THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Mohamed BENKIRANE

CONDITION SUFFISANTE POUR UN OPTIMUM DE PARETO LOCAL

Membres du Jury : COEURÉ Gérard, Président
ANTOINE Philippe, Rapporteur
DENEL Jacques — Examinateurs
VAN ISEGHEM François — Examinateurs

Soutenue le 4 juillet 1986

Je remercie Monsieur Philippe ANTOINE qui a bien voulu m'encadrer et avec qui le travail a été très agréable.

Je remercie Madame Raymonde BÉRAT pour sa gentillesse et son efficacité.

Je remercie Monsieur Gérard COEURÉ qui a bien voulu présider le jury de soutenance ainsi que Messieurs Jacques DENEL et François VAN ISEGHEM.

Je remercie Mesdames Monique LLORET et Françoise WDOWCZYK ainsi que Messieurs Albert GOURNAY et Michel PROVOST pour la reprographie.

Je tiens, enfin, à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Philippe ANTOINE et à Madame Raymonde BÉRAT qui ont résolu les problèmes techniques de soutenance posés par mon accident.

P L A N

INTRODUCTION

On note $C_n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\},\ X_i \geqslant 0\}$ le cône positif de $\mathbb{R}^n$. Ce cône définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$: pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a $X \leqslant Y$ si et seulement si $Y - X$ appartient à C_n ; si, de plus, X est différent de Y, on notera $X < Y$.

La notion d'<u>optimum de Pareto</u> d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est l'extension naturelle, liée à cette relation d'ordre, de la notion de minimum d'une fonction numérique : si J est une fonction définie sur A, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on dit que J présente en a un optimum de Pareto si

$$\forall\, x \in A \setminus \{a\}, \qquad \text{non} \quad (J(x) < J(a))$$

et on dit que J présente en a un <u>optimum strict</u> si

$$\forall\, x \in A \setminus \{a\}, \qquad \text{non} \quad (J(x) \leqslant J(a)).$$

Cette notion d'optimum de Pareto, introduite pour traiter mathématiquement des problèmes d'économie, a suscité de nombreux travaux tendant, en particulier, à étendre à cette situation les résultats classiques de la théorie du contrôle optimal et/ou du calcul des variations.

Depuis Pareto sont connues des conditions nécessaires, du premier ordre, pour qu'une application différentiable présente en un point un optimum. Des conditions nécessaires du second ordre n'ont été établies que dernièrement [1] ; le résultat est le suivant : pour qu'une application J de classe C^2, définie sur un ouvert Ω d'un espace de Banach E et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, présente en un point a un optimum sur une partie de Ω de la forme $\{x \in \Omega | g(x) \leq g(a),\ f(x) = f(a)\}$, où g et f sont des applications de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^r$) et sous l'hypothèse de normalité que $Df(a)$ surjective, il est nécessaire que soit vérifiée la condition suivante :

(N) $\forall x \in \operatorname{Ker} Df(a), \quad DJ(a).x \leq 0, \quad Dg(a).x \leq 0$

$$\exists\ (\lambda,\mu) \in C_{n+m} \times R^r, \quad \sum_s \lambda_s + \sum_k |\mu_k| = 1 :$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i DJ_i(a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{n+j}\, Dg_j(a) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k Df_k(a) = 0$$

$$(2) \quad \left[\sum_{i=1}^{r} \lambda_i D^2 J_i(a) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{n+j} D^2 g_j(a) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k D^2 f_k(a)\right](x,x) \geq 0.$$

Posons $n = 1$, on retrouve des conditions nécessaires classiques pour qu'une fonction numérique présente un minimum avec des contraintes unilatérales et des contraintes bilatérales (conditions de Kuhn-Tucker). En remarquant que les rôles joués par J et g dans (N) sont symétriques et que les propositions

"J <u>présente un optimum en</u> a <u>sur</u> $\{x \in \Omega | g(x) \leq g(a),\ f(x) = f(a)\}$"

et

"(J,g) <u>présente un optimum en</u> a <u>sur</u> $\Omega_f(a) = \{x \in \Omega | f(x) = f(a)\}$"

sont équivalentes, on peut ne considérer que le cas sans contrainte unilatérale.

Dans le cas $n = 1$, on connaît classiquement diverses conditions suffisantes pour un minimum local, toutes liées à des hypothèses faites sur l'espace E.

La plus simple de ces conditions correspond au cas où E est de dimension finie : il suffit de remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte dans la condition (2). L'extension de ce résultat à un optimum de Pareto est due à S. Smale [2].

Si E est de dimension infinie, ce renforcement de la condition (N) n'est plus suffisant. Dans le cas $n = 1$, le résultat le plus général semble être obtenu pour un espace de Banach E muni d'une deuxième norme, plus faible, préhilbertienne, la différentiabilité des applications J, f et g devant être compatible avec cette deuxième norme (cf. Chapitre 0) : il suffit de remplacer l'inégalité large de la condition (2) par la condition " $\geqslant \alpha |x|^2$ " , où α est un nombre strictement positif fixé et $|\ |$ désigne la norme préhilbertienne sur E. On résout ainsi le problème des conditions suffisantes pour les espaces de Hilbert (la norme préhilbertienne coïncidant dans ce cas avec la norme de E) mais aussi, par exemple, pour les espaces et les fonctionnelles du calcul des variations.

Nous démontrons au chapitre II l'extension de ce résultat à un optimum de Pareto.

Au chapitre III, nous appliquons cette théorie à divers exemples faisant intervenir les fonctionnelles du calcul des variations. On trouve ainsi en particulier des généralisations des conditions de Legendre et de Klebsch du calcul des variations.

Le chapitre I est consacré à un théorème abstrait de coercivité qui joue un rôle central dans notre démonstration.

Enfin, au chapitre 0, se trouvent rappelées les notions de couples d'espaces de Banach en dualité, d'applications différentiables au sens des couples et quelques résultats techniques indispensables.

CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LES COUPLES (*).

§ 1 - COUPLES.

On appelle couple d'espaces de Banach en dualité, un triplet $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$ où E et E' sont deux espaces de Banach et Φ est une forme bilinéaire continue mettant E et E' en dualité séparante.

N.B. Dans tout ce qui va suivre on dira, tout simplement, "couple" pour dire "couple d'espaces de Banach en dualité".

MORPHISMES.

Soient $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$ et $\mathbb{F} = (F,F',\Psi)$ deux couples, par morphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ on entend la donnée d'un couple (u,u') où u (resp. u') est une application linéaire continue de E dans F (resp. de F' dans E') vérifiant :

$$\forall\, x \in E, \forall\, y' \in F', \quad \Psi(y',u.x) = \Phi(u'.y',x).$$

Notations :

1) L'ensemble des morphismes de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ se note $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$. Il est clair que c'est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E,F) \times L(F',E')$ et donc un espace de Banach.

(*) Pour toute affirmation non démontrée, dans ce chapitre, et pour plus de précisions sur les couples, voir [3].

2) Le morphisme $(1_E, 1_{E'})$ de $\mathbb{E}$ dans lui-même est appelé le morphisme identité et se note $1_{\mathbb{E}}$.

Il est aisé de vérifier que si (u,u') est un morphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ et (v,v') un morphisme de $\mathbb{F}$ dans un troisième couple $\mathbb{G}$ alors leur composé, à savoir $(v \circ u,\ u' \circ v')$ est un morphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{G}$.

Remarque :

Un espace de dimension finie E est en dualité séparante avec son dual E^*. Le couple ainsi obtenu est, à isomorphisme près, le seul construit à partir de E. On continue à noter par $\mathbb{R}^n$ le couple obtenu à partir de $\mathbb{R}^n$.

Définition.-

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux couples. On dit d'un morphisme (u,u'), de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, qu'il admet une section s'il existe $(v,v') \in L(\mathbb{F},\mathbb{E})$ vérifiant :

$$(u,u') \circ (v,v') = 1_{\mathbb{F}}$$

et qu'il admet une quasi-section s'il existe $(v,v') \in L(\mathbb{F},\mathbb{E})$ vérifiant :

$$(u,u') \circ (v,v') \circ (u,u') = (u,u').$$

§ 2 - SOUS-OBJETS.

Soient $\mathbb{F} = (F,F',\Psi)$ un couple, E un sous-espace vectoriel fermé de F et $E^o = \{y' \in F' \mid \forall x \in E, \Psi(y',x) = 0\}$ le polaire de E. Alors E peut être mis en dualité séparante avec $E' = F'/_{E^o}$ à l'aide de la forme bilinéaire Φ définie par :

$$\forall x' \in E', \forall x \in E, \quad \Phi(x',x) = \Psi(y',x) \quad \text{si} \quad x' = \overline{y'}.$$

Le couple ainsi obtenu est appelé sous-objet de $\mathbb{F}$ construit à partir de E. Si on note i l'injection de E dans F et i' la surjection de F' sur E', le couple (i,i') est un morphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ appelé morphisme d'inclusion. Tout morphisme (u,u') de but $\mathbb{F}$ tel que $\operatorname{Im} u \subset E$ se factorise par (i,i') : c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $(\bar{u},\bar{u}')$ de but $\mathbb{E}$ tel que :

$$(u,u') = (i,i') \circ (\bar{u},\bar{u}').$$

Définition.-

Etant donné un couple $\mathbb{F}$. On dit d'un sous-objet $\mathbb{E}$ de $\mathbb{F}$ que c'est un facteur direct si le morphisme d'inclusion (i,i') admet une projection : c'est-à-dire un morphisme (p,p') de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{E}$ vérifiant :

$$(p,p') \circ (i,i') = 1_{\mathbb{E}} .$$

Exemples.

On montre que tout sous-objet construit à partir d'un sous-espace vectoriel qui est de dimension finie ou fermé et de codimension finie est facteur direct.

Définition.-

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux couples et (u,u') un morphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Le sous-objet de $\mathbb{E}$ défini par le sous-espace vectoriel fermé $\mathrm{Ker}\, u$ se note $\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')$. Si $\mathrm{Im}\, u$ est fermée, le sous-objet de $\mathbb{F}$ défini par le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, u$ se note $\mathbb{I}\mathrm{m}(u,u')$.

Proposition.-

Si (u,u') est un morphisme admettant une quasi-section alors $\mathbb{K}(u,u')$ est un facteur direct de $\mathbb{E}$, $\mathrm{Im}\, u$ est fermée et $\mathbb{I}\mathrm{m}(u,u')$ est un facteur direct de $\mathbb{F}$. Sous cette hypothèse d'existence d'une quasi-section, on a $(\mathrm{Ker}\, u)^o = \mathrm{Im}\, u'$ et $(\mathrm{Im}\, u)^o = \mathrm{Ker}\, u'$.

§ 3 - COUPLE PRODUIT.

Etant donnés deux couples $\mathbb{E}_1 = (E_1,E_1',\Phi_1)$ et $\mathbb{E}_2 = (E_2,E_2',\Phi_2)$, on définit le couple produit $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 = (E_1 \times E_2, E_1' \oplus E_2', \Phi)$ où Φ est la dualité définie par :

$$\forall (x_1',x_2') \in E_1' \oplus E_2' \ , \quad \forall (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$$

$$\Phi((x_1',x_2'),(x_1,x_2)) = \Phi_1(x_1',x_1) + \Phi_2(x_2',x_2).$$

§ 4 - COUPLES HILBERTIENS.

Etant donné un couple $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$, on appelle opérateur symétrique de $\mathbb{E}$ toute application linéaire et continue A de E dans E' vérifiant :

$$\forall\, x_1, x_2 \in E \qquad \Phi(A.x_1,x_2) = \Phi(Ax_2,x_1).$$

L'ensemble des opérateurs symétriques de $\mathbb{E}$ se note $L_s(\mathbb{E})$. C'est un espace de Banach, puisque fermé de $L(E,E')$. On dit d'un opérateur symétrique A qu'il est positif si :

$$\forall\, x \in E \qquad \Phi(A.x,x) \geqslant 0.$$

Un opérateur symétrique est dit coercif s'il est, dans $L_s(\mathbb{E})$, intérieur à l'ensemble des opérateurs positifs. On dit, enfin, d'un couple qu'il est hilbertien si l'ensemble de ses opérateurs coercifs et non vide. On montre que tout opérateur coercif est strictement positif et donc induit une norme sur E ; de plus, deux opérateurs coercifs induisent des normes équivalentes. Etant donné un couple Hilbertien, on suppose que l'une de ces normes a été choisie et on la note $|\cdot|$. Faisons deux remarques à propos de cette norme :

1) Elle est moins fine que la norme initiale ; en effet, si elle est définie à l'aide d'un opérateur A, on a :

$$\forall\, x \in E \qquad |x|^2 = \Phi(Ax,x) \leqslant ||\Phi||\ ||A||\ ||x||^2.$$

2) On montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout opérateur, symétrique B de $\mathbb{E}$, on ait :

$$\forall\, x \in E, \forall\, y \in E, \qquad |\Phi(Bx,y)| \leqslant K||B||\ |x||y|.$$

<u>Interprétations</u>.

Il résulte de 2) que :

. Toute forme linéaire $\Phi_{x'} = \Phi(x',\cdot)$, où x' est un élément quelconque de E', est continue pour la norme Hilbertienne de E.

. Si $\mathbb{F}$ est un autre couple Hilbertien, pour tout morphisme (u,u') de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, u est continu si on munit E et F de leurs normes Hilbertiennes.

Citons, enfin, quelques résultats :

<u>Proposition</u> 1.-

Tout opérateur qui est, à la fois, positif et inversible, est coercif.

<u>Proposition</u> 2.-

Tout facteur direct d'un couple Hilbertien est Hilbertien.

<u>Proposition</u> 3.-

Tout produit (fini) de couples Hilbertiens est Hilbertien.

§ 5 - APPLICATIONS DIFFERENTIABLES AU SENS DES COUPLES.

Définition.-

Soient $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$, $\mathbb{F} = (F,F',\Psi)$ deux couples, Ω un ouvert de E et f une application de Ω dans F ; on dit que f est de classe C^n, relativement aux couples $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, si on a :

i) f est de la classe C^n relativement aux espaces de Banach E et F ;

ii) Il existe une application $D'f$, de Ω dans $L(F',E')$, qui soit de classe C^{n-1} et telle que $\delta f(x) = (Df(x),D'f(x))$ soit dans $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ pour tout x dans Ω.

On obtient donc une application, qu'on note δf, de Ω dans $L(\mathbb{E},\mathbb{F})$ qui est de classe C^{n-1}. En particulier, on a :

$$\forall x \in \Omega, \forall X \in E, \forall Y' \in F', \qquad \Psi(Y',Df(x).X) = \Phi(D'f(x).Y',X).$$

Si $n \geqslant 2$, l'application $DD'f$ est à valeurs dans $L(E,L(F',E'))$ qui s'identifie à $L_2(F' \times E,E')$.

Cas particulier :

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $L(\mathbb{R}, E')$ s'identifie à E',$D'f$ est alors à valeurs dans E' ; par conséquent, $DD'f$ devient à valeurs dans $L(E,E')$. On vérifie, facilement, que $DD'f(x)$ est symétrique pour tout x dans Ω ; d'où, finalement, on déduit que $DD'f$ est à valeurs dans $L_s(\mathbb{E})$.

On montre que, pratiquement, tous les résultats connus : composées... théorème des fonctions implicites, pour les applications différentiables au sens des espaces de Banach restent valables pour celles qui le sont au sens des couples.

On va en citer quelques uns qui nous ont été utiles :

<u>Proposition</u> 1.-

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois couples. Soient Ω un ouvert de E, ω un ouvert de F, f une application de Ω dans F et g une application de ω dans G tels que $\omega \supset f(\Omega)$. Si f est de classe C^n relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, g de classe C^n relativement à $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ alors l'application $h = g \circ f$ est de classe C^n relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{G}$, et on a :

$$\forall x \in \Omega, \quad D'h(x) = D'f(x) \circ D'g(f(x)).$$

<u>Proposition</u> 2.-

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}_1,\ldots,\mathbb{F}_n$ des couples. Si $f = (f_1,\ldots,f_n)$ est une application d'un ouvert Ω de E dans $F_1 \times \ldots \times F_n$, alors f est de classe C^n relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}_1 \times \ldots \times \mathbb{F}_n$ si et seulement si chaque f_i l'est relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}_i$. Dans ces conditions, on a :

$$\forall x \in \Omega \quad \forall (y'_1,\ldots,y'_n) \in F'_1 \times \ldots \times F'_n :$$

$$D'f(x).(y'_1,\ldots,y'_n) = \sum_1^n D'f_i(x).y'_i.$$

Proposition 3.-

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux couples ; Ω un ouvert de E et a un point de Ω. Soit f une application, de classe C^n relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, de Ω dans F. Alors, si le morphisme $\delta f(a)$ admet une section, il existe un voisinage Ω_0 de a inclus dans Ω, il existe un voisinage ω de l'origine dans $\mathrm{Ker}\ Df(a)$ et il existe une application g de ω dans E, de classe C^n relativement à $\mathbb{K}\mathrm{er}\ \delta f(a)$ et $\mathbb{E}$, telle que :

i) $g(0) = a$;

ii) g est une bijection de ω sur $\{x \in \Omega_0 | f(x) = f(a)\}$;
$\delta g(0)$ est le morphisme d'inclusion de $\mathbb{K}\mathrm{er}\ \delta f(a)$ dans $\mathbb{E}$.

CHAPITRE I

UN THEOREME DE COERCIVTÉ.

Soient $\mathbb{E} = (E,E',\Phi)$, $\mathbb{F} = (F,F',\Psi)$ deux couples Hilbertiens. Soient $x' = (x'_1,\ldots,x_n)$ une famille d'éléments de E' et $U = (u,u')$ un morphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$; posons :

- $\Lambda(x') = \{\lambda \in C_n \mid \sum_i \lambda_i = 1, \ \sum_i \lambda_i x'_i = 0\}$;

- $\Lambda(x',U) = \{(\lambda,y') \in C_n \times F' \,\big|\, ||y'|| + \sum_i \lambda_i = 1, \ \sum_i \lambda_i x'_i = u'.y'\}$;

- $\forall \nu \in \mathbb{R}^+$, $E_\nu(x',U) = \{x \in E \,|\, \sup_i \Phi(x'_i,x) \leqslant \nu|x|, \ |u.x|_F \leqslant \nu|x|_E\}$;

<u>Définition.</u>-

Soient $\alpha > 0$, $A = (A_1,\ldots,A_n)$ une famille d'opérateurs symétrique de $\mathbb{E}$ et B une application bilinéaire continue de $F' \times E$ dans E'. On dira que la famille (A,B) vérifie la condition $S_\nu^\alpha(x',U)$ si on a :

$$(S_\nu^\alpha).\forall x \in E_\nu(x',U), \exists (\lambda,y') \in \Lambda(x',U) : \sum_i \lambda_i \Phi(A_i x,x) - \Phi(B(y',x),x) \geqslant \alpha|x|^2$$

et que la famille A vérifie la condition $\widetilde{S_\nu^\alpha(x',U)}$ si on a :

$$\widetilde{(S_\nu^\alpha)}.\forall x \in E_\nu(x',U), \exists \lambda \in \Lambda(x'), \ \sum_i \lambda_i \Phi(A_i x,x) \geqslant \alpha|x|^2 .$$

<u>Lemme</u> 1.-

On suppose que U admet une section (v,v'). Soient x' une famille d'éléments de E', A une famille d'opérateurs de $\mathbb{E}$ et B une application bilinéaire de $F' \times E$ dans E'. Si on pose $X' = (X'_1,\ldots,X'_n)$ et $\tilde{A} = (\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_n)$ avec :

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \qquad X'_i = x'_i - u'v'.x'_i \quad \text{et} \quad \tilde{A}_i = A_i - B(v'.x'_i,\cdot)$$

alors il y a équivalence entre :

(i) La famille (A,B) vérifie une condition $S_0^{\alpha}(x',U)$;

(ii) La famille $\tilde{A}$ vérifie une condition $\widetilde{S_0^{\alpha}}(X',U)$.

