

50376
1987
183

50376
1987
183

N° d'ordre: 750

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le grade de

Docteur es Sciences Physiques

par

Irène ZAMBETTAKIS

Ingénieur IDN

Docteur-Ingénieur



**SIMPLIFICATION DES SYSTEMES
A PARAMETRES DISTRIBUES MULTI-ECHELLES.
APPLICATION A LA COMMANDE**

Soutenue le 29 Septembre 1987 devant la Commission d'Examen:

MM.	J.C.GENTINA	Président
	P.BORNE	Rapporteur
Mme.	G.DAUPHIN-TANGUY	Rapporteur
MM.	A.FOSSARD	Rapporteur
	J.P.BABARY	Examineur
	G.JACOB	Examineur
	M.SINGH	Examineur

à Didier
et
à Hélène

A V A N T - P R O P O S

Le travail que nous présentons a été effectué sous la direction de Madame DAUPHIN-TANGUY, dans le cadre du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Institut Industriel du Nord.

Nous tenons tout d'abord à remercier très vivement Madame DAUPHIN-TANGUY pour l'accueil qu'elle nous a réservé au sein de son équipe de recherche ainsi que la confiance qu'elle nous a témoignée. Elle nous a beaucoup aidée, tant scientifiquement que moralement, durant toute la réalisation de ce mémoire, et ce dans un climat sympathique et amical. Nous lui exprimons notre profonde reconnaissance et toute notre amitié.

C'est avec empressement que nous remercions également Monsieur le Professeur BORNE, Directeur et Animateur du Laboratoire, Directeur Scientifique de l'I. D. N.. Malgré ses lourdes charges, il s'est en permanence intéressé à nos recherches et nous a prodigué de nombreux conseils avisés. Qu'il reçoive ici le témoignage de notre très vive reconnaissance.

Monsieur le Professeur GENTINA, Directeur de l'I. D. N., nous fait un grand honneur en acceptant de présider notre Jury et nous l'en remercions.

Monsieur le Professeur FOSSARD nous a apporté, par des remarques judicieuses basées sur une connaissance à la fois profonde et étendue des choses de l'Automatique, une aide précieuse pour la mise au point définitive de ce mémoire. Nous lui exprimons nos très vifs et très sincères remerciements.

Nous sommes grandement honorée de l'intérêt que Monsieur le Professeur BABARY a porté à nos travaux. Sa haute compétence dans les divers domaines abordés nous a été d'une grande utilité. Nous tenons à lui témoigner notre profonde reconnaissance et à le remercier pour sa participation à notre Jury.

Monsieur le Professeur JACOB nous fait aussi un grand honneur en acceptant de juger notre travail. Qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude pour la bienveillance et la gentillesse qu'il nous a toujours témoignées.

Nous sommes très flattée de la présence à notre Jury de Monsieur le Professeur SINGH et nous l'en remercions vivement.

Nous voudrions remercier également notre collègue et ami Monsieur ROTELLA, chercheur au Laboratoire, qui a su être constamment un interlocuteur intéressé et à l'esprit critique exercé. Des approches souvent voisines de nos problèmes de recherche respectifs liées à des discussions très fructueuses, ont largement contribuées à la réalisation de ce travail.

Enfin nous exprimons à tous les membres du Laboratoire nos remerciements pour l'aide et l'amitié qu'ils nous ont prodiguées.

Nous tenons à remercier particulièrement Madame DOCLOT, bibliothécaire de l'U. E. R. de Mathématiques, pour l'aide précieuse qu'elle nous a apportée durant notre recherche bibliographique. Nous avons été très sensible à sa gentillesse et son dévouement qui ont rendu ce travail un peu moins fastidieux.

Que Madame TRICOT (pour la dactylographie des Chapitres I à III), Madame BOURDREL (pour la dactylographie du Chapitre IV) et Madame FERRAR (pour la reprographie), soient aussi remerciées pour leur compétence et leur gentillesse.

I N T R O D U C T I O N G E N E R A L E

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'étude des systèmes à paramètres répartis. Elle concerne deux domaines très importants en Automatique : la simplification de modèles et la commande optimale.

Les modèles à paramètres distribués (ou répartis) correspondent à de nombreux processus physiques et ceci dans des domaines très variés : diffusion de la chaleur, processus chimiques, structures mécaniques flexibles, réacteurs nucléaires, propagation d'ondes, etc...

Des méthodes tout aussi nombreuses et variées sont proposées dans la littérature pour étudier ces systèmes, la complexité d'une telle étude exigeant généralement une simplification préalable du modèle considéré.

Dans les deux premiers chapitres de ce mémoire, nous nous attachons à rappeler les grandes lignes de ces méthodes :

Le chapitre I concerne la présentation générale des processus régis par des équations aux dérivées partielles. On y trouvera les principaux résultats mathématiques sur les opérateurs aux dérivées partielles, les problèmes aux limites et plus précisément sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Les méthodes classiques de résolution sont également rappelées dans cette partie.

Le thème du deuxième chapitre est la simplification de ces modèles, plus spécialement orientée vers les méthodes de perturbations singulières. Nous procédons tout d'abord à un rappel des résultats généraux de l'analyse des perturbations singulières dans les systèmes à paramètres distribués en insistant sur les problèmes de convergence de la solution du problème perturbé vers celle du problème réduit associé. Dans un deuxième temps, nous montrons comment l'approximation d'un système à paramètres distribués par un système à paramètre

localisé permet d'appliquer alors sur ce dernier la méthode classique des perturbations singulières. Nous concluons cette partie en proposant l'extension au cas des systèmes à paramètres distribués de deux autres méthodes usuelles de simplification de modèles : les techniques d'agrégation et les approximations de l'opérateur de transfert entrée-sortie.

Cependant, l'essentiel des résultats nouveaux présentés dans ce mémoire se situe dans les chapitres III et IV.

Des techniques originales de simplification de modèles sont proposées dans le chapitre III avec l'exploitation des perturbations singulières directement sur le modèle à paramètres distribués, sans aucune approximation préalable comme c'est généralement le cas dans la littérature. Ceci nous conduit à définir deux types de perturbations singulières : spatiales ou temporelles, correspondant à des positionnants différents du petit paramètre. Une analyse détaillée est alors effectuée pour deux classes particulières de systèmes présentant des caractères dynamiques différents. Par souci de clarté, les généralisations et extensions des méthodes ainsi développées seront simplement annoncées.

Enfin, la dernière partie de notre travail concerne la simplification des problèmes de commande pour les systèmes à paramètres distribués, singulièrement perturbés. Deux approches, usuelles en commande optimale des systèmes à paramètres localisés, sont ainsi développées.

D'une part, l'utilisation des modèles réduits précédemment obtenus qui conduit à l'élaboration de commandes quasi-optimales du processus étudié, dites commandes composites.

D'autre part, l'exploitation de la forme singulièrement perturbée au niveau de la résolution de l'équation de Riccati.

Une mise en œuvre pratique de ces travaux, tant pour la modélisation que pour la commande, est effectuée sur des exemples et en particulier sur le modèle d'un réacteur d'épitaxie en phase liquide.

CHAPITRE I



CHAPTER 1

DEFINITION ET METHODES D'ETUDE
DES SYSTEMES GOUVERNES
PAR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

INTRODUCTION

La formulation mathématique de nombreux problèmes physiques conduit à l'étude d'équations aux dérivées partielles. Des recherches actives et importantes ont ainsi été motivées qui, transposées dans un cadre plus général, ont fourni les outils puissants de la théorie actuelle.

Des méthodes particulières de résolution ont d'abord été élaborées (équation des cordes vibrantes, de Laplace, ou de la chaleur) mais ce n'est qu'à la fin du XIX^{ème} siècle que l'on voit apparaître des résultats généraux : classification des opérateurs différentiels, théorèmes d'unicité, étude systématique de problèmes aux limites. La notion de fonction ne permettant pas d'obtenir des résultats satisfaisants, l'étude des solutions faibles /LER/, /DIE-4/, /BOC-1,2/, /COU-1/, /SCH-1/, des équations aux dérivées partielles a amené Schwartz à l'élaboration de la théorie des distributions /SCH-2/ qui constitue de nos jours le cadre naturel de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires mais aussi non linéaires : cet outil permet, entre autres, un emploi systématique et généralisé de l'analyse fonctionnelle et de la transformation de Fourier.

Sur le plan physique, l'étude d'un système modélisé par une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles conduit généralement à l'élaboration d'un modèle approché qui devra numériquement approximer le mieux possible le modèle initial. Là aussi, de nombreuses méthodes d'approximation ont été élaborées dont le choix est essentiellement motivé par le type de problème étudié.

I - PRESENTATION DES SYSTEMES

I.1 - Différentes classes d'opérateurs aux dérivées partielles

Au début du siècle, les mathématiciens étudiaient surtout les opérateurs différentiels du second ordre à deux variables et à coefficients réels :

$$\pi = \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1,2} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \quad (1)$$

Le type de l'opérateur est alors celui de la conique correspondant à la forme quadratique attachée à π (dite forme caractéristique).

Dans les cas plus généraux d'opérateurs linéaires à coefficients constants d'ordre 2 à n variables ($n > 2$), les différentes catégories d'équations, dont l'origine physique explique d'ailleurs la dissemblance, peuvent être précisées par la nature algébrique de la forme caractéristique :

- Si cette forme est définie (contient m carrés distincts tous de même signe), l'équation appartient au type elliptique ; l'équation de Laplace en est un exemple classique et important en physique mathématique et en mécanique des milieux continus.
- Si elle contient moins de m carrés distincts (forme semi-définie lorsque les carrés sont de même signe comme dans le cas de toutes les applications connues), l'équation est du type parabolique : l'exemple type est ici l'équation de diffusion de la chaleur.
- Si elle contient m carrés distincts, non du même signe (forme indéfinie), on a le type hyperbolique : si la forme caractéristique comprend plus d'un carré de chaque signe on parle d'ultra hyperbolicité, le cas contraire où tous les carrés sauf un ont le même signe étant le seul qui se présente dans les applications physiques, nous l'appellerons le type hyperbolique à proprement parler (l'équation des ondes en est le prototype).

Pour des opérateurs d'ordre m supérieur à 2 il n'est pas connu de classification unanimement adoptée.

Les travaux de Hörmander ont ainsi conduit à la définition de certaines propriétés concernant les opérateurs aux dérivées partielles linéaires les plus généraux (d'ordre m à n variables indépendantes). Ces résultats sont basés sur la théorie des distributions /CHA-1/, /DIE-3/. Rappelons tout d'abord certaines définitions.

* Fonction analytique /COL-1/ :

Une fonction de n variables $y(x_1, \dots, x_n)$ est dite analytique dans un domaine \mathcal{D} si, pour chaque point $P(a_1, \dots, a_n)$ de \mathcal{D} elle est, dans un certain voisinage de P , représentable par une série de puissances entières des $x_j - a_j$ ($j=1, \dots, n$) :

$$y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{v_j=0 \\ j=1, \dots, n}}^{\infty} c_{v_1, \dots, v_n} (x_1 - a_1)^{v_1}, \dots, (x_n - a_n)^{v_n}$$

Cette propriété est fondamentale pour la théorie des équations aux dérivées partielles car elle assure l'existence, pour $x_j = a_j$ ($j=1, \dots, n$), des diverses dérivées partielles.

* Surface caractéristique /HÖR-1/

Soit Σ une hypersurface de \mathbb{R}^n définie par une équation $S(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, où S est une fonction analytique dont le gradient ne s'annule pas.

La surface S est dite caractéristique pour l'opérateur $P(D)$ défini en (2) (Notations de Hörmander) :

$$\left. \begin{aligned}
 P(D) &= \sum_{|j| \leq m} a_j D^j \\
 \text{avec : } |j| &= \sum_{i=1}^n j_i \\
 D^j &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{j_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n} \\
 j &= (j_1, j_2, \dots, j_n)
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si :

$$P_0 \xrightarrow{\text{grad } S(x)} = 0 \quad (3)$$

où $P_0(D)$ est la partie principale de l'opérateur $P(D)$ (partie homogène d'ordre m exactement), définie par :

$$P_0(D) = \sum_{|j|=m} a_j D^j \quad (4)$$

Hörmander propose alors les définitions suivantes /HÖR-1/.

Soit : $\vec{N} = (N_1, \dots, N_n)^T$, un vecteur de \mathbb{R}^n

H l'hyperplan perpendiculaire d'équation $\sum_{i=1}^n N_i x_i = 0$

Ω le demi-espace $\sum_{i=1}^n N_i x_i > 0$.

* L'opérateur $P(D)$ est **elliptique** si sa partie principale vérifie :

$$P_0(\xi) = 0 \implies \xi = 0$$

* L'opérateur $P(D)$ est **hypoelliptique** si la distance $d(\xi)$ du point ξ à l'ensemble des zéros complexes du polynôme $P(\xi)$ tend vers l'infini avec ξ .

* L'opérateur $P(D)$ est dit **hyperbolique** dans la direction \vec{N} si :

a) $P_0(\vec{N}) \neq 0$

b) $\exists \tau_0 / P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \tau < \tau_0$

* L'opérateur $P(D)$ est parabolique par rapport à \vec{N} si il est hypoelliptique et si :

$$\exists \tau_0 / P(\xi + i\tau N) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_n \quad \tau < \tau_0$$

Hörmander définit également des notions de semi-ellipticité ou encore d'hyperbolicité partielle et d'hyperbolicité stricte. Une conséquence importante de ces définitions doit être remarquée :

* Les opérateurs elliptiques sont hypoelliptiques et ce sont les seuls opérateurs hypoelliptiques sans caractéristiques réelles multiples.

Exemples : L'opérateur de Laplace ($n \geq 2$) est hypoelliptique, l'opérateur de la chaleur ne l'est pas.

Dans les cas d'opérateurs à coefficients variables notés $P(x,D)$, Hörmander /HÖR-1/ précise tout d'abord une condition nécessaire d'existence d'une solution locale à l'équation $P(x,D)y=f$ portant sur les coefficients variables $a_j(x)$ de $P(x,D)$. Lorsque ces coefficients sont indéfiniment différentiables une extension des propriétés ci-dessus est possible, l'opérateur étant considéré comme un opérateur à "coefficients gelés" obtenus pour chaque point x de Ω /TRE-2/, /TRE-3/.

D'autre part, à partir des années 1960, des outils permettant de travailler plus systématiquement sur les équations à coefficients variables ont été développés comme les opérateurs de Lax-Maslov, les opérateurs pseudo-différentiels ou les opérateurs intégraux de Fourier /DIE-1/, /HÖR-2/, /BER-1/, /CHA-2/, /FRI-2/, /TRE-1/.

D'autres définitions des propriétés des opérateurs aux dérivées partielles sont proposées également par d'autres auteurs. Citons :

- la définition d'opérateurs uniformément fortement elliptique /VOK/,
- le critère d'ellipticité de Dieudonné /DIE-2/,
- l'ellipticité au sens de Douglis-Nirenberg /AGM/,
- la notion d'opérateur fortement elliptique /CHA-1/,
- la notion d'opérateur parabolique au sens de Petrovski /CHA-1/,
- la définition d'équations elliptiques donnée par Malgrange dans sa thèse /MAL/.

Enfin, la distinction entre problèmes elliptiques et problèmes d'évolution, motivée par celle des applications physiques ou des études mathématiques qui s'y rattachent, est souvent adoptée dans la littérature /CHA-1/, /LIO-1,2,3,4/ : l'accent est mis sur la distinction entre la variable géométrique $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ appartenant à un ouvert Ω de \mathbb{R}^n de frontière Γ d'une part, et la variable temps t de l'ouvert $]t_0, t_f[$ d'autre part. Lorsque l'état $y(x)$ ne dépend pas de t , le système est dit de type elliptique, dans le cas contraire on a un problème d'évolution. Une distinction importante est également usuellement admise entre les problèmes d'évolution du premier ordre (parabolique) et ceux du deuxième ordre (hyperbolique).

Soit A un opérateur aux dérivées partielles par rapport à x , par exemple :

$$A y = A(x,t) y = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x,t) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right] \quad (5)$$

et, pour fixer les idées, soit f une distribution sur $\Omega \times]t_0, t_f[$ à valeurs réelles (Lions considère même le cas plus général où y appartient simplement à un espace de Hilbert /SOU/, /LIO-1,2,3,4/).

Les équations caractérisant les différentes classes de systèmes considérés s'écrivent comme suit :

$$\text{Problèmes elliptiques :} \quad A(x) y = f \quad P(x,D) = A(x) \quad (6)$$

$$\begin{array}{l} \text{Problèmes d'évolution} \\ \text{de type parabolique} \end{array} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + A(x,t) y = f \\ P(x,D) = \frac{\partial}{\partial t} + A(x,t) \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\begin{array}{l} \text{Problèmes d'évolution} \\ \text{de type hyperbolique} \end{array} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + A(x,t) y = f \\ P(x,D) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A(x,t) \end{array} \right. \quad (8)$$

où évidemment y dépend de x , et de t dans le cas des problèmes d'évolution. On peut en outre noter dès à présent une différence essentielle entre les cas (7) et (8) : dans les problèmes hyperboliques, on peut

inverser le temps donc prendre des conditions limites temporelles initiales $(y(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0))$ ou bien finales $(y(t_f), \frac{dy}{dt}(t_f))$, ce qui est impossible dans le cas parabolique. Autrement dit, les équations hyperboliques décrivent l'évolution des phénomènes physiques réversibles, les phénomènes irréversibles relèvent du type parabolique.

Si, comme nous venons de le voir, il existe une théorie mathématique assez bien constituée des équations aux dérivées partielles linéaires /TRE-2/, /TRE-3/, en contraste les équations non linéaires présentent un foisonnement de problèmes et de méthodes dont peu sont générales /AME-1,3/, /GRA-1/, /BRE-1/, /LIO-1/. Citons à titre d'exemples :

- L'équation de Tricomi /GAR-3/ :

$$x_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0$$

qui change de type suivant le signe de x_2 .

- L'équation de Korteweg et de Vries :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - 6 y \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

/KOR/ pour laquelle une description complète du comportement asymptotique a été obtenue /ZAB/, mettant en évidence des propriétés fondamentalement différentes de celles des équations hyperboliques linéaires.

- Les équations de réaction diffusion :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = D(y) \Delta y + F(y)$$

où $y(x,t)$ est, dans le cas général, une fonction vectorielle à valeurs dans \mathbb{R}^m définie pour la variable x parcourant un ouvert de \mathbb{R}^n . F est une fonction non linéaire régulière de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m et Δ le laplacien usuel. $D(y)$ est une matrice symétrique positive. Lorsque D est définie positive le problème est non linéaire et parabolique. Sinon on parle de problème parabolique dégénéré.

I.2 - Problèmes aux limites /DIE-2/

La recherche de l'"intégrale générale" d'une équation aux dérivées partielles, lorsqu'elle est possible, est d'un intérêt purement théorique. En pratique la résolution d'un problème différentiel conduit à la recherche de solutions particulières de y , à savoir celles qui ont un comportement donné au voisinage de la frontière de Ω (ou $\Omega \times]t_0, t_f[$ pour les problèmes d'évolution). On a alors à résoudre un problème différentiel aux limites. En effet, la façon la plus courante de déterminer une solution, en particulier dans les problèmes d'origine physique, est de fixer les valeurs de la solution y et d'une ou plusieurs de ses dérivées sur des hypersurfaces. On dit que le problème est bien posé lorsque cela détermine une solution et une seule. Cette notion, introduite par Hadamard /HAD/, suppose de plus que le problème considéré possède ce qu'il appelle la "propriété de stabilité", à savoir que la solution dépende continûment des données en un sens à préciser dans chaque problème particulier. Cette condition est en particulier toujours vérifiée dans les problèmes linéaires ; donc, dans le cadre de ce mémoire, la "stabilité" sera toujours implicitement assurée /HAD/.

Une formulation classique des problèmes aux limites est donnée par le problème de Cauchy /FAT-1/ qui, pour l'opérateur $P(x,D)$ de la forme $(\partial^m / \partial x_1^m) + \Phi$ où Φ est une fonction analytique de x, y et ses dérivées d'ordre total m au plus mais strictement plus petite que m en x_1 (on parle alors de systèmes normaux), s'énonce ainsi :

Trouver y dans un voisinage V de l'origine aussi grand que possible tel que :

$$\left. \begin{array}{l} 1. P(x,D) y = f \quad \text{dans } V \\ 2. \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\alpha y(0, x_1, \dots, x_n) = g_\alpha(x_2, \dots, x_n) \quad \text{dans } V \cap H \\ \alpha = 0, \dots, m-1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

les fonctions f et g_α étant des données analytiques, H étant l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$.

Remarque : Si l'hyperplan $x_1 = 0$ est caractéristique en 0, ces données g_α doivent vérifier certaines conditions de compatibilité.

Un premier théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy a été obtenu à peu près en même temps par Cauchy et Kowalevski dans l'hypothèse de données analytiques. Diverses généralisations ont ensuite été envisagées, en particulier par Holmgreen (1909), Carleman (1939), Hörmander (1958) : l'espace des solutions est étendu des fonctions analytiques aux distributions et même aux ultra-distributions puis aux hyperfonctions /SAT/, /NIR/ et enfin aux microfonctions. Mais l'espace des variables également a d'abord été un ouvert de \mathbb{R}^n , pour devenir dans les travaux les plus récents une variété de la géométrie différentielle /EEL/.

Des limitations importantes de ces théorèmes, dues en particulier à leur nature très locale, expliquent que dans les applications physiques d'autres types de problèmes aux limites, plus particuliers, se soient révélés intéressants. En effet, lorsque la construction locale de la solution ne suffit pas, des conditions accessoires de caractère physique peuvent être imposées grâce auxquelles la solution globale pourra être déterminée : il est généralement raisonnable de penser que cette solution existe et est unique dans la mesure où les conditions accessoires doivent physiquement y conduire. Néanmoins, ces conditions supplémentaires sont liées à la nature de l'opérateur et principalement à son ordre et, en toute rigueur il convient, dans chaque cas particulier, de vérifier que le problème est bien posé (au sens d'Hadamard-Petrovsky /HAD/).

Lorsque l'une des variables est le temps ($x_1 = t$ par exemple), les autres étant des variables d'espace proprement dites, on distingue deux sortes de conditions accessoires :

- Les conditions initiales relatives à t , qui fixent les valeurs de la solution y et de ses dérivées successives en nombre suffisant à l'instant initial t_0 (et final dans le cas de problèmes réversibles), en chaque point d'un domaine spatial.
- Les conditions aux limites qui doivent être vérifiées à tout instant en certains points de l'espace.

Ces conditions accessoires sont dans certains cas des conditions de Cauchy mais elles peuvent aussi être plus compliquées. Dans la littérature les conditions limites suivantes sont souvent citées /BAS/ :

- Les conditions de Dirichlet consistent à chercher une solution y de (9.1) sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^n dont la restriction à Γ (frontière de Ω) est une fonction donnée g . Dans le cas particulier où g est nulle les conditions sont dites **homogènes**.
- Les conditions de Neumann supposent que c'est la dérivée normale de y sur Γ (projection du gradient de y sur une direction normale à Γ) qui est connue.
- Lorsqu'on se donne le long de Γ une relation de la forme $y = a \frac{dy}{dN} + b$ entre les valeurs de y et de sa dérivée normale $\frac{dy}{dN}$, a et b étant des fonctions du point courant de (Γ) , on parle de conditions de Fourier.
- Les conditions de Poincaré supposent que l'on se donne le long de (Γ) une relation linéaire entre y et ses dérivées premières /GER/.

En fait ces derniers types de conditions aux limites relatifs à la dérivée normale de la solution ne sont pas tout à fait bien posés. D'abord il n'y a pas unicité, puisqu'en ajoutant à une solution une constante, on retrouve une autre solution. D'autre part pour qu'il y ait existence, les données peuvent parfois être contraintes à vérifier certaines conditions de compatibilité avec l'équation caractérisant le système. Les conditions de Dirichlet ou de Neumann peuvent s'ajouter à des conditions de Cauchy, on dit alors que l'on a à résoudre un problème mixte de type Cauchy-Dirichlet (ou Cauchy-Neumann). On rencontre aussi très souvent des problèmes mêlés, c'est-à-dire où on donne y sur une partie de la frontière et sa dérivée normale sur le reste. Ces problèmes sont bien posés.

D'autres conditions accessoires plus particulières ou plus complexes existent néanmoins, pour traduire des situations physiques originales. Dans tous les cas, et dans l'hypothèse d'un problème bien posé, les conditions initiales comme les conditions aux limites dépendent en nombre et en nature du problème physique étudié, mais aussi et surtout du type d'équation aux dérivées partielles caractérisant

le système /EID/, /BIT/, /GAR-2/. Par exemple, dans la pratique les systèmes hyperboliques correspondent souvent au problème de Cauchy (ou tout au moins au problème de Cauchy généralisé, c'est-à-dire relatif à des données régulières et à une solution régulière non locale /GAR-1/, /SAK-1/, /FAT-1/) ; on peut citer aussi le problème de Goursat /GER/. Par contre, les systèmes de type elliptique constituent usuellement des problèmes de Dirichlet, de Neumann, de Fourier ou de Poincaré /COP/.

Plus généralement, Hörmander a montré comment l'existence de solutions est étroitement liée au type de problème considéré : une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution au problème de Cauchy non caractéristique (H est une surface non caractéristique pour l'opérateur $P(x,D)$) est l'hyperbolicité de l'opérateur. De même, le problème de Cauchy caractéristique correspond à un opérateur parabolique. Une caractérisation de l'hypoellipticité est que toute distribution y vérifiant $Py=f$ soit indéfiniment différentiable sur tout ouvert où f l'est. Enfin, une propriété caractéristique des opérateurs elliptiques est l'analyticité des solutions y de l'équation $Py=f$ sur tout ouvert où f l'est.

I.3 - Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles

I.3.1 - Définitions :

a) Systèmes déterminés, sous-déterminés, sur-déterminés /COU-1/

Considérons un système général de h équations aux dérivées partielles relatif à m fonctions y_1, \dots, y_m de n variables x_1, \dots, x_n . On suppose que ces h équations sont indépendantes, c'est-à-dire qu'aucune d'entre elles ne peut être déduites des autres par différentiation et élimination.

- * Si $h = m$: le système est déterminé,
- * Si $h > m$: le système est sur-déterminé,
- * Si $h < m$: le système est sous-déterminé.

Exemples :

1. Un exemple intéressant de système sur-déterminé est fourni par la théorie des fonctions analytiques $f(Z_1, Z_2) = u + iv$ de deux variables complexes : $Z_1 = x_1 + iy_1$, $Z_2 = x_2 + iy_2$. Le caractère analytique de f implique :

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= v_{y_1} & u_{x_2} &= v_{y_2} \\ u_{y_1} &= -v_{x_1} & u_{y_2} &= -v_{x_2} \end{aligned}$$

qui conduisent au système en u :

$$\begin{cases} u_{x_1 x_2} + u_{y_1 y_2} = 0 \\ u_{x_2 x_2} + u_{y_2 y_2} = 0 \\ u_{x_1 x_2} + u_{y_1 y_2} = 0 \\ u_{x_1 y_2} - u_{x_2 y_1} = 0 \end{cases}$$

On peut remarquer ici que le caractère fortement sur-déterminé de ce système montre combien la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes est plus compliquée que celle relative aux fonctions d'une seule variable complexe.

2. L'équation sous-déterminée $u_x v_y - u_y v_x = 1$ qui caractérise les transformations conservant les aires du plan x, y dans le plan u, v est résolu par :

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \omega_\beta & u &= \alpha - \omega_\beta \\ y &= \beta - \omega_\alpha & v &= \beta + \omega_\alpha \end{aligned}$$

où ω est une fonction arbitraire pour laquelle :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + \omega_{\alpha\alpha} \omega_{\beta\beta} - \omega_{\alpha\beta}^2 \neq 0$$

De façon générale ces problèmes sur ou sous-déterminés font partie des problèmes "mal posés" au sens d'Hadamard. Néanmoins, et malgré le peu de progrès mathématiques sur ce sujet, de nombreuses situations physiques nécessitent la résolution de tels problèmes.

b) Systèmes linéaires, semi-linéaires, quasi-linéaires

Un système quasi-linéaire d'équations aux dérivées partielles d'ordre k , s'écrit sous la forme /RIQ/, /JAN/, /COU-1/ :

$$L_{\lambda}(y) = \sum_{\lambda=1, \dots, m}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \leq \dots \leq i_p}}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i_1, \dots, i_p}^{\lambda, j} \frac{\partial^p y_j}{\partial x_1, \dots, \partial x_p} = C_{\lambda} \quad (10)$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$L[y] = \sum_{p=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p=1 \\ i_1 \leq \dots \leq i_p}} A_{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial^p y_j}{\partial x_1, \dots, \partial x_p} = C \quad (11)$$

où les m fonctions inconnues y_j dépendent des n variables indépendantes x_i .

Si les matrices A_{i_1, \dots, i_p} ne dépendent pas du vecteur inconnu y et si C dépend linéairement de y , le système (11) est **linéaire**. Si les matrices A_{i_1, \dots, i_p} ne dépendent pas de y mais que C en dépend non linéairement, le système est dit **semi-linéaire**. Dans les autres cas où les matrices A_{i_1, \dots, i_p} dépendent de y , le système est **quasi-linéaire**.

Remarque 1 : On montre d'ailleurs que sous réserve d'une différentiabilité suffisante des fonctions impliquées, tout système non linéaire est équivalent, par différentiation, à un système quasi-linéaire et même quasi-linéaire du premier ordre /COU-1/.

Remarque 2 : Les notations suivantes sont généralement adoptées :

$$\left. \begin{aligned}
 D_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} && i=1, \dots, n \\
 D &= (D_1, \dots, D_n) && \text{opérateur gradient} \\
 \text{Si } p &= \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} && (12) \\
 DP &= D_1^{p_1} \cdot \dots \cdot D_n^{p_n} && \text{opérateur d'ordre } |p| \\
 |p| &= p_1 + \dots + p_n
 \end{aligned}
 \right.$$

(11) s'écrit alors :

$$L[y] = \sum_{|p| \leq k} A^p D^p y = C \quad (13)$$

où A^p sont des matrices carrées d'ordre m et C un vecteur d'ordre m , dépendants ou non de x et de y .

I.3.2 - Sur l'équivalence d'un système aux dérivées partielles et d'une équation aux dérivées partielles :

Pour les équations différentielles ordinaires la théorie des équations simples est équivalente à celle des systèmes ; mais pour les équations aux dérivées partielles la situation est différente. Considérons, par exemple, une équation aux dérivées partielles de second ordre :

$$F(x_1, x_2, y, y_{x_1}, y_{x_2}, y_{x_1 x_2}, y_{x_1 x_1}, y_{x_2 x_2}) = 0 \quad (14)$$

pour la fonction $y(x_1, x_2)$.

On vérifie aisément l'équivalence de (14) avec le système suivant (15) de 3 équations à 3 inconnues y, p et q :

$$\left| \begin{array}{l} F(x_1, x_2, Y, p, q, p_{x_1}, p_{x_2}, q_{x_2}) = 0 \\ Y_{x_1} - p = 0 \\ Y_{x_2} - q = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

qui est d'une forme très particulière.

Cependant, la réciproque n'est pas toujours vraie. Soit le système de 2 équations aux dérivées partielles du premier ordre (16) :

$$\left| \begin{array}{l} f(x_1, x_2, Y_1, Y_2, Y_{1x_1}, Y_{1x_2}, Y_{2x_1}, Y_{2x_2}) = 0 \\ g(x_1, x_2, Y_1, Y_2, Y_{1x_1}, Y_{1x_2}, Y_{2x_1}, Y_{2x_2}) = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

relatif aux deux fonctions inconnues $y_1(x_1, x_2)$ et $y_2(x_1, x_2)$. En général, il ne sera pas possible par différentiation et élimination d'obtenir à partir de (16) une équation aux dérivées partielles du second ordre relative à une variable $y_1(x_1, x_2)$ par exemple. De plus, si l'on réitère la dérivation, on constate que le système (16) ne peut être remplacé par une équation unique même si on n'en restreint pas l'ordre : ainsi la différentiation des six équations relatives à $Y_2, Y_{2x_1}, Y_{2x_2}, Y_{2x_1x_2}, Y_{2x_1}^2, Y_{2x_2}^2$, donne 12 relations pour lesquelles l'élimination des 10 quantités :

$$Y_2, Y_{2x_1}, Y_{2x_2}, \dots, Y_{2x_2}^2$$

conduit généralement à deux relations indépendantes qui sont les deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre en y_1 équivalentes au système initial.

Ces considérations ne prouvent pas néanmoins l'impossibilité générale d'élimination. Ainsi on montre /COU-1/ qu'il existe une C.N.S. pour qu'un système d'ordre 1 résolu en Y_{2x_1} et Y_{2x_2} , c'est-à-dire donné par :

$$\left| \begin{array}{l} Y_{2x_1} = F(x_1, x_2, Y_1, Y_2, p, q) \\ Y_{2x_2} = G(x_1, x_2, Y_1, Y_2, p, q) \end{array} \right. \quad (17)$$

où $P = Y_{1x_1}$ et $q = Y_{1x_2}$

soit équivalent à une équation d'ordre 2 en y_1 est que les expressions (18) soient indépendantes de y_2 :

$$\frac{F_q}{G_p}, \frac{G_q - F_p}{G_p}, \frac{G_{y_1 p} - F_{y_1 q} + G_{x_1} - F_{x_2} + G_{y_2} F - F_{y_2} G}{G_p} \quad (18)$$

Cependant il est également possible d'assurer l'équivalence système-équation unique moyennant l'adjonction de certaines conditions initiales supplémentaires pour les variables du système : en effet un système d'équations aux dérivées partielles engendrera une variété de solutions plus large que l'équation équivalente qui lui correspond. Une restriction des conditions initiales doit donc être réalisée pour que les deux problèmes aux limites coïncident. Plus précisément, et compte tenu de la remarque précédente (§ I.3.1-b), une équation d'ordre quelconque ou un système d'équations peut donc, par ce moyen, être remplacée par un système quasi-linéaire du premier ordre. Il est même encore possible, moyennant un léger artifice /COU-1/, de ramener ce système à un autre système quasi-linéaire, dans lequel les n variables indépendantes x_i n'apparaîtraient plus explicitement et qui, de plus, serait homogène relativement aux dérivées, soit :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial y_j}{\partial x_1} = \sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^m \beta_{i,j,k}(y_1, \dots, y_m) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \\ y_j(x)_{x_1=0} = \phi_j(x_2, \dots, x_n) \quad j=1, \dots, m \end{array} \right. \quad (19)$$

En conclusion, tous les problèmes de valeur initiale de tous ordres pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent se ramener sans difficulté à des problèmes de valeur initiale de ce type.

Remarques :

1. Il est évident que dans le cas particulier d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaire, à n inconnues, à coefficients constants, on peut toujours par différentiation puis élimination, obtenir une seule équation linéaire pour chaque inconnue ; ce qui correspond à un découplage parfait du système.

2. Considérons un système de m équations aux dérivées partielles quasi-linéaire d'ordre 1 (auquel on a vu que l'on peut toujours se ramener). Si les m équations ont la même partie principale :

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial y_\mu}{\partial x_k} = b_\mu \quad \mu=1, \dots, m \quad (20)$$

on montre aisément que ce système est équivalent à une équation aux dérivées partielles homogène, linéaire, relative à une fonction de $m+n$ variables /COU-1/ (elle-même équivalente d'ailleurs au système de $m+n$ équations différentielles ordinaires dites caractéristiques).

I.3.3 - Classification des systèmes :

Soit le système d'ordre k de m équations à m inconnues (y_1, \dots, y_m) regroupées dans le vecteur y , défini par (13).

La classification de tels systèmes a lieu à partir du polynôme caractéristique. Rappelons que pour une équation d'ordre k ($AP \equiv aP$ de dimension 1), le polynôme caractéristique est donné par la partie principale de l'opérateur, soit :

$$Q(x, \xi) = \sum_{|p|=k} a^p \xi^p \quad (21)$$

Dans le cas d'un système, on note $Q_j^\lambda(x, \xi)$ le polynôme caractéristique de la partie $q_{\lambda, j}(y_j)$ de l'équation λ correspondant à l'inconnue y_j , si le degré $q_{\lambda, j}(y_j)$ est égal à k ; s'il est inférieur strictement à k , $Q_j^\lambda(x, \xi)$ est nul.

La matrice :

$$\left[Q_j^\lambda(x, \xi) \right] = \sum_{|p|=k} A^p \xi^p \quad (22)$$

$1 \leq j, \lambda \leq m$

est dite matrice caractéristique du système (19) et le polynôme caractéristique est, par définition, le déterminant de cette matrice :

$$Q(x, \xi) = \det \left[Q_j^\lambda(x, \xi) \right] \quad (23)$$

La classification est alors analogue à celle des équations, soit :

Si les solutions de l'équation $Q(x, \xi) = 0$ sont complexes le problème est elliptique, si elles sont toutes réelles et différentes le problème est totalement hyperbolique. Entre ces deux types extrêmes toutes les formes intermédiaires sont possibles ; peu de travaux s'y attachent néanmoins, car ils semblent arriver assez rarement dans les problèmes de la physique mathématique.

Remarque : Dans le cas quasi-linéaire où les coefficients dépendent des inconnues y_j et de leurs dérivées d'ordre inférieur à k , Foures-Bruhat propose une extension de la définition d'hyperbolicité locale, avec la notion de :

$$x^\circ\text{-hyperbolicité du point } \begin{bmatrix} x_1^\circ \\ x_2^\circ \\ \vdots \\ x_n^\circ \end{bmatrix} \quad \text{/JAN/}$$

Théorème de Cauchy-Kowaleski pour les systèmes /COU-1/ :

Soit le système de m équations aux dérivées partielles d'ordre k relatif aux m fonctions inconnues y_1, \dots, y_m des n variables x_1, \dots, x_n , supposé mis sous la forme normale :

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} y_j = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^k y_m}{\partial x_n^k}) \quad (24)$$

où les fonctions f_i dépendent analytiquement des quantités x et $\frac{\partial^l y_i}{\partial x_i^l}$; et soient km fonctions analytiques arbitraires $\Phi_{i,p}(x_2, \dots, x_n)$ ($i=1, \dots, m$; $p=0, \dots, k-1$), dans un voisinage suffisamment petit de l'origine ($x_2=x_3, \dots, x_n=0$).

Alors, il existe une et une seule solution (y_1, \dots, y_m) analytique vérifiant le système (24) et ayant les valeurs initiales :

$$\left| \begin{array}{l} y_i(0, x_2, \dots, x_n) = \Phi_{i,0}(x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{k-1} y_i}{\partial x_1^{k-1}}(0, x_2, \dots, x_n) = \Phi_{i,k-1}(x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (25)$$

sur l'hyperplan $x_1 = 0$

Remarques :

1. Comme dans le cas scalaire, l'hypothèse d'analyticité des données et de la solution constitue une restriction importante, de même que l'hypothèse d'existence d'une forme normale du type (24).
2. Les résultats précédents montrent qu'il serait en fait suffisant de prendre $k=1$, c'est-à-dire de considérer des systèmes d'ordre 1.

II - METHODES CLASSIQUES D'APPROXIMATION /COU-2/

La résolution numérique des systèmes à paramètres distribués est l'objet de cette partie. Dans ce but de nombreux principes d'approximation peuvent être utilisés, que nous pouvons regrouper dans trois grandes classes.

II.1 - Les méthodes directes de résolution

Ces méthodes, dont les plus connues sont sans doute les méthodes de séparation des variables et des caractéristiques, permettent de calculer une solution analytique du problème.

La méthode de séparation des variables, simple mais très puissante, suppose qu'une solution peut être exprimée comme le produit de fonctions inconnues, chacune de ces fonctions ne dépendant que d'une seule variable indépendante. L'intérêt de cette méthode réside en ce qu'il est possible d'écrire l'équation résultante sous une forme telle que l'un de ses membres ne dépende que d'une variable tandis que l'autre contient toutes les variables restantes, d'où l'on peut déduire que chaque côté de l'équation doit être constant. Ce processus étant répété, on arrive à déterminer les fonctions inconnues. Enfin, la superposition de ces solutions conduit à la solution recherchée.

La méthode des caractéristiques /FRE/, /GAR-3/ est une méthode géométrique qui permet essentiellement de trouver la solution exacte des systèmes hyperboliques (c'est-à-dire à caractéristiques réelles). $Q(x, \xi)$ étant le polynôme caractéristique du système (cf § I.3.3), on rappelle (cf § I.1) qu'une hypersurface d'équation $\rho(x) = 0$, où ρ est une fonction analytique dont le quotient ne s'annule pas, est une surface caractéristique pour le système si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Q(x, \vec{\text{grad}} \rho(x)) = 0 \quad (26)$$

On introduit également la notion de bandes bicaractéristiques, comme étant des courbes dans un espace de dimension $2n$ définies paramétriquement par :

$$s \rightarrow (x(s), \xi(s)) \quad (27)$$

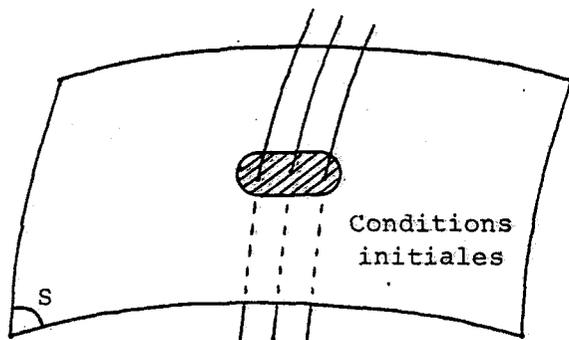
La résolution du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds}(s) = \frac{\partial Q}{\partial \xi}(x(s), \xi(s)) \\ \frac{d\xi}{ds}(s) = - \frac{\partial Q}{\partial x}(x(s), \xi(s)) \end{array} \right. \quad (28)$$

avec $x(0) = x_0$ et $\xi(0) = \xi_0$

permet alors généralement d'obtenir la solution $y(x) = y(x(s)) = Y(s)$ comme solution d'une équation différentielle ordinaire.

Le principe consiste donc à se donner Y et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ sur une hypersurface non caractéristique et à en déduire les valeurs de Y sur les bicaractéristiques.



$$(S) : \Psi(x) = 0$$

$$\exists x_0 / Q(x_0, \vec{\text{grad}} \Psi(x_0)) \neq 0$$

Ces notions ont été exploitées et développées avec des orientations différentes pour des classes particulières de systèmes. Citons la méthode de Lagrange et Charpit pour les équations du 1er ordre /COL-1/, la méthode de Riemann /COP/, /SOB/ pour le problème de Cauchy hyperbolique à 2 variables, la méthode de Volterra /COL-1/ généralisée entre autres par Coulon dans sa thèse (1902) pour les équations hyperboliques à 3 variables ou plus.

D'autre part, certaines équations classiques, de grande importance physique, ont fait l'objet de nombreuses études et une grande variété de problèmes aux limites ont été résolus par des méthodes aussi nombreuses et variées /BAT-1/, /BAL-1/, /SOB/, /COP/. Citons :

- la théorie des potentiels newtoniens /COL-1/ ou la méthode de Schwartz /GOD/ pour l'équation de Laplace,
- l'utilisation de la transformation de Legendre pour l'équation de Clairaut ou l'équation des ondes,
- pour les problèmes de Dirichlet elliptiques : la méthode alternée ou les méthodes de Neumann et de Fredholm /HAD/, la méthode de balayage due à Poincaré /HAD/,
- ou encore la méthode de Drach pour les équations aux dérivées partielles du second ordre /HEI/.

Plus généralement, d'autres méthodes basées sur les transformées de Fourier /VOK/ ou de Laplace /DON/, /CAR-1/, sur les noyaux de Green /DIE-1/, /ROA/, /VOK/ ou la théorie de Sturm Liouville permettent aussi de trouver une solution analytique. L'utilisation de la théorie des semi-groupes ou des "familles de cosinus-sinus" /CUR-1/, /FAT-2/ permet une formulation générale de nombreux problèmes aux dérivées partielles de type parabolique ou hyperbolique. La solution est alors sous forme de série infinie et une approximation par un nombre fini de termes est indispensable pour une étude numérique. Ceci entraîne que cette théorie est plutôt utilisée pour étudier les propriétés des solutions que dans un but de simulation (cf Chapitre II, § I).

II.2 - Les méthodes des résidus pondérés /CAR-2/ et les méthodes variationnelles /FIN/, /FRI-1/, /CAR-1/

II.2.1 - Formulation infinie des problèmes aux limites :

Considérons, à titre d'exemple, le problème parabolique (29) avec des conditions homogènes (auxquelles nous avons vu que l'on peut toujours se ramener) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = A y(x,t) + C(x,t) \quad x \in \Omega \\ B y(x,t) = 0 \quad \text{sur les limites } (x \in \Gamma) \\ y(x,0) = y_0(x) \end{array} \right. \quad (29)$$

où $y(x,t)$ appartient à un espace de Hilbert H de dimension infinie et l'opérateur A , ne comportant que des dérivées partielles spatiales, est supposé générer un semi-groupe sur H .

Soit $\{\rho_j(x), j=0, \dots, \infty\}$ un ensemble complet de fonctions satisfaisant les conditions aux limites homogènes : $B \rho_j(x) = 0, j=0, \dots, \infty$.

