THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Faustin TOUADERA

PROBLÈMES DE CAUCHY MATRICIELS C^∞ ET DANS LES ESPACES DE SOBOLEV, A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES

Membres du Jury : VAILLANT Jean, Président
GOURDIN Daniel, Rapporteur
BERZIN Robert
DE PARIS Jean-Claude — Examinateurs
GAVEAU Bernard

Soutenue le 22 septembre 1986

A mon père,

A ma mère,

A mes frères et soeurs,

A toute ma famille.

A Marie-Christine,
A tous mes amis.

TABLE DES MATIERES

Monsieur Daniel GOURDIN m'a initié aux techniques et méthodes de la théorie des équations aux dérivées partielles. Ses remarques et conseils généreux sont à la base de l'élaboration de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance et gratitude.

Je remercie Monsieur le Professeur Jean VAILLANT de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Messieurs les Professeurs Robert BERZIN, Jean-Claude DE PARIS et Bernard GAVEAU ont bien voulu faire partie de ce jury. Qu'ils trouvent ici mes sincères remerciements.

Je remercie très infiniment Madame Raymonde BERAT qui a dactylographié cette thèse avec soin et compétence ainsi que
Mesdames Monique LLORET et Françoise WDOWCZYK, Messieurs Albert GOURNAY et Michel PROVOST pour la reprographie.

INTRODUCTION

Dans cette thèse, nous étudions les conditions suffisantes d'hyperbolicité faible pour les systèmes à caractéristiques de multiplicité variable et des conditions suffisantes d'unicité de Cauchy C^∞ pour des systèmes non hyperboliques de multiplicité constante.

Notre travail est divisé en trois parties.

La première partie généralise aux systèmes un article écrit par T. Nishitani dans le cas scalaire et donne une condition suffisante d'hyperbolicité faible lorsque chaque couple de racines caractéristiques pouvant avoir de valeurs égales admet un contact d'ordre infini sur l'hyperplan des données.

La deuxième partie traîte de l'unicité de Cauchy C^∞ et généralise aux systèmes d'ordre $t = 1$ dont le déterminant caracatéristique admet σ facteurs multiples (σ quelconque) un résultat démontré par D. Gourdin et H. Kadri lorsque $t = 1$ et $\sigma = 1$.

Une remarque finale aborde le cas t quelconque.

On montre que la non nullité du sous-caractéristique sur l'ensemble caractéristique multiple est une condition suffisante d'unicité de Cauchy C^∞ lorsque les multiplicités des facteurs sont des constantes m_i quelconques.

La troisième partie expose la construction de paramétrix locales généralisées sous les mêmes hypothèses que dans la deuxième partie, par la méthode des ondes asymptotiques en utilisant certains résultats dus à R. Berzin et J. Vaillant et la théorie des opérateurs intégraux de Fourier.

Les deux dernières parties de ce travail feront l'objet d'un article à paraître ultérieurement.

Dans le texte qui suit, nous adopterons la convention de sommation d'Einstein.

PREMIERE PARTIE

CONDITION SUFFISANTE DE RESOLUBILITE DU PROBLEME DE CAUCHY MATRICIEL C^∞ NON CARACTERISTIQUE A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE.

1. NOTATIONS - HYPOTHESES - RESULTATS.

a. Notations. Définitions et Propriétés fondamentales.

$D_x = (D_{x_1},\dots,D_{x_n})$; $D_{x_j} = -i\partial_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$; $D_t = -i\partial_t = -i\frac{\partial}{\partial t}$

$\forall s \in \mathbb{R}$, nous considérons les espaces de Sobolev H_s de norme $||u||_s$.

Posons $H = \bigcap_s H_s$ et pour $\forall u \in H$,

$$||u(t)||_k^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha u(x,t)|^2 dx \ ;$$

$$|||u(t)|||_p^2 = ||u(t)||_{m-1+p}^2 + ||D_t u(t)||_{m-2+p}^2 + \dots + ||D_t^{m-1} u(t)||_p^2 .$$

Introduisons maintenant les classes d'opérateurs pseudo-différentiels utilisées dans ce travail [1], [7], [8], [10], [14].

Définition.-

On dit que $p(x',\xi')$ est un symbole d'ordre γ sur $\mathbb{R}^n$ et on note $p \in S^\gamma(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ si $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ vérifie :

i) $\forall\ K \Subset \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha$ et β dans $\mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}(K)$ telle que

$$|D_{x'}^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} p(x';\xi')| \leq C_{\alpha,\beta}(K)(1+|\xi'|)^{\gamma-|\beta|}$$

$$\forall\ x' \in K, \quad \xi' \in (\mathbb{R}^n \setminus 0).$$

ii) Il existe une suite $\{p_{\gamma-j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ homogènes d'ordre $(\gamma-j)$ en ξ' telles que $\forall\ N \in \mathbb{N}$

$$|D_{x'}^{\beta}\{p - \sum_{j=0}^{N} p_{\gamma-j}\}(x',\xi')| = O(|\xi'|^{\gamma-N-1}) \quad \text{quand} \quad |\xi'| \to +\infty$$

uniformément par rapport à x' sur chaque compact $K \Subset \mathbb{R}^n$.

On écrira alors

$$P(x';\xi') \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_{\gamma-j}(x';\xi')$$

$P_{\gamma}(x';\xi')$ est dit symbole principal de P.

Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u définie par

$$\hat{u}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x',\xi'>} u(x) d\!\!\!/x'$$

avec $d\!\!\!/x' = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} dx'$

<u>Définition</u> 1.2.-

On appelle opérateur pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}^n$, d'ordre γ et de symbole $P(x';\xi') \in S^{\gamma} = S^{\gamma}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ l'opérateur $P(x';D_{x'})$ défini par :

$$P(x';D_{x'})u(x') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x',\xi'>}P(x';\xi')\hat{u}(\xi')d\!\!/x'$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Propriétés 1.1.-

Soit $P(x',D_{x'})$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre γ sur $\mathbb{R}^n$ et de symbole $P \in S^\gamma$, alors

1) $P(x',D_{x'})$ est un opérateur continu de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S(\mathbb{R}^n)$.

2) $\forall\, s \in \mathbb{R}$, on peut prolonger d'une façon unique $P(x';D_{x'})$ en un opérateur continu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

3) Caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels.

Soient $P(x';\xi') \in S^\gamma$ et $u \in E'(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors :

$P(x',D_{x'})u$ est de classe C^∞ dans Ω.

4) Soit $P(x',\xi') \in S^\gamma$, alors $P(x',D_{x'})$ s'étend en un opérateur continu de $S'(\mathbb{R}^n)$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$.

5) L'adjoint formel $P^*(x',D_{x'})$ de $P(x',D_{x'})$ défini par

$$<P^*(x',D_x')u,v>_{L^2} = <u,P(x',D_{x'})v>_{L^2} \ \forall\, u,v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre γ, dont le symbole $P^*(x',\xi')$ vérifie :

$$P^*(x';\xi') \sim \sum_{\alpha\in N^n} \frac{1}{\alpha!} D_{x'}\partial^\alpha_{\xi'} \overline{P(x',\xi')}.$$

6) Formule de composition des opérateurs pseudo-différentiels.

Soit $Q(x',D_{x'})$ un opérateur pseudo-différentiel d'ordre γ' de symbole $q(x',\xi') \in S^{\gamma'}$ alors l'opérateur composé :

$$R(x',D_{x'}) = Q(x',D_{x'}) \circ P(x',D_{x'})$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $(\gamma+\gamma')$ de symbole $r(x',\xi')$ vérifiant :

$$r(x',\xi') \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \partial^{\alpha}_{\xi'} q(x',\xi').D_{x'} p(x',\xi').$$

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$\partial^{\alpha} = D^{\alpha}_{x'}$

$\partial_{\alpha} = \partial^{\alpha}_{\xi'}$

$\partial^{\beta}_{\alpha} = D^{\beta}_{x'} \partial^{\alpha}_{\xi'}$ $\qquad \forall\, \alpha$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$.

On convient de considérer les termes indexés sur un ensemble vide comme des éléments neutres vis-à-vis de la loi considérée(par exemple)

$$(\sum_{j=1}^{0} x_j).y = (\sum_{j=1}^{0} x_j) + y = y).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_k = I = \{1,\dots,(k-1)\}$$

et pour $i \in I_k = I$, on pose

$$I_{k,i} = J_i = \{1,\dots,(k-i-1)\}.$$

Lemme 1.1.-

Soient f_j $(j = 1,\dots,k)$, k fonctions de $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors $f = \prod_{j=1}^{k} f_j$ est une fonction de $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\partial^{\alpha} f(x') = \sum_{\substack{j=1,\dots,(k-1) \\ \alpha_j \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_j \leq \alpha - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i}} \frac{\alpha!}{\prod_{j=1}^{k-1} \alpha_j! \, (\alpha - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j)!} \prod_{j=1}^{k-1} \partial^{\alpha_j} f_j(x') \, \partial^{\alpha - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j} f_k(x')$$

La preuve de ce lemme qui est une généralisation de la formule de Leibnitz de dérivation d'un produit se fait par récurrence sur le nombre k.

Proposition 1.1.-

Soient $P_j(x',D_{x'})$ $(j = 1,\dots,k)$ k opérateurs pseudo-différentiels respectivement d'ordre γ_j et de symbole $P_j(x',\xi')$ alors : $P(x',D_{x'}) = P_1(x',D_{x'}) \circ \dots \circ P_k(x',D_{x'})$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\gamma = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j$ et de symbole $P(x',\xi')$ vérifiant :

$$P(x',\xi') \sim \sum_{\substack{i \in I, j \in J_i \\ \alpha_i \in \mathbb{N}^n, \alpha_i^{n'} \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_i^j \leq \alpha_i - \sum_{n'=1}^{(j-1)} \alpha_i^{n'}}} \frac{1}{\prod_{i \in I} (\prod_{j \in J_i} \alpha_i^j!)(\alpha_i - \sum_{j \in J_i} \alpha_i^j)!} \prod_{i \in I} \partial_{\alpha_i}^{\sum_{j=1}^{(i-1)} \alpha_j^{i-j}} P_i(x',\xi') \times$$

$$\times \, \partial^{\sum_{i \in I} (\alpha_i - \sum_{j \in J_i} \alpha_i^j)} P_k(x',\xi').$$

La preuve de cette proposition se fait par récurrence sur le nombre k d'opérateurs intervenant dans la composition et en utilisant le lemme précédent.

b. Hypothèses.

Soit l'opérateur différentiel matriciel réel h de dimension $q \times q$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et d'ordre θ.

$$h = \sum_{j=0}^{\theta} h_{\theta-j}(x,t;D_x,D_t)$$

où $h_{\theta-j} = h_{\theta-j}(x,t;\xi,\tau)$ est une matrice de dimension $q \times q$ formée de fonctions $(h_{\theta-j})^\alpha_\beta$ polynômiales homogènes de degré $\theta-j$ en ξ, à coefficients indéfiniment dérivables et bornés ainsi que toutes leurs dérivées et tels que la matrice caractéristique

$$H = h_\theta(x,t;\xi,\tau)$$

vérifie les hypothèses suivantes :

$\boxed{H_1}$

Le déterminant caractéristique $\det H$ possède la décomposition suivante :

$$\det H(x,t;\xi,\tau) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau-\lambda_i(x,t;\xi)) \prod_{i=1}^{s} (\tau-\mu_i(x,t;\xi)) \tag{1.1}$$

où $\{\lambda_i(x,t;\xi)\}_{1\leq i\leq m-s}$ et $\{\mu_i(x,t;\xi)\}_{1\leq i\leq s}$ $(2s \leq m)$

sont à valeurs réelles distinctes deux à deux dans chaque ensemble mais $\lambda_i(x,t;\xi)$ doit être égale à $\mu_i(x,t;\xi)$ quand $t = 0$ et plus exactement.

(1.2) $$\lambda_i(x,t;\xi) - \mu_i(x,t;\xi) = \sigma_i(t)\nu_i(x,t;\xi), \quad 1 \leq i \leq s$$

où $\sigma_i(t)$ sont des fonctions de classe C^∞ positives et strictement croissantes pour $t > 0$, $\sigma_i(0) = 0$ et $\nu_i(x,t;\xi) \neq 0 \quad \forall(x,t;\xi)$.

En plus, nous supposons que $\sigma_i(\sigma_i')^{-1} \in C^2([0,T])$

$$\lambda_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0^+,\infty[\times \mathbb{R}^n \setminus 0).$$

$$\mu_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0^+,\infty[\times \mathbb{R}^n \setminus 0).$$

$\boxed{H_2}$

Soit $A(x,t;\xi,\tau)$ la matrice des cofacteurs de H dans le développement de $\det H$

$$HA = AH = \det H.I_q$$

où I_q est la matrice identité de dimension $q \times q$

Supposons que

$$A_1^1(x,t;\xi,\mu_i) \neq 0.$$

Soit K le polynôme sous-caractéristique du système

$$K(x,t;\xi,\tau) = K = \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \left\{ \left[H_\beta^{*\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial\xi_j \partial x_j} \right] A_\alpha^1 A_1^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{A_\alpha^1, A_1^\beta\} \right\}$$

où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Poisson.

Posons :

$$(1.3)\quad \mathcal{K}(x,t;\xi,\tau) = \left\{K(x,t;\xi,\tau) - \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} A_1^1(x,t;\xi,\tau). \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j)\}\right\}.$$

Introduisons la condition suivante :

$\boxed{A}$

$$K(x,t;\xi,\mu_i) = T_i(x,t;\xi)\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} + S_i(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)/_{\tau=\mu_i}$$

où T_i et S_i sont des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels.

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions de classe C^∞ positives et strictement croissantes pour $t > 0$.

Nous écrivons $g < f$ si et seulement si il existe une constante C positive telle que

$$(1.4)\qquad g'(t)[f'(t)]^{-1} \quad ; \quad g(t)[g'(t)]^{-1}\, f'(t)[f(t)]^{-1}, \quad (f' = \partial_f f)$$

soient deux fonctions de classe C^∞ sur $[0,C]$.

Cette relation d'ordre nous permet d'introduire la condition concernant $\{\sigma_i(t)\}_{1\leqslant i\leqslant s}$.

Supposons que :

$\boxed{B}$

Pour $\forall\, \sigma_i,\sigma_j$ tels que $\sigma_i'(0) = \sigma_j'(0) = 0$ alors $\sigma_i < \sigma_j$ ou $\sigma_j < \sigma_j$ est réalisée.

c. RESULTATS.

Théorème.-

Si l'opérateur h vérifie les hypothèses H_1, H_2 et si les conditions A et B sont réalisées, le problème de Cauchy associé

$$\begin{cases} (1) & hu = f \\ (2) & D_t^j u(x,0) = u_j(x) \quad j = 0,1,\dots,\theta-1 \ ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{avec } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix}$$

possède une solution unique $u(x,t) \in [C^\infty(H)]^q$ pour toutes données initiales $(u_0(x),\dots,u_{\theta-1}(x)) \in [H]^q$ et le second membre $f(x,t) \in [C^\infty(H)]^q$ en posant $C^\infty(H) = C^\infty([0,+\infty[,H)$.

Cette solution vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$|||u(x,t)|||_{\ell} \leq C(\ell)\{|||u(x,0)|||_{N(\ell)} + t \sup_{0 \leq s \leq t} ||f(x,s)||_{N(\ell)}$$

où $N(\ell)$ est un entier dépendant de h et $\ell = 1,2,\dots$

Remarque 1.-

La condition B ne dépend pas de (1.2).

Remarque 2.-

Au cas où tout σ_i tel que $\sigma_i'(0) = 0$ s'annule à l'ordre fini pour $t = 0$ la condition B est toujours satisfaite.

2. DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE LA SOLUTION.

a. Première réduction du problème.

Considérons le problème de Cauchy (1) et (2) associé à h

$$\begin{cases} (1) \quad hu = f \\ (2) \quad D_t^j u(x,0) = u_j(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0,1,\dots,\theta-1 \end{cases}$$

$$\text{avec } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,t;D_x,D_t)$ un opérateur matriciel de dimension $q \times q$ d'ordre $m-\theta$ et de matrice caractéristique $A(x,t;\xi,\tau)$.

En s'inspirant de l'article [4], nous réduisons l'opérateur h à un opérateur P différentiel en t et pseudo-différentiel en x d'ordre $m \geqslant \theta$ en faisant un changement de fonctions inconnues

$U = \mathcal{A} V$ et en posant

$$P = h.\mathcal{A}$$

Le problème (1) et (2) se transforme en

$$\begin{cases} PV = f \\ D_t^j(\mathcal{A}\, V)(x,0) = u_j(x), \qquad j = 0,1,\dots,\theta-1. \end{cases}$$

A cause de l'inversibilité de $A(x,t;0,1)$ (cf. H_1), on peut résoudre les équations $D_t^j(\mathcal{A}V)(x,0) = u_j(x)$, $j = 0,1,\dots,\theta-1$ et calculer $v_j(x) = D_t^j V(x,0)$, $j = 0,1,\dots,m-1$ en fonctions de $u_j(x)_{j=0,\dots,\theta-1}$ (cf. [4]) telles que pour toute solution $V \in [C^\infty(H)]^q$ du problème

$$\begin{cases} (1') \quad Pv = f \\ (2') \quad D_t^j v(x,0) = v_j, \quad j = 0,1,\dots,m-1 \end{cases}$$

$U = \mathcal{a}\, V$ soit solution de (1) et (2).

Ainsi, nous sommes ramenés à la résolution du problème (1') et (2').

b. Deuxième réduction du problème.

Nous supposons que $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_s$. Nous garderons désormais, cette relation d'ordre.

Soient :

(2.1) $$\Pi_m = [D_t-\lambda_{m-s}(x,t;D_x)]\ldots[D_t-\lambda_1(x,t;D_x)].[D_t-\mu_s(x,t;D_x)]\ldots[D_t-\mu_1(x,t;D_x)]$$

où $\lambda_i(x,t;D_x)$ est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\lambda_i(x,t;\xi)$.
$\mu_i(x,t;D_x)$ est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\mu_i(x,t;\xi)$.

Nous pouvons écrire $P(x,t;D_x,D_t)$ sous la forme

(2.2) $$P(x,t;D_x,D_t) = \Pi_m + \Pi_{m-1} + C_{m-1}(x,t;D_x,D_t) + Q_{m-2}(x,t;D_x,D_t)$$

où

(2.3) $$C_{m-1}(x,t;D_x,D_t) = C_{m-1}(x,t;D_x) + C_{m-2}(x,t;D_x)[D_t-\mu_1(x,t;D_x)] + \ldots + C_{m-s}(x,t;D_x)[D_t-\mu_{s-1}(x,t;D_x)]\ldots[D_t-\mu_1(x,t;D_x)].$$

(2.4) $$\Pi_{m-1} = C_{m-s-1}(x,t;D_x).[D_t-\mu_s(x,t;D_x)]\ldots[D_t-\mu_1(x,t;D_x)] + \ldots + C_o[D_t-\lambda_{m-s-1}(x,t,D_x)]\ldots[D_t-\lambda_1(x,t;D_x)].[D_t-\mu_s(x,t;D_x)]\ldots[D_t-\mu_1(x,t,D_x)]$$

et $C_{m-i}(x,t;D_x)$ $(i = 1,\ldots,m)$ opérateur pseudo-différentiel matriciel de dimension $q \times q$ de symbole $C_{m-i}(x,t;\xi)$ dont les composantes sont homogènes de degré $m-i$ en ξ et Q_{m-2} opérateur matriciel de dimension $q \times q$ d'ordre $m-2$.

Proposition 2.1.-

Soit $A = \begin{bmatrix} L_A^1 \\ \vdots \\ L_A^q \end{bmatrix}$ où L_A^i est la $i^{ème}$ ligne de la matrice A

$i = 1,\dots,q$

alors

$$L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i) = \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} \cdot L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)$$

où $C_{m-1}^o(x,t;\xi,\tau)$ est le symbole principal de $C_{m-1}(x,t;D_x,D_t)$.

Preuve :

D'après l'article [4], nous savons qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel matriciel M de dimension $q \times q$ dont le symbole est homogène de degré $m-2$ en ξ tel que

$$C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i) = \sigma(P_{m-1}) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 P_m}{\partial\xi_j \partial x_j}$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i(x,t;\xi),\tau-\mu_i(x,t;\xi)\} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j)/_{\tau=\mu_i} . Iq$$

$$+ (\lambda_i-\mu_i)M(x,t;\xi).$$

Sachant que $\sigma(P_{m-1}) = H^*A + HA^* + \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial H}{\partial\xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j}$

avec $H^* = H_{\theta-1}(x,t;\xi,\tau)$

$A^* = A_{m-\theta-1}(x,t;\xi,\tau)$.

$$C^{o}_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = H^*A + HA^* + \sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_j \partial x_j}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-s}(\tau-\lambda_j)\prod_{\substack{j=1\\ j=i}}^{s}(\tau-\mu_j).I_q\Big/_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i-\mu_i)M.$$

Puisque nous avons $P_m = H.A$,

$$\frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 (H.A)}{\partial \xi_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}.A + H\frac{\partial A}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial x_j}.A + \frac{\partial H}{\partial x_j}.\frac{\partial A}{\partial \xi_j} + \frac{\partial H}{\partial \xi_j}.\frac{\partial A}{\partial x_j} + H.\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial x_j}$$

==>

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}.\frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi_j \partial x_j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial x_j}.A\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{H}{\partial x_j}\frac{\partial A}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2}H\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial x_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial A}{\partial \xi_j}\right] - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial x_j}A + H\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial x_j}\right].$$

Ainsi, nous avons

$$C^{o}_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = HA^* + H^*A + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial x_j}A + H\frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_j}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_j \partial x_j}.A + H\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_i \partial x_j}\right] - \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-s}(\tau-\lambda_j)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}(\tau-\mu_j)I_q\Big/_{\tau=\mu_i}$$

$$+ (\lambda_i-\mu_i)M(x,t;\xi).$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par la 1ère ligne de la matrice A prise au point $(x,t;\xi,\mu_i)$ que nous notons $L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)$

$$\left(A = \begin{bmatrix} L_A^1 \\ \vdots \\ L_A^q \end{bmatrix}\right) \Rightarrow L_A^1(x,t;\xi,\mu_i) = (A_1^1,\dots,A_j^1,\dots,A_q^1)\,(x,t;\xi,\mu_i).$$

Nous obtenons une ligne de q symboles telle que :

$$L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)\; C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1} \left\{ A_\alpha^1 H_\beta^{*\alpha} A_\gamma^\beta + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial A_\gamma^\beta}{\partial x_j} - \frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_\gamma^\beta}{\partial \xi_j} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j \partial x_j} \cdot A_\gamma^\beta + H_\beta^\alpha \frac{\partial^2 A_\gamma^\beta}{\partial \xi_j \partial x_j} \right] \right\}_{\tau=\mu_i}$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\mu_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j) \Big/_{\tau=\mu_i} L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)$$

$$+ (\lambda_i-\mu_i) L_A^1(x,t;\xi,\mu_i).M(x,t;\xi).$$

Choisissons, par exemple, la première composante de ce vecteur ligne c'est-à-dire lorsque $\gamma = 1$

$$\sum_{\alpha,\beta=1} \left\{ A^1 H_\beta^{*\alpha} A_1^\beta + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial A_1^\beta}{\partial x_j} - \frac{\partial H_\beta^\alpha}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial A_1^\beta}{\partial \xi_j} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n A_\alpha^1 \left[\frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j \partial x_j} \cdot A_1^\beta + H_\beta^\alpha \frac{\partial^2 A_1^\beta}{\partial \xi_j \partial x_j} \right] \right\}_{\tau=\mu_i}$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\}\, A_1^1(x,t;\xi,\mu_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_i) \Big/_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i-\mu_i) N'(x,t;\xi).$$

Puisque $AH = \prod_{i=1}^{m-s}(\tau-\lambda_i)\prod_{i=1}^{s}(\tau-\mu_i).I_q$.

$\frac{\partial}{\partial\xi_j}(A.H) = \frac{\partial A}{\partial\xi_j} . H + A. \frac{\partial H}{\partial\xi_j} = \frac{\partial}{\partial\xi_j}\prod_{i=1}^{m-s}(\tau-\lambda_i).\prod_{i=1}^{s}(\tau-\mu_i).I_q$ par conséquent

il existe f_j^i tel que

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi_j}(A.H)\right]_{\tau=\mu_i} = (\mu_i-\lambda_i)f_g^i .$$

De même il existe g_j^i tel que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(A.H)\right]_{\tau=\mu_i} = \left[\frac{\partial A}{\partial x_j} . H + A. \frac{\partial H}{\partial x_j}\right]_{\tau=\mu_i} = (\mu_i-\lambda_i)g_j^i .$$

D'où

$$A_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial\xi_j} H_\beta^\alpha\Big|_{\tau=\mu_i} = - H_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial\xi_j} A_\alpha^1\Big|_{\tau=\mu_i} + (\mu_i-\lambda_i)f_j^i$$

$$A_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_j} H_\beta^\alpha\Big|_{\tau=\mu_i} = - H_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} A_\alpha^1\Big|_{\tau=\mu_i} + (\mu_i-\lambda_i)g_j^i .$$

Nous avons aussi

$$\sum_{\alpha,\beta=1}\left\{H_\beta^{*\alpha}(A_1^\beta A_\alpha^1) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} H_\beta^\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\xi_j}A_\alpha^1\frac{\partial}{\partial x_j}A_1^\beta - \frac{\partial}{\partial x_j}A_\alpha^1.\frac{\partial A_1}{\partial\xi_j}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial\xi_j\partial x_j}A_\alpha^1 A_1^\beta + H_\beta^\alpha A_\alpha^1\frac{\partial^2 A_1^\beta}{\partial\xi_j\partial x_j}\right\}_{\tau=\mu_i}$$

$$-\frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\}A_1^1(x,t;\xi,\tau)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-s}(\tau-\lambda_j)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{s}(\tau-\mu_j)\Big/_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i-\mu_i)N(x,t;\xi).$$

Soit

$$K(x,t;\xi,\mu_i) = K = \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \left\{ \left[H_\beta^{*\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j \partial x_j} \right] A_\alpha^1 A_1^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{A_\alpha^1, A_1^\beta\} \right\}_{\tau=\mu_i}$$

Nous obtenons donc

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \left\{ \left[H_\beta^{*\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j \partial x_j} \right] A_\alpha^1 A_1^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{A_\alpha^1, A_1^\beta\} \right\}_{\tau=\mu_i}$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} A_1^1(x,t;\xi,\tau) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j) \Big/_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i-\mu_i) N(x,t;\xi)$$

$$= K(x,t;\xi,\mu_i) - \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} A_1^1(x,t;\xi,\tau) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j) \Big/_{\tau=\mu_i} + (\lambda_i-\mu_i) N.$$

Par analogie, en choisissant la $\delta^{\text{ième}}$ composante du vecteur ligne $L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)\ C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i)$ nous obtenons l'expression suivante :

$$(*) \quad \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \left\{ \left[H_\beta^{*\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 H_\beta^\alpha}{\partial \xi_j \partial x_j} \right] A_\alpha^1 A_\delta^\beta - \frac{1}{2} H_\beta^\alpha \{A_\alpha^1, A_\delta^\beta\} \right\}_{\tau=\mu_i}$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} A_\delta^1(x,t;\xi,\tau) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j) \Big/_{\tau=\mu_j} + (\lambda_i-\mu_i) N(x,t,\xi).$$

En sachant qu'il existe M" tel que [4]

$$\left[A_\delta^\beta A_1^1 - A_\delta^1 A_1^\beta \right]_{\tau=\mu_i} = (\mu_i-\lambda_i) M''$$

$$\Longrightarrow \quad A_\delta^\beta(x,t;\xi,\mu_i) = \frac{(\mu_i-\lambda_i) M'' + A_\delta^1 A_1^\beta}{A_1^1} \Big/_{\tau=\mu_i} .$$

En remplaçant $A_\gamma^\beta(x,t;\xi,\mu_i)$ ainsi obtenu dans l'expression (*), nous pouvons ressortir le polynôme K et regrouper les autres termes issus du développement sous la forme $(\mu_i-\lambda_i)N(x,t,\xi)$.

L'expression (*) s'écrira

$$\frac{K(x,t;\xi,\mu_i)A_\delta^1(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} - \frac{1}{2}\left\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-s}(\tau-\lambda_j)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{s}(\tau-\mu_j)A_\delta^1\right/_{\tau=\mu_i} .$$

De ce fait, nous avons

$$L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)\ C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i) =$$

$$= \left\{\frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} - \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-s}(\tau-\lambda_j)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{s}(\tau-\mu_j)\right\}_{\tau=\mu_i} L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)$$

$$L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)\ C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i) =$$

$$= \left\{\frac{K(x,t;\xi,\mu_i) - \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m-s}(\tau-\lambda_j)\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{s}(\tau-\mu_j)A_1^1}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)}\right\}\Big/_{\tau=\mu_i} .L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)$$

Ainsi, nous obtenons

$$L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)\ C_{m-1}^o(x,t;\xi,\mu_i) = \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} \cdot L_A^1(x,t;\xi,\mu_i)$$

d'où la proposition.

Proposition 2.2.-

Il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que $C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i)$ soit une matrice scalaire de la forme

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} \cdot I_q$$

Preuve :

En effet nous avons :

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = HA^* + H^*A + \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial A}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial x_j} (H.A)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} \prod_{\substack{j=1 \\ j=i}}^{m-s} (\tau-\lambda_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (\tau-\mu_j) \Big/_{\tau=\mu_i} . I_q + (\lambda_i-\mu_i).M(x,t;\xi)$$

$$= \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} \cdot I_q \,.$$

Considérons cette égalité comme une équation matricielle par rapport à $A^*(x,t;\xi,\mu_i) = (A_k^{*\ell})(x,t;\xi,\mu_i)$ $(\ell,k = 1,\dots,q)$.

Fixons k nous obtenons alors un système de q équations à q inconnues. Ce système est de rang $q-1$ et la condition de compatibilité est satisfaite grâce à la condition (A) donc il est résoluble par rapport aux inconnues $[A^*(x,t,\xi,\mu_i)]_k^\ell$ $(\ell = 1,\dots,q)$.

