No d'ordre: 139

50376 1987 195

THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DE LILLE FLANDRES-ARTOIS

EN MECANIQUE DES SOLIDES

par

BOUHADDANE Abdelaziz

APPLICATION DE L'INTEGRALE
DE CAUCHY A LA METHODE DES
DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT
ET AUTRES METHODES DE COLLOCATION

Soutenue le 6 juillet 1987

JURY:

BARRAND J.P.	ENSAM LILLE	Président
CORNET F.	PARIS VI	Rapporteur
PARSY F.	UST LILLE	Rapporteur
MICHEAU P.	UST LILLE	Examinateur
HENRY J.P.	UST LILLE	Examinateur
SHAHROUR I.	UST LILLE	Examinateur

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION	p. 1
CHAPITRE I - CHAMP COMPLEXE : ÉCRITURE DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR UNE FISSURE EN MILIEU INFINI	p. 4
1.1. PLAN COMPLEXE	p.5
1.1.1. Contraintes et déplacements	p.5
1.1.2. Conditions aux limites sur un segment placé sur l'axe réel	p. 6
1.2. METHODE D'INFLUENCE. RECHERCHE DE SOLUTIONS FONDA- MENTALES DANS UN MILIEU INFINI AVEC DISCONTINUITES	p.8
1.2.1. Principe de la méthode d'influence	p.8
1.2.2. Méthode des discontinuités	p.9
1.2.3. Différents types de solutions. Equations de Plemelj	p.10
CHAPITRE II - DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT - SOLUTION FONDAMEN- TALE - EXEMPLE SIMPLE	p.13
2.1. INTERET DE LA METHODE	p.14
2.2. ELEMENTS D'ORDRE 1 - SOLUTION ELEMENTAIRE	p.14
2.3. CONDITION LIMITE - METHODE NUMERIQUE SUR UN EXEM- PLE SIMPLE	p.15
2.3.1. Conditions limites en contrainte	p.15
2.3.2. Conditions limites en déplacement	p.18
2.3.3. Exemple	p.19
2.4. ELEMENTS DEGENERES	p.21
2.4.1. Elément linéaire en tête de fissure	p.21
2.4.2. Elément parabolique en tête de fissure	p.22
2.5. ELEMENTS D'ORDRE SUPERIEUR	p.24

CHAPITRE	III -		FINUITE DE DÉPLACEMENT - ÉLÉMENT D'ORDRE 2 EL DE CALCUL - EXEMPLES	p. 25
	3.1.	INTRODU	JCTION	p. 26
	3.2.		MENT DE REPERE - EXPRESSIONS DES CONTRAINTES	p. 26
		3.2.1.	Changement de repère	p.26
		3.2.2.	Segments orientés arbitrairement	p. 27
	3.3.	METHODE	NUMERIQUE - MATRICE D'INFLUENCE	p. 28
		3.3.1.	Conditions aux limites en contrainte - Matrice d'influence	p. 29
		3.3.2.	Mise au point d'un logiciel	p. 31
	3.4.	EXEMPLE	ES	p.32
		3.4.1.	Plaque rectangulaire soumise à une compression	p. 32
		3.4.2.	Plaque infinie percée d'un trou circulaire sous pression	p. 34
		3.4.3.	Cylindre creux soumis à une pression interne	p.35
		3.4.4.	Plaque infinie percée d'un trou soumis à une pression sur deux cadrans opposés	p.37
CHAPITRE			NS FONDAMENTALES POUR UN ÉLÉMENT RECTILIGNE EU INFINI	p. 41
	4.1.	INTRODU	UCTION	p.42
	4.2.		ME MIXTE AVEC DISCONTINUITE DE CONTRAINTE ET JITE DE DEPLACEMENT. SOLUTION ELEMENTAIRE	p. 42
	4.3.		ME EN DEPLACEMENT AVEC DISCONTINUITE DE DE- ENT. SOLUTION ELEMENTAIRE	p.43
		4.3.1.	Solution élémentaire	p. 43
		4.3.2.	Exemple	p.44
·	4.4.		ME EN CONTRAINTE ET DISCONTINUITE DES CON- ES - SOLUTION ELEMENTAIRE	p.46
	4.5.		ME MIXTE AVEC DISCONTINUITE DE CONTRAINTE ET EMENT - SOLUTION ELEMENTAIRE	p. 47
	4.6.	CONCLUS	SION NOIS	p. 48

CHAPITRE V - DISCONTINUITE DE DÉPLACEMENT - ÉLÉMENTS CIRCULAIRES 1 ET 2 NOEUDS, EXEMPLES - ELÉMENTS CURVILIGNES - TRANSFORMATION CONFORME SUR LE CERCLE - CAS DE L'EL LIPSE	
5.1. CONTOUR CIRCULAIRE - PROBLEME EN CONTRAINTE	
5.1.1. Equations de Plemelj du problème	p.52
5.1.2. Comportement des potentiels complexes	p.53
5.1.3. Calcul des coefficients	p.55
5.2. CONTOUR CIRCULAIRE - METHODE DES DISCONTINUITES D DEPLACEMENT	
5.2.1. Forme générale des potentiels complexes	p.57
5.2.2. Détermination des coefficients	p.59
5.2.3. Problèmes numériques liés aux fonctions mul formes	
5.2.4. Eléments à 1 noeud	p.61
5.2.5. Exemples numériques	p.63
5.2.6. Elément du second ordre	p.64
5.3. TRANSFORMATION CONFORME SUR LE CERCLE - APPLICATI AU CAS D'UN CONTOUR ELLIPTIQUE	
5.3.1. Transformation conforme sur le cercle - Ec ture des équations de KOLOSOV-MUSHKELISCHV	
5.3.2. Equations de Plemelj du problème	p.71
5.3.3. Solution dans le cas d'un contour elliptiq	que p.73
CHAPITRE VI - DISCONTINUITE DE DÉPLACEMENT - ÉLÉMENTS COINS - TRANSFORMATION CONFORME SUR LA DROITE - EXEMPLES .	p.76
6.1. TRANSFORMATION CONFORME SUR LA DROITE	p.77
6.2. EQUATIONS DE PLEMELJ DU PROBLEME - FORME GENERALE POTENTIELS	~ ^
6.2.1. Equations de Plemelj	p. 78
6.2.2. Forme générale des potentiels	p. 79
6.3. CAS D'UN ELEMENT D'ORDRE 2	p. 79
6.3.1. Calcul des potentiels	p,80
6.3.2. Calcul des contraintes	p. 80
6.3.3. Calcul des déplacements	p. 81

	6.4. EXEMPLE NUMERIQUE	p.82
**	6.4.1. Calcul des contraintes et déplacements sur le bord du coin	p.82
	6.4.2. Exemple numérique	p.84
	Conclusion	p.88
	BIBLIOGRAPHIE	p.92
	Annexe 1	p. 95
	Annexe 2	p.105
	ANNEYE 3	p.113

A.

INTRODUCTION

Le laboratoire dans lequel j'ai effectué ce travail s'intéressait aux milieux fissurés, au comportement des fissures et à la description des chemins de fissuration. La technique de calcul des structures élastiques planes utilisée était la méthode de discontinuité de déplacement développée par CROUCH | 6 |. Cette méthode présente un avantage très net pour les structures contenant des fissures car elle permet par l'introduction de discontinuités de déplacements de vérifier le "fonctionnement" d'une fissure :

> ouverture : discontinuité normale non nulle et tangentielle nulle ou non ;

> glissement : discontinuité normale nulle, discontinuité tangentielle non nulle;

. frottement sans : discontinuités normales et tangentielles glissement nulles.

La construction de la méthode a nécessité la recherche de solutions élastiques correspondant à l'application d'une discontinuité normale ou tangentielle sur un segment d'un milieu élastique plan infini. Cette analyse en coordonnées cartésiennes a été obtenue en utilisant les potentiels de Neuber-Papkovitch | 6 |. La résolution délicate semblait limiter la méthode aux discontinuités constantes. Cependant, une réécriture de la méthode utilisant une formulation intégrale a permis de développer d'une part, des éléments d'ordre plus élevé en problèmes plans | 5 |, et, d'autre part, de généraliser à l'espace les solutions obtenues en problèmes plans | 16 |. Notons que les solutions que nous appelerons fondamentales ont nécessité des calculs longs et non systématiques. En outre, la résolution en coordonnées cartésiennes impose que le contour soit découpé en éléments rectilignes. Ceci nécessitera une "expérience" dans la discrétisation des contours à courbure très variable.

L'apparition d'autres techniques de collocation (charges fictives $\mid 7 \mid$) au début de notre travail nous a amené à une réflexion plus générale sur une formulation de ces méthodes d'influence. Il nous a alors semblé que l'intégrale de Cauchy pouvait apporter un certain nombre d'avantages :

- une écriture systèmatique de toutes les solutions fondamentales dérivant de conditions imposées sur un segment rectiligne du milieu infini,

- un développement simple des solutions fondamentales pour des éléments d'ordre quelconque,
- un calcul aisé des contraintes et déplacement par l'utilisation de calculs en champ complexe (écriture des translation et rotation simplifiées)
- possibilité d'effectuer le même type de calcul que précédemment sur des arcs circulaires.
- d'utiliser la transformation conforme sur le cercle ou la droite pour obtenir des solutions fondamentales dans le cas de contours elliptiques et coins par exemple.

Le chapitre 1 rappelle les principaux résultats d'élasticité en champ complexe, et présente les conditions aux limites possibles à formuler pour obtenir toutes les solutions fondamentales correspondant à un segment rectiligne en milieu infini.

Le chapitre 2 développe le cas de la méthode des discontinuités de déplacement. Les potentiels complexes sont définis pour des éléments polynomiaux d'ordre quelconque et développés dans le cas d'ordre 6. Des éléments dégénérés linéaires et paraboliques permettant de tenir compte de la continuité de déplacement en tête de fissure sont également présentés. Un exemple simple d'utilisation de la méthode est donné.

Nous avons mis au point un logiciel général avec des éléments à deux noeuds dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplace-ment (Chapitre 3). Des exemples sont présentés pour comparer les éléments 1 et 2 noeuds, notamment lorsqu'on s'approche de la frontière.

Dans le chapitre 4, nous donnons les solutions fondamentales pour les quatre autres méthodes définies à partir d'un segment en milieu infini. Ces solutions ne sont pas développées sauf pour le cas d'une écriture en déplacement où l'on montre la difficulté spécifique à cette méthode. Cependant, chaque méthode pourra être étudiée selon le schéma de la méthode des discontinuités de déplacement.

Le chapitre 5 s'intéresse aux contours curvilignes. Dans un premier temps, les solutions fondamentales sont écrites pour un contour circulaire. Les calculs sont alors totalement développés pour des éléments 1 et 2 noeuds. Des exemples numériques utilisant des éléments 1 noeud sont donnés, et il est précisé les problèmes numériques inhérents aux fonctions multiformes. Dans un deuxième temps, les solutions fondamentales sont écrites pour un contour curviligne quelconque, par transformation conforme sur le cercle. Le cas de l'ellipse est alors présenté.

Enfin, dans le chapitre 6, nous étudions l'élément "coin" par transformation conforme sur la droite. Les solutions sont développées pour un élément d'ordre 2, et un exemple de plaque (coin droit) est donné.

CHAPITRE I

CHAMP COMPLEXE.

ECRITURE DES CONDITIONS AUX LIMITES

SUR UNE FISSURE

EN MILIEU INFINI.

Les relations fondamentales de l'élasticité linéaire plane sont exprimées au moyen des potentiels complexes $\phi(z)$ et $\psi(z)$ qui sont des fonctions analytiques dont les valeurs, en tout point du domaine étudié, sont définies par une intégrale de type Cauchy dans le plan complexe le long du contour sur lequel les conditions aux limites sont connues.

Dans notre travail, nous allons rechercher des solutions élémentaires correspondant soit à des contraintes discontinues, soit à des déplacements discontinus appliqués sur une fente de longueur finie dans le plan infini.

Dans ce paragraphe, nous allons exposer cette théorie en champ complexe en montrant les différentes méthodes, correspondant aux différents types de chargement.

I.1. PLAN COMPLEXE

1.1.1, CONTRAINTES ET DÉPLACEMENTS

Dans le plan complexe représenté par les variables z=x+iy et \overline{z} , les potentiels complexes ϕ et ψ sont liés aux contraintes et aux déplacements par les relations bien connues de Kolosov-Muskhelishvili [12].

Les composantes du tenseur des contraintes et du déplacement s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi}'(\overline{z}) \right] = 4 \operatorname{Re} \phi'(z)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = 2 \left[\overline{z} \phi''(z) + \psi'(z) \right]$$

$$2\mu D = k \phi(z) - z \overline{\phi}'(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z})$$

où D désigne le vecteur déplacement défini dans le plan complexe par :

$$D(z, \overline{z}) = u_x(x, y) + i u_y(x, y)$$

Le paramètre k permet de passer de la contrainte plane à la déformation plane :

$$k = 3 - 4v$$

en déformation plane

$$k = \frac{3 - v}{1 + v}$$

en contrainte plane

 μ et ν désignent respectivement les coefficients de Lamé et de Poisson.

Par la suite, on aura recours au changement de repère. Connaissant les potentiels ϕ et Ω , solutions du problème, dans le repère (o, \vec{x}, \vec{y}) on pourra calculer les contraintes et déplacements dans un autre repère (o', \vec{x}', \vec{y}') défini par la rotation $\theta = (\vec{x}, \vec{x}')$ (fig. 1.1) à l'aide des relations suivantes :

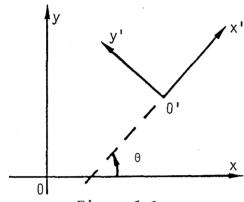


Figure 1.1.

(1.2)
$$\sigma_{x'x'} - \sigma_{y'y'} - 2i \sigma_{x'y'} = e^{2i\theta} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i \sigma_{xy})$$
$$u_{x'} + i u_{y'} = e^{-i\theta} (u_{x} + i u_{y})$$

Enfin pour ces rappels, notons que la résultante (X + i Y) des charges appliquées sur un arc AB s'écrit à l'aide des potentiels complexes :

(1.3)
$$X + iY = -i \left[\phi(z) + z \overline{\phi}'(\overline{z}) + \overline{\psi}(\overline{z})\right]_A^B$$

1.1.2. CONDITIONS AUX LIMITES SUR UN SEGMENT PLACÉ SUR L'AXE RÉEL.

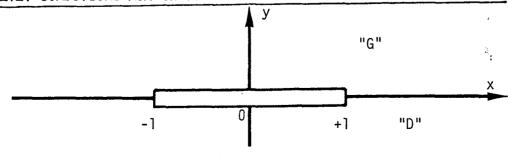


Figure 1.2.

Nous allons être amenés à rechercher des solutions élémentaires pour des conditions aux limites appliquées sur une fissure placée sur l'axe réel (fig. 1.2). Le parcours de cette fente et de l'axe x, dans le-sens de l'axe x, définit une partie "G" et une partie "D" du plan z. Il est classiquement utilisé |11| le changement de fonction :

$$\Omega(\overline{z}) = -\overline{z} \ \overline{\phi}'(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z})$$

Notons que ce changement de fonction peut apparaître de la facon suivante : dans la définition de la résultante si l'on suppose les fonctions définies pour $\overline{z} \in G$ par exemple, la fonction $\phi(z)$ n'est alors pas connue. C'est donc une fonction inconnue que nous appellerons Ω . Cette fonction Ω sera définie arbitrairement dans un premier temps (mais correctement pour obtenir des conditions aux limites simples) de la façon suivante :

on pose X + iY = 0 dans (1.3), on change z en \overline{z} partout ou z intervient, ce qui correspond bien à la définition (1.4). Maintenant si nous sommes capables de déterminer $\phi(z)$ et $\Omega(z)$, la fonction $\psi(z)$ sera calculée par :

$$\psi(z) = -z \phi'(z) - \overline{\Omega}(z)$$

sur le segment $\begin{bmatrix} -1, +1 \end{bmatrix}$ les conditions aux limites en contraintes et déplacements font intervenir les quantités σ_{yy} - $i\sigma_{xy}$ et u + iu, . Reportons les valeurs de $\psi(z)$ et $\psi'(z)$ dans les relations $(1.1)^y$ et tirons les quantités qui nous intéressent.

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}) = \phi'(z) + (z - \overline{z}) \overline{\phi}''(\overline{z}) - \Omega'(\overline{z})$$

$$(1.6)$$

$$2\mu(u_{x} + iu_{y}) = k \phi(z) - (z - \overline{z}) \overline{\phi}'(\overline{z}) + \Omega(\overline{z})$$

Passons maintenant aux conditions aux limites. Si z tend vers x, ($x \in [-1+1]$) du côté G précédemment défini, \overline{z} tend vers le même point mais du côté D.

Ainsi les conditions en contraintes s'écrivent :

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{G}(x) = \phi^{G}(x) - \Omega^{D}(x)^{G}(x)$$

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{D}(x) = \phi^{D}(x) - \Omega^{G}(x)$$

et en déplacement :

(1.8)
$$2\mu D^{G}(x) = k \phi^{G}(x) + \Omega^{D}(x)$$
$$2\mu D^{D}(x) = k \phi^{D}(x) + \Omega^{G}(x)$$

En combinant ces relations, nous obtenons les formules de Plemelj du problème. Pour le problème uniquement en contrainte, nous aurons :

$$(1.9a)(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D = (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x)$$

$$(1.9b)(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D = (\phi' - \Omega')^G(x) + (\phi' - \Omega')^D(x)$$

Pour le problème uniquement en déplacement, les formules de Plemelj sont :

(1.10a)
$$2\mu \left[D^{G} - D^{D}\right] = (k\phi - \Omega)^{G} (x) - (k\phi - \Omega)^{D} (x)$$

(1.10b)
$$2\mu \left[D^{G} + D^{D}\right] = (k + n)^{G} (x) + (k + n)^{D} (x)$$

1.2, METHODE D'INFLUENCE, RECHERCHE DE SOLUTION FONDAMENTALES DANS UN MILIEU INFINI AVEC DISCONTINUITES

1,2,1, PRINCIPE DE LA MÉTHODE D'INFLUENCE

La méthode d'influence est une méthode de collocation utilisant des solutions élémentaires de la théorie de l'élasticité (solution pour une force concentrée en milieu semi infini, solution pour une force concentrée en milieu infini, doublet en milieu infini |13|...). Dans ce cas, on superpose un certain nombre de ces solutions et la détermination de la valeur des forces concentrées s'effectue par application des conditions aux limites.

Deux questions fondamentales peuvent alors être posées :

- le contour d'application des solutions fondamentales est-il le même que le contour réel de la structure ?
- quelle solution fondamentale choisir ?

Dans le cas d'une distribution de charges concentrées, celles-ci ne sont en général pas mises sur le contour [8]. Une optimisation de leur position peut-être obtenue par une méthode de moindres carrés. Cette façon de raisonner peut être "rentable" si l'on étudie une structure à géométrie fixe, car dans le cas de recherche de forme ou d'évolution de géométrie (propagation de fissures) cette méthode nécessite des calculs annexes qui peuvent être longs. Il apparaît plus simple que les points nodaux soient en même temps les points de fixation des conditions

aux limites et les points définissant les paramètres de linéarisation.

En ce qui concerne la deuxième question, il semble important que l'on choisisse des solutions fondamentales aussi proches de la solution réelle que possible ... Par exemple, respect automatique d'un bord libre |10|, |15|. La méthode des "discontinuités de déplacement" est particulièrement bien adaptée aux cas des fissures réelles car l'ouverture et le glissement créent bien une discontinuité de déplacement relativement aux deux levres de la fissure.

Enfin, il importera de choisir des solutions fondamentales créant des singularités les plus faibles possibles afin de pouvoir avoir une précision convenable lorsqu'on s'approche du contour.

L'objet du présent travail est de donner une classe de solutions fondamentales en champ complexe à partir de solutions élastiques en milieu infini construites avec des conditions aux limites discontinues imposées sur un segment [-1, +1]

1.2.2. METHODE DES DISCONTINUITES

La théorie des potentiels complexes permet, à partir des conditions aux limites en contraintes, ou en déplacement ou mixtes de déterminer les potentiels complexes en résolvant les équations de Plemelj. Pour construire la méthode intégrale, il est nécessaire de rechercher des solutions singulières ou élémentaires correspondant à des conditions aux limites discontinues dans le sens "G" par rapport à D." Il peut y avoir deux types de discontinuité :

- 1) une discontinuité de contrainte notée T
- 2) une discontinuité de déplacement notée D

Selon ce que nous venons de dire :

$$\tilde{T} = (T^{G} + T^{D}) (x) = (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{G} (x) - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{D} (x)$$

$$\tilde{D} = (D^{G} - D^{D}) (x)$$

Dans les valeurs de T ou D interviendront un certain nombre de paramètres qui serviront de paramètres de linéarisation du problème.

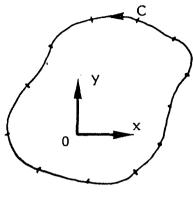


Figure 1.3.

Pour résoudre un problème réel, intérieur ou extérieur, borné par un contour C ou plusieurs contours, nous procéderons de la manière suivante. (On supposera que la structure occupe la partie gauche, ce qui définit le sens de parcours du contour).

1e étape

Discrétisation du contour en un certain nombre de segments. Chaque segment est alors considéré comme une fissure en milieu infini.

2e étape

Application sur chaque élément de la solution élémentaire et sommation.

3e étape

Calcul des paramètres de linéarisation par fixation à la frontière en un certain nombre de points appelés points nodaux.

La solution générale est donc une superposition des solutions élémentaires. Les paramètres de linéarisation étant déterminés, il est possible de connaître l'état de contrainte ou de déplacement en tout point du domaine par les relations (1.1).

1.2.3. DIFFÉRENTS TYPES DE SOLUTIONS. ÉQUATIONS DE PLEMELJ

Pour construire la solution élémentaire, il est nécessaire de faire intervenir une discontinuité; A partir de (1.11) et des équations de Plemelj (1.9) et (1.10), on peut s'apercevoir qu'il est possible de construire cinq solutions.

SOLUTION 1 - Problème mixte avec discontinuité de déplacement et continuité de contrainte.

Dans cette solution

$$\hat{D}(x) \neq 0$$
 $\hat{T}(x) = 0$ $x \in [-1 + 1]$

ce qui utilise les équations de Plemelj (1.9a) et (1.10a) qui deviennent :

$$0 = (\phi' + \Omega')^{G}(x) - (\phi' + \Omega')^{D}(x)$$

$$(1.12)$$

$$2\mu \hat{D}(x) = (k\phi - \Omega)^{G}(x) - (k\phi - \Omega)^{D}(x)$$

C'est cette solution que nous allons particulièrement développer, car lorsque la structure comporte elle-même des fissures frottantes ou non, conditions (1.12) sont exactement les conditions aux limites sur cette fissure. Nous montreront que cette solution correspond à la méthode dite "des discontinuités de déplacement développée ces quelques dernières années notamment à partir des travaux de Crouch |6 |

SOLUTION 2 - Problème mixte avec discontinuité de contrainte et continuité de déplacement.

Dans ce cas

$$\hat{D}(x) = 0$$
 $\hat{T}(x) \neq 0$

Les équations de Plemelj sont alors :

$$\widehat{T}(x) = (\phi' + \Omega')^{G}(x) - (\phi' + \Omega')^{D}(x)$$

$$(1.13) \qquad x \in [-1, +1]$$

$$0 = (k \phi - \Omega)^{G}(x) - (k \phi - \Omega)^{D}(x)$$

Nous montrerons au chapitre 4 que cette méthode s'apparente à la méthode dite "des charges fictives" | 7 | et que les équations (1.13) permettent aisément de la généraliser.

SOLUTION 3 - Problème en déplacement avec discontinuité de déplacement.

Dans ce cas $D(x) \neq 0$, mais nous devons utiliser la deuxième relation en déplacement de Plemelj (1.10b). Il reste donc à faire une hypothèse sur DG + DD. Toutes les hypothèses peuvent être valables ; cependant, il est nécessaire de trouver les solutions élémentaires les moins lourdes possibles afin que le calcul numérique qui s'en suivra prenne le moins de temps machine possible. L'hypothèse la plus raisonnable que nous avons retenue est de poser :

$$(D^G + D^D) (x) = 0$$

Ainsi:

$$2\mu \hat{D}(x) = (k \phi - \Omega)^{G}(x) - (k \phi - \Omega)^{D}(x)$$

$$(1.14) \qquad x \in [-1, +1]$$

$$0 = (k \phi + \Omega)^{G}(x) + (k \phi + \Omega)^{D}(x)$$

SOLUTION 4 - Problème en contrainte avec discontinuité de contrainte.

Cette solution est la solution duale de la solution 3 en déplacement avec les mêmes remarques. Nous adopterons donc les équations de Plemelj suivantes :

$$\hat{T}(x) = (\phi' + \Omega')^{G}(x) - (\phi' + \Omega')^{D}(x)$$

$$(1.15) \qquad x \in [-1, +1]$$

$$0 = (\phi' - \Omega')^{G}(x) + (\phi' - \Omega')^{D}(x)$$

SOLUTION 5 - Problème mixte avec discontinuité de contrainte et de déplacement

Dans ce dernier cas, nous aurons $T(x) \neq et \hat{D}(x) \neq 0$ et

(1.16)
$$\hat{T}(x) = (\phi' + \Omega')^{G}(x) - (\phi' + \Omega')^{D}(x)$$

$$2\mu \hat{D}(x) = (k \phi - \Omega)^{G}(x) - (k \phi - \Omega)^{D}(x)$$

2.

Cette dernière solution généralise en fait les solutions 1 et

Dans la suite du travail nous allons développer particulièrement la solution 1. Au chapitre 2, nous construirons diverses solutions élémentaires, avec des éléments plus ou moins compliqués, et des éléments "dégénérés" pour tenir compte de la compatibilité des déplacements en tête d'une fissure réelle dans la structure. Au chapitre 3, nous exposerons le logiciel mis au point à partir des résultats précédents. Au chapitre 4, nous examinerons les autres solutions et les comparerons sur des exemples simples. Enfin, et pour profiter de la mise en équation simple du problème en champ complexe, nous développerons des éléments curvilignes (circulaires, elliptiques ...) qui permettront d'éviter une forte discrétisation dans des zones où la courbure varie très rapidement (par exemple petit rayon de raccordement entre deux droites).

CHAPITRE II

DISCONTINUITE DE DEPLACEMENT SOLUTION FONDAMENTALE EXEMPLE SIMPLE

2.1. INTERET DE LA METHODE

Dans l'étude de la résolution des problèmes élastiques plans, la méthode des discontinuités de déplacement se distingue par la facilité de son application dans la théorie des intégrales de frontières ou équations intégrales. De plus, elle s'adapte parfaitement à la théorie des potentiels complexes en champ complexe.

En fait, la méthode de discontinuité de déplacement consiste à imposer sur un segment, en milieu infini, un champ de déplacement discontinu et un champ de contraintes continu. Ainsi, selon les conditions aux limites imposées sur un segment de frontière, les équations de Plemelj permettent d'exprimer les fonctions potentielles Φ et Ω , solutions de base du problème, sous forme d'intégrale de Cauchy. A partir de cette formulation, on peut déterminer l'état de contraintes et déplacements en tout point du domaine étudié.

Enfin, une méthode numérique peut être appliquée à la méthode des discontinuités de déplacement qui consiste à discrétiser le contour du domaine en éléments linéaires de telle manière à faire apparaître les solutions élémentaires sur chaque segment. Cependant, on peut calculer l'état de contraintes et déplacement, en tout point du domaine, par superposition de toutes les solutions élémentaires relatives à chaque segment.

On peut remarquer l'intérêt de cette méthode numérique qui consiste à discrétiser uniquement le contour et non le domaine tout entier et, de plus, donne des solutions rapidement convergentes.

2.2. ELEMENTS D'ORDRE 1. SOLUTION ELEMENTAIRE

On se propose de déterminer les fonctions potentielles Φ et Ω , solutions du problème. En effet, soit un domaine infini contenant une fissure représentée par un segment [-1,1] où on imposera un champ de déplacement D discontinu et un champ de contraintes T continu. Ces conditions aux limites seront exprimées en fait par les équations de Plemelj (1.12) pour $x \in [-1,1]$:

(2.1)
$$(\Phi' + \Omega')^{G}(x) - (\Phi' + \Omega')^{D}(x) = 0$$

$$(k \Phi - \Omega)^{G}(x) - (k \Phi - \Omega)^{D}(x) = 2\mu \hat{D}(x)$$

où $\hat{D}(x)$ désigne la discontinuité de déplacement définie par :

(2.2)
$$\hat{D}(x) = D^{D}(x) - 1 \le x \le 1$$

$$0 \qquad |x| > 1$$

Ainsi, la solution générale du problème dépend de la nature de la discontinuité $\hat{D}(x)$. On se propose le choix de $\hat{D}(x)$ sous forme d'un polynôme du premier degré et à coefficients dans \hat{C} :

(2.3)
$$D(x) = a x + b$$
 $-1 \le x \le 1$

Comme les contraintes et les rotations sont nulles à l'infini et compte tenu des relations (1.1) et (1.4), on en déduit que:

$$\Phi'(\infty) = \Omega'(\infty) = 0$$

Cependant, la première équation de (2.1) donne :

$$(2.5) \qquad \Phi'(z) + \Omega'(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathcal{C}$$

D'autre part, comme $\hat{D}(x)$ est lipschitzienne d'ordre 1 sur]-1, l[et que les déplacements et les rotations sont nuls à l'infini, la deuxième équation de (2.1) donne :

(2.6)
$$k \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\hat{D}(t)}{t-z} dt$$

Donc d'après les relations (2.3), (2.5) et (2.6), on en déduit :

(2.7)
$$\Phi(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[2a + (az+b) \log \frac{z-1}{z+1} \right]$$

$$\Omega(z) = -\Phi(z)$$

Les coefficients a et b représenteront les paramètres de linéarisation permettant de résoudre tout problème élastique plan.

2.3. CONDITION LIMITE - METHODE NUMERIQUE SUR UN EXEMPLE SIMPLE

→ Soit un milieu plan présentant une fissure rectiligne portée par l'axe OX, centrée à l'origine et de longueur 21. Le problème peut être résolu selon les conditions imposées sur la frontière soit en contrainte, soit en déplacement, soit mixtes en contrainte et déplacement. On détaillera les deux premiers cas :

2.3.1. CONDITIONS LIMITES EN CONTRAINTE :

L'expression de la charge appliquée sur les deux lèvres de la fissure s'écrit d'après (1.7) et (2.7) :

(2.8)
$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{G}(x) = \Phi^{G}(x) - \Omega^{D}(x)$$

$$= \Phi^{G}(x) + \Phi^{D}(x)$$

$$= (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^{D}(x)$$

Les relations (2.8) prouvent bien la continuité des contraintes σ_{yy} et σ_{xy} à travers les lèvres de la fissure.