Le problème (29) admet alors, sous ces hypothèses, une solution unique de la forme :

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \rho_j(x) \quad (30)$$

On peut donc également caractériser un tel système par le vecteur état $v(t) = [a_j(t)]^T$ de dimension infinie et, la commande $C(x,t)$ pouvant aussi être développée suivant une relation du type (30), la représentation aux dérivées partielles (29) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = M_v + G u(t) \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \quad (31)$$

où l'état v appartient à l'espace de Hilbert H , et M est une matrice de dimension infinie représentant l'opérateur A associé aux conditions limites B , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} M \rho_j(x) = A \rho_j(x) & x \in \Omega \\ B \rho_j(x) = 0 & x \in \Gamma \quad j = 0, \dots, \infty \end{array} \right. \quad (32)$$

Les conditions initiales $v(0)$ sont déterminées à partir de $y_0(x)$, de (30) et de la connaissance des ρ_j ; ce qui, en pratique, n'est résolu qu'après troncature (cf § II.2.2).

Le contrôle $U(t)$ est de dimension finie p et la matrice de commande G est de rang fini p .

La représentation matricielle (31) constitue une formulation générale des systèmes à paramètres répartis linéaires de type parabolique, qui peut d'ailleurs être complétée par une équation d'observation /BAL-2/ soit :

$$\begin{cases}
 \frac{dv}{dt} = M_v + G u(t) \\
 w = N_v + F u(t) \\
 v(0) = v_0
 \end{cases}
 \tag{33}$$

où le vecteur d'observation w est de dimension finie q , la matrice N de rang fini q et F une matrice de dimension $q \times p$.

Remarque : Une formulation analogue peut aussi être obtenue dans le cas de problèmes hyperboliques, l'opérateur A étant toujours de type elliptique /BAL-3/.

II.2.2 - Approximation par troncature :

Afin d'obtenir un système de dimension finie, plus exploitable dans les applications, il convient ensuite de réaliser une troncature de l'état infini v de (31) à un ordre K arbitraire qui caractérisera la précision de l'approximation ainsi effectuée. Ce problème d'approximation de la solution d'un système d'équations différentielles de dimension infinie a été étudié par Shaw qui propose une définition de rang K de troncature basée sur la connaissance du spectre de l'opérateur elliptique (A) et telle que la solution du système tronqué converge uniformément vers celle du système global en un temps fini /SHA-1/.

Il s'agit donc d'une décomposition de l'espace de Hilbert H sous la forme $H = H_K \oplus H_R$, où le sous espace H_K , correspondant au modèle approché caractérisé par les modes dominants, est de dimension finie K ; et H_R est le sous-espace des modes résiduels. La définition d'opérateurs de projection P_K et P_R (non nécessairement orthogonaux) tels que $v_K = P_K v$ et $v_R = P_R v$ conduit donc à la décomposition suivante :

$$\begin{cases}
 \frac{dv_K}{dt} = M_K v_K + M_{KR} v_R + G_K u(t) & v_K(0) = P_K v_0 \\
 \frac{dv_R}{dt} = M_{RK} v_K + M_R v_R + G_R u(t) & v_R(0) = P_R v_0 \\
 w = N_K v_K + N_R v_R + F u
 \end{cases}
 \tag{34}$$

où toutes les matrices, sauf M_R , sont de rang fini.

Remarques

1. Dans le cas particulier où H_K et H_R sont des sous-espaces propres, on a /BAL-4/ : $M_{KR} = 0$ et $M_{RK} = 0$. De tels sous-espaces propres existent lorsqu'un nombre fini de valeurs propres de M peuvent être séparées par une courbe fermée du reste du spectre de M /KAT, Th 6.17, p. 178/.
2. Le modèle approché (v_K) est complètement déterminé par le choix des fonctions de base $\rho_j(x)$ et des sous espaces H_K et H_R . Il y a donc plusieurs modèles approchés possibles, ce qui est tout à l'avantage de l'utilisateur.
3. Cette méthode de troncature est généralement assujettie à des contraintes assurant la bonne représentation du processus étudié par le modèle approché, par exemple /BAL-3/ :
 - le modèle approché (v_K) doit être contrôlable et observable /KWA/,
 - le sous-système résiduel (v_R) est exponentiellement stable (vérification à l'aide du théorème de Hille-Yosida) /CUR-2/.

II.2.3 - Différentes méthodes d'approximation fonctionnelle :

Les méthodes des résidus pondérés sont formées d'un vaste ensemble de techniques. Elles reposent donc sur l'hypothèse que l'on peut approcher la solution $y(x,t)$ par $\tilde{y}(x,t)$ tel que :

$$\tilde{y}(x,t) = \sum_{j=1}^K a_j(t) \rho_j(x) \quad (35)$$

où les $\rho_j(x)$ sont des fonctions de base satisfaisant les conditions limites, et les $a_j(t)$ et K sont à déterminer.

De nombreuses fonctions peuvent être prises comme fonctions d'approximation et le choix dépend souvent de l'expérience de l'utilisateur. L'une des différentes méthodes des résidus pondérés peut alors être utilisée afin d'obtenir la meilleure approximation de la solution.

Par exemple, pour le problème (29) considéré au § II.2.1, la substitution de l'expression (35) dans (29) nous permet de définir les résidus :

$$\begin{array}{ll}
 R_e = \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} - A \tilde{Y} - C & \text{résidu sur l'équation} \\
 R_l = B \tilde{Y} & \text{résidu sur les limites} \\
 R_i = \tilde{Y}_0(x) & \text{résidu sur les conditions initiales}
 \end{array} \quad (36)$$

On distingue trois méthodes :

- a) La méthode intérieure : les conditions aux limites sont toujours satisfaites, mais pas l'équation différentielle (c'est le cas envisagé au § II.2.1 pour l'exemple (29)).
- b) La méthode aux limites : l'équation différentielle est vérifiée mais pas les conditions aux limites.
- c) La méthode mixte : aucun des résidus n'est nul.

Les méthodes intérieures sont largement utilisées, mais ici encore, les variantes sont nombreuses en raison des choix possibles sur les fonctions tests W qui apparaissent dans la formulation du produit scalaire associé à la minimisation de R . On cherche en effet à avoir :

$$\langle R, W_j \rangle = 0 \quad (j=1, \dots, N) \quad \text{où} \quad \langle U, W \rangle = \int_{\Omega} U W \, d\Omega \quad (37)$$

- . Si $W_j = \delta(x - x_j)$
on obtient la méthode de collocation /WYS/, /MIC/.
- . Si $W_j = \rho_j$
on a la méthode de Galerkin ; les ρ_j devant alors former une base de l'espace de départ /MOH/.
- . Si $W_j = x^{j-1}$
on a la méthode des moments.

Le point commun à toutes ces méthodes est la transformation de l'équation (ou du système d'équations) aux dérivées partielles en un ensemble d'équations aux dérivées ordinaires (en t) dont la structure résultante dépend du choix des ρ_j et W_j .

La méthode intérieure peut être reprise à partir de la notion de solution faible /FRI-1/, /DIE-4/, /LER/, /SCH-1/, /BOC-1,2/ et, donc, de la formulation variationnelle /SIB/, /LIO-1/. On constate alors qu'un ensemble de techniques qui semblent assez éloignées, sont en fait issues de choix différents des espaces auxquels doivent appartenir les fonctions W_j . La méthode des éléments finis fait partie de cette classe de méthodes. Le domaine est divisé en sous-domaines sur lesquels les fonctions d'approximation sont définies. L'avantage réside dans le fait que les éléments peuvent changer en dimension et forme pour s'adapter au mieux à la nature des frontières. Le choix porte sur la forme et la finesse du maillage, le terme "éléments finis" étant utilisé pour définir les sous domaines /CIA/, /FIN/, /SIB/, /AZI/, /BER-2/, /PRO/, /VIC/, /BAT-2/. Cette technique est, à l'heure actuelle, extrêmement développée car elle s'adapte bien à des problèmes posés dans des espaces à plusieurs dimensions.

II.3 - Méthode des différences finies

Parmi les possibilités offertes pour obtenir un modèle de dimension réduite, la méthode des différences finies est certainement l'une des plus employées. Les schémas disponibles sont très divers : /MET/, /FOR-1/, /FOR-2/, /RIC/, /VIC/, /SU/, /PUR/, /RAN/, /LAS/, /MEI/, /CAR-2/, /GLA/, /AME-2/, /SMI-2/, /NOU/.

L'ensemble des méthodes repose sur l'approximation des dérivées par des différences finies (les diverses expressions obtenues sont toutes issues du développement en série de Taylor d'une fonction). Citons par exemple les schémas du type :

$$\left| \begin{aligned} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\Delta t} &= \theta \delta_h^2 y_i^{n+1} + (1 - \theta) \delta_h^2 y_i^n & \theta \in [0, 1] \\ \text{où } \delta_h^2 y_i^n &= \frac{y_{i-1}^n - 2 y_i^n + y_{i+1}^n}{h^2} \end{aligned} \right. \quad (38)$$

h est le pas de discrétisation en espace (indice i)

Δt est le pas de discrétisation en temps (indice n)

et θ est appelé degré d'implicité :

- . Si $\theta = 0$, la méthode est dite explicite :
c'est-à-dire que la variable y_i^{n+1} peut être calculée directement à partir de la connaissance de y^n en trois points de l'espace.
- . Si $\theta \in]0, 1[$, la méthode est implicite :
connaissant toutes les valeurs de y_i^n à l'instant $n \Delta t$, on peut calculer les valeurs y_i^{n+1} , mais cette opération nécessite la résolution d'un système linéaire. Un cas particulier fréquemment utilisé est $\theta = \frac{1}{2}$ qui correspond à la méthode de Crank-Nicholson /NOU/. D'autre part, la discrétisation sur l'espace devra permettre à l'ensemble des points de s'adapter au domaine spatial

L'approximation de la condition initiale sera une constante si $y(x,0)$ est constant ou a de très faibles variations ; dans les autres cas il semble préférable de prendre une approximation au sens de la moyenne. L'approximation des termes aux limites peut être plus délicate, surtout dans le cas de plusieurs dimensions d'espace où les points de la frontière ne peuvent pas être des points de maillage (voir /SIB/, p. VI, 49 et suivantes).

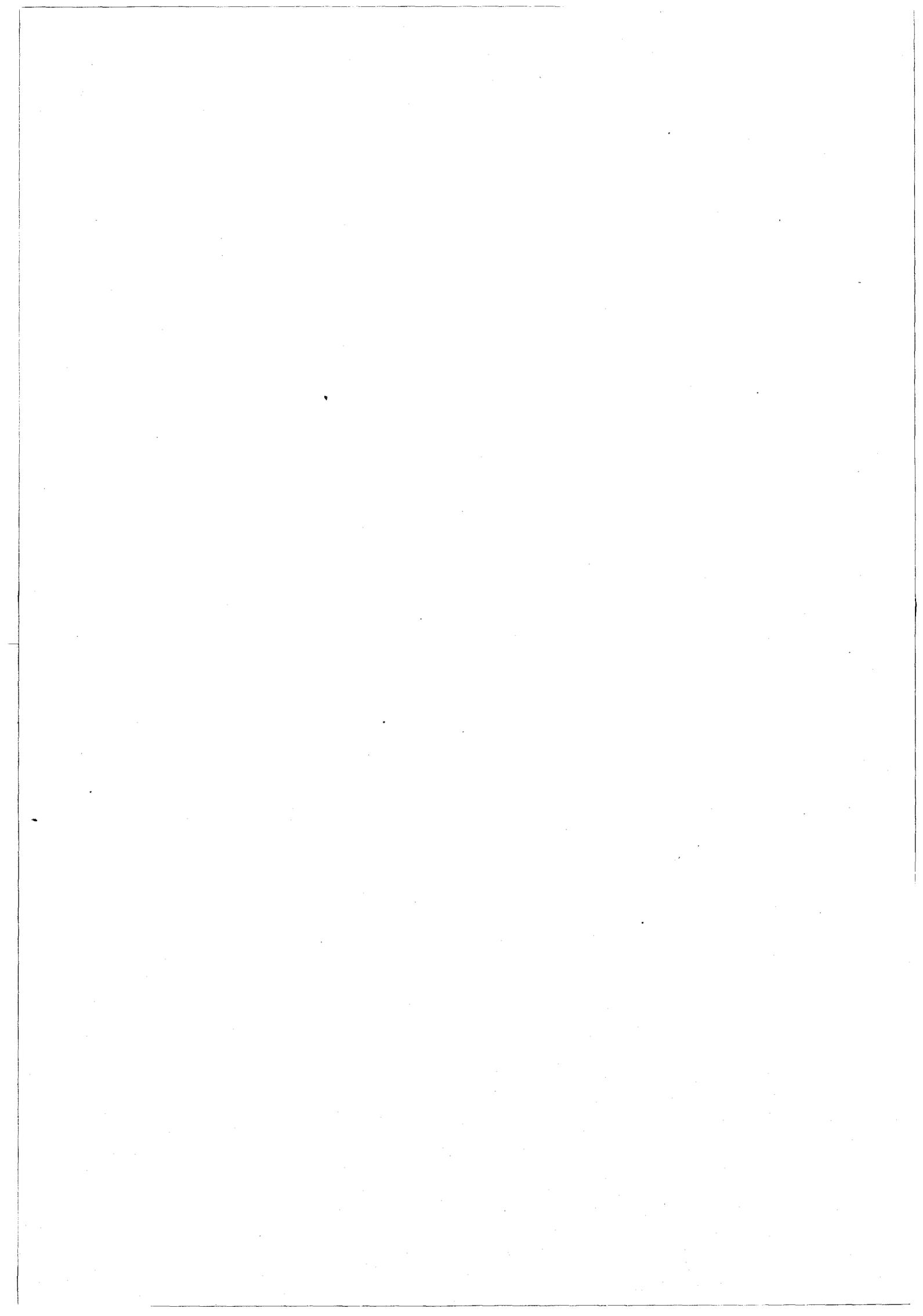
Remarques sur les méthodes d'approximation :

1. La résolution d'une équation ou d'un système d'équations aux dérivées partielles peut conduire à l'utilisation simultanée de différentes méthodes.
2. Comme nous l'avons déjà signalé pour les méthodes directes, les différents type d'opérateurs correspondent à des méthodes de résolution propres. Citons pour les équations de type hyperbolique /FRE/, /SAK-1/, /GAR-1/, /BAL-1/ et pour les équations elliptiques /NEC/, /VEK/, /GIL-1/.

CONCLUSION

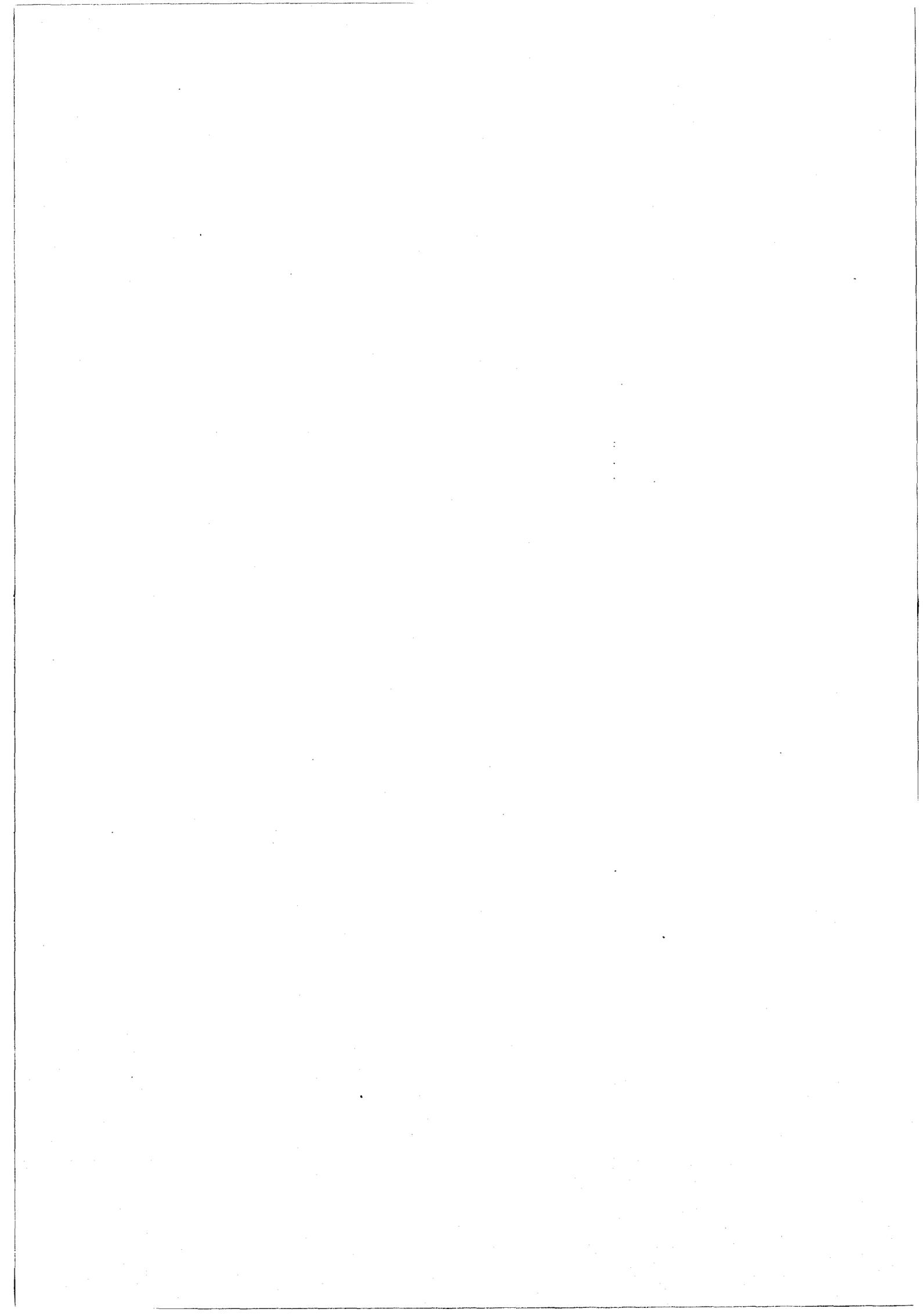
Un aperçu simplifié des nombreux travaux actuels et moins actuels de la théorie des équations aux dérivées partielles est tout d'abord tenté, en mettant l'accent sur les principaux résultats concernant spécifiquement les systèmes d'équations aux dérivées partielles qui seront l'objet essentiel de ce mémoire par la suite. Les notions de classification, les divers types de problèmes aux limites, les théorèmes d'existence et d'unicité, sont présentés.

Dans une deuxième partie, un exposé non exhaustif de méthodes d'approximation des solutions de tels systèmes est proposé. Le choix d'une méthode étant souvent difficile a priori, on retiendra que, de façon générale, les méthodes aux différences finies sont d'une application plus directe mais conduisent à des systèmes de grandes dimensions, alors que les méthodes des résidus pondérés, malgré des calculs préliminaires souvent plus complexes, conduisent à des systèmes de dimensions plus raisonnables et plus exploitables dans un but de commande.



CHAPITRE II





METHODES DE REDUCTION D'ORDRE

INTRODUCTION

Les méthodes de simplification des systèmes à paramètres distribués sont largement inspirées de celles utilisées pour les systèmes régis par des équations différentielles ordinaires. L'orientation de nos travaux nous a conduit à nous intéresser essentiellement aux méthodes de perturbations, et plus précisément encore aux perturbations dites singulières dont nous rappelons tout d'abord le principe général : l'étude des systèmes à paramètres distribués singulièrement perturbés consiste souvent en la recherche d'une solution approchée par un développement asymptotique dont la validité impose généralement des conditions de convergence au système.

Néanmoins la recherche explicite d'une solution n'est pas toujours nécessaire et, en particulier dans un but de contrôle, l'obtention d'une bonne approximation du système suffit. Les travaux de Lions /LIO-5/, fournissent ainsi, et pour une grande variété de problèmes aux limites, d'importants résultats de convergence qui assurent cette "bonne approximation" du processus par un système d'équations plus simples.

Un autre point de vue usuellement adopté dans la littérature, consiste à considérer le système à paramètres répartis comme un système différentiel de dimension infinie (Chapitre I, § II.2.1) que l'on peut approcher, par troncature adéquate, par un système différentiel de dimension finie. On peut alors utiliser les méthodes de simplification classiques des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires et en particulier celles des perturbations singulières.

D'autres méthodes de simplification de modèles sont également envisagées comme l'extension des techniques d'agrégation du linéaire au cas des processus régis par des équations aux dérivées partielles. Une définition de fonction de transfert pour ces systèmes est enfin proposée en vue d'obtenir des modèles simplifiés par le biais d'approximations de cette fonction de transfert.

I - RESULTATS GENERAUX DE L'ANALYSE DE PERTURBATIONS SINGULIERES

/O'MA-1/, /ECK-1/

I.1 - Les problèmes de perturbation

Un problème de perturbation peut être défini comme suit :

Soient V et F deux espaces de fonctions et L_ε un opérateur différentiel de V dans F contenant un petit paramètre ε . En supposant, pour la simplicité de l'exposé, que les conditions limites ou initiales sont incluses dans la définition de V , le problème consiste en la recherche d'une solution $\rho(x)$ de V telle que, x évoluant dans un domaine \mathcal{D} (généralement borné), on ait pour f de F donnée :

$$L_\varepsilon \rho = f \quad x \in \mathcal{D} \quad (1)$$

Dans le cas d'une perturbation classique, ou "régulière", l'opérateur L_ε se décompose sous la forme :

$$L_\varepsilon = A + P_\varepsilon \quad (2)$$

où A est indépendant de ε et inversible (au moins localement), et P_ε caractérise la perturbation.

Les propriétés respectives des opérateurs A et P_ε ainsi construits, permettent ensuite de prouver la validité de l'approximation de ρ par $\rho_0 = A^{-1} f$ en assurant la convergence d'un développement en série du type :

$$\rho(x, \varepsilon) = E_X^N \rho \triangleq \sum_{n=0}^N \rho_n(x) \delta_n(\varepsilon) \quad \delta_{n+1} = o(\delta_n) \quad \forall n \quad (3)$$

où les coefficients ρ_n ($n \geq 1$) sont obtenus par une procédure itérative.

L'analyse de problèmes de perturbation régulière combine donc aisément la construction d'approximations et la preuve de leur validité.

Pour les problèmes de perturbations dites "singulières", la décomposition du type (2) n'est pas possible et empêche de ce fait l'utilisation de la procédure classique précitée.

Exemple /CAR-1/ :

Soit l'équation :

$$\varepsilon (v_{xx} + v_{yy}) + v_x = y (1 - y^2) \quad (4)$$

dans $R = \{(x, y) / 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

avec la condition limite que v est nul sur les quatre côtés du carré.

On constate aisément qu'aucune solution de l'équation non perturbée ne peut vérifier les conditions limites et que, par conséquent, la solution v de (4) n'est pas une fonction analytique de ε près de $\varepsilon = 0$; une approximation asymptotique du type (3) n'est donc pas possible dans tout R .

I.2 - Procédure générale en perturbations singulières

En fait, en perturbations singulières, l'analyse sera essentiellement heuristique alliant des raisonnements rigoureux à quelques "principes" inductifs issus de l'expérience. Ainsi une procédure généralement adoptée consiste à rechercher une solution approchée de (1) ρ_{as} , dite approximation formelle, telle que :

$$\left| \begin{array}{l} L_\varepsilon \rho_{as} = f + \rho \quad \rho_{as} \in V \\ \text{avec } \rho = O(1) \end{array} \right. \quad (5)$$

Dans le cas d'opérateurs linéaires l'existence a priori d'une solution bornée suffit à affirmer la validité d'une telle approximation, la détermination de ces bornes se déduisant souvent facilement d'une propriété caractéristique de la classe de systèmes considérés. Cependant, dans des cas plus complexes, la preuve de validité d'une approximation formelle n'est pas toujours immédiate et les résultats de nombreux travaux récents peuvent alors être utilisés : /HAR-1/, /ECK-2, (Ch. 6)/.

En pratique ce concept d'"approximation formelle" est souvent lié à la construction d'un "développement régulier" du type (3) appelé également développement extérieur (ou solution du système réduit). Or, comme nous l'avons vu dans l'exemple (4), ce développement n'est généralement pas satisfaisant dans certaines régions de \mathcal{D} . On construit alors dans les voisinages de ces régions un "développement local" appelé aussi "développement de couche limite" ou "développement intérieur" qui tiendra compte des conditions limites, négligées dans le développement régulier :

Soit x_0 le point de \mathcal{D} au voisinage duquel le développement régulier n'est plus valable, et supposons pour la clarté de l'exposé que \mathcal{D} est plongé dans un espace de dimension 1. On définit une variable locale dilatée ξ par :

$$\xi \stackrel{\Delta}{=} \frac{x - x_0}{\delta_S(\varepsilon)} \quad \delta_S(\varepsilon) = o(1) \quad (6)$$

(plus généralement $\xi = \eta(x, \varepsilon)$), qui transforme la fonction $\rho(x, \varepsilon)$ en ρ^* telle que :

$$\rho(x_0 + \delta_S(\varepsilon) \xi, \varepsilon) \stackrel{\Delta}{=} \rho^*(\xi, \varepsilon) \quad (7)$$

et pour laquelle un développement peut aussi être envisagé :

$$\rho^*(\xi, \varepsilon) \approx E_{\xi}^N \rho \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^N \delta_n^*(\varepsilon) \psi_n(\xi) \quad \delta_{n+1}^* = o(\delta_n^*) \quad \forall n \quad (8)$$

Ce changement de variable $\xi = \eta(x, \varepsilon)$ réalise en fait une dilatation de la région de non uniformité, la nouvelle variable ξ pouvant alors être utilisée pour l'étude de convergence non uniforme. Le problème réside donc ici en un choix correct de la variable locale ξ /DYK/. Un principe heuristique consiste alors à rechercher les variables locales pour lesquelles la dégénération de l'opérateur L_{ε} est "significative", c'est-à-dire /ECK-1/ que L_{ε} agissant sur $\rho^*(\xi, \varepsilon)$ peut être approché par le développement suivant :

$$L_{\varepsilon} \approx \sum_n \tilde{\delta}_n(\varepsilon) L_n^{\xi} \quad \tilde{\delta}_{n+1} = o(\tilde{\delta}_n) \quad (9)$$

L_0^ξ est dit dégénérescence de L_ε relativement à la variable ξ .

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\varepsilon = \varepsilon \frac{d^2}{dx^2} - q(x), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \\ L_0^\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} - q(0) \end{array} \right.$$

Cette dégénérescence est significative si :

$$L_0^{\zeta\xi} = L_0^\xi \implies \zeta = \xi \quad (10)$$

$(L_0^{\zeta\xi})$ est le résultat d'un changement de variable ξ sur la dégénération L_0^ξ .

La variable locale ξ qui assure cette propriété est alors appelée variable de couche limite ; elle correspond également à une approximation significative de ρ , c'est-à-dire qui ne pourra se déduire d'une quelqu'autre approximation dans une autre variable.

Remarques :

1. Dans le cas de problèmes non linéaires la définition de dégénérescences significatives doit être affinée /ECK-1/, mais le principe reste valable pour une large classe de systèmes.
2. Compte tenu des définitions précédentes, différents types de problèmes de perturbation peuvent être mis en évidence /ECK-2/ :

Un problème de perturbation $L_\varepsilon \rho = f$, $\rho \in V$, $f \in F$, $x \in \mathcal{D}$ est dit régulier s'il possède les propriétés suivantes :

- a. il existe un problème limite formel $L_0 U = f_0$ où L_0 est la dégénérescence de L_ε suivant x et $f_0(x)$ une approximation régulière de $f(x, \varepsilon)$ pour $x \in \mathcal{D}$.
- b. il existe une approximation régulière $\rho_0(x)$ de ρ pour $x \in \mathcal{D}$.
- c. $L_0 \rho_0$ est partout définie et ρ_0 vérifie $L_0 \rho_0 = f_0$.

Si ces conditions de régularité ne sont pas toutes satisfaites, le problème de perturbation sera dit **singulier**. On distingue alors quatre types de problèmes suivant qu'il existe ou non un problème limite formel avec des solutions admissibles et qu'en outre il existe ou non une approximation régulière ρ_0 de ρ .

I.3 - Raccordements des développements et développements mixtes

Le processus de raccordement des développements est un outil essentiel à l'analyse des problèmes de perturbation car il permet de déterminer les constantes ou fonctions inconnues qui apparaissent dans les développements considérés (une détermination complète n'étant généralement pas possible directement). En fait il existe dans la littérature deux variantes de cette méthode de raccordement. La première, qui est issue d'un résultat classique sur l'existence de domaines étendus /KAP-1/, utilise des variables dites intermédiaires et peut être justifiée par l'hypothèse de recouvrement, c'est-à-dire par l'existence d'une intersection non vide des domaines de validité étendus des deux développements (régulier et local). Des règles de raccordement utilisant le changement de variable $\xi = \eta(x, \varepsilon)$ sont alors obtenues qui permettent de lever les indéterminations éventuelles /KAP-2/, /LAG/, /ECK-2/, /MEY/. Cependant ces règles sont généralement compliquées et de plus, l'existence d'un domaine de recouvrement où le raccordement serait possible n'est pas toujours assurée a priori. Une variante de cette méthode est donc souvent préférée, qui est basée sur le principe de raccordement asymptotique /DYK/. La procédure est ici différente et nécessite au départ des hypothèses convenables sur la structure du développement de $\rho(x, \varepsilon)$ qui doit être uniformément valable sur tout le domaine \mathcal{D} /FRA/. Soit par exemple, pour $\rho(x, \varepsilon)$, $x \in [0, 1]$, présentant un comportement de couche limite au voisinage de l'origine et relativement à une seule variable ξ_0 :

$$\rho(x, \varepsilon) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{\rho}_n(x) + \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{\psi}_n(\xi_0) + O(\varepsilon^N) \quad (11)$$

En effectuant la distorsion d'échelle ξ_0 sur les deux membres de (11) (notée $E_{\xi_0}^N$), on obtient :

$$\sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{\Psi}_n(\xi_0) = E_{\xi_0}^N \rho - E_{\xi_0}^N E_x^N \rho \quad (12)$$

donc, en reportant dans (11), il vient :

$$\rho = E_x^N \rho + E_{\xi_0}^N \rho - E_{\xi_0}^N E_x^N \rho + O(\xi^N) \quad (13)$$

qui constitue un développement mixte de $\rho(x, \varepsilon)$, uniformément valable sur tout le domaine D :

$E_x^N \rho$ en est la partie régulière ou développement extérieur,

$E_{\xi_0}^N \rho$ est le développement local ou intérieur, et

$E_{\xi_0}^N E_x^N \rho$ est l'expression en variable dilatée ξ_0 du développement régulier.

En réalisant par exemple ensuite sur (13) le développement régulier E_x^N de part et d'autre, on a :

$$E_x^N E_{\xi_0}^N \rho = E_x^N E_{x_0}^N E_x^N \rho \quad (14)$$

Les relations fournies par ce type d'identité appelée principe de raccordement asymptotique, permettent d'obtenir les constantes ou fonctions inconnues des deux développements cherchés (exemples, voir /CAR-1/, /GEE-1/, /HSI-2/).

Remarque : Dans certains problèmes d'autres développements mixtes pourront être préférés (comme par exemple les développements multiplicatifs) /DYK/.

Ces deux méthodes de raccordement ne sont cependant pas indépendantes et on a pu montrer par exemple que, sous certaines conditions (qui sont satisfaites pour la plupart des problèmes d'applications) l'hypothèse de recouvrement assure la validité d'un principe de raccordement asymptotique ainsi que l'existence d'un développement mixte. Par contre la réciproque est fautive et l'on trouve des fonctions vérifiant un principe de raccordement asymptotique avec des domaines de validité étendus disjoints pour les deux développements (régulier et local) /ECK-2/.

I.4 - Autres types de développements de fonctions

Au lieu de rechercher des développements en terme de limite, on peut aussi essayer de représenter $\rho(x, \varepsilon)$ $x \in \mathcal{D}$ par une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions du type $F(q(x)/\delta(\varepsilon)) H(x, \varepsilon)$ où $H(x, \varepsilon)$ possède un développement régulier pour tout x de \mathcal{D} . Le comportement singulier de $\rho(x, \varepsilon)$ est alors absorbé par le facteur $F(q(x)/\delta(\varepsilon))$. Généralement F est choisie de type exponentiel et les approximations ainsi construites sont dites **approximation WKB /MOR/**. Ce type d'approximations conduit souvent à des formules plus compliquées que pour les approximations en termes de fonctions limites ; cependant elles pourront leur être préférées pour certains types de problèmes particuliers où la précision est essentielle.

Dans /LEV/, /COO/, puis /O'MA-2/, les approximations WKB sont utilisées pour définir les couches limites ordinaires dans les problèmes elliptiques. Néanmoins, dans le cas des équations aux dérivées partielles, cette méthode présente de nombreux inconvénients car les termes qui composent les développements s'obtiennent alors comme solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires dont la résolution n'est pas toujours facile et ne peut être uniformisée, les résultats explicites dépendant de la géométrie du problème considéré (cf par exemple /GIV/).

Une généralisation de ces développements WKB réside dans la **méthode des échelles multiples** : au lieu de rechercher un développement sous la forme (15) :

$$F(\zeta) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^N \delta_n(\varepsilon) \rho_n(x) \quad \zeta = q(x)/\delta(\varepsilon) \quad (15)$$

on peut s'intéresser à représenter $\rho(x, \varepsilon)$ par une combinaison linéaire de fonctions qui, pour tout x de \mathcal{D} , possèdent un développement du type (16) /COC/, /COL-2,3/, /KEV/, /DYK/, /NAY-1/ :

$$\sum_{n=0}^N \delta_n(\varepsilon) \rho_n(x, \zeta) \quad \zeta = q(x)/\delta(\varepsilon) \quad (16)$$

Plus généralement encore, le développement (16) peut être envisagé avec :

$$\zeta \triangleq \frac{Q(x, \varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} \quad \text{où} \quad Q(x, \varepsilon) \triangleq \sum_{s=0}^S \tilde{\delta}_s(\varepsilon) q_s(x)$$

Enfin, on peut introduire plusieurs nouvelles variables analogues à ζ en considérant des développements du type :

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \delta_n(\varepsilon) \hat{\rho}_n(x, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) \\ & \zeta_i \triangleq \frac{Q^{(i)}(x, \varepsilon)}{\delta^{(i)}(\varepsilon)} \\ & Q^{(i)} \triangleq \sum_{s=0}^S \hat{\delta}_s(\varepsilon) q_s^{(i)}(x) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

En pratique le choix de la structure dépend des hypothèses que l'on pourra avoir a priori sur le comportement supposé des solutions.

Les termes des développements recherchés sont alors définis par l'utilisation d'une règle dite condition de non sécularité qui s'énonce comme suit :

Pour tout n de $\{0, 1, \dots, N-1\}$ et de x de \mathcal{D} :

$$\frac{\hat{\rho}_{n+1}}{\hat{\rho}_n} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \hat{\rho}_{n+1}}{\partial \zeta^P} \Big/ \frac{\partial \hat{\rho}_n}{\partial \zeta^P} \right), \quad P = 1, \dots, P_0$$

doivent être bornés quand ε tend vers 0, P_0 étant l'ordre de dérivation du problème considéré.

Dans le cas de systèmes régis par des équations différentielles ordinaires, c'est d'ailleurs pour ce type de problèmes que la méthode est le plus souvent employée, cette condition est naturelle et assure l'existence d'un développement asymptotique de la solution, du type série ; elle correspond à une procédure plus souple que la méthode WKB et permet de ce fait l'étude d'une plus large classe de systèmes

(équations de grands ordres ou systèmes d'équations).

Dans le cas des problèmes aux limites cette condition n'est pas nécessaire à l'existence d'un développement asymptotique. En fait la non sécularité conduit à des approximations analogues à celles obtenues par la méthode WKB (voir exemple /BOU-1/ pour l'application à des problèmes aux limites elliptiques).

Remarque : On a pu montrer /ECK-2/, /BOU-1/, que les approximations du type WKB comme la méthode des échelles multiples ne pouvaient être utilisées pour décrire des problèmes aux limites paraboliques.

1.5 - Compléments sur les méthodes asymptotiques

Les méthodes asymptotiques générales que nous avons rappelées ci-dessus seront d'une utilisation plus ou moins aisée suivant le type de problème considéré (type de problème aux limites, problème bien ou mal posé, forme du domaine \mathcal{D} borné ou non) et aussi suivant le caractère de la singularité (petit paramètre dans les conditions limites et/ou dans l'équation multipliant la dérivée d'ordre le plus élevé).

On trouve ainsi dans la littérature, des méthodes plus spécialement adaptées à certaines classes de problèmes. Citons ainsi par exemple les techniques proposées par Nay eh pour des équations non linéaires de type hyperbolique, la singularité provenant des conditions limites /NAY-2/.

- La méthode de renormalisation qui introduit une variable "déformée", de la forme $S_1 = \xi + \varepsilon \xi_1(x, \xi) + \dots$, correctement choisie pour assurer la validité d'une approximation formelle de la solution sur tout le domaine considéré (par élimination des termes séculiers).

- La méthode dite des "variables déformées" /LIG/, /TSI/ où ces nouvelles variables sont introduites non pas dans le développement de la solution mais directement dans l'équation caractérisant le système ; le choix des nouvelles variables assurant comme précédemment l'élimination des termes séculiers.

- La méthode analytique des caractéristiques /KLU/, /LIN/, qui généralise la méthode précédente aux cas des ondes hyperboliques à deux variables indépendantes en adoptant pour ces variables les paramètres caractéristiques de l'équation.

- La méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky qui propose une approximation formelle dont le terme principal est la solution du problème linéarisé.

Sur les problèmes non linéaires hyperboliques, on peut aussi se référer aux travaux de /GEN-1/ et /MAD/. Citons enfin un exemple de problème physique /HEA/ sur la propagation d'ondes de torsion dans un cylindre non homogène et non borné, traité à l'aide de la méthode des perturbations de Kato /KAT/.

Dans la cas plus spécifique des problèmes linéaires de type hyperbolique, des résultats caractéristiques ont également été obtenus : /GEE-1/, /BLO-1,2/, /DZA/, /SMI-1/, /DEJ/, /WEI/.

Sur les équations aux dérivées partielles elliptiques on note les travaux de Mauss qui a étendu dans sa thèse les principes généraux des perturbations singulières au cas de données aux limites discontinues ou à dérivées discontinues, et aussi aux cas de domaines non bornés ou à frontière non nécessairement convexe, engendrant ainsi un phénomène de "couche limite libre" /MAU/. Les problèmes aux limites elliptiques singulièrement perturbés ont également été traités dans /ECK-3/, /VIS/, /HAR-2/ par exemple, et pour le cas de systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques on peut citer /RAM-1/. Ces mêmes auteurs ont obtenu de façon analogue des critères de validité d'une approximation formelle pour des problèmes aux limites paraboliques linéaires et non linéaires caractérisés par un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre /RAM-2/.

Dans /ARO/ et /BOB-1/ il s'agit d'une étude spécifique des perturbations singulières de problèmes aux limites linéaires du second ordre de type parabolique. Le cas d'une équation parabolique semi linéaire a été envisagé dans /LAM/.

Enfin, l'annulation du petit paramètre engendre parfois un changement de type d'opérateur ou encore une réduction d'ordre pour le système réduit. Ces phénomènes font l'objet d'études particulières comme par exemple, pour les problèmes de perturbations "hyperboliques-paraboliques" : /ZLA-1,2/, /BOB-2/, /BEN/ en linéaire et /HSI-2/ sur un problème de Cauchy pour une équation semi-linéaire hyperbolique. Pour des cas de réduction d'ordre on peut citer, toujours pour des équations de type hyperbolique : /DEJ/, /GEE-1,2/, /GEN-2/.

Remarque : L'association des méthodes de perturbations singulières à d'autres méthodes de résolution classiques peuvent aussi parfois être fructueuses : ainsi par exemple dans /HSI-1/ la combinaison des méthodes asymptotiques et numériques (procédure de Crank-Nicolson-Galerskin) fournit des résultats très satisfaisants pour un problème de perturbations singulières parabolique comparativement à ceux obtenus par la méthode numérique seule ; l'utilisation d'une description discrète étant en outre, dans ce cas, indispensable à la résolution explicite du problème perturbé.

II - PRECISIONS SUR LA CONVERGENCE DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME AUX LIMITES PERTURBE VERS CELLE DU PROBLEME REDUIT ASSOCIE

Les différentes méthodes de recherche d'une solution asymptotique, qu'elles soient générales ou plus spécialement adaptées au problème considéré, supposent toujours la convergence (suivant une certaine norme) de la solution du problème perturbé vers celle du système non perturbé quand le petit paramètre tend vers zéro.

Dans certains cas on pourra tenter au préalable une estimation a priori de la solution (par la méthode de l'intégrale de l'énergie ou à l'aide du théorème du point fixe /GEE-1,2/ par exemple). Mais, comme nous le signalons au début de ce chapitre (§ I.2), pour des problèmes plus complexes la validité de cette approximation formelle issue du problème réduit peut être difficile à prouver.

II.1 - Exemples

II.1.1 - Tel est par exemple le cas de problèmes mal posés qui, en raison des risques de non existence de solutions pour toutes les valeurs du petit paramètre, ne peuvent être traités par les techniques usuelles des perturbations singulières.

Assez peu d'études ont été faites sur ce point particulier : dans /PAY/ une famille de problèmes de Cauchy de type elliptique est envisagée et la convergence de leurs solutions vers celles du problème non perturbé est obtenue, sous réserve de l'existence de ces solutions pour un nombre fixé de valeurs du petit paramètre. Un problème de Cauchy mal posé relatif à un opérateur elliptique est également étudié par /ADE/ qui prouve la convergence vers la solution du problème non perturbé correspondant si les deux solutions appartiennent à des espaces de fonctions convenables.

Remarque : Notons d'ailleurs qu'il peut arriver qu'un problème mal posé converge vers un problème bien posé, l'exploitation des perturbations singulières présente alors un grand intérêt.

II.1.2 - Blondel a étudié, dans sa thèse /BLO-3/, l'effet d'une perturbation singulière pour une équation aux dérivées partielles linéaire et hyperbolique, du second ordre, à deux variables indépendantes. Nous rappelons en détail cet exemple et les résultats de son analyse car il nous semble bien illustrer ces problèmes de convergence de solutions qui peuvent survenir dans l'étude des problèmes aux limites perturbés singulièrement. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (\varepsilon a_1 + a_2) \frac{\partial z}{\partial x} + (\varepsilon b_1 + b_2) \frac{\partial z}{\partial y} + c_2 z = 0 \\ a_i, b_i, c_i \text{ fonctions données de } x, y \text{ de classe } C^1_{x,y} \\ \text{dans un ouvert connexe } R \text{ du plan } x \text{ o } y. \\ a_2 \neq 0 \quad b_2 \neq 0 \quad \forall (x,y) \in R \end{array} \right. \quad (18)$$

et :

$$a_2 \frac{\partial z'}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z'}{\partial y} + c_2 z' = 0 \quad (19)$$

l'équation du problème réduit (non perturbé) associé.

Les conditions initiales sont définies par les données de Cauchy suivantes :

* Une courbe (C), présentée Figure 1, d'équation $y = \rho(x)$, ρ de classe C^2 pour $x \in [x_1, x_2]$ et d'extrémités (x_1, y_1) , (x_2, y_2) avec $d\rho(x)/dx < 0$ tout le long de (C).

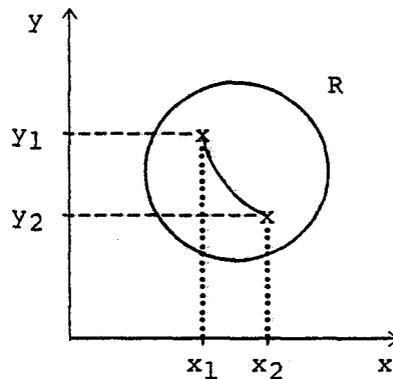


Figure 1

* Un domaine Δ du plan x o y situé au dessus de (C) , inclus dans R et limité :

- par (C) et par deux caractéristiques de (18) si $a_2 \cdot b_2 > 0$ dans R ,
- par (C) , par une caractéristique de (18) et par une caractéristique de (19) si $a_2 \cdot b_2 < 0$ dans R .

La caractéristique de (18) étant :

- . une parallèle à Oy si $b_2(x, \rho(x))/a_2(x, \rho(x)) > \rho'(x)$ sur (C) ,
- . une parallèle à Ox si $b_2(x, \rho(x))/a_2(x, \rho(x)) < \rho'(x)$ sur (C) .

* Deux fonctions :

- $f(x)$ de classe C^2 pour $x \in [x_1, x_2]$
- $q(\epsilon, x)$ de classe C_x^1 pour $x \in [x_1, x_2]$, telle que $|g(\epsilon, x)|$ soit bornée pour $x \in [x_1, x_2]$ quand ϵ tend vers zéro.