<u>Preuve</u> :

Notons d'abord que $E_0(X',U) = E_0(x',U)$. En effet, cela résulte de :

$$\forall\, x \in \operatorname{Ker} u,\ \forall\, i \in \{1,\ldots,n\},$$

$$\Phi(X'_i,x) = \Phi(x'_i,x) - \Phi(u'v'x'_i,x) = \Phi(x'_i,x) - \Phi(v'x'_i,ux) = \Phi(x'_i,x).$$

(i) <u>entraîne</u> (ii).

Supposons qu'une famille (A,B) vérifie une condition $(S_0^{\alpha_0})$ et soit $x \in E_0(X',U)$ fixé. Il existe alors un point $(\lambda,y') \in C_n \times F'$ vérifiant :

(1) $\displaystyle\sum_i \lambda_i + \|y'\| = 1$ et $\displaystyle\sum_i \lambda_i x'_i = u'y'$;

(2) $\displaystyle\sum_i \lambda_i \Phi(A_i x,x) - \Phi(B(y',x),x) \geq \alpha_0 |x|^2.$

On tire de (1) que :

$$(3) \qquad y' = v'u'y' = \sum_i \lambda_i v'x'_i$$

et alors :

$$\sum_i \lambda_i X'_i = \sum_i \lambda_i (x'_i - u'v'x'_i) = \sum_i \lambda_i x'_i - u' \sum_i \lambda_i v'x'_i = \sum_i \lambda_i x'_i - u'y' = 0 \quad ;$$

λ ne pouvant être nul, car sinon y' le serait aussi (d'après (3)), ce qui n'est pas possible d'après (1) ; posons :

$$\mu = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} . \lambda .$$

μ est alors dans $\Lambda(X')$ et vérifie :

$$\sum_i \lambda_i \Phi(\tilde{A}_i x, x) = \sum_i \mu_i \Phi(A_i x - B(v'x'_i, x), x) = \sum_i \mu_i \Phi(A_i x, x) - \Phi(B(\sum_i \mu_i v'x'_i, x), x)$$

$$= \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \left[\sum_i \lambda_i \Phi(A_i x, x) - \Phi(B(y', x), x) \right] \geq \frac{\alpha_0 |x|^2}{\sum \lambda_i} \geq \alpha_0 |x|^2 .$$

x étant arbitraire dans $E_0(X', U)$, on a donc montré que la famille $\tilde{A}$ vérifie la condition $\widetilde{S_0^{\alpha_0}}(X', U)$.

(ii) <u>entraîne</u> (i).

Supposons que la famille $\tilde{A}$ vérifie la condition $\widetilde{S_0^{\alpha_0}}(X', U)$ et soit $x \in E_0(x', U)$ fixé. Il existe un point $\mu \in C_n$ vérifiant :

- $\sum_i \mu_i = 1$ et $\sum_i \mu_i X_i' = 0$;

- $\sum_i \mu_i \Phi(\tilde{A}_i.x,x) \geq \alpha_o |x|^2$.

Posons :

$$y' = \frac{1}{(1+ ||\sum_j \mu_j v' x_j'||)} \cdot \sum_i \mu_i v'.x_i' \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{(1+ ||\sum_j \mu_j v x_j'||)} \cdot \mu$$

alors le couple (λ,y') est dans $\Lambda(x',U)$ et vérifie :

$$\sum \lambda_i \Phi(A_i x,x) - \Phi(B(y',x),x) = \frac{1}{(1+ ||\sum_j \mu_j v x_j'||)} \sum_i \mu_i \Phi(\tilde{A}_i x,x) \geq \frac{\alpha_o}{(1+ ||\sum_j \mu_j v x_j'||)} |x|^2.$$

x étant arbitraire dans $E_o(x',U)$, on en conclut que (A,B) vérifie la condition $S_o^{\alpha}(x',U)$ avec $\alpha = \dfrac{\alpha_o}{1 + \mathrm{Max}_i ||v'x_i'||}$. ■

<u>Cas particulier</u> *(toujours dans l'hypothèse que* U *admet une section* (v,v')) :

Faisons $n = 1$. Dans ce cas, la famille A est réduite à un seul opérateur symétrique A_1 et x' à un seul point x_1' de E'. Supposons qu'une famille (A,B) vérifie une condition $S_o^{\alpha_o}(x',U)$; alors le point $y' = \dfrac{1}{1+||v'.x'||} .v'.x'$ correspond à tous les x de $E_o(x',U)$ par $S_o^{\alpha_o}(x',U)$.

D'autre part, $E_o(x',U)$ est Ker u tout entier :

$$\forall\, x \in \text{Ker } u, \quad \Phi(x',x) = \Phi(u'y',x) = \Psi(y',ux) = 0.$$

Donc, finalement, la condition $S_0^{\alpha_0}(x',U)$ s'écrit :

$$\forall\, x \in \text{Ker } u, \quad \Phi(\tilde{A}x,x) \geq \alpha_0 |x|^2 \quad , \text{ où on a posé } \tilde{A} = A - B(y',\cdot)$$

ce qui n'est autre chose que la coercivité de $\Phi(A.,.)$ sur le sous-espace vectoriel Ker u. Il est classique qu'on peut alors trouver un nombre strictement positif α et un voisinage de $\tilde{A}$ tel que tout opérateur dans ce voisinage soit coercif sur Ker u, et même sur tout un épaississement $E_\nu(U)$, pour un certain $\nu > 0$, de Ker u, avec un coefficient de coercivité au plus égal à α. Par continuité de l'application qui à une famille (A^x,B^x) associe l'opérateur $\widetilde{A^x} = A^x - B^x(y',\cdot)$, on peut donc trouver un voisinage de (A,B) tel que toute autre famille dans ce voisinage vérifie la condition $S_0^\alpha(x',U)$.

Le théorème qui va suivre est une généralisation de ce résultat avec une hypothèse moins forte sur U.

Théorème 1.-

On suppose que U admet une quasi-section ; si une famille (A,B) vérifie la condition $S_0^{\alpha_0}(x',U)$ pour un certain $\alpha_0 > 0$, alors il existe deux nombres, strictement positifs α et ν, il existe un voisinage de (A,B) tels que toute famille (A^x,B^x) dans ce voisinage, vérifie la condition $S_\nu^\alpha(x',U)$.

Remarque :

L'hypothèse "U admet une quasi-section" sera automatiquement vérifiée si F est de dimension finie (voir [5]) ou si U admet une section.

On va avoir besoin, pour démontrer ce théorème, d'un lemme d'approximation qu'on va commencer par énoncer et admettre momentanément :

Lemme 2.-

On suppose que U admet une quasi-section. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\nu_0 > 0$ tel qu'on ait :

$$\forall \nu \in [0,\nu_0],\ \forall x \in E,\ (x \in E_\nu(x',U) \implies \inf_{x_0 \in E_0(x',U)} |x - x_0| \leqslant \varepsilon |x|).$$

Démonstration du théorème *(par l'absurde)* :

Supposons que l'affirmation du théorème soit fausse et soient $(\alpha^m)_m$, $(\nu^m)_m$ et $(\rho^m)_m$ trois suites de nombres toutes décroissantes vers zéro ; alors, pour tout m, il existe un point x^m de E et une famille (A^m,B^m) vérifiant :

$$\text{(i)}\quad \forall m \geqslant 1,\ x_m \in E_{\nu_m}(x',U) \text{ et } |x_m| = 1 \ ;$$

$$\text{(ii)}\quad \forall m \geqslant 1,\ \sup_i ||A_i^m - A_i|| \leqslant \rho^m \ ,\ ||B^m - B|| \leqslant \rho^m \ ;$$

$$\text{et}\quad \text{(iii)}\quad \forall m \geqslant 1, \forall(\lambda,y') \in \Lambda(x',U), \sum_i \lambda_i \Phi(A_i^m x^m,x^m) - \Phi(B^m(y'^m,x^m),x^m) < \alpha^m.$$

(i) associé au lemme nous assure que la distance de x^m à $E_0(x',U)$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini ; on peut donc trouver une suite $(x_0^m)_m$ de $E_0(x',U)$ telle que $|x^m - x_0^m|$ tende vers zéro quand m tend vers l'infini.

La famille (A,B) vérifiant $S_0^{\alpha_0}(x',U)$, pour tout m, il existe un point (λ^m, y'^m) de $\Lambda(x',U)$, associé à x_0^m, vérifiant :

$$\text{(iv)} \qquad \sum_i \lambda_i^m \Phi(A_i.x_0^m, x_0^m) - \Phi(B(y'^m, x_0^m), x_0^m) \geqslant \alpha_0 |x_0^m|^2 \ .$$

Soit $\gamma_0 > 0$ tel que pour tout opérateur symétrique C de $\mathbb{E}$ on ait :

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad |\Phi(C.x,y)| \leqslant \gamma_0 ||C|| |x| |y|. \qquad [\S\ 4,\ \text{ch. } 0]\ .$$

Si pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \Phi(A^m.x^m, x^m) &= \Phi([A^m - A].x^m, x^m) + \Phi(Ax^m, x^m) \\
&= \Phi([A^m - A].x^m, x^m) + \Phi(Ax_0^m, x_0^m) + \Phi(A.(x^m + x_0^m), x^m - x_0^m) \\
&= \Phi(Ax_0^m, x_0^m) + X^m
\end{aligned}$$

où : $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$,

$$X_i^m = \Phi([A_i^m - A_i].x^m, x^m) + \Phi(A_i(x^m + x_0^m), x^m - x_0^m),$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\forall\, i \in \{1,\ldots,n\},\ \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad |X_i^m| &\leqslant \gamma_0 ||A_i^m - A_i|| + \gamma_0 ||A_i|| |x^m + x_0^m| |x^m - x_0^m| \\
&\leqslant \gamma_0 (\gamma^m + (\operatorname{Sup}_i ||A_i||).|x^m + x_0^m| |x^m - x_0^m|).
\end{aligned}$$

Les suites $(\gamma^m)_m$ et $(|x^m - x_0^m|)_m$ tendant vers 0, on en déduit que $\lim_m X^m = 0$.

De même, si on écrit :

$$(2) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi(B^m(y'^m,x^m),x^m) = \Phi(B(y'^m,x_0^m),x_0) + Y^m$$

où pour tout m :

$$Y^m = \Phi([B^m - B].(y'^m,x^m),x^m) + \Phi(B(y'^m,x^m+x_0^m),x^m - x_0^m)$$

il vient que $\lim_m Y^m = 0$:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad |Y^m| \leq \gamma_0 ||[B^m - B].(y'^m,\cdot)|| + |\gamma_0| |B(y'^m,\cdot)|| |x^m + x_0^m| |x^m - x_0^m|$$

$$\leq \gamma_0 (||y'^m|| \; ||B^m - B|| + ||B|| \; ||y'^m|| |x^m + x_0^m| |x^m - x_0^m|)$$

$$\leq \gamma_0 (\rho^m + ||B|| |x^m + x_0^m| |x^m - x_0^m|).$$

En utilisant (1), (2), (iii) et (iv), il vient :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_0 |x_0^m|^2 + \langle\lambda^m | X^m\rangle - Y^m < \alpha^m$$

et en faisant tendre m vers l'infini, on aboutit à $\alpha_0 \leq 0$. Ce qui est absurde ; d'où le lemme. ∎

<u>Démonstration du lemme</u> :

<u>Première étape</u> : On suppose que $u = 0$. On a alors $E_\nu = E_\nu(x',0) = \{x \in E | \sup \Phi(x_i',x) \leq \nu|x|\}$. Les formes linéaires $\Phi(x_i',\cdot)$ étant continues par la norme Hilbertienne de E, le sous-espace vectoriel

$$G = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \Phi(x'_i, \cdot)$$

est fermé pour cette même norme ; étant de codimention finie, tous ses supplémentaires algébriques en sont aussi supplémentaires topologiques [toujours pour la norme Hilbertienne].

Choisissons en un, soit H. Supposons qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que le lemme ne soit pas vérifié et soit $(\nu^m)_{m\geqslant 1}$ une suite de nombres réels décroissante vers zéro. Alors :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, x^m \in E_{\nu^m},$$

$$|x^m| = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Inf}\{|x^m - x_0|,\ x_0 \in E_0\} > \varepsilon_0.$$

Si pour tout m, x^m s'écrit :

$$x^m = g^m + h^m\ , \quad \text{où } g^m \in G \ \text{ et } \ h^m \in H,$$

alors la suite $(h^m)_m$ est bornée dans H car la suite $(x^m)_x$ l'est dans E (E étant somme directe topologique de G et H, la projection de E sur H est continue). H étant de dimension finie, il existe une sous-suite, qu'on supposera égale à l'initiale, convergeant vers un point h de H. Si on pose :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*\ , \quad x_0^m = g^m + h$$

alors les x_0^m sont dans E_0. En effet :

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\},\ \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi(x'_i, x_0^m) = \Phi(x'_i, h) = \lim_k \Phi(x'_i, h^k)$$

$$= \lim_k \Phi(x'_i, x^k) \leqslant \lim_k \nu^k = 0 \quad \left[\forall\, k \in \mathbb{N}^*, x^k \in E_{\nu^k}\right]$$

On devrait donc avoir :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^* , \qquad \varepsilon_0 < d(x^m, E_0) \leqslant |x^m - x_0^m|$$

alors que

$$\lim_m |x^m - x_0^m| = \lim_m |h^m - h| = 0$$

ce qui n'est pas possible ; d'où le résultat dans ce cas.

Deuxième étape (*Cas général*) :

Le morphisme U admettant une quasi-section (s,s'), le sous-objet $\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')$ est un facteur direct de $\mathbb{E}$, donc est Hilbertien ; appliquant le résultat de la première étape à $\mathbb{K}\mathrm{er}(u,u')$, il vient :

(1) $\quad \forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, \nu' > 0,\ \forall\, \xi \in \mathrm{Ker}\, u,$

$$\sup_i \Phi(x_i', \xi) \leqslant \nu' |\xi|,\quad \exists\, \xi_0 \in \mathrm{Ker}\, u,\quad \sup_i \Phi(x_i', \xi_0) \leqslant 0$$

$$|\xi - \xi_0| \leqslant \varepsilon' |\xi| .$$

$\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ étant Hilbertiens, s est continue pour les normes Hilbertiennes.

On notera par $|s|$ la norme correspondante de s.

Les formes linéaires $\Phi(x_i', \cdot)$ étant continues pour les normes hilbertiennes, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}, \qquad \forall\, x \in E, \qquad |\Phi(x_i', x)| \leqslant \gamma |x| \quad [\S\ 4,\ \mathrm{ch.}\ 0].$$

Soient $\varepsilon > 0$ quelconque, $\varepsilon' > 0$ vérifiant :

(2) $$\varepsilon' < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$$

et $\nu' > 0$ un nombre associé à ε' par (1) ; soit x un point de $E_\nu(x',U)$. Le point $\xi = x - su.x$ est dans Ker u ; en effet :

$$u.\xi = u.x - u\ su\ x = u.x - u.x = 0$$

et on a :

(3) $$|x - \xi| = |su.x| \leqslant |s|\,|u.x| \leqslant |s|\nu|x|$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \quad \Phi(x'_i,\xi) &= \Phi(x'_i,\xi-x) + \Phi(x'_i,x) \\ &\leqslant \gamma|\xi-x| + \nu|x| \qquad (x \in E_\nu) \\ &\leqslant \gamma|s|\nu|x| + \nu|x| \qquad (\text{grâce à } (3)) \\ &= \nu\big[1 + \gamma|s|\big]\,|x| \end{aligned}$$

et de $|x| - |\xi| \leqslant \nu|s|\,|x|$ il vient :

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \quad \Phi(x'_i,\xi) \leqslant \nu \cdot \frac{1 + \gamma|s|}{1 - \nu|s|} \cdot |\xi|$$

si ν vérifie :

(4) $$\nu < \frac{1}{|s|}\ .$$

ξ sera dans $(\text{Ker } u)_{\nu'}$ si ν vérifie en plus :

(5) $$\nu \,.\, \frac{1 + \gamma|s|}{1 - \nu|s|} \leq \nu' \quad .$$

Supposons donc ν suffisamment petit pour avoir à la fois (4) et (5) ; alors à ξ on peut associer, par (1), un ξ_0 dans $(\text{Ker } u)_0(x') = E_0(x',U)$ vérifiant :

$$|\xi - \xi_0| \leq \varepsilon'|\xi| \;.$$

Il vient alors de

$$|x - \xi_0| \leq |x - \xi| + |\xi - \xi_0| \leq |s|\nu|x| + \varepsilon'|\xi|$$

et de

$$|\xi| \leq (1 + |s|\nu)|x|$$

que

$$|x - \xi_0| \leq \left[(1 + |s|\nu)\varepsilon' + |s|\nu\right]|x| \quad ;$$

et si ν est choisi tel que l'on ait (en plus de (4) et de (5))

(6) $$\nu|s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On a, grâce à (2) :

$$|x - \xi_0| \leq \left[\frac{\varepsilon}{2} + (1 + \frac{\varepsilon}{2})\varepsilon'\right].|x| \leq \varepsilon|x| \quad ;$$

d'où le lemme. ∎

CHAPITRE II

UNE CONDITION SUFFISANTE POUR UN OPTIMUM DE PARETO.

Soient $\mathbb{E} = (E, E', \Phi)$ et $\mathbb{F} = (F, F', \Psi)$ deux couples Hilbertiens. Soient Ω un ouvert de E, f une application de Ω dans F de classe C^2 relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$; soit J une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$ qu'on suppose de classe C^2 relativement à $\mathbb{E}$. On a alors le

<u>Théorème</u> 2.-

Soit a un point de Ω tel que les conditions suivantes sont vérifiées :

(H1) $\quad \operatorname{Im} Df(a)$ est fermé et de codimension finie ;

(H2) $\quad$ Le morphisme $\delta f(a)$ admet une quasi-section ;

(H3) $\quad$ Il existe $\alpha_0 > 0$ vérifiant

$$(S^{\alpha_0}) \ : \ \forall x \in \operatorname{Ker} Df(a),\ \Phi(D'J(a),x) \leq 0,\ \exists!\ \lambda \in C_n\ ,\ \exists!\ y' \in F'$$

$$||y'|| + \sum_i \lambda_i = 1, \qquad \sum_i \lambda_i D'J_i(a) = D'f(a).y'$$

$$\sum_i \lambda_i \Phi(DD'J_i(a).x,x) - \Phi(DD'f(a)(y',x),x) \geq \alpha_0 |x|^2 .$$

Alors a est un optimum strict, local, de J sur $\Omega_f(a) = \{x \in \Omega | f(x) = f(a)\}$.

