50376 1987 113



# THESE

Nº d'ordre 127

présentée à

# L'UNIVERSILE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

# DOCTEUR EN MECANIQUE

par



Contribution à la modélisation du comportement dynamique d'un manipulateur déformable

Soutenue le 24 Juin 1987 devant la commission d'examen

Président : M. MICHEAU Rapporteurs : M. BARRACO M. GERADIN Examinateurs : M. BARRAND M. DEBUS M. FLAMME

à Sabine,

à nos parents,

à nos frères et soeur,

à ma famille et à tous mes amis. Ce travail a été réalisé au laboratoire informatique de l'Institut Catholique des Arts et Métiers de Lille en relation avec le laboratoire d'Acoustique de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord.

Je tiens à exprimer ma très vive gratitude à Monsieur le Professeur Micheau pour l'intérêt constant qu'il a accordé à cette étude, pour ses encouragements et ses conseils judicieux.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Jean-Claude Debus du laboratoire d'Acoustique de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord pour l'accueil qu'il m'a réservé et l'aide constante qu'il m'a apportée dans la réalisation de ce travail. Jean-Claude, je t'assure de toute ma reconnaissance et de ma sincère amitié.

Monsieur le Professeur Géradin de l'Université de Liège m'honore en acceptant d'être rapporteur de ce travail et de participer à ce jury de thèse.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Barraco du laboratoire Structures du centre de Paris de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers pour avoir accepté de participer à ce jury et d'être rapporteur de ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur Barrand du centre de Lille de l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers qui me fait le plaisir de participer à ce jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur Flamme pour sa participation à ce jury.

Je remercie la direction de l'Institut Catholique des Arts et Métiers qui a encouragé la réalisation de ce travail ainsi que les membres du laboratoire d'Acoustique de l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord qui m'ont accueilli et ont permis la réalisation de cette thèse grâce à leurs conseils, à leur aide et à leur amitié.

#### Tables des matières

#### p 1 INTRODUCTION

#### PARTIE 1 : BILAN BIBLIOGRAPHIQUE P 5 5 i.i) Hypothèses sur le modèle étudié : Ρ 1.2) Choix du formalisme. р 6 a) Principe fondamental de la dynamique b) Principe des puissances virtuelles c) Principe d'Hamilton 1.3) Choix de la référence 10 р a) Utilisation du référentiel général b) Utilisation d'un référentiel intermédiaire mobile c) Utilisation d'une position précédente du système d) Utilisation du mouvement de corps rigides 1.4) Paramétrage de la chaine mécanique 14 p 19 1.5) Inconnues du modèle р a) Déplacements b) Paramètres d'Euler c) Coefficients de séries de déplacement 21 1.6) Méthodes de résolution des équations du mouvement p a) Système ramené au premier ordre b) Résolution par des méthodes directes degrés de liberté р 25 1.7) Imposition des liaisons entre élastiques aux articulations a) Multiplicateurs indéterminés de Lagrange b) Pénalisation 1.8) Rappel des choix effectués р 26 PARTIE 2 : Elaboration des équations du mouvement 29 P 29 2.1) Rappel des équations de Lagrange. р 2.2) Calcul de l'énergie cinétique 29 p 33 2.3) Calcul de l'énergie potentielle de déformation. p 2.4) Calcul de l'énergie potentielle de gravitation. 34 p

Table des matières

page 2

- p 35 2.5) Introduction éventuelle du terme d'amortissement interne.
- p 36 2.6) Développement des différents termes
  - a) Termes dépendant de l'énergie cinétique
    - b) Termes dépendant de l'énergie potentielle de gravitation
    - c) Termes dépendant de l'énergie potentielle de déformation
- p 39 2.7) Résumé des équations du mouvement
- p 40 2.8) Effets gyroscopiques

p 40 2.9) Imposition des liaisons entre degrés de liberté élastiques aux articulations

- a) Etude des articulations
- b) Etude des axes
- c) Condensation locale
- d) Imposition de valeurs pour certains degré de liberté
- e) Système à résoudre
- p 46 2.10) Réactions aux articulations

47 PARTIE 3 : Algorithme de résolution des équations P 3.1) Présentation de la méthode р 47 3.2) Critères de stabilité et de précision 53 p 54 3.3) Comparaison avec d'autres schémas d'intégration р 60 3.4) Etude de la réponse à une excitation échelon p a) Réponse théorique b) Résolution à l'aide de l'algorithme SS22 3.5) Valeur du résidu en fonction de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ 61 ρ PARTIE 4 : Mise en forme d'un élément de poutre 65 p 65 4.1) Introduction р 4.2) Energie potentielle de déformation 65 р 67 4.3) Matrice de rigidité р р 70 4.4) Energie potentielle de gravitation

Table des matières

р 71 4.5) Matrice de masse 72 4.6) Matrice [K<sub>d</sub>] p 74 4.7) Matrice  $[C_T]$  et vecteur  $F_d$ σ 74 4.8) Test : vibrations libres р 77 4.9) Test : mouvement de rotation р р 84 4.10) Approche des résultats par la R.D.M. 85 4.11) Conclusion Ρ PARTIE 5 : Mise en forme d'un élément de coque р 86 86 5.1) Introduction p 87 5.2) Matrice de rigidité de l'élément DKT р 92 5.3) Matrice de masse de l'élément et vecteur p des sollicitations réparties de l'élément DKT 94 5.4) Elément CST P 5.5) Elément COQ 95 р p 96 5.6) Expressions dans le repère lié au bras

p 97 5.7) Partie dynamique de l'élément de coque

p 97 5.8) Test : vibrations libres

p 100 5.9) Test : mouvement de rotation

p 109 5.10) Test : mouvement de rotation avec une plaque plus flexible

p 110 5.11) Conclusion

p 112 PARTIE 6 : Tests comparatifs

p 112 6.1) Introduction

p 112 6.2) Bras manipulateur

p 120 6.3) Pendule flexible

page 3

p 126 6.4) Conclusion

p 127 CONCLUSION

Annexes

Annexe i Opérations sur les matrices de transformation

p i Ai. i) Derivation

p 3 A1.2) Inversion

p 4 A1.3) Remarques

Annexe 2 Elaboration d'une forme simplifiée de l'énergie cinétique

Annexe 3 Expression explicite de la matrice de rigidité de l'élément DKT

Annexe 4 Stabilité et précision de l'algorithme de résolution des équations du mouvement

p i A4. i) Préliminaires à l'étude de stabilité et de précision

p 2 A4.2) Stabilité de l'algorithme SS22

p 5 A4.3) Précision obtenue avec l'algorithme SS22

Bibliographie

p i Dynamique et commande des mécanismes

- p 7 Méthode d'imposition de contraintes entre degrés de liberté
- p 8 Méthodes numériques d'intégration des équations différentielles.

p 10 Ouvrages généraux.

#### Figures

## PARTIE 1 : BILAN BIBLIOGRAPHIQUE

P	5	fig.	1.1	Schématisation d'un manipulateur
р	11	fig.	1.2	Repérage lié au bras déformé
р	12	fig.	i.3	Repérage lié à la position de corps rigides
P	13	fig.	1.4	Repère associé au bras
р	14	fig.	1.5	Membre i du manipulateur
р	15	fig.	1.6	Changement de référence
р	20	fig.	1.7	Rotation simple autour d'un axe

## PARTIE 2 : Elaboration des équations du mouvement

P	31	fig.	2.1	Déplacement dans le repère lié au bras
p	41	fig.	2.2	Représentation d'une articulation
p	42	fig.	2.3	Axe d'une articulation

## PARTIE 3 : Algorithme de résolution des équations

p	48	fig.	3.1	Approximation de <u>a</u> sur un intervalle de temps
P	54	fig.	3.2	Stabilité et précision fonctions de $\Theta_1$ et $\Theta_2$
			•	sans amortissement
р	54	fig.	3.3	Stabilité et précision fonctions de $\Theta_1$ et $\Theta_2$
				avec amortissement
р	56	fig.	3.4	Résultats obtenus avec la méthode des
				différences finies centrales
р	58	fig.	3.5	Résultats obtenus avec la méthode de Newmark
р	58	fig.	3.6	Résultats théoriques
р	59	fig.	3.7	Résultats obtenus avec l'algorithme SS22
р	63	fig.	3.8	Réponse du système à une sollicitation échelon
р	64	fig.	3.9	Réponse du système à une sollicitation échelon

# PARTIE 4 : Mise en forme d'un élément de poutre

p	6 <b>6</b>	fig.	4.1	Déformation de l'élément de poutre
p	68	fig.	4.2	Fonctions d'interpolation de l'élément de
				poutre
р	75	fig,	4.3	Déplacements de l'extrêmité libre de la poutre
				en vibrations libres
p	76	fig.	4.4	Poutre décomposée en 10 éléments - déplacements
_		-		de deux noeuds en vibrations libres
р	77	fig.	4.5	Mouvement de rotation - loi angulaire teta
р	78	fig.	4.6	Mouvement de rotation - loi angulaire tetap
р	78	fig.	4.7	Mouvement de rotation - loi angulaire tetas
p	79	fig.	4.8	Mouvement de rotation - Déformée de l'extrémité
				libre du manipulateur - 600 points
				d'intégration - sans amortissement

page 6

P	80	fig.	4.9	Mouvement de rotation - Déformée de l'extrêmité
				libre du manipulateur - 6000 points
				d'intégration - sans amortissement
р	81	fig.	4.10	Mouvement de rotation - Déformée de l'extrémité
				libre du manipulateur - 6000 points
				d'intégration - sans amortissement - 2 bras
p	82	fig.	4.11	Mouvement de rotation - couple moteur - avec amortissement
р	83	fig.	4.12	Mouvement de rotation - Déformée de l'extrémité
				libre du manipulateur - 600 points
				d'intégration - avec amortissement
р	84	fig.	4.13	Agrandissement du début de la courbe 4.12

-

ļ

1

# PARTIE 5 : Mise en forme d'un élément de coque

р	87	fig.	5.1	Repérage local de l'élément DKT
р	88	fig.	5.2	Définition des angles $\beta_x$ et $\beta_y$
р	89	fig.	5.3	Elément isoparamétrique associé à l'élément DKT
р	90	fig.	5.4	Repères locaux sur l'élément DKT
P	98	fig.	5.5	Différent maillages réguliers utilisables.
p	102	fig.	5.6	Modes propres - plaque non déformée
p	102	fig.	5.7	Modes propres - ier mode
p	103	fig.	5.8	Modes propres - 2nd mode
p	103	fig.	5.9	Modes propres - Jième mode
P	104	fig.	5.10	Vibrations libres - Déflexion du noeud 17
p	104	fig.	5.11	Vibrations libres - Rotation au noeud 16
p	105	fig.	5.12	Mouvement de rotation - déflexion du noeud 17 -
				sans amortissement
р	105	fig.	5.13	Mouvement de rotation - déflexion du noeud 17 -
				avec amortissement
р	106	fig.	5.14	Mouvement de rotation - rotation au noeud 16 -
				sans amortissement
р	106	fig.	5.15	Mouvement de rotation - rotation au noeud 16 -
				avec amortissement
р	107	fig.	5.16	Mouvement de rotation - couple moteur - sans
				amortissement
р	107	fig.	5.17	Mouvement de rotation - couple moteur - avec
				amortissement
р	108	fig.	5.18	Mouvement de rotation - déflexion du noeud 17 -
				sans amortissement - termes de Coriolis
				négligés
р	108	fig.	5.19	Mouvement de rotation - rotation au noeud 16 -
				sans amortissement - termes de Coriolis
				négligés
р	109	fig.	5.20	Mouvement de rotation - déflexion du noeud 17 -
				sans amortissement – plaque souple
р	110	fig.	5.21	Partie de la courbe 5.20 située après le
				blocage de l'articulation

# PARTIE 6 : Tests comparatifs

ł

.

Ρ	112	fig.	6.1	Repérage du bras manipulateur
p	114	fig.	6.2	Réponse en fréquences du modèle d'A. Trückenbrodt
P	114	fig.	6.3	Simulations et mesures effectuées par A. Trückenbrodt
p	115	fig.	6.4	Loi angulaire proposée par A. Barraco
p	116	fig.	6.5	Couple moteur en fonction du temps obtenu avec la loi angulaire proposée par A. Barraco
p	117	fig.	6.6	Tableau des coefficients de la loi angulaire propoposée
P	118	fig.	6.7	Vitesse et accélération angulaire pour la loi de commande utilisée
р	119	fig.	6.8	Couple moteur obtenu avec et sans amortissement numérique
p	119	fig.	6.9	Déplacement transversal de l'extrémité du manipulateur
p	121	fig.	6.10	Chaine de mesure utilisée pour l'étude du pendule flexible
P	123	fig.	6.11	Relevé expérimental de l'accélération absolue en extrémité du pendule flexible
P	124	fig.	6.12	Courbe de simulation de l'accélération absolue en extrémité du pendule flexible.
р	125	fig.	6.13	Couple moteur résiduel obtenu lors de la simulation

indices pour les coordonnées, les vecteurs, les matrices : - inférieur gauche indice du référentiel d'écriture - supérieur gauche indice du membre d'appartenance indices pour les caratéristiques 1 ,h,  $\Theta$ ,  $\alpha$  des bras : - inférieur droit indice du bras correspondant aux caractéristiques  $[\ldots]$ matrice 3x3 ou 4x4 vecteur 3d ou 4d (première coordonnée i ou 0) r 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 [Q] matrice boolsenne 4x4 [0] matrice nulle  $\begin{bmatrix} j_k f \end{bmatrix}$  matrice 4x4 de passage de  $R_j \ge R_k$  $\begin{bmatrix} j_{k}D \end{bmatrix}$  matrice 4x4  $\begin{bmatrix} j_{k}f \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{k}f \end{bmatrix}$ [I] matrice identits 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 [L] matrice boolsenne 4x3 Σ[<sup>i</sup><sub>K</sub>D]<u>dθ</u>k  $\begin{bmatrix} i\Omega_1 \end{bmatrix}$  matrice 4x4  $\sum_{K=1}^{L} \begin{bmatrix} i_{K} D \end{bmatrix} \frac{d! \Theta_{K}}{dt!}$  $\begin{bmatrix} 1\Omega_2 \end{bmatrix}$  matrice 4x4  $\begin{array}{cccc} i & k \\ + & \Sigma & ( & \Sigma & [ & {}^{i}_{K}D & ] & [ & {}^{i}_{j}D & ] & \underline{d\Theta}_{j} & \underline{d\Theta}_{k} \\ k=i & j=i & & & dt & dt \end{array}$ 1  $\underbrace{\Sigma}_{i} \left( \underbrace{\Sigma}_{i} \left( 2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{K} \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{j} \mathbf{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{j} \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{K} \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) \underbrace{d\Theta_{j}}_{dt} \underbrace{d\Theta_{K}}_{dt} \right)$ k=1 j=k+1

#### INTRODUCTION

#### Problème posé

Dans le cadre de la recherche de l'efficacité optimale, les développements actuels de la robotique se tournent vers une augmentation de la vitesse d'action des manipulateurs et donc vers une diminution du ratio masse robot/masse transportée. Si on considère le manipulateur comme une chaine ouverte formée d'une succession de membres reliés entre eux par des articulations, cela se traduit par une diminution de la masse des différents membres et donc de leur rigidité par effet secondaire.

L'augmentation de la vitesse de fonctionnement couplée à l'assouplissement des structures laisse des risques de flexion importante à chacun des membres d'où une perte de précision dans le mouvement.

Les méthodes de commande employées jusqu'à aujourd'hui sont très dépendantes des possibilités de calcul de la réponse en temps réel et donc de la compléxité de la modélisation employée. Le type de commande le plus employé pour les robots lents est dit de type géométrique, c'est à dire que le robot est commandé en position sans prise en compte d'autres paramètres. Un autre type de commande, de type cinématique s'est ensuite développé pour optimiser la vitesse de fonctionnement des manipulateurs mais il ne s'adressait qu'à l'utilisation de vitesses relativement réduites.

L'augmentation des vitesses de fonctionnement des robots a nécessité le développement de la commande dynamique [1.48], [1.49], [1.39] : cette méthode prend en compte les inerties des bras et les différentes accélérations du système pour élaborer une commande optimale. Malheureusement, les calculs qu'elle entraine sont encore trop importants pour permettre une commande en temps réel et son utilisation reste souvent du domaine de la simulation. Des travaux récents ont couplé les résultats fournis par un logiciel de C.A.O. 3D volumique avec un programme de simulation du mouvement [1.8], [1.9], [1.10]. D'autres travaux effectuent ce même travail avec des paramètres mesurés sur des prototypes, ce qui a toujours l'inconvénient de rallonger les temps d'étude, ou encore étudient des systèmes mécaniques (bielle-manivelle) en ne considérant que l'un ou l'autre des éléments comme flexible [1.21], [1.22], [1.23].

Pour optimiser le fonctionnement des robots actuels, la simulation en corps rigides ou avec des rigidités partielles ne /peut ôtre considérée comme satisfaisante. Effectuer rigoureusement cette simulation ne peut être fait qu'en tenant compte du comportement dynamique du mécanisme, des déformations du système puisqu'elles engendreront des efforts supplémentaires aux articulations, efforts qui interviendront dans la commande et donc dans le mouvement proprement dit, et aussi des erreurs de positionnement dans l'espace. De même, les jeux aux articulations devraient être pris en compte mais il a été montré que dans une première approximation, dans le cas de liaisons bien conçues [1.15], [1.16], leur influence pouvait être négligée, devant celle des déformations.

La première étape de la modélisation que nous entreprendrons ici, consistera à considérer dans un premier temps les membres du système comme rigides, à déterminer la commande que l'on devrait lui fournir pour obtenir un mouvement choisi, à utiliser cette commande pour étudier la chaîne déformable et comparer le comportement réel avec le comportement désiré.

Un des résultats obtenus sera l'ensemble des efforts à fournir pour créer les mouvements des articulations. Par extension des algorithmes utilisés et du logiciel créé, on pourrait dans un second temps se servir d'une donnée de ces efforts comme loi de commande réelle et étudier la réponse du mécanisme.

On peut envisager que par la suite, les môthodes de modélisation mises en œuvre permettent, après simplification et avec le développement des calculateurs, d'obtenir une commande directe des robots.

#### Modélisation

La modélisation mise en oeuvre va nous permettre de décrire le comportement dynamique d'un manipulateur avec prise en compte de ses paramètres géométriques (forme), mécaniques (masse, rigidité) et de structure (nombre de bras, types d'articulations). Ce modèle sera donc de ce fait un modèle dit "cinéto-élasto-dynamique" [1.25].

Nous devrons suivre plusieurs étapes, choix d'une représentation symbolique du mécanisme et des inconnues du modèle, obtention des équations du mouvement et enfin, leur résolution afin de déterminer la valeur des inconnues, ce qui nous donnera une représentation du mouvement.

Pour ce qui est de la première étape, nous utiliserons une formulation qui permettra une description aisée du manipulateur et par la suite offrira des propriétés intéressantes lors de la mise en forme des équations du mouvement ; cette méthode a été décrite et appliquée par UICKER J.J., DENAVIT J. ET HARTENBERG R.S. [1.1] et reprise par la plupart des auteurs.

Le choix des inconnues du modèle dépend en partie de la formulation retenue pour l'obtention des équations du mouvement. Après avoir présenté plusieurs approches envisageables, nous retiendrons une formulation basée sur le principe d'Hamilton.

De plus, nous baserons nos travaux sur l'approche lagrangienne car elle permettra une mise en forme des équations qui facilitera leur résolution.

Les inconnues que nous aurons à choisir pour le modèle seront alors les variables généralisées de l'approche lagrangienne. Elles devront nous permettre de décrire le mouvement du manipulateur ainsi que les déformations des différents membres.

Pour notre problème, les coordonnées généralisées seront les déplacements de points particuliers du modèle déterminés par rapport à une position de référence. En fait, on utilise une formulation de type lagrangienne actualisée, dont la référence sera la position des noeuds sur le membre considéré dans le mouvement du manipulateur regardé comme un assemblage de corps rigides.

Cette formulation, relativement aisée à mettre en oeuvre et utilisée par la plupart des auteurs [1.5], [1.14], est associée à une modélisation par éléments finis. Nous l'utiliserons en prenant les degrés de liberté du système discrétisé comme variables généralisées [1.4], [1.28].

Les bras du manipulateur seront décrits séparément dans des repères qui leur sont liés, et les équations du mouvement développées. Les bras seront ensuite 'assemblés' dans un même modèle pour pouvoir prendre en compte les articulations [1.2].

La réunion des bras dans un même modèle nous amènera à mettre en oeuvre une méthode d'imposition de liaisons entre variables généralisées ou degrés de liberté [1.30].

Les équations du mouvement obtenues par la description lagrangienne du système seront ensuite intégrées pour obtenir les valeurs des différentes variables généralisées. L'intégration sera faite à l'aide d'un algorithme peu répandu mais qui possède des propriétés intéressantes.

Nous présenterons cette méthode proche de l'algorithme de Newmark, basée sur une minimisation des résidus de calcul sur les intervalles de temps à l'aide desquels on discrétise le mouvement [3,9], [3,10]. Le modèle étant développé, nous traiterons quelques exemples de mouvement de mécanismes déformables, décrits à l'aide d'éléments de poutres (2D) et de plaques triangulaires (3D), avec une et deux articulations.

L'écriture des équations du mouvement à l'aide des équations de Lagrange permet, lorsqu'on écrit toutes les équations, de traiter des systèmes mécaniques dont la loi de commande correspond aux efforts fournis pour provoquer le mouvement. Les équations obtenues comportent des non-linéarités en fonction des degrés de liberté "articulaires". L'utilisation d'un sousensemble des équations permet de franchir une étape dans l'étude en prenant comme loi de commande la donnée des degrés de liberté des articulations.

Le système peut être étendu par la suite pour traiter le mouvement globalement. Nous ne franchirons dans ce travail que la première étape, tout en remarquant que cela permet déjà la simulation de mécanismes commandés en position (avec des moteurs pas à pas par exemple). Le logiciel de simulation conçu restera ouvert pour permettre le franchissement de l'étape suivante dans un développement ultérieur.

### PREMIERE PARTIE BILAN BIBLIOGRAPHIQUE

#### i. i Hypothèses sur le modèle étudié

Avant d'essayer de décrire le mouvement d'un manipulateur et de l'étudier en utilisant un formalisme particulier, il semble important de décrire le manipulateur lui-même : quelle est sa géométrie, quels sont ses degrés de liberté, comment peut-on repérer la position d'un de ses points, quelle que soit sa configuration ?

C'est à ces questions que nous allons essayer de répondre en donnant les bases de notre représentation et les hypothèses qui lui sont nécessaires.

La description du mouvement du manipulateur peut se faire en regardant chaque élément de la chaîne comme étant relié à ses voisins par une articulation à un degré de liberté, une rotation pour l'étude en cours (liaison rotoïde). Le problème pourra aisément se généraliser en faisant intervenir des éléments sans masse ni dimension dans la chaîne ou en augmentant le nombre de rotations des articulations dans la représentation mathématique que nous en ferons et en introduisant des translations par des procédés similaires [1.14].

Dans cette étude, nous utiliserons un paramétrage proche de celui proposé par J.J. Uicker [1.1] et repris dans la plupart des études déjà réalisées [1.2], [1.4], [1.14], [1.43].

Le manipulateur est considéré comme une chaîne ouverte à une seule branche dont les éléments sont numérotés de i à n à partir de la base, soit d'amont en aval de la chaîne ; l'élément 0 sera le référentiel général . De même, les articulations seront repérées de i à n, l'articulation i reliant l'élément i à l'élément i-i.



figure 1.1 Schématisation d'un manipulateur

1.2 Choix du formalisme

Généralement, la mise en équations des problèmes de la dynamique des solides repose sur un des principes suivants : - principe fondamental de la dynamique

- principe des puissances virtuelles

- principe d'Hamilton dont on déduit les équations de Lagrange

Même si historiquement, ces principes, présentés dans l'ordre chronologique de leur apparition, ont suivi l'avancée des théories mathématiques, leurs utilisations respectives sont en théorie équivalentes.

Les premiers énoncés n'introduisent pas explicitement 1a notion d'efforts internes à un milieu continu déformable ou de contraintes et ne sont donc pas directement applicables à la mise en équations de la dynamique de solides déformables. Ils ont été étendus pour inclure ces états de contraintes internes.

a) Principe fondamental de la dynamique

Ce principe que l'on retrouve aussi utilisé sous le nom d'équations de Newton-Euler est relatif à l'origine à un point matériel ou à un système isolé et répond à l'énoncé suivant :

A chaque instant, dans un repère galiléen, pour un système matériel quelconque, le torseur des quantités d'accélérations absolues est identique au torseur des forces extérieures agissant sur le système.

ce qui se traduit par les équations vectorielles suivantes :

 $\underline{D}_a = \underline{R}_{ex}$ 

 $\underline{\mathbf{K}}_{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{ex}}$  avec

D, résultante dynamique D =  $\begin{bmatrix} \Gamma & (M) & dm \\ -a & -a & s-a \end{bmatrix}$ 

K, moment dynamique en P K =  $\begin{bmatrix} PM \times \Gamma \\ S & -a \end{bmatrix}$  (M) dm

- P étant un point quelconque de l'espace

- le x désignant dans ce cas le produit vectoriel.

- M étant un point du solide et  $\Gamma_a(M)$  son accélération absolue

Ce principe, très utilisé dans la mise en équations de la

dynamique de systèmes formés de corps rigides [1.43], [1.50] a été développé pour permettre la description des milieux continus [4.21], [4.11]. Il permet d'obtenir les équations de comportement mais reste cependant utilisé dans le seul cas de l'étude de manipulateurs rigides ou de leur commande [1.44].

b) Principe des puissances virtuelles ( de d'flamberd)

Nous reprendrons l'énoncé donné par le professeur P. Germain dans son cours de mécanique des milieux continus [4.23].

Dans un référentiel galiléen, pour une chronologie absolue, la puissance virtuelle des quantités d'accélérations d'un système (S) est égale à la puissance de toutes les forces appliquées **ລ**າງ système, tant intérieures qu'extérieures, quel que soit 1e mouvement virtuel de (S).

- Soient V\* le champ des vitesses virtuelles de (S) dans son mouvement,
  - $\sigma(t)$  un représentant du tenseur des contraintes de Cauchy
  - $-D^*$  un représentant du tenseur des taux de déformations virtuelles

$$\underline{D}^{*}_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{V^{*}_{11}}{V^{*}_{11}} + \frac{V^{*}_{11}}{V^{*}_{11}} \right)$$

- [(t) accélération d'un point M
- $-\mu(t)$  masse volumique à l'instant t, considérée constante en hypothèse de petites comme perturbations
- v(t) volume du système à l'instant t
- $S^{T}(t)$  le domaine où les efforts sont imposés
- $\underline{T}(t)$  les efforts de surface correspondants
- $-S^{u}(t)$  le domaine où les déplacements doivent satisfaire certaines relations cinématiques.
- L(t) les efforts de liaison correspondants
- F(t) les efforts de volume

on note

ſ

$$P = \begin{bmatrix} T(t)^T V^* dS \\ T \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} L(t)^T V^* \\ S^T(t) \end{bmatrix} L(t)^T V^*$$

puissance d'efforts extérieurs puissance d'efforts de liaison

$$P_{e} = \int_{v(t)}^{T} F(t)^{T} \frac{v}{v} dv \qquad P_{i} = \int_{v(t)}^{\sigma(t)} \frac{\sigma(t)^{T}}{v} \frac{D^{*}}{v} dv$$

puissance d'efforts extérieurs puissances des efforts internes

ſ

dS

 $P_{a} = \int_{v(t)}^{\mu(t)} \Gamma(t)^{T} V^{*} dv$ 

puissance des quantités d'accélérations

Le principe s'écrit alors :

 $P_T + P_u + P_e + P_i = P_a$ 

Le principe des puissances virtuelles a été utilisé directement [1.8] pour établir les équations du mouvement de systèmes solides déformables en se basant sur une représentation lagrangienne du mouvement ( ramené à une référence).

En écrivant le principe des puissances virtuelles à l'instant t en utilisant successivement comme référence la configuration actuelle du système puis une autre (éventuellement à un instant précédent ou à l'instant initial), A. Barraco en a établi une forme incrémentale.

La différence des deux expressions définies ci-dessus lui a permis de donner les incréments de puissances obtenus lors du mouvement, en connaissant les puissances à un instant précédent. De par là même, il a obtenu une forme incrémentale des équations de mouvement.

Cette mise en oeuvre se révèle très intéressante dans l'étude de systèmes subissant des grandes déformations ou des grands déplacements et nécessitant donc un traitement incrémental non linéaire mais est assez lourde à mettre en oeuvre tant sur le plan théorique que sur le plan pratique.

#### c) Principe d'Hamilton

Le principe variationnel énoncé par <u>Hamilton</u> nous permet d'écrire les équations du mouvement sous une forme particulière que l'on nomme équations de Lagrange.

Soit  $\{a_i\}$  l'ensemble des coordonnées généralisées qui décrivent le système mécanique.

Le mouvement d'un système élastique conservatif entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  s'effectue de telle sorte que la fonctionnelle  $\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$  soit stationnaire, c'est à dire :  $\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$ 

 $\partial \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$  pour tout  $\partial a$  non nul.

avec respectivement

T = ½	μū ū dv v 1 1	
V = U -	$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{v}}^{\sigma} \mathbf{f} \mathbf{v}  d\mathbf{v} - \int_{s_{\sigma}}^{\mathbf{v}} \mathbf{u}  d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{v}}^{\mathbf{f}} \mathbf{u}  d\mathbf{v}$	
	les forces de surface appliquées sur $s_{\sigma}$ les forces de volume le déplacement d'un point (fonction des $a_i$ ) la vitesse d'un point (fonction des $a_i$ ) un représentant du tenseur des contraintes un représentant du tenseur des déformations variation infinitésimale à temps bloqué de coordonnée généralisée $a_i$	1a

Soit le lagrangien L = T - V

Les équations du mouvement sont les équations d'Euler du problème variationnel [4.4]

 $\partial a_{i} \int_{t_{1}}^{t_{2}} L dt = 0$ 

Pour un système non conservatif, le principe se transforme en

$$\partial \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \partial W^* dt = 0$$

W\* étant le travail des forces non conservatives.

Par linéarisation, le travail virtuel des forces non conservatives causé par les accroissements virtuels des coordonnées généralisées peut s'exprimer comme combinaison linéaire des da<sub>i</sub>.

 $\partial W^* = \Sigma Q^*_i \partial a_i$ 

Nous pouvons maintenant écrire les équations d'Euler de la fonctionnelle

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial L}{\partial a_{i}} - \frac{\partial L}{\partial a_{i}} - Q_{i}^{*} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_{i}} = \frac{\partial L}{\partial a_{i}} - Q_{i}^{*} = 0$$

ou encore

đ	dt.	T6	ðV	
(	· ) -	+		,
đt	ðå i	ða i	da <sub>1</sub>	

qui sont les équations de Lagrange que nous utiliserons pour notre étude.

Ces équations peuvent être obtenues d'une autre manière par l'application du principe des travaux virtuels, proche de celui des puissances virtuelles que nous venons d'énoncer ; ce qui prouve l'équivalence des principes [4.7]. Il suffit dans l'utilisation du principe des travaux virtuels de choisir comme déplacements virtuels ceux qui résultent d'une variation infinitésimale quelconque des coordonnées généralisées à temps bloqué.

De par la souplesse de mise en forme des équations et la possibilité d'intégrer facilement dans le système étudié plusieurs corps sans avoir à modifier l'élaboration de la description du mouvement, il nous a semblé intéressant d'utiliser le principe d'Hamilton sous la forme des équations de Lagrange.

De plus, les équations qui en résultent se prêtent facilement à une discrétisation du système et donc à une intégration dans une résolution de problèmes par la méthode des éléments finis.

#### 1.3 Choix de la référence

. --

Comme certains auteurs [1.5], [1.8], [1.14] l'ont mis en évidence, le problème qui se pose immédiatement est le choix de la référence par rapport à laquelle on mesurera les déplacements ou les déformations. Plusieurs solutions ont été retenues.