L'existence et l'unicité des solutions respectives $Z(\epsilon, x, y)$ de (18) de classe $C_{x,y}^2$ dans $\bar{\Delta}$, adhérence de Δ , et $Z'(x, y)$ de (19) de classe $C_{x,y}^1$ dans $\bar{\Delta}$ sont alors assurées par les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(\epsilon, x, \rho(x)) = f(x) \\ \left[\frac{\partial Z}{\partial x}(\epsilon, x, y) \right]_{y=\rho(x)} = g(\epsilon, x) \end{array} \right. \quad (20)$$

d'une part, et :

$$Z'(x, \rho(x)) = f(x) \quad (21)$$

d'autre part.

L'étude du comportement de $Z(\epsilon, x, y)$ pour (x, y) dans $\bar{\Delta}-C$, quand ϵ tend vers zéro, a conduit aux résultats suivants :

* Si $a_2 \cdot b_2$ est négatif pour $(x, y) \in \bar{\Delta}$ alors, sauf peut-être pour un choix très particulier des données initiales, il est impossible que $Z(\epsilon, x, y)$ tende, en demeurant bornée dans $\bar{\Delta}$, vers une limite $\xi(x, y)$ de classe $C_{x,y}^1$ dans $\bar{\Delta}$ quand ϵ tend vers zéro.

Remarque : Ceci n'exclut pas l'éventualité de circonstances exceptionnelles qui rendraient possible l'existence d'une telle limite qui serait alors la solution de (19) : par exemple la cas où $a_1 = b_1 = 0$ avec $a_2 + b_2 > 0$.

* Si a_2 et b_2 sont négatifs dans $\bar{\Delta}$, alors si pour un couple de fonctions $f(x)$ et $g(\varepsilon, x)$ judicieusement choisies, il se trouve que la limite de $Z(\varepsilon, x, y)$ quand ε tend vers zéro existe pour (x, y) dans $\bar{\Delta}-C$, il suffira de remplacer $f(x)$ par $f(x) + \eta e^{\alpha\rho(x)}$ et $g(\varepsilon, x)$ par $g(\varepsilon, x) + \theta e^{\alpha\rho(x)}$ (η et θ constantes arbitraires ≥ 0 non toutes deux nulles), pour que la solution de (18) répondant aux données de Cauchy ainsi modifiées ne tende plus vers une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour (x, y) dans $\bar{\Delta}-C$, c'est-à-dire que l'existence de la limite de $Z(\varepsilon, x, y)$ quand ε tend vers zéro pour $(x, y) \in \bar{\Delta}-C$ est un phénomène instable relativement aux données de Cauchy.

* Si a_2 et b_2 sont tous deux positifs dans Δ , alors, lorsque ε tend vers zéro, $Z(\varepsilon, x, y)$ tend vers $\xi(x, y)$ uniformément en (x, y) dans $\bar{\Delta}$, $\xi(x, y)$ étant la solution de (19) qui se réduit à $f(x)$ sur (C) .

Nous avons donc ici le cas d'un problème aux limites singulièrement perturbé qui subit une réduction d'ordre par passage à la limite quand le petit paramètre tend vers zéro et l'on constate que, suivant les valeurs que peuvent prendre certains paramètres du système, la convergence de la solution du problème perturbé vers celle du problème non perturbé peut ne pas avoir lieu.

II.2 - Résultats de Lions

Nous rappelons ici certains théorèmes de convergence issus des travaux de Lions sur les perturbations singulières dans les problèmes aux limites /LIO-5/. De nombreuses classes de problèmes supposés bien posés sont étudiées par cet auteur qui distingue ainsi, outre les problèmes stationnaires (elliptiques) des problèmes d'évolution (hyperbolique, parabolique) (cf Ch. I) :

- Les cas où les opérateurs (initial et réduit) sont de même type et les cas où il y a changement de type lors de l'annulation du petit paramètre.
- Les cas où l'ordre de l'opérateur réduit ($\varepsilon=0$) est strictement inférieur à celui de l'opérateur initial ($\varepsilon>0$).
- Les problèmes dits "raides" où les coefficients peuvent être d'ordres de grandeur très différents selon les régions.

Un grand nombre de combinaisons possibles entre ces diverses éventualités est envisagé, dans le cas linéaire ou non linéaire et avec différents types de conditions limites.

Ces études utilisent essentiellement les méthodes variationnelles qui permettent de se ramener, dans tous les cas, à une équation scalaire et dont on trouvera un rappel du principe en annexe de ce chapitre. Nous citons ici deux exemples de problèmes pour lesquels des conditions suffisantes de convergence ont été obtenues.

II.2.1 - Problèmes non raides stationnaires avec réduction d'ordre :

Dans l'ouvert Ω borné de \mathbb{R}^n , de frontière régulière Γ , on considère le problème elliptique d'ordre 2μ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon A u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f \\ \text{où : } u = [u_1, \dots, u_m] \\ f = [f_1, \dots, f_m] \end{array} \right. \quad (22)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } A u \triangleq (-1)^\mu \sum_{|\alpha|=2\mu} a_\alpha(x) D^\alpha u + \sum_{|\alpha|<2\mu} a_\alpha(x) D^\alpha u \\ a_\alpha(x) : \text{matrices de } \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ telles que :} \\ \text{(b) } (A\rho, \rho) \geq c \|\rho\|_{(H^\mu(\Omega))^m}^2, \quad c > 0, \quad \forall \rho \in (D(\Omega))^m \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } B u \triangleq \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x) u \\ B_i(x) \text{ matrices symétriques de } \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ telles que :} \\ \text{(b) } B_0(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(x) \geq \beta I ; \quad \beta > 0, \quad I = \text{identité} \end{array} \right. \quad (24)$$

et les conditions aux limites définies par :

Pour tout x de Γ , $A_{\nu}^{\frac{1}{2}}(x)u$ appartient à l'espace engendré par les vecteurs propres de $(A,B)_{\nu}(x)$ qui sont associés aux valeurs propres positives. (25)

où :

* $v = \{v_i\}$ est le vecteur unitaire normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω .

$$* A_{\nu} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{|\alpha|=2\mu} a_{\alpha} v^{\alpha} \quad B_{\nu} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^n v_i B_i$$

$$\text{où : } v^{\alpha} \stackrel{\Delta}{=} \prod_{i=1}^n v_i^{\alpha_i}$$

$$* (A,B)_{\nu} \stackrel{\Delta}{=} A_{\nu}^{-\frac{1}{2}} B_{\nu} A_{\nu}^{-\frac{1}{2}}$$

Alors pour tout ε positif ce problème admet une solution u_{ε} dans $(H_0^{\mu}(\Omega) \cap H^{2\mu}(\Omega))^m$ unique et qui converge faiblement dans $(L^2(\Omega))^m$ vers la solution u du problème réduit (26) (24) (25) :

$$B u = f \quad (26)$$

Exemple :

Soit le système en $u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \varepsilon \Delta u_{\varepsilon} + \frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial y} = f \\ - \mu \varepsilon \Delta v_{\varepsilon} + \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y} = g \text{ dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ \text{avec } u_{\varepsilon} = v_{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (27)$$

$$A_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad B_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & v_y \\ v_y & 0 \end{bmatrix}$$

donc :

$$(A,B)_v = \begin{bmatrix} 0 & \mu^{-\frac{1}{2}} v_y \\ \mu^{-\frac{1}{2}} v_y & 0 \end{bmatrix}$$

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\mu^{-\frac{1}{2}} |v_y|$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \text{sign}.v_y \end{bmatrix} \text{ et (25) s'écrit ici :}$$

$$u \text{ sign}.v_y = \mu^{\frac{1}{2}} v \quad (28)$$

ou encore :

$$\begin{cases} u + v \sqrt{\mu} = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ u - v \sqrt{\mu} = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \end{cases} \quad (29)$$

Remarque : Le problème de Blondel rappelé au § II.1.2 de ce chapitre est bien un problème non raide stationnaire avec réduction d'ordre du type (22) mais les conditions (23.b) et (24.b) ne sont pas supposées vérifiées, ni non plus les conditions aux limites (25). Ces conditions suffisantes pour la convergence n'excluent donc pas l'existence d'autres conditions également suffisantes comme celles du problème de Blondel.

II.2.2 - Problèmes non raides avec changements de type : paraboliqes/elliptiques :

Dans un but d'utilisation ultérieure nous citons ici le résultat de convergence relatif à des systèmes dont l'état est à N composantes, pour lesquelles on distingue deux échelles de temps différentes.

Soit :

$$\left| \begin{array}{l} V_i \subset H_i, V_i \text{ dense dans } H_i, \text{ l'injection } V_i \rightarrow H_i \text{ étant continue,} \\ v \stackrel{\Delta}{=} \prod_{i=1}^N V_i \subset H \stackrel{\Delta}{=} \prod_{i=1}^N H_i \end{array} \right. \quad (30)$$

(f, g) le produit scalaire dans H défini par :

$$(f, g) \triangleq \sum_{i=1}^N (f_i, g_i)_i \quad (31)$$

où $(,)_i$ est le produit scalaire dans H_i

$$a(u, v) \text{ une forme bilinéaire continue sur } V \quad (32)$$

C_ε une famille d'opérateurs de H dans H ,
symétriques, coercifs (cf Annexe), telle que :

$$\forall f \in H \quad C_\varepsilon f \longrightarrow C_0 f \quad \text{quand } \varepsilon \longrightarrow 0 \quad (33)$$

C_0 étant dégénéré dans H

Par exemple :

$$C_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \quad (34)$$

où I_p (resp. I_q) est l'identité dans $\prod_{i=1}^p H_i$ (resp. $\prod_{i=p+1}^N H_i$, $p+q=N$).

Le problème (35) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v) + a(u_\varepsilon, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \\ u_\varepsilon(0) = u_0 \in H \end{array} \right. \quad (35)$$

admet alors une solution unique u_ε dans $L^2(0, T; V)$ dont la dérivée temporelle $\partial u_\varepsilon / \partial t$ appartient à $L^2(0, T; V')$ (V' dual de V), et telle que u_ε converge faiblement vers u dans $L^2(0, T; V)$, u étant la solution du problème limite (36) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, v) + a(u, v) = (f, v) \\ u \in L^2(0, T, V), \quad C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \\ (C_0 u)(0) = C_0 u_0 \end{array} \right. \quad (36)$$

Remarque : L'introduction d'un correcteur /LIO-4/ à l'origine est ici nécessaire, qui par exemple dans le cas (34) portera sur les q dernières composantes de u (un correcteur au sens de Lions est une variable dont on connaît l'équation différentielle et qui, ajoutée à u permet d'approcher mieux u_ε ; la précision est fonction de l'ordre du correcteur).

Une grande variété de problèmes aux limites sont donc traités de façon analogue dans /LIO-5/, avec suivant le cas la nécessité de construire des correcteurs pour compenser des pertes de conditions aux limites qui peuvent survenir lors du passage à la limite (par exemple pour les problèmes elliptiques-elliptiques avec réduction d'ordre donc donnant naissance à des phénomènes de couches limites).

III - PERTURBATIONS SINGULIERES ET
METHODES D'APPROXIMATIONS CLASSIQUES (Ch. I, § II)

Les méthodes asymptotiques exposées précédemment (Ch. II, § I) exploitent l'existence d'un ou plusieurs petits paramètres dans la formulation du problème pour en obtenir une solution approchée sous forme d'un développement asymptotique. Cependant, lorsque la connaissance de la solution n'est pas indispensable à l'étude du processus, comme c'est le cas par exemple pour certaines études de stabilité ou pour les problèmes de commande, c'est davantage une bonne approximation du modèle qui est recherchée, dans le but de faciliter l'étude considérée en se ramenant à celle d'un modèle le plus simple (la recherche d'une commande optimale par exemple, devient celle d'une commande sous-optimale, cf Ch. IV).

Les résultats de Lions sur la convergence permettent ainsi d'utiliser le système approché obtenu en annulant le petit paramètre. Les perturbations singulières peuvent néanmoins être exploitées simultanément avec d'autres méthodes d'approximation et c'est ce point que nous traitons ici.

III.1 - Passage à un système à paramètres localisés

/COU-2/, /TZA-1/

Nous avons vu au Chapitre I, § II.2 et II.3, un certain nombre de méthodes d'approximation qui permettent d'approcher les systèmes à paramètres répartis régis par des équations aux dérivées partielles par des modèles définis à l'aide d'équations différentielles ordinaires. Nous détaillons ici ce point en rappelant les principales méthodes qui s'y rattachent :

. La méthode des différences finies (Ch. I, § II.3) qui permet, en appliquant des schémas aux différences aux dérivées partielles spatiales, d'obtenir un modèle de dimension finie du type :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ Y(t) = C X(t) \\ X(0) \text{ condition initiale} \end{cases} \quad (37)$$

par exemple :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) \quad 0 \leq x \leq 2\pi \\ \text{où } x \text{ est une coordonnée angulaire telle que } x = x + 2\pi \end{array} \right. \quad (38)$$

se met sous la forme (37) avec :

$$\left| \begin{array}{l} A = \frac{1}{\alpha^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = I_p \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (39)$$

où :

$$X_i(t) = y(a_i, t) \quad U_i(t) = u(a_i, t) \quad \alpha = 2\pi/p$$

avec : $a_i = 2i\pi/p \quad i = 1, \dots, p$

Remarque : Ce modèle peut ensuite être mis sous forme algébrique par discrétisation temporelle (cf Ch. I, § II.3) ou en utilisant les polynômes de Legendre /FEG/, ou encore par développement suivant les fonctions de Walsh /TZA-2/, /CHE/.

. La méthode des caractéristiques qui remplace le problème à paramètres répartis par la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires (I.27) où les dérivations totales ont lieu le long des courbes caractéristiques (Ch. I, § II.1).

. Les méthodes d'approximations fonctionnelles appelées aussi parfois méthodes des résidus pondérés (Ch. I, § II.2), qui effectuent une troncature du système différentiel ordinaire de dimension infinie équivalent au problème à paramètres répartis considéré ; le choix

de l'ordre de troncature K ainsi que celui des fonctions d'approximation ($\rho_j(x)$ dans (I.34)) est guidé par la minimisation de certains résidus (I.35), caractérisant ainsi la précision de l'approximation.

III.2 - Perturbations singulières sur le modèle approché

Une analogie formelle ayant été établie entre les systèmes gouvernés par des équations linéaires aux dérivées partielles et les systèmes à paramètres localisés, les mêmes méthodes d'étude peuvent alors être utilisées. Ainsi, l'étude des systèmes de grande dimension procède généralement à la recherche d'un modèle réduit et les méthodes asymptotiques, plus spécialement celles des perturbations singulières, ont été d'une grande utilité dans ce domaine /KOK-1/.

La modélisation d'un problème de grande dimension sous forme singulièrement perturbée n'est cependant pas toujours immédiate : elle concerne essentiellement les systèmes à plusieurs échelles de temps ou présentant des comportements haute et basse fréquences, ou encore sujets à des phénomènes parasites. Le modèle singulièrement perturbé peut apparaître naturellement lors de la formulation du problème physique ou par exemple dans le cas de l'utilisation des méthodes d'approximations fonctionnelles, par un choix judicieux des sous espaces H_K et H_R (cf Ch. I, § II.2.2) : ce qui permet dans ce cas, dès le début de l'étude, d'augmenter le rang de troncature du système différentiel de dimension infinie donc la précision de l'approximation, sachant que cette augmentation d'ordre sera compensée par la réduction d'ordre issue de la méthode des perturbations singulières ; la troncature peut d'ailleurs être réalisée, suivant le critère de Shaw, soit directement sur le système global, soit sur la partie rapide (ou hautes fréquences).

Remarque : Certains auteurs (Kelley, Ardema, Calise, Shinar) ont inséré le petit paramètre ϵ artificiellement dans le système avec de bons résultats, en particulier pour les problèmes non linéaires : on parle alors de perturbations singulières forcées.

Néanmoins, le plus souvent, la forme singulièrement perturbée n'est pas connue a priori, et des transformations préalables sont nécessaires pour y parvenir. On trouvera une discussion générale sur la difficulté d'une telle modélisation dans /KOK-2/.

Dans ce paragraphe nous considérons donc un système linéaire caractérisé par une équation d'état du type (37) où l'état $X(t)$ appartient à \mathbb{R}^n , et qui constitue un modèle approché d'un système à paramètres répartis.

III.2.1 - Séparation des dynamiques :

Diverses méthodes analytiques ou géométriques peuvent être utilisées pour déterminer la forme singulièrement perturbée d'un tel système, si elle existe. Ce point peut être précisé comme suit /CHO-1/.

Le système (37) possède la propriété de double échelle des temps s'il peut être décomposé en deux sous-systèmes :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_\ell \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\ell \\ X_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_r \end{bmatrix} u \\ \\ Y = \begin{bmatrix} C_\ell & C_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\ell \\ X_r \end{bmatrix} \end{cases} \quad (40)$$

$$X_\ell \in \mathbb{R}^{n_1}, X_r \in \mathbb{R}^{n_2}, n_1 + n_2 = n$$

conditions initiales $(X_\ell(0), X_r(0))$

et si les valeurs propres de A_ℓ et A_r sont telles que :

$$| \lambda_{\max} (A_\ell) | \ll | \lambda_{\min} (A_r) | \quad (41)$$

ou encore, si A^{-1} existe, $\|A\|$ désignant la norme euclidienne de A :

$$\|A_r^{-1}\| \ll \|A_\ell\|^{-1} \quad (42)$$

Le partitionnement du système initial, c'est-à-dire le choix des composantes lentes et rapides, reste cependant un problème délicat. Sa résolution repose toujours sur une détermination plus ou moins approchée des valeurs propres du système. Citons, pour les méthodes analytiques : lorsque les valeurs propres et/ou les vecteurs propres sont connus, les travaux de Syrcos et Sannuti /SYR/ qui conduisent

à la détermination de l'ordre n_1 des variables lentes, puis à la forme singulièrement perturbée ; lorsque les valeurs propres sont inconnues, la méthode de Magni /MAG/ permet de trouver la dimension optimale du système lent en minimisant la norme de la matrice de découplage.

Des méthodes géométriques ont également été proposées dans la littérature, basées sur la localisation des valeurs propres dans le plan complexe : régions de Gudkov /CHA-3/, disques de Gershgorine /BAU/, /DEI/, /DAU-1,2,3/, ainsi que des homotopies permettant de transformer un domaine en un autre (par exemple le demi plan complexe à gauche de l'axe imaginaire en cercle unité) /GUT-1/, /BAR-1/.

III.2.2 - Mise sous forme bloc-diagonale :

La connaissance "a priori" des variables lente X_1 et rapide X_2 permet donc le partitionnement de (37) suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ Y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ X_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, X_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, n_1 + n_2 = n \\ \text{conditions initiales } (X_1(0), X_2(0)) \end{cases} \quad (43)$$

Le découplage des sous systèmes lent et rapide sous la forme (40) peut alors être obtenu par la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} I_1 & M \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ L & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + ML & M \\ L & I_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

où les matrices $L \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ et $M \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ sont solutions respectivement de l'équation de Riccati (45) et de l'équation de Lyapunov (46) :

$$A_{21} + L A_{11} - L A_{12} L - A_{22} L = 0 \quad (45)$$

$$A_{l2} - A_l M - M A_r = 0 \quad (46)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_l = A_{11} - A_{12} L \\ A_r = A_{22} + L A_{12} \\ B_r = L B_1 + B_2 \\ C_l = C_1 - C_2 L \\ B_l = B_1 + M B_r \\ C_r = C_2 - C_l M \end{array} \right. \quad (47)$$

L'existence et le calcul des solutions L et M des équations (45) et (46) ont été étudiés par de nombreux auteurs /KOK-3/, /CHO-1/, /MAG/, /AVR/, /AND/ : plusieurs méthodes existent qui conduisent à différentes solutions possibles, la validité et la précision des résultats dépendent du partitionnement initial (43) ainsi que de la séparation plus ou moins marquée des modes. Citons par exemple, le calcul des suites L_k et M_k proposé par Kokotovic /KOK-3/, qui consiste à définir les récurrences suivantes :

* Pour L :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{k+1} = A_{22}^{-1} (A_{21} + L_k A_{11} - L_k A_{12} L_k) \\ L_0 = A_{22}^{-1} A_{21} \end{array} \right. \quad (48)$$

qui converge vers une racine réelle bornée de (45) si :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{22} \text{ inversible} \\ \|A_{22}^{-1}\| \ll (\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|)^{-1} \end{array} \right. \quad (49)$$

avec :

$$A_0 = A_{11} - A_{12} L_0 \quad (50)$$

La matrice L_0 est alors utilisée comme une approximation à $0(\epsilon)$ de L , ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} A_\ell = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + 0(\epsilon) \\ A_r = A_{22} + 0(\epsilon) \end{cases} \quad (51)$$

* Pour M :

$$\begin{cases} M_{k+1} = \left[(A_{11} - A_{12} L) M_k - M_k L A_{12} \right] A_{22}^{-1} + A_{12} A_{22}^{-1} \\ M_0 = A_{12} A_{22}^{-1} \\ L = L_0 + 0(\epsilon) \end{cases} \quad (52)$$

conduit à :

$$M = A_{12} A_{22}^{-1} + 0(\epsilon) \quad (53)$$

III.2.3 - Systèmes singulièrement perturbés :

La séparation des dynamiques étant acquise (§ II.3.2.1), le phénomène de perturbations singulières apparaît naturellement dans les équations (43) du modèle après normalisation des ordres de grandeurs des termes matriciels à l'aide d'un petit paramètre ϵ positif :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \epsilon \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ X_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \quad X_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \quad n_1 + n_2 = n \\ \text{conditions initiales } (X_1(0), X_2(0)) \end{cases} \quad (54)$$

avec :

$$A_{21} = A_{21}^* / \varepsilon \quad A_{22} = A_{22}^* / \varepsilon \quad B_2 = B_2^* / \varepsilon$$

ε correspond donc à un rapport entre les échelles lente (t) et rapide (τ) et s'il est suffisamment petit, la technique dite des "perturbations singulières" fournit un autre moyen de découplage des parties lente et rapide.

Etude de la partie lente :

Lors de l'évolution du processus, après la phase initiale où la partie rapide est prépondérante, les modes rapides (s'ils sont stables) deviennent négligeables, ce qui revient à les considérer comme infiniment rapides, donc à faire tendre ε vers zéro.

Pour $\varepsilon = 0$, les variables X_1 , X_2 , U et Y de (54) sont approchées par $X_{1\ell}$, $X_{2\ell}$, U_ℓ et Y_ℓ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \dot{X}_{1\ell} = A_{11} X_{1\ell} + A_{12} X_{2\ell} + B_1 U_\ell \\ \text{(b)} \quad 0 = A_{21}^* X_{1\ell} + A_{22}^* X_{2\ell} + B_2^* U_\ell \\ Y_\ell = C_1 X_{1\ell} + C_2 X_{2\ell} \end{array} \right. \quad (55)$$

L'équation (a) décrit l'évolution des variables lentes, alors que (b) caractérise le mouvement d'entraînement des composantes lentes des variables rapides $X_{2\ell}$ par les variables lentes $X_{1\ell}$.

L'équation d'état associée à la partie lente s'écrit alors, si A_{22}^{*-1} existe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_{1\ell} = A_\ell X_{1\ell} + B_\ell U_\ell \\ Y_\ell = C_\ell X_{1\ell} + D_\ell U_\ell \\ X_{1\ell}(0) = X_1(0) \end{array} \right. \quad (56)$$

où :

$$\begin{array}{ll} A_\ell = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & B_\ell = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2 \\ C_\ell = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} & D_\ell = - C_2 A_{22}^{-1} B_2 \end{array}$$

On obtient donc un système réduit d'ordre n_1 comportant une transmission directe de l'information, qui réalise une approximation des variables X_1 sur tout l'intervalle de temps $[0, +\infty[$.

Etude de la partie rapide :

Les composantes $X_{2\ell}$ par contre, ne représentent que le régime établi des variables rapides, puisque les valeurs initiales $X_{2\ell}(0)$ sont généralement différentes de $X_2(0)$. On définit alors une équation de couche limite (57) obtenue par différence entre le système réel (54) et le système lent simplifié, les variables lentes étant supposées immobiles pendant les transitions rapides ($\dot{X}_\ell = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{X}_{2r} = A_{22}^* X_{2r} + B_2^* U_r \\ Y_r = C_2 X_{2r} \\ X_{2r}(0) = X_2(0) - X_{2\ell}(0) = X_2(0) + A_{22}^{-1} A_{21} X_1(0) \text{ d'après (55.b)} \end{array} \right. \quad (57)$$

La partie rapide du système global est alors approchée par la relation :

$$X_2(t) = X_{2r}(t) + X_{2\ell}(t) + O(\varepsilon) \quad (58)$$

Remarques :

1. Cette méthode conduit aux mêmes résultats que la bloc-diagonalisation mais elle tient compte de l'influence de la partie lente sur les composantes rapides du système par l'approximation (58). Notons cependant, qu'à l'inverse de la méthode de bloc-diagonalisation, une séparation de la commande U en $U_\ell + U_r$ est nécessaire ici. La méthode des perturbations singulières présente néanmoins l'avantage d'être généralisable au cas des systèmes non linéaires /ARD/ ce qui n'est naturellement pas le cas de la bloc-diagonalisation.

2. Une amélioration de cette méthode des perturbations singulières a été proposée par Dauphin-Tanguy /DAU-2/ avec la définition d'un système réciproque, caractérisé par une inversion du comportement fréquentiel et dynamique du système étudié. Il s'en suit une précision identique, pour les dynamiques élevées, à celle fournie habituellement par la méthode des perturbations singulières pour les parties lentes. Cette approche permet également de découpler des sous-systèmes avec une précision satisfaisante même quand les dynamiques ne sont pas très nettement séparées, puisque chaque partie tient également compte du comportement dynamique de l'autre.

3. Une extension aux systèmes à plusieurs échelles de temps (ϵ_i , $i=1, \dots, n$) est possible : lorsque les dynamiques sont proches, on reformule le problème en problème à paramètre unique /KOK-1/, /HOP/ ; dans le cas contraire, une séparation itérative des différents sous-systèmes est effectuée par dégénérescence progressive /SAN/, /DAU-4/.

IV - AUTRES METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELES

La notion de simplification de modèles comprend les simplifications d'ordre structurel (linéarisation, remplacement d'un système d'équations aux dérivées partielles par des équations différentielles ordinaires, cf § III.1), les décompositions du système initial en sous-systèmes (c'est la démarche utilisée en commande hiérarchisée), les diminutions d'ordre du modèle sans modification de structure dont font partie les méthodes de perturbations. D'autres techniques de réduction de dimensionnalité existent dans la littérature, à savoir :

. La "méthode du modèle", qui consiste à minimiser l'erreur entre le modèle initial et le modèle simplifié choisi a priori, pour différents types d'entrées.

. Les approches modales, consistant à retenir dans le modèle simplifié les modes prépondérants du système initial. Nous avons déjà présenté à ce titre le principe de troncature dans le cas d'un système de dimension infinie (Ch. I, § II.2.2.2). Les techniques d'agrégation font aussi partie de cette classe de méthodes.

. Les approximations de l'opération de transfert par un développement limité.

Ce sont ces deux dernières approches que nous allons considérer dans cette partie, en proposant une extension des résultats obtenus pour les systèmes régis par des équations différentielles ordinaires aux problèmes aux limites, mais sans approximation préalable de ces systèmes (comme au § III.1, par exemple).

IV.1 - Agrégation d'un système aux dérivées partielles

Considérons, pour fixer les idées, le problème parabolique suivant (notations de Lions, Annexe), en dimension N :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} = A y + f \quad y \in Q = \Omega \times]0, T[, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ y = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \end{array} \right. \quad (59)$$

dans le cas particulier où l'opérateur A est mis sous la forme canonique (60) :

$$A y = \sum_{i=1}^n \left[A_i \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} + B_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \right] + C y \quad (60)$$

A_i, B_i, C matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$ fonctions ou non des variables distribuées x et t .

Et soit $z, e \tilde{Q} = \tilde{\Omega} \times] 0, T [$, $\tilde{\Omega}$ restriction de Ω à \mathbb{R}^M ($M < N$), l'état du modèle réduit (61) :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^n (F_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} + G_i \frac{\partial z}{\partial x_i}) + H z + g \quad z \in \tilde{Q} \\ z = 0 \text{ sur } \tilde{\Sigma} = \tilde{\Gamma} \times] 0, T [, \tilde{\Gamma} \text{ frontière de } \tilde{\Omega} \\ z(x, 0) = z_0(x) \text{ sur } \tilde{\Omega} \end{array} \right. \quad (61)$$

On dira que (61) est un modèle agrégé de (59) (60) si et seulement si il existe une matrice P de $\mathbb{R}^{M \times N}$ ($M < N$), telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \text{(i)} \quad z = P y \quad P \in \mathbb{R}^{M \times N} \\ \text{(ii)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ P A_i = F_i P \quad P B_i = G_i P \quad P C = H P \quad P f = g \end{array} \right. \quad (62)$$

Ce qui, d'après les résultats classiques d'algèbre matricielle /GAN/ implique l'inclusion respective des spectres des matrices du modèle réduit dans ceux des matrices du problème initial, soit :

$$\left| \begin{array}{l} S_p(F_i) \subset S_p(A_i) \\ S_p(G_i) \subset S_p(B_i) \\ S_p(H_i) \subset S_p(C_i) \\ i = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (63)$$

L'obtention du modèle agrégé est donc aisée dans le cas particulier où les matrices A_i , B_i et C peuvent toutes être diagonalisées simultanément (par le même changement de base T), c'est-à-dire si elles sont commutatives deux à deux /GAN/.

La forme générale de la matrice d'agrégation est alors :

$$P = Q \begin{bmatrix} I_M & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \quad (64)$$

où Q est une matrice quelconque régulière de dimension m .

Un exemple important de la physique correspondant à ce cas particulier est celui où l'opérateur A de (59) est le Laplacien Δ :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} \quad y \in \mathbb{R}^N \quad (65)$$

Comme pour la troncature des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires (cf Ch. I, § II.2.2), cette méthode pose la question du choix des modes à retenir dans le modèle réduit /GOP/.

IV.2 - Approximation du type "Padé"

IV.2.1 - Fonction de transfert d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles :

La notion de fonction de transfert d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles peut être introduite à l'aide de la transformation de Laplace à plusieurs variables. On trouve quelques utilisations de cette fonction de transfert généralisée dans la littérature (voir par exemple /BAN/). Pour la clarté de l'exposé, nous développons cette étude dans le cas de deux variables indépendantes x et t , tout en sachant qu'une extension au cas où la variable spatiale est de dimension n serait immédiate.

La définition de la transformée de Laplace à deux variables d'une fonction $f(x,t)$ est donnée dans /HLA/, par :

$$L^2 (F(x,t)) = F(p,q) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-qx-pt} F(x,t) dx dt \quad (66)$$

où $f(x,t)$ vérifie certaines conditions de convergence, permettant en outre d'inverser l'ordre dans lequel on effectue l'intégration double (voir /HLA/ pour les hypothèses et résultats mathématiques liés à cette définition).

Il est alors possible d'étendre la définition de la fonction de transfert d'un processus au cas des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, comme étant le rapport des transformées de Laplace (à plusieurs variables) de la sortie sur l'entrée, à conditions initiales et limites nulles.

Reprenons par exemple le problème parabolique (59) (60) envisagé au paragraphe précédent, qui s'écrit, pour $n=1$, et dans le cas général d'une entrée $e(x,t)$ et d'une sortie $s(x,t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} = A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B \frac{\partial y}{\partial x} + C y + D e \quad y \in Q \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma, y(x,0) = y_0(x) \text{ sur } \Omega \\ s = K y + L e \end{array} \right. \quad (67)$$

Dans le cas de matrices constantes et en posant :

$$L^2(e) = E(p,q) \quad L^2(s) = S(p,q) \quad L^2(y) = Y(p,q)$$

il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} p Y = A q^2 Y + B q Y + C Y + D E \\ S = K Y + L E \end{array} \right. \quad (68)$$

d'où la fonction de transfert $W(p,q)$ de ce système :

$$W(p,q) = \frac{S(p,q)}{E(p,q)} = K (pI - Aq^2 - Bq - C)^{-1} D + L \quad (69)$$

Plus généralement, il sera toujours possible de définir de cette façon la fonction de transfert de tout système d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants, le cas d'un système multivariable correspondant plus précisément à une matrice de transfert.

Réciproquement, un système à paramètres répartis étant connu par sa fonction de transfert, montrons qu'il est toujours possible de remonter à l'équation régissant le système, équation scalaire mais aussi équation matricielle (analogue par exemple aux formes Compagne ou Frobenius des équations différentielles ordinaires /KAI/). Considérons donc une fonction de transfert à deux variables, rapport de deux polynômes $N(p,q)$ et $D(p,q)$ à coefficients scalaires constants de la forme :

$$W(p,q) = \frac{N(p,q)}{D(p,q)} = \frac{\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} n_{ij} p^i q^j}{\sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{\ell=0}^{\beta} d_{k\ell} p^k q^{\ell}} \quad (70)$$

Remarque : Le degré du numérateur est toujours au plus égal à celui du dénominateur, l'égalité correspondant au cas d'une transmission directe de l'information (terme LE dans (68)).

La transformation de Laplace inverse fournit alors si on pose :

$$W(p,q) = \frac{S(p,q)}{E(p,q)} \quad \text{avec} \quad E(p,q) = L^2(e) \quad \text{et} \quad S(p,q) = L^2(s)$$

l'équation aux dérivées partielles scalaire (pour e et s scalaires) :

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} n_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} e(x,t) = \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{\ell=0}^{\beta} d_{k\ell} \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^{\ell}} s(x,t) \quad (71)$$

Or une telle équation est équivalente (cf Ch. I, § I.3.2) à un système de $(\alpha+\beta-1)$ équations d'ordre 1, l'état du système étant alors :

$$y = \left[s, \frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial s}{\partial x}, \dots, \frac{\partial s}{\partial t^{\alpha-1}}, \frac{\partial s}{\partial x^{\beta-1}} \right]^T \quad (72)$$

Cependant dans le cas où la fonction de transfert se met sous la forme particulière (73) :

$$W(p,q) = \frac{N(p,q)}{D(p,q)} = K + \frac{\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} n_{ij} p^i q^j}{p^{\alpha+1} + \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{\ell=0}^{\beta} d_{k\ell} p^k q^{\ell}} \quad (73)$$

On peut, comme pour les équations différentielles ordinaires, prendre pour état du système les dérivées successives de s par rapport à t (on pourrait si c'est $q^{\alpha+1}$ qui existe, prendre les dérivées successives par rapport à x). On obtient alors une équation d'état matricielle équivalente également à l'équation scalaire fournie par la fonction de transfert, mais où l'ordre par rapport aux dérivations temporelles (respectivement spatiales) est 1 :

La fonction de transfert (73) peut encore s'écrire :

$$W(p,q) = K(q) + \frac{\sum_{i=0}^{\alpha} [N_i(q)] p^i}{p^{\alpha+1} + \sum_{i=0}^{\alpha} [D_i(q)] p^i} \quad (74)$$

où les N_i , D_i et K sont des opérateurs spatiaux.

Par la méthode du vecteur état, on obtient alors la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \left[s, \frac{\partial s}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{\alpha} s}{\partial t^{\alpha}} \right]^T \\ \frac{\partial y}{\partial t} = A y + B e \\ s = C y + K e \end{array} \right. \quad (75)$$

où A , B , C sont les opérateurs spatiaux suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 \\ -D_0 & \dots & \dots & \dots & -D_\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 \\ -d_{00} & \dots & \dots & \dots & -d_{\alpha 0} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{\beta} \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ -d_{j0} & \dots & \dots & \dots & -d_{\alpha j} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [N_0 \quad \dots \quad N_\alpha]$$

Cette mise en équation d'état (75) correspond à la notation de Lions des systèmes paraboliques (cf exemple (67)).

IV.2.2 - Approximations de la fonction de transfert :

La notion de fonction de transfert introduite au paragraphe précédent permet d'envisager une classe de méthodes de réduction d'ordre basées sur une troncature de la fonction de transfert et largement développées dans le cas des systèmes à paramètres localisés /ASH/, /GUT-2/, /INO/, /HUT/, /SHA-2/, /SAF/, /GIL-2/, /WUY/, /BRE-2/.

Ces méthodes utilisent le principe des approximants de Padé à une seule indéterminée, qui a été étendu récemment au cas de deux variables par de nombreux auteurs /BOS/, /LUT/, /CHI-1/, /GRA-2/, /JON/et même au cas de n variables /CHI-2/.

Nous rappelons ici qu'un approximant de Padé, noté $[n_1, n_2/m_1, m_2]$, de la fonction de transfert $W(p, q)$ de (70) à deux variables, est une fonction rationnelle :

$$\hat{W}(p,q) = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \hat{n}_{ij} p^i q^j}{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \hat{d}_{ij} p^i q^j} = \frac{\hat{N}(p,q)}{\hat{D}(p,q)} \quad (76)$$

telle que les développements autour de (0,0) de $W(p,q)$ et de $\hat{W}(p,q)$ soient identiques pour les premiers termes :

$$N(p,q) \hat{D}(p,q) - \hat{N}(p,q) D(p,q) = \quad (77)$$

$$D(p,q) \left[\sum_{i=n_1+m_1+1}^{\infty} \sum_{j=n_2+m_2+1}^{\infty} R_{ij} p^i q^j \right]$$

On aura une réduction d'ordre pour un choix de m_1, m_2 tel que $m_1+m_2 < \alpha+\beta$. Les coefficients de la fonction de transfert réduite sont alors donnés par la résolution du système linéaire (77). Comme nous l'avons montré précédemment, il est ensuite possible de se ramener à une équation matricielle aux dérivées partielles, d'ordre inférieure à celle de départ.

Remarque : On pourrait de même envisager des développements pour les hautes fréquences ($p=\infty$ et $q=\infty$), pour les hautes fréquences temporelles et basses fréquences spatiales ($p=\infty$ et $q=0$), ou réciproquement ($p=0$ et $q=\infty$).

CONCLUSION

Les méthodes asymptotiques de simplification de modèle et plus particulièrement celle des perturbations singulières sont d'un grand intérêt pour l'étude des systèmes à paramètres répartis. Elles procèdent généralement à la recherche d'une solution approchée du système donnée sous forme d'un développement asymptotique en fonction du ou des petits paramètres.

L'utilisation de cet outil est néanmoins un peu plus délicate que dans le cas des systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. Nous avons en particulier attiré l'attention sur les problèmes de convergence de la solution du système étudié vers celle du système approché (obtenu en annulant le ou les petits paramètres) qui peuvent survenir dans certains cas.

Ce point étant supposé acquis, nous nous sommes ensuite intéressé davantage à la recherche d'une approximation du modèle initial plutôt qu'à sa solution. La plupart des travaux effectués dans ce sens considèrent la formulation des systèmes à paramètres répartis sous la forme de systèmes d'équations différentielles ordinaires de dimension infinie sur lesquels, après troncature, on applique les techniques de perturbations singulières des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires.

Cette analogie entre systèmes à paramètres répartis et systèmes à paramètres localisés permet naturellement d'appliquer au systèmes d'équations différentielles ordinaires qui approche le processus initial, les techniques classiques de simplification de modèles : des simplifications d'ordre structurel supplémentaires comme par exemple la linéarisation ; la décomposition en plusieurs sous-systèmes, utile en particulier dans les problèmes à commande hiérarchisée ; les méthodes de réduction de dimensionnalité enfin, dont font d'ailleurs partie les méthodes de perturbations et de troncature, mais qui regroupent aussi les techniques d'agrégation ainsi que les approximations de l'opérateur transfert.

Une extension de ces deux dernières méthodes est proposée en dernier lieu : leur application est réalisée directement sur les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, sans l'approximation préalable par un système d'équations différentielles ordinaires.

ANNEXE

Les méthodes variationnelles

/LIO-5/, /BRE-1/

Soit $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions p -mesurables sur Ω ouvert de \mathbb{R}^n :

$$L^p(\Omega) \triangleq \left\{ f ; \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty \right\} \quad (78)$$

Remarque : Pour p infini on a $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{\Omega} |f(x)|$.

Soit $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre m :

$$\left. \begin{aligned} H^m(\Omega) &\triangleq \left\{ \rho ; \forall \alpha, |\alpha| \leq m, D^\alpha \rho \in L^2(\Omega) \right\} \\ \text{où : si } \alpha &= \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ D^\alpha \rho &\triangleq \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \right]^{\alpha_2} \dots \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{\alpha_n} \quad (\text{cf Ch. I}) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

muni du produit scalaire (80) qui lui confère une structure d'espace de Hilbert sur \mathbb{R} :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} \triangleq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx \quad (80)$$

et son sous-espace $H_0^m(\Omega)$ tenant compte des conditions limites sur la frontière Γ de Ω :

$$H_0^m(\Omega) \triangleq \left\{ \rho ; \rho \in H^m(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m-1, D^\alpha \rho|_{\Gamma} = 0 \right\} \quad (81)$$

Avec ces notations, l'écriture variationnelle d'un problème aux limites est donnée par le produit scalaire de chacun des membres de l'équation aux dérivées partielles par un vecteur v quelconque.

Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue coercive sur $H^m(\Omega)$, c'est-à-dire telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(v,v) \geq c \|v\|_{H^m(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^m(\Omega) \quad c > 0 \\ a(u,v) \stackrel{\Delta}{=} (Au,v)_{H^m(\Omega)} \quad \text{où } Au \in [H^m(\Omega)]' \end{array} \right. \quad (82)$$

L'opérateur A équivalent à la forme bilinéaire est un opérateur différentiel de $H^m(\Omega)$ dans son dual $[H^m(\Omega)]'$.