Maintenant, nous allons être amenés à déterminer les deux fonctions et $\Phi^{'D}$ et ceci en utilisant la détermination logarithmique de la fonction multiforme $\Phi^{'}(z)$. En effet, d'après (2.7), on obtient :

(2.9)
$$\Phi'(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[a \log \frac{z-1}{z+1} + \frac{21(az+b)}{z^2-1^2} \right]$$

soit alors pour |x| < 1

(2.10)
$$\Phi^{G}(x) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[a \left(\text{Log } \frac{1-x}{1+x} + i\pi \right) + \frac{21(ax+b)}{x^2-1^2} \right]$$

et

(2.11)
$$\Phi^{1D}(x) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[a(\text{Log } \frac{1-x}{1+x} - i\pi) + \frac{21(ax+b)}{x^2 - 1^2} \right]$$

et enfin pour |x|>1

(2.12)
$$\Phi^{G}(x) = \Phi^{D}(x) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[a \text{ Log } \frac{x-1}{x+1} + \frac{21(ax+b)}{x^2-1^2} \right]$$

La méthode numérique que nous allons présenter consiste à placer un nombre fini N de segments sur [-1, 1] de telle sorte que sur chaque segment la discontinuité de déplacement soit de la forme $\hat{D}(x) = ax + b$ avec a et b **€**¢, (figure 2.1)

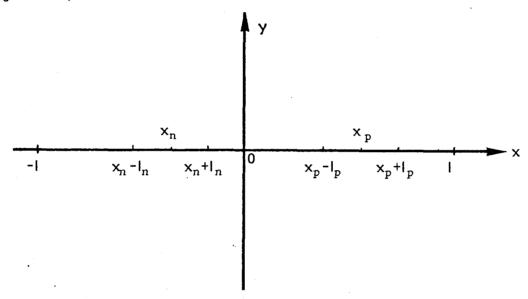


Figure 2.1

Ainsi la charge appliquée, sur le $n^{\underline{e}}$ segment due à la $n^{\underline{e}}$ discontinuité \hat{D}_n , au point $x \in]x_n - 1_n$, $x_n + 1_n[$ s'écrira d'après les relations (2.8), (2.10) et (2.11) :

(2.13)
$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_n^n (x, 0^G) = \frac{2\mu}{i\pi(k+1)} \left[a_n \log \frac{1_n - x}{1_n + x} + \frac{21_n (a_n x + b_n)}{x^2 - 1_n^2} \right]$$

et la charge appliquée, sur le
$$n^{\underline{e}}$$
 segment due à la $p^{\underline{e}}$ discontinuité \hat{D}_p , au point $x \in [x_n - 1]_n$, $x_n + 1]_n$ [s'écrira d'après les relations (2.8) et $p(2.12)$ (2.14)
$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_n^p (x, 0^G) = \frac{2\mu}{i\pi(k+1)} \left[a_p Log \frac{(x-x_p)-1_p}{(x-x_p)+1_p} + 2l \frac{(x-x_p)a_p+b_p}{p(x-x_p)^2-1_p^2} \right]$$

Donc la charge totale appliquée, sur le $n^{\underline{e}}$ segment due aux Nt discontinuités, au point $x \in]x_n - l_n, x_n + l_n[$ s'écrira par superposition des relations (2.13) et (2.14) ;

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_n (x, 0^G) = \frac{2\mu}{i\pi(k+1)} \left[a_n \log \frac{1}{1_n + x} + \frac{21}{x^2 - 1_n^2} \right]$$

$$+ \frac{2\mu}{i\pi(k+1)} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}} \left[a_p \log \frac{(x - x_p) - 1_p}{(x - x_p) + 1_p} + 21_p \frac{a_p (x - x_p) + b_p}{(x - x_p)^2 - 1_p^2} \right]$$

Maintenant, on va essayer de définir les coefficients a_p et b_p pour chaque segment. Pour cela, considérons le n^2 segment $[x_n - 1_n, x_n + 1_n]$ rapporté à son repère local d'origine x_n (figure 2.2)

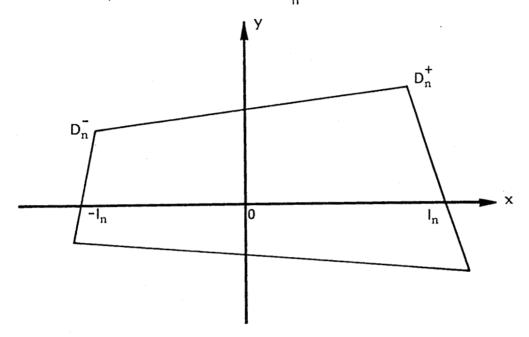


Figure 2.2

Dans le n^{e} segment, la discontinuité $\hat{p}_{n}(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

(2.16)
$$\hat{D}_n(x) = a_n x + b_n \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1_n, 1_n]$$

Rappelons la définition de la discontinuité de déplacement :

(2.17)
$$\hat{D}(x) = D^{G}(x) \cdot D^{D}(x) = (u^{G} - u^{D})(x) + i(v^{G} - v^{D})(x)$$
$$= \hat{u}(x) + i\hat{v}(x)$$

où û et v désignent respectivement les discontinuités tangentielle et normale.

On posera :

$$\hat{D}_{n}(-1_{n}) = \hat{D}_{n} = \hat{u}_{n} + i \hat{v}_{n}$$

$$\hat{D}_{n}(1_{n}) = \hat{D}_{n} = \hat{u}_{n} + i \hat{v}_{n}$$
(2.18)

où D_n^- et D_n^+ représentent les discontinuités du déplacement aux extrêmités du segment [-1, 1, 1].

D'autre part, d'après les relations (2.16) et (2.18), on peut tirer les expressions des coefficients a_n et b_n

(2.19)
$$a_{n} = \frac{\hat{u}_{n}^{+} - \hat{u}_{n}^{-} + i(\hat{v}_{n}^{+} - \hat{v}_{n}^{-})}{2I_{n}}$$

$$b_{n} = \frac{\hat{u}_{n}^{+} + \hat{u}_{n}^{-} + i(\hat{v}_{n}^{+} + \hat{v}_{n}^{-})}{2}$$

Cependant, la relation (2.15) nous montre que la charge s'exprime en fonction des quatre discontinuités \hat{u}^- , \hat{v}^+ , \hat{v}^- et \hat{v}^+ . Ainsi, on obtient un système de 2N équations réelles dont les inconnues sont \hat{u}^- , \hat{u}^+ , \hat{v}^- et \hat{v}^+_p pour $p=1,\ldots,N$. Cependant, pour que le système soit résolvable, il suffit d'avoir 2N équations supplémentaires. Pour cela, on serait amené à imposer deux charges, sur chaque segment $|x_n^-|_n, x_n^+|_n[$, appliqués aux points $|x_n^-|_n$ et $|x_n^+|_n$ situés symétriquement par rapport à l'origine. Ces points nodaux seront définis par la paramétrisation suivante :

$$x_{n}^{-} = -\lambda 1_{n}$$

$$x_{n}^{+} = \lambda 1_{n}$$

$$0 < \lambda < 1$$

Le système d'équations algébriques précédent se traduit sous la forme matricielle suivante :

(2.21)
$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ ----- \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{v}^- \\ \hat{v}^+ \\ a^- \\ \hat{u}^+ \end{bmatrix}$$

2.3.2. CONDITIONS LIMITES EN DÉPLACEMENT

L'expression du déplacement sur la lèvre supérieure de la fissure s'écrira d'après (1.6) et (2.7) :

(2.22)
$$2\mu(u_{x} + iu_{y})^{G}(x) = k \Phi^{G}(x) - \Phi^{D}(x)$$

Donc de façon analogue, en utilisant la détermination logarithmique des fonctions multiformes Φ^G et Φ^D , le déplacement sur la lèvre supérieure du ng segment, dû à la ng discontinuité \hat{D}_n au point x $\text{Z}[x_n-1_n,x_n+1_n[$ s'écrira :

$$(2.23) \left(u_{x} + i u_{y}\right)_{n}^{n}(x) = \frac{k-1}{2i\pi(k+1)} \cdot \left[2a_{n} l_{n} + (a_{n} x + b_{n}) \log \frac{l_{n} - x}{l_{n} + x}\right] + \frac{a_{n} x + b_{n}}{2}$$

De même le déplacement sur la lèvre supérieure du $n^{\underline{e}}_{\underline{p}}$ segment, dû à la $p^{\underline{e}}_{\underline{p}}$ discontinuité $\hat{D}_{\underline{p}}$ au point $x \in]x_n - l_n, x_n + l_n[$ s'écrira :

$$(2.24) (u_x + iu_y)_n^p (x) = \frac{k-1}{2i\pi(k+1)} \left[2a_p l_p + (a_p (x-x_p) + b_p) Log \frac{(x-x_p) - l_p}{(x-x_p) + l_p} \right]$$

Ainsi le déplacement total sur la lèvre supérieure du n^{e} segment, dû aux N discontinuités au point $x \in]x_n - l_n, x_n + l_n[$ s'écrira par superposition des relations (2.23) et (2.24) :

$$(2.25) \quad (u_{x} + i u_{y})(x) = \frac{k - 1}{2i\pi(k+1)} \left[2a_{n} 1_{n} + (a_{n} x + b_{n}) \log \frac{1_{n} - x}{1_{n} + x} \right] + \frac{a_{n} x + b_{n}}{2} + \frac{k - 1}{2i\pi(k+1)} \sum_{\substack{p=1 \ p \neq n}} \left[2a_{p} 1_{p} + (a_{p}(x - x_{p}) + b_{p}) \log \frac{(x - x_{p}) - 1_{p}}{(x - x_{p}) + 1_{p}} \right]$$

Cependant, en utilisant les relations (2.19) et (2.20), on obtiendra un système de 4N équations réelles dont les inconnues seront encore \hat{u}^- , \hat{u}^+_p , \hat{v}^-_p et \hat{v}^+_p , qui se traduira sous la forme matricielle suivante :

$$(2.26) \begin{bmatrix} u_{y}^{-} \\ u_{y}^{+} \\ u_{x}^{-} \\ u_{x}^{+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1} & | & D_{2} \\ - & - & - \\ D_{3} & | & D_{4} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^{-} \\ \hat{v}^{+} \\ \hat{u}^{-} \\ \hat{u}^{+} \end{bmatrix}$$

2.3.3. EXEMPLE |1|

Soit un domaine élastique plan infini présentant une fissure portée par l'axe $0\bar{X}$, centrée à l'origine et de longueur 2L, soumise à une pression uniforme p=E (E module de Young). On découpe la fissure en N segments de même longueur 2l=2L/N

La figure (2.3) présente la courbe des discontinuités normales v comparée à la courbe réelle du déplacement normal. L'équation de cette courbe réelle est donnée par la relation suivante [14].

(2.27)
$$u_{y}(x) = 2(1 - v^{2}) \sqrt{L^{2} - x^{2}}$$

Les points nodaux donnant la meilleure approximation sont situés symétriquement par rapport au centre de chaque segment en prenant $\lambda=0,707$ dans la relation (2.20). On remarquera que ces points nodaux peuvent être obtenus en utilisant les polynômes d'approximation de Tchebycheff.

L'exemple traite les cas où le nombre de segments pris sur la fissure est N=5 (fig. 2.3a), N=10 (fig.2.3b). On remarque qu'on obtient une bonne approximation lorsque N augmente, cependant le problème majeur reste en tête de fissure où le déplacement vertical, nul, n'est pas assuré.

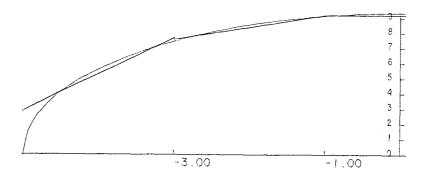


Figure 2.3.a : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

v = 0,25coefficient de Poisson

N = 5nombre de segments

L = 5 demi-longueur de la fissure

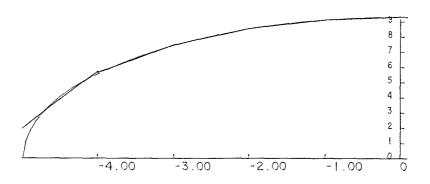


Figure 2.3.b : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

v = 0,25 N = 10coefficient de Poisson

nombre de segments

L = 5 demi-longueur de la fissure



2.4. ELEMENTS DEGENERES

2.4.1. ELEMENT LINEAIRE EN TÊTE DE FISSURE

D'après l'exemple étudié ci-dessus, on remarque que l'approximation est moins bonne en tête de fissure. Cela est dû au fait que la discontinuité \hat{D} est non nulle aux extrêmités de la fissure. Cependant, pour éviter ces défauts de convergence, on se propose d'étudier une solution élémentaire qui consiste à utiliser un élément linéaire de la forme $\hat{D}(x) = ax + b$ qui vérifie l'une des deux conditions suivantes :

$$\hat{D}(-1) = -a1 + b = 0$$

$$\hat{D}(1) = a1 + b = 0$$

En utilisant ce type de solution, la taille de la matrice d'influence se réduit à (4N-4, 4N-4) où N désigne le nombre de segments choisis sur le segment [-1, 1]. Cependant, en reprenant l'exemple de la fissure, on remarquera qu'on obtient une bonne approximation lorsqu'on choisit une discrétisation fine en tête de fissure (figure 2.4a)

Mais ce type de discrétisation fine en tête de fissure nous amène finalement à augmenter la taille de la matrice.

La figure (2.4) présente les discontinuités de déplacement normales avec un élément linéaire en tête de fissure. La taille l_1 du segment en tête étant respectivement le dixième (figure 2.4.a) et égale (figure 2.4.b) de celle des autres segments.

Remarquons que les résultats seront encore meilleurs si on choisit, en tête, une discrétisation progressive en taille.

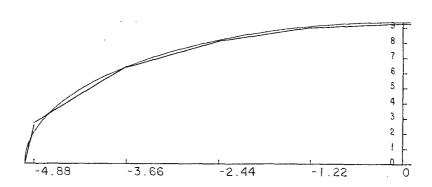


Figure 2.4.a:

Courbe de la discontinuité de déplacement avec élément linéaire, comparée à la courbe réelle

v = 0.25 Coefficient de Poisson N = 10 Nombre de segments L = 5 demi-longueur de la fissure $l_1 = L/41$ demi-longueur de l'élément en tête

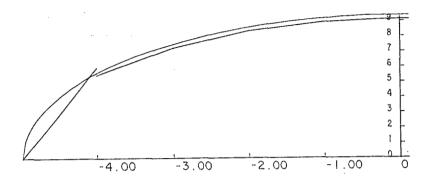


Figure 2. 4.b :

Courbe de la discontinuité de déplacement avec l'élément linéaire, comparée à la courbe réelle

v = 0,25	Coefficient de Poisson
N = 10	Nombre de segments
L = 5	demi-longueur de la fissure
$l_1 = L/5$	demi-longueur de l'élément en tête

2,4,2, ÉLÉMENT PARABOLIQUE EN TÊTE DE FISSURE

Le choix d'un élément linéaire en tête de fissure nous montre que cet élément ne suit pas tout à fait l'allure de la courbe réelle elliptique en tête de fissure. Toutefois, on peut se proposer d'étudier une autre solution élémentaire qui consiste à utiliser un élément parabolique en tête de fissure dont le sommet est, soit en (-1,0), soit en (1,0) d'équation respective :

$$\widehat{D}(x) = \gamma \sqrt{x+1}$$

$$\widehat{D}(x) = \gamma' \sqrt{1-x}$$

 γ et γ' désignant les paramètres de linéarisation qui seront déterminés par les conditions aux limites.

Les fonctions potentielles Φ qui déterminent cette solution s'écrivent :

(2.30)
$$\Phi(z) = \frac{\mu \gamma}{i\pi (k+1)} \left[2\sqrt{21} + \sqrt{z+1} \log \frac{\sqrt{z+1} - \sqrt{21}}{\sqrt{z+1} + \sqrt{21}} \right]$$

(2.31)
$$\phi(z) = \frac{\mu \gamma'}{i\pi (k+1)} \left[-2\sqrt{21} - \sqrt{1-z} \log \frac{\sqrt{1-z} - \sqrt{21}}{\sqrt{1-z} + \sqrt{21}} \right]$$

La figure (2.5) représente les discontinuités de déplacement normales avec l'élément parabolique en tête de fissure. La taille l_1 du segment en tête étant respectivement le dixième (figure 2.5.a) et égale (fig.2.5.b) de celle des autres segments.

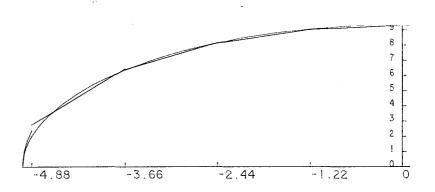


Figure 2.5.a :

Courbe de la discontinuité de déplacement avec élément parabolique, comparée à la courbe rélle

v = 0,25	Coefficient de Poisson
N = 10	Nombre de segments
L = 5	demi-longueur de la fissure
$l_1 = L/41$	demi-longueur de l'élément en tête.

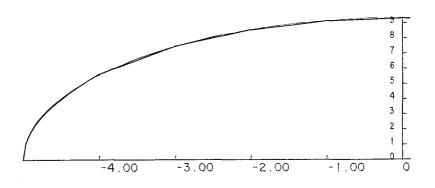


Figure 2.5.b :

Courbe de la discontinuité de déplacement avec élément parabolique, comparée à la courbe réelle

ν	= 0,25	Coefficient de Poisson
N	= 10	Nombre de segments
\mathcal{L}	= 5	demi-longueur de la fissure
7.	- T./5	domi-longueur de l'élément en tête.

En utilisant ce type de solution, la taille de la matrice d'influence se réduit à (4N-4, 4N-4). En plus, on peut obtenir une bonne approximation en prenant cette fois ci une discrétisation large en tête de fissure (figure 2.5.b).



2.5. ELEMENTS D'ORDRE SUPERIEUR

On remarque que d'après l'équation de Plemelj (2.6), les fonctions potentielles Φ et Ω dépendent de la nature de la discontinuité de déplacement \hat{D} . Les relations (2.7) ont été obtenues en prenant $\hat{D}(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 1. L'intérêt de la présentation de la solution fondamentale sous la forme d'une intégrale de Cauchy est de pouvoir aisément déterminer cette solution pour une discontinuité de déplacement \hat{D} ayant forme polynômiale de degré quelconque. A titre d'exemple, prenons un polynôme d'ordre 5, à coefficients complexes :

(2.32)
$$\hat{D}(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

a, b, c, d, e et f désigneront les paramètres de linéarisation.

Donc d'après les relations (2.5), (2.6) et (2.32), on déduit les expressions des potentiels Φ et Ω :

$$\Phi(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \left[(a z^5 + b z^4 + c z^3 + d z^2 + e z + f) \log \frac{z-1}{z+1} \right]$$

$$(2.33) + 2 a z^4 + 2b z^3 + (\frac{2az^3}{3} + 2cz) z^2 + (\frac{2bz^3}{3} + 2zz) z^2 + (\frac{2bz^$$

еt

$$\Omega(z) = -\Phi(z)$$

La suite des calculs reste identique à ceux menés au paragraphe 2.3

CHAPITRE III

DISCONTINUITE DE DEPLACEMENT ELEMENT D'ORDRE 2. LOGICIEL DE CALCUL EXEMPLES

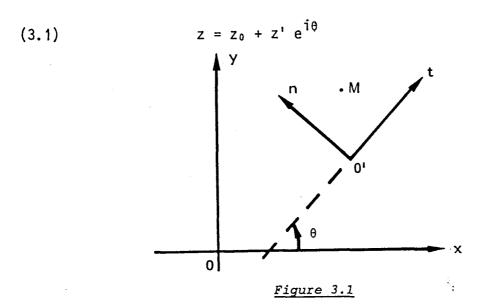
3.1. INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude de la méthode numérique des discontinuités de déplacement, on étudiera l'influence d'un segment, associé à sa propre discontinuité, sur un autre segment. Dans le cas de l'exemple étudié (chapitre II) pour la fissure, les segments discrétisés avaient la même orientation. Maintenant, nous allons examiner le problème général de l'influence de segments orientés arbitrairement par rapport à un repère global. Ceci nous permettra de déterminer l'état des contraintes et déplacements en tout point du domaine, y compris le contour. Enfin, on fera une mise au point du logiciel permettant la résolution de tout problème élastique plan. On traitera quatreexemples dans le cas d'une plaque rectangulaire soumise à une traction , d'une plaque infinie percée d'un trou circulaire soumise à une pression constante, d'un cylindre creux soumis à une pression interne et enfin une plaque infinie percée d'un trou circulaire soumis à une pression sur deux cadrans opposés.

3.2. CHANGEMENT DE REPERE - EXPRESSIONS DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS

3.2.1. CHANGEMENT DE REPERE

Connaissant les contraintes et déplacements dans le repère (0, x, y), on pourra les calculer dans un autre repère (0', t, n) d'angle $\theta = (\bar{x}, \bar{t})$ à l'aide de la transformation affine suivante (figure 3.1) :



0' étant d'affixe z_0 par rapport au repère (0, x, y), le point M d'affixes z et z' respectivement par rapport aux repères (0, x, y) et (0', t, n).

Les relations de KOLOSOV-MUSHKELISHVILI exprimées dans le repère $(0',\,t,\,n)$ s'écriront alors :

(3.2)
$$\sigma_{nn} - \sigma_{tt} - 2i\sigma_{nt} = e^{2i\theta} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy})$$

$$u_t + iu_n = e^{-i\theta} (u_x + iu_y)$$

Ainsi connaissant les fonctions potentielles, solutions élémentaires, dans le repère (0, x, y) les contraintes et déplacements peuvent être exprimés dans le repère (0, t, n) à l'aide des relations (1.1), (1.4) et (3.2):

$$\sigma_{nn} = \operatorname{Re} \left\{ \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - e^{2i\theta} \left[\Phi'(z) + (z - \overline{z}) \Phi''(z) + \overline{\Omega}'(z) \right] \right\}$$

$$\sigma_{nt} = -\operatorname{Im} \left\{ e^{2i\theta} \left[\Phi'(z) + (z - \overline{z}) \Phi''(z) + \overline{\Omega}'(z) \right] \right\}$$

$$(3.3) \quad \sigma_{tt} = \operatorname{Re} \left\{ \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + e^{2i\theta} \left[\Phi'(z) + (z - \overline{z}) \Phi''(z) + \overline{\Omega}'(z) \right] \right\}$$

$$2\mu \quad u_{t} = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \Phi(z) - (z - \overline{z}) \overline{\Phi'(z)} + \Omega(\overline{z}) \right] \right\}$$

$$2\mu \quad u_{n} = \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\theta} \left[k \Phi(z) - (z - \overline{z}) \overline{\Phi'(z)} + \Omega(\overline{z}) \right] \right\}$$

Remarquons que l'expression de σ_{tt} s'obtient en remplaçant e par -e dans l'expression de σ_{nn} et que $\Omega(z)$ = - $\Phi(z)$

3,2,2. SEGMENTS ORIENTES ARBITRAIREMENT

Soit un domaine plan élastique infini rapporté au système de coordonnées x 0 y (figure 3.2), contenant N segments orientés arbitrairement de longueur 21_k , $k=1,2,\ldots,N$

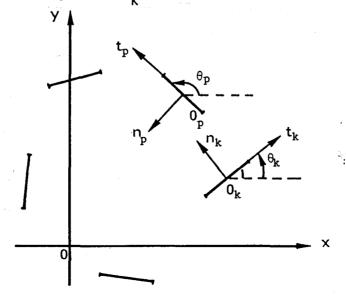


Figure 3.2

(3.4)
$$\theta_{k} = (0_{k} \vec{t}_{k}, o \vec{x})$$

Soit un point quelconque M d'affixes respectives z_k et z_p par rapport aux repères locaux t_k 0_k n_k et t_p 0_p n_p . D'après la relation (3.1), on peut écrire :

$$(3.5) z_k = (z_p^\circ - z_k^\circ) e^{-i\theta_k} + z_p e^{i(\theta_p - \theta_k)}$$

Cependant, les contraintes et déplacements au point M situé sur le pe segment dûs à l'influence de la ke discontinuité \hat{D}_k relativement au repère local $t_k \ ^0k \ ^nk$ s'écrivent en utilisant les relations (3.3) au point z_k défini par (3.5). Les potentiels Φ et Ω sont décrits dans le repère $t_k \ ^0k \ ^nk$ et exprimés en fonction de la discontinuité de déplacement \hat{D}_k .

3.3. METHODE NUMERIQUE - MATRICE D'INFLUENCE

La méthode numérique décrite dans le chapitre précédent 2.3 peut être étendue à des domaines plans ayant des contours quelconques (figure 3.3). Ces contours seront discrétisés en une suite de segments rectilignes considérés comme des discontinuités dans un plan infini, et ce, en utilisant les relations (3.3) et (3.5)

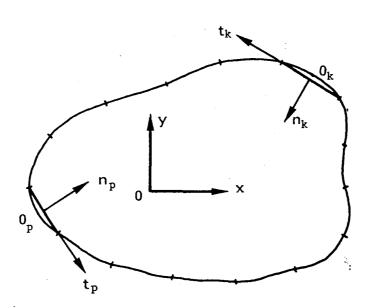


Figure 3.3

Le problème peut être résolu selon les conditions imposées sur la frontière, soit en contrainte, soit en déplacement, soit mixtes en contrainte et déplacement.

3.3.1. CONDITIONS AUX LIMITES EN CONTRAINTE - MATRICE D'INFLUENCE

Supposons que le contour soit discrétisé en N segments.L'expression des contraintes σ_{nn} et σ_{t} en tout point du pe segment dûes à la ke discontinuité \hat{D}_{k} s'écrit d'après (3.3) et (3,5)

$$(\sigma_{nn})_{p}^{k} = \text{Re } \{ \Phi_{k}^{i}(z_{k}) + \overline{\Phi_{k}^{i}(z_{k})} - e^{2i\theta_{p}^{k}} [\Phi_{k}^{i}(z_{k}) + (z_{k} - \overline{z}_{k}) \Phi_{k}^{"}(z_{k}) + \overline{\Omega}_{k}^{i}(z_{k})] \}$$

$$(3.6)$$

$$(\sigma_{nt})_{p}^{k} = -\text{Im}\{e^{2i\theta_{p}^{k}} [\Phi_{k}^{i}(z_{k}) + (z_{k} - \overline{z}_{k}) \Phi_{k}^{"}(z_{k}) + \overline{\Omega}_{k}^{i}(z_{k})] \}$$

avec $\theta_p^k = \theta_p - \theta_k$, Φ_k et Ω_k désignent les potentiels écrits dans le k = 1 segment. D'après (2.7) et (2.19), les relations (3.6) s'écrivent :

$$(\sigma_{nn})_{p}^{k} = 2H((Re A) \hat{v}_{k}^{-} + (Re B) \hat{v}_{k}^{+} + (Im C) \hat{u}_{k}^{-} + (Im D) \hat{u}_{k}^{+})$$

$$(3.7)$$

$$(\sigma_{nt})_{p}^{k} = 2H((Im E) \hat{v}_{k}^{-} + (Im F) \hat{v}_{k}^{+} + (Re G) \hat{u}_{k}^{-} + (Re I) \hat{u}_{k}^{+})$$

avec
$$2H = \frac{\mu}{\pi(k+1)}$$

$$A = -\frac{1}{1_k} Log \left| \frac{z_k - 1_k}{z_k + 1_k} \right| - \frac{2}{z_k + 1_k} + \frac{21_k (z_k - \overline{z_k}) e^{2i\theta_p^k}}{(z_k - 1_k) (z_k + 1_k)^2}$$

$$C = (1 - e^{2i\theta_p^k}) \left(-\frac{1}{1_k} Log \frac{z_k - 1_k}{z_k + 1_k} - \frac{2}{z_k + 1_k} \right) + \frac{21_k (z_k - \overline{z_k}) e^{2i\theta_p^k}}{(z_k - 1_k) (z_k + 1_k)^2}$$

$$(3.8)$$

$$E = \frac{21_k (z_k - \overline{z_k}) e^{2i\theta_p^k}}{(z_k - 1_k) (z_k + 1_k)^2}$$

$$G = -e^{2i\theta_p^k} \left(\frac{1}{1_k} Log \frac{z_k - 1_k}{z_k + 1_k} + \frac{2}{z_k + 1_k} + \frac{21_k (z_k - \overline{z_k})}{(z_k - 1_k) (z_k + 1_k)^2} \right)$$

Les expressions B, D, F et I s'obtiennent en remplaçant $_{\rm k}^{\rm par}$ respectivement dans les opposés des expressions de A, C, E et G.

Les inconnues \hat{u}_k^- , \hat{u}_k^+ , \hat{v}_k^- et \hat{v}_k^+ représentent les discontinuités de déplacement tangentielles et normales du k^e segment (2.18).

Ainsi les contraintes totales (σ_{nn}) et (σ_{nt}) en tout point du p^e segment dûes aux N discontinuités s'exprimeront par superposition des relations (3.7) et (3.8):

$$(\sigma_{nn}) = \sum_{k=1}^{N} (\sigma_{nn})_{p}^{k}$$

$$(\sigma_{nt})_p = \sum_{k=1}^{N} (\sigma_{nt})_p^k$$

Donc, comme au paragraphe 2.3.1., on obtient un système de 2N équations réelles dont les inconnues sont \hat{u}_p^- , \hat{u}_p^+ , \hat{v}_p^- et \hat{v}_p^+ pour $p=1,\ldots,N$. Cependant, pour que le système soit résolvable, il suffit de prendre 2N équations supplémentaires, en imposant deux charges sur chaque segment appliquées aux deux points nodaux définis par rapport au k^e segment :

$$z_{k}^{-} = (z_{p}^{\circ} - z_{k}^{\circ}) e^{-i\theta k} - \lambda l_{p} e^{i(\theta p - \theta k)}$$

$$z_{k}^{+} = (z_{p}^{\circ} - z_{k}^{\circ}) e^{-i\theta k} + \lambda l_{p} e^{i(\theta p - \theta k)}$$

$$0 < \lambda < 1$$

On remarque que dans le cas de l'influence du p^e segment sur lui-même (k=p), on obtient les relations (2.20).

Enfin, le système d'équations algébriques se traduit sous la forme matricielle suivante :

$$(3.11)\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nn} \\ -\sigma_{nt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & | & c_2 \\ --- & -- \\ c_3 & | & c_4 \\ | & | & u^+ \end{bmatrix}$$

De façon analogue, en imposant les conditions aux limites en déplacement, il suffit d'utiliser les relations déplacements (3.3) et (2.23) aux points nodaux définis par (3.10) :

et:

$$A = e^{-i\theta} p \left[-2(k-1) - k \frac{z_k - l_k}{l_k} \log \frac{z_k - l_k}{z_k + l_k} + \frac{z_k - l_k}{l_k} \log \frac{\overline{z}_k - l_k}{\overline{z}_k + l_k} \right]$$
(3.13)
$$+ \frac{2(z_k - \overline{z}_k)}{\overline{z}_k + l_k}$$

$$C = e^{-i\theta p} \left[-2(k-1) - k \frac{z_k - l_k}{l_k} \log \frac{z_k - l_k}{z_k + l_k} + \frac{2\overline{z}_k - z_k - l_k}{l_k} \log \frac{\overline{z}_k - l_k}{\overline{z}_k + l_k} - \frac{2(z_k - \overline{z}_k)}{\overline{z}_k + l_k} \right]$$

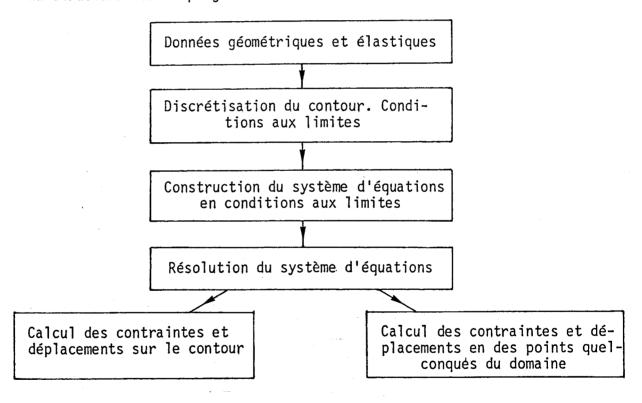
Les expressions B et D s'obtiennent en remplaçant 1_k par -1_k respectivement dans les opposés des expressions de A et C.

Le système d'équations algébriques (3.12) se traduit sous la forme matricielle suivante :

$$(3.14) \begin{bmatrix} u_{n} \\ u_{n}^{+} \\ u_{t}^{-} \\ u_{t}^{+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1} & D_{2} \\ --- & -- \\ D_{3} & D_{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{v}^{+} \\ \hat{u}^{-} \\ \hat{u}^{+} \end{bmatrix}$$

3.3.2. MISE AU POINT D'UN LOGICIEL

La résolution des systèmes d'équations algébriques (3.11) et (3.14) nous permettent ensuite de déterminer les contraintes et déplacements en tout point du domaine en utilisant les relations (3.9) et (3.12). La structuration du programme est la suivante :



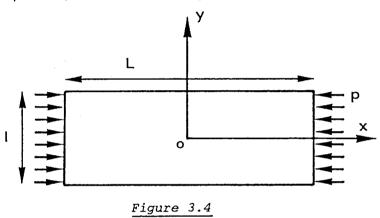


3.4. EXEMPLES

On étudiera dans ce paragraphe une comparaison entre les méthodes des discontinuités de déplacement affine (d'ordre 2) et constante (d'ordre 1). On choisira quatre exemples : plaque rectangulaire soumise à une compression, plaque infinie percée d'un trou circulaire sous pression, cylindre creux soumis à une pression interne, et enfin une plaque infinie percée d'un trou circulaire sousmise à une pression sur deux cadrans opposés. On portera l'étude en des points proches du contour du domaine où interviennent généralement les effets de bord.

