50376
1987
377

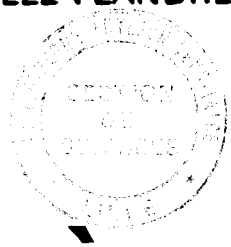
USTL
FLANDRES ARTOIS

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

50376
1987
377

50376
1987
377

N° d'ordre :1418



THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Mathématiques appliquées

par

Moulay Driss BENCHIBOUN

ETUDE DE CERTAINES GENERALISATIONS DU PROCEDE D'AITKEN ET COMPARAISON DE PROCEDES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

Soutenue le 10 Décembre 1987 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	A. LE MEHAUTE	Président
	C. BREZINSKI	Rapporteur
	B. GERMAIN BONNE	Examinateur

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie-Physique
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DHAINAUT André	Biologie animale
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOCT Jacques	Métallurgie
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GRANELLE Jean jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie organique
M. LACOSTE Louis	Biologie végétale
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. POUZET Pierre	Modélisation - Calcul scientifique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joel	Spectroscopie moléculaire
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CATTEAU Jean pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
Mle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides

M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie physique
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. HOUDART René	Physique atomique
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme (I.A.E.)
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques
M. LATTEUX Michel	Informatique
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne
M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme (I.A.E.)
M. LEROY Yves	Composants électroniques
M. LESENNE Jacques	Systèmes electroniques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques et Sociales
M. MESMACQUE Gérard	Génie Mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée

M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean CLaude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
M. THIEBAULT François	Sciences de la terre
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie Humaine
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean rené	Sociologie du Travail
M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et Raman
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WALLART Francis	Spectrochimie infrarouge et Raman
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	Géologie générale
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Ma vive reconnaissance et mes remerciements vont à :

Messieurs les Membres du Jury d'examen

Monsieur A. LE MEHAUTE, Professeur à l'Université de Lille I, qui me fait l'honneur de présider le jury.

Monsieur C. BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I, qui a suivi la réalisation de ce travail et m'a guidé par de précieux conseils.

Monsieur B. GERMAIN-BONNE, Maître de Conférences habilité, à l'Université de Lille I, qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je tiens à remercier également :

Mes Collègues du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation de l'Université de Lille I, pour les échanges de vues que nous avons eu.

Monsieur A. LEMBARKI, Maître de Conférences à l'Université de Marakech et H. SADOK, Assistant associé à l'Université de Lille I, pour leurs encouragements.

Concernant la réalisation matérielle de cette thèse :

Je remercie Madame Françoise TAILLY, pour sa gentillesse et pour le soin avec lequel elle a dactylographié ce travail et Monsieur Henri GLANC qui l'a imprimé.

A la mémoire de ma mère

A mon père
A RAHMA
A tous mes frères
A toutes mes soeurs
A tout(es) les ami(e)s

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE 1: ETUDE DES TRANSFORMATIONS DE LA FORME $\frac{f}{Df}$ 1

Notations et définitions 3

I -Introduction et présentation 3

II -Etude de la transformation G_K 5

1-Résultats de convergence 5

2-Résultats d'accélération de la convergence 9

3-Exemples 11

4-Cas où f est un polynôme homogène de degré 2 à 3 variables 12

III -La transformation G_K sous forme de rapport de deux détérminants 13

1-Résultats de convergence 15

2-Cas où f est une fonction à 3 variables 21

IV -Applications et cas particuliers 21

1-Transformation de STREIT 21

2-Transformations de BARRUCAND 22

3-Transformation de SHANKS 23

4- Procédé d'AITKEN itéré 24

5-Transformation de GERMAIN-BONNE 28

6-Le E-algorithme 30

CHAPITRE 2: ETUDE DES TRANSFORMATIONS DE BARRUCAND 32

I -Introduction 34

Présentation des transformations 34

II -Propriétés de B_K 35

Choix de coefficients a_i 38

III -Résultats de convergence 39

-)Accélération des suites à convergence lineaire 4o

-)Noyau de B_K 41

-)Applications 42

IV -Exemples numériques 47

V -Cas de la convergence logarithmique(K=2, B_2) 51

-)Cas : $a_1+4a_2=o$ 54

-)Cas : $a_1+4a_{2=o}$ 56

VI -Modification du procédé B_K 65

-)Accélération de la convergence logarithmique 7o

-)Accélération de la convergence lineaire 72

-)Application numérique 73

VII -Comparaison de B_K et de Δ^2-d'AITKEN 85

1- Comparaison de B_K et de Δ^2d'aitken sur Lin 85

. Choix des coefficienfs a_i-Etude du cas K=2 91

2-Comparaison de B_2 et de Δ^2d'Aitken sur L_1 93

CHAPITRE 3: COMPARAISON ET AMELIORATION DE PROCEDES D'ACCELERATION PAR L'INTERMEDIAIRE DE LEURS FACTEURS D'ACCELERATION 100

Notations et définitions 102

I -Introduction 102

1-Procédure θ de BREZINSKI 103

2-Procédure τ 103

II -Comparaison de deux procédés par le biais de leurs facteurs d'accélération 104

1-Théorème d'accélération (théorème 3-2) 104

2-Exemples d'application du théorème 3-2 105

3-Comparaison de deux procédés (Théorème 3-4) 108

4-Application du théorème 3-4 110

III -Amélioration de procédés d'accélération de la convergence 130

1-Cas particulier - Exemple 130

2-Cas général et application 133

IV -Modification du θ_2-algorithme etude du procédé $\theta_{2,2}$ 137

A-Cas de la convergence logarithmique 140

1-) $(S_n) \in$ LOGSF - Exemples numériques 140

2-) $(S_n) \in$ LOGL - Exemples numériques 148

3-) $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ n'a pas de limite 149

B-(S_n) n'est ni logarithmique ni lineaire 150

V -Interprétation du procédé $\theta_{2,2}$ 153

-_-_-_-_-_-_-_-

INTRODUCTION

Le travail qui est présenté dans cette thèse est composé de trois chapitres :

Dans le premier, après avoir remarqué que diverses transformations de suites s'écrivent sous la forme

$$\frac{f}{Df} ,$$

où Df représente la somme des dérivées partielles de f, nous avons d'une manière générale considéré de telles transformations, où f est une fonction de plusieurs variables. Une étude des propriétés que doit posséder f pour que la transformation soit régulière et accélère la convergence a été faite.

En plus, nous avons donné dans le troisième paragraphe un théorème qui montre que certaines transformations qui peuvent s'écrire sous forme d'un rapport de deux déterminants appartiennent à cette classe. On retrouve ainsi des transformations connues, on retrouve également dans ce cadre les transformations B_k introduites par Barrucand.

L'étude de B_k fait l'objet du second chapitre.
Nous avons étudié les possibilités de ces transformations à accélérer les suites à convergence linéaire. Une comparaison de B_k, pour tout k, et du procédé Δ^2-d'Aitken a été faite, puis nous avons proposé une modification de B_k dont le but est d'accélérer une classe de suites à convergence logarithmique. Nous nous sommes intéressés au cas particulier K = 2, et nous avons comparé le procédé B_2 avec Δ^2-d'Aitken dans le cas de la convergence logarithmique.

A partir de ces comparaisons nous avons pu choisir des coefficients a_i pour que B_k soit meilleur que le Δ^2-d'Aitken.

Le troisième chapitre est consacré à la comparaison de procédés d'accélération par l'intermédiaire de leurs facteurs d'accélération. Comme application nous avons comparé le Δ^2-d'Aitken et le θ_2-algorithme de Brezinski.
Nous avons pu ainsi déterminer les classes de suites pour lesquelles le θ_2-algorithme se comporte mieux que le Δ^2-d'Aitken et inversement.

Ces comparaisons nous ont permis aussi de construire à partir du procédé de base, d'autres procédés d'accélération de la convergence, comme c'est le cas pour la modification $\theta_{2,2}$ du θ_2-algorithme. Nous avons ensuite étudié le nouveau procédé $\theta_{2,2'}$ et les exemples numériques ont montré son efficacité. Une interprétation de $\theta_{2,2}$ est donnée dans le dernier paragraphe.

CHAPITRE I

ETUDE DES TRANSFORMATIONS DE LA FORME $\frac{f}{Df}$

NOTATIONS-DÉFINITIONS.

On désigne par K un entier positif $K > 0$, (S_n) une suite convergente de limite S, (e_n) la suite des erreurs, $e_n = S_n - S$ et $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$, f une fonction de plusieurs variables définie de $\mathbb{R}^{k+1}$ dans $\mathbb{R}$,

$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de f par rapport à la $i^{ème}$ variable. On note $Df = \sum_{i=1}^{k+1} D_i f$ la somme des dérivées partielles de f, et $\rho_n = \frac{e_{n+1}}{e_n}$ le rapport des erreurs.

$G_k = \frac{f}{Df}$ la transformation de suites, et $G_k^{(n)} = G_k(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k})$.

Définition 1.1.

On dit que la transformation G_k est régulière pour une suite (S_n) convergente si $\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Définition 1.2.

On dit que la transformation G_k accélère la convergence d'une suite (S_n) de limite S si $\lim_{n\to\infty} \frac{G_k^{(n)} - S}{S_n - S} = 0$.

Définition 1.3.

On dit qu'une suite (S_n) est à convergence linéaire si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ $|\rho| \leq 1$; $\rho \neq 1$.

I - INTRODUCTION.

Diverses transformations de suites sont de la forme $\frac{f}{Df}$, où f est une fonction de plusieurs variables. On étudie, dans ce chapitre les propriétés que doit vérifier la fonction f pour que la transformation $G_k = \frac{f}{Df}$ soit régulière et accélère la convergence d'une suite (S_n) donnée. On donne, dans le paragraphe III, un théorème qui montre que certains procédés qui peuvent s'écrire comme rapport de deux déterminants dont les éléments sont des fonctions de plusieurs variables appartiennent à cette classe de transformations.

PRESENTATION.

Soit (S_n) une suite convergente et $(\varepsilon_2^{(n)})$ la suite obtenue en appliquant le procédé Δ^2-d'Aitken [1] à la suite (S_n), on a :

$$\varepsilon_2^{(n)} = \frac{S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2}{S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1}}$$

Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_2^2 \quad \text{pour tout } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La somme des dérivées de f est :

$$Df(x_1, x_2, x_3) = x_3 - 2x_2 + x_1,$$

et $\varepsilon_2^{(n)}$ peut s'écrire alors,

$$\varepsilon_2^{(n)} = \frac{f(S_n, S_{n+1}, S_{n+2})}{Df(S_n, S_{n+1}, S_{n+2})}.$$

Soit K un entier strictement positif et f une fonction définie de $\mathbb{R}^{k+1}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable par rapport à chacune des variables. On considère la transformation de suites G_k définie par,

$$G_K^{(n)} = G_k(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k}) = \frac{f(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k})}{Df(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k})} \qquad (1,1)$$

On peut encore écrire,

$$G_K^{(n)} = S_n + R_K^{(n)} \qquad (1,2)$$

avec

$$R_K^{(n)} = R_K(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k}) = \frac{f(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k}) - S_n Df(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k})}{Df(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k})}.$$

II - ETUDE DE LA TRANSFORMATION G_K.

On suppose que la fonction f définie de $\mathbb{R}^{K+1}$ dans $\mathbb{R}$ possède une dérivée partielle par rapport à chacune de ses variables, et on cherche les conditions que doivent satisfaire f et Df pour que G_K soit un procédé régulier et accélère la convergence d'une suite (S_n) donnée.

On remarque que si la fonction R_K définie au I, vérifie,

$$R_K(ax_1+b,\ ax_2+b,\ldots,ax_{K+1}+b) = aR_K(x_1,x_2,\ldots,x_{K+1})$$

pour tout $(x_1, x_2,\ldots,x_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+1}$ et $a,b \in \mathbb{R}$ alors

$$G_K(ax_1 + b,\ ax_2 + b,\ldots,ax_{K+1} + b) = aG_K(x_1,\ x_2,\ldots,x_{K+1}) + b.$$

1 - RESULTATS DE LA CONVERGENCE.

Nous commençons par donner une proposition qui est un cas particulier de la propriété 9, (I,2) de Germain-Bonne [7].

Soit (S_n) une suite convergente de limite S et $G_K^{(n)} = G_K(S_n,\ S_{n+1},\ldots,S_{n+K})$ la suite obtenue en appliquant la transformation G_K à la suite (S_n).

Proposition 1.1.

Si la fonction R_K *vérifie,*

$$R_K(ax_1 + b,\ ax_2 + b,\ldots,ax_{K+1} + b) = aR_K(x_1,x_2,\ldots,x_{K+1})$$

$$\forall (x_1,\ x_2,\ldots,x_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+1} \text{ et } a,b \in \mathbb{R}.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ *existe, si les fonctions* $D_i f$ $(1 \le i \le K)$ *sont continues en* $(1, \rho, \rho^2,\ldots,\rho^K)$ *et si* $Df(1, \rho,\ldots,\rho^K) \neq 0$ *alors,*

$$\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = S \qquad \square$$

Démonstration.

Soit (S_n) une suite convergente telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ existe.

D'après (1.2) on a,

$$G_K^{(n)} = S_n + R_K^{(n)}$$

$$= S_n + R_K(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+K})$$

$$= S_n + R_K(e_n, e_{n+1},\ldots,e_{n+K})$$

$$= S_n + e_n R_K(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n})$$

Or,

$$R_K(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n}) = \frac{f(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n}) - Df(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n})}{Df(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n})}$$

les fonctions $D_i f$ sont continues au point $(1, \rho,\ldots,\rho^K)$ et $Df(1, \rho,\ldots,\rho^K) \neq 0$,

donc $\lim_{n\to\infty} e_n R_K(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n}) = 0$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = S.$$

□

Remarque 1.1.

i) Si la fonction f est homogène de degré j, i.e. $f(ax_1, ax_2,\ldots,ax_{K+1}) = a^j f(x_1, x_2,\ldots,x_{K+1})$, $\forall (x_1, x_2,\ldots,x_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+1}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors Df est homogène de degré j-1, et donc R_K est homogène de degré 1 ; $R_K(ax_1, ax_2,\ldots,ax_{K+1}) = aR_K(x_1,\ldots,x_{K+1})$.

ii) D'après la proposition 1.1, si la fonction R_K vérifie $R_K(ax_1+b,\ldots,ax_{K+1}+b) = aR_K(x_1,\ldots,x_{K+1})$, si les fonctions $D_i f$ sont continues en $(1, x,\ldots,x^K)$ et vérifient $Df(1, x,\ldots,x^K) \neq 0$ pour tout $|x| \leq 1$ $x \neq 1$, alors la transformation G_K est régulière pour l'ensemble des suites à convergence linéaire.

Théorème 1.1.

Soit (S_n) *une suite convergence telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ *existe,* $\rho \neq 1$

Si f *est de classe* C^3 *dans un voisinage de* $(S,\ldots,S) \in \mathbb{R}^{K+1}$,

Si $f(S, S,\ldots,S) = Df(S, S,\ldots,S) = 0$, *et si* $\sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(S,\ldots,S).\rho^{j-1} \neq 0$ *alors,*

$$\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{K+1} D_i f(S,S,\ldots,S).\rho^{i-1}}{\sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(S,\ldots,S).\rho^{j-1}} \quad \square$$

Rappelons que $Df(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+K}) = \sum_{i=1}^{K+1} D_i f(S_n,\ldots,S_{n+K})$.

Démonstration.

Soit (S_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$. La fonction f étant de classe C^3 dans un voisinage de $(S, S,\ldots,S)$, nous écrivons son développement de Taylor à l'ordre 3 et celui de Df à l'ordre 2 au point $(S, S,\ldots,S) \in \mathbb{R}^{K+1}$. A partir d'un certain rang N il existe $\theta \in]0,1[$ tel que,

$$\begin{aligned} f(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+K}) &= f(S+e_n, S+e_{n+1},\ldots,S+e_{n+K}) \\ &= f(S,S,\ldots,S) + \sum_{i=1}^{k+1} D_i f(S,S,\ldots,S).e_{n+i-1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{K+1} D^2_{i,j} f(S,S,\ldots,S) e_{n+i-1} e_{n+j-1} \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,\ell=1}^{K+1} D^3_{i,j,\ell} f(S+\theta e_n,\ldots,S+\theta e_{n+K}) e_{n+i-1} e_{n+j-1} e_{n+\ell-1} \end{aligned}$$

où $D^m_{i_1,\ldots,i_m}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ dérivée partielle par rapport aux variables $i_1, i_2,\ldots,i_m$.

De même à partir d'un certain rang N', il existe $\theta' \in]0,1[$ tel que,

$$Df(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+K}) = Df(S,S,\ldots,S) + \sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(S,S,\ldots,S)\, e_{n+j-1}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{K+1} D^2_{j,\ell}(Df)(S+\theta' e_n,\ldots,S+\theta' e_{n+K}) e_{n+j-1} e_{n+\ell-1}$$

On reporte ces expressions dans $G_K^{(n)}$; on obtient

$$G_K^{(n)} = \frac{e_n \sum_{i=1}^{K+1} D_i f(S,\ldots,S)\frac{e_{n+i-1}}{e_n} + \frac{1}{2!} e_n \sum_{i,j=1}^{K+1} D^2_{i,j} f(S,\ldots,S) \frac{e_{n+i-1}}{e_n} e_{n+j-1} + \frac{1}{3!} e_n \sum_{i,j,\ell=1}^{K+1} D^3_{i,j,\ell} f(S+\theta e_n,\ldots) \frac{e_{n+i-1}}{e_n} e_{n+j-1} e_{n+\ell-1}}{e_n \sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(S,S,\ldots,S) \frac{e_{n+j-1}}{e_n} + \frac{1}{2!} e_n \sum_{j,\ell=1}^{K+1} D^2_{j,\ell}(Df)(S+\theta' e_n,\ldots) \frac{e_{n+j-1}}{e_n} \cdot e_{n+\ell-1}}$$

Or, la fonction f est de classe C^3 dans un voisinage de $(S,S,\ldots,S)$ donc, $D^3_{i,j,\ell} f(S+ e_n,\ldots,S+\theta e_{n+K})$ et $D^2_{j,\ell}(Df)(S+\theta' e_n,\ldots,S+\theta' e_{n+K})$ sont bornées pour tout $n \geq \sup(N,N')$, d'où,

$$\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{K+1} D_i f(S,S,\ldots,S)\rho^{i-1}}{\sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(S,S,\ldots,S)\rho^{j-1}}.$$

□

Proposition 2.1.

Soit (S_n) une suite convergente telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 1$
Si la fonction f vérifie les hypothèses du théorème 1.1 alors, une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = S$ est que :

$$\sum_{i=1}^{K+1} D_i f(S,S,\ldots,S)\rho^{i-1} = S. \sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(S,S,\ldots,S).\rho^{j-1}$$

La démonstration de cette proposition est évidente, il suffit d'appliquer le théorème 1.1 qui nous donne la limite de la suite $(G_K^{(n)})_n$.

Remarque 1.2.

i) Si pour une suite (S_n) on connait $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction f vérifie,

$$\sum_{i=1}^{K+1} D_i f(x, x, \ldots, x)\rho^{i-1} = x. \sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(x,x,\ldots,x).\rho^{j-1}$$

(sous les hypothèses du théorème 1.1) alors, d'après la proposition 2.1 $\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = S$.

ii) Si la fonction f vérifie

$$\left.\begin{array}{l} f(x,x,\ldots,x) = Df(x,x,\ldots,x) = 0 \\ \\ \sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(x,x,\ldots,x)R^{j-1} \neq 0 \end{array}\right\} \text{ hypothèses du théorème 1.1}$$

et $\sum_{i=1}^{K+1} D_i f(x,x,\ldots,x)R^{i-1} = x. \sum_{j=1}^{K+1} D_j(Df)(x,x,\ldots,x)R^{j-1}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $|R| \leq 1$, $R \neq 1$ alors G_K est régulière pour l'ensemble des suites à convergence linéaire.

Nous remarquons aussi que l'hypothèse, $f(x,x,\ldots,x) = Df(x,x,\ldots,x) = 0$ est vérifiée si f est un polynôme homogène dont la somme des coefficients est nulle.

2 - RESULTATS D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

Théorème 1.2.

i) Si les fonctions $D_i f$ $(1 \leq i \leq K+1)$ *sont continues en tout point* $(1,x,x^2,\ldots,x^K) \in \mathbb{R}^{K+1}$; $|x| \leq 1$, $x \neq 1$ *et si* $Df(1,x,\ldots,x^K) \neq 0$.

ii) Si $R_K(ax_1+b,\ldots,ax_{K+1}+b) = aR_K(x_1,x_2,\ldots,x_{K+1})$ $\forall (x_1,x_2,\ldots,x_{K+1}) \in \mathbb{R}^{K+1}$; $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

iii) Si $f(1,x,x^2,\ldots,x^K) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$, $x \neq 1$ *alors,* G_K *accélère l'ensemble des suites à convergence linéaire.*

Démonstration.

Soit (S_n) une suite à convergence linéaire, i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ $|\rho| \leq 1$, $\rho \neq 1$.

On a vu au I) (1.2) que :

$$G_K^{(n)} = S_n + R_K(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+K})$$

$$G_K^{(n)} - S = e_n + R_K(e_n, e_{n+1},\ldots,e_{n+K})$$

$$= e_n \left[1 + R_K\left(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n}\right)\right]$$

donc,

$$\frac{G_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 + R_K\left(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+K}}{e_n}\right)$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 1 + R_K(1, \rho, \rho^2,\ldots,\rho^K).$$

Or,

$$R_K(1, \rho,\ldots,\rho^K) = \frac{f(1,\rho,\ldots,\rho^K) - Df(1,\rho,\ldots,\rho^K)}{Df(1, \rho,\ldots,\rho^K)}$$

$$= -1, \text{ car } f(1, \rho,\ldots,\rho^K) = 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 0.$$

□

Remarque 1.3.

a) L'hypothèse ii) du théorème 1.2 traduit la quasi-linéarité de la transformation G_K.

b) Si pour une suite (S_n) on connait $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}$ et si $Df(1, \rho,\ldots,\rho^K) \neq 0$, $f(1, \rho,\ldots,\rho^K) = 0$ alors G_K accélère la convergence de (S_n).

3 - EXEMPLES.

a - Δ^2-d'Aitken.

On a vu au I) que si la fonction f est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2$$

on retrouve le procédé Δ^2-d'Aitken et on a, $G_2^{(n)} = \varepsilon_2^{(n)}$. La fonction R_2 est définie par :

$$R_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1-x_2)^2/(2x_2-x_1-x_3).$$

Les hypothèses du théorème 1-2 sont vérifiées :

$$Df(x_1, x_2, x_3) = x_1+x_3-2x_2$$

donc,

$$Df(1, x, x^2) = (1-x)^2 \neq 0 \text{ si } x \neq 1,$$

et

$$f(1, x, x^2) = x^2-x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$R_2(ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b) = aR_2(x_1, x_2, x_3)$$

pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $a,b \in \mathbb{R}$, d'où $G_2 = \Delta_2$ accélère les suites à convergence linéaire.

b - θ_2-algorithme [2]

Si la fonction f est définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(x_4-x_3)(x_3-2x_2+x_1)$$

$$- x_3(x_2-x_1)(x_4-2x_3+x_2),$$

La transformation correspondante est le θ_2-algorithme. Les dérivées de f sont,

$$D_1f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_4 + x_3x_4-2x_3^2$$

$$D_2f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2x_3 + x_3^2 + x_1x_4 - 4x_2x_4$$

$$D_3 f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2^2 + 2x_2x_3 + x_1x_4 - 4x_1x_3$$

$$D_4 f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3.$$

et

$$Df(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_4-x_3)(x_3-2x_2+x_1)$$

$$- (x_2-x_1)(x_4-2x_3+x_2)$$

On retrouve ainsi le θ_2-algorithme,

$$\theta_2^{(n)} = G_3^{(n)} = \frac{f(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3})}{Df(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3})}.$$

Les hypothèses du théorème 1.2 sont vérifiées et donc θ_2 accélère les suites à convergence linéaire.

4 - CAS OU f EST UN POLYNOME HOMOGENE DE DEGRE m=2.

Dans cette partie nous montrons que le polynôme homogène f de degré 2, à 3 variables, qui vérifie les hypothèses du théorème 1.2 correspond au procédé Δ^2-d'Aitken [1].

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{3} a_{i,j}\, x_i x_j$, un polynôme homogène de degré 2 à 3 variables. Recherchons les coefficients $a_{i,j}$ pour que $f(1, \rho, \rho^2) = 0$ $\forall |\rho| \leq 1$, $\rho \neq 1$. On a,

$$f(1,\rho,\rho^2) = a_{11} + (a_{12}+a_{21}) + (a_{22} + a_{13} + a_{31})\rho^2$$

$$+ (a_{23} + a_{32})\rho^3 + a_{33}\rho^4,$$

donc $f(1, \rho, \rho^2) = 0 \quad \forall |\rho| \leq 1, \rho \neq 1 \iff$

$$a_{11} = 0 ; a_{12} + a_{21} = 0 ; a_{22} + a_{13} + a_{31} = 0 ; a_{23} + a_{32} = 0$$

et $a_{33} = 0$. D'où $f(x_1, x_2, x_3) = a_{22}(x_2 - x_1x_2)$.

Les fonctions $D_i f$, pour $1 \leq i \leq 3$, sont continues, et $Df(1, \rho, \rho^2) = -a_{22}(1-\rho)^2 \neq 0 \quad \forall |\rho| \leq 1, \rho \neq 1$. La transformation G_K est quasi-linéaire et,

$G_K^{(n)} = G_K(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}) = \varepsilon_2^{(n)}$, d'où la remarque suivante :

Remarque 1.4.

Le seul polynôme homogène (à un coefficient multiplicatif près) de degré 2, à 3 variables, vérifiant les hypothèses du théorème 1.2 correspond au procédé Δ^2-d'Aitken. Ce résultat rejoint donc ceux de Pennacchi [20].

III - TRANSFORMATIONS G_K SOUS FORME D'UN RAPPORT DE DEUX DÉTERMINANTS.

Dans ce paragraphe nous étudions les transformations du type précédant qui s'écrivent sous forme d'un rapport de deux déterminants tels que la somme des dérivées partielles du numérateur soit égale au dénominateur. Nous recherchons des conditions que doivent satisfaire les éléments de ces déterminants qui sont des fonctions de plusieurs variables pour que G_K soit un procédé d'accélération de la convergence.

Le théorème 1.3 nous permettra d'écrire G_K sous la forme indiquée ci-dessus, et sera utilisé dans toute la suite.

Théorème 1.3.

Soient h_i $(1 \le i \le K)$ *des fonctions définies de* $\mathbb{R}^{P_i+1}$ *dans* $\mathbb{R}$ $(P_i \in \mathbb{N})$.
$P = \underset{1\le i\le K}{\text{Max}} \{P_i\}$.

Soit f *la fonction de* $\mathbb{R}^{P+K+1}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(U_1, U_2, \ldots, U_{P+K+1}) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_{K+1} \\ h_1(U_1,\ldots,U_{P_1+1}) & h_1(U_2,\ldots,U_{P_1+2}) & \cdots & h_1(U_{K+1},\ldots,U_{P_1+K+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_K(U_1,\ldots,U_{P_K+1}) & h_K(U_2,\ldots,U_{P_K+2}) & \cdots & h_K(U_{K+1},\ldots,U_{P_K+K+1}) \end{vmatrix}$$

pour tout $(U_1, U_2,\ldots,U_{P+K+1}) \in \mathbb{R}^{P+K+1}$.

Si les fonctions h_i *possèdent des dérivées partielles et vérifient :*

$$Dh_i(U_1, U_2,\ldots,U_{P_i+1}) = 0 \quad \forall (U_1,U_2,\ldots,U_{P_i+1}) \in \mathbb{R}^{P_i+1}$$

alors,

$$Df(U_1,U_2,\ldots,U_{P+K+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ h_1(U_1,U_2,\ldots,U_{P_1+1}) & h_1(U_2,\ldots,U_{P_1+2}) & \cdots & h_1(U_{K+1},\ldots,U_{P_1+K+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_K(U_1,\ldots,U_{P_K+1}) & h_K(U_2,\ldots,U_{P_K+2}) & \cdots & h_K(U_{K+1},\ldots,U_{P_K+K+1}) \end{vmatrix}.$$

Démonstration.

Développons le déterminant $f(U_1, U_2,\ldots,U_{P+K+1})$ suivant la première ligne, on obtient :

$$f(U_1,U_2,\ldots,U_{P+K+1}) = \sum_{i=1}^{K+1} U_i M_i(U_1,U_2,\ldots,U_{q_i+1}), \text{ avec } q_i \leq P+K$$

donc,

$$Df(U_1,U_2,\ldots,U_{P+K+1}) = \sum_{i=1}^{K+1} U_i DM_i(U_1,\ldots,U_{q_i+1}) + \sum_{i=1}^{K+1} DU_i M_i(U_1,\ldots,U_{q_i+1})$$

Or M_i est une somme de produits des fonctions h_i donc,

$$DM_i(U_1,\ldots,U_{q_i+1}) = 0 \text{ car } Dh_i = 0.$$

$DU_i = 1$ d'où,

$$Df(U_1,\ldots,U_{P+K+1}) = \sum_{i=1}^{K+1} M_i(U_1,\ldots,U_{q_i+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ h_1(U_1,\ldots,U_{P_1+1}) & h_1(U_2,\ldots,U_{P_1+2}) & \cdots & h_1(U_{K+1},\ldots,U_{P_1+K+1}) \\ & & & \\ h_K(U_1,\ldots,U_{P_K+1}) & h_K(U_2,\ldots,U_{P_K+2}) & \cdots & h_K(U_{K+1},\ldots,U_{P_K+K+1}) \end{vmatrix}.$$

1 - RESULTATS DE CONVERGENCE.

On suppose que les fonctions h_i, $(1 \le i \le K)$, vérifient $h_i(ax_1+b,\ldots,ax_{P_i+1}+b) = a^{m_i} h_i(x_1,\ldots,x_{P_i+1})$, $\forall (x_1,\ldots,x_{P_i+1}) \in \mathbb{R}^{P_i+1}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $m_i \in \mathbb{N}^*$.

Théorème T.4.

Soit (S_n) *une suite convergente telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$, $|\rho| \le 1$ $\rho \ne 0,1$.

Si $h_i(1, \rho, \rho^2,\ldots, \rho^{P_i}) \ne 0$ *pour* $1 \le i \le K$ *et* $m_i \ne m_j$, $\forall i \ne j$. *alors*

$$\lim_{n\to\infty} G_K^{(n)} = S.$$

Démonstration.

$$h_i(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+P_i+1}) = h_i(e_n, e_{n+1},\ldots,e_{n+P_i})$$
$$= e_n^{m_i} h_i(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+P_i}}{e_n}),$$

donc

$$\frac{h_i(S_{n+1},\ldots,S_{n+P_i+1})}{h_i(S_n,\ldots,S_{n+P_i})} = (\frac{e_{n+1}}{e_n})^{m_i} \frac{h_i(1, \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}},\ldots,\frac{e_{n+P_i+1}}{e_{n+1}})}{h_i(1, \frac{e_{n+1}}{e_n},\ldots,\frac{e_{n+P_i}}{e_n})}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_i(S_{n+1},\ldots,S_{n+P_i+1})}{h_i(S_n,\ldots,S_{n+P_i})} = \rho^{m_i}$$

et on applique le théorème de C. Brezinski [3] avec $g_i(n) = h_i(S_n,\ldots,S_{n+P_i})$.