Dans ces conditions, le problème aux limites (83) (problème stationnaire (cf Ch. I, § I.1)) :

$$\exists ! u \in H_0^m(\Omega) \quad Au = f \quad (83)$$

est équivalent à l'équation variationnelle (84) :

$$\exists ! u \in H_0^m(\Omega) \quad \forall v \in H_0^m(\Omega) \quad a(u,v) = (f,v)_{H^m(\Omega)} \quad (84)$$

Dans le cas de problèmes d'évolution (cf Ch. I, § I.1), il convient de remplacer Ω par $Q = \Omega \times]0, T[$, Γ par $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ et $L^p(\Omega)$ par $L^p(0, T; V)$, espace des fonctions f définies sur $]0, T[$ à valeurs dans l'espace de Hilbert V et telles que :

$$\int_0^T \|f(t)\|_V^p dt < \infty$$

Soit le problème d'évolution (85) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + A(t) y = f \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[\quad (\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N) \\ \text{avec } y = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\quad \Gamma \text{ frontière de } \Omega \\ y(x,0) = y_0(x) \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \quad (85)$$

où l'opérateur A est défini par (cf Ch. I, § I.1, (5)) :

$$\left. \begin{aligned}
 A(t) y &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial y}{\partial x_i}) \\
 \text{tel que, } \forall (i,j) &\in \{1, \dots, n\}^2 : \\
 &\left| \begin{aligned}
 a_{ij}(x,t) &\in L^\infty(Q) && (86) \\
 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j &\geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \\
 \alpha &> 0 \quad \xi_i \in \mathbb{R}
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de la dérivée au sens des distributions (87) :

Soient $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω ,
 $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\forall f \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \exists ! \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad / \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (87)$$

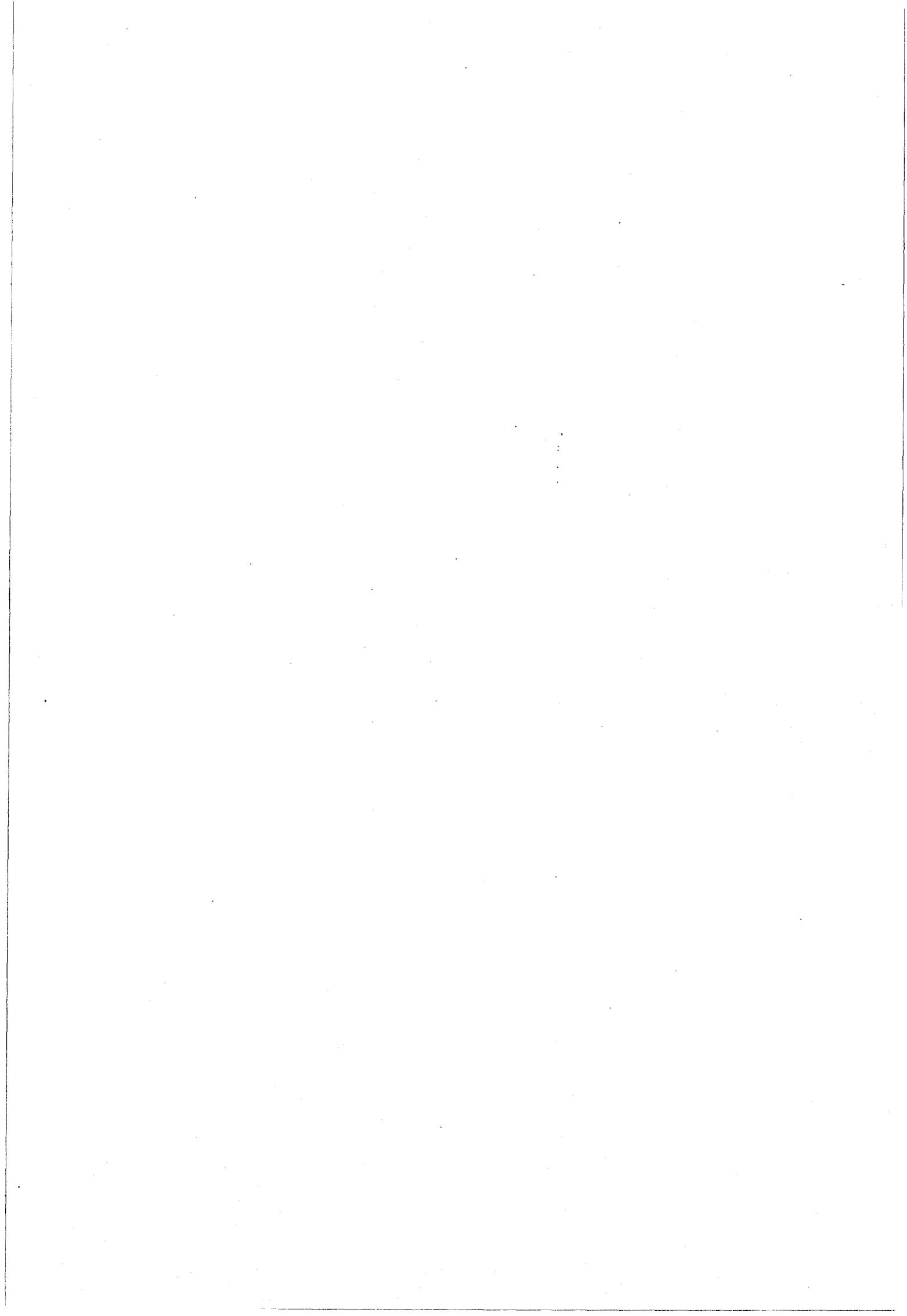
$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \rho \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \, dx$$

le problème variationnel équivalent à (85) s'écrit :

$$\forall \Psi \in H_0^1(\Omega) \quad a(t; y, \Psi) + \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \Psi \right)_{H_0^1(\Omega)} = (f, \Psi) \quad (88)$$

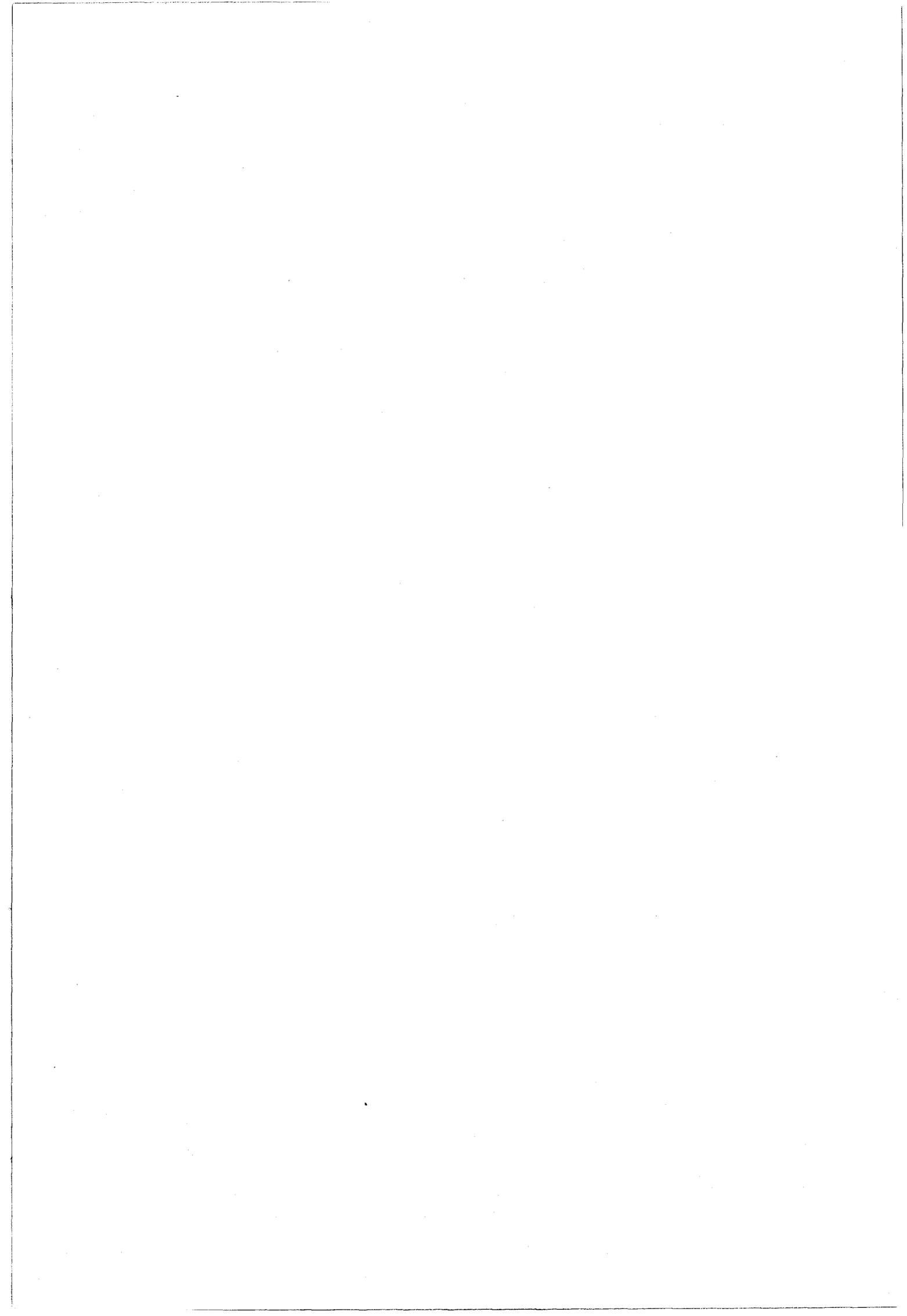
où la forme bilinéaire a est définie par :

$$\forall \rho, \Psi \in H^1(\Omega) \quad a(t; \rho, \Psi) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x,t) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \, dx \quad (89)$$



CHAPITRE III





SIMPLIFICATION DE MODELES POUR DES SYSTEMES
A PARAMETRES REPARTIS SINGULIEREMENT PERTURBES

INTRODUCTION

Une méthode originale de simplification de systèmes à paramètres distribués est présentée dans cette partie.

L'étude concerne une large classe de processus modélisés par des équations aux dérivées partielles pour lesquelles il est possible de mettre en évidence l'existence de comportements spatiaux et/ou temporels différents.

Par analogie avec les méthodes de perturbations singulières employées pour les systèmes à paramètres localisés (équations différentielles ordinaires) une séparation des différents modes est proposée tant pour le domaine temporel que pour le domaine spatial, et ce directement sur le système étudié, sans aucune approximation préalable (cf Chapitre II). Un ou plusieurs découplages du modèle initial peuvent ainsi être obtenus, qui conduisent à des sous-systèmes plus simples à analyser.

Différents cas de découplage sont envisagés puis illustrés par des exemples d'application : la méthode est présentée en détail sur des cas simples pour plus de clarté, mais des généralisations et extensions sont proposées en dernier lieu qui prouvent l'importance de son champ d'application.

I - GENERALITES

I.1 - Systèmes étudiés

Nous avons choisi de présenter les méthodes développées dans le cas de processus gouvernés par un système d'équations aux dérivées partielles de type parabolique (au sens de Lions) (1) à deux variables distribuées t et x :

$$\left. \begin{array}{l} t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega \text{ compact de } \mathbb{R}^n \\ T \frac{\partial}{\partial t} W(x,t) = \sum_{j=0}^k M_j D^j W(x,t) + N E(x,t) \end{array} \right\} (1)$$

où : D^j représente la dérivation partielle spatiale $\partial^j / \partial x^j$

$W(x,t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système

$E(x,t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i=0, \dots, k$; $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$

sont des matrices non nécessairement constantes ;

T et M_i sont en outre régulières par hypothèse.

Les conditions initiales et limites associées à (1) devront assurer au problème étudié la propriété d'être bien posé au sens d'Hadamard : on aura en particulier une seule condition initiale $W(x,0) = W_0(x)$ définie pour tout x de Ω . Les conditions limites fréquemment utilisées étant de type Dirichlet, Neumann ou Fourier (cf Chapitre I).

Le choix d'un système d'évolution a été motivé par l'interprétation physique dont il fera l'objet à l'aide de la méthode d'étude présentée : comme nous le verrons, les aspects temporel et spatial y sont nettement dissociés, chacun offrant néanmoins une possibilité de simplification du modèle.

Remarques :

1. Un système stationnaire où la variable temps t serait remplacée par une autre variable spatiale y pourrait formellement faire l'objet de la même étude.
2. Il en est de même pour le cas des problèmes hyperboliques (au sens de Lions), néanmoins nous nous sommes particulièrement intéressée au type parabolique car ces problèmes sont en pratique moins aisés à résoudre : ainsi on ne dispose pas de certains outils comme la méthode des caractéristiques, ou bien le changement de t en $-t$ qui sont souvent utilisés pour les problèmes hyperboliques.

Les cas où T n'est pas inversible correspondent à des problèmes mixtes (parabolique/stationnaire, ou stationnaire si T est identiquement nulle) pour lesquels un changement de base adéquat mettrait aisément en évidence des équations stationnaires dont les variables d'état seraient entraînées par celles de la partie d'évolution si elle existe ($T \neq 0$). Il s'agit donc de problèmes plus simples pour lesquels l'étude qui suit pourra être facilement transposée. Il en est d'ailleurs de même en ce qui concerne les matrices M_j dont la non régularité caractériserait un problème dégénéré donc plus simple également.

La formulation vectorielle (1) caractérise en fait une très large classe de processus compte tenu des résultats rappelés au Chapitre I sur l'équivalence d'un système d'équations aux dérivées partielles et d'une équation aux dérivées partielles ; l'ordre k du système ($k=2$ dans les exemples traités par la suite) devra être choisi de façon à assurer un bon compromis entre l'ordre du système et le modèle physique : il convient en effet de conserver le plus possible la forme naturelle de description du processus où chaque composante de l'état W correspond alors à une variable accessible interprétable physiquement, et de ne pas chercher systématiquement à se ramener à un système d'ordre 1.

I.2 - Mise en évidence de plusieurs dynamiques

Différentes dynamiques peuvent être mises en évidence, soit directement lors de la modélisation par comparaison entre les ordres de grandeur des termes des matrices T et M_i de (1), soit physiquement par une bonne connaissance du phénomène qui permettrait d'affirmer a priori la prépondérance de certaines variables d'état par rapport à d'autres (voir par exemple dans ce cas /ELD/). Dans les cas plus complexes de méconnaissance de telles propriétés il est encore possible de rechercher analytiquement l'existence de différents modes : dans le cas d'une seule matrice d'évolution la mise sous forme de blocs de Jordan assurera un découplage parfait des variables. Dans le cas de plusieurs matrices on pourra réaliser une bloc-diagonalisation simultanée des matrices prépondérantes (T et M_k généralement) qui conduira à la séparation des dynamiques du système /ROT/. Cette notion de bloc-diagonalisation a déjà été introduite au § III.2.2 du Cha-

pitre II dans le cas d'une seule matrice. Dans le cas d'une bloc-diagonalisation simultanée de p matrices A_i telles que :

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{0, \dots, p\} \quad (2)$$

$$\forall (h, \ell) \in \{1, 2\}^2 \quad A_{h\ell}^i \in \mathbb{R}^{n_h \times n_\ell}$$

l'application de la transformation (44.II) a lieu en deux temps.

La transformation $\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ L & I_2 \end{bmatrix}$

où I_i représente la matrice identité d'ordre n_i , conduit à :

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_\ell^i & A_{12}^i \\ R_i(L) & A_r^i \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{0, \dots, p\}$$

avec :

- * $R_i(L) = A_{21}^i + L A_{11}^i - A_{22}^i L - L A_{12}^i L$ (3)
- * $A_\ell^i = A_{11}^i - A_{12}^i L$
- * $A_r^i = A_{22}^i + L A_{12}^i$

qui sera sous forme bloc-triangulaire si :

$$R_i(L) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, p\} \quad (4)$$

Or, sauf dans des cas particuliers, les équations (4) ne peuvent être réalisées simultanément pour tout i . Une résolution de ce système de $p+1$ équations de Riccati est néanmoins possible au sens des moindres carrés,

c'est-à-dire de façon à ce que L satisfasse $\sum_{i=0}^p \|R_i(L)\|$ minimum.

Introduisons la notation :

$$\forall (k, \ell) \in \{1, 2\} \quad A_{k\ell} = \begin{bmatrix} A_{k\ell}^0 \\ A_{k\ell}^1 \\ \vdots \\ A_{k\ell}^p \end{bmatrix} \quad (5)$$

Le système (4) peut alors s'écrire :

$$A_{21} + L \boxtimes [A_{11} - A_{12} L] = A_{22} L \quad (6)$$

où \boxtimes représente le produit de Kronecker de matrices partitionnées

$$(c'est-à-dire L \boxtimes A_{11} = \begin{bmatrix} L A_{11}^0 \\ L A_{11}^1 \\ \vdots \\ L A_{11}^p \end{bmatrix}).$$

Cette écriture permet alors d'utiliser, comme en (48.II), l'algorithme de Kokotovic /KOK-3/ qui ici conduit à :

$$\left| \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ L_0 = A_{22}^+ A_{21} \\ L_{k+1} = A_{22}^+ [A_{21} + L_k \boxtimes [A_{11} - A_{12} L_k]] \\ \text{où : } A_{22}^+ = (A_{22}^T A_{22})^{-1} A_{22}^T \end{array} \right. \quad (7)$$

et dont la convergence est assurée par (8) :

Si A_{22} est de rang plein,

$$\text{et si } \|A_{22}^+\| \leq \frac{1}{3} (\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|)^{-1}$$

$$\text{avec : } A_0 = A_{11} - A_{12} L_0$$

où la norme choisie est telle que :

$$\left\| \begin{matrix} \text{diag} \{M_i\} \\ i=1 \\ \dots \\ n \end{matrix} \right\| = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \|M_i\| \quad (8)$$

alors (7) converge vers une racine réelle $L = L_0 + D$

avec :

$$\|D\| \leq \frac{2 \|A_0\| \|L_0\|}{\|A_0\| + \|A_{12}\| \|L_0\|}$$

Dans un deuxième temps l'application de la transformation

$$\begin{bmatrix} I_1 & M \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \text{ sur (3) conduit à :}$$

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_\ell^i - M R_i(L) & R_i(M) \\ R_i(L) & A_r^i + R_i(L) M \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{où : } R_i(M) = A_{12}^i + A_\ell^i M - M A_r^i - M R_i(L) M$$

dont la bloc-diagonalisation sera approchée comme précédemment à l'aide de la résolution au sens des moindres carrés du système d'équations de Riccati (10) :

$$\forall i \in \{0, \dots, p\} \quad R_i(M) = 0 \quad (10)$$

En introduisant les notations supplémentaires suivantes :

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{12}^{oT} \\ \vdots \\ A_{12}^{mT} \end{bmatrix}, \tilde{A}_\ell = \begin{bmatrix} A_\ell^{oT} \\ \vdots \\ A_\ell^{mT} \end{bmatrix}, \tilde{A}_r = \begin{bmatrix} A_r^{oT} \\ \vdots \\ A_r^{mT} \end{bmatrix}, R(L) = \begin{bmatrix} R_0^T(L) \\ \vdots \\ R_m^T(L) \end{bmatrix} \quad (11)$$

(10) s'écrit, après transposition :

$$\tilde{A}_{12} + M^T \boxtimes [\tilde{A}_\ell - R(L) M^T] = \tilde{A}_r M^T \quad (12)$$

dont la solution est fournie par l'algorithme :

$$\left| \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ M_0^T = \tilde{A}_r^+ \tilde{A}_{12} \\ M_{k+1}^T = \tilde{A}_r^+ \left[\tilde{A}_{12} + M_k^T \boxtimes [\tilde{A}_\ell - R(L) M_k^T] \right] \end{array} \right. \quad (13)$$

avec une condition de convergence analogue à (8).

Les matrices L et M solutions respectivement de (7) et (13) permettent alors la transformation simultanée des matrices A_i , $i=0, \dots, p$, sous forme quasi-diagonale par bloc, puisqu'elles assurent $R_i(L) \approx 0$ et $R_i(M) \approx 0$ pour tout i de $\{0, \dots, p\}$.

I.3 - Perturbations singulières spatiales et perturbations singulières temporelles

Les dynamiques du système étaient mises en évidence, soit naturellement, soit par la séparation artificielle exposée ci-dessus, une normalisation des coefficients peut alors être réalisée par l'introduction d'un petit paramètre ε caractérisant les faibles ordres de grandeur. Nous nous attacherons essentiellement aux matrices d'évolution T et M_k du système (1) pour lesquelles nous envisagerons des partitionnements par blocs suivant la même forme (2).

Différents cas de positionnement du petit paramètre ε peuvent être envisagés qui conduisent tout d'abord à la définition suivante :

I.3.1 - Définition :

Le système (1) présente des perturbations singulières temporelles (PST) (respectivement spatiales (PSS)), si, moyennant une éventuelle permutation des variables d'état, la matrice d'évolution T attachée

à la dérivation temporelle (respectivement M_k , attachée à la dérivation spatiale d'ordre le plus élevé) peut se mettre sous une forme normalisée du type (14) :

$$A = \hat{A} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon I_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

où :

$\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a ses coefficients tous de même ordre de grandeur

$0 < \varepsilon \ll 1$

Pour plus de clarté nous noterons par la suite le petit paramètre ε_t lorsqu'il se rapportera à la matrice d'évolution T et ε_x pour la matrice d'évolution M_k .

Remarque :

1. L'hypothèse de régularité des matrices T et M_k est reportée par la relation (14) sur les matrices \hat{T} et \hat{M}_k correspondantes.
2. Dans (14) on peut aussi, et c'est une contrainte moins dure, imposer simplement à \hat{A} d'avoir une décomposition par bloc telle que :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{avec } \|A_{ij}\| \ (i,j) \in \{1,2\}^2 \\ \text{tous de même ordre de grandeur} \end{array}$$

I.3.2 - Perturbations singulières temporelles (PST) :

Si le phénomène PST existe seul (ou est seul pris en compte), le problème (1) est équivalent à (15), compte tenu de la remarque précédente :

$$\left. \begin{aligned}
 & t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega \text{ compact de } \mathbb{R} \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U(x,t) \\ \varepsilon_t V(x,t) \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^k \tilde{M}_j D^j \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} + \tilde{N} E(x,t) \\
 & \text{où : } * 0 < \varepsilon_t \ll 1 \\
 & * U(x,t) \in \mathbb{R}^{n_1}, V(x,t) \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ avec } n_1 + n_2 = n \\
 & * \tilde{M}_i = \hat{T}^{-1} M_i \quad i = 0, \dots, k \\
 & * \tilde{N} = \hat{T}^{-1} N
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

La décomposition du vecteur état global $W(x,t)$ de (1) en $U(x,t)$ et $V(x,t)$ est liée à l'existence de deux échelles de temps différentes dont ε_t constituerait le rapport : comme pour les systèmes à paramètres localisés singulièrement perturbés, nous dirons que $U(x,t)$ est constitué des variables lentes du système, et que les variables qui ont une composante rapide sont regroupées dans $V(x,t)$.

I.3.3 - Perturbations singulières spatiales (PSS) :

Si le phénomène PSS existe seul, le système (1) peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned}
 & t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega \text{ compact de } \mathbb{R} \\
 & D^k \begin{bmatrix} U(x,t) \\ \varepsilon_x V(x,t) \end{bmatrix} = \bar{T} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} - \sum_{j=0}^{k-1} \bar{M}_j D^j \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} + \bar{N} E(x,t) \\
 & \text{où : } * 0 < \varepsilon_x \ll 1 \\
 & * \left[U(x,t)^T, V(x,t)^T \right]^T = W(x,t) \text{ vecteur état de } \mathbb{R}^n \\
 & * \bar{T} = \hat{M}_k^{-1} T \\
 & * \bar{M}_j = \hat{M}_k^{-1} M_j \quad i = 0, \dots, k-1 \\
 & * \bar{N} = \hat{M}_k^{-1} N
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Le petit paramètre ε_x contribue ici à mettre en évidence deux échelles spatiales différentes. La décomposition de l'état global $W(x,t)$ correspond alors à la séparation entre les variables $U(x,t)$ qui iront loin, appelées encore variables profondes par analogie avec

les variables lentes d'un problème PST, et celles $V(x,t)$ qui conservent une composante en surface.

Remarque : On trouvera une justification des termes lent-rapide et profond-surface introduit ci-dessus, dans les études détaillées qui font l'objet des parties suivantes de ce chapitre et qui correspondent à des problèmes physiques significatifs.

I.3.4 - Sur l'équivalence entre les notions PSS et PST :

Lorsque des perturbations singulières temporelles et spatiales sont simultanément mises en évidence dans (1), avec le même découplage des variables d'état pour le temps et l'espace, deux cas sont à envisager ; moyennant une éventuelle permutation des variables d'état, les décompositions du type (14) pour les matrices T et M_k sont telles que :

$$\left| \begin{array}{l} T = \hat{T} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t I_2 \end{bmatrix} \quad 0 < \varepsilon_t \ll 1 \\ M_k = \hat{M}_k \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x I_2 \end{bmatrix} \quad 0 < \varepsilon_x \ll 1 \end{array} \right. \quad (17)$$

ou bien :

$$\left| \begin{array}{l} T = \hat{T} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t I_2 \end{bmatrix} \quad 0 < \varepsilon_t \ll 1 \\ M_k = \hat{M}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad 0 < \varepsilon_x \ll 1 \end{array} \right. \quad (18)$$

Dans ce dernier cas (18) on peut montrer qu'il y a en fait équivalence physique et théorique entre les deux phénomènes de perturbation. En effet si l'on se restreint pour plus de clarté, au cas particulier d'un système de type (1) sans entrée et tel que :

$$\begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega \text{ compact de } \mathbb{R} \\
 T \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = M_k D^k \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \\
 U(x,t) \in \mathbb{R}^{n_1} \\
 V(x,t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad n_1 + n_2 = n
 \end{array} \tag{19}$$

où T et M_k sont des matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$ régulières vérifiant (18), il vient :

$$\hat{T} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U \\ \varepsilon_t V \end{bmatrix} = \hat{M}_k D^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x U \\ V \end{bmatrix} \tag{20}$$

qui s'écrit, en prenant pour nouvelle variable d'état $\varepsilon_t V = \tilde{V}$:

$$\hat{T} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U \\ \tilde{V} \end{bmatrix} = \hat{\mu}_k D^k \begin{bmatrix} \varepsilon_t \varepsilon_x U \\ \tilde{V} \end{bmatrix} \tag{21}$$

avec : $\hat{\mu}_k = 1/\varepsilon_t \hat{M}_k$

De même en posant $\varepsilon_x U = \tilde{U}$ dans (20) il vient :

$$\hat{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \varepsilon_x \varepsilon_t V \end{bmatrix} = \hat{M}_k D^k \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ V \end{bmatrix} \tag{22}$$

avec : $\hat{\tau} = 1/\varepsilon_x \hat{T}$

On constate donc que moyennant un changement de variable adéquat, le problème (19) qui présente simultanément les PSS et PST définies en (18) peut être considéré soit comme un problème de perturbations spatiales seules (21), soit comme un problème de perturbations temporelles seules (22), le petit paramètre devenant dans chaque cas le produit $\varepsilon = \varepsilon_x \varepsilon_t$.



En pratique nous pouvons trouver une justification de cette équivalence dans de nombreux problèmes physiques comme par exemple les phénomènes de diffusion. Considérons le cas simple de la diffusion d'un corps A de concentration [A] dans un milieu B qui suit une loi spatio-temporelle du type :

$$\frac{\partial}{\partial t} [A] = D \frac{\partial^2 [A]}{\partial x^2} \quad (23)$$

où D est le coefficient de diffusion de A.

Si l'on s'intéresse à l'évolution de la concentration [A] dans le temps, D caractérise la vitesse de diffusion de A dans B.

Une diffusion rapide correspondra donc à un coefficient D grand c'est-à-dire que l'on pourra écrire sous forme normalisée :

$$D = \frac{1}{\epsilon_t} \Delta \quad 0 < \epsilon_t \ll 1 \quad (24)$$

Si l'on considère maintenant l'évolution spatiale de [A] dans B, un grand coefficient de diffusion correspondra à une concentration non négligeable de A en profondeur. Nous dirons donc, par abus de langage que le système (23) (24) est rapide et profond.

Réciproquement, si le coefficient D est petit, c'est-à-dire :

$$D = \epsilon_x \Delta \quad 0 < \epsilon_x \ll 1 \quad (25)$$

la diffusion est lente et le corps A reste essentiellement en surface, nous dirons que le système (23) (25) est lent et surface.

Ces termes (profond, surface, lent, rapide) seront utilisés par la suite avec précision pour caractériser les différents comportements des systèmes étudiés : ainsi, dans le cas d'un système du type (19) (18) ou plus généralement (1) (18), U regroupe les variables lentes avec une composante en surface, et V les variables profondes et qui ont une composante rapide.

Lorsque dans (1) c'est une décomposition du type (17) qui apparaît la notion d'équivalence n'existe pas et, à l'inverse du cas (18), les variables lentes $U(x,t)$ sont profondes et les variables $V(x,t)$ qui ont une composante surface sont également rapides. De tels systèmes sont plus rares mais peuvent néanmoins caractériser certains phénomènes particuliers comme par exemple la diffusion des gaz oxygène et hydrogène dans un métal qui assurerait un piégeage des molécules H_2 : les molécules O_2 plus lourdes mais non piégées iraient lentement mais loin à l'inverse des molécules H_2 qui iraient vite parce que légères, mais resteraient localisées en surface à cause du phénomène de piégeage.

Dans les parties suivantes nous proposons une étude détaillée de problèmes du type (1) (18) et (1) (17) respectivement.

II - SIMPLIFICATION DE MODELE POUR UN SYSTEME A

PERTURBATIONS SINGULIERES EQUIVALENTES /ZAM-2/

II.1 - Formulation du problème

Pour la clarté de l'exposé nous considérons dans cette partie le cas particulier d'un système de type (1) à une seule dérivée partielle spatiale D^q (q non nul). Nous supposons en outre qu'une décomposition du type (18) a pu être mise en évidence ce qui, compte tenu de la notion d'équivalence précisée plus haut, nous permet d'envisager soit la forme PST (21) soit la forme PSS (22), avec donc la présence d'un seul petit paramètre noté ϵ dans la suite.

Finalement, les problèmes étudiés dans cette partie peuvent se ramener entre autres à la formulation suivante :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega =] 0 , 1 [$$

$$(1) \frac{\partial}{\partial t} W(x,t) = A_S D^q W(x,t) + B E(x,t)$$

$E(x,t) \in \mathbb{R}^m$ vecteur de commande

$W(x,t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur état

avec :

(26)

(2) Conditions initiales :

$$\forall x \in \Omega \quad W(x,0) = W_0(x)$$

(3) Conditions limites (de type Dirichlet) :

$$\forall t \in] 0 , + \infty [\quad \forall x \in \Gamma = \{ 0, 1 \}$$

$$W = W_\Gamma(t)$$

où les matrices d'évolution A_S et de commande B ont les structures suivantes :

$$A_S = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{21}^* & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}^* = \epsilon A_{ij} \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (27)$$

$$A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} \quad (i,j) \in \{1,2\}^2 \quad n_1 + n_2 = n$$

$\|A_{ij}\|$ de même ordre de grandeur

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

(28)

$$B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m} \quad i \in \{1,2\} \quad n_1 + n_2 = n$$

$\|B_i\|$ de même ordre de grandeur

Remarques :

1. Le cas général d'un domaine $\Omega =]a,b[$ peut toujours se ramener aux cas considéré en (26) par des changements de base ou d'origine convenables relatifs à la variable distribuée spatiale x .

2. Le choix de conditions initiales et limites bien précises est nécessaire pour les calculs détaillés qui vont suivre ; ainsi la fonction $W_T(t)$ doit être comprise comme suit :

$$W(0,t) = W_0(t) \quad W(1,t) = W_1(t)$$

le cas particulier où $W_0 = W_1 = 0$ caractérisant un problème de Dirichlet homogène.

Néanmoins d'autres types de conditions aux limites auraient pu être considérées et traitées pareillement.

3. De même nous avons dû fixer la forme singulièrement perturbée (27), mais le choix de perturbations singulières temporelles aurait pu être envisagé également.

II.2 - Séparation des modes

Nous présentons ici deux approches différentes de séparation des dynamiques, motivées par l'existence d'un problème à la fois spatial et temporel.

II.2.1 - Comportement temporel :

La forme (27) traduisant des PSS, nous sommes amenés pour l'étude temporelle à réécrire (26) (27) sous la forme singulièrement perturbée suivante :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega =] 0 , 1 [$$

$$(1) \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U(x,t) \\ \varepsilon V(x,t) \end{bmatrix} = A_t D^q \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} + B_t E(x,t)$$

$E(x,t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de commande

$U(x,t) \in \mathbb{R}^{n_1}$

$V(x,t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ vecteurs état, $n_1 + n_2 = n$

$$A_t = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ A_{21}^{**} & A_{22}^* \end{bmatrix} \quad B_t = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2^* \end{bmatrix} \quad (29)$$

avec :

(2) Conditions initiales :

$$U(x,0) = U_0(x) \quad V(x,0) = V_0(x)$$

(3) Conditions limites :

$$\left[U(x,t) \right]_{\Gamma} = U_{\Gamma}(t) \quad \left[V(x,t) \right]_{\Gamma} = V_{\Gamma}(t)$$

La décomposition du vecteur état global $W(x,t)$ en $U(x,t)$ et $V(x,t)$ est induite par la présence du petit paramètre ε attaché à la partie $V(x,t)$ de l'état. En outre comme ε porte sur la dérivée partielle temporelle, il peut être interprété comme le rapport entre deux échelles de temps différentes : $\varepsilon = t/\tau$ où t est l'échelle de temps lente et τ l'échelle de temps rapide (t en minutes et τ en secondes par exemple).

Remarque : En toute rigueur l'obtention de la forme PST définie au § I.3.1 aurait nécessité le changement de variable d'état proposé en (21) : $\varepsilon V = \tilde{V}$. Afin de l'éviter nous avons cherché simplement à avoir les mêmes ordres de grandeur pour les blocs diagonaux de la matrice d'évolution, les autres pouvant être considérés comme moins importants puisqu'ils caractérisent les interconnexions. En fait on peut vérifier aisément que les calculs qui suivent peuvent être menés pareillement dans le cas où on effectue le changement de variable d'état et que l'on obtient finalement les mêmes résultats.

Afin d'obtenir les équations relatives aux différents modes nous proposons une méthode de découplage des dynamiques inspirée des résultats des perturbations singulières classiques /DAU-1/.

En annulant ε dans (29.1) nous obtenons, si A_{22} est inversible, pour la partie lente U_ℓ du vecteur état U :

$$\left. \begin{array}{l} t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\ (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} [U_\ell(x,t)] = A_\ell^* D^q [U_\ell(x,t)] + B_\ell E(x,t) \\ (2) \quad U_\ell(x,0) = U_0(x) \\ (3) \quad [U_\ell(x,t)]_{x \in \Gamma} = U_\Gamma(t) \end{array} \right\} \quad (30)$$

$$\text{où : } A_\ell^* = A_{11}^* - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}^*$$

$$B_\ell = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2$$

Par analogie avec les résultats de Tihonov /HOP/ relatifs aux problèmes régis par des équations différentielles ordinaires, nous faisons ici l'hypothèse que la partie rapide de l'état U est négligeable, c'est-à-dire qu'il s'agit de variables essentiellement lentes qui peuvent être approchées par U_ℓ durant toute l'évolution du système. L'état V est alors approché par \bar{V} et (29) devient :

$$\left. \begin{array}{l} t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\ (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U_\ell(x,t) \\ \varepsilon \bar{V}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell^* & 0 \\ A_{21}^{**} & A_{22}^* \end{bmatrix} D^q \begin{bmatrix} U_\ell(x,t) \\ \bar{V}(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\ell \\ B_2^* \end{bmatrix} E(x,t) \\ (2) \quad U_\ell(x,0) = U_0(x) \quad \bar{V}(x,0) = V_0(x) \\ (3) \quad [U_\ell(x,t)]_\Gamma = U_\Gamma(t) \quad [\bar{V}(x,t)]_\Gamma = V_\Gamma(t) \end{array} \right\} \quad (31)$$

Cependant l'existence de deux modes dans $\bar{V}(x,t)$ nécessite un découplage préalable des dynamiques. Celui-ci est obtenu en réalisant une bloc-diagonalisation de la nouvelle matrice d'évolution définie en (31) à l'aide du changement de base suivant (cf § III.2.2 du Chapitre II et § I.2 de ce chapitre) :

$$\begin{bmatrix} U_\ell \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ L_t & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\ell \\ \bar{V} \end{bmatrix} \quad (32)$$

où L_t est solution de l'équation de type Lyapunov (33) :

$$L_t A_\ell^* + A_{21}^* - A_{22} L_t = 0 \quad L_t \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1} \quad (33)$$

Les variables lentes V et rapides V_R de \bar{V} sont alors découplées et il vient :

$$\left| \begin{array}{l} t \in] 0, + \infty [\quad x \in \Omega \\ V_\ell(x, t) = - L_t U_\ell(x, t) \end{array} \right. \quad (34)$$

et :

$$\left| \begin{array}{l} \tau \in] 0, + \infty [\quad x \in \Omega \\ (1) \frac{\partial}{\partial \tau} [V_R(x, \tau)] = A_{22}^* D^q [V_R(x, \tau)] + B_R E(x, \tau) \\ (2) V_R(x, 0) = L_t U_0(x) + V_0(x) \\ (3) [V_R(x, \tau)]_\Gamma = L_t U_\Gamma(\tau) + V_\Gamma(\tau) \end{array} \right. \quad (35)$$

où : $B_R = B_2^* + \epsilon L_t B_\ell$

Finalement nous avons obtenu deux modèles réduits découplés : le lent (30) et le rapide (35) ; la reconstitution des variables d'état initiales étant assurée par (36) :

$$\left| \begin{array}{l} U(x, t) \approx U_\ell(x, t) \\ V(x, t) \approx V_R(x, \tau) - L_t U_\ell(x, t) \end{array} \right. \quad (36)$$

Remarques :

1. L'écriture (35) du sous-système découplé rapide utilise la variable distribuée τ correspondant à une grande échelle de temps par opposition à t (cf § I.3.2) :

$$t = \varepsilon \tau$$

2. Les blocs A_{11}^* et A_{22} sont nécessairement différents puisque d'ordres de grandeur différents donc la solution L_t de (33) existe et par conséquent le découplage présenté ci-dessus est toujours possible.

II.2.2 - Comportement spatial :

De façon analogue il est possible d'analyser les perturbations singulières spatiales du système (26) (27) (28). Une étude parallèle à la précédente peut être menée après écriture du problème sous forme spatiale singulièrement perturbée normalisée.

a) Forme PSS normalisée /ZAM-3/

Elle s'obtient en réalisant dans (26.1) l'inversion par bloc de la matrice d'évolution normalisée, c'est-à-dire $A = (A_{ij})$, le petit paramètre restant attaché à la dérivation spatiale. Soit :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega =] 0 , 1 [$$

$$(1) D^q \begin{bmatrix} \varepsilon U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} = \tilde{A}_s \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} + \tilde{B} E(x,t)$$

$E(x,t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur de commande

$U(x,t) \in \mathbb{R}^{n_1}$

$V(x,t) \in \mathbb{R}^{n_2} \quad n_1 + n_2 = n$ vecteurs état

(37)

(2) Conditions initiales :

$$U(x,0) = U_0(x) \quad V(x,0) = V_0(x)$$

(3) Conditions limites :

$$\left[U(x,t) \right]_{\Gamma} = U_{\Gamma}(t) \quad \left[V(x,t) \right]_{\Gamma} = V_{\Gamma}(t)$$

où la matrice $\tilde{A}_S = (\tilde{A}_{ij})$ est l'inverse par blocs de $A = (A_{ij})$, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} \\ \tilde{A}_{12} = - \tilde{A}_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \\ \tilde{A}_{21} = - A_{22}^{-1} A_{21} \tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \tilde{A}_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \end{array} \right. \quad (38)$$

(H1) si A_{22}^{-1} et $(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}$ existent.

ou bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \tilde{A}_{22} A_{21} A_{11}^{-1} \\ \tilde{A}_{12} = - A_{11}^{-1} A_{12} \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{21} = - \tilde{A}_{22} A_{21} A_{11}^{-1} \\ \tilde{A}_{22} = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{array} \right. \quad (39)$$

(H2) si A_{11}^{-1} et $(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1}$ existent.

Note : Pour la suite des calculs nous supposerons que l'hypothèse (H1) est vérifiée ; dans le cas de (H2) il conviendrait de réaliser la permutation d'indices correspondante. Et le nouveau vecteur de commande \tilde{B} est alors donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}_1 = - [\tilde{A}_{11} B_1 + \tilde{A}_{12} B_2] \\ \tilde{B}_2 = - [\tilde{A}_{21} B_1 + \tilde{A}_{22} B_2] \end{array} \right. \quad (40)$$

Comme précédemment, la décomposition de l'état en deux parties $U(x,t)$ et $V(x,t)$ est induite par la présence du petit paramètre ϵ lié cette fois à $U(x,t)$. De plus dans la forme (37) ϵ est attaché à la dérivation partielle spatiale : il permet donc de définir le rapport entre deux échelles spatiales différentes, $\epsilon = (x/\lambda)^q$ où x est l'échelle en profondeur et λ l'échelle en surface (x en mètres et λ en centimètres par exemple).

La séparation des modes (surface-profond) est alors obtenue par la même méthode de découplage que celle utilisée dans l'étude temporelle :

En annulant ϵ dans (37.1) il vient, pour la partie profonde \tilde{V}_p de $V(x,t)$:

$$\left. \begin{array}{l} t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\ (1) D^q [\tilde{V}_p(x,t)] = \tilde{A}_p \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{V}_p(x,t)] + \tilde{B}_p E(x,t) \\ (2) \tilde{V}_p(0,t) = V_0(x) \\ (3) [\tilde{V}_p(x,t)]_{x \in \Gamma} = V_\Gamma(t) \end{array} \right\} \quad (41)$$

où : $\tilde{A}_p = \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} = \tilde{A}_{22}^{-1}$

$\tilde{B}_p = \tilde{B}_2 - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{B}_1 = - \tilde{A}_{22}^{-1} B_2$

Les hypothèses simplificatrices utilisées en perturbations singulières classiques nous conduisent à supposer ici que la partie surface de $V(x,t)$ est négligeable. Les variables regroupées dans $V(x,t)$ sont donc avant tout profondes et peuvent être approchées sur tout le domaine Ω par $\tilde{V}_p(x,t)$. Il s'en suit l'approximation $\tilde{U}(x,t)$ de l'état U et (37) devient :

$$\left. \begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\
 (1) \text{ D}^q \begin{bmatrix} \varepsilon \bar{U}(x,t) \\ \bar{V}_p(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{U}(x,t) \\ \bar{V}_p(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_p \end{bmatrix} E(x,t) \\
 (2) \bar{U}(x,0) = U_0(x) \quad \bar{V}_p(x,0) = V_0(x) \\
 (3) [\bar{U}(x,t)]_{\Gamma} = U_{\Gamma}(t) \quad [\bar{V}_p(x,t)]_{\Gamma} = V_{\Gamma}(t)
 \end{array} \right\} \quad (42)$$

Comme précédemment il convient de séparer les deux modes présents dans $\bar{U}(x,t)$. La bloc-diagonalisation de la matrice d'évolution de (42.1) nécessite le changement de base suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{su} \\ \tilde{V}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & \tilde{L}_x \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V}_p \end{bmatrix} \quad (43)$$

où \tilde{L}_x est solution de l'équation de type Lyapunov (44) :

$$\varepsilon \tilde{L}_x \tilde{A}_p - \tilde{A}_{11} \tilde{L}_x + \tilde{A}_{12} = 0 \quad L_x \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \quad (44)$$

Les variables profondes $\tilde{U}_p(x,t)$ et surface $\tilde{U}_{su}(x,t)$ de \bar{U} sont alors découplées et il vient respectivement :

$$\left. \begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\
 \tilde{U}_p(x,t) = - \tilde{L}_x \tilde{V}_p(x,t)
 \end{array} \right\} \quad (45)$$

et

$$\left. \begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \omega =] 0 , (\varepsilon)^{1/q} [\quad \gamma = \{ 0 , (\varepsilon)^{1/q} \} \\
 (1) \Delta^q [\tilde{U}_{su}(x,t)] = \tilde{A}_{11} \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{U}_{su}(x,t)] + \tilde{B}' E(x,t) \\
 (2) \tilde{U}_{su}(x,0) = U_0(x) + \tilde{L}_x V_0(x) \\
 (3) [\tilde{U}_{su}(x,t)]_{\gamma} = U_{\Gamma}(t) + \tilde{L}_x V_{\Gamma}(t)
 \end{array} \right\} \quad (46)$$

où Δ^q représente la dérivée partielle spatiale par rapport à la variable x : $\partial^q / \partial x^q$

et :

$$\tilde{B}' = \tilde{B}'_1 + \varepsilon \tilde{L}_x \tilde{B}'_p$$

Finalement, en réécrivant les systèmes (46) et (41) sous la forme usuelle analogue à (26) et en fonction des blocs matriciels initiaux (27) et (28), l'état global du système étudié peut être approché comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x,t) \approx \tilde{U}_{su}(x,t) - \tilde{L}_x \tilde{V}_p(x,t) \\ V(x,t) \approx \tilde{V}_p(x,t) \end{array} \right. \quad (47)$$

où les variables d'état \tilde{U}_{su} et \tilde{V}_p sont définies par les sous-systèmes réduits (48) et (50) :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \omega \\ (1) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}_{su}(x,t) = \tilde{A}_{su} \Delta^q \tilde{U}_{su}(x,t) + \tilde{B}_{su} E(x,t) \\ (2) \tilde{U}_{su}(x,0) = U_0(x) + \tilde{L}_x U_0(x) \\ (3) \left[\tilde{U}_{su}(x,t) \right]_{\gamma} = U_{\Gamma}(t) + \tilde{L}_x V_{\Gamma}(t) \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\text{où : } \tilde{A}_{su} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

$$\tilde{B}_{su} = B_1 + \tilde{L}_x B_2$$

\tilde{L}_x est solution de l'équation de Lyapunov (49) :

$$\varepsilon \tilde{A}_{su} \tilde{L}_x - \tilde{L}_x A_{22} - A_{12} = 0 \quad (49)$$

et :

$$\left. \begin{aligned}
 & t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\
 (1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{V}_p(x,t)] = A_{22} D^q [\tilde{V}_p(x,t)] + B_2 E(x,t) \\
 (2) \quad & \tilde{V}_p(x,0) = V_0(x) \\
 (3) \quad & [\tilde{V}_p(x,t)]_{\Gamma} = V_{\Gamma}(t)
 \end{aligned} \right\} (50)$$

Remarques :

1. Dans (46) et (48) nous avons décrit le sous-système decouplé surface à l'aide de la variable distribuée spatiale x qui réalise une dilatation de l'échelle spatiale adaptée à la dynamique de ce sous-système.
2. Comme dans l'étude temporelle, l'équation (49) aura toujours une solution \tilde{L}_x puisque $\varepsilon \tilde{A}_{su}$ et A_{22} sont différents car d'ordres de grandeur différents.

b) Etude directe

Une autre approche du problème (26) (27) (28) peut être envisagée, qui évite le passage intermédiaire par la forme PSS normalisée (37).

En annulant ε directement dans l'équation (26.1) on obtient :

$$\left. \begin{aligned}
 & t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\
 (1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} [V_p(x,t)] = A_{22} D^q [V_p(x,t)] + B_2 E(x,t) \\
 (2) \quad & V_p(x,0) = V_0(x) \\
 (3) \quad & [V_p(x,t)]_{\Gamma} = V_{\Gamma}(t)
 \end{aligned} \right\} (51)$$

L'hypothèse de négliger la partie surface de $V(x,t)$ étant renouvelée, le système étudié peut être approché par :

$$\left. \begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\
 (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \bar{U}(x,t) \\ V_p(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} D^q \begin{bmatrix} \bar{U}(x,t) \\ V_p(x,t) \end{bmatrix} + B E(x,t) \\
 (2) \quad \bar{U}(x,0) = U_0(x) \quad V_p(x,0) = V_0(x) \\
 (3) \quad [\bar{U}(x,t)]_{\Gamma} = U_{\Gamma}(x) \quad [\bar{V}(x,t)]_{\Gamma} = V_{\Gamma}(x)
 \end{array} \right\} \quad (52)$$

dont le découplage est assuré par le changement de base (53) :

$$\begin{bmatrix} U_{su}(x,t) \\ V_p(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & L_x \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ V_p \end{bmatrix} \quad (53)$$

où L_x est solution de l'équation de type Lyapunov (54) :

$$L_x A_{22} - A_{11}^* L_x + A_{12} = 0 \quad L_x \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \quad (54)$$

Il vient successivement :

$$\left. \begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \\
 U_p(x,t) = - L_x V_p(x,t)
 \end{array} \right\} \quad (55)$$

et :

$$\left. \begin{array}{l}
 t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \omega =] 0 , (\epsilon)^{1/q} [\quad \gamma = \{0, (\epsilon)^{1/q}\} \\
 (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} U_{su}(x,t) = A_{11} \Delta^q [U_{su}(x,t)] + B_{su} E(x,t) \\
 (2) \quad U_{su}(x,0) = U_0(x) + L_x V_0(x) \\
 (3) \quad [U_{su}(x,t)]_{\gamma} = U_{\Gamma}(t) + L_x V_{\Gamma}(t)
 \end{array} \right\} \quad (56)$$

où : $B_{su} = B_1 + L_x B_2$.