3.4.1. PLAQUE RECTANGULAIRE SOUMISE A UNE COMPRESSION

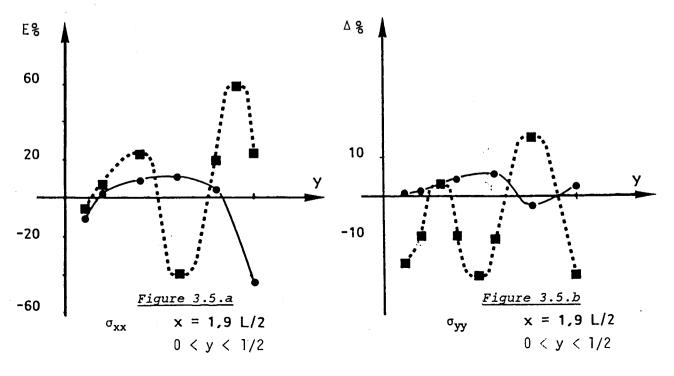
Soit un domaine élastique plan infini présentant une plaque rectangulaire, centrée à l'origine, soumise à une compression uniforme p = E (E module de Young) suivant les deux largeurs (figure 3.4)



On discrétise le contour de la plaque en N segments de longueur identique. On choisira comme rapport de dimension L/l = 2 et pour coefficient de Poisson v = 0.25 et N = 12.

On étudiera dans cet exemple, l'état des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} calculées par les méthodes de discontinuités de déplacement d'ordre 1 et 2 sur des droites, parallèles aux

axes de la plaque, proches du contour. Pour une même taille de matrice d'influence (48, 48) les figures (3.5), (3.6) et (3.7) présentent les courbes d'erreurs des valeurs des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} données par les méthodes des discontinuités de déplacement d'ordre 1 et 2 par rapport aux valeurs théoriques respectivement sur les droites x = 1,9 L/2, y = 0,9 l/2 et y = 0. Sachant que $\sigma_{xy} = 0$ sur les trois droites, les figures (3.5.c) et (3.6.c) présentent des courbes en erreur absolue.



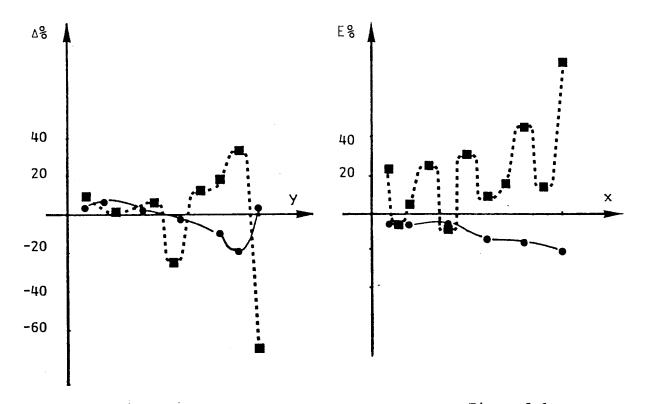


Figure 3.5.c $\sigma_{xy} \qquad x = 1.9 \text{ L/2}$

 $0 \times y = 1,3 \times 1/2$ 0 < y < 1/2

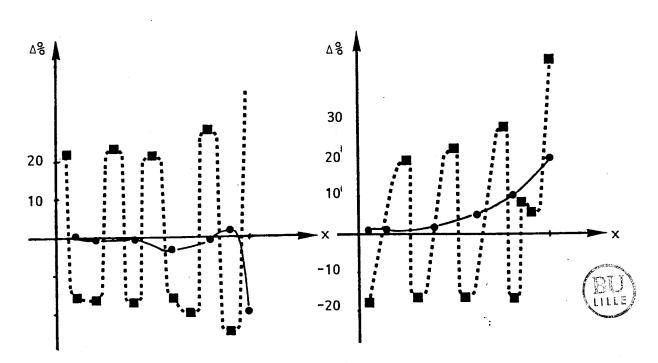
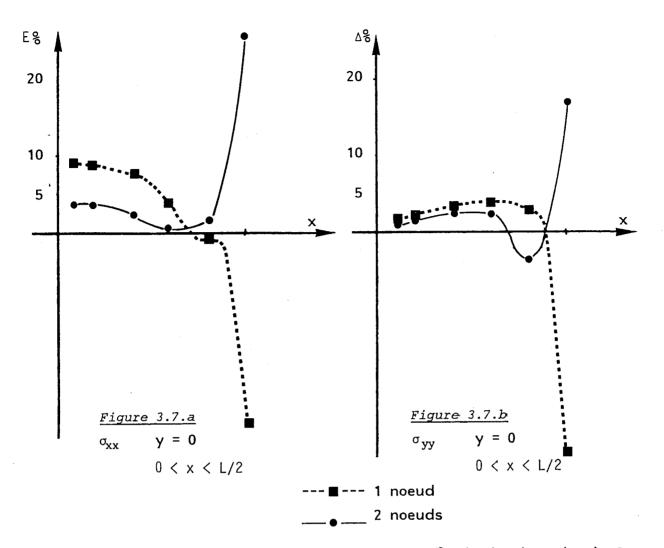


Figure 3.6.b

 σ_{yy} y = 0.9 1/2 0 < x < L/2

 $\sigma_{xy} \qquad \qquad y = 0.9 \text{ I/2}$ -\Box --- 1 noeud \quad 0 \leq x \leq L/2



On remarque que, d'après les figures (3.5), (3.6) et (3.7), la méthode des discontinuités de déplacement d'ordre 2 est plus convergente et donne, d'une façon globale, de meilleurs résultats hors des coins de la plaque.

3.4.2. PLAQUE INFINIE PERCEE D'UN TROU CIRCULAIRE SOUS PRESSION

Soit un trou circulaire, de rayon a, soumis à une pression uniforme p=E dans un milieu élastique infini (figure 3.8).

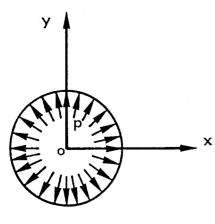
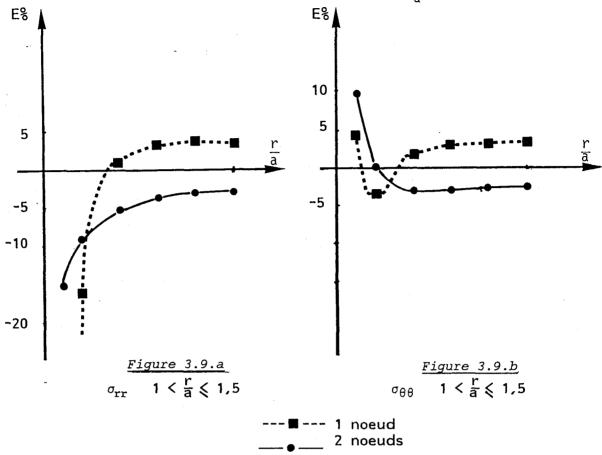


Figure 3.8

On discrétise le contour circulaire en N segments de longueur identique. On choisira v=0.25 et N = 16. Là encore, on va étudier l'état des contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ calculées par les méthodes des discontinuités de déplacement d'ordre 1 et 2 sur des droites radiales. On se limitera seulement sur des rayons voisins du contour, puisqu'en des points éloignés du contour les résultats sont meilleurs. Et par raison de symétrie, il suffirait de choisir un seul rayon de direction $\theta=0$ par exemple. Ainsi pour une même taille de matrice d'influence (64, 64), les figures (3.9.a) et (3.9.b) présentent les

courbes d'erreurs relatives des valeurs des contraintes $\sigma_{\rm rr}$ et $\sigma_{\theta\theta}$ données par les méthodes des discontinuités de déplacement d'ordre 2 et 1 par rapport aux valeurs théoriques pour 1 $<\frac{r}{a}\leqslant 1,5$.



On remarque ici encore que la méthode des discontinuités de déplacement d'ordre 2 donne de meilleurs résultats en des points proches du contour circulaire. En effet, d'après la figure (3.9a), pour r/a = 1,05 la variation relative de $\sigma_{\rm rr}$ atteint - 15 %, alors qu'on obtient - 56 % dans le cas de la méthode d'ordre 1.

3.4.3 CYLINDRE CREUX SOUMIS A UNE PRESSION INTERNE

Soit un milieu élastique cylindrique $C(r_1, r_2)$ $r_1 < r_2$, centré à l'origine, subissant une pression uniforme interne p = E (figure 3.10).

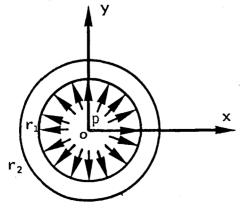
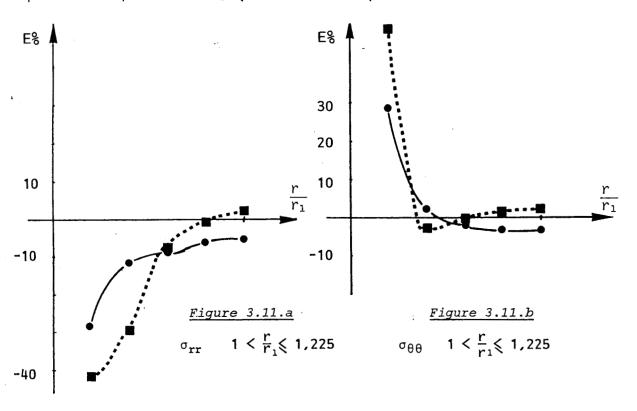
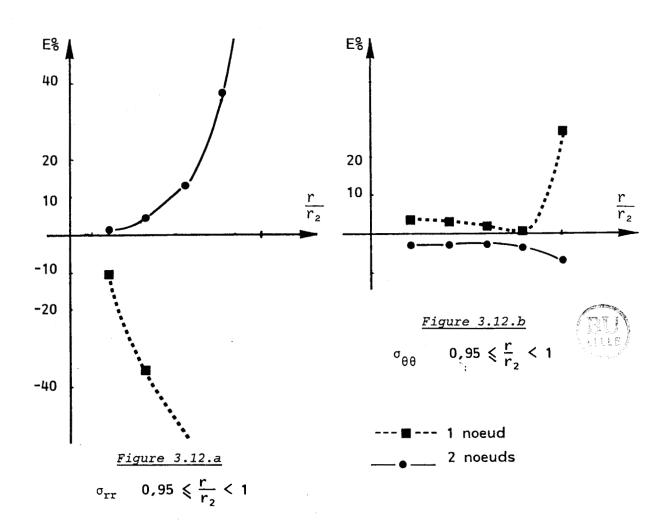


Figure 3.10

On discrétise le contour en N segments de longueur identique vérifiant la condition N_1 r_2 = N_2 r_1 . N_1 et N_2 désignant respectivement les nombres d'éléments linéaires choisis sur le petit contour et le grand contour. On prendra v=0,25 et N=96. De la même façon que l'exemple 3.4.2 il serait intéressant d'étudier l'état des contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ en des points proches du contour. Par raison de symétrie, on choisira un seul rayon de direction quelconque. Pour une même taille de matrice (384, 384) les figures (3.11)

et (3.12) présentent les courbes d'erreurs relatives des valeurs des contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ données par les méthodes des discontinuités de déplacement d'ordre 1 et 2 par rapport aux valeurs théoriques respectivement pour 1 < r/r_1 \leqslant 1,225 et 0,95 \leqslant r/r_2 < 1.





On remarque encore que la méthode des discontinuités de déplacement d'ordre 2 donne de bons résultats au voisinage du contour. Les valeurs de $\sigma_{\rm rr}$ sont relativement meilleures du côté du contour chargé, par contre les valeurs de $\sigma_{\rm AA}$ le sont du côté du contour non chargé.

3.4.4. PLAQUE INFINIE PERCEE D'UN TROU SOUMIS A UNE PRESSION SUR DEUX CADRANS OPPOSES.

Soit un milieu élastique infini présentant un trou circulaire, de rayon a et centré à l'origine, soumis à une pression sur deux cadrans opposés (figure 3.13).

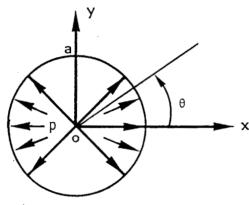


Figure 3.13

On discrétise le contour en N segments de longueur identique. On choisira $\nu=0.25$ et N = 32. On étudiera l'état des contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ sur quatre rayons voisins du contour de directions respectives $\theta=0$, $\theta=\frac{3\pi}{16}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour une même taille de matrice (128,128) les figures (3.14), (3.15), (3.16) et (3.17) présentent les courbes des erreurs relatives des contraintes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ calculées par les méthodes des discontinuités de déplacement d'ordre 1 et 2 par rapport aux valeurs théoriques pour

 $1 < \frac{r}{a} < 2. \ \sigma_{r\theta} = 0 \ \text{pour} \ \theta = 0 \ \text{et} \ \theta = \frac{\pi}{2}$

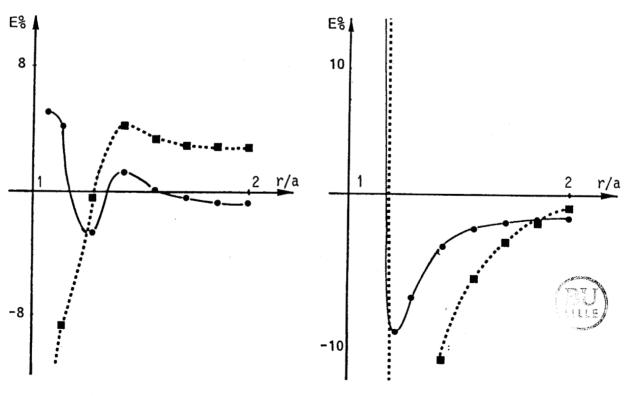


Figure 3.14.a

 σ_{rr} $\theta = 0$ 1 Noeud 2 Noeuds

Figure 3.14.b $\sigma_{\theta\theta} \quad \theta = 0$

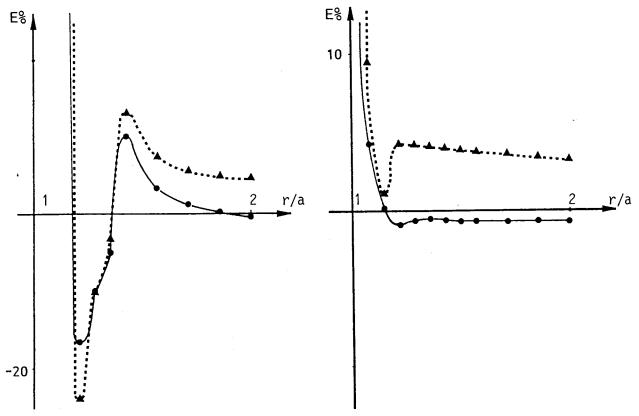


Figure 3.15.a

$$\sigma_{rr}$$
 $\theta = \frac{\pi}{2}$

... **A** ... 1 noeud 2 noeuds

Figure 3.15.b $\sigma_{\theta\theta} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

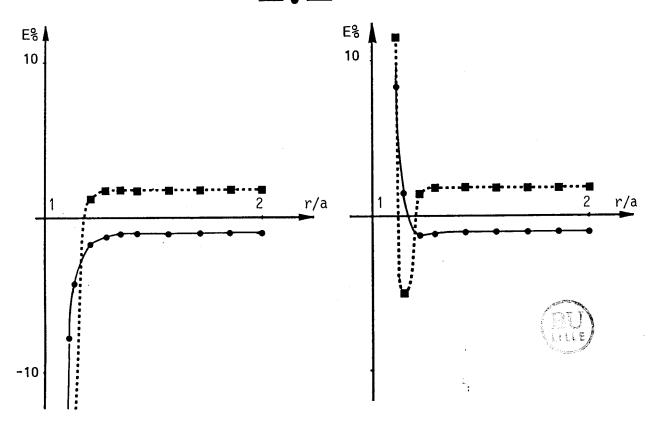


Figure 3.16.a

$$\sigma_{rr}$$
 $\theta = \frac{\pi}{4}$

Figure 3.16.b $\sigma_{\theta\theta} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

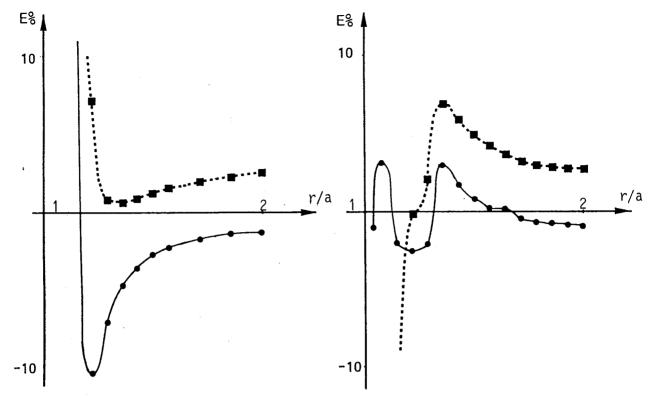
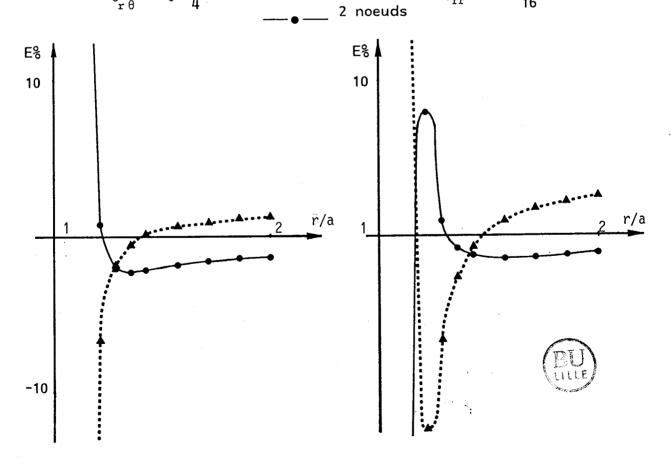


Figure 3.16.c

$$\sigma_{r \theta} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

..∎... 1 noeud

Figure 3.17.a $\sigma_{rr} \qquad \theta = \frac{3\pi}{16}$



$$\frac{Figure \ 3.17.b}{\sigma_{\theta\theta}} \quad \theta = \frac{3\pi}{16}$$

...▲... 1 noeud

____ 2 noeuds

Figure 3.17.c
$$\sigma_{r\theta} \quad \theta = \frac{3\pi}{16}$$

On remarque encore une fois que l'on obtient de meilleurs résultats avec l'élément d'ordre 2.

Les quatre rayons de direction $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ et $\theta=\frac{3\pi}{16}$ passent par les extrêmités des éléments linéaires. L'exemple présent montre que l'on obtient une bonne approximation à la fois pour σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en des points proches du contour où s'effectue la discontinuité des charges (fig. 3.16 a et 3.16 b). Les valeurs de σ_{rr} sont relativement meilleures du côté du contour chargé ; par contre, celles de $\sigma_{\theta\theta}$ le sont du côté du contour non chargé (fig. 3.14 a, 3.15 b et 3.17 a).

CHAPITRE IV

SOLUTIONS FONDAMENTALES
POUR UN ELEMENT RECTILIQUE
EN MILIEU INFINI.

4.1. INTRODUCTION

Dans le cadre de la théorie des intégrales de frontière, la méthode des discontinuités de déplacement permet de résoudre des problèmes de l'élasticité linéaire plane en champ complexe. Néanmoins d'autres méthodes de discontinuité peuvent être envisagées. En effet, ces différentes méthodes sont caractérisées par des discontinuités qui dépendent de la nature des conditions aux limites imposées sur la frontière. En fait, ces conditions aux limites présentées dans le chapitre I consistent à imposer soit un champ de déplacement, soit un champ de contraintes, soit à la fois un champ de déplacement et un champ des contraintes discontinus sur la frontière du domaine étudié. Cependant à partir de ces conditions, des solutions élémentaires seront développées et permettront de déterminer les contraintes et déplacements en tout point du domaine. On remarquera que les méthodes traitant des discontinuités de contrainte admettent des solutions élémentaires valables uniquement pour des milieux élastiques bornés.

Enfin, ces méthodes utilisent la même méthode numérique développée au chapitre II.

4.2. PROBLEME MIXTE AVEC DISCONTINUITE DE CONTRAINTE ET CONTINUITE DE DEPLACEMENT. SOLUTION ELEMENTAIRE.

On se propose de déterminer la solution du problème, Φ et Ω , pour un domaine infini contenant une fissure représentée par un segement $[-1,\ 1]$ où on imposera un champ de déplacement D continu et un champ de contraintes T discontinu. En effet, ces conditions aux limites seront exprimées par les équations de Plemelj (1.13) pour $x \in [-1,\ 1]$:

$$(\Phi' + \Omega')^{G}(x) - (\Phi' + \Omega')^{D}(x) = \hat{T}(x)$$

$$(k \Phi - \Omega)^{G}(x) - (k \Phi - \Omega)^{D}(x) = 0$$

où T(x) désigne la discontinuité de contrainte définie par ;

$$T^{G}(x) - T^{D}(x) |x| \leq 1$$
(4.2)
$$\hat{T}(x) = 0 |x| > 1$$

On posera :

$$\widehat{T}(x) = a x + b \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

a et b étant des coefficients complexes de l'expression $\hat{T}(x)$.

Comme les contraintes et les rotations sont nulles à l'infini et compte tenu des relations (1.1), on déduit que les fonctions potentielles Φ et Ω ainsi que leur dérivée sont nulles à l'infini.

Cependant, les deux équations (4.1) donnent :

$$\Phi'(z) + \Omega'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\hat{T}(t)}{t-z} dt$$

$$k \Phi(z) - \Omega(z) = 0$$

Les relations (4.3) et (4.4) nous permettent d'exprimer la solution du problème :

$$\phi(z) = \frac{1}{2i\pi (k+1)} \left[\left(\frac{a}{2} (z^2 - 1^2) + bz \right) \log \frac{z - 1}{z + 1} + a \right] z$$

$$-b \left[\log(z^2 - 1^2) + 2b \right]$$

$$\Omega(z) = k \phi(z)$$

En fait, cette méthode s'appelle la méthode des charges fictives. Elle a été développée par CROUCH | 7 | dans le cas T est constant.

On remarquera que les déplacements tangentiel et normal sont infinis à l'infini et continus aux points $x=\bar{+}1$, tandis que les contraintes sont infinies aux points $x=\bar{+}1$, et nulles à l'infini.

4.3. PROBLEME EN DEPLACEMENT AVEC DISCONTINUITE DE DEPLACEMENT. SOLUTION ELEMENTAIRE.

4.3.1. SOLUTION ÉLÉMENTAIRE

On se propose de déterminer cette fois-ci la solution Φ , pour un domaine infini contenant une fissure où on imposera un champ de déplacement D discontinu. Pour pouvoir résoudre le problème, on utilisera une hypothèse supplémentaire définie par la relation suivante :

$$(u_x + iu_y)^G(x) + (u_x + iu_y)^D(x) = 0 -1 \le x \le 1$$

Cette dernière condition exprime en fait que les déplacements à travers les deux lèvres de la fissure soient égaux et opposés.

Ainsi le problème posé s'exprime par les relations de Plemelj (1.4) pour $x \in [-1, 1]$

$$(k \Phi - \Omega)^{G}(x) - (k \Phi - \Omega)^{D}(x) = 2\mu \hat{D}(x)$$

$$(k \Phi + \Omega)^{G}(x) + (k \Phi + \Omega)^{D}(x) = 0$$

Comme les contraintes, les rotations et les déplacements sont nuls à l'infini et compte tenu des relations (1.1), les équations (4.7) donnent :

(4.8)
$$k \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{2\mu}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\hat{D}(t)}{t-z} dt$$
$$k \Phi(z) + \Omega(z) = 0$$

Cependant en posant $\hat{D}(x) = ax + b$ pour $x \in [-1, 1]$, on tire les expressions des potentiels Φ et Ω :

$$\Phi(z) = \frac{\mu}{2i\pi k} \left[2 \text{ al} + (az+b) \log \frac{z-1}{z+1} \right]$$

$$\Omega(z) = -k \Phi(z)$$

4.3.2. EXEMPLE

Soit un domaine élastique plan infini présentant une fissure portée par l'axe $0\bar{X}$, centrée à l'origine et de longueur 2L, soumise à une pression uniforme p=E (E module de YOUNG). On découpe la fissure en N segments de même longueur 2l = 2L/N.

La figure (4.1) présente la courbe des discontinuités de déplacement normales comparée à la courbe réelle, du déplacement normal, donnée par la relation (2.27). On choisira N=10 et pour coefficient de Poisson $\nu=0.25$.

On notera que pour cette méthode, la position du point nodal dépend de la valeur du coefficient de Poisson ν . Ainsi les figures (4.1.a),(4.1.b), (4.1.c), (4.1.d), et (4.1.e) présentent la courbe des discontinuités de déplacement normales respectivement pour λ , valeur de position du point nodal, égale à 0,30, 0,40, 0,45, 0,50 et 0,60.

On remarque que la position optimale du point nodal est donnée pour $\lambda = 0.45$ (figure 4.1. c).

Et enfin, la figure (4.2) présente la courbe de la position du point nodal en fonction du coefficient de Poisson v.

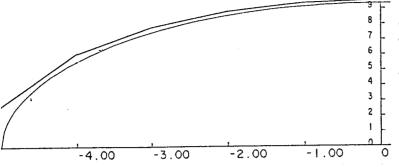


Figure 4.1.a : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

N = 10 nombre de segments v = 0,25 coefficient de Poisson L = 5 demi-longueur de la fissure

 $\lambda = 0.30$ valeur de position du point nodal

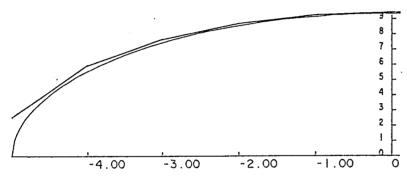


Figure 4.1.b : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

N=10 nombre de segments v=0.25 coefficient de Poisson L=5 demi-longueur de la fissure $\lambda=0.40$ valeur de position du point nodal

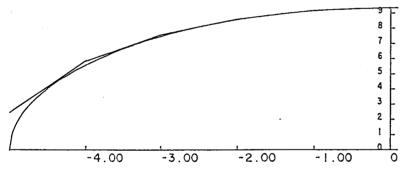


Figure 4.1.c : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

N = 10 nombre de segments v = 0.25 coefficient de Poisson L = 5 demi-longueur de la fissure $\lambda = 0.45$ valeur de position du point nodal



-4.00 -3.00 -2.00 -1.00 O

Figure 4.1.d : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

N = 10 nombre de segments v = 0.25 coefficient de Poisson L = 5 demi-longueur de la fissure $\lambda = 0.50$ valeur de position du point nodal

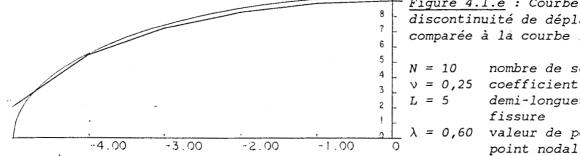


Figure 4.1.e : Courbe de la discontinuité de déplacement comparée à la courbe réelle

nombre de segments coefficient de Poisson demi-longueur de la fissure valeur de position du

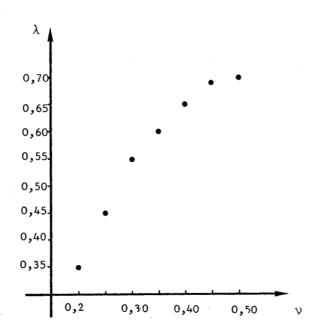


Figure 4.2: Courbe de la position du point nodal en fonction de v

4.4. PROBLEME EN CONTRAINTE ET DISCONTINUITE DES CONTRAINTES. SOLUTION

ELEMENTAIRE

Cette fois ci le problème sera traité uniquement en contrainte où on imposera un champ de contraintes T discontinu auquel on ajoutera une condition supplémentaire définie par :

(4.10)
$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^G(x) + (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^D(x) = 0 - 1 \le x \le 1$$

Ces deux conditions seront exprimées par les relations de Plemelj (1.15) pour $x \in [-1, 1]$

$$(\Phi' + \Omega')^{G}(x) - (\Phi' + \Omega')^{D}(x) = \hat{T}(x)$$

$$(\Phi' - \Omega')^{G}(x) + (\Phi' - \Omega')^{D}(x) = 0$$

Comme les contraintes, rotations sont nulles à l'infini et compte tenu des relations (1.1), les équations (4.11) s'écrivent :

(4.12)
$$\Phi'(z) + \Omega'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\hat{T}(t)}{t-z} dt$$

$$\Phi'(z) - \Omega'(z) = a_0 \pi(z)$$

avec $\pi(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1^2}}$ fonction de Plemelj et a_0 constante complexe.

Donc en posant T(x) = ax + b pour $x \in [-1, 1]$ et compte tenu de la propriété de l'uniformité du vecteur déplacement sur le segment [-1, 1], on obtient :

$$\Phi'(z) = \frac{b1(k-1)}{2i\pi(k+1)} \frac{1}{\sqrt{z^2-1^2}} + \frac{1}{4i\pi} \left[2a1 + (az+b) \log \frac{z-1}{z+1} \right]$$

$$(4.13) \text{ et}$$

$$\Omega'(z) = \frac{b1(k-1)}{2i\pi(k+1)} \frac{1}{\sqrt{z^2-1^2}} + \frac{1}{4i\pi} \left[2a1 + (az+b) \log \frac{z-1}{z+1} \right]$$

et par intégration, on peut tirer l'expression du potentiel $\Phi(z)$:

On remarquera que les déplacements tangentiel et normal sont infinis à l'infini et que les contraintes sont nulles à l'infini et infinies aux points $x = \mp 1$.

4.5. PROBLEME MIXTE AVEC DISCONTINUITE DE CONTRAINTE ET DEPLACEMENT.

SOLUTION ELEMENTAIRE

Le problème sera traité cette fois-ci en imposant un champ de contraintes discontinu et un champ de déplacement D discontinu. En effet ces conditions aux limites seront exprimées par les équations de Plemelj (1.16) pour $x \in [-1, 1]$:

$$(\Phi' + \Omega')^{G}(x) - (\Phi' + \Omega')^{D}(x) = \hat{T}(x)$$

$$(4.15)$$

$$(k \Phi - \Omega)^{G}(x) - (k \Phi - \Omega)^{D}(x) = 2\mu \hat{D}(x)$$

Comme les contraintes et les rotations sont nulles à l'infini, et compte tenu des relations (1.1), on en déduit que les potentiels Φ et Ω ainsi que leur dérivée sont nuls à l'infini.

Cependant les équations (4.15) permettent d'écrire :

(4.16)
$$\Phi'(z) + \Omega'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\hat{T}(t)}{t-z} dt$$

$$k \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{2\mu}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\hat{D}(t)}{t-z} dt$$

On posera:

 $\hat{T}(x) = ax + b$ et $\hat{D}(x) = \alpha x + \beta$ pour tout $x \in [-1, 1]$, avec a, b, α et β des constantes complexes.

Les équations (4.16) donnent :

(4.17)
$$\Phi'(z) + \Omega'(z) = \frac{1}{2i\pi} \left[2 \text{ al} + (\text{a} z + \text{b}) \text{ Log } \frac{z - 1}{z + 1} \right]$$

$$k \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{\mu}{i\pi} \left[2\alpha 1 + (\alpha z + \beta) \text{ Log } \frac{z - 1}{z + 1} \right]$$

Ainsi d'après les équations (4.17), les expressions des potentiels $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ s'écriront :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi(k+1)} \left[\left(\frac{a}{2} \left(z^2 - 1^2 \right) + bz \right) \log \frac{z-1}{z+1} + a 1z + 2b1 \right]$$

$$- b1 \log \left(z^2 - 1^2 \right) + 4\mu \alpha 1 + 2\mu \left(\alpha z + \beta \right) \log \frac{z-1}{z+1}$$

$$(4.18)$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2i\pi(k+1)} \left[k \left(\frac{a}{2} \left(z^2 - 1^2 \right) + bz \right) \log \frac{z-1}{z+1} + k a 1z \right]$$

$$- k b1 \log(z^2 - 1^2) + 2k b1 - 4\mu \alpha 1 - 2\mu \left(\alpha z + \beta \right) \log \frac{z-1}{z+1}$$

On remarque encore que les déplacements tangentiel et normal sont infinis à l'infini et que les contraintes sont nulles à l'infini et infinies aux points $x=\bar{\downarrow}$ l.