$\rho^{m_i} \ne \rho^{m_j}$ car $m_i \ne m_j$, $\forall i \ne j$ d'où le résultat.

□

Théorème 1.5.

Si les fonctions h_i $(1 \le i \le K)$ *vérifient*

$$h_i(1, x, x^2, \ldots, x^{P_i}) \neq 0 \quad \forall |x| < 1, \quad x \neq 0.$$

Si, $m_i \neq m_j$ $\forall i \neq j$ *et s'il existe* i *tel que* $m_i = 1$, *alors pour toute suite* (S_n) *telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$, $|\rho| < 1$ *et* $\rho \neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 0.$$

Démonstration.

Montrons d'abord que la transformation G_K est quasi-linéaire. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_{P+K+1}) \in \mathbb{R}^{P+K+1}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons supposé que $h_i(ax_1+b, \ldots, ax+b) = a^{m_i} h_i(x_1, \ldots, x_{P_i+1})$, donc,

$$f(ax_1+b, \ldots, ax_{P+K+1}+b) = a^{m_1+\ldots+m_K} \times \begin{vmatrix} ax_1+b & ax_2+b & \cdots & ax_{K+1}+b \\ h_1(x_1, \ldots, x_{P_1+1}) & h_1(x_2, \ldots, x_{P_1+2}) & \cdots & h_1(x_{K+1}, \ldots, x_{P_1+K+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_K(x_1, \ldots, x_{P_K+1}) & h_K(x_2, \ldots, x_{P_K+2}) & \cdots & h_K(x_{K+1}, \ldots, x_{P_K+K+1}) \end{vmatrix}$$

$$= a^{m_1+\ldots+m_K+1} f(x_1, \ldots, x_{P+K+1}) + b\, a^{m_1+\ldots+m_K} Df(x_1, \ldots, x_{P+K+1}),$$

de même,

$$Df(ax_1+b, \ldots, ax_{P+K+1}+b) = a^{m_1+\ldots+m_K} Df(x_1, \ldots, x_{P+K+1}),$$

donc,

$$G_K(ax_1+b, \ldots, ax_{P+K+1}+b) = \frac{f(ax_1+b, \ldots, ax_{P+K+1}+b)}{Df(ax_1+b, \ldots, ax_{P+K+1}+b)}$$

$$= aG_K(x_1, \ldots, x_{P+K+1}) + b$$

la transformation G_K est donc quasi-linéaire.

$$G_K^{(n)} - S = G_K(S_n - S, \ldots, S_{n+p+k} - S)$$

$$= \frac{f(e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+P+K})}{Df(e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+P+K})},$$

Or,

$$f(e_n, \ldots, e_{n+P+K}) = \begin{vmatrix} e_n & e_{n+1} & \cdots & e_{n+K} \\ h_1(e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+P_1}) & h_1(e_{n+1}, \ldots, e_{n+P_1+1}) & \cdots & h_1(e_{n+K}, \ldots, e_{n+P_1+K}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_K(e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+P_K}) & h_K(e_{n+1}, \ldots, e_{n+P_K+1}) & \cdots & h_K(e_{n+K}, \ldots, e_{n+P_K+K}) \end{vmatrix}$$

$$= e^{m_1+m_2+\ldots+m_K+1} \times \begin{vmatrix} 1 & \frac{e_{n+1}}{e_n} & \cdots & \frac{e_{n+K}}{e_n} \\ h_1(1, \frac{e_{n+1}}{e_n}, \ldots, \frac{e_{n+P_1}}{e_n}) & h_1(\frac{e_{n+1}}{e_n}, \frac{e_{n+1}}{e_n}, \ldots, \frac{e_{n+P_1+1}}{e_n}) & \cdots & h_1(\frac{e_{n+K}}{e_n}, \ldots, \frac{e_{n+P_1+K}}{e_n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_K(1, \frac{e_{n+1}}{e_n}, \ldots, \frac{e_{n+P_K}}{e_n}) & h_K(\frac{e_{n+1}}{e_n}, \ldots, \frac{e_{n+P_K+1}}{e_n}) & \cdots & h_K(\frac{e_{n+K}}{e_n}, \ldots, \frac{e_{n+P_K+K}}{e_n}) \end{vmatrix}$$

De même,

$$Df(e_n,\dots,e_{n+P+K}) = e_n^{m_1+\dots+m_K} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ h_1(1, \frac{e_{n+1}}{e_n}, \dots, \frac{e_{n+P_1}}{e_n}) & \dots\dots\dots & & h_1(\frac{e_{n+K}}{e_n}, \dots, \frac{e_{n+P_1+K}}{e_n}) \\ \vdots & & & \vdots \\ h_K(1, \frac{e_{n+1}}{e_n}, \dots, \frac{e_{n+P_K}}{e_n}) & \dots\dots\dots & & h_K(\frac{e_{n+K}}{e_n}, \dots, \frac{e_{n+P_K+K}}{e_n}) \end{vmatrix}$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_K^{(n)} - S}{S_n - S} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho & & \rho^K \\ h_1(1,\rho,\dots,\rho^{P_1}) & h_1(\rho,\rho^2,\dots,\rho^{P_1+1}) & \dots & h_1(\rho^K, \rho^{K+1}, \dots, \rho^{K+P_1}) \\ h_1(1,\rho,\dots,\rho^{P_K}) & h_K(\rho,\rho^2,\dots,\rho^{P_K+1}) & \dots\dots & h_K(\rho^K,\rho^{K+1},\dots,\rho^{K+P_K}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ h_1(1,\rho,\dots,\rho^{P_1}) & h_1(\rho,\rho^2,\dots,\rho^{P_1+1}) & \dots & h_1(\rho^K,\dots,\rho^{K+P_1}) \\ h_K(1,\rho,\dots,\rho^{P_K}) & h_K(\rho,\rho^2,\dots,\rho^{P_K+1}) & \dots & h_K(\rho^K,\dots,\rho^{K+P_K}) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{K} h_i(1, \rho, \ldots, \rho^{P_i}) \times \begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho & \cdots & \rho \\ 1 & \rho^{m_1} & \rho^{2m_1} & \cdots & \rho^{Km_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \rho^{m_K} & \rho^{2m_K} & \cdots & \rho^{Km_K} \end{vmatrix}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{K} h_i(1, \rho, \ldots, \rho^{P_i}) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \rho^{m_1} & \rho^{2m_1} & \cdots & \rho^{Km_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \rho^{m_K} & \rho^{2m_K} & \cdots & \rho^{Km_K} \end{vmatrix}}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \rho^{m_1} & \cdots & \rho^{Km_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \rho^{m_K} & \cdots & \rho^{Km_K} \end{vmatrix}$$

est un déterminant de Vandermonde ; il est égal à

$$\prod_{i>o} (\rho^{m_i} - 1) \times \prod_{\substack{i>j \\ j\neq o}} (\rho^{m_i} - \rho^{m_j})$$

qui est non nul, car $\rho \neq -1, 0, 1$ et $m_i \neq m_j$ $\forall i \neq j$. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^K \\ 1 & \rho^{m_1} & \rho^{2m_1} & \cdots & \rho^{Km_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \rho^{m_K} & \rho^{2m_K} & \cdots & \rho^{Km_K} \end{vmatrix}$$

est nul car s'il existe i tel que $m_i = 1$, la ligne i+1 est identique à la première.

D'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 0.$$

□

On peut retrouver ce résultat en utilisant le théorème 1.2, en effet :

- G_K est quasi-linéaire

- $Df(1,x,\ldots,x^{P+K}) \neq 0 \quad \forall |x| < 1 \quad x \neq 0,$

car c'est un déterminant de Vandermonde.

- $f(1,x,\ldots,x^{P+K}) = 0$

car il existe i tel que $m_i = 1$.
Donc d'après le théorème 1.2, G_K accélère la convergence des suites (S_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \; ; \; |\rho| < 1 \text{ et } \rho \neq 0.$$

Remarque 1.5.

A partir de K fonctions h_i vérifiants les hypothèses du théorème 1.5, on peut construire un procédé d'accélération de la convergence.

Si les fonctions h_i sont des polynômes homogènes de degrés différents, et dont l'un de degré 1, si la somme des dérivées partielles de chaque polynôme est nulle et si $h_i(1, x,\ldots,x^{P_i}) \neq 0$, on peut construire un procédé d'accélération de la convergence.

Si les fonctions h_i vérifient les hypothèses du théorème 1,5, la transformation G_K correspondante vérifie $G_K^{(n)} = S$ pour toute suite $S_n = a+b\lambda^n$ $|\lambda| < 1 \quad \lambda \neq 0$. (Ces suites appartiennent au noyau du procédé Δ^2-d'Aitken).

2 - CAS OU f EST UNE FONCTION A 3 VARIABLES.

Soit f une fonction à 3 variables, donc, P+K = 2, et seul cas possible est P=K=1. Recherchons les polynômes h_i qui vérifie les hypothèses du théorème 1.5.

$$\text{Soit } f(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ h_1(x_1,x_2) & h_1(x_2,x_3) \end{vmatrix},$$

or $h_1(ax_1,ax_2) = a^{m_1} h_1(x_1,x_2)$, $m_1 \neq 1$ donc

$$h_1(x_1,x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 \quad \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$Dh_1(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow a_1+a_2 = 0$$

$$h_1(x_1,x_2) = a_1 (x_1-x_2),$$

d'où,

$$f(x_1,x_2,x_3) = a_1(x_2^2 - x_1x_3),$$

la fonction f correspond donc au procédé Δ^2-d'Aitken.

IV - APPLICATIONS ET CAS PARTICULIERS.

Dans ce paragraphe nous montrons que diverses transformations de suites déjà connues sont des cas particuliers de G_K, et nous retrouvons des résultats de convergence correspondants.

1 - TRANSFORMATION DE STREIT [18].

On retrouve la transformation T_{+m} de Streit [18], en prenant K=m et la fonction f de $\mathbb{R}^{m+1}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1}) = x_2x_m - x_1x_{m+1}.$$

Les dérivées de f sont :

$$D_1f(x_1,\ldots,x_{m+1}) = -x_{m+1} \; ; \; D_2f(x_1,\ldots,x_{m+1}) = x_m$$

$$D_mf(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1}) = x_2 \; ; \; D_{m+1}f(x_1,\ldots,x_{m+1}) = -x_1$$

et

$$D_i f(x_1,\ldots,x_{m+1}) = 0 \text{ pour } i = 3, 4,\ldots,m-1.$$

La fonction R_m est définie par :

$$R_m(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1}) = \frac{(x_2-x_1)(x_m-x_1)}{x_2-x_1+x_m-x_{m+1}},$$

et vérifie

$$R_m(ax_1+b,\ldots,ax_{m+1}+b) = aR_m(x_1,\ldots,x_{m+1}) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Les fonctions $D_i f$ pour $1 \leq i \leq m+1$, sont continues en tout point $(1,x,\ldots,x^m)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, et pour une suite (S_n) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho,$$

On a,

$$Df(1, \rho,\ldots,\rho^m) = -\rho^m + \rho^{m-1} + \rho - 1$$

$$= (\rho-1)(1-\rho^{m-1})$$

$$\neq 0 \text{ si } |\rho| < 1$$

et $f(1, \rho,\ldots,\rho^m) = \rho.\rho^{m-1} - 1.\rho^m$

$= 0, \forall \rho$

On en déduit d'après le théorème 1.2 que T_{+m} accélère la convergence toute suite (S_n) telle que $|\rho| < 1$.

2 - TRANSFORMATIONS DE BARRUCAND : B_k.

Ces transformations feront l'objet du chapitre II où elles seront étudiées plus en détail. Ici on se contente de les définir comme des cas particuliers de la transformation G_K.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et a_i ; $i = 0,\ldots,k$ des coefficients réels tels que $\sum_{i=0}^{k} a_i = 0$.

La transformation B_k de Barrucand est définie par :

$$B_k^{(n)} = \frac{\sum_{j=o}^{k} a_j S_{n-j} S_{n+j}}{\sum_{j=o}^{k} a_j (S_{n-j}+S_{n+j})} .$$

On retrouve B_k en considérant la fonction f de $\mathbb{R}^{2k+1}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{2k+1}) = \sum_{j=o}^{k} a_j \, x_{k+1-j} \, x_{k+1+j}.$$

3 - TRANSFORMATION DE SHANKS.

Pour une suite (S_n) donnée, la transformation de D. Shanks [17] est définie par :

$$e_k^{(n)} = e_k(S_n) = \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & & S_{n+k} \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & & \Delta S_{n+k} \\ & & & \\ \Delta S_{n+k-1} & \Delta S_{n+k} & \cdots\cdots & \Delta S_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & & \Delta S_{n+k} \\ & & & \\ \Delta S_{n+k-1} & \Delta S_{n+k} & \cdots\cdots & \Delta S_{n+2k-1} \end{vmatrix}} .$$

On retrouve cette transformation en prenant, $P_i = i$, donc $\underset{1\le i\le k}{\text{Max}} \; P_i = k$ et $h_i(x_1, x_2,\ldots,x_{P_i+1}) = x_{P_i+1} - x_{P_i}$, donc

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{2k+1}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_{k+1} \\ h_1(x_1,x_2) & h_1(x_2,x_3) & \cdots\cdots & h_1(x_{k+1},x_{k+2}) \\ & & & \\ h_k(x_1,\ldots,x_{k+1}) & h_k(x_2,\ldots,x_{k+2}) & \cdots\cdots & h_k(x_{k+1},\ldots,x_{2k+1}) \end{vmatrix}$$

En effet :

Les dérivées des fonctions h_i sont :

$$D_j h_i(x_1,x_2,\ldots,x_{P_i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = P_i+1 \\ -1 & \text{si } j = P_i \\ 0 & \text{si } j \neq P_i \text{ et } j \neq P_i+1 \end{cases}$$

pour $i = 1,2,\ldots,k$, donc $Dh_i(x_1,x_2,\ldots,x_{P_i+1}) = 0$, $\forall (x_1, x_2,\ldots,x_{P_i+1}) \in \mathbb{R}^{P_i+1}$, et d'après le théorème 1.3, on a

$$e_k^{(n)} = \frac{f(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+2k})}{Df(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+2k})} .$$

4 - PROCEDE Δ^2-D'AITKEN ITERE.

Dans [9], P. Hillion donne le procédé Δ^2-itéré sous forme de rapport de deux déterminants :

pour une suite (S_n) donnée, on note $(T_{n,k})_n$ la suite obtenue en appliquant k fois la méthode d'Aitken à (S_n). On a les formules suivantes :

$$T_{n,o} = S_n \text{ et } T_{n,k} = \frac{\Delta T_{n,k-1} \cdot T_{n+1,k-1} - \Delta T_{n+1,k-1} \cdot T_{n,k-1}}{\Delta T_{n,k-1} - \Delta T_{n+1,k-1}}$$

$n,k = 0, 1, 2,\ldots$ où

$$\Delta T_{n,k} = T_{n+1,k} - T_{n,k}.$$

On pose :

$$\Delta^{(o)} T_{n,o} = \Delta T_{n,o},$$

et

$$\Delta^{(i)} T_{n,i} = \Delta T_{n,o} \cdot \Delta T_{n,1} \cdot \ldots \cdot \Delta T_{n,i}$$

$T_{n,k}$ s'écrit alors :

$$T_{n,k} = \frac{\begin{vmatrix} T_{n,o} & T_{n+1,o} & \cdots & T_{n+k,o} \\ \Delta^{(o)}T_{n,o} & \Delta^{(o)}T_{n+1,o} & \cdots & \Delta^{(o)}T_{n+k,o} \\ \Delta^{(k-1)}T_{n,k-1} & \Delta^{(k-1)}T_{n+1,k-1} & \cdots & \Delta^{(k-1)}T_{n+k,k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \Delta^{(o)}T_{n,o} & \Delta^{(o)}T_{n+1,o} & \cdots & \Delta^{(o)}T_{n+k,o} \\ \Delta^{(k-1)}T_{n,k-1} & \Delta^{(k-1)}T_{n+1,k-1} & \cdots & \Delta^{(k-1)}T_{n+k,k-1} \end{vmatrix}} .$$

Montrons l'existence d'une fonction f de $\mathbb{R}^{P+k+1}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$T_{n,k} = \frac{f(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+P+k})}{Df(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+P+k})} .$$

Pour k fixé, on construit la suite de fonctions F_i $(1 \leq i \leq k)$ de $\mathbb{R}^{2i+1}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$F_o(u) = u \quad \forall u \in \mathbb{R} .$$

et

$$* \quad F_i(u_1, \ldots, u_{2i+1}) = \frac{[F_{i-1}(u_2, \ldots, u_{2i}) - F_{i-1}(u_1, \ldots, u_{2i-1})] \times F_{i-1}(u_3, \ldots, u_{2i}) + [F_{i-1}(u_2, \ldots, u_{2i+1}) - F_{i-1}(u_2, \ldots, u_{2i})] \times F_{i-1}(u_1, \ldots, u_{2i-1})}{2F_{i-1}(u_2, \ldots, u_{2i}) - F_{i-1}(u_1, \ldots, u_{2i-1}) - F_{i-1}(u_3, \ldots, u_{2i+1})}$$

pour tout $(u_1, u_2, \ldots, u_{2i+1}) \in \mathbb{R}^{2i+1}$ où F_i est définie.

Lemme 1.1.

Les fonctions F_i, *pour* $i = 0,1,\ldots,k$, *vérifient :*

(i) $DF_i(u_1,u_2,\ldots,u_{2i+1}) = 1$, *pour tout* $(u_1,\ldots,u_{2i+1}) \in \mathbb{R}^{2i+1}$ *où* F *possède des dérivées partielles.*

Pour une suite (S_n) *donnée on a :*

(ii) $F_i(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+2i}) = T_{n,i}$; $\forall n$. ∎

Démonstration.

On fait une démonstration par récurrence à la fois pour (i) et pour (ii) sur l'indice i.

Pour i = o,

$F_o(u_1) = u_1$, donc $D_1F_o(u_1) = 1$, et pour une suite (S_n), $F_o(S_n) = S_n = T_{n,o}$.

Supposons que les propositions (i) et (ii) sont vraies pour i-1, c'est à dire que :

$$DF_{i-1}(u_1,u_2,\ldots,u_{2i-1}) = 1,$$

et

$$F_{i-1}(S_n,S_{n+1},\ldots,S_{n+2i-2}) = T_{n,i-1}.$$

Pour i.

En utilisant la forme récurrente *, et l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$F_i(S_n,S_{n+1},\ldots,S_{n+2i}) = \frac{\Delta T_{n,i-1}\cdot T_{n+1,i-1} - \Delta T_{n+1,i-1}\cdot T_{n,i-1}}{\Delta T_{n,i-1} - \Delta T_{n+1,i-1}}.$$

$$= T_{n,i}, \text{ d'où (ii).}$$

Montrons maintenant que la somme des dérivées de F_i est égale à 1.

Si on applique l'hypothèse de récurrence à la formule * , en dérivant, on obtient :

$$DF_i(u_1,u_2,\ldots,u_{2i+1}) = \frac{[\,2F_{i-1}(u_2,\ldots,u_{2i})-F_{i-1}(u_1,\ldots,u_{2i-1})-F_{i-1}(u_3,\ldots,u_{2i+1})]^2}{[\,2F_{i-1}(u_2,\ldots,u_{2i})-F_{i-1}(u_1,\ldots,u_{2i-1})-F_{i-1}(u_3,\ldots,u_{2i+1})]^2}$$

$$= 1 \quad \forall (u_1,\ldots,u_{2i+1}) \in \mathbb{R}^{2i+1}$$

Définissons maintenant les suites de fonctions (h_i) ; pour $i = 1,2,\ldots,k$ par :

$$h_i(u_1,u_2,\ldots,u_{2i}) = (F_o(u_2)-F_o(u_1))\,(F_1(u_2,u_3,u_4)-F_1(u_1,u_2,u_3)) \times \ldots$$

**

$$\ldots \times (F_{i-1}(u_2,\ldots,u_{2i}) - F_{i-1}(u_1,u_2,\ldots,u_{2i-1}),$$

où les fonctions F_i sont définies précédemment.

Proposition 1.3.

Les fonctions h_i $(1 \le i \le k)$ *vérifient :*

(*i*) $Dh_i(u_1,u_2,\ldots,u_{2i}) = 0$ *pour tout* $(u_1,\ldots,u_{2i}) \in \mathbb{R}^{2i}$, *où* h_i *possède des dérivées partielles.*

(*ii*) $h_i(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+2i-1}) = \Delta^{(i-1)}T_{n,i-1}$ *pour toute suite* (S_n) *donnée.*

Démonstration.

D'après le lemme 1.1, $DF_i(u_1,\ldots,u_{2i+1}) = 1$ pour $i = 0,1,\ldots,k$; on utilise la formule ** pour obtenir $Dh_i(u_1,u_2,\ldots,u_{2i}) = 0$, d'où (i).

Pour une suite (S_n) donnée on a,

$$h_i(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+2i-1}) = (F_o(S_{n+1})-F_o(S_n)) \times (F_1(S_{n+1},S_{n+2},S_{n+3})$$

$$- F_1(S_n, S_{n+1}, S_{n+2})) \times \ldots$$

$$\times (F_{i-1}(S_{n+1},\ldots,S_{n+2i-1}) - F_{i-1}(S_n,\ldots,S_{n+2i-2})),$$

d'après le lemme 1.1, $F_i(S_n,\ldots,S_{n+2i}) = T_{n,i}$ $i = 0,\ldots,k$, donc,

$$h_i(S_n,S_{n+1},\ldots,S_{n+2i-1}) = (T_{n+1,o}-T_{n,o}) \times (T_{n+1,1}-T_{n,1}) \quad \ldots$$

$$\times (T_{n+1,i-1} - T_{n,i-1})$$

$$= \Delta T_{n,o} \times \Delta T_{n,1} \times \ldots \times \Delta T_{n,i-1}$$

$$= \Delta^{(i-1)} T_{n,i-1}, \text{ d'où (ii).}$$

□

Les fonctions h_i, $(1 \leq i \leq k)$ vérifient les hypothèses du théorème 1.3 ; on retrouve alors $T_{n,k}$ en prenant $P_i = 2i-1$, d'où $P = \underset{1\leq i\leq k}{\text{Max}} \{P_i\} = 2k-1$.

La fonction f est définie par :

$$f(u_1,u_2,\ldots,u_{k+P+1}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & & u_{k+1} \\ h_1(u_1,\ldots,u_{P_1+1}) & h_1(u_2,\ldots,u_{P_1+2}) & \cdots & h_1(u_{k+1},\ldots,u_{P_1+k+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_k(u_1,\ldots,u_{P_k+1}) & h_1(u_2,\ldots,u_{P_k+2}) & \cdots & h_k(u_{k+1},\ldots,u_{P_k+k+1}) \end{vmatrix}$$

et on a,

$$T_{n,k} = \frac{f(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+p+k})}{Df(S_n,S_{n+1},\ldots,S_{n+p+k})}$$

5 - TRANSFORMATION DE B. GERMAIN-BONNE (Interpolation inverse).

Dans [7] Germain-Bonne montre que l'approximation de la limite d'une suite (S_n) définie par une forme itérative $S_{n+1} = F(S_n)$, où F est une fonction de classe C , par une technique d'interpolation inverse conduit à une méthode d'accélération de la convergence. L'utilisation du procédé de Neville-Aitken permet de fabriquer un tableau dont les termes P_i^j sont déterminés par la formule :

$$P_i^{j+1} = \frac{\Delta S_{i+j+1} . P_i^j - \Delta S_i . P_{i+1}^j}{\Delta S_{i+j+1} - \Delta S_i} \quad , \quad P_o^j = S_j$$

D'autre part :

$$P_n^k = \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{n+k} \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_n)^k & (\Delta S_{n+1})^k & \cdots & (\Delta S_{n+k})^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \cdots & \Delta S_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_n)^k & (\Delta S_{n+1})^k & \cdots & (\Delta S_{n+k})^k \end{vmatrix}}$$

On retrouve P_n^k, en prenant :

. $P_i = 1$ donc $P = \underset{1 \le i \le k}{\text{Max}} \{P_i\} = 1$.

. Les fonctions h_i de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$h_i(u_1,u_2) = (u_2-u_1)^i \quad \forall (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1,2,\ldots,k \ .$$

et la fonction f définie par

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{k+2}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{k+1} \\ h_1(u_1,u_2) & h_1(u_2,u_3) & \cdots & h_1(u_{k+1},u_{k+2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_k(u_1,u_2) & h_k(u_2,u_3) & \cdots & h_k(u_{k+1},u_{k+2}) \end{vmatrix}$$

En effet :

$$h_i(u_1,u_2) = (u_2-u_1)^i,$$

donc

$$D_j h_i(u_1,u_2) = \begin{cases} -i\,(u_2-u_1)^{i-1} & \text{si } j = 1 \\ i\,(u_2-u_1)^{i-1} & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

d'où $Dh_i(u_1,u_2) = 0 \quad \forall (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$, et d'après le théorème 1,3, on a :

$$P_n^k = \frac{f(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+k+1})}{Df(S_n,S_{n+1},\ldots,S_{n+k+1})} .$$

6 - LE E-ALGORITHME.

Le E-algorithme a été obtenu par C. Brezinski [3]. Pour une suite (S_n) donnée, il est défini par :

$$E_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{n+k} \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}$$

où (g_i) $i = 1,\ldots,k$ est une suite donnée de fonctions.

Considérons les fonctions $h_1,\ldots,h_k$ de $\mathbb{R}^{P_i+1}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$h_i(S_n, S_{n+1},\ldots,S_{n+P_i}) = g_i(n) \quad \forall n \; ; \; i = 1,2,\ldots,k$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont des entiers naturels.

Si les fonctions h_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ vérifient :

$$Dh_i(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+P_i}) = 0,$$

alors

$$E_k^{(n)} = \frac{f(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+P+1})}{Df(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+P+k})}$$

où

$$f(S_n, \ldots, S_{n+P+k}) = \begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} & \cdots & S_{n+k} \\ h_1(S_n, \ldots, S_{n+P_1}) & h_1(S_{n+1}, \ldots, S_{n+P_1+1}) & \cdots & h_1(S_{n+k}, \ldots, S_{n+P_1+k}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_k(S_n, \ldots, S_{n+P_k}) & h_k(S_{n+1}, \ldots, S_{n+P_k+1}) & \cdots & h_k(S_{n+k}, \ldots, S_{n+P_k+k}) \end{vmatrix}$$

et

$$P = \operatorname{Max}_{1 \le i \le k} \{P_i\}.$$

□

CHAPITRE II

ETUDE DES TRANSFORMATIONS DE BARRUCAND

I - INTRODUCTION.

Dans une lettre écrite à C. Brezinski (Mars 1985), P. Barrucand a proposé certaines transformations de suites. Ces dernières rentrent dans le cadre des transformations de la forme $\frac{f}{Df}$ qui ont été étudiées dans le premier chapitre.

Dans ce chapitre, nous étudions les possibilités de ces transformations à accélérer la convergence des suites. Un cas particulier sera étudié dans le cas de la convergence logarithmique. En outre nous proposons une modification dont le but est d'accélérer une classe de suites à convergence logarithmique.

Enfin, nous comparons ces transformations avec le procédés Δ^2-d'Aitken, et les exemples numériques seront donnés au même temps que les résultats théoriques.

PRESENTATION DES TRANSFORMATIONS DE BARRUCAND.

Soit (S_n) une suite convergente de limite S. La suite $(\varepsilon_2^{(n)})$ obtenue par application du Procédé Δ^2-d'Aitken [1] à (S_n) est définie par :

$$\varepsilon_2^{(n)} = \frac{S_n S_{n+2} - S_{n+1}^2}{S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1}},$$

ou encore

$$\varepsilon_2^{(n-1)} = \frac{S_{n-1} S_{n+1} - S_n^2}{S_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n} = \frac{a_o S_n^2 + a_1 S_{n-1} S_{n+1}}{2a_o S_n + a_1 (S_{n-1} + S_{n+1})}$$

où, a_o, a_1 sont des constantes réelles non nulles telles que $a_o + a_1 = 0$.

$a_o + a_1 = 0$, est une condition nécessaire pour la régularité et suffisante pour la quasi-linéarité du procédé.

Parmis les transformations proposées par P. Barrucand on trouve, :

$$(2.1) \qquad U : (S_n) \to U(S_n) = \frac{xS_{n-2}S_{n+2} + yS_{n-1}S_{n+1} + ZS_n^2}{x(S_{n-2} + S_{n+2}) + y(S_{n-1} + S_{n+1}) + 2ZSn}$$

avec $x + y + Z = 0$,

et

$$(2.2) \qquad T_K : (S_n) \to T_K(S_n) = \frac{S_{n-K}S_{n+K} - S_n^2}{S_{n-K} + S_{n+K} - 2S_n}$$

D'une manière générale, on considère la transformation B_K ($K \in \mathbb{N}^*$) définie par :

$$(2.3) \qquad B_K : (S_n) \to B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} + S_{n+i})}$$

$a_o, a_1, \ldots, a_K$ étant des coefficients non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{K} a_i = 0$.

B_K dépend alors de $a_o, a_1, \ldots, a_k$, et le calcul de $B_K^{(n)}$ nécessite la connaissance des termes $S_{n-K}, S_{n-K+1}, \ldots, S_{n+K}$ (2K+1 termes de la suite initiale).

Nous avons vu dans le chapitre 1 (IV.2) que cette transformation rentre dans le cadre des transformations de la forme $\frac{f}{Df}$.

II - Propriétés de B_K.

$B_K^{(n)}$ peut aussi s'écrire sous la forme :

$$(2.4) \qquad B_K^{(n)} = S_n + \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} - S_n)(S_{n+i} - S_n)}{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} + S_{n+i})} .$$

En effet, on a :

$$(S_{n-i} - S_n)(S_{n+i} - S_n) = S_{n-i}S_{n+i} - S_n(S_{n-i} + S_{n+i}) + S_n^2$$

donc,

$$\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} - S_n)(S_{n+i} - S_n) = \sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i} - S_n \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} + S_{n+i}) + S_n^2 \sum_{i=o}^{K} a_i$$

Or $\sum_{i=o}^{K} a_i = 0$, donc

$$\frac{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}-S_n)(S_{n+i}-S_n)}{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})} - S_n$$

$$= B_K^{(n)} - S_n,$$

d'où l'écriture (2.4).

□

Propriété 2.1.

Soit K *un entier non nul fixé ;* $a_o, a_1, \ldots, a_K$ *des constantes réelles telles que*

$$\sum_{i=o}^{K} a_i = o,$$

(S_n) *une suite convergente.*

Si l'application de B_K *aux suites* (S_n) *et* (aS_n+b) *fournit respectivement* $(B_K^{(n)})$ *et* $(\bar{B}_K^{(n)})_n$, *alors*

$$\bar{B}_K^{(n)} = aB_K^{(n)} + b \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

Démonstration.

$$(aS_{n-i}+b)(aS_{n+i}+b) = a^2 S_{n-i} S_{n+i} + ab(S_{n-i}+S_{n+i}) + b^2$$

et

$$(aS_{n-i}+b)+(aS_{n+i}+b) = a(S_{n-i}+S_{n+i}) + 2b$$

donc,

$$\sum_{i=o}^{K} a_i (aS_{n-i}+b)(aS_{n+i}+b) = a^2 \sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i} + ab \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})$$

et

$$\sum_{i=o}^{K} a_i[(aS_{n-i}+b)+(a(S_{n+i}+b)] = a \sum_{i=o}^{K} a_i(S_{n-i}+S_{n+i})$$

d'où,

$$\underset{K}{\bar{B}}^{(n)} = \frac{a^2 \sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i} + ab \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})}{a \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})}$$

$$= a\, B_K^{(n)} + b.$$

□

Si l'on applique B_K à la suite $(S_n = \lambda^n)$, où λ est un réel différent de 1, on obtient :

$$B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i \lambda^{n-i} \times \lambda^{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (\lambda^{n-i}+\lambda^{n+i})}$$

$$= \frac{\lambda^{2n} \sum_{i=o}^{K} a_i}{\sum_{i=o}^{K} a_i (\lambda^{n-i}+\lambda^{n+i})} = 0, \text{ car } \sum_{i=o}^{K} a_i = 0.$$

Si $S_n = S + \alpha\lambda^n$, $\lambda \neq 1$ (l'ensemble de ces suites (S_n) est le noyau du procédé Δ^2-d'Aitken [1]) alors $B_k^{(n)} = S$; il suffit d'appliquer la propriété 2.1.