Nous obtenons donc pour le système global l'approximation suivante :

$$\begin{cases} U(x,t) \approx U_{su}(x,t) - L_x V_p(x,t) \\ V(x,t) \approx V_p(x,t) \end{cases} \quad (57)$$

où les variables d'état U_{su} et V_p sont définies par les sous-systèmes réduits découplés (51) et (56).

Conclusion : Le choix du système particulier (26) (27) (28) nous a permis de mener une étude détaillée assez simple mais néanmoins riche par les diverses approches dont elle a fait l'objet : les perturbations singulières spatiales n'étant pas explicites nous avons montré comment s'y ramener par deux méthodes différentes (avec ou sans changement de variable d'état).

Les perturbations singulières spatiales ont donné lieu à deux études possibles. L'une rigoureuse, qui procède au préalable à une mise sous forme spatiale singulièrement perturbée normalisée et l'autre plus simple, qui réalise le découplage des dynamiques directement sur le système proposé ; l'approximation est cependant moins fine dans ce dernier cas puisque finalement les termes de couplage n'apparaissent plus dans les sous-systèmes réduits qui caractérisent le système simplifié.

II.3 - Application numérique

Nous proposons dans cette partie d'illustrer la validité et les performances de notre méthode en comparant les résultats de simulation d'un système du type (26) avec ceux des systèmes simplifiés associés.

Soit :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in] 0 , 1 [$$

$$(1) \frac{\partial W}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0.02 & 1.1 \\ 0.01 & 1.2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$W = [u(x,t) , v(x,t)]^T \in \mathbb{R}^2$$

(2) Conditions initiales : (58)

$$u(x,0) = u_0(x) = 0$$

$$v(x,0) = v_0(x) = 0$$

(3) Conditions limites :

$$u(0,t) = u(1,t) = 1$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 1$$

Un tel problème peut correspondre par exemple à la diffusion de deux corps A et B de concentrations respectives u et v dans un troisième milieu C homogène mais sélectif, c'est-à-dire qui assurerait une meilleure diffusion pour B que pour A : à t=0 on plonge le corps C dans un mélange équimolaire de A et de B, les concentrations sont donc égales et maximales aux bords et vont croître progressivement à l'intérieur.

La méthode proposée fournit ici le choix suivant de modèles simplifiés. Les perturbations singulières temporelles conduisent à :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in] 0 , 1 [$$

$$(1) \frac{\partial}{\partial t} u_\ell = 1.08 \cdot 10^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\ell$$

$$\text{avec : } u_\ell(x,0) = 0$$

$$u_\ell(0,t) = u_\ell(1,t) = 1$$

(59)

$$(2) \frac{\partial}{\partial t} v_r = 1.2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_r$$

$$\text{avec : } v_r(x,0) = 0$$

$$v_r(0,t) = v_r(1,t) = 1.084$$

$$(3) v_\ell = - 0.841 \cdot 10^{-2} u_\ell$$

Vu sous l'angle de PSS, il vient :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in] 0 , 1 [$$

$$(1) \frac{\partial}{\partial t} v_p = 1.2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_p$$

$$\text{avec : } v_p(x,0) = 0 \quad v_p(0,t) = v_p(1,t) = 1$$

(60)

$$(2) \frac{\partial}{\partial t} u_{su} = 0.02 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{su}$$

$$\text{avec : } u_{su}(x,0) = 0 \quad u_{su}(0,t) = u_{su}(1,t) = 1.78 \cdot 10^{-2}$$

$$(3) u_p = 0.932 v_p$$

Nous testons ici la méthode la plus dure, qui réalise une simplification directe sur le système (58) (cf § II.2.2). Enfin à partir de (59) et (60) il est possible d'envisager un troisième modèle simplifié : la variable lente est obtenue par la décomposition temporelle, alors que la variable rapide qui est également profonde sera fournie par l'étude spatiale. On obtient alors aisément :

$$t \in] 0 , + \infty [\quad x \in] 0 , 1 [$$

$$(1) \frac{\partial}{\partial t} \hat{u} = 1.08 \cdot 10^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{u}$$

$$\text{avec : } \hat{u}(x,0) = 0 \quad \hat{u}(0,t) = \hat{u}(1,t) = 1$$

(61)

$$(2) \frac{\partial}{\partial t} \hat{v} = 1.2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{v}$$

$$\text{avec : } \hat{v}(x,0) = 0 \quad \hat{v}(0,t) = \hat{v}(1,t) = 1$$

Toutes les équations des systèmes simplifiés ainsi obtenus sont découplés, scalaires et du type équation de la chaleur : on trouverait donc facilement, pour ce problème particulier, des solutions analytiques aux systèmes réduits /COU-1/. Néanmoins dans un but de comparaison nous avons réalisé une résolution numériques tant du système original que des modèles simplifiés obtenus. Les schémas aux différences finies (62) ont été utilisés :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{s(n+1, j) - s(n, j)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\theta}{(\Delta x)^2} [s(n+1, j-1) - 2s(n+1, j) + s(n+1, j+1)]$$

$$+ \frac{1-\theta}{(\Delta x)^2} [s(n, j-1) - 2s(n, j) + s(n, j+1)]$$

pour : $s = u, v$

(62)

avec : $t = n \Delta t$ $x = j \Delta x$

où : $n = 0, 1, 2, \dots$ (discrétisation temporelle)

$j = 0, 1, 2, \dots, J-1, J$; $J = 1/\Delta x$ (discrétisation spatiale)

$\theta \in [0, 1]$ est le degré d'implicité /ELD/

Pour $\Delta t = 10^{-3}$ et $\Delta x = 5 \cdot 10^{-2}$ et jusqu'à $n=20$, les résultats suivants ont été obtenus :

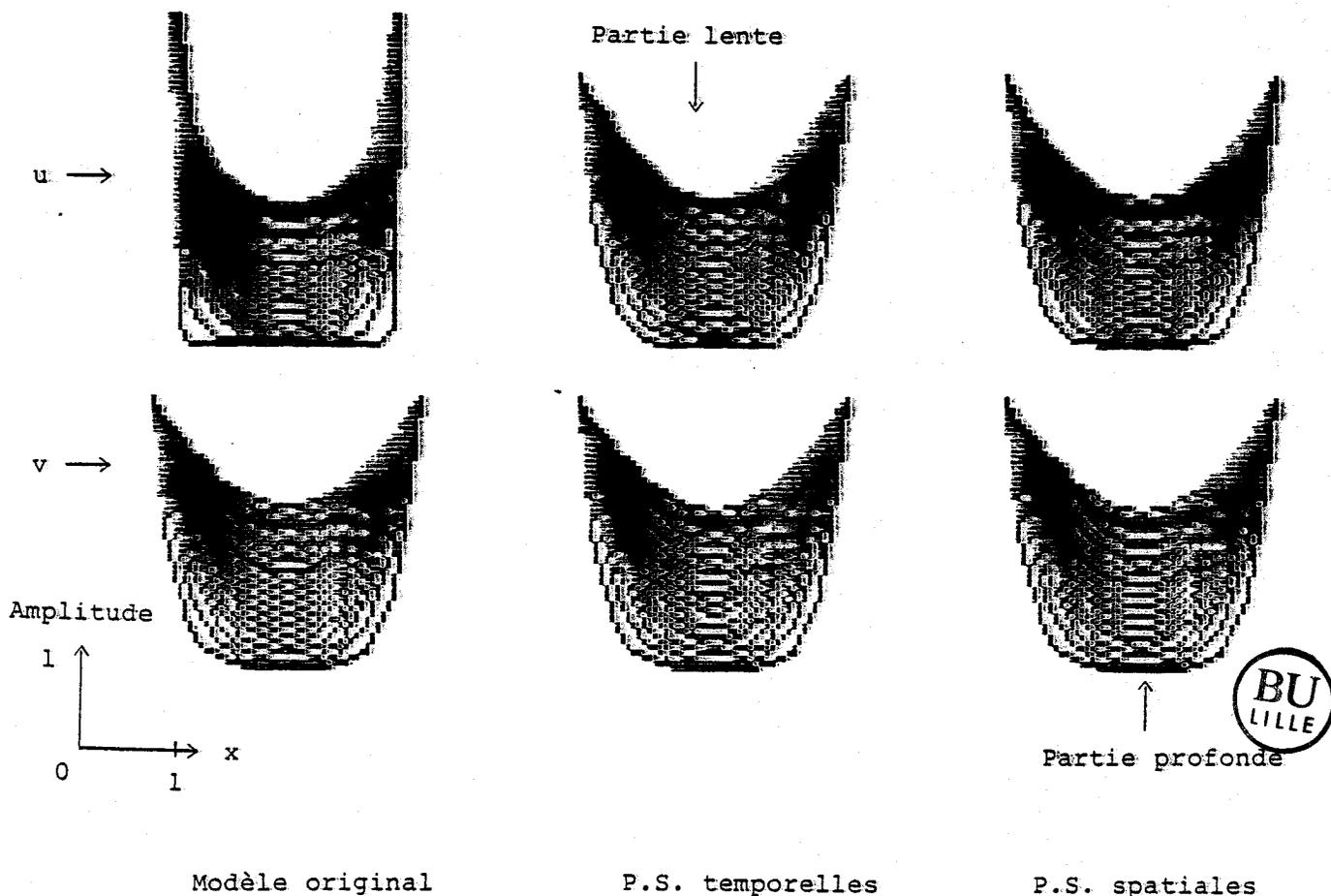


FIGURE 1

Nous constatons donc que des résultats très voisins sont obtenus tant par la méthode temporelle que par la méthode spatiale. Cependant les systèmes simplifiés font l'objet d'une programmation plus simple ce qui améliore la convergence de l'algorithme utilisé. Ceci permet alors d'augmenter le pas de discrétisation temporelle (respectivement spatiale) pour la partie lente u (respectivement profonde v) ; le temps de calcul peut ainsi être diminué et l'utilisation de petits ordinateurs devenir possible, dans un but de commande en temps réel par exemple.

III - SIMPLIFICATION DE MODELE POUR UN SYSTEME A PERTURBATIONS SINGULIERES NON EQUIVALENTES /ZAM-1/

III.1 - Formulation du problème

Toujours dans un but de clarté nous limiterons cette étude au cas particulier d'un système de type (1) à une seule dérivée spatiale D^q , avec ici une partie non dérivée. Nous supposons en outre dans cette partie que c'est une décomposition du type (17) qui a pu être mise en évidence dans (1). Le phénomène "naturel" d'équivalence défini au § I.3.4 n'apparaît donc pas ici et il convient dans la modélisation normalisée de conserver les deux petits paramètres ε_t et ε_x relatifs respectivement aux perturbations temporelles et spatiales.

Soit :

$$t \in] 0, + \infty [\quad x \in \Omega =] 0, 1 [$$

$$(1) \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U(x,t) \\ \varepsilon_t V(x,t) \end{bmatrix} = A D^q \begin{bmatrix} U(x,t) \\ \varepsilon_x V(x,t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix} + C E(x,t)$$

$E(x,t) \in \mathbb{R}^m$ vecteur de commande

$U(x,t) \in \mathbb{R}^{n_1}$

$V(x,t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ vecteurs état, $n_1 + n_2 = n$

$$A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B = (B_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, C = (C_i) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (63)$$

matrices normalisées par blocs
(tous de même ordre de grandeur)

avec :

(2) Conditions initiales

$$U(x,0) = U_0(x) \quad V(x,0) = V_0(x)$$

(3) Conditions limites

$$U(0,t) = U_0(t) \quad V(0,t) = V_0(t)$$

$$U(1,t) = U_1(t) \quad V(1,t) = V_1(t)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, la localisation des petits paramètres ε_t et ε_x dans (63.1) induit la décomposition suivante de l'état : $U(x,t)$ regroupe les variables essentiellement lentes et profondes, et $V(x,t)$ celles qui au contraire possèdent une composante rapide et une composante surface.

III.2 - Séparation des modes

Comme dans l'étude précédente, le modèle (63) peut être simplifié à l'aide de la théorie des perturbations singulières temporelles (ε_t), mais une analyse du comportement spatial peut aussi conduire à une séparation des modes (ε_x). Ces phénomènes peuvent apparaître individuellement (annulation d'un seul petit paramètre) ou simultanément. La démarche présentée dans cette partie est néanmoins différente de celle proposée au § II.2 car nous envisageons ici une commutation au bout d'un certain temps (respectivement au delà d'une certaine région de l'espace) du système rapide au système lent (du système surface au système profond respectivement).

III.2.1 - Comportement temporel :

Une décomposition temporelle du système (63) peut être réalisée, qui met en évidence : un système rapide prépondérant durant une courte période, et un système lent qui décrit le processus étudié après disparition des phénomènes transitoires ; les modes rapides sont alors négligés et le système lent $[U_{\ell}^T, V_{\ell}^T]^T$ est obtenu en annulant ϵ_t dans (63.1). C'est-à-dire que, si A_{22} est inversible :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial [U_{\ell}(x,t)]}{\partial t} &= [A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}] D^q [U_{\ell}(x,t)] \\
 &+ [B_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{21}] U_{\ell}(x,t) \\
 &+ [B_{12} - A_{12} A_{22}^{-1} B_{22}] V_{\ell}(x,t) + [C_1 - A_{12} A_{22}^{-1} C_2] E_{\ell}(x,t) \quad (64) \\
 (2) \quad \epsilon_x D^q [V_{\ell}(x,t)] &= \\
 &- A_{22}^{-1} [A_{21} D^q [U_{\ell}(x,t)]] \\
 &+ B_{21} U_{\ell}(x,t) + B_{22} V_{\ell}(x,t) + C_2 E_{\ell}(x,t)
 \end{aligned}$$

Ces équations, valables lorsque le régime transitoire rapide est terminé, caractérisent donc le régime lent du système (63). Cependant la solution $V_{\ell}(x,t)$ de (64.2) ne satisfait pas en général la condition initiale $V_0(x)$. Il convient alors de définir un domaine temporel de couche limite $\mathcal{D}_t =] 0, \theta [$ (cf Chapitre II, § I.2) durant lequel les variables lentes sont supposées invariantes dans le temps, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in \mathcal{D}_t \quad \forall x \in \Omega \\
 U_r(x,t) &\equiv 0 \\
 V_r(x,t) &= V(x,t) - V_{\ell}(x,t) \\
 E_r(x,t) &= E(x,t) - E_{\ell}(x,t)
 \end{aligned} \quad (65)$$

L'équation réduite caractéristique du système rapide s'écrit alors, en fonction de la nouvelle variable distribuée $\tau = t/\epsilon_t$:

$$\left| \begin{array}{l} \forall t \in \mathcal{D}_t \quad \forall x \in] 0 , 1 [\\ \frac{\partial}{\partial \tau} [V_R(x, \tau)] = A_{22} \epsilon_x D^q [V_R(x, \tau)] + B_{22} V_R(x, \tau) + C_2 E_R(x, \tau) \quad (66) \\ \tau = t/\epsilon_t \end{array} \right.$$

Les sous-systèmes $U_\ell(x, t)$ et $V_r(x, \tau)$ régis respectivement par les équations (64) et (66) nécessitent, pour être parfaitement déterminés, la définition de nouvelles conditions initiales et limites.

Les relations (65) permettent de reporter sur $U_\ell(x, t)$ les conditions de $U(x, t)$ définies en (63.2) et (63.3). Pour la partie lente $V_\ell(x, t)$ des variables rapides $V(x, t)$ il vient, à partir de (64.2) :

$$\begin{aligned} A_{22} \epsilon_x D^q [V_\ell(x, 0)] + B_{22} V_\ell(x, 0) = \\ (67) \\ - A_{21} D^q [U_0(x)] - B_{21} U_0(x) - C_2 E(x, 0) \end{aligned}$$

où la commande initiale $E(x, 0)$ ainsi que $U_0(x)$ sont des données du problème (63).

La résolution de cette équation différentielle (67) fournit alors la condition initiale $V_\ell(x, 0)$ moyennant deux constantes d'intégration arbitrairement choisies ; on en déduit alors celle, $V_r(x, 0)$, de la partie rapide à l'aide de (65).

La détermination des conditions limites des parties lente et rapide de $V(x, t)$ sera envisagée après l'analyse du comportement spatial, une indétermination analogue apparaissant dans cette étude.

Nous avons donc réalisé ici la décomposition du système initial $[U(x, t)^T, V(x, t)^T]^T$ en deux sous-systèmes réduits : le lent $[U_\ell(x, t)^T, V_\ell(x, t)^T]^T$ qui approche le système original essentiellement après disparition des phénomènes transitoires, et le sous-système rapide $V_r(x, \tau)$ qui caractérise précisément le régime transitoire. La reconstitution des variables d'état $U(x, t)$ et $V(x, t)$ est donc définie par les approximations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x,t,\varepsilon_t) = U_\ell(x,t) + O(\varepsilon_t) \\ V(x,t,\varepsilon_t) = V_r(x,\tau) + V_\ell(x,t) + O(\varepsilon_t) \end{array} \right. \quad (68)$$

III.2.2 - Comportement spatial :

La présence d'un petit paramètre ε_x attaché à la dérivation partielle spatiale de l'état V permet d'envisager pareillement une décomposition spatiale du processus étudié (63) en :

- un système appelé surface, dont les effets disparaîtraient au bout d'une courte distance,
- un système profond qui caractériserait le système original assez loin du bord, là où les variables surface deviennent négligeables.

Comme pour l'étude temporelle, le système profond est obtenu en annulant ε_x dans (63) ; soit, si A_{11}^{-1} existe :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} [U_p(x,t)] = A_{11} D^q [U_p(x,t)] + B_{11} U_p(x,t) \\ \quad + B_{12} V_p(x,t) + C_1 E_p(x,t) \\ (2) \quad \varepsilon_t \frac{\partial}{\partial t} [V_p(x,t)] = A_{21} A_{11}^{-1} \frac{\partial}{\partial t} [U_p(x,t)] \\ \quad + (B_{21} - A_{21} A_{11}^{-1} B_{11}) U_p(x,t) \\ \quad + (B_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} B_{12}) V_p(x,t) + (C_2 - A_{21} A_{11}^{-1} C_1) E_p(x,t) \end{array} \right. \quad (69)$$

Généralement la solution $V_p(x,t)$ de (69.2) ne vérifie pas les conditions limites $V_0(t)$ et $V_1(t)$ de l'état $V(x,t)$. Nous définissons alors un domaine spatial de couche limite $\mathcal{D}_s =] 0, \xi [U] 1-\xi, 1 [$ où les variables profondes sont supposées invariantes relativement à la variable distribuée x , c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in] 0, +\infty [\quad \forall x \in \mathcal{D}_s \\ U_{su}(x,t) \equiv 0 \\ V_{su}(x,t) = V(x,t) - V_p(x,t) \\ E_{su}(x,t) = E(x,t) - E_p(x,t) \end{array} \right. \quad (70)$$

L'équation réduite valable en surface s'écrit alors, dans la nouvelle échelle spatiale $\chi = x/(\epsilon_x)^{1/q}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in] 0 , + \infty [\quad \forall x \in \mathcal{D}_s \\ \epsilon_t \frac{\partial}{\partial t} V_{su}(\chi, t) = A_{22} \Delta^q V_{su}(\chi, t) + B_{22} V_{su}(\chi, t) + C_2 E_{su}(\chi, t) \quad (71) \\ \chi = x/(\epsilon_x)^{1/q} \end{array} \right.$$

A cette décomposition de l'équation initiale (63.1) en (69) et (71) il convient, comme précédemment, d'ajouter la définition de nouvelles conditions initiales et limites. Les hypothèses (70) induisent le report intégral sur $V_p(x, t)$ des conditions de $U(x, t)$ définies en (63.2) et (63.3), conditions qui sont en outre compatibles avec les hypothèses (65) relatives à cette partie $U(x, t)$ de l'état.

D'autre part la résolution de l'équation différentielle (72) (écrite pour $x=0$) fournit les conditions limites de la partie profonde $V_p(x, t)$ à une constante d'intégration près :

$$\begin{aligned} \epsilon_t \frac{d}{dt} V_p(0, t) &= A_{22} A_{11}^{-1} \frac{d}{dt} U_0(t) + (B_{21} - A_{21} A_{11}^{-1} B_{11}) U_0(t) \\ &+ (B_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} B_{12}) V_p(0, t) + (C_2 - A_{21} A_{11}^{-1} C_1) E_p(0, t) \end{aligned} \quad (72)$$

La même équation écrite pour $x=1$ correspondant à $U_p(1, t)$. Les conditions limites sur $V_{su}(x, t)$ s'en déduisent alors aisément à l'aide des règles d'approximation (70).

Afin de lever l'indétermination sur les conditions initiales des parties profonde et surface de l'état $V(x, t)$ ainsi que celle, précédemment évoquée, sur les conditions limites de $V_l(x, t)$ et $V_r(x, t)$, nous proposons le choix arbitraire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_p(x, 0) = \mu V_0(x) \\ V_{su}(x, 0) = (1 - \mu) V_0(x) \end{array} \right. \quad \text{où } \mu(x) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in \mathcal{D}_s \\ 1 & \text{si } x \notin \mathcal{D}_s \end{array} \quad (73)$$

$$\begin{array}{l}
 V_{\ell}(0,t) = v V_0(t) \\
 V_{\ell}(1,t) = v V_1(t) \\
 V_r(0,t) = (1-v) V_0(t) \\
 V_r(1,t) = (1-v) V_0(t)
 \end{array}
 \quad \text{où } v(t) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t \in \mathcal{D}_t \\ 1 & \text{si } t \notin \mathcal{D}_t \end{array} \quad (74)$$

Les conditions initiales et limites du système original sont donc décomposées en deux parties, la première étant relative aux domaines de couche limite \mathcal{D}_t et \mathcal{D}_s .

Remarque : On trouve dans la littérature quelques considérations sur la détermination de ces domaines, c'est-à-dire sur l'évaluation de θ et ξ respectivement (cf Chapitre I, § I.2).

Le choix (73) (74) permet d'achever la détermination de toutes les nouvelles conditions initiales et limites, et par conséquent celle des solutions des divers systèmes réduits obtenus : le lent (64) et le rapide (66) d'une part, le profond (69) et le surface (71) d'autre part.

III.2.3 - Réductions spatiale et temporelle simultanées :

Une troisième décomposition du système original (63) peut être obtenu par l'annulation simultanée des deux petits paramètres ϵ_t et ϵ_x . Un sous-système à la fois lent et profond $[U_{\ell p}^T, V_{\ell p}^T]^T$ approche alors le processus étudié à partir de l'instant et de la distance où les régimes transitoires disparaissent. Il est régi par :

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} [U_{\ell p}(x,t)] = (A_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} A_{21}) D^q [U_{\ell p}(x,t)] \\
 \quad \quad + (B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}) U_{\ell p}(x,t) + (C_1 - B_{12} B_{22}^{-1} C_2) E_{\ell p}(x,t) \\
 (2) \quad V_{\ell p}(x,t) = - B_{22}^{-1} [A_{21} D^q [U_{\ell p}(x,t)] \\
 \quad \quad + B_{21} U_{\ell p}(x,t) + C_2 E_{\ell p}(x,t)]
 \end{array} \quad (75)$$

Afin que les conditions initiales et limites de $V(x,t)$ définies en (63) soient satisfaites, nous considérons un domaine de couche limite $\mathcal{D} = (] 0, \xi [U] 1-\xi, 1 [x] 0, \theta [)$ où la partie lente et profonde $U(x,t)$ de l'état sera supposée constante :

$$\left. \begin{aligned} (x,t) \in \mathcal{D} \\ U(x,t) &\approx U_{lp}(x,t) \\ V(x,t) &\approx V_{lp}(x,t) + V_{rsu}(x,\tau) \\ E(x,t) &\approx E_{lp}(x,t) + E_{rsu}(x,\tau) \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Les composantes rapide et surface sont alors gouvernées par l'équation :

$$\left. \begin{aligned} (x,t) \in \mathcal{D} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} [V_{rsu}(x,\tau)] = A_{22} \Delta^q [V_{rsu}(x,\tau)] + B_{22} V_{rsu}(x,\tau) + C_2 E_{rsu}(x,\tau) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Les équations (75.1) et (77) étant découplées, elles peuvent être résolues directement par une méthode analytique, comme par exemple la méthode de séparation des variables : les hypothèses simplificatrices (76) permettent de prendre pour $U_{lp}(x,t)$ les conditions initiales et limites de $U(x,t)$ données en (63), ce qui conduit à une solution exacte $U_{lp}(x,t)$ dans un premier temps. Cette solution reportée dans (75.2) conduit également à une solution exacte $V_{lp}(x,t)$; on en déduit alors les conditions initiales et limites sur $V_{rsu}(x,t)$ à l'aide de l'approximation (76). Finalement une solution exacte de (77) est aussi obtenue.

La détermination des sous-systèmes réduits est donc ici fournie par une approche hiérarchisée, ne faisant apparaître aucune indétermination.

Conclusion : Le système (63) considéré dans cette partie aurait pu également être étudié par la méthode présentée au § II de ce chapitre, faisant appel à la bloc-diagonalisation. Ici les matrices A et B auraient dû alors faire l'objet d'une bloc-diagonalisation simultanée qui permettrait le

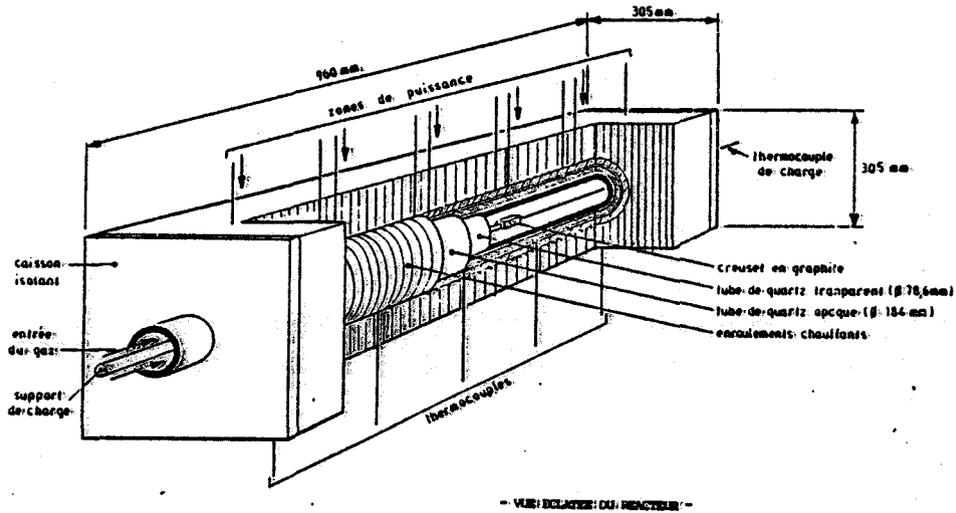
découplage des dynamiques. Cependant afin d'offrir un point de vue différent et parce que le problème considéré s'y prêtait (ce qui n'est pas le cas du problème (26) (27) (28)), nous avons préféré présenter une méthode basée sur la notion de commutation souvent utilisée dans la littérature présentant l'application de la méthode des perturbations singulières aux systèmes à paramètres localisés /SAK-2/. Cette méthode conduit généralement à des problèmes plus simples que le problème initial même si, le plus souvent, les résolutions des équations aux dérivées partielles caractérisant les systèmes réduits, nécessitent encore l'utilisation de méthodes numériques. Ces équations sont moins compliquées et des calculs plus rapides sont à espérer. De plus le choix des pas de calculs peut être adapté, c'est-à-dire qu'à des modes différents seront associés des pas de calculs différents, tant pour x que pour t : la partie suivante illustre ces avantages par l'application de la méthode proposée sur un exemple de chauffage industriel.

III.3 - Application au réacteur d'épithaxie en phase liquide

/BAB/, /ZAL/, /SOU-2/

III.3.1 - Description du processus :

Le réacteur d'épithaxie, schématiquement représenté à la Figure 2, est constitué de deux cylindres de quartz concentriques chauffés par cinq résistances électriques identiques réparties sur toute la longueur du réacteur, la charge utile étant située au cœur du réacteur (au milieu de la zone centrale).



Le réacteur d'épitaxie

FIGURE 2

Le comportement thermique du réacteur est modélisé à partir de l'établissement des bilans d'échanges thermiques entre : la charge, les tubes de quartz, les éléments chauffants. Le modèle mathématique ainsi obtenu est un système de trois équations aux dérivées partielles non linéaires, les variables indépendantes étant le temps et la variable d'espace répartie sur la longueur du four (on utilisera la coordonnée réduite $x = X/L$, L longueur du four, $x \in [0, 1]$).

Ce système représente l'évolution du profil thermique dans les différents constituants ($Y_1(x,t)$, $Y_2(x,t)$, $Y_3(x,t)$ respectivement) à partir de la connaissance de l'évolution $E(x,t)$ de la puissance de chauffe.

Cependant, les opérations de régulation et de poursuite ayant généralement lieu dans une gamme de température de 700 °C à 900 °C, on considère que dans cette plage de valeurs le comportement thermique du réacteur est à peu près linéaire.

Le modèle original peut donc être linéarisé autour du régime statique nominal en posant :

$$\begin{aligned}
 Y_i(x,t) &= Y_{ic}(x) + Y_i(x,t) \\
 E(x,t) &= E_c(x) + e(x,t) \\
 i &= 1, 2, 3
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

où $Y_{ic}(x)$ et $E_c(x)$ sont les valeurs nominales des températures et de la puissance de chauffe.

Le système a paramètres distribués linéarisé qui modélise le processus a donc finalement la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & t \in] 0 , + \infty [\quad x \in] 0 , 1 [\\
 & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}_A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{33} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e(x,t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{79}$$

avec les conditions initiales et limites toutes nulles

L'opérateur A lié à la dérivation spatiale est diagonal et le couplage entre les équations est réalisé par la matrice $B = (b_{ij})$. Tous les coefficients matriciels dépendent des caractéristiques thermiques et géométriques des éléments du réacteur et l'on a, moyennant quelques hypothèses simplificatrices ($Y_{ic}(x)$ a été fixé à 790 °C pour $i=1,2,3$) :

$$\begin{aligned}
 & a_{11} = 0.308 \quad a_{22} = 0.365 \cdot 10^{-2} \quad a_{33} = 0.519 \cdot 10^{-2} \\
 & b_{11} = -14.9 \quad b_{12} = 14.9 \\
 & b_{21} = 15.54 \quad b_{22} = -28.18 \quad b_{23} = 12.64 \\
 & \quad \quad \quad b_{32} = 10.33 \quad b_{33} = -10.59
 \end{aligned} \tag{80}$$

III.3.2 - Simplification du modèle :

L'observation des valeurs numériques des coefficients a_{ij} suscite la recherche pour la matrice A d'un meilleur conditionnement. Une normalisation de ces coefficients peut être réalisée, et ceci suivant deux points de vue différents.

D'une part on peut poser directement :

$$\left| \begin{array}{l} a_{11} = \hat{a}_{11} \\ a_{22} = \hat{a}_{22} \epsilon_x \\ a_{33} = \hat{a}_{33} \epsilon_x \\ \text{avec : } \epsilon_x = 10^{-2} \\ \hat{a}_{ii}, i = 1, 2, 3 \quad \text{coefficients normalisés} \end{array} \right. \quad (81)$$

Une décomposition en parties surface et profonde sera alors possible, et l'introduction simultanée du petit paramètre ϵ_t n'est pas nécessaire ici.

D'autre part une autre normalisation est également possible :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{a}_{11} = a_{11} \epsilon_t \quad \tilde{a}_{22} = a_{22} \quad \tilde{a}_{33} = a_{33} \\ \tilde{b}_{11} = b_{11} \epsilon_t \quad \tilde{b}_{12} = b_{12} \epsilon_t \\ \text{avec : } \epsilon_t = 10^{-2} \\ \tilde{a}_{ii}, i = 1, 2, 3 \quad \text{coefficients normalisés} \end{array} \right. \quad (82)$$

Deux vitesses de chauffe pourront alors être mises en évidence, mais cette décomposition ne peut être liée à la précédente : elles constituent deux aspects différents d'une même propriété, le mauvais conditionnement de la matrice A.

Remarque : La normalisation (82) a lieu au détriment du conditionnement de la matrice de couplage B, mais ceci n'est pas trop grave car les imprécisions d'algorithme proviennent essentiellement des termes dérivés.

La première approche (81) conduit à la définition d'un sous-système profond $(y_{1p}, y_{2p}, y_{3p})^T$ et d'un sous-système surface $(y_{2su}, y_{3su})^T$ régis respectivement par les équations (83) et (84) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [y_{1p}(x, t)] = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y_{1p}(x, t) + b_{11} y_{1p}(x, t) + b_{12} y_{2p}(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} [y_{2p}(x, t)] = b_{21} y_{1p}(x, t) + b_{22} y_{2p}(x, t) + b_{23} y_{3p}(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} [y_{3p}(x, t)] = b_{32} y_{2p}(x, t) + b_{33} y_{3p}(x, t) + e_p(x, t) \end{cases} \quad (83)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [y_{2su}(x, t)] = \hat{a}_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [y_{2su}(x, t)] \\ \quad + b_{22} y_{2su}(x, t) + b_{23} y_{3su}(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} [y_{3su}(x, t)] = \hat{a}_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [y_{3su}(x, t)] \\ \quad + b_{32} y_{2su}(x, t) + b_{33} y_{3su}(x, t) + e_{su}(x, t) \end{cases} \quad (84)$$

La définition d'un domaine de couche limite induit l'approximation suivante pour les variables d'état originales :

$$\begin{cases} y_1(x, t) \approx y_{1p}(x, t) \\ y_2(x, t) \approx y_{2su}(x, t) + y_{2p}(x, t) \\ y_3(x, t) \approx y_{3su}(x, t) + y_{3p}(x, t) \end{cases} \quad (85)$$

Les conditions initiales et limites du modèle original étant nulles il en est donc de même pour la variable profonde $y_1(x, t)$; par extension nous pouvons aussi choisir a priori pour les variables $y_{2su}, y_{2p}, y_{3su}, y_{3p}$ des conditions nulles.

La seconde approche (82) induit la séparation des modes suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= \tilde{a}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [y_{1\ell}(x,t)] + \tilde{b}_{11} y_{1\ell}(x,t) + \tilde{b}_{12} y_{2\ell}(x,t) \\
 \frac{\partial}{\partial t} [y_{2\ell}(x,t)] &= a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [y_{2\ell}(x,t)] + b_{21} y_{1\ell}(x,t) \\
 &\quad + b_{22} y_{2\ell}(x,t) + b_{23} y_{3\ell}(x,t) \\
 \frac{\partial}{\partial t} [y_{3\ell}(x,t)] &= a_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [y_{2\ell}(x,t)] + b_{32} y_{2\ell}(x,t) \\
 &\quad + b_{33} y_{3\ell}(x,t) + e(x,t)
 \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

pour la partie lente, et :

$$\frac{\partial}{\partial t} [y_{1r}(x,\tau)] = \tilde{a}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [y_{1r}(x,\tau)] + \tilde{b}_{11} y_{1r}(x,\tau) \quad (87)$$

pour la partie rapide.

La reconstitution des variables d'état initiales est donc définie par :

$$\left. \begin{aligned}
 y_1(x,t) &= y_{1r}(x,\tau) + y_{1\ell}(x,t) \\
 y_2(x,t) &= y_{2\ell}(x,t) \\
 y_3(x,t) &= y_{3\ell}(x,t)
 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

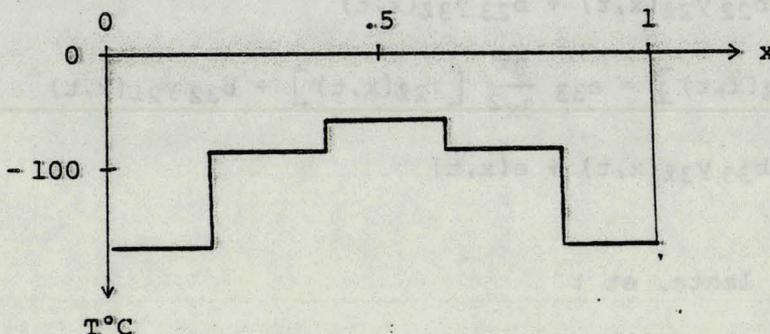
Comme précédemment, les conditions initiales et limites des variables rapides peuvent être choisies arbitrairement nulles. La solution de (87) est alors identiquement nulle, et le système original peut être approché par sa partie lente (86) seule.

III.3.3 - Résultats de simulation :

Une résolution numérique a été effectuée pour le modèle original (79) et pour chaque sous-système (83) (84) et (86) à l'aide des schémas aux différences (62) utilisés dans la partie précédente ($S = y_i(x,t)$ pour $i=1,2,3$). Une simulation stable a été obtenue avec le choix du degré d'implicité $\theta = 0.8$.

a) Comparaison du modèle original avec sa partie profonde

La commande $e(x,t)$ considérée dans cet exemple est définie par le profil de puissance de chauffe suivant :



Profil de puissance de chauffe

FIGURE 3

Puisque la charge, qui est l'objet essentiel de cette étude, est localisée au milieu de la zone centrale, la variable principale est $y_1(x,t)$ qui est essentiellement une variable profonde d'après (85). La commande globale $e(x,t)$ doit donc être imposée au système profond, ce qui a pour conséquence de maintenir les composantes surface nulles partout et tout le temps : l'approximation du modèle initial est donc ici aussi réduite au sous-système profond seul .

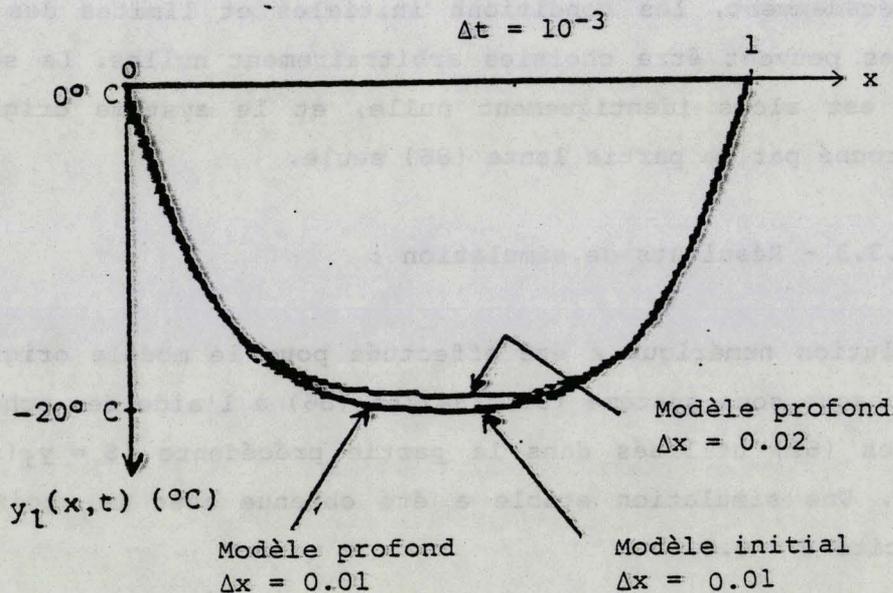


FIGURE 4

Nous avons obtenu ici sensiblement les mêmes résultats pour la charge, par les trois méthodes, mais sans noter d'amélioration de la convergence. Néanmoins des boucles plus rapides ont été observées également avec un accroissement de la vitesse dans le rapport 1.5, ceci pour un même pas de calcul spatial ($\Delta x = 0.02$) ; puisque nous n'étudions pas l'évolution en surface, un pas de calcul spatial plus grand, $\Delta x = 0.1$, peut être choisi : les boucles de calcul sont alors six fois plus rapides. Ces résultats sont regroupés dans la Figure 4.

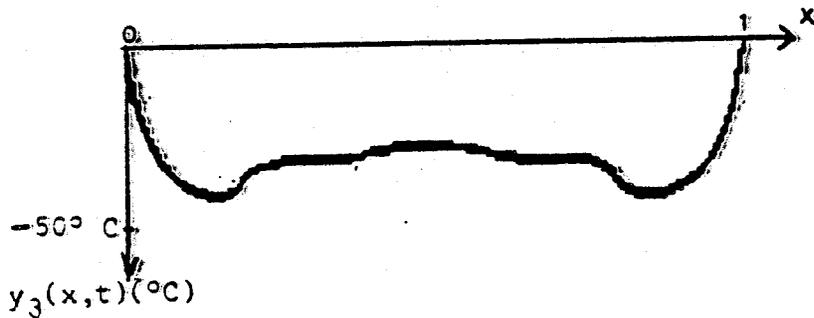
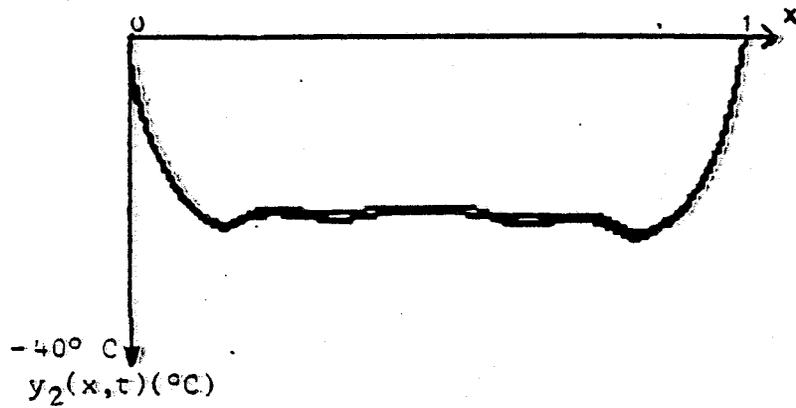
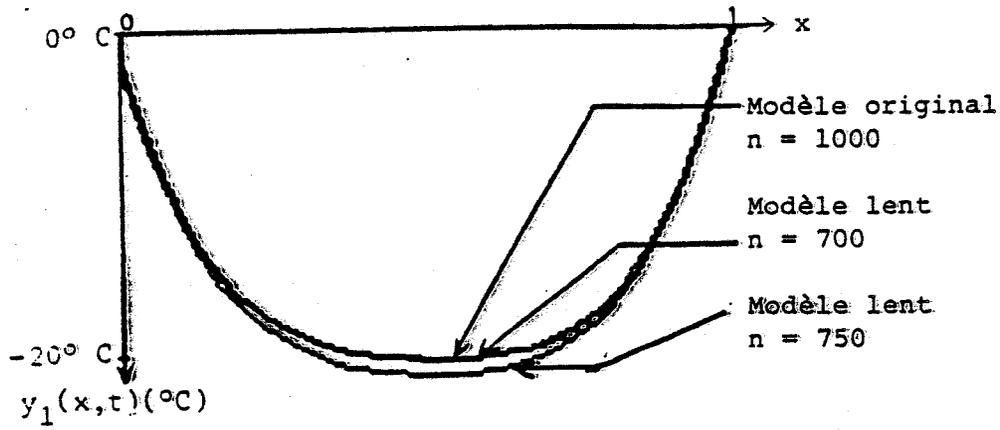
b) Comparaison du modèle original avec sa partie lente

L'étude temporelle a montré que le choix arbitraire de conditions initiales et limites nulles pour les composantes rapides permettait d'approcher le système étudié par sa partie lente uniquement.

Nous présentons dans la Figure 5 les résultats de simulation des profils de température pour les trois parties du réacteur, et ceci pour le modèle original et pour le modèle réduit lent avec toujours le même profil de commande défini en Figure 3.

Les mêmes valeurs limites ($t \rightarrow \infty$) sont obtenues, et ceci confirme les résultats théoriques (l'annulation du terme en $\partial/\partial t$ conduit aux mêmes équations pour les deux modèles). Mais nous ne présentons ici que des résultats intermédiaires, qui correspondent à une variation de 20° (pour y , autour du profil nominal).

Nous constatons une convergence plus rapide pour le système lent : le profil du modèle original relatif à $n=1000$ est atteint avec le modèle lent pour $n=700$, n étant le nombre d'itération. De plus ce modèle réduit induit des boucles de calcul plus rapides : un accroissement de la vitesse de 1.2 a été observé. Enfin d'autres améliorations de convergence ont été mises en évidence en étudiant les effets d'un changement de pas de calcul temporel : la limite de stabilité correspond à $\Delta t = 2.51 \cdot 10^{-2}$ pour le modèle original alors que nous avons trouvé sensiblement le double pour le modèle lent.



$$\Delta x = 0.02$$

$$\Delta t = 10^{-3}$$

FIGURE 5

Conclusion : Cet exemple illustre l'intérêt de la méthode présentée dans cette partie, par les simplifications importantes qu'elle génère tant au niveau des équations théoriques qu'au niveau d'une résolution numérique où la convergence des algorithmes est nettement améliorée. Cependant, il convient de remarquer que le réacteur d'épitaxie ne constitue pas

exactement un exemple de problème du type (63) exactement : la normalisation ne nécessite que l'introduction d'un petit paramètre ε_t ou bien ε_x , mais pas des deux simultanément ; il ne s'agit pas ici d'un problème de perturbations singulières "non équivalents" où deux petits paramètres sont nécessaires pour "forcer" le phénomène naturel d'équivalence. On peut d'ailleurs, en comparant (85) et (88), constater qu'au contraire ce phénomène d'équivalence lent-surface et rapide-profond est bien vérifié. Néanmoins, l'existence exclusive de l'une ou bien de l'autre forme perturbée permet d'illustrer convenablement la méthode de commutation pour chaque étude séparément.