Proposition 2.3.-

La condition (A) est équivalente à la condition (A')

où

$\boxed{A'}$:

Il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que $C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i)$ s'écrive sous la forme suivante :

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = T_i\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} + S_i(\lambda_i-\mu_i)/_{\tau=\mu_i} .$$

Preuve :

A => A'. En effet nous avons d'après la condition (A) que

$$K(x,t;\xi,\mu_i) = T_i\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} + S_i(\lambda_i-\mu_i)/_{\tau=\mu_i} .$$

D'après la proposition 2.2, il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A^1_1(x,t;\xi,\mu_i)} \cdot I_q .$$

Donc il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = T'_i\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} + S'_i(\lambda_i-\mu_i)/_{\tau=\mu_i}$$

où $T'_i = \dfrac{T_i}{A^1_1(\mu_i)} .I_q$ et $S'_i = \dfrac{S_i}{A^1_1(\mu_i)} .I_q$.

A' => A.

En effet, il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = T'_i\{\tau-\lambda_i,\tau-\mu_i\} + S'_i(\lambda_i-\mu_i)/_{\tau=\mu_i} .$$

D'après la proposition 2.1

$$L^1_A(x,t;\xi,\mu_i)\; C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i) = \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A^1_1(x,t;\xi,\mu_i)} \cdot L^1_A(x,t;\xi,\mu_i)$$

Soit un vecteur colonne C_1^A tel que $L_A^1 C_1^A = 1$

$$\Rightarrow \frac{K(x,t;\xi,\mu_i)}{A_1^1(x,t;\xi,\mu_i)} = L_A^1 . T_i' C_1^A \{\tau-\mu_i, \tau-\mu_i\} + L_A^1 S_i' C_1^A (\lambda_i - \mu_i)$$

$$\Rightarrow \quad K(x,t;\xi,\mu_i) = A_1^1 . L_A^1 . T_i' C_1^A \{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} + A_1^1 L_A^1 S_i' C_1^A (\lambda_i-\mu_i)_{/\tau=\mu_i}$$

$$= T_i\{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} + S_i(\lambda_i-\mu_i)_{/\tau=\mu_i}$$

d'où la proposition.

c. Reformulation des conditions.

Proposition 3.1.-

Supposons que les conditions (A) et (B) sont satisfaites, alors il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que

(3.1) $$\sigma_i(t)\left[\sigma_i'(t)\right]^{-1} C_{m-j}(x,t;\xi) = U_{ji}(x,t;\xi)\left[\lambda_i(x,t;\xi) - \mu_i(x,t;\xi)\right]$$

pour $1 \leq j \leq i \leq s$ où U_{ji} est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel matriciel de dimension $q \times q$.

Preuve :

D'après la proposition 2.3, il existe $A^*(x,t;\xi,\mu_i)$ tel que $C_{m-1}^{o}(x,t;\xi,\tau)$ symbole principal de $C_{m-1}(x,t;D_x D_t)$ vérifie l'équation suivante :

(3.2) $$C_{m-1}^{o}(x,t;\xi,\mu_i) = T_i(x,t;\xi).\{\tau-\lambda_i, \tau-\mu_i\} + S_i(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)/_{\tau=\mu_i}$$

où T_i et S_i sont des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels matriciels de dimension $q \times q$.

Montrons la proposition par récurrence sur j.

Supposons qu'elle soit vraie pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$ et montrons qu'il en est de même pour $j = k$.

Nous savons d'après (2.3) que

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\tau) = C_{m-1}(x,t;\xi) + C_{m-2}(x,t;\xi)[\tau-\mu_1(x,t;\xi)] + \ldots +$$
$$+ C_{m-s}(x,t;\xi)[\tau-\mu_{s-1}(x,t;\xi)]\ldots[\tau-\mu_1(x,t;\xi)].$$

Si nous remplaçons dans cette expression τ par μ_j nous obtenons l'identité suivante (puisque $j = k$) :

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k) = C_{m-1}(x,t;\xi) + C_{m-2}(x,t;\xi)(\mu_k-\mu_1) + \ldots +$$
$$+ C_{m-k}(x,t;\xi)(\mu_k-\mu_{k-1})\ldots(\mu_k-\mu_1).$$

Les autres s'annulent.

D'après l'hypothèse de récurrence nous savons que, pour $1 \leqslant j \leqslant k-1$ (3.1) est vraie, en multipliant les deux membres de cette égalité par $\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}$ nous avons

$$\sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k) = \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-1}(x,t;\xi) + \ldots +$$
$$+ \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-k}(x,t;\xi)(\mu_k-\mu_{k-1})\ldots(\mu_k-\mu_1).$$

$$\Rightarrow \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k) = \left\{\sum_{j=1}^{k-1} U_{ji}(\mu_j-\mu_{j-1})\ldots(\mu_j-\mu_1)\right\}(\lambda_i-\mu_i) +$$
$$+ \sigma_i(\sigma'_i)^{-1}C_{m-k}(x,t;\xi)(\mu_k-\mu_{k-1})\ldots(\mu_k-\mu_1).$$

Ainsi nous obtenons :

$$(3.3)\qquad \sigma_i(\sigma_i')^{-1}C_{m-k}(x,t;\xi)(\mu_k-\mu_{k-1})\ldots(\mu_k-\mu_1) = \sigma_i(\sigma_i')^{-1}C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k)$$

$$-\left\{\sum_{j=1}^{k-1} U_{ji}(x,t;\xi)(\mu_j-\mu_{j-1})\ldots(\mu_j-\mu_1)\right\}(\lambda_i-\mu_i)$$

pour $k \leqslant i \leqslant s$.

Pour achever notre récurrence, il nous suffira de montrer que $\sigma_i(\sigma_i')^{-1}C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_i)$ peut être factorisé et que l'un des facteurs est justement $(\lambda_i-\mu_i)$.

Pour prouver cela, notons que, avec δ_k un certain symbole, nous pouvons écrire

$$T_k\{\tau-\lambda_k,\tau-\mu_k\} + S_k(\lambda_k-\mu_k) = \sigma_k'\nu_k T_k + \sigma_k\delta_k .$$

En effet, nous savons que

$$\{\tau-\lambda_k,\tau-\mu_k\} = \partial_\xi(\tau-\lambda_k(x,t;\xi))\partial_x(\tau-\mu_k(x,t;\xi)) +$$

$$- \partial_x(\tau-\lambda_k(x,t;\xi))\partial_\xi(\tau-\mu_k(x,t;\xi)) + \partial_\tau(\tau-\lambda_k)\partial_t(\tau-\mu_k)$$

$$- \partial_t(\tau-\lambda_k(x,t;\xi))\partial_\tau(\tau-\mu_k(x,t;\xi)).$$

$$= \partial_\xi\lambda_k(x,t;\xi)\partial_x\mu_k(x,t;\xi)-\partial_x\lambda_k(x,t;\xi)\partial_\xi\mu_k(x,t;\xi)-\partial_t\mu_k(x,t;\xi)-\partial_t\lambda_k(x,t;\xi)$$

$$= \partial_t[\lambda_k(x,t;\xi)-\mu_k(x,t;\xi)]+\partial_\xi\lambda_k(x,t;\xi)\partial_x\lambda_k(x,t;\xi)-\partial_x\mu_k(x,t;\xi)\partial_\xi\mu_k(x,t;\xi)$$

$$= \partial_t[\sigma_k(t)\nu_k(x,t;\xi)] + \partial_\xi(\lambda_k-\mu_k)\partial_x\mu_k + \partial_x(\mu_k-\lambda_k)\partial_\xi\mu_k$$

$$= \sigma_k'(t)\nu_k(x,t;\xi) + \sigma_k(t)\,\partial_t\nu_k(x,t;\xi) + \sigma_k(t)[\partial_\xi\nu_k\partial_x\mu_k - \partial_x\nu_k\partial_\xi\mu_k]$$

$$= \sigma_k'(t)\nu_k(x,t;\xi) + \sigma_k(t)\left[\partial_t\nu_k(x,t;\xi)+\partial_\xi\nu_k\partial_x\mu_k - \partial_x\nu_k\partial_\xi\mu_k\right]$$

et

$$S_k(\lambda_k-\mu_k) = S_k\sigma_k(t)\nu_k(x,t;\xi) = \sigma_k(t)S_k(x,t;\xi).\nu_k(x,t;\xi).$$

Par conséquent :

$$T_k\{\tau-\lambda_k,\tau-\mu_k\} + S_k(\lambda_k-\mu_k) = \sigma_k'(t)T_k\nu_k +$$

$$+ \sigma_k(t)\{S_k\nu_k(x,t;\ )+T_k\left[\partial_t\nu_k(x,t;\xi)+\partial_\xi\nu_k(x,t;\xi)\partial_x\mu_k-\partial_x\nu_k\partial_\xi\mu_k\right]\}$$

$$= \sigma_k'(t)\nu_k T_k + \sigma_k(t)\delta_k .$$

Ainsi d'après la proposition 2.3.

$$C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k) = T_k\{\tau-\lambda_k,\tau-\mu_k\} + S_k(\lambda_k-\mu_k)$$

$$= \sigma_k'\nu_k T_k + \sigma_k\delta_k .$$

D'où

$$\sigma_i(\sigma_i')^{-1}C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k) = \sigma_i(\sigma_i')^{-1}\sigma_k'\nu_k T_k + \sigma_i(\sigma_i')^{-1}\sigma_k\delta_k$$

$$= \sigma_i(\sigma_i')^{-1}\sigma_k'\nu_k T_k\nu_i[\nu_i]^{-1} + \sigma_i(\sigma_i')^{-1}\sigma_k\delta_k\sigma_k'(\sigma_k')^{-1}\nu_i[\nu_i]^{-1}$$

$$= T_k\left[\sigma_k'(\sigma_i')^{-1}\nu_k(\nu_i)^{-1}\right]\sigma_i\nu_i + \left[\sigma_k'(\sigma_i')^{-1}\sigma_k(\sigma_k')^{-1}\delta_k(\nu_i)^{-1}\right]\sigma_i\nu_i$$

puisque $\lambda_i-\mu_i = \sigma_i\nu_i$ d'après (1.2).

$\sigma_i(\sigma_i')^{-1}C^o_{m-1}(x,t;\xi,\mu_k)$ peut être factorisé et l'un des facteurs est bien $(\lambda_i-\mu_i)$.

D'après la condition (B) et du fait que ν_i ne s'annule jamais les coefficients de $\sigma_i\nu_i$ sont bien définis et réguliers.

De (3.3) en divisant les deux membres de cette égalité par $(\mu_k-\mu_{k-1})\ldots(\mu_k-\mu_1)$ nous avons :

$$\sigma_i(\sigma_i')^{-1}C_{m-k}(x,t;\xi) = U_{k,i}(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)$$

où $U_{k,i}$ matrice de dimension $q \times q$, d'où la proposition.

Corollaire 3.1.-

Sous les conditions (A) et (B), nous avons

$$C_{m-j}(x,t;D_x) = \sigma_j'(t)\tilde{C}_{m-j}(x,t;D_x)$$

où $\tilde{C}_{m-j}(x,t;D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel matriciel de dimension $q \times q$ d'ordre $m-j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$.

Preuve :

D'après la proposition 3.1 et (1.2), nous avons

$$\sigma_i(t)[\sigma_i'(t)]^{-1}C_{m-j}(x,t;\ ) = U_{ij}(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)$$

$$\Rightarrow \quad C_{m-j}(x,t;\xi) = \sigma_i'(t)[\sigma_i(t)]^{-1}U_{ji}(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)$$

$$= \sigma_i'(t)[\sigma_i(t)]^{-1}U_{ji}(x,t;\xi)\sigma_i\nu_i \quad = \sigma_i'(t)\nu_i U_{ji}(x,t;\xi)$$

$$= \sigma_j'(t)[\sigma_j'(t)]^{-1}\sigma_i'(t)\nu_i U_{ji}(x,t;\xi) = \sigma_j'(t).\tilde{C}_{m-j}(x,t;\xi)$$

avec $\tilde{C}_{m-j}(x,t;\xi) = \sigma_i'(t)[\sigma_j'(t)]^{-1}\nu_i U_{j,i}(x,t;\xi)$.

Corollaire 3.2.-

Sous les conditions (A) et (B), pour $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant i \leqslant s$ nous pouvons écrire

$$\sigma_k(t)[\sigma_k'(t)]^{-1}C_{m-j}(x,t;\xi) = U_{k,ij}(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)$$

où $U_{j,ik}$ est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel matriciel $q \times q$.

Preuve :

Grâce à la condition (B), nous pouvons affirmer que $\underset{(i>k)}{\sigma_k(\sigma_k')^{-1}\sigma_i'(\sigma_i)^{-1}}$ est C^∞ dans un certain intervalle.

D'après la proposition 3.1, $\sigma_i(t)[\sigma_i'(t)]^{-1}C_{m-j}(x,t;\xi) = U_{ji}(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)$.

Multiplions les deux membres par $\sigma_k(\sigma_k')^{-1}\sigma_i'(\sigma_i)^{-1}$

$$\sigma_k(\sigma_k')^{-1}\sigma_i'(\sigma_i)^{-1}\sigma_i(\sigma_i')^{-1}C_{m-j} = \sigma_k(\sigma_k')^{-1}\sigma_i'(\sigma_i)^{-1}U_{ji}(\lambda_i-\mu_i)$$

$$\sigma_k(t)\left[\sigma_k'(t)\right]^{-1}C_{m-j} = U_{ji,k}(x,t;\xi).(\lambda_i-\mu_i)$$

où $U_{jik}(x,t;\xi) = \sigma_k(\sigma_k')^{-1}\sigma_i'(\sigma_i)^{-1}U_{ji}(x,t;\xi)$ bien défini.

d. <u>Décomposition de la solution.</u>

Considérons le problème de Cauchy et l'inégalité d'énergie associés pour les opérateurs suivants :

$$(4.1) \qquad L_m^{(j)} = \Pi_m + \Pi_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1}\cdots\Delta_1 + \ldots + \underset{1\leq j\leq s+1}{C_{m-j}\Delta_{j-1}\cdots\Delta_1}$$

$$(P)_k \quad \begin{cases} (L_m^{(k)} + Q_{m-2})u = f \\ \\ D_t^j u(x,0) = u_j(x) \end{cases}$$

$$f \in \left[C^\infty(H)\right]^q$$

$$u_i \in H^q \qquad i = 0,\ldots,m-1$$

$$(E)_k \quad |||u(t)|||_\ell \leq C(k,\ell)\left\{|||u(0)|||_{N(k,\ell)} + t \sup_{0\leq s\leq t}||f(s)||_{N(k,\ell)}\right\}$$

où $\qquad \Delta_i = \left[D_t - \mu_i(x,t;D_x)\right]_{1\leq i\leq s}\ , \quad \Delta_0 = I_q$

$L_m^{(s+1)} = \Pi_m + \Pi_{m-1}$ et $N(k,\ell)$ entier dépendant de P,k,ℓ.

Si le problème de Cauchy $(P)_k$ est bien posé et que l'inégalité $(E)_k$ est vraie, nous obtenons une décomposition de la solution de $(P)_{k-1}$ qui, conduit à l'inégalité $(E)_{k-1}$ en utilisant le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 4.1.-

Supposons que le problème de Cauchy $(P)_k$ soit bien posé et que l'inégalité $(E)_k$ soit vraie. Sous les conditions (A) et (B) nous avons ce qui suit :

Pour $\forall$ entier n la solution $u(t) \in [C^\infty(H)]^q$ de $(P)_{k-1}$ se décompose de la manière suivante :

(4.2) $$u = v_n + w_n \quad \text{où} \quad v_n \quad \text{et} \quad w_n \quad \text{vérifient}$$

(4.3) $$|||v_n|||_\ell \leq B_1(k,n,\ell)[t\sigma'_{k-1}(t)]^n \sup_{0\leq s\leq t} ||u(s)||_{\phi(k,n,\ell)}$$

(4.4) $$|||w_n|||_\ell \leq B_2(k,n,\ell)\left\{|||u(0)|||_{\phi(k,n,\ell)}+t \sup_{0\leq s\leq t} ||f(s)||_{\phi(k,n,\ell)}\right\}.$$

De plus, si nous posons

$(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n = g_n$ alors g_n vérifie

(4.5) $$||g_n||_\ell \leq B_3(k,n,\ell)[t\sigma'_{k-1}(t)]^n\left\{|||u(0)|||_{\phi(k,n,\ell)}+t \sup_{0\leq s\leq t} ||f(s)||_{\phi(k,n,\ell)}\right\}$$

où $\phi(k,n,\ell)$ est un entier dépendant de P,k,ℓ,n.

<u>Preuve</u> :

Soit $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u = f$, $u \in [C^\infty(H)]^q$. Remarquons que

(*) $$L_m^{(k-1)} + Q_{m-2} = L_m^{(k)} + Q_{m-2} + C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 .$$

En effet de (4.1), nous avons

$$L_m^{(j)} = \Pi_m + \Pi_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1}\cdots\Delta_1+\cdots+C_{m-j}\Delta_{j-1}\cdots\Delta_1 \qquad (1\leq j\leq s+1)$$

$$\begin{cases} L_m^{(k-1)} = \Pi_m + \Pi_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1}\cdots\Delta_1 + \cdots + C_{m-k}\Delta_{k-1}\cdots\Delta_1 + \\ \qquad\qquad + C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 \\ L_m^{(k)} = \Pi_m + \Pi_{m-1} + C_{m-s}\Delta_{s-1}\cdots\Delta_1 + \cdots + C_{m-k}\Delta_{k-1}\cdots\Delta_1 \end{cases}$$

d'où $$L_m^{(k-1)} = L_m^{(k)} + C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 .$$

Résolvons successivement le problème de Cauchy suivant

$$(4.6)\quad \begin{cases} (L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_{n+1} = f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_n \\ D_t^j u_{n+1}(x,0) = D_t^j u(x,0) \qquad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

$$u_o(x,t) \equiv 0$$

Par hypothèse $(P)_k$ est bien posé, ce problème a une solution unique $u_n \in [C^\infty(H)]^q$ $(n = 1,\dots)$.

Nous allons montrer que $v_n = u-u_n$ et $w_n = u_n$ vérifient les inégalités (4.3) et (4.4).

En effet par définition de u_n, $u-u_n$ vérifient l'équation

$$(L_m^{(k)} + Q_{m-2})(u-u_n) = -C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u-u_{n-1})$$

avec les données initiales nulles ; car nous savons que $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u = f$ par hypothèse et d'après (*).

$$(L_m^{(k)} + Q_{m-2})u + C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u = f, \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} (L^{(k)} + Q_{m-2})u = f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u \\ (L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_n = f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_{n-1} \end{cases}$$

$$(L_m^{(k)} + Q_{m-2})(u-u_n) = - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u-u_{n-1}).$$

Par conséquent, l'inégalité $(E)_k$ nous permet d'avoir

$$|||u-u_n|||_\ell \leq C(k,\ell)\left\{|||u(x)-u_n(x,0)|||_{N(k,\ell)} + t \sup_{0\leq s\leq t} ||C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u-u_{n-1})||_{N(k,\ell)}\right\}$$

d'après les données initiales de (4.6), $u(x,0) = u_n(x,0)$

$$|||u-u_n|||_{\ell} \leqslant C(k,\ell)t \sup_{0\leqslant s\leqslant t} ||C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u-u_{n-1})||_{N(k,\ell)} \;.$$

D'autre part, le corollaire 3.1 nous montre que

$$C_{m-j}(x,t;D_x) = \sigma_j'(t)\tilde{C}_{m-j}(x,t;D_x)$$

$$\Longrightarrow ||C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u-u_{n-1})||_{N(k,\ell)} \leqslant \sigma_{k-1}'(t)C'(k,\ell)|||u-u_{n-1}|||_{N(k,\ell)+m-1}$$

$$\Longrightarrow \quad |||u-u_n|||_{\ell} \leqslant C(k,\ell)C'(k,\ell)t\; \sigma_{k-1}'(t)|||u-u_{n-1}|||_{N(k,\ell)+m-1} \;.$$

En réitérant n fois le même raisonnement et en tenant compte du fait que $u_o(x,t) \equiv 0$ et $v_n = u-u_n$, nous obtenons

$$(4.3)\quad ||v_n||_{\ell} \leqslant B_1(k,\ell,n)\left[t\sigma_{k-1}'(t)\right]^n \sup_{0\leqslant s\leqslant t} ||u(s)||_{\phi(k,\ell,n)} \quad (\text{si} \quad t > \tfrac{T}{2})$$

$$\leqslant B_1(k,\ell,n)t^{n-m+1}\left[\sigma_{k-1}'(t)\right]^n \sup_{0\leqslant s\leqslant t} ||u(s)||_{\phi(k,n,\ell)} \quad (\text{si } 0\leqslant t\leqslant \tfrac{T}{2}).$$

Quant à w_n , en prenant en compte les données initiales c'est-à-dire

$$D_t^j u_{n+1}(x,0) = D_t^j u(x,0), \qquad u_o(x,t) \equiv 0$$

$$D_t^j u_n(x,0) = D_t^j u(x,0).$$

$$(L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_n = f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_{n-1} \;, \quad \text{d'après} \quad (E)_k$$

$$|||u_n|||_{\ell} \leqslant C(k,\ell)\left\{|||u_n(x,0)|||_{N(k,\ell)} + t \sup_{0\leqslant s\leqslant t} ||f-C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_{n-1}||_{N(k,\ell)}\right\}$$

$$\leqslant C(k,\ell)\left\{|||u_n(x,0)|||_{N(k,\ell)} + t \sup_{0\leqslant s\leqslant t} ||f(s)||_{N(k,\ell)} + C_1(k,\ell)|||u_{n-1}|||_{N(k,\ell)+m-1}\right\}$$

$$|||u_n|||_\ell \leq C'(k,\ell)\left\{|||u_n(x,0)|||_{N(k,\ell)}+t\sup_{0\leq s\leq t}||f(s)||_{N(k,\ell)}+|||u_{n-1}|||_{N(k,\ell)+m-1}\right\}.$$

En réitérant n fois le raisonnement et en sachant que $u_0 \equiv 0$ $u_n(x,0) = u(x,0)$.

$$|||u_n|||_\ell \leq B_2(k,\ell,n)\left\{|||u(x,0)|||_{\phi(k,n,\ell)}+t\sup_{0\leq s\leq t}||f(s)||_{\phi(k,n,\ell)}\right\}$$

d'où, puisque $w_n = u_n$.

$$|||w_n|||_\ell \leq B_2(k,\ell,n)\left\{|||u(x,0)|||_{\phi(k,n,\ell)}+t\sup_{0\leq s\leq t}||f(s)||_{p(k,n,\ell)}\right\}.$$

Pour prouver (4.5), remarquons que g_n peut être mis sous la forme

(4.7) $$g_n = C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u_{n-1}-u_n) \qquad n = 1,2,\ldots$$

En effet $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n = g_n \Rightarrow (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})(u-u_n) = g_n$

$\Rightarrow (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u - (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u_n = g_n$

d'après l'hypothèse et l'identité (*)

$\Rightarrow f - [(L_m^{(k)} + Q_{m-2})u_n + C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_n] = g_n$

d'après (4.6), nous avons

$$f - [f - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_{n-1} + C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_n] = g_n$$

$C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_{n-1} - C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1 u_n = g_n$ d'où

$g_n = C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u_{n-1}-u_n)$ d'après le corollaire 3.1.

$$||g_n||_\ell = ||C_{m-k+1}\Delta_{k-2}\cdots\Delta_1(u_{n-1}-u_n)||_\ell \leq \sigma'_{k-1}(t)C(k,\ell)|||u_{n-1}-u_n|||_{\ell+m-1}$$

en faisant les mêmes calculs que (4.3), nous obtenons en prenant

$u_1 - u_o = u_1 - u + u$.

(4.5) $||g_n||_\ell \leqslant B_3(k,\ell,n)\left[t\sigma'_{k-1}(t)\right]^n \Big\{ |||u(x,0)|||_{\phi(k,n,\ell)} + t \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} ||f(x)||_{\phi(k,n,\ell}$

d'où le lemme.

<u>Remarque</u> :

Dans le cas $k = s+1$ le problème $(P)_{s+1}$ est bien posé et dans $(E)_{s+1}$ on peut prendre $N(s+1,\ell) = \ell+1$ ([4], [15]).

e. <u>Inégalité d'énergie</u>.

En utilisant la décomposition dans le lemme 4.1, montrons l'inégalité d'énergie $(E)_{k-1}$.

Soit

$$L(x) = \left|\begin{array}{cccc:cccc}
\mu_1(x)I_q & I_q & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\
 & & \ddots & I_q & & & & \\
 & & & \mu_s(x)I_q & & & & \\
\hdashline
 & & & & \lambda_1(x)I_q & I_q & & \\
 & 0 & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & \ddots & I_q \\
d_{m-1}(x) & \cdots\cdots & & d_{m-s}(x) & & & & \lambda_r(x)I_q
\end{array}\right|$$

une matrice de dimension $(s+r) \times (s+r)$; $(m-s \geq s)$ où les composantes sont des matrices de dimension $q \times q$ de fonctions C^∞ dans un certain domaine Ω ; $L(x)$ est donc une matrice de dimension $q.(s+r) \times q.(s+r)$ à éléments fonctions.

Supposons que $\lambda_j(x) - \lambda_i(x)$, $\mu_j(x) - \mu_i(x)$, $\lambda_j(x) - \mu_i(x)$ ne s'annulent jamais sur Ω si $i \neq j$ et introduisons les matrices

$$(5.1) \quad \ell_i(x) = d_{m-1}(x) + d_{m-2}(x)(\lambda_i(x)-\mu_1(x) +\ldots+d_{m-i}(x)(\lambda_i-\mu_{i-1})\ldots(\lambda_i-\mu_1) \qquad 1 \leq i \leq s$$

<u>Lemme</u> 5.1.-

Supposons que $\ell_i(x)$ soient divisibles par $(\lambda_i(x)-\mu_i(x))$ dans C^∞ alors il existe une matrice $N(x)$ avec $\det N = 1$ qui diagonalise $L(x)$.

<u>Preuve</u> :

On généralise pour cela les démonstrations de [3] (Lemme 5.1) et [15] ; pour une telle matrice

$$L(x) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ M & A_2 \end{bmatrix}$$

On peut construire une matrice N qui diagonalise L

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ B & N_2 \end{bmatrix} \qquad N^{-1} = \begin{bmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ R & N_2^{-1} \end{bmatrix}$$

avec N_1 et N_2 diagonalisant A_1 et A_2 respectivement et $\det N_1 = \det N_2 = 1$ si et seulement si $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq j\leq s\\ 1\leq i\leq r}}$ est telle que les b_{ij} matrices de dimension $q \times q$ vérifient

$$(\lambda_i-\mu_1)b_{i,1} = \frac{d_{m-1}(x)}{(\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_r)} \qquad i = 1,2,\dots,m-s = r$$

$$(\lambda_i-\mu_j)b_{ij} = \frac{d_{m-j}(x)}{(\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_r)} + b_{i,j-1} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,r \\ j = 2,3,\dots,s \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} d_{m-1}(x) = (\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_r)(\lambda_i-\mu_1)b_{i,1} & i = 1,\dots,r \\ d_{m-j}(x) = (\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_r)\left[(\lambda_i-\mu_j)b_{ij}-b_{i,j-1}\right] & j=2,3,\dots,s \end{array} \right. .$$

En faisant $i = j$ dans l'expression de d_{m-j} $(j = 1,\dots,s)$ on constate que cela est réalisable si et seulement si

$$\ell_i(x) = d_{m-1}(x) + d_{m-2}(x)(\lambda_i-\mu_1) + \dots + d_{m-i}(x)(\lambda_i-\mu_{i-1})\dots(\lambda_i-\mu_1)$$

est divisible par $(\lambda_i-\mu_i)$ dans C^∞ $\forall i$ $\quad i = 1,\dots,s.$ c.q.f.d.

Lemme 5.2.- [16]

Soit $\sigma(t)$ une fonction C^∞ positive et strictement croissante pour $t > 0$; si $\sigma(t)(\sigma'(t))^{-1} \in C^2([0,T])$ dans un certain intervalle $[0,T]$, alors $t\sigma'(t)$ est croissante pour $t > 0$ et il existe une constante C telle que

$t[\sigma'(t)]^2 \leq C\{\sigma(t)\sigma'(t) + t\sigma(t)\sigma''(t)\}$ soit réalisée

dans un certain intervalle $[0,T']$.

Montrons l'inégalité $(E)_{k-1}$.

Lemme 5.3.-

Sous les hypothèses du lemme 4.1, la solution $u \in [C^\infty(H)]^q$ de $(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})u = f$ vérifie l'inégalité suivante

(5.4) $|||u(t)|||_\ell \leq C(k-1,\ell)\left\{|||u(0)|||_{N(k-1,\ell)} + t \sup_{0\leq s\leq t} ||f(s)||_{N(k-1,\ell)}\right\}$

où $N(k-1,\ell)$ est un entier dépendant de P, $k-1$ et ℓ.

Preuve :

D'après le lemme 4.1, nous décomposons u en une somme $u = v_n + w_n$, v_n vérifie

(5.5) $$(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n = g_n$$

En effet, $$(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})(v_n + w_n) = f$$

$$(L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v_n + (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})w_n = f$$

$$(L_m^{(k-1} + Q_{m-2})v_n = f - (L^{(k-1)} + Q_{m-2})w_n$$ en posant

$g_n = f - (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})w_n$;

w_n étant déterminé par (4.6), il suffit de déterminer v_n.
D'après (4.4), il suffit d'avoir une estimation analogue à (4.4) pour v_n pour obtenir $(E)_{k-1}$.

Par simplification, oublions l'indice n et écrivons

(5.6) $\qquad (L_m^{(k-1)} + Q_{m-2})v = g \quad$ où $\quad v = v_n \quad$ et $\quad g = g_n$.

D'après [12] et [3], nous pouvons écrire Q_{m-2} comme combinaison linéaire des opérateurs

$$\Big[I_q, (D_t-\mu_1(x,t;D_x)), \dots, (D_t-\lambda_{m-s-2}(x,t;D_x)) \dots (D_t-\lambda_1(x,t;D_x)).(D_t-\mu_s(x,t;D_x)). \dots (D_t-\mu_1(x,t;D_x))\Big].$$

(5.7) $$Q_{m-2}(x,t;D_x,D_t) = \mathcal{a}_o(x,t;D_x)[D_t-\lambda_{m-s-2}(x,t;D_x)]\dots[D_t-\lambda_1(x,t;D_x)]. [D_t-\mu_s(x,t,D_x)]\dots[D_t-\mu_1(x,t;D_x] + \dots + \mathcal{a}_{m-2}(x,t;D_x)$$

où les $\mathcal{a}_j(x,t;D_x)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels matriciels de dimension $q \times q$ d'ordre j, $0 \leqslant j \leqslant m-2$.