#### a) Utilisation du référentiel général

Les déplacements sont mesurés dans le référentiel général. C'est la méthode qu'utilise E. Imam [1.25] pour étudier des systèmes 4 barres ou bielle-manivelle. Cette méthode a l'avantage de permettre un assemblage aisé de tous les éléments de la structure mais comporte l'inconvénient, non négligeable, de demander une manipulation de toutes les matrices élaborées pour les ramener au référentiel galiléen.

b) Utilisation d'un référentiel intermédiaire mobile

Les déplacements d'un membre sont mesurés par rapport à la position qu'aurait ce dernier s'il était rigide et situé à l'extrémité du bras précédent déformé. S.N. Singh et A.A. Schy [1.46] ont utilisé ce repérage pour étudier le mouvement d'un bipendule souple.



### figure 1.2 Repérage lié au bras déformé

méthode présente l'inconvénient d'utiliser les Cette déformations d'un membre pour repérer ceux qui le suivent dans la chaîne. C'est à dire que si on reprend l'idée de l'utilisation des équations de Lagrange, nous aurons à calculer les énergies du système et donc les vitesses de chaque point de la chaîne en revenant au référentiel inertiel de base. Les relations de transformation de repérage devront utiliser non seulement les mouvements des articulations mais en plus les déplacements des extrémités des bras, ce qui introduit des non-linéarités dans les équations [1.4].

La matrice [T] qui permet de passer de la référence i+1 à la référence i est fonction de l'angle de l'articulation séparant les bras i et i+1 et du déplacement de l'extrémité du bras i alors que celui-ci est une inconnue du modèle.

## c) Utilisation d'une position précédente du système

Dans sa formulation incrémentale, A. Barraco [1.8] propose de mesurer les déplacements par rapport à la position déformée qu'occupait le système à un instant précédent. Cette formulation lagrangienne actualisée se prête bien à une résolution à l'aide d'un algorithme traitant le mouvement par incréments, ce qui n'est pas notre propos.

d) Utilisation du mouvement de corps rigides.

M. Géradin et al. proposent quant à eux d'utiliser comme référence pour chaque membre la position qu'il occuperait dans le cadre d'un mouvement d'ensemble de corps rigides [1.4], [1.5].



figure 1.3 Repérage lié à la position de corps rigides

C'est la solution qui a aussi été retenue par d'autres auteurs tels que S. Dubowsky et W. Sunada [1.14] et que nous reprendrons car elle n'introduit aucune non linéarité due aux déformations et ne fait intervenir que les degrés de liberté des articulations.

Ce choix entraine que la formulation utilisée est du type lagrangien actualisé puisque la référence suit le mouvement.

Le passage d'un membre au référentiel général se fera en ne traitant le système que comme corps rigide.

Chaque membre sera lié à un repère propre qui permettra de définir la position dans l'espace de chacun de ses points en utilisant une combinaison des coordonnées locales et de changements de repères pour revenir au référentiel général.

Les degrés de liberté utilisés pour le mouvement seront des rotations mesurées autour d'un des axes de chaque repère local.

		Si	1,	on	note	les	vecte	eurs	par	leur	nom	souligné,	nous
p	ouv	ons	déf	inir	le	repèr	e loca	11 R	i par	:			
-	un	poi	Int	remax	rqua	ble d	e l'az	te de	e l'ar	rticul	ation	i	
-	1'	axe	$\underline{Z}_1$ ,	axe	de	l'art	iculat	ion	1				
	1'	axe	$\underline{X}_{1}^{-}$ ,	per	pend	icula	ire co	mmu	ne à Z	Z <sub>i</sub> et	$\underline{Z}_{i+1}$		
-	11	axe	Υī	pour	for	mer u	n trið	dre	dire	≥ī.			

L'axe  $\underline{X}_i$  permettra la définition des positions angulaires relatives des bras i et i-1. En effet,  $\underline{X}_i$  et  $\underline{X}_{i-1}$  se trouvent dans le même plan, orthogonal à  $\underline{Z}_1$ , et l'angle  $\Theta_1$  qui les sépare, mesuré autour de  $\underline{Z}_1$ , permet le repérage du mouvement de  $R_1$  par rapport à  $R_{1-1}$ .

Le repérage de  $R_1$  dans le reférentiel général  $R_0$  pourra se faire de manière récurrente en positionnant  $R_1$  par rapport à  $R_{1-1}$ .

\*  $\underline{Z_i}$  stant perpendiculaire à  $\underline{X_{i-1}}$ , il est repsrable dans le plan vectoriel ( $\underline{Y_{i-1}}; \underline{Z_{i-1}}$ ) en utilisant l'angle  $\alpha_i$ , mesurs autour de  $\underline{X_{i-1}}$  et ssparant  $\underline{Z_{i-1}}$  et  $\underline{Z_i}$ :

 $\underline{Z}_{i} = \sin(\alpha_{i}) \underline{Y}_{i-1} + \cos(\alpha_{i}) \underline{Z}_{i-1}$ 

\*  $\underline{X}_{1}$  se déduit de  $\underline{X}_{1-1}$  par une rotation d'angle  $\Theta_{1}$  autour de  $\underline{Z}_{1}$ :  $\underline{X}_{1} = \sin(\Theta_{1}) (\underline{Z}_{1-1} \times \underline{X}_{1-1}) + \cos(\Theta_{1}) \underline{X}_{1-1}$ soit

 $\underline{X}_{1} = \cos(\Theta_{1}) \ \underline{X}_{1-1} + \sin(\Theta_{1}) \ \cos(\alpha_{1}) \ \underline{Y}_{1-1} - \sin(\Theta_{1}) \ \sin(\alpha_{1}) \ \underline{Z}_{1-1}$ 

- \* Y<sub>i</sub> est défini de manière à obtenir un trièdre direct :
  - $\underline{\mathbf{Y}}_1 = \underline{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{x} \underline{\mathbf{X}}_1$

 $\underline{Y}_{1} = -\sin(\Theta_{1}) \underline{X}_{1-1} + \cos(\Theta_{1}) \cos(\alpha_{1}) \underline{Y}_{1-1} - \cos(\Theta_{1}) \sin(\alpha_{1}) \underline{Z}_{1-1}$ 



figure 1.4 Repôres associós au bras

Ces différentes expressions permettent de définir la matrice de passage de  $(\underline{X}_1; \underline{Y}_1; \underline{Z}_1)$  à  $(\underline{X}_{1-1}; \underline{Y}_{1-1}; \underline{Z}_{1-1})$  que nous noterons [ $^1_{1-1}R$ ].

1.4 Paramétrage de la chaîne mécanique en tant qu'assemblage de corps rigides.

Le manipulateur peut maintenant être considéré comme un assemblage de solides, repérable aisément les uns par rapport aux autres. Connaissant la position d'un point d'un des solides dans le repère qui lui est lié, on peut se positionner par rapport à une autre référence par une manipulation arithmétique simple : Soit M un point du bras i et (i-1XM, i-1YM, i-1ZM), (iXM, iYM, iZM)ses coordonnées exprimées respectivement dans les repères  $R_{i-1}$  et  $R_i$ .

(indice inférieur gauche : repère de référence).



figure 1.5 Membre i du manipulateur

si on utilise :

 $-1_i$  distance entre les axes  $\underline{Z}_{i-1}$  et  $\underline{Z}_i$ 

-h<sub>1</sub> distance entre la projection orthogonale de O<sub>1-1</sub> sur  $\underline{Z_1}$  et O<sub>1</sub>

on obtient :

 $\frac{O_{i-1}M}{O_{i-1}M} = \frac{O_{i-1}O_i}{1} + \frac{O_iM}{D_i}$   $\frac{O_{i-1}M}{O_{i-1}M} = \frac{1}{1} \frac{X_{i-1}}{1} + \frac{1}{D_i} \frac{Z_i}{1} + \frac{1}{1} \frac{X_M}{M} \frac{X_i}{1} + \frac{1}{1} \frac{Y_M}{M} \frac{Y_i}{1} + \frac{1}{1} \frac{Z_M}{M} \frac{Z_i}{1}$ 

ce qui s'écrit en notation matricielle , en ramenant le repérage à la référence i-i :

 $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{1} - \mathbf{i} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{i} - \mathbf{i} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{i} - \mathbf{i} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{sina} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{sina} \\ \mathbf{i} \\ \mathbf{$ 

Le changement de reférence doit se faire en utilisant des transformations simples et il apparait que l'on peut avantageusement modifier la formulation matricielle en utilisant la formulation symbolique à base de matrices 4x4 [1.14] introduites par Denavit et Hartenberg et reprises ensuite par Uicker et Seth.



figure 1.5 Changement de référence

Les deux approches qu'ils présentent diffèrent en ce sens que dans un cas, une seule matrice est utilisée et dans l'autre, un produit de deux matrices, représentant pour la première la geométrie du manipulateur et pour l'autre le mouvement. approche de Denavit-Hartenberg :

que nous noterons en abrégé :

 $i_{1-1\underline{\Gamma}} = [i_{1-1}f] i_{1\underline{\Gamma}}$ 

(indice supérieur gauche : numéro du bras étudié).

avec  $[i_{i-1}f]$  de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\$$

 $-i_{1-1}\underline{v}$  vecteur  $O_{1-1}O_1$ 

- [ $_{1-1}^{R}$ ] matrice de passage de ( $\underline{X}_{1}; \underline{Y}_{1}; \underline{Z}_{1}$ ) à ( $\underline{X}_{1-1}; \underline{Y}_{1-1}; \underline{Z}_{1-1}$ ) exprimée dans ( $\underline{X}_{1-1}; \underline{Y}_{1-1}; \underline{Z}_{1-1}$ )



approche de Seth :

 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-1 \\ M \\ 1-1 \\ 1-1 \\ M \\ 1-1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ 

que nous noterons en abrégé :

 $i_{i-1}r = [i_{i-1}G] [i_{i-1}D] i_{1}r$ 

avec

[ i<sub>i-1</sub>G ] matrice 4x4 représentative de la géométrie
[ i<sub>i-1</sub>D ] matrice 4x4 représentative du mouvement
et

 $\begin{bmatrix} i_{i-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{i-1}D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{i-1}f \end{bmatrix}$ 

Comme nous le verrons par la suite, la notation de Seth ne présentera pas d'avantage pour notre étude et nous nous limiterons à l'utilisation des matrices 4x4 présentées par Denavit et Hartenberg.

Grâce à l'utilisation de cette notation symbolique, les transformations de changement de repère peuvent s'effectuer très facilement et par l'utilisation d'une formule récurrente, nous obtenons :

 $i_{0r} = [i_{0f}] [2_{if}] \dots [i_{i-1f}] i_{ir}$ 

Nous noterons cette dernière relation :

$${}^{i}_{O\underline{\Gamma}} = [ {}^{i}_{O\underline{f}} ] {}^{i}_{j\underline{i}\underline{\Gamma}}$$

$$[ {}^{i}_{O\underline{f}} ] = {}^{\pi} [ {}^{j}_{j-\underline{i}\underline{f}} ]$$

$${}^{i}_{\underline{i}\underline{i}\underline{i}}$$

Les matrices [ $j_{j-1}f$ ] possèdent des propriétés qui nous seront utiles par la suite [1.3], [1.4] et qui sont établies dans l'annexe 1.

#### a) Dérivation première

La dérivée première par rapport au temps de [ $j_{j-1}f$ ] peut étre obtenue en post-multipliant la matrice par une autre matrice booléenne.

 $\frac{d [J_{j-1}f]}{dt} = [J_{j-1}f] \times [Q] \frac{d\Theta_{j}}{dt}$   $[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 

Par la combinaison de cette formule pour plusieurs articulations, nous obtenons :

 $\frac{d [j_{K^{f}}]}{dt} = [j_{K^{f}}] \times (\sum_{m=K+1} [j_{m^{D}}] \frac{d\Theta_{m}}{dt})$  $[j_{m^{D}}] = [j_{m^{f}}]^{-1} [Q] [j_{m^{f}}]$ 

b) Dérivation seconde

La dérivée seconde prend une forme simple si on utilise les mêmes notations :

 $\frac{d^{2} \begin{bmatrix} J_{K}f \end{bmatrix}}{dt^{2}} = \begin{bmatrix} J_{K}f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} j \\ \Sigma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_{m}D \end{bmatrix} \frac{d^{2} \Theta_{m}}{dt^{2}} + \frac{j}{m=k+1} & j \\ \sum \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{m}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{m}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{w}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{w}D \end{bmatrix} \frac{d\Theta_{m}}{dt} \frac{d\Theta_{n}}{dt} \end{pmatrix}$ 

avec u = min(m, n) v = max(m, n)

i.5 Inconnues du modèle

Pour décrire le mouvement d'une chaîne mécanique déformable, nous avons choisi d'utiliser le formalisme lagrangien pour lequel nous aurons à définir les coordonnées généralisées. La méthode des éléments finis qui sera couplée aux équations de Lagrange permet une discrétisation du système à étudier et se prête bien à la modélisation du comportement mécanique en réponse à des sollicitations externes (efforts, inertie, gravité) ou internes (gradient thermique, amortissement du matériau).

Chaque membre est considéré comme un assemblage d'éléments déterminés par des points particuliers qui en donnent la géométrie. La connaissance du mouvement ou du comportement de ces noeuds donne par "interpolation" la description du comportement de chacun des éléments et donc du bras lui-même.

Nous disposons de plusieurs méthodes pour décrire le comportement des noeuds. Chacune d'elles leur associera un certain nombre de degrés de liberté, définis de différentes façons comme :

a) des déplacements mesurés par rapport à une référence donnée et de leurs dérivées spatiales.

Ces degrés de liberté, translations et "rotations", sont les plus couramment utilisés dans les modélisations par éléments finis [4.3], [4.4] pour les éléments de poutre et de coque.

Ils peuvent être utilisés facilement pour plusieurs types de problèmes :

- élasticité en hypothèse de petites perturbations,

- élasticité non linéaire, grandes perturbations,
- placticité,

et ce, sous une forme directe ou sous une forme incrémentale dans les traitements non-linéaires [4.2].

b) des paramètres d'Euler.

Pour modéliser le comportement de systèmes mécaniques formés de poutres et d'articulations, M. Géradin et al. [1.6], [1.7] proposent de décomposer les déplacements du modèle en translations et rotations. Les rotations seront décrites à l'aide des paramètres d'Euler.

A chaque noeud est associée une matrice colonne de degrés de liberté : 3 translations et un quaternion représentant sa rotation. Cette dernière peut se ramener à une rotation unique d'angle  $\delta$  autour d'un vecteur <u>u</u>. Les quatre quantités  $\delta$ , u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, u<sub>3</sub> qui sont ainsi définies doivent répondre aux contraintes





 $|\underline{u}| = 1$ 

$$[R] = \cos \tilde{\varrho} [I] + (1 - \cos \tilde{\varrho}) \underline{u} \underline{u}^{T} + \sin \tilde{\varrho} [\tilde{u}]$$

où [R] est la matrice de la rotation et [ú] une matrice antisymétrique représentant le produit vectoriel :

		r		7	
		0	-u_	u	
[ú]	Ξ	u	0 <sup>3</sup>	-u <sup>2</sup>	
		-u <sup>3</sup>	u	01	
		1 2	4		

L'utilisation directe de [R] dans le modèle fait intervenir des non-linéarités dûes à la transcendance de ses termes. Par contre, l'utilisation du quaternion p associé diminue cette nonlinéarité.

 $p = [e_0 e]^T \text{ avec}$   $e_0 = \cos \frac{\delta}{2} \quad et \quad e = \sin \frac{\delta}{2} u \quad p^T p = 1$ 

Le quaternion p apporte des propriétés intéressantes pour décrire les rotations et le comportement mécanique des éléments de poutre situés entre 2 noeuds, ou des articulations. Les énergies cinétique et potentielle de déformation, peuvent s'exprimer en fonction des matrices des degrés de liberté choisis, ce qui permet la description complète du système mécanique étudié. En effet, pour les poutres, en considérant une variation linéaire du quaternion le long de l'axe, on peut mesurer la déformation en fonction de la mesure locale de la courbure, à partir des quaternions associés aux noeuds extrêmes, de la déformation axiale et transverse, des déplacements des noeuds extrêmes.

Cette méthode, intéressante pour les systèmes mécaniques formés de poutres où l'on peut considérer une variation linéaire de p mène à des matrices quadratiques en fonction de p ce qui diminue de fait la non-linéarité des équations par disparition des termes transcendants. Par contre son extension à des éléments plus complexes, briques ou coques, ne semble pas apporter directement les mêmes avantages car on ne peut plus considérer de variation linéaire des rotations, sauf dans l'hypothèse de petites perturbations. Dans ce cas, la considération directe des déplacements et rotations sera aussi intéressante.

#### c) des coefficients de séries de déplacements.

Cette méthode a été utilisée pour modéliser le comportement de systèmes dits 4 barres ou bielle-manivelle. Elle consiste à supposer que les déformations d'une poutre peuvent être décrites à l'aide d'une série de fonctions de forme, Fourier ou autres [1.15], [1.16], [1.31] dont les coefficients seront les inconnues du modèle.

Ce modèle, couplé à la théorie classique des poutres, permet d'élaborer les équations du mouvement du système par les méthodes énergétiques présentées ci-dessus, mais il présente l'inconvénient majeur d'être beaucoup moins facilement adaptable à d'autres types d'éléments.

1.6 Méthode de résolution des équations du mouvement.

Après avoir choisi le formalisme et les degrés de liberté à utiliser pour modéliser le mouvement du système mécanique, nous pouvons élaborer les équations de comportement. Elles donnent un système de la forme :

[M] <u>a</u> + [C] <u>a</u> + [K] <u>a</u> = <u>F</u>

οù

a, à, à représentent respectivement le vecteur des inconnues

du modèle, ses dérivées première et seconde.

[M], [C], [K] les matrices d'inertie, d'effets visqueux et de Coriolis et enfin de raideur du modèle, toutes trois dépendantes du temps.

 $\underline{F}$  le vecteur des efforts extérieurs agissant sur le système, dépendant du temps.

Connaissant la configuration d'origine de la chaine mécanique, il nous reste à résoudre cette équation différentielle du second ordre, non linéaire en fonction des degrés de liberté des articulations, linéaire en fonction des degrés de liberté choisis pour décrire la structure. Les équations du mouvement obtenues décrivent le système de façon continue, à chaque instant t. Notre objectif sera de discrétiser l'intervalle temporel d'étude et de rechercher la solution à des instants particuliers, séparés par des intervalles ôt que nous choisirons.

Les techniques de l'analyse numérique généralement utilisées dans les modélisations par éléments finis mènent à plusieurs types d'algorithmes. Outre les méthodes de manipulation symbolique des équations [1.19] qui utilisent des systèmes proches de l'intelligence artificielle, nous distinguons quelques approches directes du problème.

a) Le système est ramené à un système du premier ordre.

En introduisant une variable supplémentaire, nous pouvons ramener la résolution du système du second ordre à celle d'un système du premier ordre.

en posant  $a_1 = a$  $a_2 = \dot{a}_1$ 

le système se transforme en :

 $\ddot{a} + [M]^{-1} [C] \dot{a} + [M]^{-1} [K] \dot{a} = [M]^{-1} F$ 

d'où

$$\begin{bmatrix} \dot{a} \\ -1 \\ \dot{a} \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -[1] \\ [M]^{-1}[K] & [M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ a \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ -2 \end{bmatrix}$$

qui se met sous la forme

 $\underline{\hat{u}} + [A] \underline{u} = \underline{G}$ 

G. H. Sutherland [1.31] propose d'utiliser une méthode Runge-Kutta ordre 4 pour résoudre le nouveau système différentiel ainsi obtenu.

La méthode de Runge-Kutta est basée sur l'utilisation de plusieurs évaluations intermédiaires de <u>G</u> pour chaque incrément de temps  $\partial t$ .

$$\underline{\mathbf{u}}_{t+\partial t} = \underline{\mathbf{u}}_t + \partial t \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_j \underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{u}}_j, \mathbf{t}_j)$$

les  $b_j$  étant les coefficients de la formule dépendants de l'ordre nutilisé, les  $t_j$  étant les instants intermédiaires et les  $\underline{u}_j$  les vecteurs inconnus correspondants.

Cette méthode, pour un incrément de temps bien choisi ne pose pas trop de problème de stabilité ou de convergence, par contre, pour obtenir une bonne précision, nous devons au minimum travailler avec un ordre 3 voire 4, ce qui, au vu des calculs intermédiaires pour chaque pas de temps rend les temps de traitement prohibitifs.

D. M. Trujillo et A. L. Carter [3.15], [3.16], [3.17] proposent quant à eux de résoudre ce système en utilisant la solution obtenue à l'aide d'exponentielles. En reprenant le système du premier ordre, nous pouvons écrire la solution sous la forme :

 $u = \exp([A] t) u + \int_{0}^{t} \exp([A] (t-s)) G(s) ds$ 

La méthode consiste à utiliser les approximations de Padé pour évaluer l'exponentielle. Elle donne de bons résultats (stabilité et précision) pour une matrice [A] d'ordre inférieur à 100 mais devient beaucoup trop "gourmande" en place mémoire et en temps de calcul lorsque les matrices deviennent plus importantes, ce qui sera notre cas.

b) Le système du second ordre est traité à l'aide d'un algorithme de résolution directe.

Nous distinguerons deux types d'algorithmes parmi ceux qui sont couramment utilisés :

- les schémas explicites qui utilisent le système différentiel à l'instant t pour trouver les inconnues à l'instant t+ôt.
- les schémas implicites qui utilisent le système différentiel à l'instant t+ôt pour calculer les valeurs des inconnues à ce

mēme instant.

Certaines méthodes de Prédiction-Correction couplent les deux types de schémas [i.i5] et donnent de très bons résultats quant à la précision tout en conservant un des inconvénients majeurs déjà cité : le temps de calcul, puisque le traitement est doublé à chaque incrément de temps.

Les méthodes explicites [1.8] ou implicites [1.4], [1.14] ont été utilisées pour étudier des systèmes mécaniques articulés mais chaque type de schéma rencontré présente des inconvénients.

Les schémas explicites ont une stabilité numérique conditionnelle [3.5], [4.2] qui impose de travailler avec des incréments de temps suffisamment petits et peuvent donc demander beaucoup de manipulations, surtout dans le type de traitement que nous abordons où les matrices sont dépendantes du temps et doivent donc être réévaluées à chaque incrément.

Les schémas implicites ne présentent pas le même problème quant à la stabilité numérique même si leur utilisation requiert une certaine prudence sur le choix de l'incrément dt pour garder une bonne précision.

Pour pouvoir étudier le système à l'instant t+dt, nous devons connaître sa configuration complète à l'instant t : degrés de liberté, dérivées premières et secondes. Pour amorcer la résolution, l'instant t=0 doit être parfaitement défini, ce qui signifie que les conditions à l'origine doivent être solutions des équations. En général, seuls les degrés de liberté et leurs dérivées premières sont connus, nous avons donc à calculer les dérivées secondes en résolvant :

 $[M] = F_0 - [C] = A_0 - [K] = A_0$ 

La résolution numérique de ce système peut se révéler impossible si la matrice [M] est singulière (certains degrés de liberté peuvent ne pas avoir de terme de masse associé).

Nous utiliserons pour notre étude un schéma d'intégration basé sur une méthode de résidus pondérés et dont la forme sera proche de l'algorithme du  $\beta$  de Newmark mais qui ne présente pas cet inconvénient d'avoir à définir la dérivée seconde à (t = 0) (voir la troisième partie de ce travail) [3.9].

#### i.7 Imposition des liaisons aux articulations

Le système d'équations que nous obtenons après l'assemblage des différents éléments de chaque membre de la chaîne puis des membres entre eux, est indéterminé [1.4] et il faut introduire des conditions géométriques, cinématiques et dynamiques de liaisons entre degrés de liberté élastiques aux articulations.

Dans leurs travaux, D.A. Turcic et A. Midha utilisent le système de coordonnées globales pour faire l'assemblage de la structure en confondant les degrés de liberté liés.

D'autres méthodes trouvent leur fondement en revenant au principe variationnel qui est à l'origine des équations.

Nous voulons minimiser la fonctionnelle  $\pi(\underline{a})$  en imposant l'ensemble de contraintes  $f(\underline{a}) = 0$ .

 $\pi(\underline{a}) = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + W^*$ 

Nous pouvons utiliser soit les multiplicateurs de Lagrange [1.4], [1.8], [1.30] soit une pénalisation de la fonctionnelle en cas de non respect des contraintes [4.2], [2.1], [2.2].

a) Multiplicateurs indéterminés de Lagrange

La fonctionnelle  $\pi(\underline{a})$  est remplacée par une autre fonctionnelle qui intègre les contraintes de liaison [1.17].

 $\pi^{*}(\underline{a}) = \pi(\underline{a}) + \mu f(\underline{a})$ 

dont les variations nous donnent un nouveau système d'équations (les équations d'Euler de la nouvelle fonctionnelle).

 $\partial \pi^{*}(\underline{a}) = \partial \pi(\underline{a}) + \partial \mu f(\underline{a}) + \mu \partial f(\underline{a})$ 

Cette méthode introduit de nouvelles inconnues que sont les multiplicateurs de Lagrange.

Concrètement, en dynamique, nous cherchons à minimiser la fonctionnelle  $\pi(\underline{a})$  avec comme contraintes une expression de la forme

 $[B] \underline{a} = 0$
La nouvelle fonctionnelle s'écrit

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + W^* + \underline{\mu}^T [B] \underline{a}$$

<u>y</u> est un vecteur formé de multiplicateurs de Lagrange. Il a une taille égale au nombre de liaisons.

Nous tirons les équations

[ [M] [O] ]	[ <u>ä</u> ] ₊	[C] [0]			E
[0] [0]		[0] [0]	[B] [0]	[ ਸ਼ ] _	≗

A cause de la présence de termes nuls sur la diagonale principale des matrices du système, cette méthode pose souvent des problèmes numériques lors de la résolution. Son attrait théorique est mis en défaut par sa difficulté d'utilisation [4.1], [4.4]

b) Pénalisation

Nous introduisons dans la fonctionnelle d'origine un terme qui vient en pénaliser la valeur si les contraintes fixées par le problème ne sont pas respectées.

 $\pi^{*}(\underline{a}) = \pi(\underline{a}) + \underline{\alpha} \quad \underline{a}^{T} \quad [B]^{T} \quad [B] \quad \underline{a}$ 

La pénalisation choisie est fonction du carré de l'erreur commise sur le respect des contraintes et d'un terme  $\alpha$  à choisir. Les nouvelles équations deviennent :

 $[\mathbf{H}] \stackrel{\mathbf{a}}{=} + [\mathbf{C}] \stackrel{\mathbf{a}}{=} + ([\mathbf{K}] + \alpha [\mathbf{B}]^{\mathbf{T}} [\mathbf{B}]) \stackrel{\mathbf{a}}{=} = \underbrace{\mathbf{F}}$ 

Pour être bien utilisée, cette méthode doit employer un terme  $\alpha$  dont la valeur est de l'ordre de  $10^5$  fois celle du plus grand terme de [K] [4.2]. Elle donne de bons résultats en précision lorsque l'on traite une contrainte unique mais est moins avantageuse lorsque les contraintes sont multiples [2.2], [2.3], ce qui est notre cas.

De plus, le terme  $\alpha$  étant très grand, nous pouvons rencontrer des mauvais conditionnements de matrices [4.2]. Une autre solution possible pour imposer les liaisons est une condensation locale au niveau des degrés de liberté à lier.

Cette condensation pourra se faire lors de l'assemblage comme le proposent D.A. Turcic et A. Midha [1.22], [1.23] mais nous préférons la faire après assemblage pour diminuer le nombre de manipulations à effectuer. C'est cette solution que nous développerons dans le paragraphe 2.9.

#### 1.8 Rappel des choix effectués

Pour la modélisation du comportement dynamique de chaînes mécaniques ouvertes en mouvement, nous avons choisi de construire notre théorie autour du principe d'Hamilton, ce qui nous conduit aux équations de Lagrange. Cela nous permettra de prendre en compte tous les paramètres du mouvement : flexibilité et inertie des membres, accélérations et rigidités complémentaires provenant du mouvement...

La seule limite que nous fixons dans ce travail est de rester dans le domaine des petites perturbations afin de pouvoir continuer à travailler en élasticité linéaire. Cette limite pourra par la suite être levée en complétant les méthodes de résolution choisies dans le domaine non-linéaire (principalement en grands déplacements).

Nous ne faisons pas d'autres hypothèses simplificatrices sur le modèle utilisé, celles-ci pouvant être élaborées au vu des premiers résultats pour une étude donnée. Cela pourra être par exemple l'abandon des termes complémentaires de Coriolis si la vitesse d'entrainement est suffisamment petite.

La seconde originalité de ce travail, réside dans l'algorithme de résolution du système d'équations différentielles obtenu à partir des équations de Lagrange. Celui-ci garde en effet une stabilité numérique et une précision intéressante pour un incrément de temps qui peut dépasser le dixième de la première période propre du système.

Couplée à la condensation locale des degrés de liberté aux articulations, cette méthode utilisera relativement peu de ressources machine.

Enfin, la méthode de discrétisation utilisée nous permettra de reprendre, au niveau de la théorie des éléments finis, des types d'éléments déjà existants dans des applications en élasticité linéaire, statique ou dynamique, et de les complèter par les parties introduites par notre modélisation. Rappelons que seule la partie des équations de Lagrange relative aux degrés de liberté de déformation sera traitée dans un premier temps. Les lois de commande correspondront à des commandes en position.

## SECONDE PARTIE ELABORATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

2.1 Rappel des équations de Lagrange

L'utilisation du formalisme d'Hamilton nous a permis de déduire les équations du mouvement sous la forme des équations de Lagrange. Avant de mettre en oeuvre la procédure proposée, nous allons rappeler la forme de ces équations.

Notations :

T : énergie cinétique du système

a : vecteur des coordonnées généralisées

<u>F</u> : vecteur des efforts généralisés

U<sub>d</sub> : énergie potentielle de déformation

U<sub>D</sub> : énergie potentielle liée aux forces extérieures.

La minimisation de la fonctionnelle de l'énergie nous mêne aux équations suivantes :

 $\frac{d}{dt} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial a_{1}} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_{1}} + \frac{\partial U_{d}}{\partial a_{1}} + \frac{\partial U_{p}}{\partial a_{1}} = F_{1}$ 

Nous aurons donc à évaluer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système en fonction des coordonnées généralisées qui seront ici les degrés de liberté du manipulateur : ceux des articulations et ceux que l'on comprend au sens des éléments finis.

2.2 Calcul de l'énergie cinétique

Soit OV le rayon vecteur d'un point M quelconque du manipulateur, exprimé dans le référentiel inertiel général ( $R_O$ ), l'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \int \left[ \frac{d V}{\frac{O}{dt}} \right]^{T} \left[ \frac{d V}{\frac{O}{dt}} \right]^{T} dm$$
système

Ou encore en écrivant l'énergie cinétique totale comme la somme des énergies cinétiques de chacun des bras :

$$T = \Sigma - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d & V \\ -\frac{O}{2} \\ dt \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} d & V \\ -\frac{O}{2} \\ dt \end{bmatrix} dm$$
bras 1

Notre but est de revenir aux coordonnées du point M, exprimées dans le repère lié au bras i auquel il appartient. En reprenant les vecteurs quadridimensionnels décrits dans le chapitre précédent, nous pouvons écrire

$$T = \sum_{i=2}^{T} \frac{1}{2} \int_{\text{bras } i} \left[ \frac{d^{i} r}{\frac{0}{dt}} \right]^{T} \left[ \frac{d^{i} r}{\frac{0}{dt}} \right] dm$$
$$O^{i} \underline{r}^{T} = (1 O^{i} \underline{V}^{T})$$

En effet, après-dérivation, la première ligne de la matrice colonne représentant le vecteur  ${}^1Or$  devient nulle et n'a donc aucune influence sur le produit scalaire.

