) \\ (x^2 - 1) \left[ \frac{1}{2} (4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2) - \frac{3}{2\sigma} \right] \end{array} \right.$$

La force de portance  $F_0$  et le couple  $\mathcal{C}_0$  exercés de la part du fluide sont donnés par :

$$F_0 = \frac{\pi}{4} \rho \Omega^2 L^4 [ 10 (4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2) - 3 ],$$

$$\mathcal{C}_0 = -\frac{\pi}{6} \rho \Omega^2 L^5 \frac{\varepsilon}{R_H} (3 + 2\tilde{\beta}).$$

On peut faire les remarques suivantes :

- En fluide newtonien la force de portance tend à rapprocher les disques et le couple s'oppose au mouvement de rotation imposé.
- En fluide du second degré :  $4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2 = \alpha > 0$  et  $\tilde{\beta} = 0$ , le caractère non newtonien a pour effet d'écartier les deux disques. Le couple reste inchangé par rapport à ce qui est trouvé en fluide newtonien. On peut donc parler d'une amélioration des conditions de lubrification en fluide du second degré.
- En ce qui concerne le fluide du troisième degré, pour que la solution ait un sens physique, il faut que  $(\beta_1 + \beta_2)$  soit positif. En effet, dans le cas contraire

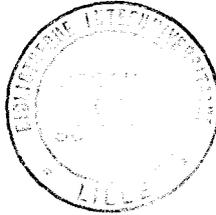
$\tilde{\beta} = 2((\beta_1 + \beta_2)/\rho)(\Omega R_H / L^2 \varepsilon^4)$  est négatif et on peut choisir la valeur de  $\frac{\Omega R_H}{L^2 \varepsilon^4}$  de sorte à avoir  $3 + 2\tilde{\beta} < 0$  : alors le couple ne s'opposerait plus à la rotation - physiquement inacceptable. Ainsi l'énergie nécessaire pour faire tourner le disque mobile est plus grande que celle fournie en fluide newtonien. Si  $4\bar{\alpha}_1 + 3\bar{\alpha}_2 > 0$  il y a une amélioration de la force de portance. Dans le cas contraire il y a une détérioration des conditions de lubrification.

REFERENCES

- [1] SCHOWALTER, W.R., Mechanics of non-newtonian fluids.
- [2] CAUCHY, A.L., Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non. Bull. Soc. Philomath. Paris, 9-13 oeuvres 2, 300-304 (1828).
- [3] NOLL, W., A mathematical theory of mathematical behavior of continuous media. Arch. Rational. Mech. Anal. 2, 197-226 (1958).
- [4] OLDROYD, J.G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. (London) A 200. 523-541 (1950).
- [5] TRUESDELL, C. Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus, Paris (1974).
- [6] STOKES, G.G. On the theory of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. Trans. Camb. Phil. Sol. 8, 287-319 (1945).
- [7] REYNOLDS, O., Phil. Mag. (5), vol. 20, p. 469 (1885).
- [8] REINER, M. A mathematical theory of dilatancy. Am. J. Math. 67, 350-362 (1945).
- [9] RIVLIN, R.S. The hydrodynamics of non-newtonian fluids. I. Proc. Roy. Soc. (London) A, 193, 260-281 (1948).
- [10] RIVLIN, R.S., and ERICKSEN, J.L. Stress-deformation relations for isotropic materials. J. Rational mech. Anal. 4, 323-425 (1955).
- [11] WANG, C.C., A new representation theorem for isotropic functions. Arch. Rational Mech. Anal. 36, 166-229 (1970).
- [12] COLEMAN, B.D., and NOLL, W., An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. Arch. Rational Mech. Anal. 6, 355-370 (1960).

- [13] SPENCER, A.J.M., and RIVLIN, R.S. Further results on the theory of matrix polynomials, Arch. Rational Mech. Anal. 4, 214-230 (1959/60).
- [14] WANG, C.C., Stress relaxation and the principle of fading memory. Arch. Rational Mech. Anal. 18, 117-126 (1965).
- [15] WANG, C.C., The principle of fading memory. Arch. Rational Mech. Anal., 18, 343-366 (1965).
- [16] COLEMAN, B.D., and MARKOVITZ, H., Normal stress effects in second order fluids. J. App. Physics 35, 1-9 (1964).
- [17] MARKOVITZ, H. and COLEMAN, B.D. Nonsteady helical flows of second order fluids. Physics of fluids 7, 833-841 (1964).
- [18] TRUESDELL, C., Fluids of second grade regarded as fluids of convected elasticity. Physics of fluids 8, 1936-1938 (1965).
- [19] COLEMAN, B.D., DUFFIN, R.G. and MITZEL, V., Instability, uniqueness, and non existence theorems for the equation on a strip. Arch. Rational Mech. Anal. 19, 100-116 (1965).
- [20] COLEMAN, B.D., and MITZEL, V., Breakdown of laminar shearing flows for second order fluids in channels of critical width. Zeitschrift für angewandte mathematik und Mechanik. 46, 445-448 (1966).
- [21] DUNN, J.E., and FOSDICK, R.L., Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade. Arch. Rational Mech. Anal. 56, 191-252 (1974).
- [22] FOSDICK, R.L., and RAJAGOPAL, K.R., Anomalous features in the model of "second order fluids". Arch. Rational Mech. Anal. 70, 145-153 (1978).
- [23] SHARMA, H.G. and SHARMA, U.P. Flow of second order fluid between two infinite rotating discs with injection. Indian J. Pure Appl. Math. India, vol. 6, n° 1, 36-44 (1975).

- [24] A. DYMENT, Formulation asymptotique des écoulements d'un fluide incompressible entre deux disques voisins en rotation. C.R. Acad. Sc. Paris, Série II, pp. 129-132, (1981).
- [25] GRIFFITHS, D.F., JONES D.T. et WALTERS, K. A flow reversal due to edge effects J. Fluid Mech. 36, 161-175 (1969).



## RESUME

On construit une solution asymptotique pour l'écoulement d'un fluide incompressible de Rivlin-Ericksen de degré trois entre deux disques coaxiaux très voisins en rotation. On calcule les deux premières approximations à nombre de Reynolds inférieur en ordre de grandeur  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon$  étant le rapport de la distance entre les deux disques à leur rayon.

Il s'avère qu'une combinaison de deux coefficients du troisième degré influence notablement l'écoulement et qu'elle doit être positive pour que la solution ait un sens physique. Pour certaines valeurs des coefficients du second degré la force de portance s'exerce dans le sens contraire de ce qui est trouvé en fluide newtonien.

## MOTS CLES

FLUIDE NON NEWTONIEN.

FLUIDE DE RIVLIN-ERICKSEN.

INCOMPRESSIBLE.

DISQUES.

DISQUES TOURNANTS.

INJECTION FLUIDE.

MODELE ASYMPTOTIQUE.