Si $S_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

$$B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i \frac{1}{n-i} \quad \frac{1}{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (\frac{1}{n-i} + \frac{1}{n+i})}$$

$$= \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i \frac{1}{n^2-i^2}}{2n \sum_{i=o}^{K} a_i \frac{1}{n^2-i^2}}$$

$$= \frac{1}{2n} \quad \text{pour} \quad n > K$$

Dans ce cas la transformation B_K nous apparait moins intéressante.

Remarque 2.1.

Pour tout entier non nul K, on peut choisir les coefficients a_i ; $i = 0,1,\ldots,K$ de telle sorte que le dénominateur $\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})$ de $B_K^{(n)}$ soit égal à $\Delta^{2K} S_{n-K}$.

En effet,

$$\Delta^{2K} S_{n-K} = \sum_{i=o}^{2K} (-1)^i C_{2K}^i S_{n+K-i},$$

Or, $C_{2K}^i = C_{2K}^{2K-i}$ donc,

$$\Delta^{2k} S_{n-K} = \sum_{i=o}^{K} (-1)^{K-i} C_{2K}^{K-i} S_{n+i} + \sum_{i=1}^{K} (-1)^{K+i} C_{2K}^{K+i} S_{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} (-1)^{K-i} C_{2K}^{K-i} (S_{n-i}+S_{n+i}) + (-1)^K C_{2K}^K S_n$$

$$= \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} + S_{n+i})$$

avec

$$a_o = (-1)^K C_{2K}^K / 2$$

$$a_i = (-1)^{K-i} C_{2K}^{K-i} \quad \text{pour } i = 1,2,\ldots,K.$$

On vérifie facilement que $\sum_{i=o}^{K} a_i = o$, et $B_K^{(n)}$ s'écrit alors :

$$(2.5) \qquad B_K^{(n)} = \frac{\frac{1}{2}(-1)^K C_{2K}^K S_n + \sum_{i=1}^{K} (-1)^{K-i} C_{2K}^{K-i} S_{n-i} S_{n+i}}{\Delta^{2K} S_{n-K}} .$$

□

III - RÉSULTATS DE CONVERGENCE.

Soit K un entier naturel non nul, et $a_o, a_1, \ldots, a_K$ des coefficients réels non tous nuls tels que $\sum_{i=o}^{K} a_i = 0$. Pour une suite (S_n) convergente de limite S, on a :

$$B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} + S_{n+i})} .$$

Soit P_{2K} le polynôme de degré 2K défini par :

$$P_{2K}(x) = \sum_{i=o}^{K} a_i (x^{K-i} + x^{K+i}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.1.

Soit (S_n) une suite convergente telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ existe.
Si $P_{2K}(\rho) \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 0.$$

Démonstration.

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le théorème 1,2 (et b de la remarque 1.3) du chapitre 1, (II.2).

Nous savons que B_K rentre dans le cadre des transformations de la forme f/Df. La fonction f correspondante est définie par : (voir (IV.2) chapitre 1).

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{2K+1}) = \sum_{i=o}^{K} a_i x_{K+1-i} x_{K+1+i},$$

les dérivées de f sont :

$$D_i f(x_1,x_2,\ldots,x_{2K+1}) = a_{K+1-i}\, x_{2K+2-i} \text{ pour } 1 \le i \le K$$

$$D_i f(x_1,x_2,\ldots,x_{2K+1}) = a_{i-K-1}\, x_{2K+2-i} \text{ pour } K+2 \le i \le 2K+1$$

et

$$D_{K+1} f(x_1,x_2,\ldots,x_{2K+1}) = 2a_o\, x_{K+1}.$$

La somme des dérivées partielles de f est donc

$$Df(x_1,x_2,\ldots,x_{2K+1}) = \sum_{i=o}^{K} a_i (x_{K+1-i}+x_{K+1+i})$$

qui n'est rien d'autre que le polynôme P_{2K}.
Les hypothèses :

$$Df(1,\ \rho,\ldots,\rho^{2K+1}) = P_{2K}(\rho) \neq 0$$

et

$$f(1,\ \rho,\ldots,\rho^{2K+1}) = \sum_{i=o}^{K} a_i\, \rho^{K-i}\rho^{K+i}$$

$$= \rho^{2K} \sum_{i=o}^{K} a_i$$

$$= 0$$

sont vérifiées. B_K est quasi-linéaire donc, d'après le théorème 1.2, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)}-S}{S_n - S} = 0.$$

□

Remarque 2.2.

Le théorème 2.1 ne concerne pas les suites à convergence logarithmique car $P_{2K}(1) = \sum_{i=o}^{K} a_i \times 2 = 0$.

Si pour une suite (S_n) on connaît $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}$, il est facile de vérifier si $P_{2K}(\rho)$ est non nul.

Si aucune racîne de $P_{2K}(x) = 0$ n'est dans le disque unité, alors B_K accélère la convergence de toutes les suites (S_n) telles que $|\rho| < 1$.

Théorème 2.2.

Si pour K fixé on prend, $a_o = (-1)^K C^K_{2K/2}$, $a_i = (-1)^{K-i} C^{K-i}_{2K}$; $i = 1,2,\ldots,K$ *alors le procédé* B_K *accélère les suites à convergence linéaire.*

Démonstration.

Pour ce choix des coefficients a_i le dénominateur de B_K est $\Delta^{2K} S_{n-K}$ (voîr remarque 2.1).

Soit (S_n) une suite à convergence linéaire, i.e $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 1$.
On a

$$P_{2K}(\rho) = \sum_{i=o}^{K} a_i(\rho^{K-i} + \rho^{K+i})$$

$$= (-1)^K C^K_{2K} \rho^K + \sum_{i=1}^{K} (-1)^{K-i} C^{K-i}_{2K}(\rho^{K-i}+\rho^{K+i}).$$

En utilisant les relations $(-1)^{K-i} = (-1)^{K+i}$ et $C^{K-i}_{2K} = C^{K+i}_{2K}$ on obtient :

$$P_{2K}(\rho) = (1-\rho)^{2K} \neq 0$$

car, $\rho \neq 1$. On applique le théorème 2.1, et B_k accélère alors la convergence de (S_n).

□

Théorème 2.3.

Soit (S_n) *une suite convergente de limite* S.
Une condition nécessaire et suffisante pour que $B_K^{(n)} = S$, $\forall n \geq N$ *est que*

$$\sum_{i=o}^{K} a_i\, e_{n-i}\, e_{n+i} = 0 \quad \forall n \geq N$$

Démonstration.

$$\text{On a, } B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})}$$

$$B_K^{(n)} = S \iff \sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i} = S \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} + S_{n+i})$$

Or,

$$\sum_{i=o}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i} - S \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i}) = \sum_{i=o}^{K} a_i (S_{n-i} S_{n+i} - S(S_{n-i}+S_{n+i}))$$

$$= \sum_{i=o}^{K} [a_i S_{n-i} S_{n+i} - S(S_{n-i}+S_{n+i}) + S^2] \; ; \; (\sum_{i=o}^{K} a_i S^2 = o)$$

$$= \sum_{i=o}^{K} a_i [(S_{n-i} - S)(S_{n+i} - S)]$$

$$= \sum_{i=o}^{K} a_i e_{n-i} e_{n+i},$$

d'où

$$B_K^{(n)} = S \quad \forall n \geq N \iff \sum_{i=o}^{K} a_i e_{n-i} e_{n+i} = o \quad \forall n \geq N.$$

□

APPLICATIONS.

1 - TRANSFORMATION T_{+m} DE GRAY ET CLARK. [8]

La transformation T_{+m}, ($m \in \mathbb{N}^*$) de Gray et Clark est définie par,

$$T_{+m}(S_n) = \frac{S_{n-m} S_{n+m} - S_{n-1-m} S_{n+1+m}}{(S_{n-m}+S_{n+m}) - (S_{n-1-m}+S_{n+1+m})}.$$

Soit K un entier fixé. On pose $a_o = a_1 = \ldots = a_{K-2} = o$; $a_{K-1} = 1$ et $a_K = -1$, on obtient :

$$B_K^{(n)} = \frac{S_{n-K+1} S_{n+K-1} - S_{n-K} S_{n+K}}{(S_{n-K+1}+S_{n+K-1}) - (S_{n-K}+S_{n+K})}$$

d'où $B_K^{(n)} = T_{+m}(S_{n+K})$ où $m = 2K-1$.

Le polynôme P_{2K} est défini par :

$$P_{2K}(x) = \sum_{i=o}^{K} a_i (x^{K-i} + x^{K+i}) = (x+x^{2K-1}) - (1+x^{2K})$$

$$= (1-x)(x^{2K-1}-1)$$

$$P_{2K}(x) \neq 0,$$

si x n'est pas racine $(2K-1)^{\text{ième}}$ de l'unité ; donc, d'après le théorème 2.1, $T_{+(2K-1)}$ accélère la convergence des suites (S_n) telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$, et ρ n'est pas racine $(2K-1)^{\text{ième}}$ de l'unité.

$\sum_{i=o}^{K} a_i\, e_{n-i} e_{n+i} = e_{n-K+1} e_{n+K-1} - e_{n-K} e_{n+K}$ donc, d'après le théorème 2.3, $B_K^{(n)} = S$, $\forall n \geq N$ si et seulement si,

i) $\quad e_{n-K+1} e_{n+K-1} = e_{n-K} e_{n+K} \quad \forall n \geq N,$

il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que,

$$e_{n+K} = C_1\, e_{n-K+1} \text{ et } e_{n+K-1} = C_2\, e_{n-K}.$$

On remplace dans i), on obtient :

$$e_{n-K+1}\, C_2 e_{n-K} = e_{n-K} C_1 e_{n-K+1} \Rightarrow C_1 = C_2$$

donc

$$e_{n+K} = C_1\, e_{n-K+1},$$

d'où

c'est à dire, $\quad e_{n+m} = C_1\, e_n \quad \forall n \geq N$ où $m = 2K-1$

$$e_{n+2K-1} = C_1 e_n, \quad \forall n \geq N$$

On retrouve ainsi le noyau de T_{+m} et le théorème 1. de Streit [18].

2 - LA TRANSFORMATION T_K DE BARRUCAND.

On choisit $a_o = -1$, $a_1 = \ldots = a_{K-1} = 0$ et $a_K = 1$, et on note T_K la transformation correspondante :

$$T_K : (S_n) \to T_K^{(n)} = \frac{S_{n-K}S_{n+K} - S_n^2}{S_{n-K}+S_{n+K}-2S_n},$$

on retrouve ainsi le Procédé (Δ_K^2) de J.P. Delahaye [6].

Le polynôme P_{2K} est :

$$P_{2K}(x) = -(2x^K) + (1 + x^{2K})$$

$$= (1-x^K)^2.$$

Si x n'est pas racine $K^{\text{ième}}$ de l'unité, $P_{2K}(x) \neq 0$; donc, d'après le théorème 2.1, T_k accélère la convergence des suites (S_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$ et ρ n'est pas racine $K^{\text{ième}}$ de l'unité.

Noyau de T_K.

D'après le théorème 2.3 on a : $T_K^{(n)} = S$, $\forall n \geq N$ si et seulement si,

$$-e_n^2 + e_{n-K}e_{n+K} = 0, \quad \forall n \geq N,$$

donc

$$T_K^{(n)} = S, \ \forall n \geq N \iff \frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_n}{e_{n-K}}, \ \forall n \geq N$$

d'où la proposition suivante :

Proposition 2.1.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $T_K^{(n)} = S$, $\forall n \geq N$ *est que :*

$$\frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_n}{e_{n-K}}, \quad \forall n \geq N$$

∎

Proposition 2.2.

Le noyau de T_{+K} *est strictement inclus dans le noyau de* T_K, *pour* $K > 1$.

Rappelons d'abord que le noyau de T_{+K} est :

$$N(T_{+K}) = \{(S_n) \text{ telles que } T_{+K}^{(n)} = S \quad \forall n \geq N\}$$

$$= \{(S_n) \text{ telles que } \frac{e_{n+K}}{e_n} = C \quad \forall n \geq N\},$$

où C est une constante, (voir [18]) et,

$$N(T_K) = \{(S_n) \text{ telles que } \frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_n}{e_{n-K}}, \quad \forall n \geq N\}.$$

Démonstration.

On remarque d'abord que :

$$N(T_{+K}) \subset N(T_K)$$

car si $(S_n) \in N(T_{+K})$ on a,

$$\frac{e_{n+K}}{e_n} = C \quad \forall n \geq N \text{ donc } \frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_n}{e_{n-K}} = C \quad \forall n \geq N + K$$

d'où,

$$(S_n) \in N(T).$$

Montrons que l'inclusion est stricte : $S_o, S_1, \ldots, S_{2K-1}$ étant donnés, on construit la suite $(S_n)_{n \geq 2K}$ de la façon suivante :

$$S_n = S + \frac{(S_{n-K} - S)(S_{K+r_n} - S)}{(S_{r_n} - S)}, \quad n \geq 2K \tag{2.6}$$

où r_n est le reste de la division de n par K.

i) La suite (S_n) appartient à $N(T_K)$. En effet,

$$e_{n+K} = S_{n+K} - S = \frac{(S_n - S)(S_{K+r_{n+K}} - S)}{(S_{r_{n+K}} - S)}$$

or $r_{n+K} = r_n$, donc

$$e_{n+K} = \frac{e_n e_{K+r_n}}{e_{r_n}} \Rightarrow \frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_{K+r_n}}{e_{r_n}} .$$

De même

$$\frac{e_{n-K} e_{K+r_n}}{e_{r_n}} \Rightarrow \frac{e_n}{e_{n-K}} = \frac{e_{K+r_n}}{e_{r_n}},$$

donc

$$\frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_n}{e_{n-K}} ,$$

d'où $(S_n) \in N(T_K)$

ii) $(S_n)_n \notin N(T_{+K})$. On va montrer que $\frac{e_{n+K}}{e_n}$ n'est pas une constante.

$$\Rightarrow \frac{e_{n+1+K}}{e_{n+1}} = \frac{e_{K+r_{n+1}}}{e_{r_{n+1}}} , \tag{2.6}$$

où r_{n+1} est le reste de division de n+1 par K (K > 1), donc

$$r_{n+1} = r_n + 1 \text{ ou } r_{n+1} = 0,$$

d'où

$$\frac{e_{n+1+K}}{e_{n+1}} = \frac{e_{K+r_n+1}}{e_{r_n+1}}$$

où,

$$\frac{e_{n+1+K}}{e_{n+1}} = \frac{e_K}{e_o} \quad \text{et} \quad \frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_{K+r_n}}{e_{r_n}}$$

Pour les entiers n qui sont des multiples de K, on a : $r_n = 0$ donc $r_{n+1} = 1$, pour $K > 1$, d'où

$$\frac{e_{n+1+K}}{e_{n+1}} = \frac{e_{K+1}}{e_1}$$

et

$$\frac{e_{n+K}}{e_n} = \frac{e_K}{e_0} .$$

Si les 2K premiers termes de la suite (S_n) sont choisis de sorte que $\frac{e_{K+1}}{e_1} \neq \frac{e_K}{e_0}$ on obtient, $\frac{e_{n+1+K}}{e_{n+1}} \neq \frac{e_{n+K}}{e_n}$ pour tout n multiple de K donc le rapport $\frac{e_{n+K}}{e_n}$ n'est pas constant à partir d'un certain rang. (S_n) n'appartient pas alors à $N(T_{+K})$.□

IV - Exemples numériques.

Dans tous les exemples nous choisissons les coefficients a_i comme dans le théorème 2.2, c'est-à-dire,

$$a_o = (-1)^K \frac{C_{2K}^K}{2}$$

$$a_i = (-1)^i C_{2K}^{K-i} \quad i = 1,\ldots,K.$$

Ces coefficients sont définis dans le tableau suivant :

K	a_i ; $i = 0, 1, 2,\ldots,K$						
1	-1	1					
2	3	-4	1				
3	-10	15	-6	1			
4	35	-56	28	-8	1		
5	-126	210	-120	46	-10	1	
6	462	-792	495	-220	66	-12	1

Exemple 1.

On considère la suite (S_n) définie par :

$$S_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

La suite (S_n) est convergente de limite $S = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = -1$, donc d'après le théorème 2.2, III) B_k accélère la convergence de (S_n).

Pour différentes valeurs de K nous avons obtenu les résultats suivants :

n	S_n	K=1, $B_1^{(n)} = \Delta_2^{(n)}$	K=2, $B_2^{(n)}$
1	0.50000000000000D+00		
2	0.13333333333333D+01	0.99019607843137D+00	
3	0.75000000000000D+00	0.10040322580645D+01	0.99903100775193D+00
4	0.12000000000000D+01	0.99795918367346D+00	0.10002849002849D+01
5	0.83333333333333D+00	0.10011737089201D+01	0.99989163415691D+00
6	0.11428571428571D+01	0.99926362297496D+00	0.10000485578323D+01
7	0.87500000000000D+00	0.10004921259842D+01	0.99997559547051D+00
8	0.11111111111111D+01	0.99965493443754D+00	0.10000133579118D+01
9	0.90000000000000D+00	0.10002512562814D+01	0.99999218872051D+00
10	0.10909090909091D+01	0.99981139192757D+00	0.10000048156102D+01
11	0.91666666666667D+00	0.10001451800232D+01	0.99999690003223D+00
12	0.10769230769231D+01	0.99988587080575D+00	0.10000020688256D+01
13	0.92857142857143D+00	0.10000913408842D+01	0.99999857649624D+00
14	0.10666666666667D+01	0.99992576095026D+00	0.10000010055000D+01
15	0.93750000000000D+00	0.10000611545988D+01	0.99999927340789D+00
16	0.10588235294118D+01	0.99994902640432D+00	0.10000005356261D+01
17	0.94444444444444D+00	0.10000429331959D+01	0.99999959812824D+00
18	0.10526315789474D+01	0.99996350098547D+00	0.10000003062860D+01
19	0.95000000000000D+00	0.10000312891113D+01	
20	0.10476190476190D+01		

	K=3 $B_3^{(n)}$	K=4, $B_4^{(n)}$	K=5, $B_5^{(n)}$
	0.99986996098829 6D+00		
	0.10000296033155 7D+01	0.99997965991375 8D+00	
	0.99999100055796 5D+00	0.10000037707106 3D+01	0.99999651244707 6D+00
	0.10000032993718 0D+01	0.99999904634023 5D+00	0.10000005449615 0D+01
	0.99999861778032 1D+00	0.10000002956608 2D+01	0.99999988205791 9D+00
	0.10000006403770 5D+01	0.99999989385212 7D+00	0.10000000316654 7D+01
	0.99999967892303 1D+00	0.10000000426205 0D+01	0.99999999005618 4D+00
	0.10000001715984 1D+01	0.99999998130051 2D+00	0.10000000035223 4D+01
	0.99999990332046 0D+00	0.10000000088190 0D+01	0.99999999862638 6D+00
	0.10000000569425 1D+01	0.99999999558292 5D+00	0.10000000005796 3D+01
	0.99999996516634 7D+00	0.10000000023279 8D+01	0.99999999973871 5D+00
	0.10000000220184 7D+01	0.99999999871817 9D+00	0.10000000001246 0D+01
	0.99999998567817 8D+00	0.10000000007331 4D+01	
	0.10000000095533 5D+01		

Exemple 2. Calcul de $\pi/4$.

Soit (S_n) la suite définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \qquad n = 1,2,\ldots$$

On a, $\lim S_n = S \simeq 0.78539816339$.

L'application de B_K pour K = 1,2,3,4,5,6 ; à la suite (S_n) donne les résultats suivants :

n	S_n	K=1, $\Delta_2^{(n)}$ d'Aitken	K=2, $B_2^{(n)}$
1	0.10000000000000D+01		
2	0.66666666666667D+00	0.79166666666667D+00	
3	0.86666666666667D+00	0.78333333333333D+00	0.78620689655172 4D+00
4	0.72380952380952 4D+00	0.78630952380952 4D+00	0.78521303258145 3D+00
5	0.83492063492063 5D+00	0.78492063492063 5D+00	0.78545826932923 8D+00
6	0.74401154401154 4D+00	0.78567821067821 1D+00	0.78537407442516 9D+00
7	0.82093462093462 1D+00	0.78522033522033 6D+00	0.78540929969501 5D+00
8	0.75426795426795 4D+00	0.78551795426795 4D+00	0.78539245225992 2D+00
9	0.81309148367971 9D+00	0.78531370590194 0D+00	0.78540133296117 7D+00
10	0.76045990473235 1D+00	0.78545990473235 1D+00	0.78539629150079 8D+00
11	0.80807895235139 8D+00	0.78535167962412 5D+00	0.78539932589818 8D+00
12	0.76460069148183 3D+00	0.78543402481516 7D+00	0.78539741087257 8D+00
13	0.80460069148183 3D+00	0.78536992225106 3D+00	0.78539866779550 4D+00
14	0.76756365444479 6D+00	0.78542079730193 7D+00	0.78539781513609 9D+00
15	0.80204641306548 6D+00	0.78537974639881 8D+00	0.78539841007929 6D+00
16	0.76978834854935 7D+00	0.78541334854935 7D+00	0.78539798473421 4D+00
17	0.80009137885238 7D+00	0.78538549649944 4D+00	0.78539829535266 7D+00
18	0.77151995028095 9D+00	0.78540883916984 6D+00	0.78539806423665 2D+00
19	0.79854697730798 6D+00	0.78538908257114 2D+00	
20	0.77290595166696 0D+00		

	k=4, $B_4^{(n)}$	k=5, $B_5^{(n)}$	K=6, $B_6^{(n)}$
	0.78542207731669 0D+00		
	0.78539481599863 1D+00	0.78540277805433 3D+00	
	0.78539887194628 7D+00	0.78539762268630 3D+00	0.78539909056152 5D+00
	0.78539797018018 4D+00	0.78539826088689 3D+00	0.78539806990416 6D+00
	0.78539822624591 2D+00	0.78539814046795 0D+00	0.78539817808291 7D+00
	0.78539814008030 7D+00	0.78539816927619 6D+00	0.78539816036018 6D+00
	0.78539817298328 5D+00	0.78539816127820 0D+00	0.78539816436032 9D+00
	0.78539815911711 9D+00	0.78539816416910 5D+00	0.78539816317548 0D+00
	0.78539816544352 4D+00	0.78539816309019 7D+00	0.78539816346999 7D+00
	0.78539816236175 3D+00	0.78539816352921 2D+00	0.78539816337137 7D+00
	0.78539816394793 6D+00	0.78539816333728 3D+00	
	0.78539816309225 0D+00		

Exemple 3. Calcul de Log.2.

$$S_n = \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \text{Log } 2.$$

$$S_o = 1.$$

Indice	Elément de la suite	K = 1 , $B_1^{(n)} = \Delta_1^{(n)}$ d'Aitken	K = 2 , $B_2^{(n)}$	K = 3 , $B_3^{(n)}$.
1	0.10000000000000D+01			
2	0.50000000000000D+00	0.70000000000000D+00		
3	0.83333333333333D+00	0.69047619047619D+00	0.69387755102040D+00	
4	0.58333333333333D+00	0.69444444444444D+00	0.69294294294294D+00	
5	0.78333333333333D+00	0.69242424242424D+00	0.69322169059011D+00	0.69325025596054000+00
6	0.61666666666667D+00	0.69358974358974D+00	0.69311490978157GD+00	0.69312479635060JD+00
7	0.75952380952380D+00	0.69285714285714D+00	0.69316295325469 7D+00	0.69315371599635 D+00
8	0.63452380952380D+00	0.69334733893557D+00	0.69313874485964 D+00	0.69314486470583 D+00
9	0.74563492063492D+00	0.69300334168755 D+00	0.69315201846423 D+00	0.69314812324930 D+00
10	0.64563492063492D+00	0.69325396825396 D+00	0.69314424694609 D+00	0.69314675438177 D+00
11	0.73654401154401D+00	0.69306575067446 D+00	0.69314904236193 D+00	0.69314707075951 D+00
12	0.65321067821067D+00	0.69321067821067 D+00	0.69314595329158 D+00	0.69314724144315 D+00
13	0.73013375513375D+00	0.69309671809671 D+00	0.69314801593194 D+00	0.69314714520121 D+00
14	0.65870518370518D+00	0.69318794232587 D+00	0.69314659609251 D+00	0.69314720192210 D+00
15	0.72537185037180D+00	0.69311378585572 D+00	0.69314759934053 D+00	0.69314716720629 D+00
16	0.66287185077180D+00	0.69317488067488 1D+00	0.69314687417737 3D+00	0.69314718915941 D+00
17	0.72169537 5D+00	0.69312395121218 6D+00	0.69314740887111 2D+00	0.69314717487518 6D+00
18	0.66613982422806 0D+00	0.69316685125508 7D+00	0.69314700762290 8D+00	
19	0.71877140317542 8D+00	0.69313037753440 3D+00		
20	0.66877140317542 8D+00			

K = 4 , $B_4^{(n)}$	K = 5 , $B_5^{(n)}$	K = 6 , $B_6^{(n)}$
0.69316389132346 0D+00		
0.69314421713 2 12D+00	0.69315012287508 7D+00	
0.69314790173269 8D+00	0.69314673954983 5D+00	0.69314772796529 2D+00
0.69 14696425946 D+00	0.69314727258457 4D+00	0.69314710947799 1D+00
0.69 14725602984 3D+00	0.69314713662726 3D+00	0.69314719354538 0D+00
0.69314715099872 3D+00	0.69314 7 7 8 8 7 4D+00	0.69314717757829 4D+00
0.69314719325207 9D+00	0.69314 6 6 3 3 6 5 6D+00	0.69314718136974 2D+00
0.69314717468700 9D+00	0.69314718152398 0D+00	0.69314718030943 2D+00
0.69314718345227 6D+00	0.69314718016093 0D+00	0.69314718064599 2D+00
0.69314717905830 7D+00	0.69314718036733 D+00	0.69314718052772 3D+00
0.69314718137570 9D+00	0.69314718047694 2D+00	
0.69314718009899 3D+00		

S = Log 2 ≈0.69314718056

V - CAS DE LA CONVERGENCE LOGARITHMIQUE (K = 2).

On sait que les suites à convergence logarithmique sont difficiles à accélérer. Nous allons étudier seulement la transformation B_2 et sa possibilité à accélérer la convergence logarithmique.

Rappelons quelques notations de l'ensemble et des sous-ensembles de suites à convergence logarithmique.

On note,

$$\text{Log} = \{(S_n) \text{ convergente telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1\}$$

l'ensemble des suites à convergence logarithmique.

$$\text{LOGSF} = \{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1\}.$$

Pour une suite (S_n) de LOGSF on pose,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + \alpha_n \text{ et } \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \beta_n$$

(α_n) et (β_n) sont deux suites convergentes de limite nulle. Dans [11], C. KOWALEWSKI a définit les sous-ensembles L_δ de Log par :

$$L_\delta = \{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta\}.$$

On a montré aussi que $L_\delta = \emptyset$ si $\delta \notin [0,1]$ (voir propriété 12 p. 29 [11]).

Remarquons d'abord que pour toute suite (S_n) de LOGSF on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1.$$

En effet :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \times \frac{e_{n+2}/e_{n+1} - 1}{e_{n+1}/e_n - 1}$$

$$= \frac{e_{n+1}}{e_n} \quad \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1.$$

Posons alors

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n$$

où μ_n est une suite convergente de limite nulle. (α_n) s'appelle la dériviée première et (μ_n) la dérivée seconde de (s_n) (voir [11]).

Lemme 2.1.

Soit (s_n) une suite de LOGSF telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta \quad \textit{existe},$$

alors :

i) *Si $\delta \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta$ existe et $\beta = 1$*

ii) *Si $\delta = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$ alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta \text{ existe}$$

et

$$\beta = 1.$$

Démonstration.

Soit $(S_n) \in$ LOGSF telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta$ existe.

i) Si $\delta \neq 0$.

On a

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \times \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta \neq 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta$$

existe, et $\beta = 1$.

ii) Si $\delta = 0$.

On montre dans ce cas que $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 0$; on a :

$$\beta_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - 1 = (1 + \alpha_n) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1$$

$$= \mu_n + \alpha_{n+1},$$

donc,

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_n}{\mu_n + \alpha_{n+1}} = \frac{1}{\frac{\mu_n}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1,$$

donc forcément

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = \pm \infty$$

d'où;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 0.$$

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\mu_{n+1} + \alpha_{n+2}}{\mu_n + \alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{1 + \frac{\alpha_{n+2}}{\mu_{n+1}}}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \times \frac{\alpha_n}{\mu_n} = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta \text{ existe,}$$

et

$$\beta = 1.$$

□

Soient a_o, a_1, a_2 trois coefficients réels non tous nuls, tels que $a_o+a_1+a_2 = 0$, et B_2 la transformation définie par :

$$B_2^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{2} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=0}^{2} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})}$$

Théorème 2.4.

On suppose que $a_1+4a_2 \neq 0$. *Soit* (S_n) *une suite de LOGSF, telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta \neq 0$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)}-S}{S_n-S} = 0$$

si et seulement si $\delta = 1$.

└

Démonstration.