4.6. CONCLUSION

L'introduction de ces nouvelles méthodes de discontinuité, soit de déplacement, soit des contraintes, soit de déplacement et de contraintes, qui dépendent en fait des conditions limites imposées sur la frontière, permet de résoudre des problèmes de l'élasticité linéaire plane. En plus, ces méthodes s'utilisent facilement en champ complexe par application de la théorie des potentiels complexes et donnent des solutions analytiques

simples. Ces dernières ont été construites, comme la méthode des discontinuités de déplacement (chap. 2), à partir d'un segment [-1, 1] où on obtient des contraintes infinies aux extrêmités ∓ 1 . On remarque aussi, que les méthodes faisant intervenir une discontinuité des contraintes sur le segment [-1, 1] donnent des déplacements infinis à l'infini. La condition d'imposer une discontinuité de contraintes sur le segment se traduit physiquement par une interpénétration de la matière. Par conséquent, ce type de discontinuités nous impose d'utiliser des milieux élastiques bornés.

CHAPITRE V

DISCONTINUITE DE DEPLACEMENT

ELEMENTS CIRCULAIRES

1 et 2 NOEUDS. EXEMPLES.

ELEMENTS CURVILIGNES

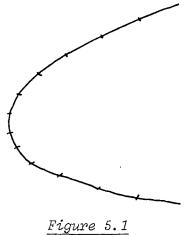
TRANSFORMATION CONFORME

SUR LE CERCLE

CAS DE L'ELLIPSE

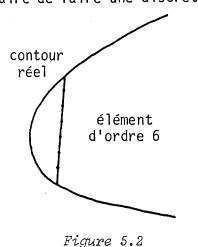
Dans les chapitres précédents, nous avons discrétisé le contour en segments de droites, de telle façon à faire apparaître la "fissure rectiligne" en milieu infini. Cette technique a permis d'utiliser des solutions analytiques simples. La pratique de la méthode impose cependant une discrétisation en élément de longueur constante ou variable mais progressivement.

Cette technique de résolution, classiquement utilisée, peut conduire à des tailles de matrice très importantes si l'on veut obtenir une erreur acceptable. Prenons deux exemples. Le premier concerne un



contour avec raccord entre deux droites (fig. 5.1), ou de façon plus générale, il s'agit de cas où la courbure varie très rapidement. La méthode classique impose non seulement une discrétisation fine aux endroits où la courbure est grande, mais également d'augmenter très progressivement la discrétisation dans les parties linéaires ou à courbure quasi-nulles. Ceci a pour conséquence une augmentation très forte de la taille de la matrice d'influence.

Le deuxième exemple est le cas d'un tunnel circulaire où l'on désire effectuer des calculs précis près de la paroi. Ici, il est nécessaire de faire une discrétisation large afin d'éviter l'influence



des extrêmités des segments rectilignes où la présence d'une discontinuité de déplacement conduit localement à des contraintes infinies. Pour augmenter la précision, on utilisera des éléments d'ordre élevé tels que ceux développés au paragraphe 2.5. Cependant, si l'on améliore la précision numérique de la méthode, il se glisse une deuxième erreur : les points d'expression des conditions aux limites s'éloignent très sensiblement du contour exact (fig. 5.2).

Dans l'optique d'améliorer ces deux points, nous allons développer des éléments curvilignes. Les résultats seront présentés dans un ordre croissant de difficulté :

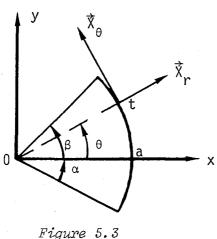
- a) contour circulaire Problème en contrainte
- b) contour circulaire Discontinuité de déplacement

- c) contour quelconque et application aux contours elliptiques (Discontinuité de déplacement)
- d) contour possédant des coins.

A partir des cas traités principalement dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement, il sera possible de développer les solutions pour chaque type de problème énoncé au chapitre 1.

5.1. CONTOUR CIRCULAIRE; PROBLEME EN CONTRAINTE

5.1.1. EQUATIONS DE PLEMELJ DU PROBLÈME



Nous allons rechercher les solutions élémentaires correspondant à une fissure en arc d'ouverture ($\alpha + \beta$) disposée selon la figure 5.3.

Les conditions aux limites écrites en coordonnées polaires seront :

(5.1)
$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^G + (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^D = 0$$

(5.2)
$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^G - (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^D = \hat{T}(t)$$

A partir des relations de Kolosov-Mukhelischvili | 12 |,

nous pouvons écrire sans difficulté :

(5.3)
$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi}'(\overline{z}) - \overline{z} \overline{\phi}''(\overline{z}) - \frac{\overline{z}}{\overline{z}} \overline{\psi}'(\overline{z})$$

Si nous prenons un point z (z \in "G"), que nous faisons tendre vers un point de la frontière t, le point \overline{z} ne tend pas vers le même point du côté "G" ou "D". Afin de remédier à cette situation, nous allons faire un prolongement analytique à travers la frontière circulaire définie par $z\overline{z}=a^2$. Dans l'expression (5.3), si nous supposons que les fonctions ϕ' et ψ' sont définies pour \overline{z} , nous allons remplacer la fonction $\phi'(z)$ par une fonction $\Omega(\frac{a^2}{\overline{z}})$, z par a^2/\overline{z} et $\sigma_{rr}^{+i\sigma}$ par zéro ; ceci donne :

(5.4)
$$\Omega'(a^2/\overline{z}) = -\overline{\phi'}(\overline{z}) + \overline{z}\overline{\phi''}(\overline{z}) + \frac{\overline{z}^2}{a^2}\overline{\psi'}(\overline{z})$$

ou encore :

(5.5)
$$\Omega'(z) = -\overline{\phi}'(\frac{a^2}{z}) + \frac{a^2}{z}\overline{\phi}''(\frac{a^2}{z}) + \frac{a^2}{z^2}\overline{\psi}'(\frac{a^2}{z})$$

Si la fonction Ω était connue, l'on pourrait calculer la fonction $\psi''(z)$ en utilisant (5.4)

(5.6)
$$\psi'(z) = \frac{a^2}{z^2} \overline{\Omega}'(\frac{a^2}{z}) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z} \phi''(z)$$

Nous pouvons maintenant remplacer cette valeur de la fonction $\psi'(z)$ dans (5.3), ce qui donne :

(5.7)
$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi}'(\overline{z}) \left[1 - \frac{a^2}{z\overline{z}}\right] + \overline{\phi}''(\overline{z}) \left[\frac{a^2}{z} - \overline{z}\right] - \frac{a^2}{z\overline{z}} \Omega'(\frac{a^2}{\overline{z}})$$

Passons maintenant à la limite $(z\overline{z} = a^2)$, sachant que $z \in "G"$ et par conséquent $a^2/\overline{z} \in "D"$.

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^G = \phi^{G} - \Omega^{D}$$

De la même façon :

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^D = \phi^{D} - \Omega^{G}$$

Exprimons maintenant les conditions aux limites du problème (5.1) et (5.2), pour obtenir les équations de Plemelj :

$$(\phi' - \Omega')^{G} + (\phi' - \Omega')^{D} = 0$$

$$(\phi' + \Omega')^{G} - (\phi' + \Omega')^{D} = \hat{T}(t)$$

5.1,2. COMPORTEMENT DES POTENTIELS COMPLEXES

Par définition les fonctions $\phi'(z)$ et $\psi'(z)$ sont holomorphes dans tout le plan ; Ainsi, lorsque z tend vers l'infini, les développements seront de la forme :

(5.9)
$$\phi'(z) = A_0 + \frac{B_0}{z} + O(\frac{1}{z^2})$$

(5.10)
$$\psi'(z) = A_1 + \frac{B_1}{z} + O(\frac{1}{z^2})$$

avec A_0 , A_1 représentant les contraintes à l'infini, qui seront suppo-

sées nulles, ici, et :

(5.11)
$$B_0 = \frac{(X + iY)}{2\pi(K + 1)} \qquad B_1 = \frac{K(X - iY)}{2\pi(K + 1)}$$

(X, Y) représente les composantes de "charge concentrée". Dans notre cas, celle-ci est différente de zéro car sur l'arc A_1A_2 , la résultante des actions est non nulle. Reportons les développements (5.9) et (5.10) dans (5.5):

(5.12)
$$\Omega'(z) = \overline{A_1} \frac{a^2}{z^2} + \frac{\overline{B_1}}{z} + \text{function holomorphe près de } z = 0$$

Cette relation montre que la fonction $\,\Omega'(z)\,$ possède au maximum un pôle d'ordre 2 à l'origine.

Autour de l'origine, la fonction $\phi'(z)$ est holomorphe donc :

$$\phi'(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + O(z^2)$$

Les contraintes étant bornées à l'infini, la fonction $\, \Omega'(z) \,$ au voisinage de l'infini est nécessairement de la forme :

$$\Omega^{1}(z) = \beta_{0} + \frac{\beta_{1}}{z} + 0(\frac{1}{z^{2}})$$

Reportons ces résultats dans (5.6), pour calculer $\psi'(z)$

$$\psi'(z) = \frac{a^2}{Z^2} (\alpha_0 + \overline{\beta_0}) + \frac{\overline{\beta_1}}{Z} + \dots$$

La fonction $\psi'(z)$ étant holomorphe à l'origine, il est nécessaire d'avoir :

$$\underline{\beta_0 = - \alpha_0} \qquad \underline{\beta_1 = 0}$$

ainsi au voisinage de l'infini, la fonction $\,\Omega^{\,\prime}(z)\,$ se comporte comme :

(5.14)
$$\Omega'(z) = -\overline{\alpha_0} + O(\frac{1}{z^2})$$

A partir de ces résultats, nous pouvons donner la solution générale des équations de Plemelj (5.8):

(5.15)
$$\phi'(z) + \Omega'(z) = \gamma_0 + \frac{\overline{B_1}}{z} + \frac{a^2 \overline{A_1}}{z^2} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{A_1}^{A_2} \frac{\hat{T}(t) dt}{t - z}$$

(5.16)
$$\phi'(z) - \Omega'(z) = \chi(z) \left[P_n(z) + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} \right]$$

avec :
$$P_n(z) = C_0 + C_1 z (1 \text{ arc})$$

 $\chi(z) = 1/\sqrt{(z - a_1)(z - a_2)}$

5.1.3. CALCUL DES COEFFICIENTS

Les contraintes sont nulles à l'infini, par conséquent $A_1=0=A_0.$ Nous pouvons déduire une forme simplifiée des potentiels complexes :

$$\phi'(z) = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\overline{B_1}}{2z} + \frac{I(z)}{2} + \frac{\chi(z)}{2} \left[C_0 + C_1 z + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} \right]$$

$$\Omega'(z) = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\overline{B_1}}{2z} + \frac{I(z)}{2} - \frac{\chi(z)}{2} \left[C_0 + C_1 z + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} \right]$$
avec
$$I(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{a_1}^{a_2} \frac{\hat{T}(t) dt}{t - z}$$

 $\phi^{\,\prime}(z)\,$ est holomorphe à l'origine. Sachant que $\,I(z)$ est holomorphe et qu'autour de l'origine :

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \left[1 + \frac{z}{2} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1}\right) + \frac{z^2}{4} \left(\frac{3}{2a_2^2} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{3}{2a_1^2}\right) + O(z^3)\right]$$

la fonction $\phi'(z)$ s'écrit :

$$\phi'(z) = \frac{\gamma_2}{2\sqrt{a_1 a_2}} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \left[\frac{\overline{B_1}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a_1 a_2}} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right]$$

$$+\frac{\gamma_0}{2}+\frac{I(0)}{2}+\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}}\left[C_0+\frac{\gamma_1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\frac{\gamma_2}{4}\left(\frac{3}{2a_2^2}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{3}{2a_1^2}\right)\right]+O(z)$$

Ceci impose:

$$\frac{B_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2\sqrt{a_1 a_2}} = 0$$

c'est à dire

$$\gamma_1 = - \overline{B_1} \sqrt{a_1 a_2}$$

$$\gamma_2 = 0$$

et, puisque nous avons posé $\phi'(0) = \alpha_0$,

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{I(0)}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}} \left[C_0 + \frac{\gamma_1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right]$$

c'est à dire :

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{I(0)}{2} + \frac{C_0}{2\sqrt{a_1a_2}} - \frac{\overline{B_1}}{4} (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})$$

Or, nous avons montré que $\Omega'(\infty)=-\overline{\alpha_0}$ et d'après (5.17), nous aurons $\overline{\alpha_0}=-\frac{\gamma_0}{2}+\frac{C_1}{2}$. En éliminant α_0 , nous obtenons :

(5.19)
$$C_1 = \gamma_0 + \overline{\gamma_0} + \overline{I(0)} + \frac{\overline{C_0}}{\sqrt{\overline{a_1}} \overline{a_2}} - \frac{B_1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$$

Développons $\phi'(z)$ au voisinage de l'infini, sachant que :

$$\chi(z) = \frac{1}{z} + \frac{a_2 + a_1}{2z^2} + 0 \left(\frac{1}{z^3}\right)$$

Alors:

$$\phi'(z) = \frac{\gamma_0}{2} + \frac{C_1}{2} + (\frac{\overline{B_1}}{2} - \frac{J}{2} + \frac{C_0}{2} + \frac{C_1(a_1 + a_2)}{4}) \frac{1}{z} + 0(\frac{1}{z^2})$$

avec :

$$J = \int_{a_1}^{a_2} \hat{T}(t) dt \times \frac{1}{2i\pi}$$

Or, le terme constant est nul, puisqu'il n'y a pas de contrainte à l'infini, et le terme en $\frac{1}{z}$ est égal à B₀ par définition. Ainsi :

$$\gamma_0 = - C_1$$

$$B_0 = \frac{\overline{B_1}}{2} - \frac{J}{2} + \frac{C_0}{2} + \frac{C_1(a_1 + a_2)}{4}$$

En conclusion, en regroupant les résultats, nous aurons :

$$\gamma_1 = - \overline{B_1} \sqrt{a_1 a_2}$$

$$\gamma_2 = 0$$

(5.20)
$$C_0 + \frac{C_0(a_1 + a_2)}{2\sqrt{a_1 a_2}} = B_0 - B_1 + J - \frac{a_1 + a_2}{2} (\gamma_0 + \overline{\gamma_0} + \overline{1(0)})$$

ou

$$C_0 = \sqrt{a_1 \ a_2} \ (-2\frac{1}{\gamma_0} - \gamma_0 - I(0) + \frac{\overline{B_1}}{2} \ (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}))$$

$$C_1 = - \gamma_0$$

$$C_0 = \frac{\gamma_0}{2} (a_1 + a_2) + 2 B_0 - \overline{B_1} + J$$

5.2. CONTOUR CIRCULAIRE - METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT

5.2.1. FORME GÉNÉRALE DES POTENTIELS COMPLEXES

Rappelons les relations de KOLOSOV-MUKHELISCHVILI en coordonnées polaires utiles dans cette méthode :

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi'(\overline{z})} - \overline{z} \overline{\phi''(\overline{z})} - \frac{\overline{z}}{\overline{z}} \overline{\psi'}(\overline{z})$$

$$(5.21)$$

$$2\mu \left(u_r + iu_{\theta}\right) = \frac{\overline{z}}{r} \left[k\phi(z) - z \overline{\phi'}(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z})\right]$$

Exprimons également la résultante sur un arc A₁A₂

(5.22)
$$X + iY = -i \left[\phi(z) + z \overline{\phi'(\overline{z})} + \overline{\psi}(\overline{z})\right]_{A_1}^{A_2}$$

C'est à partir de cette expression que nous allons effectuer le prolongement analytique, comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent. Posons X + iY = 0, et changeons z en a^2/\overline{z} partout ou z intervient. Ceci va définir une fonction Ω :

(5.23)
$$\Omega(\frac{a^2}{\overline{z}}) = -\left[\frac{a^2}{\overline{z}} \overline{\phi}'(\overline{z}) + \overline{\psi}(\overline{z})\right]$$

Ainsi si la fonction Ω est connue, de même que $\phi(z)$, la fonction $\psi'(z)$ pourra être calculée par :

$$\psi(z) = -\left[\overline{\Omega}(\frac{a^2}{z}) + \frac{a^2}{z} \phi'(z)\right]$$

Par dérivation, nous aurons :

(5.25)
$$\psi'(z) = -\left[\overline{\Omega}'(\frac{a^2}{z})(\frac{-a^2}{z^2}) + \frac{a^2}{z}\phi''(z) - \frac{a^2}{z^2}\phi'(z)\right]$$

A partir de ces deux dernières relations, nous pouvons réécrire les contraintes et déplacement (5.21) :

(5.26)
$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) + \overline{\phi}'(\overline{z}) \left[1 - \frac{a^2}{z\overline{z}}\right] - \overline{z} \overline{\phi}''(\overline{z}) \left[1 - \frac{a^2}{z\overline{z}}\right] - \frac{a^2}{z\overline{z}}$$
$$- \frac{a^2}{z\overline{z}} \Omega'(\frac{a^2}{\overline{z}})$$

(5.27)
$$2\mu \left(u_r + iu_\theta\right) = \frac{\overline{Z}}{r} \left[k \phi(z) + \overline{\phi}'(\overline{z}) \left(\frac{a^2}{\overline{Z}} - z\right) + \Omega\left(\frac{a^2}{\overline{Z}}\right)\right]$$

Passons maintenant à la limite sur l'arc de cercle ($z \overline{z} = a^2$)

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^{G} = \phi^{G} - \Omega^{D}$$

$$2\mu(u_{r} + iu_{\theta})^{G} = e^{-i\theta} [k\phi^{G} + \Omega^{D}]$$

ce qui permet d'écrire les équations de Plemelj dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement :

$$(\phi^{'G} + \Omega')^{G} - (\phi' + \Omega')^{D} = 0$$

$$(5.28)$$

$$(k \phi - \Omega)^{G} - (k \phi - \Omega)^{D} = 2\mu \hat{D}_{p} e^{i\theta}$$

avec
$$\hat{D}_p = (u_r + iu_\theta)^G - (u_r + iu_\theta)^D$$

Revenons maintenant aux résultats exposés au paragraphe 5.1.1., pour déterminer la forme générale des potentiels complexes. Les contraintes à l'infini sont toujours supposées nulles ($A_0=B_0=0$) mais également la résultante en comportement à l'infini ($B_1=A_1=0$) car il y a continuité de contrainte sur l'arc A_1 A_2 . En conclusion, les potentiels ϕ' et Ω' sont déterminés à une constante près. L'intégration de la première relation (5.28) donne :

$$\phi'(z) + \Omega'(z) = A$$

soit en intégrant et supposant la constante nulle pour que les déplacements soient nuls à l'infini

$$\phi(z) + \Omega(z) = Az$$

De la même façon l'intégration de la deuxième relation conduit à :

(5.30)
$$k \phi(z) - \Omega(z) = Bz + \frac{\mu}{i\pi} \oint_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} \hat{D}_p}{t-z} dt$$

5.2.2. DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS

Au paragraphe 5.1.2., nous avons montré que :

$$\Omega'(\infty) = -\overline{\alpha_0}$$
 avec $\phi'(0) = \alpha_0$

A partir des relations (5.29) et (5.30), nous pouvons déterminer les potentiels complexes $\phi(z)$ et $\Omega(z)$

$$\phi(z) = \frac{1}{k+1} (A + B)z + \frac{1}{k+1} I(z)$$
(5.31)
$$\Omega(z) = Az - \phi(z)$$

(5.32)
$$I(z) = \frac{\mu}{i\pi} \int_{a_1}^{a_2} e^{i\theta} \hat{D}_p dt$$

Quand z tend vers l'infini, $\phi'(z)$ tend vers 0 (contraintes nulles à l'infini) ce qui impose A + B = 0.

Par définition et en utilisant (5,31), nous avons :

$$\phi'(0) = \alpha_0 = \frac{1}{k+1} I'(0)$$

Sachant que $\Omega'(\infty) = A = -\overline{\alpha_0}$, nous en déduisons :

$$A = -\frac{1}{k+1} \overline{I}(0)$$

En conclusion:

$$\phi(z) = \frac{1}{k+1} I(z)$$
(5.33)
$$\Omega(z) = -\frac{1}{(k+1)} \left[\overline{I}(0) z + I(z) \right]$$

5.2.3. PROBLÈMES NUMÉRIQUES LIÉS AUX FONCTIONS MULTIFORMES

La programmation en champ complexe va ici poser quelques difficultés dans la détermination des branches des fonctions multiformes. La fonction multiforme qui interviendra est de la forme $\ln(z-a_2/z-a_1)$. Pour la fonction $\ln z$, les ordinateurs utilisés donne la détermination suivante :

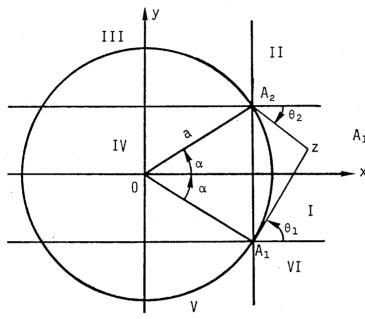
$$lnz = ln\rho + i\theta$$

avec

$$\theta \in [0, \pi]$$
 pour $y > 0$

$$\theta \in [0, -\pi]$$
 pour y < 0

Plaçons l'arc A_1A_2 selon la figure 5.4. Choisissons la détermination de $\ln(z - A_1)$ réelle



nation de $\ln(z - A_1)$ réelle sur la demi-droite $A_1 = pa$ -rallèle à l'axe réel et de façon semblable pour $\ln(z - A_2)$

Les parallèles aux axes réels et imaginaires passant par A_1 et A_2 , la corde et l'arc A_1 A_2 délimitent sept zones. Déterminons les arguments de $\sum_{x} \ln(z - a_2)/(z - a_1)$ dans chacune des zones.

Figure 5.4

$$\ln(z - a_2)/(z - a_1) = \ln \rho_2/\rho_1 + i (\theta_2 - \theta_1)$$

zone I	$0 \le \theta_1 < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq 0$	mod	2π
zone II	$0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$	$0 \le \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$	mod:	2π
zone III	$\frac{\pi}{2} \le \theta_1 \le \pi$	$\frac{\pi}{2} \le \theta_2 \le \pi$	mod	2π
zone IV	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \pi$	$\pi \le \theta_2 \le \frac{3\pi}{2}$	mod	2π
zone V	$-\pi \leq \theta_1 \leq -\frac{\pi}{2}$	$-\pi \leq \theta_2 \leq -\frac{\pi}{2}$	mod	2π
zone VI	$-\frac{\pi}{2} \le \theta_1 \le 0$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq 0$	mod	2π
zone VII	$\frac{\pi}{2} - \alpha \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \le \theta_2 \le \frac{3\pi}{2} + \alpha$	mod	2π

Avec les remarques faites en début de paragraphe, l'ordinateur donnera dans la zone IV : $-\pi < \theta_2 \le -\frac{\pi}{2}$ et dans la zone VII : $-\frac{\pi}{2} \le \theta_2 \le -\frac{\pi}{2} + \alpha$; ce qui change dans ces zones la détermination du logarithme.

Si nous plaçons maintenant l'arc selon la figure 5.5, le changement de détermination n'aura lieu que dans la zone comprise entre l'arc et la corde A_1A_2 .

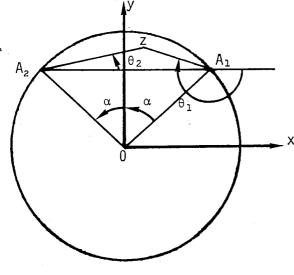


Figure 5.5

Dans cette zone nous devrions avoir :

$$-\pi - \alpha < \theta_1 \le -\pi$$
 $0 \le \theta_2 < \alpha$ mod 2π

alors que l'ordinateur donnera :

$$\pi - \alpha \le \theta_1 \le \pi$$
 $0 \le \theta_2 \le \alpha$

Si l'on choisit cette configuration, il sera nécessaire de procéder à un test pour savoir si le point z appartient à la zone comprise entre l'arc et la corde et de changer en conséquence les arguments. Le test d'appartenance s'écrira dans le repère (0/x, y)

 $Im z \ge Im a_1$

5.2.4. ELEMENTS À 1 NOEUD

Nous allons développer complètement l'élément à un noeud. Pour ce type d'élément, la discontinuité de déplacement est choisie constante :

$$\hat{D}_{D} = \delta_{0}$$

Détermination des potentiels

L'intégrale I(z) (formule 5.32) se calcule aisément :

$$I(z) = \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} (a_2 - a_1) + \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} z \ln \frac{z - a_2}{z - a_1}$$

Nous pouvons en calculer sa dérivée :

$$I'(z) = \frac{\mu \delta_0}{1\pi a} \left[1n \frac{z - a_2}{z - a_1} + \frac{z}{z - a_2} - \frac{z}{z - a_1} \right]$$

Ainsi I'(0) vaut:

$$I'(0) = \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

A partir de (5.33), nous obtenons les potentiels complexes. En posant $H = \mu/(k+1)\pi$, nous aurons :

$$\phi(z) = \frac{H \delta_0}{i} \left[\frac{a_2 - a_1}{a} + \frac{z}{a} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} \right]$$

$$(5.34)$$

$$\Omega(z) = \frac{-H \delta_0}{i} \left[\frac{a_2 - a_1}{a} + \frac{z}{a} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} \right] + \frac{Hz \overline{\delta_0}}{a i} \ln \frac{\overline{a_2}}{\overline{a_1}}$$

Calcul des contraintes

Le but de ce travail est de montrer l'éventuelle meilleure convergence de ce type de solution par rapport aux éléments rectilignes. Nous utiliserons des exemples où les contraintes sont appliquées sur le bord d'un trou. Dans ce cas, nous n'aurons à effectuer que des rotations de repère. Ainsi, il faudra calculer les contraintes et déplacements dans le repère (x', y') (fig. 5.6)

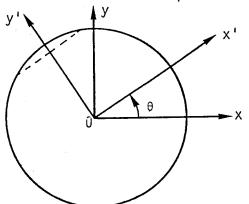


Figure 5.6

compte tenu de 5.24 et 5.33, nou aurons avec
$$A = -\frac{1}{k+1} \frac{1}{\Gamma(0)}$$

$$\sigma_{xx}' + \sigma_{yy}' = 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)})$$

$$\sigma_{yy}' - \sigma_{xx}' + 2i\sigma x_y' = 2e^{2i\theta} [(\overline{z} - \frac{a^2}{z}) \phi''(z) + \frac{a^2}{z^2} \phi'(z) - \frac{a^2}{z^2} \overline{\phi'}(\frac{a^2}{z}) + \overline{A} \frac{a^2}{z^2}]$$

$$2\mu \left(u_X' + iu_Y'\right) = e^{-i\theta} \left[K \phi(z) - \left(z - \frac{a^2}{\overline{z}}\right) \overline{\phi}'(\overline{z}) - \phi(\frac{a^2}{\overline{z}}) + A \frac{a^2}{\overline{z}}\right]$$

En utilisant la valeur du potentiel $\phi(z)$ (5.34) et en posant δ_0 = a_0 + ib_0 , nous aurons pour les contraintes :

$$\frac{\sigma_{yy}^{y}}{H} = b_{0} \text{ Re } (B - C) + a_{0} \text{ Im } (B + C)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{i}}{H} = b_{0} \text{ Im } (D - C) - a_{0} \text{ Re } (D + C)$$

avec :

$$B = e^{2i\theta} \left(\frac{a}{z^2} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} - \frac{a}{z^2} \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{\overline{z}}{a} \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1} \right) \right.$$

$$+ \left. \left(\frac{a}{z} - \frac{\overline{z}}{a} \right) \left(\frac{a_2}{(z - a_2)^2} - \frac{a_1}{(z - a_1)^2} \right) \right) + \frac{2}{a} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} + \frac{2z}{a} \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1} \right)$$

$$C = e^{2i\theta} \left(\frac{a}{z^2} \ln \frac{a^2/\overline{z} - a_2}{a^2/\overline{z} - a_1} + a^3 \frac{\overline{a_2} - \overline{a_1}}{z} \right) \frac{1}{(a^2 - \overline{a_2} z) (a^2 - \overline{a_1} z)} \right)$$

$$D = e^{2i\theta} \left(\frac{a}{z^2} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} - \frac{a}{z^2} \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{\overline{z}}{a} \frac{1}{z - a_2} - \frac{\overline{z}}{a} \frac{1}{z - a_1} \right.$$

$$+ \frac{a}{z} \frac{a_2}{(z - a_2)^2} - \frac{a}{z} \frac{a_1}{(z - a_1)^2} - \frac{\overline{z}}{a} \frac{a_2}{(z - a_2)^2} + \frac{\overline{z}}{a} \frac{a_1}{(z - a_1)^2} \right)$$

Les déplacements s'écrivent :

$$\frac{2\mu}{H} u_{X}' = b_{0} \text{ Re } (G-J) + a_{0} \text{ Im } (G+J)$$

$$\frac{2\mu}{H} u_{Y}' = b_{0} \text{ Im } (G-J) - a_{0} \text{ Re } (G+J)$$
avec
$$G = e^{-i\theta} \left[(k-1) \frac{a_{2} - a_{1}}{a} + k \frac{z}{a} \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} - \frac{a}{\overline{z}} \ln \left(\frac{a^{2}/\overline{z} - a_{2}}{a^{2}/\overline{z} - a_{1}} \right) \right]$$

$$J = e^{-i\theta} \left[(z - \frac{a^{2}}{\overline{z}}) \left(\frac{1}{a} \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} + \frac{1}{a} \frac{\overline{z}}{\overline{z} - \overline{a}_{2}} - \frac{1}{a} \frac{\overline{z}}{\overline{z} - \overline{a}_{1}} \right) + \frac{1}{\overline{z}} \ln \frac{a_{2}}{a_{1}} \right]$$

5.2.5. EXEMPLES NUMERIQUES | 9 |

Le premier exemple testé a été une plaque infinie percée d'un trou, lequel est soumis à une pression. Dans ce cas, nous obtenons la solution exacte quelque soit la discrétisation utilisée (y compris un seul arc). Ceci est le résultat de la construction de la solution élémentaire puisque dans ce cas

le déplacement radial en paroi est constant.

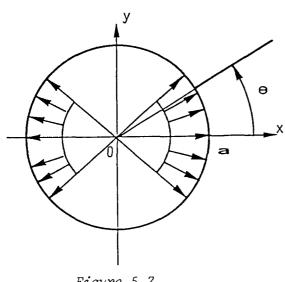


Figure 5.7

Le deuxième exemple concerne toujours la plaque trouée précédente, et chargée sur deux quarts de cercle selon la figure ci-contre.

Les calculs ont été menés en utilisant une discrétisation du contour en éléments rectilignes et éléments circulaires, avec des éléments constants (1 point nodal). Deux discrétisations (de comparaison à taille de matrice identique) sont proposées : 16 éléments (figure 5.8) et 64 éléments (figure 5.9).

L'erreur relative E par rapport à la solution analytique |14 | est calculée sur des segments radiaux inclinés à θ par rapport à l'axe des x. Les calculs sont menés sur les contraintes, car les erreurs sur les déplacements sont plus faibles du fait même de la méthode.

La figure 5.8a donne l'erreur E sur un rayon incliné à $\theta=\pi/4$ où s'effectue la discontinuité des charges. Dans ce cas, la solution par arc circulaire conduit à des erreurs négligeables (inférieures à 10^{-4}). La figure 5.8b donne des résultats pour $\theta=3\pi/16$ (rayon passant par un point nodal). On remarque dans ce cas que l'élément circulaire conduit non seulement à une meilleure approximation par les rapports r/a élevés mais également lorsqu'on se rapproche de la paroi du trou.