En ramenant les définitions aux repères liés aux bras nous obtenons

$$T = \sum_{i=2}^{i} \int \left[ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} [i_{f}] & i_{r} \\ dt & 0 & i_{-} \end{pmatrix} \right]^{T} \left[ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} [i_{f}] & i_{r} \\ dt & 0 & i_{-} \end{pmatrix} \right] dm$$
bras i

soit, en notant  $i_{\underline{i}\underline{r}} = \underline{d} (i_{\underline{i}\underline{r}})$  et  $T_{\underline{i}}$  l'énergie cinétique du bras i dt

٨

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Sigma \\ K=1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ T \\ H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ T \\ T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i \\ T \\ T \end{bmatrix} \end{pmatrix} dm$$

et

 $T = \Sigma T_{i}$ i=i

L'énergie cinétique dépend donc

- des rotations descriptives du mouvement ( $[{}^{1}_{0}f]$ ,  $[{}^{1}_{K}D]$ ,  $\Theta_{K}$ ) - de la géométrie du système non déformé ( $[{}^{1}_{0}f]$ ,  $[{}^{1}_{K}D]$ ,  ${}^{1}_{1}\underline{r}$ ) - de la déformation du système ( ${}^{1}_{1}\underline{r}$ ,  ${}^{1}_{1}\underline{r}$ )

Le rayon vecteur  $i_{j}r$  peut être décomposé en un terme descriptif d'une position de référence et un terme de déplacement

 $i_{1\underline{r}} = i_{1\underline{r}a} + d i_{1\underline{r}}$ 

<sup>i</sup>i<u>r</u> et d <sup>i</sup>i<u>r</u> étant fonctions du temps.



figure 2.1 Déplacement dans le repère lié au bras

Comme précisé dans la première partie de ce travail, nous choisirons comme référence le rayon  ${}^1_{i\underline{r}a}$ , associé à la position du point M, repéré par rapport au bras i, en considérant le manipulateur dans un mouvement d'ensemble de corps rigides.

La référence choisie accompagnera donc le mouvement. En conséquence de ce choix, nous aurons :

. .

$$i_{i}\underline{r}_{a} = 0$$
  $i_{i}\underline{r}_{a} = 0$ 

Nous rappelons que le vecteur  $\frac{1}{1}r$  peut être lié au vecteur  $O_1M$  à l'aide d'une opération qui rajoute un i en première ligne de la matrice colonne associée.

$$\overset{i}{\overset{r}}_{i-} \overset{r}{\overset{r}} \begin{bmatrix} 1\\ x\\ 1y\\ 1z\\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ x\\ 1ya\\ 1za\\ 1a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ d\\ x\\ d\\ 1y\\ d\\ 1z \\ 1 \end{bmatrix}$$

d  $1_{\underline{i}\underline{r}}$  peut donc être obtenu à partir de d  $\underline{O_{\underline{i}\underline{M}}}$  par une simple opération booléenne

0 d x d <sup>1</sup> y d <sup>1</sup> z	=	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	$\begin{bmatrix} d & \mathbf{x} \\ d & \mathbf{1y} \\ d & \mathbf{1z} \end{bmatrix}$	
			0 -	1		

Nous noterons cette dernière relation

 $d_{i}\underline{r} = [L] d \underline{O_{i}}M$ 

L'introduction d'une modélisation par éléments finis nous permet de représenter d $O_1 M$  comme une valeur interpolée à partir d'un ensemble fini de déplacements : les degrés de liberté de l'élément auquel M appartient, soit les déplacements de noeuds descriptifs de la géométrie du système.

 $[N_e]$  étant la matrice d'interpolation de cet élément

- <u>a</u>e étant le vecteur des déplacements des noeuds de l'élément, exprimé dans le repère R<sub>i</sub>, lié au mouvement.
- [N<sub>1</sub>] étant la matrice d'interpolation sur le bras i que nous noterons aussi [N] par simplification
- $\underline{a_1}$  étant le vecteur des déplacements des noeuds du bras i, exprimé dans le repère  $R_i$ , lié au mouvement.

nous avons

^

 $\underline{d O_{i}M} = [N_{e}] \underline{a}_{e} \quad \text{ou } d^{i}\underline{ir} = [L] [N_{e}] \underline{a}_{e}$ ou encore

 $dO_iM = [N_i] \underline{a}_i$  ou  $d^i_{ir} = [L] [N] \underline{a}_i$ 

d'où la nouvelle expression de  $T_i$ 

$$T_{i} = \frac{i}{2} \int_{\substack{k=1 \ k}} \begin{bmatrix} i & i & i \\ \Sigma & [i & D] & i & r \\ k=1 & k & i \\ bras i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & [N] & i \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & T & [i & f] \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & f \\ 0 & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}$$

Cette forme de l'énergie cinétique nous permet d'en transformer l'expression en 6 termes que nous développerons séparément afin d'obtenir une notation simplifiée (annexe 2).

$$T_{i} = O_{Ti} + \underline{a_{i}}^{T} \underline{F_{Tii}} + \frac{1}{2} \underline{a_{i}}^{T} [K_{Ti}] \underline{a_{i}} + \underline{a_{i}}^{T} \underline{F_{T2i}} + \underline{a_{i}} [C_{Ti}] \underline{a_{i}} + \frac{1}{2} \underline{a_{i}}^{T} \underline{A_{i}} + \frac{1}{2} \underline{A_{i}}^{T} \underline{A_{i}} \underline{A_{i}}^{T} \underline{A_{i}} + \frac{1}{2} \underline{A_{i}}^{T} \underline{A_{i}} \underline{A_{i}}^{T} \underline{A_{i}} + \frac{1}{2} \underline{A_{i}}^{T} \underline{A_{i}} \underline{A_{i}}^{T} \underline{A_{i}}^{$$

2.3 Calcul de l'énergie potentielle de déformation

La théorie de l'élasticité en hypothèse de petites perturbations, associée à la méthode des éléments finis, nous amène à exprimer l'énergie de déformation d'un bras sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{bras i}}^{\text{T}} \frac{\sigma \, dv}{\sigma}$$

 $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  sont respectivement des représentants des tenseurs de déformation et de contrainte sur le bras.

D'après les lois de Hooke, le tenseur des contraintes peut s'exprimer en fonction de la matrice d'élasticité et du tenseur des déformations, ce qui nous permet de modifier l'expression précédente.

$$\underline{\sigma} = [\underline{E}] \underline{\epsilon}$$

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T \\ \underline{\epsilon} \\ \underline{E} \end{bmatrix} \underline{\epsilon} dv$$

$$\int_{\text{bras i}}^{\text{T}} dv$$

Un des principes de la méthode des éléments finis est, comme nous l'avons déjà dit pour exprimer l'énergie cinétique, de décrire les déplacements des points de la structure étudiée en les interpolant à partir des déplacements des noeuds. Le tenseur des déformations peut être élaboré à partir de ce même principe, par dérivation des formules d'interpolation obtenues. Cela nous permet d'écrire [4.1] :

$$\underline{\epsilon} = [B] \underline{a}_1$$

et

 $U = \frac{T}{di} \int_{bras i}^{T} [E] [B] dv = \frac{1}{2}$ 

que nous réécrirons sous la forme matricielle suivante :

 $U_{d1} = \frac{K}{2} \underline{a_1}^T [K_1] \underline{a_1}$ 

 $[K_i]$  étant la matrice de rigidité du bras i obtenue par assemblage [4,1], [4,2], [4,3], [4,4].

- 2.4 Calcul de l'énergie potentielle de gravitation

A une constante additionnelle près, nous avons, pour un bras :

$$U = \begin{bmatrix} i r^{T} [L] g dm \\ 0 - - \end{bmatrix}$$
  
bras i

avec  $\underline{g} = (0 \ 0 \ 9.80665)^{\mathrm{T}}$  dans  $R_0$ 

En utilisant les coordonnées liées au repère R<sub>i</sub> et la matrice colonne des degrés de liberté des bras, nous avons

page 35

reconnaissant que  $[L]^T [i_0 f]^T [L] = [i_0 R]^T$  nous obtenons

$$U = \Sigma \begin{pmatrix} n \\ i \\ gi \\ i=1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} T \\ i \\ fi \\ i=a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ fi \\ fi \\ i=a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ dm + a \\ - & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ T \\ [N] \\ 0 \\ bras i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ R \\ g \\ dm \end{pmatrix}$$

### 2.5 Introduction eventuelle d'un terme d'amortissement interne

Comme nous l'avons écrit dans la première partie, notre modèle peut inclure un terme d'amortissement interne de la structure. Dans la fonctionnelle de l'énergie, celui-ci avait été introduit sous la forme :

 $\partial W^* = \Sigma Q_i^* \partial a_i$ 

les a<sub>i</sub> étant les degrés de liberté du modèle.

Sous la notation matricielle que nous employons, ce terme d'amortissement devient :

 $\partial W^* = \partial \underline{a_1}^T [C] \underline{a_1}$ 

[C] est la matrice d'amortissement interne de la structure. Ce terme est en général assez complexe à élaborer puisqu'il dépend du matériau, des fréquences auxquelles la structure est excitée, de la structure elle-même (géométrie ...).

Le but qui est poursuivi lorsque l'on introduit ce terme d'amortissement dans la modélisation, est d'améliorer les résultats donnés par la simulation en cours mais cela vient alourdir le système d'équations et rendre certaines des méthodes de résolution inutilisables sans modification (superposition modale par exemple). Dans ces cas, la matrice d'amortissement peut être modélisée de manière à pouvoir découpler les équations du mouvement, c'est à dire que si les  $\underline{\delta}_1$  sont les vecteurs propres de la structure non amortie, nous chercherons à avoir [4.2]:

$$\underline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}^{\mathrm{T}}$$
 [C]  $\underline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{j}}$  = 2.  $\mathbf{w}_{\mathbf{i}} \mathbf{p}_{\mathbf{i}} \mathbf{\partial}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}$ 

avec

- w<sub>i</sub> i ème pulsation propre
- µ<sub>i</sub> coefficient d'amortissement modal associé à la i ème pulsation propre
- d<sub>11</sub> symbole de Kronecker

Plusieurs solutions sont proposées pour obtenir ce découplage :

- [ C ] est choisie comme une combinaison linéaire de [ M ] et [ K ] [4.2]

 $[C] = \alpha [M] + \beta [K]$ 

- [ C ] est choisie comme une fonction polynomiale de [ M ] et [ K ].

Dans un premier temps, nous n'avons pas pris en compte le terme d'amortissement dans notre étude, il pourra être introduit facilement par la suite en utilisant la méthode de combinaison linéaire proposée par K.J. Bathe [4.2]. Si nous voulons le simuler, nous pourrons éventuellement jouer sur les coefficients de l'algorithme de résolution des équations différentielles en introduisant un amortissement artificiel comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

2.6 Développement des différents termes

a) Termes dépendant de l'énergie cinétique

En reprenant la forme de l'énergie cinétique que nous avons décrite dans les paragraphes précédents, nous pouvons en dériver les termes des équations de Lagrange.

 $T_{1} = O_{T1} + \underline{a_{i}}^{T} \underline{F_{T11}} + \underbrace{\times}_{a_{1}}^{T} [K_{T1}] \underline{a_{1}} + \underline{\underline{a_{i}}}^{T} \underline{F_{T21}} + \underline{\underline{a_{1}}}^{T} [C_{T1}] \underline{a_{1}} + \underbrace{\times}_{a_{1}}^{T} [M_{1}] \underline{a_{1}} + \underbrace{\times}_{a_{1}}^{T} [M_{1}] \underline{a_{1}}$ 

 $\frac{\partial T_{i}}{\partial \dot{a}_{i}} = F_{T2i} + [C_{Ti}] \underline{a_{i}} + [M_{i}] \underline{\dot{a}_{i}}$ 

 $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{i}}{\partial a_{i}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{F_{T2i}}{F_{T2i}} + \begin{bmatrix} C_{Ti} \end{bmatrix} \frac{\dot{a}_{i}}{\dot{a}_{i}} + \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} C_{Ti} \end{bmatrix} \right) \frac{\dot{a}_{i}}{\dot{a}_{i}} + \begin{bmatrix} M_{i} \end{bmatrix} \frac{\ddot{a}_{i}}{\dot{a}_{i}}$   $\frac{\partial T_{i}}{\partial a_{i}} = \frac{F_{Tii}}{F_{Tii}} + \begin{bmatrix} K_{Ti} \end{bmatrix} \frac{\dot{a}_{i}}{\dot{a}_{i}} + \begin{bmatrix} C_{Ti} \end{bmatrix}^{T} \frac{\dot{a}_{i}}{\dot{a}_{i}}$ 

Or :

 $\begin{bmatrix} C \\ Ti \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T & i \\ [N] & [L] & (\Sigma & [i & D] & \Theta \\ Dras & i & k=1 & K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} dm$ 

### page 37

D'après la remarque de l'annexe 2 page 4 nous avons  $[C_{T_i}]^T = - [C_{T_i}]$ Donc  $\frac{\partial T_{i}}{\partial a_{i}} = F_{T_{i}i} + [K_{T_{i}}] \underline{a}_{i} - [C_{T_{i}}]^{\mathcal{F}} \underline{a}_{i}$ ða. Le terme des équations de Lagrange dépendant de l'énergie cinétique est donc :  $\frac{d(\underline{\partial T_{i}}) - \underline{\partial T_{i}}}{dt} = \underline{d} \underbrace{F_{T2i}}_{dt} + 2. \begin{bmatrix} C_{Ti} \end{bmatrix} \underline{a_{i}} + \underline{d}(\begin{bmatrix} C_{Ti} \end{bmatrix}) \underline{a_{i}} + \begin{bmatrix} M_{i} \end{bmatrix} \underline{a_{i}}$ -  $\underline{F}_{T11}$  -  $[K_{T1}] \underline{a}_1$ a. i) calcul de <u>d</u> (  $[C_{T1}]$  ) et de <u>d</u>  $F_{T21}$ dt dt  $\begin{bmatrix} C \\ Ti \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T & i \\ [N] & [L] & (\Sigma & [i & D] & \Theta \\ bras & i & k=i & K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} dm$  $\frac{d [C]}{Ti} = \begin{bmatrix} T & T & i \\ [N] & [L] & (E & [i] D] \Theta \\ K=i & K & K \end{bmatrix} +$  $\begin{array}{ccc} i & i \\ \Sigma & \Sigma & \left( \begin{bmatrix} 1 \\ K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ K \end{bmatrix} ) \begin{array}{c} \Theta_{K} & \Theta_{1} \end{array} ) \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} dm \\ k = i \ l = K + i \end{array}$ et  $\frac{d [F_{T21}]}{\frac{d}{2}} = \begin{bmatrix} T & T & i \\ [N] & [L] & (\Sigma & [i] & D] & \Theta \\ K = i & K & K \end{bmatrix} + \frac{1}{K} + \frac{1}$  $\begin{array}{c} \tilde{\Sigma} \\ \tilde{\Sigma} \\ \kappa=1 \end{array} \begin{array}{c} \cdot \\ 1 = K+1 \end{array} \left( \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1}D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix} \right) \begin{array}{c} \cdot \\ \Theta_{K} \\ \Theta_{L} \end{array} \right) \begin{array}{c} \cdot \\ 1 = K+1 \end{array}$ a.2) forme simplifiée Si on note :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \Omega_1 \end{bmatrix} \text{ matrice } 4x4 \qquad \begin{array}{c} \Sigma \begin{bmatrix} 1 \\ K \\ K \end{bmatrix} \underbrace{d\Theta_K}_{K=1} \\ dt \end{bmatrix}$ 

$$\begin{bmatrix} i \Omega_{2} \end{bmatrix} \text{ matrice } 4x4 \qquad \stackrel{i}{\Sigma} \begin{bmatrix} i \\ K D \end{bmatrix} \frac{d^{2} \Theta_{K}}{dt^{2}}$$

$$\stackrel{i}{K=1} \qquad \stackrel{i}{L=1} \qquad$$

nous obtenons

 $\begin{bmatrix} C \\ T1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T \\ [N] & [L] & [\Omega] & [L] & [N] & dm \\ bras i & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 

 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K \\ T1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T \\ \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} dm$ 

 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} F & -F \\ -T21 & -T11 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T & T \\ [N] & [L] & [\Omega]^{i} & r & dm \\ 1 & 2 & 1-a \end{bmatrix}$ bras i

Nous noterons respectivement les deux dernières expressions  $[K_{di}]$  et  $\underline{F}_{di}$ 

En les introduisant dans l'expression précédente, nous avons

 $\frac{d}{dt} \left( \begin{array}{c} \frac{\partial T_{i}}{\partial a_{i}} \right) - \frac{\partial T_{i}}{\partial a_{i}} = [M_{i}] \begin{array}{c} \underline{a}_{i} + 2. \\ \underline{a}_{i} + 2. \\ C_{Ti} \end{array} \right) \frac{\underline{a}_{i}}{\underline{a}_{i}} + [K_{di}] \begin{array}{c} \underline{a}_{i} + \underline{F}_{di} \end{array}$ 

b) Termes dépendant de l'énergie potentielle de gravitation

Comme nous l'avons préalablement écrit, l'énergie potentielle de gravitation s'exprime :

$$U = \int_{\substack{i=a \\ j=a}}^{i} \int_{\substack{i=a \\ j=a}}^{T} \int_{$$

avec 
$$\underline{g} = (0 \ 0 \ 9.80665)^{T}$$
 dans Ro

d' 00

$$\frac{\partial U}{\partial a_{i}} = \int_{\text{bras } i}^{T} \begin{bmatrix} T & T \\ R \end{bmatrix} g dm$$

que nous noterons Fgi

c) Termes dépendant de l'énergie potentielle de déformation.

La théorie de l'élasticité associée à la méthode des éléments finis, nous permet d'écrire l'énergie potentielle de déformation sous une forme matricielle

 $U_{di} = \frac{1}{2} \frac{a_1^T}{[K_1]} \frac{a_1}{a_1}$ 

d'où, par dérivation :

 $\frac{\partial U_{di}}{\partial a_i} = [K_i] \underline{a_i}$ 

2.7 Résumé des équations du mouvement

Le système d'équations différentielles descriptif du mouvement du mécanisme déformable peut donc se mettre sous la forme :

 $[M_{i}] = \frac{1}{a_{i}} + 2$ ,  $[C_{Ti}] = \frac{1}{a_{i}} + [K_{di}] = \frac{1}{a_{i}} + \frac{1}{E_{di}} + [K_{i}] = \frac{1}{a_{i}} + \frac{1}{E_{gi}} = 0$ 

avec

$$\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ [N] \\ [L] \\ Dras i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ [N] \\ dm \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K \\ di \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T \\ [N] & [L] & [\Omega] \\ bras i & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ [N] & dm \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} T & T \\ [N] & [L] & [\Omega] & i \\ bras & i & 2 & 1 \\ \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{cases} T & T \\ [N] & [^{i} R] & g dm \\ bras i & - \end{cases}$$

 $[M_i]$  et  $[K_i]$  sont les matrices de masse et de rigidité rencontrées habituellement dans les modélisations par éléments finis.

Le système global sera obtenu par assemblage des équations que nous venons d'élaborer pour un bras.

### 2.8 Effets gyroscopiques

Le terme  $[C_{Ti}]$   $\underline{\dot{a}}_i$  apparait comme étant un terme complémentaire de Coriolis dû à la description de la structure dans des repères mobiles et à son étude dans un référentiel fixe.

Pour des vitesses de déplacement des articulations modérées, certains auteurs [1.26] proposent de négliger ces termes complémentaires ou [1.4] de négliger les termes d'ordre supérieur à 2 dans l'élaboration des équations.

Nous montrerons dans la partie présentation des résultats que cela peut se justifier mais nous conserverons ce terme qui intervient comme facteur multiplicatif des vitesses dans nos équations du mouvement : aucune hypothèse simplificatrice du modèle n'étant faite, celui-ci restera général. De plus, ce terme étant toujours présent dans le système d'équations, il sera très facile de le modifier pour prendre en compte les effets d'amortissement.

### 2.9 Imposition des liaisons aux articulations.

Tel que nous l'avons décrit dans les paragraphes précédents, le système formé par simple juxtaposition des équations du mouvement relatives à chaque bras est singulier puisqu'aucune liaison n'existe entre les degrés de liberté élastiques des membres. Pour pouvoir le résoudre, nous sommes amenés à introduire les articulations dans le modèle.

Les liaisons imposées par les articulations sont de deux types différents :

- liaisons entre les degrés de liberté relatifs à l'extrémité des bras i et à l'origine des bras i+1
- liaisons internes à un môme bras lorsque l'on travaile en 3D et que l'on veut modéliser les axes des articulations.

a) étude des articulations.

Soient  $M_i$  et  $M_{i+1}$  les noeuds extrèmes du bras i et origine du bras i+1,  $O_i$  le centre du repère lié au bras i. La condition de présence d'une articulation entre les deux bras s'écrit :

 $d O_1 M_1 = d O_1 M_{1+1}$  et  $\Omega(M_1) = \Omega(M_{1+1})$ 

d exprimant la variation ou le déplacement et  $\underline{\Omega}$  la rotation de l'axe.



figure 2.2 Représentation d'une articulation

Ces équations vectorielles peuvent s'exprimer dans le repôre  $R_1$  en fonction des degrés de liberté de  $M_1$  et  $M_{1+1}$  en séparant les termes de translation et de rotation.

 $\underline{\mathbf{a}}_{t}(\mathbf{M}_{i}) = \begin{bmatrix} i+i \\ i R \end{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{t}(\mathbf{M}_{i+1})$  $\underline{\mathbf{a}}_{r}(\mathbf{M}_{i}) = \begin{bmatrix} i+i \\ i R \end{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_{r}(\mathbf{M}_{i+1})$ 

que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\underline{a}(M_{1}) = [ {}^{1+1}_{1}T ] \underline{a}(M_{1+1})$$

avec

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}+\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}+\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

b) étude des axes

La liaison que l'on doit introduire entre deux noeuds d'un bras pour spécifier qu'ils sont sur le même axe est une liaison de corps rigide. C'est à dire que l'on a :

 $\frac{d O_1 M_1}{M_1} = d O_1 N_1 + \frac{M_1 N_1}{M_1} \cdot \underline{\Omega}(M_1) \quad \text{et} \quad \underline{\Omega}(M_1) = \underline{\Omega}(N_1)$ M<sub>1</sub> et N<sub>1</sub> étant les points du bras i que l'on veut lier.



figure 2.3 Axe d'une articulation

En reprenant les notations de l'étude des articulations, nous pouvons écrire

 $\frac{a}{-t} \begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a}{-t} \begin{pmatrix} N \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z \begin{pmatrix} M \\ N \\ -1 \\ 1 \\ z \begin{pmatrix} M \\ N \\ 1 \\ -y \end{pmatrix} & 0 \\ -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1}$ 

 $\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{M}_{\mathbf{i}}) = \underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{M}_{\mathbf{i}})$ 

les valeurs  $x(\underline{M_1N_1})$ ,  $y(\underline{M_1N_1})$ ,  $z(\underline{M_1N_1})$  étant les coordonnées du vecteur  $\underline{M_1N_1}$ .

Nous pouvons réécrire ces équations sous la forme :  $\underline{a}(M_1) = [T] \underline{a}(N_1)$ 

	1	0	0	0	-Z(MN)	-y(M_N)
	0	1	0	Z(M N)	0	$\mathbf{X} \left( \mathbf{M} \mathbf{N} \right)$
	0	0	1	-y( <u>M</u> N)	X(M N) _ <u>1_1</u>	0
[ T ] =	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	1

Les deux types de liaisons que nous voulons imposer peuvent donc se ramener à une même formulation. Le principe que nous retiendrons pour créer ces liaisons dans le modèle sera d'effectuer une condensation locale des degrés de liberté à lier, et ce, après avoir assemblé chaque bras séparément des autres. Cette condensation sera la dernière opération à faire .avant la résolution du système d'équations.

c) Condensation locale

L'équation différentielle à résoudre se présente en dynamique sous la forme variationnelle suivante :

 $\partial \underline{a}^{\mathrm{T}}$  ( [M]  $\underline{\ddot{a}}$  + 2. [C]  $\underline{\dot{a}}$  + [K]  $\underline{a}$  -  $\underline{F}$  ) = 0

Le problème qui se pose à nous, est d'imposer des liaisons linéaires entre degrés de liberté et ce, à chaque pas d'intégration de l'équation différentielle. Ces liaisons sont du type :

 $r_{1} a_{1} + r_{1+1} a_{1+1} + \dots + r_{n} a_{n} = 0$ 

où les a<sub>i</sub> sont des degrés de liberté ou des éléments du vecteur recherché <u>a</u>.

La méthode proposée consiste dans un premier temps en une transformation des équations de liaisons à imposer. Si  $r_i$  est un coefficient non nul, la liaison peut être écrite sous la forme :

$$a_{1} - \frac{r_{1+1} a_{1+1} + \dots + r_{n} a_{n}}{r_{1}} = 0$$

On peut effectuer un changement de variables en remplaçant  $a_i$  par a'<sub>i</sub> tel que :

$$a'_{i} = a_{i} - \frac{r_{i+1} a_{i+1} + \dots + r_{n} a_{n}}{r_{i}}$$

Nous imposons ensuite  $a'_i = 0$  dans le système.

Le nouveau vecteur inconnu <u>a</u>' s'obtient à partir de l'ancien par une simple transformation linéaire :

<u>a</u> = [S] <u>a</u>'

où [S] est une matrice carrée (n x n) qui dépend des liaisons linéaires à imposer, et donc de la matrice [T] développée dans les paragraphes précédents.

Nous pouvons maintenant remplacer <u>a</u> par sa valeur dans l'équation d'origine.

Sachant que l'on a :

<u>a</u> = [S] <u>a</u>'

nous pouvons obtenir les dérivées première et seconde de a

<u>k</u> =	$\frac{d[S]}{dt} = \frac{a'}{dt} + [S]$	<b>ė</b> ′	notons	: [S <sup>i</sup> ]	= <u>d[S]</u> dt
<u>ä</u> =	$\frac{d! [S]}{dt!} = \frac{a' + 2}{a}$	$\frac{d[S]}{dt} \stackrel{\underline{a}}{=} + [S] \stackrel{\underline{a}}{=} $	notons	[S <sup>t</sup> ] =	<u>d</u> ! [S] <u>dt</u> !

d'où la transformation de la forme variationnelle

 $\partial \underline{a}^{T}$  [S]<sup>T</sup> ( [M][S]  $\underline{a}^{\prime}$  + 2. ([C][S] + [M][S<sup>1</sup>])  $\underline{a}^{\prime}$  + ([K][S] + 2. [C][S<sup>1</sup>] + [M][S<sup>2</sup>])  $\underline{a}^{\prime}$  -  $\underline{F}$  ) = 0

L'équation devant être vérifiée quelle que soit la variation élémentaire  $\partial \underline{a}'$ , nous obtenons finalement :

[m] = ' + 2, [c] = ' + [k] = ' = f

avec :

 $\begin{array}{l} [m] &= [S]^{T}[M][S] \\ [c] &= [S]^{T}[C][S] + [S]^{T}[M][S^{1}] \\ [k] &= [S]^{T}[K][S] + 2. \ [S]^{T}[C][S^{1}] + [S]^{T}[M][S^{2}] \\ \underline{f} &= [S]^{T} \underline{F} \end{array}$ 

Cette équation sera résolue pour chaque pas de temps en imposant la nullité des valeurs des a'<sub>i</sub> choisis pour être condensés. d) Imposition de valeur pour certains degrés de liberté

Nous pouvons effectuer une partition fictive des degrés de liberté en degrés à calculer et en degrés dont on veut imposer la nullité  $\underline{a_1}$  et  $\underline{a_2}$ .

En respectant cette partition, le système peut se mettre sous la forme :

 $\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m} \\ \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{m} & \mathbf{m} \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\ddot{a}} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{\ddot{a}} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\dot{a}} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{\dot{a}} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k} \\ \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{a} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{F} \\ -\mathbf{2} \end{bmatrix}$ 

Nous imposons :

 $\underline{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{0}$   $\underline{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{0}$  et  $\underline{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{0}$ 

Les sous-matrices  $m_{12}$ ,  $c_{12}$  et  $k_{12}$  n'interviennent plus dans la première ligne du système, nous pouvons les éliminer. De plus nous allons nous servir de la seconde ligne pour imposer les valeurs de <u>ä</u><sub>2</sub>, <u>à</u><sub>2</sub> et <u>a</u><sub>2</sub> en découplant les équations soit en imposant la nullité de m<sub>21</sub>,  $c_{21}$  et  $k_{21}$ .

La dernière étape consistera à transformer  $m_{22}$  ,  $c_{22}$  et  $k_{22}$  en matrices unité. Cela donne le système :

Гп	ii C	>]		+	c 11	٥]		Γ κ 11	0	a _1	=	$\begin{bmatrix} F \\ -1 \end{bmatrix}$
0	1		ä2]		o	1	<u>a</u> _2	0	. 1	a 2		<u> </u>

Cette méthode est rencontrée sous le nom de méthode du terme unité [4.1].

e) Système à résoudre

Suite à la présentation de ces différents points, nous pouvons mettre notre système d'équations sous la forme :

 $[m] \stackrel{a}{=} ' + 2, [c] \stackrel{a}{=} ' + [k] \stackrel{a}{=} ' + \frac{f}{f} = 0$ 

avec :

¥	<u>a</u> '	nouveau vecteur de degré de liberté après condensation
¥	[S]	matrice de condensation obtenue par assemblage des
		matrices [T] que nous venons de définir.
¥	[m] =	
¥	[c] =	$[S]_{T}^{T}[C_{T}][S] + [S]_{T}^{T}[M][S]$
¥	[K] =	$[S]_{T}^{T}[K_{T}][S] + [S]_{T}^{T}[K][S] + 2. [S]_{T}^{T}[C_{T}][S] + [S]_{T}^{T}[M][S]$
¥	<b>f</b> =	$[S]^T F_a + [S]^T F_a$

Cette équation sera résolue pour chaque pas de temps en imposant la nullité des valeurs des  $a_i$ ' choisis pour être condensés.

Après résolution du système d'équations différentielles, les degrés de liberté que l'on a condensés sont rétablis à partir de ceux auxquels ils ont été liés grâce à la relation :

 $\underline{a_1} = [S] \underline{a_1}'$ 

2.10 Calcul des réactions aux articulations.

Dans le paragraphe précédent, nous avons décrit comment nous avons imposé des liaisons entre degrés de liberté. La méthode employée pour éliminer les degrés de liberté condensés porte le nom de méthode du terme unité [4.1], elle consiste à éliminer complètement une inconnue du système en imposant la nullité du terme du second membre de même rang et en annulant les lignes et les colonnes de rang correspondant dans toutes les matrices du système tout en gardant un terme unité sur la diagonale.

Après résolution du système et rétablissement de la valeur des degrés de liberté condensés, si nous reprenons les matrices et le second membre non modifiés et que nous calculons le résidu de résolution :

 $\underline{R} = [M] \underline{\ddot{a}} + 2, \ [C_{\underline{T}}] \underline{\dot{a}} + [K_{\underline{d}}] \underline{a} + \underline{F}_{\underline{d}} + [K] \underline{a} + \underline{F}_{\underline{d}}$ 

celui-ci nous donne les réactions à chaque degré de liberté que l'on a condensé soit, les réactions aux articulations.

page 47

# TROISIEME PARTIE ALGORITHME DE RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

La théorie relative à l'algorithme que nous allons utiliser a été présentée par O.C. Zienkiewicz sous le nom de : famille d'algorithmes à pas de progression simple (a unified set of single step algorithms).

Nous avons repris cette théorie en l'adaptant à notre étude par la prise en compte de systèmes d'équations dont les coefficients varient avec le temps et par l'intégration d'une possibilité de condensation locale des degrés de liberté comme cela a été évoqué dans le chapitre précédent.

#### 3.1 Présentation de la méthode

Soit à résoudre un système d'équations différentielles de la forme :

$$[M] = + [C] = + [K] = -F = 0$$

οů

<u>a</u> est un vecteur de dimension n dont les coordonnées dépendent d'un paramètre t, temps dans le cas qui nous intéresse, <u>à</u> et <u>à</u> sont respectivement ses dérivées première et seconde par rapport à t.

[M], [C], [K] sont des matrices de dimension n x n que nous appellerons respectivement matrice de masse, d'amortissement et de raideur.

 $\underline{F}$  est un vecteur de dimension n que nous appellerons vecteur de sollicitation.

[M], [C], [K] et F peuvent être dépendants de t.

Nous cherchons à résoudre cette équation en déterminant les valeurs de <u>a</u>, <u>a</u> et <u>a</u> à des instants  $t_0, \ldots, t_1$  espacés régulièrement dans l'intervalle de temps  $[T_{init}, T_{final}]$  sur lequel nous effectuons l'étude. Ces instants sont séparés par un incrément de temps  $\partial t$ .

Supposons connues les valeurs  $\underline{a_i}$ ,  $\underline{a_i}$ ,  $\underline{a_i}$  à l'instant  $t_i$ ,  $t_i = T_{init} + i$  dt et recherchons les valeurs à l'instant suivant.

Sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , <u>a</u> peut être approximé par un

polynôme de degré p en h, 0 i h i dt, sur l'intervalle [i dt, (i+1) dt].

 $\underline{\alpha_i}^{(p)}$  est un vecteur inconnu à déterminer qui permettra de p-i calculer  $\underline{a_{i+1}}, \underline{a_{1+1}}, \dots \underline{a_{i+1}}$ 



figure 3.1 Approximation de <u>a</u> sur un intervalle

Par dérivation, nous obtenons:

 $\underline{p-1} \quad j-1 \quad j \quad p-1 \quad (p)$   $\underline{\underline{a}} = \underline{\Sigma} \quad \underline{\underline{h}} \qquad \underline{\underline{a_1}} + \underline{\underline{h}} \qquad \underline{\alpha_1}$   $j=1 \quad (j-1)! \qquad (p-1)!$ 

 $\begin{array}{ccccccc} q & p-i & j-q & j & p-q & (p) \\ \underline{a} & = \Sigma & \underline{h} & \underline{a_1} + \underline{h} & \underline{\alpha_1} \\ & j=q & (j-q)! & (p-q)! \end{array}$ 

en choisissant h = dt, nous obtenons

• • • • •

- \*  $\underline{a_{i+1}}$  est dans un premier temps approximé par  $\underline{\hat{a}_{i+1}}$  et la détermination de  $\underline{\alpha_i}^{(p)}$  permet de trouver la valeur cherchée.
- \*  $\underline{\alpha_i}^{(p)}$  apparait comme une valeur approchée de la dérivée d'ordre p de <u>a</u> sur l'intervalle [i  $\partial t$ , (i+1)  $\partial t$ ].

 $\underline{\alpha_i}^{(p)}$  sera déterminée en vérifiant l'équation différentielle sur l'intervalle [i  $\partial t$ , (i+i)  $\partial t$ ] soit pour h variant de O à  $\partial t$ .

Si la solution <u>a</u> trouvée satisfait

[M] = + [C] = + [K] = -F = 0

sur l'intervalle, elle satisfait aussi la forme intégrale

 $\int_{0}^{\delta \tau} \left[ M \right] \stackrel{a}{=} + \left[ C \right] \stackrel{a}{=} + \left[ K \right] \stackrel{a}{=} - \frac{F}{F} \qquad dh = 0$ 

pour toute fonction  $\overline{Q}$  ([4.1] p164).

Choisissons des fonctions § telles que

Soient les paramètres  $\Theta_{\mathbf{q}}$  obtenus par :

$$\int_{0}^{\partial t} \frac{\int dh}{\partial t} = \Theta_{q} \partial t^{q} \qquad 0 < \Theta_{q} \leq 1$$

$$\int_{0}^{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = 0$$

La donnée d'une fonction  $\tilde{g}$  définit un ensemble de paramètres  $\Theta_q$ , de même, la donnée d'un ensemble de paramètres définit au moins une fonction  $\tilde{g}$ . L'étude des propriétés de l'algorithme en fonction des  $\Theta_q$  donnera donc une indication de son comportement pour différentes fonctions de pondération.

L'utilisation des valeurs approchées de a donne :

$$\int_{0}^{\partial t} \frac{q}{p \cdot a} dh$$

$$= \sum \frac{\partial t}{j \cdot q} \quad j \quad p - q \quad (p)$$

$$= \sum \frac{\partial t}{j \cdot q} \quad \theta_{j - q} \quad \frac{a_{1}}{a_{1}} + \frac{\partial t}{\partial t} \quad \theta_{p - q} \quad \frac{\alpha_{1}}{\alpha_{1}}$$

$$\int_{0}^{\partial t} \frac{q}{p \cdot q} dh$$

La division de la forme intégrale par o dh donne la nouvelle équation :



avec

 $\frac{-}{\underline{F}} = \frac{\int_{0}^{\sigma t} \underbrace{F}_{1+1} dh}{\int_{0}^{\sigma t} \frac{f_{1+1} + h}{f_{1+1} + (1-\Theta_{1})} \underbrace{F_{1}}_{f_{1}}}$ 

Seul le vecteur de sollicitation est susceptible d'être modifié rapidement au cours du temps. Nous avons donc choisi de considérer les matrices [M], [C] et [K] comme constantes sur un intervalle de temps  $\partial t$  et ayant pour valeurs celles que l'on calcule en  $t_{1+1}$   $(t_1 + \partial t)$ .

En ramenant l'équation en fonction de  $\alpha_i$  (p), nous obtenons :

Choisir une méthode d'ordre p permet de travailler en ne s'occupant que des dérivées d'ordre (p-1), le démarrage de l'algorithme peut donc se faire avec  $\underline{a}_0$ ,  $\underline{a}_0$ ,... jusque l'ordre (p-1).

L'erreur sur la solution obtenue est d'ordre  $O(\partial t^{p+1})$  sur l'intervalle [0,  $\partial t$ ] (voir annexe 4). Si l'équation étudiée a une matrice de masse [M] non nulle, l'ordre p minimal pour la résolution numérique est donc p=2 ([3.9], [3.10]). L'algorithme obtenu est connu sous-le nom de " <u>QUADRATIC ALGORITHM</u> " ou encore "<u>SS22-"</u>.

Pour cette valeur de p, l'équation à résoudre à chaque pas d'intégration devient :

 $([M] + \partial t \Theta_1 [C] + \frac{\partial t}{2}^2 \Theta_2 [K]) \underline{\alpha_1}^{(2)} = \overline{F} \\ - [C] \underline{\dot{a}_1} - [K] (\underline{a_1} + \partial t \Theta_1 \underline{\dot{a}_1})$ 

La stabilité "inconditionnelle" est obtenue pour :  $\Theta_1 \ge 0.5$  et  $\Theta_2 \ge \Theta_1$  ([3.10])

<u>ai+i</u>, <u>ai+i</u> s'obtiennent directement par :

$$\underline{a}_{i+1} = \underline{a}_i + \partial t \underline{a}_i + \frac{\partial t^2}{2} \underline{\alpha}_i^{(2)}$$

$$\underline{a}_{i+1} = \underline{a}_i + \partial t \alpha_i^{(2)}$$

L'algorithme SS22 a l'avantage de pouvoir être lancé en ne donnant que les valeurs de  $\underline{a}_0$  et  $\underline{a}_0$  et sans avoir à calculer  $\underline{\ddot{a}}_0$ pour amorcer le calcul comme c'est le cas pour d'autres algorithmes du même oldre (Newmark...). De plus, la stabilité et la précision obtenue ([3.11], [3.12], [3.13]) permettent de l'utiliser avantageusement à la place d'une méthode implicite de type Wilson avec un pas de progression dt plus important.

Nous donnons ici l'algorithme de calcul SS22 présenté à l'aide du pseudo-code.

La présentation faite tient compte de la réévaluation des matrices à chaque pas d'intégration.

<u>Algorithme de calcul :</u>

donner <u>a<sub>0</sub></u>, <u>a<sub>0</sub></u>, l'incrément de temps dt, le nombre de pas np calculer <u>F<sub>0</sub></u>

pour i variant de i à np

répéter

 $\dot{a} = \dot{a} + \partial t \alpha$ -1 -1-1 -1-1 3.2 Critères de stabilité et de précision

Nous avons à résoudre le système :

[M] = + [C] = + [K] = -F = 0

Le choix de l'algorithme d'intégration de ces équations différentielles sera lié aux concepts de stabilité et de précision. En effet, une stabilité dite inconditionnelle et une bonne précision obtenue avec des incréments de temps relativement importants nous permettront de justifier le choix du schéma d'intégration.

La prise en compte de ces deux critères peut être limitée à l'étude du comportement de l'algorithme pour une seule équation (annexe 4) [4.2] de la forme :

 $\ddot{u} + 2$ . w  $\mu \, \ddot{u} + w^{t} \, u = r$ 

Par variation des paramètres  $\mu$  et w, nous pourrons examiner le comportement global du système.

Pour étudier la stabilité de cet algorithme, nous pouvons utiliser la définition donnée par K.J. Bathe [4.2] :

Une méthode d'intégration est inconditionnellement stable si la solution pour toute condition initiale n'augmente pas pour tout incrément de temps dt, en particulier quand le rapport dt/T est grand, T étant la période propre du système.

En fait, l'étude réalisée donnera une condition suffisante plus stricte (annexe 4). Les résultats en fonction de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ sont regroupés dans le tableau 3.2 [3.10].

La stabilité "inconditionnelle" est obtenue pour des valeurs  $\Theta_2 \ge \Theta_1 \ge 0.5$ 

En ce qui concerne la précision, l'erreur commise en fonction de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  est donc au maximum de l'ordre de  $O(\partial t^2)$ .

23

Méthode	paramètres	erreur phase	erreur amplitude	stabilité	
Newmark	β, γ	0(ðt!)	0(ðt)	28272%	
	τ = ½	O(ðt²)	0(ðt <sup>3</sup> )	281%	
	<b>τ=½ B=1/12</b>	0(ðt <sup>4</sup> )	0(ðt <sup>4</sup> )	<b>w!</b> ðt! < 6	
SS22	θ, θ	O(ðt!)	0(ðt)	θ <u>2</u> θ <u>2</u> %	p=0
	Θ = ½	O(ðt²)	0(ðt <sup>3</sup> )	్ అ₂≀%	
	$\Theta = \frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{6}$	0(ðt <sup>4</sup> )	$O(\partial t^4)$	 ₩² ðt² < 6	

figure 3.2 Stabilité et précision fonctions de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sans amortissement

Méthode	paramètres	erreur phase	erreur amplitude	stabilitë	
Newmark	β,τ -	0(ðt )	0(ðt)	2B1 7 1 K	
	τ = ½	O(ðt?)	O(ðt)	281%	
	<b>τ=% β=1/12</b>	O(ðt²)	0(ðt?)	₩² ðt² < 6	
SS22	θ, θ	O(ðt)	0(ðt)	θ_2θ_2% 2 1	h#o
	⊖ = %	O(ðt²)	0(ðt?)	అ₂≥౺	
	$\Theta_{1} = \frac{1}{6} \Theta_{2} = \frac{1}{6}$	0(ðt²)	0(ðt?)	₩º ðt? < 6	

figure 3.3 Stabilité et précision fonctions de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ avec amortissement

Les qualités de stabilité et de précision obtenues seront vérifiées dans les exemples traités dans les paragraphes suivants.

# 3.3 Comparaison avec d'autres schémas d'intégration

Dans les tableaux 3.2 et 3.3, nous avons présenté les critères de précision et de stabilité des algorithmes de Newmark et SS22. Nous pouvons remarquer que les deux algorithmes présentent des propriétés très proches et se correspondent en fait pour  $\theta_2$  = 2B.

Nous allons présenter ici un test de comparaison, en donnant de surcroît la solution théorique du système étudié et la solution obtenue avec une méthode explicite (différences finies centrées).

L'exemple étudié est tiré de ([4, 1] p 378.)

Il nous a semblé préférable de donner les résultats sous forme de tableaux plutôt que de courbes. En effet, vue la faible différence obtenue entre les résultats fournis par les différentes méthodes de calcul, les tableaux permettent d'en avoir une meilleure appréciation.

Soit à résoudre le système :

avec

$$\underline{U}_{0} = \underline{0} \qquad \underline{U}_{0} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

)

en portant U et U, nous trouvons  $\ddot{U} = \begin{bmatrix} 0\\ -0 & -0 \end{bmatrix}$ 

a) méthode des différences finies centrales ( dt = 0.5 )
 En prenant :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U}} \approx \frac{1}{\underbrace{u_{t+\partial t}}} - 2 \underline{u}_{t} + \underline{u}_{t-\partial t}$$

$$\underline{\underline{u}} \approx \frac{1}{2\partial t} \left( \underline{u}_{t+\partial t} - \underline{u}_{t-\partial t} \right)$$

### page 56

```
Le système s'écrit :
```

 $[K] \underline{U}_{t+\partial t} = \underline{R}_{t}$ 

avec

[K] = [M] + 0.5 dt [C]

 $\underline{R}_{t} = \partial t^{*} \underline{F}_{t} + [M] (2(\underline{U}_{t} - \underline{U}_{t-\partial t})) + 0.5 \ \partial t \ [C] \underline{U}_{t-\partial t}$  $- \partial t^{*} \ [K] \underline{U}_{t}$ 

soit dans notre cas :

[K] = [M] + 0.25 [C]

 $\underline{R}_{t} = 0.25 \underline{F}_{t} + [M] (2(\underline{U}_{t} - \underline{U}_{t-\partial t})) + 0.25 ([C] \underline{U}_{t-\partial t} - [K] \underline{U}_{t})$ 

		[ 0 ]	
U ðt	:	0. 125	

résultats :

U 1	U 2
0.	0.
0.000	0. 125
0. 083	0. 292
0. 233	0.417
0. 399	0.486
0.535	0.514
0.619	0.519
0.638	0. 508
0. 561	0. 501
0. 495	0. 499
0.474	0. 500
0. 482	0. 500
0. 496	0. 500
0. 503	0. 500
0. 499	0. 500
	U 1 0. 0. 000 0. 083 0. 233 0. 399 0. 535 0. 619 0. 638 0. 561 0. 495 0. 474 0. 482 0. 496 0. 503 0. 499



figure 3.4 Résultats obtenus avec la méthode des différences finies centrales

page 57

b) méthode de Newmark (  $\partial t = 0.5$ ,  $\beta = \tau = 0.5$ ) En écrivant :  $\underline{\hat{u}}_{t+\partial t} = \underline{\hat{u}}_{t} + \partial t ((1-\gamma) \underline{\hat{v}}_{t} + \gamma \underline{\hat{v}}_{t+\partial t})$  $U_{t+\partial t} = \underline{U}_t + \partial t \, \underline{\hat{u}}_t + 0.5 \, \partial t^2 \, ((1-\beta) \, \underline{\hat{U}}_t + \beta \, \underline{\hat{U}}_{t+\partial t})$ Le système se transforme en : [K]  $Ut+\partial t = Rt+\partial t$ avec  $[K] = [M] + \partial t \tau [C] + 0.5 \partial t^{t} \beta [K]$  $\underline{R}_{t+\partial t} = 0.5 \ \partial t^{t} \ \beta \ \underline{F}_{t+\partial t} + [M] \ (\underline{U}_{t} + \partial t \ \underline{u}_{t} + 0.5 \ \partial t^{t} \ (1-\beta) \ \underline{U}_{t})$ + [C] ( $\tau$  dt <u>U</u>t + 0.5 dt<sup>2</sup> (2 $\tau$ -B) <u>u</u>t + 0.5 ðt<sup>3</sup> (アー月) Ü+) soit pour l'application numérique : [K] = [M] + 0.25 [C] + 0.0625 [K] $\underline{R}_{t+\partial t} = 0.0625 \underline{F}_{t+\partial t} + [M] (\underline{U}_t + 0.5 \underline{U}_t + 0.0625 \underline{U}_t)$ + [C] (0.25  $\underline{U}_{t}$  + 0.0625  $\underline{U}_{t}$ ) les vitesses et accélérations se calculent à chaque pas à l'aide de:  $\underline{\underline{U}}_{t+\partial t} = -\underline{\underline{U}}_{t} + 16 (\underline{\underline{U}}_{t+\partial t} - \underline{\underline{U}}_{t} - 0.5 \underline{\underline{U}}_{t})$  $\underline{U}_{t+\partial t} = \underline{U}_{t} + 0.25 ( \underline{U}_{t} + \underline{U}_{t+\partial t} )$ 

résu	1	ta	ts	:
------	---	----	----	---

temps	U 1	ບ 2	ũ 1	ú 2	Ü	Ψ 2
0.	0.	0.	1	0.	1	0.
0.5	0. 018	0.077	0. 073	0. 308	0.293	0.231
1.0	0. 090	0.237	0. 213	0. 331	0.265	-0.136
1.5	0. 219	0.379	0. 303	0. 239	0.096	-0.235
2.0	0. 371	0.471	0. 307	0. 129	-0.078	-0.201
2.5	0. 509	0.515	0. 241	0. 048	-0.187	-0.126
3.0	0. 604	0.528	0. 141	0. 002	-0.215	-0.058
4.0	0.651	0.515	-0.035	-0.019	-0. 120	0.007
5.0	0.581	0.502	-0.090	-0.007	0. 003	0.011
6.0	0.504	0.498	-0.057	0.000	0. 051	0.003
7.0	0.471	0.499	-0.010	0.001	0. 039	0.000
8.0	0.475	0.500	0.014	0.000	0. 011	-0.001
9.0	0.491	0.500	0.015	0.000	-0. 007	0.000
10.0	0.503	0.500	0.007	0.000	-0. 009	0.000
15.0	0.499	0.500	0.000	0.000	0. 001	0.000

figure 3.5 Résultats obtenus avec la méthode de Newmark

c) résultats théoriques de l'exemple

Ces résultats ont été calculés par découplage des équations à l'aide d'une décomposition modale, le système a ensuite été intégré à l'aide des intégrales de Duhamel.

temps	DDL U	DDL U
0.000D+00 0.500D+00 0.100D+01 0.150D+01 0.250D+01 0.300D+01 0.400D+01 0.500D+01 0.600D+01 0.700D+01 0.800D+01 0.900D+01 0.100D+02 0.150D+02	1 0.000000000+00 0.15938983D-01 0.94462840D-01 0.22966994D+00 0.38279597D+00 0.51504144D+00 0.60322333D+00 0.64020616D+00 0.57231563D+00 0.57231563D+00 0.47500224D+00 0.47914817D+00 0.49290347D+00 0.50213872D+00 0.49936450D+00	2 0.0000000D+00 0.88466491D-01 0.24583701D+00 0.38082259D+00 0.46662966D+00 0.50831814D+00 0.52113144D+00 0.51291661D+00 0.50227494D+00 0.49915629D+00 0.49935672D+00 0.49985846D+00 0.50003079D+00 0.50003140D+00 0.5000002D+00
0.200D+02	0.50002430D+00	0. 5000000D+00

figure 3.6 Résultats théoriques

# d) résultats obtenus avec l'algorithme SS22

 $\Theta_1 = \Theta_2 = 0.5$   $\partial t = 0.5$ 

TEMPS T	DDL	U i	ũ 1	α
0. 10000D+01	1	0.89844D-01	0.21286D+00	0. 27919D+00
	2	0.23669D+00	0.33136D+00	0. 47337D-01
0.2000D+01	1	0. 37148D+00	0.30745D+00	0.86573D-02
	2	0.47113D+00	0.12941D+00	-0. 21820D+00
0. 30000D+01	1	0.60407D+00	0.14060D+00	-0. 20112D+00
	2	0.52768D+00	0.15198D-02	-0. 92217D-01
0.40000D+01	1	0.65099D+00	-0. 34781D-01	-0.15143D+00
	2	0.51508D+00	-0.18550D-01	-0.37355D-02
0.50000D+01	1	0.58103D+00	-0.89803D-01	-0. 24326D-01
	2	0.50179D+00	-0.74690D-02	0.12183D-01
0.60000D+01	1	0.50437D+00	-0. 57472D-01	0.44405D-01
	2	0.49847D+00	-0.17288D-03	0.53103D-02
0.70000D+01	1	0.47140D+00	-0. 10034D-01	0.44290D-01
	2	0.49914D+00	0.10374D-02	0.27168D-03
0.80000D+01	1	0.47538D+00	0.14439D-01	0.17398D-01
	2	0,49989D+00	0.43070D-03	-0.67945D-03
0.9000D+01	1 1	0.49135D+00	0.15369D-01	-0.33511D-02
	2	0.50008D+00	0.14746D-04	-0.30554D-03
0.10000D+02	1	0.50255D+00	0.67083D-02	-0.93232D-02
	2	0.50005D+00	-0.57954D-04	-0.18812D-04
0.15000D+02	1	0.49914D+00	0.34919D-03	0.74008D-03
	2	0, 50000D+00	0.79405D-07	-0. 10090D-05

figure 3.7 Résultats obtenus avec l'algorithme SS22

Nous pouvons noter une bonne correspondance entre les valeurs des degrés de liberté et de leurs dérivées premières calculées par les méthodes de Newmark et SS22.

La précision obtenue pour un pas de temps relativement important est bonne (les valeurs propres du système sont 1 et 2).

Nous pouvons remarquer un des avantages non négligeable de l'algorithme SS22 : les schémas d'intégration proposés pour la comparaison demandent un amorçage, SS22 peut être utilisé directement sans calculer de valeur initiale de  $\underline{U}_{-dt}$  ou  $\underline{U}_{0}$ .



3.4 Etude de la réponse à une excitation échelon.

Nous cherchons à étudier un système mécanique à un degré de liberté dont le comportement est décrit par l'équation :

 $m \ddot{a} + c \dot{a} + k a = f$ 

La réponse de ce système est recherchée pour une sollicitation échelon imposée à l'instant t=0 avec les conditions initiales :

 $a_0 = 0$   $\dot{a}_0 = 0$   $\ddot{a}_0 = 0$ 

Nous pouvons introduire les notations suivantes :

 $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} = \mathbf{w}^{\mathbf{r}} \qquad \underbrace{\mathbf{c}}_{\mathbf{m}} = 2 \mathbf{w} \mathbf{\mu} \mathbf{w}_{\mathbf{d}} = \mathbf{w} \mathbf{v} (1-\mathbf{\mu}^{\mathbf{r}}) \quad \text{et prendre } \mathbf{w} = 0.2 \text{ rd/s}$   $\mathbf{\mu} = 0.1$ 

a) réponse théorique

Nous pouvons aisément rechercher la réponse théorique de ce système à l'aide des transformées de Laplace. L'équation différentielle se transforme en :

 $(m p^{t} + c p + k) A(p) = \frac{F_{0}}{P} + m p a_{0} + m \dot{a}_{0} + c a_{0}$ 

soit en tenant compte des conditions initiales :

 $A(p) = \frac{F_0}{p (m p^2 + c p + k)} = \frac{F_0}{m (p^2 + 2 w \mu p + w^2)}$ 

La valeur de l'amortissement a été choisie de telle manière que le système soit oscillant.

En décomposant en fractions simples et en prenant la transformée inverse nous obtenons :

 $a(t) = \frac{F_0}{k} \left( 1 - e^{-\mu wt} \left( \frac{\mu w}{w} \sin w_d t + \cos w_d t \right) \right)$ 

b) résolution à l'aide de l'algorithme SS22

Nous avons utilisé l'algorithme SS22 avec plusieurs incréments de temps afin de mettre en évidence les qualités de précision et de stabilité qu'il offre.

Dans un premier temps, nous avons utilisé l'algorithme dans

sa forme à la limite de la stabilité soit avec  $\theta_1 = \theta_2 = 0, 5$ .

Deux calculs ont été effectués et nous en présentons les résultats sur la courbe figure 3.8.

 $- \partial t/T = 10$ 

 $- \partial t/T = 5$ 

Nous pouvons noter la très bonne précision des résultats obtenus dans le premier cas et l'approche encore acceptable dans le second alors que la valeur ( $\partial t/T = 10$ ) est déjà très critique pour d'autres algorithmes tels que celui de Newmark ou les algorithmes fonctionnant sur un schéma explicite. Cela est dù principalement à la construction à base de résidus pondérés du principe utilisé.

Dans un second temps, nous avons voulu faire apparaitre la qualité " d'amortisseurs " qu'ont les coefficients  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ .

Les calculs ont cette fois été effectués en utilisant  $\mu = 0$ et une valeur de 0.9 pour les coefficients. Le pas de progression a été choisi tel que ( $\partial t/T = 10$ ) et les résultats sont comparés à ceux obtenus dans le premier test.

Nous pouvons remarquer une bonne concordance des résultats quant à la phase du phénomène oscillatoire obtenu et une légère différence quant à l'amplitude.

Cela vient argumenter ce qui a été énoncé dans le paragraphe 2.5, à savoir que nous pourrions simuler un effet d'amortissemnt en faisant varier les coefficients du schéma d'intégration retenu. En fait, si on regarde l'algorithme élaboré pour ce schéma d'intégration, on remarque immédiatement que des valeurs importantes des paramètres  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  viennent diminuer la norme du vecteur  $\alpha^{(2)}$  que l'on peut obtenir pour des systèmes définis à partir des mêmes matrices et ayant le même second membre.

3.5 Valeur du résidu de résolution en fonction de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ 

Pour la recherche des efforts exercés aux articulations lors du mouvement, nous utilisons une méthode basée sur le calcul du résidu de résolution à chaque pas d'intégration.
La valeur réelle de résidu  $r_{t+\partial t}$  est donné par la relation :

 $\underline{\mathbf{r}}_{t+\partial t} = [M] \underline{\alpha}_{t}^{(2)} + [C] \underline{\mathbf{a}}_{t+\partial t} + [K] \underline{\mathbf{a}}_{t+\partial t} - \underline{\mathbf{F}}_{t+\partial t}$ 

En remplaçant  $\underline{a}_{t+\partial t}$  et  $\underline{\dot{a}}_{t+\partial t}$  par leurs valeurs en fonction de  $\underline{\alpha}_t$ <sup>(2)</sup>,  $\underline{a}_t$  et  $\underline{\dot{a}}_t$ , nous obtenons l'expression suivante pour le résidu :

 $\underline{\mathbf{r}}_{t+\partial t} = \{(1 - \Theta_1) \ \partial t \ [C] + (1 - \Theta_2) \ \underline{\partial t^{\dagger}} \ [K]\} \ \underline{\alpha_t}^{(2)} + \\ (\Theta_1 - 1) \ \{\underline{\mathbf{F}}_{t+\partial t} - \underline{\mathbf{F}}_t\} + (\Theta_1 - 1) \ \partial t \ [K] \ \underline{\mathbf{a}}_t$ 

Le résidu numérique obtenu sera donc d'autant plus proche du résidu physique réel (efforts résultants) que les coefficients  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  seront proches de 1, ce qui signifie que l'on aura introduit un fort effet d'amortissement artificiel.



figure 3.8 Réponse du système à une sollicitation échelon



figure 3.9 Réponse du système à une sollicitation échelon

# QUATRIEME PARTIE MISE EN FORME D'UN ELEMENT DE POUTRE

#### 4.1 Introduction

Pour valider la modélisation introduite, nous avons choisi de l'appliquer à un élément très simple : une poutre en deux dimensions. Ce choix se justifie par le fait que cet élément peut déjà servir à modéliser un manipulateur de façon grossière pour une première approche de son comportement.

De plus, l'élément de poutre étant déjà bien connu, son utilisation a pu être dirigée directement vers la partie dynamique qui est le sujet de l'étude. Les autres matrices descriptives de l'élément se trouvent en effet dans presque tous les ouvrages généraux traitant de l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Le type de poutre choisi pour notre étude correspond à la théorie d'Euler-Bernoulli, c'est à dire que nous ne tiendrons pas compte de l'effet de cisaillement transverse, seuls les effets de flexion et de compression seront traités. L'élément ainsi élaboré, ne permettra pas de traiter les problèmes où la rigidité géométrique intervient (rigidification ou assouplissement de la structure à cause de sa forme et parfois instabilité structurelle).

### 4.2 Energie potentielle de déformation.

Pour une poutre de longueur l et de section A, l'énergie potentielle de déformation peut s'exprimer :

 $U_{de} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{EI}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 w}{dx^2} \end{bmatrix}^2 dx + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{AE}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \end{bmatrix}^2 dx$ 

E est le module d'Young du matériau constitutif de la poutre.

- w représente le déplacement transverse de la fibre neutre à l'abscisse x (figure 4.1).
- u représente le déplacement longitudinal d'un point sur la fibre neutre à l'abscisse x (figure 4.1).



### figure 4.1 Déformation de l'élément de poutre

Les points i et 2 sont situés sur la fibre neutre de la poutre, aux extrémités.

Le déplacement w permet de calculer la rotation  $\Theta$  de la normale à la fibre neutre (déplacement angulaire).

 $\Theta = \underline{dw} \\ \underline{dx}$ 

Pour conserver la continuité de  $\Theta$  aux interfaces entre poutres, nous devrons choisir une représentation des déplacements sur l'axe neutre qui soit donc de classe  $C_1$ . Par contre, la représentation des déplacements longitudinaux pourra être de classe  $C_0$ .

Le choix d'utiliser la méthode des éléments finis nous amène à représenter ces déplacements à l'aide d'une interpolation des déplacements des noeuds i et 2 pour chaque poutre du modèle, les fonctions d'interpolation en w devront être de classe  $C_1$  et en u de classe  $C_0$ . Nous choisissons une interpolation de type Hermite en w, ce qui donne un élément conforme [4.5].

En représentant les déplacements des points de la poutre en fonctions de ceux des points extrêmes, nous pouvons écrire :

 $u(\epsilon) = N_{u1}(\epsilon) u_1 + N_{u2}(\epsilon) u_2$ 

 $w(\epsilon) = N_{w1}(\epsilon) w_1 + N_{w1}'(\epsilon) \Theta_1 + N_{w2}(\epsilon) w_2 + N_{w2}'(\epsilon) \Theta_2$ 

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2x}{1} - 1 \\ \Theta_1 &= \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} \\ \end{array} \qquad \qquad \Theta_2 &= \left[ \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} \end{aligned}$$

Nous avons comme fonctions d'interpolation (figure 4.2) :

$$N_{u1} = \frac{1 - \epsilon}{2}$$

$$N_{u2} = \frac{1 + \epsilon}{2}$$

$$N_{w1} = \frac{1 + \epsilon}{2}$$

$$N_{w2} = \frac{1 + \epsilon}{2}$$

4.3 Matrice de rigidité

A partir de la formulation analytique de l'énergie potentielle de déformation et de la définition des fonctions d'interpolation, nous pouvons maintenant élaborer une formulation matricielle.

 $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{d\epsilon}{dt}$  $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$ 

d'où

 $\frac{du}{dx} = \frac{2}{1} \frac{(u_2 - u_1)}{2}$ 

que l'on peut mettre sous forme matricielle en se servant du vecteur des déplacements des points i et 2.

 $\frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{a_e}{1}$ 

avec

 $\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{e}} = (\mathbf{u}_{\mathbf{i}} \ \mathbf{w}_{\mathbf{i}} \ \Theta_{\mathbf{i}} \ \mathbf{u}_{\mathbf{2}} \ \mathbf{w}_{\mathbf{2}} \ \Theta_{\mathbf{2}})^{\mathrm{T}}$ 

page 68





1



Nv 1

1

0

-1



figure 4.2 Fonctions d'interpolation de l'élément de poutre

De même,  $\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx}$ que l'on ramène sous la forme :  $\frac{dw}{dx} = \frac{2}{1} \begin{bmatrix} 0 & (-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \varepsilon^{t}) & \frac{1}{2} & (-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{3}{4} \varepsilon^{t}) \\ 0 & (\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \varepsilon^{t}) & \frac{1}{2} & (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{3}{4} \varepsilon^{t}) \end{bmatrix} \underline{a}_{e}$   $\frac{d^{t}w}{dx^{t}} = \frac{4}{1^{t}} \begin{bmatrix} 0 & (\frac{3}{2} \varepsilon) & \frac{1}{2} & (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \varepsilon) \\ 0 & (-\frac{3}{2} \varepsilon) & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \varepsilon) \end{bmatrix} \underline{a}_{e}$ 

Nous pouvons introduire ces différentes expressions dans la formulation analytique et obtenir par intégration :



qui sera noté par la suite

 $U_{de} = \frac{1}{2} \frac{a_e^T}{E} [K] \frac{a_e}{E}$ 

La matrice [K] a été développée dans le repère lié à la poutre. Si on définit [R] comme étant la matrice 3x3 qui permet de passer dans le repère lié au bras, nous pouvons exprimer

a \_\_e [K] dans ce dernier ( la troisième dimension a été conservée à cause de la rotation  $\Theta$ ).

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

 $\cos \alpha = (x_2 - x_1) / 1$  $\sin \alpha = (y_2 - y_1) / 1$ 

$$[K]_{bras} = [T]^{T} [K] [T]$$

avec

$$[T] = \frac{[F]}{[O]} [R]$$

4.4 Energie potentielle de gravitation.

Afin de pouvoir calculer le terme d'énergie potentielle due à la gravité, nous devons ramener le vecteur <u>g</u> dans le repère local lié à la poutre.