On a,

$$B_2^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{2} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=0}^{2} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})},$$

avec $a_o + a_1 + a_2 = 0$.
Remplaçons a_o par $-a_1 - a_2$, on obtient :

$$B_2^{(n)} = \frac{a_1(S_{n-1}S_{n+1}-S_n^2) + a_2(S_{n-2}S_{n+2}-S_n^2)}{a_1(S_{n-1}+S_{n+1}-2S_n)+a_2(S_{n-2}+S_{n+2}-2S_n)}$$

$$= \frac{a_1[S_{n-1}\Delta S_n - S_n \Delta S_{n-1}] + a_2[S_{n-2}(\Delta S_n+\Delta S_{n+1}) - S_n(\Delta S_{n-2}+\Delta S_{n-1})]}{a_1[\Delta S_n - \Delta S_{n-1}] + a_2[(\Delta S_n+\Delta S_{n+1}) - (\Delta S_{n-2}+\Delta S_{n-1})]}$$

donc,

$$B_2^{(n)} - S = \frac{a_1[e_{n-1}\Delta S_n - e_n \Delta S_{n-1}] + a_2[e_{n-2}(\Delta S_n+\Delta S_{n+1}) - e_n(\Delta S_{n-2}+\Delta S_{n-1})]}{a_1[\Delta S_n - \Delta S_{n-1}] + a_2[(\Delta S_n+\Delta S_{n+1}) - (\Delta S_{n-2}+\Delta S_{n-1})]}$$

$$= \frac{a_1 e_{n-1}\Delta S_{n-1}\left[\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}} - \frac{e_n}{e_{n-1}}\right] + a_2 e_{n-2}\Delta S_{n-2}\left[\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-2}} + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n-2}}\right) - \frac{e_n}{e_{n-2}}\left(1+\frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\right)\right]}{a_1 \Delta S_{n-1}\left[\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}} - 1\right] + a_2 \Delta S_{n-2}\left[\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-2}} + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n-2}}\right) - \left(1 + \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\right)\right]}$$

$$\frac{B_2^{(n)} - S}{S_{n-2} - S} = \frac{a_1 \frac{e_{n-1}}{e_{n-2}} \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\left[\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}} - \frac{e_n}{e_{n-1}}\right] + a_2\left[\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-2}} + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n-2}}\right) - \frac{e_n}{e_{n-2}}\cdot\left(1 + \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\right)\right]}{a_1 \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\left[\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-1}} - 1\right] + a_2\left[\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta S_{n-2}} + \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_{n-2}}\right) - \left(1 + \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\right)\right]}$$

On remplace $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ par $1 + \alpha_n$ et $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ par $1 + \beta_n$, on obtient :

$$(2.7)\quad \frac{B_2^{(n)} - s}{e_{n-2}} = \frac{a_1(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}) + a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (1+\alpha_n)(1+\alpha_{n-2}) \times (2+\beta_{n-2})]}{a_1(1+\beta_{n-2})\beta_{n-1} + a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (2+\beta_{n-2})]}$$

$$= \frac{\beta_{n-2}}{\beta_{n-2}} \times \frac{a_1(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}}\right) + a_2\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1\right) + 2\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}}\right) + 2\left(1 - \frac{\alpha_{n+2}}{\beta_{n-2}}\right) + o(1)}{a_1(1+\beta_{n-2})\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} + a_2\left[\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} + 2.\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} + 1 + o(1)\right]}$$

D'après le lemme 2.1, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$. Par hypothèse, $\lim_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta$ donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{e_{n-2}} = \frac{a_1(1-\delta) + a_2[2(1-\delta)+2(1-\delta)]}{a_1 + a_2[1+2+1]}$$

$$= \frac{(a_1+4a_2)(1-\delta)}{(a_1+4a_2)}$$

donc, si $a_1 + 4a_2 \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 0$ si et seulement si $\delta = 1$.

□

Remarque 2.3.

i) Le théorème 2.4 nous montre que si les coefficients a_1 et a_2 vérifient $a_1+4a_2 \neq 0$, l'ensemble des suites à convergence logarithmique accélérables par le procédé B_2 est L_1, ($\delta = 1$). Cet ensemble est aussi accélérable par le procédé Δ^2-d'Aitken. Une comparaison de B_2 et de Δ^2-d'Aitken sera faite dans le paragraphe VII.

ii) Sous les hypothèses du théorème 2.4, une condition nécessaire pour que B_2 accélère la convergence d'autres suites de Log que celles de L_1 est que : $a_1+4a_2 = 0$.

Dans ce cas posons $a_1 = -4a_2$; donc $a_o = -a_1 - a_2 = 3a_2$.
Le procédé B_2 est indépendant de a_2.

Prenons alors $a_2 = 1$, on obtient $a_1 = -4$ et $a_o = 3$, qui ne sont rien d'autres que les coefficients du théorème 2.2 ; III), pour K=2 B_2 accélère donc les suites à convergence linéaire.

Pour une suite (S_n) on a,

$$B_2^{(n)} = \frac{3S_n^2 - 4S_{n-1}S_{n+1} + S_{n-2}S_{n+2}}{6S_n - 4(S_{n-1}+S_{n+1}) + (S_{n-2}+S_{n+2})}$$

Posons

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$$

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1 + \lambda_n \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

et

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \gamma_n \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

On a le lemme suivant :

Lemme 2.2.

Soit (S_n) *une suite de LOGSF telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1 \neq 0,-1 \qquad \textit{existe}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = K_2 \neq 0,-1 \qquad \textit{existe}$$

Si $K_1K_2 \neq -1$ *alors*

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\gamma_n} = \frac{K_1+1}{K_1K_2+1}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = \frac{1}{K_1} \times \frac{K_1+1}{K_1K_2+1}$

Avant de démontrer ce lemme, faisons quelques remarques,

Remarque 2.4.

i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1 \neq 0, -1$ existe alors, $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$.

En effet

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_{n+1}} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \frac{\alpha_n}{\mu_n}$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = K_1 \times 1 \times \frac{1}{K_1} = 1$$

et

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\mu_{n+1} + \alpha_{n+2}}{\mu_n + \alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \quad \frac{\frac{\mu_{n+1}}{\alpha_{n+2}} + 1}{\frac{\mu_n}{\alpha_{n+1}} + 1}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 \times \frac{K_1+1}{K_1+1} = 1$$

ii) On remarque aussi que :

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta$ existe si et seulement si $\lim \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1$ existe, et

$\delta = \frac{1}{1+K_1}$. En effet on a, $\beta_n = \mu_n + \alpha_{n+1}$ donc,

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_n}{\mu_n + \alpha_{n+1}} = \frac{1}{\frac{\mu_n}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} .$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1 \text{ et } \delta = \frac{1}{K_1+1}.$$

Dans ce cas, K_1 ne peut pas être négatif puisque $\delta \in [0,1]$.

Démonstration du lemme.

On a :

$$\gamma_n = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1 = \frac{\mu_{n+1} + \alpha_{n+2}}{\mu_n + \alpha_{n+1}} - 1$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n + \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}}{\mu_n + \alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{\mu_n \lambda_n + \alpha_{n+1} \mu_{n+1}}{\mu_n + \alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{(\mu_n/\alpha_{n+1}) \times \lambda_n + \mu_{n+1}}{\mu_n/\alpha_{n+1} + 1}$$

$$= \mu_{n+1} \times \frac{\mu_n/\alpha_{n+1} \times \lambda_n/\mu_{n+1} + 1}{\mu_n/\alpha_{n+1} + 1},$$

donc,

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{\mu_{n+2}}{\mu_{n+1}} \quad \frac{\frac{\mu_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \times \frac{\lambda_{n+1}}{\mu_{n+2}} + 1}{\frac{\mu_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} + 1} \times \frac{\frac{\mu_n}{\alpha_{n+1}} + 1}{\frac{\mu_{n+1}}{\alpha_{n+2}} + 1}$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1 \times \frac{K_1 K_2 + 1}{K_1 K_2 + 1} \times \frac{K_1 + 1}{K_1 + 1}$$

$$= 1.$$

ii)
$$\frac{\mu_n}{\gamma_n} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1} \dfrac{\mu_n/\alpha_{n+1} + \lambda_n/\mu_{n+1} + 1}{\mu_n/\alpha_{n+1} + 1}}$$

$$= \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \times \frac{\mu_n/\alpha_{n+1} + 1}{\mu_n/\alpha_{n+1} + \lambda_n/\mu_{n+1} + 1},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\gamma_n} = \frac{K_1+1}{K_1K_2+1},$$

et,

$$\frac{\alpha_n}{\gamma_n} = \frac{\alpha_n}{\mu_n} \times \frac{\mu_n}{\gamma_n},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = \frac{1}{K_1} \times \frac{K_1+1}{K_1K_2+1}.$$

□

Donnons maintenant un résultat un peu plus général que celui du théorème précédent. Nous avons le

Théorème 2.5.

Soit (S_n) *une suite de LOGSF telle que :*

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta \neq 0$, existe.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1 \neq 0, -1$ *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = K_2 \neq 0, -1.$

Si $K_1K_2 \neq -1$ *alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{K_1 + 1}{K_1K_2+1} \left(1 - \frac{\delta-1}{K_1}\right)$$

L'ensemble des suite vérifiant les hypothèses de ce théorème n'est pas vide, car la suite $(S_n = 1/n)$ lui appartient. En effet :

$$e_n = \frac{1}{n}$$

. la suite dérivée première de (S_n) est : $\alpha_n = \frac{-1}{n+1}$

. la suite dérivée seconde de (S_n) est : $\mu_n = \frac{-1}{n+2}$

. la suite dérivée troisième de (S_n) est : $\lambda_n = \frac{-1}{n+3}$

et $\beta_n = \frac{-2}{n+2}$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1 = 1 \neq 0, -1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = K_2 = 1 \neq 0, -1 \quad \text{et} \quad K_1 K_2 = 1 \neq -1.$$

Démonstration du théorème.

Dans la formule (2.7), on remplace les coefficients a_i $i = 0,1,2$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\frac{B_2^{(n)} - S}{e_{n-2}} = \frac{-4(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}) + [(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(2+\beta_n) - (1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2})(2+\beta_{n-2})]}{-4(1+\beta_{n-2})\beta_{n-1} + [(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(2+\beta_n) - (2+\beta_{n-2})]}$$

$$= \frac{N}{D} \text{ avec ,}$$

$$D = [\beta_n - 2\beta_{n-1} + \beta_{n-2}] + [\beta_{n-1}\beta_n - 2\beta_{n-2}\beta_{n-1} + \beta_{n-2}\beta_n + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n]$$

$$= [(\beta_n - \beta_{n-1}) - (\beta_{n-1} - \beta_{n-2})] + [\beta_{n-1}(\beta_n - \beta_{n-2}) - \beta_{n-2}(\beta_{n-1} - \beta_n) + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n]$$

$$= \beta_{n-1}\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - 1\right) + \beta_{n-2}\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} = 1\right) + \beta_{n-1}\beta_{n-2}\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1\right) - \beta_{n-2}\beta_{n-1}\left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\right) + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n$$

$$= \beta_{n-2} \times \left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1\right) \times \left[\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} \times \frac{\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - 1\right)}{\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1\right)} + 1 + \beta_{n-1} \times \right.$$

$$\left. \frac{\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1\right)}{\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1\right)} + \beta_{n-1} \times \frac{\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - 1\right)}{\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1\right)} + \frac{\beta_{n-1}\beta_n}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} \right]$$

Or $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \gamma_n$ donc,

$$(2.8)\quad D = \beta_{n-2}\gamma_{n-2}\left[(1+\gamma_{n-2})\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}} + 1 + \beta_{n-1} \times \frac{(1+\gamma_{n-2})(1+\gamma_{n-1})-1}{\gamma_{n-2}} + \beta_{n-1}\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}} + \frac{\beta_{n-1}\beta_n}{\gamma_{n-2}}\right]$$

De même pour N on met en facteur le terme $\beta_{n-2}\gamma_{n-2}$ et l'on obtient :

$$N = \beta_{n-2} \times \{ \overbrace{-4(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}})}^{A}$$

$$+ (\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1) + 2(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}}) + 2(1 - \frac{\alpha_{n-2}}{\beta_{n-2}})$$

$$+ 2\beta_{n-1} + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}\beta_n + \beta_n - 2\frac{\alpha_{n-2}}{\beta_{n-2}}\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}$$

$$+ \beta_n\beta_{n-1} - \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\}.$$

$$A = -4(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}}) - 4(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}) - 4(\alpha_{n-2}\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \alpha_{n-2}\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}})$$

$$-4(\alpha_{n-2}\beta_{n-1} - \alpha_{n-2}\alpha_{n-1})$$

donc,

$$N = \beta_{n-2} \times \{ (\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1) - 2(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}) - \beta_{n-1}(1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n-2}})$$

$$- \beta_{n-1}(1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}) + \alpha_{n-2}(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} - 1) + 2\alpha_{n-2}(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} - \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}}) + 2\alpha_{n-2}(\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}} - \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}})$$

$$N = \beta_{n-2}\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1\right) \times \left\{ \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} - 2\left(1 - \frac{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} \right) + \beta_{n-1} \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} - \right.$$

$$+ \beta_{n-1} \frac{\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} + \alpha_{n-2} \frac{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1}$$

$$\left. - 2\alpha_{n-2}\left(1 - \frac{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} \right) - 2\alpha_{n-2}\left(1 - \frac{\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1} \right) \right\}$$

Or, $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \gamma_n$; $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n$; posons $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta_n$ avec $\delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta$.

On a alors

$$N = \beta_{n-2}\gamma_{n-2} \times \left\{ \frac{(1+\gamma_{n-1})(1+\gamma_{n-2})-1}{\gamma_{n-2}} - 2\left(1 - \frac{\mu_{n-2}}{\gamma_{n-2}}\right) \right.$$

$$+ \beta_{n-1} \frac{(1+\gamma_{n-1})(1+\gamma_{n-2}) - 1}{\alpha_{n-2}} + \beta_{n-1} \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}$$

$$+ \alpha_{n-2} \frac{\mu_{n-2}}{\gamma_{n-2}} - 2\alpha_{n-2}\left(1 - \frac{\mu_{n-2}}{\gamma_{n-2}}\right)$$

$$\left. - 2\alpha_{n-2}\left\{ 1 - \frac{\delta_{n-1}\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} - 1}{\gamma_{n-2}} \right\} \right\}$$

donc,

$$(2.9)\quad N = \beta_{n-2}\gamma_{n-2} \times \left\{ \frac{\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-1}\gamma_{n-2}}{\gamma_{n-2}} (1 + \beta_{n-1}) \right.$$

$$- 2(1 - \frac{\mu_{n-2}}{\gamma_{n-2}}) + \beta_{n-1} \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}} + 3\alpha_{n-2} \frac{\mu_{n-2}}{\gamma_{n-2}}$$

$$\left. - 4\alpha_{n-2} - 2 \frac{\alpha_{n-2}}{\gamma_{n-2}} (\delta_{n-1} (1 + \gamma_{n-2}) - 1) \right\}$$

Or d'après le lemme 2.2, $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\gamma_n} = \frac{K_1 + 1}{K_1K_2+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = \frac{1}{K_1} \times \frac{K_1 + 1}{K_1K_2 + 1}$$

donc,

$$(2.8)\qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{D}{\beta_{n-2}\gamma_{n-2}} = 2, \text{ et}$$

$$(2.9)\qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{N}{\beta_{n-2}\gamma_{n-2}} = [\, 2 - 2 \,(1 - \frac{K_1 + 1}{K_1K_2 + 1}) - 2(\delta-1) \times \frac{1}{K_1} \times \frac{K_1 + 1}{K_1K_2 + 1} \,]$$

$$= 2 \times \frac{K_1 + 1}{K_1K_2 + 1} [\, 1 - \frac{1}{K_1} (\delta-1)]$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{S_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{N}{D} \cdot \frac{e_n}{e_{n-2}}$$

$$= \frac{K_1+1}{K_1K_2+1} (1 - \frac{1}{K_1} (\delta-1)).$$

□

Remarque 2.5.

i) Dans la remarque 2.4, ii) nous avons vu que, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \delta$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = K_1$ existe, et $\delta = \frac{1}{1+K_1}$. Dans [11, pr. 12, p. 29] Kowalewski a montré que si δ existe il est dans $[0,1]$, donc K_1 ne peut pas être négatif. Si l'on remplace K_1 par $\frac{1}{\delta} - 1$, d'après le théorème 2.5 on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{1+\delta}{(1-\delta)K_2 + \delta}.$$

ii) Si $K_2 > \frac{1}{1-\delta}$, alors $\frac{1+\delta}{(1-\delta)K_2+\delta_2} < 1$ et dans ce cas il y a amélioration de la convergence.

VI - Modification du procédé B_K-accélération d'une famille de suites à convergence logarithmique.

On considère les suites (S_n) convergentes de limite S, telles que l'erreur $e_n = S_n - S$ possède le développement asymptotique :

$$e_n = n^{-\alpha}[b_o + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \ldots], \tag{2-10}$$

où α est un réel positif, b_o, b_1, b_2 étant des réels avec b_o non nul. (S_n) est à convergence logarithmique.

Soit $(\bar{B}_K^{(n)})_n$ la suite obtenue en appliquant le procédé B_K à la suite (e_n), on a :

$$\bar{B}_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i e_{n-i} e_{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (e_{n-i} + e_{n+i})}. \tag{2-11}$$

D'après la propriété 2.1 II), $\bar{B}_K^{(n)} = B_K^{(n)} - S$.

Ecrivons maintenant le développement asymptotique de $\bar{B}_K^{(n)}$.

$$(2\text{-}12) \qquad e_{n-i} = (n-i)^{-\alpha}\,[b_o + b_1(n-i)^{-1} + b_2(n-i)^{-2} + O(n^{-3})]$$

Or, $(n-i)^{-\alpha} = n^{-\alpha}[1+\alpha i n^{-1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} i^2 n^{-2} + O(n^{-3})]$ et

$$b_o + b_1(n-i)^{-1} + b_2(n-i)^{-2} = b_o + b_1 n^{-1} + (b_1 i + b_2)n^{-2} + O(n^{-3})$$

donc,

$$(2\text{-}13) \qquad e_{n-i} = n^{-\alpha}[b_o + (\alpha i b_o + b_1)n^{-1} + (b_2 + (1+\alpha)b_1 i + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} i^2)n^{-2} + O(n^{-3})]$$

De même,

$$(2\text{-}14) \qquad e_{n+i} = n^{-\alpha}[b_o + (-\alpha i b_o + b_1)n^{-1} + (b_2 - (1+\alpha)b_1 i + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} i^2)n^{-2} + O(n^{-3})].$$

Les formules (2-13) et (2-14) impliquent :

$$e_{n-i}\, e_{n+i} = n^{-2\alpha}[b_o^2 + 2b_o b_1 n^{-1} + (2b_o b_2 + b_1^2 + b_o \alpha i^2)n^{-2} + O(n^{-3})]$$

et

$$e_{n-i} + e_{n+i} = n^{-\alpha}[2b_o + 2b_1 n^{-1} + (2b_2 + \alpha(\alpha+1)i^2)n^{-2} + O(n^{-3})].$$

Remplaçons $e_{n-i}e_{n+i}$ et $e_{n-i}+e_{n+i}$ dans la formule (2-11) ; on obtient :

$$\bar{B}_K^{(n)} = \frac{n^{-2\alpha} \sum_{i=o}^{K} a_i[b_o^2 + 2b_o b_1 n^{-1} + (2b_o b_2 + b_1^2 + b_o i^2)n^{-2} + O(n^{-3})]}{n^{-\alpha} \sum_{i=o}^{K} a_i[2b_o + 2b_1 n^{-1} + (2b_2 + \alpha(\alpha+1)i^2)n^{-2} + O(n^{-3})]}$$

Or

$$\sum_{i=o}^{K} a_i = 0, \text{ donc}$$

$$\bar{B}_K^{(n)} = n^{-\alpha} \times \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i(\alpha b_o i^2)n^{-2} + O(n^{-3})}{\sum_{i=o}^{K} a_i(\alpha(\alpha+1)i^2)n^{-2} + O(n^{-3})}$$

$$(2\text{-}15) \qquad \bar{B}_K^{(n)} = n^{-\alpha}\frac{b_o}{\alpha+1} + O(n^{-\alpha-1})$$

d'où, $(\alpha+1)\bar{B}_K^{(n)} - e_n = O(n^{-\alpha-1})$

$\alpha > 0$ donc, $\lim_{n\to\infty} \bar{B}_K^{(n)} = 0$, la suite $(B_K^{(n)})_n$ converge alors vers S : $(\bar{B}_K^{(n)} = B_K^{(n)} - S)$ et

$$(\alpha+1)(B_K^{(n)} - S) - (S_n - S) = O(n^{-\alpha-1})$$

$$(\alpha+1)B_K^{(n)} - S_n = \alpha S + O(n^{-\alpha-1}). \qquad (2\text{-}16)$$

On définit alors le procédé $\hat{B}_K$ par :

$$\hat{B}_K : (S_n) \to (\hat{B}_K^{(n)})_n :$$

$$\hat{B}_K^{(n)} = \frac{(\alpha+1)B_K^{(n)} - S_n}{\alpha},$$

et on a la proposition suivante :

Proposition 2.3.

Si (S_n) *est une suite convergente de limite* S *telle que :*

$$e_n = n^{-\alpha}[b_o + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \ldots] \; ; \; \alpha > 0, \; b_o \neq 0.$$

Alors, $\hat{B}_K^{(n)} - S = O(n^{-\alpha-1})$ $(n \to \infty)$.

Ce résultat est obtenu à partir de la formule (2-16).

Remarque 2.6.

Si (S_n) est une suite convergente telle que e_n possède le développement (2-10), on sait que le Δ^2-d'Aitken n'accélère pas la convergence de (S_n) (voir J. Wimp [19] p. 149).

L'application du procédé $\hat{B}_K$ nécessite la connaissance de α. Nous allons donc maintenant proposer une méthode d'estimation de α en fonction des termes de la suite (S_n).

Estimation de α.

On a,

$$e_n = n^{-\alpha}[b_o + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + O(n^{-3})],$$

d'après la formule (2-14),

$$e_{n+1} = n^{-\alpha}[b_o+(-\alpha b_o+b_1)n^{-1} + (b_2-(\alpha+1)b_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)\,b_o}{2})\,n^{-2} + O(n^{-3})]$$

donc,

$$\Delta s_n = \Delta e_n = n^{-\alpha-1}[-\alpha b_o + (-(\alpha+1)b_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\,b_o)n^{-1} + O(n^{-2})]\,.$$

De même, d'après la formule (2-13), on obtient :

$$\Delta s_{n-1} = \Delta e_{n-1} = n^{-\alpha-1}[-\alpha b_o - ((1+\alpha)b_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\,b_o)n^{-1} + O(n^{-2})$$

d'où,

$$\Delta^2 s_{n-1} = n^{-\alpha-2}[\alpha(\alpha+1)b_o + O(n^{-1})]\,.$$

$$\frac{\Delta s_n}{\Delta^2 s_{n-1}} = \frac{n^{-\alpha-1}[-\alpha b_o+(-(\alpha+1)b_1+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}b_o)n^{-1} + O(n^{-2})]}{n^{-\alpha-2}[\alpha(\alpha+1)b_o + O(n^{-1})]}$$

$$= n \times \frac{-\alpha b_o+(-(\alpha+1)b_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\,b_o)n^{-1} + O(n^{-2})}{\alpha(\alpha+1)b_o + O(n^{-1})}$$

$$= -\frac{n}{\alpha+1} \times \frac{1+((\alpha+1)b_1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\,b_o)n^{-1} + O(n^{-2})}{\alpha(\alpha+1)b_o + O(n^{-1})}$$

donc $\left(\dfrac{\Delta s_n}{\Delta^2 s_{n-1}}\right) = \dfrac{-1}{\alpha+1} + O(n^{-1})$.

Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$\alpha_n = -1 - 1/\Delta\left(\frac{\Delta s_n}{\Delta^2 s_{n-1}}\right). \tag{2-17}$$

Bien entendu, pour toute suite (S_n) dont l'erreur e_n possède le développement (2-10) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

(d'après la construction de α_n).

Ainsi on définit le procédé $\hat{B}_K$ par :

$$\hat{B}_K : (S_n) \to (\hat{B}_K^{(n)})_n$$

avec

$$\hat{B}_K^{(n)} = \frac{(\alpha_n+1)B_K^{(n)} - S_n}{\alpha_n} \qquad (2\text{-}18)$$

où

$$\alpha_n = -1 - \frac{1}{\Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)}$$

et

$$B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=0}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})} \; ; \; \sum_{i=0}^{K} a_i = 0.$$

En particulier pour K = 1 :

$$\hat{B}_1^{(n)} = \frac{(\alpha_n+1)\varepsilon_2^{(n-1)} - S_n}{\alpha_n}$$

$$= \frac{\varepsilon_2^{(n-1)} + S_n \, \Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)}{1 + \Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)} \; ; \; \varepsilon_2^{(n-1)} = S_n - \frac{\Delta S_{n-1} \Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}$$

donc

$$\hat{B}_1^{(n)} = \frac{S_n - \frac{\Delta S_{n-1}\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}} + S_n \, \Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)}{1 + \Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)}$$

$$= \frac{s_n\Delta^2 s_{n-1}\Delta^2 s_n - \Delta s_{n-1}\Delta s_n\Delta^2 s_n + s_n\Delta s_{n+1}\Delta^2 s_{n-1} - s_n\Delta s_n\Delta^2 s_n}{\Delta^2 s_{n-1}\,\Delta^2 s_n + \Delta s_{n+1}\Delta^2 s_{n-1} - \Delta s_n\Delta^2 s_n}$$

$$= \frac{s_n\Delta s_{n+1}\Delta^2 s_{n-1} - s_{n+1}\Delta s_{n-1}\Delta^2 s_n}{\Delta s_{n+1}\Delta^2 s_{n-1} - \Delta s_{n-1}\Delta^2 s_n} = \theta_2^{(n-1)}$$

et on retrouve le θ_2-algorithme de Brezinski.

Théorème 2.6.

Pour toute suite (s_n), convergente de limite s telle que :

$$e_n = n^{-\alpha}[b_o + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \ldots],$$

où α est un réel positif ; $b_o, b_1, b_2, \ldots$ des réels, $b_o \neq 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{B}_K^{(n)} - s}{s_n - s} = 0$$

Démonstration.

D'après (2-18) on a,

$$\hat{B}_K^{(n)} - s = \frac{(\alpha_n+1)B_K^{(n)} - s_n - \alpha_n s}{\alpha_n}$$

$$= \frac{\alpha_n(B_K^{(n)} - s) + (B_K^{(n)} - s) - (s_n - s)}{\alpha_n}$$

Donc :

$$\frac{\hat{B}_K^{(n)} - s}{s_n - s} = \frac{B_K^{(n)} - s}{s_n - s} + \frac{B_K^{(n)} - s}{\alpha_n(s_n - s)} - \frac{1}{\alpha_n}$$

Or, d'après (2-15),

$$\frac{B_K^{(n)} - s}{s_n - s} = \frac{n^{-\alpha}\,\frac{b_o}{1+\alpha} + O(n^{-\alpha-1})}{n^{-\alpha}b_o + O(n^{-\alpha-1})}$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{1}{1+\alpha} .$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

(par construction), d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{B}_K^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha} = 0.$$

□

Remarque 2.7.

i) Le théorème 2.6 est vrai pour tout K. Pour accélérer la convergence d'une suite (S_n) telle que :

$$e_n = n^{-\alpha}[b_o + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \ldots],$$

il y a intérêt à prendre K = 1 puisque le calcul de $\hat{B}_1^{(n)}$ nécessite 4 termes de la suite alors que pour K > 1 $\hat{B}_K^{(n)}$ en nécessite plus.

Si (S_n) est une suite telle que e_n possède le développement du théorème 2.6, alors $(\hat{B}_K^{(n)} - S)_n$ possède aussi un développement asymptotique en 1/n, en effet :

$$\hat{B}_K^{(n)} - S = B_K^{(n)} - S + \frac{B_K^{(n)} - S}{\alpha_n} - \frac{S_n - S}{\alpha_n} .$$

D'après les calculs précédents les quantités $(B_K^{(n)} - S)$ et α_n possèdent des développements en 1/n donc $\hat{B}_K^{(n)} - S$ également (les développements de $S_n - S$ et de $\hat{B}_K^{(n)} - S$ ne sont pas forcément les mêmes). Cette remarque nous permettra d'appliquer $\hat{B}_K$ d'une façon itérative. Des exemples numériques sont donnés à la fin du paragraphe.

Théorème 2.7.

Soit (S_n) *une suite convergente de limite* s *telle que,*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \neq 0.$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{S_n - S} = a$ *existe alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{B}_K^{(n)} - S}{S_n - S} = a + \frac{1}{\alpha}(a-1)$$

Démonstration.

On a,

$$\hat{B}_K^{(n)} = \frac{(\alpha_n+1)B_K^{(n)} - S_n}{\alpha_n}$$

$$\hat{B}_K^{(n)} - S = B_K^{(n)} - S + \frac{B_K^{(n)} - S}{\alpha_n} - \frac{S_n - S}{\alpha_n}.$$

DOnc,

$$\frac{\hat{B}_K^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{B_K^{(n)} - S}{S_n - S} + \frac{1}{\alpha_n}\left[\frac{B_K^{(n)} - S}{S_n - S} - 1\right]$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{B}_K^{(n)} - S}{S_n - S} = a + \frac{1}{\alpha}[a-1].$$

□

Le théorème 2.6 précédent est une conséquence de ce théorème car, si (S_n) est telle que e_n possède le développement (2-10), alors

$$a = \frac{1}{1+\alpha} \text{ ; donc } \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{B}_K^{(n)} - S}{S_n - S} = 0.$$

Si (S_n) est une suite à convergence linéaire, on montre facilement que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha = \pm\infty$.

Car $\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_n}} \to \frac{1}{1-\rho^{-1}}$. Le dénominateur de α_n tends vers 0,

Si, en plus, B_K accélère la convergence de (S_n), i.e a = 0 d'après le théorème 2.7, $\hat{B}_K$ l'accélère aussi. Donc si l'on choisit,

$a_o = (-1)^K \frac{C_{2K}^K}{2}$ et $a_i = (-1)^i C_{2K}^{K-i}$ pour i = 1,2,...,K, alors d'après le théorème 2.2, B_K accélère la convergence linéaire et par conséquent $\hat{B}_K$ l'accélère.

De plus $\hat{B}_K$ accélère une classe de suites à convergence logarithmiques (voir th. 2.6) alors que B_K n'accélère aucune suite de cette classe. (Ce sont les suites telles que e_n possède le développement asymptotique en $\frac{1}{n}$. (2-6)).

APPLICATIONS NUMERIQUES.

Nous donnons un théorème de Wimp 19 (chap. 1 p. 19) qui nous permettra de reconnaître si une suite (S_n) possède un développement de la forme

$$e_n = n^{-\alpha}[b_o + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + ..] .$$

Théorème 2.8. (Wimp)

Soit (S_n) *une suite définie par :*

$$S_n = \sum_{i=o}^{n} c_i$$

de limite $S = \sum_{i=o}^{\infty} c_i$, $e_n = S_n - S$.

Si pour n *suffisamment grand,*

$$c_n = n^{\theta}(\theta_o + \theta_1 n^{-1} + \theta_2 n^{-2} + ...) \; ; \; \theta_o \neq 0.$$

Alors il existe des constantes γ_j ; $j \geq 1$ *telles que :*

$$e_n = \frac{-n^{\theta+1}}{\theta+1} (\theta_o + \gamma_1 n^{-1} + \gamma_2 n^{-2} + ...) \quad Re(\theta) < -1.$$

EXEMPLES NUMERIQUES.

Exemple 1.

$$S_n = \frac{1}{n}\ ,\ S = \lim_{n\to\infty} S_n = 0$$

$$e_n = 1/n.$$

Dans ce cas $\alpha = 1$.

Calculons α_n :

$$\alpha_n = -1 - \frac{1}{\Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)}\ .$$

$$\Delta S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$$

$$\Delta^2 S_{n-1} = \Delta S_n - \Delta S_{n-1}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

$$\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}} = -\frac{(n-1)}{2}$$

$$\Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right) = -\frac{n}{2} + \frac{(n-1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

d'où

$$\alpha_n = -1 - \frac{1}{-1/2}$$

$$= 1$$

$$\hat{B}_K^{(n)} = \frac{2B_K^{(n)} - S_n}{1} = 2B_K^{(n)} - S_n$$

dans II, nous avons vu que $B_K^{(n)} = \frac{1}{2n}$ donc

$$\hat{B}_K^{(n)} = 0 \quad \forall n = 1,2,\ldots$$

L'application de B_K et $\hat{B}_K$ pour K = 1,2 à la suite $S_n = \frac{1}{n}$ n = 1,2,... donne les résultats suivants :

K=1	n	S_n	$B_1^{(n)} = \Delta_2^{(n)}$	$\hat{B}_1^{(n)}$
	1	.10000000000D+01		
	2	.50000000000D+00	.25000000000D+00	.66613381480-15
	3	.33333333333D+00	.16666666667D+00	-.29604140320-15
	4	.25000000000D+00	.12500000000D+00	-.22759572000-14
	5	.20000000000D+00	.10000000000D+00	.30753259100-14
	6	.16666666667D+00	.83333333330-01	-.55511151230-16
	7	.14285714290+00	.71428571430-01	-.54559626300-14
	8	.12500000000D+00	.62500000000D-01	.10325074130-13
	9	.11111111110+00	.55555555560-01	-.14130671130-13
	10	.10000000000D+00		

K=2		$B_2^{(n)}$	$\hat{B}_2^{(n)}$
		.16666666670+00	-.29604140320-15
		.12500000000D+00	-.22759572000-14
		.10000000000D+00	.30753259100-14
		.83333333330-01	-.55511151230-16
		.71428571430-01	-.54559626300-14
		.62500000000D-01	.10325074130-13

Exemple 2.