Ces deux constatations sont également valables pour une discrétisation plus fine (fig. 5.9)

$$-\theta = 3\pi/16$$
 (figure 5.9a)

$$-\theta = \pi/2$$
 (figure 5.9b)

5.2.6. ÉLÉMENT DU SECOND ORDRE

Initialement, nous avions choisi un élément de la forme |2|

$$\hat{D}_{p} = \delta_{0} + \delta_{1} \cos \theta$$

Cet élément n'est pas correct puisqu'il ne satisfait pas automatiquement à l'équilibre du problème intérieur. Nous préférons choisir une solution qui satisfasse automatiquement à l'équilibre, à savoir :

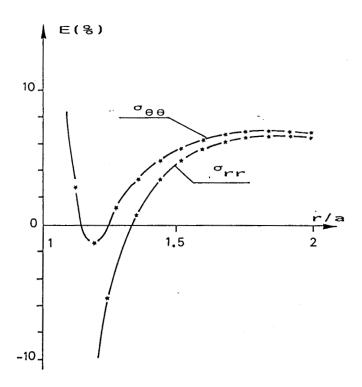
$$\hat{D}_{p} = \delta_{0} + \delta_{1} \cos 2\theta = \delta_{0} + \delta_{1} \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}$$

Calculons l'intégrale $I_1(z)$ correspondant au terme δ_1 . Il suffira pour trouver les solutions complètes de sommer les résultats qui vont suivre avec ceux du chapitre 5.2.4. Nous trouvons sans trop de difficultés :

$$I_{1}(z) = \frac{\mu \delta_{1}}{2 i \pi} \left[\frac{a_{2}^{3} - a_{1}^{3}}{3 a^{3}} + \frac{z (a_{2}^{2} - a_{1}^{2})}{2 a^{3}} + \frac{z^{2} (a_{2} - a_{1})}{a^{3}} + \frac{z^{3}}{a^{3}} \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} - \frac{a}{z} \ln \frac{a_{2}}{a_{1}} + \frac{a}{z} \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} \right]$$

Nous en déduisons la valeur de $I_1(z)$

$$I_{1}'(z) = \frac{\mu \delta_{1}}{2 i \pi} \left(\frac{a_{2}^{2} - a_{1}^{2}}{2 a^{3}} + \frac{2z(a_{2} - a_{1})}{a^{3}} + \left(\frac{3z^{2}}{a^{3}} - \frac{a}{z^{2}} \right) \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} + \left(\frac{z^{3}}{a^{3}} + \frac{a}{z} \right) \left(\frac{1}{z - a_{2}} - \frac{1}{z - a_{1}} \right) + \frac{a}{z^{2}} \ln \frac{a_{2}}{a_{1}}$$



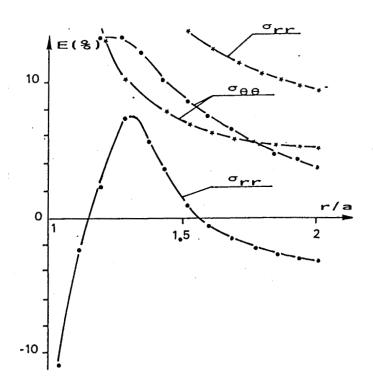
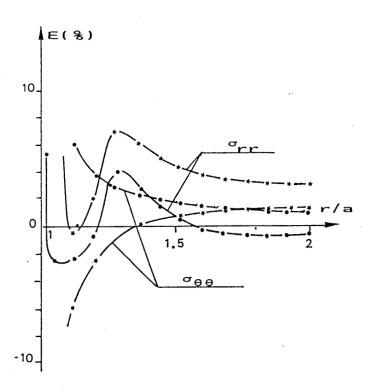


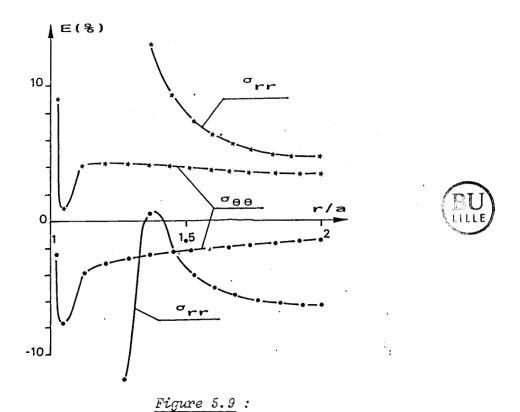
Figure 5.8:

Calcul de l'erreur relative sur les contraintes pour une discrétisation en 16 éléments

. arc circulaire 1 noeud

^{*} segment 1 noeud





Calcul de l'erreur relative sur les contraintes pour une discrétisation en 64 éléments

. arc circulaire 1 noeud

^{*} segment 1 noeud

Le calcul de $I_1(0)$ est ici plus délicat, car nous sommes en présence de formes indéterminées. Posons :

$$G(z) = -\frac{a}{z^2} \ln \frac{z - a_2}{z - a_1} + \frac{a}{z} \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1} \right) + \frac{a}{z^2} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

Effectuons un développement limité de G(z) autour de l'origine :

$$G(z) = \frac{a}{z^2} \left[\frac{z}{a_2} + \frac{z^2}{2a_2^2} + 0 \left(\frac{z^3}{a_2^3} \right) \right] - \frac{a}{z^2} \left[\frac{z}{a_1} + \frac{z^2}{2a_1^2} \right]$$

$$+ 0 \left(\frac{z^3}{a_1^3} \right) - \frac{a}{a_2 z} \left[1 + \frac{z}{a_2} + 0 \left(\frac{z^2}{a_2^2} \right) \right] + \frac{a}{a_1 z} \left[1 + \frac{z}{a_1} + 0 \left(\frac{z^2}{a_1^2} \right) \right]$$

soit:

$$G(z) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) + O(z)$$

et en définitive :

$$I'(0) = \frac{\mu \delta_1}{2i\pi} \left[\frac{a_2^2 - a_1^2}{2a^3} + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \right]$$

CALCUL DES CONTRAINTES ET DEPLACEMENTS

Les calculs s'effectuent comme au paragraphe 5.2.4, en supposant que nous ne traiterons que des problèmes à frontière circulaire. Le développement des calculs est encore ici très long mais ne pose pas de difficultés majeures. Nous donnons ici les résultats des calculs en ayant posé δ_1 = a_1 +i b_1 et H = $\mu/(k+1)\pi$. En ce qui concerne les contraintes, nous aurons :

$$\frac{\sigma'_{yy}}{H} = b_1 \text{ Re } (B_1 - C_1) + a_1 \text{ Im } (B_1 + C_1)$$

$$\frac{\sigma'_{xy}}{H} = b_1 \text{ Im } (D_1 - C_1) + a_1 \text{ Re } (D_1 + C_1)$$

avec:

$$B_{1} = e^{2i\theta} \left[\left(-\frac{3a^{3}}{2z^{4}} + \frac{3z\overline{z}}{a^{3}} - \frac{a\overline{z}}{z^{3}} - \frac{3}{2a} \right) \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} \right]$$

$$+ \left(\frac{3a^{3}}{2z^{4}} - \frac{a\overline{z}}{z^{3}} \right) \ln \frac{a_{2}}{a_{1}} + \left(3\frac{\overline{z}z^{2}}{a^{3}} - \frac{a\overline{z}}{z^{2}} - \frac{5z}{2a} + \frac{3a^{3}}{2z^{3}} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{z - a_{2}} - \frac{1}{z - a_{1}} \right) + \frac{a_{2} - a_{1}}{a^{3}} \overline{z}$$

$$- \left(\frac{\overline{z}z^3}{2a^3} + \frac{a\overline{z}}{2z} - \frac{z^2}{2a} - \frac{a^3}{2z^2}\right) \left(\frac{1}{(z - a_2)^2} - \frac{1}{(z - a_1)^2}\right)$$

$$+ \frac{a^3}{4a_2{}^2z^2} - \frac{a^3}{4a_1{}^2z^2}\right] + \frac{a_2{}^2 - a_1{}^2}{2a^3} + \frac{2z(a_2 - a_1)}{a^3}$$

$$+ \frac{a}{z^2} \ln \frac{a_2}{a_1} + \left(\frac{3z^2}{a^3} - \frac{a}{z^2}\right) \ln \frac{z - a_2}{z - a_1}$$

$$+ \left(\frac{z^3}{a^3} + \frac{a}{z}\right) \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1}\right)$$

$$+ \left(\frac{3a^3}{2z^4} - \frac{1}{2a}\right) \ln \frac{a^2/\overline{z} - a_2}{a^2/\overline{z} - a_1} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

$$+ \left(\frac{a^5}{2z^3} + \frac{az}{2}\right) \frac{a_2}{(a^2 - \overline{a_2}z)(a^2 - \overline{a_1}z)}$$

$$+ \left(\frac{3a^3}{2z^4} - \frac{a\overline{z}}{2}\right) \ln \frac{a_2}{a^3} + \frac{a\overline{z}}{z^3} - \frac{3}{2a} + \frac{3a^3}{2z^4}\right) \ln \frac{z - a_2}{z - a_1}$$

$$+ \left(\frac{3a^3}{2z^4} - \frac{a\overline{z}}{z^3}\right) \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2 - a_1}{a^3} \overline{z} + \frac{a^3}{4z^2} \left|\frac{1}{a_2{}^2} - \frac{1}{a_1{}^2}\right|$$

$$+ \left(\frac{3\overline{z}}{2a^3} - \frac{a\overline{z}}{z^2}\right) \frac{5z}{2a} + \frac{3a^3}{2z^3}\right) \left(\frac{1}{z - a_2} - \frac{1}{z - a_1}\right)$$

$$- \left(\frac{\overline{z}}{2a^3} + \frac{a\overline{z}}{2z} - \frac{z^2}{2a} - \frac{a^3}{2z^2}\right) \left(\frac{1}{(z - a_2)^2} - \frac{1}{(z - a_1)^2}\right)$$

De la même façon, les déplacements s'écrivent :

$$\frac{2\mu}{H} u'_{X} = b_{1}Re (G_{1} - J_{1}) + a_{1} Im (G_{1} + J_{1})$$

$$\frac{2\mu}{H} u'_{Y} = b_{1}Im (G_{1} - J_{1}) - a_{1} Re (G_{1} + J_{1})$$

avec:

$$G_{1} = (k-1) \frac{a_{2}^{3} - a_{1}^{3}}{6a^{3}} + \frac{k}{4a^{3}} (a_{2}^{2} - a_{1}^{2}) + \frac{k}{2a^{3}} (a_{2} - a_{1})$$

$$+ k \left(\frac{z^{3}}{2a^{3}} + \frac{a}{2z}\right) \ln \frac{z - a_{2}}{z - a_{1}} - \frac{ka}{2z} \ln \frac{a_{2}}{a_{1}} + \frac{\overline{z}}{2a} \ln \frac{a_{2}}{a_{1}}$$

$$- \frac{a_{2}^{2} - a_{1}^{2}}{4a\overline{z}} - \frac{a}{2\overline{z}^{2}} (a_{2} - a_{1}) - \left(\frac{\overline{z}}{2a} + \frac{a^{3}}{2\overline{z}^{3}}\right) \ln \frac{a^{2}/\overline{z} - a_{2}}{a^{2}/\overline{z} - a_{1}}$$

$$J_{1} = \left(\frac{z}{a} - \frac{a}{\overline{z}}\right) \left[\frac{\overline{a_{2}}^{2} - \overline{a_{1}}^{2}}{4a^{2}} + \frac{\overline{z} \left(\overline{a_{2}} - \overline{a_{1}}\right)}{4a^{2}} + \frac{a^{2}}{2\overline{z}^{2}} \frac{\overline{\ln \frac{a_{2}}{a_{1}}}}{1n \frac{a_{2}}{\overline{a_{2}}}} + \left(\frac{z\overline{z^{3}}}{2a^{2}} - \frac{a^{2}}{2\overline{z}^{2}}\right) \frac{\overline{a_{2}} - \overline{a_{1}}}{\overline{z - a_{2}}} + \left(\frac{\overline{z}^{3}}{2a^{2}} + \frac{a^{2}}{2\overline{z}}\right) \frac{\overline{a_{2}} - \overline{a_{1}}}{(\overline{z} - \overline{a_{1}})(\overline{z} - \overline{a_{2}})} + \frac{a}{\overline{z}} \left(\frac{\overline{a_{2}}^{2} - \overline{a_{1}}^{2}}{4a^{2}} - \frac{a^{2}}{4\overline{a_{2}}^{2}} + \frac{a^{2}}{4\overline{a_{1}}^{2}}\right)$$

Calcul des contraintes et déplacements dus à l'influence de l'arc sur lui-même.

Soit l'arc A_1 A_2 rapporté à son repère local (0, x', y') fig. 5.10. On veut calculer les contraintes et déplacements aux points nodaux d'affixes t^- et t^+ par rapport au repère radial $(0, \overline{X}, \overline{X})$ local à chacun de ces points. Pour cela on utilise les relations (5.26) et (5.27) en faisant tendre z à la limite sur l'arc

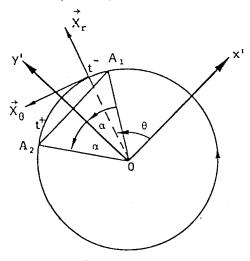


Figure 5.10

 $A_1 A_2 (z \in "G")$, vers t^- et t^+ .

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^G = \phi^{G} - \alpha^{D}$$

 $2\mu (u_r + iu_\theta)^G = e^{-i\theta} (k \phi^G + \alpha^D)$

Il s'avère que ce calcul est difficile à réaliser compte tenu de la détermination logarithmique choisie dans le paragraphe (5.2,3.).

Cependant, on peut calculer les contraintes et déplacements dans le re-

père (0, x', y') aux points nodaux t^- et t^+ qui sont donnés par les relations (5.38) et (5.39) en prenant $\theta = 0$.

Et puis à l'aide des relations de changement de repère (1.2), on peut exprimer maintenant les contraintes et déplacements dans le repère radial (0, X_r , X_θ) aux points nodaux t et t respectivement pour $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda \alpha$ et $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda \alpha$. λ représente le paramètre de position du point nodal sur l'arc A₁A₂.

Ainsi, pour construire la matrice d'influence, il suffit d'exprimer les relations (5.38) et (5.39) dans le repère radial du point nodal concerné.

5.3. TRANSFORMATION CONFORME SUR LE CERCLE - APPLICATION AU CAS D'UN CONTOUR ELLIPTIQUE.

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre la démarche effectuée dans le cas d'un contour circulaire dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement. Rappelons que dans cette méthode, nous avons un problème mixte à résoudre, et qu'il n'est pas possible de raisonner sur la dérivée du vecteur déplacement à la frontière, ce déplacement étant, par le fait de la méthode, discontinu. Le changement de fonction devra nécessairement être différent de celui proposé par MILNE-TOMPSON |11|

5.3.1. TRANSFORMATION CONFORME SUR LE CERCLE - ÉCRITURE DES ÉQUATIONS DE KOLOSOV-MUSKHELISCHVILI.

Soit la transformation conforme

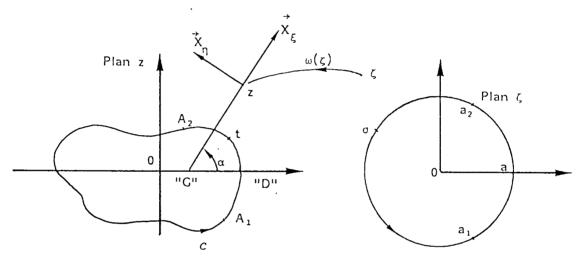


Figure 5.11 : Détermination de la transformation conforme

$$z = \omega(\zeta)$$

reliant tout point du plan réel "z" à tout point du plan "z" auxiliaire de calcul. Cette transformation est définie de telle façon que le contour frontière (C) ait un original circulaire définie par |z|=a. Dans ce cas, on peut écrire z sous la forme :

$$\zeta = e^{\xi + i\eta}$$

avec en conséquence a = e^{ξ_0} . La frontière (C) dans le plan z correspond donc à la ligne coordonnée $\xi = \xi_0$. Les conditions aux limites dans le plan z s'exprimeront à l'aide de $\sigma_{\xi\xi}$ + $i\sigma_{\eta\xi}$ et de u_{ξ} + iu_{η} .

Dans ce cas, la rotation de repère α entre le repère curviligne $(N/\vec{X}_{\epsilon},\vec{X}_n)$ et le repère cartésien est donnée par |11|

(5.42)
$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{\overline{\zeta} \overline{\omega}'(\overline{\zeta})}$$
$$e^{i\alpha} = \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{|\zeta \omega'(\zeta)|}$$

Posons maintenant:

$$\phi(z) = \phi(\omega(\zeta)) = \phi(\zeta)$$

$$(5.43)$$

$$\psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$$

Il s'ensuit:

$$\phi'(z) = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\psi'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\phi''(z) = \frac{\phi''(\zeta)}{\left[\omega'(\zeta)\right]^2} - \omega''(\zeta) \frac{\phi'(\zeta)}{\left[\omega'(\zeta)\right]^3}$$

Reportons ces résultats (5.42) et (5.44) dans les équations de KOLOSOV-MUSKHELISHVILI :

$$\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\eta\xi} = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\phi}'(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} + \frac{\overline{\zeta} \ \omega(\zeta)\overline{\omega}''(\overline{\zeta})}{\zeta \ \omega'(\zeta)[\overline{\omega}'(\overline{\zeta})]^{2}} \overline{\phi}'(\overline{\zeta})$$

$$-\frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{\overline{\phi}''(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} - \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \overline{\psi}'(\overline{\zeta})$$

$$= -1.(1)$$

$$2\mu(u_{\xi} + iu_{\eta}) = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega}'(\overline{\zeta})}{|\zeta \omega'(\zeta)|} \left[k \phi(\zeta) - \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi}'(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} - \overline{\Psi}(\overline{\zeta}) \right]$$

De même la résultante s'écrira :

$$(5.46) X + iY = -i \left[\phi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \overline{\phi}'(\overline{\zeta}) + \overline{y}(\overline{\zeta})\right]$$

5.3.2. EQUATIONS DE PLEMELJ DU PROBLÈME

Comme précédemment, nous allons faire un prolongement analytique à travers la frontière circulaire $\zeta \zeta = a^2$. Ainsi dans l'expression (5.46), remplaçons ζ par a^2/ζ et la fonction $\phi(\zeta)$ par $\Omega(\zeta)$. Nous aurons :

$$\omega\left(\frac{a^{z}}{\zeta}\right)$$
(5.47)
$$\Omega\left(\frac{a^{z}}{\zeta}\right) = -\left[\frac{1}{\omega'(\overline{\zeta})} - \overline{\phi'(\overline{\zeta})} + \overline{\Psi}(\overline{\zeta})\right]$$

Si Ω et $\varphi^{\text{+}}$ sont déterminées alors la fonction Ψ se calculera par :

(5.48)
$$\Psi(\zeta) = -\left[\overline{\Omega}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{a^2}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta)\right]$$

Par dérivation, on peut calculer $\Psi'(\zeta)$

$$\psi'(\zeta) = \frac{a^2}{\zeta^2} \frac{\overline{\Omega}'}{\Omega'} \left(\frac{a^2}{\zeta}\right) + \frac{a^2}{\zeta^2} \frac{\overline{\omega}'(\frac{a^2}{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) + \frac{\overline{\omega}(\frac{a^2}{\zeta})}{\left[\omega'(\zeta)\right]^2} \omega''(\zeta) \phi''(\zeta) - \frac{\overline{\omega}(\frac{a^2}{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \phi''(\zeta)$$

Il nous suffit maintenant de reporter ces deux derniers résultats dans les relations de KOLOSOV MUSKHELISHVILI (5.45)

$$\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\eta\xi} = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{a^{2}}{\zeta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \Omega'(\frac{a^{2}}{\zeta}) + \frac{\overline{\phi}'(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \left[1 - \frac{a^{2}}{\zeta} \frac{\omega'(\frac{a^{2}}{\zeta})}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$+ \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{\overline{\omega}''(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta) \left[\overline{\omega}'(\overline{\zeta})\right]^{2}} \left[\omega(\zeta) - \omega(\frac{a^{2}}{\zeta})\right]$$

$$- \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \frac{\overline{\phi}''(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \left[\omega(\zeta) - \omega(\frac{a^{2}}{\zeta})\right]$$

$$2\mu \left(u_{\xi} + iu_{\eta}\right) = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega}'(\overline{\zeta})}{|\zeta|} \left[K \phi(\zeta) - \frac{\overline{\phi}'(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \left(\omega(\zeta) - \omega(\frac{a^{2}}{\zeta})\right) + \Omega\left(\frac{a^{2}}{\zeta}\right)\right]$$

$$+ \Omega\left(\frac{a^{2}}{\zeta}\right)$$

Nous allons maintenant faire tendre z vers un point t (t \in "G" dans le plan z), c'est à dire que nous allons faire tendre ζ vers un point σ (σ \in "G" dans le plan ζ). Dans ce cas, puisque est une fonction holomorphe dans tout le plan, nous aurons :

$$\omega(\sigma) = \omega(\frac{a^2}{\overline{\sigma}})$$

$$\omega'(\sigma) = \omega'(\frac{a^2}{\overline{\sigma}})$$

sachant que $\zeta \overline{\zeta} = a^2$, la relation (5.45) se transforme en :

$$(\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\eta\xi})^{G}(t) = \frac{\phi^{G}(\sigma)}{\omega^{G}(\sigma)} - \frac{\Omega^{D}(\sigma)}{\omega^{G}(\sigma)}$$

$$2\mu(u_{\xi} + iu_{\eta})^{G}(t) = \frac{\overline{\sigma} \overline{\omega}^{G}(\overline{\sigma})}{|\sigma \omega^{G}(\sigma)|} [K \phi^{G}(\sigma) + \Omega^{D}(\sigma)]$$

ou encore en :

(5.51)
$$\omega'(\sigma) \left[(\sigma_{\xi\xi} + i\sigma_{\eta\xi})^{G}(t) \right] = \phi'^{G}(\sigma) - \Omega'^{D}(\sigma)$$

$$2\mu \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\sigma\omega'(\sigma)|} (u_{\xi} + iu_{\eta})^{G}(t) = K \phi^{G}(\sigma) + \Omega^{D}(\sigma)$$

Nous en déduisons les formules de Plemelj dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement :

$$0 = (\phi' + \Omega')^{G}(\sigma) - (\phi' + \Omega')^{D}(\sigma)$$

$$(5.52)$$

$$2\mu \frac{\sigma \omega' (\sigma)}{|\sigma \omega' (\sigma)|} \hat{D}_{e} = (K \phi - \Omega)^{G}(\sigma) - (K \phi - \Omega)^{D}(\sigma)$$

$$\hat{D}_{e} = (u_{\xi} + iu_{\eta})^{G}(t) - (u_{\xi} + iu_{\eta})^{D}(t)$$

5.3.3. SOLUTION DANS LE CAS D'UN CONTOUR ELLIPTIQUE

a) définition de la transformation conforme

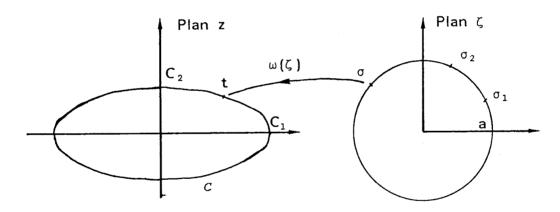


Figure 5.12

Soit l'ellipse dont les axes principaux sont c_1 et c_2 , c_1 sur x et c_2 sur y. La transformation conforme qui permet de passer du cercle à l'ellipse a la forme générale :

(5.53)
$$z = \omega(\zeta) = h\zeta - \frac{d}{\zeta}$$

h et d, constantes à déterminer. Le cercle ζ est paramétré par $\zeta=e^{\xi+i\eta}$ avec $a=e^{\xi 0}.$ Donc sur le contour C dans le plan z, nous aurons :

$$t = hae^{i\eta} - \frac{de^{-i\eta}}{a} = \cos \eta \left(ha - \frac{d}{a}\right) + i \sin \eta \left(ha + \frac{d}{a}\right)$$

Nous en déduisons que :

$$c_1 = ha - \frac{d}{a}$$
 $c_2 = ha + \frac{d}{a}$

c'est à dire :

(5.54)
$$h = \frac{c_1 + c_2}{2a} \qquad d = (\frac{c_2 - c_1}{2}) a$$

b) singularités du potentiel $\Omega(\zeta)$. Forme générale de la solution

Rappelons que $\Omega'(\zeta)$ s'écrit :

(5.55)
$$\Omega'(\zeta) = \frac{a^2}{\zeta^2} \overline{\psi}'(\frac{a^2}{\zeta}) - \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\frac{a^2}{\zeta})} \overline{\phi}'(\frac{a^2}{\zeta}) + \frac{a^2}{\zeta^2} \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi}''(\frac{a^2}{\zeta})}{\overline{\omega}'(\frac{a^2}{\zeta})} - \frac{a^2}{\zeta^2} \overline{\omega}''(\frac{a^2}{\zeta}) \omega(\zeta) \overline{\phi}'(\frac{a^2}{\zeta}) \frac{1}{\left[\overline{\omega}'(\frac{a^2}{\zeta})\right]^2}$$

Nous allons maintenant exprimer que les fonctions $\phi'(\zeta)$ et $\Psi'(\zeta)$ sont holomorphes dans tout le plan complexe. Les contraintes étant bornées à l'infini les fonctions $\phi'(z)$ et $\psi'(z)$ s'écrivent :

$$\phi'(z) = A_0 + \frac{B_0}{z} + O(\frac{1}{z^2}) \qquad z \to \infty$$

$$\psi'(z) = A_1 + \frac{B_1}{z} + O(\frac{1}{z^2}) \qquad z \to \infty$$

Lorsque z tend vers l'infini, ζ d'après (5.53) tend aussi vers l'infini. En conséquence a^2/ζ tend vers 0, et réciproquement. Dans l'expression (5.55), nous calculerons $\Phi'(a^2/\zeta)$, $\Phi''(a^2/\zeta)$, $\Psi'(a^2/\zeta)$ en utilisant les relations 5.31. Il s'ensuit que :

(5.56)
$$\Omega'(\zeta) = (\overline{A}_0 d + A_1 ha^2) \frac{1}{\zeta^2} + \frac{\overline{B}_1}{\zeta} + O(1) \qquad \zeta \to 0$$

Lorsque d=0, h=1 (contour circulaire, $\zeta=z$), nous retrouvons les résultats du paragraphe précédent. Notons tout de suite que nous avons $A_0=B_0=0$ (pas de contrainte à l'infini) et $A_1=B_1=0$ (Résultante nulle sur le contour frontière), donc à l'origine $\Omega'(\zeta)$ est constant.

Pour obtenir la solution du cercle par continuité de la solution de l'ellipse en posant d=0, supposons que les fonctions holomorphes sont, non pas $\phi'(\varsigma)$ et $\psi'(\varsigma)$ mais ;

$$\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$$
 et $\psi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$

Ceci ne change absolument pas les résultats précédents, lorsque tend vers l'infini. Il s'ensuit que lorsque ç tend vers 0 :

$$\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + O(\zeta^2)$$

$$\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \beta_0 + \beta_1 \zeta + O(\zeta^2)$$

soit

$$\phi'(\zeta) = d \frac{\alpha_0}{\zeta^2} + \frac{\alpha_1 d}{\zeta} + \alpha_0 h + 0(1)$$

$$\psi'(\zeta) = \frac{d \beta_0}{\zeta^2} + \frac{d\beta_1}{\zeta} + \beta_0 h + O(1)$$

La solution générale de l'équation de Plemelj (5.52) s'écrit :

$$\phi'(\zeta) = A + \frac{B}{\zeta} + \frac{C}{\zeta^2} + I'(\zeta)$$

$$\Omega'(\zeta) = D - I'(\zeta)$$

$$I(\zeta) = \frac{\mu}{i\pi (k+1)} \int_{A_1A_2} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\sigma \omega'(\sigma)|} - \frac{\hat{D}_e}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

CHAPITRE VI

DISCONTINUITE DE DEPLACEMENT
ELEMENTS COINS
TRANSFORMATION CONFORME
SUR LA DROITE. EXEMPLES

L'étude faite dans le cas de l'ellipse par transformation conforme sur le cercle va être dans ce chapitre reprise pour étudier les coins par transformation conforme sur la droite.

6.1. TRANSFORMATION CONFORME SUR LA DROITE

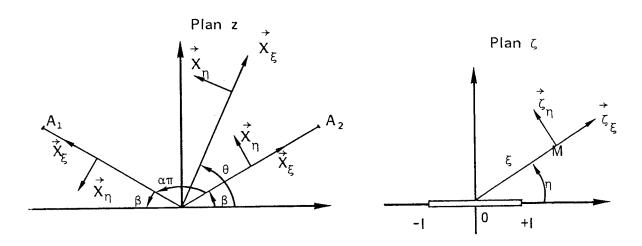


Figure 6.1

Soit le coin A_1A_2 d'ouverture $\alpha\pi$ positionné de façon à ce que sa bissectrice soit confondue avec l'axe y. Cette configuration permet de garder les symétries géométriques et certaines symétries dans la matrice d'influence.

Soit la transformation :

$$(6.1) z = \omega(\zeta)$$

qui a tout point du plan image du coin A_1A_2 fait correspondre un antécédent appartenant au segment [-l,+l] de l'axe réel du plan ς . Cette transformation s'écrit :

(6.2)
$$z = e^{i\beta} \zeta^{\alpha}$$

avec $2\beta + \alpha \pi = \pi$.

Si nous repérons le plan ζ par les coordonnées polaires (ξ, η)

$$\zeta = \xi e^{i\eta}$$

alors les lignes coordonnées dans la plan z sont des droites radiales et des cercles. Notons $(\vec{X}_{\xi}, \vec{X}_{n})$ la base curviligne correspondant respectivement aux lignes ξ = constante, η = constante. La figure 6.1. donne ce repère le long du coin.

Les conditions aux limites s'exprimeront à l'aide de $\sigma_{\eta\eta}$ + $i\sigma_{\eta\xi}$ et de u_{ξ} + iu_{η} dans le plan z. Dans ce cas, la rotation de repère θ entre le

repère curviligne $(M/\vec{X}_{\xi},\vec{X}_{\eta})$ et le repère curvilinge $(M/\zeta_{\xi},\zeta_{\eta})$ est donné par (5.42). Posons également :

(6.4)
$$\phi(z) = \phi(\omega(\zeta)) = \Phi(\zeta)$$

$$\psi(z) = \phi(\omega(\zeta)) = \Psi(\zeta)$$

Le calcul de $\phi'(z)$, $\phi''(z)$ et $\psi'(z)$ s'effectue comme en (5.45). Les équations de Kolosov-Mukhelishvili prennent la forme (5.45) et la résultante (5.46).