En reprenant la matrice [ $^{1}_{0}$ f ] qui permet d'exprimer le repérage du bras i en fonction de celui du référentiel inertiel  $R_{0}$ , nous pouvons écrire :

			$\begin{bmatrix} 1 & f \end{bmatrix}$	g
g	=		10f32	g
	bras	i	10 <sub>f</sub> 33	g
		_	0 34	9

puis dans le repêre local lié à la poutre :

g/poutre = [ R ] g/bras i

Le terme Uge lié à l'élément s'écrit

 $U = a \int_{0}^{1} [N] g \mu A dx.$ 

µ masse volumique du matériau utilisé

soit  $U_{ge} = \underline{a}e^{T} \underline{F}e$ 

avec

 $F = \mu A 1 g$   $poutre poutre = \mu A 1 g$   $\frac{\%(\cos \alpha i f + \sin \alpha i f )}{0 32} + \cos \alpha i f )}{0 33}$   $\frac{\%(-\sin \alpha i f + \cos \alpha i f )}{0 32} + \cos \alpha i f )}{0 33} / 12$ 

ce qui donne dans le repère lié au bras :

$$F = \mu A 1 g$$

4.5 Matrice de masse

Comme décrit dans l'annexe i, la matrice de masse peut se mettre sous la forme :

 $[M] = \begin{bmatrix} T \\ [N] & [N] & [M] \end{bmatrix} dm = \begin{bmatrix} 1 & T \\ [N] & [N] & [M] \end{bmatrix} \mu A dx$ e e e e

$$[M] = \frac{\nu A 1}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1-\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (2-3\epsilon+\epsilon^{3}) \\ 0 & \frac{1}{2} (1-\epsilon-\epsilon^{2}+\epsilon^{3}) \\ \frac{1+\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (-1-\epsilon+\epsilon^{3}) \\ 0 & \frac{1}{2} (-1-\epsilon+\epsilon^{3}+\epsilon^{3}) \end{bmatrix} [N_{e}] d\epsilon$$

# soit par intégration

 $[M] = \frac{\mu A 1}{420}$   $[M] = \frac{\mu A 1}{420}$  [0 221 41! 70 0 0 140 0 54 131 0 156 0 -131 -31! 0 -221 41!

De même que pour la matrice de rigidité, nous exprimons la matrice de masse dans le repêre lié au bras.

 $[M]_{\text{bras}} = [T]^T [M] [T]$ 

4.6 Matrice [ K<sub>d</sub> ]

Cette matrice est donnée par (paragraphe 2.6)

 $\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{T} \\ [\mathbf{N}] & [\mathbf{L}] & [\mathbf{\Omega}] & [\mathbf{L}] & [\mathbf{N}] & d\mathbf{m} \\ \mathbf{e} & \mathbf{12} & \mathbf{e} \end{bmatrix}$ 

Or, le terme  $[L]^{T}[{}_{i}\Omega_{2}][L]$  doit être ramené dans le repère lié à la poutre avant tout calcul. Nous utiliserons concrètement le produit :

	cosa	sina	T	cosa -sina
e 2	-sina	cosa		sina cosa

La matrice  $[K_d]$  sera ensuite transformée pour revenir au repère lié au bras i.

Nous avons à calculer :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{T} \\ [\mathbf{N}] \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{e}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \mathbf{\mu} \mathbf{A} \, \mathbf{d} \mathbf{x}$$

Cette matrice peut être élaborée soit directement par formulation analytique manuelle comme nous l'avons fait pour les matrices de rigidité et de masse mais il a semblé préférable d'utiliser une méthode de calcul numérique pour en rechercher la valeur ; nous utilisons la méthode de Gauss.

Cette méthode d'intégration numérique consiste à exprimer l'intégrale recherchée comme étant une combinaison linéaire des valeurs de la fonction à intégrer en des points particuliers, les points dits de Gauss.

 $\int_{-1}^{+1} \begin{array}{c} n \\ Y(\epsilon) \quad d\epsilon = \Sigma \quad w \quad Y(\epsilon) \\ 1 = 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$ 

les  $\epsilon_1$  sont les points d'intégration choisis et les w<sub>1</sub> les pondérations associées.

Dans le cas de la poutre, nous avons une intégration numérique à une dimension pour laquelle nous devons choisir le nombre de points de Gauss parmi les configurations suivantes :

n	E 1	w1	erreur	r
1	0	2	1/6 d' y/de?	1
2	± 0. 577350291	1	0.007 $d^{4}y/d\epsilon^{4}$	3
З	0 ± 0.774596669	0.888888888 0.555555555	6. E-05 $d^6y/d\epsilon^6$	5
4	± 0.339981043 ± 0.861136311	0.652145155 0.347854845	3. E-06 d <sup>8</sup> y/d€ <sup>8</sup>	7

r : degré du polynome intégré exactement.

Les fonctions d'interpolation utilisées étant de degré 3, nous utiliserons une méthode d'intégration à 4 points afin d'obtenir l'intégration exacte.

La matrice  $[K_d]$  sera donc calculée dans le repère lié à la poutre comme étant une combinaison linéaire du produit

 $\mu A \frac{1}{2} [N_e] [e\Omega_2] [N_e]$ 

calculé aux & correspondants aux points de Gauss.

 $[K_d]$  sera ensuite exprimé dans le repère du bras de la même manière que les matrices de masse et de rigidité.

# 4.7 Matrice [ $C_T$ ] et vecteur $\underline{F}_d$

De même que pour la matrice  $[K_d]$ , nous avons à nous placer dans un premier temps dans le repère lié à la poutre puis à revenir dans le repère lié au bras. Nous pouvons écrire :

 $\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & T & T \\ \begin{bmatrix} N \\ e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ e \end{bmatrix} dm \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$ 

Les matrices [T] et [R] ont été définies précédemment.

$$F = [T] \begin{bmatrix} T & T \\ [N] & [R] & [L] & [\Omega] & i \\ e & i & 2 & i \\ \delta | \delta ment \end{bmatrix}$$

Le calcul de ces intégrales sera fait à l'aide de la méthode d'intégration de Gauss avec quatre points d'intégration, comme pour les précédentes.

#### 4.8 Test - Vibrations libres

Le premier test effectué avec l'élément de poutre, tend à obtenir une vérification élémentaire du modèle et de l'élément.

Ce test consiste à étudier un bras formé d'une poutre, que l'on considère à l'origine comme non déformée et qu'on laisse évoluer dans le champ de la pesanteur, l'articulation du bras étant bloquée.

#### caractéristiques du bras utilisé :

longueur	1	:	1 m _
section	A	:	.12 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup>
inertie		:	$.41666 \ 10^{-6} \ m^4$
masse volumique	e_h_	:	7800 Kg/m <sup>3</sup>
module d'Young	E	:	.21 10 <sup>12</sup> N/m <sup>2</sup>

Le bras est horizontal, non déformé au temps t=0 et sa déformation est étudiée jusque t=0.30

La première fréquence propre du bras est donnée par :

$$f = \frac{3.52}{2. \pi} \left[ \frac{E I}{\mu A l^4} \right]^{\frac{1}{2}} = 54.17 \text{ Hz}$$

d'où T = .0184 s , première période propre

Nous choisissons un incrément de temps  $\delta t = 0.01 \ 10^{-2}$  s et une valeur de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  égale à 0.5.

Les résultats sont donnés dans un premier temps pour le déplacement transverse de l'extrémité, avec un découpage en 6 éléments et comparés avec ceux obtenus à l'aide du logiciel SAP.



Le point i correspond à l'articulation.



figure 4.3 Déplacement de l'extrémité de la poutre en vibrations libres

Les résultats fournis par les deux logiciels concordent avec

page 76

une relativement bonne précision.

erreur relative sur la période du phénomène vibratoire : 8% erreur relative sur l'amplitude : inférieure à 2%

De plus si on compare l'amplitude du phénomène vibratoire trouvée, avec celle donnée lors de la présentation du test, on trouve une différence relative inférieure à 2%.

Un second test a été effectué avec la même poutre en utilisant cette fois un découpage en 10 éléments. Les calculs ont été effectués avec le même pas de temps que pour l'essai précédent.

Les résultats présentés pour les points 5 et 11 correspondent au déplacement transverse de ces points.



figure 4.4 Poutre décomposée en 10 éléments réguliers déplacements de 2 points en vibrations libres

On peut noter une concordance avec les résultats obtenus pour un découpage plus grossier de la poutre étudiée, cela va dans le sens de la validation de l'élément utilisé.

Pour les deux cas tests présentés ci-dessus, les calculs ne font pas directement intervenir la partie dynamique élaborée pour l'élément puisque l'articulation a été considérée comme bloquée. Par contre, la partie classique (masse, rigidité, efforts de gravité) ainsi que l'algorithme de résolution du système différentiel interviennent entièrement.

La conclusion que l'on peut tirer de ces deux cas tests est une non-mise en évidence d'erreur flagrante sur un cas simple.

# 4.9) Mouvement de rotation

Le test suivant consiste en un animation de manipulateur modélisé à l'aide d'une poutre dont les caractéristiques sont les même que pour les cas précédents.

Le mouvement choisi consiste à partir de l'horizontale, le manipulateur étant soumis au champ de la pesanteur puis à le lever jusqu'à la verticale en suivant la loi angulaire suivante :

θ(t)	=	$\frac{\pi}{4}$ (1.	- cos(πt))	0 s t < 1.
$\Theta(t)$	=	<u>л</u> 2	-	1. < t
		2	<b>₽</b>	





figure 4.5 Loi angulaire - Teta



Les premiers calculs sont effectués avec un pas de temps dt = 0.002 s soit environ  $1/10^{10me}$  de la première période propre, avec un manipulateur discrétisé à l'aide de 5 éléments, et des coefficients  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  égaux à 0.5.



figure 4.8 Déformée transverse de l'extémité du manipulateur 600 points d'intégration - sans amortissement

Un second calcul est réalisé avec cette fois un incrément de temps égal à  $1/100^{10me}$  de la première période propre du système, afin de mettre en évidence les qualités de précision et de stabilité numérique offertes par l'algorithme utilisé pour la résolution des équations du mouvement.

La courbe représentant le déplacement du point extrême dans le repère lié au mouvement de corps rigide du manipulateur, ne laisse apparaître qu'une très faible différence quant à l'amplitude du phénomène vibratoire qui se superpose à un mouvement régulier du noeud, mouvement que nous ferons apparaître par la suite en effectuant un calcul fortement amorti.



figure 4.9 Déformée transverse de l'extémité du manipulateur 6000 points d'intégration - sans amortissement

Dans les tests suivants, nous essayons de fournir une première validation de la méthode employée pour modéliser les articulations intermédiaires dans une chaîne mécanique ouverte.

L'essai consiste à reprendre le môme manipulateur que fois en le décomposant en précédemment mais cette deux bras, formés chacun de 5 éléments de poutre. L'articulation centrale est considérée comme bloquée et la loi angulaire choisie pour l'articulation de début de chaîne est similaire à celle que nous avons déjà employée.



calculs effectués pour des incréments Les sont de temps **a** 1/10<sup>1</sup> dme et i/i00ième de la première période propre soit **Sgaux**  $\partial t = 0.002 s$  $\partial t = 0.0002 \, s$ . et Seuls les résultats donnés par ce dernier calcul sont présentés. En effet, 11s concordent exactement ceux présentés pour le manipulateur formé avec d'un seul bras et ne diffèrent de ceux effectués avec un incrément de temps plus important que dans la même mesure que pour le cas d'un seul membre.



figure 4.10 Déformée transverse de l'extémité du manipulateur 6000 points d'intégration - sans amortissement - 2 bras

résultats fournis gardent une bonne constance Les en amplitude et en phase lorsque l'on change le pas de temps, le nombre d'éléments et même si l'on utilise une articulation intermédiaire bloquée.

Avant d'aller plus loin dans la conclusion que peuvent nous permettre ces essais, il parraît intéressant de refaire un calcul en introduisant un amortissement numérique à l'aide des coefficients  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  (les deux valeurs choisies sont égales à 0.8)

Les résultats présentés sont :

- le couple d'entrainement calculé pour obtenir le mouvement

- le déplacement en y du point extrême du manipulateur

- un agrandissement de ce déplacement en début de mouvement

Ces trois courbes nous permettent de mettre en évidence 1 e mouvement obtenu lorsque l'on supprime le phénomène vibratoire, mouvement qui correspond en fait au déplacement moyen obtenu dans les configurations précédentes.

Après la présentation des ces résultats, nous tenterons de donner une explication sur la présence de cette "vibration".



figure 4.11 Couple Moteur - avec amortissement





page 83

4.10 Approche des résultats par la R.D.M.

Une méthode utilisée jusque maintenant pour obtenir une approximation du comportement de mécanismes déformables consiste à les étudier à l'aide de la R.D.M. après avoir élaboré un cas de chargement correspondant aux effets dynamiques.

Cette méthode donne des résultats admissibles lorsque l'on travaille à très basse vitesse mais par contre ne donne aucune indication sur les possibilités d'excitation de modes propres de la structure et sur l'amplitude des éventuels phénomènes vibratoires.

Dans le cas que nous venons d'étudier, nous pouvons approcher les efforts à l'aide de charges réparties de deux types

- charges constantes : ces charges correspondent au poids propre de la poutre.

La R.D.M. donne pour une poutre encastrée, une flèche en extrémité égale à

$$f = -\frac{q \, l^4}{8 \, \text{ET}}$$

q étant la valeur de la charge répartie

 $q = A \vee g$ 

soit ici

. |

 $f = -0.13113 \ 10^{-3} \ m$ 

- charge répartie linéairement le long de la poutre : ces charges correspondent à l'accélération angulaire fournie à la poutre lors de son mouvement.

Nous obtenons une flèche égale à

 $f = -\frac{q_m (11 \ 1^4)}{120 \ EI}$ 

qm correspond à la charge maximale en bout de poutre soit

 $q_{\rm m} = \frac{d^2 \Theta}{dt^2} \quad \mu \quad 1$ Dans notre cas  $\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \frac{4}{3} \pi^3$ f = -0.7601 10<sup>-4</sup> m Dans le test que nous avons présenté, la poutre est considérée comme encastrée au niveau de son articulation, initialement soumise au champ de gravité, ce qui lui donne une flèche statique, puis elle subit une accélération angulaire brusque afin de lui communiquer son mouvement.

Si l'on reprend la présentation de l'algorithme de résolution numérique du système d'équations différentielles, nous y avions décrit la réponse d'un système à un degré de liberté soumis à un effort échelon. Nous avions obtenu une oscillation autour de la valeur correspondant à la flèche statique.

Le cas étudié ici peut-être mis en parallèle à cette réponse à une excitation échelon : l'accélération angulaire fournie à t=0 est en effet une excitation échelon.

Nous obtenons bien, à l'instant initial, pour le point extrême de la poutre, la superposition d'une flèche statique et d'un phénomène périodique correpondant à l'échelon, d'amplitude due à la charge variant linéairement décrite ci-dessus et de période égale à la première période propre de la poutre.

La suppression de la vibration à l'aide de l'amortissement numérique nous donne exactement, pour t=0, la superposition des deux flèches prédites à l'aide de l'approche R.D.M.

#### 4.11 Conclusion

Les différents tests effectués à l'aide de l'élément de poutre nous permettent d'apprécier les qualités de l'algorithme SS22 utilisé pour la résolution des équations du mouvement : la précision et la stabilité numérique obtenues permettent de travailler avec des pas de temps relativement importants par rapport aux premières périodes propres du système mécanique étudié.

Pour ce qui est de l'élément proprement dit, l'approche du comportement que nous donnent les résultats concorde avec ce que l'on pouvait attendre [1.8]

- retard en début de mouvement
- rattrapage du mouvement de corps rigide
- dépassement de la position de corps rigide lors de la décélération
- oscillation autour de la verticale lors du blocage en fin de course.

De plus, nous avons pu mettre en évidence les possibilités d'excitation des modes propres de la structure lors du mouvement, ce qui correspond à une réalité rencontrée dans le mouvement des mécanismes [1.46]. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

# CINQUIEME PARTIE MISE EN FORME D'UN ELEMENT DE COQUE

# 5. i Introduction

Le but de l'étude est la simulation du comportement de manipulateurs déformables or, les robots qui apparaissent actuellement sur le marché vont vers une diminution de masse et de rigidité à travers un changement dans leur conception. Les différents éléments constitutifs de leur structure ne sont plus moulés mais formés de "poutres caissons". Ces caissons sont formés d'un assemblage de tôles pliées que nous avons à modéliser pour étudier le comportement du manipulateur.

La modélisation que nous devons introduire devra approcher le plus possible le comportement global de ces assemblages, c'est à dire que nous devrons tenir compte des effets dûs à la flexion et ceux dûs au comportement de membrane.

Nous utiliserons différentes hypothèses pour le comportement de l'élément élaboré.

- sa construction et les matériaux utilisés sont tels que les phénomènes de membrane (dans le plan de l'élément) et de flexion (transverses)sont découplés.

Cela nous permet de définir un élément dont le comportement sera la superposition d'un effet de membrane et d'un effet de flexion (plaque).

La partie flexion répondra aux hypothèses de Kirchoff :

- les contraintes normales au plan moyen sont négligeables par rapport aux autres composantes des contraintes.
- les pentes de la surface moyenne après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité.
- l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion due aux grands déplacements est négligeable.
- les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Cela revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.

Pour construire un élément qui réponde à ces hypothèses, nous pouvons superposer deux éléments : une plaque et une membrane [4.18]. Pour la partie classique de l'élément (matrice de masse, de rigidité, vecteur des effets de gravité), nous reprendrons la proposition de J.L. Batoz de superposer les éléments CST (membrane) et DKT (plaque).

### 5.2 Matrice de rigidité de l'élément DKT

L'élément DKT est un élément triangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces, basé sur la technique d'introduction des hypothèses de Kirchoff sous forme discrète.

Nous étudierons cet élément dans un repère qui lui est lié : le plan XY est le plan moyen de la plaque, l'axe Z est suivant la normale.

Dans ce repère, l'élément admet trois déplacements possibles une translation suivant Z et deux rotations autour de X et Y. Chaque point de l'élément aura donc 3 degrés de liberté w,  $\Theta_X$ ,  $\Theta_Y$ .



figure 5.1 Repérage local de l'élément DKT

L'élément sera défini à l'aide de trois noeuds.

L'énergie interne de déformation de l'élément, pour la flexion, s'exprime :

$$Ab \underbrace{ \underbrace{ \begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{D} \end{array}}_{\mathbf{T}} = \underbrace{ \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \end{array}}_{\mathbf{A}} \underbrace{ \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{array}}_{\mathbf{T}} = \underbrace{ \begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{D} \end{array}}_{\mathbf{T}} \\ \mathbf{T} \end{array}$$

où

A est l'aire de l'élément

 $[D_f]$  est la matrice correspondant au comportement élastique

 $\begin{bmatrix} D_{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & E & 0 \\ E^{1} & E^{2} & 0 \\ 0^{2} & 0^{3} & E_{4} \end{bmatrix}$   $E_{1} = E_{3} = E h^{3} / 12 (1-v^{2})$   $E_{2} = v E_{1}$   $E_{4} = \frac{1}{2} (1-v) E_{1}$  E : module d'young du matériau v : coefficient de poisson h : épaisseur de l'élément

$$\tilde{\underline{o}} = \begin{bmatrix} \beta \\ x, x \\ \beta \\ y, y \\ \beta \\ x, y \\ y, x \end{bmatrix}$$

,x et ,y en indice représentent les dérivées partielles repectivement par rapport à x et à y

 $\beta_X$  et  $\beta_Y$  représentent les rotations de la normale à la surface moyenne dans les plans XZ et YZ.



figure 5.2 Définition des angles  $\beta_X$  et  $\beta_y$ 

οū

Les hypothèses de Kirchoff nous amènent à écrire :

 $\beta_{\mathbf{X}} + \mathbf{w}_{, \mathbf{X}} = \mathbf{0}$ 

 $\beta_{y} + W_{,y} = 0$ 

en tout point du contour de l'élément ( la normale se déplace sans déformation).

Pour approcher de la manière la plus précise possible le comportement de l'élément, nous allons dans un premier temps utiliser une interpolation quadratique, soit une interpolation sur 6 noeuds.

Le passage à l'élément isoparamétrique nous permet d'exprimer  $U_f$  à partir de l'élément de référence associé.

 $U_{f} = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\tau} \frac{T}{[D_{f}]} \tilde{Q}(\varepsilon,\tau) d\varepsilon d\tau$ 

J étant le jacobien de la transformation de (x, y) en  $(\xi, \tau)$ .





Nous pouvons calculer  $\beta_X(\varepsilon,\tau)$  et  $\beta_Y(\varepsilon,\tau)$  en utilisant l'interpolation

 $\beta_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\substack{i=1}}^{6} N_{i} \beta_{\mathbf{X}i} \qquad \beta_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\substack{i=1}}^{6} N_{i} \beta_{\mathbf{Y}i}$ 

avec

$$N_{1} = 2 (1 - \epsilon - \tau) (\frac{1}{2} - \epsilon - \tau)$$

 $N_{2} = \epsilon (2\epsilon - 1)$   $N_{3} = \tau (2\tau - 1)$   $N_{4} = 4 \epsilon \tau$   $N_{5} = 4 \tau (1 - \epsilon - \tau)$   $N_{6} = 4 \epsilon (1 - \epsilon - \tau)$ 

Pour revenir à l'élément à trois noeuds que nous désirons construire, nous pouvons essayer d'exprimer  $\beta_X$  et  $\beta_Y$  aux points 4, 5 et 6 en fonction de leurs valeurs en 1, 2 et 3.

Notons



figure 5.4 Repères locaux sur l'élément DKT

# page 91

Nous considérons une variation cubique de w sur les côtés de l'élément

$$w_{, sK} = -\frac{3}{l_{ij}} (w_{i} - w_{j}) - \frac{1}{4} (w_{, s1} - w_{, sj})$$

et une variation linéaire en  $B_n$ 

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (\beta_{n1} + \beta_{nj}) = -\frac{1}{2} (w_{,n1} + w_{,nj})$$

Cela nous permet d'écrire  $\beta_X(\xi, \tau)$  et  $\beta_Y(\xi, \tau)$  en fonction de <u>u</u>, vecteur des degrés de liberté des noeuds 1, 2 et 3.

$$\underline{u} = (w_1, \Theta_{x1}, \Theta_{y1}, w_2, \Theta_{x2}, \Theta_{y2}, w_3, \Theta_{x3}, \Theta_{y3})$$
  
$$B_x(\epsilon, \tau) = \{ (H_{11}^x, H_{12}^x, H_{13}^x) \ 1 = 1, 3 \} \underline{u}$$
  
$$B_y(\epsilon, \tau) = \{ (H_{11}^y, H_{12}^y, H_{13}^y) \ 1 = 1, 3 \} \underline{u}$$

avec

 $H_{11} = 1.5 (a_k N_k - a_m N_m)$  $H_{12}^{x} = (b_{K} N_{K} + b_{m} N_{m})$  $H_{13}^{X} = N_{1} - c_{K} N_{K} - c_{m} N_{m}$  $H_{11}Y = 1.5 (d_K N_K - d_m N_m)$  $H_{12}Y = -N_1 + e_K N_K + e_m N_m$  $H_{13}Y = -H_{12}X$ i valant i, 2 ou 3 pour (m, k) valant respectivement (6, 5), (4,6) ou (5,4)  $a_{k} = -x_{1,1} / 1_{1,1}^{t}$  $b_{\rm K} = 3/4 x_{\rm ij} y_{\rm ij} / l_{\rm ij}^{\rm e}$  $c_{\rm K} = (\frac{y_{\rm i}}{x_{\rm i}} \frac{x_{\rm i}}{t_{\rm i}}^2 - \frac{y_{\rm i}}{t_{\rm i}} \frac{y_{\rm i}}{t_{\rm i}}^2) / \frac{1_{\rm i}}{t_{\rm i}}^2 d_{\rm K} = -\frac{y_{\rm i}}{t_{\rm i}} / \frac{1_{\rm i}}{t_{\rm i}}^2$  $e_{k} = (\frac{y_{i}}{y_{ij}}^{2} - \frac{y_{i}}{x_{ij}}^{2}) / l_{ij}^{2}$ k valant 4,5,6 pour (1, j) valant respectivement (2, 3),(3, 1) ou (1, 2)Nous pouvons maintenant calculer la valeur de <u>ö</u>.

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} [H^{\mathbf{X}}] \\ , \mathbf{x} \\ [H^{\mathbf{Y}}] \\ , \mathbf{y} \\ [H^{\mathbf{X}}] + [H^{\mathbf{Y}}] \end{bmatrix}$$

nous noterons cette dernière expression :

 $\bar{Q} = [B] \underline{u} \quad \text{avec}$   $[B] = \begin{bmatrix} j_{11} & [H^{X}] + j_{12} & [H^{X}] \\ j_{21} & [H^{Y}] + j_{22} & [H^{Y}] \\ j_{21} & [H^{Y}] + j_{22} & [H^{Y}] \\ j_{21} & [H^{Y}] + j_{22} & [H^{Y}] \end{bmatrix}$   $J_{11} = Y_{31}/2A \qquad J_{12} = Y_{12}/2A$   $J_{12} = -x_{31}/2A \qquad J_{22} = x_{12}/2A$   $det(J) = 2A = x_{31} & Y_{12} - x_{12} & Y_{31}$  L' forergie interne de déformation sera égale :  $U_{f} = \frac{y}{2} \quad \frac{Q}{2} \quad \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\gamma} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} det(J) & d\in d\tau \ Q \end{bmatrix}$ 

Nous avons donc pour la matrice de rigidité :

 $\begin{bmatrix} K \\ DKT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\tau & T \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \det(J) d\in d\tau$ 

Cette intégrale peut être calculée numériquement mais il en existe une formulation explicite [4.15] que nous présentons dans l'annexe 3.

5.3 Matrice de masse de l'élément et vecteur des sollicitations réparties de l'élément DKT

La matrice de masse sert à la détermination de l'énergie cinétique de l'élément, comme décrit dans l'annexe 2, elle est égale à :

$$[M] = \int_{A} \mu [N] T [N] h dA$$

µ : masse volumique du matériau employé

Pour élaborer cette matrice en fonction des noeuds choisis pour décrire le comportement de l'élément, nous pouvons utiliser une interpolation linéaire en w et négliger les inerties de rotation. Les tests ultérieurs confirmeront que cela suffit pour obtenir une précision correcte dans les calculs en dynamique.

$$\begin{aligned} & 3 \\ w(\varepsilon, \tau) = \sum N_i w_i \\ & i=i \end{aligned}$$

avec

ce qui donne pour [M] après intégration

	2								-
	0	0							
	<sup>-</sup> 0	0	0		Sì	meti	RIQUE	E	
	1	0	0	2					
$[M] = \mu h \frac{\pi}{12}$	0	0	0	0	0				
16	0	0	0	0	0	0			
	1	0	0	1	0	0	2		
	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pour le vecteur des sollicitations réparties, nous pouvons utiliser le même principe.

$$F = \int_{A}^{T} g \mu h dA$$

Le vecteur g est exprimé dans le repère lié à l'élément.

l

Les effets de membrane n'étant pas traités ici, nous pouvons écrire  $\underline{F}_g$  en fonction des degrés de liberté w,  $\Theta_x$  et  $\Theta_v$ .

$$\underline{F}_{g} = \frac{A}{3} g_{z} \mu h [1 0 0 1 0 0 1 0 0]$$

5.4 Elément CST

L'élément CST est utilisé pour traiter les effets de membrane. Sa formulation nous mène à la prise en compte des déplacements dans le plan de l'élément, déplacements que nous noterons t (suivant l'axe X) et u (suivant l'axe Y).

L'énergie de déformation interne est donnée par :

$$U_{m} = \frac{1}{2} \int_{A^{-}}^{T} [D] \Omega dA$$

avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} t \\ , x \\ u \\ , y \\ t + u \\ , y & , x \end{bmatrix}$$

$$[D_{m}] = \frac{E h}{1 - v^{2}} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - v^{2}) \end{bmatrix}$$

Nous considèrerons une variation linéaire de t et u sur l'élément, ce qui nous permettra d'obtenir une formulation explicite très simple.

 $\underline{\Omega} = [B_m] \underline{u}_m$  $\underline{u}_m = [t_1 u_1 t_2 u_2 t_3 u_3]^T$ 

et en reprenant les notations utilisées pour l'élément DKT

$$\begin{bmatrix} B \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{2.A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} K \\ CST \end{bmatrix} = \int_{A}^{T} \begin{bmatrix} D \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ m \end{bmatrix} dA$$

Tous les termes sous le signe intégrale sont constants et nous obtenons finalement :

$$[\mathbf{K}_{CST}] = \mathbf{A} [\mathbf{B}_{m}] [\mathbf{D}_{m}] [\mathbf{B}_{m}]$$

٨

De même, suivant t et u, le vecteur des sollicitations réparties sera donné par :

$$\frac{F_g}{3} = - \mu h \left[ g_X g_Y g_X g_Y g_X g_Y \right]$$

En reprenant l'interpolation linéaire, nous obtenons pour la matrice de masse :

	2					
	0	2	Sym	IETRI	QUE	
	1	0	2			
$[M] = \mu h \frac{A}{42}$	0	1	0	2		
12	1	0	1	0	2	
	0	1	0	1	0	2

5.5 Elément COQ

Après avoir décrit les éléments de flexion et de membrane, nous pouvons les "assembler" pour construire l'élément de coque. L'élément DKT porte sur 3 degrés de liberté par noeud, notés W,  $\Theta_{\rm X}$ ,  $\Theta_{\rm Y}$  et l'élément CST sur 2 degrés de liberté par noeud, notés t et u. L'élément coque que nous désirons construire porte sur 6 degrés de liberté par noeud, pour l'obtenir, nous pouvons "étendre" les matrices des deux éléments DKT et CST en plaçant de termes nuls dans les lignes et colonnes correspondant aux degrés non traités. Les matrices seront ensuite additionnées.

Par exemple, pour la matrice de rigidité de CST, nous rajoutons les lignes et colonnes nulles pour  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $\Theta_{X1}$ ,  $\Theta_{X2}$ ,  $\Theta_{X3}$ ,  $\Theta_{Y1}$ ,  $\Theta_{Y2}$ ,  $\Theta_{Y3}$ ,  $\Theta_{Z1}$ ,  $\Theta_{Z2}$ ,  $\Theta_{Z3}$ , pour obtenir un élément portant sur 18 degrés de liberté. Nous pouvons remarquer que le degré  $\Theta_z$  n'est repris ni par DKT ni par CST, il pourrait être supprimé mais cela n'est pas la méthode la plus couramment retenue [4.18]. Nous reprendrons l'idée qui consiste à ajouter une rigidité fictive faible sur ce degré de liberté. Cela se fera en prenant une matrice de rigidité supplémentaire :

 $[K\Theta] = \alpha E h A \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & -0.5 \\ sym. & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha = 1. \ 10^{-10}$ 

5.6 Expressions dans le repère lié au bras

Après avoir exprimé les matrices descriptives de l'élément coque dans le repère lié à l'élément, nous avons à les ramener dans le repère lié au bras auquel il appartient.

Soient X, Y et Z les axes liés à l'élément et  $X_b$ ,  $Y_b$ ,  $Z_b$  les axes liés au bras ; nous pouvons effectuer le changement de repère à l'aide de la matrice [R] définie par :

 $[X Y Z] = [R] [X_{b} Y_{b} Z_{b}]$ 

L'axe X est suivant la droite 12, son vecteur directeur est donné par :

 $\underline{X} = \underline{V}_{12} / \underline{1}_{12}$   $\underline{V}_{1j} : \text{ vecteur défini par les points i et j}$   $L' \text{ axe } Z \text{ est perpendiculaire à } \underline{V}_{12} \text{ et au plan } (\underline{V}_{12}, \underline{V}_{13}).$   $\underline{Z} = \underline{V}_{-12} \cdot \underline{V}_{-13} / (\| \underline{V}_{-12} \cdot \underline{V}_{-13} \|)$  L' axe Y est donné pour former un trièdre direct :  $\underline{Y} = \underline{Z} \cdot \underline{X}$ 

La matrice [R] est donnée par :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(X, X_{b}) & \cos(X, Y_{b}) & \cos(X, Z_{b}) \\ \cos(Y, X_{b}) & \cos(Y, Y_{b}) & \cos(Y, Z_{b}) \\ b & b & b \\ \cos(Z, X_{b}) & \cos(Z, Y_{b}) & \cos(Z, Z_{b}) \end{bmatrix}$$

Les cosinus directeurs sont obtenus directement lors du calcul de X, Y et Z par projection sur les axes liés au bras. Toutes les matrices de l'élément COQ peuvent être calculées dans le repère lié au bras à l'aide des relations :

 $[K_{\text{bras}}] = [T]^{T} [K_{\delta | \delta \text{ment}}] [T]$   $[M_{\text{bras}}] = [T]^{T} [M_{\delta | \delta \text{ment}}] [T]$   $\underline{F}_{g/\text{bras}} = [T]^{T} \underline{F}_{g/\delta | \delta \text{ment}}$   $[T] = \begin{bmatrix} [R] [0] [0] \\ [0] [R] [0] \\ [0] [R] \end{bmatrix}$ 

5.7 Partie dynamique de l'élément de coque.

La mise en place de la partie dynamique de l'élément COQ ne pose aucun problème particulier. Elle est obtenue par application directe de la formulation décrite lors de l'élaboration des équations du mouvement.

Les intégrales sont évaluées à l'aide de la méthode de Gauss décrite précédemment (§4.6) appliquée à un triangle. Les interpolations choisies sont linéaires et les points d'intégrations placés aux milieux des côtés du triangle.

 $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\gamma} \begin{array}{c} 3 \\ Y(\varepsilon, \gamma) \quad d\varepsilon \quad d\gamma = \Sigma \quad w \quad Y(\varepsilon, \gamma) \\ 0 \quad 1=1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$ 

avec

i	W	€	r
	1	1	1
1	1/6	1/2	1/2
2	1/6	0	1/2
3	1/6	1/2	0

5.8 Test - Vibrations libres

Comme pour l'élément de poutre, nous allons essayer d'obtenir une validation élémentaire de l'élément présenté. Cette validation se fera en étudiant le comportement d'un membre placé à l'horizontale, articulation bloquée, initialement non déformé et qui est laissé libre dans le champ de la pesanteur.
Les caractéristiques de la structure étudiée seront choisies de manière à pouvoir comparer les résultats avec ceux des calculs déjà effectués pour la poutre.

Le produit EI (module d'Young, inertie) doit être le même que pour la poutre. Pour pouvoir utiliser les éléments COQ, nous choisissons un plaque - de largeur

b = 0.2 m

- d'épaisseur

h = 0.006 m

L'inertie sera donc égale à

 $I_{77} = 0.36 \ 10^{-10} \ m^4$ 

et le module d'Young

 $E = 0.24305 \ 10^{14} \ N/m^2$ 

Pour obtenir la même masse, la longueur étant de i m, nous prendrons :

 $\nu = 7800 \text{ Kg/m}^3$ 

Quelques tests simples en statique, nous montre que l'élément triangulaire a des directions privilégiées. En effet, l'étude d'une structure symétrique avec des maillages symétrique et antisymétriques montre que la déformation obtenue dépend du sens donné au maillage le résultat le plus proche de la théorie provenant du maillage symétrique.

maillage antysymétrique A



maillage symétrique



figure 5.5A Différents maillages réguliers utilisables

maillage antisymétrique B



figure 5.5B Différents maillages réguliers utilisables

Nous obtenons les flèches suivantes :

Noeud	A	SYM.	В
16	-0. 12780E-3	-0. 12791E-3	-0. 12806E-3
17	-0. 12796E-3	-0. 12795E-3	-0. 12796E-3
18	-0. 12806E-3	-0. 12791E-3	-0. 12780E-3

Pour le reste de notre étude avec l'élément de plaque, nous reprendrons le maillage symétrique qui garde ses propriétés à la structure étudiée.

La plaque que nous étudions est maillée à l'aide de 18 noeuds, 20 éléments. Une analyse des premiers modes propres nous donne les résultats suivants :

mode	fréquence Hz	période S
1	54.4	0.0184
2	335.4	0. 0029
3	527.3	0. 0019

Les figures sur les pages suivantes représentent dans l'ordre, la structure non déformée, les trois premiers modes déterminés à l'aide du logiciel SAP, les résultats de l'étude du comportement de la plaque articulée obtenus à l'aide de notre logiciel. (figures 5.6 à 5.11)

L'intégration des équations du mouvement se fera avec un pas de calcul égal à 1/10<sup>1ème</sup> de la première période propre soit

 $\partial t = 0.002 s$ 

La première courbe de résultats donne les déplacements transverses du noeud 17, milieu de l'extrémité libre de la plaque.

Le premier mode propre se retrouve intégralement sur cette courbe où nous notons un mouvement vibratoire de période (T = 0.0184 s) autour de la flèche statique.

 $Fleche_{statigue} = -0.12795 \ 10^{-3} m$ 

La seconde courbe donne la rotation d'un noeud latéral de l'extrémité libre de la plaque. Nous pouvons noter une influence des premier et troisième modes propres de vibration (phénomène de battements). Une analyse de Fourier rapide (FFT) appliquée aux résultats du calcul vient confirmer le fait. Ce mode n'est bien visible que sur les noeuds situés sur le côté de la plaque car c'est un mode de torsion.

Nous pouvons remarquer que la courbe présente des pics. Cela est dù au pas de calcul relativement important que nous avons utilisé. Il est en effet de l'ordre de la période du troisième mode propre qui est excité ici, contrairement au cas de la poutre. La connaissance des modes propres excités sera donc importante pour le choix du pas de calcul.

Ces pics sont légèrement lissés avec l'utilisation d'un pas de calcul plus petit, cela provient de ce que l'intégration traite les modes propres supérieurs en plusieurs incréments.

### 5.9 Test : Mouvement de rotation

Afin de pouvoir faire un comparaison avec les simulations que nous avons effectuées pour le manipulateur modélisé à l'aide d'éléments de poutres, nous allons reprendre la même loi de mouvement.

Nous présentons les résultats d'un calcul effectué sans "amortissement" numérique soit avec ( $\Theta_1 = 0.5$  et  $\Theta_2 = 0.5$ ) puis ceux obtenus avec un amortissement ( $\Theta_1 = 1$ . et  $\Theta_2 = 1$ .).

Les courbes présentées donnent les déflexions au centre de l'extrémité libre de la plaque, les rotations d'un des noeuds latéraux de cette même extrémité puis enfin le couple d'entraînement.

Le couple d'entraînement est calculé en additionnant les

résidus de calcul (soit les efforts obtenus aux liaisons) pour les noeuds 1, 2 et 3.

Une dernière simulation a été effectuée avec cette plaque en forçant la nullité des "termes complémentaires de Coriolis" afin de montrer que dans le cas de mouvements plus ou moins lents, ces termes n'ont qu'une faible influence sur les résultats.



Innel Brister Blacker I ward rearies we gradient Blacker Black Brister (1995) (1995) Laile Barra Black Star Star Warther Brist forther call

figure 5.6 plaque déformée



figure 5.7 i<sub>er</sub> mode propre (SAP) f = 54.4 Hz



CHARLE BOLLENET & LUNDY & HEREE PARTIEL HERE & FREEKENEN- BELED Standartiger Stattarte, M LATER & Africa BELES OFTA- SAME ADALETING SOLLE FACTORS & TOB

figure 5.8 2nd mode propre f = 335.4 Hz





figure 5.9 3<sub>1ême</sub> mode propre f = 527.3 Hz





page 104



page 105







5.10 Test : mouvement de rotation avec une plaque plus flexible

allons reprendre la loi de prěcědent Nous mouvement appliquée à une plaque plus flexible.

 $E = .21 \ 10^{12} \ N/m^2$ 

h = 0.01 m

Les autres caractéristiques restent les mêmes.

Les résultats présentés correspondent à un calcul effectué avec  $(\Theta_1 = 0.5)$  et  $(\Theta_2 = 0.5)$ .

Nous pouvons remarquer l'influence de la rigidité et de 1a sur les résultats obtenus : masse de la structure employée l'amplitude de la vibration après blocage de l'articulation, la plaque étant verticale, est ici faible.



Mouvement non amorti

Nous représentons ci-dessous un agrandissement de la partie de la courbe obtenue après le blocage de l'articulation. Nous remarquons un léger phénomène de battement qui est dû ă l'influence des premiers modes de vibration et non au seul premier mode comme cela était le cas pour le test précédent.



lié au bras - plaque souple Mouvement non amorti - partie après blocage de l'articulation

## 5.11 Conclusion

Les tests que nous venons d'effectuer nous permettent de mettre en évidence le fait que les résultats obtenus ne sont pas directement liés au type d'élément utilisé. En effet, la comparaison des résultats obtenus avec les éléments de poutre et de coque concordent. La seconde remarque que nous pouvons faire, est que le choix de l'incrément de temps pour la résolution des équations du mouvement peut ne pas être simplement lié au premier mode propre de la structure étudiée mais aussi aux modes plus élevés qui sont susceptibles d'être excités.

Enfin, l'influence des termes gyroscopiques (complémentaires de Coriolis), que nous avions développés dans la mise en forme des équations du mouvement ne semble pas très évidente à partir des simulations présentées. Nous pouvons dire que ces termes peuvent être négligés, pour des mouvements relativement lents, sans que cela ne nuise pour la précision des résultats.

## SIXIEME PARTIE TESTS COMPARATIFS

6.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons présenter deux tests effectués sur des modèles simples.

Le premier test sera comparé à des résultats présentés dans la bibliographie par A. Trückenbrodt [1.39] et A. Barraco [1.8]. Il s'agit de la simulation du mouvement d'un bras manipulateur avec une charge en extrémité.

Le second test sera comparé avec un relevé effectué sur un membre simple. Il correspond à l'étude du comportement d'un pendule pesant flexible.

6.2 Bras manipulateur

La structure étudiée est composée d'une poutre, articulée à une de ses extrémités et portant une masse concentrée à l'autre.



axe de l'articulation : z masse M

figure 6.1 Repérage du bras manipulateur

Dans son article, A. Trückenbrodt qui est le premier à présenter des résultats sur ce bras, ne donne que quelques indications sur les caractéristiques mécaniques du système étudié.

masse concentrée : M = 10 Kg

poutre en aluminium

longueur : l = 1 m module d'Young : E = 6.7  $10^{10}$  N/m<sup>2</sup> coefficient de Poisson : v = 0.34 masse volumique :  $\mu$  = 2.7  $10^3$  Kg/m<sup>3</sup> masse de la poutre : m = 0.7 Kg Il donne de plus une approximation de la première fréquence propre de flexion du système, ce qui nous a permis de déduire les caractéristiques sur la section du mobile.

 $f_1 \approx 4.06 \text{ Hz}$ L'aire A est donnée par A = m /  $\mu$ A = 2.5926 10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup>

L'inertie  $I_{ZZ}$  est obtenue à l'aide de la première fréquence propre :

$$f = \frac{1}{2. \pi} \left| \frac{3. E. I}{1^3 (M + 0.23 m)} \right|^{\frac{1}{2}}$$

d'où

 $I_{77} = 3.2897 \ 10^{-8} \ m^4$ 

et les caractéristiques de la section sont données par

b = 0.03902 m

h = 0.00664 m

La loi de mouvement utilisée n'est pas donnée explicitement mais sous forme de courbes représentant la variable articulaire et sa dérivée première, ce qui a nécessité l'utilisation d'une approximation de la loi de commande qui se rapproche le plus possible des courbes présentées.

A. Barraco après avoir déduit comme nous des caractéristiques mécaniques de la poutre à employer à présenté une loi de mouvement polynomiale :

θ exprimé en degrés.

pour  $0 \le t \le 1 \quad \Theta(t) = 70 \ t - 95 \ t^2 + 55 \ t^3$ pour  $1 < t \le 5 \quad \Theta(t) = 30 + 180 \ t' - 180 \ t'^2 + 60 \ t'^3$ avec t' = (t - 1) / 4.

Nous remarquons que les vitesses sont continues mais que les accélérations ne le sont pas. De plus, l'accélération à (t = 0) a une valeur de -3.316 rd/s<sup>2</sup>.



Fig. 4 Prequency response (B1, B2, D3: bending modes; T1: torsional mode)







figure 6.3 Simulation et mesures effectuée par A. Trückenbrodt





figure 6.4 Loi angulaire présentée par A. Barraco

Une première simulation avec les données précédentes nous donne le couple moteur représenté sur la figure suivante :



figure 6.5 Couple moteur fonction du temps obtenu avec la loi angulaire proposée par A. Barraco

Nous notons une excitation du premier mode propre de vibration dès l'instant initial et une seconde excitation à (t = 1 s). Ces instants correspondent exactement aux discontinuités de l'accélération angulaire, ce qui se traduit, sur notre modèle, comme nous l'avons déjà vu, par un choc et donc par une excitation des modes propres.

La simulation présentée par A. Trückenbrodt ne présente pas ces chocs et nous avons donc essayé d'obtenir, par prolongement dans les t négatifs et par lissage de l'accélération, une loi de commande continue qui garde le même profil.

La loi recherchée doit partir avec une vitesse et une accélération angulaire nulles. Elle doit nous permettre d'obtenir une vitesse initiale de l'ordre de 70  $\cdot$ /s.

Pour (t = 5 s), nous devons obtenir un angle de  $90 \cdot$  et une vitesse angulaire nulle.

Nous proposons la loi suivante :

 $\Theta = a t^{6} + b t^{5} + c t^{4} + d t^{3} + e t^{2} + f t + g$ 

	-5 § t < 0	0 1 t < 1.1	1.1 1 t < 5
а	3.5632894/6	0. 0	0. 232126
b	51.3800125/5	0. 0	-4. 56370
с	236. 7666754/4	-28. 9352	35.2175
d	298. 6113/3	99. 5371	-133.693
e	-216.666667/2	-108. 333	251.224
f	70.0	70.0	-184.782
g	0. 0	0. 0	68.6386

Les coefficients a, b, c, d, e, f, g sont présentés dans le tableau suivant.

tableau donnant les coefficients a, b, c, d, e, f, g de la loi angulaire proposée, sur les différentes phases du mouvement.

Les courbes présentées sur les figures suivantes donnent la loi de commande utilisée (vitesse et accélération), représentée entre 0.s et 5.s, les couples moteurs obtenus avec et sans amortissement numérique ( $\Theta_1 = \Theta_2 = 0.5$ ;  $\Theta_1 = \Theta_2 = 0.9$ )

La simulation a été effectuée avec un incrément de temps de l'ordre de 1/20<sup>1ème</sup> de la première période propre (dt = 0.0125 s)

La stucture est entièrement discrétisée à l'aide de poutres, la masse concentrée étant obtenue à l'aide d'un petit élément de poutre de forte densité (1.54556  $10^6 \text{ Kg/m}^3$ ; 5 mm de long)



figure 6.7 Vitesse et accélération angulaire pour la loi de commande utilisée, fonctions du temps





figure 6.8 Couple moteur obtenu en fonction du temps, sans et avec amortissement numérique.





figure 6.9 Déplacement transversal de l'extrémité du manipulateur, dans le repére lié au bras, en fonction du temps.

Nous obtenons, avec le test comportant un amortissement numérique, des résultats qui se rapprochent de ceux donnés par A. Trückenbrodt et pouvons avancer quelques hypothèses pour expliquer les différences :

- les caractéristiques des systèmes mécaniques utilisés dans les deux cas ne sont pas rigoureusement les mêmes.
- la loi de commande n'est pas la même : la comparaison des deux simulations que nous avons effectuées avec des commandes différentes montre que cela peut changer considérablement les résultats obtenus.
- dans son article, A. Trückenbrodt présentait une méthode de commande de manipulateurs flexibles et avait intégré une chaine d'asservissement du mouvement pour limiter les vibrations, contrôle que nous n'avons pas dans notre modèle.

Ces explications étant données, nous pouvons remarquer que les résultats obtenus suivent d'assez près le couple qu'aurait donné le mouvement de corps rigide, obtenu par la formule :

 $C = J d^2 \Theta/dt^2$ 

- J Stant le moment d'inertie du mobile
- J = 10.233 Kg. m<sup>2</sup>

La courbe qui donne le déplacement transversal de la masse d'extrémité par rapport à la position de corps rigide dans le repère lié au bras, nous donne un aperçu de la déformation de la poutre. Nous distinguons plusieurs phases :

- freinage, la dérivée seconde de la variable articulaire est négative, la charge est en avance sur le mouvement de corps rigide.
- accélération , la dérivée seconde de la variable articulaire est cette fois positive et la charge prend du retard sur la position de corps rigide.

#### 6.3 Pendule flexible

Les résultats de la dernière simulation présentée ont été comparés à des mesures réalisées sur un système mécanique réel.

La structure employée est du même type que celle du test que nous avons présenté dans l'exemple précédent mais avec des caractéristiques différentes et le mouvement choisi correspond à celui d'un pendule laissé libre dans le champ de la pesanteur.

Sur le système mécanique réel, nous avons pu mesurer l'accélération absolue de l'extrémité du pendule à l'aide de la chaîne de mesure suivante :



figure 6.10 Chaîne de mesure utilisée pour l'étude du pendule flexible

La masse concentrée en bout de la poutre correspond à l'accéléromètre.

```
Nous avons les caractéristiques suivantes :

poutre en acier :

longueur : l = 0.835 m

section : A = 0.15 10^{-4} m<sup>2</sup>

inertie : I_{ZZ} = 1.5 10^{-12} m<sup>4</sup>

épaisseur : h = 0.00110 m

largeur : b = 0.0136 m

module d'Young : E = 0.21 10^{12} N/m<sup>2</sup>

masse volumique : \mu = 7800 Kg/m<sup>3</sup>

accéléromètre :

masse : M = 0.031 Kg
```

Le relevé de l'accélération au cours du mouvement d'oscillation donne la courbe présentée sur la figure 6.11.

Nous pouvons y voir la superposition de deux phénomènes périodiques :

- le premier, de période plus importante correspond à l'oscillation du pendule.
- le second de période plus petite correspond à un mode de vibration propre du pendule.

La mesure des périodes des deux mouvements donne respectivement des valeurs de l'ordre de 1.7 s et 0.22 s, la précision sur ces mesures ne pouvant guère prétendre à une très grande précision au vu de la courbe.

Une étude théorique de la période du pendule pesant correspondant donne une valeur du même ordre et une recherche des modes propres du pendule, la rotation autour de l'axe z de l'articulation étant laissée libre, donne une première période propre à T = 0.224 s. Cela correspond aux mesures effectuées.

La simulation doit correspondre à un mouvement de faible amplitude autour de l'axe z, avec un couple nul. Notre logiciel ne permettant pas dans sa phase actuelle de rentrer comme loi de commande l'effort moteur, nous avons essayé de nous rapprocher le plus possible des conditions réelles du mouvement.

L'étude du mouvement réel donne comme loi angulaire une superposition de deux lois sinusoïdales, nous avons choisi une commande du même type avec un léger tatonnement dans le choix des amplitudes, le relevé exact n'étant pas très simple sur le système réel bien que l'on puisse obtenir une première approximation sur le tracé de l'accélération absolue.

La loi utilisée est la suivante :

 $\Theta = \frac{\pi}{180} \left[ 0.035 \cos \left( \frac{2.\pi}{0.224} t \right) + 3. \cos \left( \frac{2.\pi}{1.695} t \right) \right]$ 

partie perturbation partie oscillation

L'accélération absolue de l'extrémité de la poutre a été calculée en superposant le mouvement dans le repère lié au pendule au mouvement de corps rigide donné par la loi angulaire et en tenant compte des termes complémentaires de Coriolis.

Nous présentons dans les pages suivantes le relevé expérimental de l'accélération en extrémité de la poutre, cette même accélération obtenue par simulation et enfin, le couple moteur résiduel obtenu lors de la simulation.

# figure 6.11 Relevé expérimental de l'accélération absolue de l'extémité du pendule en fonction du temps.

t de X ...... ..... .... en en la final de Hit ::: 0 .... 5 se frequence 0 4 2 3 ..... <u>}</u> < N A A A A > ------A Control of the second of the ..... ------11 **FBU** 5 V LILL ..... ..... ..... 

figure 6.12 Courbe de simulation de l'accélération absolue de l'extrémité du pendule en fonction du temps.







La première conclusion que nous pouvons faire sur cette simulation concerne le couple moteur résiduel. Bien que n'étant pas exactement nul, il garde une valeur très faible, bien en deçà de la valeur qui serait nécessaire pour provoquer le mouvement avec une loi angulaire différente (la valeur maximale obtenue étant dans ce cas supérieure à 0.30 m.N). Nous obtenons ici une valeur environ 100 fois plus faible. La loi choisie suit donc de très près le mouvement réél et peut donc être considérée comme acceptable.

La seconde conclusion concerne les valeurs obtenues pour l'accélération. Nous obtenons comme pour le relevé expérimental une superposition de deux phénomènes périodiques. Les grandeurs obtenues, tant pour la période que pour l'amplitude correspondent assez bien au relevé expérimental. Nous obtenons, lors de la simulation, la même superposition du mouvement d'oscillation et d'excitation du premier mode propre du pendule.

### 6.4 Conclusion

Les deux cas tests que nous venons de présenter fournissent une première validation de la modélisation élaborée. Par contre, nous avons pu remarquer que la comparaison avec des relevés expérimentaux n'était pas très aisée, du fait même du type de loi de commande choisie. Des développements ultérieurs et un passage à la commande par effort moteur devrait simplifier les choses et permettre d'aller plus loin.

page 127

### CONCLUSION

L'objectif du travail présenté est une contribution à l'étude du comportement dynamique de mécanismes déformables. En particulier, nous nous sommes dirigés vers la modélisation de manipulateurs en chaîne ouverte.

Nous avons choisi de prendre dans un premier temps une loi de commande en position pour notre étude. Celle-ci permet de traiter la classe des manipulateurs qui répondent à une commande en position. En effet, à partir de la commande calculée pour un comportement désiré, nous pourrons dire quel sera le comportement réel. Le modèle présenté peut-être complèté pour traiter les commandes basées sur l'introduction des efforts aux articulations.

Après avoir fait un bilan des travaux déjà effectués, à notre connaissance, nous avons développé un formalisme qui, associé à la méthode des éléments finis, nous a permis d'élaborer les équations du mouvement d'une chaîne mécanique ouverte, articulée et formée de membres non rigides.

Notre modélisation reste dans le domaine des petites déformations élastiques et prend en compte tous les effets dûs au mouvement. Ces effets sont introduits sous forme de termes gyroscopiques et de rigidité dynamique.

Nous avons ensuite présenté une méthode qui permet d'intégrer les articulations dans le modèle en confondant les points de contact entre deux membres du manipulateur.

La partie suivante a porté sur la résolution des équations du mouvement présentées au préalable.

Ces équations sont du second ordre en fonction du temps pour les degrés de liberté. Un schéma d'intégration de type hermitien a été mis en oeuvre. A chaque instant, les inconnues du problème sont les valeurs des degrés de liberté et leurs dérivées première et seconde. Les équations du mouvement sont vérifiées en moyenne sur chaque intervalle de temps. Ce schéma est basé sur un calcul des résidus pondérés des équations du mouvement sur les intervalles d'étude. L'algorithme présenté a l'avantage d'offrir une bonne stabilité et une bonne précision, même avec des pas de temps atteignant i/10<sup>ième</sup> de la première période propre du mécanisme étudié.

La suite de l'étude a porté sur l'élaboration d'éléments finis qui permettent la modélisation de manipulateurs. Nous avons présenté un élément de pourre pour des problèmes plans et un élément de coque pour des problèmes tridimensionnels.

Chaque cas a été accompagné de tests simples permettant une première vérification des éléments. Un test commun sur le comportement des deux éléments a permis de montrer la similitude de leur réponse lors d'un mouvement de rotation d'un membre simple.

La dernière partie du travail présenté a consisté en une étude de deux cas de mouvement simple et en la comparaison des résultats obtenus avec une mesure sur un mécanisme réel, pour le cas d'un pendule pesant flexible ou avec des résultats présentés en bibliographie, pour le mouvement d'un bras manipulateur chargé en extrémité.

Malgré l'utilisation d'une loi de commande en position qui rend la comparaison avec des résultats expérimentaux difficile à mettre en oeuvre, la concordance des mesures et des résultats calculés est tout à fait satisfaisante.

Lors du traitement des différents exemples, nous avons pu remarquer que l'intégration des termes complémentaires de Coriolis dans les équations du mouvement ne se justifiait pas pour des vitesses de déplacement relativement faibles. Ceux-ci peuvent avantageusement être négligés dans le but de réduire les temps de calcul.

Au vu des résultats présentés, nous pouvons conclure que cette étude constitue une bonne étape dans la modélisation du comportement dynamique de mécanismes déformables.

Il nous semble évident que l'étape suivante doit consister en l'introduction de lois de commande par efforts imposés aux articulations. Cela devrait permettre de traiter des mécanismes plus généraux.

L'introduction de ce type de commande devrait nous amener à prendre en compte le comportement des articulations (frottement, jeux) afin de décrire les mécanismes de la manière la plus précise possible. Cette partie nécessite l'introduction d'une modélisation la plus fidèle possible des articulations.

## OPERATIONS SUR LES MATRICES DE TRANSFORMATION

## A1.1) Dérivation A1.1.1) Dérivée première

$$\frac{d[j_{j-1}f]}{dt} = \frac{\partial[j_{j-1}f]}{\partial \Theta_j} \frac{d\Theta_j}{dt}$$

 $\frac{\partial \begin{bmatrix} j & f \end{bmatrix}}{j-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ j & 0 & \cos\theta & \sin\alpha & -\sin\theta & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\alpha & -\sin\theta & \cos\alpha & 0 \\ 0 & -\cos\theta & \sin\alpha & & \sin\theta & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix}$ 

d'où

$$\frac{\partial [j \ f]}{\frac{1-1}{j}} = [j \ f] = [j \ f]$$

que nous noterons ([1.14])

.

$$\frac{\partial [J_{j-1}f]}{\partial \Theta_{j}} = [J_{j-1}f] [Q]$$

Nous pouvons maintenant étudier la dérivée première de [ $j_{if}$ ] d[ $j_{if}$ ] j  $\partial$ [ $j_{if}$ ] d $\Theta_{K}$ 

$$\frac{dt}{dt} = \frac{2}{k = i + i} \frac{d\theta_k}{dt}$$

En utilisant les expressions précédentes, nous avons

pour k 
$$(i)$$
  
pour i  $\langle k (j)$   
 $\frac{\partial [j_i f]}{\partial \Theta_k} = [N_i f] [Q] [j_k f]$ 

pour 
$$k > i$$
  $\frac{\partial [j_i f]}{\partial \Theta_k} = [0]$ 

Pour le cas ( i < k  $\leq$  j ) nous pouvons introduire une multiplication intermédiaire :

$$\frac{\partial [J_{i}f]}{\partial \Theta_{K}} = [K_{i}f] [J_{K}f] [J_{K}f]^{-1} [Q] [J_{K}f]$$

$$\frac{\partial [J_{i}f]}{\partial \Theta_{K}} = [J_{i}f] ([J_{K}f]^{-1} [Q] [J_{K}f])$$

que nous noterons ([1.1], [1.4])

$$\frac{\partial [j_{if}]}{\partial \Theta_{K}} = [j_{if}] [j_{K}D]$$

Nous avons donc

$$\frac{d[j_{i}f]}{dt} = [j_{i}f] (\sum_{K=i+i} [j_{K}D] \frac{d\Theta_{K}}{dt})$$

A1.1.2) Dérivée seconde

La dérivée seconde peut s'obtenir en retenant le même schéma de calcul.

$$\frac{d^{2} \begin{bmatrix} j_{1} \neq j \end{bmatrix}}{dt^{2}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} j & \frac{j}{\Sigma} & \frac{\partial \begin{bmatrix} j_{1} \neq j \end{bmatrix}}{\partial \Theta_{K}} & \frac{d\Theta_{K}}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^{2} \begin{bmatrix} j_{1} \neq j \end{bmatrix}}{dt^{2}} = \frac{j}{\Sigma} \begin{pmatrix} j & \frac{\partial P}{\Sigma} & \frac{\partial P}{2} \begin{bmatrix} j_{1} \neq j \end{bmatrix}}{\partial \Theta_{K} & \partial \Theta_{I}} \end{pmatrix} \frac{d\Theta_{K}}{dt} & \frac{d\Theta_{I}}{dt} + \frac{d\Theta_{I}}$$

pour i < 1 ! k  

$$\frac{\partial^{i} [ j_{i}f ]}{\partial \Theta_{I} \partial \Theta_{K}} = [ l_{i}f ] [ Q ] [ k_{I}f ] [ Q ] [ j_{K}f ]$$
pour k < 1 ! j  

$$\frac{\partial^{i} [ j_{i}f ]}{\partial \Theta_{I} \partial \Theta_{K}} = [ k_{i}f ] [ Q ] [ l_{K}f ] [ Q ] [ j_{I}f ]$$
En notant m = min(K, 1)  
n = max(K, 1)  
en utilisant le théorème de Schwarz sur l'or

et en utilisant le théorème de Schwarz sur l'ordre des dérivations partielles, nous obtenons

 $\frac{\partial^{i} [j_{j f}]}{\partial \Theta_{1} \partial \Theta_{K}} = [m_{j f}] [Q] [n_{m f}] [Q] [j_{n f}]$ 

puis en introduisant les matrices [  $x_{yD}$  ]

$$\frac{\partial^{2} [j_{i}f]}{\partial \Theta_{1} \partial \Theta_{k}} = [j_{i}f] [j_{m}D] [j_{n}D]$$

đ'où

$$\frac{d^{i} \begin{bmatrix} j_{1} \neq j \end{bmatrix}}{dt^{i}} = \sum_{K=1+1}^{j} \left( \sum_{l=1+1}^{j} \left( \begin{bmatrix} j_{1} \neq l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{m} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{n} D \end{bmatrix} \frac{d\Theta_{K}}{dt} \frac{d\Theta_{l}}{dt} \right) + \left[ \int_{1}^{j} \frac{d}{t} \right] \left[ \int_{K} D \end{bmatrix} \frac{d^{i} \Theta_{K}}{dt^{i}} \right]$$

$$\frac{d^{2} \begin{bmatrix} j_{1}f \end{bmatrix}}{dt^{2}} = \begin{bmatrix} j_{1}f \end{bmatrix} \sum_{K=1+1}^{j} (\sum_{K=1+1}^{j} (\begin{bmatrix} j_{m}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{n}D \end{bmatrix} \frac{d\Theta_{K}}{dt} \frac{d\Theta_{1}}{dt}) + \begin{bmatrix} j_{K}D \end{bmatrix} \frac{d^{2}\Theta_{K}}{dt^{2}}$$

m = min(k, 1) n = max(k, 1)

Annexe i

A1.2) Inversion

Comme nous l'avons vu lors de la dérivation de la matrice  $4x4 [j_{i}f]$ , nous aurons à utiliser sa matrice inverse.

Recherchons la matrice [g] qui répond au problème

 $[g] [j_{if}] = [j_{if}] [g] = [I]$ 

En utilisant la décomposition en sous-matrices, nous obtenons :

En égalant le produit à la matrice identité, nous avons le système

 $\begin{bmatrix} a + b^{T} j v = i \\ - i_{-} \\ c + [d] j v = [0 0 0]^{T} \\ - 1_{-} \\ b^{T} [j_{R}] = [0 0 0] \\ - 1 \\ [d] [j_{i}R] = [I] \end{bmatrix}$ 

solt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

$$\underline{\mathbf{c}} = -\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \mathbf{j}_1 \underline{\mathbf{y}}$$

$$\underline{\mathbf{b}}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{1}$$

A1.3) Remarques

 $\frac{\partial^{2} [j_{i}f]}{\partial \Theta_{1} \partial \Theta_{K}} = \frac{\partial}{\partial \Theta_{1}} ( [j_{i}f] [j_{K}D])$ 

-----

$$\frac{\partial e_{1} \partial \Theta_{K}}{\partial e_{1} \partial \Theta_{K}} = \frac{\partial [J_{1}f]}{\partial \Theta_{1}} [J_{K}D] + [J_{1}f] \frac{\partial e_{1}}{\partial \Theta_{1}} + \frac{\partial [J_{K}D]}{\partial \Theta_{1}} + \frac{\partial [J_{K}D]}{\partial$$

đ' où

$$\frac{\partial [J_{K}f]}{\partial \Theta_{1}} = [J_{m}D] [J_{n}D] - [J_{1}D] [J_{K}D]$$

$$m = \min(K, 1) \quad n = \max(K, 1)$$

soit

pour 
$$i < 1 \le k \le j$$
  $\frac{\partial [J_{K^{D}}]}{\partial \Theta_{1}} = [0]$ 

pour i < k ½ l ½ j

$$\frac{\partial [j_{KD}]}{\partial \Theta_{1}} = [j_{KD}] [j_{1D}] - [j_{1D}] [j_{KD}]$$
page 1

ELABORATION D'UN FORME SIMPLIFIEE DE L'ENERGIE CINETIQUE

Dans cette annexe, nous allons essayer d'établir une forme simple de l'énergie cinétique, forme qui nous servira par la suite dans l'élaboration des équations du mouvement.

Reprenons l'énergie cinétique telle qu'elle a été décrite dans le paragraphe 2.1.

$$T_{i} = \frac{1}{K} \int \begin{bmatrix} i & j & i & i \\ E & [i & D] & i & r \\ R = i & K & i - & K \\ bras & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & T & T \\ I & j & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & f \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & f \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & i \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & i \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & i \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & i \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j & i \\ 0 & f \end{bmatrix} dm$$

Nous pouvons décomposer  $T_i$  en plusieurs termes :

$$T_{11} = \frac{1}{2} \int_{\text{bras } 1}^{T} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & \vdots \\ \Sigma & [^{1}D] & \Theta_{K} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & f \end{bmatrix}^{T} \int_{\text{bras } 1}^{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & f \\ 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0$$

$$T_{12} = \int_{D}^{T} \prod_{i=1}^{T} [L]^{T} \begin{bmatrix} i \\ \Sigma \\ K=1 \end{bmatrix} H_{K} \begin{bmatrix} i \\ K \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \\ \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \\ \begin{bmatrix} i \\ K=1 \end{bmatrix} H_{K} \\ H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \\ H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \\ H_{K} \\ H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \\ H_{K} \\ H_{K} \\ H_{K} \end{bmatrix} H_{K} \\ H_{K} \\$$

$$T_{i3} = \int_{\substack{i=1\\ j = 1}}^{T} T_{i} T_{i} T_{j} T_{i} T_{j} T_{i} T_{j} T_{i} T_{j} T_{k=1} T_{k} T$$

$$T_{14} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T & T & T \\ a & [N] & [L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Sigma & [i \\ K = 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Sigma & [i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ K = 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ K = 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0$$

$$T_{15} = \begin{bmatrix} T & T & T & T \\ a & [N] & [L] & [^{i} f] & [^{i} f] & \begin{bmatrix} i & . \\ \Sigma & [^{i} D] & \Theta \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & . \\ K=1 & K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & [N] & a & dm \\ -1 & -1 & dm \end{bmatrix}$$

 $T_{16} = \frac{1}{2} \int_{\text{Dras i}}^{T} T_{16} T_{16}$ 

Etudions le produit  $[{}^{i}{}_{0}f]^{T}$   $[{}^{i}{}_{0}f]$ ; il est de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{T} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}^{\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathbf{$$

soit

$$\begin{bmatrix} i & j \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} a & j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec  $a = i + i_0 \underline{v}^T i_0 \underline{v}$ 

Etudions la forme de  $[{}^{i}_{K}D]$ .

$$[{}^{1}_{K}D] = [{}^{1}_{K}f]^{-1} [Q] [{}^{1}_{K}f]$$

soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \\ -\begin{bmatrix} 1 & R \end{bmatrix}^{T} & 1 & V \\ K & & & \\ \hline & & & \\ & & & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & \\ 1 & V \\ \hline & & \\ K \\ \hline & & \\ K \\ \hline \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i & D \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ 0 & & & & \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & \\ 1 & & & & \\ K \end{bmatrix}$$

 $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{b} & \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} & \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} & \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{3}\mathbf{x}\mathbf{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{M} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf$ 

Suite à la description des ces formes de matrices, nous voyons que :

- une post-multiplication par  $[{}^{1}_{K}D]$  donne un résultat indépendant de la première colonne de la première matrice car la première ligne de  $[{}^{1}_{K}D]$  est nulle
- une pré-multiplication par [<sup>i</sup><sub>k</sub>D]<sup>T</sup> donne un résultat indépendant de la première ligne de la seconde matrice car la première colonne de [<sup>i</sup><sub>k</sub>D]<sup>T</sup> est nulle.
- de même, une pré ou une post-multiplication par [L]<sup>T</sup> et [L] respectivement présenteront le même type de propriétés.

D' où

 $\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{0}f \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{0}f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{0}f \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{0}f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{0}f \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{0}f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} i_{K}D \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3x3} \end{bmatrix}$ 

Cela nous permet de simplifier les expressions des termes constitutifs de  $T_1$ , en sortant les vecteurs <u>a</u><sub>1</sub> et <u>a</u><sub>1</sub> des intégrales.

$$T_{11} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T & I & I & T & . \\ I & T & \begin{bmatrix} I & I & T & . \\ \Sigma & \Sigma & \begin{bmatrix} I & D \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & D \end{bmatrix} & \Theta & \Theta \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & . \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & I & K \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & I & K \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & I & K \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & I & K \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & I & K \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & T & I & K \\ I = I & K & J & K & J \end{bmatrix}$$

page 3

page 4

$$T_{12} = a_{-1}^{T} \int_{Dras i}^{T} [L_{K1}^{i} L_{L1}^{j}] \left[ \frac{i}{L} \frac{i}{L} \frac{i}{L} \left[ \frac{i}{L} D \right]^{T} \left[ \frac{i}{L} D \right]^{j} \frac{i}{L} D \right] \frac{i}{R} \frac{i}{e_{j}} \right]^{i} \frac{1}{1-a} dm$$

$$T_{13} = A_{-1}^{T} \int_{Dras i}^{T} [L_{K1}^{j}] \left[ \frac{i}{L} \frac{i}{L} \left[ \frac{i}{L} D \right]^{j} \frac{i}{e_{k}} \right]^{i} \frac{1}{1-a} dm$$

$$T_{14} = \frac{i}{A} \int_{Dras i}^{T} \int_{Dras i}^{T} [L_{K1}^{j}] \left[ \frac{i}{L} \frac{i}{L} \frac{i}{L} D \right]^{j} \left[ \frac{i}{D} \frac{i}{e_{k}} \frac{i}{e_{j}} \right] [L] [N] dm = a_{-1}$$

$$T_{15} = A_{-1}^{T} \int_{Dras i}^{T} [L_{K1}^{j}] \left[ \frac{i}{L} \frac{i}{L} \left[ \frac{i}{L} D \right]^{j} \frac{i}{e_{k}} \frac{i}{e_{j}} \right] [L] [N] dm = a_{-1}$$

$$T_{15} = A_{-1}^{T} \int_{Dras i}^{T} [D_{T}^{j}] \left[ \frac{i}{L} \frac{i}{L} \left[ \frac{i}{L} D \right]^{j} \frac{i}{e_{k}} \frac{i}{e_{j}} \right] [L] [N] dm = a_{-1}$$

$$T_{16} = \frac{i}{A} \int_{Dras i}^{T} [N] dm = A_{-1}$$

$$Or, d'après l'annexe 2 pages 2 et 3,$$

$$[L]^{T} [i_{K}D]^{T} [L] = - [L]^{T} [i_{K}D] [L]$$
et
$$[L]^{T} [i_{K}D]^{T} [i_{j}D] [L] = - [L]^{T} [i_{K}D] [i_{j}D] [L]$$

$$d'ou$$

$$T_{1i} = + \frac{i}{A} \int_{Dras i}^{1} \frac{i}{L-a} \left[ \frac{i}{L} \frac{i}{L} \frac{i}{L} \left[ \frac{i}{L} D \right]^{T} [i_{j}D] \frac{i}{e_{k}} \frac{i}{e_{j}} \right]^{1} \frac{i}{L-a} dm$$

$$T = + a \begin{bmatrix} T & T & T & i & i & T \\ [N] & [L] & \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma & [i & D] & [i & D] & \Theta \\ K = 1 & j = 1 & K & j & K & j \end{bmatrix}$$
  
bras i i a dm

$$T = - \frac{T}{4} \begin{bmatrix} T & T & i & i \\ N & [L] & \sum_{k=1}^{T} D & [i ] & 0 \\ K = 1 & j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & N \\ K & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix}$$

d'où l'utilisation possible d'une forme simplifiée en prenant des notations matricielles :

$$T_{i1} = O_{Ti}$$

$$T_{i2} = \underline{a}_{i} \quad \underline{F}_{T1i}$$

$$T_{i3} = \underline{a}_{i} \quad \underline{F}_{T2i}$$

$$T_{i4} = \frac{M}{a_{i}} \quad \underline{F}_{T2i}$$

$$T_{i5} = \underline{a}_{i} \quad [K_{Ti}] \quad \underline{a}_{i}$$

$$T_{i6} = \frac{M}{a_{i}} \quad [M_{i}] \quad \underline{a}_{i}$$

soit

T T T T T T $T_{i} = O_{Ti} + \underline{a}_{i} \underline{F}_{Tii} + \underline{a}_{i} \underline{F}_{T2i} + \frac{1}{2} \underline{a}_{i} [K_{Ti}] \underline{a}_{i} + \underline{a}_{i} [C_{Ti}] \underline{a}_{i} +$ T $K \underline{a}_{i} [M_{i}] \underline{a}_{i}$ 

page i

### EXPRESSION EXPLICITE DE LA MATRICE DE RIGIDITE DE L'ELEMENT DET

La matrice de rigidité de l'élément DKT peut s'exprimer dans le repère local lié au plan de l'élément sous la forme isoparamétrique suivante :

$$\begin{bmatrix} K \\ DKT \end{bmatrix} = 2. A \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-\tau} \begin{bmatrix} T \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} d\epsilon d\tau$$

avec

A aire de l'élément

$$\begin{bmatrix} D \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & E & 0 \\ E^{1} & E^{2} & 0 \\ 0^{2} & 0^{3} & E \\ & & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & E & E \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & E^{3} / (1 - v^{2}) \\ E & E & E^{2} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & E & E^{3} \\ E & E^{2} & 1 \\ & & E^{2} & 1 \end{bmatrix}$$

h épaisseur de l'élément

E, v module d'Young et coefficient de Poisson du matériau utilisé

Le repère local choisi a son centre au point i, sa direction X est mise suivant la droite 12 et Y choisie pour avoir un trièdre direct.

Cela permet d'avoir :

 $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ 

[B] est tiré des coordonnées des noeuds de l'élément et de matrices d'interpolation [4.14] (cf §5.2).

$$[B] = \frac{1}{2.A} \begin{bmatrix} y_{3} [H_{x}] \\ -x_{3} [H_{y}] + x_{2} [H_{y}] \\ -x_{3} [H_{x}] + x_{2} [H_{x}] + y_{3} [H_{y}] \end{bmatrix}$$

On peut montrer [4.15] que [B] peut se mettre sous la forme d'un produit de matrices dont une est indépendante de  $\epsilon$  et  $\tau$ , [L] et  $[\alpha]$ .

 $[1] = [1-\epsilon-\tau \quad \epsilon \quad \tau]$ 

$$[B] = \frac{1}{2.A} \begin{bmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{bmatrix} [\alpha]$$

ou encore :

$$[B] = \frac{1}{2.A} [L] [\alpha]$$

 $[\alpha]$  est indépendante de  $\varepsilon$  et  $\tau.$  Ses coefficients sont donnés dans le tableau suivant :

$\begin{array}{rclcrcl} a_{21} &= -y_3p_6 & a_{22} &= 0 & a_{23} &= 2y_3 \\ a_{24} &= y_3p_6 & a_{25} &= 0 & a_{26} &= 4y_3 \\ a_{27} &= 0 & a_{28} &= 0 & a_{29} &= 0 \\ \end{array}$ $\begin{array}{rclcrcl} a_{31} &= y_3p_5 & a_{32} &= -y_3q_5 & a_{33} &= y_3(2-r_5) \\ a_{34} &= y_3p_4 & a_{35} &= y_3q_4 & a_{36} &= y_3(r_4-2) \\ a_{37} &= -y_3(p_4+p_5) & a_{38} &= y_3(q_4-q_5) & a_{39} &= y_3(r_4-r_5) \\ \end{array}$ $\begin{array}{rclcrcl} a_{41} &= -x_2t_5 & a_{42} &= x_{23}+x_2r_5 & a_{43} &= -x_2q_5 \\ a_{44} &= 0 & a_{45} &= x_3 & a_{46} &= 0 \\ a_{47} &= x_2t_5 & a_{48} &= x_2(r_5-1) & a_{49} &= -x_2q_5 \\ \end{array}$ $\begin{array}{rclcrcl} a_{51} &= 0 & a_{52} &= x_{23} & a_{53} &= 0 \\ a_{54} &= x_2t_4 & a_{56} &= x_2(r_4-1) & a_{59} &= -x_2q_4 \\ a_{57} &= -x_2t_4 & a_{58} &= x_2(r_4-1) & a_{59} &= -x_2q_4 \\ \end{array}$ $\begin{array}{rclcrcl} a_{61} &= x_{23}t_5 & a_{62} &= x_{23}(1-r_5) & a_{63} &= x_{23}q_5 \\ a_{64} &= -x_3t_4 & a_{68} &= -x_{23}r_5-x_3r_4-x2 & a_{69} &= x_3q_4 \\ a_{67} &= -x_23t_5+x_3t_4 & a_{68} &= -x_{23}r_5-x_3r_4-x2 & a_{69} &= x_3q_4 \\ a_{67} &= -x_23t_5 & a_{72} &= x_2q_5+y_3 & a_{73} &= -x_23t_2r_5 \\ a_{71} &= -x_3p_6-x_2p_5 & a_{72} &= x_2q_5+y_3 & a_{73} &= -x_23t_2r_5 \\ a_{81} &= -x_23p_6 & a_{82} &= y_3 & a_{83} &= 2x_{23} \\ a_{84} &= x_{23}p_6+x_2P_4 & a_{88} &= x_2q_4 & a_{89} &= (r_4-2)x_2 \\ a_{91} &= x_{23}p_5+y_3t_5 & a_{92} &= -x_{23}q_5+(1-r_5)y_3 & a_{93} &= (2-r_5)x_23+y_3q_5 \\ a_{94} &= -x_3p_4+y_3t_4 & a_{98} &= -x_{23}q_5+x_3q_4 & a_{99} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{93} &= (2-r_5)x_23+y_3q_5 \\ a_{97} &= -x_23p_5+x_3p_4 & a_{98} &= -x_{23}q_5+x_3q_4 & a_{99} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{93} &= (2-r_6)x_23+y_3q_5 \\ a_{97} &= -x_23p_5+x_3p_4 & a_{98} &= -x_{23}q_5+x_3q_4 & a_{99} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{94} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{94} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{94} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{94} &= -x_{23}r_5-x_3r_4 \\ &= (t_4+t_5)y_3 & (t_4-r_5)y_3 & a_{94} & a_{95} &= -x_{23$	α <sub>11</sub> α <sub>14</sub> α <sub>17</sub>	= Y3P6 = -Y3P6 = 0	$   \alpha_{12} = 0    \alpha_{15} = 0    \alpha_{18} = 0 $	$   \alpha_{13} = -4y_3    \alpha_{16} = -2y_3    \alpha_{19} = 0 $
$a_{31} = y_{3}p_{5}$ $a_{32} = -y_{3}q_{5}$ $a_{33} = y_{3}(2-r_{5})$ $a_{34} = y_{3}p_{4}$ $a_{35} = y_{3}q_{4}$ $a_{36} = y_{3}(r_{4}-2)$ $a_{37} = -y_{3}(p_{4}+p_{5})$ $a_{38} = y_{3}(q_{4}-q_{5})$ $a_{39} = y_{3}(r_{4}-r_{5})$ $a_{41} = -x_{2}t_{5}$ $a_{42} = x_{23}+x_{2}r_{5}$ $a_{43} = -x_{2}q_{5}$ $a_{44} = 0$ $a_{45} = x_{3}$ $a_{46} = 0$ $a_{47} = x_{2}t_{5}$ $a_{48} = x_{2}(r_{5}-1)$ $a_{49} = -x_{2}q_{5}$ $a_{54} = x_{2}t_{4}$ $a_{55} = x_{3}+x_{2}r_{4}$ $a_{56} = -x_{2}q_{4}$ $a_{57} = -x_{2}t_{4}$ $a_{58} = x_{2}(r_{4}-1)$ $a_{59} = -x_{2}q_{4}$ $a_{64} = -x_{3}t_{4}$ $a_{65} = x_{3}(1-r_{5})$ $a_{63} = x_{2}3q_{5}$ $a_{64} = -x_{3}t_{4}$ $a_{68} = -x_{2}3r_{5} - x_{3}r_{4} - x2$ $a_{69} = x_{3}q_{4} + x_{2}3q_{5}$ $a_{71} = -x_{3}p_{6} - x_{2}p_{5}$ $a_{72} = x_{2}q_{5} + y_{3}$ $a_{73} = -x_{2}x_{4}$ $a_{64} = x_{2}3p_{6} - x_{2}p_{5}$ $a_{75} = -y_{3}$ $a_{76} = 2x_{3}$ $a_{77} = x_{2}p_{5}$ $a_{76} = 2x_{3}$ $a_{79} = (r_{5}-2)x_{2}$ $a_{84} = x_{2}3p_{6} + x_{2}p_{4}$ $a_{86} = -4x_{3}x_{2}r_{4}$ $a_{86} = -4x_{3}x_{2}r_{4}$ $a_{87} = -x_{2}p_{4}$ $a_{88} = x_{2}q_{4}$ $a_{89} = (r_{4}-2)x_{2}$ $a_{91} = x_{2}3p_{5}+y_{3}t_{5}$ $a_{92} = -x_{2}3q_{5}+(1-r_{5})y_{3}$ $a_{93} = (2-r_{5})x_{2}+y_{3}q_{5}$ $a_{94} = -x_{3}p_{4}+y_{3}t_{4}$ $a_{98} = -x_{2}3q_{5}-x_{3}q_{4}$ $a_{99} = (-r_{4})x_{3}-y_{3}q_{4}$ $a_{97} = -x_{2}p_{4}$ $a_{88} = x_{2}q_{4}$ $a_{89} = (r_{4}-2)x_{2}$ $a_{94} = -x_{3}p_$	α21 α24 α27	=-Y3P6 = Y3P6 = 0	$   \alpha_{22} = 0   \alpha_{25} = 0   \alpha_{28} = 0 $	α <sub>23</sub> = 2y <sub>3</sub> α <sub>26</sub> = 4y <sub>3</sub> α <sub>29</sub> = 0
$\begin{array}{rcl} a_{41} & = -x_2 t_5 & a_{42} & = x_2 3 + x_2 r_5 & a_{43} & = -x_2 q_5 \\ a_{44} & = 0 & a_{45} & = x_3 & a_{46} & = 0 \\ a_{47} & = x_2 t_5 & a_{48} & = x_2 (r_5 - 1) & a_{49} & = -x_2 q_5 \\ \hline a_{51} & = 0 & a_{52} & = x_{23} & a_{53} & = 0 \\ a_{54} & = x_2 t_4 & a_{55} & = x_3 + x_2 r_4 & a_{56} & = -x_2 q_4 \\ a_{57} & = -x_2 t_4 & a_{58} & = x_2 (r_4 - 1) & a_{59} & = -x_2 q_4 \\ \hline a_{61} & = x_{23} t_5 & a_{62} & = x_{23} (1 - r_5) & a_{63} & = x_{23} q_5 \\ a_{64} & = -x_3 t_4 & a_{65} & = x_3 (1 - r_4) & a_{66} & = x_3 q_4 \\ a_{67} & = -x_2 3 t_5 + x_3 t_4 & a_{68} & = -x_2 3 r_5 - x_3 r_4 - x2 \\ a_{67} & = -x_2 3 t_5 + x_3 t_4 & a_{68} & = -x_2 3 r_5 - x_3 r_4 - x2 \\ a_{67} & = -x_2 3 t_5 + x_3 t_4 & a_{68} & = -x_2 3 r_5 - x_3 r_4 - x2 \\ a_{71} & = -x_3 p_6 - x_2 p_5 & a_{72} & = x_2 q_5 + y_3 & a_{76} & = 2 x_3 \\ a_{77} & = x_2 p_6 & a_{82} & = y_3 & a_{76} & = 2 x_3 \\ a_{84} & = x_2 3 p_6 + x_2 p_4 & a_{85} & = -y_3 + x_2 q_4 & a_{86} & = -4 x_3 + x_2 r_4 \\ a_{87} & = -x_2 p_4 & a_{88} & = x_2 q_4 & a_{89} & = (r_4 - 2) x_2 \\ \hline a_{91} & = x_2 3 p_6 + y_3 t_5 & a_{92} & = -x_2 3 q_5 + (1 - r_5) y_3 & a_{93} & = (2 - r_5) x_2 + y_3 q_5 \\ a_{94} & = -x_3 p_4 + y_3 t_4 & a_{95} & = (r_4 - 1) y_3 - x_3 q_4 & a_{96} & = (2 - r_4) x_3 - y_3 q_4 \\ a_{97} & = -x_2 3 p_5 + x_3 p_4 & a_{98} & = -x_2 3 q_5 - x_3 q_4 & a_{99} & = -x_2 3 r_5 - x_3 r_4 \\ & -(t_4 + t_5) y_3 & +(r_4 - r_5) y_3 & +4 x_2 + (q_5 - q_4) y_3 \\ avec \\ x_{1,1} & = x_{1,1} - x_{1,1} & y_{1,1} = y_{1,1} - y_{1,1} & 1 + t^2 & = x_{1,1}t^2 + y_{1,1}t^2 \\ \end{array}$	α31	= Y3P5	α32 =-Y395	α <sub>33</sub> = y <sub>3</sub> (2-r <sub>5</sub> )
	α34	= Y3P4	α35 = Y394	α <sub>36</sub> = y <sub>3</sub> (r <sub>4</sub> -2)
	α37	=-Y3(P4+P5)	α38 = Y3(94-95)	α <sub>39</sub> = y <sub>3</sub> (r <sub>4</sub> -r <sub>5</sub> )
$a_{51} = 0$ $a_{52} = x_{23}$ $a_{53} = 0$ $a_{54} = x_{24}$ $a_{55} = x_{3} + x_{2}r_{4}$ $a_{56} = -x_{2}q_{4}$ $a_{57} = -x_{24}$ $a_{58} = x_{2}(r_{4}-1)$ $a_{59} = -x_{2}q_{4}$ $a_{61} = x_{23}t_{5}$ $a_{62} = x_{23}(1-r_{5})$ $a_{63} = x_{23}q_{5}$ $a_{64} = -x_{34}$ $a_{65} = x_{3}(1-r_{4})$ $a_{66} = x_{3}q_{4}$ $a_{67} = -x_{23}t_{5} + x_{3}t_{4}$ $a_{68} = -x_{23}r_{5} - x_{3}r_{4} - x2$ $a_{69} = x_{3}q_{4} + x_{23}q_{5}$ $a_{71} = -x_{3}p_{6} - x_{2}p_{5}$ $a_{72} = x_{2}q_{5} + y_{3}$ $a_{73} = -x_{2}3 + x_{2}r_{5}$ $a_{74} = x_{3}p_{6}$ $a_{75} = -y_{3}$ $a_{76} = 2x_{3}$ $a_{77} = x_{2}p_{5}$ $a_{78} = x_{2}q_{5}$ $a_{79} = (r_{5}-2)x_{2}$ $a_{81} = -x_{2}3p_{6}$ $a_{82} = y_{3}$ $a_{83} = 2x_{23}$ $a_{84} = x_{2}3p_{6} + x_{2}p_{4}$ $a_{88} = x_{2}q_{4}$ $a_{89} = (r_{4}-2)x_{2}$ $a_{91} = x_{2}3p_{5} + y_{3}t_{5}$ $a_{92} = -x_{2}3q_{5} + (1-r_{5})y_{3}$ $a_{93} = (2-r_{5})x_{2}3 + y_{3}q_{5}$ $a_{97} = -x_{2}3p_{5} + x_{3}p_{4}$ $a_{98} = -x_{2}3q_{5} - x_{3}q_{4}$ $a_{99} = -x_{2}3r_{5} - x_{3}r_{4}$ $a_{97} = -x_{2}3p_{5} + x_{3}p_{4}$ $a_{98} = -x_{2}3q_{5} - x_{3}q_{4}$ $a_{99} = -x_{2}3r_{5} - x_{3}r_{4}$ $a_{14}t^{2} = x_{1} + t_{5})y_{3}$ $a_{14}t^{2} = x_{1} + t_{5} + y_{4}t^{2}$	α41	$= -x_{2}t_{5}$	α <sub>42</sub> = x <sub>23</sub> +x <sub>2</sub> r <sub>5</sub>	α43 = -X295
	α44	= 0	α <sub>45</sub> = x <sub>3</sub>	α46 = 0
	α47	= $x_{2}t_{5}$	α <sub>48</sub> = x <sub>2</sub> (r <sub>5</sub> -1)	α49 = -X295
$a_{61} = x_{23}t_5$ $a_{62} = x_{23}(1-r_5)$ $a_{63} = x_{23}q_5$ $a_{64} = -x_{3}t_4$ $a_{65} = x_{3}(1-r_4)$ $a_{66} = x_{3}q_4$ $a_{67} = -x_{23}t_5+x_3t_4$ $a_{68} = -x_{23}r_5-x_3r_4-x^2$ $a_{69} = x_{3}q_4+x_{23}q_5$ $a_{71} = -x_{3}p_6-x_2p_5$ $a_{72} = x_2q_5+y_3$ $a_{73} = -x_{23}+x_2r_5$ $a_{77} = x_2p_5$ $a_{75} = -y_3$ $a_{76} = 2x_3$ $a_{84} = -x_{23}p_6$ $a_{82} = y_3$ $a_{83} = 2x_{23}$ $a_{84} = x_{23}p_{6+x2}p_4$ $a_{85} = -y_3+x_2q_4$ $a_{86} = -4x_3+x_2r_4$ $a_{87} = -x_2p_4$ $a_{88} = x_2q_4$ $a_{99} = (r_4-2)x_2$ $a_{91} = x_{23}p_5+y_3t_5$ $a_{92} = -x_{23}q_5+(1-r_5)y_3$ $a_{93} = (2-r_5)x_{23}+y_3q_5$ $a_{97} = -x_{23}p_5+x_3p_4$ $a_{98} = -x_{23}q_5-x_3q_4$ $a_{99} = -x_{23}r_5-x_3r_4$ $a_{97} = -x_{23}p_5+x_3p_4$ $a_{98} = -x_{23}q_5-x_3q_4$ $a_{99} = -x_{23}r_5-x_3r_4$ $a_{1+1}t^{t} = x_{1-}t^{t} + y_{1-}t^{t}$ $a_{1+1}t^{t} = x_{1+}t^{t} + y_{1+}t^{t}$	α <sub>51</sub>	= 0	α <sub>52</sub> = x <sub>23</sub>	α <sub>53</sub> = 0
	α <sub>54</sub>	= x <sub>2</sub> t <sub>4</sub>	α <sub>55</sub> = x <sub>3</sub> +x <sub>2</sub> r <sub>4</sub>	α <sub>56</sub> = -x2q4
	α <sub>57</sub>	=-x <sub>2</sub> t <sub>4</sub>	α <sub>58</sub> = x <sub>2</sub> (r <sub>4</sub> -1)	α <sub>59</sub> = -x2q4
$\begin{array}{rcl} \alpha 71 &= -x_{3}p_{6} - x_{2}p_{5} & \alpha 72 &= x_{2}q_{5} + y_{3} & \alpha 73 &= -x_{2}3 + x_{2}r_{5} \\ \alpha 74 &= x_{3}p_{6} & \alpha 75 &= -y_{3} & \alpha 76 &= 2x_{3} \\ \alpha 77 &= x_{2}p_{5} & \alpha 78 &= x_{2}q_{5} & \alpha 79 &= (r_{5} - 2)x_{2} \\ \end{array}$ $\begin{array}{rcl} \alpha 81 &= -x_{2}3p_{6} & \alpha 82 &= y_{3} & \alpha 83 &= 2x_{2}3 \\ \alpha 84 &= x_{2}3p_{6} + x_{2}p_{4} & \alpha 85 &= -y_{3} + x_{2}q_{4} & \alpha 86 &= -4x_{3} + x_{2}r_{4} \\ \alpha 87 &= -x_{2}p_{4} & \alpha 88 &= x_{2}q_{4} & \alpha 89 &= (r_{4} - 2)x_{2} \\ \end{array}$ $\begin{array}{rcl} \alpha 91 &= x_{2}3p_{5} + y_{3}t_{5} & \alpha 92 &= -x_{2}3q_{5} + (1 - r_{5})y_{3} & \alpha 93 &= (2 - r_{5})x_{2}3 + y_{3}q_{5} \\ \alpha 94 &= -x_{3}p_{4} + y_{3}t_{4} & \alpha 95 &= (r_{4} - 1)y_{3} - x_{3}q_{4} & \alpha 96 &= (2 - r_{4})x_{3} - y_{3}q_{4} \\ \alpha 97 &= -x_{2}3p_{5} + x_{3}p_{4} & \alpha 98 &= -x_{2}3q_{5} - x_{3}q_{4} & \alpha 99 &= -x_{2}3r_{5} - x_{3}r_{4} \\ & -(t_{4} + t_{5})y_{3} & & +(r_{4} - r_{5})y_{3} & & +4x_{2} + (q_{5} - q_{4})y_{3} \\ \end{array}$ $\begin{array}{rcl} avec \\ x_{1,1} &= x_{1} &= x_{1} & & y_{1,1} &= y_{1} &= y_{1} & & y_{1} & & \\ \end{array}$	α <sub>61</sub>	= x23t5	α <sub>62</sub> = x <sub>23</sub> (1-r <sub>5</sub> )	α63 = X2395
	α <sub>64</sub>	=-x3t4	α <sub>65</sub> = x <sub>3</sub> (1-r <sub>4</sub> )	α66 = X394
	α <sub>67</sub>	=-x23t5+x3t4	α <sub>68</sub> =-x <sub>23</sub> r <sub>5</sub> -x <sub>3</sub> r <sub>4</sub> -x2	α69 = X394+X2395
$\begin{array}{llllllllllllllllllllllllllllllllllll$	α <sub>71</sub>	=-X3P6-X2P5	α <sub>72</sub> = x <sub>2</sub> q <sub>5</sub> +y <sub>3</sub>	α73 =-X23+X2r5
	α <sub>74</sub>	= X3P6	α <sub>75</sub> =-y <sub>3</sub>	α76 = 2X3
	α <sub>77</sub>	= X2P5	α <sub>78</sub> = x <sub>2</sub> q <sub>5</sub>	α79 = (r5-2)X2
$\begin{array}{rcl} \alpha g_{1} &=& x_{2} 3 p_{5} + y_{3} t_{5} \\ \alpha g_{4} &=& -x_{3} p_{4} + y_{3} t_{4} \\ \alpha g_{7} &=& -x_{2} 3 p_{5} + x_{3} p_{4} \\ &=& (t_{4} + t_{5}) y_{3} \end{array}$ $\begin{array}{rcl} \alpha g_{2} &=& -x_{2} 3 q_{5} + (1 - r_{5}) y_{3} \\ \alpha g_{5} &=& (r_{4} - 1) y_{3} - x_{3} q_{4} \\ \alpha g_{5} &=& (r_{4} - 1) y_{3} - x_{3} q_{4} \\ \alpha g_{6} &=& (2 - r_{4}) x_{3} - y_{3} q_{4} \\ \alpha g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{3} r_{4} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=& -x_{2} 3 r_{5} - x_{5} r_{5} \\ a g_{9} &=$	α <sub>81</sub>	=-X23P6	α <sub>82</sub> = У3	α <sub>83</sub> = 2x <sub>23</sub>
	α <sub>84</sub>	= X23P6+X2P4	α <sub>85</sub> =-У3+Х294	α <sub>86</sub> = -4x3+x2r4
	α <sub>87</sub>	=-X2P4	α <sub>88</sub> = Х294	α <sub>89</sub> = (r4-2)x2
avec $x_{1,1} = x_1 - x_1$ $y_{1,1} = y_1 - y_1$ $1_{1,1^2} = x_{1,1^2} + y_{1,1^2}$	α91 α94 α97	$= x_{23}p_{5}+y_{3}t_{5}$ =-x_{3}p_{4}+y_{3}t_{4} =-x_{23}p_{5}+x_{3}p_{4} -(t_{4}+t_{5})y_{3}	$\begin{array}{rcl} \alpha_{92} &=& -x_{23}q_{5} + (1 - r_{5}) y_{3} \\ \alpha_{95} &=& (r_{4} - 1) y_{3} - x_{3}q_{4} \\ \alpha_{98} &=& -x_{23}q_{5} - x_{3}q_{4} \\ && + (r_{4} - r_{5}) y_{3} \end{array}$	$\begin{array}{rcl} \alpha_{93} &=& (2-r_5) \times 23 + \gamma_3 q_5 \\ \alpha_{96} &=& (2-r_4) \times 3 - \gamma_3 q_4 \\ \alpha_{99} &=& - \times 23 r_5 - \times 3 r_4 \\ && + 4 \times 2 + (q_5 - q_4) \gamma_3 \end{array}$
	avec Xiii	C = X₁ - X₁	$y_{11} = y_1 = y_1$	$1_{11} = x_{11} + y_{11}$

 $P_{K} = -6 x_{ij}/l_{ij}^{2} t_{K} = -6 y_{ij}/l_{ij}^{2} q_{K} = 3 x_{ij}y_{ij}/l_{ij}^{2}$   $r_{K} = 3y_{ij}^{2}/l_{ij}^{2}$   $k = 4,5,6 \quad \text{pour (i, j) valant repectivement (2,3), (3,i), (1,2).}$ 

Grâce à cette nouvelle forme, on peut donner une nouvelle expression de  $[K_{\rm DKT}]$ 

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{2.\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{d} \mathbf{\xi} \mathbf{d} \mathbf{\tau} \quad [\alpha]$$

L'intégrale double qui reste peut être évaluée directement. En la notant [DL], nous avons

$$[DL] = \frac{1}{24.} \begin{bmatrix} E_1[R] & E_2[R] & [0] \\ E_2[R] & E_3[R] & [0] \\ [0] & [0] & E_4[R] \end{bmatrix}$$

avec

$$[R] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

r i

La forme explicite ainsi obtenue peut se programmer très facilement sans avoir à faire d'intégration numérique, ce qui limite les opérations à effectuer et donc le temps de calcul.

page 1

# STABILITE ET PRECISION DE L'ALGORITHME DE RESOLUTION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Cette annexe fait intervenir les références bibliographiques [3.9] à [3.14]

A4.1) Préliminaires à l'étude de stabilité et de précision

Nous avons à résoudre le système :

[M] = + [C] = + [K] = -F = 0

Le choix de l'algorithme d'intégration de ces équations différentielles est lié aux concepts de stabilité et de précision. En effet, une stabilité dite inconditionnelle et une bonne précision obtenue avec des incréments de temps relativement importants nous permettront de justifier le choix du schéma d'intégration.

Pour étudier ces deux critères, nous allons nous intéresser au comportement de l'algorithme pour l'intégration d'un système dont on peut découpler les équations par décomposition modale. [4.2]

modes propres du système non amorti sont donnés par la Les résolution de :

 $[K] \breve{Q} = W^{t} [M] \breve{Q}$ 

avec

w' valeur propre du système non amorti vecteur propre associé à w<sup>t</sup>

En effectuant le changement de variables généralisées suivant

<u>u = [Ø]a</u>

nous pouvons mettre le système sous la forme

 $\underline{\mathbf{u}}$  + [D]  $\underline{\mathbf{u}}$  + [ $\Omega^{2}$ ]  $\underline{\mathbf{u}}$  =  $\underline{\mathbf{R}}$ 

avec

[ § ] matrice formée par juxtaposition des vecteurs propres  $\begin{bmatrix} \overline{Q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$ 

 $\begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^{r} \end{bmatrix}$ 

I D ] matrice diagonale  $diag(2, w_i \mu_i)$  associée ã l'amortissement pour découpler les équations.

 $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{\phi} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \mathbf{F}$ 

ü + 2. w µ ū + w<sup>2</sup> u = r

Par variation des paramètres µ et w, nous pourrons examiner le comportement global du système.

A4.2) Stabilité de l'algorithme SS22

Le schéma d'intégration SS22 transforme l'équation en

 $(1 + 2. w\mu \partial t \Theta_1 + \frac{\partial t^2}{2} w^2 \Theta_2) \alpha_1^{(2)} = \Theta_1 r_{1+1} + (1 - \Theta_1) r_1$ - 2. wµ ūi - w<sup>t</sup>  $(u_1 + \partial t \Theta_1 \tilde{u}_1)$ 

 $u_{1+1} = u_1 + \partial t \tilde{u}_1 + \frac{\partial t^2}{2} \alpha_1^{(2)}$ 

 $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + \partial t \alpha_i$ <sup>(2)</sup>

L'étude de stabilité peut se faire en ne considérant que l'équation homogène, soit avec un second membre nul.

Notons a = 1 + 2. where  $\Theta_1 + \frac{\partial t^2}{2}$  we  $\Theta_2$ 

En utilisant la première égalité de l'algorithme pour éliminer  $\alpha_i^{(2)}$  dans les deux suivantes, nous obtenons

 $a u_{i+1} = a u_i + a \partial t \tilde{u}_i + \frac{\partial t}{2} [-2. w \mu \tilde{u}_i - w! (u_1 + \partial t \Theta_1 \tilde{u}_i)]$ 

 $a \tilde{u}_{i+1} = a \tilde{u}_i + \partial t [-2. w \mu \tilde{u}_i - w^{\prime} (u_i + \partial t \Theta_1 \tilde{u}_i)]$ 

page 3

Ces deux égalités peuvent se mettre sous une forme  
matricielle.  

$$\underline{x}_{1+1} = [A]^{-1} [B] \underline{x}_{1} = [C] \underline{x}_{1}$$
avec  

$$\underline{x}_{1} = [u_{1} \ \bar{u}_{1}]^{T}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot w_{\mu} \ \partial t \ \Theta_{1} + \cdot 5 \ \partial t^{\mu} \ w^{\mu} \ \partial t^{\mu} \ (\Theta_{2} - 1) \\ & \partial t + w_{\mu} \ \partial t^{\mu} \ (2\Theta_{1} - 1) + \cdot 5 \ w^{\mu} \ \partial t^{3} \ (\Theta_{2} - \Theta_{1}) \\ & & - w^{\mu} \ \partial t \\ & & 1 + 2 \cdot w_{\mu} \ \partial t \ (\Theta_{1} - 1) + \cdot 5 \ w^{\mu} \ \partial t^{\mu} \ (\Theta_{2} - 2\Theta_{1}) \end{bmatrix}$$

Nous utilisons la décomposition de Jordan pour la matrice [C].

 $[C] = [P] [J] [P]^{-1}$ 

d'où

 $\underline{\mathbf{x}}_{i+1} = [P] [J] [P]^{-1} \underline{\mathbf{x}}_i$ 

et par récurrence

 $\underline{x}_{i+i} = [P] [J]^{i+1} [P]^{-1} \underline{x}_0$ 

Une condition suffisante pour obtenir la stabilité de l'algorithme est que le rayon spectral de [C] soit toujours strictement inférieur à 1 [3.14], le rayon spectral étant la la plus grande valeur propre en valeur absolue. L'étude de la stabilité passe donc par la détermination des valeurs propres de la matrice [C]. Son équation caractéristique peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma^{2} + \frac{2 + 2 (2\Theta_{1} - 1)\tau \mu + \tau^{2} (\Theta_{2} - \Theta_{1} - \frac{1}{2})}{a} \Gamma$$

$$+ \frac{1 + 2\tau\mu (2\Theta_{1} - 1) + \tau^{2} (\Theta_{2} - \Theta_{1} - \frac{1}{2}) + 4\tau^{2}\mu^{2} \Theta_{1}(\Theta_{1} - 1)}{a^{2}}$$

$$+ \frac{\tau^{3}\mu (\Theta_{2} - \Theta_{1}) (2\Theta_{1} - 1) + \frac{1}{2}\tau^{4} \Theta_{2} (\Theta_{2} - 2\Theta_{1} + 1)}{a^{2}} = 0$$

Γ valeur propre de [C] r = w dt

Le changement de variables

 $\Gamma = (1+z)/(1-z)$ 

transforme le disque  $(|\Gamma| < i)$  que nous recherchons en le demiplan complexe (Re(z) < 0); la condition de stabilité impose maintenant que les racines de la nouvelle équation soient dans ce demi-plan complexe.

Après cette transformation, l'équation en  $\Gamma$  se transforme en une équation en z.

 $a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ 

à laquelle nous appliquons le critère de Routh qui donne :

 $a_0 > 0$   $a_1 \ge 0$   $a_2 \ge 0$ 

Les résultats en  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  sont regroupés dans le tableau 3.2 [3.10].

A4.3) Précision obtenue avec l'algorithme SS22

Reprenons l'équation différentielle sous sa forme récurrente

 $\underline{x}_{i+1} = [C]^{i+1} \underline{x}_{0}$ 

Sachant que la solution exacte de l'équation homogène est de la forme :

 $u = \alpha \exp((-\mu w + i w_d) t) + \beta \exp((-\mu w - i w_d) t)$  $w_d = w \sqrt{(1 - r^2)}$ 

la dérivée première est :

 $\dot{u} = \alpha (-\mu w + i w_d) \exp((-\mu w + i w_d) t) + \beta (-\mu w - i w_d) \exp((-\mu w - i w_d) t)$ 

Le passage de l'instant t à l'instant t+ $\partial$ t se fait, pour chaque terme de u et de ú à l'aide d'un progression géométrique de raisons :

et  $exp((-\mu w + i w_d) \partial t)$ et  $exp((-\mu w - i w_d) \partial t)$ 

Nous supposons que la matrice [C] admét des valeurs propres complexes de la forme [3.10] :

 $\exp(\hat{o} \partial t) = \exp(-(\mu w + v) \partial t \pm i (w_d + \epsilon) \partial t)$ 

avec  $i^2 = -1$ 

Ces valeurs propres sont aussi les coefficients d'amplification du vecteur solution entre deux instants.

Notons :

 $exp(o \partial t) = exp(-\mu w \partial t + i w_d \partial t)$ 

A chaque pas, on multiplie la valeur de x trouvée à l'instant précédent par  $\exp(\delta \ \partial t)$  au lieu de  $\exp(o \ \partial t)$  qui donne la solution exacte.

v et é apparaissent comme des perturbations numériques intervenant sur l'amplitude et sur la phase de la solution calculée.

Après n pas, l'erreur relative e est donnée par

 $e = \frac{\exp(ot) - \exp(\delta t)}{\exp(ot)} \qquad t = n \ \delta t$ 

soit

 $e = i - exp(-vt + i \in t)$ 

 $\mathbf{e} = \mathbf{O}(\mathbf{v}) + \mathbf{O}(\mathbf{\varepsilon})$ 

Pour un temps fini, l'erreur commise est donc du même ordre de grandeur que celle commise sur un pas d'intégration. Pour étudier cette dernière, on peut donc étudier le comportement de l'algorithme sur un pas d'intégration en supposant la valeur en début de pas exacte.

 $u_{i+1} = u_i + u_i \partial t + \dot{v}_i \partial t^2 / 2$ 

alors que l'algorithme donne :

 $u_{i+1} = u_i + u_i \partial t + \alpha_i \partial t^2/2$ 

étudier l'erreur sur  $u_{i+1}$  revient donc à calculer la différence :

 $\alpha_i - \dot{v}_i$ 

Reprenons

 $(1 + 2. w\mu \partial t \Theta_1 + \frac{\partial t^2}{2} w^2 \Theta_2) \alpha_1^{(2)} = \Theta_1 r_{1+1} + (1 - \Theta_1) r_1$  $- 2. w\mu \tilde{u}_1$  $- w^2 (u_1 + \partial t \Theta_1 \tilde{u}_1)$ 

Remarquons que

 $r_{1} - 2$ . wµ  $u_{1} - w^{2} u_{1} = \ddot{u}_{1}$ 

nous obtenons  
(i + 2. wµ 
$$\partial t \Theta_1 + \frac{\partial t^2}{2}$$
 w<sup>2</sup>  $\Theta_2$ )  $\alpha_1^{(2)} = \Theta_1 (r_{1+1} - r_1) + \ddot{u}_1$   
 $- w^2 \partial t \Theta_1 \ddot{u}_1$   
L'utilisation d'un développement de Taylor à l'ordre 2 sur r  
permet d'écrire :  
 $r_{1+1} - r_1 = \partial t u^{(3)}_1 + 2w\mu \partial t \ddot{u}_1 + w^2 \partial t \ddot{u}_1 + \frac{\partial t^2}{2} w^2 \ddot{u}_1 + \frac{\partial t^2}{2} O(\partial t)$ 

soit

$$(1 + 2. w p \ \delta t \ \Theta_1 + \frac{\partial t^2}{2} \ w^2 \ \Theta_2) \ \alpha_1^{(2)} =$$

$$(1 + 2. w p \ \delta t \ \Theta_1 + \frac{\partial t^2}{2} \ w^2 \ \Theta_1) \ \ddot{u}_1 + \frac{\partial t^2}{2} \ O(\delta t)$$

$$+ \Theta_1 \ (\delta t \ u^{(3)}_1 + \frac{\partial t^2}{2} \ (u^{(4)}_1 + 2 \ w p \ u^{(3)}_1)$$

En supposant les dérivées d'ordres 3 et 4 de u bornées, l'erreur commise en fonction de  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  est donc au maximum de l'ordre de O( $\partial$ t) sur  $\alpha_1^{(2)}$ , ce qui donne O( $\partial$ t<sup>2</sup>) pour  $x_{i+1}$ .

Les résultats sont regroupés avec ceux concernant stabilité dans les tableaux 3.2 et 3.3. la

r

### DYNAMIQUE ET COMMANDE DES MECANISMES

- 1.1 <u>UICKER J. J. DENAVIT J. HARTENBERG R.S.</u> An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms. ASME Journal of Applied Mechanics pp 309-314 June 1964
  - 1.2 <u>WINFREY R.C.</u> Elastic link mechanism dynamics. ASME Journal of Engineering for Industry pp 268-272 feb 1971
  - 1.3 <u>PAUL R. P. SHINANO B. MAYER G. E.</u> Differential kinematic control equation for simple manipulator. pp 456-460 IEEE Systems, Man and Cybernetics Vol. SMC 11 n.6 JUN 1981
  - 1.4 <u>GERADIN M. ROBERT G. BERNARDIN C.</u> Dynamic modelling of manipulators with flexible members. Proceeding of the Congress of Advanced Software in Robotics 4-6 may 1983 LIEGE ed Advanced software in Robotics A. Danthine M. Géradin
- 1.5 <u>GERADIN M. BERNARDIN C. ROBERT G.</u> A computer approach to dynamic modelling of robot manipulators with flexible members. Rapport RA universite de Liège LTAS Mai 1986
  - 1.6 <u>GERADIN M. ROBERT G. BUCHET P.</u> Kinematic and dynamic analysis of mechanisms. A finite element approach based on Euler parameters. Finite element methods for nonlinear problems. Ed. P. Bergan et al., Springer Verlag 1985
  - 1.7 <u>GERADIN M.</u>

Finite element approach to kinematic and dynamic analysis of mechanisms using Euler parameters. Numerical methods for nonlinear problems II Ed. C. Taylor et al., Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984

1.8 <u>BARRACO André</u> Dynamique des systèmes mécaniques déformables. Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques Paris 6 Juin 1983

1.9 <u>BARRACO A; ISHIOMIN G. SAKHITAB F. XIONG Y.D.</u> Application à la robotique de la prise en compte de la déformation dans la détermination du comportement de systèmes dynamiques. ières Journées annuelles A.R.A. POITIERS 28-30 sept 1982

- 1.10 <u>BARRACO A; ISHIOMIN G. SAKHITAB F. XIONG Y.D.</u> <u>CUNY B. JIN S.Y. KIRATY T. AKHAVAN H.</u> Introduction des modèles mécaniques de robots dans les logiciels de CAO. Journées annuelles A.R.A. TOULOUSE 26-28 sept 1984
- 1.11 <u>HOFFMAN A. JAMET Ph LEPAREUX M. BUNG H. BARRACO A.</u> <u>CUNY B.</u> Dynamique des systèmes articulés déformables et indéformables - Application à la robotique-Colloque "Tendances actuelles en calcul des Stuctures" Bastia 6-8 Novembre 1985
- 1.12 <u>LEPAREUX M. SANGIANNI F. NADDEO E.</u> Modélisation des asservissements dans PLEXUS. Rapport DEMT 85/367 Laboratoire d'analyse mécanique des structures Septembre 1986
- 1.13 <u>LEPAREUX M.</u> <u>BUNG H.</u> Dynamique des robots. Mécanismes spatiaux. Articulations Rapport DEMT 86/201 Laboratoire d'analyse mécanique des structures du C. E. A. .
- 1.14 <u>SUNADA W. DUBOWSKY S.</u> The application of finite element method to the dynamic analysis of flexible spatial linkages and manipulators. ASME Journal of Mechanical Design July 1980
- 1.15 <u>DUBOWSKY S. GARDNER T.N.</u> Dynamic interaction of link elasticity and clearance connections in planar mechanical systems. ASME Journal of Engineering for Industry pp 652-661 may 1975

1.16 <u>DUBOWSKY S. GARDNER T.N.</u> Design and analysys of multilink flexible mechanisms with multiple clearance connections. ASME J. of Engineering for Industry vol 99 n·1 pp 88-96 feb 1977

1.17 <u>DUBOWSKY S. MAATUK J.</u> The dynamic analysis of elastic spatial mechanisms. 4th world congress on Machines and Mechanisms Theory New-Castle G.B. Sept 1975

1. 18 DUBOWSKY S.

The impact of systems non-linearity and flexibility on the dynamic performance of computer based-manipulator control systems.

Proceeding of the N.S.F. workshop on the impact on the academic community of required research activity for generalized robotic manipulators. University of Florida Gamesville 8-10 feb 1978 1.19 DUBOWSKY S. GRANT J.L. Application of symbolic manipulation to time domain analysis of nonlinear dynamic systems. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control Serie G vol. 97 n·1 pp 60-68 Mars 1975 1. 20 WITHAM C. R. DUBOWSKY S. An improved symbolic manipulation technique for the simulation of non-linear dynamic systems with mixed time varying and constant terms. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control vol. 99 pp 157-166 Sept. 1977 1. 21 TURCIC D. A. MIDHA A. Generalized equations of motion for the dynamic analysis of elastic mechanisms systems. ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control Vol. 106 pp 243-248 Dec 1984 1. 22 TURCIC D. A. MIDHA A. Dynamic analysis of elastic mechanism systems. Part i : applications ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control Vol. 106 pp 249-254 Dec 1984 1.23 TURCIC D. A. MIDHA A. Dynamic analysis of elastic mechanism systems. Part 2 : experimental results ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control Vol. 106 pp 255-260 Dec 1984 1.24 <u>MIDHA A.</u> <u>ERDMAN A.</u> <u>FROHRIB D.</u> Finite element approach to mathematical modelling of high speed elastic linkages. Mechanism and machine theory vol 13 pp 603-618 1978 1.25 IMAM Elsayed Contribution à l'étude dynamique des mécanismes déformables. Thèse de Docteur Ingénieur en Mécanique LYON 1-INSA 1981 1.26 IMAM E. der HAGOPIAN J. LABANNE M. Contribution to the dynamic behaviour of flexible members. Schock and vibration bulletin n.52 pp125-133 1982 1.27 IMAM I. SANDOR G. N. KRAMER S. N. Deflection and stress analysis in high speed planar mechanisms with elastic link. ASME Journal of engineering for industry p541 may 1973 1.28 MAHIL S.S. the application of Lagrange's method to On the description of dynamic systems IEEE Systems, Man and Cybernetics Vol. SMC 12 n.6 Nov 1982

1.29 <u>USORO P.B.</u> <u>NADIRA R. MAHIL S.S.</u> A finite element/lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control vol. 108 pp 198-205 Septembre 1986 1.30 BLEJWAST E. The simulation of elastic mechanisms using kinematic constraints and Lagrange multipliers. Mechanisms and Machines Theory vol. 16 n.4 pp 441-445 1981 1.31 SUTHERLAND G. H. Analytical and experimental investigation of a high-speed elastic-memberd linkage. ASME Journal of Engineering for Industry pp 788-794 Aug 1976 1. 32 HOLLERBACH J. M. A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity. Trans of IEEE Systems Man and Cybernetics pp 730-736 1980 1.33 SUNG C.K. THOMPSON B.S. XING T.M. WANG C.H. An experimental study on the non-linear elasto-dynamic response of linkage mechanisms. Mechanism and machine theory vol 21 n-2 pp 121-133 1986 1.34 SUNG C.K. THOMPSON B.S. A survey of finite element techniques for mechanism design. Mechanism and machine theory vol 21 n.4 pp 351-359 1986 1.35 AN TZU YANG Inertia force analysis of spatial mechanisms. ASME Journal of engineering for industry p 27 feb 1971 1.36 NATH P.K. GOSH A. Kineto-elastodynamic analysis of mechanisms by finite element method. Mechanism and machine theory vol 15 pp 179-197 1980 1.37 <u>NATH P.K.</u> <u>GOSH A.</u> Steady state response of mechanisms with elastic links by finite element method. Mechanism and machine theory vol 15 pp 199-211 1980 1.38 TRUCKENBRODT A. control methods for moving and Dynamics flexible structures and their application to industrial robots. 5th world congress on Theory of Machines and Mechanics 1979 1.39 TRUCKENBRODT A. Modelling and control of flexible manipulators. 4th CISM MM symposium on theory and practise of robots and manipulators 8-11 sept 1981 VARSOVIE

- 1.40 <u>VUKOBRATOVIC M.</u> <u>POTKONJAK V.</u> Contribution to computer construction of active chain models via Lagrangian form. ASME Journal of applied mechanics vol 46 pp 181-185 march 1979
- 1.41 <u>VUKOBRATOVIC M. POTKONJAK V.</u> Scientific fundamentals of robotics. part 1 : Dynamics of manipulation robots. Springer Verlag 1982
- 1.42 <u>VUKOBRATOVIC M.</u> <u>CVETKOVIC V.</u>

Computer oriented algorithm for modelling active spatial mechanisms for robotics application. IEEE Systems, Man and Cybernetics Vol. SMC 12  $n \cdot 6$  Nov 1982

1.43 <u>KHALIL W.</u>

Contribution à la commande automatique des manipulateurs avec l'aide d'un modèle mathématique de mécanimes. Thèse de Doctorat ès Sciences MONTPELLIER 2 USTL 1978

 $\vee$  1.44 <u>ALDON MARIE-JOSE</u>

Elaboration automatique de modèles dynamiques de robots en vue de leur conception et de leur commande. Thèse de Doctorat ès Sciences MONTPELLIER 2 USTL 1982

1.45 GOLDENBERG A. A. RAKHSHA F.

Feedback control of a single-link flexible robot. Mechanism and machine theory vol 21 N·4 pp 325-335 1986

- 1.46 <u>SINGH S. N.</u> <u>SCHY A. A.</u> Control of elastic robotic systems by nonlinear inversion and modal damping. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control vol. 108 pp 180-189 Septembre 1986
- 1.47 NAKAMURA Y. HANAFUSA H.

Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control vol. 108 pp 163-171 Septembre 1986

- 1.48 <u>BOOK W. J. MAIZZA-NETO O. WHITNEY D. E.</u> Feed-back control of two beams, two joints systems with distributed flexibility. ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control pp 424-431 Dec 1975
- 1.49 <u>NICOSIA S. NICOLO F. LENTINI D.</u> Dynamical control of industrial robots with elastic and dissipative joints. IFAC symposium KYOTO 1981

- 1.50 <u>MURRAY J.J. NEUMAN C.P.</u> Linearization and sensitivy models of the Newton-Euler Dynamic robot model. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control vol. 108 pp 272-276 Septembre 1986
- 1.51 <u>LITVIN F.L. PARENTI</u> <u>CASTELLI V. PHILLIPS R.H.</u> Manipulators : execution of prescribed trajectories Special link position and versions of assembly Mechanism and machine theory vol 21 n.2 pp 173-185 1986

## METHODE D'IMPOSITION DE CONTRAINTES DE LIAISON ENTRE DEGRES DE LIBERTE

- 2.1 <u>SALONEN E. M.</u> An iterative penalty function method in structural analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 10. pp 413-421 1976
- 2.2 <u>FELIPPA CARLOS</u> Error analysis of penalty function techniques for constraint definition in linear algebraic systems. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 11. pp 709-728 1977
- 2.3 <u>FELIPPA CARLOS</u> Iterative procedures for improving penalty function solutions of algebraic systems. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 12. pp 821-836 1978
- 2.4 <u>CURISKIS J.I. VALLIPIAN S.</u> A solution algorithm for linear constraint equations in finite element analysis. Computer and Structures vol.8 pp 117-124 1978
- 2.5 <u>ABEL J.F. SHEPHARD M.S.</u> An algorithm for multipoint constraints in finite element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 14. pp 464-467 1979

METHODE NUMERIQUES D'INTEGRATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

- 3.1 <u>MIDHA A. ERDMAN A. G. FROHRIB D. A.</u> An approximate method for the dynamic analysis of elastic linkage. Trans. of th ASME Journal of Engineering for Industry pp 449-455 May 1977
- 3.2 <u>MIDHA A. ERDMAN A.G. FROHRIB D.A.</u> A closed form numerical algorithm for the periodic response of high speed elastic linkages. ASME Journal of numerical design vol.101 n · 1 pp 154-162 Jan. 1979
- 3.3 <u>GERADIN M.</u> Une étude comparative des méthodes numériques en analyse dynamique des structures. F. N. R. S. L. T. A. S Université de LIEGE ATMA session 1978 Paris pp 167-198
- 3.4 <u>GERADIN M. HOGGE M. IDELSOHN S.</u> Implicit finite elements methods. Computational methods for transient analysis. pp 417-471 ed : Elsevier Science publishers B.V. 1983
- 3.5 <u>GERADIN M. HOGGE M. IDELSOHN S.</u> Time integration of linear and non linear dynamic problems Finite element handbook part IV 0.2 ed : W. PILKEY Mc GRAW HILL 1984
- 3.6 <u>T. BELYTSCHKO</u> Analysis of time integration of linear systems. conférence IPSI 06 Septembre 1982
- 3.7 <u>HOLZLOEHNER ULRICH</u> Finite element analysis for time dependant problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 8 pp 55-69 1974

3.8 <u>BHATTACHARYA M.C.</u> An explicit conditionally stable finite difference equation for heat transfer conduction problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 21 pp 239-265 1985

3.9 <u>ZIENKIEWICZ O.C.</u> WOOD W.L. <u>HINE N.W.</u>

A unified set of single step algorithms. Part 1 : general formulation and applications International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 20 pp 1529-1552 1984

3. 10 ZIENKIEWICZ O.C. WOOD W.L. HINE N.W. A unified set of single step algorithms. Part 2 : theory International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 20 pp 2303-2309 1984

3.11 WOOD W.L.

On the Zienkiewicz four time level scheme for the integration of vibration problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 11 pp 1519-1528 1977

3. 12 WOOD W. L.

On the Zienkiewicz four time level scheme applied to the numerical integration of parabolic equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 12 pp 1717-1728 1978

3.13 WOOD W.L.

A further look at Newmark, Houbolt etc. time stepping formulae. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 20 pp 1009-1017 1984

3.14 WOOD W.L.

Numerical integration of structural dynamics equations including natural damping and periodic forcing terms. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol 17 pp 281-289 1981

3. 15 CARTER A. L. SHIFFLET G. R. LAUB A. J.

The solution of higher order integration formulae for dynamic response equations by the conjugate gradient method. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 20 pp 339-351 1984

3. 16 TRUJILLO D. M.

numerical integration of linear matrix direct The differential equation using Padé approximations. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 9 pp 259-270 1975

3. 17 TRUJILLO D. M. inconditionnaly stable explicit algorithm for Un structural dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol. 11 pp 1579-1592 1977

# OUVRAGES GENERAUX

4.1

- déformables. finis. analysis. computation. éléments Provence finis. Milieux BATHE K.J. Finite element procedures in engineering Prentice Hall inc. 1982 e des él Quebec fundamentals 961 **616ments** de element •• ÷ N la méthode 5 de Laval ( Salon Théorie de l'élasticité. Librairie Polytechnique Béranger Vol plasticity. structures par finite vibrations mécaniques 1 1972 de l'ingénieur Finite element analysis Prentice Hall inc. 1975 LANDAU LIFCHITZ Théorie de l'élasticité. édition MIR Moscou 1967 1'Air de l'université 1981 de OWEN D.R. HINTON E. An introduction to Pineridge Press 1979 générale. 1980 희무 đe GOODIER G. TOUZOT G. présentation Maloine S.A. éditions OWEN D.R. HINTON Finite element de l'Ecole Press LESUEUR GALLAGHER R. H. <u>IMBERT J.F.</u> Analyse des <u>GUIZIOU R.</u> Mécanique Mécanique Herman 1981 TIMOSHENKO Pineridge BAMBERGER Cépadues Presse Masson SALLES <u>DHATT</u> Une Cours Les •• ed 4.10 4.11 4. 2 4.3 4.4 S Q 5 Ø σ ai. . ۲ ₽. 4. 1 4. " ranne  $\geq$
- édition. 31ème finis <u>ZIENKIEWICZ</u> <u>O.C.</u> Méthode des éléments Mac Graw Hill 1979 **1** 2 . ₹

-

- 4.13 <u>BATOZ J. L. BEN TAHAR M. DHATT G.</u> Les éléments DKT et DKQ dans l'analyse des plaques et coques minces. Conférence sur les tendances actuelles en calcul des structures. Sophia Antipolis 1-2-3 fev 1980
- 4.14 <u>BATOZ J.L. BATHE K.J. HO L.W.</u> A study of three nodes triangular plate bending element IJNME vol 15 pp 1771-1812 1980
- 4.15 <u>BATOZ</u> J.L. An explicit formulation for an efficient triangular plate bending element. IJNME vol 18 pp 1077-1089 1982
- 4. 17 <u>BATOZ J.L. BEN TAHAR M.</u> Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. IJNME vol 18 pp 1655-1677 1982
- 4. 18 <u>BATOZ J. L. DHATT G.</u> Description d'un élément triangulaire pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques minces. Conférence IPSI Paris 2-4 juin 1986
- 4.19 <u>MAC</u> <u>NEAL</u> <u>R.H.</u> A simple quadrilateral shell element Computers and Structures vol 8 pp 175-183 1978
- 4.20 <u>HUGHES</u> A simple and efficient finite element for general plate bending analysis. IJNME vol 11 pp 1529-1543 1977
- 4.21 <u>ODEN J.T.</u> Finite elements for non linear continua Mac Graw Hill 1972
- 4.22 <u>MEIROVITCH L.</u> Elements of vibration analysis. Mac Graw Hill International student edition
- 4.23 <u>GERMAIN P.</u> Cours de mécanique des milieux continus Masson et Cie 1973
- 4.24 KANOTNUKULDRAI W.

A simple and efficient finite element for general shell analysis. IJNME vol 14 pp 179-200 1979 La simulation du comportement dynamique de manipulateurs déformables doit prendre en compte le comportement élastique des membres en le couplant au mouvement d'ensemble.

La simulation que nous avons introduite est basée sur une description des membres déformables de la structures à partir d'éléments finis de poutre ou de coque pour des problèmes plan ou dans l'espace. A partir d'une loi de commande des articulations en position, nous pouvons obtenir les déformations de la membrure étudiée ainsi que les efforts à mettre en oeuvre pour obtenir le mouvement.

Le comportement du modèle est décrit à l'aide d'équations du mouvement établies en utilisant le formalisme d'Hamilton dont on a déduit les équations de Lagrange du système. Ces équations sont intégrées dans le temps à l'aide d'un algorithme original, basé sur un calcul des résidus pondèrés des équations de mouvement sur un intervalle de temps.

La modélisation introduite permet de tenir compte du comportement élastique du manipulateur et fait intervenir tous les effets d'inertie dûs au mouvement (Coriolis...), aucune hypothèse simplificatrice n'ayant été faite en ce qui concerne ces termes.

Un logiciel de simulation a été développé, il peut prendre en compte des manipulateurs à plusieurs articulations de type rotoïdes.

Différents exemples de simulation sont présentés, tant avec les éléments de poutre que les étérents de coque.



mots clés :

Comportement dynamique Eléments finis Manipulateur déformable Mécanisme articulé Simulation

Dynamic behaviour Finite elements Flexible manipulator Jointed mechanism Simulation