Posons ([12], [3]), $\rho(t) = \sigma_{k-1}(t)[\sigma'_{k-1}(t)]^{-1}$,

(5.8) $$(\Lambda^{m-2}v, \Lambda^{m-3}[D_t-\mu_1(x,t;D_x)]v, \Lambda^{m-s-1}[D_t-\mu_{s-1}(x,t;D_x)]\dots[D_t-\mu_1(x,t;D_x)]v, \rho(t)\Lambda^{m-s-1}[D_t-\mu_s(x,t;D_x)]\dots[D_t-\mu_1(x,t;D_x)]v , \rho(t)[D_t-\lambda_{m-s-1}(x,t;D_x)]\dots[D_t-\lambda_1(x,t;D_x)].[D_t-\mu_s(x,t;D_x)]\dots[D_t-\mu_1(x,t;D_x)]v) = (V_o,\dots,V_{m-1})$$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix}$ et notons $V = \begin{pmatrix} V_o \\ \vdots \\ V_{m-1} \end{pmatrix}$, Λ opérateur pseudo-différentiel de symbole $(1+|\xi|^2)^{1/2}$.

Alors l'équation (5.6) peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

(5.9) $$D_tV = L_1V + BV + \rho^{-1}(t)C_1V + \rho'(t)\rho^{-1}(t)C_2V + \rho(t)G$$

où

$$L_1 = \left|\begin{array}{cccc|cccc} \mu_1 I_q & I_q & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & 0 & & \\ & & \ddots & I_q & & & & \\ & & & \mu_s I_q & & & & \\ \hline & & & & \lambda_1 I_q & I_q & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & I_q \\ \multicolumn{4}{c|}{0,\dots,0,\rho(t)C_{m-k+1},\dots,\rho(t)C_{m-s}} & & & & \lambda_{m-s} I_q \end{array}\right| \qquad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

B est un opérateur continu sur $(L^2(\mathbb{R}^n))^{m\times q}$ et les C_i $(i = 1,2)$ sont des matrices constantes.

D'après le corollaire 3.2,

$\rho(t)C_{m-j} = U_{jik}(x,t;\xi)(\lambda_i-\mu_i)$, $\forall\, k \leq j \leq i$ donc les fonctions $\ell_i(x)$ sont bien divisibles par $(\lambda_i-\mu_i)$, $\forall\, i$ et d'après le lemme 5.1, L_1 est diagonalisable

$$\rho(t) = \sigma_{k-1}(t)\left[\sigma'_{k-1}(t)\right]^{-1}$$

$\left|\dfrac{\rho'(t)}{\rho(t)}\right| \leq C\,\dfrac{1}{\rho(t)}$ car $\rho' \in C^1([0,T])$; or, d'après le lemme 5.2.

$$\frac{1}{\rho(t)} = \frac{\sigma_{k-1}(t)}{\sigma_{k-1}(t)} = \frac{t(\sigma'_{k-1}(t))^2}{t(\sigma_{k-1}(t)\sigma'_{k-1}(t))} \leqslant \frac{C\sigma_{k-1}(t)\{\sigma'_{k-1}(t)+t\sigma''_{k-1}(t)\}}{t\sigma_{k-1}(t)\sigma'_{k-1}(t)}$$

$$\leqslant C \frac{\sigma'_{k-1}(t)+t\sigma''_{k-1}(t)}{t\sigma'_{k-1}(t)} = C\frac{(t\sigma'_{k-1}(t))'}{t\sigma'_{k-1}(t)} \quad , \quad \text{d'où}$$

(5.10)

$$\left|\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\right| \leqslant C\frac{1}{\rho(t)} = C\frac{\sigma'_{k-1}(t)}{\sigma_{k-1}(t)} \leqslant \tilde{C}\frac{(t\sigma'_{k-1}(t))'}{(t\sigma'_{k-1}(t))} \quad .$$

Puisque L_1^1 est diagonalisable alors il est bien connu ([12], [3]) que la solution $v(x,t)$ de (5.9) vérifie l'inégalité d'énergie suivante :

$$(5.11) \quad ||v(t)||_\ell \leqslant M(k,\ell)\left\{\int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{s\sigma'_{k-1}(s)}||v(s)||_\ell ds + \int_0^t ||g(s)||_\ell ds\right\}.$$

Posons

$$w(t) = \int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{(s\sigma'_{k-1}(s))}||v(s)||_\ell ds$$ et prenons l'entier $n = n(k,\ell)$ $n(k,\ell) \geqslant M(k,\ell)$.

Alors de (5.1), nous avons

$$\partial_t\left[(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n}w(t)\right] = \left[t\sigma'_{k-1}(t)\right]^{-n}\partial_t w(t) - n(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1}(t\sigma'_{k-1}(t))'w(t)$$

$$= (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1}(t\sigma'_{k-1}(t))'||v(t)||_\ell - n(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1}(t\sigma'_{k-1}(t))'w(t)$$

$$= (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1}(t\sigma'_{k-1}(t))'(||v(t)||_\ell - nw(t))$$

$$\leqslant (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1}(t\sigma'_{k-1}(t))'(||v(t)||_\ell - M(k,\ell)w(t))$$

$$\leq (t\sigma'_{k-1}(t))^{-n-1}(t\sigma'_{k-1}(t))'\Big\{M(k,\ell)\int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{s\sigma'_{k-1}(s)}\,||v(s)||_\ell ds + M(k,\ell)\int_0^t ||g(s)||_\ell ds$$

$$+ M(k,\ell)\int_0^t \frac{(s\sigma'_{k-1}(s))'}{s\sigma'_{k-1}(s)}\,||v(s)||_\ell ds\Big\}.$$

$t\sigma'_{k-1}(t)$ monotone croissante.

$$\leq M(k,\ell)(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n(k,\ell)}\int_0^t ||g(s)||_\ell ds.$$

En intégrant cette égalité de 0 à t, nous obtenons

$$(t\sigma'_{k-1}(t))^{-n}w(t) \leq M(k,\ell)\int_0^t (s\sigma'_{k-1}(s))^{-n}\int_0^s ||g(\tau)||_\ell d\tau\, ds$$

$$\leq M(k,\ell)\int_0^t s(s\sigma'_{k-1}(s))^{-n}\sup_{0\leq\tau\leq s}||g(\tau)||_\ell ds$$

$$w(t) \leq M(k,\ell)(t\sigma'_{k-1}(t))^{n}\int_0^t s(s\sigma'_{k-1}(s))^{-n}\sup_{0\leq\tau\leq s}||g(\tau)||_\ell ds.$$

D'après le lemme 4.1 et le fait que $t\sigma'_{k-1}(t)$ soit monotone pour $g = g_{n(k,\ell)}$ nous avons l'inégalité suivante

$$||g(\tau)||_\ell \leq B_3(k,n,\ell)(\tau\sigma'_{k-1}(t))^{n(k,\ell)}\Big\{|||u(0)|||_{\phi(k,n,\ell)} + \sup_{0\leq\theta\leq\tau}||f(\Theta)||_{\phi(k,\ell,n)}\Big\}$$

puisque $t\sigma'_{k-1}(t)$ est monotone croissante $\tau \leq s \Rightarrow \tau\sigma'_{k-1}(\tau) \leq s\sigma'_{k-1}(s)$

$$\text{.13)}\quad \sup_{0\leq\tau\leq s}||g(\tau)||_\ell \leq B_3(k,\ell,n)(s\sigma'_{k-1}(s))^{n(k,\ell)}\Big\{|||u(0)|||_{\phi(k,\ell,n)} + \sup_{0\leq\tau\leq s}||f(\tau)||_{\phi(k,n,\ell)}\Big\}$$

$$w(t) \leq M(k,\ell)(t\sigma'_{k-1}(t))^{m(k,\ell)}\int_0^t B_3(k,\ell,n)\Big\{|||u(0)|||_{\phi(k,\ell,n)} + \sup_{0\leq\tau\leq s}||f(\tau)||_{\phi(k,n,\ell)}\Big\}$$

$$\leqslant M(k,\ell)t\left[t\sigma'_{k-1}(t)\right]^{n(k,\ell)}B_3(k,n,\ell)\left\{|||u(0)|||_{\phi(k,n,\ell)} + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}||f(s)||_{\phi(k,n,\ell)}\right\}$$

(5.14) $$|||v(t)|||_{\ell} \leqslant M'(k,\ell)B_3(k,n,\ell)t(t\sigma'_{k-1}(t))^{n(k,\ell)}\left\{|||u(0)|||_{\phi(k,n,\ell)} + \sup_{0\leqslant s\leqslant t}||f(s)||_{\phi(k,n,\ell)}\right\}.$$

En sachant que

$$\rho(t)||v(t)||_{\ell-1} \leqslant C||V||_{\ell}, \quad \frac{1}{\rho(t)} \leqslant \frac{(t\sigma'_{k-1}(t))}{t\sigma'_{k-1}(t)}$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t)_{\ell} \leqslant \frac{C}{\rho(t)}||V||_{\ell+1}$$

(5.15) $$|||v(t)|||_{\ell} \leqslant N(k,\ell)B_3(k,n(k,\ell+1))t(t\sigma'_{k-1}(t))^{n(k,\ell+1)-1} \times$$

$$\times \left\{|||u(0)|||_{\phi(k,n(k,\ell+1),\ell+1)} + \operatorname{Sup}_{0\leqslant s\leqslant t}||f(s)||_{\phi(k,n(k,\ell+1),\ell+1)}\right\}.$$

De (4.4) et (5.15) et du fait que $u = v_n + w_n$ nous avons le lemme 5.3.

f. <u>Fin de la démonstration de l'existence de la solution.</u>

Nous définissons la ε-translation $P_\varepsilon(x,t;D_x,D_t)$ de P par

(6.1) $$P_\varepsilon(x,t;D_x,D_t) = P(x(t+\varepsilon;D_x,D_t) \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$$

et pour P_ε nous avons les mêmes considérations que celles des paragraphes précédents en prenant ε comme un paramètre. Puisque $L^{(k-1)}_{m,\varepsilon}$ est strictement hyperbolique pour $\varepsilon > 0$ la résolubilité de $(P)_{k-1,\varepsilon}$ est assurée.

Si nous supposons que l'inégalité d'énergie $(E)_{k,\varepsilon}$ est vérifiée uniformément pour ε, alors on peut conclure que le problème de Cauchy pour $L_m^{(k-1)} = L_{m,0}^{(k-1)}$ est bien posé et que $(E)_{k-1,\varepsilon}$ est vérifiée uniformément par rapport à ε d'après le lemme 5.3.

Par conséquent, le théorème est prouvé par induction sur k.

3. DEMONSTRATION DE L'UNICITE DE LA SOLUTION.

L'unicité de la solution du problème (1) et (2) est garantie par l'existence d'une solution pour l'opérateur adjoint de h. L'opérateur adjoint de $h = (hij)$ $i,j = 1,\ldots,q$ est égal à la matrice transposée des opérateurs adjoints des $h_{ij}(x,t;D_x,D_t)$.

De ce fait, la matrice caractéristique de l'opérateur adjoint ${}^*h$ sera

$$ {}^*H = {}^*H(x,t;\xi,\tau) = {}^t[H(x,t;\xi,\tau)]. $$

D'où

$$ \begin{aligned} {}^tA\,{}^*H &= {}^tA\,{}^tH = {}^t(H.A) = {}^t(A.H) = {}^tH.{}^tA \\ &= {}^*H\,{}^tA \\ &= \det H.I_q. \end{aligned} $$

Soit un opérateur $b(x,t;D_x,D_t)$ de matrice caractéristique $B(x,t;\xi,\tau) = {}^tA(x,t;\xi,\tau)$.

On pose

$$ P^*(x,t;D_x,D_t) = {}^*h.b. $$

Par conséquent pour résoudre le problème de Cauchy associé à $\overset{*}{h}$ on procèdera comme pour l'opérateur h en remarquant que $\overset{*}{h}$ vérifie les hypothèses H_1 et H_2 et les conditions (A) et (B) lorsque h les vérifie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CHAZARAIN-A. PIRIOU - Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.
Gauthier-Villars - Paris, 1981.

[2] D. GOURDIN - Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278 - 1974.

[3] D. GOURDIN - Thèse d'Etat, 1978.

[4] D. GOURDIN - Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable. Domaine de dépendance.
Comm. Partial Differential Equation 4 (1979), n° 5, 447-507.

[5] V. JA IVRII - Sufficient conditions of regularly and completely regularly hyperbolicity.
Trudy Moscow Math. Soc. 33 (1975), 3 - 65.

[6] H. KADRI - Thèse de 3ème cycle, 1985, Lille.

[7] J.J. KOHN-L. NIRENBERG - An algebra of pseudo-differential operators.
Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 269-305.

[8] H. KUMANO-GO - Remarks on pseudo-differential operators.
J. Math. Soc. Japon 21 (1969), 413-439.

[9] S. MAC LANE-G. BIRKOFF - Algèbre.
Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[10] M. MECHAB - Thèse de 3ème cycle, 1983, Lille I.

[11] A. MENIKOFF - The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Amer. Jour. Math. 97 (1975), 548-558.

[12] S. MIZOHATA-Y.OHYA - Sur les conditions de E.E. Levi concernant des equations hyperboliques. Publ. RIMS, Kyoto, Univ. Ser. A-4 (1968), 511-526.

[13] S. MIZOHATA-Y.OHYA - Sur les conditions d'hyperbolicité des équations à caractéristiques multiples. II - Jap. Jour. Math. 40 (1971), 63-104.

[14] L. NIRENBERG - Pseudo-differential operators in global analysis Proc. Sympos. Pure Math. 16 (1970), Amer. Math. Soc. 149-167.

[15] T. NISHITANI - Some remarks on the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Jour. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 245-258.

[16] T. NISHITANI - On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Comm. in Partial Differential Equations, 3(4) 319-333 (1978).

[17] O.A. OLEINIK - On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Comm. in Partial Differential Equations, 23 (1970), 569-586.

[18] D. GOURDIN - Problèmes de Cauchy faiblement hyperboliques. Bulletin des Sciences. Maths 1982, p. 259-272.

[19] D. GOURDIN - Problèmes de Cauchy faiblement hyperboliques II. (A paraître J. Maths Kyoto University, 1987).

[20] H. KUMANO-GO - Pseudo-differential operators. M.I.T. Press, 1981.

DEUXIEME PARTIE

CONDITION SUFFISANTE D'UNICITE C^∞ DE CAUCHY POUR DES SYSTEMES D'ORDRE 1 A CARACTERISTIQUES MULTIPLES.

1. NOTATIONS - HYPOTHESES - RESULTATS.

a. Notations.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par (x,ξ) le point générique du fibré cotangent $T^*(\mathbb{R}^{n+1})$ avec

$$x = (x_0,x_1,\dots,x_n) = (x_0,x')$$
$$\xi = (\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n) = (\xi_0,\xi').$$

On utilisera les notations usuelles :

$$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \qquad \forall\, j = 0,1,\dots,n$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

$$\forall\, \alpha = (\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \quad \text{et} \quad |\alpha| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \,.$$

On désigne par

$\| \ \|$ la norme de $[L^2(\mathbb{R}^n)]^m$ par rapport à la variable x', $m \geq 2$.

$\| \ \|$ la norme de l'espace de Sobolev $[H_s(\mathbb{R}^n)]^m$.

Sur $\left[C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n\right]^m$, on définit les normes suivantes :

$$|||u|||^2 = \int_0^T ||u||^2 \exp\left[k(x_0-T)^2\right] dx_0$$

$$|||u|||_s^2 = \sum_{i=0}^{(s)} \int_0^T ||D_0^i u||_{s-i}^2 \exp\left[k(x_0-T)^2\right] dx_0$$

(s) désigne le plus petit entier plus grand ou égal à s.

Dans toute la suite, on désigne par :

$L_{x'}^\gamma$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels admettant un symbole homogène d'ordre γ par rapport à la variable ξ' et $S_{x'}^\gamma$ l'espace des symboles correspondants.

L_x^γ est la classe des opérateurs différentiels en x_0 et pseudo-différentiels en x' d'ordre $\gamma = \alpha + \beta$ en $x = (x_0,x')$ où α est l'ordre de l'opérateur en x_0 et $\beta \geq 0$ l'ordre de l'opérateur en x'. S_x^γ est l'espace des symboles correspondants.

$L_{x'}^{\gamma;r}$ est la classe des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre γ en x' dont l'espace des symboles correspondants est $S_{x'}^{\gamma;r}$ tels que ses symboles $a_0(x,x';\xi')$ admettent un développement de la forme

$$a(x_0,x';\xi') \sim a_0(x_0,x';\xi')|\xi'|^\gamma + a_1(x_0,x';\xi')|\xi'|^{\gamma-\frac{1}{r}} + \ldots$$
$$+ a_2(x_0;x';\xi')|\xi'|^{\gamma-\frac{2}{r}} + \ldots$$

où $\mathcal{a}_j(x_0,x';\xi') \in S^0_{x'}$.

$L^\gamma_{cl,x}$ est la classe des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre γ par rapport à la variable x'.

$S^\gamma_{cl,x'}$ est l'espace des symboles correspondants.

Rappelons que $p(x',\xi') \in S^\gamma_{cl,x'}$ $\iff$ il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$ une fonction $p_j \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ homogène de degré $\gamma-j$ telle que $(p - \sum_{j=0}^{k-1} p_j) \in S^{\gamma-k}$ pour tout entier $k \geq 0$.

b. Hypothèses.

Soit l'opérateur différentiel matriciel réel de dimension $m \times m$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ et d'ordre t.

$$h = \sum_{j=0}^{t} i^{t-j} h_{t-j}(x;D_x)$$

où $h_{t-j} = h_{t-j}(x;\xi)$ est une matrice de dimension $m \times m$ formée de fonctions $(h_{t-j})^\alpha_\beta$ polynomiales homogènes de degré $t-j$ en ξ et de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ en x $(0 \leq j \leq t)$ tel que la matrice

$$H = h_t$$

vérifie les hypothèses suivantes :

$\boxed{A}$

Hypothèse 1.

Le déterminant caractéristique $\det H$ possède une décomposition en facteurs H_s $(s = 1,\ldots,\sigma)$ notée :

$$\det H = (H_1)^{\nu_1} \ldots (H_s)^{\nu_s} \ldots (H_\sigma)^{\nu_\sigma}.$$

$H_s = H_s(x;\xi)$ est une fonction polynômiale en ξ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ en x telle que :

$$0 < \inf\{|H_s(x;I_x)| \ ; \ x \in \mathbb{R}^{n+1}\} \qquad (s = 1,\ldots,\sigma)$$

où $(I_x)_{x\in\mathbb{R}^{n+1}}$ est le champ de covecteur de coordonnée $\xi = (1,0,\ldots,0)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

La décomposition est une décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[\xi]$.

Chaque multiplicité ν_s est constante.

<u>Hypothèse</u> 2.

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et chaque $s = 1,\ldots,\sigma$ dans l'anneau principal Φ_s , localisé de $\mathbb{R}[\xi]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s , dont les éléments sont des fonctions à dénominateurs non divisibles par H_s dans $\mathbb{R}[\xi]$.

On a la forme réduite suivante de la matrice H à l'aide de ses facteurs invariants H_s . [9]

$$H_{\tilde{\Phi}_s} \quad \begin{pmatrix} (H_s)^{s} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\nu_s > 1 \qquad (s = 1,\ldots,\sigma)$.

ν_s est constante $\forall\, s = 1,\ldots,\sigma \qquad \nu_s = q^s =$ constante.

Hypothèse 3.

Le radical caractéristique

$$R = R(x;\xi) = \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(x;\xi)$$

$$= R(x;I_x) \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} (\xi_0 - \lambda_j(x;\xi'))$$

a ses racines $\lambda_j(x;\xi')$ distinctes deux à deux et en posant

$$H_1(x;\xi) = H_1(x;I_x) \prod_{i=1}^{\tau_1} [\xi_0 - \lambda_i(x;\xi')]$$

$$\vdots$$

$$H_s(x;\xi) = H_s(x;I_x) \prod_{i=\tau_{s-1}+1}^{\tau_s} [\xi_0 - \lambda_i(x;\xi')]$$

$$\vdots$$

$$H_\sigma(x;\xi) = H_\sigma(x;I_x) \prod_{i=\tau_{\sigma-1}+1}^{\tau_\sigma} [\xi_0 - \lambda_i(x;\xi')].$$

On a

$$0 = \tau_0 < \tau_1 \ldots < \tau_s < \ldots < \tau_\sigma \quad , \qquad d^0\, H_s = \tau_s - \tau_{s-1}$$

et les inégalités suivantes

$$0 < \inf\{|\lambda_i(x;\xi') - \lambda_j(x;\xi')| \quad ; \quad i \neq j, \quad x \in \Omega, \quad |\xi'| = 1\}.$$

$$0 < \inf\{|H_s(x;I_x)| \ ; \ x \in \Omega, \quad 1 \leqslant s \leqslant \sigma\}.$$

On note

A_i^k le cofacteur de H_k^i.

$A_{i,j}^{k,\ell}$ le cofacteur de $H_{k,\ell}^{i,j}$ dans le développement de det H.

D'après les hypothèses 1, 2, 3, il s'ensuit que :

les facteurs H_s sont uniques à un facteur multiplicatif près appartenant à $C^\infty(\Omega)$ et borné inférieurement en valeur absolue. Les multiplicités ν_s sont indépendantes de H_s vérifiant les hypothèses.

Avec la convention de sommation d'Einstein, on a donc :

$$\theta \begin{cases} H^i_k A^k_\ell = A^i_k H^k_\ell = (\det H)\delta^i_\ell = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s} \delta^i \\ A^k_i A^\ell - A^k_j A^\ell_i = (\det H) A^k_i A^\ell_j = \prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s} A^k_i A^\ell_j \ . \end{cases}$$

On pose τ = degré de $\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s} = \sum_{s=1}^{\sigma} (\tau_s - \tau_{s-1})^{q^s}$ et

τ_i = multiplicité du zéro $\lambda_i(x,\xi')$ du polynôme $\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s}$ en ξ_o.

On suppose que :

$\boxed{B}$

$t = 1$ et il existe m mineurs de rang $(m-1)$ non nuls quels que soient $\xi_o = \lambda_i(x;\xi')$, $(i = 1,\ldots,\tau_\sigma)$.

Quitte à former un changement dans l'ordre des équations et des inconnus, on peut supposer :

$A^1_1(x;\lambda_i) \neq 0$, $\forall\ \xi'$, $x = (0,0)$ et $i = 1,\ldots,$ tel que $r_i > 1$

$A^2_2(x;\lambda_i) \neq 0$, $\forall\ \xi'$, $x = (0,0)$ et $i = 1,\ldots,$ tel que $r_i > 1$

$\vdots$

$A^m_m(x,\lambda_i) \neq 0$,

$\boxed{C}$

$$K_1^1(0,0;\xi_0 = \lambda_i(0,0;\xi'),\xi') \neq 0, \quad \forall\, \xi' \in S^{n-1}_{\xi'}$$

et $i = 1,\dots,\tau_{\sigma/r_i} > 1$

où K_1^1 est le polynome sous-caractéristique du sytème

$$K_1^1 = \left[H_j^{*i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial \xi_\lambda} H_j^i\right] A_i^1 A_1^j + \frac{1}{2} H_j^i \left[\frac{\partial A_1^j}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_i^1}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_i^1}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_1^j}{\partial x_\lambda}\right] \quad .$$

Nous allons montrer les théorèmes suivants :

c. Résultats.

Théorème 1.- [6]

Sous les hypothèses A, B et C

il existe une constante $C > 0$ indépendante de u telle que $\tilde{r}$, T, k^{-1} suffisamment petits, on ait l'estimation suivante

$$k|||u|||^2_{-1+\frac{1}{q}} \leqslant C|||hu|||^2 \quad \text{pour tout } u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m$$

où

$$\Omega = \{x = (x_0,x') \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; ||x'|| < \tilde{r},\ 0 \leqslant x_0 \leqslant T\}$$

$$q = \max_{s=1,\dots,} q^s = q^1 \quad (\text{on peut supposer } q^1 \geqslant q^2 \geqslant \dots \geqslant q^\sigma)$$

avec $|||.|||$ et $|||.|||_s$ définies à la page 44.

Théorème 2.- [6]

Supposons les hypothèses du théorème 1 satisfaites, alors il existe un voisinage Ω' de l'origine contenant $\bar{\Omega}$ tel que si $u \in [H^{Loc}_{(1)}(\Omega')]^m$ satisfait $hu = 0$ et $u = 0$ dans $\{(x_o,x') \in \Omega'$; $x_o < 0$ alors $u \equiv 0$ dans Ω.

2. REDUCTION DE L'OPERATEUR h.

On décompose le symbole $h(x;\xi)$ de h en symboles homogènes d'ordre t, $t-1$, $t-2,\ldots,0$.

(2.1) $$h(x;\xi) = i^t H(x;\xi) + i^{t-1}H^*(x;\xi) + i^{t-2}H^{**}(x;\xi) + \ldots$$

avec $$d^oH = t, \quad d^oH^* = t-1, \quad d^oH^{**} = t-2,\ldots$$

Soit $\mathcal{a}$ un opérateur matriciel $m \times m$ dont les éléments $\mathcal{a}^i_j \in L^{\tau-t}_x$ sont de la forme

(2.2) $$\mathcal{a}^i_j = \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s}(x;I_x)} \left[i^{\tau-t}A^i_j + i^{\tau-t-1}A^{*i}_j \right]$$

où $A^i_j \in L^{\tau-t}_x$ a pour symbole $A^i_j(x;\xi)$ défini antérieurement à partir de la matrice des cofacteurs de H et $A^{*i}_j \in L^{\tau-t-1}_x$ a un symbole $A^{*i}_j(x;\xi) \in S^{\tau-t-1}_x$ que l'on déterminera par la suite.

On pose :

(2.3) $$b = \mathcal{a}h$$

(2-4) $$\partial_i = D_{x_o} - \lambda_i(x;D_x) \qquad 1 \leq i \leq \tau_\sigma$$

(2.5) $$\Pi_\tau = \partial_1^{r_1}\partial_2^{r_2}\ldots\partial_{\tau_\sigma}^{r_{\tau_\sigma}}$$ avec

$$r_1 = r_2 = \ldots\ldots = r_{\tau_1} = q^1$$

$$r_{\tau_1+1} = r_{\tau_1+2} = \ldots = r_{\tau_2} = q^2$$

$$r_{\tau_{\sigma-1}+1} = r_{\tau_{\sigma-1}+2} = \ldots = r_{\tau_\sigma} = q^\sigma$$

donc $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{\tau_\sigma}$ puisque $q^1 \geqslant q^2 \geqslant \ldots \geqslant q^\sigma$.

On décompose alors le symbole $b(x;\xi)$ de b en symboles homogènes d'ordre τ, $\tau-1$, $\tau-2,\ldots$

$$b(x,\xi) = B(x,\xi) + B^*(x;\xi) + B^{**}(x;\xi) + \ldots$$

D'après (2.1), (2.3) et θ, on a :

$$B(x;\xi) = \prod_{j=1}^{\tau_\sigma}\left[\xi_0 - \lambda_j(x;\xi)\right]^{r_j}.\mathrm{Im} \tag{2.6}$$

où I_m est la matrice identité d'ordre $m \times m$.

On définit $\Pi_{\tau-1}$ par

$$i^{\tau-1}\Pi_{\tau-1} = i^\tau\left[B(x;\xi) - \Pi_\tau\, I_m\right] + i^{\tau-1}B_{\tau-1}\,. \tag{2.7}$$

En liaison avec λ_j et ∂_j, on définit $\tilde{\lambda}_j$ et Δ_j, $0 \leqslant j \leqslant \tau_\sigma$ comme suit :

Soit
$$
\begin{aligned}
\tilde{\tau}_0 &= 0\\
\tilde{\tau}_1 &= r_{\tau_\sigma} = q^\sigma\\
\tilde{\tau}_2 &= r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma -1}\\
&\vdots\\
\tilde{\tau}_j &= r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma -1} + \dots r_{\tau_\sigma -j+1}\\
&\vdots\\
\tilde{\tau}_{\tau_\sigma} &= r_{\tau_\sigma} + r_{\tau_\sigma -1} + \dots + r_1\\
&= q^\sigma(\tau_\sigma - \tau_{\sigma-1}) + \dots + q_1(\tau_1-\tau_0) = \tau .
\end{aligned}
$$

On pose

$\Delta_0 = \partial_0$ et pour $0 \leqslant k \leqslant \tau_\sigma - 1$, $\tilde{\tau}_k + 1 \leqslant j \leqslant \tilde{\tau}_{k+1}$

$\tilde{\lambda}_j(x;D_{x'}) = \lambda_{\tau_\sigma - k}(x;D_{x'})$ et

$\Delta_j(x,D_x) = Dx_0 - \tilde{\lambda}_j(x;D_{x'}) = \partial_{\tau_\sigma - k}$.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_{r_{\tau_\sigma}} = \partial_{\tau_\sigma}\\
&\Delta_{r_{\tau_\sigma}+1} = \dots = \Delta_{r_{\tau_\sigma}+r_{\tau_{\sigma-1}}} = \partial_{\tau_\sigma -1}\\
&\vdots\\
&\Delta_{r_{\tau_r}+\dots+r_2+1} = \dots = \Delta_{\tau-1} = \Delta_\tau = \partial_1 .
\end{aligned}
$$

Les ∂_j et les Δ_j sont des dérivées directionnelles et peuvent être utilisées comme des dérivées, comme l'expliquent les lemmes suivants :

Lemme 2.1.- [2], [3], [10].

a) Pour tout $j \geq 0$, il existe $\mathcal{a}_i(x;D_{x'}) \in L^i_{x'}$, tels que

$$\Delta_j\Delta_{j-1}\ldots\Delta_o = \sum_{i=0}^{j} \mathcal{a}_i(x,D_{x'})D_{x_o}^{j-1} + T_1$$ où T_1 représente les termes d'ordre inférieur

$$T_1 = \sum_{i=0}^{j-1} C_i(x;D_{x'})D_{x_o}^{j-i-1} \qquad \text{ordre de } C_i \leq i .$$

b) Réciproquement, il existe $b_i(x,D_{x'}) \in L^i_{x'}$, tels que

$$D_{x_o}^j = \sum_{i=0}^{j} b_i(x,D_{x'})\Delta_{j-i}\Delta_{j-i-1} \ldots \Delta_o + T_2 \qquad \text{où}$$

$$T_2 = \sum_{i=0}^{j-1} d_i(x,D_{x'})\Delta_{j-i-1}\Delta_{j-i-2}\ldots\Delta_o \qquad \text{ordre de } d_i \leq i$$

avec $\Delta_k \equiv 0$ pour $k \leq 0$.

Corollaire 2.1.-

Tout opérateur de L^k_x (k entier non négatif) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=0}^{k} C_i(x;D_{x'})\Delta_{k-i}\Delta_{k-i-1} \ldots\Delta_o + T$$

où $C_i \in L^i_{x'}$ et $T \in L^{k-1}_x$.

Preuve :

C'est une application de la partie (b) du lemme précédent.

Corollaire 2.2.-

$$(2.8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } C_{\tau-i} \in (L^{\tau-i}_{x'})_{m\times m} \text{ tels que} \\ \Pi_{\tau-1} = C_{\tau-1}(x;D_{x'}) + C_{\tau-2}(x,D_{x'})\Delta_1 + \ldots + \\ \qquad + C_{\tau-i}(x;D_{x'})\Delta_{\tau-1}\ldots\Delta_o + C\Delta_{\tau-1}\ldots\Delta_o + T. \end{array} \right.$$

Avec $T \in (L_{X'}^{\tau-2})_{m\times m}$ où

$(L_{X'}^{\tau-i})_{m\times m}$ (respectivement $(L_{X'}^{\tau-2})_{m\ m}$) désigne l'espace des matrices $m \times m$ dont les éléments appartiennent à $L_{X'}^{\tau-i}$ (respectivement $L_{X'}^{\tau-2}$).

Définition 2.1.-

(2.9) Pour $1 \leq j \leq \tau_\sigma$, on pose

$$L_j(x_0,x';\xi') = \Pi^0_{\tau-1}(x;\xi_0=\lambda_j(x,\xi'),\xi')$$

où $\Pi^0_{\tau-1}(x;\xi)$ est le symbole principal de $\Pi_{\tau-1}(x;D_x)$.

Remarquons que

$$L_j(x_0,x';\xi') = \Pi^0_{\tau-1}(x;\xi_0 = \lambda_j(x,\xi'),\xi')$$

$$= C_{\tau-1}(x,\xi')+C_{\tau-2}(x;\xi')(\lambda_j(x;\xi')-\tilde{\lambda}_1(x;\xi') +$$

$$+ C_{\tau-1-\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(\lambda_j(x,\xi')-\tilde{\lambda}_{\tilde{\tau}_{\tau_\sigma-j}}(x;\xi'))\ldots(\lambda_j(x,\xi)-\tilde{\lambda}_1(x,\xi'))$$

Lemme 2.2.- [2], [3].

$L_j(x,\xi')$ admet $\dfrac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_0 = \lambda_j(x;\xi'),\xi') \times \dfrac{1}{\prod\limits_{s=1}^{\sigma}(H_s(x;I_x))^{q^s}}$.

Comme valeur propre et pour vecteur propre associé

$$[A_1^1,A_1^2,\ldots,A_1^m]^t\ (x;\xi_0 = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

$\forall\ \lambda_j$ racine en ξ_0 de H_s tel que $\nu_s > 1$.

Remarque 1.

En appelant plus généralement, pour $\ell = 1,\dots,m$

$$K_\ell^\ell = \left[H_j^{*i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j \partial \xi_\lambda} H_j^i\right] A_i^\ell A_\ell^j + \frac{1}{2} H_j^i \left[\frac{\partial A_\ell^j}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_i^\ell}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_i^\ell}{\partial \xi_\lambda}\frac{\partial A_\ell^j}{\partial x_\lambda}\right] .$$

On a

$$A_1^1 K_\ell^\ell = A_\ell^\ell K_1^1 \quad \text{modulo } \xi_o - \lambda_j . \tag{2.10}$$

Pour tout λ_j racine en ξ_o de H_s tel que $\nu_s > 1$ et plus généralement

$$A_j^i K_k^\ell \equiv A_k^\ell K_j^i .$$

Proposition 2.1.- [5]

Sous les hypothèses (A), (B) et (C) il existe un opérateur

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma} (H_s(x,I_x))^{q^s}} [A+A^*]$$

tel que la matrice L_j définie par (2.9) vérifie :
pour tout j avec $\lambda_j(x,\xi')$ racine de H_s , on a :

$$[L_j(x;\xi')]_k^\ell \equiv 0 \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, \xi' \text{ et } \ell \neq k$$

$$[L_j(x,\xi')]_\ell^\ell = \frac{K_1^1}{A_1^1}(x,\xi_o = \lambda_j(x,\xi'),\xi') . \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma}(H_s(x,I_x))^{q^s}}$$

Et par suite

$$\left|[L_j(x;\xi')]_\ell^\ell\right| \geq \sigma_o |\xi'|^{\tau-1} , \quad \forall\, \ell = 1,\dots,m$$

avec $\sigma_o > 0$ et $(x;\xi') \in U \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ où U est un voisinage de l'origine.

Proposition 2.2.- [5], [6].

Sous les hypothèses A, B et C, il existe un opérateur matriciel

$$A^* = (A_j^{*i})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

avec $A_j^{*i} \in L_X^{\tau-t-1}$ ayant un symbole $A_j^{*i}(x;\xi^*) \in S_X^{\tau-t-1}$ tel que à l'opérateur propre

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{\sigma} (H_s)^{q^s}(x;I_x)} [A + A^*] \quad ;$$

on ait un opérateur

$$b = \mathcal{A}.h = i^\tau B_\tau(x;D_x) + i^{\tau-1}B_{\tau-1}(x,D_x) + i^{\tau-2}R_{\tau-2}(x,D_x)$$

où $B_i(x,\xi)$ est la partie homogène de degré i en ξ du symbole de l'opérateur b, $B_i(x;D_x)$ est l'opérateur de symbole $B_i(x,\xi)$ et $R_{\tau-2}(x;D_x)$ est le reste d'ordre $\tau-2$, vérifiant en posant :

$$E = \sigma_{\tau-1}\left[b - i^\tau \,\Pi_\tau I_m\right]$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^i E\right]_k^\ell (x;\xi_0 = \lambda_j(x;\xi'),\xi') = 0 \quad \text{pour } \ell \neq k, \quad x \in \Omega', \quad \xi' \neq 0$$

et $0 \leqslant i \leqslant q_j-2$.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^i E\right]_\ell^\ell (x;\xi_0 = \lambda_j(x,\xi'),\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^i \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right](x;\xi_0 = \lambda_j(x,\xi'),\xi')$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^i \frac{K_1^1}{A_1^1}\right](x;\xi_0 = \lambda_j(x,\xi'),\xi')$$

$0 \leqslant i \leqslant q_j-2$, $\ell = 1,\dots,m$ et $x \in \Omega$, $\xi' \neq 0$.

Preuve :

Pour simplifier les calculs, on suppose que $\prod_{s=1}^{\sigma}(H_s(x,I_s))^{q^s} = 1$ et $q^s = q_s$.

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur j allant de 0 à q_i-2.

Pour $j = 0$, le résultat est montré par le lemme 1.2 et la proposition 1.1.

Nous avons aussi les relations suivantes :

$$B = AH = \det H.Im = \prod_{s=1}^{\sigma}(H_s)^{q_s}.I_m$$

$$B^* = A^*H + AH^* + \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_\gamma} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_\gamma}$$

$$\sigma_{\tau-1}\left[b - i^\tau \Pi_\tau . I_m\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = i^{\tau-1}B^*(x;\xi_0 = \lambda_i(x;\xi'),\xi')$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0}\sigma_{\tau-1}\left[b-i^\tau\Pi_\tau . I_m\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = i^{\tau-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)B^*\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j\sigma_{\tau-1}\left[b-i^\tau\Pi_\tau . I_m\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = i^{\tau-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^jB^*\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{q_i-2}\sigma_{\tau-1}\left[b-i^\tau\Pi_\tau . I_m\right](x;\xi_0=\lambda_i(x,\xi'),\xi') = i^{\tau-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{q_i-2}B^*\right](x;\xi_0=\lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

$$= i^{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{q_i-2}\left[B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2 B}{\partial \xi_\gamma \partial x_\gamma}\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

pour $j = 0,\ldots,q_i - 2$.

Nous avons

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j\sigma_{\tau-1}\left[b-i^\tau\Pi_\tau . I_m\right](x;\xi_0=\lambda_i(x;\xi'),\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^jE\right](x;\xi_0=\lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

$$= i^{\tau-1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^j\left[B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}\right]\right)(x;\xi_o=\lambda_i(x;\xi'),\xi')$$

en sachant que $\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^j \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}\right)(x;\xi_o=\lambda_i,\xi') = 0$ si $0 \leqslant j \leqslant q_i-2.$

En désignant par A_ℓ la $^{\text{ième}}$ colonne de A, nous avons

$$A_\ell^\ell\left(B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}\right).A_\ell =$$

$$= \left[\sum_{j,k} A_j H_k^{*j} A_\ell^k + \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} H_k^j\left(\frac{\partial A_j^\ell}{\partial x_\gamma}\cdot\frac{\partial A_\ell^k}{\partial\xi_\gamma} - \frac{\partial A_j^\ell}{\partial\xi_\gamma}\cdot\frac{\partial A_\ell^k}{\partial x_\gamma}\right)\right]A_\ell + (H_i)^{q_i-1} P_\ell,$$

$\ell = 1,\dots,m$, avec P_ℓ une matrice $m \times m$ hypothèse de récurrence.

Nous supposons avoir déjà calculé $B^*(x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi'),\xi')$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)B^*\right](x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi'),\xi'),\dots,\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{j-1}B^*\right](x;\xi_o = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

tels que

$$E_k^\ell(x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)E\right]_k^\ell(x;\xi_o = \lambda_i(x,\xi'),\xi') = \dots$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{j-1}E\right]_k^\ell(x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = 0, \quad \ell \neq k$$

et

$$E_\ell^\ell(x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}(x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi'),\xi')$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{j-1}E\right]_\ell^\ell(x;\xi_o=\lambda_i(x;\xi'),\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{j-1}\frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right](x;\xi_o = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$$

pour $\ell = 1,\dots,m.$

Calculons donc $\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^j B^*\right](x;\xi_o = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$ de telle sorte que

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j E\right]_k^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i(x;\xi'),\xi') = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \neq k$$

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})E\right]_\ell^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi') = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi').$$
$$\ell = 1,\ldots,m.$$

Posons $N = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j E\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi')$.

Résolvons d'abord les équations

$N_k^\ell = 0$ pour $\ell \neq k$.

Elles s'écrivent de la manière suivante

$$\left\{(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j\left[A^*H + AH^* + \sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_\gamma}\frac{\partial H}{\partial x_\gamma} - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_\gamma\partial x_\gamma}\right]\right\}_k^\ell(x,\xi_0=\lambda_i,\xi') = 0.$$

Nous pouvons réduire les équations sous la forme

$$\sum_{i=1}^{m}\left[((\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j A_i^{*\ell})H_k^i\right](x;\xi_0=\lambda_i,\xi') = C_k^\ell(x;\xi_0=\lambda_i,\xi')$$

où C_k^ℓ second membre connu puisque

$A^*(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi'),\ldots,((\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{j-1}A^*)(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi')$ sont déjà déterminés.

Choisissons

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j A_1^{*1}\right](x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = \ldots = \left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j A_m^{*m}\right](x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = 0$$

$\Longrightarrow$ $N_k^\ell = 0$ s'écrit sous la forme

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\ell}} (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j A_i^* H_k^i\right](x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = C_k^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi')$$
$$k = 1,\ldots,m, \quad k \neq \ell .$$

En fixant ℓ dans $1,\ldots,m$, nous obtenons un système de $(m-1)$-équations à $m-1$ inconnues

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j A_i^{*\ell}(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') \qquad (i = 1,\ldots,m \text{ et } i \neq \ell)$$

puisque le $\det\limits_{\substack{i\neq\ell \\ k\neq\ell}} (H_k^i)\ (x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = A_\ell^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') \neq 0$ par hypothèse.

Nous pouvons appliquer la règle de Cramer à ce système.

Par suite, les $(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j A_i^{*\ell}(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi')$ pour $\begin{array}{l}\ell = 1,\ldots,m \\ i = 1,\ldots,m\end{array}$

sont déterminés.

Donc les N_ℓ^ℓ sont déterminés pour $\ell = 1,\ldots,m$.

Calculons ces quantités.

Nous avons :

$$\left[B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma}\right].A_\ell = \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} A_\ell + (H_i)^{q_i-1} P_\ell$$

d'où

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j \left[(B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma})A_\ell\right] = (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j \left[\frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} . A_\ell\right] + (H_i)^{q_i-j-1} P_{k,j}$$

$$\sum_{k=0}^{j} C_j^k (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{j-k} (B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma})(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^k A_\ell =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} C_j^k (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{j-k} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} . (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^k . A_\ell + (H_i)^{q_i-j-1} P_{\ell,j} .$$

D'où

$$\left[(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j (B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma})\right] A_\ell =$$

$$= - \sum_{k=1}^{j} C_j^k (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{j-k} (B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma})(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^k A_\ell +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j} C_j^k \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^{j-k} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^k A_\ell + (H_i)^{q_i-j-1} P_{\ell,j} \ .$$

Par hypothèse de récurrence cela devient en $(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi')$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^j \left(B^* - \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{n} \frac{\partial^2 B}{\partial\xi_\gamma \partial x_\gamma}\right)\right] A_\ell \ (x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') =$$

$$= - \sum_{k=1}^{j} C_j^k \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^{j-k} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^k A_\ell \ (x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') +$$

$$\sum_{k=0}^{j} C_j^k \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^{j-k} \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^k A_\ell (x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right] A_\ell \ (x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') \ .$$

Montrons maintenant que

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell}\right](x;\xi_0=\lambda_i(x;\xi'),\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^j \frac{K_1^1}{A_1^1}\right](x;\xi_0 = \lambda_i(x;\xi_0'),\xi')$$

pour $\ell = 1,\ldots,m$ et $j = 0,\ldots,q_i-2$.

D'après l'article [2]

$$K_\ell^\ell A_1^1 = K_1^1 A_\ell + (H_i)^{q_i-1} Q_\ell \ ;$$

d'où $$\frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} = \frac{K_1^1}{A_1^1} + (H_i)^{q_i-1} \frac{Q_\ell}{A_1^1 A_\ell^\ell} \ .$$

Nous avons donc pour $0 \leqslant j \leqslant q_i-2$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^j \frac{K_1^1}{A_1^1} + (H_i)^{q_i-1-j} R_{\ell,j}$$

$$\Longrightarrow \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \right](x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j \frac{K_1^1}{A_1^1} \right](x;\xi_0 = \lambda_i,\xi').$$

Ainsi en composant N par A_ℓ à droite, nous avons

$$N_k^\ell N_\ell^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = N_\ell^\ell A_\ell^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi')$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \right] A_\ell^\ell \,(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi')$$

d'où $N_\ell^\ell(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi') = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^j \frac{K_\ell^\ell}{A_\ell^\ell} \right] (x;\xi_0=\lambda_i,\xi')$.

Il existe un polynôme $A^*(x;\xi_0,\xi')$ en ξ_0 de degré $\tau\text{-}t\text{-}1$ (donc $\mathcal{A}(x,\xi_0,\xi')$ existe et de degré $\tau\text{-}t$ en ξ_0) puisque pour chaque λ_i $(1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma)$ $A^*(x;\xi_0 = \lambda_i,\xi'),\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{q_i-2} A^*(x;\xi_0=\lambda_i,\xi')$ sont déterminés et prennent les valeurs précédentes car le nombre de conditions est inférieur à $\tau\text{-}t$.

En effet, pour chaque λ_i nous avons q_i-1 conditions. Comme $1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma$. Nous avons au total $\sum_{s=1}^{\tau_\sigma} (q_s-1)$ conditions

$\Rightarrow \sum_{s=1}^{\tau_\sigma} (q_s-1) \leqslant \tau\text{-}t \rightarrow \sum_{s=1}^{\tau_\sigma} q_s - \tau_\sigma \leqslant \tau\text{-}t \Rightarrow \tau-\tau_\sigma \leqslant \tau\text{-}t \Rightarrow t \leqslant \tau_\sigma$ vérifie par hypothèse, ainsi la proposition est démontrée.

<u>Proposition</u> 2.3.- [6]

Sous les hypothèses A, B et C, on peut fixer les valeurs des

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{\tau-t-1} A^*(x,\xi_0=\lambda_1,\xi'),\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{\tau-t-2} A^*(x,\xi_0=\lambda_1,\xi')\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0}\right)^{\tau-t-\tau_\sigma+1} A^*(x,\xi_0=\lambda_1,\xi')$$

telles que les matrices $e_{\tau-1}(x;\xi'),e_{\tau-2}(x;\xi'),\ldots,e_0(x;\xi')$ issues du développement de $\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi')$

$$\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi') = \sum_{j=1}^{\tau} e_{\tau-j}(x;\xi')(\xi_o-\tilde{\lambda}_{j-1})\dots(\xi_o-\tilde{\lambda}_o)$$

avec $\xi_o - \tilde{\lambda}_o \equiv 1$

commutent entre elles deux à deux.

Preuve :

Examinons le cas particulier où $\sigma = 2 = \tau_\sigma$ (le cas où $\sigma = 1$, cf. [7]). Il existe deux racines distinctes λ_1 et λ_2 de multiplicités respectives q_1 et q_2.

$\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi')$ peut se développer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi') &= e_{\tau-1}(x,\xi') + e_{\tau-2}(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2) + \dots + \\ &+ e_{\tau-q_2+1}(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-2} + e_{\tau-q_2}(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-1} + e_{\tau-q_2-1}(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2)^{q_2} + \\ &+ e_{\tau-q_2-2}(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2)^{q_2}(\xi_o-\lambda_1) + \dots + \\ &+ e_1(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2)^{q_2}(\xi_o-\lambda_1)^{q_1-2} + e_o(x,\xi')(\xi_o-\lambda_2)^{q_2}(\xi_o-\lambda_1)^{q_1-1} .\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.2, nous savons que

$$(\frac{\partial}{\partial\xi})\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o=\lambda_i,\xi') = (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j \frac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o=\lambda_i,\xi').I_m \quad \text{où} \quad 0 \leq j \leq q_i-2, \quad i = 1,2$$

$$\Rightarrow \quad \Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o=\lambda_2,\xi') = e_{\tau-1}(x,\xi') = \frac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o=\lambda_2,\xi').I_m .$$

$$\vdots$$

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{q_2-2}\Pi^o_{-1}(x;\xi_o=\lambda_2,\xi') = (q_2-2)!e_{\tau-q_2+1}(x,\xi') = (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{q_2-2}\frac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o=\lambda_2,\xi').I_m .$$

Montrant ainsi que $e_{\tau-1}(x,\xi'), e_{\tau-2}(x,\xi'), \dots, e_{\tau-q_2+1}$ sont des matrices scalaires.

Toujours d'après la proposition 2.2.

$$\Pi^{o}_{\tau-1}(x;\xi_o=\lambda_1,\xi') = \frac{K^1_1}{A^1_1}(x;\xi_o=\lambda_1,\xi').I_m .$$

Nous avons que

$$\Pi^{o}_{\tau-1}(x;\xi_o=\lambda_1,\xi') = e_{\tau-1}(x,\xi')+e_{\tau-2}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)+e_{\tau-3}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^2 +$$

$$\dots + e_{\tau-q_2+1}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-2}+e_{\tau-q_2}(x,\xi').(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-1}+e_{\tau-q_2-1}(x,\xi').(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2} =$$

$$= \frac{K^1_1}{A^1_1}(x;\xi_o=\lambda_2,\xi')Im + \left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)\frac{K^1_1}{A^1_1}(x,\xi_o=\lambda_2,\xi')(\lambda_1-\lambda_2).I_m + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(q_2-2)!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{q_2-2}\frac{K^1_1}{A^1_1}\right](x;\xi_o=\lambda_2,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-2}.I_m +$$

$$+ e_{\tau-q_2}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-1} + e_{\tau-q_2-1}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2} = \frac{K^1_1}{A^1_1}(x;\xi_o=\lambda_1,\xi').I_m.$$

Par conséquent, $\left[e_{\tau-q_2}(x,\xi') + e_{\tau-q_2-1}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)\right]$ est une matrice scalaire.

Soient A et B deux matrices telles que $\alpha A + \beta B = x.I_m$ $(\alpha,\beta,x \in R)$.

$$\text{Nous avons} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha\, AB + \beta B^2 = xB \\ \alpha\, BA + \beta B^2 = xB \end{array}\right\} \Longrightarrow AB = BA.$$

A et B commutent.

Aussi de la même manière, nous pouvons dire que $e_{\tau-q_2}$ et $e_{\tau-q_2-1}$ commutent.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)\Pi^o_{\tau-1}\right](x;\xi_o = \lambda_1,\xi') = e_{\tau-2}(x,\xi') + 2e_{\tau-3}(\lambda_1-\lambda_2) + \dots +$$

$$+ (q_2-2)e_{\tau-q_2+1}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-3} + (q_2-1)e_{\tau-q_2}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-2} +$$

$$+ q_2 e_{\tau-q_2-1}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2-1} + e_{\tau-q_2-2}(x,\xi')(\lambda_1-\lambda_2)^{q_2} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)\frac{K_1^1}{A_1^1}\right](x;\xi_o = \lambda_1,\xi').I_m$$

$\Longrightarrow$ $\left[(q_2-1)e_{\tau-q_2} + q_2 e_{\tau-q_2-1}(\lambda_1-\lambda_2) + e_{\tau-q_2-2}(\lambda_1-\lambda_2)^2\right]$ est une matrice scalaire.

Soient A, B et C des matrices telles que $\alpha A + \beta B + \gamma C = x\, I_m$ avec A et B qui commutent alors

$$\left.\begin{array}{l}\alpha BA + \beta B^2 + \gamma BC = xB \\ \alpha AB + \beta B^2 + \gamma CB = xB\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{puisque } AB = BA \Rightarrow BC = CB$$

De même, nous avons $CA = AC$.

$\Rightarrow$ A, B et C commutent entre elles deux à deux.

Par conséquent $e_{\tau-q_2}$, $e_{\tau-q_2-1}$, $e_{\tau-q_2-2}$ commutent entre elles deux à deux.

Ainsi en réitérant le même raisonnement jusqu'à la $(q_1-2)^{\text{ième}}$ dérivée de $\Pi^o_{\tau-1}$ prise au point $(x;\xi_o = \lambda_1,\xi')$ nous obtenons

$$\alpha_1 e_{\tau-q_2} + \alpha_2 e_{\tau-q_2-1} + \dots + \alpha_{q_1} e_1 = x.I_m$$

où $e_{\tau-q_2}, e_{\ -q_2-1},\dots,e_2$ commutent entre elles deux à deux.

De la même manière que précédemment, on montre que e_1 commute avec $e_{\tau-q_2},\dots,e_2$.

Il reste à montrer que $e_o(x,\xi')$ commute avec toutes les autres matrices $e_j(x,\xi')$ $(1 \leq j \leq \tau-q_2)$.

Remarquons à partir du développement de $\Pi^o_{\tau-1}(x,\xi_o,\xi')$ qui

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1} \Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi') = (\tau-1)!e_o(x,\xi').$$

Or, par définition

$$\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi') = A^*H + AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2(AH)}{\partial \xi_i \partial x_i} .$$

Nous savons par hypothèse que H est d'ordre t, H^* d'ordre $t-1$ A d'ordre $\tau-t$ et A^* est d'ordre $\tau-t-1$.

Calculons cette dérivée à partir de la dernière égalité :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1}(x,\xi_o,\xi') = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1}(A^*H) + \left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1}(A.H^*) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1}\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_i} . \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) .$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1}\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi') = \sum_{j=0}^{\tau-1} C^j_{\tau-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1-j}A^*\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^j H +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\tau-1} C^j_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1-j}A\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^j H^* +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\tau-1} C^j_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1-j}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)A\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)H$$

$$= C^t_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-1-t}A^*\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^t H + C^{t-1}_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-t}A.\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{t-1}H^*$$

$$= C^t_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{\tau-t-1}A^* + C^{t-1}_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_o}\right)^{t-1}H^*.$$

Il nous suffira de choisir $(\frac{\partial}{\partial \xi_o})^{\tau-t-1} A^*(x,\xi_o,\xi') = \frac{-t}{(\tau-t)})^{t-1} H^*$ pour que $e_o(x,\xi')$ soit une matrice nulle.

Par conséquent, $e_o(x,\xi')$ commutera avec toutes les autres matrices.

Montrons maintenant la proposition pour σ quelconque.

Il existe τ_σ racines $(\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma)$ de multiplicité q_i $(1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma)$. Notons $\theta = \tau_\sigma$.

$\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi')$ peut se développer sous la forme suivante :

$$\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o,\xi') = e_{\tau-1} + e_{\tau-2}(\xi_o-\lambda_\theta) + \ldots + e_{\tau-q_\theta+1}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta-2} +$$

$$+ e_{\tau-q_\theta}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta-1} + e_{\tau-q_\theta-1}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta} + e_{\tau-q_\theta-2}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1}) + \ldots +$$

$$+ e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}+1}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-2} + e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1} +$$

$$+ e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_{\theta-2}) + \ldots +$$

$$+ e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_{\theta-2})^{q_{\theta-2}-2} +$$

$$+ e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}-q_{\tau-2}-1}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_{\theta-2})^{q_{\theta-2}-1} + \ldots +$$

$$+ e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}-\ldots-q_1+\theta-1}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_{\theta-2})^{q_{\theta-2}-1}\ldots(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-1} +$$

$$+ e_{\theta-2}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_{\theta-2})^{q_{\theta-2}-1}\ldots(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-1}(\xi_o-\lambda_1)^{q_1-1} +$$

$$+ e_{\theta-3}(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}-1}(\xi_o-\lambda_{\theta-2})^{q_{\theta-2}-1}\ldots(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-1}(\xi_o-\lambda_1)^{q_1} +$$

$$\vdots$$

$$+ e_1(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}}\ldots(\xi_o-\lambda_4)^{q_4}(\xi_o-\lambda_3)^{q_3-1}(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-1}(\xi_o-\lambda_1)^{q_1} +$$

$$+ e_o(\xi_o-\lambda_\theta)^{q_\theta}(\xi_o-\lambda_{\theta-1})^{q_{\theta-1}}\ldots(\xi_o-\lambda_3)^{q_3}(\xi_o-\lambda_2)^{q_2-1}(\xi_o-\lambda_1)^{q_1}.$$

En utilisant ce développement et la proposition 2.2, on montre de la même manière que précédemment, que les matrices

$e_{\tau-1}, e_{\tau-2},\dots,e_{\tau-q_\theta-q_{\theta-1}-q_1+\theta-1}$ commutent entre elles deux à deux.

Il reste à montrer que les matrices $e_{\theta-2},\dots,e_{\theta-3},\dots,e_1,e_o$ commutent entre elles deux à deux et avec toutes les autres matrices.

Remarquons que

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{\tau-1}\Pi^o_{\tau-1}(x,\xi_o,\xi') = (\tau-1)!e_o(x,\xi').$$

Or,

$$\Pi^o_{\tau-1} = A^*H + AH + \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\ .$$

D'après les calculs faits ci-dessus

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{\tau-1}\Pi^o_{\tau-1} = C^t_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{\tau-t-1}A^* + C^{t-1}_{\tau-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{t-1}H^*\ .$$

Il suffira de prendre

$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{\tau-t-1}A^* = \frac{-t}{\tau-t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{t-1}H^*$ pour que e_o soit nulle.

En choisissant $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{\tau-t-1}A^* = -\frac{t}{\tau-t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{t-1}H^*$

$e_o(x,\xi')$ est nulle par conséquent

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_o}\right)^{\tau-2}\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o;\xi') = (\tau-2)!e_1(x,\xi').$$

Or
$$\Pi^o_{\tau-1} = A^*H + AH^* + \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\ .$$

Calculons la dérivée à partir de cette égalité :

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2}\Pi^o_{\tau-1} = \sum_{j=0}^{\tau-2} C^j_{\tau-2}\, (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2-j}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^j H +$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right]$$

$$= C^t_{\tau-2}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2-t}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^t H + C^{t-1}_{\tau-2}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-1-t}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{t-1}H +$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right]$$

$$= C^t_{\tau-2}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2-t}A^* - C^{t-1}_{\tau-2}(\frac{t}{\tau-t})(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{t-1}H^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{t-1}H$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right] .$$

Il nous suffira de choisir

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2-t}A^* = \frac{1}{C^t_{\tau-2}}\left\{C^{t-1}_{\tau-2}(\frac{t}{-t})(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{t-1}H^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{t-1}H +\right.$$

$$\left. - (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right]\right\}$$

pour que $(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-2}\Pi^o_{\tau-1}$ soit nulle. Par conséquent, $e_1(x,\xi')$ est aussi nulle.

En choisissant $(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-t-1}A^*$, $(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-t-2}A^*$ convenablement e_o e_1 sont nulles, nous pouvons remarquer que :

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-3}\Pi^o_{\tau-1} = (\tau-3)!e_2(x;\xi')$$

$$\Pi^o_{\tau-1} = A^*H + AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}$$

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-3}\Pi^0_{\tau-1} = \prod_{j=0}^{\tau-3} C^j_{\tau-3}(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-3-j}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^j H +$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-3}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right]$$

$$= C^t_{\tau-3}(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-3}A^* + C^{t-1}_{\tau-3}(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-2-t}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{t-1}H + C^{t-2}_{\tau-3}(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-1-t}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{t-2} H +$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-3}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right].$$

Puisque $(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-1}A^*$, $(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-2}A^*$ sont connues, il suffira de choisir

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-3}A^* = -\frac{1}{C^t_{\tau-3}}\left\{C^{t-1}_{\tau-3}(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-2-t}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{t-1}H + C^{t-2}_{\tau-3}(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-1-t}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{t-2} H +\right.$$

$$\left. + (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-3}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}\frac{\partial(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right]\right\}$$

pour que $e_2(x,\xi')$ soit nulle.

Supposons, par récurrence, qu'il existe

$(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-1}A^*, (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-2}A^*, \dots, (\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-\theta+2}A^*$ telles que

$e_0(x,\xi'), e_1(x,\xi'), \dots, e_{\theta-3}(x,\xi')$ soient nulles.

Montrons qu'il existe $(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-t-\theta+1}A^*$ telle que $e_{\theta-2}(x,\xi')$ soit nulle.

Par cette hypothèse, nous remarquons que :

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_0})^{\tau-\theta+1}\Pi^0_{\tau-1}(x,\xi_0,\xi') = (\tau-\theta+1)!\,e_{\theta-2}(x,\xi').$$

or

$$\Pi^{o}_{\tau-1}(x,\xi_o,\xi') = A^*H + AH^* + \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}$$

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1}\Pi^{o}_{\tau-1}(x,\xi_o,\xi') = \sum_{j=0}^{\tau-\theta+1} C^{j}_{\tau-\theta+1}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1-j}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j}H +$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right] =$$

$$= C^{t}_{\tau-\theta+1}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-t-\theta+1}A^* + \sum_{j=0}^{t-1} C^{j}_{\tau-\theta+1}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1-j}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j}H$$

$$+ (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial A}{\partial\xi_i}\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right].$$

Puisque les $(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1-j}A^*$ $(j = 0,\dots,t-1)$ sont soit nulles soit sont déjà déterminées par hypothèse de récurrence.

Il suffira donc de prendre

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-t-\theta+1}A^* = \frac{1}{C^{t}_{\tau-\theta+1}}\left\{\sum_{j=0}^{t-1} C^{j}_{\tau-\theta+1}(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1-j}A^*(\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{j}H\right.$$

$$\left. + (\frac{\partial}{\partial\xi_o})^{\tau-\theta+1}\left[AH^* + \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2(AH)}{\partial\xi_i\partial x_i}\right]\right\}$$

pour que $e_{\theta-2}(x,\xi')$ soit nulle.

Ainsi toutes les matrices $e_{\tau-1}(x,\xi'),\dots,e_o(x,\xi')$ commutent entre elles deux à deux.

Remarquons que les propositions 2.2 et 2.3 imposent au total $\tau-1$ conditions ; d'où $\tau-1 \leqslant \tau-t$; ce qui nécessite $t = 1$.

Soit Ω' un voisinage ouvert de Ω ; tout opérateur pseudo-différentiel étant équivalent à un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté ; on peut choisir $\mathcal{A}$ proprement supporté ainsi que

$b = \mathcal{A}.h$

$$\mathcal{A} : \mathcal{D}(\Omega') \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega')$$

$$b = \mathcal{A}.h : \mathcal{D}(\Omega') \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega').$$

Choisissons maintenant $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $0 \leqslant \Theta_1(s) \leqslant 1$

$$\theta_1(s) = 0 \quad \text{pour } s \geqslant R+1$$

$$\Theta_1(s) = 1 \quad \text{pour } s \leqslant R.$$

Soit $\Theta_2(s) = 1 - \Theta_1(s)$.

Choisissons une autre fonction $\Psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ positive égale à 1 dans un voisinage de $\{x' ; |x'| \leqslant \tilde{r}\}$.

Formons les fonctions

$$\Psi_1(x';\xi') = \Psi(x')\theta_1(|\xi'|)$$

$$\Psi_2(x';\xi') = \Psi(x')\theta_2(|\xi'|).$$

Les opérateurs $\Psi_1(x';D_{x'})$ et $\Psi_2(x';D_{x'})$ sont proprement supportés appartiennent à $L^0_{x'}$ et pour $x = (x_0,x')$ dans Ω, on a

$$u(x) = \Psi_1(x';D_{x'})u(x) + \Psi_2(x';D_{x'})u(x).$$

Soit

$$\tilde{b}(x;D_x) = i^\tau B_\tau(x;D_x) + i^{\tau-1}B_{\tau-1}(x;D_x)$$

où $B_i(x;\xi)$ est la partie homogène de degré i en ξ du symbole de l'opérateur b et $B_i(x;D_x)$ est l'opérateur de symbole $B_i(x;\xi)$.

Nous allons calculer les estimations de $|||\tilde{b}u|||$ dans les 2 cas suivants :

a) pour $u_1 = \Psi_1(x';D_{x'})u$ où Supp $\Psi_1(x';\xi') \subset \{\xi'/|\xi'| \leqslant R+1\}$.

b) pour $u_2 = \Psi_2(x';D_{x'})u$ où Supp $\Psi_2(x';\xi') \subset \{\xi'/|\xi'| \geqslant R\}$.

3. ESTIMATION DE $|||\tilde{b}u_1|||$.

Nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.1.- [10]

Soient s et s' deux nombres réels tels que $s' < s$ et $-\frac{n}{2} \leqslant s$ alors pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir T et $\tilde{r}$ tels que

$|||u|||_{s'} \leqslant \varepsilon|||u|||_s$ pour $u = {}^t(u_1,\dots,u_m)$ avec $u_i \in H_s(\Omega)$

où $\Omega = \{x = (x_o,') \; ; \; |x'| \leqslant \tilde{r}$ et $0 \leqslant x_o \leqslant T\}$.

Lemme 3.2.- [10]

Soit $R \in (L_X^\gamma)_{m\times m}$ $\gamma \leqslant \tau - 2 + \frac{1}{q}$ et $S \in (L_X^{\tau-2})_{m\times m}$

alors si l'estimation du théorème 1 est vraie pour b

$$d|||u|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leqslant c|||bu|||\;.$$

Elle sera aussi vraie pour $b + R + s$.

Proposition 3.1.- 10

Soit Ψ_1 l'opérateur pseudo-différentiel défini ci-dessus.

Soit
$$\tilde{b}(x;D_x) = B_\tau(x;D_x) + B_{\tau-1}(x;D_x).$$

Supposons que $x_o \equiv 0$ soit non caractéristique à l'origine relativement à $\tilde{b}$.

alors il existe une constante C indépendante de u telle que pour $\tilde{r}$, T et d^{-1} suffisamment petits

$$d|||\Psi_1 u|||^2_{\tau-1} \leq c|||\tilde{b}\Psi_1 u|||^2$$

pour tout $u \in [C_0^\infty(\Omega)]^n$ où $\Omega = \{x; |x'| \leq \tilde{r}$ et $0 \leq x_0 \leq T\}$.

4. DECOMPOSITION DE $\tilde{b}$ EN UN PRODUIT DE COMPOSITION D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS MATRICIELS D'ORDRE 1 MODULO DES TERMES D'ORDRE $\leq \tau - 1 - \frac{1}{q}$.

Ce paragraphe consiste à remplacer $\tilde{b}(x;D_x) = i^\tau B\,(x;D_x) + i^{\tau-1}B_{\tau-1}(x;D_x)$ par un produit de facteurs matriciels différentiels en x_0 et pseudo-différentiels en x' du 1er ordre à parties principales scalaires modulo des termes d'ordre $\leq \tau - 1 - \frac{1}{q}$.

On utilise une méthode analogue à celle présentée par [13] pour l'étude du problème de Cauchy à caractéristiques multiples et généralisée aux systèmes par [2] et la réduction du précédent paragraphe.

Avant de remplacer $\tilde{b}$ par un produit de facteurs du premier ordre modulo un opérateur de $(L_x^{\tau-1-\frac{1}{q}})_{m\times m}$, on introduit d'abord le module V sur l'anneau A des opérateurs de la forme $C = C'Im + C''$ avec $C' \in L^0_{x'}$ et $C'' \in (L^{-1}_{x'})_{m\times m}$ associé à l'opérateur

$$\Pi_\tau = \partial_1^{r_1} \ldots \partial_{r_\sigma}^{r_{r_\sigma}}$$

V est engendré par les opérateurs monomes formés de la manière suivante.

On décrit d'abord les opérateurs qui engendrent $V^{(1)}$. Ce sont les opérateurs

(*) $\quad \mathcal{A}_{ij} \frac{\Pi_\tau}{\partial_i \partial_j}$ où $\mathcal{A}_{ij}$ est un opérateur proprement supporté arbitraire de $(L^{1-\frac{1}{r_{ij}};r_{ij}})_{m\times m}$ avec $r_{ij} = \min(r_i, r_j)$;

i pouvant être égal à j avec $1 \leqslant i,j \leqslant \tau_\sigma$.

On note cet ensemble d'opérateurs générateurs $V'^{(1)}$.

$V^{(2)}$ est formé un peu différemment par rapport à $V^{(1)}$. Un opérateur $V_2 \in V'^{(2)}$ (ensemble d'opérateurs engendrant le module $V^{(2)}$ est de la forme

(**)
$$V_2 = b_{i,2} \frac{V_1}{\partial_i}$$

où $V_1 \in V'^{(1)}$ et $b_{i,2} \in (L^{1-\frac{1}{r_i},r_i})_{m\times m}$ est proprement supporté

$1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma$

$V^{(3)}$ est formé de la même manière que $V^{(2)}$. $V_3 \in V'^{(3)}$ est de la forme

(***)
$$V_3 = b_{i,3} \frac{V_2}{\partial_i}$$

où $V_2 \in V'^{(2)}$ et $b_{i,3} \in (L^{1-\frac{1}{r_i},r_i})_{m\times m}$ est proprement supporté

$(1 \leqslant i \leqslant \tau_\sigma)$

On forme ainsi $V'^{(4)}, V'^{(5)}, \ldots, V'^{(\tau-1)}$

(*) $\quad \mathcal{A}_{ij}$ est de la forme $C = C'I_m + C''$ avec $C' \in L^{(1-\frac{1}{r_i},r_i)}$ et $C'' \in (L_{X'}^{o,r_i})_{m\times m}$.

(**),(***) $b_{i,2}, b_{i,3}, \ldots$ sont de la forme $C = C'I_m + C''$ avec

$$C' = L_{x'}^{(1-\frac{1}{r_i}, r_i)} \quad \text{et} \quad C'' \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m} \quad .$$

Finalement soit $V' = \bigcup_{k=1}^{\tau-1} V'^{(k)}$.

V le module engendré pour les opérateurs de V' sur l'anneau

modulo des termes appartenant à $(L_{x'}^{\tau-1-\frac{1}{q}})_{m\times m}$.

On va remplacer

$\tilde{b} = i^{\tau}B_{\tau}(x;D_x) + i^{\tau-1}B_{\tau-1}(x;D_x)$ par un produit de facteurs du premier ordre.

Proposition 4.1.- [6]

Soit $u_2 = \Psi_2(x',D_{x'})$ où $\operatorname{Supp} \Psi(x';\xi') \subset \{\xi'; |\xi'| \geq R\}$ et $u \in [C_o^{\infty}(\Omega)]^m$

Alors sous les hypothèses A, B et C

$$\tilde{b}u_2 = \tilde{\Pi}u_2 + Tu_2 + Ru_2$$

où $T \in (L_x^{\tau-1-\frac{1}{q}})_{m\times m}$ est un élément du module V, $R \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$

$$\tilde{\Pi} = \partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)} \ldots \partial_1^{(r_1)} \ldots \partial_{\tau_\sigma}^{(r_{\tau_\sigma})}$$

avec

$$\partial_i^{(j)} = i\left[D_{x_o}I_m - \lambda_i^j(x_o,x';D_{x'})\right] \qquad 1 \leq i \leq \tau_\sigma \text{ et } 1 \leq j \leq r_i$$

(4.1) $$\lambda_i^j(x;\xi') = \lambda_i(x;\xi')I_m + \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}^j(x;\xi')|\xi'|^{1-\frac{k}{r_i}}$$

où
$$V^j_{i,k} \in (S^o_{x'})_{m\times m} \quad .$$

Les λ^j_i commutent entre elles deux à deux et en plus

$$(4.2)\begin{cases} \left[\; V^j_{i,1}(x;\xi') = \mu^j_{i,1}(x;\xi').I_m \quad \text{avec} \quad \mu^j_{i,1} \in S^o_x \text{ , } \quad \text{lorsque} \quad r_i > 1 \right. \\ \left[\begin{array}{l} \mu^j_{i,1}(x,\ \xi') - \mu^k_{i,1}(x,\xi') \neq 0 \\ \forall (x',\xi') \in \Omega \times S^{n-1}_{\xi'} \qquad \text{lorsque} \quad r_i > 1 \quad \text{et} \quad j \neq k. \end{array}\right. \end{cases}$$

<u>Preuve</u> :

Nous avons d'après (2.7), (2.8) et (2.12)

$$\tilde{b}(x;D_x) = i^\tau \Pi_\tau I_m + i^{\tau-1}\Pi_{\tau-1}$$

$$= i^\tau \partial_1^{r_1}\partial_2^{r_2}\ldots\partial_{\tau_\sigma}^{r_{\tau_\sigma}}.I_m + i^{\tau-1}\left[C_{\tau-1}(x;D_{x'}) + C_{\tau-2}(x;D_{x'})\Delta_1 + \ldots\right].$$

On utilise la proposition 2.1 et la définition 2.1 et on construit $\mathcal{A}$ vérifiant (α) telle que

* $\left[L_j(x;\xi')\right]^\ell_k \equiv 0$

$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi' \ \forall\, \ell \neq k$ et $\forall\, j = 1,\ldots,\tau_\sigma$ avec $r_j \geq 2$

** $\left|\left[L_j(x;\xi')\right]^\ell_\ell\right| \geq \sigma_0|\xi'|^{\tau-1}$

$\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi',\ \ \forall\, \ell = 1,\ldots,m,\ \ \forall\, j = 1,\ldots,\tau_\sigma$ avec $r_j \geq 2.$

On a

$$[L_j(x;\xi')] = [\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')]$$

$$= \frac{1}{\prod_{s=1}^{\sigma}\left[H_s(x;I_m)\right]^{q_s}} \cdot \frac{K_1^1}{A_1^1}(x;\xi_o = \lambda_j(x;\xi'),\xi')$$

pour tout $j \in J$ $(r_j \geqslant 2)$. On pose

$$\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi_o = \lambda_j(x,\xi'),\xi') = E(x;\xi_o = \lambda_j(x,\xi');\xi').I_m$$

et plus généralement $\Pi^o_{\tau-1}(x;\xi) = E(x,\xi)$.

$$E(x,\xi) = e_{\tau-1}(x,\xi') + e_{\tau-2}(x,\xi')(\xi_o-\tilde{\lambda}_1) + \dots$$
$$+ e_o(x,\xi')(\xi_o-\tilde{\lambda}_{\tau-1})\dots(\xi_o-\tilde{\lambda}_1)$$

avec $e_{\tau-j}(x;\xi') \in (S^{\tau-j}_{x'})_{m\times m}$ $(j = 1,\dots,\tau)$.

D'après la proposition 2.3, les matrices $e_{\tau-j}(x,\xi')$ commutent entre elles deux à deux $(1 \leqslant j \leqslant \tau)$.

<u>1ère étape</u> :

Factorisation de $M(x;\xi_o,\xi')$

$$(4.3)\quad M(x;\xi_o,\xi') = i^\tau \prod_{j=1}^{\tau\sigma}(\xi_o-\lambda_j)^{r_j} I_m + i^{\tau-1}\sum_{j=1}^{\tau} e_{\tau-j}(x,\xi').(\xi_o-\tilde{\lambda}_{j-1})\dots(\xi_o-\tilde{\lambda}_o)$$

en posant $\xi_o - \tilde{\lambda}_o \equiv 1$.

On cherche les "racines" en ξ_o de M.

Puisque $C_{\tau-j}(x,\xi')$ est homogène d'ordre $\tau-j$

$$e_{\tau-j}(x;\xi') = e_{\tau-j}(x; \frac{\xi'}{|\xi'|} . |\xi'|) = e_{\tau-j}(x; \frac{\xi'}{|\xi'|}) . |\xi'|^{\tau-j} .$$

Posons

$$e_{\tau-j}(x; \frac{\xi'}{|\xi'|}) = e'_{\tau-j}(x;\xi').$$

D'où

$$M(x,\xi_0,\xi') = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(4.4) \quad i^{\tau} \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} \left[\xi_0-\lambda_j(x;\xi')\right]^{r_j} . I_m + i^{\tau-1} \sum_{j=1}^{\tau} e'_{\tau-j}(x,\xi')|\xi'|^{\tau-j}(\xi_0-\tilde{\lambda}_{j-1})\dots(\xi_0-\tilde{\lambda}_0) = 0.$$

Posons $\xi_0 = \lambda_i I_m + V$ avec V une matrice $m \times m$ et résolvons (4.4) en V.

Nous avons alors

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{aligned} M(x;\xi_0,\xi') &= i^{\tau} \prod_{j=1}^{\tau_\sigma} \left[\xi_0-\lambda_j(x,\xi')\right]^{r_j} . I_m + \\ &\quad + i^{\tau-1} \sum_{j=1}^{\tau} e'_{\tau-j}(x;\xi')|\xi'|^{\tau-j}(\xi_0-\tilde{\lambda}_{j-1})\dots(\xi_0-\tilde{\lambda}_0) \\ &= i^{\tau} \prod_{k=1}^{i-1} \left[(\lambda_i-\lambda_k)I_m+V\right]^{r_k} . V^{r_i} \prod_{k=i+1}^{\tau_\sigma} \left[(\lambda_i-\lambda_k)I_m + V\right]^{r_k} \\ &\quad - i^{-1} \sum_{j=1}^{\tau} e'_{\tau-j}(x;\xi')|\xi'|^{\tau-j} \left[(\lambda_i-\tilde{\lambda}_{j-1})I_m+V\right]\dots\left[(\lambda_i-\tilde{\lambda}_0)I_m + V\right] . \end{aligned} \right.$$

<u>Remarque</u> 2.

Si on prenait $\xi_0 \in \mathbb{C}\, I_m$, (4.5) n'aurait pas de solution, on va donc se placer dans un "Sur anneau" de matrices dans lequel il y aura des solutions.

Développons maintenant les deux membres de (4.5)

p.p = première partie du deuxième membre

d.p = deuxième partie du deuxième membre.

Comme $\lambda_i - \lambda_k$ est scalaire, nous avons

$$p.p = V^{r_i}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda_i-\lambda_k)^{r_k}.I_m + f_{\tau-r_i-1}(x,\xi')V + \right.$$
$$\left. + f_{\tau-r_i-2}(x,\xi')V^2 + \ldots + V^{\tau-r_i}\right]$$

avec V une matrice $m \times m$ et $f_{\tau-r_i}(x,\xi'),\ldots,f_1(x,\xi'),f_0(x,\xi') = 1$ sont scalaires

$$d.p = -\sqrt{-1}\left\{E(x,\xi_0 = \lambda_i(x,\xi'),\xi').I_m + g_{\tau-2}(x;\xi')V + \ldots + g_0(x,\xi')V^{\tau-1}\right\}$$

avec $g_{\tau-2},g_{\tau-3},\ldots,g_0$ matrices $m \times m$ qui commutent entre elles deux à deux puisqu'elles sont des combinaisons linéaires des matrices $e_0,\ldots,e_{\tau-1}$ qui commutent entre elles deux à deux.

De plus $f_j \in (S^j_{x'})$ et $g_j \in (S^j_{x'})_{m\times m}$.

Soit $V' = \dfrac{V}{|\xi'|}$ et $\xi'' = \dfrac{\xi'}{|\xi'|}$ alors

$$p.p = |\xi'|^\tau\,(V')^{r_i}\left\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}\left[\lambda_i(x;\xi'') - \lambda_k(x,\xi'')\right]^{r_k}.I_m + \ldots + \right.$$
$$\left. + f_{\tau-r_i-1}(x;\xi'')V' + \ldots + (V')^{\tau-r_i}\right\}$$

$$d.p = -\sqrt{-1}|\xi'|^{t-1}\Big\{E(x;\xi_o = \lambda_i(x,\xi''),\xi'').I_m + g_{\tau-2}(x,\xi'')V' + \dots$$

$$\dots + g_o(x,\xi'')(V')^{\tau-1}\Big\}$$

d'où nous avons

$$p.p = |\xi'|^{\tau}(V')^{r_i}\Big\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}\Big[\lambda_i'(x,\xi') - \lambda_k'(x;\xi')\Big]^{r_k}.I_m +$$

$$+ f'_{\tau-r_i-1}(x,\xi')V' + \dots + (V')^{\tau-r_i}\Big\}$$

$$d.p = -\sqrt{-1}|\xi'|^{\tau-1}\Big\{E_i'(x;\xi').I_m + g'_{\tau-2}(x;\xi')V' + \dots + g_o'(x;\xi')(V')^{\tau-1}\Big\}$$

avec $\lambda_i'(x;\xi') = \lambda_i(x;\xi'')$

$f'(x;\xi') = f_i(x;\xi'')$

$g'(x;\xi') = g(x;\xi'')$

$E_i'(x;\xi') = E(x;\xi_o = \lambda_i(x;\xi''),\xi'')$.

<u>Lemme</u> 4.1.- [5]

Considérons la matrice $m \times m$:

$$\Psi_i(V';x,\xi'') = \Big\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}\Big[\lambda_i'(x;\xi') - \lambda_k'(x;\xi')\Big].^{r_k}.I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\Big\}^{-1} \times$$

$$\times \Big\{\sqrt{-1}\Big[E_i'.I_m + \sum_{j=1}^{\tau-1} g'_{\tau-j-1}(V')^j\Big]\Big\} .$$

Alors

$\Big[\Psi_i(V';x;\xi'')\Big]^{1/r_i}$ est de classe $C^\infty(B(0,\varepsilon) \times \Omega \times S^{n-1})$.

D'autre part, Ψ_i est une matrice de fonctions analytiques en V' $(||V'|| < \varepsilon)$. Par conséquent, $(\Psi_i)^{1/r_i}$ est aussi analytique en V'.

($||V'|| < \varepsilon$; fonctions analytiques à m^2-variables).

Donc le deuxième membre de (4.5) est donné par

$$\begin{aligned}
p.p + d.p = {} & |\xi'|^{\tau}(V')^{r_i} . \prod_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{\tau_\sigma} \Big[\lambda'_i(x;\xi') - \lambda'_k(x;\xi')\Big]^{r_k} . I_m + {} \\
& + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j - (\sqrt{-1})|\xi'|^{\tau-1}\Big\{E'_i . I_m + \sum_{j=1}^{\tau-1} g'_{\tau-j-1}(V')^j\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & |\xi'|^{\tau}\Bigg\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}\Big[\lambda'_i(x;\xi') - \lambda'_k(x;\xi')\Big]^{r_k} . I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\Bigg\} \times \\
& \times \Bigg\{(V')^{r_i} - \frac{\sqrt{-1}}{|\xi'|}\Big[E'_i . I_m + \sum_{j=1}^{\tau-1} g'_{\tau-j-1}(V')^j\Big] \times \\
& \times \Bigg[\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}\Big[\lambda'_i(x;\xi') - \lambda'_k(x;\xi')\Big]^{r_k} . I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\Bigg]^{-1}\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & |\xi'|^{\tau}\Bigg\{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}\Big[\lambda'_i(x;\xi') - \lambda'_k(x;\xi')\Big]^{r_k} . I_m + \sum_{j=1}^{\tau-r_i} f'_{\tau-r_i-j}(V')^j\Bigg\} \times \\
& \times \Big\{(V')^{r_i} - \frac{1}{|\xi'|}\big[\Psi_i(V' ; x, \xi'')\big]\Big\}
\end{aligned}$$

soit le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 4.2.- [5], [10].

Le deuxième membre de l'équation (4.5) d'inconnue V' se réduit à l'équation matricielle en V' ; $V' \in B(0,\varepsilon)$

$$V' = \omega^j \frac{1}{|\xi'|^{1/r_i}} \left[\Psi_i(V',x,\xi'')\right]^{1/r_i} \quad , \quad 1 \leq j \leq r_i$$

où ω^j est une racine $r_i^{\text{ième}}$ de l'unité, dont la solution est de la forme

$$V'(x,\xi') = \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}^j(x,\xi').|\xi'|^{-\frac{k}{r_i}}$$

avec $V_{i,k}^j$ vérifiant (4.2) pour $1 \leq i \leq \tau_\sigma$, $1 \leq j \leq r_i$, $r_i > 1$ et $k = 1$.

Identifions les coefficients de chaque $|\xi'|^{-k/r_i}$ $(k = 1,\ldots)$

<u>k = 1</u> Coefficient de $|\xi'|^{-1/r_i}$

$$V_{i,1}(x,\xi'') = \left[\Psi_i(0,x,\xi'')\right]^{1/r_i} = \left[\frac{\sqrt{-1}\ E_i'}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda_i'-\lambda_k')}\right]^{1/r_i} .I_m$$

$$= \omega^j \left[\frac{E_i'}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda_i'-\lambda_k')}\right]^{1/r_i} .I_m \ .$$

<u>k = 2</u> Coefficient de $|\xi'|^{-2/r_i}$

$$V_{i,2} = \left[\frac{\sqrt{-1}\ E_i'}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda_i'-\lambda_k')}\right]^{1/r_i} \frac{1}{r_i}\ \frac{g_{\tau-2}'}{E_i'} \left[\frac{\sqrt{-1}\ E_i'}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma} (\lambda_i'-\lambda_k')}\right]$$

$$= \frac{1}{r_i}\left[\frac{\sqrt{-1}\,E'_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}(\lambda'_i-\lambda'_k)}\right]^{2/r_i}\frac{g'_{r-2}}{E'_i} = \frac{1}{r_i}\,\omega^{2j}\left[\frac{E'_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}(\lambda'_i-\lambda'_k)}\right]^{2/r_i}\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}$$

<u>k = 3</u> Coefficient de $|\xi'|^{-3/r_i}$

$$V_{i,3} = \omega^{3j}\left[\frac{E'_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}(\lambda'_i-\lambda'_k)}\right]^{1/r_i}\left\{\frac{1}{r_i}\left(\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}V_{i,2}+\frac{g'_{\tau-3}}{E'_i}(V_{i,1})^2\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{r_i}-1\right)}{2}\left[\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}\right]^2(V_{i,1})^2\right\}.$$

<u>k = 4</u> Coefficient de $|\xi'|^{-4/r_i}$

$$V_{i,4} = \omega^{4j}\left[\frac{E'_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{\tau_\sigma}(\lambda'_i-\lambda'_k)}\right]\left\{\frac{1}{r_i}\left(\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}V_{i,3}+\frac{g'_{\tau-3}}{E'_i}2V_{i,1}V_{i,2}+\frac{g'_{\tau-4}}{E'_i}(V_{i,1})^3\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{r_i}-1\right)\left(\left(\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}\right)^2 2V_{i,1}V_{i,2}+2\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}\quad\frac{g'_{\tau-3}}{E'_i}(V_{i,1})^3\right)$$

$$\left.+\frac{1}{6}\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{r_i}-1\right)\left(\frac{1}{r_i}-2\right)\left(\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}\right)^3(V_{i,1})^3\right\}.$$

<u>k quelconque</u> Coefficient de $|\xi'|^{-k/r_i}$

$$V_{i,k} = \omega^{kj}\left[\frac{E'_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\tau_\sigma}(\lambda'_i-\lambda'_k)}\right]^{1/r_i}\left\{\frac{1}{r_i}\left[\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}V_{i,k-1}+\frac{g'_{\tau-3}}{E'_i}\sum_{m+n=k-1}V_{i,m}V_{i,n}\right.\right.$$

$$+ \frac{g'_{\tau-4}}{E'_i} \sum_{i_1+i_2+i_3=k-1} V_{i,i_1} V_{i,i_2} V_{i,i_3} + \cdots$$

$$\left. + \frac{g'_o}{E'_i} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_{r_i-1}=k-1} V_{i,i_1} V_{i,i_2} \cdots V_{i,i_{r_i-1}} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{r_i} - 1\right) \left[\left(\frac{g'_{\tau-2}}{E'_i}\right)^2 \sum_{m=n=k-1} V_{i,m} V_{i,n} \right. +$$

$$+ \left(\frac{g'_{\tau-3}}{E'_i}\right)^2 \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=k-1} V_{i,i_1} V_{i,i_2} V_{i,i_3} V_{i,i_4} + \cdots$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left(\frac{g'_o}{E'_i}\right)^2 \sum_{i_1+\ldots+i_{2r_i-2}=k-1} V_{i,i_1} \cdots V_{i,i_{2r_i-2}}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{t=2 \\ s=2 \\ t \neq s}}^{t} \frac{g'_{\tau-t} g'_{\tau-s}}{(E'_i)^2} \sum_{i_1+\ldots+i_{t-1}+j_1+\ldots+j_{s-1}=k-1} V_{i,i_1} \cdots V_{i,i_{t-1}} V_{i,j_1} \cdots V_{i,j_{s-1}}$$

$$+ \sum_{n=3}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{r_i}\right)\left(\frac{1}{r_i} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{r_i} - n+1\right) \sum_{\substack{t_1=2 \\ t_2=2 \\ t_s=2}}^{t} \frac{g'_{\tau-t_2}\, g'_{\tau-t_2}\, g'_{\tau-t_s}}{(E'_i)^{t_s}}$$

$$\left. \times \sum_{i_1^1+\ldots+i_{t_1}^1+\ldots+i_1^s+\ldots+i_{t_s}^s=k-1} V_{i,i_1^1} \cdots V_{i,i_{t_1}^1} \cdots V_{i,i_1^s} \cdots V_{i,i_{t_s}^s} \right\} .$$

En utilisant la méthode des séries majorantes dans les algèbres de Banach, on montre que ces développements convergent [5].

Nous voyons que les termes généraux sont des combinaisons linéaires finies de puissances de $g'_{\tau-2},\ldots,g'_0$ à coefficients scalaires. Nous en déduisons, compte tenu du fait que les matrices $g'_{\tau-2},\ldots,g'_0$ commutent entre elles deux à deux, que les λ_i^j $(1 \leqslant j \leqslant r_i$ et $r \leqslant i \leqslant \tau_\sigma)$ sont des matrices commutant entre elles deux à deux.

Lemme 4.3.- [5]

$$M(x;\xi_0,\xi') = i^\tau \Pi_\tau^0(x;\xi_0,\xi') + i^{\tau-1}\Pi_{\tau-1}^0(x;\xi_0,\xi')$$

$$= i^\tau \prod_{i=1}^{\tau_\sigma} \prod_{j=1}^{r_i} \mathcal{D}_i^j(x;\xi_0,\xi')$$

en posant $\mathcal{D}_i^j(x';\xi_0;\xi') = \xi_0 - \lambda_i^j(x;\xi')$ pour tout ξ_0 appartenant à l'anneau A des matrices engendrées par $\lambda_i^j(x,\xi')$ et les matrices "scalaires" $\mathcal{a}(x,\xi').I_m$.

2ème étape :

Décomposition de $\tilde{b}$:

Lemme 4.4.- [5]

$\tilde{b} = \tilde{\Pi} + T + R$ avec $\tilde{\Pi} = \partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)}\ldots\partial_1^{(r_1)}\ldots\partial_{\tau_\sigma}^{(r_{\tau_\sigma})}$

$$\partial_i^{(j)} = i\left[D_{x_0} I_m - \lambda_i^j(x;D_{x'})\right]$$

$T \in (L_x^{\tau-1-\frac{1}{r_i}})_{m\times m}$ et appartient au module V

$$R \in (L_x^{\tau-2})_{m\times m}$$

5. ESTIMATION DE $||\tilde{b}u||$ DANS LE CAS (b) ET FIN DE LA DEMONSTRATION DES THEOREMES.

Dans ce paragraphe, on va supposer que u est de la forme

$$u_2 = \Psi_2(x,D_{x'})u \quad \text{où} \quad \operatorname{Supp} \Psi_2(x';\xi') \subset \{\xi';|\xi'| \geq R\}.$$

Pour simplifier les notations, on écrira u au lieu de u_2
Avant d'aborder la démonstration de l'estimation, on va donner quelques lemmes techniques dont nous avons besoin pour la manipulation des facteurs du premier ordre composant $\tilde{\Pi}$ C et k désigneront les constantes qui peuvent varier au cours d'une démonstration mais qui seront toujours notées C, k.

Lemme 5.1. [5], [10].

Soit $\partial_i^{(j)}$ l'opérateur de symbole

$$i[\xi_0-\lambda_i^j(x;\xi')] = i\left[\xi_0-\lambda_i(x;\xi).I_m - \sum_{k=1}^{\infty} V_{i,k}^j(x,\xi').|\xi'|^{1-\frac{k}{r_i}}\right]$$

où $\lambda_i(x,\xi') \in S^1_{x'}$ et $V^j_{i,k}(x,\xi') \in (S^0_{x'})_{m\times m}$.

Alors :

(a) pour tout $a(x;D_x) \in (L_{x'}^{-1/r_i,r_i})_{m\times m}$, $b(x;D_{x'}) \in (L^{1-\frac{1}{r_i},r_i})_{m\times m}$

il existe $C(x,D_x'),d(x;D_{x'})$ éléments de $(L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$ tels que

$$(5.1) \qquad C(x;D_{x'})\partial_i^{(k)}u + d(x;D_{x'})\partial_i^{(\ell)}u =$$

$$= a(x,D_{x'})D_{x_0}u + b(x;D_{x'})u + M(x;D_{x'})u$$

où $M \in (L_{x'}^{-\infty})_{m\times m}$ (classe d'opérateurs d'ordre $-\infty$) et $k \neq \ell$.

(b) Pour tout $\mathcal{A}' \in (L_{X'}^{o,r_i})_{m\times m}$ et $b' \in (L_{X'}^{1-\frac{1}{r_i},r_i})_{m\times m}$

il existe C', d'éléments de $(L_{X'}^{o,r_i})_{m\times m}$ tels que

$$C'(x;D_{X'})\partial_i^{(k)}u + d'(x;D_{X'})\partial_i^{(\ell)}u = \mathcal{A}'(x;D_{X'})\partial_i u + b'(x;D_{X'})u + M'(x;D_{X'})u$$

où $M' \in (L_{X'}^{-\infty})_{m\times m}$ et $k \neq \ell$.

(c) Pour tout $\tilde{\mathcal{A}} \in (L_{X'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$, $\tilde{b} \in (L_{X'}^{1,r_{ij}})_{m\times m}$

il existe $\tilde{c}, \tilde{d} \in (L_{X'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$ où $r_{ij} = \text{ppcm}\,(r_i,r_j)$ tels que

$$\tilde{C}(x;D_{X'})\partial_i^{(k)}u + \tilde{d}(x;D_{X'})\partial_i^{(\ell)}u = \tag{5.2}$$

$$= \tilde{\mathcal{A}}'(x,D_{X'})D_{X_o}u + \tilde{b}(x;D_{X'})u + \tilde{M}(x;D_{X'})u$$

où $\tilde{M} \in (L_{X'}^{-\infty})_{m\times m}$ et $i \neq j$.

Tous ces opérateurs sont choisis proprement supportés.

<u>Corollaire</u> 5.1.- [5], [10]

(a) $\left[\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}\right] = \mathcal{A}(x,D_{X'})\partial_i^{(k)} + b(x,D_{X'})\partial_i^{(\ell)} + M_1(x,D_{X'})$

avec $\mathcal{A}, b \in (L_{X'}^{o,r_i})_{m\times m}$ et $M_1 \in (L_{X'}^{-\infty})_{m\times m}$.

De plus, $b = b'I_m + b''$ et $\mathcal{A} = -b$ avec

$$b' \in L_{X'}^{o,r_i} \quad \text{et} \quad b'' \in (L_{X'}^{-1,r_i})_{m\times m}.$$

(b) $[\partial_i^{(k)},\partial_i^{(\ell)}] = C(x,D_{X'})\partial_i^{(k)} + d(x,D_{X'})\partial_j^{(\ell)} + M_2(x;D_{X'})$

avec $c, d \in (L_X^{o,r_{ij}})_{m\times m}$ et $M_2 \in (L_{X'}^{-\infty})_{m\times m}$.

Les lemmes suivants permettent de contrôler les termes d'ordre inférieur lorsque l'on permute les facteurs de $\tilde{\Pi}$.

Lemme 5.2. [5], [10].

Soit $Q_r(x;D_x) = \partial_1^{(1)}\partial_1^{(2)}\ldots\partial_1^{(s_1)}\ldots\partial_\omega^{(1)}\ldots\partial_\omega^{(s_\omega)}$ d'ordre r et soit $Q_r(x,D_x)$ l'opérateur obtenu par une permutation arbitraire des facteurs $\partial_i^{(j)}$ alors

$$h(x;D_x) = Q_r(x;D_x) - \hat{Q}_r(x,D_x)$$

est un opérateur appartenant (modulo des termes d'ordre $\leqslant r-2$) au module $S(r)$ sur le sous-anneau $(L_{x'}^{o;\beta})_{m\times m}$ formé d'opérateurs $C = C'I_m + C''$ avec $C \in L_{x'}^{o;\beta}$ et $C'' \in (L_{x'}^{-1,\beta})_{m\times m}$, $\beta = \text{ppcm}\ (r_i,$ $1 \leqslant i \leqslant \omega)$.

$S_{(r)}$ est engendré par des opérateurs monomes $Q_r \Big/ \partial_i^{(j)}$ formés par omission d'un des facteurs (à la fois) composant Q_r.

Lemme 5.3. [5], [10].

Modulo des termes de $(L_{x'}^{\tau-2})_{m\times m}$, $\left[\tilde{\Pi},\Psi I_m\right] \in S_{(\tau)}$ pour tout $\Psi \in L_{x'}^{o}$, où $S_{(\tau)}$ est le module associé à l'opérateur $\tilde{\Pi}$.

Lemme 5.4. [5].

Soit $\mathcal{A}(x,D_{x'})$ un opérateur proprement supporté appartenant à $(L_{x'}^{o;k})_{m\times m}$ c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(x;\xi') = \mathcal{A}_o(x;\xi') + a_1(x;\xi')|\xi'|^{-1/k} + \mathcal{A}_2(x;\xi')|\xi'|^{-2/k} + \ldots$$

où $\mathcal{A}_j(x;\xi') \in (S_{x'}^{o})_{m\times m}$.

Alors il existe des constantes C et R indépendantes de $\mathcal{a}$ telles que

$$||\mathcal{a}(x';D_{x'})\Psi_2 u|| \leqslant C||\Psi_2 u|| \quad \text{pour} \quad u \in [C_o(\Omega)]^m$$

telle que supp $\Psi_2(x,\xi') \subset \{\xi';|\xi'| \geqslant R\}$.

Proposition 5.1.- [5]

Soit $\partial_i^{(j)} = D_{x_o} I_m - \lambda_i^j(x;D_{x'})$ où $\lambda_i^j(x;\xi')$ est défini dans la proposition 4.1.

Alors pour T, $\tilde{r}$ et k^{-1} suffisamment petits

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{c}{k} |||\partial_i^{(j)} u|||^2 \quad \text{pour} \quad u \in [C_o^\infty(\Omega)]^m$$

où $\Omega = \{x = (x_o,x')$ tels que $|x'| < \bar{r}$ et $0 \leqslant x_o \leqslant T\}$ et

c est une constante indépendante de T, $\hat{r}$, k et u.

Preuve :

En effet $\partial_i^{(j)} = \partial_i'^{(j)} I_m + \Lambda_i''^{(j)}$ avec

$\partial_i'^{(j)} = D_{x_o} - \Lambda_i'^{(j)}$ où $\Lambda_i'^{(j)} \in L_{x'}^{1,r_i}$ et $\Lambda_i''^{(j)} \in (L_{x'}^{o,r_i})_{m\times m}$.

On a

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{c}{k}|||\partial_i'^{(j)} u|||^2 \quad \text{d'après l'article [10].}$$

D'autre part, il existe $C' > 0$ telle que

$$|||\Lambda'' u|||^2 \leqslant C'|||u|||^2 \quad \text{car } \Lambda'' \text{ est d'ordre } 0.$$

D'où puisque $\partial_i'^{(j)} I_m = \partial_i^{(j)} - \Lambda_i''^{(j)}$ on a

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{2C}{k} \left\{|||\partial_i^{(j)} u|||^2 + |||\Lambda_i''^{(j)} u|||^2\right\} \quad \text{et par la suite}$$

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{2C}{k} \quad |||\partial_i^{(j)} u|||^2 + \frac{2CC'}{k} |||u|||^2.$$

Alors pour k^{-1} suffisamment petit $\frac{2CC'}{k} < \frac{1}{2}$ on a

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{2C}{1 - \frac{2CC'}{k}} \times \frac{1}{k} |||\partial_i^{(j)} u|||^2$$

$$|||u|||^2 \leqslant \frac{C''}{k} |||\partial_i^{(j)} u|||^2 \quad \text{en posant} \quad C'' = 4C$$

d'où la proposition.

Remarque 3.-

La majeure partie de la démonstration de l'estimation de $|||\tilde{b}u|||$ dans le cas (b) sera établie par récurrence.

Rappelons que

$$\Pi_\tau = \partial_1^{r_1} \partial_2^{r_2} \ldots \partial_{\tau_\sigma}^{r_{\tau_\sigma}} \quad \text{avec} \quad r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{\tau_\sigma} .$$

Soit $m_0 = 0$

$m_1 = r_1$

$m_2 = r_1 + r_2$

$m_i = r_1 + r_2 + \ldots + r_i$.

Soit $Q_\alpha u = \partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(r_1)} \partial_2^{(1)} \ldots \partial_2^{(r_2)} \ldots \partial_i^{(r_i)} . \partial_{i+1}^{(1)} \ldots \partial_{i+1}^{(\ell)} u$ un opérateur de $(L^\alpha_{x'})_{m\times m}$ ou $\alpha = m_i + \ell$ avec $0 \leqslant i \leqslant \tau - 1$ et $0 \leqslant \ell \leqslant r_{i+1}$

(si $i = 0$, $Q_\alpha u = \partial_1^{(1)} \ldots \partial_1^{(\ell)} u$).

Comme dans le lemme 5.2, on peut associer à cet opérateur le module $S(\alpha)$.

Soit $S'(\alpha)$ l'ensemble des opérateurs qui engendrent $S(\alpha)$. En conséquence de la proposition 5.1, nous avons les lemmes suivants :

Lemme 5.5.- [5], [10].

Il existe une constante C indépendante de U telle que pour $\tilde{r}$, T, k^{-1} suffisamment petits, on ait :

$$C|||u|||^2_{\alpha-2} + C|||Q_\alpha u|||^2 \geq k \sum_{S\in S'_{(\alpha)}} |||S_\alpha u|||^2 \ , \quad \forall\, u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m \ .$$

Lemme 5.6.- [10].

Soit $\alpha = m_i + \ell$ défini ci-dessus, il existe une constante C indépendante de u telle que pour $\tilde{r}$, T, k^{-1} suffisamment petits, on ait les estimations suivantes :

a) $C|||Q_\alpha u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-1-\frac{(\alpha-1)}{r_1}}$ si $i = 0$, $1 \leq \alpha \leq r_1$

b) $C|||Q_\alpha u|||^2 \geq k|||u|||^2_{\alpha-2+\frac{1}{r_1}}$ si $1 \leq i$, $r_1 \leq \alpha \leq \tau$.

Nous allons maintenant décrire un autre module noté W_α associé à l'opérateur Q_α.

On décrit d'abord les opérateurs qui engendrent $W_\alpha^{(1)}$. Ils forment la collection $W'^{(1)}_\alpha$.

Si on note $T_\alpha = \partial_1^{r_1} \ldots \partial_i^{r_i} \partial_{i+1}^{\ell} I_m$, les éléments de $W'^{(1)}_\alpha$ sont

$$\frac{T_\alpha}{\partial_i} \ , \quad b_i \frac{T_\alpha}{\partial_i} \ , \ D_{x_0} \frac{T_\alpha}{\partial_i \partial_j} \quad \text{et} \quad b_{ij} \frac{T_\alpha}{\partial_i \partial_j}$$

avec $i \neq j$ où b_i et b_{ij} sont des opérateurs proprement supportés de la forme

$$b_i = b'_i I_m + b''_i \quad , \quad b_{ij} = b'_{ij} I_m + b''_{ij}$$

où $b_i' \in L^{1-\frac{1}{r_i},r_i}$, $b_i'' \in (L_{X'}^{o,r_i})_{m\times m}$, $b_{ij}' \in L_{X'}^{1,r_{ij}}$, $b_{ij}'' \in (L_{X'}^{o,r_{ij}})_{m\times m}$

avec $r_{ij} = \text{ppcm } (r_i, r_j)$.

$W_\alpha'^{(2)}$ est formé de manière semblable en remplaçant l'opérateur T_α dans les éléments par un élément de $W_\alpha'^{(1)}$.

On continue de cette manière pour tous les opérateurs de W_α' sur l'anneau des opérateurs C proprement supportés de $(L_{X'}^{o})_{m\times m}$ de la forme

$$C = C'I_m + C'' \quad \text{avec} \quad C' \in L_{X'}^{o}, \quad \text{et} \quad C'' \in (L_{X'}^{-1})_{m\times m}.$$

<u>Lemme</u> 5.7.- [10]

Il existe une constante C indépendants de U telle que pour $\tilde{r}$, T, k^{-1} suffisamment petits, on ait l'estimation suivante

$$C|||Q_\alpha U|||^2 \geq k \sum_{W_\alpha \in W_\alpha'} |||W_\alpha U|||^2 \text{ pour } u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m.$$

<u>Corollaire</u> 5.2.- [10]

Soit T l'opérateur défini par la proposition 4.1, il existe une constante C indépendante de U telle que

$$C|||\tilde{\Pi}_u|||^2 \geq k|||Tu|||^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m.$$

<u>Proposition</u> 5.2.- [5], [10].

Soit Ψ_2 définie page

Soit $\tilde{b}(x,D_x) = B_\tau(x,D_x) + B_{\tau-1}(x,D_x)$.

Supposons que l'hyperplan $x_0 = 0$ soit non caractéristique à l'origine relativement à $\tilde{b}$.

Alors il existe une constante C indépendante de u telle que pour $\tilde{r}$, T, k^{-1} suffisamment petits, on ait :

$$k|||\Psi_2 u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leqslant C|||\tilde{b}\Psi_2 u|||^2 \quad \text{pour} \quad u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m$$

où $\Omega = \{x = (x_0, x') \text{ tel que } |x'| \leqslant \tilde{r} \text{ et } 0 \leqslant x_0 \leqslant T\}$.

<u>Preuve</u> :

Soit $u_2 = \Psi_2 u$. D'après la proposition 4.1, on a

(5.1) $\qquad \tilde{b}u_2 = \tilde{\Pi}u_2 + Tu_2 + Ru_2$ où $T \in V$ et $R \in (L_{x'}^{\tau-2})_{m\times m}$.

Puisque $Q_\tau = \Pi$, si on pose $\alpha = \tau$ dans Lemme 5.7, nous avons l'estimation

$$C|||\tilde{\Pi}u_2|||^2 \geqslant k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} \quad .$$

D'après le corollaire 5.2.

$$C|||\tilde{\Pi}u_2|||^2 \geqslant k|||Tu_2|||^2$$

d'où

$$C|||\tilde{\Pi}_{u_2}|||^2 \geqslant k|||u_2|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k|||Tu_2|||^2.$$

(5.1) implique que (puisque $\tilde{\Pi} = \tilde{b} - T - R$)

(5.2) $$C|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + C|||Tu_2|||^2 + C|||\tilde{b}u_2|||^2 \geqslant$$

$$\geqslant k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k|||Tu_2|||^2.$$

Pour $k > c$, on peut absorber les termes $C|||u_2|||_{\tau-2+\frac{1}{q}} + C|||\Pi u_2|||^2$ du premier membre de (5.2) dans le 2ème membre et on obtient

$$C|||\tilde{b}u_2|||^2 \geq k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} \quad \text{d'où la proposition.}$$

Nous sommes maintenant prêts à compléter la preuve du théorème 1 en montrant comment l'estimation de $|||\tilde{b}u|||$ dans les deux cas (a) et (b) conduit à l'estimation de $|||\tilde{b}u|||$ dans le cas général, puis à l'estimation de $|||\tilde{b}u|||$.

<u>Preuve du théorème</u> 1 :

$$||\tilde{b}u||^2 = ||\Psi_1\tilde{b}u + \Psi_2\tilde{b}u||^2 = ||\Psi_1\tilde{b}u||^2 + ||\Psi_2\tilde{b}u||^2 + 2\mathrm{Re}(\Psi_1\tilde{b}u, \Psi_2\tilde{b}u)$$

$$\geq ||\Psi_1\tilde{b}u||^2 + ||\Psi_2\tilde{b}u||^2 - 2||\tilde{b}u||^2 .$$

D'où

$$|||\tilde{b}u|||^2 \geq \frac{1}{3}\Big[|||\Psi_1\tilde{b}u|||^2 + |||\Psi_2\tilde{b}u|||^2\Big].$$

Estimons maintenant $||\Psi_i\tilde{b}u||^2$, $i = 1,2$.

$$|||\Psi_i\tilde{b}u|||^2 = |||\tilde{b}\Psi_i u - [\tilde{b},\Psi_i]u|||^2 \geq |||\tilde{b}\Psi_i u|||^2 - |||[\tilde{b},\Psi_i]u|||^2$$

d'un autre côté puisque $u = \Psi_1 u + \Psi_2 u = u_1 + u_2$

$$|||[\tilde{b},\Psi_i]u|||^2 \leq |||[\tilde{b},\Psi_i]u_1|||^2 + |||[\tilde{b},\Psi_i]u_2|||^2 .$$

Donc

$$|||\tilde{b}u|||^2 \geq \frac{1}{3}|||\Psi_1\tilde{b}u|||^2 + \frac{1}{3}|||\Psi_2\tilde{b}u|||^2.$$

D'où

(5.3) $$|||\tilde{b}u|||^2 \geq C|||\tilde{b}u_1|||^2 + C|||\tilde{b}u_2|||^2 - C|||[\tilde{b},\Psi_1]u_1|||^2 -$$

$$- C|||[\tilde{b},\Psi_1]u_2|||^2 - C|||[\tilde{b},\Psi_2]u_1|||^2 - C|||[\tilde{b},\Psi_2]u_2|||^2.$$

Estimons maintenant les derniers termes de (5.3). Puisque $\tilde{b} \in (L^{\tau}_{X'})_{m\ m}$ et $\Psi_i \in L^{0}_{X'}$ et puisque le coefficient de D_{x_0} dans $\tilde{b}$ est I_m $[\tilde{b},\Psi_i] \in (L^{\tau-1}_{X'})_{m\times m}$. D'où

$$|||[\tilde{b},\Psi_1]u_1|||^2 + |||[\tilde{b},\Psi_2]u_1|||^2 \leq C|||u_1|||^2_{\tau-1} .$$

D'après la proposition 4.1

$$[\tilde{b},\Psi_i]u_2 = \left[(\tilde{\Pi} + T + R),\Psi_i\right]u_2$$

où $T \in (L_{X'}^{\tau-1-\frac{1}{q}})_{m\times m}$ et $R \in (L^{\tau-2}_{X'})_{m\times m}$.

Examinant les opérateurs T et R, on voit qu'ils sont tous deux d'ordre $\leq \tau-2$ en x_0. D'où

$$[T,\Psi_i] \in (L^{\tau-2}_{X'})_{m\times m} \quad \text{et} \quad [R,\Psi_i] \in (L^{\tau-2}_{X'})_{m\times m} .$$

En outre (5.3) implique que

$$(5.4) \quad |||\tilde{b}u|||^2 \geq C|||\tilde{b}u_1|||^2 + C|||\tilde{b}u_2|||^2 - C|||u_1|||^2_{\tau-1} - C|||u_2|||^2_{\tau-2}$$
$$- C|||[\tilde{\Pi},\Psi_1]u_2|||^2 - C|||[\tilde{\Pi},\Psi_2]u_2|||^2.$$

D'après le lemme 5.2, $[\tilde{\Pi},\Psi_i] \in S_{(\tau)}$ modulo des termes appartenant à $(L^{\tau-2}_{X'})_{m\times m}$ (5.4) implique par conséquent que

$$(5.5) \quad |||\tilde{b}u|||^2 \geq C|||\tilde{b}u_1|||^2 + C|||\tilde{b}u_2|||^2 - C|||u_1|||^2_{\tau-1} - C|||u_2|||^2_{\tau-2}$$
$$- C \sum_{S_\tau \in S'_{(\tau)}} |||S_\tau u_2|||^2.$$

En appliquant les propositions (3.1) et (5.2) et le lemme (5.5) à (5.5), on obtient

$$C|||\tilde{b}u|||^2 \geq k|||u_1|||^2_{\tau-1} + k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k \sum_{S_\tau \in S'_{(\tau)}} |||S_\tau u_2|||^2 -$$

$$- C|||u_1|||^2_{\tau-1} - C|||u_2|||^2_{\tau-2} - C \sum_{S_\tau \in S'_{(\tau)}} |||S_\tau u_2|||^2.$$

En appliquant le lemme 3.1 et en choisissant $k > C$, on obtient

$$C|||\tilde{b}u|||^2 \geq k|||u_1|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} + k|||u_2|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

$$\geq k|||u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} \quad .$$

Finalement, en appliquant le lemme 3.2, on obtient l'estimation voulue

$$C|||bu|||^2 \geq k|||u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}}$$

et plus généralement

$$k|||u|||^2_{\ell+\tau-2+\frac{1}{q}} \leq C|||bu|||^2_{\ell} \qquad (\forall \ell)$$

or

$$|||bu|||^2_{\ell} \leq C'|||hu|||_{\ell+\tau-1}$$

d'où

$$k|||u|||^2_{\ell+\tau-2+\frac{1}{q}} \leq C|||hu|||^2_{\ell+\tau-1} \quad \text{et pour} \quad \ell = \tau-1$$

on a

$$k|||u|||^2_{\tau-2+\frac{1}{q}} \leq C|||hu|||^2 \; .$$

<u>Remarque</u> :

Sous les hypothèses A, B et C mais lorsque $t \geq 1$ est quelconque, on obtient à nouveau les théorèmes 1 et 2 en supposant alors que les matrices $e_0,\ldots,e_{\tau-1}$ commutent entre elles deux à deux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. CARLEMAN - Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.
Ark. Mat. Astr. Fys : 26 B, n° 17 (1939), 1-9.

[2] D. GOURDIN - Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974.

[3] D. GOURDIN - Thèse d'Etat, 1978.

[4] D. GOURDIN et H. KADRI - Un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy relatif à une classe de systèmes différentiels linéaires à caractéristiques multiples.
C.R.A.S. Paris, t. 301, Série 1, n° 5, 173-176.

[5] D. GOURDIN et H. KADRI - Théorème d'unicité pour un problème de Cauchy C^∞ matriciel à caractéristiques multiples.
(à paraître - Kinokuyina Compagny Ltd).

[6] D. GOURDIN et F. TOUADERA - Unicité de Cauchy pour des systèmes non hyperboliques à caractéristiques multiples et construction de paramétrices locales généralisées.
(à paraître).

[7] H. KADRI - Thèse de 3ème cycle, Lille I, 1985.

[8] J. LERAY - Equations hyperboliques non strictes : Contre-exemples du type de Giorgi aux théorèmes d'existence et unicité.
Math. Annalen 162 (1966), p. 228-256.

[9] J. VAILLANT - Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques.
J. Math. Pures Appl. (9) 47 (1968), 1-40.

[10] M. ZEMAN - On the uniqueness of Cauchy problem for partial differential operators with multiple caracteristics.
Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa (18) 1980, p. 257-285.

[11] C. ZUILY - Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem.
(Birkhauüser, 1982), Progress in Mathematics.

[12] C. ZUILY - Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels.
Comm. in Partial Differential Equations 6 (2), 153-196 (1981).

[13] S. MIZOHATA et Y. OHYA - Pour la condition d'hyperbolicité des équations à caractéristiques multiples, II.
Jap. Journ. Math. 40 (1971), 63-104.

TROISIEME PARTIE

PARAMETRICES LOCALES GENERALISEES POUR DES SYSTEMES A CARACTERISTIQUES MULTIPLES NON HYPERBOLIQUES.

On se propose de construire des paramétrices locales généralisées pour le problème de Cauchy C^∞ par la méthode des ondes asymptotiques pour les systèmes à caractéristiques de multiplicité constante ne vérifiant pas les conditions de Levi.

Pour cela, on adapte des résultats dus à R. Berzin et J. Vaillant [2] et on construit des opérateurs intégraux de Fourier, dont la phase n'est pas homogène mais admet un développement en symboles homogènes d'ordres fractionnaires [4].

Ce travail sera complété par un article à paraître ultérieurement [8].

On notera $X = [0,T^+[\times X'$ et X' un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

1. CAS DES SYSTEMES 2×2 A CARACTERISTIQUES DOUBLES ET DE RANG CARACTERISTIQUE 1.

Soit un opérateur h différentiel à coefficients $C^\infty(X)$, d'ordre 1 kowalewskien à 2 lignes et 2 colonnes dont le sous-caractéristique ne s'annule pas sur l'ensemble caractéristique supposé réel double.

On note $x = (x_0, x')$ le point courant au voisinage de l'origine 0 avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}^n$.

On pose $\xi = (\xi_0, \xi')$ le point courant du fibré cotangent.

Si $H(x,\xi)$ est la matrice caractéristique 2×2 de h, on suppose que

$$\det H(x,\xi) = \left[\xi_0 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x)\xi_k\right]^2$$

où $\lambda_k \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ et on note $\lambda(x,\xi') = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x)\xi_k$ et $H'(x,\xi) = \xi_0 - (x,\xi')$.

En utilisant la théorie des opérateurs de Lax-Maslov [4], [9], montrons le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 1.-

Soit X' voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $X = [0,T^+[\times X'$ avec $0 < T^+$.

Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage ouvert U de 0 dans X', un voisinage ouvert relativement compact V de $\bar{U}$ dans X', deux intervalles $[0,T_1^+[\subset [0,T^+[$ et $[0,T_2^+[\subset [0,T_1^+[$ pour lesquels on a les propriétés suivantes :

Pour tout $T \in [0,T_2^+[$ il existe un opérateur $F_{0,1}(T)$ de Lax-Maslov de U dans X appliquant $\mathcal{D}(U)$ dans $C^\infty([0,T_1^+[,\mathcal{D}(V))$ et un opérateur elliptique $E(T) = E$ tel que

a) pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(U)$, la fonction $(x_0,T,x') \to [F_{0,1}(T)u](x_0,x')$ est de classe C^∞ dans $[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times X'$ et pour tout $T \in [0,T_2^+[$ on a

(1) $\quad [F_{0,1}(T)u](T,x') \equiv Eu(x')$

b) pour tout $T \in [0,T_2^+[$ la restriction

(2) $\quad R(T) : U \to [hF_{0,1}(T)u]\Big|_{[0,T_2^+[\times X'}$

de $h \circ F_{0,1}(T)$ à $[0,T_2^+[\times X'$ est un opérateur régularisant de U dans $[0,T_2^+[\times X'$ avec

$$[R(T)u](x_0,x') = \int_U K(x_0,T,x',y')u(y')dy'.$$

K étant une fonction scalaire de classe C^∞ dans $[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times X' \times X'$, bornée ainsi que toutes ses dérivées et nulle hors de

$$[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times V \times V.$$

Le signe $\equiv$ signifie l'égalité modulo un opérateur régularisant à noyau C^∞.

Preuve :

Appelons $\varphi(x,\xi')$ la fonction de phase définie localement pour les équations

(3) $$\begin{cases} \partial_0\varphi(x,\xi') = \lambda(x,\mathrm{grad}_{x'}\varphi(x,\xi')) \\ \varphi\big|_{x_0=T} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\xi_\alpha . \end{cases}$$

On cherche $F_{0,1}(T)$ sous la forme d'un développement asymptotique

$$F_{0,1}(T) \sim \sum_{j=2}^{+\infty} F_{0,1}^j(T).$$

Nous voulons que la restriction à $[0,T_2^+[\times X'$ de l'opérateur de Lax-Maslov.

$$(4) \qquad h\left[\sum_{j<\ell} F^j_{o,1}(T)\right] \in I^{-\frac{1}{4}-\frac{(\ell-3)}{2}}$$

$$\text{(i.e. d'ordre } -\frac{1}{4}-\frac{(\ell-3)}{2} \text{ pour } \ell \geqslant 3)$$

$$\gamma_0\left[\sum_{j<\ell} F^j_{o,1}(T)\right] - E \text{ soit d'ordre } -\frac{\ell}{2}+1 \text{ pour } \ell \geqslant 3$$

où $\gamma_0 F_{o,1}(T)$ désigne la trace de $F_{o,1}(T)$ sur l'hyperplan $X_T = \{T\} \times X'$

On a :

$$(6) \qquad \left[F^j_{o,1}(T)u\right](x) = (-i)^j(2\pi)^{-n}\int e^{i\left[\varphi(x,\xi')+\ (x,\xi')\right]}Y_{o,1,j+1}(x,\xi')\hat{u}(\xi')d_{\xi'}$$

$u \in \mathcal{D}(U)$, $Y_{o,1,j+1} \in S^{1-\frac{j}{2}}$ homogène, $\Psi \in S^{1/2}$ homogène à déterminer par la suite.

Pour calculer les valeurs des $Y_{o,1,j+1} = Y_{j+1}$ déjà obtenues dans l'article de R. Berzin et J. Vaillant [2] et celle de Ψ, on part de la formule suivante :

(en posant $h(x,D_x) = H^o(x)\frac{\partial}{\partial x_o} + \sum_{\ell=1}^{n} H\ (x)\frac{\partial}{\partial x_\ell} + H^*(x)$ avec $H^o(x) \equiv I_2$)

$$h(x,D_x)\left[e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1}\right] = \sum_{\ell=0}^{n}\left[iH^\ell(x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}+\frac{\partial\Psi}{\partial x_\ell}\right)\right]e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1} +$$

$$+\sum_{\ell=0}^{n} H^\ell(x)e^{i(\varphi+\Psi)}\frac{\partial}{\partial x_\ell}Y_{j+1} + H^*(x)e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1} \Rightarrow h(x,D_x)\left[e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1}\right] =$$

$$i\,H(x,\text{grad}_{x'}\varphi)e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1} + i\,H(x,\text{grad}_{x'}\Psi)e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1} +$$

$$+\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}H(x,\xi)\Big|_{\xi=\text{grad}_{x'}}e^{i(\varphi+\Psi)}\frac{\partial}{\partial x_\ell}Y_{j+1} + H^*(x)e^{i(\varphi+\Psi)}Y_{j+1}\ .$$

Dans le deuxième membre de cette égalité la première ligne est d'ordre $(2 - \frac{j}{2})$ la deuxième ligne est d'ordre $(2 - \frac{j+1}{2})$ et les deux dernières lignes sont d'ordre $(1 - \frac{j}{2})$.

Comme dans ce premier cas, $j \geq 2$ le terme de plus haut degré a pour degré 1.

On écrit alors que tous les termes coefficients de $e^{i(\varphi+\Psi)}$ sont nuls. On obtient :

Terme de degré 1.

(7) $$i \sum_{\ell=0}^{n} H^{\ell}(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} e^{i(\varphi+\Psi)} Y_3 = 0$$

==>

(8) $$H(x, \text{grad}_x \varphi) Y_3 = 0.$$

Terme de degré $\frac{1}{2}$.

(9) $$H(x,\text{grad}_x \varphi)Y_4 + \partial^\alpha H(x,\text{grad}_x \varphi)(\partial_\alpha \Psi)Y_3 = 0.$$

Terme de degré 0.

(10) $$H(x,\text{grad}_x \varphi)Y_5 + \partial^\alpha H(x,\text{grad}_x \varphi)(\partial_\alpha \Psi)Y_4$$
$$- i\, \partial^\alpha H(x,\text{grad}_x \varphi)\partial_\alpha Y_3 - i\, H^*(x)Y_3 = 0.$$

Terme de degré $-\frac{1}{2}$.

(11) $$H(x,\text{grad}_x \varphi)Y_6 + \partial^\alpha H(x,\text{grad}_x \varphi)(\partial_\alpha \Psi)Y_5$$
$$- i\, \partial^\alpha H(x,\text{grad}_x \varphi)\partial_\alpha Y_4 - i\, H^*(x)Y_4 = 0.$$

Et tous les autres s'écrivent de la même façon :

<u>Terme de degré</u> $-\frac{k}{2}$ $(k = 0,1,\dots)$

(12) $$H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)Y_{5+k} + \partial^\alpha H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)(\partial_\alpha\Psi)Y_{4+k}$$

$$- i\,\partial^\alpha H(x,\mathrm{grad}_x\varphi).\partial_\alpha Y_{3+k} - i\,H^*(x)Y_{3+k} = 0.$$

On obtient des équations d'inconnues Ψ et Y_{k+1} $(k = 2,\dots)$. Elles se résolvent suivant le même principe de la résolution d'un système de $m = 2$ équations à $m = 2$ inconnues de rang $m-1 = 1$

$$H^A_B Y^B = F^A \qquad 1 \leq A \leq m$$

(En utilisant la convention de sommation d'Einstein, et en abrégeant la notation $H^A_B(x,\mathrm{grad}_x\varphi)$ par celle plus simple H^A_B).

En posant [1],

$$\Gamma^1_A = \frac{A^1_A}{A^1_1} \qquad (1 \leq A \leq m) \qquad (A^1_1 \neq 0)$$

$$\Gamma^1 = (\Gamma^1_1,\dots,\Gamma^1_m).$$

Γ^1 est une base du noyau de ${}^tH$ (ou base du noyau à gauche de H). Par conséquent la condition nécessaire et suffisante de compatibilité du système est :

(13) $$\Gamma^1_A F^A = 0.$$

De même, en posant $\Delta^B_1 = \frac{A^B_1}{A^1_1}$ $(1 \leq B \leq m)$ et

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} \Delta^1_1 \\ \vdots \\ \Delta^m_1 \end{pmatrix}$$, Δ_1 est une base du noyau de $H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)$.

Si la condition de compatibilité (13) est satisfaite alors nous avons, en séparant les inconnues principales

$$H^{\hat{A}}_{\hat{B}} Y^{\hat{B}} = F^{\hat{A}} - H^{\hat{A}}_{\bar{B}} Y^{\bar{B}}$$

où $\hat{B}$ parcourt les indices $(\nu+1,\dots,m)$ et $\bar{B}$ parcourt les indices $(1,\dots,\nu)$. Ici $\nu = \text{rang } H = 1$ d'où

$$H^{\hat{A}}_{\hat{B}} Y^{\hat{B}} = F^{\hat{A}} - H^{\hat{A}}_{1} Y^{1} \ ;$$

et par suite

$$Y^{\hat{B}} = \frac{1}{A^1_1} \begin{bmatrix} H^2_2 \dots H^2_{\hat{B}-1} & F^2 - H^2_1 Y^1 & H^2_{\hat{B}+1} \dots H^2_m \\ \vdots & & \\ H^m_2 \dots H^m_{\hat{B}-1} & F^m - H^m_1 Y^1 & H^m_{\hat{B}+1} \dots H^m_m \end{bmatrix}$$

ou encore

$$Y^{\hat{B}} = \frac{A^{1\hat{B}}_{1\hat{C}}}{A^1_1} F^{\hat{C}} + \frac{A^{\hat{B}}_1}{A^1_1} Y^1 \ , \qquad 1 < \hat{B} \leqslant m \ .$$

D'où la solution

(14) $$Y^B = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1 + \frac{A^{1B}_{1\hat{C}}}{A^1_1} F^{\hat{C}} \ , \qquad 1 \leqslant B \leqslant m \ .$$

Appliquons (13) et (14) successivement :

<u>à l'équation</u> (8) : $F = 0$ d'où

(15) $$Y^B_3 = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_3$$

car la condition de compatibilité est satisfaite $A_A^1 \times 0 = 0$;

dans le cas de l'équation (9) :

$$F^A = -\partial^\alpha H_B^A(\partial_\alpha \Psi) \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_3^1 , \quad \text{d'où}$$

$$Y_4^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_4^1 - \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} \partial^\alpha H_D^{\hat{C}}(\partial_\alpha \Psi) \frac{A_1^D}{A_1^1} Y_3^1 \quad ;$$

$$Y_4^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_4^1 + \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} H_D^{\hat{C}}(\partial_\alpha \Psi)\partial^\alpha(\frac{A_1^D}{A_1^1})Y_3^1 .$$

Or on a les relations

$$H_{\hat{B}}^{\hat{C}} A_{1\ldots\nu\hat{D}}^{1\ldots\nu B} = \delta_{\hat{D}}^{\hat{C}} A_{1\ldots\nu}^{1\ldots\nu} \qquad (\delta_{\hat{D}}^{\hat{C}} \text{ le symbole de Kronecker}).$$

Remarque : $B = \hat{B}$ car les termes correspondants à $\bar{B}$ sont nuls.

D'où ici

$$H_D^{\hat{C}} A_{1\hat{C}}^{1B} = \delta_D^B A_1^1$$

Donc

$$Y_4^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_4^1 + \partial^\alpha(\frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi)Y_3^1 \tag{16}$$

car la condition de compatibilité (13) est satisfaite

$$A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi) \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_3^1 = 0.$$

Pour l'équation (10), F^A vaut :

$$F^A = -\partial^\alpha H_B^A(\partial_\alpha\Psi)\left[\frac{A_1^B}{A_1^1}Y_4^1 + \partial^\beta\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\beta\Psi)Y_3^1\right] + i\ H_B^A\left[\frac{A_1^B}{A_1^1}Y_3^1\right] + i\ H_B^{*A}\frac{A_1^B}{A_1^1}Y_3^1 .$$

On a donc une condition de compatibilité :

$A_A^1F^A = 0$, c'est-à-dire

$$-A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha\Psi)\partial^\beta\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\beta\Psi) + i\ A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)\left(\partial_\alpha\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + i\ A_A^1H_B^{*A}\frac{A_1^B}{A_1^1} = 0$$

c'est-à-dire

$$H_B^A(\partial^\alpha A_A^1)(\partial^\beta A_1^B)(\partial_\alpha\Psi)(\partial_\beta\Psi) = i\{H_B^A(\partial^\alpha A_A^1)(\partial_\alpha A_1^B) + H_B^{*A}A_A^1A_1^B\} .$$

or $\qquad A_A^1H_B^AA_1^B = (H')^2A_1^1$.

D'où

$$\partial^{\alpha\beta}(A_A^1H_B^AA_1^B) = 2(\partial^\alpha H')(\partial^\beta H')A_1^1$$

$$H_B^A\{(\partial^\alpha A_A^1)(\partial^\beta A_1^B) + (\partial^\alpha A_1^B)(\partial^\beta A_A^1)\} = 2(\partial^\alpha H')(\partial^\beta H')A_1^1.$$

$$\sum_{\alpha,\beta} H_B^A(\partial^\alpha A_A^1\partial^\beta A_1^B)(\partial_\alpha\Psi)(\partial_\beta\Psi) = \left[\sum_{\alpha,\beta}(\partial^\alpha H')\partial_\alpha\Psi(\partial^\beta H')\partial_\beta\Psi\right]A_1^1$$

$$= A_1^1\left[\sum_\alpha(\partial^\alpha H')\partial_\alpha\Psi\right]^2 .$$

D'où

$$(17)\qquad A_1^1\{\sum_\alpha(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha\Psi)\}^2 = i\{H_B^A(\partial^\alpha A_A^1)(\partial_\alpha A_1^B) + H_B^{*A}A_A^1A_1^B\}$$

$$= i\ L_1^1(\psi).$$

(L_1^1 étant le polynôme sous-caractéristique de h)

et alors on peut résoudre (10) par la formule (14) :

$$Y_5^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_5^1 + \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} \left\{ -\partial^\alpha H_D^{\hat{C}} (\partial_\alpha \Psi) \left[\frac{A_1^D}{A_1^1} Y_4^1 + \partial^\beta \left(\frac{A_1^D}{A_1^1} \right) (\partial_\beta \Psi) Y_3^1 \right. \right.$$

$$\left. \left. + i(\partial^\alpha H_D^{\hat{C}}) \partial_\alpha \left[\frac{A_1^D}{A_1^1} Y_3^1 \right] + i H_D^{*\hat{C}} \frac{A_1^D}{A_1^1} Y_3^1 \right\} .$$

D'où

$$Y_5^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_5^1 + \partial^\alpha \left(\frac{A_1^1}{A_1^1} \right) (\partial_\alpha \Psi) Y_4^1 - i \, \partial^\alpha \left(\frac{A_1^B}{A_1^1} \right) \partial_\alpha Y_3^1$$

$$+ \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} \left\{ -(\partial^\alpha H_D^C)(\partial_\alpha \Psi)(\partial^\beta \frac{A_1^D}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi) + i(\partial^\alpha H_D^C) \partial_\alpha \left(\frac{A_1^D}{A_1^1} \right) + i \, H_D^{*\hat{C}} \frac{A_1^D}{A_1^1} \right\} Y_3^1 .$$

Pour l'équation (11), en reportant les valeurs précédentes de Y_5^B, Y_4^B et Y_3^B, F^A vaut :

$$F^A = -(\partial^\alpha H_B^A) \partial_\alpha \Psi \left\{ \frac{A_1^1}{A_1^1} Y_5^1 + \partial^\beta \left(\frac{A_1^1}{A_1^1} \right) (\partial_\beta \Psi) Y_4^1 - i \, \partial^\beta \left(\frac{A_1^B}{A_1^1} \right) \partial_\beta Y_3^1 + \partial^\beta Y_3^1 \right\} +$$

$$+ i(\partial^\alpha H_B^A) \partial_\alpha \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_4^1 + \partial^\beta \left(\frac{A_1^B}{A_1^1} \right) (\partial_\beta \Psi) Y_3^1 \right\} + i \, H_B^{*A} \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_4^1 + \partial^\beta \left(\frac{A_1^B}{A_1^1} \right) (\partial_\beta \Psi) Y_3^1 \right\} .$$

La condition de compatibilité (13) s'écrit :

$$\left[A_A^1 (-\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1} (\partial_\beta \Psi) + i \, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1}) \right] Y_4^1 +$$

$$+ i \, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi)(\partial^\beta \frac{A_1^1}{A_1^1}) \partial_\beta Y_3^1 + i \, A_4^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi) \partial_\alpha Y_3^1 + W' Y_3^1 = 0.$$

Le coefficient de Y_4^1 est nul, d'après la condition de compatibilité (17). Il reste donc une équation différentielle du premier ordre sans second membre, le long de la bicaractéristique :

$$i(\partial^{\alpha}H')(\partial_{\alpha}\Psi)(\partial^{\beta}H')(\partial_{\beta}Y_3^1) + W'Y_3^1 = 0.$$

Ce qui donne Y_3^1 lorsque l'on connaît $Y_3^1(T,x',\xi')$ et, par suite, Y_3^B pour tout $B = 1,\dots,m$.

On résout alors (11) par la formule (14) qui donne Y_6^B en fonction de Y_6^1, Y_5^1, Y_4^1 et Y_3^1.

En itérant le procédé, on trouve Y_{j+1}^B pour tout $B = 1,\dots,m$ et pour tout $j = 2,\dots$

Remarquons que l'équation (17) n'est pas à second membre nul, on pourra donc choisir $\Psi(T,x',\xi') = 0$ avec $\Psi(x,\xi') \neq 0$ pour $0 \leqslant x_o < T$. Nous reviendrons au choix de Ψ de telle que $F_{o,1}(T)$ ait un sens par la suite.

L'équation (2) étant ainsi résolue, cherchons une solution de (1).

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_o \left[\sum_{j<\ell+1} F^j_{o,1}(T)\right] - E \text{ soit d'ordre } \left(-\frac{\ell}{2}+1\right) \\ \\ \text{pour tout } \ell \geqslant 2. \end{array}\right.$$

Pour $\ell = 2$, on obtient :

$\gamma_o F^2_{o,1}(T)$ a pour symbole, $Y_{o,1,3}(T,x',\xi') = Y_3$ de la forme

$$Y_3 = \begin{pmatrix} Y^1_{3,1} & Y^1_{3,2} \\ & \\ Y^2_{3,1} & Y^2_{3,2} \end{pmatrix}.$$

En choisissant $Y^1_{3,1} = 1$ et $Y^1_{3,2} = 0$, on a :

$$(20) \qquad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{A_1^2}{A_1^1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\ell = 3$, on obtient :

en choisissant $Y_{4,1}^1 = 0$ et $Y_{4,2}^1 = \frac{1}{\sqrt{|\xi'|}}$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{|\xi'|}} \\ \partial^\alpha\left(\frac{A_1^2}{A_1^1}\right)\partial_\alpha\Psi & \frac{A_1^2}{A_1^1}\frac{1}{\sqrt{|\xi'|}} \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$\det[Y_3 + Y_4] = -\frac{1}{\sqrt{|\xi'|}}\left[\partial^\alpha\left(\frac{A_1^2}{A_1^1}\right)\partial_\alpha\Psi\right](T,x',\xi') \;;$$

or $(\partial_\alpha\Psi)(T,x',\xi') = 0$ pour $\alpha = 1,\dots,n$ et seul

$$(\partial_o\Psi)(T,x',\xi') = \left[i\,\frac{L_1^1(\emptyset)}{A_1^1(\emptyset)}\right]^{1/2}(T,x',\xi') \neq 0.$$

D'où

$$\det[Y_3 + Y_4] = -\frac{1}{\sqrt{|\xi'|}}\;\partial^o\left(\frac{A_1^2}{A_1^1}\right)\partial_o\Psi \neq 0.$$

C'est pourquoi on pourra prendre $Y_{k+1}(T,x',\xi') = 0$ pour tout $k \geqslant 4$.

Définition 1. [11]

Un opérateur pseudo-différentiel F est dit elliptique si F possède une paramétrix G.

i.e. il existe M, M' opérateurs régularisants tels que

$$F \circ G = I + M \quad \text{et} \quad G \circ F = I + M'.$$

Lemme 1.-

E est elliptique.

On le démontre à l'aide du lemme 2 suivant :

Lemme 2.-

Il existe un opérateur G de symbole Z tel que $J = E \circ G$ ait une partie principale N_o scalaire $(N_o = n_o I_m)$, elliptique.

Preuve :

Il suffit de vérifier que l'opérateur $F_{o,1}(T)$ de symbole $Y(T) \sim Y_3 + Y_4 + \ldots$ est elliptique.

On prend $G(T)$ de symbole Z avec

$$Z \sim [\text{mineurs de } (Y_3 + Y_4)] + \ldots$$

$$Z \sim \text{ mineurs de } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{|\xi'|}} \\ \dfrac{A_1^2}{A_1^1} + \partial^\alpha\left(\dfrac{A_1^2}{A_1^1}\right)\partial_\alpha \Psi & \dfrac{A_1^2}{A_1^1}\,\dfrac{1}{\sqrt{|\xi'|}} \end{pmatrix} \right\} + \ldots$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} \dfrac{A_1^2}{A_1^1} \dfrac{1}{\sqrt{|\xi'|}} & - \dfrac{1}{\sqrt{|\xi'|}} \\ - \left[\dfrac{A_1^2}{A_1^1} + \partial^\alpha \left(\dfrac{A_1^2}{A_1^1}\right) \partial_\alpha \Psi \right] & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \text{ termes d'ordre } -1 \\ \\ + \text{ termes d'ordre } -\frac{3}{2} . \end{matrix}$$

On pose $J = F \circ G$ de symbole N avec $N \sim N_o + N_{-1/2} + \ldots$
Calculons N_o en utilisant la formule

$$\sigma(a \circ b) \sim \sum_{|\alpha| \in \mathbb{N}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \sigma(a) D_\alpha \sigma(b).$$

Pour $|\alpha| = 0$

$Y.Z \sim -(\partial^\beta \dfrac{A_1^2}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi) I_2$ + termes d'ordre -1 + termes d'ordre $-\frac{3}{2}$

($- \partial^\beta (\dfrac{A_1^2}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi) I_2$ étant d'ordre $-\frac{1}{2}$).

Pour $|\alpha| = 1$

$\partial^\alpha Y$ est d'ordre $\leqslant -1$ et $D_\alpha Z$ est d'ordre $\leqslant 0$

par conséquent $\partial^\alpha Y.D_\alpha Z$ est d'ordre $\leqslant -1$.

Ici $N_o = 0$, $N_{-1/2} = (-\partial^\beta (\dfrac{A_1^2}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi) I_2) \Rightarrow N \sim N_{-1/2} + N_{-1} + \ldots$

D'où le lemme.

La preuve du lemme 1 est classique.

Reste à déterminer $\psi(x,\xi')$.

D'après (17)

$$\{ \sum_{\alpha} (\partial^{\alpha}H')(\partial_{\alpha}\psi)\}^2 = i \frac{L_1^1(\varphi)}{A_1^1(\varphi)} \neq 0$$

et pour $x_0 = T$, il vient :

$$\{\partial_0\Psi\}^2 = i \frac{L_1^1(\varphi)}{A_1^1(\varphi)} \neq 0$$

Supposons $\frac{L_1^1(\varphi)}{A_1^1(\varphi)}(T) > 0$ d'où $\partial_0\Psi = \pm\sqrt{\frac{L_1^1(\varphi)}{2A_1^1(\varphi)}}(1+i)$.

Donc $\operatorname{Im} \partial_0\Psi = \pm\sqrt{\frac{L_1^1(\varphi)}{2A_1^1(\varphi)}} = \partial_0(\operatorname{Im} \psi)$.

Prenons $\partial_0(\operatorname{Im} \psi) = -\sqrt{\frac{L_1^1(\varphi)}{2A_1^1(\varphi)}}$ donc lorsque x_0 décroit de T à 0, $I_m\Psi$ croît à partir de la valeur 0, donc devient positive.

Il s'ensuit que $F_{0,1}$ est un opérateur intégral de Fourier.

<u>Remarque</u> :

La restriction $\gamma_t F_{o,1}(T)$ $(0 \leqslant t < T)$ de l'opérateur $F_{o,1}(T)$ à l'hyperplan $X_T = \{T\} \times X'$ est régularisante.

<u>Remarque</u> :

Le choix de K nulle hors de $[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times V \times V$ est évident (cf. [4]).

2. CAS DES SYSTEMES $m \times m$ A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE m ET DE RANG CARACTERISTIQUE $m-1$.

Soit h un opérateur aux dérivées partielles d'ordre 1, kowalewskien à m lignes et m colonnes à coefficients $C^\infty(X)$ tel que

$$\det H(x,\xi) = \left[\xi_0 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x)\xi_k\right]^m$$

où $\lambda_k \in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ et on note $\lambda(x,\xi') = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x)\xi_k$

$H'(x,\xi) = \xi_0 - \lambda(x,\xi')$ et H = matrice caractéristique de h.

On suppose que la matrice caractéristique H vérifie ([12], [5], [6]) :

1) pour tout x au voisinage de 0, dans l'anneau Φ localisé de $\mathbb{R}[\xi]$ par l'idéal principal défini par $H'(x,\xi)$.

$$H \underset{\Phi}{\sim} \begin{pmatrix} (H')^m{}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

2) puisqu'il existe au moins un cofacteur d'ordre $m-1$ non divisible par H', $A_1^1(x,\xi)$ remplira ce rôle.

3) $\quad K[0;\xi_0 = \lambda(0,\xi'),\xi'] \neq 0, \quad \forall\, \xi' \neq 0$

où K est le polynôme sous-caractéristique de h ([5], [12]).

En appelant A la matrice des cofacteurs de H dans le développement de $\det H$. On a :

(21) $$AH = HA = (H')^m . I_m .$$

On suppose de plus que

$$(22) \qquad \det \left[\partial^{\overbrace{0,\ldots,0}^{m-1 \text{ fois}}} \frac{A_1^B}{A_1^1}, \ldots, \partial^{\overbrace{0,\ldots,0}^{k \text{ fois}}} \frac{A_1^B}{A_1^1}, \ldots, \frac{A_1^B}{A_1^1} \right] \neq 0$$

aux points $(0;\xi_0 = \lambda(0,\xi'),\xi')$.

En utilisant la théorie des opérateurs de Lax-Maslov [4], [9]. Montrons le théorème suivant :

Théorème 2.- [8]

Soit X' un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $X = [0,T^+[\times X'$ avec $0 < T^+$.

Sous les hypothèses précédentes, il existe un voisinage ouvert U de 0 dans X', un voisinage ouvert relativement compact V de $\bar{U}$ dans X', deux intervalles $[0,T_1^+[\subset [0,T^+[$ et $[0,T_2^+[\subset [0,T_1^+[$ pour lesquels, on a les propriétés suivantes :

Pour tout $T \in [0,T_2^+[$, il existe un opérateur $F_{0,1}(T)$ de Lax-Maslov de U dans X appliquant $\mathcal{D}(U)$ dans $C^\infty([0,T_1^+[,\mathcal{D}(V))$ et un opérateur elliptique $E(T) = E$ tel que

a) pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(U)$, la fonction

$(x_0,T,x') \to [F_{0,1}(T)u](x_0,x')$ est de classe C^∞ dans $[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times X'$ et pour tout $T \in [0,T_2^+[$ on a

$$(23) \qquad [F_{0,1}(T)u](T,x') \equiv Eu(x').$$

b) pour tout $T \in [0,T_2^+[$ la restriction

(24) $\qquad R(T) : u \to [h(F_{o,1}(T))u]_{|[0,T_2^+[\times X'}$

de $h_o F_{o,1}(T)$ à $[0,T_2^+[\times X'$ est un opérateur régularisant de U dans $[0,T_2^+[\times X'$ avec

$$[R(T)u](x_o,x') = \int_U K(x_o,T,x',y')u(y')dy'.$$

K étant une fonction scalaire de classe C^∞ dans $[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times X' \times X'$ bornée ainsi que toutes ses dérivées et nulle hors de $[0,T_2^+[\times [0,T_2^+[\times V \times V$.

Le signe $\equiv$ signifie l'égalité modulo un opérateur régularisant à noyau C^∞.

<u>Preuve</u> :

Appelons $\varphi(x,\xi')$ la fonction de phase définie localement par les équations

(25) $$\begin{cases} \partial_o\varphi(x,\xi') = \lambda(x,\operatorname{grad}_{x'}\varphi) \\ \varphi|_{x_o=T} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha\xi_\alpha \end{cases}$$

On cherche $F_{o,1}(T)$ sous la forme d'un développement asymptotique

(26) $$F_{o,1}(T) \sim \sum_{j=m}^{+\infty} F_{o,1}^j(T) .$$

Nous voulons que la restriction à $[0,T_2^+[\times X'$ de l'opérateur de Lax-Maslov

(27) $$h\left[\sum_{j<\ell} F_{o,1}^j(T)\right] \in I^{\frac{3}{4}-\frac{(\ell-1)}{m}}$$

(i.e. d'ordre $\frac{3}{4}-\frac{(\ell-1)}{m}$).

$$(28)\qquad \gamma_o\left[\sum_{j<\ell} F^j_{o,1}(T)\right] - E \quad \text{soit d'ordre} \quad -\frac{\ell}{m}+1 \quad \text{pour} \quad \ell > m.$$

On a :

$$(29)\qquad \left[F^j_{o,1}(T)u\right](x) = (-i)^j(2\pi)^{-n}\int e^{i\left[\phi(x,\xi')+\sum_{k=1}^{m-1}\Psi_k(x,\xi')\right]} Y_{o,1,j+1}(x,\xi')\hat{u}(\xi')d\xi'$$

$u \in \mathcal{D}(U)$, $Y_{o,1,j+1} \in S^{1-\frac{j}{m}}$ homogène, $\Psi_k \in S^{1-\frac{k}{m}}$ homogène à déterminer par la suite.

Pour calculer les valeurs des Ψ_k et des $Y_{o,1,j+1} = Y_{j+1}$, on part de la formule suivante : (en posant $\phi = \Psi_o$) comme dans § 1 :

$$(30)\qquad h(x,D_x)\left[e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k} Y_{j+1}\right] = \sum_{\ell=0}^{n}\left[i\sum_{k=0}^{m-1} H^\ell(x)\left(\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_\ell}\right)\right] e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k} Y_{j+1} +$$

$$+\sum_{\ell=0}^{n} H^\ell(x)e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k}\frac{\partial}{\partial x_\ell}Y_{j+1} + H^*(x)e^{i\sum_{k=0}^{m-1} k} Y_{j+1}$$

c'est-à-dire

$$(30')\quad h(x,D_x)\left[e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k} Y_{j+1}\right] = i\sum_{k=0}^{m-1} H(x,\mathrm{grad}_x\Psi_k)e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k} Y_{j+1} +$$

$$+\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_\ell}H(x,\xi)\Big|_{\xi=\mathrm{grad}_x\phi}\, e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k}\frac{\partial}{\partial x_\ell}Y_{j+1} + H^*(x)e^{i\sum_{k=0}^{m-1}\Psi_k} Y_{j+1}.$$

En posant :

$$(31)\qquad h(x,D_x) = H^o(x)\frac{\partial}{\partial x_o} + \sum_{\ell=1}^{n} H^\ell(x)\frac{\partial}{\partial x_\ell} + H^*(x)$$

avec $H^o(x) \equiv I_m$.

Dans le deuxième membre de (30), la première ligne est de degré $(2 - \frac{k+j}{m})$ et la deuxième ligne est de degré $(1 - \frac{j}{m})$.

Comme dans ce cas, $j \geqslant m$, le terme de plus haut degré dans (30) a pour degré 1 $(k = 0,\ j = m)$.

On écrit alors que la somme des termes de même degré, coefficients de $e^{i \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_k}$ est nulle. On obtient :

Terme de degré 1.

$$(32) \qquad i \sum_{\ell=0}^{n} H^{\ell}(x) \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_\ell} e^{i \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_k} Y_{m+1} = 0$$

c'est-à-dire

$$(33) \qquad H(x;\mathrm{grad}_x \varphi) Y_{m-1} = 0.$$

Terme de degré $1 - \frac{1}{m}$.

$$i \sum_{\ell=0}^{n} H^{\ell}(x) \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_\ell} e^{i \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_k} Y_{m+1} + i \sum_{\ell=0}^{n} H^{\ell}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} e^{i \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_k} Y_{m+2} = 0$$

c'est-à-dire

$$(34) \qquad H(x,\mathrm{grad}_x \varphi) Y_{m+2} + \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H(x,\mathrm{grad}_x \varphi) \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_\alpha} Y_{m+1} = 0$$

et, plus généralement :

Terme de degré $1 - \frac{k}{m}$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$.

$$(34)_k \qquad H(x,\mathrm{grad}_x \varphi) Y_{m+k+1} + \sum_{j=1}^{k} \partial^{\alpha} H(x,\mathrm{grad}_x \varphi) \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_\alpha} Y_{m+k+1-j} = 0.$$

<u>Terme de degré</u> 0.

$$
(35)\qquad \begin{aligned} & H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)Y_{2m+1} + \sum_{j=1}^{m-1} \partial^\alpha H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)\, \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_\alpha}\, Y_{2m+1-j} \\ & - i\, \partial^\alpha H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)\partial_\alpha Y_{m+1} - i\, H^*(x)Y_{m+1} = 0. \end{aligned}
$$

et, plus généralement

<u>Terme de degré</u> $-\frac{r}{m}$ $(r \geqslant 0)$.

$$
(35)_r\qquad \begin{aligned} & H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)Y_{2m+r+1} + \sum_{j=1}^{m-1} \partial^\alpha H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)\, \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_\alpha}\, Y_{2m+r+1-j} \\ & - i\, \partial^\alpha H(x,\mathrm{grad}_x\varphi)\partial_\alpha Y_{m+r+1} - i\, H^*(x)Y_{m+r+1} = 0. \end{aligned}
$$

<u>Résolution des équations</u>.

On va voir que les conditions de compatibilité pour les équations (33) et $(34)_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ sont toutes automatiquement vérifiées.

. Pour l'équation (33), c'est évident et sa résolution donne

$$
(36)\qquad Y^B_{m+1} = \frac{A^B_1}{A^1_1}\, Y^1_{m+1}
$$

en utilisant les relations (13) et (14).

Rappelons les identités

$$
(37)\qquad \left\{ \begin{array}{l} H^{\hat C}_B A^{1B}_{1\hat D} = \delta^{\hat C}_{\hat D} A^1_1 \\ H^A_{\hat C} A^{1\hat D}_{1A} = \delta^{\hat D}_{\hat C} A^1_1 \quad , \quad (\delta^{\hat D}_{\hat C} \text{ le symbole Krönecker}) \end{array} \right.
$$

comme dans § 1, elles permettent d'obtenir

$$Y^B_{m+2} = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{m+2} + \partial^\alpha (\frac{A^B_1}{A^1_1})(\partial_\alpha \Psi_1) Y^1_{m+1}$$

qui résout l'équation $(34)_1$ car la condition de compatibilité est satisfaite.

Pour l'équation $(34)_2$, on a :

$$F^A = - \partial^\alpha H^A_B (\partial_\alpha \Psi_1) \left\{ \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{m+2} + \partial^\beta (\frac{A^B_1}{A^1_1})(\partial_\beta \Psi_1) Y^1_{m+1} \right\} - \partial^\alpha H^A_B (\partial_\alpha \Psi_2) \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{m+2} .$$

La condition de compatibilité (13) est vérifiée car :

$$(39)_* \qquad A^1_A (\partial^\alpha H^A_B) A^B_1 = \partial^\alpha (A^1_A H^A_B A^B_1) = \partial^\alpha [(H')^m A^1_1] = 0$$

$$A^1_A (\partial^\alpha H^A_B) \partial^\beta (\frac{A^B_1}{A^1_1})(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial_\beta \Psi_1) = \frac{1}{2!} \partial^{\alpha\beta} \left\{ A^1_A H^A_B \frac{A^B_1}{A^1_1} \right\} \partial_\alpha \Psi_1 \partial_\beta \Psi_1$$

$$(40)_* \qquad = \frac{1}{2} \left\{ \partial^{\alpha\beta} (H')^m A^1_1 \right\} \partial_\alpha \Psi_1 \partial_\beta \Psi_1$$

$$= 0$$

En effet $\partial^{\alpha\beta}(A^1_A H^A_B A^B_1) = A^1_A (\partial^\beta H^A_B)(\partial^\alpha A^B_1) + A^1_A (\partial^\alpha H^A_B)(\partial^\beta A^B_1)$.

Et (14) donne la résolution de $(34)_2$:

$$Y^B_{m+3} = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{m+3} + \partial^\alpha (\frac{A^B_1}{A^1_1})(\partial_\alpha \Psi_1) Y^1_{m+2} +$$

$$+ \left\{ \partial^\alpha (\frac{A^B_1}{A^1_1})(\partial_\alpha \Psi_2) + \frac{A^{1B}_{1\hat{C}}}{A^1_1} (-\partial^\alpha H^{\hat{C}}_D)(\partial_\alpha \Psi_1) \partial^\beta (\frac{A^D_1}{A^1_1}) \partial_\beta \Psi_1 \right\} Y^1_{m+1} .$$

Or $\quad H^{\hat{C}}_D \dfrac{A^D_1}{A^1_1} = (H')^m \dfrac{\delta^{\hat{C}}_1}{A^1_1} = 0$

On a

$$- (\partial^\alpha H_D^{\hat{C}})\partial^\beta\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) - (\partial^\beta H_D^{\hat{C}})\partial^\alpha\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) = H_D^{\hat{C}}\partial^{\alpha\beta}\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right)$$

d'où

$$(40) \qquad - (\partial^\alpha H_D^{\hat{C}})\partial^\beta\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha\Psi_1)(\partial_\beta\Psi_1) = \frac{1}{2}\, H_D^{\hat{C}}\partial^{\alpha\beta}\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha\Psi_1)(\partial_\beta\Psi_1)$$

et en utilisant (37), on a :

$$(41) \qquad \begin{aligned} Y_{m+3}^B &= \frac{A_1^B}{A_1^1}\, Y_{m+3}^1 + \left(\partial^\alpha\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha\Psi_1)Y_{m+2}^1 \\ &+ \left\{\left(\partial^\alpha\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha\Psi_2) + \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha\beta}\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha\Psi_1)(\partial_\beta\Psi_1)\right\} Y_{m+1}^1 \quad . \end{aligned}$$

Pour l'équation $(34)_3$, on a :

$$\begin{aligned} F^A = &- (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha\Psi_1)\left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1}\, Y_{m+3}^1 + \left(\partial^\beta\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\beta\Psi_1)Y_{m+2}^1 + \right. \\ &\left. + \left[\left(\partial^\beta\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)\partial_\beta\Psi_2 + \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha\gamma}\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\gamma\Psi_1)(\partial_\beta\Psi_1)\right] Y_{m+1}^1 \right\} \\ &- (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha\Psi_2)\left\{\frac{A_1^B}{A_1^1}\, Y_{m+2}^1 + \left(\partial^\beta\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\beta\Psi_1)Y_{m+1}^1\right\} \\ &- (\partial^\alpha\, H_B^A)(\partial_\alpha\Psi_3)\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\, Y_{m+1}^1 \\ = &- (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha\Psi_1)\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\, Y_{m+3}^1 \\ &- \left[(\partial^\alpha H_B^A)\left(\partial^\beta\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha\Psi_1)(\partial_\beta\Psi_1) + (\partial^\alpha H_B^A)\, \frac{A_1^B}{A_1^1}\, (\partial_\alpha\Psi_2)\right] Y_{m+2}^1 \end{aligned}$$

$$- \left[(\partial^\alpha H_B^A)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi_1 \cdot \partial_\beta \Psi_2 - \partial_\alpha \Psi_2 \partial_\beta \Psi_1) + (\partial^\alpha H_B^A) \frac{A_1^B}{A_1^1} \partial_\alpha \Psi_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\partial^\alpha H_B^A)(\partial^{\gamma\beta} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial_\beta \Psi_1)(\partial_\gamma \Psi_1) \right] Y_{m+1}^1 \; .$$

La condition de compatibilité (13) est vérifiée car en plus de (39) et (40), on a :

$$(42) \qquad A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial^{\beta\gamma} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial_\beta \Psi_1)(\partial_\gamma \Psi_1) =$$

$$= \frac{1}{3} \; \partial^{\alpha\beta\gamma}(A_A^1 H_B^A \frac{A_1}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial_\beta \Psi_1)(\partial_\gamma \Psi_1)$$

puisque

$$\partial^{\alpha\beta\gamma}(A_A^1 H_B^A A_1^B) = A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial^{\beta\gamma} A_1^B) + A_A^1(\partial^\beta H_B^A)\partial^{\alpha\gamma} A_1^B + A_A^1(\partial^\gamma H_B^A)(\partial^{\alpha\beta} A_1^B).$$

D'où la résolution de $(34)_3$.

$$Y_{m+4}^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{m+4}^1 + \partial^\alpha (\frac{A_1^B}{A_1^1}) \partial_\alpha \Psi_1 Y_{m+3}^1 + \left[\frac{1}{2} \partial^{\beta\gamma} (\frac{A_1^B}{A_1^1}) \partial_\beta \Psi_1 \partial_\gamma \Psi_1 + \partial^\beta (\frac{A_1^B}{A_1^1}) \partial_\beta \Psi_2 \right] Y_{m+2}^1$$

$$(43) \quad + \left[\frac{1}{3!} \partial^{\alpha\beta\gamma} (\frac{A_1^B}{A_1^1}) \partial_\alpha \Psi_1 \partial_\beta \Psi_1 \partial_\gamma \Psi_1 + \frac{1}{2!} \partial^{\alpha\beta} (\frac{A_1^B}{A_1^1}) (\partial_\alpha \Psi_1 \partial_\beta \Psi_2 + \partial_\alpha \Psi_2 \partial_\beta \Psi_1) + \partial^\alpha (\frac{A_1^B}{A_1^1}) \partial_\alpha \Psi_3 \right] Y_{m+1}^1$$

car

$$(44) \qquad (\partial^\alpha H_B^A)(\partial^{\beta\gamma} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial_\beta \Psi_1)(\partial_\gamma \Psi_1) = \frac{1}{3} H_B^A (\partial^{\alpha\beta\gamma} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial_\beta \Psi_1)(\partial_\gamma \Psi_1)$$

et

$$(45) \qquad - \left[(\partial^\alpha H_B^A)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1}) + (\partial^\beta H_B^A)(\partial^\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1}) \right] = H_B^A (\partial^{\alpha\beta} \frac{A_1^B}{A_1^1}) \; .$$

Et ainsi par récurrence, on obtient la résolution de $(34)_k$:

$$(46)\quad Y^B_{m+k+1} = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{m+k+1} + \partial^\alpha\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big)\partial_\alpha\Psi_1 Y^1_{m+k} +$$

$$+\Big\{ \frac{1}{2!}\,\partial^{\alpha\beta}\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big)(\partial_\alpha\Psi_1)(\partial_\beta\Psi_1) + \partial^\alpha\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big)(\partial_\alpha\Psi_2)\; Y^1_{m+k-1} +$$

$$+ \sum_{j=3}^{k} \frac{1}{j!}\,\partial^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j}\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big)(\partial_{\alpha_1}\Psi_1)\ldots(\partial_{\alpha_j}\Psi_1) +$$

$$\sum_{\ell=1}^{j-1} \frac{1}{!}\,\partial^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\ell}\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big) \sum_{i_1+\ldots+i=j} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_\ell}\Psi_{i_\ell})\Big\} Y^1_{m+k+1-j}$$

pour tout $k = 3,\ldots,m-1$, car la condition de compatibilité (13) est toujours satisfaite.

<u>Résolution de l'équation</u> (35) :

La condition de compatibilité (13) s'écrit :

$$A^1_A H^A_B Y^B_{2m+1} + \sum_{\ell=1}^{m-1} A^1_A(\partial^\alpha H^A_B)(\partial_\alpha\Psi_\ell)\Big\{ \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{2m+1-\ell} + \Big(\partial^\beta \frac{A^B_1}{A^1_1}\Big)(\partial_\beta\Psi_1)Y^1_{2m-\ell} + \ldots +$$

$$\Big[\sum_{v=1}^{m-\ell} \frac{1}{v!}\Big(\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_v} \frac{A^B_1}{A^1_1}\Big) \sum_{i_1+\ldots+i_v=m-\ell} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_v}\Psi_{i_v})\Big] Y^1_{m+1}\Big\}$$

$$- i\, A^1_A(\partial^\alpha H^A_B)\partial_\alpha\Big[\Big(\frac{A^B_1}{A^1_1}\Big)Y^1_{m+1}\Big] - i\, A^1_A \overset{*}{H}{}^A_B \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{m+1} = 0.$$

Tous les termes sont nuls sauf ceux de la dernière ligne et ceux de la forme :

$$\frac{1}{v!} A^1_A(\partial^\alpha H^A_B)(\partial_\alpha\Psi_\ell)\Big(\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_v} \frac{A^B_1}{A^1_1}\Big) \sum_{i_1+\ldots+i_v=m-\ell} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_v}\Psi_{i_v})$$

correspondant à la plus grande dérivation $v = m-\ell$ et $\ell = 1$ c'est-à-dire

$$\left\{ \frac{1}{(m-1)!} A^1_A (\partial^\alpha H^A_B)(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}} \frac{A^B_1}{A^1_1}) \sum_{i_1+\dots+i_{m-1}=m-1} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\dots(\partial_{\alpha_{m-1}}\Psi_{i_{m-1}}) \right.$$

$$\left. - i\, A^1_A (\partial^\alpha H^A_B)(\partial_\alpha \frac{A^B_1}{A^1_1}) - i\, A^1_A H^{*A}_B \frac{A^B_1}{A^1_1} \right\} Y^1_{m+1} = 0.$$

Or

$$\sum_{i_1+\dots+i_{m-1}=m-1} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\dots(\partial_{\alpha_{m-1}}\Psi_{i_{m-1}}) = (\partial_{\alpha_1}\Psi_1)\dots(\partial_{\alpha_{m-1}}\Psi_1)$$

et $\quad (\partial^\alpha H^A_B)(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}} \frac{A^B_1}{A^1_1} (\partial_{\alpha_1}\Psi_1)\dots(\partial_{\alpha_{m-1}}\Psi_1) =$

$$= \frac{1}{m} (\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_m} H^A_B \frac{A^B_1}{A^1_1})(\partial_{\alpha_1}\Psi_1)\dots(\partial_{\alpha_m}\Psi_1)$$

puisque H^A_B est de degré 1 et que

$$(\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_m} H^A_B \frac{A^B_1}{A^1_1}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^A_B}{\partial \xi_{\alpha_k}} (\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}+\alpha_{k+1}+\dots+\alpha_m} \frac{A^B_1}{A^1_1})$$

comme

$$\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_m} H^A_B \frac{A^B_1}{A^1_1} = m!(\partial^{\alpha_1}H')\dots(\partial^{\alpha_n}H') \frac{\delta^A_1}{A^1_1} ,$$

la condition de compatibilité s'écrit donc :

$$(\partial^{\alpha_1}H')\dots(\partial^{\alpha_m}H')(\partial_{\alpha_1}\Psi_1)\dots(\partial_{\alpha_m}\Psi_1) = i\, \frac{A^1_A(\partial^\alpha H^A_B)(\partial_\alpha A^B_1) + A^1_A H^{*A}_B A^B_1}{A^1_1}$$

c'est-à-dire

$$(47) \qquad [(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha \Psi_1)]^m = i\, \frac{A^1_A[\partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha A^B_1 + H^{*A}_B A^B_1]}{A^1_1} \quad .$$

on pose

$$L_1^1(\psi) = \frac{A_A^1 \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha A_1^B + A_A^1 H_B^{*A} A_1^B}{A_1^1} \quad (\mathrm{grad}_x, \psi) \tag{48}$$

On trouve alors la solution de (35) à l'aide de l'expression (14) c'est-à-dire :

$$Y_{2m+1}^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{2m+1}^1 + \left(\partial^\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1}\right)(\partial_\alpha \Psi_1) Y_{2m}^1 + \tag{49}$$

$$+ \left[\sum_{k=2}^{m-1} \left\{ \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\ell} \left(\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1}\right) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=k} (\partial_{\alpha_1} \Psi_{i_1}) \ldots (\partial_{\alpha_\ell} \Psi_{i_\ell}) \right\}\right] Y_{2m+1-k}^1$$

$$+ \left\{ \sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\ell} \left(\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1}\right) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=m} (\partial_{\alpha_1} \Psi_{i_1}) \ldots (\partial_{\alpha_\ell} \Psi_{i_\ell}) \right.$$

$$\left. + i \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} \left[(\partial^\alpha H_D^{\hat{C}}) \left(\partial_\alpha \frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_B^{*\hat{C}} \frac{A_1^D}{A_1^1} \right] \right\} Y_{m+1}^1 - i \left(\partial^\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1}\right) \partial_\alpha Y_{m+1}^1$$

car

$$\frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} (\partial^\alpha H_D^{\hat{C}}) \frac{A_1^D}{A_1^1} \partial_\alpha Y_{m+1}^1 =$$

$$= - \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} H_D^{\hat{C}} \left(\partial^\alpha \frac{A_1^D}{A_1^1}\right) \partial_\alpha Y_{m+1}^1 = - \frac{\delta_D^B A_1^1}{A_1^1} \left(\partial^\alpha \frac{A_1^D}{A_1^1}\right) \partial_\alpha Y_{m+1}^1 = - \left(\partial^\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1}\right) \partial_\alpha Y_{m+1}^1 .$$

<u>Résolution de l'équation</u> $(35)_1$:

$$F^A = - (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1) \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{2m+1}^1 + \right.$$

$$\left[\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_\ell} \left(\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1}\right) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=k} (\partial_{\alpha_1} \Psi_{i_1}) \ldots (\partial_{\alpha_\ell} \Psi_{i_\ell}) \right] Y_{2m+1-k}^1$$

$$+ \left[\sum_{\ell=2}^{m} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} (\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1}) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=m} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_\ell}\Psi_{i_\ell}) + \right.$$

$$\left. + i \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} (\partial^\alpha H_D^{\hat{C}} \partial_\alpha \frac{A_1^D}{A_1^1} + H_D^{*\hat{C}} \frac{A_1^D}{A_1^1})\right] Y_{2m+1}^1 - i(\partial^\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1})\partial_\alpha Y_{m+1}^1 \Bigg\}$$

$$- \sum_{j=2}^{m-1} (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_j) \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{2m+2-j}^1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m+1-j} \left[\sum_{=1}^{k} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} (\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1}) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=k} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_\ell}\Psi_{i_\ell})\right] Y_{2m+2-j-k}^1 \right\}$$

$$+ i(\partial^\alpha H_B^A)\partial_\alpha \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{m+2}^1 + (\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1) Y_{m+1}^1 \right\} +$$

$$+ i\, H_B^{*A} \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{m+2}^1 + (\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1) Y_{m+1}^1 \right\} .$$

La condition de compatibilité (13) $A_A^1 F^A = 0$ se simplifie dans la mesure où tous termes non coefficients de Y_{m+1}^1 ou de Y_{m+2}^1 sont identiquement nuls en vertu des relations du type (39), (40), (42) avec des dérivées d'ordre $\leqslant m-1$.

Pour les coefficients de Y_{m+2}^1 et de Y_{m+1}^1 interviennent les plus hautes dérivées (d'ordre m).

<u>Coefficient du terme en</u> Y_{m+2}^1 <u>dans</u> (13) :

$$\left[-A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1) \left\{ \sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} (\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1} \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=m-1} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_\ell}\Psi_{i_\ell}) \right\}\right.$$

$$- A_A^1(\partial^\alpha H_B^A) \sum_{j=2}^{m-1} (\partial_\alpha \Psi_j) \sum_{\ell=1}^{m-j} \frac{1}{\ell!} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} (\partial^{\alpha_1\ldots\alpha_\ell} \frac{A_1^B}{A_1^1}) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=m-j} (\partial_{\alpha_1}\Psi_{i_1})\ldots(\partial_{\alpha_\ell}\Psi_{i_\ell})$$

$$+ i\, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A) \partial_\alpha \left\{ \frac{A_1^B}{A_1^1} \right\} + i\, A_A^1 H_B^{*A} \frac{A_1^B}{A_1^1}$$

et il reste seulement :

$$- A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1) \frac{1}{(m-1)!} (\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_{\alpha_1} \Psi_1) \ldots (\partial_{\alpha_{m-1}} \Psi_1)$$

$$+ i\, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \frac{A_1^B}{A_1^1}) + i\, A_A^1 H_B^{*A} \frac{A_1^B}{A_1^1} = 0$$

car c'est justement la condition de compatibilité (47) de (35).

<u>Coefficient du terme en</u> Y_{m+1}^1 <u>dans</u> (13) :

Il reste

$$\left\{ - A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1) \frac{1}{(m-1)!} (\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \frac{A_1^B}{A_1^1}) \sum_{i_1 + \ldots + i_{m-1} = m} (\partial_{\alpha_1} \Psi_{i_1}) \ldots (\partial_{\alpha_{m-1}} \Psi_{i_{m-1}}) \right.$$

$$- A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1) \frac{1}{m!} (\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_{\alpha_1} \Psi_1) \ldots (\partial_{\alpha_m} \Psi_1)$$

$$- A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1)\, i \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1} (\partial^\alpha H_D^{\hat{C}}\, \partial_\alpha \frac{A_1^D}{A_1^1} + H_D^{*\hat{C}} \frac{A_1^D}{A_1^1})$$

$$\left. - A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_2) \frac{1}{(m-1)!} (\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_{\alpha_1} \Psi_1) \ldots (\partial_{\alpha_{m-1}} \Psi_1) \right\} Y_{m+1}^1$$

$$+ i\, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1}) \partial_\beta Y_{m+1}^1 + i\, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1) \partial_\alpha Y_{m+1}^1$$

$$+ i\, A_A^1 (\partial^\alpha H_B^A) \left[\partial_\alpha \left\{ (\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1) \right\} \right] Y_{m+1}^1$$

$$+ i\, A_A^1 H_B^{*A} (\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1) Y_{m+1}^1 .$$

Remarquons que

$$i\, A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})\partial_\beta Y_{m+1}^1 + i\, A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1)\partial_\alpha Y_{m+1}^1 =$$

$$= 2i\, A_A^1\, \partial^{\alpha\beta}(H_B^A \frac{A_1^B}{A_1^1})\partial_\alpha \Psi_1 \partial_\beta Y_{m+1}^1 = 0.$$

et que la première + la quatrième ligne de ce coefficient est égal à

$$- \left[(\partial^\beta H')\partial_\beta \Psi_2\right]\left[(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha \Psi_1)\right]^{m-1}$$

d'où l'équation en Ψ_2 :

$$(50) \qquad \left[(\partial^\beta H')(\partial_\beta \Psi_2)\right]\left[(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha \Psi_1)\right]^{m-1} =$$

$$i\, A_1^1\left[(\partial^\alpha H_B^A)\left[\partial_\alpha\left\{(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_\beta \Psi_1)\right\}\right] + (H_B^{*A})(\partial^\beta \frac{A_1^B}{A_1^1})\partial_\beta \Psi_1\right]$$

$$- i\, A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1)\, \frac{A_{1\hat{C}}^{1B}}{A_1^1}\left[(\partial^\beta H_D^{\hat{C}})\partial_\beta \frac{A_1^D}{A_1^1} + H_D^{*\hat{C}} \frac{A_1^D}{A_1^1}\right]$$

$$- \frac{1}{m!}\, A_A^1(\partial^\alpha H_B^A)(\partial_\alpha \Psi_1)(\partial^{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \frac{A_1^B}{A_1^1})(\partial_{\alpha_1} \Psi_1)\ldots(\partial_{\alpha_m} \Psi_1)$$

qui est résoluble en prenant $\Psi_2(T,x',\xi') = 0$ car $(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha \Psi_1) \neq 0$.

On peut alors résoudre l'équation $(35)_2$ à l'aide de la formule (14).

On résout ensuite $(35)_3$: la condition de compatibilité (13) donne une équation du type :

$$(51) \qquad (\partial^\beta H')(\partial_\beta \Psi_3)\left[(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha \Psi_1)\right]^{m-1} = B_3$$

et toutes les conditions de compatibilité sont de ce type

$$(\partial^\beta H')(\partial_\beta \Psi_k)\left[(\partial^\alpha H')(\partial_\alpha \Psi_1)\right]^{m-1} = B_k$$

en prenant le coefficient de Y^1_{m+1} dans $A^1_A F^A$ (les autres coefficients étant identiquement nuls), on peut résoudre alors toutes les équations $(35)_k$ $k = 0,\dots,m-2$, dont les conditions de compatibilité donnent $\Psi_1,\dots,\Psi_{m-1}$ et obtenir les Y^B_{2m+r+1} $(r = 0,\dots,m-2)$ en fonction de $Y^1_{2m+r+1},\dots,Y^1_{m+1}$.

La condition de compatibilité de $(35)_{m-1}$ donne une équation différentielle d'inconnue Y^1_{m+1} du 1er ordre le long de la bicaractéristique homogène ; la résolution de $(35)_{m-1}$ donne Y^B_{3m} en fonction de $Y^1_{3m},\dots,Y^1_{m+1}$, et ainsi de suite.

Réalisation de la condition de trace.

Notons les traces par les mêmes notations pour ne pas surcharger l'écriture, on prend sur $x_o = T$

$$Y^1_{m+1} = (1,0,\dots,0) \qquad \text{1ère ligne de } Y_{m+1}$$

$$Y^1_{m+2} = (0,1,0,\dots,0).\frac{1}{|\xi'|^{1/m}}$$

$$\vdots$$

$$Y^1_{2m} = (0,\dots,0,1)\cdot\frac{1}{|\xi'|^{1-\frac{1}{m}}} .$$

D'où

$$Y_{m+1} = \left(\frac{A^B_1}{A^1_1},0,\dots,0\right) \qquad \text{matrice } m \times m$$

$$Y_{m+2} = \left(\partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)(\partial_o\Psi_1),\ \frac{1}{|\xi'|^{\frac{1}{m}}}\frac{A^B_1}{A^1_1},0,\dots,0\right)$$

$$Y_{m+3} = \left[\partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\partial_o\Psi_2 + \frac{1}{2}\left(\partial^{oo}\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\partial_o\Psi_1\partial_o\Psi_1,\quad \frac{1}{|\xi'|^{\frac{1}{m}}}\left(\partial^o\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\partial_o\Psi_1,\frac{1}{|\xi'|^{\frac{2}{m}}}\frac{A^B_1}{A^1_1},0,\dots,0\right]$$

$$Y_{m+4} = \Bigg[\frac{1}{3!} \Big(\partial^{000} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)\partial_o\Psi_1\partial_o\Psi_1\partial_o\Psi_1 + \frac{1}{2!} \Big(\partial^{00} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)(\partial_o\Psi_1\partial_o\Psi_2 + \partial_o\Psi_2\partial_o\Psi_1) +$$

$$+ \Big(\partial^{o} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)\partial_o\Psi_3, \left[\frac{1}{2!} \Big(\partial^{oo} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)\partial_o\Psi_1\partial_o\Psi_1 + \Big(\partial^{o} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)\partial_o\Psi_2\right] \frac{1}{|\xi'|^{\frac{1}{m}}},$$

$$\Big(\partial^{o} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)\partial_o\Psi_1 \frac{1}{|\xi'|^{\frac{2}{m}}}, \frac{A_1^B}{A_1^1} \frac{1}{|\xi'|^{\frac{3}{m}}}, 0, \ldots, 0 \Bigg] .$$

$$Y_{2m} = \Bigg[\frac{1}{(m-1)!} \Big(\overbrace{\partial^{o \ldots o}}^{m-1 \text{ fois}} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big)\overbrace{(\partial_o\Psi_1)\ldots(\partial_o\Psi_1)}^{m-1 \text{ fois}} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{m-2} \frac{1}{\ell!} \Big(\overbrace{\partial^{o \ldots o}}^{\ell \text{ fois}} \frac{A_1^B}{A_1^1}\Big) \sum_{i_1+\ldots+i_\ell=m-1} (\partial_o\Psi_{i_1})\ldots(\partial_o\Psi_{i_\ell}), \ldots, \frac{A_1^B}{A_1^1} \Big(\frac{1}{|\xi'|^{\frac{1}{m}}}\Big)^{m-1} \Bigg].$$

$$\det\left[Y_{m+1} + Y_{m+2} + \ldots + Y_{2m}\right] =$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \ldots \frac{1}{2!}\,\frac{1}{1!}\,(\partial_o\Psi_1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \det\left[\overbrace{\partial^{o \ldots o}}^{m-1 \text{ fois}} \frac{A_1^B}{A_1^1}, \ldots, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right] \Big(\frac{1}{|\xi'|}\Big)^{\frac{m-1}{2}}$$

de degré = - (m-1).

En prenant $Y^1_{2m+1} = Y^1_{2m+k+1} = (0,\ldots,0) \quad \forall k \geq 0$, on aura

$\gamma_o F_{o,1}(T) = E$ elliptique pourvu que

$$\det\left[\overbrace{\partial^{o \ldots o}}^{m-1 \text{ fois}} \frac{A_1^B}{A_1^1}, \ldots, \overbrace{\partial^{o \ldots o}}^{k \text{ fois}} \frac{A_1^B}{A_1^1}, \ldots, \frac{A_1^B}{A_1^1}\right] \neq 0 \quad \text{aux points } (0;\xi_o = \lambda(0,\xi'),\xi')$$

ce qui est vrai par hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. BELABBES - Solutions nulles pour un opérateur différentiel matriciel analytique relativement à une hypersurface caractéristique multiple.
Thèse de 3ème cycle, Lille, 1982.

[2] R. BERZIN et J. VAILLANT - Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples.
Journal de Math. Pures et Appl. 58, 1979, p. 165-216.

[3] J.C. DE PARIS - Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité.
J. Math. Pures et Appl. (9) 51 (1972), 231-256.

[4] J. DIEUDONNE - Eléments d'Analyse.
Gauthier-Villars, t. 7 et t. 8 (1978).

[5] D. GOURDIN - Thèse d'Etat, 1978.

[6] D. GOURDIN et H. KADRI - Un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy relatif à une classe de systèmes différentiels linéaires à caractéristiques multiples.
Note C.R.A.S. Paris t. 301, Série 1, n° 5, 173-176.

[7] D. GOURDIN et H. KADRI - Théorème d'unicité pour un problème de Cauchy C^∞ matriciel à caractéristiques multiples.
(A paraître : Kinokuyina Compagny Ltd).

[8] D. GOURDIN et F. TOUADERA - Unicité de Cauchy pour des systèmes non hyperboliques à caractéristiques multiples et constructions de paramétrix locales généréIisées.
(A paraître).

[9] L. HORMANDER - The Analysis of linear Partial Differential operators. Tome III et IV.
Springer Verlag (1985).

[10] J. LERAY - Equations hyperboliques non strictes : Contre exemples du type de Giorgi aux théorèmes d'existence et d'unicité.
Math. Annalen 162 (1966), p. 228-256.

[11] F. TREVES - Introduction to Fourier operators. Tome 1.
Plenum press, New York and London, 1980.

[12] J. VAILLANT - Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques.
J. Math. Pures Appl. (9) 47 (1968), 1 - 40.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous étudions des conditions suffisantes d'hyperbolicité faible pour les systèmes à caractéristiques de multiplicité variable et des conditions suffisantes d'unicité de Cauchy C^∞ pour des systèmes non hyperboliques de multiplicité constante.

Plus précisément, d'une part, nous généralisons ici les travaux de T. Nishitani sur l'hyperbolicité faible. Et, d'autre part, nous montrons que la non nullité du sous-caractéristique sur l'ensemble caractéristique multiple est une condition suffisante d'unicité de Cauchy C^∞ pour des systèmes d'ordre t quelconque dont le déterminant caractéristique admet σ facteurs multiples de multiplicité, constante m_i quelconque. Ce résultat n'était jusqu'à présent démontré que lorsque $t = \sigma = 1$ (cf. thèse de Kadri).

Dans ce dernier cas, nous construisons des paramétrix locales généralisées en nous inspirant de développements asymptotiques établis par R. Berzin et J. Vaillant lorsque la multiplicité était inférieure ou égale à trois.

MOTS CLES :

- Problème de Cauchy matriciel
- Unicité
- Non caractéristique
- Caractéristique de multiplicité constante
- Caractéristique de multiplicité variable
- Polynôme sous-caractéristique
- Développement asymptotique
- Opérateurs intégraux de Fourier