6.2. EQUATIONS DE PLEMELJ DU PROBLEME, FORME GENERALE DES POTENTIELS

6.2.1. EQUATIONS DE PLEMELJ

Comme dans le chapitre 1, nous allons faire un prolongement analytique à travers l'axe réel dans le plan $\,\varsigma\,$. Ainsi, dans l'expression (5.46), remplaçons $\,\varsigma\,$ par $\,\overline{\varsigma}\,$ et la fonction $\,\phi(\varsigma)$ par $\,\Omega(\varsigma)\,$. Nous aurons :

(6.5)
$$\Omega(\overline{\zeta}) = -\left[\frac{\omega(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \quad \overline{\Phi}'(\overline{\zeta}) + \overline{\Psi}(\overline{\zeta})\right]$$

et ϕ' sont déterminées, alors la fonction ψ se calculera par :

$$(6.6) \qquad \Psi(\zeta) = -\left[\overline{\Omega}(\zeta) + \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \phi'(\zeta)\right]$$

Par dérivation, on peut calculer $\psi'(\zeta)$

$$\Psi'(\zeta) = -\overline{\Omega}'(\zeta) - \frac{\overline{\omega}'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) - \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi''(\xi) + \frac{\overline{\omega}(\zeta) \omega''(\zeta)}{\left[\omega'(\zeta)\right]^2} \phi'(\zeta)$$

Reportons ces résultats dans les équations de Kolosov-Muskhelishvili (5.45):

$$\sigma_{\eta\eta} - i\sigma_{\eta\xi} = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \Omega'(\overline{\zeta}) + \frac{\overline{\phi}'(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \left[1 - \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{\omega'(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$(6.7) -\frac{\overline{\zeta}}{\zeta}\frac{\overline{\omega}''(\overline{\zeta})}{\omega'}\frac{\overline{\Phi}'(\overline{\zeta})}{(\zeta)[\overline{\omega}'(\overline{\zeta})]^2} [\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})]$$

$$+ \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{\overline{\phi}''(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta) \overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \left[\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta}) \right]$$

$$(6.8) 2\mu(u_{\xi} + iu_{\eta}) = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega}'(\overline{\zeta})}{|\zeta \omega'(\zeta)|} \left[k \phi(\zeta) - \frac{\overline{\phi}'(\overline{\zeta})}{\overline{\omega}'(\overline{\zeta})} \left[\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta}) \right] + \Omega(\overline{\zeta}) \right]$$

Faisons tendre maintenant z vers un point t (t \in "G" dans le plan z). Dans ce cas, ς tend vers un point σ ($\sigma \in$ "G" dans le plan ς). Puisque ω est une fonction holomorphe, $\omega(\sigma) = \omega(\overline{\sigma})$, nous aurons :

$$(\sigma_{nn} - i\sigma_{n\epsilon})^G(t) = \frac{\phi^{G}(\sigma)}{\omega^{G}(\sigma)} - \frac{\Omega^{D}(\sigma)}{\omega^{G}(\sigma)}$$

(6.9)
$$2\mu(u_{\xi} + iu_{\eta})^{G}(t) = \frac{\overline{\sigma} \overline{\omega}'(\overline{\sigma})}{|\sigma \omega'(\sigma)|} [k \phi^{G}(\sigma) + \Omega^{D}(\sigma)]$$

Dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement, nous en déduisons les formules de Plemelj:

(6.10)
$$0 = (\phi' + \Omega')^{G}(\sigma) - (\phi' + \Omega')^{D}(\sigma)$$

(6.11)
$$2\mu \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\sigma \omega'(\sigma)|} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{c}} = (\mathbf{k} \phi - \Omega)^{\mathbf{c}} (\sigma) - (\mathbf{k} \phi - \Omega)^{\mathbf{D}} (\sigma)$$

avec
$$\hat{u}_{c} = (u_{\xi} + iu_{\eta})^{G}(t) - (u_{\xi} + iu_{\eta})^{D}(t)$$

6.2.2. FORME GÉNÉRALE DES POTENTIELS

La solution générale de l'équation (6.10), sachant que les contraintes à l'infini sont nulles, est :

$$\phi'(\zeta) + \Omega'(\zeta) = 0$$

Pour traiter l'équation (6.11), nous allons remarquer que $\sigma\omega'(\sigma)$ $\hat{u}_c/|\sigma\omega^i(\sigma)|$ est égal à :

$$\hat{U}_{c} = (U_{\varepsilon}^{G} + iU_{n}^{G}) - (U_{\varepsilon}^{D} + iU_{n}^{D})$$

 $U_{\xi} + iU_{\eta}$ est le déplacement écrit dans le repère $(H/\zeta_{\xi}, \zeta_{\eta})$

Sur le segment [-1,+1] dans le plan ζ , imposons une discontinuité U, comme dans le cas de la fissure rectiligne du chapitre 2. Alors :

$$\hat{\mathbf{U}}_{\zeta} = \hat{\mathbf{U}} \quad \text{sur} \quad]0, 1]$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{r} = -\hat{\mathbf{U}} \quad \text{sur} \quad [-1, 0[$$

La solution de l'équation 6.11 est alors (déplacement et rotation nuls à l'infini)

$$\chi \phi(\zeta) - \Omega(\zeta) = \frac{2\mu}{2i\pi} \left[\int_{1}^{0} \frac{-\hat{U}(\sigma)}{-\sigma - \zeta} d(-\sigma) + \int_{0}^{1} \frac{\hat{U}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \right]$$

soit encore :

(6.13)
$$k \phi (\zeta) - \Omega(\zeta) = \frac{\mu}{i\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\hat{U}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

6.3, CAS D'UN ELEMENT D'ORDRE 2. |3|

Supposons dans un premier temps que \hat{U} soit de la forme ao + b. Hous allons développer le calcul des contraintes et des déplacements en tout point du domaine dans le repère $(M/X_{\xi}, \frac{1}{X})$. Les calculs sont très longs et ne présentent pas l'intérêt d'être particulièrement développés, aussi nous n'en donnerons que les grandes lignes et les principaux résultats.

6.3.1. CALCUL DES POTENTIELS

Nous sommes dans un cas identique au chapitre 2. Nous aurons :

$$\phi(\zeta) = \frac{H}{1} \left[2a1 + (a \zeta + b) \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right]$$

$$\Omega(\zeta) = -\phi(\zeta)$$

$$H = \frac{\mu}{\pi(k+1)}$$

6.3.2. CALCUL DES CONTRAINTES

Remarquons tout d'abord les relations suivantes :

$$\omega'(\zeta) = \alpha \omega(\zeta)/\zeta$$

$$\omega''(\zeta) = \alpha(\alpha-1) \omega(\zeta)/\zeta^2$$

$$\frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[\omega'(\zeta) - \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \omega'(\overline{\zeta}) \right] \frac{1}{\omega'(\zeta)} = \frac{\overline{\zeta}}{\alpha} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|^2}$$

$$\frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \cdot \frac{\overline{\omega''(\zeta)}}{\left[\overline{\omega}'(\overline{\zeta})\right]^2} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|^2}$$

$$\frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\overline{\zeta}^2}{\alpha^2} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|^2}$$

$$\frac{\overline{\zeta}}{\zeta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} = \frac{\overline{\zeta}}{\alpha \omega(\zeta)}$$

compte tenu de ces résultats et de la valeur des potentiels complexes $\boldsymbol{\Omega},$ l'expression 6.7 devient :

$$\sigma_{\eta\eta} - i\sigma_{\eta\xi} = \frac{1}{\alpha \omega(\zeta)} \left[\zeta \phi'(\zeta) + \overline{\zeta} \phi'(\overline{\zeta}) \right]$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2} \overline{\zeta} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|^2} \left[\overline{\phi'(\zeta)} + \overline{\zeta} \overline{\phi''(\zeta)} \right]$$

De la même façon qu'au chapitre 3, nous pourrons calculer $\sigma_{\xi\xi}$ par :

$$\sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\eta\xi} = \left[\frac{2 \alpha - 1}{\alpha^2} \frac{\zeta}{\omega(\zeta)} + \frac{\zeta}{\alpha^2} \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{|\omega(\zeta)|^2} \right] \phi'(\zeta)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \frac{\overline{\zeta}}{\omega(\zeta)} \overline{\phi'(\zeta)} - \frac{1}{\alpha} \frac{\zeta}{\overline{\omega}(\zeta)} \overline{\phi'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\alpha^2} \frac{\overline{\omega(\zeta)} - \overline{\omega}(\zeta)}{|\omega(\zeta)|^2} \phi''(\zeta)$$

Remplaçons maintenant $\phi(\zeta)$ par sa valeur 6.14. Nous aurons : $\sigma_{\eta\eta} = \text{Re } (A+C) \text{ Im } a + \text{Im}(A-C) \text{ Re } a + \text{Re } (B+D) \text{ Im } b + \text{Im } (B-D) \text{ Re } b$ $\sigma_{\eta\xi} = \text{Re } (A-C) \text{ Re } a - \text{Im } (A+C) \text{ Im } a + \text{Re } (B-D) \text{ Re } b - \text{Im } (B+D) \text{ Im } b$ $\sigma_{\xi\xi} = \text{Re } (E-G) \text{ Im } a + \text{Im } (E+G) \text{ Re} a + \text{Re } (F-I) \text{ Im } b + \text{Im } (F+I) \text{ Re} b$ avec : $A = \frac{H}{\alpha \omega(\zeta)} \left(\zeta \ln \frac{\zeta-1}{\zeta+1} + \frac{\zeta}{\zeta} \ln \frac{\overline{\zeta}-1}{\overline{\zeta}^2-1^2} + \frac{21}{\zeta^2-1^2} \right)$ $B = \frac{H}{\alpha \omega(\zeta)} \left(\frac{21}{\zeta^2-1^2} + \frac{21}{\zeta^2-1^2} + \frac{21}{\zeta^2-1^2} \right)$

$$C = \frac{H \ \overline{\zeta}}{\alpha^2} \ \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{\left|\omega(\zeta)\right|^2} \ \left[\overline{1n} \ \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + \frac{61 \ \overline{\zeta}}{\overline{\zeta}^2 - 1^2} - \frac{41 \ \overline{\zeta}^3}{(\overline{\zeta}^2 - 1^2)^2} \right]$$

$$D = \frac{H \overline{\zeta}}{\alpha^2} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|^2} \left(\frac{21}{\overline{\zeta}^2 - 1^2} - \frac{41 \overline{\zeta}^2}{(\overline{\zeta}^2 - 1^2)^2}\right)$$

$$E = H \left[\left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha^2} \frac{\zeta}{\omega(\zeta)} + \frac{\zeta}{\alpha^2} \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{|\omega(\zeta)|^2} \right) \left(\ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + \frac{21 \zeta}{\zeta^2 - 1^2} \right) + \frac{\zeta^2}{\alpha^2} \frac{\overline{\omega}(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|^2} \left(\frac{41}{\zeta^2 - 1^2} - \frac{41 \zeta^2}{(\zeta^2 - 1^2)^2} \right) \right]$$

$$F = H \left[\left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha^2} \frac{\zeta}{\omega(\zeta)} + \frac{\zeta}{\alpha^2} \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{|\omega(\zeta)|^2} \right) \frac{21}{\zeta^2 - 1^2} - \frac{\zeta^2}{\alpha^2} \frac{\overline{\omega}(\zeta) - \overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|^2} \frac{41 \zeta}{(\zeta^2 - 1^2)^2} \right]$$

$$G = H \left[\frac{\overline{\zeta}}{\alpha \overline{\omega(\zeta)}} \left(-\overline{\ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}} - \frac{21 \overline{\zeta}}{\overline{\zeta^2 - 1^2}} \right) + \frac{\zeta}{\alpha \overline{\omega(\zeta)}} \left(\overline{\ln \frac{\overline{\zeta} - 1}{\zeta + 1}} + \frac{21 \zeta}{\zeta^2 - 1^2} \right) \right]$$

$$I = H \left[-\frac{\overline{\zeta}}{\alpha \overline{\omega(\zeta)}} \frac{21}{\overline{\zeta^2 - 1^2}} + \frac{\zeta}{\alpha \overline{\omega(\zeta)}} \frac{21}{\zeta^2 - 1^2} \right]$$

6.3.3. CALCUL DES DÉPLACEMENTS

Les calculs s'effectuent comme pour les contraintes à partir de la relation 6.8 et vont conduire aux résultats suivants :

(6.17)
$$2\mu U_{\xi} = Im (J+M) Rea + Re (J-M) Ima + Im (L+N) Reb + Re(L-N) Imb$$

$$2\mu U_n = - \text{Re}(J+M) \text{ Rea} + \text{Im} (J-M) \text{ Im a} - \text{Re}(L+M) \text{ Reb} + \text{Im}(L-M) \text{ Im b}$$

avec
$$J = \frac{H(\omega(\zeta))}{\omega(\zeta)} \left[21 (k-1) + k \zeta \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - \overline{\zeta} \ln \frac{\overline{\zeta} - 1}{\overline{\zeta} + 1} \right]$$

$$L = \frac{H|\omega(\zeta)|}{\omega(\zeta)} \left[k \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - \ln \frac{\overline{\zeta} - 1}{\overline{\zeta} + 1} \right]$$

$$i \hat{I} = i \frac{\overline{\zeta}}{\alpha} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|} \left[\frac{\overline{1} \overline{\zeta} - \overline{1}}{\zeta + 1} + \frac{21}{\overline{\zeta}^2 - 1^2} \right]$$

$$N = H \frac{\overline{\zeta}}{\alpha} \frac{\omega(\zeta) - \omega(\overline{\zeta})}{|\omega(\zeta)|} \left[\frac{21}{\overline{\zeta}^2 - 1^2} \right]$$

6.4. EXEMPLE NUMERIQUE

Pour appliquer les résultats précédents à la méthode des discontinuités de déplacement, c'est à dire construire la matrice d'influence, il faut encore calculer l'influence du coin sur lui-même, puis examiner les problèmes numériques soulevés par l'existence de fonctions multiformes.

6.4.1. CALCUL DES CONTRAINTES ET DÉPLACEMENT SUR LE BORD DU COIN

Le domaine étant toujours supposé à gauche ("G"), utilisons les relations 6.9 :

$$(6.18) \qquad \omega'(\sigma) (\sigma_{\eta\eta} - i\sigma_{\eta\xi})^{G}(t) = \phi'^{G}(\sigma) - \Omega'^{D}(\sigma)$$

$$2\mu (u_{\xi} + iu_{\eta})^{G}(t) = \frac{|\sigma \omega'(\sigma)|}{|\sigma \omega'(\sigma)|} [k \phi^{G}(\sigma) + \Omega^{D}(\sigma)]$$

Les potentiels ϕ et Ω ont la même forme que les potentiels développés au chapitre 3. En conséquence pour calculer les termes $\phi'^{G}(\sigma)$, $\Omega^{D}(\sigma)$, $\phi^{G}(\sigma)$, $\Omega^{D}(\sigma)$, il suffit de remplacer dans (2.9) z par σ .

Les calculs présents ont été réalisés pour des configurations géométriques rectangulaires ou carrées. Pour cela, il suffit donc de poser :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

$$(6.19) \qquad \omega(\zeta) = e^{i\pi/4} \sqrt{\zeta}$$

Comme la fonction $\omega(\zeta)$ est multiforme, on utilisera la détermination logarithmique suivante :

$$\theta \in [0, \pi]$$
 Im $\zeta > 0$ $\theta \in [\pi, 2\pi]$ Im $\zeta < 0$

Alors que l'ordinateur donnera :

$$\theta \in [-\pi, 0]$$
 Im $\zeta < 0$

Donc avec cette configuration choisie, on procèdera à un test pour savoir le signe de $\mbox{Im } \zeta$ et de changer en conséquence les arguments.

Cependant, d'après (6.18), le calcul des contraintes et déplace-ments sur le bord du coin s'effectuera après avoir défini $\omega(\sigma)$ pour

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1, 1 \end{bmatrix} : \\ \omega(\sigma) = e^{i\pi/4} \sqrt{\sigma} \qquad 0 \leqslant \sigma < 1$$

$$(6.20) \qquad \omega(\sigma) = ie^{i\pi/4} \sqrt{-\sigma} \qquad -1 < \sigma \leqslant 0$$

Les calculs qui suivront après sont longs et ne présentent pas de difficultés majeures à part qu'il faudra distinguer les deux cas correspondant aux deux bords du coin définis par (6.20).

Pour
$$0 \leqslant \sigma < 1$$
 et $H = \frac{\mu}{(k+1) \pi}$

$$\sigma_{\eta \eta}^{G} = 2H \sqrt{\sigma} \text{ (Re A Im a - Im A Re a + Re B Im b - Im B Re b)}$$

$$\sigma_{\eta \xi}^{G} = 2H \sqrt{\sigma} \text{ (Re A Re a + Im A Im a + Re B Re b + Im B Im b)}$$

$$\sigma_{\xi \xi}^{G} = 2H \sqrt{\sigma} \text{ [Re(A + 4\pi \gamma) Im a - Im (A - 4\pi \gamma) Re a + Re B Im b - Im B Re b]}$$

$$(6.21)$$

$$2\mu u_{\xi}^{G} = H \text{ [(Re C + Im E) Im a - (Im C - Re E) Re a + (Re D + Im F) Im b - (Im D - Re F) Re b]}$$

$$2\mu u_{\eta}^{G} = -H \text{ [(Re C + Im E) Re a + (Im C - Re E) Im a + (Re D + Im F) Re b + (Im D - Re F) Im b]}$$

avec

$$A = \gamma \left(2 \operatorname{Log} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} + \frac{41\sigma}{\sigma^2 - 1^2}\right)$$

$$B = \frac{41\gamma}{\sigma^2 - 1^2}$$

$$C = \gamma \left(k - 1\right) \left(21 + \sigma \operatorname{Log} \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right)$$

$$D = \gamma \left(k - 1\right) \operatorname{Log} \frac{1-\sigma}{1+\sigma}$$

$$E = \gamma \left(k + 1\right) \pi \sigma$$

$$F = \gamma \left(k + 1\right) \pi$$

 $\gamma = e^{i\pi/4}$

Et pour - 1 < σ < 0, il suffit de prendre $\sqrt{-\sigma}$ au lieu de $\sqrt{\sigma}$ dans (6.21) et en tenant compte des relations (6.18) et (6.20), on obtient :

et que :

$$\sigma_{\xi\xi}^{G}$$
 = 2H $\sqrt{-\sigma}$ [Re (A + 4π γ) Re a + Im (A - 4π γ) Im a +
+ Re B Re b + Im B Im b]

Enfin, on peut exprimer maintenant les contraintes et déplacements en fonction de quatre discontinuités \hat{u} , \hat{v}^+ , \hat{v}^- et \hat{v}^+ en utilisant la relation (2.19)

$$a = \frac{\hat{u}^+ - \hat{u}^- + i(\hat{v}^+ - \hat{v}^-)}{21}$$

(6.22)

$$b = \frac{0^{+} + 0^{-} + i(\hat{v}^{+} + \hat{v}^{-})}{2}$$

6.4.2. EXEMPLE NUMERIQUE: |3|

Soit une plaque carrée de côté a, centrée à l'origine, soumise à une compression uniforme p = E suivant deux côtés opposés (figure 6.2).

On discrétise le contour de la plaque en N segments de longueur identique 2L sauf aux coins, où les segments seront de longueur $21 = \lambda \ 2L \ (0 < \lambda < 1)$.

Dans cet exemple, on introduira l'élément coin dans la méthode des discontinuités de déplacement d'ordre 2, et on étudiera l'état des contrain-

tes o et o sur des droites, parallèles aux axes de la plaque, proches

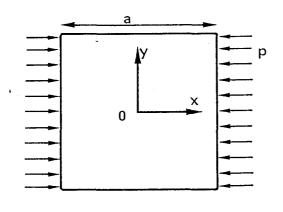


Figure 6.2

du contour. On choisira pour coefficient de Poisson v = 0,25. L'exemple traite le cas $\lambda = 0.005$ et N = 24 (Matrice d'influence 112 x 112). On présentera une comparaison d'erreurs entre la méthode d'éléments coins et la méthode des discontinuités de déplacement d'ordre 2 par rapport aux valeurs théoriques. Dans le cas de la méthode des discontinuités de déplacement d'ordre 2, l'élément coin est remplacé par deux éléments d'ordre 2 de même longueur (matrice d'influence 128 x 128). L'application de la charge unité permet de comparer simplement les résultats en erreur relative lorsqu'on compare à 1 et en erreur absolue lorsqu'on compare à 0.

Les figures (6.3) et (6.4) présentent respectivement les courbes d'erreurs des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} pour x = 1,9 a/2 et y = 1,9 a/2.

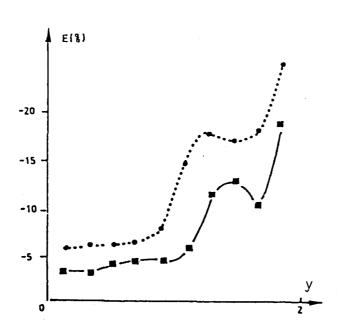


Figure 6.3.a

Courbes d'erreur relative E pour σ_{xx} le long de x = 1,9 a/2

__ **=** __ élément coin

--- • --- élément d'ordre 2



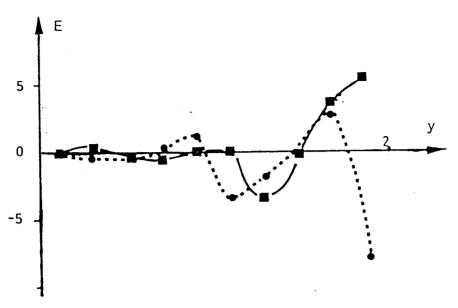


Figure 6.3.b

Courbe d'erreur absolue E pour σ_{uu} le long de x = 1,9 a/2

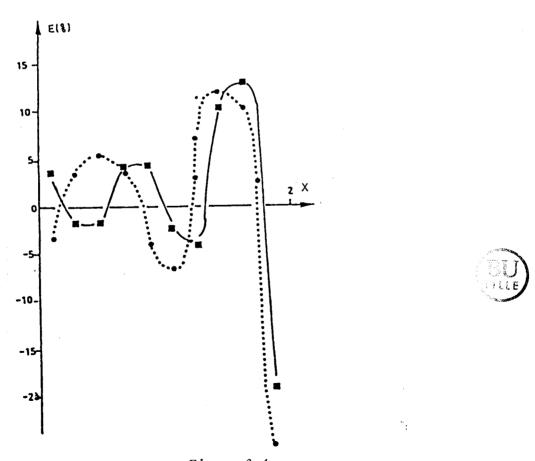


Figure 6.4.a

Courbe d'erreur relative E pour σ_{xx} le long de y=1,9 a/2

élément coin

--- élément d'ordre 2

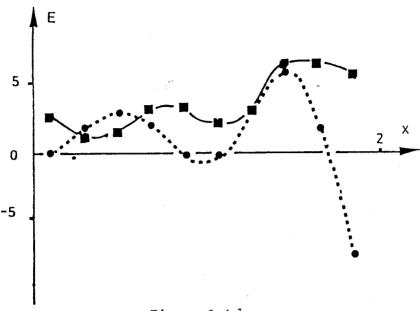


Figure 6.4.b

Courbes d'erreur absolue E pour σ_{yy} le long de y=1,9 a/2

——■— élément coin

---•-- élément d'ordre 2

Les figures (6.3) et (6.4) montrent qu'avec une taille de matrice réduite (4(N+4), 4(N+4)) on obtient une nette amélioration des valeurs des contraintes $\sigma_{\rm XX}$ et $\sigma_{\rm yy}$ en des points proches du coin de la plaque. Alors que la taille de matrice pour l'élément d'ordre 2 est de (4(N+8), 4(N+8)). On remarque que pour λ assez petit (λ = 0,005) les valeurs de $\sigma_{\rm XX}$ et $\sigma_{\rm yy}$ sont meilleures au niveau du coin et relativement moins bonnes au niveau des éléments voisins.



CONCLUSION

CONCLUSION

Le présent travail montre les possibilités qu'offre la méthode des discontinuités de déplacement pour la résolution des problèmes de l'élasticité. Cette méthode n'est autre qu'une méthode de frontière, puisqu'on peut déterminer l'état de contraintes et de déplacement en tout point du domaine, à partir des conditions aux limites imposées sur la frontière. Du principe même de cette méthode, découle une méthode numérique simple. Le choix de cette méthode de discontinuité n'a pas pour but d'obtenir des valeurs exactes ou approchées des contraintes et déplacements sur le contour mais de donner des valeurs le plus possible approchées en des points hors du contour au moyen d'un nombre minimum d'éléments discrétisés, c'est-à-dire d'une matrice d'influence la plus réduite possible.

Cette méthode a été développée dans un premier temps par CROUCH |6| en coordonnées cartésiennes en imposant une discontinuité de déplacement constante le long du contour. La solution de base avait été obtenue à partir des potentiels élastiques de Neuber-Papkovitch. En champ complexe, on obtient la même solution de façon simple à partir de l'intégrale de CAUCHY.

Le présent travail donne une autre dimension à la méthode en ce qui concerne d'une part, l'outil mathématique choisi, la théorie des potentiels complexes ramenant les problèmes aux limites à des formules intégrales, et d'autre part le libre choix de la nature de la discontinuité de déplacement, polynomiale ou parabolique.

Le choix d'un élément d'ordre 2, présente cependant un paradoxe en tête de fissure puisque le déplacement doit être continu, principe même de la continuité de la matière. Cette question soulevée nous a conduits à construire en tête de fissure deux éléments dits dégénérés de type linéaire et parabolique. Le premier élément nécessite une discrétisation fine en tête de fissure, d'où une taille de matrice très importante. Par contre, le second élément paraît plus intéressant, puisqu'il donne une bonne approche des contraintes et donc des facteurs d'intensité de contraintes et qu'il ne nécessite pas une discrétisation fine en tête de fissure.

Dans le cas des domaines présentant des contours dont la courbure varie rapidement, la pratique de la méthode impose une discrétisation fine. Pour éviter cette difficulté, on pourra utiliser des éléments d'ordre plus élevé avec une discrétisation large. Cependant, on se heurte à une autre difficulté du fait que les points nodaux où seront appliquées les charges se trouvent éloignés du contour, ce qui conduit peut être à

des erreurs de calcul de contraintes et déplacement au niveau du contour. Il est vrai que l'utilisation de ce type d'éléments demande de longs calculs.

La théorie des potentiels complexes montre aussi que l'on peut appliquer la méthode des discontinuités de déplacement à des éléments circulaires. Ce type d'élément décrit bien les conditions aux limites puisque cette fois-ci les points nodaux sont sur le contour. Deux types d'éléments ont été proposés : éléments à un noeud et à deux noeuds.

Deux exemples traités :

- Plaque infinie percée d'un trou soumis à une pression uniforme. La solution obtenue est identique à la solution exacte. Ceci est dû au fait que la solution de base a été construite pour le cas d'un déplacement radial constant.
- Plaque infinie percée d'un trou soumis à une pression sur deux quarts opposés. Les résultats sont obtenus avec une erreur négligeable (inférieure à 10-4).

Par extension de la méthode, il a été proposé l'étude d'un élément curviligne par utilisation de la transformation conforme sur :

- un cercle,
- une droite.

Le second cas utilisé pour des contours curvilignes présentant des coins (méthode "élément coin"). Ainsi dans le cas d'une plaque carrée, la solution est convergente au niveau des coins lorsque la longueur de l'élément coin est négligeable devant celle d'un élément hors coin. Cependant, on remarque une perturbation des valeurs des contraintes au voisinage des segments proches des éléments coins.

D'autres méthodes de discontinuités, soit de déplacement, soit de contrainte, soit mixtes ont été étudiées (chapitre IV). Les méthodes faisant intervenir des discontinuités de contraintes donnent des déplacements infinis à l'infini. Par conséquent, ce type de méthodes impose l'utilisation de milieux élastiques bornés. La méthode en déplacement avec discontinuité de déplacement propose des solutions élémentaires dépendant du coefficient de Poisson.

Ce travail a permis de mettre au point la méthode numérique des discontinuités de déplacement, étape nécessaire à l'approfondis-sement de l'étude des autres méthodes de discontinuités traitées au chapitre IV.

Les solutions n'ayant été développées qu'en milieux infinis en imposant des charges réparties sur la frontière du domaine et l'étude excluant l'introduction de forces concentrées, il serait intéressant d'axer ultérieurement la recherche sur certains sujets tels que :

- 1°) Traiter les méthodes des discontinuités aux problèmes plans en proposant des solutions en milieux semi-infinis.
- 2°) Mettre au point une étude introduisant des forces concentrées en milieux infinis et semi-infinis.
- 3°) Appliquer les méthodes des discontinuités aux milieux élastiques stratifiés.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | BOUHADDANE A., HENRY J.P. (1984) "Développement de méthode numérique en calcul élastique plan par la méthode des discontinuités de déplacement et les potentiels complexes". Coî. Génie Civil CACHAN
- | 2 | BOUHADDANE A., MOREL E., HENRY J.P., KONDO D., FEDRIGO D. (1985) "Application de l'intégrale de Cauchy à la méthode des discontinuités de déplacement". Groupe Français de Rhéologie.
- 3 BOUHADDANE A., HENRY J.P. (1987) "Développement d'un élément coin dans la méthode des discontinuités de déplacement". 8e Congrès de Mécanique NANTES (acceptée)
- | 4 | CAIGNAERT G., HENRY J.P. (1987) "Exercices d'élasticité" Dunod Ed. (à paraître).
- | 5 | CRAWFORD A.M., CURRAN J.H. (1982) "Higher order functional variation displacement discontinuity elements" Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Vol. 19, p. 143-148.
- | 6| CROUCH S.L. (1976) "Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method." Int. J. Num. Meth in Eng. 10, p. 301-343.
- 7 | CROUCH S.L., STARFIELD A.M. (1983) "Boundary element methods in Geome-chanics" Ed. George Allen and Uwin.
- | 8 | GIODA G. (1984) "A simple Boundary Equation Technique for Elastic stress
 Analysis of Underground Cavities" Rock Mech. \$ Rock Eng. 17, 147-165.
- 9 | HENRY J.P., BOUHADDANE A., MOREL E. (1986) "Application of the Cauchy Integral to the displacement discontinuity method" Proceedings of the 8 th Int. Conf. Boundary Elements VIII TOKYO Vol. 2 p. 677-686
- |10 | KISU H., YUUKI R., MATSUMOTOT (1986) "Boundary Element analysis For some crack problems" Proceedings of the 8th Int. Conf. Boundary Elements VIII TOKYO Vol. 1, p. 159-168
- [11 | MILNE THOMPSON L.M. (1968) "Systèmes élastiques plans" Dunod
- |12 | MUSHKELISHVILI N.I. (1963) "Some basic problems of mathematical theory of elasticity Noordhoof" Ed. Groningen
- | 13| NISITANI H., NOGUCHI H. (1986) "Stress Analysis of a rectangular plate with a crack by body Force Doublet Method" Proceedings of the 8th Int. Conf. Boundary Elements VIII TOKYO Vol. 1, p. 143-158.

- |14 | SNEDDON I.N., LOWENGRUB M. (1969) "Crack Problems in the classical theory of Elasticity" Wiley and sons. Ed.
- | WANG CHENG B., LIU XING Y. (1986) "Boundary Element Method for semi infinite Region Problems." Proceedings of the 8th Int. Conf.

 Boundary Elements VIII TOKYO Vol. 1, P. 237-246.
- |16| WILES T.D., CURRAN J.H. (1984) "A general 3-D Displacement Discontinuity Method Proceedings of the 4 th Int. Conf. Num. Methods in Geomech. Edmonton CANADA Vol. 1, p. 103-111.

ANNEXE I

LOGICIEL GENERAL

DE CALCUL PAR ELEMENTS 2 NOEUDS.