Remarque : La condition (H2) est équivalente à l'existence d'une section pour le morphisme, de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{I}\mathrm{m}\ \delta f(a)$, qui factorise $\delta f(a)$.

La démonstration du théorème est divisée en deux parties : dans la première partie, le théorème est démontrée dans le cas où F est de dimension finie ; dans la deuxième partie, on ramène le cas général à ce cas particulier en utilisant un paramétrage.

Le résultat suivant est utilisé plusieurs fois : pour tout couple (X,Y) où $X = (X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (Y_1,\ldots,Y_r) \in \mathbb{R}^r$ on a :

$$\mathrm{Max}\{X_1,\ldots,X_n,|Y_1|,\ldots,|Y_r|\} = \mathrm{Max}\{<\lambda|X> + <\mu|Y>|(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r\}.$$

où $\underline{\Lambda_n^r}$ désignera, pour tous $n, r \in \mathbb{N}$, le compact $(\lambda,\mu)\in C_n\times\mathbb{R}^r \left| \sum_i \lambda_i + \sum_j |\mu_j| = 1\right\}$.

Preuve du théorème :

Première étape : F de dimension finie r.

Quitte à utiliser un C^2-difféomorphisme entre F et $\mathbb{R}^r$ et des translations sur les applications et la variable, on va supposer qu'on est dans le cas spécial où :

. $\mathbb{F} = \mathbb{R}^r$

. $a = 0_E$, $J(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $f(a) = 0_{\mathbb{R}^r}$.

Les $D'f_k(0)$ s'identifient à des points de E' et la condition (S^{α_0}) s'écrit :

(S^{α_0}) $\forall x \in E$, $\Phi(D'J(0),x) \leq 0$, $\Phi(D'f(a),x) = 0$, $\exists(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r$

• $\sum_i \lambda_i D'J_i(0) + \sum_k \mu_k D'f_k(0) = 0$

$$\bullet \quad \sum_i \lambda_i \Phi(DD'J_i(0).x,x) + \sum_k \mu_k \Phi(DD'f_k(0).x,x) \geq \alpha_o |x|^2 .$$

Posons :

$$\Lambda_n^r(D'J(0),D'f(0)) = \{(\lambda,\mu) \in C_n \times [-1,1]^r \,\Big|\, \sum_i \lambda_i + \sum_k |\mu_k| = 1 ,$$

$$\sum_i \lambda_i D'J_i(0) + \sum_k \lambda_k D'f_k(0) = 0\}.$$

D'après le théorème 1 [Ch. I], il existe des nombres strictement positifs ρ, ν et α tels que, pour toute famille (A,B) vérifiant :

$$(*) \qquad ||A - DD'J(0)|| = \operatorname*{Max}_i ||A_i - DD'J_i(0)|| \leq \rho$$

$$||B - DD'f(0)|| \leq \rho$$

on ait

$$(S_\nu^\alpha) \qquad \forall x \in E, \ \operatorname*{Sup}_i \Phi(D'J_i(0),x) \leq \nu|x|, \ \operatorname*{Sup}_k |\Phi(D'f_k(0),x)| \leq \nu|x|$$

$$\exists\, (\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r(D'J(0),D'f(0)) :$$

$$\sum_i \lambda_i \Phi(A_i x,x) + \sum_k \mu_k \Phi(B_k.x,x) \geq \alpha|x|^2 .$$

Posons

$$\Omega_\nu = \{x \in \Omega \mid \operatorname*{Max}_i \Phi(D'J_i(0),x) \leq \nu|x|, \ \operatorname*{Max}_k |\Phi(D'f_k(0),x)| \leq \nu|x|\}.$$

Ω se trouve partitionné en deux parties Ω_ν et $\Omega \setminus \Omega_\nu$, on va montrer la conclusion, séparément, sur chacune :

<u>Sur</u> Ω_ν : J et f étant de classe C^2, relativement aux couples, on peut écrire, en développant à l'ordre 2 avec reste intégral :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \forall x \in \Omega, \quad J_i(x) = \Phi(D'J_i(0),x) + \frac{1}{2}\,\Phi(A_i(x).x,x)$$

$$\forall k \in \{1,\dots,r\}, \quad \forall x \in \Omega, \quad f_k(x) = \Phi(D'f_k(0),x) + \frac{1}{2}\,\Phi(B_k(x).x,x)$$

où les A_i et les B_i sont des applications continues à valeurs dans $L_s(\mathbb{E})$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \ A_i(0) = DD'J_i(0) \ \text{ et } \ \forall k \in \{1,\dots,r\}, \ B_k(0) = DD'f_k(0).$$

Soit V_1 un voisinage de l'origine dans E tel que pour tout x dans $\Omega \cap V_1$ la famille $(A(x),B(x))$ vérifie (*) et donc la condition (S_ν^α).

On a alors en particulier :

$$\forall x \in \Omega_\nu \cap V_1, \quad \exists\, (\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r(D'J(0),D'f(0))$$

$$\sum_i \lambda_i \Phi(A_i(x).x,x) + \sum_k \mu_k \Phi(B_k(x).x,x) \geqslant \alpha|x|^2 .$$

Ce qui s'écrit de façon équivalente :

$$\forall x \in \Omega_\nu \cap V_1 ,$$

$$\mathrm{Sup}\{\sum_i \lambda_i \Phi(A_i(x).x,x) + \sum_k \mu_k \Phi(B_k(x).x,x) \,\Big|\, (\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r(D'J(0),D'f(0))\} \geqslant \alpha|x|^2 .$$

Or, pour (λ,μ) de $\Lambda_n^r(D'J(0),D'f(0))$, on a :

$$\forall x \in \Omega : \sum_i \lambda_i \Phi(A_i(x)x,x) + \sum_k \lambda_k \Phi(B_i(x).x,x) = \sum_i \lambda_i . J_i(x) + \sum_k \mu_k f_k(x) ,$$

d'autre part, on sait que pour tout x, on a :

$$\mathrm{Sup}\{\sum_i \lambda_i J_i(x) + \sum_k \mu_k f_k(x) \,|\, (\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r\} = \mathrm{Max}\{J_1(x),\dots,J_n(x),|f_1(x)|,\dots,|f_r(x)|\}.$$

Il en résulte, sachant que $\Lambda_n^r(D'J(0),D'f(0))$ est une partie de Λ_n^r, que :

$\forall x \in \Omega_\nu \cap V_1$, $\mathrm{Max}\{J_1(x),\ldots,J_n(x),|f_1(x)|,\ldots,|f_r(x)|\} \geq \frac{\alpha}{2}|x|^2$.

Alors, pour tout $x \neq 0$ dans $\Omega_f(0) \cap \Omega_\nu \cap V_1$, on a :

$$\mathrm{Max}\{J_1(x),\ldots,J_n(x)\} > 0.$$

<u>Sur</u> $\Omega \setminus \Omega_\nu$: Soit $K > 0$ tel qu'on ait :

$\forall x' \in E', \forall x \in E, \quad |\Phi(x',x)| \leq K||x'|||x|$ [ch. 0, § 4].

En développant à l'ordre 1, avec reste intégral, les fonctions J_i et f_k il vient :

$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \forall x \in \Omega, \quad J_i(x) = \Phi(x_i'(x),x)$
$\forall k \in \{1,\ldots,r\} \quad \forall x \in \Omega, \quad f_k(x) = \Phi(y_k'(x),x)$

où les x_i' et les y_k' sont des applications continues à valeurs dans E' et vérifiant :

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \ x_i'(0) = D'J_i(0)$; $\forall k \in \{1,\ldots,r\}, \ y_k'(0) = D'f_k(0)$.

Fixons un nombre ν_0, strictement positif, vérifiant : $\nu_0 < \frac{\nu}{K}$

et soit alors V_2 un voisinage de l'origine dans E tel que :

$$\forall x \in \Omega \cap V_2, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad ||x_i'(x) - D'J_i(0)|| \leq \nu_0$$

$$\forall x \in \Omega \cap V_2, \quad \forall j \in \{1,\ldots,r\}, \quad ||y_k'(x) - D'f_k(0)|| \leq \nu_0.$$

Soit x un point quelconque de $V_2 \cap (\Omega \setminus \Omega_\nu)$; le fait qu'il soit dans $\Omega \setminus \Omega_\nu$ nous assure l'existence d'un (λ_o,μ_o) dans Λ_n^r tel qu'on ait :

$$<\lambda_o|\Phi(D'J(0),x)> + <\mu_o|\Phi(D'f(0),x)> > \nu|x|$$

et si on écrit :

$$<\lambda_o|J(x)> + <\mu_o|f(x)> = [<\lambda_o|\Phi(x'(x) - D'J(0),x)> + <\mu_o|\Phi(y'(x) - D'f(0),x)>]$$

$$+ [<\lambda_o|\Phi(D'J(0),x)> + <\mu_o|\Phi(D'f(0),x)>]$$

le fait qu'il soit dans V_2 nous permet de minorer le premier terme ; en effet de

$$<\lambda_o|\Phi(x'(x)-D'J(0),x)> \geqslant -||\lambda_o||_1||\Phi(x'(x)-D'J(0),x)||$$

$$\geqslant - K||\lambda_o||_1||x'(x)-D'J(0)|||x| \geqslant - K\nu_o||\lambda_o||_1|x|$$

et de

$$<\mu_o|\Phi(y'(x) - D'f(0),x)> \geqslant - K||\mu_o||_1\nu_o|x|$$

on arrive à

$$<\lambda_o|J(x)> + <\mu_o|f(x)> \geqslant \nu|x| - K\nu_o(||\lambda_o||_1 + ||\mu_o||_1)|x| = (\nu - K\nu_o)|x| > 0$$

(λ_o,μ_o) étant un point de Λ_n^r, ceci implique que

$$\mathrm{Sup}\{<\lambda|J(x)> + <\mu|f(x)>|(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r\} = \mathrm{Max}\{J_1(x),\dots,J_n(x),|f_1(x)|,\dots,|f_r(x)|\} > 0$$

et ceci pour tout x dans $V_2 \cap (\Omega \setminus \Omega_\nu)$. Si on pose alors $V = V_1 \cap V_2$, on aura :

$$\forall\, x \in V \cap \Omega_f(0) \setminus \{0\} \qquad \mathrm{Max}\{J_1(x),\ldots,J_n(x)\} > 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Deuxième étape : F est quelconque.

L'hypothèse (H1) implique [§ 2, ch. 0] que le sous-objet $\mathbb{I}m\ \delta f(a)$ est facteur direct de $\mathbb{F}$; soit (p,p') une projection de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{I}m\ \delta f(a)$. L'application $p \circ f$, qui est à valeurs dans $\mathrm{Im}\ Df(0)$, est alors de classe C^2, relativement à $\mathbb{E}$ et $\mathbb{I}m\ \delta f(a)$, avec :

$$D(p \circ f) = p \circ Df \quad , \quad D'(p \circ f) = D'f \circ p'.$$

L'hypothèse (H2) assure que le sous-objet $\mathbb{K}er\ \delta(p \circ f)(a) = \mathbb{K}er\ \delta f(a)$ est un facteur direct de $\mathbb{E}$ [§ 2, ch. 0] , donc est un couple Hilbertien [§ 4, ch. 0]. On notera par Θ la dualité de ce couple. D'autre part, elle assure que la surface de niveau $\Omega_{(pof)}(a) = \{x \in \Omega \mid p.f(x) = p.f(a)\}$ est, au voisinage de a, une variété modelée sur $\mathrm{Ker}\ D(p \circ f)(a) = \mathrm{Ker}\ Df(a)$ [§ 5, ch. 0].

Soient donc ω un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathrm{Ker}\ Df(a)$ et ξ une application de classe C^2 relativement à $\mathrm{Ker}\ \delta[p \circ f](a)$ et $\mathbb{E}$ telle qu'on ait :

. ξ est une bijection de ω dans $\Omega_{(pof)}(a)$ vérifiant $\xi(0) = a$,

.. $\delta\xi(0) = (u,u')$ le morphisme d'inclusion de $\mathbb{K}er\ \delta[p \circ f](a)$ dans $\mathbb{E}$.

Soit $(y'_1,\ldots,y'_r)$ une base de $(\mathrm{Im}\ Df(a))^0$, où r est la codimension de $\mathrm{Im}\ Df(a)$. $\Omega_f(a)$ est l'ensemble des points x, de $\Omega_{(pof)}$, vérifiant :

$$\forall\, j \in \{1,\dots,r\}\Psi(y'_j,f(x)) = 0.$$

Si on pose :

. $\forall\, j \in \{1,\dots,r\}$ $\quad g_j = \Psi(y'_j,f) = \Psi_{y'_j} \circ f$ $\quad$ et $\quad \tilde{g}_j = g_j \circ \xi$ $\quad$;

. $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$ $\quad \tilde{J}_i = J_i \circ \xi$ $\quad$;

il est clair que, par construction, il y aura équivalence entre les deux propositions suivantes :

"J présente en a un optimum strict, local, sur $\Omega_{f(a)}$ "

et

"$\tilde{J}$ présente en 0 un optimum strict, local, sur $\omega_{\tilde{g}}(0)$ " .

Les applications $\tilde{J}$ et $\tilde{g}$, définies sur ω, étant de classe C^2 relativement à $\mathbb{K}\mathrm{er}\, \delta[p\circ f](a)$ et $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^r$), on leur applique le résultat de la première étape : une condition suffisante pour que J présente un optimum local en a est qu'il existe un $\tilde{\alpha}_0 > 0$ vérifiant :

$(S^{\tilde{\alpha}_0})$ $\qquad \forall\, x \in \mathrm{Ker}\, Df(a),\quad \Theta(D'J(0),x) \leq 0,\quad \Theta(D'\tilde{g}(0),x) \leq 0$

$$\exists\,(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r \ :$$

$$\text{(I)} \qquad \sum_i \lambda_i D'\tilde{J}_i(0) + \sum_j \mu_j D'\tilde{g}_j(0) = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_i \lambda_i \Theta(DD'\tilde{J}_i(0).x,x) + \sum_j \mu_j \Theta(DD'\tilde{g}_j(0).x,x) \geq \tilde{\alpha}_0 |x|^2 .$$

Nous allons expliciter $(S^{\tilde{\alpha}_0})$ et vérifier qu'elle est équivalente à une condition (S^{α_0}) pour les applications J et f en a ; le théorème sera alors démontré.

Supposons que $(S^{\tilde{\alpha}_0})$ soit vérifiée en différentiant $J \circ \xi$ en 0, il vient

$$D'(\tilde{J})(0) = D'(J \circ \xi)(0) = D'\xi(0) \circ D'J(a) = u'.D'J(a).$$

D'autre part, la dérivée première de g en a est nulle :

$$Dg(a) = D(\Psi(y',f))(a) = \Psi(y',Df(a)) = 0$$

donc

$$D'\tilde{g}(0) = D'\xi(0) \circ D'g(a) = 0.$$

Soit $(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r$ tel que (I) soit vérifié. On a :

$$\sum_i \lambda_i u'.D'J_i(a) = u'. \sum_i \lambda_i D'J_i(a) = 0$$

le zéro étant celui de $[\mathrm{Ker}\ p \circ Df(a)]' = E'/_{\mathrm{Im}\ D'(pof)(a)} = E'/_{\mathrm{Im}\ D'f(0)op'}$

il existe alors un z' dans $F'/_{\mathrm{Ker}\ D'f(a)}$ tel qu'on ait :

(I)' $$\sum_i \lambda_i D'J_i(a) = D'f(a).p'z' .$$

Remarquons que z' est alors borné ; en effet si (s,s') est la section de $\delta[p \circ f](a)$, on aura :

$$||z'|| = ||s'. \sum_i \lambda_i D'J_i(a)|| \leqslant \sup_i ||s'.D'J_i(a)||$$

la condition $(S^{\tilde{\alpha}_0})$ devient alors :

$(S^{\tilde{\alpha}_o})$ $\forall x \in \mathrm{Ker}\, Df(a)$, $\Theta(D'\tilde{J}(0),x) = \Phi(D'J(a),u.x) = \Phi(D'J(a),x) \leq 0$

$\exists\ (\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r$, $\exists\ z' \in F'/_{\mathrm{Ker}\, D'f(a)}$

(I) $\sum_i \lambda_i D'J_i(a) = D'f(a).p'.z'$

(II) $\sum_i \lambda_i \Theta(DD'\tilde{J}_i(0).x,x) + \sum_j \mu_j \Theta(DD'\tilde{g}_j(0).x,x) \geq \alpha_o |x|^2$.

Fixons un élément x de $\mathrm{Ker}\, Df(a)$ vérifiant $(D'J(a),x) \leq 0$ et soit $(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r$ et $z' \in F'_{/\mathrm{Ker}\, D'f(a)}$, qui lui sont associés par la propriété $(S^{\tilde{\alpha}_o})$.

En différentiant $D'(J \circ \xi) = D'\xi \circ D'J(\xi)$ en 0, il vient

$DD'\tilde{J}(0) = DD'\xi(0).D'J(a)+D'\xi(0)\circ DD'J(a)\circ D\xi(0) = DD'\xi(0).D'J(a)+u'\circ DD'J(a)\circ u$

d'où, en utilisant (I)' :

(1) $$\sum_i \lambda_i DD'\tilde{J}_i(0) = DD'\xi(0).D'f(a).p'z' + u' \circ \left[\sum_i \lambda_i DD'J_i(a)\right] \circ u$$

En différentiant l'identité : $p \circ f \circ \xi \equiv p.f(a)$ sur ω, il vient :

$$\forall x \in \omega,\ D'\xi(x) \circ D'(p \circ f)(\xi(x)) = D'\xi(x) \circ [D'f(\xi(x)) \circ p'] = 0 \quad ;$$

et en différentiant une seconde fois, il vient :

$$\forall x \in \omega,\quad DD'\xi(x) \circ D'f(\xi(x)) \circ p' + D'\xi(x) \circ DD'f(\xi(x)) \circ D\xi(x) = 0 .$$

Faisons $x = 0$, on obtient :

(2) $\quad DD'\xi(0) \circ D'f(a) \circ p' = - D'\xi(0) \circ DD'f(a) \circ D\xi(0) = - u' \circ DD'f(a) \circ u.$

En combinant (1) et (2), il vient :

$$\sum_i \lambda_i DD'\tilde{J}_i(0).x = u'.\sum_i \lambda_i DD'J_i(a).x - [u' \circ DD'f(a) \circ u \circ p'].(z',x)$$

$$= u'.\sum_i \lambda_i DD'J_i(a).x - u'.DD'f(a).(p'z'.x)$$

d'où finalement :

(3) $$\sum_i \lambda_i \Theta(DD'\tilde{J}_i(0).x,x) = \sum_i \lambda_i \Phi(DD'J_i(a).x,x) - \Phi(DD'f(a).(p'.z'.x),x).$$

D'autre part, en différentiant deux fois $\Psi_{y'} \circ f \circ \xi$, il vient :

$$DD'\tilde{g}(0) = D[D'\xi(.) \circ D'(\Psi_{y'} \circ f)(\xi(.))]\ (0)$$

$$= DD'\xi(0) \circ D'g(a) + u' \circ DD'f(a)(y',.) \circ u$$

$$= u' \circ DD'f(a)(y',.) \circ u \qquad\qquad (D'g(a) = 0)$$

et alors :

(4) $$\sum_j \lambda_j \Theta(DD'\tilde{g}_j(0).x,x) = \sum_j \mu_j \ (u'.DD'f(a)(y'_j,ux),x)$$

$$= \sum_j \mu_j \Phi(DD'f(a)(y'_j,u.x),u.x)$$

$$= \sum_j \mu_j \Phi(DD'f(a).(y'_j,x),x).$$

Posons $y' = p'.z' - \sum_j \mu_j.y'_j$ et soit M la borne supérieure de

$||y'||$ quand x varie dans $\mathrm{Ker}\, Df(a)$ en vérifiant $\Phi(D'J(a),x) \leq 0$.