Considérons la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \qquad n = 1,2,...$$

(S_n) est convergente de limite

$$S = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668465...$$

$c_n = n^{-2}$, $(S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i)$. Dans ce cas, $\theta = -2$, $\lambda = 1$, $\theta_o = 1$, $\theta_i = 0$ pour $i = 1,2,...$

D'après le théorème 2.8, il existe des constantes γ_1, γ_2,... telles que :

$$e_n = - \frac{n^{-1}}{-1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + ...\right)$$

$$= n^{-1} \left(1 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + ...\right)$$

Donc la suite (S_n) vérifie la relation (2.10) avec $\alpha = 1$.

Vérifions que la suite (α_n) définie en (2.18) converge vers $\alpha = 1$,

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{n-1} &= \frac{1}{n^2} \\ \Delta S_n &= \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta^2 S_{n-1} = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}} = - \frac{n^2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right) = \frac{-2n^2-4n-1}{4n^2+8n+3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right) = - \frac{1}{2},$$

Or

$$\alpha_n = -1 - \frac{1}{\Delta\left(\frac{\Delta S_n}{\Delta^2 S_{n-1}}\right)},$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = -1 - \frac{1}{-1/2} = 1.$

L'application du procédé $\hat{B}_K$ à la suite (S_n), pour différentes valeurs de K donne les résultats suivants : on choisit les coefficients a_i $i = 0,\ldots,K$ Comme dans les exemples précédents IV. :

n	S_n	K=1 $\hat{B}_1$	K=2 $\hat{B}_2$
3	0.136111111111111D+01		
4	0.142361111111111D+01	0.164258837350390D+01	
5	0.146361111111111D+01	0.164369657965330D+01	0.164400614813143D+01
6	0.149138888888889D+01	0.164420445320397D+01	0.164440507047810D+01
7	0.151179705215420D+01	0.164446886397653D+01	0.164460624285483D+01
8	0.152742205215420D+01	0.164461969865012D+01	0.164471787463771D+01
9	0.153976773116654D+01	0.164471188079314D+01	0.164478446806329D+01
10	0.154976773116654D+01	0.164477132008122D+01	0.164482649765281D+01
11	0.155803219397646D+01	0.164481134648998D+01	0.164485426839688D+01
12	0.156497663842090D+01	0.164483927040970D+01	0.164487331528296D+01
13	0.157089379818422D+01	0.164485933269954D+01	0.164488679025679D+01
14	0.157599583900054D+01	0.164487412088293D+01	0.164489658745080D+01
15	0.158044028344499D+01	0.164488525069409D+01	0.164490386644835D+01
16	0.158434653344499D+01	0.164489379128180D+01	0.164490938910967D+01
17	0.158780674105744D+01	0.164490045442707D+01	0.164491365267514D+01
18	0.159089316081053D+01	0.164490572381363D+01	
19	0.159366324391302D+01		

K=3 $\hat{B}_3$	K=4, $\hat{B}_4$
0.164461816159722D+01	
0.164475013803481D+01	0.164490518505717D+01
0.164481972670108D+01	0.164492769550660D+01
0.164485925787951D+01	0.164493764146641D+01
0.164488306068036D+01	0.164494184525262D+01
0.164489809746976D+01	0.164494336124646D+01
0.164490797313362D+01	0.164494361534294D+01
0.164491467895961D+01	0.164494319973395D+01
0.164491936409305D+01	0.164494261814993D+01
0.164492270383494D+01	0.164494177309585D+01
0.164492515498210D+01	

Pour K = 1, on applique une deuxième fois le procédé $\hat{B}_K$ à la suite $(\hat{B}_K^{(n)})_n$, on obtient les résultats suivants :

on note $({}_0\hat{B}_K^{(n)})_n$ la suite initiale (S_n).

$({}_1\hat{B}_K^{(n)})_n$ la suite $(\hat{B}_K^{(n)})_n$

et

$({}_2\hat{B}_K^{(n)})_n$ la suite obtenue en appliquant $\hat{B}_K$ à la suite $({}_1\hat{B}_K^{(n)})_n$.

n	S_n	${}_1\hat{B}_K^{(n)}$, K = 1	${}_2\hat{B}_K^{(n)}$ K = 1
3	0.136111111111111D+01		
4	0.142361111111111D+01	0.164258837350390D+01	
5	0.146361111111111D+01	0.164369657965330D+01	0.164608348781288D+01
6	0.149138888888889D+01	0.164420445320397D+01	0.164492733069995D+01
7	0.151179705215420D+01	0.164446886397653D+01	0.164493093758929D+01
8	0.152742205215420D+01	0.164461969865012D+01	0.164493244795713D+01
9	0.153976773116654D+01	0.164471188079314D+01	0.164493311962829D+01
10	0.154976773116654D+01	0.164477132008122D+01	0.164493335904771D+01
11	0.155803219397646D+01	0.164481134648998D+01	0.164493391303840D+01
12	0.156497663842090D+01	0.164483927040970D+01	0.164493370917293D+01
13	0.157089379818422D+01	0.164485933269954D+01	0.164493380448273D+01
14	0.157599583900054D+01	0.164487412088293D+01	0.164493426755151D+01
15	0.158044028344499D+01	0.164488525069409D+01	0.164493345199193D+01
16	0.158434653344499D+01	0.164489379128180D+01	0.164493454419646D+01
17	0.158780674105744D+01	0.164490045442707D+01	0.164493406774419D+01
18	0.159089316081053D+01	0.164490572381363D+01	
19	0.159366324391302D+01		

Remarque 2.8.

On remarque qu'il est plus intéressant d'appliquer deux fois $\hat{B}_1$ que d'appliquer $\hat{B}_K$ pour K = 2, 3. On a pris le même nombre d'éléments de la suite initiale dans les deux cas.

Nous avons pensé à itérer le procédé $\hat{B}_K$ car la suite $(\hat{B}_K^{(n)}-S)_n$ possède un développement asymptotique en 1/n (voir Rq 2.7) donc, on peut appliquer $\hat{B}_K$ à la suite $(\hat{B}_K^{(n)})_n$.

Exemple 3.

On considère la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1}$$

(S_n) est une suite convergente de limite S = 0.5

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} C_i, \quad C_i = \frac{1}{4i^2-1}$$

$$C_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16n^2} + \frac{1}{64n^4} + \ldots\right],$$

dans ce cas :

$$\lambda = 1, \ \theta = -2, \quad \theta_o = \frac{1}{4}.$$

$$\theta_i = \begin{cases} 0 \text{ si i est impair} \\ \\ (1/4)^i, \text{ i pair } (i \neq o) \end{cases}$$

D'après le théorème 2.8, il existe des constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, telles que :

$$e_n = S_n - S = n^{-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots\right)$$

donc la suite (S_n) vérifie la relation (2.10) avec $\alpha = 1$.

On peut, comme dans l'exemple précédent, vérifier que la suite (α_n) définie en (2.18) converge vers $\alpha = 1$.

L'application du procédé $\hat{B}_K$ pour différentes valeurs de K donne les résultats suivants :

n	S_n	Suite (α_n)	K = 1 $\hat{B}_1^{(n)}$
3	0.428571428571428D+00		
4	0.444444444444444D+00	0.100000011920930D+01	0.499999996688635D+00
5	0.454545454545454D+00	0.100000000000000D+01	0.499999999999984D+00
6	0.461538461538461D+00	0.100000011920930D+01	0.499999997707512D+00
7	0.466666666666667D+00	0.100000000000000D+01	0.500000000000018D+00
8	0.470588235294118D+00	0.100000000000000D+01	0.499999999999960D+00
9	0.473684210526316D+00	0.100000011920930D+01	0.499999998431442D+00
10	0.476190476190476D+00	0.100000000000000D+01	0.499999999999927D+00
11	0.478260869565217D+00		

K = 2 $\hat{B}_2^{(n)}$	K = 3 $\hat{B}_3^{(n)}$
0.500000000000071D+00	
0.499999997707682D+00	0.499999997706640D+00
0.500000000000267D+00	0.499999999997518D+00
0.500000000001867D+00	0.499999999990372D+00
0.499999998430032D+00	

La suite (α_n) converge vers 1.

Exemple 4.

Considérons la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} c_i, \text{ où } c_i = \frac{1}{i} + \text{Log } \frac{i}{i+1} .$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = 0.5772156649.$$

On peut montrer, en utilisant le théorème 2.8, que la suite (S_n) vérifie la relation (2.10).

L'application de $\hat{B}_K$ itéré à (S_n) donne les résultats suivants :

n	S_n	Suite α_n
3	0.447038972213443D+00	
4	0.473895420899233D+00	0.101998746870185D+01
5	0.491573864105279D+00	0.101107702354603D+01
6	0.504089850944687D+00	0.100702515555979D+01
7	0.513415601177307D+00	0.100484720571072D+01
8	0.520632565520924D+00	0.100354380383365D+01
9	0.526383160974208D+00	0.100270266479454D+01
10	0.531072981169883D+00	0.100212859915633D+01
11	0.534970695089345D+00	0.100171952138795D+01
12	0.538261320749142D+00	0.100141792616071D+01
13	0.541076425518497D+00	0.100118910397157D+01
14	0.543512125460116D+00	0.100101152531780D+01
15	0.545640270989212D+00	0.100087084525299D+01
16	0.547515649172777D+00	0.100075762350453D+01
17	0.549180764744593D+00	0.100066505128092D+01
18	0.550669099029873D+00	0.100058847094203D+01
19	0.552007383589691D+00	0.100052441992753D+01
20	0.553217219420259D+00	

K = 1

$\hat{B}_1^{(n)}$ itération 1	$\hat{B}_1^{(n)}$ Itération 2	$\hat{B}_1^{(n)}$ Itération 3
0.576342157349900D+00		
0.576824413098335D+00	0.576583487157440D+00	
0.577008477492067D+00	0.577418289573551D+00	0.577236475028618D+00
0.577093262234506D+00	0.577214655976049D+00	0.577215576831827D+00
0.577137535179223D+00	0.577215117433595D+00	0.577215749857813D+00
0.577162838006313D+00	0.577215384475999D+00	0.577214818240596D+00
0.577178319258992D+00	0.577215502831452D+00	0.577215528844107D+00
0.577188309886598D+00	0.577215533000136D+00	0.577215588870462D+00
0.577195037546103D+00	0.577215554488173D+00	0.577215576407582D+00
0.577199733229323D+00	0.577215685969805D+00	0.577215672473842D+00
0.577203106608487D+00	0.577215564315661D+00	0.577215816310991D+00
0.577205593597265D+00	0.577215740275901D+00	0.577215657848487D+00
0.577207465160286D+00	0.577215549138279D+00	0.577215662220851D+00
0.577208901766145D+00	0.577215782501541D+00	0.577215666597093D+00
0.577210021645480D+00	0.577215538903914D+00	
0.577210907183803D+00		

Exemple 5.

Appliquons $\hat{B}_K$ itéré à la suite (S_n) définie par :

$$S_{n+1} = S_n \cdot \frac{1-S_n}{1+S_n}, \quad S_o = 0,8$$

$$S = \lim_{n\to\infty} = 0.$$

La suite (S_n) est à convergence logarithmique

n	S_n	K=1 $_1\hat{B}_1^{(n)}$ itération 1	K=1 $_2\hat{B}_1^{(n)}$ itération 2
5	0.563610198650507D-01		
6	0.503468551988186D-01	-0.273175584417696D-02	
7	0.455202480340245D-01	-0.203140452655483D-02	-0.452719214223079D-02
8	0.415564931761431D-01	-0.157398035109953D-02	0.482433011013337D-04
9	0.382404135656504D-01	-0.125758320483729D-02	0.286986307408758D-04
10	0.354234759651387D-01	-0.102908365962360D-02	0.186825313867624D-04
11	0.329996896041367D-01	-0.858394047346801D-03	0.128756675050814D-04
12	0.308913065621502D-01	-0.727375637602353D-03	0.857957214625833D-05
13	0.290399516908028D-01	-0.624526375072694D-03	0.662745760810982D-05
14	0.274009117432896D-01	-0.542255590060457D-03	0.499565782512039D-05
15	0.259393402072286D-01	-0.475376457416262D-03	0.497213459520059D-05
16	0.246276654443709D-01	-0.420254723789477D-03	0.214505177766220D-05
17	0.234437780173672D-01	-0.374268445313699D-03	0.337345988283082D-05
18	0.223697361607792D-01	-0.335496545034099D-03	0.641679991135066D-06
19	0.213908239762656D-01	-0.302495786891625D-03	
20	0.204948547945527D-01		

K=2, $_1\hat{B}_2^{(n)}$ itération 1	K=2 $_2\hat{B}_2^{(n)}$ itération 2
-0.133775582454494D-02	
-0.101412787321137D-02	
-0.795455480750905D-03	0.449098410336817D-04
-0.640699739589753D-03	0.338125895211086D-04
-0.527129715450502D-03	0.281450787158040D-04
-0.441313563622909D-03	0.219312041240688D-04
-0.374884629914427D-03	0.206133865155683D-04
-0.322411237640454D-03	0.130461171280780D-04
-0.280235285967161D-03	0.179459729522940D-04
-0.245830945242046D-03	0.758628048526387D-05
-0.217396771045992D-03	
-0.193630011001963D-03	

K=3 $_1\hat{B}_3^{(n)}$ itération 1	K=3 $_2\hat{B}_3^{(n)}$ itération 2
-0.611102421230608D-03	
-0.465823248084527D-03	
-0.365658694913827D-03	
-0.293897979262916D-03	0.304549360527010D-04
-0.240868191175367D-03	0.187249958129563D-04
-0.200658698849725D-03	0.235761537585085D-04
-0.169502732885706D-03	0.908749080247051D-06
-0.144905871207944D-03	
-0.125176963759898D-03	
-0.109126690125729D-03	

Exemple 6.

Considérons la suite (S_n) à convergence logarithmique

$$S_{n+1} = S_n - 0.005\ S_n^2$$

$$S_o = 0.938$$

$$S = \lim_n S_n = 0.$$

L'application du procédé $\hat{B}_K$ donne les résultats suivants :

n	S_n	K=1 $_1\hat{B}_2^{(n)}$ itération 1	K=1 $_2\hat{B}_1^{(n)}$ itération 2
6	0.916409871756429D+00		
7	0.912210836491166D+00	-0.214856972988223D-02	
8	0.908050193440106D+00	-0.212866030584809D-02	-0.216665676486221D-02
9	0.903927417671073D+00	-0.210906157428465D-02	-0.207458901349244D-02
10	0.899841993788986D+00	-0.208977048015415D-02	-0.729397212483938D-03
11	0.895793415720055D+00	-0.207067651257206D-02	-0.210643658704393D-02
12	0.891781186501818D+00	-0.205188517808329D-02	-0.201946911596344D-02
13	0.887804818078825D+00	-0.203339353208486D-02	-0.756465961052444D-03
14	0.883863831103805D+00	-0.201509256315511D-02	-0.206773546618489D-02
15	0.879957754744138D+00	-0.199698081285598D-02	-0.112261910320727D-02
16	0.876086126493466D+00	-0.197916195031516D-02	-0.194914902782134D-02
17	0.872248491988295D+00	-0.196163313621311D-02	
18	0.868444404829415D+00	-0.194428732831600D-02	
19	0.864673426408018D+00		
20	0.860935125736337D+00		

K=2 $\hat{B}_2^{(n)}$	K=3 $\hat{B}_3^{(n)}$
-0.110386522094831D-02	
-0.109339096191889D-02	
-0.108325173160654D-02	0.303618408111745D-04
-0.107320875353214D-02	-0.391722141622755D-03
-0.106329253193401D-02	-0.910943642439788D-03
-0.105356760679192D-02	0.133184217399134D-03
-0.104386899353451D-02	-0.532051098191463D-04
-0.103441767471497D-02	-0.565778135738946D-03
-0.102500334742809D-02	-0.682027780758133D-03
-0.101569292464537D-02	-0.589942524765179D-03
-0.100643446261587D-02	-0.891208017539497D-03
-0.997532215086380D-03	-0.970006931039566D-03
-0.988649176525949D-03	

Dans cet exemple les procédés $\hat{B}_2$ et $\hat{B}_3$ nous apparaissent plus intéressants que $\hat{B}_1$.

Exemple 7.

Considérons maintenant une suite à convergence linéaire, soit :

$$S_{n+1} = \frac{20}{S_n^2 + 2S_n + 10} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$S = \lim_n S_n = 1.368808107821$$

n	S_n	La suite α_n
4	0.14018253094486OD+01	
5	0.13542093904042 9D+01	
6	0.13752980924873 8D+01	-0.29466127121223 1D+03
7	0.13659297881706 5D+01	0.71235859190080 2D+03
8	0.13700860034018 2D+01	-0.15544054726584 1D+04
9	0.13682410236128 4D+01	0.35518115990462 3D+04
10	0.13690598120074 8D+01	-0.79526699485683 2D+04
11	0.13686963975555 2D+01	0.17968140077403 6D+05
12	0.13688576886287 3D+01	-0.40434552976808 4D+05
13	0.13687861025779 9D+01	0.91153880558606 5D+05
14	0.13688178743960 8D+01	-0.20533109012504 4D+06
15	0.13688037731436 3D+01	0.46268587687493 8D+06
16	0.13688100316750 9D+01	-0.10424390160903 0D+07
17	0.13688072539607 8D+01	

K=1 $B_1^{(n)}$	K=1 $\hat{B}_1^{(n)}$
0.13688087583960 5D+01	0.13688069062601 2D+01
0.13688082357114 7D+01	0.13688078759605 0D+01
0.13688081330365 6D+01	0.13688080617259 9D+01
0.13688081127859 5D+01	0.13688080987778 7D+01
0.13688081087997 0D+01	0.13688081060369 3D+01
0.13688081080145 8D+01	0.13688081074706 5D+01
0.13688081078576 8D+01	0.13688081077505 1D+01
0.13688081078247 7D+01	0.13688081078036 6D+01
0.13688081078299 6D+01	0.13688081078258 0D+01
0.13688081077982 4D+01	0.13688081077974 2D+01
0.13688081078432 5D+01	0.13688081078430 9D+01

K=2 $B_2^{(n)}$	K=2 $\hat{B}_2^{(n)}$
0.13688114131702 8D+01	0.13688023072517 3D+01
0.13688087568298 6D+01	0.13688069046949 4D+01
0.13688082358484 1D+01	0.13688078760974 8D+01
0.13688081330244 7D+01	0.13688080617139 0D+01
0.13688081127869 8D+01	0.13688080987789 0D+01
0.13688081087990 1D+01	0.13688081060362 4D+01
0.13688081080151 3D+01	0.13688081074712 1D+01
0.13688081078567 7D+01	0.13688081077496 0D+01
0.13688081078220 1D+01	0.13688081078009 0D+01
0.13688081078279 6D+01	0.13688081078238 0D+01
0.13688081078432 5D+01	0.13688081078430 9D+01

K=3 $B_3^{(n)}$	K=3 $\hat{B}_3^{(n)}$
0.13688082357528 6D+01	0.13688078760018 9D+01
0.13688081330329 8D+01	0.13688080617224 1D+01
0.13688081127865 7D+01	0.13688080987784 9D+01
0.13688081087995 6D+01	0.13688081060367 9D+01
0.13688081080137 8D+01	0.13688081074698 6D+01
0.13688081078568 8D+01	0.13688081077497 1D+01
0.13688081078288 6D+01	0.13688081078077 5D+01
0.13688081078299 6D+01	0.13688081078258 0D+01
0.13688081078432 5D+01	0.13688081078430 9D+01

Application de B_K et $\hat{B}_K$ pour K = 1,2 et 3 à la suite (S_n).

VII - COMPARAISON DE B_K ET DU Δ^2-D'AITKEN.

Nous avons vu dans V (théorème 2.4) que si $a_1+4a_2 \neq 0$, l'ensemble des suites de LOGSF accélérable par B_2 est L_1 ; cet ensemble est aussi accélérable par Δ^2-d'Aitken. Dans ce paragraphe nous comparons le Δ^2-d'Aitken avec B_2 sur L_1 et avec B_K ($\forall K$) pour les suites à convergence linéaire.

Cette comparaison nous permettra en particulier de définir un choix des coefficients a_i ($i = 0,1,\ldots,K$) et de déterminer les suites pour lesquelles B_K est meilleur que le Δ^2-d'Aitken.

1 - COMPARAISON DE B_K ET DU Δ^2-D'AITKEN, SUR LIN.

On rappelle que Lin est l'ensemble des suites à convergence linéaire.

Soit (S_n) une suite de Lin, i.e., $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 1$, et $(B_K^{(n)})_n$ et $(\varepsilon_2^{(n)})_n$ les suites obtenues en appliquant respectivement B_K et le Δ^2-d'Aitken à la suite (S_n).

On a :

$$B_K^{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{K} a_i S_{n-i} S_{n+i}}{\sum_{i=0}^{K} a_i (S_{n-i}+S_{n+i})} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{K} a_i = 0$$

et

$$\varepsilon_2^{(n)} = \frac{S_n^2 - S_{n-1}S_{n+1}}{2S_n-(S_{n-1}+S_{n+1})}$$

Posons $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + \alpha_n$, où (α_n) est une suite convergente de limite nulle, on a le résultat suivant en supposant $a_1 \neq 0$.

Théorème 2.9.

Soit (S_n) une suite convergente telle que, $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 0;1$.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha \neq 0;1$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = \frac{1}{(\rho\alpha)^{K-1}} \times \frac{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right)^2}{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)^2} .$$

Démonstration.

$$\text{On a, } B_K^{(n)} - S = \frac{\sum_{i=o}^{K} a_i e_{n-i} e_{n+i}}{\sum_{i=o}^{K} a_i (e_{n-i} + e_{n+i})} .$$

Remplaçons a_o par $-\sum_{i=1}^{K} a_i$, on obtient :

$$B_K^{(n)} - S = \frac{\sum_{i=1}^{K} a_i (e_{n-i} e_{n+i} - e_n^2)}{\sum_{i=1}^{K} a_i (e_{n-i} + e_{n+i} - 2e_n)}$$

$$= \frac{a_1 (e_{n-1} e_{n+1} - e_n^2) + \sum_{i=2}^{K} a_i (e_{n-i} e_{n+i} - e_n^2)}{a_1 (e_{n-1} + e_{n+1} - 2e_n) + \sum_{i=2}^{K} a_i (e_{n-i} + e_{n+i} - 2e_n)}$$

$$= \frac{e_{n-1} e_{n+1} - e_n^2}{e_{n-1} + e_{n+1} - 2e_n} \times \frac{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \frac{e_{n-i} e_{n+1} - e_n^2}{e_{n-1} e_{n+1} - e_n^2}}{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \frac{e_{n-i} + e_{n+i} - 2e_n}{e_{n-1} + e_{n+1} - 2e_n}}$$

$$= (\varepsilon_2^{(n-1)} - S) \times \frac{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \frac{e_{n-i} e_{n+i} - e_n^2}{e_{n-1} e_{n+1} - e_n^2}}{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \frac{e_{n-i} + e_{n+i} - 2e_n}{e_{n-1} + e_{n+1} - 2e_n}}$$

Calculons $\frac{e_{n-i} e_{n+i} - e_n^2}{e_{n-1} e_{n+1} - e_n^2}$ et $\frac{e_{n-i} + e_{n+i} - 2e_n}{e_{n-1} + e_{n+1} - 2e_n}$ en fonctions des termes de la suite (α_n).

$$-) \quad \frac{e_{n-i}e_{n+i} - e_n^2}{e_{n-1}e_{n+1} - e_n^2} = \frac{e_{n-i}e_n}{e_{n-1}e_n} \times \frac{\frac{e_{n+i}}{e_n} - \frac{e_n}{e_{n-i}}}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - \frac{e_n}{e_{n-1}}}$$

$$\frac{e_{n+i}}{e_n} - \frac{e_n}{e_{n-i}} = \prod_{j=o}^{i-1} (\rho+\alpha_{n+j}) - \prod_{j=1}^{i} (\rho + \alpha_{n-j})$$

$$= \rho^i + \rho^{i-1}(\alpha_n+\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+i-1}) + \ldots$$

$$- \rho^i - \rho^{i-1}(\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_{n-i}) + \ldots$$

$$= \rho^{i-1}(\alpha_n+\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+i-1} - \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} - \ldots-\alpha_{n-i}) + \ldots$$

et

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} - \frac{e_n}{e_{n-1}} = \rho + \alpha_n - \rho - \alpha_{n-1} = \alpha_n - \alpha_{n-1}$$

donc,

$$\frac{e_{n+i}/e_n - e_n/e_{n-i}}{e_{n+1}/e_n - e_n/e_{n-1}} = \frac{\rho^{i-1}\left[\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{n+i-1}}{\alpha_{n-1}} - 1 - \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} - \ldots - \frac{\alpha_{n-i}}{\alpha_{n-1}}\right] + \ldots}{\alpha_n/\alpha_{n-1} - 1}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha \neq 0,1$ d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+i}/e_n - e_n/e_{n-i}}{e_{n+1}/e_n - e_n/e_{n-1}} = \frac{\rho^{i-1}\left[\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^i - (1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\ldots+\frac{1}{\alpha^{i-1}})\right]}{\alpha-1}$$

$$= \frac{\rho^{i-1}\left[\alpha.\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha^{i-1}}\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right]}{\alpha - 1}$$

$$= \frac{\rho^{i-1}}{\alpha^{i-1}} \quad \frac{(\alpha^i-1)^2}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right)^2$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n-i}e_{n+i}-e_n^2}{e_{n-1}e_{n+1}-e_n^2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{i-1} \times \left(\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right)^2.$$

-)
$$\frac{e_{n-i}+e_{n+i}-2e_n}{e_{n-1}+e_{n+1}-2e_n} = \frac{\left(\frac{e_{n+i}}{e_n} - 1\right) + \left(\frac{e_{n-i}}{e_n} - 1\right)}{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right) + \left(\frac{e_{n-1}}{e_n} - 1\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n-i}+e_{n+i}-2e_n}{e_{n-1}+e_{n+1}-2e_n} = \frac{(\rho^i-1)+\left(\frac{1}{\rho^i} - 1\right)}{(\rho-1) + \left(\frac{1}{\rho} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\rho^{i-1}} \left(\frac{\rho^i - 1}{\rho - 1}\right)^2.$$

D'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)}-S}{\varepsilon_2^{(n-1)}-S} = \frac{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)^2}{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)^2}$$

On montre aussi que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \rho.\alpha :$$

$$\frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \frac{e_{n+1}e_{n+3}-e_{n+2}^2}{e_n e_{n+2}-e_{n+1}^2} \times \frac{e_n+e_{n+2}-2e_{n+1}}{e_{n+1}+e_{n+3}-2e_{n+2}}$$

$$= \frac{e_{n+1}e_{n+2}}{e_n e_{n+1}} \times \frac{\left[\frac{e_{n+3}}{e_{n+2}} - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}\right]}{\left[\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - \frac{e_{n+1}}{e_n}\right]} \times \frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} \frac{\left[\frac{e_n}{e_{n+1}} + \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 2\right]}{\left[\frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} + \frac{e_{n+3}}{e_{n+2}} - 2\right]}$$

$$= \frac{e_{n+2}}{e_n} \times \frac{[\rho+\rho_{n+2}-\rho-\alpha_{n+1}]}{[\rho+\alpha_{n+1}-\rho-\alpha_n]} \times \frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} \frac{\left[\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 + \frac{e_n}{e_{n+1}} - 1\right]}{\left[\frac{e_{n+3}}{e_{n+2}} - 1 + \frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} - 1\right]}$$

$$= \frac{e_{n+1}}{e_n} \times \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_n} \frac{\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - 1}{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1} \times \frac{\left[\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1 + \frac{e_n}{e_{n+1}} - 1\right]}{\left[\frac{e_{n+3}}{e_{n+2}} - 1 + \frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} - 1\right]} .$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \rho.\alpha. \frac{\alpha-1}{\alpha-1} \times \frac{\rho-1 + \frac{1}{\rho} - 1}{\rho-1 + \frac{1}{\rho} - 1}$$

$$= \rho.\alpha \times \frac{\frac{1}{\rho}(\rho-1)^2}{\frac{1}{\rho}(\rho-1)^2}$$

$$= \rho\alpha$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S}{\varepsilon_2^{(n-1)} - S} = (\rho\alpha)^{K-1} .$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = \frac{1}{(\rho\alpha)^{K-1}} \times \frac{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha}\right)^2}{1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)^2} .$$

□

On remarque que le dernier terme de la suite (S_n) utilisé pour le calcul de $B_K^{(n)}$ et de $\varepsilon_2^{(n+K-2)}$ est le même, c'est S_{n+K}, mais $B_K^{(n)}$ demande $S_{n-K},\ldots,S_{n+K}$ alors que $\varepsilon_2^{(n+K-1)}$ demande seulement S_{n+K-2}, S_{n+K-1}, S_{n+K}.

On considère la fonction B(x) définie pour $x \neq 0,1$ par :

$$B(x) = 1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} \left(\frac{1}{x}\right)^{i-1} \left(\frac{1-x^i}{1-x}\right)^2.$$

D'après le théorème 2.9 on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = \frac{B(\alpha)}{B(\rho)} \times \frac{1}{(\rho\alpha)^{K-1}}.$$

Donc, si $B(\alpha) = 0$ et $B(\rho) \neq 0$ alors $(B_K^{(n)})_n$ converge plus vite que $(\varepsilon_2^{(n+K-2)})_n$.

Proposition 2.4.

Si les coefficients a_i, pour $i=1,\ldots,K$, sont de même signe et si $0 < \rho < 1$; $\alpha \neq 0,1$, alors une condition nécessaire pour que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = 0 \text{ est que } \alpha < 0.$$

Démonstration.

Les coefficients a_i $i = 1,\ldots K$ sont de même signe donc, $\frac{a_i}{a_1} \geq 0$ pour $i = 2,\ldots,K$.

$$\rho > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\rho^i}{1-\rho}\right)^2 > 0$$

d'où $B(\rho) \geq 1$, et pour que $B(\alpha) = 0$ il faut que α soit négatif.

□

Proposition 2.5.

Supposons que la somme des coefficients a_i d'indice impair ($i \geq 3$) soit égale à $(-a_1)$, alors :

Si $B(\rho) \neq 0$ *et si* $\alpha = -1$ *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = 0$$

Démonstration.

Il suffit de montrer que $B(-1) = 0$, en effet :

Si K est pair :

$$B(-1) = 1 + \sum_{i=2}^{K} \frac{a_i}{a_1} (-1)^{i-1} \left(\frac{1-(-1)^i}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_5}{a_1} + \ldots + \frac{a_{K-1}}{a_1}$$

$$= 1 + \frac{a_3 + a_5 + \ldots + a_{K-1}}{a_1}$$

$$= 0$$

Si K est impair :

$$B(-1) = 1 + \frac{a_3 + a_5 + \ldots + a_K}{a_1}$$

donc, $B(-1) = 0$ et puisque $B(\rho) \neq 0$, d'après le théorème 2.9,:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = 0.$$

□

Si la somme des coefficients a_i d'indice impair ($i \geq 3$) est différente de $-a_1$, alors $B(-1) \neq 0$. Donc pour une suite (S_n) telle que $\rho = -1$ et $\alpha = -1$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_K^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n+K-2)} - S} = \frac{1}{(\rho\alpha)^{K-1}} \times \frac{B(-1)}{B(-1)} = 1.$$

K=2.

Voyons maintenant le cas particulier K=2.
La fonction B(x) est définie par :

$$B(x) = 1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)^2 \; ; \; x \neq 0,1$$

$$= 1 + \frac{a_2}{a_1} \frac{(1+x)^2}{x}$$

Posons $A = \frac{a_2}{a_1}$, l'équation $B(x) = 0$, $x \neq 0,1$ est équivalente à l'équation :

(2.17) $\quad Ax^2 + (2A+1)x + A = 0$

Proposition 2.6

Soient a_1 et a_2 des réels non nuls. Alors pour toute suite (S_n) telle que $\alpha \neq 0,1$; $\rho \neq 0,1$ et α est racine et ρ n'est pas racine de l'équation $Ax^2 + (2A+1)x + A = 0$.

On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 0.$$

Démonstration.

α est racine et ρ n'est pas racine de l'équation $Ax^2 + (2A+1)x + A = 0$, donc $B(\alpha) = 0$, $B(\rho) \neq 0$ et d'après le théorème 2.9

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \frac{1}{(\rho\alpha)} \cdot \frac{B(\alpha)}{B(\rho)} = 0.$$

□

Les deux racines de l'équation $Ax^2 + (2A+1)x + A = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{-2A-1-\sqrt{4A+1}}{2A} \quad , \quad x_2 = \frac{-2A-1+\sqrt{4A+1}}{2A}$$

et vérifient $x_1 x_2 = 1$.

Puisque $\alpha \neq 0,1$ et est de module inférieur ou égal à 1, la racine qui nous intéresse est donc celle de plus petit module.

L'équation $Ax^2+(2A+1)x+A = 0$ a deux racines dont l'une est de module inférieur à 1 si $A \neq -1/4$.

Donc, si α est racine de l'équation et si $\rho \neq \alpha$ alors ρ ne peut pas être racine de cette équation. En effet, $|\rho| \leq 1$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ donc, $|\alpha| \leq 1$. Car sinon (α_n) ne soit pas convergente.

Donc, ρ et α sont de module inférieur ou égal à 1. Donc si α est racine ρ ne l'est pas et dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 0.$$

2 - COMPARAISON DE B_2 ET DU Δ^2-D'AITKEN SUR L_1.

On sait (voir th..2.4, V) que si $a_1+4a_2 \neq 0$ le sous-ensemble de LOGSF accélérable par B_2 est L_1. Puisque le Δ^2-d'Aitken accélère L_1, nous tenons donc à le comparer avec B_2 sur L_1.

Soit $(S_n) \in$ LOGSF, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + \alpha_n$ et $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \beta_n$ avec

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

$$L_1 = \{(S_n) \in \text{LOGSF telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1\}.$$

Posons $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1 + C_n$ avec $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$.

Théorème 2.10.

Soit (S_n) *une suite de* L_1 *telle que :*

$$\lim_{n} \frac{C_{n+1}}{C_n} = a \neq 0,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n-1)} - S} = \frac{(a_1+2a_2)a + 2a_2}{(a_1+4a_2)a} \cdot \square$$

Démonstration.

Soit (S_n) une suite de L_1.

D'après la formule (2.7), V on a :

Lorsque $a_2 = 0$, on retrouve le procédé Δ^2-d'Aitken et donc :

$$\frac{\varepsilon_2^{(n-1)} - S}{e_{n-2}} = \frac{(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1})}{(1+\beta_{n-2})\,\beta_{n-1}}$$

donc,

$$\frac{B_2^{(n)} - S}{e_{n-2}} = \frac{a_1(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}) + a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2})(2+\beta_{n-2})]}{a_1(1+\beta_{n-2})\beta_{n-1} + a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (2+\beta_{n-2})]}$$

$$\frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n-1)} - S} = \frac{a_1(1+\alpha_{n-2})(1+\beta_{n-2})(\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}) + a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2})(2+\beta_{n-2})]}{(1+\alpha_{n-2}) \times (\beta_{n-1}-\alpha_{n-1})}$$

$$\times \frac{\beta_{n-1}}{a_1(1+\beta_{n-2})\beta_{n-1} + a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (2+\beta_{n-2})]}$$

$$= \left[a_1(1+\beta_{n-2}) + \frac{A_n}{\dfrac{a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2})(2+\beta_{n-2})]}{(1+\alpha_{n-2}) \times (\beta_{n-1}-\alpha_{n-1})}}\right]$$

$$\times \left[\frac{1}{a_1(1+\beta_{n-2}) + \dfrac{a_2[(1+\beta_{n-2})(1+\beta_{n-1})(2+\beta_n) - (2+\beta_{n-2})]}{\dfrac{\beta_{n-1}}{B_n}}}\right]$$

$$= [a_1(1+\beta_{n-2}) + A_n] \times \left[\frac{1}{a_1(1+\beta_{n-2}) + B_n}\right] \qquad (2.18)$$

Calculons maintenant les limites de A_n et de B_n.

$$A_n = \frac{\left[\begin{array}{l} 2 + \beta_n + 2\beta_{n-1} + \beta_{n-1}\beta_n + 2\beta_{n-2} + \beta_{n-2}\beta_{n+2}\beta_{n-2}\beta_{n-1} + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n \\ -2 - \beta_{n-2} - 2\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_{n-2} - 2\alpha_{n-2} - \alpha_{n-2}\beta_{n-2} - 2\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\beta_{n-2} \end{array}\right]}{[\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}(\beta_{n-1} = \alpha_{n-1})]}$$

$$= \frac{a_2[\beta_n + 2\beta_{n-1} + \beta_{n-2} - 2\alpha_{n-1} - 2\alpha_{n-2} + R_n]}{[\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} + R'_n]}$$

$$= a_2 \times \frac{[2\beta_{n-1}(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}) + \beta_{n-2}(1 - \frac{\alpha_{n-2}}{\beta_{n-2}}) + \beta_{n-2}(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - \frac{\alpha_{n-2}}{\beta_{n-2}}) + R_n]}{\beta_{n-1}(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}) + R'_n}$$

$$= a_2 \times \frac{[-2\beta_{n-1}C_{n-1} - \beta_{n-2}C_{n-2} + \beta_{n-2}(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1 - C_{n-2}) + R_n]}{-\beta_{n-1}C_{n-1} + R'_n}$$

$$= a_2 \times \frac{[2\beta_{n-1}C_{n-1} + 2\beta_{n-2}C_{n-2} - \beta_{n-2}(\frac{\beta_n}{\beta_{n-2}} - 1) - R_n]}{[\beta_{n-1}C_{n-1} - R'_n]}$$

$$= a_2 \times \frac{[2 + 2 \cdot \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} \times \frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} - \frac{(\beta_n/\beta_{n-2} - 1)}{C_{n-2}} - \frac{R_n}{\beta_{n-2}C_{n-2}}]}{\frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} \cdot \frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} - \frac{R'_n}{\beta_{n-2}C_{n-2}}}$$

d'après i) du lemme 2.1, V on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1.$$

Dans les expressions de R_n et R'_n on met β_{n-2} en facteur, on fait donc apparaître les termes C_n et on montre ainsi que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{\beta_{n-2}C_{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{R'_n}{\beta_{n-2}C_{n-2}} = 0.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = a \neq 0$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2a_2(1+a)}{a}$$

$$B_n = \frac{a_2[2+2\beta_{n-1}+\beta_n+\beta_{n-1}\beta_n+2\beta_{n-2}+2\beta_{n-2}\beta_{n-1}+\beta_{n-2}\beta_n+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n-2-\beta_{n-2}]}{\beta_{n-1}(1+\beta_{n-2})}$$

$$= \frac{a_2[2\beta_{n-1}+\beta_n+\beta_{n-2}+\beta_{n-1}\beta_n+2\beta_{n-2}\beta_{n-1}+\beta_{n-2}\beta_n+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n]}{\beta_{n-1}(1+\beta_{n-2})}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} B_n = 4a_2$, et d'après la formule (2.18), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{(n-1)_2 - S} = (a_1 + \frac{2a_2(1+a)}{a}) \times (\frac{1}{a_1+4a_2})$$

$$= \frac{(a_1+2a_2)a + 2a_2}{(a_1+4a_2)a} .$$

□

Lemme 2.3.

Soit (s_n) *une suite de* L_1.

$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = a$ *existe si et seulement si*

$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu$ *existe et* a = μ .

Démonstration.

$(S_n) \in$ LOGSF donc $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ on pose alors $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n$ $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

-) $(S_n) \in L_1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, or

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha_n}{(1+\alpha_n)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1} = \frac{\alpha_n}{\mu_n + \alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\mu_n}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ donc,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_n} = 0$.. $C_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n} - 1 = \frac{-\mu_n - \alpha_n \mu_n}{\mu_n + \alpha_{n+1}}$

-) $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\mu_{n+1}(1+\alpha_{n+1})}{\mu_n(1+\alpha_n)} \times \frac{\mu_n + \alpha_{n+1}}{\mu_{n+1} + \alpha_{n+2}}$

$$= \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \quad \frac{1+\alpha_{n+1}}{1+\alpha_n} \times \frac{1 + \frac{\mu_n}{\alpha_{n+1}}}{1 + \frac{\mu_{n+1}}{\alpha_{n+2}}}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\alpha_{n+1}} = 0$ d'où le résultat.

□

Lemme 2.4.

Soit (s_n) *une suite de LOGSF. Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu$ *existe alors,* $|\mu| = 1$.

Démonstration.

Si $(S_n) \in$ LOGSF on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1. \text{ Soit } \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu .$$

Supposons que $|\mu| \neq 1$.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n \text{ donc, } \frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} = (1+\mu_n)\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\Delta\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu$$

or $|\mu| \neq 1$ donc d'après J. Delahaye (th. 1 p. 218 [6]) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \mu \neq 1$

ce qui est contradictoire à l'hypothèse $(S_n) \in$ LOGSF et donc $|\mu| = 1$. □

Il y a donc deux cas à distinguer :

$$\mu = 1 \text{ et } \mu = -1.$$

D'où les corollaires suivants :

Corollaire 2.1.

Soit (S_n) *une suite de* L_1 *telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n-1)} - S} = \frac{a_1}{a_1 + 4a_2} .$$

Démonstration.

D'après le lemme 2.3 $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = a = -1$ et d'après le théorème 2.10 on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n-1)} - S} = \frac{-(a_1+2a_2)+2a_2}{-(a_1+4a_2)} = \frac{a_1}{a_1+4a_2} .$$

□

Remarque 2.8.

Soit $(S_n) \in L_1$ telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = -1$.

Si les coefficients a_1 et a_2 sont choisis tels que :

$$a_2 > 0 \text{ et } a_1 > 2a_2$$

ou bien tels que,

$$a_2 < 0 \text{ et } a_1 < -2a_2$$

alors, $\left|\frac{a_1}{a_1+4a_2}\right| < 1$ et dans ce cas B_2 est plus intéressant.

Si l'on choisit $a_1 = 0$, d'après le corollaire 2.2, B_2 accélère la convergence de la suite $(\varepsilon_2^{(n-1)})$.

Chapitre III

COMPARAISON ET AMÉLIORATION

DE PROCÉDÉS D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

PAR L'INTERMÉDIAIRE DE LEURS FACTEURS D'ACCÉLÉRATION.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS.

- (S_n) étant une suite convergente de limite S, on note :

(e_n) la suite des erreurs $e_n = S_n - S$,

- T et G deux transformations de suites.

- f_n et g_n les facteurs d'accélération des transformations T et G respectivement d'après A. Lembarki [12].

. $\text{Log} = \{(S_n)$ convergentes telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1\}$

. $\text{LOGSF} = \{(S_n) \in \text{Log}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1\}$

. $\text{LOGL} = \{(S_n) \in \text{Log}$ telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -1\}$

I - INTRODUCTION.

Considérons une transformation de suite T, et soit (T_n) la suite obtenue en appliquant T à une suite (S_n) convergente de limite S. T_n peut toujours se mettre sous la forme :

$$T_n = \frac{S_{n+1} - f_n S_n}{1 - f_n} \tag{3.1}$$

où f_n est une approximation de $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ (dans le sens du théorème que nous verrons ci-dessous) et est appelée facteur d'accélération de la transformation T.

Donnons d'abord un résultat dû à Lembarki [12, Théorème 2,1, p. 131].

Théorème 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0 \text{ } \textit{si et seulement si} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - f_n} = 1.$$

La démonstration de ce théorème est évidente.

La forme (3.1) de la transformation T nous permet en particulier des interprétations constructives des procédés connus. Donnons des exemples :

1 - La procédure θ de Brezinski. [5]

On peut écrire $T_n = S_n + D_n$ avec $D_n = \frac{\Delta S_n}{1 - f_n}$. Soit $\theta(T_n)$ la suite obtenus en appliquant la procédure θ à la transformation T ; elle est définie par :

$$(T_n) = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_n} \cdot D_n$$

$$= S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{1-f_n}{1-f_{n+1}} - 1} \times \frac{\Delta S_n}{1-f_n}$$

$$= S_n - \frac{\Delta S_n}{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{1-f_n}{1-f_{n+1}} - 1}$$

d'où

$$\theta(T_n) = \frac{S_{n+1} - \theta_n \cdot S_n}{1 - \theta_n}$$

avec

$$\theta_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \cdot \frac{1 - f_n}{1 - f_{n+1}}$$

Ainsi on voit clairement la correction apportée par la procédure θ au facteur d'accélération du procéde de base T.

2 - Procédure τ.

Nous savons [12] que certaines suites à convergence logarithmique ne sont pas accélérables par le procédé θ_2 alors qu'elles le sont par T_{+2} (transformation de Streit [18]).

Or le facteur d'accélération de T_{+2} est donné par :

$$t_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} \times \frac{1 + \dfrac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n}}{1 + \dfrac{\Delta s_{n+2}}{\Delta s_{n+1}}} .$$

Ceci nous conduit à la procédure τ définie par :

$$\tau(T_n) = \frac{S_{n+1} - \tau_n . S_n}{1 - \tau_n}$$

avec

$$\tau_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} \times \frac{1 + f_n}{1 + f_{n+1}}$$

La procédure τ peut évidemment être étudiée de la même façon que la procédure θ. Cette étude ne sera pas faite dans ce travail.

II - COMPARAISON DE PROCÉDÉS PAR LE BIAIS DE LEURS FACTEURS D'ACCÉLÉRATION.

Nous recherchons dans ce qui suit les conditions que doivent vérifier les facteurs d'accélération de deux procédés quelconques pour que l'un d'eux accélère mieux la convergence.

Soient T et G deux procédés définis par :

$$T_n = \frac{S_{n+1} - f_n . S_n}{1 - f_n} \quad \text{et} \quad G_n = \frac{S_{n+1} - g_n . S_n}{1 - g_n} .$$

Posons $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = U_n f_n$ et $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = v_n g_n$. (3.2)

1 - THEOREME D'ACCELERATION.

Théorème 3.2.

$$- \lim_{n\to\infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-u_n}{1-f_n} . f_n = 0$$

$$- \lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{S_n - S} = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{1 - v_n}{1 - g_n} g_n = 0.$$

Démonstration.

Nous avons, $$\frac{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - f_n} = \frac{1 - U_n f_n}{1 - f_n}$$

$$= 1 + \frac{1 - U_n}{1 - f_n} \cdot f_n$$

d'après le théorème 1, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 - f_n} = 1$ d'où le résultat. On fait la même démonstration pour G.□

Remarque 3.1.

On a $\frac{e_{n+1}}{e_n} = U_n f_n$. Le théorème 2 montre en particulier que si $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, finie et non nulle, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y a accélération de la convergence est que (U_n) converge vers 1 plus vite que (f_n). Cette situation est évidemment valable même dans le cas de la convergence logarithmique.

2 - EXEMPLES D'APPLICATION DU THEOREME 3.2.

1°) - Le procédé Δ^2-d'Aitken.

Soit $(S_n) \in$ LOGSF.

$$\begin{cases} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1+\alpha_n, \; f_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \text{ d'où } U_n = \frac{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \\ \\ \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \beta_n. \end{cases}$$

D'après le théorème 3.2, l'ensemble des suites à convergence logarithmique que le Δ^2-d'Aitken accélère est :

$$\{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} f_n = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{1-U_n}{1-f_n} = 0\}$$

$$= \{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1\}.$$

2 - Le θ_2-algorithme de Brezinski.

On a, $g_n = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \dfrac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}$, donc

$$v_n = \frac{1 - \dfrac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - \dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}}} \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}$$

Intéressons-nous, comme dans l'exemple précédent, aux suites à convergence logarithmique. Avec les mêmes notations :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + \alpha_n, \quad \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \beta_n$$

(β_n ne tend pas forcément vers 0). On a :

$$g_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(1+\alpha_n)\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}.$$

Donc :

$$\frac{1-v_n}{1-g_n} \times g_n = \frac{\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1}}{\alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\alpha_{n+1}\beta_n} \times (1+\alpha_n)$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}} \times (1+\alpha_n)$$

Il s'en suit que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-v_n}{1-g_n} \times g_n = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{\alpha_{n+1}} = 0.$$

En récapitulant on a le :

Théorème 3.3.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ *alors*

1°) - $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 0$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$

2°) - $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 0$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{\alpha_{n+1}} = 0$

Remarque 3.2.

Dans le cas de la convergence logarithmique, si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha$ existe alors, $\alpha = \pm 1$. En effet :

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \times \frac{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}$$

$$= (1+\alpha_n)\, \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

donc puisque $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha \text{ existe} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho \text{ existe et } \alpha = \rho.$$

Supposons que $|\alpha| \neq 1$, on a donc $|\rho| \neq 1$, et donc d'après J.P. Delahaye [6, Th. 1 p. 218] $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq \pm 1$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Par conséquent $|\alpha| = 1$. D'où deux cas à distinguer :

a) $\alpha = +1$ Dans ce cas la suite $(S_n) \in$ LOGSF (i.e. $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$) et une condition nécessaire pour que $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{S_n - S} = 0$ est que $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$.

b) $\alpha = -1$. D'après le théorème 3.3, une condition nécessaire pour que le θ_2 accélère la convergence est que :

$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = -1$. Or dans ce cas on a $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \left[(1+\alpha_n)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1\right] = -2$, d'où

$\lim \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$. Donc le θ_2 n'accélère aucune suite de LOGL.

3 - COMPARAISON DE DEUX PROCEDES.

Voyons maintenant comment se comportent les procédés T et G (séparément ou l'un par rapport à l'autre).
Selon le comportement de (U_n) par rapport à (V_n). Pour ceci plaçons-nous sous les hypothèses suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 0 \text{ et}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \rho,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = U,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-f_{n+1}}{1-f_n} = a \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-V_{n+1}}{1-V_n} = V \text{ et}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-g_{n+1}}{1-g_n} = b \neq 0.$$

Théorème 3.4.

Sous les hypothèses ci-dessus on a :

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}-S}{T_n - S} = \rho.\frac{U}{a}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}-S}{G_n - S} = \rho \cdot \frac{V}{b}$

ii) *Si* $\rho \neq 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{T_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-V_n}{1-U_n}$

iii) *Si* $\rho = 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{T_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-V_n)/(1-g_n)}{(1-U_n)/(1-f_n)}$.

Démonstration.

i) On a, $T_n = \frac{S_{n+1} - f_n S_n}{1-f_n}$ et $\frac{e_{n+1}}{e_n} = U_n f_n$, donc

$$\frac{T_{n+1}-S}{T_n - S} = \frac{e_{n+2} - f_{n+1} e_{n+1}}{e_{n+1} - f_n e_n} \times \frac{1-f_n}{1-f_{n+1}}$$

$$= \frac{e_{n+1}}{e_n} \times \frac{1 - U_{n+1}}{1 - U_n} \times \frac{f_{n+1}}{f_n} \times \frac{1 - f_n}{1-f_{n+1}} .$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = U$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1-f_{n+1}}{1-f_n} = a \neq 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}-S}{T_n - S} = \rho . \frac{U}{a}$.

On fait la même démonstration pour G_n.

On remarque que si $\rho \neq 1$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-f_{n+1}}{1-f_n} = a = 1,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1} - S}{T_n - S} = \rho.U ;$$

même chose pour G_n.

D'autre part :

$$\frac{G_n - S}{T_n - S} = \frac{e_{n+1} - g_n . e_n}{e_{n+1} - f_n . e_n} \times \frac{1 - f_n}{1 - g_n}$$

$$= \frac{e_{n+1}/e_n - g_n}{e_{n+1}/e_n - f_n} \times \frac{1-f_n}{1-g_n}$$

$$= \frac{1 - V_n}{1 - U_n} \times \frac{g_n}{f_n} \times \frac{1 - f_n}{1 - g_n} .$$

Si $\rho \neq 1$, comme $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \rho$, ii) s'en suit. Si $\rho = 1$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{f_n} = 1, \text{ d'où iii).}$$

□

Remarque 3.3.

1°) Sous les hypothèses du théorème précédent on a :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 1,$$

donc si $\lim_{n\to\infty} \frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = U$ existe alors $|U| \leq 1$ (car sinon, (U_n) ne sera pas convergente), d'où $|\rho U| \leq 1$ $\forall\rho$. En particulier, si $|\rho| < 1$ alors $|\rho U| < 1$, la suite (T_n) est donc à convergence linéaire.

2°) ii) du théorème 4 montre que dans le cas de la convergence linéaire une condition nécessaire et suffisante pour que (G_n) converge plus vite que (T_n) est que (v_n) converge vers 1 plus vite que (U_n). Cette condition n'est pas suffisante dans le cas de la convergence logarithmique, il faut en plus que $\frac{1-V_n}{1-g_n}$ converge vers 0 plus vite que $\frac{1-U_n}{1-f_n}$.

4 - APPLICATION DU THEOREME 3.4.

Prenons comme transformation T le procédé Δ^2-d'Aitken et pour G le θ_2-algorithme.

Posons $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + \alpha_n$ et $\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} = \rho + \beta_n$.

On a :

$$f_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} \quad \text{d'où } U_n = \frac{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}$$

donc $u_n = \frac{\rho + \alpha_n}{\rho + \beta_n}$,

(3.3) et par suite, $\frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \times \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}} \times \frac{\rho + \beta_n}{\rho + \beta_{n+1}}$

* $g_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} \times \frac{1 - \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n}}{1 - \frac{\Delta s_{n+2}}{\Delta s_{n+1}}}$

d'où

$$V_n = \frac{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}} \times \frac{1 - \frac{\Delta s_{n+2}}{\Delta s_{n+1}}}{1 - \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n}}$$

donc,

$$(3.4) \qquad v_n = \frac{1-\rho-\alpha_n}{1-\rho-\alpha_{n+1}} \quad \frac{1-\rho-\beta_{n+1}}{1-\rho-\beta_n} .$$

Distinguons deux cas :

a - Cas de la convergence linéaire.

Théorème 3.5.

Soit (s_n) *une suite telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho, \ |\rho| < 1 \ ; \ \rho \neq 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha \neq 1$$

alors,

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - s}{\varepsilon_2^{(n)} - s} = \rho.\alpha$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - s}{\theta_2^{(n)} - s} = \rho.\alpha$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - s}{\varepsilon_2^{(n)} - s} = \rho . \frac{\alpha-1}{1-\rho}$$

Démonstration.

Sous les hypothèses du théorème, on sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta$ existe et que $\beta = \alpha$ (voir [12, propriété 4 p. 139]).

On veut montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = \alpha$.

-) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1-\rho}{1-\alpha\rho} .$$

En effet :

$\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} = (\rho+\alpha_n)\frac{1-\rho-\alpha_{n+1}}{1-\rho-\alpha_n}$ donc $\beta_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta s_n} - \rho = \frac{\alpha_n - \rho\alpha_{n+1} - \alpha_n\alpha_{n+1}}{1-\rho-\alpha_n}$ d'où

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho-\alpha_n}{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}-\rho\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}-\alpha_{n+1}} = \frac{1-\rho}{1-\alpha\rho}$$

$\alpha\rho \neq 1$ car $|\rho| < 1$ et $|\alpha| \leq 1$.

-) $$\frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \times \frac{1-\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1-\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \times \frac{\rho+\beta_n}{\rho+\beta_{n+1}},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = \alpha.$$

On montre de même que $\lim_{n\to\infty}\frac{1-V_{n+1}}{1-V_n} = \alpha$, et d'après le théorème 3.4, i) et ii) s'en suivent.:

On a :

$$\frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \frac{1-V_n}{1-U_n} \times \frac{g_n}{f_n} \times \frac{1-f_n}{1-g_n},$$

Or $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \rho \neq 1$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-V_n}{1-U_n}.$$

$$\frac{1-V_n}{1-U_n} = \frac{(1-\rho-\alpha_{n+1})(1-\rho-\beta_n)-(1-\rho-\alpha_n)(1-\rho-\beta_{n+1})}{(1-\rho-\alpha_{n+1})(1-\rho-\beta_n)} \times \frac{\rho+\beta_n}{\beta_n-\alpha_n}$$

$$= \frac{(1-\rho)\Delta\beta_n - (1-\rho)\Delta\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1}}{\beta_n-\alpha_n} \times \frac{\rho+\beta_n}{(1-\rho-\alpha_{n+1})(1-\rho-\beta_n)}$$

$$= \frac{(1-\rho)\frac{\Delta\beta_n}{\beta_n} - (1-\rho)\frac{\Delta\alpha_n}{\beta_n} + \alpha_{n+1} - \alpha_n\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{1-\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \times \frac{\rho+\beta_n}{(1-\rho-\alpha_{n+1})(1-\rho-\beta_n)}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\beta_n}{\beta_n} = \beta-1 = \alpha-1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\alpha_n}{\beta_n} = (\alpha-1) \times \frac{1-\rho}{1-\alpha\rho}$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-V_n}{1-U_n} = \rho . \frac{\alpha-1}{1-\rho} ,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \rho . \frac{\alpha-1}{1-\rho} . \square$$

Remarque 3.4.

Le théorème 3.5, moyennant les hypothèses sous lesquelles il est énoncé, nous montre en particulier que le θ_2- algorithme est préférable au procédé Δ^2-d'Aitken pour les suites telles que $|\rho . \frac{\alpha-1}{1-\rho}| < 1$, i.e. $\rho < \frac{1}{2-\alpha}$, ceci est vérifié en particulier si $\rho < 0$. Par contre si $\rho > \frac{1}{2-\alpha}$ le Δ^2-d'Aitken est préférable puisque dans ce cas $|\rho . \frac{\alpha-1}{1-\rho}| > 1$.

De plus le Δ^2-d'Aitken demande moins de termes de la suite initiale que le θ_2-algorithme.

Exemple numérique.

Soit la suite (S_n) définie par :

$$S_{n+1} = S_n(\rho + \alpha_n), \quad S_1 = 1$$

avec

$$\alpha_{n+1} = 0,9 \times \alpha_n \qquad \alpha_1 = 1.$$

On prend $\rho = - 0,13$.

La suite (S_n) est à convergence linéaire, $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0,9$, et d'après le théorème 3.5 iii) on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \rho . \frac{\alpha-1}{1-\rho} \tilde{\sim} 10^{-2}.$$

L'application du Δ^2-d'Aitken et du θ-algorithme donne les résultats suivants :

n	S_n	$\varepsilon_2^{(n)}$	$\theta_2^{(n)}$	$(\theta_2^{(n)}-S)/(\varepsilon_2^{(n)}-S)$
1	.1000000000D+01	.1241084165D+01	.1012217756D+01	.8155315478D+00
2	.8700000000D+00	.3676280488D+01	.7380560353D+00	.2007621666D+00
10	.2777171101D-02	-.5115274052D-04	.5444498092D-05	-.1064360376D+00
11	.7149007429D-03	-.9042255313D-05	.7724968172D-06	-.8543206303D-01
12	.1563333793D-03	-.1365478259D-05	.9437126615D-07	-.6911224365D-01
13	.2873573163D-04	-.1732448488D-06	.9739274433D-08	-.5621681971D-01
14	.4380174253D-05	-.1810032822D-07	.8303444230D-09	-.4587455062D-01
27	.5501154024D-24	.2084061226D-27	.2936586397D-30	.1409069158D-02
28	-.3662546749D-25	-.1331476120D-28	-.3356822364D-31	.2522630570D-02
29	.2631550908D-26	.9206806028D-30	.3225824077D-32	.3503738503D-02
30	-.2043800242D-27	-.6802973046D-31		
31	.1694284097D-28			
32	-.1484742673D-29			

Si on prend $\rho = 0{,}8$ et $\alpha = 0{,}5$; $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = -2$ et on a les résultats suivants.

1	.1000000000D+01	.3461538462D+01	.2111193203D+01	.6093002585D+00
2	.1800000000D+01	.2489361702D+01	.2378103707D+01	.9553066174D+00
13	.4437802039D+00	-.1089095443D-02	.2171159387D-02	-.1993543726D+01
14	.3551325079D+00	-.4346385591D-03	.8678792101D-03	-.1996763746D+01
15	.2841493574D+00	-.1736562106D-03	.3470336767D-03	-.1998394848D+01
16	.2273368290D+00	-.6942271241D-04	.1387897595D-03	-.1999196165D+01
24	.3814368947D-01	-.4547093641D-07	.9094173029D-07	-.1999996865D+01
25	.3051495613D-01	-.1818835429D-07	.3637668031D-07	-.1999998446D+01
26	.2441196672D-01	-.7275337609D-08	.1455066954D-07	-.1999999219D+01
27	.1952957410D-01	-.2910134229D-08	.5820267274D-08	-.1999999533D+01
28	.1562365957D-01	-.1164053539D-08	.2328106984D-08	-.1999999520D+01
29	.1249892778D-01	-.4656213572D-09	.9312425373D-09	-.1999999620D+01
30	.9999142267D-02	-.1862485616D-09	.3724971927D-09	-.2000000374D+01
31	.7999313852D-02	-.7449940784D-10		
32	.6399421073D-02			
33	.5119560862D-02			

Voyons maintenant le cas $\alpha = 1$ c'est à dire $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$. Posons $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n$, μ_n est la dérivée seconde de la suite (S_n), [11], $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$.

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1.

Soit (s_n) *une suite telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 0,1 \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$$

alors

i) $\lim_{n\to\infty} \beta_{n+1}/\beta_n = 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n = 1$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \alpha_{n+1}/\beta_{n+1}}{1 - \alpha_n/\beta_n} = 1$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \beta_{n+1}/\beta_n}{1 - \alpha_{n+1}/\alpha_n} = 1$$

iv) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{1 - \beta_n/\alpha_n} = \frac{1-\rho}{\rho}$$

v) *Si en plus* $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n}$ *existe et finie alors* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\dfrac{\mu_n}{\mu_n}} = 0.$

Démonstration.

i) $$\rightarrow \beta_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - \rho = (\rho+\alpha_n) \cdot \frac{1-\rho-\alpha_{n+1}}{1-\rho-\alpha_n} - \rho$$

$$= \frac{\alpha_n - \rho\alpha_{n+1} - \alpha_n\alpha_{n+1}}{1 - \rho - \alpha_n}$$

donc,

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \times \frac{1-\rho\,\dfrac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - \alpha_{n+2}}{1-\rho\,\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}} \times \frac{1-\rho-\alpha_n}{1-\rho-\alpha_{n+1}}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n+1}/\beta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$$

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1 - \rho - \alpha_n}{1 - \rho \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

ii) On a :

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1 - \rho - \alpha_n}{1 - \rho \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}}$$

donc

$$1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{- \rho \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1\right) + \alpha_n \left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)}{1 - \rho \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}}$$

$$= \mu_n \times \frac{- \rho - \alpha_n}{1 - \rho \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}}$$

d'où

$$\frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}} = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \quad \frac{- \rho - \alpha_{n+1}}{- \rho - \alpha_n} \quad \frac{1 - \rho \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}}{1 - \rho \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - \alpha_{n+2}}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \quad \frac{- \rho - \alpha_{n+1}}{- \rho - \alpha_n} \times \frac{1 - \rho \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}}{1 - \rho \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - \alpha_{n+2}}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1.$$

iii)

$$-)\ \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n+1} - \rho\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}}{\alpha_n - \rho\alpha_{n+1} - \alpha_n\alpha_{n+1}} \times \frac{1 - \rho - \alpha_n}{1 - \rho - \alpha_{n+1}}$$

$$(3.5)\quad 1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{-(1-\rho)\mu_n + \rho(1-\rho)\mu_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + \rho(\mu_n - \mu_{n+1})\alpha_{n+1} + (1-\rho)\alpha_{n+1}\left(\mu_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\mu_{n+1}\right) - \alpha_{n+1}^2\mu_{n+1}}{(1-\rho-\alpha_{n+1})\left(1 - \rho\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}\right)}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{-\mu_n}$$

$$= \frac{+(1-\rho) - \rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = 1.$$

iv)
$$\frac{\mu_n}{1 - \frac{\beta_n}{\alpha_n}} = \frac{\mu_n}{\mu_n \cdot \frac{\rho + \alpha_n}{1 - \rho - \alpha_n}} = \frac{1 - \rho - \alpha_n}{\rho + \alpha_n}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{1 - \frac{\beta_n}{\alpha_n}} = \frac{1-\rho}{\rho}$$

v) D'après iii) on a, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\mu_n} = 1$, et d'après (3.5),

$$\frac{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\mu_n} = \frac{(1-\rho) - \rho(1-\rho)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \rho\left(1 - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\right)\alpha_{n+1}\left(1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\right) - \alpha_{n+1}^2 \cdot \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}}{(1-\rho-\alpha_{n+1})\left(1 - \rho\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}\right)}$$

donc,

$$\frac{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\mu_n} - 1 = \frac{\rho\left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - 1\right)\alpha_{n+1} - (1-\rho)\alpha_{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - \alpha_{n+1}^2\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - \rho\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}^2}{(1-\rho-\alpha_{n+1})\left(1 - \rho\cdot\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}\right)}$$

d'où

$$\frac{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\mu_n} - 1 = \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{\rho\left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - 1\right) - (1-\rho)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - \alpha_{n+1}\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - \rho\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + 1 - \alpha_{n+1}}{(1-\rho-\alpha_{n+1})\left(1 - \rho\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}\right)}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}$ existe et finie.

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\mu_n} - 1\right)/\mu_n = 0.\square$$

Posons $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \delta_n$ (δ_n) étant une suite de limite nulle.

Théorème 3.6.

Soit (s_n) *une suite telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 0,1 \; ; \; \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$$

alors,

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - s}{\varepsilon_2^{(n)} - s} = \rho$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - s}{\varepsilon_2^{(n)} - s} = 0$$

et si en plus $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n}$ *existe et est finie alors :*

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - s}{\theta_2^{(n)} - s} = \rho$$

Démonstration.

i) Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-f_{n+1}}{1-f_n} = 1$.

$$U_n = \frac{\rho + \alpha_n}{\rho + \beta_n} \quad \text{donc} \quad \frac{1 - U_{n+1}}{1 - U_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \times \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}} \times \frac{\rho + \beta_n}{\rho + \beta_{n+1}}$$

et d'après ii) du lemme 3.1, $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}}{1 - \alpha_n/\beta_n} = 1$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - U_{n+1}}{1 - U_n} = 1 \; ; \quad f_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} = \rho + \beta_n,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_{n+1}}{1 - f_n} = 1,$$

d'après i) du théorème 3.4, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_2^{(n+1)} - s}{\varepsilon_2^{(n)} - s} = \rho.$

ii) Montrons que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-V_n}{1-U_n} = 0.$

$$U_n = \frac{\rho + \alpha_n}{\rho + \beta_n} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1 - \rho - \alpha_n}{1 - \rho - \alpha_{n+1}} \quad \frac{1 - \rho - \beta_{n+1}}{1 - \rho - \beta_n}$$

$$1 - U_n = \frac{\beta_n - \alpha_n}{\rho + \beta_n} \quad \text{et} \quad 1 - V_n = \frac{(1-\rho)\Delta\beta_n - (1-\rho)\Delta\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1}}{(1-\rho-\alpha_{n+1})(1-\rho-\beta_n)}$$

donc,

$$\frac{1-V_n}{1-U_n} = \frac{(1-\rho)\Delta\beta_n - (1-\rho)\Delta\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1}}{\alpha_n\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1\right)} \times \frac{\rho + \beta_n}{(1-\rho-\alpha_{n+1})(1-\rho-\beta_n)}$$

$$= \frac{(1-\rho)\left[\left(\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1\right)\frac{\beta_n}{\alpha_n} - \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1\right) + \beta_n\left[\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right]\right]}{\frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1} \times \frac{''}{''}$$

$$= \frac{\mu_n}{\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1\right)} \times \left\{ \left[\frac{\delta_n}{\mu_n} \frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1 \right] + \beta_n \left[1 - \frac{\delta_n}{\mu_n} \right] \right\} \times \frac{''}{''}$$

Or d'après le lemme 3.1, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mu_n}{\frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1} = \dfrac{\rho-1}{\rho}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\delta_n}{\mu_n} = 1$. D'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - V_n}{1 - U_n} = 0$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - s}{\varepsilon_2^{(n)} - s} = 0$$

(d'après le théorème 3.4, iii)).

iii) Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-V_{n+1}}{1-V_n} = 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-g_{n+1}}{1-g_n} = 1$

-) $\lim_{n\to\infty} g_n = \rho \neq 1$ donc $\lim_{n\to\infty} (1-g_{n+1})/(1-g_n) = 1$.

$$\frac{1-V_{n+1}}{1-V_n} = \frac{(1-\rho)\left[\frac{\Delta\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} - \frac{\Delta\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right] + \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}\ \beta_{n+1}-\beta_{n+2}}{(1-\rho)\left[\frac{\Delta\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\Delta\alpha_n}{\alpha_n}\right] + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\ \beta_n - \beta_{n+1}} \times I_n \qquad I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Or

$$\frac{\Delta\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\Delta\alpha_n}{\alpha_n} = -\mu_n\left[1 - \frac{\delta_n}{\mu_n}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right],$$

et

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\beta_n - \beta_{n+1} = -\beta_n\mu_n\left[-1 + \frac{\delta_n}{\mu_n}\right]$$

donc

$$\frac{1-V_{n+1}}{1-V_n} = \frac{+\mu_{n+1}}{+\mu_n} \times \frac{(1-\rho)\left[1 - \frac{\delta_{n+1}}{\mu_{n+1}}\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right] + \beta_{n+1}\left[-1 + \frac{\delta_{n+1}}{\mu_{n+1}}\right]}{(1-\rho)\left[1 - \frac{\delta_n}{\mu_n}\cdot\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right] + \beta_n\left[-1 + \frac{\delta_n}{\mu_n}\right]} \times I_n \qquad I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$= \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{1-\rho-\beta_{n+1} + \frac{\delta_{n+1}}{\mu_{n+1}}\left[\beta_{n+1} - (1-\rho)\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right]}{1-\rho-\beta_n + \frac{\delta_n}{\mu_n}\left[\beta_n - (1-\rho)\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right]} \times I_n \qquad I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\mu_n} = 1$ (iii) lemme 3.1) on pose alors, $\frac{\delta_n}{\mu_n} = 1 + a_n$, on obtient

$$\frac{1-V_{n+1}}{1-V_n} = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{(1-\rho)\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right) + a_{n+1}\left(\beta_{n+1} - (1-\rho)\cdot\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)}{(1-\rho)\left(1 - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) + a_n\left(\beta_n - (1-\rho)\cdot\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)} \times I_n \qquad I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$= \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{1 - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}}{1 - \frac{\beta_n}{\alpha_n}} \times \frac{1 - \rho + a_{n+1}\left(\beta_{n+1} - (1-\rho)\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)/\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)}{1 - \rho + a_n\left(\beta_n - (1-\rho)\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)/\left(1 - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)}$$

-) ii) du lemme 3.1 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}}{1 - \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}} = 1.$

-) $$\frac{a_n}{1 - \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}} = \frac{\dfrac{\delta_n}{\mu_n} - 1}{1 - \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}} = \frac{\dfrac{\delta_n}{\mu_n} - 1}{\mu_n} \quad \frac{1 - \rho - \alpha_n}{\rho + \alpha_n}$$

Or d'après v) du lemme 3.1 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\delta_n}{\mu_n} - 1}{\mu_n} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1 - \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}} = 0$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - v_{n+1}}{1 - v_n} = 1,$$

et d'après le théorème 3.4, i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - s}{\theta_2^{(n)} - s} = \rho \ .\square$$

Remarque 3.5.

Le théorème 3.6, moyennant les hypothèses sous lesquelles il est énoncé, nous montre que les suites $(\varepsilon_2^{(n)})$ et $(\theta_2^{(n)})$ sont à convergence linéaire et que la suite $(\theta_2^{(n)})$ converge plus vite que la suite $(\varepsilon_2^{(n)})$ qui converge elle-même plus vite que la suite (S_n) (qui est à convergence linéaire).

De plus, puisque $\alpha = 1$, l'ε_2 sur-accélère la convergence de (S_n) (voir Lembarki [12, p. 142]) et l'application du θ_2 devient alors plus intéressante.

Exemple numérique.

On considère la suite (S_n) définie par : $S_1 = 1$ et $S_{n+1} = S_n(\frac{1}{2} + \alpha_n)$ avec $\alpha_n = \frac{-1}{n+1}$ on a alors, $\rho = \frac{1}{2}$; $\alpha = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1$ les conditions du théorème 3.6 sont satisfaites et on a les résultats suivants :

n	S_n	$\varepsilon_2^{(n)}$	$\theta_2^{(n)}$
2	-.60000000000D+00	.10734829810D-01	.5518285325eD-03
3	.25000000000D-01	-.25207752330D-02	-.18943701550D-03
4	-.31000000000D-01	.54166666670D-03	.28981138320D-04
5	.27300000000D-01	-.10845245330D-03	-.47705328400D-05
6	-.72800000000D-02	.20496174360D-04	.78128823270D-06
7	.17821000000D-02	-.35894824710D-05	-.11807124820D-06
8	-.35780000000D-03	.63717724170D-06	.17853443210D-07
9	.82980000000D-04	-.10816940580D-06	-.25389976600D-08
10	-.16796000000D-04	.17145273720D-07	.38220140330D-09

Sur cet exemple le gain obtenu par le θ_2-algorithme par rapport au Δ^2-d'Aitken est faible (car le Δ^2-d'Aitken sur accélère la convergence de (S_n)).

b - Cas de la convergence logarithmique.

Généralisons le théorème 3.5 au cas logarithmique. Soit $(S_n) \in$ Log, i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$. On pose

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + \alpha_n, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Nous avons vu dans la remarque 3.2 que si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha$ existe, alors $|\alpha| = 1$, d'où les deux cas à distinguer :

1er Cas. $\alpha = -1$.

Théorème 3.7.

Soit (S_n) *une suite telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = -1,$$

alors :

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - S}{\theta_2^{(n)} - S} = 1$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1$$

Démonstration.

i) On a,

$$f_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \quad \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

donc $\lim_{n\to\infty} f_n = -1$. $e_{n+1}/e_n = U_n f_n$, donc $\lim_{n\to\infty} U_n = -1$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} (1-U_{n+1})/(1-U_n) = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} (1-f_{n+1})/(1-f_n) = 1.$$

D'après le théorème 3.4 i) on a, $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_2^{(n+1)}-S)/(\varepsilon_2^{(n)}-S) = 1$.

ii)

$$g_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \times \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} g_n = -1.$$

$\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = g_n V_n$ donc $\lim_{n\to\infty} V_n = -1$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - g_{n+1}}{1 - g_n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{1 - V_{n+1}}{1 - V_n} = 1.$$

Donc d'après le théorème 3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - S}{\theta_2^{(n)} - S} = 1.$$

iii) D'après i) et ii) on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 - V_n}{1 - g_n}}{\dfrac{1 - U_n}{1 - f_n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc, d'après le théorème 3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1.$$

2eme Cas. $\alpha = 1$.

$$f_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \quad ; \quad \frac{e_{n+1}}{e_n} = U_n f_n$$

donc

$$U_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} .$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$. Posons alors $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + \mu_n$. On sait d'après le lemme 2,4, chapitre 2) que si $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \mu$ existe alors $|\mu| = 1$.

Prenons le cas $\mu = 1$, et posons $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1 + \theta_n$, $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\lim_{n\to\infty} f_n = 1$, soit $f_n = 1 + \beta_n$.

Soit $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$ et posons $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \delta_n$, avec $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Théorème 3.8.

Soit (S_n) *une suite de* Log *telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1.$$

Alors, si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = K_1 \neq 0, -1$ *on a :*

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1.$$

Si en plus $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\theta_n} = K_2 \neq 0, -1$ *et* $K_2 \neq \frac{1}{1 + K_1 + K_1^2}$ *alors*

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - S}{\theta_2^{(n)} - S} = 1, \text{ si } K_2 \neq 1.$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \frac{(1-K_2)(1+K_1)}{1-K_2(1+K_1+K_1^2)} .$$

L'ensemble des suites vérifiant les hypothèses de ce théorème n'est pas vide, car la suite $(S_n = \frac{1}{n})$ lui appartient.

Les suites de LOG (Kowalewski [11, p. 27]) pour lesquelles $K_1, K_2 \neq 0, -1$ vérifient les hypothèses du théorème.

On remarque que si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\mu_n} = K_1 \neq 0,-1$ alors, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$

Démonstration du théorème 3.8.

i) Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - U_{n+1}}{1 - U_n} = 1$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_{n+1}}{1 - f_n} = 1.$$

-) $U_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ donc

$$\frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}}$$

$$= \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \times \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - U_{n+1}}{1 - U_n} = 1.$$

-) $f_n = \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} = (1+\alpha_n) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, donc

$$\frac{1-f_{n+1}}{1-f_n} = \frac{(1 - \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}) - \alpha_{n+2}}{(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}) - \alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{-\mu_{n+1} - \alpha_{n+2}}{-\mu_n - \alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{+\mu_{n+1}}{+\mu_n} \quad \frac{1 + \frac{\alpha_{n+2}}{\mu_{n+1}}}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n} = K_1$ et $K_1 \neq -1$ donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_{n+1}}{1 - f_n} = 1$ d'où, d'après le théorème 3.4,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1.$$

ii) Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - V_{n+1}}{1 - V_n} = 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - g_{n+1}}{1 - g_n} = 1.$

$$g_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \quad \frac{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}}$$

$$= (1 + \alpha_n) \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \times \frac{+ \beta_n}{+\beta_{n+1}}$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = g_n V_n \text{ donc } V_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$$

-) $$\frac{1 - V_{n+1}}{1 - V_n} = \frac{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \cdot \frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \cdot \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - \frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}}}{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}} \times \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}}}{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}}$$

$$= \frac{(\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - 1) - (\frac{\beta_{n+2}}{\beta_{n+1}} - 1)}{(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1) - (\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1)} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

$$= \frac{\mu_{n+1} - \delta_{n+1}}{\mu_n - \delta_n} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

⇒

$$\frac{1 - V_{n+1}}{1 - V_n} = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{1 - \frac{\delta_{n+1}}{\mu_{n+1}}}{1 - \frac{\delta_n}{\mu_n}} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}} \times \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

Or $\frac{\delta_n}{\mu_n} = \frac{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - 1}{\mu_n}$ et $\beta_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(1 + \alpha_n) - 1 = \mu_n + \alpha_{n+1}$

$$= \frac{\frac{\mu_{n+1} + \alpha_{n+2}}{\mu_n + \alpha_{n+1}} - 1}{\mu_n}$$

$$= \frac{\mu_{n+1} - \mu_n + \alpha_{n+1}(\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} - 1)}{\mu_n(\mu_n + \alpha_{n+1})}$$

$$= \frac{(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - 1)/\mu_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}$$

donc

$$\frac{\delta_n}{\mu_n} = \frac{\frac{\theta_n}{\mu_n} + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}$$

d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\mu_n} = \frac{1/K_2 + K_1}{1 + K_1} \neq 1$ car $K_2 \neq 1$, et d'après *

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - V_{n+1}}{1 - V_n} = 1$$

-) $1 - g_n = 1 - (1+\alpha_n)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}$

$$= \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}[\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}]$$

$$= \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}[\delta_n - \mu_n - \alpha_{n+1}]$$

$$= \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \cdot \mu_n [\frac{\delta_n}{\mu_n} - 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}]$$

donc

$$\frac{1 - g_{n+1}}{1 - g_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_{n+2}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \times \frac{\frac{\delta_{n+1}}{\mu_{n+1}} - 1 - \frac{\alpha_{n+2}}{\mu_{n+1}}}{\frac{\delta_n}{\mu_n} - 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}}$$

Or $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\mu_{n+1}} - 1 - \frac{\alpha_{n+2}}{\mu_{n+1}} = \frac{1/K_2+K_1}{1 + K_1} - 1 - K_1$

$$= \frac{1 - K_2(1+K_1+K_1^2)}{K_2(1+K_1)} \neq 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - g_{n+1}}{1 - g_n} = 1$$

d'où, d'après le théorème 3.4, $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n+1)} - s}{\theta_2^{(n)} - s} = 1.$

iii) -)

$$\frac{1 - v_n}{1 - g_n} = \frac{1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{1 - (1+\alpha_n)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}{\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}} \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$$

$$= \frac{\mu_n - \delta_n}{\delta_n - \mu_n - \alpha_{n+1}} \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$$

$$= \frac{1 - \frac{\delta_n}{\mu_n}}{\frac{\delta_n}{\mu_n} - 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}} \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$$

$$= - \frac{\frac{\delta_n}{\mu_n} - 1}{\frac{\delta_n}{\mu_n} - 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}} \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \times \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} .$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-V_n}{1-g_n} = -\left[\frac{1/K_2 + K_1}{1 + K_1} - 1\right] / \left[\frac{1-K_2(1+K_1+K_1^2)}{K_2(1 + K_1)}\right]$$

$$= -[1/K_2 - 1]/[K_2(1-K_2(1+K_1+K_1^2))]$$

$$= \frac{K_2 - 1}{(1-K_2(1+K_1+K_1^2))}$$

et

$$\frac{1-U_n}{1-f_n} = \frac{1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}}{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}} = \frac{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1}{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \alpha_{n+1}} \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$$

$$= \frac{\mu_n}{-\mu_n - \alpha_{n+1}} \quad \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\mu_n}} \times \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$$

donc, $\lim_{n\to\infty} \frac{1-U_n}{1-f_n} = -\frac{1}{1 + K_1}$ d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-V_n)/(1-g_n)}{(1-U_n)/(1-f_u)} = \frac{(1-K_2)(1+K_1)}{[1-K_2(1+K_1+K_1^2)]}$$

Remarque 3.6.

Sous les hypothèses du théorème 3.8, on a, d'après iii) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 1 \iff K_1K_2 = -1$$

donc le θ_2 et le Δ^2-d'Aitken se comportent de la même façon pour les suites (S_n) telles que $K_1K_2 = -1$

-) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{\varepsilon_2^{(n)} - S} = 0 \iff K_2 = 1$$

$(\theta_2^{(n)})$ converge plus vite que $(\varepsilon_2^{(n)})$ pour les suites (S_n) telles que $K_2 = 1$. D'après i) et ii) les suites $(\varepsilon_2^{(n)})$ et $(\theta_2^{(n)})$ sont à convergence logarithmique.

III - AMÉLIORATION DE PROCÉDÉS D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE.

Le but de ce paragraphe est de construire à partir d'un procédé T de facteur d'accélération f_n un nouveau procédé G de facteur d'accélération $g_n = \gamma_n f_n$, où (γ_n) est une suite auxiliaire appelée suite des paramètres correcteurs.

Nous recherchons des conditions sur (γ_n) pour que :

- G accélère la convergence mieux que T.
- G accélère des suites que T n'accélère pas.

Avant de passer au cas général examinons un cas particulier.

1 - CAS PARTICULIER.

Plaçons-nous dans le cas de la convergence logarithmique.
Posons LOGL = $\{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -1\}$.

Prenons comme procédé T le Δ^2-d'Aitken ; on a $f_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = U_n f_n \text{ où } U_n = \frac{1 - \frac{e_{n+1}}{e_n}}{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}.$$

Or $(S_n) \in \text{LOGL} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = -1 \iff \lim_{n\to\infty} f_n = -1$.

Soit $(S_n) \in \text{LOGL}$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1-U_n}{1-f_n} \cdot f_n = -1$. D'après le théorème 3.2 le Δ^2-d'Aitken n'accélère donc aucune suite de LOGL.

Soit $g_n = \alpha_n f_n$ tel que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = -1$; on a $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$, ce qui est une

condition nécessaire pour que G accélère la convergence des suites de LOGL.

Or, on sait ([12, lemme 4.2.1.5, p. 120]) que si $\lim_{n\to\infty} \frac{1+f_{n+1}}{1+f_n} = \beta$ existe, alors $\beta = -1$. Prenons donc

$$\gamma_n = \frac{1 + f_{n+1}}{1 + f_n} ;$$

on obtient :

$$G_n = \frac{S_{n+1} - f_n \frac{1+f_{n+1}}{1 + f_n} \cdot S_n}{1 - f_n \cdot \frac{1+f_{n+1}}{1+f_n}}$$

ou encore :

$$G_n = \frac{S_{n+2} - f_n f_{n+1} \cdot S_n}{1 - f_n f_{n+1}} \qquad (3.6)$$

qui n'est autre que le T_{+2} [8].

Nous savons en outre que le procédé T_{+2} accélère des suites de LOGL, comme on peut le voir dans ([12, p. 122]).

Le choix de γ_n est déterminant non seulement pour accélérer des suites de LOGL mais également pour des suites d'une autre nature comme on peut le constater sur l'exemple suivant :

Exemple.

On a : [8]

$$\pi = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}$$

$$= 4 + 0 - \frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{5} + 0 - \frac{4}{7} + 0 + \frac{4}{9} + 0.$$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ où $a_i = 4 \frac{\sin(\frac{i\pi}{2})}{i}$.

On a :

$$f_n = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

$$= - \frac{n+1}{n+2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

f_n n'existe donc pas pour tout n. Cependant,

$$f_n f_{n+1} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}$$

$$= \frac{n+1}{n+3} \times \frac{\sin((n+3)\pi/2)}{\sin((n+1)\pi/2)}$$

$$= - \frac{n+1}{n+3}$$

donc $f_n f_{n+1}$ existe pour tout n.

Exemple numérique.

n	S_n	$(1 - e_{n+1}/e_n)/(1-f_n)$	$\varepsilon_2^{(n)}$
2	.4000000000000D+01	-.1643525354320-14	.2666666666670+01
3	.2666666666670+01	.5345492486D-14	.2666666666670+01
4	.2666666666670+01	-.8215650382D-14	.3466666666670+01
5	.3466666666670+01	.8196703372D-14	.3466666666670+01
6	.3466666666670+01	-.1265654246D-13	.2895238095D+01
7	.2895238095D+01	.1251849787D-13	.2895238095D+01
8	.2895238095D+01	-.1876516695D-13	.3339682540D+01
9	.3339682540D+01	.1566299943D-13	.3339682540D+01
10	.3339682540D+01	-.1598721150-13	.2976046176D+01

$(1-e_{n+2}/e_n)/(1-f_nf_{n+1})$	$T_{+2}^{(n)}$
.1052785611D+01	.3166666667D+01
.9070203920D+00	.3037403897D+01
.1025407507D+01	.3133333333D+01
.9111114341D+00	.3029304030D+01
.1014797541D+01	.3145238095D+01
.9020422E+00	.3117403176D+01
.1006642662D+01	.3139682540D+01
.9864813479D+00	.3143878440+01
.1005768614D+01	.3142712647D+01

On remarque que $\varepsilon_2^{(n)} = S_{n+1}$. Par contre le rapport $\dfrac{1 - \dfrac{e_{n+2}}{e_n}}{1 - f_n f_{n+1}}$ converge vers 1 ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que T_{+2} accélère la convergence.

2 - CAS GENERAL ET APPLICATIONS.

Soient T et G deux transformations définies par :

$$T_n = \frac{S_{n+1} - f_n S_n}{1 - f_n}, \quad G_n = \frac{S_{n+1} - g_n S_n}{1 - g_n}$$

où $g_n = \gamma_n f_n$.

On reprend les notations :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = u_n f_n = V_n g_n,$$

donc,

$$U_n = \gamma_n V_n.$$

On a :

$$\frac{G_n - S}{T_n - S} = \frac{e_{n+1} - g_n e_n}{e_{n+1} - f_n e_n} \times \frac{1-f_n}{1-g_n}$$

$$= \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - g_n}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - f_n} \times \frac{1-f_n}{1-g_n}$$

Or, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = U_n f_n = V_n g_n$

et donc,

$$\frac{G_n - S}{T_n - S} = \frac{1-V_n}{1-U_n} \times \frac{g_n}{f_n} \times \frac{1-f_n}{1-g_n}$$

$$= \frac{\gamma_n - U_n}{1 - U_n} \times \frac{1 - f_n}{1 - \gamma_n f_n}$$

$$= \frac{1 - f_n}{1-\gamma_n f_n} \times \left[1 - \frac{1-\gamma_n}{1-U_n}\right].$$

D'où le théorème :

Théorème 3.9.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n}{1-\gamma_n f_n} = b$ *existe, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{T_n - S} = b. \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1-\gamma_n}{1-U_n}\right).$$

Remarque 3.7.

Cas de la convergence linéaire.

Soit $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho \neq 1.$

On suppose que T et G accélèrent la convergence de (S_n) et que $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \rho$, donc $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 1$ et b = 1. Le théorème 3.9 montre que si, en plus (γ_n) converge vers 1 de la même façon que (U_n), i.e :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \gamma_n}{1 - U_n} = 1,$$

alors (G_n), converge plus vite que (T_n).

Posons $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho + \alpha_n$, $f_n = \rho + \beta_n$ et $\gamma_n = 1 + \gamma'_n$ où (α_n) ; (β_n) et (γ'_n) sont 3 suites de limites nulles.

Proposition 3.1.

Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - f_n}{1 - \gamma_n f_n} = b$ *existe et finie, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{T_n - S} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} = -\rho + \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} .$$

Démonstration.

On va appliquer le théorème 3.9. On a :

$$e_{n+1}/e_n = U_n f_n = V_n g_n = V_n \gamma_n f_n \text{ donc } U_n = \gamma_n V_n .$$

* $$\frac{1 - U_n}{1 - \gamma_n} = \frac{1 - \gamma_n V_n}{1 - \gamma_n} = 1 + \gamma_n \cdot \frac{1 - V_n}{1 - \gamma_n} .$$

** $$\frac{1 - V_n}{1 - \gamma_n} = \frac{1 - \dfrac{\rho+\alpha_n}{f_n\gamma_n}}{1 - \gamma_n} = \frac{f_n\gamma_n - \rho - \alpha_n}{1 - \gamma_n} \times \frac{1}{f_n\gamma_n} .$$

$$\frac{f_n\gamma_n - \rho - \alpha_n}{1 - \gamma_n} = \frac{(\rho+\beta_n)(1+\gamma'_n) - \rho - \alpha_n}{-\gamma'_n}$$

$$= \frac{\rho\gamma'_n + \beta_n + \beta_n\gamma'_n - \alpha_n}{-\gamma'_n} = -\rho + \beta_n + \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} - \frac{\beta_n}{\gamma'_n} .$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n\gamma_n - \rho - \alpha_n}{1 - \gamma_n} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} = -\rho + \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} .$$

Or

$\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $f_n\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$, donc d'après * et **

On a, :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - U_n}{1 - \gamma_n} = 1 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} = -\rho + \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n}$$

et d'après le théorème 3.9,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{T_n - S} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} = -\rho + \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} .$$

Choix particulier de γ'_n et donc de γ_n.

Soit

$$(3.7) \qquad \gamma'_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{2f_n - f_n f_{n+1}^{-1}} \times (f_n - 1), \quad \gamma_n = 1 + \gamma'_n.$$

On suppose que $\rho \neq 1$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \alpha$ existe, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta$ existe et $\alpha = \beta$.

Montrons que les hypothèses de la proposition 3.1 sont vérifiées.

-) $\lim_{n\to\infty} f_n = \rho$ et $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 1$ donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - f_n}{1-\gamma_n f_n} = b = 1.$

-) $f_n = \rho+\beta_n$ donc $\gamma'_n = \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{2\beta_n - \rho(\beta_n+\beta_{n+1}) - (1-\rho)^2} \times (\beta_n+\rho-1)$

$$\frac{\beta_n}{\gamma'_n} = \frac{2\beta_n - \rho(\beta_{n+1}+\beta_n) - (1-\rho)^2}{\beta_{n+1}/\beta_n - 1} \times \frac{1}{\beta_n+\rho-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} = \frac{-(1-\rho)^2}{\beta - 1} \times \frac{1}{\rho-1} = \frac{1-\rho}{\beta-1}$$

et

$$\frac{\alpha_n}{\gamma'_n} = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \cdot \frac{\beta_n}{\gamma'_n}, \text{ or } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1-\rho}{1-\alpha\rho} = \frac{1-\rho}{1-\beta\rho}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} = \frac{(1-\rho)^2}{(\beta-1)(1-\beta\rho)},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} = \frac{-\rho(1-\rho)}{1 - \beta\rho},$$

-) Si $\beta = 1$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\gamma'_n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma'_n} = -\rho$, et d'après la proposition 3.1 on a,

Si $\rho \neq 1$ et si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$, (i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta = 1$) alors,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n - S}{T_n - S} = 0.$$

Exemple numérique.

Soit la suite (S_n) définie par :

$$S_{n+1} = S_n \times (\rho + \alpha_n) \qquad S_1 = 1$$

avec

$$\alpha_n = + \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\alpha = 1$$

Pour $\rho = -0,83$ on a les résultats suivants : $S = 0$

n	S_n	$\varepsilon_2^{(n)}$	G_n
1	.1000000000D+01	.3015516202D-01	.8604277289D-03
2	-.3300000000D+00	-.5566820958D-02	-.5736854147D-03
3	.1639000000D+00	.1892117684D-02	.1923839407D-03
4	-.9506200000D-01	-.7454726452D-03	-.7276556122D-04
5	.5988906000D-01	.3399378864D-03	.3085553173D-04
6	-.3972640580D-01	-.1705165317D-03	-.1430515290D-04
7	.2729771873D-01	.9163762867D-04	.7113604166D-05
8	-.1924489171D-01	-.5188796058D-04	-.3736788972D-05
9	.1383493882D-01	.3060929215D-04	.2052444048D-05
10	-.1009950534D-01	-.1866277377D-04	-.1165513587D-05
11	.7464452580D-02	.1169228127D-04	.6872424379D-06
12	-.5573457926D-02	-.7493874273D-05	
13	.4197242546D-02		
14	-.3183908274D-02		

G est le procédé de facteur d'accélération $g_n = \gamma_n f_n$ où γ_n est définie par (3.7).

Sur cet exemple (G_n) converge plus vite que $(\varepsilon_2^{(n)})$.

IV - MODIFICATION DU θ_2-ALGORITHME.

On a,

$$\theta_2^{(n)} = \frac{S_{n+2} - f_n S_{n+1}}{1 - f_n}$$

avec

$$f_n = \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}} \quad \frac{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+2}}{\Delta S_{n+1}}} .$$

Dans le cas de la convergence logarithmique, on sait qu'une condition nécessaire pour que le θ_2 accélère la convergence est que $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$. Cette condition n'est pas toujours satisfaite. En effet, pour toute suite $(S_n) \in$ LOGL on a $\lim_{n\to\infty} f_n = -1$. Cependant un bon choix de γ_n nous permettra de construire un nouveau facteur d'accélération $g_n = \gamma_n f_n$.

Si $(S_n) \in$ LOGL et si $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = -1$ alors $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$. Par analogie avec l'expression (3.6) de T_{+2}, on prend :

$$\gamma_n = f_{n+1} \text{ et } G_n = \frac{S_{n+3} - g_n S_{n+1}}{1 - g_n}$$

avec $g_n = f_n f_{n+1}$

$$= \frac{\Delta S_{n+3}}{\Delta S_{n+1}} \quad \frac{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+3}}{\Delta S_{n+2}}}$$

G_n sera désigné pour toute la suite par $\theta_{2,2}^{(n)}$. Le calcul de $\theta_{2,2}^{(n)}$ demande la connaissance de 5 termes de la suite (S_n), contre 4 pour $\theta_2^{(n)}$.

Etude du procédé $\theta_{2,2}$.

Rappelons que,

$$\theta_{2,2}^{(n)} = \frac{S_{n+3} - g_n S_{n+1}}{1 - g_n}$$

où,

$$g_n = \frac{\Delta S_{n+3}}{\Delta S_{n+1}} \times \frac{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \frac{\Delta S_{n+3}}{\Delta S_{n+2}}}$$

Le procédé $\theta_{2,2}$ accélère évidemment les suites à convergence linéaire telles que $\rho \neq -1$, car si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \rho$, $|\rho| < 1$ on a $\lim_{n\to\infty} g_n = \rho^2$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = \frac{1-\rho^2}{1-\rho^2} = 1.$$

Si $\rho = -1$, on sait que le Δ^2-d'Aitken et le θ_2 accélèrent la convergence. par contre pour $\theta_{2,2}$ on a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = \frac{1-\rho^2}{1-\rho^2} = \frac{0}{0}.$$

Voyons donc si le $\theta_{2,2}$ accélère une sous-classe des suites telles que $\rho = -1$.

Posons $\frac{e_{n+1}}{e_n} = -1 + \alpha_n$; $\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} = -1+\beta_n$.

Théorème 3.10.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = -1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$ et si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ *existe alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{2,2}^{(n)} - s}{s_{n+1} - s} = 0.$$

Démonstration.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = 1$ et appliquons le théorème 3.1

$$\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}} = (-1 + \alpha_{n+1})(-1 + \alpha_{n+2}) \; ; \; g_n = (-1+\alpha_{n+1})(-1+\alpha_{n+2}) \times \frac{2-\alpha_{n+2}}{2-\alpha_n} \times \frac{2-\beta_n}{2-\beta_{n+2}}.$$

$$\frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = \frac{1 - (-1 + \alpha_{n+1})(-1 + \alpha_{n+2})}{1 - (-1 + \alpha_{n+1})(-1+\alpha_{n+2}) \; \frac{2 - \alpha_{n+2}}{2 - \alpha_n} \times \frac{2 - \beta_n}{2 - \beta_{n+2}}}$$

d'où

$$\frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \iff \frac{1 - \frac{2-\alpha_{n+2}}{2-\alpha_n}\,\frac{2-\beta_n}{2-\beta_{n+2}}}{1 - (-1+\alpha_{n+1})(-1+\alpha_{n+2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\iff \frac{2(\alpha_{n+2}-\alpha_n) + 2(\beta_{n+2}-\beta_n) + \alpha_n\beta_{n+2} - \alpha_{n+2}\beta_n}{\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\ast \qquad \iff \frac{2\left(\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_n} - 1\right) + 2.\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(\frac{\beta_{n+2}}{\beta_n} - 1\right) + \beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_n}.\beta_n}{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} + \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.\alpha_{n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1$, donc $\ast$ est vérifiée et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = 1,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{2,2}^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = 0$$

A - CAS DE LA CONVERGENCE LOGARITHMIQUE.

1°) - Supposons dans un premier cas que $(S_n) \in$ LOGSF.

$$\text{LOGSF} = \{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1\}$$

Posons $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 + \alpha_n$ et $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 + \beta_n$. On remarque que $(S_n) \in$ LOGSF si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$.

Théorème 3.11.

Si $(S_n) \in$ LOGSF *et si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = 0$, *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{2,2}^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = 0$.

Démonstration.

Soit $(S_n) \in$ LOGSF telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_2^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = 0$.

D'après le théorème 3.1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{1 - f_n} = 0.$$

D'autre part,

$$\frac{\theta_{2,2}^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} = \frac{\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}} - g_n}{1 - g_n}$$

$$= 1 - \frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = 1.$$

$$\frac{1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1 - g_n} = \frac{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \times \frac{e_{n+3}}{e_{n+2}}}{1 - f_n \times f_{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} + \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} (1 - \frac{e_{n+3}}{e_{n+2}})}{1 - f_n + f_n (1 - f_{n+1})}$$

$$= \frac{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{1 - f_n} \times \frac{1 + \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}}{1 + f_n \times \frac{1 - f_{n+1}}{1 - f_n}}$$

-) $\frac{1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{1 - f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, car θ_2 accélère la convergence de (S_n).

-) $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$

-) $\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, car $(S_n) \in$ LOGSF.

-

$$-)\ \frac{1-f_{n+1}}{1-f_n} = \frac{1-f_{n+1}}{1-\dfrac{e_{n+3}}{e_{n+2}}} \times \frac{1-\dfrac{e_{n+3}}{e_{n+2}}}{1-\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}}} \times \frac{1-\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{1-f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\dfrac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1-g_n} = 1$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\theta_{2,2}^{(n)} - S}{S_{n+1}-S} = 0$. □

Remarque 3.8.

1 - Le théorème 3.11 montre que toutes les suites de LOGSF qui sont accélérables par le θ_2-algorithme le sont aussi par le procédé $\theta_{2,2}$. En particulier les suites de point fixe.

2 - SUITES DE POINT FIXE.

Soit $A_F^{(p)}(S)$ l'ensemble des suites (S_n) telles que :

$$S_{n+1} = F(S_n)$$

où F est une fonction vérifiant :

- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un voisinage V de S où S est le seul point fixe de F.
- F est analytique dans V.
- $F'(S) = 1$.
- $F^{(i)}(S) = 0 \quad 2 \le i \le p-1$
  $F^{(p)}(S) = C \neq 0$
  C > 0 et impair ne sont pas réalisées simultanément.

Kowalewski dans [11, propriété 17, p. 47] a montré que si $(S_n) \in A_F^{(p)}(S)$ alors $(S_n) \in L_{1/p}$ où

$$L_{1/p} = \{(S_n) \in \text{Log telle que } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = p\} \subset \text{LOGSF}.$$

Sadok dans [16] a montré que le θ_2 accélère la convergence de toute suite de $A_F^{(p)}(S)$, et d'après le théorème 3.11 le procédé $\theta_{2,2}$ les accélère aussi.

Noyau.

On a

$$\theta_2^{(n)} = \frac{S_{n+2} - f_n S_{n+1}}{1 - f_n}$$

et

$$\theta_{2,2}^{(n)} = \frac{S_{n+3} - g_n S_{n+1}}{1 - g_n}$$

Soit $N(\theta_2) = \{(S_n)$ convergente telle que $\theta_2^{(n)} = S$ à partir d'un certain rang$\}$.

$N(\theta_2)$ est le noyau de θ_2 et soit $N(\theta_{2,2})$ le noyau de $\theta_{2,2}$.

Nous remarquons que :

$\theta_2^{(n)} = S \quad \forall n \geq N$ si et seulement si $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} = f_n \quad \forall n \geq N$, et de même

$\theta_{2,2}^{(n)} = S \quad \forall n \geq N'$ si et seulement si $\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}} = g_n \quad \forall n \geq N'$.

Théorème 3.12.

$$N(\theta_2) \subset N(\theta_{2,2}).$$

Démonstration.

Soit (S_n) une suite de $N(\theta_2)$, il existe N tel que $\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} = f_n \quad \forall n \geq N$, or $g_n = f_n.f_{n+1}$ donc

$$\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}} = f_n.f_{n+1} = g_n \quad \forall n \geq N$$

d'où $\theta_{2,2}^{(n)} = S \quad \forall n \geq N$ i.e. $(S_n) \in N(\theta_{2,2})$.□

Exemples numériques.

Nous commençons dans un premier temps par donner quelques exemples de suites à convergence logarithmique de LOGSF qui sont accélérables par le procédé θ_2 et donc par $\theta_{2,2}$ (théorème 3.11).

Exemple 1.

Soit la suite (S_n) définie par :

$$S_{n+1} = S_n \times \frac{1 - S_n}{1 + S_n} \qquad (S_n) \text{ est convergente de limite } S = 0$$

$$S_1 = 0.8$$

(S_n) est une suite de point fixe, $S_{n+1} = F(S_n)$ où

$$F(x) = x. \frac{1-x}{1+x} .$$

$F'(0) = 1$ et $F''(0) = -4$ et d'après la remarque 3.8 précédente $(S_n) \in A_F^2(S)$, donc θ_2 et $\theta_{2,2}$ accélèrent la convergence de la suite (S_n).

Exemple 1.

n	S_n	$\frac{1-e_{n+2}/e_{n+1}}{1-f_n}$	$\theta_2^{(n)}$	$\frac{1-e_{n+3}/e_{n+1}}{1-g_n}$	$\theta_{2,2}^{(n)}$
1	.8000000000D+00	-.1171662125D+00	.9930366334D-01	-.2586504865D+00	.1118800432D+00
2	.8888888889D-01	.1054264709D+01	-.4036014609D-02	.1046031159D+01	-.3423632673D-02
3	.7437641723D-01	.1043806450D+01	-.2807057167D-02	.1038114011D+01	-.2442293500D-02
4	.6407862709D-01	.1036823896D+01	-.2075432349D-02	.1032630151D+01	-.1839068566D-02
5	.5636101987D-01	.1031810818D+01	-.1601574626D-02	.1028582108D+01	-.1439019238D-02
6	.5034685520D-01	.1028027383D+01	-.1275813444D-02	.1025459525D+01	-.1158923907D-02
7	.4552024803D-01	.1025065612D+01	-.1041638941D-02		
8	.4155649318D-01				
9	.3824041357D-01				
10	.3542347597D-01				

On remarque que les rapports $\frac{1-\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}}{1-f_n}$ et $\frac{1-\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}}{1-g_n}$ tendent vers 1, qui est une condition nécessaire et suffisante d'accélération de la convergence.

D'autre part, les procédés θ_2 et $\theta_{2,2}$ se comportent de la même façon. Il ne faut pas oublier le fait que $\theta_{2,2}$ demande 5 termes de la suite (S_n), alors que θ_2 en demande 4.

Exemple 2.

$$S_{n+1} = \frac{S_n}{1 + S_n^2} \qquad S_{n+1} = F(S_n) \text{ où } F(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$S_1 = 0.25$ et $S = 0$ $\qquad$ $F'(0) = 1$, $F''(0) = 0$ et $F^{(''')}(0) = -10 \neq 0$

donc $(S_n) \in A_F^{(3)}(S)$ et θ_2, $\theta_{2,2}$ accélèrent la convergence de (S_n).

n	S_n	$\frac{1-e_{n+2}/e_{n+1}}{1-f_n}$	$\theta_2^{(n)}$	$\frac{1-e_{n+3}/e_{n+1}}{1-g_n}$	$\theta_{2,2}^{(n)}$
1	.2500000000D+00	.1044048570D+01	-.1036436948D-01	.1040479656D+01	-.9524624936D-02
2	.2352941176D+00	.1038758523D+01	-.8641244417D-02	.1035934534D+01	-.8011633846D-02
3	.2229508197D+00	.1034616753D+01	-.7352368808D-02	.1032324388D+01	-.6865485679D-02
4	.2123933681D+00	.1031283660D+01	-.6357642629D-02	.1029384475D+01	-.5971679621D-02
5	.2032256667D+00	.1028542079D+01	-.5570420833D-02	.1026942145D+01	-.5258169364D-02
6	.1951652123D+00	.1026246513D+01	-.4934455490D-02	.1024879774D+01	-.4677502754D-02
7	.1880042326D+00	.1024295742D+01	-.4411765899D-02	.1023114349D+01	-.4197241482D-02
8	.1815859691D+00	.1022617128D+01	-.3975855402D-02	.1021585546D+01	-.3794514017D-02
9	.1757895778D+00	.1021157165D+01	-.3607723259D-02	.1020248437D+01	-.3452766788D-02
10	.1705201677D+00	.1019875554D+01	-.3293419543D-02	.1019068851D+01	-.3159747223D-02
11	.1657020287D+00	.1018741356D+01	-.3022431735D-02		
12	.1612739045D+00				
13	.1571856213D+00				

Pour cet exemple, θ_2 et $\theta_{2,2}$ se comportent de la même façon.

Exemple 3.

Prenons une série convergente. Soit (S_n) Les sommes partielles de la série $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i^3$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i^3, \quad S = 1.20205690.$$

La suite (S_n) est dans LOGSF, et l'application de θ_2 et $\theta_{2,2}$ à (S_n) donne les résultats suivants :

n	S_n	$\theta_2^{(n)}$	$\theta_{2,2}^{(n)}$
1	.1000000000D+01	.1201131687D+01	.1201485340D+01
2	.1125000000D+01	.1201750579D+01	.1201849537D+01
3	.1162037037D+01	.1201928704D+01	.1201964506D+01
4	.1177662037D+01	.1201994342D+01	.1202009714D+01
5	.1185662037D+01	.1202022890D+01	.1202030347D+01
6	.1190291667D+01	.1202036871D+01	.1202040834D+01
7	.1193207119D+01	.1202044357D+01	.1202046618D+01
8	.1195160244D+01	.1202048652D+01	.1202050017D+01
9	.1196531986D+01	.1202051258D+01	.1202052121D+01
10	.1197531986D+01	.1202052912D+01	.1202053479D+01
11	.1198283300D+01	.1202054003D+01	.1202054388D+01
12	.1198862004D+01	.1202054745D+01	.1202055014D+01
13	.1199317170D+01	.1202055264D+01	
14	.1199681602D+01		
15	.1199977898D+01		
16	.1200222039D+01		

θ_2 et $\theta_{2,2}$ accélèrent la convergence de (S_n) de la même façon.

2 - Cas où $(S_n) \in$ LOGL (i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -1$)

Soit (S_n) la suite définie par [12].

$$S_{n+1} = S_n (1 + \alpha_n), \quad S = 0$$

où

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{a + \sqrt{2n-1}} \quad \text{et} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}}$$

(S_n) est à convergence logarithmique et $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = -1$ c'est à dire $(S_n) \in$ LOGL.

L'application de θ_2 et $\theta_{2,2}$ donne les résultats suivants :

Pour a = 0 on a :

n	S_n	$\theta_2^{(n)}$	$\theta_{2,2}^{(n)}$
130	.2202690260D+00	.2058378621D+00	.1067683446D+00
131	.2010240319D+00	.2090747824D+00	.1063684856D+00
132	.2185875831D+00	.2083199800D+00	.1059853774D+00
133	.1996336358D+00	.2075735136D+00	.1056942900D+00
134	.2168440674D+00	.2068250264D+00	.1052195070D+00
135	.1982724950D+00	.2061045760D+00	.1048388930D+00
136	.2153370743D+00	.2053818215D+00	.1044701183D+00
137	.1969395855D+00	.2046668192D+00	.1040956757D+00
138	.2137652709D+00	.2039592434D+00	.1037366270D+00
139	.1955339372D+00	.2032591494D+00	.1033700586D+00
140	.2122273912D+00	.2025662257D+00	.1030164772D+00
141	.1943548207D+00	.2018805282D+00	.1026595298D+00
142	.2107222324D+00	.2012017526D+00	
143	.1931007541D+00		
144	.2092486504D+00		
145	.1918714956D+00		

(S_n) est une suite qui converge très lentement vers 0. $(\theta_2^{(n)})$ converge comme la suite (S_n) et l'on remarque qu'il y a une amélioration de la convergence par $\theta_{2,2}$. On constate la même amélioration pour d'autres valeurs de a.

3°) - Cas où (S_n) est une suite convergente logarithmique telle que $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ n'a pas de limite.

Soit (S_n) la suite définie par :

$$S_{n+1} = S_n(1 + \alpha_n)$$

où

$$\alpha_{2n} = \frac{-a}{n+1} \quad \text{et} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{-b}{n+1} \quad a,b > 0,\ a \neq b.$$

On a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 \text{ et } \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$$

a deux points d'accumulation :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta s_{2n+1}}{\Delta s_{2n}} = \frac{a}{b} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta s_{2n+2}}{\Delta s_{2n+1}} = \frac{b}{a} .$$

Pour a = 5,4 et b = 5,5 on a :

n	S_n	$\frac{1-e_{n+2}/e_{n+1}}{1-f_n}$	$\theta_2^{(n)}$
1	.1000000000D+01	.1113844068D+01	.2018849153D+00
2	-.1700000000D+01	.9168399168D+00	.2474012474D+00
3	.2975000000D+01	.1084722222D+01	.2015388889D+00
4	-.2380000000D+01	.9479928101D+00	.1031475934D+00
5	.1983333333D+01	.1050711028D+01	.3520190502D-01
6	-.6941666667D+00	.9840239641D+00	.4156761857D-02
7	.2603125000D+00	.1018830658D+01	.3504984464D-03
8	-.2082500000D-01	$\frac{1-e_{n+3}/e_{n+1}}{1-g_n}$	$\theta_{2,2}^{(n)}$
9	.2082500000D-02	.9882352941D+00	-.2000000000D-01
10	.2082500000D-03	.9943977591D+00	.1666666667D-01
		.1001407318D+01	.3349416968D-02
		.9995758004D+00	.8413291587D-03
		.1000105928D+01	.7353200805D-04
		.9999774108D+00	.5880243511D-05

f_n est le facteur d'accélération de θ_2 et g_n celui de $\theta_{2,2}$.

Sur cet exemple, on remarque que $(1 - \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}})/(1-f_n)$ ne converge pas vers 1 et que $\theta_2^{(n)}$ ne converge pas plus vite que (S_n) mais de la même façon. Par contre $\theta_{2,2}^{(n)}$ converge mieux que (S_n). Donc $\theta_{2,2}$ est préférable au θ_2.

Le facteur d'accélération f_n de θ_2 tend vers -1 alors que celui de $\theta_{2,2}$ tend vers 1 (qui est une condition nécessaire d'accélération).

B - LA SUITE (S_n) N'EST NI LOGARITHMIQUE NI LINEAIRE.

Exemple, $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ n'a pas de limite.

Dans cet exemple nous donnons une suite (S_n) pour laquelle θ_2 n'accélère pas la convergence mais où $\theta_{2,2}$ l'accélère.

Soit (S_n) définie par les sommes partielles de la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ où

$$a_i = \frac{(-1)^{[i/2]}}{i+1}$$

et où $[\ I$ désigne la partie entière.

Cette suite a été donnée par Lubkin [14]. Wimp [19] a montré que ni le procédé Δ^2-d'Aitken ni les transformations t et U de Levin [13] ne sont régulières pour (S_n).

Regardons maintenant ce que l'on obtient en appliquant θ_2 et $\theta_{2,2}$ à (S_n).

(S_n) n'est pas une suite à convergence logarithmique, $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ n'a pas de limite ; par contre le rapport $\frac{e_{n+2}}{e_n}$ tend vers -1 et $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ a deux points d'accumulation -1 et +1 ; en effet :

$$\Delta S_{2n} = a_{2n+1} = (-1)^n/2n+1$$

$$\Delta S_{2n+1} = a_{2n+2} = (-1)^{n+1}/2n+2$$

et

$$\Delta S_{2n+2} = a_{2n+3} = (-1)^{n+1}/2n+3$$

donc

$$\frac{\Delta S_{2n+1}}{\Delta S_{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \text{ et } \frac{\Delta S_{2n+2}}{\Delta S_{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +1.$$

Le facteur d'accélération f_n de θ_2 a deux points d'accumulation, 1^{∞} et 0^-, et l'on peut espérer que le facteur d'accélération $g_n = f_n f_{n+1}$ aura pour limite -1 et convergera de la même façon que $\frac{e_{n+3}}{e_{n+1}}$ c'est la condition nécessaire et suffisante pour que $(\theta_{2,2}^{(n)} - S)/(S_n - S) \to 0)$.

La limite de la suite (S_n) est

$$S = 1,13197154.$$

n	$\frac{1-e_{n+2}/e_{n+1}}{1-f_n}$	$\theta_2^{(n)}$	$\frac{1-e_{n+3}/e_{n+1}}{1-g_n}$	$\theta_{2,2}^{(n)}$
1	-.2264317500D+00	.1583333333D+01	.1018942875D+01	.1125000000D+01
2	.6485056432D+01	.9416666667D+00	.7205618258D+00	.1141666667D+01
3	-.1161144298D+00	.8916666667D+00	.1006325059D+01	.1133333333D+01
4	.1011195117D+02	.1271428571D+01	.7778423980D+00	.1128571429D+01
5	-.7865102465D-01	.1295238095D+01	.1002800564D+01	.1131547619D+01
6	.1388125757D+02	.1022420635D+01	.8165445628D+00	.1133531746D+01
7	-.5961135626D-01	.1008531746D+01	.1001470785D+01	.1132142857D+01
8	.1772858784D+02	.1222041847D+01	.8442184685D+00	.1131132756D+01
9	-.4804118669D-01	.1231132756D+01	.1000858056D+01	.1131890332D+01
10	.2161716715D+02	.1055550006D+01	.8646866858D+00	.1132473082D+01
11	-.4025195836D-01	.1049139749D+01	.1000548679D+01	.1132015207D+01
12	.2553948700D+02	.1198315573D+01	.8806719656D+00	.1131648907D+01
13	-.3464462857D-01	.1203077478D+01	.1000363650D+01	.1131946526D+01
14	.2947118591D+02	.1073368094D+01	.8930662396D+00	.1132191624D+01
15	-.3041338275D-01	.1069691624D+01	.1000262366D+01	.1131987375D+01
16	.3342969810D+02	.1184446956D+01	.9035053542D+00	.1131815377D+01
17	-.2710526623D-01	.1187370932D+01	.1000184324D+01	.1131961576D+01
18	.3737765968D+02	.1084467841D+01	.9116502360D+00	.1132086889D+01
19	-.2444803184D-01	.1082086889D+01	.1000146757D+01	.1131978664D+01
20	.4136006110D+02	.1175362816D+01	.9191124689D+00	.1131884555D+01
21	-.2226576720D-01	.1177339100D+01	.1000104043D+01	.1131966900D+01
22	.4531097705D+02	.1092039364D+01	.9247138174D+00	.1132039364D+01
23	-.2044212876D-01	.1090372697D+01	.1000091838D+01	.1131975261D+01
24	.4931408381D+02	.1168955318D+01	.9304544116D+00	.1131918281D+01
25	-.1889457075D-01	.1170379820D+01	.1000062638D+01	.1131969156D+01
26	.5325910686D+02	.1097532010D+01	.9343702957D+00	.1132014768D+01
27	-.1756550513D-01	.1096300483D+01	.1000062759D+01	.1131973718D+01
28	.5728380069D+02	.1164194704D+01	.9390786998D+00	.1131936639D+01
29	-.1641089560D-01	.1165269973D+01	.1000038951D+01	.1131970241D+01
30	.6121558608D+02	.1101697759D+01	.9417782474D+00	.1132000789D+01
31	-.1539926152D-01	.1100750789D+01	.1000046160D+01	.1131972937D+01
32	.6526500552D+02	.1160518901D+01	.9458696452D+00	.1131947472D+01
33	-.1450478379D-01	.1161359237D+01	.1000024260D+01	.1131970815D+01
34	.6917656336D+02	.1104965238D+01	.9476241556D+00	.1131992265D+01
35	-.1370900968D-01	.1104214487D+01	.1000036180D+01	.1131972508D+01

Le procédé $\theta_{2,2}$ nous apparaît plus intéressant que le θ_2 . On remarque aussi que le rapport $\frac{1-e_{n+3}/e_{n+1}}{1-g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ mais $\frac{1-e_{n+2}/e_{n+1}}{1-f_n}$ ne converge pas vers 1.

V - INTERPRÉTATION DU $\theta_{2,2}$.

B. Germain-Bonne [7] a retrouvé le procédé θ_2 comme l'extrapolé linéaire à l'origine des deux couples

$$(1/\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+i}}),\ S_{n+1+i}) \qquad i = 0,1.$$

Considérons maintenant l'extrapolé à l'origine des deux couples

$$(1/\Delta(\frac{1}{\Delta S_n}),\ S_{n+1}) \text{ et } (1/\Delta(1/\Delta S_{n+m}),\ S_{n+m+1})$$

où m est un entier positif.

On obtient

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})} + b = S_{n+1} \\ a \cdot \dfrac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})} + b = S_{n+m+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{S_{n+m+1} - S_{n+1}}{\dfrac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})} - \dfrac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}}$$

$$b = S_{n+1} - \frac{S_{n+m+1} - S_{n+1}}{\dfrac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})} - \dfrac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}} \times \frac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}$$

$$\Rightarrow \quad b = S_{n+1} - \frac{S_{n+m+1} - S_{n+1}}{\dfrac{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})} - 1}$$

$$= \frac{S_{n+m+1} - \dfrac{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})} \cdot S_{n+1}}{1 - \dfrac{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})}}$$

On note donc

$$\theta_{2,m}^{(n)} = \frac{S_{n+m+1} - f(n,m) \cdot S_{n+1}}{1 - f(n,m)}$$

où

$$f(n,m) = \frac{\Delta(\frac{1}{\Delta S_n})}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+m}})}$$

$$= \frac{\Delta S_{n+m+1}}{\Delta S_{n+1}} \times \frac{1 - \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}}{1 - \dfrac{\Delta S_{n+m+1}}{\Delta S_{n+m}}}$$

$\theta_{2,m}$ est une généralisation du θ_2-algorithme puisque pour m=1 on a $\theta_{2,m}^{(n)} = \theta_2^{(n)}$.

Pour m = 2, on obtient $\theta_{2,2}^{(n)}$. C'est donc l'extrapolé linéaire à l'origine des deux couples $(\frac{1}{\Delta(\frac{1}{\Delta S_{n+i}})}, S_{n+1+i})$, i = 0,2

Nous remarquons de plus que

$$f(n,m) = f(n,1) \times f(n+1,1) \times \ldots \times f(n+m-1,1)$$

En particulier pour m = 2,

$$f(n,2) = f(n,1) \times f(n+1,1)$$

$f(n,1) = f_n$ est le facteur d'accélération de θ_2. $f(n,2)$ est donc le facteur d'accélération de $\theta_{2,2}$.

□

- . -

RÉFÉRENCES

[1] A.C. AITKEN
"On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations".
Proc. Roy. Soc. Edinburg 46, (1926), 289-305.

[2] C. BREZINSKI
"Accélération des suites à convergence logarithmique".
C.R. Acad. Sciences - Paris ; T2 73 (1971), 727-730.

[3] C. BREZINSKI
"A general extrapolation algorithme".
Numer. Math., 35 (1980), 175-181.

[4] C. BREZINSKI
"Algorithme d'accélération de la convergence. Etude numérique".
Technip, Paris, 1978.

[5] C. BREZINSKI
"Some new convergence acceleration methods".
Math. Comp., 39 (1982), 133-145.

[6] J.P. DELAHAYE
"Théorie des transformations de suites en analyse numérique. Applications".
Thèse, Université Lille I, (1981).

[7] B. GERMAIN-BONNE
"Estimation de la limite des suites et formalisation de procédés d'accélération de la convergence".
Thèse, Université Lille I (1978).

[8] H.L. GRAY and W.D. CLARK
"On a class of nonlinear transformations and their applications to the evaluation of infinite series".
J. Res. N.B.S., 73 B (1969) 251-274.

[9] P. HILLION
"*Méthode d'Aitken pour les suites oscillantes d'approximations*".
C.R. Acad. Sciences - Paris, T 280 (1975), 1701-1703.

[10] B. JONES
"*A note on the T_{+m} transformation*".
Nonlinear analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 6 (1982), 303-305.

[11] C. KOWALEWSKI
"*Possibilité d'accélération de la convergence logarithmique*".
Thèse 3ème cycle, Université Lille I (1981).

[12] A. LEMBARKI
"*Accélération des fractions continues*".
Thèse, Université Lille I (1987).

[13] D. LEVIN
"*Developpement of nonlinear transformations for improving convergence of sequences*".
International J. Comput. Math. Ser B3 (1973), 371-388.

[14] S. LUBKIN
"*A method for summing infinite series*".
J. Res. N.B.S., 48 (1952), 228-254.

[15] D. PETIT
"*Etude de certains procédés d'accélération de la convergence en analyse numérique*".
Thèse, Université de Lille I.

[16] H. SADOK
"*Accélération de la convergence des suites par utilisation des transformations composites*".
Thèse 3e cycle, Université Lille I (1986).

[17] D. SHANKS
"Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences".
J. Math. Phys. 34 (1955), 1-42.

[18] R.F. STREIT
"The T_{+m} transformtion".
Math. Comp. 30 (1976), 506-511.

[19] J. WIMP
"Sequence transformations and their applications".
Academic Press, New-York (1981).

[20] R. PENNACCHI
"Le transformazioni rationali di una successione".
Calcolo 5 (1968), 37-50.

ETUDE DE CERTAINES GENERALISATIONS DU PROCEDE D'AITKEN, ET COMPARAISON DE PROCEDES D'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

Diverses transformations de suites s'écrivent sous forme d'un rapport d'une fonction par la somme de ses dérivées partielles. Une étude de telles transformations conduit à définir des propriétés que doit posséder la fonction pour obtenir un procédé d'accélération de la convergence.

Les transformations de Barrucand rentrent dans ce cadre, et leur comparaison avec le procédé d'Aitken permet un choix de procédés adéquats. Une comparaison de deux procédés d'accélération de la convergence conduit naturellement à une classification et à la construction de meilleurs procédés à partir du procédé de base, comme c'est le cas pour la modification du theta deux-algorithme de Brezinski.

MOTS-CLES.

Accélération de la convergence.
Convergence linéaire.
Convergence logarithmique.