METHODE DES DISCONTINUITES

DE DEPLACEMENT

CHAMP COMPLEXE

```
С
С
                 discontinuite de deplacement pour un element
c
                            rectiligne a deux noeuds
С
C
      ************
c
      dimension a(25600), r(160), e(40), zo(40), x(40), y(40), dl(40),
     sbn(40),bt(40),dng(40),dnd(40),dtg(40),dtd(40)
      common/s1/fsb(16)
      common/s2/h,hp,k
      data imp.lc/20,10/
      complex zo,e,zij,eij,zgij,zdij,es,zs,esj,zsj,zi,imag
      real kinu
      pi=4.*atan(1.)
      eps=.1e-21
      read (lc, 1000) nu, numbc, numos, u, numbs
      write (imp.1) nu.numbc.numos.u.numbs
      k=3.-4*nu
      h=1./(8*pi*(1-nu**2))
      hp=1./(16*pi*(1-nu))
      write (imp,4) numos
      write (imp.5) nu
      write (imp.6) u
      if(numbc.eq.0) go to 60
   discretisation du contour circulaire-centres et demi-longueurs des
C
   segments
      numbd=0
      do 50 i=1, numbc
      fac=1.
      read (lc, 1000) ray, tetad, tetaf, num, tn, tt
      write (imp,2) ray, tetad, tetaf, num, tn, tt
      teta=(tetaf-tetad)/num
      if(teta.lt.O.) fac=-1.
      sw=ray*sqrt(2-2*cos(teta))
      haut=ray*cos(teta/2)
      do 50 ni=1/num
      numbd=numbd+1
      tetam=tetad+(2*ni-1)*teta/2
      x(numbd)=haut*cos(tetam)
      y(numbd) = haut*sin(tetam)
      dl(numbd) = sw/2
      e(numbd)=fac*cmplx(-sin(tetam),cos(tetam))
      zo(numbd) = cmptx(x(numbd),y(numbd))
      bn(numbd) = tn
      bt(numbd)=tt
   50 continue
      write (imp.3) numbe
      write (imp,14)
      do 55 i=1, numbd
   55 write (imp,7) i, x(i),y(i),dl(i),e(i),bn(i),bt(i)
  60 if (numbs.eq.0) go to 61
  discretisation du contour rectangulaire-centres et demi-longueurs
  des segments
      numbd=0
      do 51 i=1 numbs
      read (lc,1000) num, xb, yb, xe, ye, tn, tt
      write (imp.20) num.xb,yb,xe,ye,tn,tt
      xd=(xe-xb)/num
      yd=(ye-yb)/num
      sw=sqrt(xd**2+yd**2)
```

```
do 51 ni=1, num
   numbd=numbd+1
   x(numbd) = xb+(2*ni-1)*xd/2
   y(numbd)=yb+(2*ni-1)*yd/2
   dl(numbd) = sw/2
   e(numbd) = cmplx(xd/sw,yd/sw)
   zo(numbd) = cmplx(x(numbd),y(numbd))
   bn(numbd) = tn
   bt(numbd)=tt
51 continue
   write (imp.13) numbs
   write (imp.14)
   do 56 i=1, numbd
56 write (imp,7) i,x(i),y(i),dl(i),e(i),bn(i),bt(i)
61 continue
matrice
   m=4*numbd
   n=2*numbd
   numpc=2
   do 80 ni=1, numpo
   do 90 i=1, numbd
   i1=2*i-1
   i2=2*i
   xi = -u * dl(i)
   if (ni.gt.1) xi=u*dl(i)
   call initial (xi,dl(i),0)
   jd=i1
   if (ni.gt.1) jd=i2
   a(jd+(i1-1)*m)=fsb(1)
   a(jd+(i2-1)+m)=fsb(2)
   a(jd+(i1+n-1)*m)=fsb(3)
   a(jd+(i2+n-1)*m)=fsb(4)
   a(jd+n+(i1-1)*m)=fsb(5)
   a(jd+n+(i2-1)*m)=fsb(6)
   a(jd+n+(i1+n-1)*m)=fsb(7)
   a(jd+n+(i2+n-1)*m)=fsb(8)
   do 90 j=1, numbd
   i1 = 2 * i - 1
   j2=2*j
   if (i.eq.j) go to 90
   eij=e(i)/e(j)
   zij=(zo(i)-zo(j))/e(j)
   zgij=zij-u*dl(i)*eij
   zdij=zij+u*dl(i)*eij
   zi=zgij
   if (ni.gt.1) zi=zdij
   call initia
   call intermed (zi,dl(j),eij,1,0)
   if (ni.gt.1) i1=i2
   a(i1+(j1-1)*m)=fsb(1)
   a(i1+(j2-1)*m)=fsb(2)
   a(i1+(j1+n-1)*m)=fsb(3)
   a(i1+(j2+n-1)*m)=fsb(4)
   a(i1+n+(j1-1)*m)=fsb(5)
   a(i1+n+(j2-1)*m)=fsb(6)
   a(i1+n+(j1+n-1)*m)=fsb(7)
   a(i1+n+(j2+n-1)*m)=fsb(8)
90 continue
80 continue
resolution du systeme d'equations (methode de gauss)
```

```
do 100 i=1, numbd
    r(2*i-1) = bn(i)
    r(2*i)=bn(i)
    r(2*i-1+n)=bt(i)
    r(2*i+n)=bt(i)
100 continue
    call gelg (r,a,m,1,eps,ier)
    if(ier.ne.0) go to 380
    write (imp,21)
    do 105 i = 1.m
    write (imp, 19) i, r(i)
105 continue
    do 110 i=1, numbd
    dnq(i)=r(2*i-1)
    dnd(i)=r(2*i)
    dtg(i)=r(2*i-1+n)
    dtd(i)=r(2*i+n)
110 continue
calcul des contraintes et deplacements sur le contour
    pr=1./(4.*(1.-nu**2))
    write (imp, 17)
    do 115 ni=1, numpc
    if(ni.gt.1) write (imp.18)
    write (imp,15)
    do 120 i=1, numbd
    xi=-u*dl(i)
    if(ni.gt.1) xi=u*dl(i)
    call initial (xi,dl(i),0)
    sigtt=fsb(1)*dng(i)+fsb(2)*dnd(i)+fsb(3)*dtg(i)+fsb(4)*dtd(i)+pr
   s*(dtd(i)-dtg(i))/dl(i)
    call initial (xi,dl(i),0)
   signn=fsb(1) *dng(i)+fsb(2) *dnd(i)+fsb(3) *dtg(i)+fsb(4) *dtd(i)
   signt = fsb(5) * dng(i) + fsb(6) * dnd(i) + fsb(7) * dtg(i) + fsb(8) * dtd(i)
   call initial (xi,dl(i),1)
   utpos=fsb(9)*dng(i)+fsb(10)*dnd(i)+fsb(11)*dtg(i)+fsb(12)*dtd(i)
   unpos=fsb(13)*dng(i)+fsb(14)*dnd(i)+fsb(15)*dtg(i)+fsb(16)*dtd(i
  s)
   do 125 j=1, numbd
   if(i.eq.j) go to 125
   eij=e(i)/e(j)
   zij=(zo(i)-zo(j))/e(j)
   zgij=zij-u*dl(i)*eij
   zdij=zij+u*dl(i)*eij
   zi=zgij
   if(ni.gt.1) zi=zdij
   dh=dl(j)
   call initia
   call intermed (zi,dh,eij,-1,0)
   sigtt=sigtt+fsb(1) *dng(j)+fsb(2) *dnd(j)+fsb(3) *dtg(j)+fsb(4) *dtd
  s (j)
   call initia
   call intermed (zi,dh,eij,1,0)
   signn = signn + fsb(1) * dng(j) + fsb(2) * dnd(j) + fsb(3) * dtg(j) + fsb(4) * dtd
  s(j)
   signt=signt+fsb(5)*ang(j)+fsb(6)*and(j)+fsb(7)*dtg(j)+fsb(8)*dtd
  s (j)
   call intermed (zi,dh,eij,1,1)
   utpos=utpos+fsb(9) *dng(j)+fsb(10)*dnd(j)+fsb(11)*dtg(j)+fsb(12)*
   unpos=unpos+fsb(13)*dng(j)+fsb(14)*dnd(j)+fsb(15)*dtg(j)+fsb(16)
```

```
s*dtd(j)
125 continue
    write (imp.8) i, signn, signt, sigtt, utpos, unpos
120 continue
115 continue
    if (numos) 380,380,130
130 write (imp, 16)
    nump=0
    do 140 i=1, numos
    read (lc,1000) num,xb,yb,xe,ye
    write (imp,9) num,xb,yb,xe,ye
    xd='(xe-xb)/num
    yd=(ye-yb)/num
    dw = sqrt(xd**2+yd**2)
    es=cmplx(xd/dw,yd/dw)
    do 140 ni=1, num
    nump=nump+1
    xs = xb + (2*ni-1)*xd/2
    ys = yb + (2*ni-1)*yd/2
    zs=cmplx(xs,ys)
    signn=0.
    signt=0.
    sigtt=0.
    un=0.
    ut=0.
    do 150 j=1 numbd
    esj=es/e(j)
    zsj=(zs-zo(j))/e(j)
    zi=zsj
    dh=dl(j)
    call initia
    call intermed (zi,dh,esj,-1,0)
    sigtt=sigtt+fsb(1)*dng(j)+fsb(2)*dnd(j)+fsb(3)*dtg(j)+fsb(4)*atd
   s(j)
    call initia
    call intermed (zirdhresj.1.0)
    signn=signn+fsb(1)*dng(j)+fsb(2)*dnd(j)+fsb(3)*dtg(j)+fsb(4)*dtd
   s(j)
    signt=signt+fsb(5)*dng(j)+fsb(6)*dnd(j)+fsb(7)*dtg(j)+fsb(8)*dtd
   s(j)
    call intermed (zi,dh,esj,1,1)
    ut = ut + fsb(9) * dng(j) + fsb(10) * dnd(j) + fsb(11) * dtg(j) + fsb(12) * dtd(j)
    un=un+fsb(13)*dng(j)+fsb(14)*dnd(j)+fsb(15)*dtg(j)+fsb(16)*dtd(j
   s)
150 continue
    write (imp,10) nump,xs,ys,signn,signt,sigtt,ut,un
140 continue
380 write (imp.11) ier
    go to 300
 formats de lecture et d'edition
  1 format(1x, f4, 2, 1x, i2, 1x, i2, 1x, f4, 2, 1x, i2)
  2 format(1x, f8, 4, 1x, f10, 7, 1x, f10, 7, 1x, i4, 1x, f3, 1, 1x, f3, 1)
  3 format(/, 'nombre d'arcs circulaires centres a liorigine du contou
   sur etudie=',i2,/)
  4 format('nombre de segments utilises pour determiner les autres
   sendroits ou l'on veut obtenir des resultats=',i3,/)
  5 format(5x, coefficient de poisson nu=',f4.2,/)
  6 format(5x, coefficient de position des charges u=1,f4.2)
  7 format(i3,3(9x,f9.5),8x,'(',f9.5,3x,',',',3x,f9.5,')',7x,f9.5,8x,f
```

```
s9.5)
   8 format(i3,5(10x,f9,5))
   9 format(i3.4(1x.f9.5))
  10 format(2x = 13.4(9x = 19.5) = 3(8x = 19.5))
  11 format(//,5x,'ier=',i2,//)
  13 format(/, 'nombre de segments de droites du contour etudie=',i2,/
    s)
  14 format(/, 'seg', 10x, 'x-coord', 11x, 'y-coord', 10x, 'demi-long', 10x,
    s'(cos-dir',3x,',',3x,'sin-dir)',8x,'tract-norm',7x,'tract-tang',
    s//)
  15 format(/, 'seg', 12x, 'signn', 14x, 'signt', 14x, 'sigtt', 14x, 'utpos',
    s14'x, 'unpos',//)
  16 format(/, 'point', 10x, 'x-coord', 11x, 'y-coord', 12x, 'signn', 13x,
    s'signt',12x,'sigtt',10x,'ut(total)',8x,'un(total)',//)
  17 format(//,10x,'calcul des contraintes et deplacements sur le
    scote gauche des segments du contour',//)
  18 format(//,10x,'calcul des contraintes et deplacements sur le
    scote droit des segments du contour',//)
  20 format(i3,4(1x,f9.5),2(1x,f3.1))
  19 format(50x, 'b(', i3,')=',e12.5)
  21 format(//)
1000 format(v)
 300 stop
     end
     subroutine initial (xi,dl,delta)
     common/s1/fsb(16)
     common/s2/h,hp,k
     real k,f(14),f11,f12,f13,f14
     integer delta
     f(11) = f11(xi \neq dl)
     f(12)=f12(xi \neq dl)
     if (delta.eq.0) go to 10
     f(13) = f13(xi/dl)
     f(14) = f14(xi,dl)
 10 fsb(1) = -h * f(11)
     fsb(2) = h * f(12)
     fsb(3)=0.
     fsb(4)=0
     fsb(5)=0.
     fsb(6)=0.
     fsb(7) = fsb(1)
     fsb(8) = fsb(2)
     if (delta.eq.0) go to 20
     fsb(9) = hp * (k-1) * f(13)
     fsb(10) = hp*(k-1)*f(14)
     fsb(11) = (dl - xi)/(4*dl)
     fsb(12) = (dl + xi)/(4*dl)
     fsb(13) = fsb(11)
     fsb(14) = fsb(12)
     fsb(15) = -fsb(9)
     fsb(16) = -fsb(10)
 20 continue
     return
     subroutine intermed (z,dl,deij,mult,coeff)
     common/s1/ fsb(16)
     common/s2/ hahpak
     complex f(10),f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9,f10,con,col,dnneg,dnpos
    s,dtneg,dtpos,z,deij,ceij
     real k
```

```
integer coeff
   if(coeff.eq.1) go to 20
   f(1) = f1(z,dl)
   f(2) = f2(z \neq gl)
   f(3) = f3(z,dl)
   f(4)=f4(z,dl)
   f(5)=f5(z,dl)
   f(6) = f6(z \neq al)
   con=-mult*(deij**2)
   col=(1.,0.)+con
   cndnneg=h*real(-f(1)-con*f(2))
   cndhpos=h*real(f(3)-con*f(4))
   cndtneg=h*aimag(-col*f(5)-con*f(2))
   cndtpos=h*aimag(col*f(6)-con*f(4))
   if(mult.eq.-1) go to 30
   ctdnneg=h * aimag(-con * f(2))
   ctdnpos=h*aimag(-con*f(4))
   ctdtneg=h*real(con*(f(5)+f(2)))
   ctdtpos=h*real(-con*(f(6)-f(4)))
   go to 30
20 f(7)=f7(z,dl)
   f(8) = f8(z,dl)
   f(9) = f9(z \cdot dl)
   f(10) = f10(z,dl)
   ceij=conjg(deij)
   dnneg=hp*ceij*(-2*(k-1)-k*f(7)+conjg(f(7))+f(8))
   dnpos=hp*ceij*(2*(k-1)+k*f(9)-conjg(f(9))-f(10))
   dtneg=hp*ceij*(-2*(k-1)-k*f(7)+conjg(f(7))-f(8))
   dtpos=hp*ceij*(2*(k-1)+k*f(9)-conjg(f(9))+f(10))
   fsb(9)=real(dnneq)
   fsb(10)=real(dnpos)
   fsb(11)=aimag(dtneg)
   fsb(12)=aimag(dtpos)
   fsb(13)=aimag(dnneg)
   fsb(14) = a i mag(dnpos)
   fsb(15) = - real(dtneg)
   fsb(16) = -real(dtpos)
   go to 40
30 fsb(1)=cndnneg
   fsb(2) = cndnpos
   fsb(3)=cndtneg
   fsb(4)=cndtpos
   if(mult.eq.-1) go to 40
   fsb(5)=ctdnneg
   fsb(6)=ctdnpos
   fsb(7)=ctdtneg
   fsb(8)=ctdtpos
40 continue
   return
   end
   subroutine initia
   common/s1/fsb(16)
   do 20 i=1.16
20 \text{ fsb(i)} = 0.
   return
   end
   function f1(z,a)
   complex flyz
   f1=(1./a)*alog(cabs((z-a)/(z+a)))+2./(z+a)
   return
```

```
end
function f2(z,a)
complex f2,z,zc
zc=conjg(z)
f2=2*a*(z-zc)/((z-a)*(z+a)*(z+a))
return
end
function f3(z,a)
complex f3.z
f3=(1./a)*alog(cabs((z-a)/(z+a)))+2./(z-a)
return
end
function f4(z,a)
complex f4,z,zc
zc=conjg(z)
f4=2.*a*(z-zc)/((z+a)*(z-a)*(z-a))
return
end
function f5(z,a)
complex f5,z
f5=(1./a)*clog((z-a)/(z+a))+2./(z+a)
return
end
function f6(z,a)
complex f6,z
f6=(1./a)*clog((z-a)/(z+a))+2./(z-a)
end
function f7(z,a)
complex f7.z
f7 = ((z-a)/a) * c \log((z-a)/(z+a))
return
end
function f8(z,a)
complex f8,z,zc,f5
zc=conjg(z)
f8=(z-zc)*conjg(f5(z*a))
return
end
function f9(z,a)
complex f9,z
f9=((z+a)/a)*clog((z-a)/(z+a))
return
end
function f10(z,a)
complex f10,z,zc,f6
zc=conjg(z)
f10=(z-zc)*conjg(f6(z*a))
return
end
function f11(x,a)
f11=(1./a)*alog((a-x)/(a+x))+2./(x+a)
end
function f12(x,a)
f12=(1./a)*alog((a-x)/(a+x))+2./(x-a)
return
end
function f13(x,a)
f13=((a-x)/a)*alog((a-x)/(a+x))-2.
```

```
return
   end
   function f14(x,a)
   f14=((x+a)/a)*alog((a-x)/(a+x))+2.
   return
   subroutine gelg(r,a,m,n,eps,ier)
   dimension a(40000),r(200)
   if(m) 23,23,1
 1 ier=0
   piv=0.0
   mm = \dot{m} \star m
   nm = n * m
   do 3 l=1,mm
   tb=abs(a(l))
   if(tb-piv) 3,3,2
 2 piv=tb
   i = l
 3 continue
   tol=eps*piv
   lst=1
   ao 17 k=1.m
   if(piv) 23,23,4
 4 if(ier) 7,5,7
 5 if(piv-tol) 6,6,7
 6 ier=k-1
 7 pivi=1.0/a(i)
   j = (j-1)/m
   i = i - j * m - k
   j = j + 1 - k
   do 8 l=k \cdot nm \cdot m
   ll=1+i
 , tb=pivi*r(ll)
   r(ll)=r(l)
 8 r(l) = tb
   if(k-m) 9,18,18
 9 lend=lst+m-k
   if(j) 12,12,10
10 ii = j * m
   do 11 l=lst,lend
   tb=a(l)
   ll=l+ii
   a(l)=a(ll)
11 a(ll)=tb
12 do 13 l=lst.mm.m
   ll=l+i
   tb=pivi*a(ll)
   a(ll)=a(l)
13 a(l)=tb
   a(lst)=j
   piv=0.0
   lst=lst+1
   j=0
   do 16 ii=lst,lend
   pivi=-a(ii)
   ist=ii+m
   j = j + 1
   do 15 l=ist,mm,m
   ll=l-j
   a(l)=a(l)+pivi*a(ll)
```

```
tb=abs(a(l))
if(tb-piv) 15,15,14

lipiv=tb
i=[
do 16 [=k,nm,m
[l=[+j]
le r(l[)=r(l[)+pivi*r(l])
17 [st=[st+m
18 if(m-1) 23,22,19
19 ist=mm+m
[st=m+1
do 21 i=2,m
ii=[st-i
ist=ist-k
l=ist-m
ii=[st-i
ist=ist-k
l=ist-m
l=a(l)+,50
do 21 j=iinnm,m
[l=[l+1
continum]
tb=r(j)
l= (l+1
continum]
tb=r(j)
continum]
tb
```

ANNEXE II

ELEMENT CIRCULAIRE 1 NOEUD LOGICIEL

```
c
c
                   element circulaire a un seul noeud
С
c
c
     c
     dimension a(16384),b(128),zo(64),x(64),y(64),zeta(64),bn(64),
    &bt(64),dn(64),dt(64),alfa(64),r(64)
     common /s1/ fsb(8)
     common/s2/h,hp,k
     common/s3/sigrr, sigrt, sigtt, utpos, urpos, ut, ur
     common/s4/flog.plog
     cata imp.lc/20,10/
     complex zo,zi,zs
     real kinu
     pi=4.*atan(1.)
     eps=0.1e-12
     read(lc,1000) nu, numbc, numos
     write(imp,1) nu,numbc,numos
     k=3.-4.*nu
     h=1./(8.*pi*(1-nu**2))
     hp=1./(8.*pi*(1-nu))
     write(imp,4) numos
     write(imp,5) nu
     DISCRETISATION DU CERCLE
numbd=0
     do 50 i=1, numbe
     read(lc,1000) ray, tetad, tetaf, num, tn, tt
     write(imp,2) ray, tetad, tetaf, num, tn, tt
     tetad=tetad*pi
     tetaf=tetaf*pi
     alfam=(tetaf-tetad)/(2*num)
     fac=1.
     if(alfam.qt.O.) fac=-1.
     do 50 ni=1, num
     numbd=numbd+1
     tetam=tetad+(2*ni-1)*alfam
     x(numbd)=ray*cos(tetam)
     y(numbd)=ray*sin(tetam)
     zo(numbd) = cmpl x(x(numbd), y(numbd))
     r(numbd)=ray
     alfa(numbd)=alfam
     zeta(numbd)=tetam-pi/2.
     on(numbd)=fac*tn
     bt(numbd)=fac*tt
  50 continue
     write(imp,3) numbc
     do 55 i=1, numbd
  55 write(imp,7) i,x(i),y(i),zeta(i),bn(i),bt(i)
*************
**********
     m=2*numbd
     n=numbd
     do 80 i=1, numbd
     do 90 j=1.numbd
     call initial
```

```
zi=r(i)*(0.,1.)
    zetam=zeta(i)-zeta(j)
    dh=alfa(j)
    ry=r(j)
    call intermed(zi,dh,zetam,ry,1)
    a(i+(j-1)*m)=fsb(1)
    a(i+(j+n-1)*m)=fsb(2)
    a(i+n+(j-1)*m)=fsb(3)
    a(i+n+(j+n-1)+m)=fsb(4)
  90 continue
  80 continue
resolution du systeme d'equations (methode de gauss)
do 100 i=1, numbd
    b(i)=bn(i)
    b(i+n)=bt(i)
 100 continue
    call gelg (b,a,m,1,eps,ier)
    if (ier.ne.0) goto 380
    write (imp,21)
    do 105 i=1,m
    write (imp,19) i,b(i)
 105 continue
    do 110 i=1, numbd
    dn(i)=b(i)
    dt(i)=b(i+n)
 110 continue
calcul des contraintes et deplacements sur le contour
write (imp, 17)
    do 120 i=1, numbd
    call initia
    ao 125 j=1, numbd
    call initial
    zi=r(i)*(0.,1.)
    zetam=zeta(i)-zeta(j)
    dh=alfa(j)
    ry=r(j)
    call intermed (zi,dh,zetam,ry,-1)
    sigtt=sigtt+fsb(1)*dn(j)+fsb(2)*dt(j)
    call initial
    call intermed (zi,dh,zetam,ry,1)
    sigrr=sigrr+fsb(1)*dn(j)+fsb(2)*dt(j)
    sigrt = sigrt + fsb(3) * dn(j) + fsb(4) * dt(j)
    utpos=utpos+fsb(5)*dn(j)+fsb(6)*dt(j)
    urpos=urpos+fsb(7)*dn(j)+fsb(8)*dt(j)
 125 continue
    write (imp,8) i,sigrr,sigrt,sigtt,utpos,urpos
 12G continue
calcul des contraintes et deplacements en dehors du contour
if (numos) 380,380,130
 130 write (imp.16)
    nump=0
    do 140 i=1, numos
    read((c,1000) num, rb, re, beta
    write (imp.9) num, rb, re, beta
```

```
peta=beta*pi
      rd=(re-rb)/num
      do 140 ni=1, num
      nump = nump + 1
      ro=rb+(2*ni-1)*rd/2
      zs=ro*(0.,1.)
      call initia
      do 150 j=1 numbd
      call initial
      zetam=beta-pi/2.-zeta(j)
      dh=alfa(j)
      ry dr(j)
      call intermed (zs.dh.zetam.ry.-1)
      sigtt=sigtt+fsb(1)*dn(j)+fsb(2)*dt(j)
      call initial
      call intermed (zs,dh,zetam,ry,1)
      sigrr = sigrr + fsb(1) * dn(j) + fsb(2) * dt(j)
      sigrt = sigrt + fsb(3) * dn(j) + fsb(4) * dt(j)
      ut=ut+fsb(5)*dn(j)+fsb(6)*dt(j)
      ur=ur+fsb(7)*dn(j)+fsb(8)*dt(j)
  150 continue
      write (imp, 10) nump, zs, sigrr, sigrt, sigtt, ut, ur
  140 continue
  380 write (imp,11) ier
      go to 300
*****************
      formats de lecture et d'edition
1 format(1x, f4, 2, 1x, i2, 1x, i2)
    2 format(1x, f8, 4, 1x, f10, 7, 1x, f10, 7, 1x, i4, 1x, f3, 1, 1x, f3, 1)
    3 format(/, 'nombre d arcs circulaires centres a l'origine',
     s'du contour etudie =',i2,/)
   , 4 format('nombre de segments utilises pour determiner les autres',
     s'endroits ou l'on veut obtenir des resultats=',i3,/)
    5 format(5x, coefficient de poisson nu=1,f4.2,/)
    7 format(i3,3(9x,f9.5),8x,f9.5,8x,f9.5)
    8 format(i3,5(10x,f9.5))
    9 format(i3,1x,2(1x,f8.4),1x,f10.7)
   10 format(2x, i3, 8x, '(', f9, 5, 3x, ', ', 3x, f9, 5, ') ', 5(8x, f9, 5))
   11 format(//,5x,'ier=',i2,//)
   16 format(/, 'point', 10x, 'x_coord', 11x, 'y_coord', 12x, 'sigrr', 13x,
     s'sigrt',12x,'sigtt',10x,'ut(total)',8x,'ur(total)',//)
  17 format(//,10x,'calcul des contraintes et deplacements sur',
    s' le contour',//)
  19 format(50x, b(', i3,')=',e12.5)
   21 format(//)
1000 format(v)
  300 stop
     end
      subroutine intermed(zi,dh,zetam,ry,mult)
      common/s1/ fsb(8)
      common/s2/ h.hp.k
     common/s4/flog.plog
     complex zi,z,eij,con,zd1,zd2,f(5),f1,f2,f3,f4,f5,dpn,dpt,
     sceij, imag, flog, plog
      real k
      imag = (0.,1.)
     eij=cmp(x(cos(zetam),sin(zetam))
      con=mult*(eij**2)
      z=zi*eij
```

```
zd2=ry*imag*cmplx(cos(dh),sin(dh))
   za1 = -conjg(zd2)
   fac=1.
   if (dh.gt.0.) fac=-1.
   call detlog (z,zd1,zd2,ry,fac)
   f(1) = f1(z_z z d1_z z d2_r y_z con_z flog)
   f(2)=f2(z,zd1,zd2,ry,con,plog)
   f(3)=f3(z,zd1,zd2,ry,con,flog)
   f(4)=f4(z,zd1,zd2,ry,k,flog,plog)
   f(5) = f5(z,zd1,zd2,ry,flog)
   cndn=h*aimag(f(1)+f(2))
   cndt=h*real(f(1)-f(2))
   if(mult.eq.-1) go to 30
   ctdn=h*real(f(3)+f(2))
   ctdt = -h * aimag(f(3) - f(2))
   ceij=conjg(eij)
   dpn=hp*ceij*(f(4)+f(5))
   dpt=hp*ceij*(f(4)-f(5))
   fsb(5) = -aimag(dpn)
   fsb(6)=-real(dpt)
   fsb(7) = -real(dpn)
   fsb(8)=aimag(dpt)
   fsb(3)=ctdn
   fsb(4)=ctdt
30 \text{ fsb(1)} = \text{cndn}
   fsb(2)=cndt
   return
   end
   subroutine initia
   common/s3/ sigrr/sigrt/sigtt/utpos/urpos/ut/ur
   sigrr=0.
   sigrt=0.
   sigtt=0.
   utpos=0.
   urpos=0.
   ut = 0.
   ur=0.
   return
   end
   subroutine initial
   common/s1/ fsb(8)
   do 10 i=1.8
10 fsb(i)=0.
   return
   subroutine detlog (z,a1,a2,r,fac)
   common/s4/flog.plog
   complex z,zc,a1,a2,u1,u2,v1,v2,flog,plog,imag
   pi=4.*atan(1.)
   imag = (0.,1.)
   zc=conjg(z)
   u1=z-a1
   u2=z-a2
   v1=r*r/zc-a1
   v2=r*r/zc-a2
   v = aimag(z) - r
   w=aimag(r*r/zc)-r
   flog=clog(u2)-clog(u1)
   plog=clog(v2)-clog(v1)
   if(cabs(z)-r) 10,30,20
```

```
10 if ((v*aimag(u2)).gt.0.) go to 50
   flog=flog-2.*fac*pi*imag
   go to 50
20 if ((w*aimag(v2)).gt.0.)go to 50
   plog=plog-2.*fac*pi*imag
   go to 50
30 if(fac.lt.0.)go to 40
   if ((w*aimag(v2)).gt.0.)go to 50
   plog=plog-2.*pi*imag
   go to 50
4C if((v*aimag(u2)).gt.O.)go to 50
   flog=flog+2.*pi*imag
50 continue
   return
   end
   function f1(z,a1,a2,r,con,flog)
   complex f1,z,a1,a2,con,zc,u1,u2,flog
   zc=conjg(z)
   u1=z-a1
   u2=z-a2
   f1=con*((r/(z*z))*flog-(r/(z*z))*clog(a2/a1)
  s+r*a2/(z*u2*u2)-r*a1/(z*u1*u1)+zc/(r*u2)-zc/(r*u1)-zc*a2/(r*u2*u2)
  s+zc*a1/(r*u1*u1))+(2./r)*flog+2.*z/(r*u2)
  s-2.*z/(r*u1)
   return
   end
   function f2(z,a1,a2,r,con,plog)
   complex f2.z.zc.a1.a2.b1.b2.con.v1.v2.plog
   zc=conjq(z)
   b1=conjg(a1)
   b2=conjg(a2)
   v1=r*r-b1*z
 v2=r*r-b2*z
   f2=con*((r/(z*z))*conjg(ploy)+r*r*r*(b2-b1)/(z*v1*v2))
   return
   end
   function f3(z,a1,a2,r,con,flog)
   complex f3,z,a1,a2,con,zc,u1,u2,flog
   zc=coniq(z)
   u1=z-a1
  u2=z-a2
   f3=con*((r/(z*z))*flog-(r/(z*z))*clog(a2/a1)
  s+zc/(r*u2)-zc/(r*u1)+r*a2/(z*u2*u2)-r*a1/(z*u1*u1)
  s-zc*a2/(r*u2*u2)+zc*a1/(r*u1*u1))
  return
   function f4(z,a1,a2,r,k,flog,plog)
   complex f4,z,a1,a2,zc,flog,plog
   real k
   zc=conjg(z)
   f4=(k-1)*(a2-a1)/r+(k*z/r)*flog-(r/zc)*plog
   return
   end
   function f5(z,a1,a2,r,flog)
   complex f5,z,a1,a2,zc,u1,u2,v1,v2,flog
   zc=conjg(z)
   u1=z-a1
   u2=z-a2
   v1=conjg(u1)
   v2=conjg(u2)
```

```
f5=(z-r+r/zc)+((1./r)+conjg(flog)+zc/(r+v2)
  s-zc/(r*v1))+(r/zc)*conjg(clog(a2/a1))
   return
   end
   subroutine gelg(r,a,m,n,eps,ier)
   dimension a(40000),r(200)
   if(m) 23,23,1
 1 ier=0
   piv=0.0
   mm = m * m
   nm=n*m
   do '3 l=1,mm
   tb=abs(a(l))
   if(tb-piv) 3,3,2
 2 piv=tb
   i = l
 3 continue
   tol=eps*piv
   lst=1
   do 17 k=1, m
   if(piv) 23,23,4
 4 if(ier) 7,5,7
 5 if(piv-tol) 6,6,7
 6 ier=k-1
 7 pivi=1.0/a(i)
   j = (i-1)/m
   i=i-j*m-k
   j=j+1-k
   do 8 l=k/nm/m
   11=1+i
   tb=pivi*r(ll)
   r(ll)=r(l)
,8 r(l)=tb
   if(k-m) 9,18,18
 9 lend=lst+m-k
   if(j) 12,12,10
10 ii = j * m
   do 11 l=lst,lend
   tb=a(l)
   ll=l+ii
   a(l)=a(ll)
11 a(ll)=tb
12 do 13 l=lst.mm.m
   ll=1+i
   tb=pivi*a(ll)
   a(ll)=a(l)
13 a(l)=tb
   a(lst)=j
   piv=0.0
   lst=lst+1
   j = 0
   do 16 ii=lst,lend
   pivi=-a(ii)
   ist=ii+m
   j = j + 1
   do 15 l=ist.mm.m
   ||\cdot|| = ||\cdot||
   a(l)=a(l)+pivi*a(ll)
   tb=abs(a(l))
   if(tb-piv) 15,15,14
```

```
14 piv=tb
   i = l
15 continue
   do 16 l=k \cdot nm \cdot m
   ll=l+j
16 r(ll)=r(ll)+pivi*r(l)
17 lst=lst+m
18 if(m-1) 23,22,19
19 ist=mm+m
   lst=m+1
   do 21 i=2, m
   ii = l'st - i
   ist=ist-lst
   t = ist - m
   l = a(l) + .50
   do 21 j=ii.nm.m
   tb=r(j)
   tt=j
   do 20 k=ist.mm.m
   11=11+1
20 tb=tb-a(k)*r(ll)
   k=j+l
   r(j)=r(k)
21 r(k)=tb
22 return
23 ier=-1
   return
```

end

ANNEXE III

ELEMENTS COINS 2 NOEUDS LOGICIEL (PLAQUE)

```
potentiels complexes: methode des discontinuites
c
С
          de deplacement - elements coins a deux noeuds
dimension a(40000), r(200), e(50), zo(50), x(50), y(50),
    &dl(50),bn(50),bt(50),dng(50),dnd(50),dtg(50),dtd(50)
    3,pc(3)
     common/s1/ fsb(20)
     common/s2/ hahpak
     common/s3/ signn, signt, sigtt, utpos, unpos, ut, un
     common/s4/w1,w2,w3,w4
     data imp. Lc. Lc 1/20, 10, 30/
     complex zo,e,eij,zij,zgij,zdij,es,zs,esj,zsj,zi
     complex imagew1,w2,w3,w4
     real kinu
     pi=4.0*atan(1.0)
     imag=(0.0,1.0)
     eps=1.0e-20
     read(lc,1000) nu, numbs, numos, u, v
     write(imp,1) nu,numbs,numos,u,v
     k=3-4*nu
     h=1.0/(8*pi*(1-nu**2))
     hp=1.0/(16*pi*(1-nu))
     write(imp,4) numos
     write(imp,5) nu
     write(imp,6) u
     read((c,1000) pc(1),pc(2),pc(3)
discretisation du contour rectangulaire-centres
C
     et demi-longueur des segments
c
do 220 nr=1,3
     numbd=0
     rap=pc(nr)
     write (imp, 12) rap
     rewind (unit=lc1)
     do 51 i=1, numbs
     read(lc1,1000) num,xb,yb,xe,ye,tn,tt
     write(imp,2) num,xb,yb,xe,ye,tn,tt
     if(((i-1)*(i-3)).eq.0) go to 52
     num2=num
     num4=num
     go to 53
  52 num1=num
     num3=num
  53 \times d=(xe-xb)/(num+rap)
     yd=(ye-yb)/(num+rap)
     sw=sqrt(xd**2+yd**2)
     do 51 ni=1, num+1
     numbd=numbd+1
     if(ni.eq.1) go to 50
     x(numbd)=xb+(rap+2*ni-3)*xd/2.
     y(numbd)=yb+(rap+2*ni-3)*yd/2.
     dl(numbd) = sw/2.
     go to 54
  50 \times (numbd) = xb
     y(numbd) = yb
     dl(numbd)=rap*sw/2
  54 e(numbd)=cmplx(xd/sw/yd/sw)
```

```
zo(numbd) = cmp(x(x(numbd),y(numbd))
     bn(numbd) = tn
     bt(numbd)=tt
  51 continue
     write(imp,3)numbs
     do 55 i=1, numbd
   formation de la matrice d'influence
m=4*numbd
     n=2*numbd
     numpc=2
     nn1=num1+2
     nn2=num1+num2+3
     nn3=num1+num2+num3+4
     do 95 ni=1, numpc
     do 100 i=1, numbd
     i1 = 2 * i - 1
     i2=2*i
     do 70 j≈1, numbd
     j1=2*j-1
     j2=2*j
     L = 1
     eij=e(i)/e(j)
     zij=(zo(i)-zo(j))/e(j)
     if (((i-1)*(i-nn1)*(i-nn2)*(i-nn3)).eq.0) go to 80
     zgij=zij-u*dl(i)*eij
     zdij=zij+u*dl(i)*eij
     zi=zgij
     if(ni.gt.1) zi=zdij
     if(((j-1)*(j-nn1)*(j-nn2)*(j-nn3)).eq.0) go to 75
     if(i.eq.j) go to 74
     call intermed(zi,dl(j),eij)
     go to 90
  74 xi = -u * dl(i)
     if(ni.gt.1) xi=u*dl(i)
     call seg(xi,dl(i))
     go to 90
  75 call conform (zi,dl(j),eij,l)
     go to 90
  80 zgij=zij+imag*sqrt(v)*dl(i)*eij
     zdij=zij+sqrt(v)*dl(i)*eij
     zi=zgij
     if(ni.gt.1) zi=zdij
     if(((j-1)*(j-nn1)*(j-nn2)*(j-nn3)).eq.0) qo to 85
     if(ni.eq.1) eij=-imag*e(i)/e(j)
     call intermed(zi,dl(j),eij)
     go to 90
  85 if (i.eq.j) go to 86
     if(ni.eq.1) l=-1
     call conform (zi,dl(j),eij,l)
     go to 90
  86 xi = -v * dl(i) * dl(i)
     if(ni.gt.1) xi=v*dl(i)*dl(i)
     call segconf (xi,dl(i))
  90 if(ni.gt.1) i1=i2
     a(i1+(j1-1)*m)=fsb(1)
     a(i1+(j2-1)*m)=fsb(2)
     a(i1+(j1+n-1)*m)=fsb(3)
```