λ et y' ne pouvant être tous les deux nuls, posons :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{||y'||+\sum_i \lambda_i} \cdot \lambda \qquad \text{et} \qquad \overline{y'} = \frac{1}{||y'||+\sum_i \lambda_i} \cdot y'.$$

$\bar{\lambda}$ de C_n et $\bar{y}'$ de F' vérifient :

- $||\bar{y}'|| + \sum_i \bar{\lambda}_i = 1$
- $\sum_i \bar{\lambda}_i D'J_i(a) = D'f(a).\bar{y}'$ (les y_j' sont dans $\mathrm{Ker}\, D'f(a)$)

et

- $\sum_i \bar{\lambda}_i \Phi(DD'J_i(a).x,x) - \Phi(DD'f(a).(\bar{y}',x),x) \geq \dfrac{\tilde{\alpha}_0}{1+M} |x|^2$

  (d'après (3), (4) et (II)).

Nous avons donc montré que J et f vérifient au point a la condition (S^{α_0}) avec $\alpha_0 = \dfrac{\tilde{\alpha}_0}{1+M}$.

Inversement, supposons que J et f vérifient au point a la condition (S^{α_0}) et soit x dans $\mathrm{Ker}\, Df(a)$ vérifiant $\Theta(D'\tilde{J}(0),x) = \Phi(D'J(a),x) \leq 0$; il existe, par hypothèse, un point $(\lambda,y') \in C_n \times F'$ vérifiant :

(i) $\sum_i \lambda_i + ||y'|| = 1$

(ii) $\sum_i \lambda_i D'J_i(a) = D'f(a).y'$

$$\text{(iii)} \quad \sum_i \lambda_i \Phi(DD'J_i(a)x,x) - \Phi(DD'f(a)(y',x),x) \geq \alpha_0 |x|^2 .$$

Si $y' = p'.z' + \sum_j \mu_j . y'_j$ est la décomposition de y' comme somme d'un élément de $\mathrm{Im}\, p'$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}\, D'f(a)$ $[F' = \mathrm{Im}\, p' \oplus \mathrm{Ker}\, D'f(a)]$ alors λ et $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_r)$ ne peuvent être tous les deux nuls : car sinon, de (ii) on déduirait que $D'f(a).p'.z'$ est nul ; c'est-à-dire z' nul car $D'f(a) \circ p' = (p \circ Df(a))'$ est injectif. Ce qui n'est pas possible d'après (i). Posons :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i + \sum_j |\mu_j|} .\lambda \qquad \text{et} \quad \bar{\mu} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i + \sum_j |\mu_j|} .\mu .$$

En remontant les calculs de la première partie, on voit que $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ vérifient

- $\sum_i \bar{\lambda}_i D'\tilde{J}_i(0) + \sum_j \bar{\mu}_j D'\tilde{g}_j(0) = 0$

  et

- $\sum_i \lambda_i \Theta(DD'\tilde{J}_i(0).x,x) + \sum_j \bar{\mu}_j \Theta(DD'\tilde{g}_j(0).x,x) \geq \dfrac{\alpha_0 |x|^2}{\sum_i \lambda_i + \sum_j |\mu_j|}$

  (d'après (ii) et (iii).

Si on note N la borne supérieure de $\sum_j |\mu_j|$ quand x varie dans $\mathrm{Ker}\, Df(a)$ en vérifiant $\Theta(D'\tilde{J}(0),x) \leq 0$, il est clair que $\tilde{J}$ et $\tilde{g}$ vérifient la condition $(S^{\tilde{\alpha}_0})$ avec $\tilde{\alpha}_0 = \dfrac{\alpha_0}{1+N}$.

C.Q.F.V.

$$\forall\, j \in \{1,2,\ldots,r\} \qquad f_j(h) = \int_0^1 F_j(t,h(t))dt = f_j(h_o).$$

On suppose que les applications $G_1,\ldots,G_n,F_1,\ldots,F_r$ sont deux fois continûment différentiables en la seconde variable ; J et f sont alors de classe C^2 avec :

$$\forall\, h \in \Omega, \quad \forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p),\ \forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$DJ_i(h_o).h = \int_0^1 D_2G_i(t,h_o(t)).h(t)dt = \int_0^1 <\nabla_2 G_i(t,h_o(t))|h(t)>dt$$

et de même

$$\forall\, h_o \in \Omega,\ \forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p),\ \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$Df_j(h_o).h = \int_0^1 <\nabla_2 F_j(t,h_o(t))|h(t)>dt\ .$$

Si on met $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ en dualité avec lui-même par la forme bilinéaire qui à deux points h_1 et h_2 de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ associe

$$\int_0^1 <h_1(t)|h_2(t)>dt$$

on obtient un couple, qu'on notera $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^p)$, qui est Hilbertien : l'identité de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$, étant un opérateur symétrique bijectif et positif, est un opérateur coercif ; la norme Hilbertienne de $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^p)$ est alors la norme

$$||\cdot||_{L^2} = ||\cdot||_2\ .$$

Les expressions de $DJ(h_o).h$ et $Df(h_o).h$ montrent que les applications DJ et Df se factorisent par les applications $D'J$ et

CHAPITRE III

APPLICATIONS.

EXEMPLE 1.

Notons par $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ l'espace de Banach des applications continues, de $I = [0,1]$ dans $\mathbb{R}^p$, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall h \in C^o(I,\mathbb{R}^p), \quad ||h|| = \mathrm{Sup}\{||h(t)|| = (\sum_i h_i(t)^2)^{\frac{1}{2}}, \ t \in I\} \quad .$$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$. Alors l'ensemble des éléments h de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad (t,h(t)) \in \mathcal{U}$$

est ouvert. On supposera que cet ouvert n'est pas vide. Soient $G_1,\ldots,G_n$, $F_1,\ldots,F_r$ des applications numériques définies sur $\mathcal{U}$, on cherche à caractériser des points h_o de Ω en lesquels l'application $J = (J_1,\ldots,J_n)$ définie par :

$$\forall h \in \Omega, \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad J_i(h) = \int_0^1 G_i(t,h(t))dt$$

présente un optimum sur l'ensemble $\Omega_f(h_o)$ des éléments h de Ω vérifiant :

D'f, de Ω dans $C^o(I,\mathbb{R}^p)$, définies par :

$$\forall\, h \in \Omega, \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\} \quad D'J_i(h) = \nabla_2 G_i(t,h(t)) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial G_i}{\partial x_k}(t,h(h)).\overrightarrow{e_k}$$

$$\forall\, h \in \Omega, \forall\, j \in \{1,2,\dots,n\} \quad D'f_j(h) = \nabla_2 F_j(t,h(t)) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(t,h(t)).\overrightarrow{e_k}$$

(où $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

D'J et D'f étant de classe C^1, d'après l'hypothèse de régularité faite sur G et F, les applications J et f sont de classe C^2 relativement à $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^p)$. Il suffit donc qu'en h_o la condition suffisante soit vérifiée. En différentiant D'J et D'f, il vient :

$$\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \forall\, h_o \in \Omega, \quad \forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p)$$

$$DD'J_i(h_o).h = D_2\nabla_2 G_i(.,h_o(.)).h(.) = a_i,h_o(.)).h(.)$$

où, pour tout t de I et tout h_o de Ω, $a_i(t,h_o(t))$ est l'opérateur symétrique de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice a pour terme général $\dfrac{\partial^2 G_i}{\partial x_k \partial x_\ell}(t,h_o(t))$; et de même

$$\forall\, j \in \{1,2,\dots,r\}, \quad \forall\, h_o \in \Omega, \quad \forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p)$$

$$DD'f_j(h_o).h = D_2\nabla_2 F_j(.,h_o(.)).h(.) = b_j(.,h_o(.)).h(.)$$

où, pour tout t de I et tout h_o de Ω, $b_j(t,h_o(t))$ est l'opérateur symétrique de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice a pour terme général $\dfrac{\partial^2 G_i}{\partial x_k \partial x_\ell}(t,h_o(t))$.

Soit h_o un point de Ω ; posons :

. $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \forall\, t \in I \qquad K_i(t) = \nabla_2 G_i(t,h_o(t))$

$\forall\, j \in \{1,2,\dots,r\}, \quad \forall\, t \in I \qquad L_j(t) = \nabla_2 F_j(t,h_o(t))$

. $\Lambda(K,L) = \{(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j L_j \equiv 0\}$

. $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \forall\, t \in I \qquad a_i(t) = a_i(t,h_o(t))$

$\forall\, j \in \{1,2,\dots,r\}, \quad \forall\, t \in I \qquad b_j(t) = b_j(t,h_o(t)).$

La condition suffisante, en h_o , s'écrit alors :

(H3) $\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p),\ \operatorname{Sup}_i \int_0^1 \langle K_i | h\rangle dt \leq 0,\ \operatorname{Sup}_j \left| \int_0^1 \langle L_j | h\rangle dt \right| = 0$

$\exists (\lambda,\mu) \in \Lambda(K,L)$

$$\sum_i \lambda_i \int_0^1 \langle a_i.h | h\rangle dt + \sum_j \mu_j \int_0^1 \langle b_j.h | h\rangle dt \geq \alpha \int_0^1 ||h||^2 dt.$$

Dans le cas d'une fonctionnelle scalaire $(n = 1)$, on a le résultat classique suivant : "pour qu'une application continue a, de I dans l'ensemble des opérateurs symétriques de $\mathbb{R}^p$, soit telle qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p) \quad \int_0^1 \langle a.h | h\rangle dt \geq \alpha \int_0^1 ||h||^2 dt$$

il est nécessaire et suffisant que, pour tout t de I, l'opérateur $a(t)$ soit défini positif".

Le résultat qui va suivre en est une généralisation :

Théorème 3.-

Pour que la condition (H3) soit vérifiée, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un (λ,μ) dans $\Lambda(K,L)$ tel qu'on ait :

$$(N1) \quad \forall\, t \in I,\ \forall\, X \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\},\quad \sum_i \lambda_i \langle a_i(t).X|X\rangle + \sum_j \mu_j\, b_j(t).X|X\rangle > 0.$$

Démonstration :

. La condition est suffisante : en effet, si elle est vérifiée, grâce à la compacité de I et de la sphère unité de $\mathbb{R}^p$, il existera un nombre $\alpha_0 > 0$ tel qu'on ait :

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, X \in \mathbb{R}^p,\quad \sum_i \lambda_i \langle a_i(t).X|X\rangle + \sum_j \mu_j \langle b_j(t).X|X\rangle \geq \alpha_0 ||X||^2$$

et l'opérateur, de $\mathbb{C}^0(I,\mathbb{R}^p)$, qui à h élément de $C^0(I,\mathbb{R}^p)$ associe

$$\sum_i \lambda_i a_i(.).h(.) + \sum_j \mu_j b_j(.).h(.)$$

sera coercif ; condition plus forte que la condition (H3).

. La condition est nécessaire : Notons par W l'orthogonal, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, du sous-espace vectoriel

$$V = \{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \;\Big|\; \sum_i \lambda_i K_i + \sum_j \mu_j L_j \equiv 0\}$$

et continuons à noter par C_n le cône convexe et fermé $C_n \times \{0_{\mathbb{R}^r}\}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$; si on interprète un point (λ,μ) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ comme une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, alors $\Lambda(K,L)$ est exactement l'ensemble des formes linéaires, sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, normalisées par $\sum_i |\lambda_i| + \sum_j |\mu_j| = 1$ qui sont négatives ou nulles sur $W - C_n$; en effet, on a :

$$(W - C_n)^* = (W - C_n \times \{0_{\mathbb{R}^r}\})^* = W^* \cap \left[- C_n^* \times \{0_{\mathbb{R}^r}\}^*\right] = - V \cap \left[C_n \times \mathbb{R}^r\right] =$$

$$= - V \cap C_n^r$$

et $\Lambda(K,L)$ est l'ensemble des éléments, normalisés, de $V \cap C_n^r$.

Si (λ,μ) est un point de $\Lambda(K,L)$ tel que la condition (N1) soit vérifiée, alors (λ,μ) est une forme linéaire négative ou nulle sur $W - C_n$, strictement positive sur le compact

$$\{M(t,X) \in \mathbb{R}^n \times R^r \,\Big|\, \overrightarrow{OM}(t,X) = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i(t).X | X\rangle \overrightarrow{e_i} + \sum_{j=1}^{r} \langle b_j(t).X | X\rangle \overrightarrow{e_{n+j}} \quad ;$$

$$t \in I \quad ; \quad X \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad ||X|| = 1\}$$

donc sur son enveloppe convexe Γ ; il en résulte que, globalement, Γ a une intersection vide avec $W - C_n$. Inversement, si cette dernière condition est vérifiée, Γ étant compact, car enveloppe convexe d'un compact, et $W - C_n$ étant convexe et fermé, on pourra les séparer strictement par une forme linéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$: c'est-à-dire qu'il existera un point (λ,μ) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ et un nombre réel β vérifiant :

(i) $\forall (x,y) \in W - C_n, \quad \langle\lambda|x\rangle + \langle\mu|y\rangle < \beta$

(ii) $\forall (x,y) \in \Gamma, \quad \langle\lambda|x\rangle + \langle\mu|y\rangle > \beta$.

$W - C_n$ étant un cône de sommet l'origine, on déduira de (i), d'une part, que β est strictement positif, et d'autre part, que (λ,μ) est une forme linéaire négative ou nulle sur $W - C_n$; en normalisant (λ,μ), on aboutira à un point de $\Lambda(K,L)$ qui vérifie a fortiori, grâce à (ii), la condition (N1).

La démonstration du théorème sera donc terminée si on montre le :

Lemme.-

Si la condition (H3) est vérifiée alors Γ a une intersection vide avec $W - C_n$.

Preuve du lemme *(par l'absurde)* :

La condition (H3) étant vérifiée, il existe (th. 1 § I) deux nombres $\alpha_0 > 0$ et $\nu > 0$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, h \in E_\nu = \{h \in C^0(I,\mathbb{R}^p) \,|\, \operatorname{Sup}_i \int_0^1 \langle K_i|h\rangle dt \leq \nu||h||_2,\ \operatorname{Sup}_j \left|\int_0^1 \langle L_j|h\rangle dt\right| \leq \nu||h||_2\} \\ \exists\ (\lambda,\mu) \in \Lambda(K,L) : \\ \sum_i \lambda_i \int_0^1 \langle a_i h|h\rangle dt + \sum_i \mu_j \int_0^1 \langle b_j h|h\rangle dt \geq \alpha_0 \int_0^1 \langle h|h\rangle dt \,. \end{array}\right.$$

Supposons que $\Gamma \cap (W - C_n)$ soit non vide ; il existe alors des nombres strictement positifs $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ vérifiant

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_s = 1 \,,$$

des points $t_1,\ldots,t_m$ de I, des vecteurs $X_1,\ldots,X_m$ de $\mathbb{R}^p$, de normes 1 et un vecteur (W^1,W^2) de W tels qu'on ait :

$$\forall\ i \in \{1,2,\dots,n\} \qquad W_i^1 + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle a_i(t_s).X_s | X_s \rangle \leqslant 0$$

$$\forall\ j \in \{1,2,\dots,r\} \qquad W_j^2 + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle b_j(t_s).X_s | X_s \rangle = 0.$$

Soit α un nombre strictement positif ; les a_i et les b_j dépendant continûment de t, il existe un $\varepsilon > 0$ vérifiant :

. $\sqrt{2m\varepsilon}\ \operatorname{Sup}_i ||K_i|| \leqslant \nu$, $\quad \sqrt{2m\varepsilon}\ \operatorname{Sup}_j ||L_j|| \leqslant \nu$

. $2\varepsilon \leqslant \operatorname{Inf}\{|t_s - t_\ell| \ ;\ s,\ell \in \{1,\dots,m\},\ t_s \neq t\}$

. $\forall (x_1,\dots,x_m) \in I^m$, $\operatorname{Sup}_s |x_s - t_s| \leqslant \varepsilon$, $\forall\ i \in \{1,2,\dots,n\}$, $\forall\ j \in \{1,\dots,r\}$

$$W_i^1 + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle a_i(x_s).X_s | X_s \rangle < \alpha \ ; \ \left| W_j^2 + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle b_j(x_s).X_s | X_s \rangle \right| < \alpha.$$

Supposons que la suite $t_1,\dots,t_m$ se présente de la façon suivante :

$$t_1 = t'_1 < t'_2 < \dots < t'_q = t_m \qquad (1 \leqslant q \leqslant m)$$

où chaque t'_s se répète m_s fois. On subdivise chaque intervalle $I \cap [t'_s - \varepsilon, t_s + \varepsilon]$ en m_s sous-intervalles, de même longueur, et on ordonne l'ensemble de tous ces intervalles ; on obtient ainsi m intervalles $I_1,\dots,I_m$ d'intérieurs deux à deux disjoints tels qu'on ait :

$$\forall\ (x_1,\dots,x_m) \in I_1 \times \dots \times I_m\ ,\ \forall\ i \in \{1,2,\dots,n\ ,\ \forall\ j \in \{1,2,\dots,r\}$$

(A^1) : $W_i^1 + \sum_s \alpha_s \langle a_i(x_s).X_s | X_s \rangle < \alpha$

(A^2) : $\left| W_j^2 + \sum_s \alpha_s \langle b_j(x_s).X_s | X_s \rangle \right| < \alpha$

Choisissons des applications numériques continues $\theta_1,\ldots,\theta_m$ sur I vérifiant :

$$. \ \forall s \in \{1,2,\ldots,m\} \qquad \mathrm{Supp}(\theta_s) \subset I_s \ ,$$

$$. \ \forall s \in \{1,2,\ldots,m\} \qquad ||\theta_s||_2^2 = \int_{I_s} \theta_s(t)^2 dt = \alpha_s \ ,$$

et posons

$$h = \sum_s \theta_s . X_s \ .$$

Alors h est une application, de norme 1, appartenant à E_ν ; en effet :

$$. \ ||h||_2^2 = \sum_s \int_{I_s} \theta_s(t)^2 ||X_s||^2 dt = \sum_s \alpha_s = 1.$$

. $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\int_0^1 \langle K_i|h\rangle dt = \int_{\bigcup_s I_s} \langle K_i|h\rangle dt \leq ||K_i|| \left[\mathrm{mes} \bigcup_s I_s\right]^{\frac{1}{2}} ||h||_2 \leq ||K_i|| \sqrt{2m\varepsilon} \leq \nu$$

et de même

$$. \ \forall j \in \{1,\ldots,r\}, \qquad \left|\int_0^1 \langle L_j|h\rangle dt\right| \leq ||L_j|| \sqrt{2m\varepsilon} \leq \nu.$$