IV - GENERALISATIONS ET EXTENSIONS

IV.1 - Découplages différents pour les matrices prépondérantes

Dans les études détaillées des § II et III nous avons implicitement supposé que les matrices les plus significatives du phénomène physique modélisé en (1) étaient T et M_k . S'il en est généralement ainsi, il est néanmoins possible que pour certains problèmes particuliers ce soit l'influence d'une ou plusieurs autres matrices M_i qui soit importante. La méthode exposée au § II peut alors être étendue à ce type de problème en appliquant, pour découpler les dynamiques, le principe de bloc-diagonalisation simultanée présenté au § I de ce chapitre, à toutes les matrices prépondérantes.

En outre cette éventualité de plusieurs matrices prépondérantes risque fort de conduire à des décompositions par blocs différentes pour certaines matrices d'évolution, et d'entraîner des conflits dans le choix des différentes variables.

Ce phénomène peut d'ailleurs aussi se produire dans les cas simples où seules T et M_k sont significatives, soit par exemple :

$$\begin{aligned}
 T &= \hat{T} \begin{bmatrix} I_{t_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_t I_{t_2} \end{bmatrix}, \quad I_{t_i} \in \mathbb{R}^{t_i \times t_i} \quad (i=1,2 ; t_1+t_2=n) \\
 M_k &= \hat{M}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x I_{m_1} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}, \quad I_{m_i} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i} \quad (i=1,2 ; m_1+m_2=n) \\
 &\text{avec : } t_1 \neq m_1
 \end{aligned} \tag{89}$$

Supposons pour fixer les idées $t_1 > m_1$. La décomposition de l'état global $W(x,t)$ doit être du type :

$$\begin{aligned}
 W(x,t) &= [U_1^T, U_2^T, U_3^T]^T \\
 W(x,t) &\in \mathbb{R}^n \\
 U_i(x,t) &\in \mathbb{R}^{n_i} \quad i=1,2,3 \\
 &\text{avec : } n_1 = m_1 \\
 &\quad n_3 = t_2 \\
 &\quad n_2 = n - m_1 - t_2
 \end{aligned} \tag{90}$$

Et l'on peut montrer, en utilisant le principe d'équivalence que le système (19) (89) s'écrit sous forme PST :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \varepsilon_x U_2 \\ \varepsilon_x \varepsilon_t U_3 \end{bmatrix} = \hat{A} D^k \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \tag{91}$$

ou bien sous forme PSS :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix} = \check{A} D^k \begin{bmatrix} \varepsilon_t \varepsilon_x U_1 \\ \varepsilon_t U_2 \\ \tilde{U}_3 \end{bmatrix} \tag{92}$$

où :

$$\left| \begin{array}{l} A = T^{-1} M_k \\ \hat{A} = \varepsilon_x A = \varepsilon_x \varepsilon_t \check{A} \end{array} \right.$$

On en déduit les caractéristiques dynamiques des variables d'état U_i ($i=1,2,3$) : U_1 regroupe les variables lentes et très courtes (qui restent très en surface) ; U_3 les variables très rapides et longues ; U_2 les variables rapides et de pénétration moyenne.

L'équivalence PST-PSS a permis ici de préciser la relativité des différents modes (on peut en particulier prendre $\varepsilon_t = \varepsilon_x = \varepsilon$). Le cas de non-équivalence peut cependant être envisagé de la même manière.

De façon générale ces systèmes présentant plusieurs dynamiques à constantes de temps et/ou d'espace échelonnées sont des systèmes singulièrement perturbés à paramètres multiples. Lorsque les dynamiques sont proches, de tels problèmes sont très souvent reformulés en problèmes à paramètre unique, facteur commun de tous les petits paramètres du système initial /KOK-1/, /HOP/, /GRU-1,2,3/, /KHA/. Dans le cas contraire, lorsque les dynamiques sont bien séparées, un découplage itératif des différents sous-systèmes est effectué, de la même manière que pour un système à deux dynamiques, en commençant par le plus rapide (ou le plus en surface). Des modélisations où les petits paramètres sont liés comme par exemple (91) ou (92) sont alors préférées, qui évitent toute ambiguïté pour le classement des variables : $\varepsilon_t \varepsilon_x < \varepsilon_t$ (ou ε_x) (voir sur ce point, dans la littérature des systèmes à paramètres localisés : /DAU-1,2/, /CHE/, /O'MA-1/, /SAN/).

Enfin lorsque les dynamiques du système sont quelconques les deux approches précédentes peuvent être combinées : un regroupement des petits paramètres voisins peut tout d'abord être réalisé : on obtient alors une reformulation du problème où les petits paramètres (moins nombreux) sont d'ordres de grandeur bien différents, permettant une séparation itérative des sous-systèmes ainsi mis en évidence.

IV.2 - Extension au cas d'un domaine spatial de dimension q

Dans un but de clarté nous avons limité l'étude précédente au cas des systèmes distribués à une seule variable indépendante spatiale. Il serait cependant possible d'envisager de la même manière l'étude des systèmes de type (1) dans le cas plus général où Ω est un compact de \mathbb{R}^q ; D^j est alors l'opérateur de Hörmander introduit au chapitre I de ce mémoire et dont nous rappelons ici la définition :

$$D^j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_q} \right)^{j_q} \quad j = (j_1, \dots, j_q)$$

La formulation générale de (1) est alors :

$$\left. \begin{array}{l} t \in] 0 , + \infty [\quad x \in \Omega \quad \Omega \text{ compact de } \mathbb{R}^q \\ T \frac{\partial}{\partial t} W = \sum_{|j|=0}^k M_j D^j W + N E(x, t) \\ \text{où : } |j| = \sum_{i=1}^q j_i \end{array} \right\} \quad (93)$$

De telles modélisations apparaissent par exemple dans les problèmes de diffusion en milieu non homogène : plusieurs corps, dont les concentrations respectives sont les composantes de l'état, pénètrent dans un matériau inhomogène où certaines directions sont privilégiées pour certains corps. En pratique, et étant donné la complexité de tels problèmes, seule l'évolution suivant ces directions sont considérées. La méthode que nous proposons dans ce chapitre permettrait de tenir compte également des phénomènes secondaires qui ont lieu suivant les autres directions (développement de cristaux par exemple).

Il est à noter qu'en plus du principe d'équivalence PST-PSS déjà cité, il peut apparaître également des équivalences du type PSS-PSS où une variable surface pour la direction x_i serait profonde en x_j ($j \neq i$).

CONCLUSION

Les notions de perturbations singulières spatiales (PSS) et de perturbations singulières temporelles (PST) ont été introduites et développées dans ce chapitre. Leur analyse détaillée est effectuée successivement pour deux classes différentes de processus :

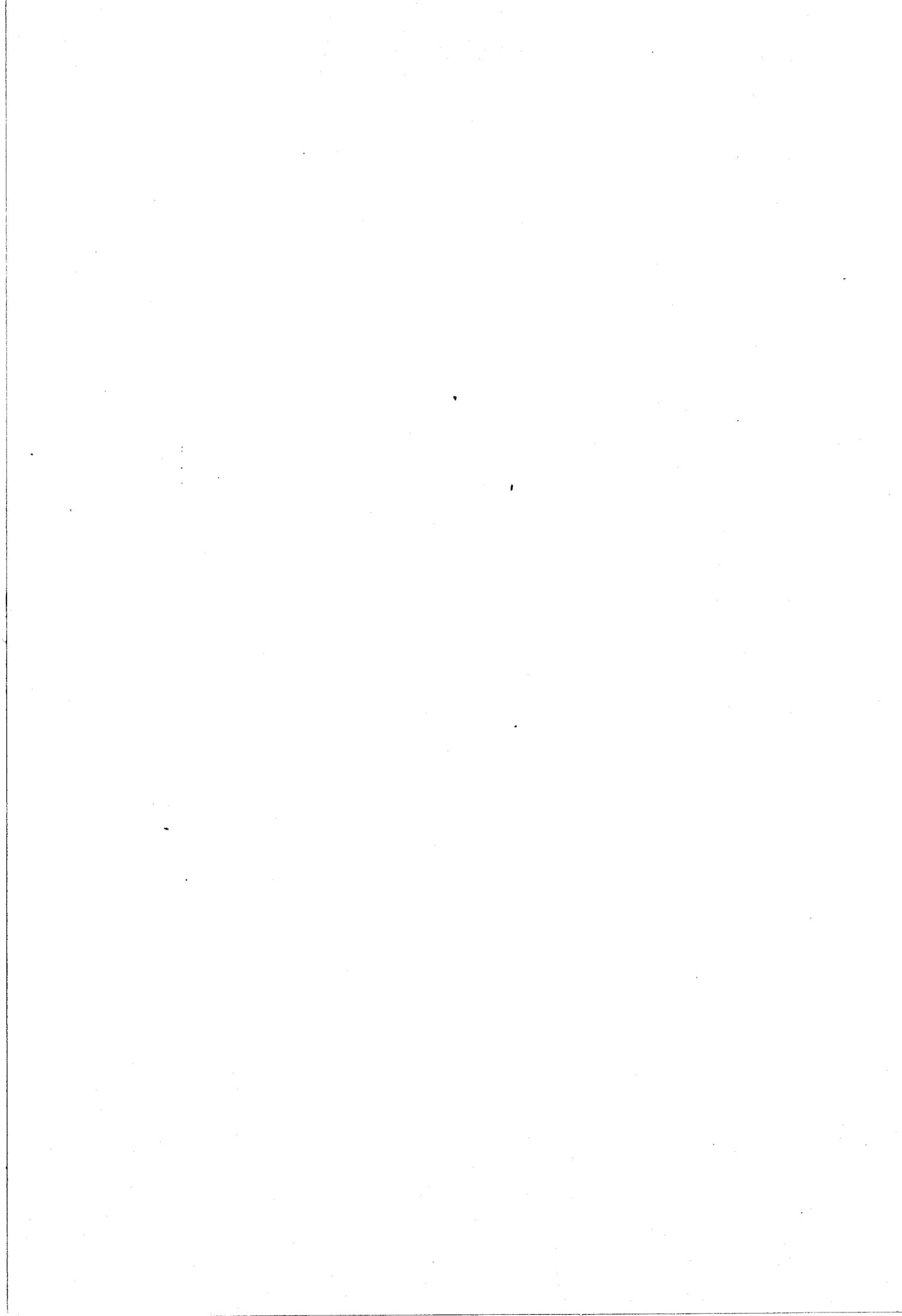
La partie II concerne des systèmes à perturbations singulières dites équivalentes. Un seul petit paramètre permet d'étudier soit l'aspect PSS soit l'aspect PST moyennant d'éventuelles reformulations du problème. La séparation des dynamiques fait appel ici à la notion de bloc-diagonalisation d'une matrice. Une comparaison du système initial avec les modèles réduits ainsi obtenus est présentée à travers un exemple numérique, qui permet d'apprécier la validité de la méthode.

La partie III, au contraire, envisage le cas où les perturbations singulières ne sont pas équivalentes. Un autre point de vue est alors présenté qui est basé sur la notion de commutation après et/ou au-delà des transitoires supposés localisés (dans le temps et dans l'espace) à l'intérieur d'un "domaine de couche limite". Cette approche, inspirée de la théorie classique des perturbations singulières appliquée aux systèmes à paramètres localisés, est plus complexe et moins générale que la précédente : elle concerne essentiellement des systèmes ne présentant pas le phénomène naturel d'équivalence ; en outre elle engendre des indéterminations sur les conditions limites et initiales des systèmes réduits.

L'exemple industriel du réacteur d'épitaxie a néanmoins permis d'en apprécier également les performances, mais indépendamment pour le comportement spatial, ce modèle vérifiant le principe d'équivalence.

Le fait d'avoir choisi une classe particulière de systèmes pour cet exposé des méthodes développées ne restreint en rien la généralité de l'étude. Nous y avons envisagé un grand nombre d'éventualités, les autres pouvant être traités de façon analogue.

CHAPITRE IV



SIMPLIFICATION DE LA COMMANDE

INTRODUCTION

La commande optimale des systèmes à paramètres répartis fait l'objet d'une littérature importante /TZA-1/. Certains de ces travaux (|LIO-2/, /GIL-3/, /LAU/, /BAR-2/) ont montré que les résultats obtenus par la construction du retour d'état étaient formellement identiques à ceux obtenus dans le cas des systèmes à paramètres localisés |BOU,2|.

Dans un premier temps, nous rappelons les résultats, désormais classiques /FAU/, de la commande optimale des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles pour la classe de systèmes que nous considérons dans cette étude. Ce problème peut être résolu par un retour d'état : l'opérateur différentiel vérifie alors une équation de Riccati formelle /LIO-2/, /LUK/ dont nous proposons une méthode de résolution.

Dans le cas de systèmes d'équations aux dérivées partielles perturbés, la construction de commandes quasi-optimales a été proposée par l'intermédiaire de méthodes asymptotiques /ARD/, /LIO-6,7/, /BAR-4/ (Cf Ch. II, § I) ou par l'application de la théorie des perturbations singulières sur un modèle de dimension infinie déduit du système initial /BAL,6/, /ZAL/ (Cf Ch. II, § III.2). Les méthodes de simplification de modèles présentées au chapitre précédent par l'exploitation des perturbations singulières directement sur l'équation d'état du système, nous permettent de construire des commandes quasi-optimales, solution d'un problème linéaire quadratique.

Deux méthodes propres aux systèmes linéaires à paramètres localisés seront étendues à notre propos : la décomposition de l'équation de Riccati /KOK,3/ ou la construction d'une commande composite /CHO,2/, en envisageant le cas de perturbations singulières temporelles (PST) et celui de perturbations singulières spatiales (PSS).

Nous considérons dans cette étude des problèmes où le paramètre de perturbation se trouve dans l'équation d'état et non dans le critère étudié /LIO-5,6/.

I - COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES A PARAMETRES REPARTIS

Nous allons rappeler ici certains des résultats établis par Lions /LIO,2/ que nous utiliserons par la suite. Ces résultats généralisent aux systèmes à paramètres répartis les théorèmes usuels de commande optimale des systèmes continus à paramètres localisés.

I.1 - Problème de commande optimale

Soit le système à paramètres distribués linéaire, défini par l'équation d'état :

$t \in]0, +\infty[$ $x = (x_1, \dots, x_q)$ ouvert de \mathbb{R}^q de frontière Γ

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} W(x,t) = MW(x,t) + NE(x,t)$$

$W(x,t) \in \mathbb{R}^n$ vecteur d'état

$E(x,t) \in \mathbb{R}^m$ vecteur de commande réparti

$N \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$M = \sum_{|i| \leq k} M_i D^i$ opérateur linéaire aux dérivées partielles,

Cf notation de Hörmander donnée en (2) du chapitre I avec : (1)

$i = (i_1, \dots, i_q) \in \{0, \dots, k\}^q$

(2) conditions initiales :

$$W(x,0) = W_0(x)$$

(3) conditions limites :

$$\beta_{\Gamma} W_{\Gamma}(x,t) = 0$$

(4) observation :

$$Z(x,t) = SW(x,t)$$

$Z(x,t) \in \mathbb{R}^s$ sortie du système

$S \in \mathbb{R}^{s \times n}$

Remarque : dans (1-3), β caractérise un ensemble d'opérateurs frontières qui conduisent avec (1-1) à un problème bien posé au sens d'Hadamard (Cf. Ch. I, §I.2).

Pour la clarté de l'exposé, nous ne situerons pas les fonctions apparaissant dans (1) dans des espaces de Sobolev convenables /LIO-4/, bien que cela soit nécessaire à la rigueur de la théorie ; nous emploierons plus simplement des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

Nous avons choisi d'étudier les systèmes où l'entrée et la sortie sont réparties, mais l'on pourrait également envisager des problèmes où ces variables sont localisées sur la frontière : une entrée frontière intervient dans les conditions limites ; une sortie frontière est caractérisée par l'observation de l'état sur Γ . Le cas général a été traité de façon complète dans /LIO-8/ et les méthodes que nous développons peuvent y être appliquées.

Le problème de commande associé au système (1) consiste alors à rechercher la commande optimale $E^*(x,t)$ minimisant le critère :

$$J = \int_0^T \int_{\Omega} |Z^T(x,t)QZ(x,t) + E^T(x,t)RE(x,t)| dxdt \quad (2)$$

avec $Q \geq 0$ et $R > 0$

en se plaçant dans le cas d'un problème sans contrainte sur l'entrée.

I.2 - Etat adjoint

Soit $p(x,t)$ l'état adjoint de (1) défini par le système à paramètres répartis (3) :

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) &= -M^*p(x,t) - S^T QSW(x,t) \\ & p(x,t) \in \mathbb{R}^n \text{ vecteur état adjoint} \\ (2) \quad \text{conditions finales :} & \quad \quad \quad (3) \\ & p(x,T) = 0 \\ (3) \quad \text{conditions limites :} \\ & \beta p(x,t) = 0 \end{aligned} \right\}$$

où M^* est l'opérateur différentiel adjoint défini par :

$$M^* = \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} M_i^T D^i$$

L'utilisation du théorème 2.1 de /LIO-2/ nous permet alors d'affirmer que la commande optimale, solution du problème (1) (2) est donnée par :

$$E^*(x,t) = -R^{-1} N^T p(x,t) \quad (4)$$

Nous avons considéré le cas où N et S sont des matrices réelles, mais on pourrait également étudier le cas où N et S sont des opérateurs différentiels : il suffirait alors de remplacer, dans (3) et (4), N^T et S^T par les opérateurs adjoints N^* et S^* .

Le système optimal en boucle fermée s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} W(x,t) \\ p(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -NR^{-1}N^T \\ -S^TQS & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(x,t) \\ p(x,t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

qui possède une structure analogue à celle qu'on obtient pour les systèmes à paramètres localisés, relativement au même problème optimal.

I.3 - Construction du retour d'état

Afin d'effectuer cette construction sans passer par l'intermédiaire de l'état adjoint, nous exploitons l'analogie précédente en cherchant un opérateur différentiel P de retour d'état.

I.3.1 - Equation de Riccati formelle :

Pour découpler le système (5), on choisit /LIO-2/ :

$$p(x,t) = P W(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T] \quad (6)$$

ce qui conduit, en reportant cette expression dans (5), à l'équation de Riccati formelle vérifiée par l'opérateur P :

$$\left| \begin{array}{l} - \frac{\partial}{\partial t} P = S^T Q S + M^* P + P M - P N R^{-1} N^T P \\ \text{avec } P(T) = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Dans le cas où T tend vers $+\infty$, que l'on considèrera dans toute la suite de notre étude, on peut montrer que cette équation différentielle (7) se réduit à une équation algébrique formelle de Riccati :

$$S^T Q S + M^* P + P M - P N R^{-1} N^T P = 0 \quad (8)$$

dont la solution est un opérateur auto-adjoint ($P^* \equiv P$).

Remarque : dans les cas plus complexes où se superpose, dans l'équation d'état, un vecteur $f(x,t)$ à $NE(x,t)$; ou encore lorsque, dans le critère (2), $Z(x,t)$ est remplacé par $Z(x,t) - Z_d(x)$ ($Z_d(x)$ étant une observation finale donnée), au lieu de (6), il convient de prendre pour $p(x,t)$:

$$p(x,t) = P W(x,t) + r(x,t) \quad (9)$$

où P est défini par (7) et $r(x,t)$ par :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} r(x,t) = [M^* - P N R^{-1} N^T] r(x,t) + P f(x,t) - S^T Q Z_d(x) \\ \text{avec } r(T,x) = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

Cette dernière équation (10) se réduisant également à une équation algébrique lorsque T devient infini.

I.3.2 - Résolution de l'équation de Riccati :

La réalisation de la loi de commande en boucle fermée est obtenue, de façon générale, par l'application de la méthode de Galerkin qui peut se faire à l'un des deux niveaux suivants :

* Les équations d'état et adjointes sont approchées par des équations différentielles totales de dimension finie, on détermine alors la matrice de Riccati découplant les deux systèmes /JAR/.

* On transforme l'équation opérationnelle de Riccati (8) en une équation aux dérivées partielles à laquelle on applique la méthode de Galerkin /LAU/.

Praflur et Mac Causland /PRA/ ont montré sur des exemples que les deux méthodes donnent les mêmes résultats numériques, mais que la première a l'avantage d'être de réalisation plus simple.

Nous proposons ici une méthode analytique de résolution directe de l'équation de Riccati formelle (8). En effet, posons :

$$P = \sum_{|i| \in \mathbb{N}} P_i D^i \quad (11)$$

L'utilisation de cette expression dans (8) va nous permettre, en annulant le coefficient de chaque opérateur élémentaire D^j , de déterminer les équations vérifiées par les P_i . Nous procéderons en deux étapes : en examinant d'abord le cas simple où est inclus dans \mathbb{R} , puis le cas général d'un domaine spatial à q dimensions.

a) $\Omega \in \mathbb{R}$

A partir de (11), il vient :

$$PM = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} P_i D^i \right) \left(\sum_{j \leq k} M_j D^j \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i D^i \quad (12-a)$$

$$\text{où } A_i = \sum_{j=0}^{\min(k,i)} P_{i-j} M_j$$

$$M^* P = \left(\sum_{j=k} (-1)^j M_j^T D^j \right) \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} P_i D^i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} B_i D^i \quad (12-b)$$

$$\text{où } B_i = \sum_{j=0}^{\min(k,i)} (-1)^j M_j^T P_{i-j}$$

$$PNR^{-1} N^T P = \sum_{i \in \mathbb{N}} C_i D^i \quad (12-c)$$

$$\text{où } C_i = \sum_{j=0}^i P_j N R^{-1} N^T P_{i-j}$$

Si l'on reporte ces expressions dans (8), il vient l'ensemble d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} S^T Q S + A_0 + B_0 - C_0 = 0 \\ \forall i \in \mathbb{N}^* : A_i + B_i - C_i = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

La première de ces équations détermine P_0 vérifiant l'équation de Riccati (14) :

$$S^T Q S + P_0 M_0 + M_0^T P_0 - P_0 N R^{-1} N^T P_0 = 0 \quad (14)$$

qui admet une solution définie positive si le triplet (M_0, N_0, S_0) est stabilisable-défectable /KUC/, N_0 et S_0 étant définis par :

$$\begin{cases} N_0 N_0^T = N R^{-1} N^T \\ S_0^T S_0 = S^T Q S \end{cases} \quad (15)$$

Les équations (13-2) s'écrivent :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad (16)$$

$$\sum_{j=0}^{\min(k,i)} P_{i-j} M_j + \sum_{j=0}^{\min(k,i)} (-1)^j M_j^T P_{i-j} - \sum_{j=0}^i P_j N R^{-1} N^T P_i$$

ce qui fournit, en posant :

$$\begin{cases} (1) & F = M_0 - N R^{-1} N^T P_0 \\ (2) & G_i = \sum_{j=1}^{\min(k,i)} (P_{i-j} M_j + (-1)^j M_j^T P_{i-j}) \\ (3) & \begin{cases} H_i = \sum_{j=1}^{i-1} P_j N R^{-1} N^T P_{i-j}, & i \geq 2 \\ H_1 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

l'ensemble suivant d'équations de Lyapounov qui permet de déterminer successivement les P_i :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P_i F + F^T P_i = H_i - G_i \quad (18)$$

pour i fixé, si P_0, \dots, P_{i-1} sont déterminés et si (M_0, N_0, S_0) est stabilisable-défectable, cette équation (18) admet toujours une solution unique car, d'après /KUC/, F est alors une matrice de Hurwitz.

Remarques :

1. si l'on avance l'hypothèse de récurrence :

$$(HR) \forall j \quad i \quad \begin{cases} j \text{ pair} & P_j = P_j^T \\ j \text{ impair} & P_j = -P_j^T \end{cases}$$

alors, d'après (17), on obtient :

$$G_i^T = (-1)^i G_i \quad \text{et} \quad H_i^T = (-1)^i H_i \quad (19)$$

ce qui conduit, par transposition de (18) à :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad P_i^T F + F^T P_i^T = (-1)^i (H_i - G_i) \quad (20)$$

soit

$$\left| \begin{array}{l} i \text{ pair} \Rightarrow P_i = P_i^T \\ i \text{ impair} \Rightarrow P_i = -P_i^T \end{array} \right.$$

On a donc montré que l'opérateur obtenu par cette méthode est bien un opérateur auto-adjoint.

2. Cette méthode n'est applicable que si l'équation (14) est résolvable. Par exemple, si $M_0 = 0$ (e.g : équation de la chaleur) P_0 n'existera que sous certaines conditions sur N et S .

Dans le cas où cette équation n'admet pas de solution, on se contentera d'un retour d'état par l'intermédiaire de l'état adjoint.

Finalement, cette méthode permet d'approcher la commande optimale par une commande sous-optimale construite, en tronquant l'opérateur P à partir d'un certain ordre r , suivant :

$$E_{s.\text{opt}} = -R^{-1} N^T \left(\sum_{i > r} P_i D^i \right) W(x, t) \quad (21)$$

puis par l'utilisation de schémas aux différences finies.

b) $\Omega \in \mathbb{R}^q$

Les principes que nous venons d'exposer dans le cas où est inclus dans \mathbb{R} , peuvent sans difficulté être étendus au cas d'un problème à q variables indépendantes spatiales. En effet, considérons la somme vectorielle d'indices et la relation d'ordre partiel définies en (22) :

$$\left| \begin{array}{l} i = (i_1, \dots, i_q) ; j = (j_1, \dots, j_q) \\ \text{somme} : i+j = (i_1 + j_1, \dots, i_q + j_q) \\ \text{ordre partiel} : j > i \Leftrightarrow \forall h \in \{1, \dots, q\} \quad j_h > i_h \end{array} \right. \quad (22)$$

Une extension des expressions (12) conduit aux équations suivantes :

$$\forall i \in \mathbb{N}^q \quad A_i = \sum_{\substack{j \leq i \\ |j| \leq k}} P_{i-j} M_j \quad (23-a)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^q \quad B_i = \sum_{\substack{j \leq i \\ |j| \leq k}} (-1)^{|j|} M_j^T P_{i-j} \quad (23-b)$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^q \quad C_i = \sum_{j \leq i} P_j^{NR} {}^{-1} N^T P_{i-j} \quad (23-c)$$

ce qui fournit, en notant o_q le q -uplet $(0, \dots, 0)$, le système d'équations (24) déterminant les P_i :

$$\begin{aligned} (1) \quad & S_{o_q}^T Q S_{o_q} + P_{o_q} M_{o_q} + M_{o_q}^T P_{o_q} - P_{o_q}^{NR} {}^{-1} N^T P_{o_q} = 0 \\ (2) \quad & \forall i \in \mathbb{N}^q - \{o_q\} \quad P_i F + F^T P_i = H_i - G_i \\ & \text{où } F = [M_{o_q} \quad - NR {}^{-1} N^T P_{o_q}] \\ & G_i = \sum_{\substack{o_q < j \leq i \\ |j| \leq k}} (P_{i-j} M_j + (-1)^{|j|} M_j^T P_{i-j}) \\ & H_i = \begin{cases} \sum_{o_q < j < i} P_j^{NR} {}^{-1} N^T P_{i-j} & \text{si } |i| \neq 1 \\ 0 & \text{si } |i| = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

On retrouve donc ici aussi une équation de Riccati (24-1) dont la solution est P_{o_q} et un ensemble d'équations de Lyapounov (24-2) qui fournissent les P_i pour $|i| \geq 1$.

Les mêmes remarques que dans le cas a) sont valables et la commande optimale sera approchée par la formule (21) étendue au cas de plusieurs variables spatiales.

$$E_{s.opt} = -R {}^{-1} N^T \left(\sum_{|i| \leq r} P_i D^i \right) W(x,t) \quad (25)$$

En conclusion, nous avons montré dans cette partie comment le problème de commande optimale des systèmes distribués linéaires peut être formellement traité, dans certains cas particuliers, de la même façon que tous les systèmes linéaires à paramètres localisés. Dans le cas de systèmes singulièrement perturbés, les mêmes principes de simplification de commande pourront donc être appliqués et ce, compte tenu des résultats du chapitre III, tant pour l'aspect spatial (PSS) que temporel (PST).

I.3.3 - Exemple :

Considérons à titre d'illustration de la méthode proposée le système thermique défini par l'équation :

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -w(x,t) + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + e(x,t) \quad (26)$$

$$\Omega =] -1,1 [$$

pour lequel on cherche le retour d'état minimisant le critère

$$J = \iint [w^2(x,t) + e^2(x,t)] dxdt \quad (27)$$

Nous sommes alors conduits au retour optimal défini par

$$e^*(x,t) = -p(e(x,t)) \quad (28)$$

où p est solution de l'équation de Riccati formelle

$$1 + p(-1 + D^2) + (-1 + D^2)p - p^2 = 0 \quad (29)$$

Si l'on cherche par la méthode proposée, l'opérateur p sous la forme $\sum_{i=0}^{\infty} p_i D^i$, on obtient par identification

$$p_0 = .414$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = .293$$

(30)

$$p_3 = 0$$

$$p_4 = .1768$$

...

A titre de comparaison on peut résoudre l'équation de Riccati par la méthode de Galerkin. Le choix des cinq premiers polynomes de Legendre sur $[-1, +1]$ nous conduit à transformer l'équation de Riccati formelle scalaire en une équation matricielle d'ordre 5 dont la solution s'écrit :

$$P_{(5)} = \begin{bmatrix} .414 & 0 & .879 & 0 & 26.62 \\ & .414 & 0 & 4.39 & 0 \\ & & .414 & 0 & 10.25 \\ 0 & & & 4.14 & 0 \\ & & & & .414 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Parallèlement à cette résolution, si l'on écrit dans la même base de Legendre l'opérateur p , tronqué à l'ordre 5, on retrouve exactement $P_{(5)}$. C'est-à-dire que l'on vient de montrer, sur un exemple, que la méthode que nous avons proposée conduit formellement au même résultat que la méthode de Galerkin, mais est d'utilisation beaucoup plus simple car elle n'augmente pas la taille des équations matricielles et elle est réursive.

De façon plus concrète, une simulation a été menée sur cet exemple pour des conditions initiales : $w(x,0) = 1, x \in \Omega$, et des conditions frontières : $w(-1,t) = w(1,t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}^+$. Suivant les ordres de troncature de l'opérateur p , nous avons obtenu les résultats suivants :

NOMBRE D'ITERATIONS	COMMANDE $e(x,t)$		
	0	$-p_0 w(x,t)$	$-p_0 w(x,t) - p_2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$
30	9.71	9.59	9.58
150	9.09	8.75	8.53

VALEURS DE $w(0,t)$

Ce tableau indique une convergence plus rapide de la solution vers l'état d'équilibre lorsque l'on considère de plus en plus de termes dans le retour d'état.

II - SYSTEMES TEMPORELLEMENT SINGULIEREMENT PERTURBES (P.S.T.)

D'après les définitions du chapitre III, §I.3.1, le système (1) est sous la forme PST si les matrices constantes M_i , $|i| \leq k$, N et S ont la structure suivante :

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad , \quad S = |S_1, S_2| \quad (32)$$

où $\begin{cases} M_{hl}^i \in \mathbb{R}^{n_h \times n_l}, (h,l) \in \{1,2\}^2 \\ N_h \in \mathbb{R}^{n_h \times m}, S_h \in \mathbb{R}^{s \times n_h}, h \in \{1,2\} \end{cases}$

et ε est un petit paramètre, $0 < \varepsilon \ll 1$

L'état peut alors être décomposé en deux groupes de variables par :

$$W(x,t) = [U^T(x,t), V^T(x,t)]^T \quad (33)$$

et l'opérateur M possède la structure suivante :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (34)$$

où $\forall (h,l) \in \{1,2\}^2 \quad M_{kl} = \sum_{|i| \leq k} M_{hl}^i D^i$

Le but de cette partie est de construire des commandes quasi-optimales qui approchent la commande optimale, solution du problème (1) (26) (2). Deux points de vue seront alors envisagés : la décomposition de l'équation de Riccati [KOK,4] et le principe de la commande composite [CHO,2].

II.1 - Décomposition de l'équation de Riccati

Si l'on note \hat{M} et \hat{N} les matrices normalisées associées respectivement à M et N, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} M = I_\varepsilon \hat{M} \\ N = I_\varepsilon \hat{N} \end{cases} \quad \text{avec } I_\varepsilon = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \frac{I_{n_2}}{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (35)$$

la commande optimale est donnée par :

$$E^* = -R^{-1} N^T I_\varepsilon P W(x, t) \quad (36)$$

où P est l'opérateur solution de l'équation de Riccati (37) :

$$S^T Q S + \hat{M}^T I_\varepsilon P + P I_\varepsilon \hat{M} - P I_\varepsilon \hat{N} R^{-1} N^T I_\varepsilon P = 0 \quad (37)$$

Comme l'opérateur P est auto-adjoint, il vient la forme (38), proposée pour les systèmes à paramètres localisés dans [KOK,4], qui évite une divergence de la solution pour $\varepsilon = 0$:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}(\varepsilon) & \varepsilon P_{12}(\varepsilon) \\ \varepsilon P_{12}^*(\varepsilon) & \varepsilon P_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (38)$$

où P_{11} et P_{22} sont des opérateurs auto-adjoints.

Dans cette forme, les opérateurs s'écrivent de façon analytique en fonction de ε :

$$\begin{cases} \forall (h, l) \in \{1, 2\}^2 \\ P_{hl}(\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{hl}(r) \varepsilon^r \\ \text{où } \forall r \in \mathbb{N} \quad P_{hl}(r) = \sum_{|i| \in \mathbb{N}} P_{hl}(r)_{i,i} \quad , \quad P_{hl}(r)_{i,i} \in \mathbb{R}^{n_h \times n_l} \end{cases} \quad (39)$$

L'équation de Riccati (37) est alors équivalente au système (40) de trois équations opérationnelles où, pour simplifier les expressions, l'argument ε est omis :

$$\begin{aligned} & P_{11} M_{11} + M_{11}^* P_{11} + P_{12} M_{21} + M_{21}^* P_{12}^* - P_{11} N_1 R^{-1} N_1^T P_{11} \\ & - P_{11} N_1 R^{-1} N_2^T P_{12}^* - P_{12} N_2 R^{-1} N_1^T P_{11} - P_{11} N_2 R^{-1} N_2^T P_{12}^* \\ & + S_1^T Q S_1 = 0 \end{aligned} \quad (40-1)$$

$$\begin{aligned}
 & P_{11} M_{12} + P_{12} M_{22} + M_{21}^* P_{22} - P_{11} N_1 R^{-1} N_2^T P_{22} & (40-2) \\
 & - P_{12} N_2 R^{-1} N_2^T P_{22} + S_1^T Q S_2 \\
 & + \epsilon [M_{11}^* P_{12} - P_{11} N_1 R^{-1} N_1^T P_{12} - P_{12} N_2 R^{-1} N_1^T P_{12}] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P_{22} M_{22} + M_{22}^* P_{22} - P_{22} N_2 R^{-1} N_2^T P_{22} + S_2^T Q S_2 & (40-3) \\
 & + \epsilon [M_{12}^* P_{12} + P_{12} M_{12} - P_{12} N_1 R^{-1} N_2^T P_{22} \\
 & P_{22} N_2 R^{-1} N_1^T P_{12}] \\
 & - \epsilon^2 [P_{12} N_1 R^{-1} N_1^T P_{12}] = 0
 \end{aligned}$$

Par identification des termes en ϵ^i ($i \in \mathbb{N}$) dans ces relations, on obtient les coefficients des expressions asymptotiques (39). Si l'on se contente, comme dans le cas des systèmes à paramètres localisés, de la connaissance des P_{hi} à l'ordre 0, on est d'abord ramené à la résolution de l'équation de Riccati formelle d'ordre n_2 :

$$P_{22}^{(0)} M_{22} + M_{22}^* P_{22}^{(0)} - P_{22} N_2 R^{-1} N_2^T P_{22}^{(0)} + S_2^T Q S_2 = 0 \quad (41)$$

qui peut être effectuée analytiquement par la méthode présentée en I.3.2. $P_{12}^{(0)}$ et $P_{11}^{(0)}$ seront ensuite déterminés par (40-1) et (40-2) écrites pour $\epsilon=0$.

Cependant, l'utilisation de la méthode de Kokotovic [KOK,4] sur ces équations opérationnelles conduit à l'inversion de l'opérateur $(M_{22} - N_2 R^{-1} N_2^T P_{22}^{(0)})$. De façon à contourner cette difficulté, nous proposons d'utiliser d'abord dans (40-1) et (40-2) les développements analytiques des opérateurs donnés en (39). Pour la clarté de l'exposé, nous nous limiterons au cas simple, $\Omega \subset \mathbb{R}$; la généralisation au cas $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ pouvant être faite sans difficulté. Il vient alors :

* Pour $i = 0$

$$\begin{aligned}
 & P_{11}^{(0)} M_{11} + M_{11}^T P_{11}^{(0)} + P_{12}^{(0)} M_{21} + M_{21}^T P_{12}^{(0)} & (42-1) \\
 & - P_{11}^{(0)} N_1 R^{-1} N_1^T P_{11}^{(0)} - P_{12}^{(0)} N_2 R^{-1} N_1^T P_{11}^{(0)}
 \end{aligned}$$

$$- P_{12}^{(o)} \circ_{N_2 R}^{-1} \circ_{N_2}^T P_{12}^{(o) \circ T} + S_1^T Q S_1 = 0$$

$$P_{11}^{(o)} \circ_{M_{12}}^{\circ} + P_{12}^{(o)} \circ_{M_{22}}^{\circ} + M_{21}^{\circ T} P_{22}^{(o) \circ} - P_{11}^{(o)} \circ_{N_1 R}^{-1} \circ_{N_2}^T P_{22}^{(o) \circ} \quad (42-3)$$

$$- P_{12}^{(o)} \circ_{N_2 R}^{-1} \circ_{N_2}^T P_{22}^{(o) \circ} + S_1^T Q S_2 = 0$$

* Pour $i > 0$.

$$\sum_{j=0}^{\min(k,i)} P_{11}^{(o) i-j} \circ_{M_{11}}^j + P_{12}^{(o) i-j} \circ_{M_{21}}^j + (-1)^j \circ_{M_{11}}^T P_{11}^{(o) i-j} \quad (43-1)$$

$$(-1)^i \circ_{M_{21}}^T P_{12}^{(o) i-j}$$

$$- \sum_{j=0}^i \left[P_{11}^{(o) i-j} \circ_{N_1} + P_{12}^{(o) i-j} \circ_{N_2} \right] R^{-1} \left[\circ_{N_1}^T P_{11}^{(o) j} + (-1)^j \circ_{N_2}^T P_{12}^{(o) j} \right] = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\min(k,i)} P_{11}^{(o) i-j} \circ_{M_{12}}^j + P_{12}^{(o) i-j} \circ_{M_{22}}^j + (-1)^j \circ_{M_{21}}^T P_{22}^{(o) i-j} \quad (43-2)$$

$$- \sum_{j=0}^i \left[P_{11}^{(o) j} \circ_{N_1} + P_{12}^{(o) j} \circ_{N_2} \right] R^{-1} \circ_{N_2}^T P_{22}^{(o) i-j} = 0$$

Le système d'équation (42) peut être découpé et conduit, suivant /KOK-4/ à la détermination de $P_{11}^{(o) \circ}$ et $P_{12}^{(o) \circ}$ (en supposant $P_{22}^{(o) \circ}$ connu) par la résolution de l'équation de Riccati (44) :

$$P_{11}^{(o) \circ} \bar{M} + \bar{M} P_{11}^{(o) \circ} - P_{11}^{(o) \circ} \bar{N} R^{-1} \bar{N}^T P_{11}^{(o) \circ} + \bar{Q} = 0 \quad (44)$$

$$\text{où } \bar{M} = M_{11}^{\circ} + E_1^{\circ} M_{21}^{\circ} + \bar{N}_2 R^{-1} \circ_{N_2}^T E_2^{\circ T}$$

$$\bar{N} = N_1 + E_1^{\circ} N_2$$

$$\bar{Q} = -E_2^{\circ} M_{21}^{\circ} - M_{21}^{\circ T} E_2^{\circ T} - E_2^{\circ} \circ_{N_2 R}^{-1} \circ_{N_2}^T E_2^{\circ T} + S_1^T Q S_1$$

$$E_1^{\circ} = (N_1 R^{-1} \circ_{N_2}^T P_{22}^{(o) \circ} - M_{12}^{\circ}) \bar{F}_2$$

$$E_2^{\circ} = (M_{21}^{\circ T} P_{22}^{(o) \circ} + S_1^T Q S_2) \bar{F}_2^{-1}$$

$$\bar{F}_2 = M_{22}^{\circ} - N_2 R^{-1} \circ_{N_2}^T P_{22}^{(o) \circ}$$

et par :

$$P_{12}^{(o) \circ} = P_{11}^{(o) \circ} E_1^{\circ} - E_2^{\circ} \quad (45)$$

et en supposant connues les matrices $P_{22}^{(o)i}$ ($i \in \mathbb{N}$), $P_{11}^{(o)j}$, $P_{12}^{(o)j}$, ($0 \leq j < i$), se mettre sous la forme de deux équations matricielles couplées :

$$P_{11}^{(o)i} \bar{F}_1 + \bar{F}_1^T P_{11}^{(o)i} + P_{12}^{(o)i} \bar{F}_{12} + (-1)^i \bar{F}_{12}^T P_{12}^{(o)i} = \bar{Q}_1^i \quad (46-1)$$

$$P_{11}^{(o)i} \bar{G}_1 + P_{12}^{(o)i} \bar{F}_2 = \bar{Q}_2^i \quad (46-2)$$

$$\text{où } \bar{F}_1 = M_{11}^o - N_1 R^{-1} [N_1^T P_{11}^{(o)o} + N_2^T P_{12}^{(o)o}]$$

$$\bar{F}_{12} = M_{21}^o - N_2 R^{-1} [N_1^T P_{11}^{(o)o} + N_2^T P_{12}^{(o)o}]$$

$$\bar{Q}_1^i = \sum_{j=1}^{i-1} [P_{11}^{(o)i-j} N_1 + P_{12}^{(o)i-j} N_2] R^{-1} [N_1^T P_{11}^{(o)j} + (-1)^j N_2^T P_{12}^{(o)j}]$$

$$- \sum_{j=0}^{\min(k,i)} [P_{11}^{(o)i-j} M_{11}^j + P_{12}^{(o)i-j} M_{21}^j + (-1)^j M_{11}^j P_{11}^{(o)i-j} + (-1)^j M_{21}^j P_{12}^{(o)i-j}]$$

$$\bar{G}_1 = M_{12}^o - N_1 R^{-1} N_2^T P_{22}^{(o)o}$$

$$\bar{Q}_2^i = \sum_{j=0}^{i-1} [P_{11}^{(o)j} N_1 + P_{12}^{(o)j} N_2] R^{-1} N_2^T P_{22}^{(o)i-j}$$

$$- \sum_{j=1}^{\min(k,i)} [P_{11}^{(o)i-j} M_{12}^j + P_{12}^{(o)i-j} M_{22}^j + (-1)^j M_{21}^j P_{22}^{(o)i-j}]$$

Il vient alors, pour tout i de $\mathbb{N} - \{0\}$:

$$P_{12}^{(o)i} = [\bar{Q}_2^i - P_{11}^{(o)i} \bar{G}_1] \bar{F}_2^{-1} \quad (47)$$

où $P_{11}^{(o)i}$ est solution de l'équation : $P_{11}^{(o)i} \bar{W} + \bar{W}^T P_{11}^{(o)i} = \bar{Q}_3^i$ (42)

$$\text{avec } \bar{W} = \bar{F}_1 - \bar{G}_1 \bar{F}_2^{-1} \bar{F}_{12}^T$$

$$\bar{Q}_3^i = \bar{Q}_1^i - \bar{Q}_2^i \bar{F}_2^{-1} \bar{F}_{12}^T - (-1)^i \bar{F}_{12}^T (\bar{F}_2^{-1})^T \bar{Q}_2^i$$

Ces équations permettent de calculer de façon récursive les opérateurs fournissant l'approximation à l'ordre o en de l'opérateur optimal P .

La commande sous-optimale obtenue par cette méthode s'écrit donc :

$$E_{s.opt}^{(r)} = -R^{-1} [N_1^T, N_2^T] \sum_{i \leq r} \begin{bmatrix} P_{11}^{(o)i} & \varepsilon P_{12}^{(o)i} \\ (-1)^i P_{12}^{(o)i} & P_{22}^{(o)i} \end{bmatrix} D^i \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix}$$

pour une troncature de l'opérateur à un rang r .