* * *

Ç

U

```
Ð
                                                                                                                                                                            ò
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      14
                                                                                                                                                                                                                                       0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  4
                                                                                                                                                                                et hode
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     0
                                                                                                                                                                                                                                           0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    90
                                                                                                                                                                                                                                           0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         Ö
                                                                                                                                                                             È
                                                                                                                                                                                                 ₩
                                                                                                                                                                                                                                           σ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     .eq.0)
                                                                                                                                                                                 æ
                                                                                                                                                                                                 *
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  6
                                                                                                                                                                                                                                         0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      Ġ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         n
t
                                                                                                                                                                                                                                           σ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    ٠.
                                                                                                                                                                                 ø
                                                                                                                                                                                                                                           Ð
                                                                                                                                                                                  Q *
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      *(i-nn3))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 -nn2)*(j-nn3))
                                                                                                                                                                            d'equations
******
                                                                                                                                                                                                                                         -nn3)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      ept.
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  0
                                                                                                                                                               ***
                                                                                                                                                                                                                                        . ( )
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        ס
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           ()
()
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      nn2)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   Ď
     = fsb(4)
= fsb(5)
= fsb(6)
= m) = fsb(7)
                                                                                                                                                                                                                                         -nn2)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        • *
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 0.
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   ∞
a(i1+(j2+n-1)*m) = fsb(4)
a(i1+n+(j1-1)*m) = fsb(5)
a(i1+n+(j1-1)*m) = fsb(6)
a(i1+n+(j1-1)*m) = fsb(6)
a(i1+n+(j1-1)*m) = fsb(6)
continue
tesolution du systeme d'
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(c(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*
if(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-n-1)*(i-
                                                                                                                                                              ***
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            •
                                                                                                     00
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            \sim
                                                                                                    101
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    73
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     13
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          2
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            12
```

```
146 xi = -u * al(i)
     if(ni.gt.1) xi=u*dl(i)
     call seg(xi,dl(i))
     go to 144
  141 call conform (zi,dl(j),eij,l)
     go to 144
  142 zgij=zij+imag*sqrt(v)*dl(i)*eij
     zdij=zij+sqrt(v)*dl(i)*eij
     zi=zqii
     if(ni.gt.1) zi =zdij
     if(ni.eq.1) eij=-imag*e(i)/e(j)
     call intermed(zi,dl(j),eij)
     go to 144
  143 if (i.eq.j) go to 151
     call conform (zi,dl(j),eij,l)
     go to 144
 151 xi = -v * dl(i) * dl(i)
     if (ni.gt.1) xi=v*dl(i)*dl(i)
     call segconf (xi,dl(i))
  &fsb(4)*dtd(j)
     signt = signt + fsb(5) * dng(j) + fsb(6) * dnd(j) + fsb(7) * dtg(j) +
    &fsb(8)*dtd(j)
     sigtt=sigtt+fsb(9)*dng(j)+fsb(10)*dnd(j)+fsb(11)*dtq(j)+
    &fsb(12)*dtd(j)
     utpos=utpos+fsb(13)*dng(j)+fsb(14)*dnd(j)+fsb(15)*dtg(j)+
    &fsb(16)*dtd(j)
     unpos=unpos+fsb(17)*dng(j)+fsb(18)*dnd(j)+fsb(19)*dtg(j)+
    &fsb(20)*dtd(j)
 150 continue
     write(imp,8) i,signn,signt,sigtt,utpos,unpos
 145 continue
 140 continue
calcul des contraintes et deplacements aux autres endroits *
if(numos)380,380,160
 160 write(imp, 16)
     nump=0
     do 170 i=1, numos
     read(lc1,1000) num,xb,yb,xe,ye
     write(imp,9) num,xb,yb,xe,ye
     xd=(xe-xb)/num
     yd=(ye-yb)/num
     dw=sqrt(xd**2+yd**2)
     es=cmplx(xd/dw,yd/dw)
     do 180 ni=1, num
     nump=nump+1
     xs = xb + (2*ni-1)*xd/2.
     ys = yb + (2*ni-1)*yd/2.
     zs=cmplx(xs,ys)
     call initia
     do 190 j=1, numbd
     esj=es/e(j)
     zsj=(zs-zo(j))/e(j)
     dh=dl(j)
     if(((j-1)*(j-nn1)*(j-nn2)*(j-nn3)).eq.0) go to 200
     call intermed(zsj.dh.esj)
     go to 210
```

```
200 call conform (zsj.dh.esj.l)
  210 signn=signn+fsb(1)*dng(j)+fsb(2)*dnd(j)+fsb(3)*dtg(j)+
     &fsb(4)*dtd(i)
      signt = signt + fsb(5) * dnq(j) + fsb(6) * dnd(j) + fsb(7) * dtq(j) +
    &fsb(8)*dtd(j)
     sigtt=sigtt+fsb(9)*dnq(j)+fsb(10)*dnd(j)+fsb(11)*dtq(j)+
    &fsb(12)*dtd(i)
     ut=ut+fsb(13)*dnq(j)+fsb(14)*dnd(j)+fsb(15)*dtq(j)+fsb(16)*dtd(j)
     un=un+fsb(17)*dng(j)+fsb(18)*dnd(j)+fsb(19)*dtg(j)+fsb(20)*dtd(j)
      write(imp,10) nump,xs,ys,signn,signt,sigtt,ut,un
  180 continue
  170 continue
  380 write(imp,11) ier
     go to 220
formats de lecture d'edition et d'impression
1 format(1x,f4.2,1x,i2,1x,i2,1x,f5.3,1x,f5.3)
   2 format(i3,4f10.5,2f4.1)
    3 format(/, 'nombre de segments du contour etudie=',i2,/)
   4 format('nombre de segments utilises pour determiner les autres
    &endroits ou l on veut obtenir des resultats=',i3,/)
   5 format(5x, coefficient de poisson nu=',f4.2,/)
   6 format(5x, 'coefficient de position des des charges u=',f5.3)
   7 format(i3,3(9x,f9.5),8x,'(',f9.5,3x,',',3x,f9.5,')',f16.5,f17.5)
   8 format(i3,5(10x,f9.5))
   9 format(i3,4(1x,f9.5))
  10 format(i5,4(9x,f9.5),3(8x,f9.5))
  11 format(//,5x,'ier=',i2,//)
  12 format(5x, 'rapport entre les segments coin-lineaire pc=',f5.3,/)
  15 format(/,'seg',12x,'signn',14x,'signt',14x,'sigtt',14x,'utpos',
    &14x, unpos 1,//)
  16 format(/,'point',10x,'x-coord',11x,'y-coord',12x,'signn',
    &13x,'signt',12x,'sigtt',10x,'ut(total)',8x,'un(total)',//)
  17 format(//,10x, calcul des contraintes et deplacements sur le cote
    $gauche des segments du contour*,//)
  18 format(//,10x, calcul des contraintes et deplacements sur le cote
    &droit des segments du contour*,//)
  19 format(50x, 'b(', i3, ')=', e12.5)
  21 (ormat(//)
1000 format(v)
  220 continue
 300 stop
     end
sous-programmes de calcul appeles
subroutine initia
     common/s3/ signn, signt, sigtt, utpos, unpos, ut, un
     signn=0.
     signt=0.
     sigtt=0.
     utpos=0.
     unpos=0.
     ut=0.
     un=0.
     return
     subroutine seg(x/a)
```

```
common/s1/fsb(20)
common/s2/ hahpak
real k,f(14),f11,f12,f13,f14
pi=4.*atan(1.)
pr=4./((7.-k)*(k+1))
f(11) = f11(x = a)
f(12) = f12(x = a)
f(13) = f13(x,a)
f(14) = f14(x,a)
fsb(1) = -h * f(11)
fsb(2)=h*f(12)
fsb(3) = 0.
fsb(4)=0.
fsb(5)=0.
fsb(6)=0.
fsb(7)=fsb(1)
fsb(8) = fsb(2)
fsb(9) = fsb(1)
fsb(10) = fsb(2)
fsb(11) = -pr/a
fsb(12)=pr/a
fsb(13)=hp*(k-1)*f(13)
fsb(14) = hp*(k-1)*f(14)
fsb(15)=(a-x)/(4.*a)
fsb(16)=(a+x)/(4.*a)
fsb(17) = fsb(15)
fsb(18) = fsb(16)
f sb(19) = -f sb(13)
fsb(20) = -fsb(14)
return
end
subroutine segconf(x,dl)
common/s1/fsb(20)
common/s2/h,hp,k
complex beta
real k,f(14),f11,f12,f13,f14
pi=4.*atan(1.)
beta=cmplx(cos(pi/4.),sin(pi/4.))
pr1=real(beta)
pr2=aimag(beta)
a=dl*dl
dx = (a-x)/(4.*a)
dy = (a+x)/(4.*a)
f(11) = f11(x_a)
f(12) = f12(x \cdot a)
f(13) = f13(x = a)
f(14) = f14(x_a)
1 = 1
if(x.lt.0.) l=-1
hi=2.*h*sqrt(l*x)
if(x.lt.0.) go to 10
fsb(1) = +hi*pr1*f(11)
fsb(2)=hi*pr1*f(12)
fsb(3) = hi * pr2 * f(11)
fsb(4) = -hi * pr2 * f(12)
fsb(9)=fsb(1)-2.*hi*pi*pr2/a
fsb(10)=fsb(2)+2.*hi*pi*pr2/a
fsb(11)=fsb(3)-2.*hi*pi*pr1/a
fsb(12)=fsb(4)+2.*hi*pi*pr1/a
fsb(13)=hp*(k-1)*pr1*f(13)+pr2*dx
```

```
dtpo
                                                                                                              dnneg, dnpos, dtneg,
                                                                                                                                                                                                                              g(f(7))+f(8))
                                                                                                              \ 0
                                                                                                                                                                                     \overline{\phantom{a}}
                                                                                                                                                                                                                   2 ~
                                                                                                              9 ~-
                                                                                                                                                                                     ~ ~
                                                                                                              8 +
                                                                                                                                                                                                                   (5
    ××
                                             \times \times \times
                                                                                                                                                                                     ~ ~
                                                                                                                                                                                                                              +conj
סמג
                                             ם ם ם ם
                                                                                                                                                                                         J
                                             --22
----
                                                                                                                                                                                     c
                                                                                                                                                                                                                    \mathsf{c}
4 9
                                                                                                              \circ \infty
                                                                                                                                                                                      ō
                                                                                                                                                                                                                    ō
                                  e e e a a a a
                                                                                                                                                                                                                              \overline{\phantom{a}}
Q + +
                                             + + 1 1
                                                                                                              70 +-
                                                                                                                                                                                         0
                                                                                                                                                                                                                              ~
                                                                                                                                                                                                                              \dot{\phantom{a}}
                                 -22000
                                                                                                  d(z,dl,ei
                                      ت
                                                                                                                                                                                 - con*f

* f (5)-

* f (6)-

n * f (2)

n * f (4)

(f(5)+

(f(5)-

) + con*f

+ con*f
                                  L
                                         L M 7 M 7
                                                                                                                                                                                                                              •
~ M 4
                                                                                                              → ~
                                  999---
                                                                                                              0 +
                                                                                                                                                                                                                               *
                                                                                                                                                                                                                               1
                              ·- a a a * * * *
                                                                                                              C 4-
* ~ ~
                               0 * * * 0 ~ -
                                                                                                              0
ب ر ر
                                                                                                                                                                                 ~ 0 ~ 0 0 * C ~ ~ 0 ~
                              سا سا شرا سرا سرا بورا پو
                                                                                                              S
                                                                                                                                                                                                                               1
Laa
              • 4-
                                                                                                                                                                              ~ M U O U U C O ~ M T O
 0. * *
                              _ * * * * * * *
                                                                                                   ð
                                                                                                              .--
                                                                                                                                                                              + - 1 - 0 - 1 - 0 - - 1 - 1
                                                                                                   E ~
                                                                                                             ·- 4
                                                                                                                                                                                 4000001140
 * ^ ^
                                                                                                   FO * 0 +
                                                                                                                                                                                 であめることこと
                                                                                                                                                                                                                   9
                                                                                                                                                                                                                              \sim
                              12225
                                                                                                                                                                          <del>-- 1 1</del>
               * + * + 0 | | + | | | | |
                                                                           ~ ~ M ~
                                                                                                   S G
                                                                                                          N U N
 1 2 2
              フォーキャッシッドドドドッシ
                                                                                                  -- --
                                                                                                          a . M
                                                                                                                                                                       0
               トントトンクタ40000004400
                                                                                                                          σ
                                                                                                   トちょうキ
               @r@r+~~~~***
                                                                                                  ·- 0 ·- ·
               4- E 0 N
* Q Q
محح
              0 - - - +
                                                                                                                          도 1 1
               C + 0 7 1
·- v v
                                                                                                                          -
セノノ×キ
                                                                                                                         e in the transfer of the state 
           (147)
(147)
(147)
(147)
(147)
(147)
(147)
(147)
(147)
(147)
(147)
\circ
                                                            \sim
```

```
dnpos = hp * cei j * (2 * (k-1) + k * f(9) - con jg(f(9)) - f(10))
 dtneq=hp*ceii*(2*(1-k)-k*f(7)+coniq(f(7))-f(8))
 dtpos=hp*ceij*(2*(k-1)+k*f(9)-conjq(f(9))+f(10))
 fsb(1)=cnndnneg
 fsb(2)=cnndnpos
 fsb(3)=cnndtneg
 fsb(4)=cnndtpos
 fsb(5)=cntdnneg
 fsb(6) = cntdnpos
 fsb(7)=cntdtnea
 fsb(8)=cntdtpos
'fsb(9)=cttdnneg
 fsb(10)=cttdnpos
 fsb(11)=cttdtneg
 fsb(12)=cttdtpos
 fsb(13)=real(dnneg)
 fsb(14)=real(dnpos)
 fsb(15)=aimag(dtneg)
 fsb(16)=aimag(dtpos)
 fsb(17) = a imag(dnneg)
 fsb(18)=aimag(dnpos)
 fsb(19)=-real(dtneg)
 fsb(20) = - real(dtpos)
 return
 end
 subroutine conform (zi,dl,eij,l)
 common/s1/fsb(20)
common/s2/h,hp,k
 common/s4/w1,w2,w3,w4
complex z,zi,eij,neij,con,col,dol,don,imag,fac,cndnneg,cndnpo
&/cndtneg/cndtpos/dnneg/dnpos/dtneg/dtpos/g(12)/g1/g2/g3/g4/g5
8,g7,g8,g9,g10,g11,g12,w1,w2,w3,w4
real k
imag = (0..1.)
z=zi*zi
a=dl*dl
call detracine(z,imag)
q(1) = q1(z_a, w1)
q(2) = q2(z_{aa}w1)
g(3) = g3(z,a,w1,w2)
g(4) = g4(z/a/w1/w2)
g(5) = g5(z_{1}a_{2}w1_{2}w3_{2}w4)
g(6) = g6(z_{aa} + u1_{a} + u3_{a} + u4)
g(7) = g7(z,a,w3)
q(8) = q8(z_{a}, w3)
g(9)=g9(z_{a}u_{a}w_{b})
g(10) = g10(z_{a}a_{b}w1_{c}k)
g(11)=g11(z_a,w1,w2)
g(12)=g12(z,a,w1,w2)
cndnneg=-g(1)+g(2)-g(3)+g(4)
cnanpos=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)
cndtneg=-g(1)+g(2)+g(3)-g(4)
cndtpos=g(1)+g(2)-g(3)-g(4)
ctdnneg=h*real(-g(5)+g(6)+g(7)-g(8))
ctdnpos=h*real(g(5)+g(6)-g(7)-g(8))
ctdtneg=h * a i mag(-g(5)+g(6)-g(7)+g(8))
ctdtpos=h*aimag(g(5)+g(6)+g(7)+g(8))
dnneg=hp*(-g(9)+g(10)+g(11)-g(12))
dnpos=hp*(g(9)+g(10)-g(11)-g(12))
dtneg=hp*(-q(9)+g(10)-q(11)+q(12))
```

```
dtpos=hp*(q(9)+q(10)+q(11)+q(12))
snndnneg=h*real(cndnneg)
snndnpos=h*real(cndnpos)
snndtneg=h*aimag(cndtneg)
snndtpos=h*aimag(cndtpos)
sntdnneg=-h*aimag(cndnneg)
sntdnpos=-h*aimag(cndnpos)
sntdtneg=h*real(cndtneg)
sntdtpos=h*real(cndtpos)
sttdnneg=ctdnneg
sttdnpos=ctdnpos
sttdtneg=ctdtneg
sttdtpos=ctdtpos
utdnneg=real(dnneg)
utdnpos=real(dnpos)
utdtneg=aimag(dtneg)
utdtpos=aimag(dtpos)
undnneg=aimag(dnneg)
undnpos=aimag(dnpos)
undtneg=-real(dtneg)
undtpos=-real(dtpos)
w=cabs(zi)
neij=eij*w/zi
if(l.lt.O) neij=-imag*eij*w/zi
con=neij**2
col=((1.,0.)+con)/2.
dol=((1.,0.)-con)/2.
don=imag*con
fsb(1)=snndnneg*real(col)+sntdnneg*real(don)+sttdnneg*real(dol)
fsb(2)=snndnpos*real(col)+sntdnpos*real(don)+sttdnpos*real(dol)
fsb(3)=snndtneg*real(col)+sntdtneg*real(don)+sttdtneg*real(dol)
fsb(4)=snndtpos*real(col)+sntdtpos*real(don)+sttdtpos*real(dol)
fsb(5)=(snndnneg-sttdnneg)*aimag(con/2.)+sntdnneg*aimag(don)
fsb(6)=(snndnpos-sttdnpos)*aimag(con/2.)+sntdnpos*aimag(don)
fsb(7)=(snndtneg-sttdtneg)*aimag(con/2.)+sntdtneg*aimag(don)
fsb(8)=(snndtpos-sttdtpos)*aimag(con/2.)+sntdtpos*aimag(don)
fsb(9)≈snndnneg*real(dol)-sntdnneg*real(don)+sttdnneg*real(col)
fsb(10)=snndnpos*real(dol)-sntdnpos*real(don)+sttdnpos*real(col)
fsb(11)=snndtneg*real(dol)-sntdtneg*real(don)+sttdtneg*real(col)
fsb(12)=snndtpos*real(dol)-sntdtpos*real(don)+sttdtpos*real(col)
fsb(13)=utdnneg*real(neij)+undnneg*aimag(neij)
fsb(14)=utdnpos*real(neij)+undnpos*aimag(neij)
fsb(15)=utdtneg*real(neij)+undtneg*aimag(neij)
fsb(16)=utdtpos*real(neij)+undtpos*aimag(neij)
fsb(17)=undnneg*real(neij)-utdnneg*aimag(neij)
fsb(18)=undnpos*real(neij)=utdnpos*aimag(neij)
fsb(19)=undtneg*real(neij)-utdtneg*aimag(neij)
fsb(20)=undtpos*real(neij)-utdtpos*aimag(neij)
return
end
subroutine detracine(z,imag)
common/s4/w1,w2,w3,w4
complex z,zc,imag,w1,w2,w3,w4,raz,razc,zeta,zetap
zc=conjg(z)
zeta=imag*z
zetap=imag*zc
raz=csqrt(zeta)
razc=csqrt(zetap)
if(aimag(zeta).lt.O.) raz=-csqrt(zeta)
if(aimag(zetap).lt.O.) razc=-csqrt(zetap)
```

```
w1 = raz
w2=razc
w3=conjg(w1)
w4=conjg(w2)
return
end
function f1(z,a)
complex flyz
f1=(1./a)*alog(cabs((z-a)/(z+a)))+2./(z+a)
return
end
function f2(z,a)
complex f2,z,zc
zc=conjg(z)
f2=2.*a*(z-zc)/((z-a)*(z+a)*(z+a))
return
end
function f3(z,a)
complex f3,z
f3=(1./a)*alog(cabs((z-a)/(z+a)))+2./(z-a)
return
end
function f4(z,a)
complex f4,z,zc
zc=conjg(z)
f4=2.*a*(z-zc)/((z+a)*(z-a)*(z-a))
return
end
function f5(z,a)
complex f5,z
f5=(1./a)*clog((z-a)/(z+a))+2./(z+a)
return
end
function f6(z,a)
complex f6,z
f6=(1./a)*clog((z-a)/(z+a))+2./(z-a)
ena
function f7(z,a)
complex f7,z
f7 = ((z-a)/a) * c log((z-a)/(z+a))
return
end
function f8(z,a)
complex f8,z,zc,f5
zc=conjg(z)
f8=(z-zc)*conjg(f5(z*a))
return
end
function f9(z,a)
complex f9,z
f9=((z+a)/a)*clog((z-a)/(z+a))
return
end
function f10(z,a)
complex f10,z,zc,f6
zc=conjg(z)
f10=(z-zc)*conjg(f6(z,a))
return
end
```

```
function f11(x,a)
 f11=(1./a)*alog((a-x)/(a+x))+2./(x+a)
function f12(x,a)
f12=(1./a)*alog((a-x)/(a+x))+2./(x-a)
end
function f13(x,a)
f13=((a-x)/a)*alog((a-x)/(a+x))-2.
end '
function f14(x,a)
f14=((x+a)/a)*alog((a-x)/(a+x))+2.
end
function g1(z,a,w1)
complex g1,z,zc,u1,u2,fac,w1,flog,plog
zc=conjg(z)
u1=z*z-a*a
u2=zc*zc~a*a
flog=clog((z-a)/(z+a))
plog=clog((zc-a)/(zc+a))
fac=1./(a*w1)
g1=fac*(z*flog+zc*plog+2.*a*z*z/u1+2.*a*zc*zc/u2)
return
end
function g2(z,a,w1)
complex g2,z,zc,u1,u2,fac,w1
zc=conjg(z)
u1=z*z-a*a
u2=zc*zc-a*a
fac=1./w1
g2=2.*fac*(a*z/u1+a*zc/u2)
return
end
function g3(z,a,w1,w2)
complex g3,z,zc,fac,u,flog,w1,w2
zc=conjg(z)
u=zc*zc-a*a
flog=conjg(clog((z-a)/(z+a)))
r=cabs(w1)
fac=2.*zc*(w1-w2)/(a*r*r)
g3=fac*(flog+6.*a*zc/u-4.*a*zc*zc*zc/(u*u))
return
end
function g4(z,a,w1,w2)
complex g4,z,zc,fac,u,w1,w2
zc=conjq(z)
u=zc*zc-a*a
r=cabs(w1)
fac=2.*zc*(w1-w2)/(r*r)
g4=fac*(2.*a/u-4.*a*zc*zc/(u*u))
return
end
function g5(z_{aa}w1_{aw}3_{aw}4)
complex g5,z,u,w1,w3,w4,fac,pr,flog
u=z*z-a*a
flog=clog((z-a)/(z+a))
r=cabs(w1)
```

```
fac=2.*z*z*(w4-w3)/(a*r*r)
pr=2.*z*w4/(a*r*r)
g5=pr*(flog+2.*a*z/u)+fac*(4.*a/u-4.*a*z*z/(u*u))
return
end
function g6(z,a,w1,w3,w4)
complex g6,z,u,w1,w3,w4,fac,pr
u=z*z-a*a
r=cabs(w1)
fac=2.*z*z*(w4-w3)/(r*r)
pr=2.*z*w4/(r*r)
g6=pr*2.*a/u-fac*4.*a*z/(u*u)
return
ena
function g7(z,a,w3)
complex g7,z,zc,u,v,w3,flog,plog,fac
zc=conjg(z)
u=z*z-a*a
v=zc*zc-a*a
flog=conjg(clog((z-a)/(z+a)))
plog=conjg(clog((zc-a)/(zc+a)))
fac=1./(a*w3)
g7=-zc*fac*(flog+2.*a*zc/v)+z*fac*(plog+2.*a*z/u)
return
end
function g8(z,a,w3)
complex g8,z,zc,u,v,w3,fac
zc=conjg(z)
u=z*z-a*a
v=zc*2c-a*a
fac=1./w3
g8=-zc*fac*2.*a/v+z*fac*2.*a/u
return
function g9(z,a,w1,k)
complex g9,z,zc,w1,flog,plog,fac
real k
zc=conjg(z)
flog=clog((z-a)/(z+a))
plog=clog((zc-a)/(zc+a))
r=cabs(w1)
fac=r/(a*w1)
g9=fac*(2.*a*(k-1)+k*z*flog-zc*plog)
return
function g10(z,a,w1,k)
complex g10,z,zc,w1,flog,plog,fac
real k
zc=conjg(z)
flog=clog((z-a)/(z+a))
plog=clog((zc-a)/(zc+a))
r=cabs(w1)
fac=r/w1
g10=fac*(k*flog-plog)
return
function g11(z,a,w1,w2)
complex gll,z,zc,u,wl,w2,flog,fac
zc=conjg(z)
u=zc*zc-a*a
```

```
r=cabs(w1)
   flog=conjg(clog((z-a)/(z+a)))
   fac=2.*zc*(w1-w2)/(a*r)
   g11=fac*(flog+2.*a*zc/u)
   return
   end
   function g12(z/a/w1/w2)
   complex g12,z,zc,u,w1,w2,fac
   zc=conjq(z)
   u=zc*zc-a*a
   r=cabs(w1)
   fac=2.*zc*(w1-w2)/r
   g12=2.*a*fac/u
   return
   sous programme de resolution du systeme d equations lineaire
   subroutine gelg(r,a,m,n,eps,ier)
   dimension a(40000),r(200)
   if(m) 23,23,1
 1 ier=0
   piv=0.0
   mm = m * m
   nm = n * m
   do 3 l=1/mm
   tb=abs(a(l))
   if(tb-piv) 3,3,2
 2 piv=tb
   i = l
 3 continue
   tol=eps*piv
   lst=1
   do 17 k=1, m
   if(piv) 23,23,4
4 if (ier) 7,5,7
 5 if(piv-tol) 6,6,7
 6 ier=k-1
 7 pivi=1./a(i)
   j = (i-1)/m
   i = i - j * m - k
   j=j+1-k
   do 8 l=k \cdot nm \cdot m
   tt=t+i
   tb=pivi*r((ll)
   r(ll)=r(l)
 8 r(l)=tb
   if(k-m) 9,18,18
 9 lend=lst+m-k
   if(j) 12,12,10
10 ii = j * m
   do 11 l=lst,lend
   tb=a(l)
   tt=t+ii
   a(l)=a(ll)
11 a(ll)=tb
12 do 13 l=lst,mm,m
   ll=l+i
   tb=pivi*a(ll)
   a(ll)=a(l)
13 a(l) = tb
   a(lst)=j
```

C

```
piv=0.0
   lst=lst+1
   j = 0
   do 16 ii=lst,lend
   pivi=-a(ii)
   ist=ii+m
   j = j + 1
   do 15 l=ist,mm,m
   a(l)=a(l)+pivi*a(ll)
   tb=abs(a(l))
   if(to-piv) 15,15,14
14 piv=tb
   i = l
15 continue
   do 16 l=k,nm,m
   16 r(ll)=r(ll)+pivi*r(l)
17 lst=lst+m
18 if(m-1) 23,22,19
19 ist=mm+m
   lst=m+1
   do 21 i=2, m
   ii=tst-i
   ist=ist-lst
   l=ist-m
   t=a(t)+.50
   do 21 j=ii.nm.m
   tb=r(j)
   ll = j
   do 20 k=ist/mm/m
   11=11+1
20 tb=tb-a(k)*r(ll)
   k = j + l
   r(j)=r(k)
21 r(k) = tb
22 return
23 ier=-1
   return
   end
   fin de programme
```

C