Il existe donc, par hypothèse, au moins un (λ^0,μ^0) de $\Lambda(K,L)$ tel qu'on ait :

$$(1) \qquad \sum_i \lambda_i^0 \int_0^1 \langle a_i h|h\rangle dt + \sum_j \mu_j \int_0^1 \langle b_j h|h\rangle dt \geq \alpha_0 \ .$$

En multipliant toutes les inégalités de (A^1) par $\prod_1^m \theta_s(x_s)^2$ et en intégrant sur le pavé $\prod_1^m I_s$, il vient :

$\forall\ i \in \{1,2,\dots,n\}$,

$$\int_{\prod_s I_s} \prod_\ell \theta_\ell(x_\ell)^2 . [W_i^1 + \sum_s \alpha_s <a_i(x_s).X_s|X_s>] dx_1 \dots dx_m$$

$$= W_i^1 . \int_{\prod_s I_s} \prod_s \theta_s(x_s)^2 dx_1 \dots dx_m + \sum_s \alpha_s \int_{\prod_\ell I_\ell} \prod_{\ell \neq s} \theta_\ell(x_\ell)^2 <a_i(x_s)\theta_s(x_s).X_s|\theta_s(x_s)X_s> dx_1 \dots dx_m$$

$$= W_i^1 \prod_s ||\theta_s||_2^2 + \sum_s \alpha_s \prod_{\ell \neq s} ||\theta_\ell||_2^2 . \int_{I_s} <a_i(t).h(t)|h(t)> dt$$

$$= \prod_s ||\theta_s||_2^2 . [W_i^1 + \sum_s \int_{I_s} <a_i(t).h|h> dt]$$

$$= \prod_s ||\theta_s||_2^2 . [W_i^1 + \int_0^1 <a_i h|h> dt] \leq \alpha \prod_s ||\theta_s||_2^2$$

c'est-à-dire finalement :

(2) $\qquad \forall\ i \in \{1,2,\dots,n\} \qquad W_i^1 + \int_0^1 <a_i h|h> dt \leq \alpha .$

De même, en multipliant les inégalités (A^2) par $\prod_s \theta_s(x_s)^2$ et en intégrant sur le pavé $\prod_s I_s$, on arrive à :

(3) $\qquad \forall\ j \in \{1,2,\dots,r\} \qquad |W_j^2 + \int_0^1 <b_j h|h> dt| \leq \alpha .$

Si (λ,μ) est un point de $\Lambda(K,L)$, il vient, d'après (2),

(2') $\qquad \sum_i \lambda_i W_i^1 + \sum_i \lambda_i \int_0^1 <a_i h|h> dt \leq \alpha \sum_i \lambda_i$

et d'après (3) :

$$(3)' \quad \sum_j \mu_j W_j^2 + \sum_j \mu_j \int_0^1 <b_j h|h>dt \leq \sum_j |\mu_j| \left| W_j^1 + \int_0^1 <b_j h|h>dt \right| \leq \alpha \sum_j |\mu_j| \ .$$

Additionnant, terme à terme, (2)' et (3)', il vient :

$$\sum_i \lambda_i W_i^1 + \sum_j \mu_j W_j^2 + \sum_i \lambda_i \int_0^1 <a_i h|h>dt + \sum_j \mu_j \int_0^1 <b_j h|h>dt \leq \alpha \left[\sum_i \lambda_i + \sum_j |\mu_j| \right] .$$

Sachant que, par construction de W, on a :

$$\forall\ (\lambda,\mu) \in \Lambda(K,L), \quad \sum_i \lambda_i W_i^1 + \sum_j \mu_j W_j^2 = 0$$

et que, par définition de $\Lambda(K,L)$, on a :

$$\forall\ (\lambda,\mu) \in \Lambda(K,L) \qquad \sum_i \lambda_i + \sum_i |\mu_j| = 1$$

il vient :

$$(4) \quad \forall(\lambda,\mu) \in \Lambda(K,L), \quad \sum_i \lambda_i \int_0^1 <a_i h|h>dt + \sum_j \mu_j \int_0^1 <b_j h|h>dt \leq \alpha$$

comparant (1) et (4), on aboutit à $\alpha_0 \leq \alpha$; ceci pour tout $\alpha > 0$, ce qui n'est pas possible : α_0 étant strictement positif.

D'où le lemme et alors le théorème.

EXEMPLE 2.

Reprenons la même fonctionnelle $J = (J_1,\ldots,J_n)$ de l'exemple 1. Soit $F = (F_1,\ldots,F_q)$ une application continue définie sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$; notons par ω_F la fonctionnelle qui à un élément h de Ω associe l'élément $\omega_F(h)$ de $C^o(I,\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall\, t \in I, \qquad \omega_F(h)(t) = F(t,h(t)).$$

Dans cet exemple, on cherche à caractériser des points h_o de Ω en lesquels J présenterait un optimum local sur l'ensemble $\Omega_{\omega_F}(h_o)$ des éléments h de Ω vérifiant :

$$\omega_F(h) = \omega_F(h_o) .$$

Nous allons formuler des hypothèses, sur les données du problème, qui assurent les hypothèses du théorème 2 [Ch. II].

Lemme 1.-

Si l'application F est deux fois continûment différentiable en la seconde variable, alors ω_F est de classe C^2 relativement aux couples $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^p)$ et $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^q)$.

Preuve :

Il est bien connu, voir [4], que ω_F est alors de classe C^2 relativement aux espaces de Banach $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ et $C^o(I,\mathbb{R}^q)$, avec

$$\forall\, h_o \in \Omega,\ \forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p),\ \forall\, t \in I,\ [D\omega_F(h_o).h](t) = D_2F(t,h_o(t)).h(t).$$

$D_2F(t,h_o(t))$ étant, pour tout t de I, l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ dont la matrice a pour terme général $\frac{\partial F_j}{\partial x_\ell}(t,h_o(t))$; j étant l'indice ligne.

Si pour toute application linéaire M, de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, on note par M^* sa transposée ; et si h_o est un élément quelconque de Ω, il est clair en intégrant l'identité

$$\forall\, t \in I, \quad \langle D_2F(t,h_o(t)).h(t)|k(t)\rangle_{\mathbb{R}^q} = \langle h(t)|D_2F(t,h_o(t))^*.k(t)\rangle_{\mathbb{R}^p}$$

où h est un élément quelconque de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ et k est un élément quelconque de $C^o(I,\mathbb{R}^q)$, que ω_F est de classe C^2 relativement à $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ et $C^o(I,\mathbb{R}^q)$ et que, pour tout k de $C^o(I,\mathbb{R}^q)$ et tout h de Ω, $D'\omega_F(h).k$ est l'élément de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ défini par :

$$\forall\, t \in I, \qquad [D'\omega_F(h).k](t) = D_2F(t,h(t,h(t))^*.k(t).$$

On en déduit alors que, pour tout h_o de Ω, tout h de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ et tout k de $C^o(I,\mathbb{R}^q)$, $DD'\omega_F(h_o).(k,h)$ est l'élément de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ défini par :

$$\forall\, t \in I, \qquad [DD'\omega_F(h_o).(k,h)](t) = [D_{22}F(t,h_o(t)).h(t)]^*.k(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{q} k_j(t)D_{22}F_j(t,h_o(t)).h(t).$$

$D_{22}F_j(t,h_o(t))$ étant, pour tout j dans $\{1,2,\dots,q\}$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice a pour terme général

$\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_s \partial x_\ell}(t,h_o(t))$. ■

On supposera donc, à partir de maintenant, que $G = (G_1,\ldots,G_n)$ et $F = (F_1,\ldots,F_q)$ sont deux fois continûment différentiables en la seconde variable.

Lemme 2.-

Soit h_o un élément de Ω ; alors il y a équivalence entre :

($\mathcal{R}$) . $\delta\omega_F(h_o) = (D\omega_F(h_o), D'\omega_F(h_o))$ admet une section,

($\mathcal{R}_1$) . Pour tout t de I, $D_2F(t,h_o(t))$ est surjective,

et

($\mathcal{R}_2$) . Il existe une application continue c, de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^p)$, vérifiant : $\forall\, t \in I$, $D_2F(t,h_o(t)) \circ c(t) = 1_{\mathbb{R}^q}$.

Preuve :

. ($\mathcal{R}$) entraîne ($\mathcal{R}_1$) : Soit $t_o \in I$ et $Y_o \in \mathbb{R}^q$; notons par k_o l'élément, de $C^o(I,\mathbb{R}^q)$, identiquement égal à Y_o. ($\mathcal{R}$) étant vérifiée, il existe un h, élément de $C^o(I,\mathbb{R}^p)$ tel que :

$$D\omega_F(h_o).h = k_o \quad ;$$

on a alors en particulier :

$$D_2F(t_o,h_o(t_o)).h(t_o) = Y_o \ ,$$

c'est que $h(t_o)$ est un antécédant de Y_o pour $D_2F(t_o,h_o(t_o))$.

. (R_1) <u>entraîne</u> (R_2) : Si t_o est un point de I, (R_1) étant vérifié, il existe c_o élément de $L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^p)$ vérifiant :

$$D_2F(t_o,h_o(t_o)) \circ c_o = 1_{\mathbb{R}^q} .$$

L'appication qui à $t \in I$ associe l'endomorphisme de $\mathbb{R}^q$

$$D_2F(t,h_o(t)) \circ c_o$$

étant continue, il existe un voisinage V_o de t_o dans lequel $D_2F(t,h_o(t)) \circ c_o$ est inversible dans $L(\mathbb{R}^q)$. Si on pose :

$$\forall\, t \in V_o \ , \qquad c_o(t) = c_o \circ \left[D_2F(t,h_o(t)) \circ c_o\right]^{-1}$$

on aura alors :

$$\forall\, t \in V_o \ , \qquad D_2F(t,h_o(t)) \circ c_o(t) = 1_{\mathbb{R}^q} .$$

Soit $t_1,\dots,t_m$ des points de I tels que $V_1,\dots,V_m$ recouvrent I et soit $(\theta_1,\dots,\theta_m)$ une partition de l'unité de I relativement à $(V_1,\dots,V_m)$; posons :

$$\forall\, t \in I \qquad c(t) = \sum_{1}^{m} \theta_s(t).c_s(t) .$$

c est alors une application continue de I dans $L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^p)$ vérifiant :

$\forall\, t \in I,$

$$D_2F(t,h_o(t)) \circ c(t) = \sum_{t\in V_s} \theta_s(t) D_2F(t,h_o(t)) \circ c_s(t) = (\sum_{t\in V_s} \theta_s(t)).1_{\mathbb{R}^q} = 1_{\mathbb{R}^q} ,$$

d'où (R_2).

. (R_2) <u>entraîne</u> (R) : Il est clair que, si c est une application continue de I dans $L(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^p)$ vérifiant :

$$\forall\, t \in I, \qquad D_2F(t,h_o(t)) \circ c(t) = 1_{\mathbb{R}^q},$$

le morphisme (σ,σ') de $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^q)$ dans $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^p)$ défini par :

$$\forall\, k \in C^o(I,\mathbb{R}^q), \ \forall\, t \in I, \qquad [\sigma.k](t) = c(t).k(t)$$

$$\forall\, h \in C^o(I,\mathbb{R}^p), \ \forall\, t \in I, \qquad [\sigma'.h](t) = c(t)^*.h(t)$$

est une section pour $\delta\omega_F(h_o)$. ■

Plaçons-nous donc en un point h_o de Ω en lequel les conditions, équivalentes, du lemme 2 sont vérifiées; pour qu'en h_o la fonctionnelle J présente un optimum local sur $\Omega_{\omega_F}(h_o)$, il suffit, qu'en h_o, la condition (H3) du théorème 2 soit vérifiée.

<u>Notations.</u>

. $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}, \ \forall\, t \in I$: $K_i(t) = \nabla_2 G_i(t,h_o(t))$

$$a_i(t) = D_2\nabla_2 G_i(t,h_o(t)) \cong \left[\frac{\partial^2 G_i}{\partial x_s \partial x_\ell}(t,h_o(t))\right]_{(s,\ell)}$$

- $\forall\, t \in I, \quad M(t) = D_2F(t,h_o(t))$

- $\forall\, j \in \{1,2,\ldots,q\}, \ \forall\, t \in I, \quad b_j(t) = \left[\dfrac{\partial^2 F_j}{\partial x_s \partial x_\ell}\,(t,h_o(t))\right]_{(s,\ell)}$,

- $\Lambda(K,M) = \Lambda(D'J(h_o),\delta\omega_F(h_o))$

$$= \{(\lambda,k)\in C_n\times C^0(I,\mathbb{R}^q) \,\Big|\, ||k|| + \sum_i \lambda_i = 1, \forall\, t \in I, \ \sum_i \lambda_i\, K_i(t) = M(t)^*.k(t)\}$$

- $\forall\, \nu \in \mathbb{R}^+$,

$$E_\nu = \{h \in C^0(I,\mathbb{R}^p) \,\Big|\, \operatorname*{Sup}_i \int_0^1 \langle K_i|h\rangle dt \leqslant \nu||h||_2, ||M(.).h(.)||_2 \leqslant \nu||h||_2\}$$

On arrive alors à la caractérisation suivante :

<u>Théorème</u> 4.-

Pour qu'en h_o la condition (H3) soit vérifiée, il est nécessaire et suffisant que soit vérifiée la condition :

(N2). $\quad \exists\ (\lambda,k) \in \Lambda(K,M) \ : \ \forall\, t \in I, \forall\, X \in \operatorname{Ker} M(t) \setminus \{0\}$

$$\sum_i \lambda_i\langle a_i(t).X|X\rangle - \sum_j k_j(t)\langle b_j(t).X|X\rangle > 0.$$

<u>Démonstration</u> :

La condition (H3) s'écrit :

(H3). $\quad \exists\ \alpha > 0, \ \forall\, h \in E_0 , \exists\ (\lambda,k) \in \Lambda(K,M)$:

$$\sum_i \lambda_i \int_0^1 \langle a_i h|h\rangle dt - \sum_j \int_0^1 k_j\langle b_j h|h\rangle dt \geqslant \alpha \int_0^1 ||h||^2 dt.$$

Il est clair que (N2) est suffisante pour avoir (H3) ; montrons qu'elle est nécessaire.

Première étape : On va montrer le résultat dans le cas spécial (auquel on se ramènera dans le cas général) où on suppose que pour tout h de E_0 l'élément k, qui lui est associé par (H3), est nul. (H3) s'écrit alors dans ce cas :

$$\text{(H3)}. \quad \exists \alpha > 0, \ \forall\, h \in E_0 \ , \exists\ \lambda \in \Lambda(K) \ : \sum_i \lambda_i \int_0^1 \langle a_i h | h \rangle dt \geqslant \alpha \int_0 ||h||^2 dt.$$

Notons par W l'orthogonal dans $\mathbb{R}^n$ du sous-espace vectoriel

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^n \Big| \sum_i \lambda_i K_i \equiv 0\}$$

et par Γ l'enveloppe convexe du compact

$$\{M(t,X) \in \mathbb{R}^n \Big| \overrightarrow{OM(t,X)} = \sum_i \langle a_i(t) X | X \rangle \overrightarrow{e_i} \ , \ t \in I, \ \ X \in \operatorname{Ker} M(t) \ \text{ et } \ ||X|| = 1\}.$$

Il est clair, en répétant le raisonnement de l'exemple 1, que (N2) est équivalente à $\Gamma \cap (W - C_n) = \emptyset$. Le lemme suivant démontre que (H3) entraîne (N2) :

Lemme 2.-

Pour que (H3) soit vérifiée, il est nécessaire que Γ ait une intersection vide avec $W - C_n$.

Preuve *(par l'absurde)* :

La condition (H3) étant vérifiée, il existe d'après le théorème 1 [Ch. I] deux nombres $\alpha_0 > 0$ et $\nu > 0$ vérifiant :

$$\forall\, h \in E_\nu, \ \exists\ \lambda \in \Lambda(K) = \{\lambda \in \Lambda_n \Big| \sum \lambda_i . K_i = 0, \qquad \sum_i \lambda_i \int_0^1 \langle a_i h | h \rangle dt \geqslant \alpha_0 ||h||_2^2 \ .$$

Supposons que $\Gamma \cap (W - C_n) \neq \emptyset$; il existe alors des nombres $\alpha_1 > 0,\dots,\alpha_m > 0$ vérifiant $\sum_s \alpha_s = 1$, des points $t_1,\dots,t_m$ de I, des vecteurs $X_1 \in \operatorname{Ker} M(t_1),\dots,X_m \in \operatorname{Ker} M(t_m)$, de norme 1 et un vecteur W dans W tel qu'on ait :

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\} \qquad W_i + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle a_i(t_s).X_s | X_s \rangle \leq 0.$$

Soit $\alpha > 0$; les a_i étant continues, il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour avoir :

. $2\varepsilon \leq \operatorname{Inf}\{|t_s - t_\ell|,\ t_s \neq t_\ell\}$, $\sqrt{2m\varepsilon}.\operatorname{Sup}_i ||K_i|| \leq \nu$

. $\forall\, (x_1,\dots,x_m) \in I^m$, $\operatorname{Sup}_s |x_s - t_s| \leq \varepsilon$

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}, \quad W_i + \sum_s \alpha_s \langle a_i(x_s).X_s | X_s \rangle < \alpha$$

$$\forall\, s \in \{1,\dots,n\}, \quad ||M(x_s).X_s|| < \nu.$$

Quitte à subdiviser chaque intervalle $I \cap [t_s - \varepsilon, t_s + \varepsilon]$ en m_s sous-intervalle de même longueur, si le point t_s se répète m_s fois dans la suite $\{t_1,\dots,t_m\}$, on peut trouver m intervalles $I_1,\dots,I_m$ d'intérieurs deux-à-deux disjoints, $\bigcup_{s=1}^{m} I_s$ de mesure au plus égale à $2m\varepsilon$ et tels qu'on ait :

$$\forall\, (x_1,\dots,x_m) \in I_1 \times \dots \times I_m : \ . \ (A^1) : \forall\, i \in \{1,\dots,n\},\ W_i + \sum_s \langle a_i(x_s).X_s | X_s \rangle < \alpha$$

$$. \ (A^2) : \forall\, s \in \{1,\dots,m\},\ ||M(x_s).X_s|| < \nu$$

Choisissons des applications numériques $\theta_1,\dots,\theta_m$ continues sur I et vérifiant :

$$\forall\, s \in \{1,2,\dots,m\} \qquad Supp(\theta_s) \subset I_s \ , \quad ||\theta_s||_2^2 = \int_0^1 \theta_s(t)^2 dt = \alpha_s \quad ;$$

et posons :

$$h = \sum_{s=1}^{m} \theta_s . X_s \ .$$

Alors h est un élément, de norme 1, de E_ν : la vérification du fait que h est de norme 1 et qu'il vérifie :

$$\sup_i \int_2^1 \langle K_i | h \rangle dt \leq \nu ||h||_2$$

étant exactement la même qu'à l'exemple 1, seul reste à vérifier qu'on a :

$$||D\omega_F(h_0).h||_2 = ||M(.)h(.)||_2 \leq \nu ||h||_2 \ .$$

h étant à support inclus dans $\bigcup_s I_s$, il vient

$$||M(.)h(.)||_2^2 = \int_0^1 ||M(t).h(t)||^2 dt \leq \left[Sup\{||M(t)||, t \in \bigcup_s I_s\} \right]^2 ||h||_2^2 \leq \nu^2 ||h||_2^2$$

(d'après (A^2))

C.Q.F.D.

Il existe donc, par hypothèse, au moins un λ^0 dans $\Lambda(K)$ tel qu'on ait :

(1) $$\sum_i \lambda_i^0 \int_0^1 \langle a_i h | h \rangle dt \geq \alpha_0 \ .$$

D'autre part, en multipliant toutes les inégalités de (A^1) par $\prod_s \theta_s(x_s)^2$ et en intégrant sur $\prod_s I_s$, il vient :

$$\forall\, i \in \{1,2,\ldots,m\} \qquad W_i + \int_0^1 <a_i h|h>dt \leqslant \alpha$$

et alors :

$$\forall\, \lambda \in \Lambda(K) \quad \sum_i \lambda_i\left[W_i + \int_0^1 <a_i h|h>dt\right] = \sum_i \lambda_i W_i + \sum_i \lambda_i \int_0^1 <a_i h|h>dt$$

$$(2) \qquad = \sum_i \lambda_i \int_0^1 <a_i h|h>dt \leqslant \alpha$$

Comparant (1) et (2), on aboutit à $\alpha_0 \leqslant \alpha$ où α est arbitraire et $\alpha_0 > 0$; ce qui est absurde. ∎

Deuxième étape (*Cas général*) : Si (λ,k) est un point de $\Lambda(K,M)$ associé à l'élément h de E_0, λ et k sont alors liés par :

$$\forall\, t \in I, \qquad k(t) = \sum_i \lambda_i c(t)^*.K_i(t).$$

Si on pose :

$$\forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\},\ \forall\, t \in I : \qquad \tilde{K}_i(t) = K_i(t) - \left[M(t)^* \circ c(t)^*\right].K_i(t)$$

$$\text{et} \qquad \tilde{a}_i(t) = a_i(t) - \sum_{j=1}^{q} (c(t)^*.K_i(t))_j.b_j(t),$$

on aura :

$$\forall\, t \in I, \quad \sum_i \lambda_i \tilde{a}_i(t) = \sum_i \lambda_i a_i(t) - \sum_i \lambda_i \left[\sum_j (c(t)^*.K_i(t))_j.b_j(t)\right]$$

$$= \sum_i \lambda_i a_i(t) - \sum_j \left[\sum_i \lambda_i (c(t)^*.K_i(t))_j\right].b_j(t)$$

$$(3) \qquad = \sum_i \lambda_i a_i(t) - \sum_j k_j(t).b_j(t) \quad ;$$

D'après le lemme 1 du chapitre I, la condition (H3) sera équivalente à :

$(\tilde{H}3)$. $\exists\ \alpha > 0,\ \forall\ h \in C^0(I,\mathbb{R}^p),\ M(.).h(.) \equiv 0$ et $\sup_i \int_0^1 <\tilde{K}_i|h>dt \leq 0$,

$$\exists\ \lambda\in\Lambda(K)\ :\ \sum_i \lambda_i \int_0^1 <\tilde{a}_i h|h>dt \geq \alpha||h||_2^2 .$$

La condition $(\tilde{H}3)$ étant vérifiée, on applique le résultat de la première étape : il existe donc un point $\lambda^o \in \Lambda(K)$ tel qu'on ait :

$$\forall\ t \in I,\quad \forall\ X \in M(t) \setminus \{0\},\quad \sum_i \lambda_i^o <\tilde{a}_i(t).X|X> > 0.$$

En posant $k^o = \sum_i \lambda_i^o c^*.K_i$ et en normalisant (λ^o,k^o), on aboutit à un point de $\Lambda(K,M)$ qui vérifie (N2), grâce à (3). ∎

EXEMPLE 3.

Notons par $C^1(I,\mathbb{R}^p)$ l'espace de Banach des applications continûment différentiables de I dans $\mathbb{R}^p$; la norme étant définie par :

$$\forall h \in C^1(I,\mathbb{R}^p) \qquad ||h|| = ||h||_\infty + ||h'||_\infty .$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$; alors l'ensemble Ω des éléments h de $C^1(I,\mathbb{R}^p)$ vérifiant :

$$\forall t \in I, \qquad (t,h(t),h'(t)) \in U$$

est ouvert ; on supposera que cet ouvert n'est pas vide.

Soient $G_1,\ldots,G_n,F_1,\ldots,F_r$ des applications numériques continues définies sur U ; on cherche à caractériser des points h_0 de Ω en lesquels la fonctionnelle J définie par :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} , \ \forall h \in \Omega, \quad J_i(h) = \int_0^1 G_i(t,h(t),h'(t))dt$$

présenterait un optimum local sur l'ensemble $\Omega_f(h_0)$ des éléments h de Ω vérifiant :

$$\forall j \in \{1,\ldots,r\}, \quad f_j(h) = \int_0^1 F_j(t,h(t),h'(t))dt = f_j(h_0) .$$

Supposons que les G_i et les F_j sont deux fois continûment différentiables en les deux dernières variables ; alors les fonctionnelles J et f sont de classe C^2 avec :

$$\forall h_0 \in \Omega, \forall h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$$

$$\forall i \in\{1,\ldots,n\} \quad DJ_i(h_0).h = \int_0^1 \{<\nabla_2 G_i(t,h_0(t),h_0'(t))|h(t)>+<\nabla_3 G_i(t,h_0(t),h_0'(t))|h'(t)>\}dt$$

et

$$\forall j \in \{1,\dots,r\} \quad Df_j(h_o).h = \int_0^1 \{<\nabla_2 F_j(t,h_o(t),h_o'(t))|h(t)> + <\nabla_3 F_j(t,h_o(t),h_o'(t))|h'(t)>\}dt.$$

Intégrons par parties, il vient :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \forall j \in \{1,\dots,r\}, \quad \forall h_o \in \Omega, \quad \forall h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$$

$$DJ_i(h_o).h = <\int_0^1 \nabla_2 G_i(t,h_o(t),h_o'(t))dt|h(1)> + \int_0^1 <\nabla_3 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)) - \int_0^t \nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau|h'(t)>dt$$

$$Df_j(h_o).h = <\int_0^1 \nabla_2 F_j(t,h_o(t),h_o'(t))|h(1)> + \int_0^1 <\nabla_3 F_j(t,h_o(t),h_o'(t)) - \int_0^t \nabla_2 F_j(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau|h'(t)>dt.$$

On va décrire un couple Hilbertien $\mathbb{E} = (C^1(I,\mathbb{R}^p),E',\Phi)$ relativement auquel les applications J et f seront de classe C^2 :

Soit E' le quotient de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times C^o(I,\mathbb{R}^p)$ par le sous-espace vectoriel fermé $\{(X,-X,X), X \in \mathbb{R}^p\}$, muni de la norme quotient. La forme bilinéaire Φ, qui à l'élément $([X,Y,k];h)$ de $E' \times E$ associe le réel

$$\Phi([X,Y,k];h) = <X|h(0)> + <Y|h(1)> + \int_0^1 <k(t)|h'(t)>dt,$$

est continue et met E' et E en dualité séparante (d'après le lemme fondamental du calcul des variations de Dubois Raymond) ; on notera par $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$ le couple ainsi construit. Il est aisé de vérifier que l'opérateur, qui à $h \in E$ associe l'élément $[h(0),h(1),h']$ de E', est symétrique bijectif et positif ; le couple $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$ est donc Hilbertien, la norme Hilbertienne correspondante est définie par :

$$\forall\, h \in C^1(I,\mathbb{R}^p) \qquad |h|^2 = ||h(0)||^2 + ||h(1)||^2 + ||h'||_2^2 \,.$$

Les expressions des $DJ_i(h_o).h$ et des $Df_j(h_o).h$ montrent que les applications $DJ_1,\dots,DJ_n,Df_1,\dots,Df_r$ se factorisent par les applications $D'J_1,\dots,D'J_n,D'f_1,\dots,D'f_r$, de Ω dans E', définies par :

$$\forall\, h \in \Omega,\quad \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\},\quad \forall\, j \in \{1,\dots,r\}$$

$$D'J_i(h) = \left[0\ ;\ \int_0^1 \nabla_2 G_i(\tau,h(\tau),h'(\tau))d\tau\ ;\ \nabla_3 G_i(.,h(.),h'(.)) - \int_0^{.} \nabla_2 G_i(\tau,h(\tau),h'(\tau))d\tau\right.$$

$$D'f_j(f) = \left[0\ ;\ \int_0^1 \nabla_2 F_j(\tau,h(\tau),h'(\tau))d\tau\ ;\ \nabla_3 F_j(.,h(.),h'(.)) - \int_0^{.} \nabla_2 F_j(\tau,h(\tau),h'(\tau))d\tau\right.$$

$G_1,\dots,G_n,F_1,\dots,F_r$ étant supposées deux foix continûment différentiables en deux dernières variables, les applications $D'J_1,\dots,D'J_n,D'f_1,\dots,D'f_r$ sont de classe C^1 de Ω dans E' ; c'est que J et f sont de classe C^2 relativement à $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$; on en déduit que :

$$\forall\, h_o \in \Omega,\ \forall\, h \in C^1(I,\mathbb{R}^p),\ \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\},\ \forall\, j \in \{1,\dots,r\}$$

$$(*)\quad DD'J_i(h_o).h = \left[0,\ \int_0^1 \{D_2\nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h(\tau) + D_3\nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h'(\tau)\}d\tau\ ;\right.$$

$$D_2\nabla_3 G_i(.,h_o(.),h_o'(.)).h(.) + D_3\nabla_3 G_i(.,h_o(.),h_o'(.)).h'(.) -$$

$$\left.\int_0^{.} \{D_2\nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h(\tau) + D_3\nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h'(\tau)\}d\tau\right]$$

$$DD'f_j(h_o).h = \Big[0 \;;\; \int_0^1 \{<D_2\nabla_2F_j(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h(\tau)+D_3\nabla_2F_j(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h'(\tau)\}d\tau \;;$$

$$D_2\nabla_3F_j(.,h_o(.),h_o'(.)).h(.) + D_3\nabla_3F_j(.,h_o(.),h_o'(.)).h'(.) -$$

$$\int_0^{\cdot} \{<D_2\nabla_2F_j(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h(\tau) + D_3\nabla_2F_j(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h'(\tau)\}d\tau\Big]$$

Les conditions d'application du théorème 2 étant vérifiées, on en déduit que pour que J présente en h_o de Ω un optimum local il est suffisant que la condition (H3) soit vérifiée. Fixons un point h_o de Ω et introduisons les notations suivantes :

- $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}$ $\quad X_i = \int_0^1 \nabla_2G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau$

- $\forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}\ \forall t\in I,\ K_i(t) = \nabla_3G_i(t,h_o(t),h_o'(t))-\int_0^t\nabla_2G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau$

- $\forall\, j \in \{1,2,\dots,r\}$ $\quad Y_j = \int_0^1 \nabla_2F_j(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau$

$\forall\, j \in \{1,\dots,r\},\forall\, t\in I,\ L_j(t) = \nabla_3F_j(t,h_o(t),h_o'(t))-\int_0^t\nabla_2F_j(\tau,h_o(\tau),h'(\tau))d\tau.$

- $\Lambda_o = \Lambda(D'J(h_o),D'f(h_o)) = \{(\lambda,\mu) \in \Lambda_n^r \;\Big|\; \sum_i \lambda_i[0,X_i,K_i] + \sum_i \mu_j[0,Y_j,L_j] = 0\}$

- $\forall i\in\{1,2,\dots,n\},\ \forall\, t \in I \quad a_i(t) = D_3\nabla_3G_i(t,h_o(t),h_o'(t)) = \left(\dfrac{\partial^2G_i}{\partial y_s\partial y_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$

- $\forall\, j \in \{1,2,\dots,r\}$,

$$b_j(t) = D_3\nabla_3F_j(t,h_o(t),h_o'(t)) = \left(\frac{\partial^2F_j}{\partial y_s\partial y_\ell}\,(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$$

on a alors le

Théorème 5.-

Pour qu'en h_o la condition (H3) soit vérifiée il est nécessaire que soit vérifiée la condition (N3) suivante :

(N3). $\exists (\lambda,\mu) \in \Lambda_o : \forall t \in I, \forall Z \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}, \sum_i \lambda_i <a_i(t).Z|Z> + \sum_j \mu_j <b_j(t).Z|Z> > C$

Démonstration :

Notons par W l'orthogonal dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ du sous-espace vectoriel

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \;\Big|\; \sum_i \lambda_i [0,X_i,K_i] + \sum_i \mu_j [0,Y_j,L_j] = 0\}$$

et par Γ l'enveloppe convexe du compact

$$\{M(t,Z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \Big| \overrightarrow{OM(t,Z)} = \sum_1^n <a_i(t).Z|Z>\overrightarrow{e_i} + \sum_1^r <b_j(t).Z|Z>\overrightarrow{e_{n+j}} : t \in I, Z \in \mathbb{R}^p \text{ et } ||Z|| = 1$$

(N3) étant équivalente à $\Gamma \cap (W - C_n) = \emptyset$, le lemme suivant démontre l'implication (H3) $\Longrightarrow$ (N3) :

Lemme.-

Pour que (H3) soit vérifiée, il est nécessaire que Γ ait une intersection vide avec $W - C_n$.

Preuve du lemme :

Il est aisé de vérifier, grâce à une intégration par parties et en remarquant que l'endomorphisme, de $\mathbb{R}^p$, $D_{32}G_i(t,h_o(t),h_o'(t))$ est pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$ et tout $t \in I$ l'adjoint de l'endomorphisme $D_{23}G_i(t,h_o(t),h_o'(t))$, qu'on a :

$\forall\ i \in \{1,2,...,n\}, \forall\ h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$

$$\Phi(DD'J_i(h_o).h,h) = \int_0^1 \{<D_3\nabla_3 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)).h'(t)|h'(t)>$$

$$+ 2<D_2\nabla_3 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)).h(t)|h'(t)>+D_2\nabla_2 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)).h(t)|h(t)>\}dt,$$

de même on obtient :

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,r\},\quad \forall\, h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$$

$$\Phi(DD'f_j(h_o).h,h) = \int_0^1 \{<D_3\nabla_3 F_j(t,h_o(t),h_o'(t)).h'(t)|h'(t)>+2<D_2\nabla_3 F_j(t,h_o(t),h'(t)).h(t)|h'(t)>$$

$$+ <D_2\nabla_2 F_j(t,h_o(t),h_o'(t)).h(t)|h(t)>\}dt.$$

Posons :

. $\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \forall\, t \in I$

$$a_i^1(t) = 2D_2\nabla_3 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)) \cong \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial x_s \partial y_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$$

(s étant l'indice ligne),

$$a_i^2(t) = D_2\nabla_2 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)) \cong \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial x_s \partial x_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)} \quad ;$$

. $\forall\, j \in \{1,\ldots,r\}, \quad \forall\, t \in I$

$$b_j^1(t) = 2D_2\nabla_3 F_j(t,h_o(t),h_o'(t)) \quad \text{et} \quad b_j^2(t) = D_2\nabla_2 F_j(t,h_o(t),h_o'(t))$$

. $\forall\, \nu \in \mathbb{R}^+$

$$E_\nu = \{h \in C^1(I,\mathbb{R}^p) \,|\, \operatorname*{Sup}_i \langle X_i|h(1)\rangle + \int_0^1 \langle K_i|h'\rangle dt \leq \nu|h|,$$

$$\operatorname*{Sup}_j |\langle Y_j|h(1)\rangle + \int_0^1 \langle L_j|h'\rangle dt| \leq \nu|h|\}.$$

(H3) étant vérifiée, il existe [th. 1, ch. I] des nombres $\alpha_0 > 0$, $\nu > 0$ vérifiant :

$\forall\, h \in E_\nu \quad \exists (\lambda,\mu) \in \Lambda_0$:

$$\sum_i \lambda_i \int_0^1 \{\langle a_i h'|h'\rangle + \langle a_i^1 h|h'\rangle + \langle a_i^2 h|h\rangle\}dt + \sum_j \lambda_j \int_0^1 \{\langle b_j h'|h'\rangle + \langle b_j^1 h|h'\rangle + \langle b_j^2 h|h\rangle\}dt \geq \alpha_0 |h|^2 .$$

Supposons que $\Gamma \cap (W - C_n)$ est non vide. Il existe alors des nombres $\alpha_1 > 0,\dots,\alpha_m > 0$ vérifiant $\sum_s \alpha_s = 1$, des points $t_1,\dots,t_m$ de I, des vecteurs $Z_1,\dots,Z_m$ de $\mathbb{R}^p$ tous de norme 1 et un vecteur $w \in W$ tels qu'on ait :

. $\forall\, i \in \{1,\dots,n\} \qquad w_i + \sum_{s=1}^m \alpha_s \langle a_i(t_s).Z_s|Z_s\rangle \leq 0$

. $\forall\, j \in \{1,\dots,r\} \qquad w_{n+j} + \sum_{s=1}^m \alpha_s \langle b_j(t_s).Z_s|Z_s\rangle = 0.$

Soit $\alpha > 0$ quelconque. Il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour avoir :

• $2\varepsilon \leq \operatorname{Inf}\{|t_s - t_\ell|,\ t_s \neq t_\ell\}$

et • $\sqrt{2m\varepsilon}\ \operatorname{Sup}\{||K_1||_\infty;\dots;||K_n||_\infty\ ;\ ||L_1||_\infty,\dots,||L_r||_\infty\} \leq \nu$

et des intervalles $I_1,\dots,I_m$ d'intérieurs, deux à deux, disjoints (qu'on supposera ordonnés dans l'ordre croissant) tels qu'on ait :

. $\text{mes}\left[\bigcup_s I_s\right] \leqslant 2m\varepsilon$,

. $\forall (x_1,\dots,x_m) \in I_1 \times \dots \times I_m$

(A^1) $\quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\} \quad w_i + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle a_i(x_s).Z_s | Z_s\rangle < \alpha$

(A^2) $\quad \forall\, j \in \{1,\dots,r\} \quad \left| w_{n+j} + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \langle b_j(x_s).Z_s | Z_s\rangle \right| < \alpha.$

Choisissons m applications numériques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall\, s \in \{1,\dots,m\} \ : \ \text{Supp}(\theta_s) \subset I_s \ , \quad \|\theta_s'\|_2^2 = \alpha_s \ ,$$

et posons : $\qquad h = \sum_s \theta_s.Z_s$

(On notera que h est nulle en 0 et en 1).

h est alors un élément, de norme 1, de E_ν ; en effet, on a :

• $\sup_i \langle X_i | h(1)\rangle + \int_0^1 \langle K_i | h'\rangle dt = \sup_i \int_0^1 \langle K_i | h'\rangle dt \leqslant \sup \|K_i\| . \text{mes}\left[\text{Supp}(h)\right]^{\frac{1}{2}} . \|h'\|_2$

$$\leqslant \sqrt{2m\varepsilon}\, \sup_i \|K_i\| . \|h'\|_2 \leqslant \nu \|h'\|_2 = \nu |h|$$

• $\sup_j |\langle Y_j | h(1)\rangle + \int_0^1 \langle L_j | h'\rangle dt| \leqslant \sqrt{2m\varepsilon}\, \sup_j \|L_j\| \cdot \|h'\|_2 \leqslant \nu \|h'\|_2 = \nu |h|$,

et . $|h|^2 = \|h'\|_2^2 = \sum_s \|\theta_s'\|_2^2 = \sum_s \alpha_s = 1.$

Il existe donc, par hypothèse, un point $(\lambda^o,\mu^o) \in \Lambda_o$ tel qu'on ait :

$$(1) \quad \sum_i \lambda_i^o \int_2^1 \{<a_i h'|h'> + <a_i^1 h|h'> + <a_i^2 h|h>\}dt + \sum_j \mu_j^o \int_0^1 \{<b_j h'|h'> + <b_j^1 h|h'> + <b_j^2 h|h>\}dt$$

Multiplions toutes les inégalités de (A^1) par $\prod_s \theta_s'(x_s)^2$ et intégrons sur le pavé $\prod_s I_s$, il vient :

$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$

$$\int_{\prod_s I_s} \prod_\ell \theta_\ell'(x_\ell)^2.\{w_i + \sum_s \alpha_s <a_i(x_s).Z_s|Z_s>\}dx_1\dots dx_m$$

$$= w_i \int_{\prod_s I_s} \prod_s \theta_s'(x_s)^2 dx_1\dots dx_m + \sum_s \alpha_s \int_{\prod_\ell I_\ell} \left[\prod_{\ell\neq s} \theta_\ell'(x_\ell)^2\right].<a_i(x_s).\theta_s'(x_s).Z_s \Big| \theta_s'(x_s).Z_s>dx_1\dots$$

$$= w_i \prod_s ||\theta_s'||_2^2 + \sum_s \alpha_s \prod_{\ell\neq s} ||\theta_\ell'||_2^2 \int_{I_s} <a_i(x).h'(x)|h'(x)>dx$$

$$= \prod_s ||\theta_s'||_2^2.\left[w_i + \sum_s \int_{I_s} <a_i h'|h'>dx\right] = \prod_s ||\theta_s'||_2^2.\left[w_i + \int_0^1 <a_i h'|h'>dx\right] \leq \alpha \prod_s ||\theta_s'||_2^2 .$$

On en déduit alors qu'on a :

$$(2) \qquad \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\} \qquad w_i + \int_0^1 <a_i h'|h'>dx \leq \alpha$$

De même, en utilisant (A^2), on obtient :

$$(2') \qquad \forall\, j \in \{1,2,\dots,r\} \qquad \left|w_{n+j} + \int_0^1 <b_j.h'|h'>dx\right| \leq \alpha.$$

D'autre part, en utilisant la majoration :

$$\forall\ t \in I,\ ||h(t)|| = \left|\left|\int_0^t h'(\tau)d\tau\right|\right| \leqslant \int_0^t ||h'(\tau)||d\tau \leqslant \text{mes}\left[\text{Supp}(h)\right]^{\frac{1}{2}} ||h'||_2 = \sqrt{2\varepsilon m}$$

il vient :

$$(3)\quad \forall\ i \in \{1,\dots,n\}\ \int_0^1 \langle a_i^1 h|h'\rangle dt + \int_0^1 \langle a_i^2 h|h\rangle dt \leqslant 2m\varepsilon ||a_i^1||_\infty + 2m\varepsilon ||a_i^2||_\infty \leqslant 2m\varepsilon \ \underset{k}{\text{Sup}}(||a_k^1||_\infty + ||a_k^2||_\infty).$$

et de même

$$(3')\ \forall\ j \in \{1,\dots,r\}\quad \left|\int_0^1 \langle b_j^1 h|h'\rangle dt + \int_0^1 \langle b_j^2 h|h\rangle dt\right| \leqslant 2m\varepsilon\ \underset{\ell}{\text{Sup}}(||b_\ell^1||_\infty + ||b_\ell^2||_\infty).$$

Sachant que (λ^o,μ^o) vérifie, par définition de Λ_o

$$\sum_i \lambda_i + \sum_j |\mu_j| = 1$$

et par construction de W

$$\sum_i \lambda_i w_i + \sum_j \mu_j . w_{n+j} = 0$$

en utilisant (2), (2'), (3) et (3)', il vient :

$$(4)\quad \sum_i \lambda_i^o \int_o^1 \{\langle a_i h'|h'\rangle + \langle a_i^1 h|h'\rangle + \langle a_i^2 h|h'\rangle\} dt + \sum_j \mu_j^o \int_o^1 \{\langle b_j h'|h'\rangle + \langle b_j^1 h|h'\rangle + \langle b_j^2 h|h\rangle\} dt$$

$$\leqslant \left(\sum_i \lambda_i^o\right) . \left[\alpha + 2m\varepsilon \underset{k}{\text{Sup}} ||a_k^1||_\infty + ||a_k^2||_\infty)\right] + \sum_j |\mu_j^o| \left[\left|\int_0^1 \{\langle b_j h'|h'\rangle + \langle b_j^1 h|h'\rangle + \langle b_j^2 h|h\rangle\} dt\right|\right]$$

$$\leqslant \left(\sum_i \lambda_i^o\right) . \left[\alpha + 2m\varepsilon \underset{k}{\text{Sup}}(||a_k^1||_\infty + ||a_k^2||_\infty)\right] + \left(\sum_j |\mu_j^o|\right) \left[\alpha + 2m\varepsilon\ \underset{\ell}{\text{Sup}}(||b_\ell^1||_\infty + ||b_\ell^2||_\infty)\right]$$

$$\leqslant \alpha + 2m\varepsilon\gamma$$

où on a posé :

$$\gamma = \mathrm{Sup}\{||a_1^1||_\infty+||a_1^2||_\infty;\ldots;||a_n^1||_\infty+||a_n^2||_\infty;||b_1^1||_\infty+||b_1^2||_\infty,\ldots,||b_r^1||_\infty+||b_r^2||_\infty$$

Comparant (1) et (4), on aboutit à $\alpha_0 \leqslant \alpha + 2m\gamma\varepsilon$; ce qui est absurde, car $\alpha_0 > 0$ et α arbitraire. D'où le lemme et alors le théorème.

EXEMPLE 4.

Reprenons la fonctionnelle $J = (J_1,..,J_n)$ de l'exemple 3. Soit $\mathcal{U}_0$ un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$; alors l'ensemble

$$\Omega_0 = \{h \in \Omega | (h(0),h(1)) \in \mathcal{U}_0\}$$

est un ouvert (qu'on supposera non vide).

Soit f l'application définie, sur Ω_0 et valeurs dans $\mathbb{R}^m \times C^0(I,\mathbb{R}^q)$, par :

$$\forall\, h \in \Omega_0 \ , \quad f(h) = (F_0(h(0),h(1)),F(.,h(.),h'(.))) \overset{\text{Déf}}{\equiv} (\omega_0(h),\omega_F(h))$$

où F_0 est une application définie sur $\mathcal{U}_0$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et $F = (F_1,\ldots,F_q)$ une application continue définie sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

Notons par Σ la partie de Ω_0 définie par :

$$\Sigma = \{h \in \Omega_0 | f(h) = 0\}.$$

On cherche, dans cet exemple, à caractériser des points h_0 de Σ en lesquels J présenterait un optimum local sur Σ.

Lemme 1.-

Si F_0 est de classe C^2 et F de classe C^2 en les deux dernières variables, alors f est de classe C^2 relativement à $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$ et $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^0(I,\mathbb{R}^q)$.

En effet, ω_0 étant la composée de F_0 et de la restriction à

Ω_o de l'application linéaire, qui à $h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$ associe $(h(0),h(1)) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$; cette dernière étant C^∞ relativement aux couples $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ puisqu'elle se factorise en un morphisme de couples par l'application qui à $(X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ associe $[X,Y,0]$, on en déduit que ω_o est C^2 relativement à $C^1(I,\mathbb{R}^p)$ et $\mathbb{R}^m$. De même ω_F s'obtient en composant l'application, qui à l'élément (k_1,k_2) de $C^o(I,\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ associe l'élément $F(.,k_1(.),k_2(.))$ de $C^o(I,\mathbb{R}^q)$, qui est de classe C^2 relativement à $C^o(I,\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ et $C^o(I,\mathbb{R}^q)$ (cf. exemple 2) et l'application linéaire qui à $h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$ associe l'élément $(h,\nabla h)$ de $C^o(I,\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$; cette dernière se factorisant en un morphisme de couples par l'application qui à $(k_1,k_2) \in C^o(I,\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ associe l'élément

$$\left[0 \; ; \int_2^1 k_1(\tau)d\tau \; ; k_2(.) - \int_2^{\cdot} k_1(\tau)d\tau\right]$$

on en déduit que ω_F est C^2 relativement à $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$ et $\mathbb{C}^o(I,\mathbb{R}^q)$ et que :

. $\forall h_o \in \Omega_o \quad , \forall h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$

$$Df(h_o).h = (D\omega_o(h_o).h \; ; D\omega_F(h_o).h) =$$

$$(D_1F_o(h_o(0),h_o(1)).h(0)+D_2F_o(h_o(0),h_o(1)).h(1),D_2F(.,h_o(.),h_o'(.)).h(.)+D_3F(.,h_o(.),h_o'(.)).h'(.))$$

. $\forall h \in \Omega_o, \qquad \forall (z,k) \in \mathbb{R}^m \times C^o(I,\mathbb{R}^q)$

$$D'f(h).(z,k) = D'\omega_o(h).z + D'\omega_F(h).k$$

où : $D'\omega_o(h).z = [D_1F_o(h(0),h(1))^*.z, D_2F_o(h(0),h(1))^*.z, 0]$ et

$$D'\omega_F(h).k = \left[0, \int_0^1 D_2F(\tau,h(\tau),h'(\tau))^*.k(\tau)d\tau, D_3F(.,h(.),h'(.))^*.k(.)-\int_0^{.} D_2F(\tau,h(\tau),h'(\tau))^*.k(\tau)d\tau\right].$$

On supposera donc, dans la suite, que F_0 est de classe C^2 et que G et F sont de classe C^2 en les deux dernières variables.

On va donner une condition suffisante pour qu'en h_0 de Ω_0, les conditions (H1) et (H2) du théorème 2 soient vérifiées.

On dira qu'en h_0 la condition $(\mathcal{R})$ est vérifiée, s'il existe une application C continue de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ telle qu'on ait :

$$\forall t \in I, \qquad D_3F(t,h_0(t),h_0'(t)) \circ C(t) = 1_{\mathbb{R}^q} .$$

Remarques :

1) Pour qu'en h_0 la condition $(\mathcal{R})$ soit vérifiée, il est nécessaire et suffisant que pour tout t de I l'application linéaire $D_3F(t,h_0(t),h_0'(t))$ soit surjective.

2) $(\mathcal{R})$ sera vérifiée en tout point h_0 de Ω_0 si la condition, suivante, ne portant que sur F, est vérifiée :

. Pour tout $(t,x,y) \in \mathcal{U}$ vérifiant $F(t,x,y) = 0$, $D_3F(t,x,y)$ est surjective. ∎

Lemme 2.-

Soit $h_0 \in \Omega_0$. Si en h_0 la condition $(\mathcal{R})$ est vérifiée alors le morphisme $\delta\omega_F(h_0)$ admet une section.

Preuve : Notons par $R(\tau,t)$ la résolvante de l'équation

$$h' + C \circ D_2F(.,h_o(.),h_o'(.)).h = 0$$

c'est-à-dire que, pour tout $t \in I$, $R(.,t)$ est la solution de

$$\begin{cases} R'(\tau) + C(\tau) \circ D_2F(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)) \circ R(\tau) = 0 & \forall \tau \in I, \\ R(t) = 1_{\mathbb{R}^p}. \end{cases}$$

Toute solution de $h' + C \circ D_2F(.,h_o(.),h_o'(.)).h = C.k$ étant aussi, de façon évidente, solution de $D_3F(.h_o(.),h_o'(.)).h'+D_2F(.,h_o(.),h_o'(.)).h = k$, l'application linéaire s définie par :

$$\forall k \in C^0(I,\mathbb{R}^q),\ \forall t \in I,\ (s.k)(t) = \int_0^t R(t,\tau) \circ C(\tau).k(\tau)d\tau$$

est une section continue pour $D\omega_F(h_o)$. On vérifie que s se factorise en un morphisme de $\mathbb{C}^0(I,\mathbb{R}^q)$ dans $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^p)$ par l'application linéaire s' définie par :

$$\forall t \in I, \forall [X,Y,\ell] \in C^1(I,\mathbb{R}^p)',\quad s'.[X,Y,\ell](t) = C^*(t).\left[R(1,t)^*.Y+\int_t^1 D_1R(\tau,t)^*.\ell(\tau)d\tau\right] \blacksquare$$

Plaçons-nous en un point h_o dans lequel la condition $(\mathcal{R})$ est vérifiée. Le lemme suivant, qui se trouve démontré dans [5], implique qu'en h_o la condition (H2) du théorème 2 est vérifiée (la condition (H1) est vérifiée de façon évidente) :

Lemme 2.-

Soit $U = (U_0,U_1)$ un morphisme d'un couple $\mathbb{E}$ dans un couple produit $\mathbb{F}_0 \times \mathbb{F}_1$. Si $\mathbb{F}_0$ est de dimension finie et si U_1 admet une section alors U admet une quasi-section.

Il suffit donc, pour que J présente en h_o un optimum local sur $\sum$, que la condition (H3) soit vérifiée.

Explicitons l'expression de $DD'f(h_o).((z,k),h) = DD'\omega_o(h_o).(z,h)+DD'\omega_F(h_o)(k,h)$:

$$. \ DD'\omega_o(h_o).(z,h) = \Big[(D_{11}F_o(h_o(0),h_o(1)).h(0) + D_{21}F_o(h_o(0),h_o(1)))^*.z,$$
$$(D_{12}F_o(h_o(0),h_o(1)).h(0)+D_{22}F_o(h_o(0),h_o(1)).h(1))^*.z,0\Big]$$

(où D_{ij} désigne la dérivation D_i o D_j).

$$. \ DD'\omega_F(h_o).(k,h) = \Big[0;\int_0^1 (D_{22}F(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h(\tau)+D_{32}F(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h'(\tau))^*.k(\tau)d\tau \ ;$$
$$(D_{23}F(.,h_o(.),h_o'(.)).h(.) + D_{33}F(.,h_o(.),h_o'(.)).h'(.))^*.k(.) -$$
$$- \int_0^{\cdot} (D_{22}F(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h(\tau) + D_{32}F(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau)).h'(\tau))^*.k(\tau)d\tau\Big].$$

Si on note par Q l'application bilinéaire qui à $(X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ associe l'élément de $\mathbb{R}^m$:

$$D_{11}F_o(h_o(0),h_o(1)).(X,Y) + 2D_{12}F_o(h_o(0),h_o(1)).(X,Y) + D_{22}F_o(h_o(0),h_o(1)).(Y,Y)$$

et, si on pose : $\forall \ j \in \{1,2,\ldots,q\}$, $\forall \ t \in I$

$$b_j(t) = D_{33}F_j(t,h_o(t),h_o'(t)) = \left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial y_s \partial y_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$$

$$b_j^1(t) = 2D_{23}F_j(t,h_o(t),h_o'(t)) = \left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_s \partial y_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$$

$$\text{et} \quad b_j^2(t) = D_{22}F_j(t,h_o(t),h_o'(t)) = \left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_s \partial x_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$$

il vient : $\forall h \in C^1(I,\mathbb{R}^p)$, $\forall (z,k) \in \mathbb{R}^m \times C^0(I,\mathbb{R}^q)$

$$\Phi(DD'f(h_o).(z,k).h,h) = \langle z|Q(h(0),h(1))\rangle + \sum_{j=1}^{q}\int_0^1 k_j\left[\langle b_j h'|h'\rangle + \langle b_j h|h'\rangle + \langle b_j h|h\rangle\right]dt .$$

<u>Notations</u> :

. $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\forall t \in I$

$$a_i(t) = \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial y_s \partial y_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)} , \quad a_i^1(t) = 2\left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial x_s \partial y_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$$

et $a_i^2(t) = \left(\dfrac{\partial^2 G_i}{\partial x_s \partial x_\ell}(t,h_o(t),h_o'(t))\right)_{(s,\ell)}$

$$K_i(t) = \nabla_3 G_i(t,h_o(t),h_o'(t)) - \int_0^t \nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau$$

. $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ $\quad X_i = \int_0^1 \nabla_2 G_i(\tau,h_o(\tau),h_o'(\tau))d\tau$

. $\xi_1 = D_1F_o(h_o(0),h_o(1))$, $\quad \xi_2 = D_2F_o(h_o(0),h_o(1))$

$$(\xi_1,\xi_2 \in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^m))$$

. $\forall t \in I$, $A(t) = D_3F(t,h_o(t),h_o'(t))$, $B(t) = D_2F(t,h_o(t),h_o'(t))$

$$(A,B \in C^0(I,L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q))).$$

$$\cdot\ \Lambda = \{(\lambda,z,k) \in C_n\times\mathbb{R}^m\times C^0(I,\mathbb{R}^q)\,\Big|\,\sum_i \lambda_i\left[0,X_i,K_i\right] = \left[\xi_1^*.z,\xi_2^*.z,0\right]+\left[0,\int_0^1 B^*.kdt,A(.)^*.k(.) - \int_0^{\cdot} B^*.kdt\right],\ ||z|| + ||k|| + \sum_i \lambda_i = 1\}$$

La condition suffisante s'écrit alors :

(H3) $\exists \alpha > 0,\ \forall h \in C^1(I,\mathbb{R}^p),\ \operatorname{Sup}_i(\langle X_i|h(1)\rangle + \int_0^1 \langle K_i|h'\rangle dt) \leqslant 0,$

$$\xi_1.h(0) + \xi_2.h(1) = 0, \quad A.h' + B.h = 0,$$

$$\exists (\lambda,z,k) \in \Lambda : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 (\langle a_i h'|h'\rangle + \langle a_i^1 h|h'\rangle + \langle a_i^2 h|h\rangle)dt - \langle z|Q(h(0),h(1))\rangle$$

$$- \sum_{j=1}^{q} \int_0^1 k_j(\langle b_j h'|h'\rangle + \langle b_j^1 h|h'\rangle + \langle b_j^2 h|h\rangle)dt \geqslant \alpha(||h(0)||^2 + ||h(1)||^2 + ||h'||_2^2).$$

Rappelons un résultat classique (la condition de Klebsch) : pour qu'une forme quadratique de la forme

$$Q(h(0),h(1)) + \int_0^1 (\langle ah'|h'\rangle + \langle b_1 h|h'\rangle + \langle b_2 h|h\rangle)dt$$

soit coercive sur le sous-espace vectoriel de $C^1(I,\mathbb{R}^p)$ défini par :

$$\begin{cases} \xi_1.h(0) + \xi_2.h(1) = 0 & (\xi_1,\xi_2 \in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^m)) \\ A.h' + B.h = 0 & (A,B \in C^0(I,L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q))) \end{cases}$$

tel que $A(t)$ soit surjectif pour tout t, il est nécessaire que pour tout t la forme quadratique définie par $a(t)$ soit strictement positive sur $\operatorname{Ker} A(t)$.

Le résultat qui va suivre en est une généralisation.

<u>Théorème</u> 6.-

Pour qu'en h_o la condition (H3) soit vérifiée, il est nécessaire que la condition (N4) suivante soit vérifiée :

(N4) $\exists (\lambda,z,k) \in \Lambda, \forall t \in I, \forall X \in \operatorname{Ker} A(t) \setminus \{0\},\ \sum_i \lambda_i \langle a_i(t)X|X\rangle - \sum_j k_j(t)\langle b_j(t)X|X\rangle > 0.$

Démonstration :

Posons pour tout $\nu \in \mathbb{R}^+$

$$E_\nu = \{h \in C^1(I,\mathbb{R}^p) \Big| \operatorname*{Sup}_i \Phi(D'J_i(h_o),h) \leqslant \nu|h|, |Df(h_o).h| \leqslant \nu|h|$$

$$= \{h \in C^1(I,\mathbb{R}^p) | \operatorname*{Sup}_i(<X_i|h(1)>+\int_0^1 <K_i|h'>dt) \leqslant \nu|h|, ||\xi_1 h(0)+\xi_2 h(1)||^2+\int_0^1 ||Ah'+Bh||^2 dt \leqslant \nu^2|h|^2\}.$$

(H3) étant vérifiée, il existe un nombre $\alpha > 0$ vérifiant :

$$(S_0^\alpha) \quad \forall\, h \in E_0, \ \exists (\lambda,z,k) \in \Lambda : \sum_i \lambda_i \Phi(DD'J_i(h_o).h,h) - \Phi(DD'f(h_o).(k,h),h) \geqslant \alpha|h|^2 .$$

Première étape :

On va démontrer le résultat en faisant une hypothèse supplémentaire : On suppose que pour tout $h \in E_0$ un des points $(\lambda,z,k) \in \Lambda$ qui lui sont associés par (S_0^α) est tel que $k \in C^0(I,\mathbb{R}^q)$ soit constante.

D'après le théorème 1 [Ch. I], il existe des nombres $\alpha_o > 0$ et $\nu_o > 0$ vérifiant :

$$(S_{\nu_o}^{\alpha_o}) \quad \forall\, h \in E_{\nu_o}, \ \exists\, \lambda \in C_n, \ \exists\, z \in \mathbb{R}^m, \ \exists\, \mu \in \mathbb{R}^q, \ (\lambda,z,\mu) \in \Lambda,$$

$$-<z|Q(h(0),h(1))> + \sum_i \lambda_i \int_0^1 (<a_i h|h> + <a_i^1 h|h'> + <a_i^2 h|h>)dt - \sum_j \mu_j \int_0^1 (<b_j h'|h'> + <b_j^1 h|h'> + <b_j^2 h|h>)dt$$
$$\geqslant \alpha_o|h|^2.$$

Notons W l'orthogonal dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ du sous-espace vectoriel

$$\{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \mid \exists\, z \in \mathbb{R}^m, \ \sum_i \lambda_i D'J_i(h_o) = D'\omega_o(h_o).z + D'\omega_F(h_o).\mu\}$$

et Γ l'enveloppe convexe du compact

$$\{M(t,X)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q \mid \vec{OM}(t,X) = \sum_i \langle a_i(t)X|X\rangle \vec{e_i} + \sum_i \langle b_j(t)X|X\rangle \overrightarrow{e_{n+j}} \;;\; t\in I,\ X\in \mathrm{Ker}\ A(t) \text{ et } ||X|| = 1\}.$$

(N4) étant équivalente à $\Gamma \cap (W - C_n^q) = \emptyset$, C_n^q désignant le cône $C_n\times\{0_{\mathbb{R}^q}\}$ de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q$, le lemme qui va suivre démontre que (H3) implique (N4).

Lemme 3.-

$\Gamma \cap (W - C_n^q) = \emptyset$.

Preuve *(par l'absurde)* :

Supposons qu'il existe des nombres $\alpha_1 > 0,\dots,\alpha_r > 0$ vérifient $\sum \alpha_\ell = 1$, des points $t_1,\dots,t_r \in I$, des vecteurs $X_1 \in \mathrm{Ker}\ A(t_1),\dots,X_r \in \mathrm{Ker}\ A(t_r)$ tous de norme 1 et un vecteur $(W^1,W^2)\in W$ tels qu'on ait :

. $\forall\ i \in \{1,\dots,n\}$ $\quad W_i^1 + \sum_\ell \alpha_\ell\langle a_i(t_\ell).X_\ell|X_\ell\rangle \leqslant 0$

. $\forall\ j \in \{1,\dots,q\}$ $\quad W_j^2 + \sum \alpha_\ell\langle b_j(t_\ell).X_\ell|X\rangle = 0.$

Soient $\alpha > 0$ et $\nu_1 > 0$ vérifiant $\nu_1^2 < \nu_0$. Par une construction identique à celle de l'exemple 1, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ et des intervalles $I_1,\dots,I_r$ d'intérieur deux-à-deux disjoints tels qu'on ait :

. $\mathrm{mes}\left[\bigcup_\ell I_\ell\right] \leqslant 2r\varepsilon$, $\sqrt{2r\varepsilon}\ \mathrm{Sup}_i ||K_i|| \leqslant \nu_0$, $4||B||_\infty\varepsilon^2 + 4\varepsilon\nu_1||B||_\infty + \nu_1^2 \leqslant \nu_0$.

. (A) $\forall\ \ell \in \{1,\dots,r\}$, $\forall\ t \in I_\ell$, $||A(t).X_\ell|| < \nu_1$

. (A^1) $\forall\ i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall\ (x_1,\dots,x_r)\in \prod_1^r I_\ell$, $W_i^1 + \sum_\ell \alpha_\ell\langle a_i(x_\ell).X_\ell|X_\ell\rangle < \alpha$

. (A^2) $\forall\ j \in \{1,\dots,q\}$, $\forall\ (x_1,\dots,x_r)\in \prod_1^r I_\ell$, $\left|W_j^2 + \sum_\ell \alpha_\ell\langle b_j(x_\ell).X_\ell|X_\ell\rangle\right| < \alpha.$

Soit $(\theta_1,\ldots,\theta_r)$ une famille d'applications numériques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall \ell \in \{1,\ldots,r\} \qquad \mathrm{Supp}(\theta_\ell) \subset I_\ell, \quad |\theta_\ell|^2 = ||\theta'_\ell||_2^2 = \alpha_\ell \quad ;$$

et posons : $h = \sum_\ell \theta_\ell . X_\ell$. Alors h est un élément, de norme 1, de E_{ν_0} : la vérification du fait qu'on a :

$$|h| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_i(<X_i|h(1)> + \int_0^1 <K_i|h'>dt) \leq \nu_0$$

étant la même qu'à l'exemple 3, vérifions qu'on a $||Ah' + Bh||_2 \leq \nu_0$: $(h(0) = h(1) = 0)$

$$\int_0^1 ||Ah' + Bh||^2 d = \sum_\ell \int_{I_\ell} ||A(x)\theta'_\ell(x).X_\ell + B(x).\theta_\ell(x).X_\ell||^2 dx$$

$$= \sum_\ell \int_{I_\ell} (\theta'_\ell(x)^2 ||A(x).X_\ell||^2 + 2\theta_\ell(x)\theta'_\ell(x)||A(x).X_\ell|| \, ||B(x).X_\ell|| + \theta_\ell(x)^2 ||B(x).X_\ell||^2)dx$$

$$\leq \sum_\ell (\nu_1^2 ||\theta'_\ell||_2^2 + 2||\theta_\ell||_\infty \sqrt{2\varepsilon} ||\theta'_\ell||_2 \nu_1 ||B||_\infty + ||B||_\infty ||\theta_\ell||_\infty^2 . 2\varepsilon) \quad \text{(d'après (A))}$$

$$\leq \sum_\ell (\nu_1^2 \alpha_\ell + 2\sqrt{2\varepsilon}\, ||\theta'_\ell||_2 \sqrt{2\varepsilon}\, ||\theta'_\ell||_2 \nu_1 ||B||_\infty + 2\varepsilon ||B||_\infty 2\varepsilon ||\theta'_\ell||_2^2)$$

$$= \sum_\ell (\nu_1^2 \alpha_\ell + 4\varepsilon\alpha_\ell ||B||_\infty \nu_1 + 4\varepsilon^2 ||B||_\infty \alpha_\ell) = \nu_1^2 + 4\varepsilon\nu_1 ||B||_\infty + 4\varepsilon^2 ||B||_\infty \leq \nu_0 .$$

Il existe donc, par $(S_{\nu_0}^{\alpha_0})$, un point $(\lambda^0, z^0, \mu^0) \in \Lambda$ vérifiant :

$$(1) \ \sum_i \lambda_i^0 \int_0^1 (<a_i h'|h'> + <a_i^1 h|h'> + <a_i^2 h|h>)dt - \sum_j \mu_j^0 \int_0^1 (<b_j h'|h'> + <b_j^1 h|h'> + <b_j^2 h|h>)dt \geq \alpha_0 .$$

Multiplions toutes les inégalités de (A^1) par $\prod_\ell \theta'_\ell(x_\ell)^2$ et intégrons sur le pavé $\prod_\ell I_\ell$, il vient :

$$\text{(I)} \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,n\} \qquad W_i^1 + \int_0^1 \langle a_i h' | h' \rangle dt \leqslant \alpha$$

De même, en utilisant (A^2), on obtient :

$$\text{(II)} \qquad \forall\, j \in \{1,\dots,q\} \qquad \left| W_j^2 + \int_0^1 \langle b_j h' | h' \rangle dt \right| \leqslant \alpha$$

et on a les majorations suivantes :

(I)' $\forall\, i \in \{1,\dots,n\}$

$$\int_0^1 \langle a_i^1 h | h' \rangle dt \leqslant \int_0^1 ||a_i^1(t)||\,||h(t)||\,||h'(t)||dt \leqslant ||a_i^1||_\infty ||h||_\infty \int_0^1 ||h'(t)||dt$$

$$\leqslant ||a_i^1||_\infty \sqrt{2r\varepsilon}\, ||h'||_2 \sqrt{2r\varepsilon}\, ||h'||_2 = 2r\varepsilon ||a_i^1||_\infty$$

et $\int_0^1 \langle a_i^2 h | h \rangle dt \leqslant 2r\varepsilon ||a_i^2||_\infty$.

(II)' $\forall\, j \in \{1,\dots,q\}$

$$\left| \int_0^1 \langle b_j^1 h | h' \rangle dt \right| \leqslant 2r\varepsilon ||b_j^1||_\infty , \qquad \left| \int_0^1 \langle b_j^2 h | h \rangle dt \right| \leqslant 2r\varepsilon ||b_j^2||_\infty .$$

De (I) et (I)', on obtient :

$$\text{(i)} \quad \sum_i \lambda_i^o W_i^1 + \sum_i \lambda_i^o \int_0^1 (\langle a_i h' | h' \rangle + \langle a_i^1 h | h' \rangle + \langle a_i^2 h | h \rangle) dt \leqslant \left[\alpha + 2r\varepsilon \operatorname{Max}_k (||a_k^1|| + ||a_k^2||) \right] . \sum_i \lambda_i^o$$

et de (II) et (II)' :

$$\text{(ii)} \quad \sum_j \mu_j^o W_j^2 + \sum_j \mu_j^o \int_0^1 (\langle b_j h' | h' \rangle + \langle b_j^1 h | h' \rangle + \langle b_j^2 h | h \rangle) dt \leqslant \left[\alpha + 2r\varepsilon \operatorname{Max}_k (||b_k^1|| + ||b_k^2||) \right] . \sum_j |\mu_j^o|$$

Sachant que $\sum_i \lambda_i^o W_i^1 - \sum_j \mu_j^o W_j^2 = 0$, de (i) et (ii), il vient :

$$(2)\quad \sum_i \lambda_i^o \int_0^1 (<a_i h'|h'>+<a_i^1 h|h'>+<a_i^2 h|h>)dt - \sum_j \mu_j^o \int_0^1 (<b_j h'|h'>+<b_j^1 h|h'>+<b_j^2 h|h>)dt$$

$$\leqslant \left[\alpha + 2r\varepsilon \mathrm{Max}\{||a_1^1||+||a_1^2||,\dots,||a_n^1||+||a_n^2||,||b_1^1||+||b_1^2||,\dots,||b_r^1||+||b_r^2||\}\right].$$

Comparant (1) et (2), on aboutit à

$$\alpha_0 \leqslant \alpha + 2r\varepsilon \mathrm{Max}\{||a_1^1||+||a_1^2||,\dots,||a_n^1||+||a_n^2||,||b_1^1||+||b_1^2||,\dots,||b_r^1||+||b_r^2||\}$$

α étant arbitraire et $\alpha_0 > 0$; ce qui est absurde.

Deuxième étape *(Cas général)*.

Soit h un point quelconque de E_0 et (λ,z,k) un point de Λ qui lui est associé par $(S_0^{\alpha_0})$. (s,s') étant une section pour $\delta\omega_F(h_0)$, λ, z et k sont liés par :

$$\sum_i \lambda_i \; s'.D'J_i(h_0) = s'.D'\omega_0(h_0).z + k.$$

Il vient alors que :

$$\Phi(DD'\omega_F(h_0).(k,h),h) = \sum_j \int_0^1 (\sum_i \lambda_i s'.D'J_i(h_0))_j.L_j(h)dt - \int_0^1 <s'.D'\omega_0(h_0).z|L(h)>dt$$

$$= \sum_i \lambda_i \int_0^1 \sum_j (s'.D'J_i(h_0))_j.L_j(h)dt - \int_0^1 <z|(s'.D'\omega_0(h_0(t))^*.L(h)(t)>dt$$

où on a posé :

$\forall\, t \in I, \forall\, j \in \{1,\dots,q\}$

$$L_j(h)(t) = <b_j(t).h'(t)|h'(t)> + <b_j^1(t)h(t)|h'(t)> + <b_j^2(t)h(t)|h(t)>,$$

et si on pose :

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\} \qquad \overline{a_i} = a_i - \sum_j (s'.D'J_i(h_o))_j . b_j$$

$$\overline{a_i^1} = a_i^1 - \sum_j (s'.D'J_i(h_o))_j . b_j^1$$

$$\overline{a_i^2} = a_i^2 - \sum_j (s'.D'J_i(h_o))_j . b_j^2$$

$\forall\, r \in \{1,\dots,m\}$

$$\overline{b_r} = - \sum_j (s'.D'\omega_o(h_o))_{jr} . b_j = - \sum_j (\xi_2 \circ R(1,.) \circ C(.))_{jr} . b_j \ ,$$

$$\overline{b_r^1} = - \sum_j (s'.D'\omega_o(h_o))_{jr} . b_j^1 \quad \text{et} \quad \overline{b_r^2} = - \sum_j (s'.D'\omega_o(h_o))_{jr} . b_j^2$$

on aura :

$$- Q(h(0),h(1)) + \sum_i \lambda_i \int_0^1 (<\overline{a}_i h'|h'> + <\overline{a_i^1} h|h'> + <\overline{a_i^2} h|h>)\,dt - \sum_r z_r \int_0^1 (<\overline{b}_r h'|h'> + <\overline{b_r^1} h|h'> + <\overline{b_r^2} h|h>)\,dt \geq \alpha_o |h|^2 .$$

λ et z ne pouvant être tous les deux nuls, si on pose :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{||z|| + \sum_i \lambda_i} \qquad \text{et} \qquad \bar{z} = \frac{1}{||z|| + \sum_i \lambda_i} . z$$

$\bar{\lambda}$ et $\bar{z}$ vérifient :

(1) $\quad ||\bar{z}|| + \sum_i \bar{\lambda}_i = 1$

(2) $\quad \sum_i \bar{\lambda}_i (D'J_i(h_o) - D'\omega_F(h_o).s'.D'J_i(h_o)) = (D'\omega_o(h_o) - D'\omega_F(h_o).s'D'\omega_o(h_o)).\bar{z}$.

D'autre part, il est aisé de vérifier que

$$E_0 = \bar{E}_0 = \{h \in \text{Ker } Df(h_0) \mid \Phi(D'J(h_0)-D'\omega_F(h_0).s'.D'J(h_0),h) \leq 0\}.$$

Notons $\bar{\Lambda}$ l'ensemble des couples $(\bar{\lambda},\bar{z})$ vérifiant (1) et (2). On a donc montré que la condition $(\overline{S_0^{\alpha_0}})$ suivante est vérifiée :

$$(\overline{S_0^{\alpha_0}}) \qquad \forall\, h \in \bar{E}_0 \quad , \quad \exists\ (\bar{\lambda},\bar{z}) \in \bar{\Lambda} \quad :$$

$$-\langle\bar{z}\mid Q(h(0),h(1))\rangle+\sum_i \bar{\lambda}_i\int_0^1(\langle\bar{a}_i h'\mid h'\rangle+\langle\bar{a}_i^1 h\mid h'\rangle+\langle\bar{a}_i^2 h\mid h\rangle)dt-\sum_r \bar{z}_r\int_0^1(\langle\bar{b}_j h'\mid h'\rangle+\langle\bar{b}_j^1 h\mid h'\rangle+\langle\bar{b}_j^2 h\mid h\rangle)dt \geq \alpha_0|h|^2 \quad ;$$

on applique alors le résultat de la première étape. Ce qui assure l'existence d'un point $(\bar{\lambda}^0,\bar{z}^0) \in \bar{\Lambda}$ vérifiant :

$$\forall\, t \in I, \ \forall\, X \in \text{Ker } A(t), \ \sum_i \bar{\lambda}_i^0\langle\bar{a}_i(t)X\mid X\rangle - \sum_r \bar{z}_r^0\langle\bar{b}_r(t).X\mid X\rangle > 0 \quad ;$$

Définissons $k^0 \in C^0(I,\mathbb{R}^q)$ par :

$$k^0 = \sum_i \lambda_i^0\ s'.D'J_i(h_0) - s'.D'\omega_0(h_0).\bar{z}^0 \quad ;$$

en normalisant le triplet $(\bar{\lambda}^0,\bar{z}^0,k^0)$, on aboutit à un point de Λ vérifiant (N4).

REFERENCES

[1] AHARON BEN TAL - Second ordre theory of extremum problems.
Extremal methods and systems analysis
(Internat. Sympos., Univers. Texas, Austin, Tex 1977)
pp. 336-356, Lecture Notes in Econom. and Math. systems, 174, Springer, Berlin-New York, 1980.

[2] S. SMALE - Global Analysis and economics V.
Pareto theory with contraints.
Journal of Mathematical Economics 1 (1974), 213-221
(C) North Holland Publishing Company.

[3] Ph. ANTOINE - Conditions pour un minimum local d'une fonction différentiable.
Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle.

[4] R. ABRAHAM - Lectures of Smale on differential topology.
Notes at Columbia University, New York, 1962-1963.

[5] Ph. ANTOINE - Problèmes anormaux.
Publication interne.

R E S U M E

On établit des conditions suffisantes pour un optimum de Pareto local dans le cas où la fonctionnelle est définie sur un espace de dimension infinie, généralisant un résultat récent d'Aharon Ben Tal [1] et le résultat classique de S. Smale [2].

Ces conditions sont explicitées sur plusieurs exemples faisant intervenir les fonctionnelles du calcul des variations. On en déduit des généralisations aux optima de Pareto des conditions de Legendre et de Klebsch du calcul des variations.

MOTS CLES : OPTIMUM DE PARETO,
CONDITIONS SUFFISANTES,
CALCUL DES VARIATIONS.