II.2 - Commande composite /ZAM-3/

Nous proposons dans cette partie une autre méthode de construction d'une commande quasi-optimale, basée sur le principe de commande composite énoncé pour le cas des systèmes à paramètres localisés dans /CHO-2/. Mais, comme nous le verrons, cette méthode semble peu adaptée dans le cas d'un opérateur différentiel général ; nous envisagerons donc d'abord le cas d'un opérateur simple, puis dans un deuxième temps, cette méthode sera étendue par approximation au cas quelconque.

II.2-1 - Opérateur différentiel simple :

Nous considérons ici le cas où l'opérateur de différenciation spatiale est de la forme :

$$M = M_i D^i \quad i \in \mathbb{N}^q \quad (50)$$

M_i et N ayant la structure définie en (32), l'application de la méthode de simplification de modèle présentée au chapitre III, §II-2, conduit ici aux modèles réduits lents et rapides suivants :

* modèle réduit lent

$$\frac{\partial}{\partial t} U_1(x,t) = M_1^i D^i U_1(x,t) + N_1 E(x,t) \quad (51-1)$$

$$\text{où } M_1^i = M_{11}^i - M_{12}^i M_{22}^{i-1} M_{21}^i$$

$$N_1 = N_1 - M_{12}^i M_{22}^{i-1} N_2$$

* modèle réduit rapide

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} V_r(x,t) = M_{22}^i D^i V_r(x,t) + N_r E(x,t) \quad (51-2)$$

$$\text{où } N_r = N_2 + LN_e$$

L étant la matrice de découplage, solution de l'équation :

$$\varepsilon LM_1^i - M_{22}^i L + M_{21}^i = 0$$

* observations :

$$z_1(x,t) = (S_1 - S_2 L) U_1(x,t) = S_1 U_1(x,t) \quad (51-3)$$

$$z_r(x,t) = S_2 V_r(x,t)$$

Les variables d'état initiales sont approchées, durant toute l'évolution du système par :

$$\begin{cases} V(x,t) \simeq U_1(x,t) \\ V(x,t) \simeq V_r(x,t) - LV_1(x,t) \\ Z(x,t) \simeq Z_1(x,t) + Z_r(x,t) \end{cases} \quad (52)$$

Ces relations permettent en outre de définir les conditions initiales et limites à imposer aux sous-systèmes réduits lents et rapides (51-1) et (51-2).

Remarque : le but de ce chapitre étant l'étude de la commande, nous omettrons, par la suite, pour alléger l'écriture, de rappeler à chaque fois ces conditions ; le lecteur pouvant sur ce point se reporter au chapitre III relatif à la modélisation.

Le principe de la commande composite est de construire une commande $E_c(x,t)$ comme étant la superposition d'un retour d'état lent $E_1(x,t)$ et d'un retour d'état rapide $E_r(x,t)$. Il a été montré, dans le cadre des systèmes à paramètres localisés /DAU-5/, que l'application de cette méthode aux systèmes découplés permettait de diminuer l'erreur sur la valeur optimale du critère par rapport à la méthode originellement proposée dans /CHO-2/.

L'hypothèse de base étant que le système lent ne réagit qu'à la commande $E_1(x,t)$ et que le système rapide réagit instantanément à cette partie $E_1(x,t)$, $V_r(x,t)$ peut être décomposé sous la forme :

$$V_r(x,t) = V_{r1}(x,t) + V_{rr}(x,t) \quad (53)$$

où $V_{r1}(x,t)$ est la réponse du système rapide à la partie lente $E_1(x,t)$ de la commande, alors que $V_{rr}(x,t)$ traduit l'effet de la partie rapide $E_r(x,t)$ de l'entrée. Ces variables sont donc caractérisées

respectivement par les équations (54-1) et (54-2) issues de (51-2) :

$$\left. \begin{aligned} M_{22}^i D^i V_{re}(x,t) + N_r E_e(x,t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} V_{rr}(x,t) &= M_{22}^i D^i V_{rr}(x,t) + N_r E_r(x,t) \end{aligned} \right\} \quad (54-2)$$

Les conditions initiales et limites de $V(x,t)$ étant intégralement reportées sur la partie $V_{rr}(x,t)$, compte tenu du caractère instantané de $V_{rl}(x,t)$.

Le problème de commande optimale est donc remplacé par deux problèmes d'optimisation découplés :

a) problème lent :

minimisation de

$$J_1 = \int_0^\infty \int_\Omega [\bar{Z}_1^T(x,t) Q \bar{Z}_1(x,t) + E_1^T(x,t) R E_1(x,t)] dx dt \quad (55-1)$$

pour le système :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} V_1(x,t) &= M_1^i D^i v_1(x,t) + N_1 E_1(x,t) \\ 0 &= M_{22}^i D^i V_{rl}(x,t) + N_r E_r(x,t) \\ \bar{Z}_e(x,t) &= S_1 V_e(x,t) + S_r V_{rl}(x,t) \end{aligned} \right\} \quad (55-2)$$

b) problème rapide :

minimisation de

$$J_r = \int_0^\infty \int_\Omega [Z_r^T(x,t) Q Z_r(x,t) + E_r^T(x,t) R E_r(x,t)] dx dt \quad (56-1)$$

pour le système :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_{rr}(x,t) &= M_{22}^i D^i V_{rr}(x,t) + N_r E_r(x,t) \\ Z_r(x,t) &= S_2 V_{rr}(x,t) \end{aligned} \right\} \quad (56-2)$$

Chacun de ces problèmes peut être résolu par l'utilisation d'états adjoints lents et rapides respectivement /ZAM-3/; mais aussi par

la détermination d'opérateurs permettant de construire directement des retours d'états lents et rapides (Cf. §II-1).

II.2.1.1. Utilisation des états adjoints

a) résolution du problème lent

Le critère J_1 peut être écrit sous la forme :

$$J_1 = \int_0^\infty \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} U_1^T(x,t) & V_{r1}^T(x,t) \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} U_1(x,t) \\ V_{r1}(x,t) \end{bmatrix} + E_1^T(x,t) R E_1(x,t) \right\} dx dt \quad (57)$$

$$\text{où } Q_1 = \begin{bmatrix} S_1^T & S_2^T \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix}$$

La commande optimale lente est alors donnée par :

$$E_1(x,t) = -R^{-1} (N_1^T p_1(x,t) + N_r^T p_{r1}(x,t)) \quad (58)$$

où $p_1(x,t)$ et $p_{r1}(x,t)$ sont les états adjoints associés respectivement à $U_1(x,t)$ et $V_{r1}(x,t)$, définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} p_1(x,t) = (-1)^{|i|+1} M_1^i D^i p_1(x,t) - S_e^T Q S_e U_e(x,t) \\ \quad - S_1^T Q S_2 V_{r1}(x,t) \\ 0 = (-1)^{|i|+1} M_{22}^i D^i p_{r1}(x,t) - S_2^T Q S_1 U_1(x,t) \\ \quad - S_2^T Q S_2 V_{r1}(x,t) \end{array} \right. \quad (59)$$

Les conditions initiales et limites de $W(x,t)$ étant intégralement reportées sur $U_1(x,t)$ et $V_{rr}(x,t)$, on prendra pour $V_{r1}(x,t)$ et $p_{r1}(x,t)$ des conditions initiales et limites nulles.

L'utilisation de (55-2) et de (58) donne :

$$M_{22}^i D^i V_{r1}(x,t) - N_r R^{-1} (N_1^T p_1(x,t) + N_r^T p_{r1}(x,t)) = 0$$

ce qui permet d'éliminer le terme $V_{r1}(x,t)$ de l'équation (59).

Finalement, la résolution du problème lent (55) se ramène à la résolution du système différentiel (61), d'ordre n_1 par rapport au temps mais d'ordre $3|i|$ par rapport à la variable espace :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} P_1(x,t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -S_1^T Q S_2 \\ 0 & 0 & -S_2^T Q S_2 \\ -N_r R^{-1} N_1^T & -N_2 R^{-1} N_r^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1)^{i+1} M_1^{iT} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{i+1} M_2^{iT} & 0 \\ 0 & 0 & M_{22}^i \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dots \\ D^i \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1(x,t) \\ P_{r1}(x,t) \\ V_{r1}(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_1^T Q S_1 \\ -S_r^T Q S_1 \\ 0 \end{bmatrix} V_1(x,t) \quad (61)$$

et la commande $E_1(x,t)$ est donnée par :

$$E_1(x,t) = -R^{-1} (N_1^T P_1(x,t) + N_r^T P_{r1}(x,t)) \quad (62)$$

b) résolution du problème rapide

L'application directe de la théorie de la commande optimale dans ce cas là, conduit à l'état adjoint $p_r(x,t)$ défini par :

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} p_r(x,t) = (-1)^{|i|+1} M_{22}^{iT} D^i p_r(x,t) - S_2^T Q S_2 V_{rr}(x,t) \quad (63)$$

et à la commande optimale rapide

$$E_r(x,t) = -R^{-1} N_r^T p_r(x,t) \quad (64)$$

c) réalisation effective

Compte tenu de l'approximation :

$$\begin{cases} U(x,t) \simeq U_1(x,t) \\ V(x,t) \simeq V_{rr}(x,t) + V_{r1}(x,t) - L U_1(x,t) \end{cases} \quad (65)$$

$$\begin{cases} p_1(x,t) = p_1(x,t) \\ p_2(x,t) = p_{r1}(x,t) \\ p_3(x,t) = V_{r1}(x,t) \\ p_4(x,t) = V_{rr}(x,t) \end{cases} \quad (66)$$

La commande composite aura en définitive la structure suivante :

$$E_c(x,t) = -R^{-1}(N_1^T p_1(x,t) + N_r^T (p_2(x,t) + p_4(x,t))) \quad (67)$$

où p_1, p_2, p_4 sont donnés par le système différentiel (62) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -S_1^T Q S_2 & 0 \\ 0 & 0 & -S_r^T Q S_2 & 0 \\ -N_r R^{-1} N_1^T & -N_r R^{-1} N_r^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2^T Q S_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1)^{i+1} M_1^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{i+1} M_{22}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+1} M_{22}^i \end{bmatrix} D^i \begin{bmatrix} p_1(x,t) \\ p_2(x,t) \\ p_3(x,t) \\ p_4(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_1^T Q S_1 & 0 \\ -S_2^T Q S_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -S_2^T Q S_2 & -S_2^T Q S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(x,t) \\ V(x,t) \end{bmatrix}$$

(68)

avec : * conditions finales

$$\forall x \in \Omega, \forall i \in \{1, \dots, 4\} \quad p_i(x,) = 0$$

* conditions limites

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, +\infty[\quad [p_1(x, t)]_{\Gamma} &= [U(x, t)]_{\Gamma} \\ [p_4(x, t)]_{\Gamma} &= [V(x, t)]_{\Gamma} + L [U(x, t)]_{\Gamma} \\ [p_2(x, t)]_{\Gamma} &= [p_3(x, t)]_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

On peut remarquer, pour conclure cette partie, que la présence d'un opérateur différentiel dans la transmission directe entrée-sortie ne permet pas de simplifier les équations, alors que dans le cas des systèmes à paramètres localisés, un simple changement de la variable de commande ($f = E + KW$) permet de résoudre le problème lent. Ici, ce changement impliquerait une augmentation de l'ordre des dérivations spatiales et cela se traduit par un problème adjoint où les découplages sont différents pour le temps et l'espace.

II.2.1.2 - Utilisation des équations de Riccati

Dans cette partie, nous ne traiterons que le cas du problème lent, la détermination analytique de l'opérateur de retour d'état dans le cas du problème rapide ne présentant pas de difficulté particulière.

Afin de pouvoir appliquer la méthode du §II-1, considérons la commande $E(x, t)$ réduite à sa partie lente $E_1(x, t)$. Les équations (51) s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} U_1(x, t) \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} V_{r1}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^i & 0 \\ 0 & M_{22}^i \end{bmatrix} D^i \begin{bmatrix} U_1(x, t) \\ V_{r1}(x, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_r \end{bmatrix} E_1(x, t) \quad (69)$$

Le critère à minimiser étant toujours (55), il vient la commande optimale :

$$E_1(\varepsilon, x, t) = -R^{-1} [N_1^T \ N_r^T / \varepsilon] P \begin{bmatrix} U_1(x, t) \\ V_{r1}(x, t) \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[S_1^T \ S_2^T \right]^T Q \left[S_1 \ S_2 \right] + PD^i \begin{bmatrix} M_1^i & 0 \\ 0 & \frac{M_{22}^i}{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-1)^{|i|} M_1^{iT} & 0 \\ 0 & (-1)^{|i|} \frac{M_{22}^{iT}}{\varepsilon} \end{bmatrix} PD^i \\
 & - P \begin{bmatrix} N_1 \\ \frac{N_r}{\varepsilon} \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} N_1^T & N_r^T \end{bmatrix} P = 0 \quad (71)
 \end{aligned}$$

Le problème (69) étant sous la forme PST, il convient de prendre pour P, comme en (38) la décomposition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{12} \\ \varepsilon P_{12}^* & \varepsilon P_{22} \end{bmatrix} \quad (72)$$

qui conduit à la commande :

$$E_1(\varepsilon, x, t) = -R^{-1} \begin{bmatrix} N_1^T P_{11} + N_r^T P_{12}^* & \varepsilon N_1^T P_{12} + N_r^T P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x, t) \\ V_{r1}(x, t) \end{bmatrix} \quad (73)$$

Pour obtenir la commande cherchée relative au système (49-2), il suffit d'annuler ε dans (73), soit :

$$E_1(x, t) = -R^{-1} \begin{bmatrix} N_1^T P_{11} + N_r^T P_{12}^* & N_r^T P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(x, t) \\ V_{r1}(x, t) \end{bmatrix} \quad (74)$$

où P_{11} , P_{12} et P_{22} sont des opérateurs solutions du système opérationnel (40) dans lequel :

$$\varepsilon = 0, \quad M_{11} = M_1^{iD}, \quad M_{12} = 0, \quad M_{21} = 0, \quad M_{22} = M_{22}^{iD}, \quad N_1 = N_1, \quad N_2 = N_r, \quad S_1 = S_1$$

Ce système se résoud de façon hiérarchisée suivant la méthode présentée dans la partie II-1.

D'après (74) et (55-2), on obtient l'équation vérifiée par la commande lente $E_1(x, t)$; l'élimination de $y_{2r1}(x, t)$ fournit alors :

$$\left[N_r^T P_{22} M_{22}^{i-1} N_r - R D^i \right] E_1(x, t) = \left[N_1^T P_{11} + N_r^T P_{12}^* \right] U(x, t) \quad (75)$$

qui permet d'envisager une commande réduite (en retour d'état lent uniquement) d'expression plus simple que celle obtenue par l'intermédiaire des états adjoints.

II.2-2 Opérateur différentiel quelconque :

La généralisation au cas d'un opérateur quelconque présente, tant d'ailleurs pour l'étude de commande optimale que pour la modélisation (Cf. Chapitre III, §III et IV), des complications importantes au niveau de la construction des modèles réduits. En effet, l'utilisation de la méthode des PST nécessite l'inversion de l'opérateur M_{22} . Ceci a été fait formellement par Balas /BAL-6/, mais en utilisant des matrices de dimension infinie.

Nous proposons, de façon plus pratique, d'approcher M_{22}^{-1} par un développement analytique formel (70), énoncé ici dans le cas d'une seule variable spatiale, mais que l'on pourrait étendre aisément au cas $\Omega \subset \mathbb{R}^q$.

$$\begin{aligned}
 M_{22}^{-1} &= \left(\sum_{i \leq k} M_{22}^i D^i \right)^{-1} = M_{22}^{0-1} \left(I_{n_2} + \sum_{i=1}^k M_{22}^i (M_{22}^0)^{-1} D^i \right)^{-1} & (76) \\
 &= (M_{22}^0)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[\sum_{i=1}^k M_{22}^i (M_{22}^0)^{-1} D^i \right]^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} M_{-1}^j D^j
 \end{aligned}$$

On peut alors construire un modèle réduit lent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} U_1(x,t) &= M_1 U_1(x,t) + N_1 E(x,t) & (77) \\
 \text{avec } M_1 &= M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21} = \sum_{i=0}^{\infty} M_1^i D^i \\
 N_1 &= N_1 - M_{12} M_{22}^{-1} N_2 = \sum_{i=0}^{\infty} N_1^i D^i
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que l'on a transformé une équation d'état d'ordre k par rapport aux q variables spatiales, en une équation d'état comportant un nombre infini de dérivations et un opérateur de commande.

Cependant, par troncature des opérateurs dans (77), on obtient

finalement un modèle réduit lent approché (78) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_1(x,t) = \bar{M}_1 \bar{U}_1(x,t) + N_1^0 E(x,t) \quad (78)$$

$$\text{avec } \bar{M}_1 = \sum_{i \leq k} M_1^i D^i \text{ et } N_1^0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$$

Pour construire le modèle réduit rapide, il convient de rechercher la matrice de découplage L telle que (Cf chap. III, §III-2) :

$$\forall i \in \{0, \dots, k\} \quad \varepsilon L M_1^i + M_{12}^i - M_{22}^i L = 0 \quad (79)$$

Ceci ne pouvant pas être résolu dans le cas général pour toute les matrices, on cherchera, comme dans les études précédentes, à obtenir une solution des k équations (79) au sens des moindres carrés.

Les modèles réduits lent et rapide sont finalement approchés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_1(x,t) = \bar{M}_1 \bar{U}_1(x,t) + \bar{N}_1 E(x,t) \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}_r(x,t) = M_{22} \bar{V}_r(x,t) + N_r E(x,t) \\ Z_1(x,t) = S_1 \bar{U}_1(x,t) \\ Z_r(x,t) = S_2 \bar{V}_r(x,t) \end{array} \right. \quad (80)$$

où les opérateurs sont ceux définis en (51).

CONCLUSION

L'application du principe de la commande composite implique une transmission directe entrée-sortie par l'intermédiaire de la variable $\bar{V}_{r1}(x,t)$ définie comme suit :

$$\bar{V}_{r1}(x,t) = -(M_{22}^0)^{-1} N_{r1} E_1(x,t) \quad (81)$$

Nous remarquons donc que moins il y a d'opérateurs de différentiation spatiale dans (1), plus l'application de la commande composite calculée à partir des modèles réduits approchés (80) et (81) est justifiée.

III - SYSTEMES SPATIALEMENT SINGULIEREMENT PERTURBES SSP

D'après les définitions données au chapitre III, §I-3-1, le système (1) est dit sous forme PSS si les matrices M_i , $|i| \leq k$ sont telles que :

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{11}^i & \varepsilon M_{12}^i \\ M_{21}^i & \varepsilon M_{22}^i \end{bmatrix} \quad (82)$$

avec $\forall (h,1) \in \{1,2\}^2 M_{h,1}^i \in \mathbb{R}^{n_h \times n_1}$
 $0 < \varepsilon \ll 1$

Il convient ici de préciser en plus la structure de la matrice d'observation qui doit être :

$$S = |S_1, \varepsilon S_2| \quad (83)$$

avec $S_h \in \mathbb{R}^{s \times n_h}$
 $0 < \varepsilon \ll 1$

Une étude analogue à celle effectuée en II peut alors être menée pour de tels systèmes. En effet, le problème PSS (1) (82) peut être transformé en un problème PST à l'aide du principe d'équivalence introduit au chapitre précédent (Chap. III, §I.3-4).

- Remarques :
1. La méthode de PSS présentée au chapitre III, §II.3.1, qui procède à l'inversion de la matrice d'évolution spatiale (dans le cas d'un opérateur spatial simple) aurait pu être envisagée également : elle conduit aux mêmes résultats que ceux obtenus ci-dessus à l'aide du principe d'équivalence.
 2. Par contre, la méthode PSS, plus simple, exposée au chapitre III, §II.3.2, n'a pas été retenue en raison de la non influence des termes de couplage dans les modèles réduits obtenus ; néanmoins, on aurait pu aussi y adapter les principes énoncés ci-dessus.

IV - APPLICATION AU REACTEUR D'EPITAXIE

Afin d'illustrer les principes de simplification de commande présentées au cours de ce chapitre, nous allons considérer le réacteur à épitaxie étudié au chapitre III, § III. Nous rappelons que le modèle (linéarisé autour de 790°) est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} [Y(x,t)] = [A_0 + A_2 D^2] [Y(x,t)] + B_1(x,t)$$

$$\text{avec } Y(x,t) = [Y_1(x,t), Y_2(x,t), Y_3(x,t)]^T$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -14.9 & 14.9 & 10 \\ 15.54 & -28.18 & 12.64 \\ 0 & 10.33 & -10.59 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} .308 & 0 & 0 \\ 0 & .365 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & .519 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$B = [0, 0, 1.24]^T$$

Le problème de commande optimale posé ici est de rechercher $e^*(x,t)$ minimisant le critère :

$$J = \int_0^{\infty} \int_0^1 [Y(x,t) Y(x,t) + e^2(x,t)] dx dt \quad (85)$$

IV.1 - Commande optimale

La solution du problème posé est donnée par :

$$e_{opt}(x,t) = -B^T P(x,t) \quad (86)$$

où $P(x,t) = [p_1(x,t), p_2(x,t), p_3(x,t)]^T$ est l'état adjoint défini par l'équation d'état :

$$\frac{\partial [P(x,t)]}{\partial t} = - [Y(x,t)] - [A_0^T + A_2^T D^2] [P(x,t)] \quad (87)$$

De façon à simplifier la construction de cette commande, nous allons employer les modèles réduits obtenus par l'application de la méthode des perturbations singulières sur le système initial. Suivant /BAB/, on a la possibilité de construire deux modèles réduits : un lent (application des PST) et un profond (application des PSS),

qui approchent convenablement le système initial. Nous allons les utiliser pour générer deux types de commandes réduites.

IV.2 - Commande réduite lente

Le modèle réduit lent approchant le système est donné par :

$$\ddot{o} = | .308D^2 - 14.9 | y_{11}(x,t) + 14.9 y_{21}(x,t)$$

(88)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} y_{21}(x,t) \\ y_{31}(x,t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} .365 & 10 & 0 \\ 0 & .519 & 10 \end{bmatrix} D_+^2 \begin{bmatrix} -28.18 & 12.64 \\ 10.33 & -10.59 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} y_{21}(x,t) \\ y_{31}(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15.54 & y_{11}(x,t) \\ 1.52 & e_1(x,t) \end{bmatrix}$$

On est alors conduit à rechercher la solution du problème :
minimisation de

$$J_1 = \int_0^\infty \int_0^1 [y_{11}^2(x,t) + y_{21}^2(x,t) + y_{31}^2(x,t) + e_1^2(s,t)] dx dt \quad (89)$$

Sachant que durant toute l'évolution du système, les variables $y_{11}(x,t)$, $y_{21}(x,t)$ et $y_{31}(x,t)$ sont une bonne approximation des variables, respectivement, $y_1(x,t)$, $y_2(x,t)$ et $y_3(x,t)$, on peut construire la commande réduite :

$$e_{rt}(x,t) = -B^T P_1(x,t) \quad (90)$$

où $P_1(x,t)$ est l'état adjoint lent défini par

$$P_1(x,t) = | p_{11}(x,t), p_{21}(x,t), p_{31}(x,t) |^T$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ p_{21}(x,t) \\ p_{31}(x,t) \end{bmatrix} = - [Y(x,t)] - [A_0^T + A_2^T D^2] [P_1(x,t)]$$

Ce système est plus simple à simuler que le système adjoint optimal et les résultats obtenus (par des méthodes de schémas aux différences indiquent que l'on obtient une bonne approximation de la valeur optimale du critère. Par exemple, pour des conditions initiales de 20° sur toutes les variables, on obtient un rapport de sous-optimalité $p = \frac{J - J_{opt}}{J_{opt}}$ qui est voisin de .05.

IV.3 - Commande réduite profonde

Le système initial peut également être approché par le modèle réduit profond défini par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} y_{1p}(x,t) \\ y_{2p}(x,t) \\ y_{3p}(x,t) \end{bmatrix} = [A_o + A'_2 D^2] \begin{bmatrix} y_{1p}(x,t) \\ y_{2p}(x,t) \\ y_{3p}(x,t) \end{bmatrix} + B e_p(x,t) \quad (91)$$

$$\text{où } A'_2 = \begin{bmatrix} .308 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$y_{1p}(x,t)$, $y_{2p}(x,t)$ et $y_{3p}(x,t)$ approchent les variables initiales $y_1(x,t)$, $y_2(x,t)$ et $y_3(x,t)$.

La résolution du problème P : minimisation du critère

$$J_p = \int_0^{\infty} \int_0^1 [y_{1p}^2(x,t) + y_{2p}^2(x,t) + y_{3p}^2(x,t) + e_p^2(x,t)] dx dt \quad (92)$$

conduit à proposer la commande réduite :

$$e_p(x,t) = -B^T P_p(x,t) \quad (93)$$

où $P_p(x,t) = [P_{1p}(x,t), P_{2p}(x,t), P_{3p}(x,t)]$ est l'état adjoint profond régi par l'équation d'état :

$$\frac{\partial}{\partial t} [P_p(x,t)] = -[y(x,t)] - [A_o^T - A'_2{}^T D^2] [P_p(x,t)] \quad (94)$$

Ce système adjoint profond apporte une simplification supplémentaire puisque l'on est en présence d'un système aux dérivées partielles scalaires (donnant $p_{1p}(x,t)$) couplé à un système à deux composantes aux dérivées totales ; les problèmes d'instabilité

numériques des schémas aux différences sont donc plus faciement résolubles. Cependant, cette commande conduit à une moins bonne approximation de la valeur optimale du critère puisque l'on obtient un rapport de sous-optimalité de 9% pour des conditions identiques à celles de la commande réduite lente.

En conclusion de cet exemple, on peut énoncer la remarque que, lorsqu'on a à choisir une commande réduite, il est nécessaire de faire un compromis temps de calcul-précision souhaité sur la valeur optimale du critère.

CONCLUSION

Les résultats de Lions /LIO/ sur la commande optimale des systèmes à paramètres répartis, conduisent à la résolution d'une équation opérationnelle de type Riccati. Un premier résultat original de ce chapitre consiste alors en la présentation d'une méthode analytique de résolution de cette équation.

Dans le cas de systèmes singulièrement perturbés (nous avons détaillé le cas PST), cette équation peut être décomposée et résolue par approximation (à l'ordre zéro, par exemple) par rapport au petit paramètre.

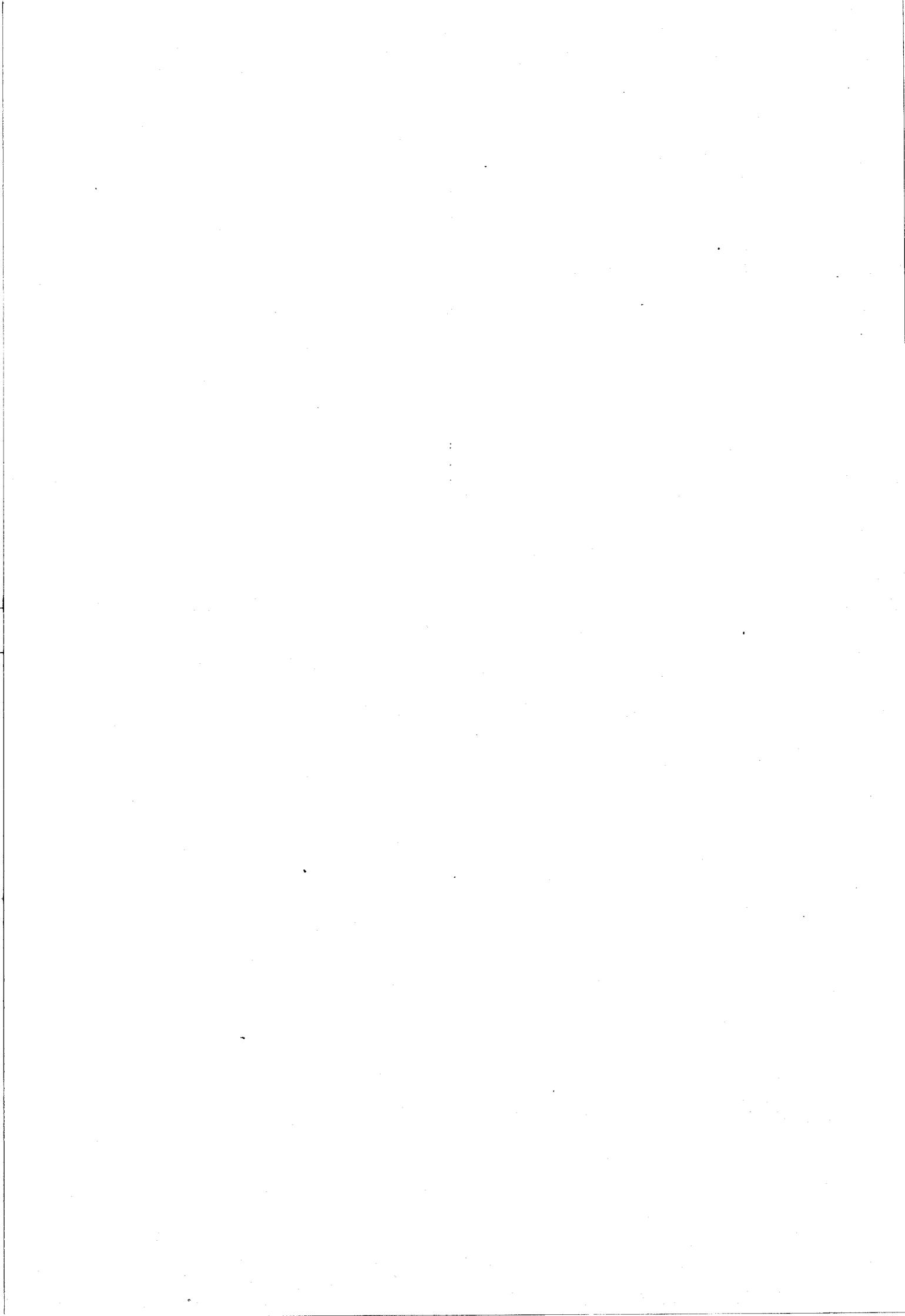
Une autre approche a été envisagée, qui utilise les modèles réduits associés au système singulièrement perturbé étudié. Le calcul des commandes optimales correspondant à ces modèles réduits conduit à une commande quasi-optimale pour le système considéré, dite commande composite. Deux méthodes d'élaboration des commandes des sous-systèmes sont proposées : l'une, classique, basée sur l'utilisation des états adjoints, l'autre issue du principe déjà présenté de résolution analytique de l'équation de Riccati.

L'originalité de ce chapitre réside précisément dans cette approximation analytique de l'opérateur caractérisant l'état adjoint ; ce qui permet d'éviter l'emploi de la méthode de Galerkin, généralement proposé dans la littérature pour ce type de problème.

La mise en œuvre pratique des résultats présentés est réalisée sur le modèle du réacteur d'épitaxie (Cf. Chapitre III, §III) et permet d'apprécier la validité des approximations effectuées.

CONCLUSION GENERALE





CONCLUSION GENERALE

Les perturbations singulières dans les systèmes à paramètres répartis ont été envisagées sous l'angle temporel (PST) ou spatial (PSS) suivant le positionnement du petit paramètre dans les équations du modèle considéré.

Un même système peut présenter simultanément les deux types de perturbations singulières ; cependant, la mise en évidence d'un principe naturel d'équivalence PST-PSS physique et théorique permet généralement de conserver une seule forme singulièrement perturbée, le passage à l'autre s'effectuant par simple changement de variables.

Dans chaque cas, un découplage des dynamiques peut être obtenu par annulation du petit paramètre puis bloc-diagonalisation de la matrice d'évolution ainsi obtenue : on obtient alors deux sous-systèmes réduits, l'un lent et conservant des composantes en surface, l'autre profond avec une partie rapide.

Le cas non naturel de processus ne représentant pas l'équivalence PST-PSS peut être analysé de la même façon. Néanmoins, une autre démarche est alors envisageable, davantage inspirée de la méthode des perturbations singulières dans les systèmes à paramètres localisés : une commutation du sous-système rapide et surface au sous-système lent et profond est ici possible après et au-delà des domaines de couche limite temporel et spatial respectivement.

Dans un but de clarté de l'exposé, nous avons détaillé ces notions pour des systèmes relativement simples, les extensions au cas de plusieurs variables indépendantes spatiales restant entre autres à approfondir.

La simplification des problèmes de commande optimale des systèmes à paramètres distribués singulièrement perturbés est réalisée à l'un des deux niveaux suivants :

- d'une part, l'exploitation des modèles réduits obtenus par

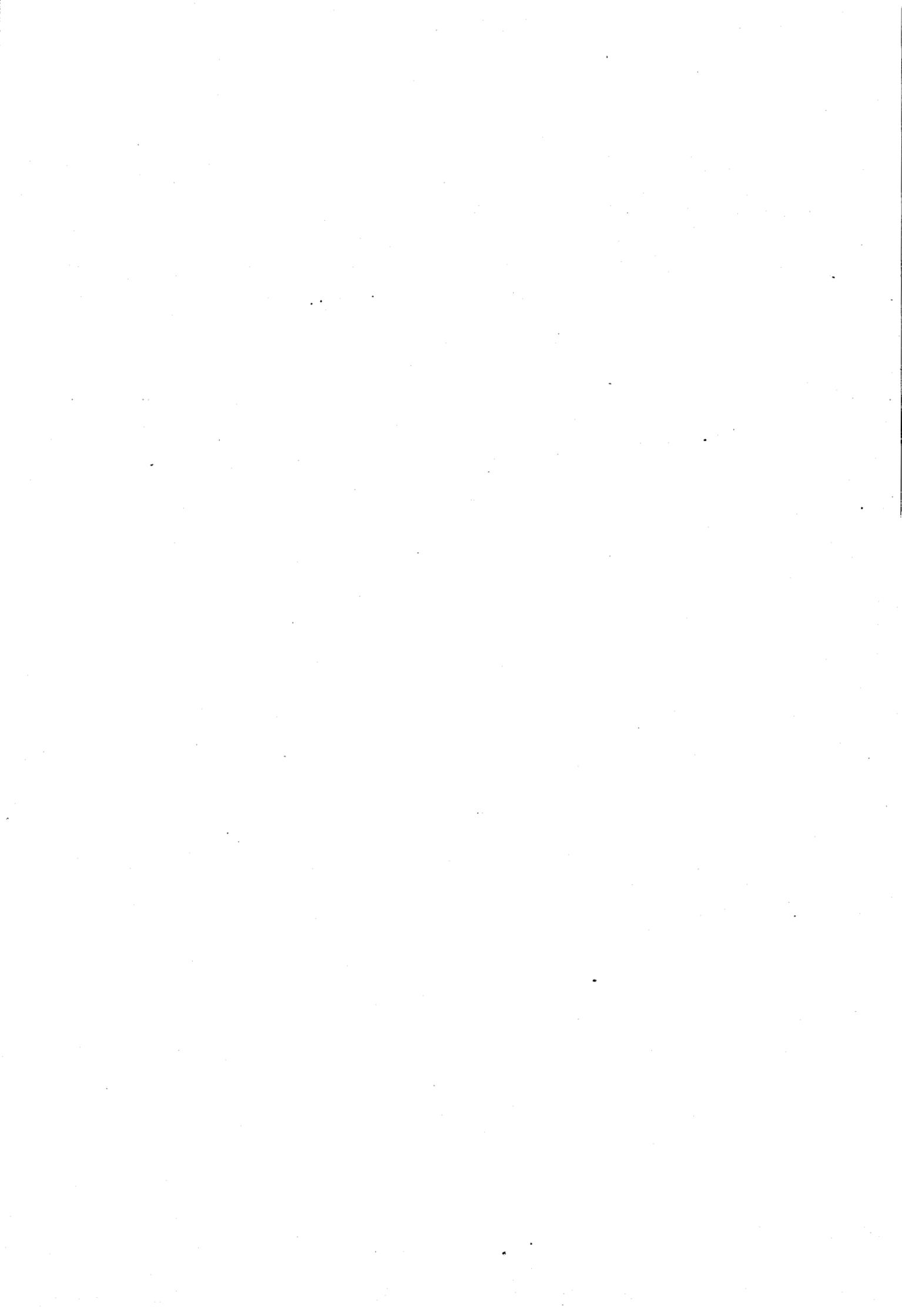
les méthodes PST et PSS permet d'élaborer des commandes composites quasi-optimales pour le système initial,

- d'autre part, l'utilisation d'une approximation analytique de l'opérateur caractérisant l'état adjoint permet la décomposition de l'équation de Riccati.

Ces méthodes de simplification des modèles et des problèmes de commande optimale doivent être étendues au cas des systèmes à paramètres distribués non linéaires. Le cas des problèmes à commande localisée (c'est-à-dire intervenant non pas dans l'équation d'évolution, mais dans les conditions limites) reste aussi à envisager. Enfin, dans le cadre de la recherche d'une commande analytique, il conviendra de déterminer l'ordre minimal d'approximation nécessaire à l'obtention d'une erreur fixée a priori. C'est dans cette voie que nous pensons poursuivre nos travaux.

BIBLIOGRAPHIE





- /ADE/ L.E. ADELSON
"Singular perturbation of an improperly posed problem"
SIAM J. Math. Anal., Vol. 4, n° 2, mai 1973.
- /AGM/ S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG
"Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions"
I, Comm. Pure Appl. Math. 12, pp. 623-727, 1959.
II, Comm. Pure Appl. Math. 17, pp. 35-92, 1964.
- /AME-1/ W.F. AMES
"Non linear partial differential equations"
A Symposium on Methods of Solution, Acad. Press, Ed. W.F. Ames, New-York and London, 1967.
- /AME-2/ W.F. AMES
"Numerical methods for partial differential equations"
2nd Ed. Acad. Press, Nelson, Ed. W.F. Ames, 1977.
- /AME-3/ W.F. AMES
"Non linear partial differential equations in engineering"
Vol. 2, Acad. Press, Ed. W.F. Ames, 1972.
- /AND/ L. ANDERSON
"Decomposition of two time-scale linear systems"
Proc. JACC, pp. 153-183, 1978.
- /ARD/ M.D. ARDEMA
"An introduction to singular perturbations in non linear optimal control"
In "Singular Perturbations in Systems and Control", Ed. M.D. Ardema, Springer-Verlag, Wien, New-York, 1983.
- /ARO/ D.G. ARONSON
"Linear parabolic differential equations containing a small parameter"
J. Rat. Mech. Anal., n° 5, pp. 1003-1014, 1956.
- /ASH/ N. ASHOOR, V. SINGH
"A note on low-order modelling"
IEEE, Vol. AC-27, n° 5, pp. 1124-1126, 1982.
- /AVR/ B. AVRAMOVIC
"Subspace iteration approach to the time scale separation"
Proc. IEEE Conf. on Dec. and Cont., pp. 684-687, 1979.
- /AZI/ A.K. AZIZ
"The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations"
Acad. Press, New-York, 1972.
- /BAB/ J.P. BABARY, J. LOPES DE SOUZA LEO
"Modelling and numerical simulation of an epitaxial reactor"
Mathematics and Computers in Simulation XXVI, North-Holland, pp. 210-216, 1984.
- /BAL-1/ G.R. BALDOCK, T. BRIDGEMAN
"The mathematical theory of waves motion"
Halsted Press, Wiley, 1981.

- /BAL-2/ M.J. BALAS
"Singular perturbations and model reduction methods for large scale and distributed parameter systems"
Proc. 17th Annual Allerton Conf. on "Communication, Control and Computing", pp. 434-448, Monticello, Illinois, 1979.
- /BAL-3/ M.J. BALAS
"Stability of distributed parameter systems with finite-dimensional controller-compensators using singular perturbations"
J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 99, pp. 80-108, 1984.
- /BAL-4/ M.J. BALAS
"Toward a (more) practical theory of distributed parameter system control"
In "Advances in Dynamics and Control: Theory and Applications", Ed. L.T. Leondes, Vol. 18, Acad. Press, New-York, 1982.
- /BAL-5/ M.J. BALAS
"Trends in large space structure control theory : fondest hopes, wildest dreams"
IEEE Trans. on Aut. Cont., 1982.
- /BAL-6/ M.J. BALAS
"Reduced-order feedback control of distributed parameter systems via singular perturbation methods"
J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 87, p. 281, 1982.
- /BAN/ S.P. BANKS
"On the control of partial differential equations and algebraic geometry"
4th IMA Conf. on "Control Theory", Cambridge, 1984.
- /BAR-1/ S. BARNETT, R.E. SCRATON
"Location of matrix eigenvalues in the complex plane"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 966-967, 1982.
- /BAR-2/ V. BARBU
"Optimal feedback controls for a class of nonlinear distributed parameter systems"
SIAM J. Cont. and Opt., Vol. 21, n° 6, p. 871, 1983.
- /BAS/ J. BASS
"Cours de Mathématiques"
Tome 2, Masson & Cie, 1968.
- /BAT-1/ H. BATEMAN
"Partial differential equations of mathematical physics"
Cambridge Univ. Press, 1952.
- /BAT-2/ K.J. BATHE, E.L. WILSON
"Numerical methods in finite element analysis"
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- /BAU/ F.L. BAUER
"Fields of values of Gershgorin disks"
Num. Math., n° 12, pp. 91-95, 1968.

- /BEN/ A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU
"Perturbations et 'augmentation' des conditions initiales"
Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 594, pp. 10-29, 1977.
- /BER-1/ S. BERGMAN
"Integral operators in the theory of linear partial differential equations"
Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- /BER-2/ M. BERCOVIER, O. PIRONNEAU, V. SASTRI
"Finite elements and characteristics for some parabolic-hyperbolic problems"
Appl. Math. Model., Vol. 6, 1983.
- /BIT/ A.V. BITSADZE
"Boundary value problems for second order elliptic equations"
North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1968.
- /BLO-1/ J.M. BLONDEL
"Etude de deux problèmes singuliers relatifs aux équations aux dérivées partielles linéaires et hyperboliques, du second ordre"
J. Math. Pures Appl., Vol. 40, n° 40, pp. 247-299, 1961.
- /BLO-2/ J.M. BLONDEL
"Perturbation singulière pour une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire, du type hyperbolique normal"
G.R.A.S., n° 257, pp. 353-355, Paris, 1963.
- /BLO-3/ J.M. BLONDEL
"Contribution à l'étude de quelques problèmes singuliers relatifs aux équations dérivées partielles linéaires et hyperboliques, du second ordre"
Thèse de Doctorat ès Sc. Math., n° 95, Lille, 1958.
- /BOB-1/ L. BOBISUB
"Second order linear parabolic equations with a small parameter"
Arch. Rational Mech. Anal., n° 27, pp. 385-397, 1968.
- /BOB-2/ L. BOBISUB
"Degeneration of the solutions of certain well-posed systems of partial differential equations depending on a small parameter"
J. Math. Anal. Appl., n° 16, pp. 419-454, 1966.
- /BOC-1/ S. BOCHNER
"Linear partial differential equations with constant coefficients"
Annals of Math., n° 47, pp. 202-212, 1946.
- /BOC-2/ S. BOCHNER
"Several complex variables"
Princeton, pp. 158-182, 1948.
- /BOS/ N.K. BOSE, S. BASU
"2-D matrix-Padé approximants, existence, non uniqueness and recursive computation"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-25, 1980.

- /BOU-1/ M. BOUTHIER
"Développements asymptotiques à deux échelles et perturbation
singulière de problèmes aux limites elliptiques"
Thèse, Univ. Paris VI, 1977.
- /BOU-2/ R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET
"Commande optimale des processus"
Dunod, 1969.
- /BRE-1/ H. BREZIS, J.L. LIONS
"Non linear partial differential equations and their applications"
Ed. Brezis and Lions, Res. Notes in Math., n° 60, Pitman, 1982.
- /BRE-2/ H. BREZIS
"Analyse fonctionnelle, théorie et applications"
Masson, 1982.
- /BRE-3/ C. BREZINSKI
"Padé type approximation and general orthogonal polynomials"
Birkhauser-Verlag, Basel, 1980.
- /BUT-1/ A.G. BUTKOVSKY, A.I. EGOROV, K.A. LURIE
"Optimal control of distributed systems (a survey of Soviet
publications)"
SIAM J. Cont., Vol. 6, n° 3, 1968.
- /BUT-2/ A.G. BUTKOVSKY, L.N. POLTAVSKY
"Optimal control of a two-dimensional distributed oscillatory system"
Automatika i Telemekhanika, Vol. 27, n° 4, pp. 32-41, 1966.
- /CAR-1/ G.P. CARRIER, C.E. PEARSON
"Partial differential equations. Theory and technique"
Acad. Press, 1976.
- /CAR-2/ L. CAROTENUTO, A. EISINBERG, G. RAICONI
"On the approximation of the transfert equation by the method of
Weighted residuals"
Math. and Comp. in Simul. XXV, Elsevier Sc. Pub. B.V., 1983.
- /CHA-1/ J. CHAZARAIN, A. PIRIOU
"Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles
linéaires"
Gauthier Villars, 1981.
- /CHA-2/ J. CHAZARAIN
"Fourier integral operators and partial differential equations"
Colloque International, Nice 1974, Ed. J. Chazarain, Lect. Notes
in Math., Springer-Verlag, Vol. 459, 1975.
- /CHA-3/ M. CHAMBAT
"Localisation des valeurs propres, régions de Gudkov"
RIRO, n° R-3, pp. 82-88, 1971
- /CHA-4/ K.W. CHANG
"Singular perturbations of a general boundary value problem"
SIAM J. Math. Anal., Vol. 3, pp. 520-526, 1972.

- /CHA-5/ K.W. CHANG
"A diagonalization technique for singular perturbation problems"
Proc. 12th Alberton Conf. Circuit and System Theory, Univ. Illinois,
Urbana, pp. 790-794, 1974..
- /CHE/ C.F. CHEN, C.H. HSIAO
"Walsh series analysis in optimal control"
Int. J. Cont., Vol. 21, n° 6, pp. 881-897, 1975.
- /CHI-1/ J.S.R. CHISHOLM
"Rational approximants defined from double power series"
Math. Comp., Vol. 27, pp. 841-848, 1973.
- /CHI-2/ J.S.R. CHISHOLM, J. Mc EWAN
"Rational approximants defined from power series in n variables"
Proc. Roy. Soc., Vol. A 336, pp. 421-452, 1974.
- /CHO-1/ J.H. CHOW, P.V. KOKOTOVIC
"Eigenvalue placement in two-time scale systems"
Proc. of IFAC Symp. on "Large Scale Systems", Udine, Italie,
pp. 321-326, 1976.
- /CHO-2/ J.H. CHOW, P.V. KOKOTOVIC
"A decomposition of near-optimum regulators for systems with slow
and fast modes"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, p. 701, 1976.
- /CIA/ P.G. CIARLET
"The finite element method for elliptic problems"
North-Holland, 1978.
- /COC/ J. COCHRAN
"A new approach to singular perturbation problems"
Thèse Stanford Univ., 1962.
- /COL-1/ S. COLOMBO
"Les équations aux dérivées partielles en physique et en mécanique
des milieux continus"
Masson, 1976.
- /COL-2/ J.D. COLE
"Perturbation methods in applied mathematics"
Blaisdell, 1968.
- /COL-3/ J.D. COLE, J. KEVORKIAN
"Uniformly valid asymptotic approximations for certain non-linear
differential equations"
In "Non-Linear Differential Equations and Non-Linear Mechanics",
Ed. La Salle and Lefschetz, Acad. Press, New-York, pp. 113-120,
1963.
- /COO/ P. COOK, W. ECKHAUS
"Resonance in a boundary value problem of singular perturbation
type"
Studies in Appl. Math., n° 52, pp. 129-139, 1973.
- /COP/ E.T. COPSON
"Partial differential equations"
Cambridge Univ. Press, 1975.

- /COU-1/ R. COURANT, D. HILBERT
"Methods of mathematical physics"
Vol. II, Interscience Pub., 1962.
- /COU-2/ M. COURDESSES, J.P. BABARY, D. PINGLOT
"Approximations en dimension finie des systèmes à paramètres répartis"
APII, n° 19, pp. 147-167, 1985.
- /CUR-1/ R.F. CURTAIN, A.J. PRITCHARD
"Infinite dimensional linear systems theory"
Lect. Notes in Cont. and Inf. Sc., Springer Pub., New-York, 1978.
- /CUR-2/ R.F. CURTAIN, A.J. PRITCHARD
"Functional analysis and modern applied mathematics"
Acad. Press, New-York, 1977.
- /DAU-1/ G. DAUPHIN-TANGUY, P. BORNE
"Présentation d'une méthode géométrique permettant de séparer les diverses dynamiques d'évolution d'un système de grande dimension"
Congrès Int. AMSE, Paris, 1982.
- /DAU-2/ G. DAUPHIN-TANGUY
"Sur la représentation multi-modèle des systèmes singulièrement perturbés. Application à l'analyse et à la synthèse"
Thèse de Doctorat d'Etat, Lille, n° 600, 1983.
- /DAU-3/ G. DAUPHIN-TANGUY, P. BORNE, A. FOSSARD
"Analyse et synthèse des systèmes à plusieurs échelles de temps"
APII, n° 19, pp. 169-196, 1985.
- /DAU-4/ G. DAUPHIN-TANGUY, P. BORNE, M. BENREJEB
"Application of singular perturbation methods to modelization and analysis of non-linear multi-time scale processes"
Proc. MECO'81, pp. 86-92, Le Caire, 1981.
- /DAU-5/ G. DAUPHIN-TANGUY, F. ROTELLA
"Reduced models of singularly perturbed systems"
1st ICIAM Symp., Paris, 1987.
- /DEI/ A.S. DEIF
"Advanced matrix theory for scientists and engineers"
Abacus Press, Halsted Press, England, 1982.
- /DEJ/ E.M. DE JAGER
"Singular perturbations of hyperbolic type"
Nieuw Arch. Wisk, n° 23, pp. 145-172, 1975.
- /DIE/ J. DIEUDONNE
"Eléments d'analyse"
Gauthier Villars, Cahiers Scientifiques, Bordas, 1978.
- /1/ Fascicule XL, tome VII, Chap. XXIII, 1ère Partie.
- /2/ Fascicule XLI, tome VIII, Chap. XXIII, 2ème Partie.
- /3/ Fascicule XXXIII, tome III, Chap. XVI & XVII.
- /4/ Fascicule XXXIV, tome IV, Chap. XVIII, XIX & XX.
- /DON/ T. DONALDSON
"A Laplace transform calculus for partial differential operators"
Mémoire of the A.M.S. 143, 1974.

- /DYK/ M. VAN DYKE
"Perturbation methods in fluid mechanics"
Acad. Press, New-York, 1964, Annotated Ed. Parabolic Press, 1975.
- /DZA/ M.G. DZAVADOV
"The Cauchy problem for an hyperbolic equation with a small parameter multiplying the highest derivative"
Izv, Akad., Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz., Tech. Mat. Nauk, n° 6, pp. 3-9, 1963.
- /ECK-1/ W. ECKHAUS
"On some basic concepts in the analysis of singular perturbations"
Advanced Seminar "Singular Perturbations and Asymptotics", 1980.
- /ECK-2/ W. ECKHAUS
"Asymptotic analysis of singular perturbations"
North-Holland, 1979.
- /ECK-3/ W. ECKHAUS, E.M. DE JAGER
"Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type"
Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 23, n° 1, pp. 26-86, 1966.
- /EEL/ J. Jr EELLS
"Elliptic operators on manifolds"
Cornell Univ. Fall, 1964.
- /EID/ S.D. EIDEL'MAN
"Parabolic systems"
North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, London, 1969.
- /ELD/ H.A. NOUR ELDIN, S. STELTER
"Singular perturbation model reduction for gasflow problems in long pipelines"
IMACS'86, Villeneuve d'Ascq, France, 1986.
- /FAR/ S.J. FARLOW
"Exact control of a system of diffusion equations"
Int. J. Cont., Vol. 41, n° 5, pp. 1293-1299, 1985.
- /FAT-1/ H.O. FATTORINI
"The Cauchy problem"
Encycl. of Math. and its Appl., Vol. 18, Addison-Wesley, 1983.
- /FAT-2/ H.O. FATTORINI
"Ordinary differential equations in linear topological spaces I and II"
J. Differential Equations, I, Vol. 5, p. 72 ; II, Vol. 6, p. 50, 1969.
- /FAU/ P. FAURRE, M. ROBIN
"Eléments d'automatique"
Dunod, 1984.
- /FEG/ K. FEGLEY et al
"Stochastic and deterministic design and control via linear and quadratic programming"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-16, pp. 759-766, 1971.

- /FIN/ B.A. FINLAYSSON
"The method of Weighted residuals and variational principles"
Math. in Sc. and Eng., Vol. 87, Acad. Press, 1972.
- /FOR-1/ G.E. FORSYTHE, P.C. ROSENBLOOM
"Surveys in applied math."
John Wiley, New-York, 1958.
- /FOR-2/ G.E. FORSYTHE, W.R. WASOW
"Finite difference methods for partial differential equations"
Appl. Math. Series, Wiley & Sons, New-York, 1960.
- /FRA/ L.E. FRAENKEL
"On the method of matched asymptotic expansions"
Proc. Cambridge Ph. Sc., n° 65, Parts I, II and III, pp. 209-284, 1969.
- /FRE/ H. FREDA
"Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux
dérivées partielles linéaires hyperboliques"
Gauthier Villars, Paris, 1937.
- /FRI-1/ A. FRIEDMAN
"Variational principles and free boundary problems"
Wiley, 1982.
- /FRI-2/ K.O. FRIEDRICHS
"Pseudo-differential operators. An introduction"
Courant Inst. of Math. Sc., New-York Univ., 1968.
- /GAN/ F.R. GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Dunod, 1960.
- /GAR-1/ GARDING
"Cauchy's problem for hyperbolic equations"
Lect. Notes Princeton, 1958.
- /GAR-2/ H.R. GARNIR
"Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Introduction
à leur étude générale"
Birkhäuser Verlag, Stuttgart, 1958.
- /GAR-3/ P.R. GARABEDIAN
"Partial differential equations"
Wiley & Sons, 1964.
- /GEE-1/ R. GEEL
"Linear initial value problems with a singular perturbation of
hyperbolic type"
Proc. Roy. Soc. of Edinburgh 87A, pp. 167-187, 1981.
- /GEE-2/ R. GEEL, E.M. DE JAGER
"Hyperbolic singular perturbations of non-linear first order differential
equations"
Differential Equations and Applications, North-Holland, Amsterdam,
1978.

- /GEN-1/ J. GENET, M. MADAUNE
"Perturbations singulières pour une classe de problèmes hyperboliques non linéaires"
Proc. Conf. on "Singular Perturbations and Boundary Layer Theory", Lyon, 1976, Lect. Notes in Math., Berlin, Springer, n° 594, pp. 201-230, 1977.
- /GEN-2/ J. GENET, M. MADAUNE
"Singular perturbations for a class of non-linear hyperbolic-hyperbolic problems"
J. Math. Anal. Appl., Vol. 64, pp. 1-24, 1978.
- /GIL-1/ R.P. GILBERT
"Constructive methods for elliptic equations"
Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, n° 365, 1974.
- /GIL-2/ J. GILWICZ
"Approximants de Padé"
Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, n° 667, 1978.
- /GIL-3/ D. GILAI, D. TABAK
"An alternative formulation of a distributed-parameter optimal control problem applied to nuclear shielding"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-21, n° 5, p. 668, 1976.
- /GIV/ C.R. GIVENS, C.Y. LO
"Series expansions of solutions of $u_{xx} (2v/x) u_x + \epsilon^2 u_{tt} = u_t$ "
J. Comput. and Appl. Math., North-Holland, Vol. 10, pp. 7-23, 1984.
- /GLA/ I. GLADWELL, R. WAIT
"A survey of numerical methods for partial differential equation"
Oxford, 1979.
- /GOD/ S. GODOUNOV
"Equations de la physique mathématique"
Ed. de Moscou, 1973.
- /GOP/ M. GOPAL, S.I. MEHTA
"On the selection of the eigenvalues to be retained in the reduced order models"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 3, pp. 688-690, 1982.
- /GRA-1/ D.G. GRAFTI
"Non linear partial differential equations in physical problems"
Research Notes in Math., Vol. 42, Pitman, 1980.
- /GRA-2/ P.R. GRAVES-MORRIS, R.H. JONES, G.J. MAKINSON
"The calculation of some rational approximants in two variables"
J. Inst. Math. Appl., Vol. 13, pp. 311-320, 1974.
- /GRU-1/ Lj.T. GRUJIĆ
"Quasi-singular perturbations of time-discrete systems"
"Converse lemma and singularly perturbed large scale systems"
Proc. of J.A.C.C., San Francisco, pp. 857-862 et pp. 1107-1122, 1977.
- /GRU-2/ Lj.T. GRUJIĆ
"Singular perturbations, uniform asymptotic stability and large scale systems"
Proc. of J.A.C.C., Philadelphie, pp. 339-347, 1978.

- /GRU-3/ Lj.T. GRUJIĆ
"Singular perturbations and large scale systems"
Int. J. Cont., Vol. 29, n° 1, pp. 159-169, 1979.
- /GUT-1/ S. GUTMAN, E.I. JURY
"A general theory for matrix root-Clustering in subregions of the complex plane"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 4, pp. 853-863, 1981.
- /GUT-2/ P.O. GUTMAN, C.F. MANNERFELT, P. MOLANDER
"Contributions to the model reduction problem"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 2, pp. 454-455, 1982.
- /HAD/ J. HADAMARD
"La théorie des équations aux dérivées partielles"
Ed. Scientifiques, Pékin, 1964.
- /HAR-1/ A. VAN HARTEN
"Non linear singular perturbations problems : proofs of correctness of a formal approximation based on a contraction principle in a Banach space"
J. Math. Anal. Appl., Vol. 65, pp. 126-168, 1978.
- /HAR-2/ A. VAN HARTEN
"Singular perturbation problems for non linear elliptic second order equation, spectral theory and asymptotics of differential equations"
Proc. of the Scheveningen Conf. on "Differential Equations", Ed. E.M. De Jager, North-Holland, American Elsevier, 1974.
- /HAR-3/ A. VAN HARTEN
"Singularly perturbed non linear second order elliptic boundary value problems"
Ph. D. Thesis, Univ. of Utrecht, the Netherlands, 1975.
- /HAR-4/ A. VAN HARTEN
"Singularly perturbed systems of diffusion type and feedback control"
Automatica, Vol. 20, n° 1, p. 79, 1984.
- /HEA/ D.J. HEATH, A.D. WOOD
"Perturbation of a singular boundary value problem arising from torsional vibration of an inhomogeneous cylinder"
Proc. Conf. on "Ordinary and Partial Differential Equations", Univ. Dundee, 1974, Lect. Notes in Math., Springer, Berlin, Vol. 415, pp. 382-387, 1974.
- /HEI/ G. HEILBRONN
"Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach"
Gauthier Villars, Paris, 1955.
- /HLA/ J. HLADIK
"La transformation de Laplace à plusieurs variables. Résolution des équations différentielles intégrales et aux dérivées partielles"
Masson & Cie, 1969.
- /HOP/ F. HOPPENSTEADT
"On systems of ordinary differential equations with several parameters multiplying the derivatives"
J. of Differential Equations, n° 5, pp. 106-116, 1969.

- /HÖR-1/ L. HÖRMANDER
"Linear partial differential operators"
Springer-Verlag, 1963.
- /HÖR-2/ L. HÖRMANDER
"Fourier integral operators"
J. Acta Math., Vol. 127, pp. 79-183, 1971.
- /HSI-1/ G.C. HSIAO, K.E. JORDAN
"A numerical treatment for parabolic equations with a small parameter"
SIAM J. Math. Anal., Vol. 14, n° 3, 1983.
- /HSI-2/ G.C. HSIAO, R.J. WEINACHT
"Singular perturbations for a semi-linear hyperbolic equation"
SIAM J. Math. Anal., Vol. 14, n° 6, 1983.
- /HUT/ M.F. HUTTON, B.F. FRIEDLAND
"Routh approximations for reducing order of linear time invariant systems"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, n° 3, pp. 329-337, 1975.
- /INO/ H. INOOKA, G. OBINATA
"Relations of moments in composite systems"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-27, n° 4, pp. 967-969, 1982.
- /JAN/ M. JANET
"Les systèmes d'équations aux dérivées partielles"
Gauthier Villars, Paris, 1927.
- /JAR/ Y. JARNY, J.P. OGER
"Résolution numérique et hybride d'un problème de commande avec critère quadratique pour un système régi par une équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites de type Fourier"
RAIRO, J-1, p. 125, 1975.
- /JON/ R.H. JONES, G.J. MAKINSON
"The generation of Chisholm rational polynomial approximants to power series in two variables"
J. Inst. Math. Appl., Vol. 13, pp. 299-310, 1974.
- /KAI/ T. KAILATH
"Linear systems"
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J., 1980.
- /KAP-1/ S. KAPLUN, P.A. LAGERSTROM
"Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers"
J. Math. Mech., Vol. 6, pp. 585-593, 1957.
- /KAP-2/ S. KAPLUN
"Fluid mechanics and singular perturbations"
Ed. P.A. Lagerstrom, L.N. Howard and C.C. Lin, Acad. Press, New-York, 1967.
- /KAT/ T. KATO
"Perturbation theory for linear operators"
New-York, Springer-Verlag, 1966.

- /KEV/ J. KEVORKIAN
"The two variables expansion procedure for the approximate solution of certain non-linear differential equations"
Lect. in Appl. Math., Vol. 7, pp. 206-275, Am. Math. Soc., 1966.
- /KHA/ H.K. KHALIL, P.V. KOKOTOVIC
"Control of linear systems with multi-parameter singular perturbations"
Automatica, Vol. 15, pp. 197-207, 1979.
- /KLU/ A/ KLUWICK
"The analytical method of characteristics"
Progress of Aeronautical Sc., 1980.
- /KOK-1/ P.V. KOKOTOVIC, R. O'MALLEY, P. SANNUTI
"Singular perturbations and order reduction in control theory: an overview"
Automatica, Vol. 12, pp. 123-132, 1976.
- /KOK-2/ P.V. KOKOTOVIC
"Subsystems, time-scales, and multi-modelling"
Proc. of IFAC Symp. on "Large Scale Systems", Toulouse, 1980.
- /KOK-3/ P.V. KOKOTOVIC
"A Riccati equation for block-diagonalization of ill-conditioned systems"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-20, pp. 812-814, 1975.
- /KOK-4/ P.V. KOKOTOVIC, R.A. YACKEL
"Singular perturbations of linear regulators : basic theorems"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-17, p. 29, 1972.
- /KOR/ D.J. KORTEWEG, DE VRIES
"On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves"
Phil. Mag., Vol. 39, pp. 422-443, 1895.
- /KUC/ V. KUCERA
"A contribution to matrix quadratic equations"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-17, p. 344, 1976.
- /KWA/ H. KWAKERNAAK, R. SIVAN
"Linear optimal control systems"
Wiley, New-York, 1972.
- /LAG/ P.A. LAGERSTROM, R.G. CASTEN
"Basic concepts underlying singular perturbation techniques"
SIAM Rev., Vol. 14, pp. 63-120, 1972.
- /LAM/ S.H. LAM
"Singular perturbation problems with nearly resonant operators"
J. Appl. Math. Phys., Vol. 28, pp. 817-823, 1977.
- /LAS/ P. LASCAUX
"Approximation de systèmes d'équations aux dérivées partielles par des schémas aux différences"
Thèse Sc. Math., Paris VI, 1971.

- /LAU/ G.K. LAUSTERER, W.H. RAY
"Distributed parameter state estimation and optimal feedback control.
An experimental study in two space dimension"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-4, n° 2, p. 179, 1979.
- /LEA/ J. LOPES DE SOUZA LEO
"Commande numérique du profil thermique spatio-temporel d'un
réacteur d'épitaxie en phase liquide"
Thèse de Docteur-Ingénieur, Toulouse, n° 838, 1983.
- /LER/ J. LERAY
"Sur les mouvements d'un liquide visqueux emplissant l'espace"
Acta Math., Vol. 63, 1934.
- /LEV/ N. LEVINSON
"The first boundary value problem for $\epsilon \Delta u + A u_x + B u_y + C u = D$ for
small ϵ "
Annals of Math., Vol. 51, pp. 428-445, 1950.
- /LIG/ M.J. LIGHTHILL
"A technique for rendering approximate solutions to physical problems
uniformly valid"
Z. Flugwiss, Vol. 9, pp. 267-275, 1961.
- /LIN/ C.C. LIN
"On a perturbation theory based on the method of characteristics"
J. Math. and Phys., Vol. 33, pp. 117-134, 1954.
- /LIO-1/ J.L. LIONS
"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non
linéaires"
Dunod, Gauthier Villars, 1969.
- /LIO-2/ J.L. LIONS
"Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux
dérivées partielles"
Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1968.
- /LIO-3/ J.L. LIONS
"Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles"
Univ. de Montréal, Département de Math., Canada, 1965.
- /LIO-4/ J.L. LIONS, E. MAGENES
"Problèmes aux limites non homogènes et applications"
Dunod, Paris, Vol. 1 & 2, 1968.
- /LIO-5/ J.L. LIONS
"Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en
contrôle optimal"
Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1973.
- /LIO-6/ J.L. LIONS
"Asymptotic methods in the optimal control of distributed systems"
Automatica, Vol. 14, P. 199, 1978.
- /LIO-7/ J.L. LIONS
"Asymptotic calculus of variations"
In "Singular Perturbations and Asymptotics", Acad. Press, 1980.

- /LIO-8/ J.L. LIONS
"Sur le contrôle optimal de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires"
C.R.A.S., t. 263, (I) : Remarques générales, pp. 661-663 ; (II) : Equations elliptiques, pp. 713-715 ; (III) : Equations d'évolution, pp. 776-779, 1966.
- /LUK/ D.L. LUKES, D.L. RUSSELL
"The quadratic criterion for distributed systems"
SIAM J. Cont., Vol. 7, n° 1, 1969.
- /LUT/ C.H. LUTTERODT
"A two dimensional analogue of Padé approximants theory"
J. Math. Anal. Appl., Vol. 53, pp. 89-98, 1976.
- /MAD/ M. MADAUNE
"Perturbations singulières de type hyperbolique-hyperbolique non linéaire"
Pub. Math. de Pau, 1977.
- /MAG/ J.F. MAGNI
"Analyse et commande des systèmes à plusieurs échelles de temps"
Thèse Doct. Ing., E.N.S.A.E., Toulouse, 1981.
- /MAL/ B. MALGRANGE
"Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution"
Thèse 1955, Annales de l'Institut Fourier, 1956.
- /MAU/ J. MAUSS
"Problèmes de perturbation singulière liés à une équation aux dérivées partielles de type elliptique"
Doct. ès Sc. 1971, J. de Mécanique, Vol. 9, n° 4, pp. 523-556, 1970.
- /MEL/ T. MEIS, U. MARCOWITZ
"Numerical solutions of partial differential equations"
Appl. Math. Sc., Vol. 12, Springer-Verlag, 1981.
- /MEY/ R.E. MEYER
"On the approximation of double limits by single limits and the Kaplan extension theorem"
J. Inst. Math. Appl., Vol. 3, pp. 245-249.
- /MIC/ M.L. MICHELSEN, J. VILLADSEN
"A convenient computational procedure for collocation constants"
The Chem. Eng. J., 1972.
- /MIT/ A.R. MITCHELL
"Computational methods in partial differential equations"
Wiley & Sons, 1969.
- /MIZ/ S. MIZOHATA
"The theory of partial differential equations"
Cambridge Univ. Press, 1973.
- /MOH/ M.F.N. MOHSEN
"Some details of the Galerkin finite element method"
Appl. Math. Modelling, Vol. 6, 1982.

- /MOR/ P.M. MORSE, H. FESHBACH
"Methods of theoretical physics"
Mc Graw-Hill, New-York, 1953.
- /NAY-1/ A.H. NAYFEH
"Perturbation methods"
Wiley, New-York, 1973.
- /NAY-2/ A.H. NAYFEH
"A comparison of perturbation methods for nonlinear hyperbolic waves"
Singular Perturbations and Asymptotics, Acad. Press, pp. 223-275, 1980.
- /NEC/ J. NECAS
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques"
Masson & Cie, 1967.
- /NIR/ L. NIRENBERG, F. TREVES
"Solvability of a first order linear partial differential equation"
Comm. on Pure and Appl. Math., t. 16, pp. 331-351, 1963.
- /NOU/ J.P. NOUGIER
"Méthodes de calcul numérique"
Masson, 1983.
- /O'MA-1/ R.E. O'MALLEY Jr
"Introduction to singular perturbations"
Acad. Press, New-York, 1974.
- /O'MA-2/ R.E. O'MALLEY Jr
"The first boundary value problem for certain linear elliptic differential equations involving two small parameters"
Arch. Rat. Mech. & Anal., Vol. 26, pp. 68-82, 1967.
- /PAY/ L.E. PAYNE, D. SATHER
"On singular perturbation in non well posed problems"
Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 4, n° 75, pp. 219-230, 1967.
- /PRA/ S.S. PRABHU, I.M.C. CAUSLAND
"Optimal control of linear diffusion process with quadratic error criteria"
IFAC, 1971.
- /PRO/
"Proceedings of the symposium on the mathematical aspects of the finite element methods"
Rome, 1975, Lect. Notes in Math., 1977.
- /PUR/ A.N. PURI, Y.C. KUO, R.S. CHAPMAN
"Turbulent diffusion of mass in circular pipe flow"
Appl. Math. Modelling, Vol. 7, 1982.
- /RAM-1/ N. RAMANUJAM, U.N. SRIVASTAVA
"Singular perturbation problems for systems of partial differential equations of elliptic type"
J. Math. Anal. Appl., Vol. 71, n° 1, pp. 18-35, 1979.

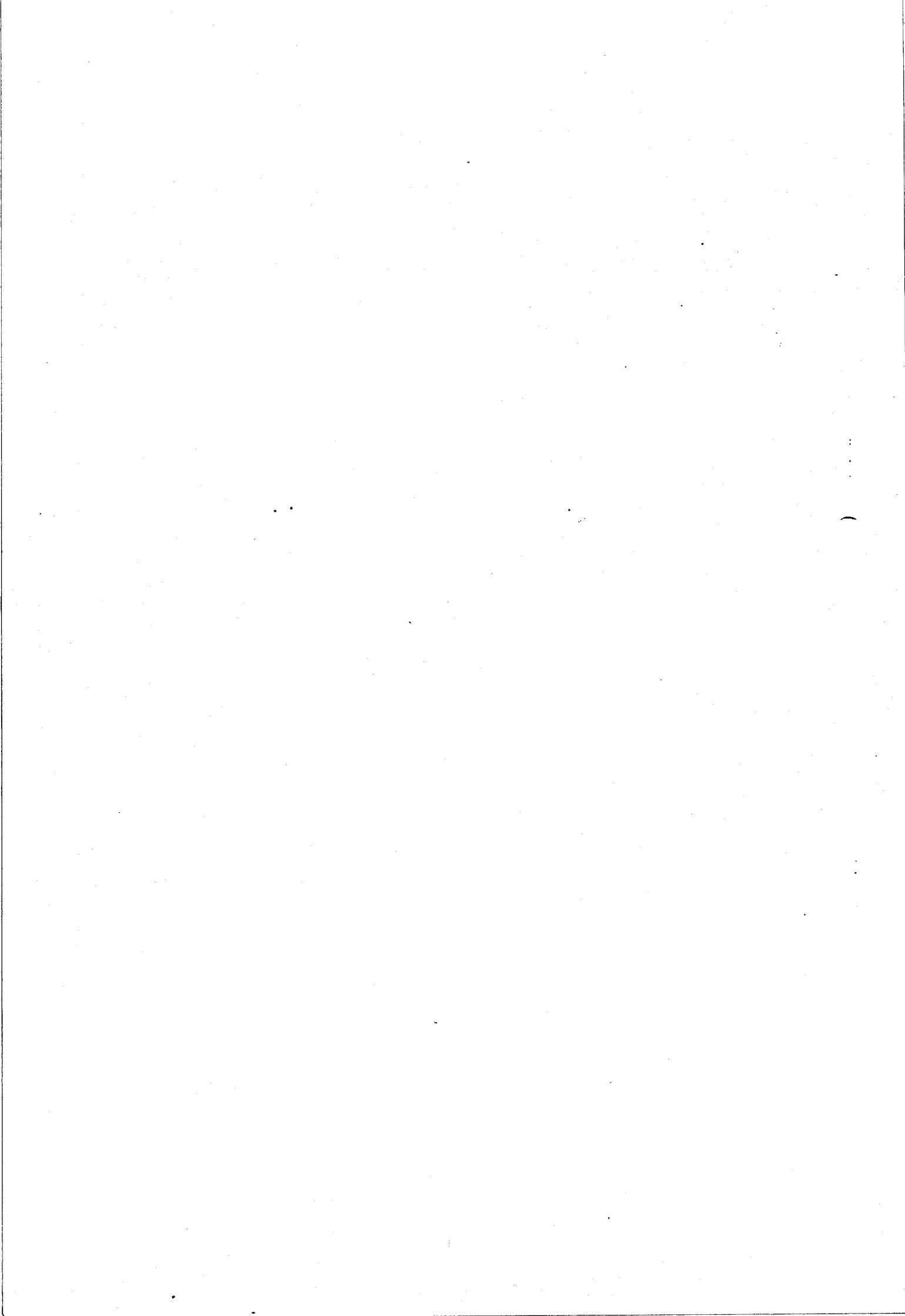
- /RAM-2/ N. RAMANUJAM, U.N. SRIVASTAVA
"Singular perturbation problems for systems of partial differential equations of parabolic type"
Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 23, n° 3, pp. 245-258, 1980.
- /RAN/ R. RANGOGNI, M. REALI
"The coupling of the finite difference method and the boundary element method"
Appl. Math. Modelling, Vol. 6, 1982.
- /RIC/ R.D. RICHTMYER, K.W. MORTON
"Difference methods for initial value problem"
Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Wiley, 1967.
- /RIQ/ C. RIQUIER
"La méthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles"
Gauthier Villars, Paris, 1928.
- /ROA/ G.F. ROACH
"Green's functions"
Cambridge Univ. Press, 2nd Ed., 1982.
- /ROT/ F. ROTELLA
"Méthodes algébriques et analytiques pour la simplification et la commande des systèmes bilinéaires à deux dynamiques"
Thèse de Doct. ès Sc. Phys., Lille, n° 732, 1987.
- /SAF/ E.B. SAFF, R.S. VARGA
"Padé and rational approximation"
Acad. Press, New-York, 1977.
- /SAK-1/ R. SAKAMOTO
"Hyperbolic boundary value problems"
Cambridge Univ. Press, 1982.
- /SAK-2/ V.R. SAKSENA, O'REILLY, P.V. KOKOTOVIC
"Singular perturbation and time scales method in control theory"
Automatica, Vol. 20, n° 3, pp. 273-293, 1984.
- /SAN/ N.R. SANDELL, P. VARAIYA, M. ATHANS, M. SAFONOV
"Survey of decentralized control methods for large scale systems"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-23, n° 2, pp. 108-128, 1978.
- /SAT/ M. SATO
"Theory of hyperfunctions I, II"
J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t. 8, pp. 139-193, pp. 387-437, 1959, 1960.
- /SCH-1/ L. SCHWARTZ
"Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues"
Bul. Soc. Math. France, Vol. 72, pp. 141-145, 1944.
- /SCH-2/ L. SCHWARTZ
"Théorie des distributions"
Hermann, t. 1 & 2, Paris, 1950.

- /SHA-1/ L. SHAW
"Existence and approximation of solution to an infinite set of linear time invariant differential equations"
SIAM J. Appl. Math., Vol. 22, n° 2, 1972.
- /SHA-2/ Y. SHAMASH
"Stable reduced-order models using Padé-type approximations"
IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. AC-19, p. 615, 1974.
- /SIB/ M. SIBONY, J.C. MARDON
"Approximations et équations différentielles"
Analyse Numérique II, Hermann, Ed. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1982.
- /SMI-1/ D.R. SMITH
"An asymptotic analysis of a certain hyperbolic Cauchy problem"
SIAM J. Math. Anal., Vol. 2, pp. 375-392, 1971.
- /SMI-2/ G.D. SMITH
"Numerical solution of partial differential equations"
Oxford Math. Handbooks, Oxford Univ. Press, 1965.
- /SOB/ S.L. SOBOLEV
"Partial differential equations of mathematical physics"
Pergamon Press, 1964.
- /SOU/ J.L. SOULE
"Opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert"
Cours et Documents de Mathématiques et de Physique, Gordon and Breach, 1967.
- /SU/ F.Y. SU, G.T. PHILLIPS, R.M. TRACI
"Notes on a finite differencing scheme for the dispersion equation"
Appl. Math. Modelling, Vol. 7, 1983.
- /SYR/ G.P. SYRCOS, P. SANNUTI
"Singular perturbation modelling of continuous and discrete physical systems"
IFAC Workshop, Ohrid, Yougoslavie, 1982.
- /TRE-1/ F. TREVES
"Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators"
Plenum, 2 Vol., 1980.
- /TRE-2/ F. TREVES
"Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires"
I.H.P. 1965-1966, Sec. Math. de l'E.N.S., 45 rue d'Ulm, Paris vème, 1967.
- /TRE-3/ F. TREVES
"Linear partial differential equations with constant coefficients"
Math. and its Appl., Gordon and Breach, Vol. 6, 1966.
- /TSI/ H.S. TSIEN
"The Poincaré-Lighthill-Kuo method"
Adv. Appl. Mech., Vol. 4, pp. 281-349, 1956.

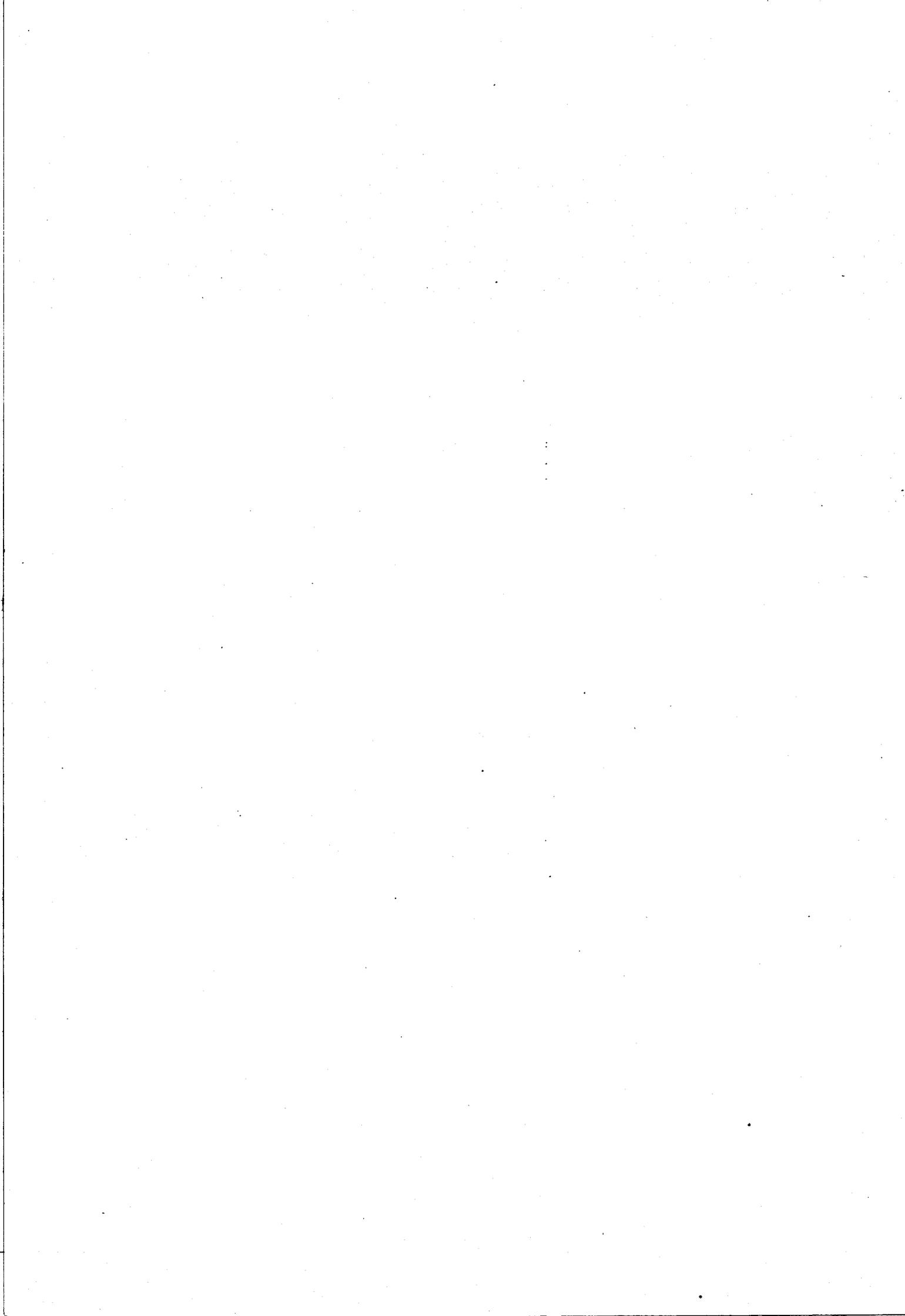
- /TZA-1/ S.G. TZAFESTAS
"Mathematical programming approach to optimal distributed parameter control"
Simulation of Systems'79, North-Holland Pub. Comp., 1980.
- /TZA-2/ S.G. TZAFESTAS
"Walsh series approach to lumped and distributed system identification"
J. of the Franklin Inst., Vol. 305, n° 4, pp. 199-220, 1978.
- /TZA-3/ S.G. TZAFESTAS
"Eigenvalue control in distributed parameter systems with parameter variations"
Proc. of the I.E.E.E., 1976.
- /VEK/ I.N. VEKUA
"New methods for solving elliptic equations"
North-Holland Pub. Comp., 1968.
- /VIC/ R. VICHNEVETSKY, DE SCHUTTER
"A frequency analysis of finite difference and finite elements methods for initial value problems"
Adv. in Comp. Methods for Partial Differential Equations, AICA, 1975.
- /VIS/ M.I. VISIK, L.A. LYUSTERNIK
"Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter"
Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 12, 1957, Am. Math. Soc. Trans., Serie 2, Vol. 20, 1962.
- /VOK/ VO-KHACKHOAN
"Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles"
Vuibert, t. 2, 1972.
- /WEI/ M.B. WEINSTEIN, D.R. SMITH
"Comparison techniques for certain overdamped hyperbolic partial differential equations"
Rocky Mountain J. Math., Vol. 6, pp. 731-742, 1976.
- /WUY/ L. WUYTACK
"Padé approximation and its applications"
Lect. Notes Math., Vol. 765, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- /WYS/ M. WYSOCKI
"Application of orthogonal collocation to simulation and control of first order hyperbolic systems"
Math. and Comp. in Simul. XXV, Elsevier Sc. Pub. B.V., 1983.
- /ZAB/ N.J. ZABUSKY
"Synergetic approach to non linear wave problems"
Non Linear Partial Diff. Eq., Ed. W.F. Ames, Acad. Press, pp. 223-258, 1967.
- /ZAL/ J.M. ZALDUA
"Méthodes des perturbations singulières et commande de systèmes paraboliques"
Thèse 3^{ème} Cycle, Toulouse, n° 2346, 1980.

- /ZAM-1/ I. ZAMBETTAKIS, G. DAUPHIN-TANGUY, P. BORNE
"A simplified approach of distributed parameter systems with
two-time and two-space scales"
Congrès IASTED, Lugano, 1985.
- /ZAM-2/ I. ZAMBETTAKIS, G. DAUPHIN-TANGUY
"Simplification of models for bidimensional multiscale distributed
parameters systems"
Congrès IMACS, Lille, 1986.
- /ZAM-3/ I. ZAMBETTAKIS, G. DAUPHIN-TANGUY, P. BORNE
"Composite quasi-optimal control of multiscale distributed parameter
systems"
IMACS/IFAC - DPS'87, Hiroshima, 1987.
- /ZLA-1/ M. ZLAMAL
"On the mixed boundary value problem for a hyperbolic equation
with a small parameter"
Czechoslovak Math. J., Vol. 9, n° 84, pp. 218-242, 1959.
- /ZLA-2/ M. ZLAMAL
"On singular perturbation problem concerning hyperbolic equations"
Lect. Series 45, The Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math., Univ.
Maryland, College Park, MD, 1964.





S O M M A I R E



	pages
<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	5
 <u>CHAPITRE I</u> : Définition et Méthodes d'Etude des Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles	
INTRODUCTION	11
I - PRESENTATION DES SYSTEMES	12
I.1 - Différentes classes d'opérateurs aux dérivées partielles	12
I.2 - Problèmes aux limites	18
I.3 - Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles	21
I.3.1 - Définitions	21
a. Systèmes déterminés, sous-déterminés, sur-déterminés	21
b. Systèmes linéaires, semi-linéaires, quasi-linéaires	23
I.3.2 - Sur l'équivalence d'un système aux dérivées partielles et d'une équation aux dérivées partielles	24
I.3.3 - Classification des systèmes	27
II - METHODES CLASSIQUES D'APPROXIMATION	30
II.1 - Les méthodes directes de résolution	30
II.2 - Les méthodes des résidus pondérés et les méthodes variationnelles	32
II.2.1 - Formulation infinie des problèmes aux limites	32
II.2.2 - Approximation par troncature	34
II.2.3 - Différentes méthodes d'approximation fonctionnelle	35
II.3 - Méthode des différences finies	37
CONCLUSION	39

o

o o

CHAPITRE II : Méthodes de Réduction d'Ordre

INTRODUCTION	43
I - RESULTATS GENERAUX DE L'ANALYSE DE PERTURBATIONS SINGULIERES	44
I.1 - Les problèmes de perturbation	44
I.2 - Procédure générale en perturbations singulières	45
I.3 - Raccordements des développements et développements mixtes	48
I.4 - Autres types de développements de fonctions	50
I.5 - Compléments sur les méthodes asymptotiques	52
II - PRECISIONS SUR LA CONVERGENCE DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME AUX LIMITES PERTURBE VERS CELLE DU PROBLEME REDUIT ASSOCIE	55
II.1 - Exemples	55
II.2 - Résultats de Lions	58
II.2.1 - Problèmes non raides stationnaires avec réduction d'ordre	59
II.2.2 - Problèmes non raides avec changements de type paraboliques/elliptiques	61
III - PERTURBATIONS SINGULIERES ET METHODES D'APPROXIMATIONS CLASSIQUES	64
III.1 - Passage à un système à paramètres localisés	64
III.2 - Perturbations singulières sur le modèle approché ..	66
III.2.1 - Séparation des dynamiques	67
III.2.2 - Mise sous forme bloc-diagonale	68
III.2.3 - Systèmes singulièrement perturbés	70
IV - AUTRES METHODES DE SIMPLIFICATION DE MODELES	74
IV.1 - Agrégation d'un système aux dérivées partielles	74
IV.2 - Approximation du type "Padé"	76
IV.2.1 - Fonction de transfert d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles	76
IV.2.2 - Approximations de la fonction de transfert .	80
CONCLUSION	81
ANNEXE	83

o

o o

**CHAPITRE III : Simplification de Modèles pour des Systèmes
à Paramètres Répartis Singulièrement Perturbés***

INTRODUCTION	89
I - GENERALITES	89
I.1 - Systèmes étudiés	89
I.2 - Mise en évidence de plusieurs dynamiques	91
I.3 - Perturbations singulières spatiales et perturbations singulières temporelles	95
I.3.1 - Définition	95
I.3.2 - Perturbations singulières temporelles (PST) ...	96
I.3.3 - Perturbations singulières spatiales (PSS)	97
I.3.4 - Sur l'équivalence entre les notions PSS et PST	98
II - SIMPLIFICATION DE MODELE POUR UN SYSTEME A PERTURBATIONS SINGULIERES EQUIVALENTES	101
II.1 - Formulation du problème	101
II.2 - Séparation des modes	103
II.2.1 - Comportement temporel	103
II.2.2 - Comportement spatial	107
a. Forme PSS normalisée	107
b. Etude directe	112
II.3 - Application numérique	114
III - SIMPLIFICATION DE MODELE POUR UN SYSTEME A PERTURBATIONS SINGULIERES NON EQUIVALENTES	118
III.1 - Formulation du problème	118
III.2 - Séparation des modes	119
III.2.1 - Comportement temporel	120
III.2.2 - Comportement spatial	122
III.2.3 - Réductions spatiale et temporelle simultanées	124
III.3 - Application au réacteur d'épitaxie en phase liquide	126
III.3.1 - Description du processus	126
III.3.2 - Simplification du modèle	129
III.3.3 - Résultats de simulation	131
a. Comparaison du modèle original avec sa partie profonde	132
b. Comparaison du modèle original avec sa partie lente	133
IV - GENERALISATIONS ET EXTENSIONS	135
IV.1 - Découplages différents pour les matrices prépondérantes	135
IV.2 - Extension au cas d'un domaine spatial de dimension q	138
CONCLUSION	139

RESUME

Les travaux présentés constituent une contribution à l'étude des systèmes à paramètres répartis composés de variables à comportements spatiaux et/ou temporels différents. Ils concernent deux domaines très importants : la simplification de modèles par la méthode des perturbations singulières, et la commande optimale.

Après les rappels des principaux résultats mathématiques sur les systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, un exposé récapitulatif des travaux existants sur l'application des perturbations singulières à ces systèmes est présenté. D'autres méthodes de simplification de modèles sont rappelées avec l'extension, au cas des systèmes à paramètres répartis, des techniques d'agrégation et d'approximations par développement limité des opérateurs de transfert entrée-sortie.

Une étude originale des systèmes à paramètres distribués multi-échelles est effectuée qui introduit les notions de perturbations singulières temporelles (PST) d'une part, et de perturbations singulières spatiales (PSS) d'autre part.

La simplification des problèmes de commande optimale relatifs aux systèmes à paramètres répartis singulièrement perturbés est envisagée, d'une part avec l'élaboration d'une commande composite, d'autre part à l'aide d'une résolution analytique de l'équation de Riccati.



MOTS - CLES

SYSTEMES A PARAMETRES DISTRIBUES
PERTURBATIONS SINGULIERES
MODELISATION
REDUCTION D'ORDRE
COMMANDE OPTIMALE
EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES