50376
1987
381

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

N° d'ordre : 717

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Alami LEMBARKI

ACCELERATION DES FRACTIONS CONTINUES

Soutenue le 18 Avril 1987 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :	Président :	C. BREZINSKI
	Rapporteurs :	H. WAADELAND
		L. JACOBSEN
	Examinateurs :	B. GERMAIN-BONNE
		P. SABLONNIERE

P R O F E S S E U R S CLASSE EXCEPTIONNELLE

M.	CONSTANT Eugène	I.E.E.A.
M.	FOURET René	Physique
M.	GABILLARD Robert	I.F.E.A.
M.	MONTREUIL Jean	Biologie
M.	PARREAU Michel	Mathématiques
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie
M.	VIVIER Emile	Biologie
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique

P R O F E S S E U R S 1ère classe

M.	BACCHUS Pierre	Mathématiques
M.	BEAUFILS Jean-Pierre (dét.)	Chimie
M.	BIAYS Pierre	G.A.S.
M.	BILLARD Jean (dét.)	Physique
M.	BOILLY Bénoni	Biologie
M.	BOIS Pierre	Mathématiques
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOUGHON Pierre	Mathématiques
M.	BOURIQUET Robert	Biologie
M.	BREZINSKI Claude	I.E.E.A.
M.	CELET Paul	Sciences de la Terre
M.	CHAMLEY Hervé	Biologie
M.	COEURE Gérard	Mathématiques
M.	CORDONNIER Vincent	I.E.E.A.
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	S.E.S.
M.	DYMENT Arthur	Mathématiques

PROFESSEURS 1ère classe (suite)

M.	ESCAIG Bertrand	Physique
M.	FAURE Robert	Mathématiques
M.	FOCT Jacques	Chimie
M.	GRANELLE Jean-Jacques	S.E.S.
M.	GRUSON Laurent	Mathématiques
M.	GUILLAUME Jean	Biologie
M.	HECTOR Joseph	Mathématiques
M.	LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M.	LACOSTE Louis	Biologie
M.	LAVEINE Jean Pierre	Sciences de la Terre
M.	LEHMANN Daniel	Mathématiques
Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique
M.	LHOMME Jean	Chimie
M.	LOMBARD Jacques	S.E.S.
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie
M.	LUCQUIN Michel	Chimie
M.	MIGEON Michel Recteur à Grenoble	E.U.D.I.L.
M.	MIGNOT Fulbert (dét.)	Mathématiques
M.	PAQUET Jacques	Sciences de la Terre
M.	PROUVOST Jean	Sciences de la Terre
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Biologie
M.	SALMER Georges	I.E.E.A.
M.	SEGUIER Guy	I.E.E.A.
M.	SIMON Michel	S.E.S.
M.	STANKIEWICZ François	S.E.S.
M.	TILLIEU Jacques	Physique
M.	VIDAL Pierre	I.E.E.A.
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mathématiques

P R O F E S S E U R S 2ème classe

M. ANTOINE Philippe	Mathématiques (Calais)
M. BART André	Biologie
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mathématiques
M. BELLET Jean	Physique
M. BERZIN Robert	Mathématiques
M. BKOUCHE Rudolphe	Mathématiques
M. BODARD Marcel	Biologie
M. BOSQ Denis	Mathématiques
M. BRASSELET Jean-Paul	Mathématiques
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie
M. CARREZ Christian	I.E.E.A.
M. CAYATTE Jean-Louis	S.E.S.
M. CHAPOTON Alain	C.U.E.E.P.
M. COQUERY Jean-Marie	Biologie
Mme CORSIN Paule	Sciences de la Terre
M. CORTOIS Jean	Physique
M. COUTURIER Daniel	Chimie
M. CROSNIER Yves	I.E.E.A.
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	I.E.E.A.
M. DEBRABANT Pierre	E.U.D.I.L.
M. DEGAUQUE Pierre	I.E.E.A.
M. DELORME Pierre	Biologie
M. DELORME Robert	S.E.S.
M. DE MASSON D'AUTUME Antoine	S.E.S.
M. DEMUNTER Paul	C.U.E.E.P.

PROFESSEURS 2ème classe (Suite 1)

M. DENEL Jacques	I.E.E.A.
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques (Calais)
Mle DESSAUX Odile	Chimie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie
M. DHAINAUT André	Biologie
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie
M. DORMARD Serge	S.E.S.
M. DOUKHAN Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique (Calais)
M. DUBUS Jean-Paul	I.E.E.A.
M. FAKIR Sabah	Mathématiques
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FOUQUART Yves	Physique
M. FRONTIER Serge	Biologie
M. GAMBLIN André	G.A.S.
M. GLORIEUX Pierre	Physique
M. GOBLOT Rémi	Mathématiques
M. GOSSELIN Gabriel (dét.)	S.E.S.
M. GOUDMAND Pierre	Chimie
M. GREGORY Pierre	I.P.A.
M. GREMY Jean-Paul	S.E.S.
M. GREVET Patrice	S.E.S.
M. GUILBAULT Pierre	Biologie
M. HENRY Jean-Pierre	E.U.D.I.L.
M. HERMAN Maurice	Physique
M. JACOB Gérard	I.E.E.A.
M. JACOB Pierre	Mathématiques
M. JEAN Raymond	Biologie
M. JOFFRE Patrick	I.P.A.

PROFESSEURS 2ème classe (suite 2)

M. JOURNEL Gérard	E.U.D.I.L.
M. KREMBEL Jean	Biologie
M. LANGRAND Claude	Mathématiques
M. LATTEUX Michel	I.E.E.A.
Mme LECLERCQ Ginette	Chimie
M. LEFEVRE Christian	Sciences de la Terre
Mle LEGRAND Denise	Mathématiques
Mle LEGRAND Solange	Mathématiques (Calais)
Mme LEHMANN Josiane	Mathématiques
M. LEMAIRE Jean	Physique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique
M. LOSFELD Joseph	C.U.E.E.P.
M. LOUAGE Francis(dét.)	E.U.D.I.L.
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAIZIERES Christian	I.E.E.A.
M. MESSELYN Jean	Physique
M. MESSERLIN Patrick	S.E.S.
M. MONTEL Marc	Physique
Mme MOUNIER Yvonne	Biologie
M. PARSY Fernand	Mathématiques
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie
M. PERROT Pierre	Chimie
M. PERTUZON Emile	Biologie
M. PONSOLLE Louis	Chimie
M. PORCHET Maurice	Biologie
M. POVY Lucien	E.U.D.I.L.
M. RACZY Ladislas	I.E.E.A.
M. RAOULT Jean François	Sciences de la Terre
M. RICHARD Alain	Biologie

PROFESSEURS 2ème Classe (suite 3)

M. RIETSCH François	E.U.D.I.L.
M. ROBINET Jean-Claude	E.U.D.I.L.
M. ROGALSKI Marc	Mathématiques
M. ROY Jean-Claude	Biologie
M. SCHAMPS Joël	Physique
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SLIWA Henri	Chimie
M. SOMME Jean	G.A.S.
Mle SPIK Geneviève	Biologie
M. STAROSWIECKI Marcel	E.U.D.I.L.
M. STERBOUL François	E.U.D.I.L.
M. TAILLIEZ Roger	Institut Agricole
Mme TJOTTA Jacqueline (dét.)	Mathématiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	I.E.E.A.
M. TURRELL Georges	Chimie
M. VANDORPE Bernard	E.U.D.I.L.
M. VAST Pierre	Chimie
M. VERBERT André	Biologie
M. VERNET Philippe	Biologie
M. WALLART Francis	Chimie
M. WARTEL Michel	Chimie
M. WATERLOT Michel	Sciences de la Terre
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Mathématiques

CHARGES DE COURS

M. ADAM Michel	S.E.S.

CHARGES DE CONFERENCES

M. BAFCOP Joël	I.P.A.
M. DUVEAU Jacques	S.E.S.
M. HOFLACK Jean	I.P.A.
M. LATOUCHE Serge	S.E.S.
M. MALAUSSENA DE PERNO Jean-Louis	S.E.S.
M. NAVARRE Christian	I.P.A.
M. OPIGEZ Philippe	S.E.S.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à :

Monsieur Claude BREZINSKI, Professeur à l'Université de Lille I, de m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche, de ses encouragements, de sa patience et de m'avoir prodiguer sympathie et amitié.

Je le remercie une fois de plus de m'avoir honoré par sa présidence du jury.

Madame Lisa JACOBSEN, Professeur à l'Université de Trondheim, pour sa gentillesse, le gros paquet de ses travaux qu'elle m'a envoyé et l'honneur qu'elle me fait en acceptant de faire partie du jury.

Monsieur Haakon WAADELAND, Professeur à l'Université de Trondheim, pour ses remarques sa gentillesse et l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury.

Monsieur Bernard GERMAIN-BONNE, Maître Assistant et Directeur de Recherches à l'Université de Lille I, pour sa courtoisie et l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury.

Monsieur Paul SABLONNIERE, Professeur à l'Université de Rennes pour sa sympathie et l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury.

Tous les membres de l'Equipe A.N.O. pour leur esprit coopératif et leur acceuil.

Je remercie particulièrement, Madame Françoise TAILLY, pour sa gentillesse, sa compréhension et pour le soin avec lequel elle a dactylographié ce travail.

Monsieur Henri GLANC, qui a imprimé et relié cette thèse.

A la mémoire de mon père,
A la mémoire de ma mère.

à Fatima
Sakina
Mohamed
Ahmed
Hanifa
Abdelmajid
Abdeljalil

à Mrs. Mezouaghi
Zinoun
Benzakour

à tout(es) les ami(e)s

TABLE DES MATIÈRES

Pages

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

1 A.C. AITKEN, *On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburg 46, (1926) 289-305.

2 C. BREZINSKI, *Accélération de la convergence en analyse numérique.* LNM 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

3 C. BREZINSKI, *Vitesse de convergence d'une suite.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., To appear.

4 C. BREZINSKI, *How to accelerate continued fractions.* In "Informatique et Calcul", P. Chenin et al. eds, Masson, Paris, 1986, pp. 35-39.

5 C. BREZINSKI, *Composite sequence transformations.* Numer. Math., 46 (1985), 311-321.

6 C. BREZINSKI, *Successive modifications of limit periodic continued fractions*, J. Comp. Appl. Math. (To appear).

7 C. BREZINSKI, *Some new convergence acceleration methods.* Math. Comp. 39 (1982), 133-145.

8 C. BREZINSKI, A. LEMBARKI, *The linear convergence of limit periodic continued fractions.* J. Comp. Appl. Math., to appear.

9 C. BREZINSKI, A. LEMBARKI, *Acceleration of extended Fibonacci sequences.* Applied Numer. Math., 1 (1985), 1-8.

10 J.P. DELAHAYE, *Théorie des transformations de suites en Analyse Numérique. Applications.* Thèse, Université de Lille I, France (1982).

11 J.P. DELAHAYE, *Accélération de la convergence des suites dont le rapport des erreurs est borné.* Calcolo, 18 (1981), 103-116.

12 J.P. DELAHAYE, B. GERMAIN-BONNE, *Résultats négatifs en accélération de la convergence.* Numer. Math., 35 (1980), 443-457.

13 J. GILL, *The use of attractive fixed points in Accelerating the convergenc of limit periodic continued fractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 47 (1975), 119-126.

14 J. GILL, *Convergence acceleration for continued fractions* $K(a_n/1)$ *with* $\lim a_n = 0$. Lecture Notes in Mathematics, 932, Springer-Verlag, Heidelberg, (1981) 67-70.

15 J.W.L. GLAISHER, *On the transformation of continued products into continued fractions.*
Proc. London Math. Soc., 5 (1873, 4).

16 H.L. GRAY, W.D. CLARK, *On a class of non linear transformations and they applications to the evaluation of infinite series.*
J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 73B, (1969), 251-274.

17 T.L. HAYDEN, *Continued fraction approximation to fractions.*
Numer. Math. 7, (1965), 292-309.

18 L. JACOBSEN, *A method for convergence acceleration of continued fractions* $K(a_n/1)$.
Lecture Notes in Math. 932, Springer (1982), 74-98.

19 L. JACOBSEN, *Convergence of limit k-periodic continued fractions* $K(a_n/b_n)$ *and their subsequences of their tals.*
Proc. London Math. Soc. (3), 51 (1985), 563-576.

20 L. JACOBSEN, *Further results on convergence acceleration for continued fractions* $K(a_n/1)$. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 281, n° 1, January (1981), 129-146.

21 L. JACOBSEN, *Repeated modification of limit k-periodic continued fractions.*
Numer. Math. 47 (1985), 577-595.

22 L. JACOBSEN, *Modified approximants for continued fractions. Construction and Applications.*
Kong. NOrske Vid. Selsk. Skr. 3, (1983), 1-46.

23 L. JACOBSEN, W.B. JONES, H. WAADELAND, *Convergence acceleration for continued fractions* $K(a_n/1)$, *where* $a_n \to \infty$.
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, To appear.

24 L. JACOBSEN, H. WAADELAND, *Some useful formulas involving tails of continued fractions.*
Lecture Notes in Math. 932, Springer Verlag, Heidleberg, (1982), 99-105.

25 L. JACOBSEN, H. WAADELAND, *Even and odd parts of limit periodic continued fractions;*
J. Comp. Appl. Math. 15 (1986), 225-233.

26 W.B. JONES, W.J. THRON, H. WAADELAND, eds, *Analytic theory of continued fractions.*
Proceedings, Loen, Norway, 1981. Lecture Notes in Mathematics, vol. 932, Springer-Verlag, Heidelberg, 1982.

27 W.B. JONES, W.J. THRON, *Continued fractions; Analytic theory and applications.*
Encyclopedia of Math. and its applications, n° 11, Adisson-Wesley Publishing Compagny, Reading, Mass. 1980.

28 A.N. KHOVANSKII, *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory.*
P. Noordhoff N.V., Groningen, The Netherlands, 1963.

29 A. LEMBARKI, *Acceleration of limit periodic continued fractions by the T_{+m} transformation.*
J. Comp. Appl. Math., To appear..

30 A. LEMBARKI, *Some sequence transformations and k-periodic continued fractions,* . Math. Comp., Submitted.

31 A. LEMBARKI, *Convergence acceleration of limit k-periodic continued fractions.*
App. Numer. Math., To appear.

32 J.H. McCABE, G.M. PHILLIPS, *Aitken sequences and generalized Fibonacci numbers.*
Math. of Computation, 45, 172 n (1985), 553-558.

33 P. MONTEL, *Leçons sur les récurrences et leurs applications.*
Gauthier-Villars, Paris, 1957.

34 A. MORET-BLANC, *Questions* 111.
Nouv. Ann. Math., (2) (1878), 477-480.

35 W. NIETHAMMER, H. WIETSHORKE, *On the acceleration of limit periodic continued fractions* $K(a_n/1)$.
Numer. Math. 44, (1984), 129-137.

36 O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrücken.*
Chelsea Publishing Company, New-York, N.Y. (1929).

37 G.M. PHILLIPS, *Aitken sequences and Fibonacci numbers.*
Amer. Math. Monthly, 91 (1984), 354-357.

38 T.E. PHIPPS, *A continued fraction representation of eigenvalues.*
SIAM Rev., 13, 3, (1971), 390-395.

39 H. POINCARE, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies.*
Amer. J. Math., 7 (1885), 205-258.

40 A. PRINGHIEM, *Uber die Konvergenz Kettenbrüche.*
Stizung sberichte der Math. Phys. Klasse der K. Bayer. Academie der Wissen shaften. Bd. 28, (1898), 295-324.

41 J.A. SERRET, *Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier.*
J. Math. Pures Appl., 12 (1847), 518-520.

42 E. SØRSDAL, H. WAADELAND, *On the convergence of a certain class of continued fractions* $K(a_n/1)$ *with* $a_n \to \infty$. Lecture Notes in Mathematics 1199, Springer-Verlag, (1985) 285-293.

44 F. STREIT, *The T_{+m} transformation*
Math. Comp., 30, (1976), 505-511.

45 W.J. THRON, H. WAADELAND, *Truncation error bounds for limit periodic continued fractions.*
Math. Comp., 40 (1983), 589-597.

46 W.J. THRON, H. WAADELAND, *Accelerating convergence of limit periodic continued fractions* $K(a_n/1)$.
Numer. Math. 34, (1980), 155-170.

47 W.J. THRON, H. WAADELAND, *Modifications of continued fractions, a survey.*
Lecture Notes in Mathematics, 932, Springer Verlag, Heidelberg, (1981), 38-66.

48 W.J. THORN, H. WAADELAND, *On a certain transformation of continued fractions.*
Lecture Notes in Math. Vol. 932, Springer Verlag, Heidelberg, (1981), 225-240.

49 M. Von PIDOLL, *Betrage zur lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche.*
Akademische Buchdruckerei von F. Straub, München, (1912), 1-51.

50 H.S. WALL, *Analytic theorie of continued fractions.*
D. Van Norstrand co. New-York, (1948).

51 P. WYNN, *On a device for computing the* $e_m(S_n)$ *transformation.*
MTAC, 10 (1956), 91-96.

52 P. WYNN, *Converging factors of continued fractions.*
Numer. Math. 1, (1959), 272-320.

INTRODUCTION.

Une fraction continue est l'expression donnée par,

$$b_o + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}$$

qu'on écrit par commodité sous diverses formes et en particulier,

$$b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots \quad \text{(PRINGSHEIM)}.$$

Les a_n et b_n sont dits éléments de la fraction continue. La valeur de la fraction est $c = \lim_{n\to\infty} c_n$ ou $c_n = b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$ le $n^{\text{ème}}$ convergent.

L'appellation fraction continue (continue fractum) a été utilisée pour la première fois par J. WALLIS (1655).

Les fractions continues sont étroitement liées à diverses branches et notions mathématiques. Citons par exemple :

* Théorie des nombres.
* Polynômes orthogonaux.
* Approximants de Padé. Quadrature de Gauss.
* Prolongement analytique de fonftion.
* Problèmes des moments.

Nous nous intéressons dans ce travail au problème d'accélération de la convergence des fractions continues. Il s'agit de définir des procédés qui transforment la suite (c_n) en une suite (T_n) telle que :

$\lim_{n\to\infty} T_n = c$ et $\lim_{n\to\infty} (T_n - c)/(c_n - c) = 0$.

Une autre vue du problème d'accélération de la convergence, consiste à transformer une fraction continue directement en une deuxième fraction continue dont la suite des convergents successifs convergent plus vite que ceux de la fraction continue initiale. Nous disposons dans ce sens de la T-W-transformation de THRON-WAADELAND [22] dont la fraction continue transformée est appelée T-W-modification. Ces désignations sont utilisées par L. JACOBSEN [11].

Une autre approche du problème d'accélération (bien que la précédente soit une conséquence de celle-ci) consiste à suivre l'idée de J.J. SYLVESTER (1869) et J.W.L. GLAISHER. Cette idée a pris sa forme définitive avec P. WYNN (1959) [23] qui introduit le qualificatif "converging factors". Elle consiste à générer la suite $s_n(w_n) = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \ldots + \frac{a_n|}{|1+w_n}$ (la fraction continue à accélérer étant $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots$), où w_n est sensé être une approximation de la $n^{\text{ème}}$ queue R_n de la fraction continue i.e. $w_n \approx \frac{a_{n+1}|}{|1} + \frac{a_{n+2}|}{|1} + \ldots = R_n$.

De nombreux travaux dans ce sens ont été faits notamment par, HAYDEN [10], PHIPPS [20], GILL [7], THRON et WAADELAND [21], JACOBSEN [12], BREZINSKI [2]... Le problème de fond qui se pose aussi bien dans les "Modifications de fractions continues" que pour la précédente est la détermination de la suite auxiliaire (w) pour assurer l'accélération.

Les différents choix de (w_n) ainsi que les techniques utilisées peuvent se résumer comme suit :

* Prendre $w_n = w$ où $w = \lim_{n\to\infty} R_n$ lorsque cette limite existe, GILL [7], THRON-WAADELAND [21]. Une extension de ce choix est de prendre, $w_{nk+i} = w^{(i)}$ où $w^{(i)} = \lim_{n\to\infty} R_{nk+i}$ $i = 0,\ldots,k-1$ lorsque la fraction continue est k-périodique à la limite ($\lim_{n\to\infty} a_{nk+i} = a^{(i)}$ $i = 0,\ldots,k-1$), JACOBSEN [11].

* Recherche systématique d'une approximation de R_n en se basant sur l'architecture des éléments a_n, travail fait essentiellement dans le cas où $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ par GLAISHER [9], WYNN [24], HAYDEN [10].

* Recherche d'une fraction continue dont les queues R'_n de tout ordre sont connues et constituent une suite d'approximations des queues R_n de la fraction continue initiale. On prend alors $w_n = R'_n$, JACOBSEN [11].

* Sachant que $a_{n+1} = R_n(1+R_{n+1})$, on estime que $R_n \simeq R_{n+1}$ on prend pour w_n l'une des racines de l'équation du second degré $a_{n+1} = x(1+x)$ (GILL [8] voir aussi JACOBSEN-JONES-WAADELAND [14]).

* Recherche de deux approximations $w_n^{(1)}$ et $w_n^{(2)}$ de R_n de sorte que la valeur c de la fraction continue soit dans l'intervalle $(s_n(w_n^{(n)}, S_n(w_n^{(2)}))$ ou dans un disque (dans le cas complexe) (BREZINSKI [2]).

En ce qui nous concerne, nous identifions la fraction continue à la suite de ses convergents successifs en tenant compte des propriétés que les éléments de la fraction continue transmettent à celle-ci. Ceci nous place dans le cadre de la théorie générale de l'accélération de la convergence comme on peut la comprendre à travers BREZINSKI [1], WIMP [23]. Nous serons amené alors à l'estimati du rapport de deux erreurs e_{n+1}/e_n où $e_n = c_n - c$. Cette approche n'est pas foncièrement différente de la précédente puisqu'on a les relations, $e_n/e_{n-1} = -g_n R_n$ où $g_n = \frac{1|}{|1} + \frac{a_n|}{|1} + \dots + \frac{a_2|}{|1}$.

Nous examinons ainsi le problème de l'accélération de la convergence d'une façon graduelle et évolutive. Cette approche est complémentaire de celles suivies jusqu'à présent par les autres auteurs.

Ce travail est constitué de quatre articles déjà parues, un soumis pour publication deux autres non encore publiés. Nous donnons un aperçu sur leur contenu.

1 - "ACCELERATION OF EXTENDED FIBONACCI SEQUENCES" [4].

Dans cet article nous appliquons le Δ^2-itéré et la transformation de SHANK' à la fraction continue 1-périodique, $b_o + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \ldots$. Une telle fraction continue n'a évidemment pas besoin d'être accélérée puisqu'on connait exactemer sa valeur. Son intérêt réside dans le fait que lorsqu'on lui applique l'un ou l'autre des deux procédés la suite récupérée est une sous-suite de (c_n). Ceci permet de visualiser plus concrètement le comportement de chacun des procédés et en particulier, la mise en évidence de propriétés fortes intéressantes des diagonales du Δ^2-itérée, telle par exemple, transformer une suite à convergence logarithmique en une autre à convergence linéaire. Cette étude permet aussi de prévoir le genre de résultats qu'on peut espérer lorsqu'on applique ces procédé ou d'autres leur ressemblant à des fractions continues un peu plus générales.

2 - "SOME SEQUENCE TRANSFORMATIONS AND k-PERIODIC CONTINUED FRACTIONS". [18].

Cette article prolonge le précédent au cas des fractions continues, $b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$ où $a_{nk+i} = a^{(i)}$ et $b_{nk+i} = b^{(i)}$ $i = 0,\ldots,k$; $n = 1,\ldots$

Dans ce cas ni le Δ^2-itéré ni la transformation de SHANK'S ne peuvent accélérer la convergence si $k \neq 1$. Nous avons alors défini un procédé formel dépendant de deux paramètres $(T_{p,q})$ dont p et q s'expriment en fonction de la période k et du numéro de l'itération. Avec p et q convenablement choisis on retrouve des propriétés de l'article précédent. L'itération du $T_{p,q}$ avec une vitesse de convergence optimale nécessite la variation de p et q à chaque itération, d'où le $T_{p,q}$-cyclique. Cette étude met en lumière le côté périodique que doit avoir tout procédé destiné à l'accélération de la convergence des fractions continues à caractère k-périodique. Ce qui est le cas des fractions continues k-périodiques à la limite. Une telle remarque avait déjà été faite par DELAHAYE [5] dans le cas des suites périodico-linéaires.

3 - "THE LINEAR CONVERGENCE OF LIMIT PERIODIC CONTINUED FRACTIONS". [3]

Les fractions continues ayant bénéficié de plus d'attention sont les fractions continues périodiques à la limite. Nous savons que ces fractions continues lorsqu'elles ont une limite finie, sont à convergence linéaire. D'un autre côté nous disposons d'un grand nombre de procédés qui accélèrent la convergence des suites à convergence linéaire.

La question qui s'impose est de voir si en dehors des fractions

continues périodiques à la limite il existe d'autre fractions continues à convergence linéaire. Nous montrons dans cet article que seules les fractions continues périodiques à la limite sont à convergence linéaire. Ce résultat ayant à l'appui la théorie de la rémanence introduite par DELAHAYE et GERMAIN-BONNE [6] montre qu'en dehors des fractions continues périodiques à la limite on ne peut accélérer par une même transformation algorithmique qu'une sous-classe de fractions continues non périodiques à la limite.

4 - "ACCELERATION OF LIMIT PERIODIC CONTINUED FRACTIONS BY THE T_{+m} TRANSFORMATION" [16].

Pour calculer les convergents successifs d'une fraction continue, une façon consiste à générer deux relations récurentes à trois termes. Nous préférons les réduire en une seule. La relation récurente obtenue met en évidence une forme de procédé à considérer. Cette approche nous fait retomber d'une façon naturelle sur le procédé T_{+m} de GRAY et CLARK. Une étude systématique de ce procédé ainsi qu'une comparaison avec $S_n(x_1)$ de GILL sont faites. Il apparaît qu'en général $S_n(x_1)$ est plus intéressant et coûte moins cher du point de vue nombre d'opérations que T_{+m}.

Il apparaît d'un autre côté que lorsque les éléments de la fraction continue $b_o + \frac{a_1|}{|1} + .$ sont telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} = \lambda$ existe les deux procédés se différencient du point de vue rapidité de convergence pour certaines valeurs de λ. Ainsi pour cette classe de fractions continues avec a fini et $a \notin (-\infty, -1/4]$ le T_{+m} n'offre d'intérêt que pour les valeurs de λ où $S_n(x_1)$ se trouve plus lent. Ces valeurs sont précisées.

5 - "CONVERGENCE ACCELERATION OF LIMIT k-PERIODIC CONTINUED FRACTIONS" [19].

Nous considérons les fractions continues $b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} + \dots$

où $\lim_{n\to\infty} a_{nk+i} = a^{(i)}$ et $\lim_{n\to\infty} b_{nk+i} = b^{(i)}$ $i = 0,1,\dots,k-1$; $a^{(i)}, b^{(i)} \in C$.

Des résultats connus sont démontrés d'une façon qui nous semble simple et surtout cohérente avec notre façon de procéder et les renseignements que nous avons à chercher sur le rapport de deux erreurs ep/eq et le rapport de

deux différences $\dfrac{c_{p'}-c_{q'}}{c_m-c_n}$.

Quelques procédés d'accélération de la convergence en sont déduits et étudiés.

6 - "CONNEXIONS ET ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DES FRACTIONS CONTINUES $b_0 + \frac{a_1|}{|1} + \ldots : |a_n| \to \infty$ et $a_n \to -1/4$".

Parmi les transformations de fractions continues en fractions continues et qui ne sont pas nécessairement destinées à l'accélération de la convergence, mais souvent à une amélioration de celle-ci, nous rencontrons une transformation de Khovanskii (que celui-ci considère comme étant une identité) :

$$1 + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots = \frac{1|}{|1} - \frac{a_1|}{|a_1+2a_2+1} - \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|2a_3+2a_4+1} - \frac{a_4|}{|1} - \ldots$$

$$- \frac{a_{2n-1}|}{|2a_{2n-1}+2a_{2n}+1} - \frac{a_{2n}|}{|1} - \ldots$$

Cette transformation, qui par ailleurs n'a fait l'objet d'aucune étude, nous a paru intéressante en remarquant que lorsque $|a_n| \to \infty$ et en écrivant la fraction continue du second membre sous la forme,

$$\frac{d_1|}{|1} + \frac{d_2|}{|1} + \ldots,$$

on peut sous certaines hypothèses avoir soit $\lim a_n = -1/4$ soit que $\lim_n d_{2n+i} = d^{(i)}$ $i = 0,1$. Inversement, lorsque $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/4$ on a $\lim_{n\to\infty} |d_n| = \infty$. Ce qui établit une connexion entre ces trois classes de fractions continues. C'est donc une transformation qui peut ramener le problème d'accélération de la convergence d'une classe à une autre.

Ces résultats nous ont amené à examiner cette transformation de plus près. Il s'avère à travers cette étude que la transformation n'établit pas une identité et que dans le cas linéaire elle ne converge pas plus vite que la partie paire de la fraction continue initiale. De plus si nous désignons par,

$$K_n = \frac{d_1|}{|1} + \frac{d_2|}{|1} + \ldots + \frac{d_n|}{|1}$$

son $n^{ème}$ convergent on a, $K_{2n+1} = C_{2n}$. Cette dernière propriété peut avoir des applications dans le même sens que celles obtenues par L. JACOBSEN et H. WAADELAND [15].

Nous définissons en outre ce que nous désignons par transformée inverse qui consiste à faire en sorte que la fraction continue initiale soit le résultat de la transformation d'une autre fraction continue. Si nous désignons par L_n le $n^{ème}$ convergent de la transformée inverse on a alors, $L_{2n} = C_{2n+1}$. Ces deux transformations ont comme application immédiate le contrôle de l'erreur.

Nous montrons en outre et "curieusement" que la transformée de Khovanskii ainsi que la transformée inverse accélèrent la convergence d'une classe de fractions continues où $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/4$ (convergence logarithmique). Une comparaison avec $S_n(-1/2)$ est alors faite.

Dans le cas où $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, il est possible d'accélérer la convergence d'une classe de ces fractions continues en appliquant deux fois l'une ou l'autre des deux transformations. Ceci est possible à cause de ce qui vient d'être dit concernant le cas $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/4$ et les connexions qu'établissent ces transformations.

La complexité du cas $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ nous emmène à l'examen de plus prés du comportement des quantités e_{n+1}/e_n, g_{n+1} et R_{n+1} où $e_n = c_n - c$,

$g_{n+1} = 1 + \dfrac{\Delta c_n}{\Delta c_{n-1}}$ et $R_n = \dfrac{a_{n+1}|}{|1} + \dfrac{a_{n+2}|}{|1} + \ldots$, qui par ailleurs sont reliées par, $e_{n+1}/e_n = -g_{n+1}R_{n+1}$ comme nous l'avons signalé ultérieurement. Il apparaît que pour une sous classe de ces fractions continues les queues R_n oscillent alternativement de $-\infty$ à $+\infty$ (dans le cas réel) et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ alors que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} = -1$ ($\lim_{n\to\infty} g_n = 0$). C'est là une classe de fractions continues qui ne peut être accélérer par aucun procédé basé sur des considérations du genre, $R_n \approx R_{n+1}$ ou $e_{n+1}/e_n \approx \Delta c_{n+1}/\Delta c_n$ ce qui est le cas de la plupart des procédés connus.

Quelques procédés accélérant des sous classes de ces fractions continues sont proposés.

7 - "ACCELERATION ET SUR-ACCELERATION DE LA CONVERGENCE".

Cette article constitue une sorte de synthèse des démarches entreprises dans les articles précédents. Il renferme aussi une vue qui nous semble nouvelle quand à la conception même de l'accélération de la convergence.

Nous indiquons dans un premier temps que tout procédé d'accélération de la convergence peut se mettre sous la forme :

$$F_n = \frac{c_{n+1} - f_n c_n}{1 - f_n} .$$

Ce qui donne la caractérisation très significative de l'accélération de la convergence :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n - c}{C_n - c} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 - f_n} = 1.$$

Ainsi : accélérer la convergence de $(c_n) \Longleftrightarrow$ trouver une approximation f_n de e_{n+1}/e_n dans le sens,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 - f_n} = 1.$$

Cette caractérisation permet en outre, de donner une interprétation des procédés connus plus cohérente avec le problème de l'accélération de la convergence.

D'autre part, si l'on se place dans le cas où : $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r$ existe.

Soit, $f_n = r + \phi_n$ où $\phi_n \to 0$.
Posons,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = r + \varepsilon_{n+1} .$$

On a alors,

$$\frac{F_{n-c}}{e_n} = \varepsilon_{n+1} \cdot \frac{1 - \phi_n/\varepsilon_{n+1}}{1 - f_n} .$$

Ceci nous permet de voir que si, $r \neq 1$ on peut avoir plus qu'une simple accélération selon que $\lim_{n\to\infty} \phi_n/\varepsilon_{n+1} = 1$ ou $\neq 1$.

Dans le cas où, $\lim_{n\to\infty} \phi_n/\varepsilon_{n+1} = 1$ nous disons qu'il y a une sur-accélération.

Par contre, nous montrons que lorsque, $r = 1$, la condition de sur-accélération devient une condition nécessaire et suffisante pour avoir une simple accélération.

Ceci, nous conduit à examiner ce qu'il en est pour les procédés usuels. Nous montrons que les procédés usuels lorsqu'on les applique à des suites qui apparemment possèdent toutes les bonnes propriétés

$$\{(C_n) : \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r,\ |r| < 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon \text{ existent}\}$$

n'en sur-accélèrent qu'un sous-ensemble ponctuel (pour une seule valeur de ε).

Nous proposons deux procédés qui sur-accélèrent l'ensemble de ces suites.

Nous examinons aussi le cas de l'ensemble

$$\{(C_n) : C_n = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \ldots + \frac{a_n|}{|1},\ a_n \to a \notin (-\infty, -\tfrac{1}{4}] \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} = \delta \text{ existe}\}$$

Cette démarche offre de nouvelles perspectives concernant la comparaison ou l'amélioration des procédés d'accélération. Elle constitue aussi une base pour de nouveaux procédés.

REFERENCES.

[1] C. BREZINSKI, *"Accélération de la convergence en Analyse Numérique"*, Lecture Notes in Mathematics, 582, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[2] C. BREZINSKI, *"Successive modifications of limit periodic continued fractions"*, J. Comp. Appl. Math. (To appear).

[3] C. BREZINSKI, A. LEMBARKI, *"The linear convergence of limit periodic continued fractions"*, J. Comp. Appl. Math. (To appear).

[4] C. BREZINSKI, A. LEMBARKI, *"Acceleration of extended Fibonacci sequences"*, Appl. Numer. Math., 1 (1985), 1-8.

[5] J.P. DELAHAYE, *"Théorie des transformations de suites en suites en Analyse Numérique. Applications"*, Thèse Université de Lille 1, France (1982).

[6] J.P. DELAHAYE, B. GERMAIN-BONNE, *"Résultats négatifs en accélération de la convergence"*, Numer. Math. 35, (1980), 443-457.

[7] J. GILL, *"The use of attractive fixed points in accelerating the convergence of limit periodic continued fractions"*, Proc. Amer. Math. Soc., 47, (1975), 119-126.

[8] J. GILL, *"Convergence acceleration for continued fractions $K(a_n/1)$ with $\lim a_n = 0$"*, Lecture Notes in Mathematics, 932, Springer-Verlag, Heidelberg, (1981), 67-70.

[9] J.W.L. GLAISHER, *"On the transformation of continued products into continued fractions"*, Proc. London Math. Soc., 5 (1873, 4).

[10] T.L. HAYDEN, *"Continued fraction approximation to functions"*, Numer. Math., 7, (1965), 292-309.

[11] L. JACOBSEN, *"Repeated Modification of limit k-periodic continued fractions"*, Numer. Math., 47, (1985), 577-595.

[12] L. JACOBSEN, *"Modified approximants for continued fractions. Constructio and Applications"*, Kong. Norske Vid. Selsk. Skr. 3, (1983), 1-46.

[13] L. JACOBSEN, *"A method for convergence acceleration of continued fraction K $(a_n/1)$"*, Lect. Notes Math., 932, Springer Verlag, Heidelberg, (1981). 74-86.

[14] L. JACOBSEN, W.B. JONES, H. WAADELAND, *"Convergence acceleration for continued fractions* $K(a_n/1)$, *where* $a_n \to \infty$.
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, To appear.

[15] L. JACOBSEN, H. WAADELAND, *"Even and odd parts of limit periodic continu fractions"*, J. Comp. Appl. Math., 15 (1986) 225-233.

[16] A.N. KHOVANSKII, *"The application of continued fractions"*, P. Noordoff, Ltd, Groningen, The Netherland (1963).

[17] A. LEMBARKI, *"Acceleration of limit periodic continued fractions by the* T_{+m} *transformation"*, J. Comp. Math. To appear.

[18] A. LEMBARKI, *"Some sequence transformations and k-periodic continued fractions"*, Math. Comp..(Submitted).

[19] A. LEMBARKI, *"Convergence acceleration of limit k-periodic continued fractions"*, Appl. Numer. Math., to appear.

[20] T.E. PHIPPS, *"A continued fraction representation of eigenvalues"*, SIAM Rev. 13, 3, (1971), 390-395.

[21] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"Accelerating convergence of limit periodic continued fractions* $K(a_n/1)$*"*, Numer. Math. 34, (1980), 115-170.

[22] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"On a certain transformation of continued fractions"*, Lecture Notes in Math., Vol. 932, Springer Verlag, Heidelberg (1981), 225-240.

[23] J. WIMP, *"Sequence transformations and their applications"*, Academic Press, New York (1981).

[24] P. WYNN, *"Converging factors for continued fractions"*, Numer. Math., (1959), 272-320.

ACCELERATION OF EXTENDED FIBONACCI SEQUENCES(*)

C. BREZINSKI, A. LEMBARKI

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation
UER IEEA
Université de Lille I
59655 - Villeneuve d'Ascq cedex, France

ABSTRACT

The repeated application of Aitken's Δ^2 process and of Shanks' transformation to the convergents of $1 + \frac{a'}{|1} + \frac{a'}{|1} + \ldots$ are studied. It is proved that they both produce subsequences of the initial sequence. Their rates of convergence are studied showing the superiority of Aitken's process. The iterates of various methods for computing the dominant zero of $x^2 - x - a$ are related to the previous continued fraction.

MR : 65 B 05

(*) Work performed under the Nato Research Grant 027.81.

1 - INTRODUCTION

In [4], Phillips considered the Fibonacci sequence

$$C_o = 1$$

$$C_{n+1} = 1 + 1/C_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

It is well known that

$$C_n = u_{n+1}/u_n \qquad n \geq 0$$

where the u_n are the Fibonacci numbers given by

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \qquad n \geq 1$$

with $u_o = u_1 = 1$ and that the sequence (C_n) tends to the "golden section" $(1+\sqrt{5})/2$ which is the positive zero of the polynomial $x^2 - x - 1$.

The C_n are also the successive convergents of the continued fraction $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots$

Phillips considered the repeated application of Aitken's Δ^2 process to the sequence (C_n) in order to accelerate its convergence and he proved that the new sequences obtained are subsequences of the initial one.

Thus the question arises to know whether Shanks'transformation (that is the ε-algorithm) possesses a similar property. The same questions can also be raised for the extended Fibonacci sequence formed by the convergents of the continued fraction $1 + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \ldots$ The aim of this paper is to answer these questions. One can, of course, think that such questions are irrelevant since the limit of these continued fractions is already known and they don't need to be accelerated. However, apart from the curious results obtained, the interest of the paper is to show that sequence transformations can transform a logarithmic sequence into a linear one and a linear one into a sequence converging super-quadratically. Moreover, we hope that some of the results on the rate of convergence proved herein could be

extended to limit periodic continued fractions.

Thus, let us consider the continued fraction

$$C = 1 + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \dots$$

where a is a nonzero complex number. It satisfies

$$C = 1 + a/C$$

and its convergents are given by

$$C_o = 1$$

$$C_{n+1} = 1 + a/C_n \qquad n = 0, 1, \dots$$

We have $C_n = u_{n+1}/u_n$ where the u_n are given by

$$u_o = u_1 = 1$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + a\, u_n \qquad n = 0, 1, \dots$$

Let x_1 and x_2 be the zeros of the polynomial $x^2 - x - a$.

It is easy to check that if $a \neq -1/4$.

$$u_n = (x_1^{n+1} - x_2^{n+1})/(x_1 - x_2) \tag{1}$$

and

$$C_n = (x_1^{n+2} - x_2^{n+2})/(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})$$

or, setting $r = x_2/x_1$

$$C_n = x_1(1-r^{n+2})/(1-r^{n+1}) \tag{2}$$

If $a = -1/4$, we have

$$u_n = (n+1)/2^n \tag{3}$$

and

$$C_n = (n+2)/2(n+1) \tag{4}$$

If $a \neq -1/4+c$ where c is a real non positive number, then the continued fract converges to x_1 the zero of greatest modulus of $x^2 - x - a$.

If $a = -1/4+c$ where c is a real strictly negative number, $x_1 = \bar{x}_2$ and $x_1 \neq x_2$ Thus, by (2), the continued fraction does not converge. In fact all the C_n exist and are real and x_1 and x_2 are complex.

In section 2 we shall study the application of the iterated Δ^2 process on the extended Fibonacci sequence (C_n). The use of Shanks'transformation will be carried out in section 3 and the rates of convergence of the various sequences obtained will be compared. In section 4 we shall study the iterates of some methods for computing the dominant zero of x^2-x-a.

There are two methods for proving the results. The first one consists in using $C_n = u_{n+1}/u_n$ and various relations satisfied by the u_n. These relations generalize similar relations for the Fibonacci numbers. This is the method followed by Philipps. It is also possible to use (1) and (3). The second way for proving the results is to use directly (2) and (4). It will be our method.

Due to a linearity property of Aitken's and Shanks'transformations all the results stated also hold for continued fractions of the form $b + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \ldots$ where $b \in \mathbf{C}$.

2 - AITKEN'S METHOD

Let us apply repeatedly Aitken's Δ^2 process to the sequence (C_n), that is we set

$$x_o^{(n)} = C_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Then, for $k = 0, 1, \ldots$, we construct the sequence $(x_{k+1}^{(n)})$ by

$$x_{k+1}^{(n)} = x_k^{(n)} - \frac{(x_k^{(n+1)}-x_k^{(n)})^2}{x_k^{(n+2)}-2x_k^{(n+1)}+x^{(n)}} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

It must be noticed that our notations slightly differ from that of Phillips. It is just a matter of conveniency for our purpose.

Theorem 1

$$\forall\ k,\ n \geq 0 \qquad x_k^{(n)} = C_{(n+k+1)2^k-1}$$

Proof

If $a \neq -1/4$, then for $1 \leq i \leq n$

$C_{n+i}\ C_{n-i} - C_n^2 = x_1^2\ r^{n-i+1}\ (1-r)(1-r^i)^2(1-r^{2n+3})/D(1-r^{n+1})$

$C_{n+i}-2C_n+C_{n-i} = x_1\ r^{n-i+1}(1-r)(1-r^i)^2(1+r^{n+1})/D$

with $D = (1-r^{n-i+1})(1-r^{n+1})(1-r^{n+i+1})$.

Thus

$$\frac{C_{n+i}C_{n-i}-C_n^2}{C_{n+i}-2C_n+C_{n-i}} = x_1\ \frac{1-r^{2n+3}}{1-r^{2n+2}} = C_{2n+1}.$$

If $a = -1/4$ we have

$$C_{n+i}C_{n-i}-C_n^2 = i^2(2n+3)/4(n+1)^2[(n+1)^2-i^2]$$

$$C_{n+i}-2C_n+C_{n-i} = 2i^2/2(n+1)[(n+1)^2-i^2].$$

Thus

$$\frac{C_{n+i}C_{n-i}-C_n^2}{C_{n+i}-2C_n+C_{n-i}} = \frac{2n+3}{2(2n+2)} = C_{2n+1}.$$

In both cases, taking $i = 1$, we get $x_1^{(n)} = C_{2n+3}$, $\forall\ n$.

We have

$$x_2^{(n)} = (C_{2n+7}C_{2n+3}-C_{2n+5}^2)/(C_{2n+7}-2C_{2n+5}+C_{2n+3}).$$

Replacing n by 2n+5 and setting $i = 2$ we obtain $x_2^{(n)} = C_{4n+11}$.

It is easy to see that

$$x_k^{(n)} = C_{N(k,n)}$$

where $N(0,n) = n$ and $N(k,n) = 2N(k-1,\ n+1)+1$. Thus

$$N(k,n) = 2^k n+M_k$$

with $M_o = 0$ and $M_k = 2M_{k-1}+2^k+1$ whose solution is $M_k = (k+1)2^k-1$.

∎

This proof follows the lines of Phillips'proof. Another one can also be easily obtained by induction but it is longer.

3 - SHANKS'TRANSFORMATION

Instead of Aitken's process let us now try to transform the sequence (C_n) by Shnaks'transformation or, equivalently, by Wynn's ε-algorithm.

Shanks'transformation is defined by [6]

$$e_k(C_n) = H_{k+1}(C_n) / H_k(\Delta^2 C_n) \qquad k, n = 0, 1, \ldots$$

where

$$H_k(y_n) = \begin{vmatrix} y_n & y_{n+1} & \cdots\cdots & y_{n+k-1} \\ y_{n+1} & y_{n+2} & \cdots\cdots & y_{n+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n+k-1} & y_{n+k} & \cdots\cdots & y_{n+2k-2} \end{vmatrix}$$

The $e_k(C_n)$ can be recursively computed by the ε-algorithm of Wynn [7] which is as follows :

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \qquad \varepsilon_o^{(n)} = C_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + [\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}]^{-1} \qquad k, n = 0, 1, \ldots$$

It is related to Shanks'transformation by

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} = e_k(C_n) \qquad k, n = 0, 1, \ldots$$

When $k = 1$, $\varepsilon_2^{(n)} = e_1(S_n) = x_1^{(n)}$.

If the ε-algorithm is applied to our sequence (C_n) we get the

<u>Theorem 2</u>

$$\forall\, k, n \geq 0 \qquad \varepsilon_{2k}^{(n)} = C_{(k+1)n+k(k+2)}$$

<u>Proof</u>

$\forall\, n \geq 0$ $\varepsilon_o^{(n)} = C_n$ and $\varepsilon_2^{(n)} = x_1^{(n)} = C_{2n+3}$ which is true by theorem 1.

The property is assumed to be true up to the index k and $\forall\, n \geq 0$. To prove that it is still true for k+1 we shall make use of Wynn's cross rule [1] which states that

$$[\varepsilon_{2k}^{(n+1)}-\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1}+[\varepsilon_{2k}^{(n-1)}-\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1} = [\varepsilon_{2k+2}^{(n-1)}-\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1}+[\varepsilon_{2k-2}^{(n+1)}-\varepsilon_{2k}^{(n)}]^{-1}$$

with $\varepsilon_{o}^{(n)} = C_n$ and $\varepsilon_{-2}^{(n)} = \infty$.

All the four brackets of this relation have the form $(C_N-C_M)^{-1}$, where $M = (k+1)n+k(k+2)$.

If $a \neq -1/4$ we have

$$(C_N-C_M)^{-1} = x^{-1}\,\frac{(1-r^{N+1})(1-r^{M+1})}{r^{M+1}(1-r)(r^{N-M}-1)}\,.$$

The cross rule reduces to

$$\frac{1-r^{M+1}r^{k+1}}{r^{k+1}-1} + \frac{1-r^{M+1}r^{-(k+1)}}{r^{-(k+1)}-1} = \frac{1-r^{M+1}r^{n+k+1}}{r^{n+k+1}-1} + \frac{1-r^{M+1}r^{-(n+k+1)}}{r^{-(n+k+1)}-1}$$

which is obviously true.

If $a = -1/4$, the cross rule becomes

$$-\frac{M+k+2}{k+1} + \frac{M-k}{k+1} = -\frac{M+n+k+2}{n+k+1} + \frac{M-n-k}{n+k+1}$$

which is evident.

∎

We hall now compare the rates of convergence of the various sequences obtained by the ε-algorithm and the repeated application of Aitken's process. To speak of convergence we have, of course, to assume that (C_n) converges, that is $a \neq -1/4+c$ where c is a real non positive number. It must be noticed that the computations of $x_k^{(n)}$ and $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ both need the same terms $C_n, \ldots, C_{n+2k}$ of the initial sequence.

We have the

Theorem 3

If $a \neq -1/4 + c$, $c < 0$ we have :

1) $\lim_{n\to\infty} (x_k^{(n+1)}-x_1)/(x_k^{(n)}-x_1) = r^{2^k}$

2) $x_{k+1}^{(n)}-x_1 = o(x_k^{(n+2)}-x_1)$ $(n\to\infty)$ and $\lim_{n\to\infty} (x_{k+1}^{(n)}-x_1)/(x_k^{(n+2)}-x_1)^2 = r^{-2^{k+1}}/x_1(1-r)$

3) $x_{k+1}^{(n)}-x_1 = o(x_k^{(n)}-x_1)^2$ $(k\to\infty)$, $\forall\, q > 2$, $\lim_{k\to\infty} (x_{k+1}^{(n)}-x_1)/(x_k^{(n)}-x_1)^q = \infty$

and $\lim_{k\to\infty} (x_{k+1}^{(n)}-x_1)/(x_k^{(n+1)}-x_1)^2 = x^{-1}(1-r)^{-1}$

4) $x_k^{(n+1)}-x_1 = o(x_k^{(n)}-x_1)$ $(k\to\infty)$ and $\forall\, q > 1$, $\lim_{k\to\infty} (x_k^{(n+1)}-x_1)/(x_k^{(n)}-x_1)^q = \infty$

5) $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n+1)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1) = r^{k+1}$

6) $\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-x_1 = o(\varepsilon_{2k}^{(n+2)}-x_1)$ $(n\to\infty)$ and $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n+2)}-x_1)^{(k+2)/(k+1)}$

$= r^{-(k+2)}[x_1(1-r)]^{-1/(k+1)}$

7) $\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-x_1 = o(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)$ $(k\to\infty)$ and $\forall\, q > 1$, $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)^q = \infty$

8) $\varepsilon_{2k}^{(n+1)}-x_1 = o(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)$ $(k\to\infty)$ and $\forall\, q > 1$, $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n+1)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)^q = \infty$

9) $\lim_{n\to\infty} (x_k^{(n)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)^{2^k/(k+1)} = [x_1(1-r)]^{1-2^k/(k+1)}$ and

$x_k^{(n)}-x_1 = o(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)$ $(k\to\infty)$

10) $\lim_{n\to\infty} (x_k^{(n)}-x_1)/(C_{n+2k}-x_1)^{2^k} = r^{-k2^k}[x_1(1-r)]^{1-2^k}$ and

$\forall\, q > 1$, $x_k^{(n)}-x_1 = o(C_{n+2k}-x_1)^q$ $(k\to\infty)$

11) $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)/(C_{n+2k}-x_1)^{k+1} = r^{-k(k+1)}[x_1(1-r)]^{-k}$ and

$\forall\, q > 1$, $\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1 = o(C_{n+2k}-x_1)^q$ $(k\to\infty)$.

If $a = -1/4$ we have :

12) $\lim_{n\to\infty} (x_k^{(n+1)}-x_1)/(x_k^{(n)}-x_1) = 1$

13) $\lim_{n\to\infty} (x_{k+1}^{(n)}-x_1)/(x_k^{(n+2)}-x_1) = 1/2$

14) $\lim_{k\to\infty} (x_{k+1}^{(n)}-x_1)/(x_k^{(n)}-x_1) = 1/2$

15) $\lim_{k\to\infty} (x_k^{(n+1)}-x_1)/(x_k^{(n)}-x_1) = 1$

16) $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n+1)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1) = 1$

17) $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n+2)}-x_1) = (k+1)/(k+2)$

18) $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon_{2k+2}^{(n)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1) = 1$

19) $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n+1)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1) = 1$

20) $\lim_{n\to\infty} (x_k^{(n)}-x_1)/(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1) = (k+1)\ 2^{-k}$ and $\forall\ q \geq 1$

$x_k^{(n)}-x_1 = o(\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)^q \quad (k\to\infty)$

21) $\lim_{n\to\infty} (x_k^{(n)}-x_1)/(C_{n+2k}-x_1) = 2^{-k}$ and $\forall\ q \geq 1$, $\lim_{k\to\infty} (x_k^{(n)}-x_1)/(C_{n+2k}-x_1)^q = o$

22) $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)/(C_{n+2k}-x_1) = 1/(k+1)$ and $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon_{2k}^{(n)}-x_1)/(C_{n+2k}-x_1)^2 = 2^3$.

<u>Proof</u>

Since $C_n-x_1 = x_1(1-r)r^{n+1}/(1-r^{n+1})$ when $a \neq -1/4 + c$ with $c < 0$ and $C_n-x_1 = 1/2(n+1)$ when $a = -1/4$ the proofs are all obvious.

∎

Let us now comment on these results. The numbers $(x_k^{(n)})$ and $(\varepsilon_{2k}^{(n)})$ are usually displayed in double entry tables as follows :

$$\begin{array}{llll}
x_o^{(o)} & & & \\
x_o^{(1)} & x_1^{(o)} & & \\
x_o^{(2)} & x_1^{(1)} & x_2^{(o)} & \\
x_o^{(3)} & x_1^{(2)} & x_2^{(1)} & x_3^{(o)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
\varepsilon_o^{(o)} & & & \\
\varepsilon_o^{(1)} & \varepsilon_2^{(o)} & & \\
\varepsilon_o^{(2)} & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_4^{(o)} & \\
\varepsilon_o^{(3)} & \varepsilon_2^{(2)} & \varepsilon_4^{(1)} & \varepsilon_6^{(o)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

Aitken's array Shanks'array

Thus the lower index indicates a column and the upper index a descending diagonal.

When $a \neq -1/4+c$ with $c < 0$, for the iterated application of Aitken's process, each column is linearly convergent (result 1), each column converges

faster than the preceding one and the acceleration has degree two (result 2). Result 3 is very important since it shows that a linearly convergent sequence can be transformed into a diagonal converging super-quadratically. Each diagonal converges faster than the preceding one (result 4). For Shanks'transformation each column is linearly convergent (result 5), each column converges faster than the preceding one and the acceleration has degree (k+2)/(k+1) (result 6). The linearly converging sequence (C_n) is transformed into a diagonal converging super-linearly (result 7). Each diagonal converges faster than the preceding one (result 8). Result 9 shows that the columns and the diagonals of Aitken's array converge faster than the corresponding ones in Shanks'array. Results 10 and 11 evaluate the degree of acceleration with respect to the initial sequence (C_n).

Now when $a = -1/4$, for the iterated application of Aitken's process, each column converges logarithmically (result 12) and each column does not converge faster than the preceding one (result 13). Result 14 shows that the logarithmic sequence (C_n) can be transformed into a diagonal converging linearly, but there is no acceleration from one diagonal to the other (result 15). For Shanks'transformation each column is logarithmic (result 16) and each column does not converge faster than the preceding one (result 17). Each diagonal is also logarithmic (result 18) and there is no acceleration from one diagonal to the other (result 19). Result 20 shows that the columns of Aitken's array do not converge faster than that of Shanks'array but that the diagonal do. Results 20 and 21 evaluate the degree of acceleration with respect to the initial sequence.

The results of theorem 3 provide an illustration of the notions concerning the speed of convergence of a sequence introduced in [2].

4 - FIXED POINT METHODS

When $a \neq -1/4+c$, $c \leq 0$ the sequence (C_n) of the previous sections converges to the dominant zero of x^2-x-a. In this section we shall study if some classical fixed point methods yield subsequences of the sequence (C_n) thus generalizing Phillips and much older results.

We begin with Newton's method :

$$y_o \text{ given}$$
$$y_{n+1}=(y_n^2+a)/(2y_n-1) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

It is easy to check in both cases ($a \neq -1/4+c$ with $c < 0$ and $a = -1/4$) that if k exists such that $y_n = C_k$ then $y_{n+1} = C_{2k+1}$. This is a generalization of a result proved by J.A. Serret in 1847 [5] relating Newton's method for the computation of the square root and its continued fraction expansion $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r|}{|2a} + \frac{r|}{|2a} + \ldots$ Thus, if $y_o = C_o = 1$, then by induction it is easy to see that

$$y_n = C_{2^n-1}$$

thus generalizing a result obtained in 1878 by Moret-Blanc [3] for the square root. It can be checked that (y_n) has order two if $a \neq -1/4+c$ with $c < o$ and has only order one when $a = -1/4$ that is when x^2-x-a has a double zero $x_1 = x_2 = 1/2$.

Let us now turn to the secant method :

$$y_o, y_1 \text{ given}$$
$$y_{n+1} = (y_n\, y_{n-1}+a)/(y_n+y_{n-1}-1) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

If p and k exist such that $y_{n-1} = C_p$ and $y_n = C_k$ then, in both cases,

$$y_{n+1}=C_{k+p+1}.$$

Thus if $y_o = y_1 = C_o = 1$ then $y_n = C_{k_n-1}$ where k_n are the Fibonacci numbers given by

$$k_o = k_1 = 1$$
$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

If $a \neq 1/4+c$ with $c < 0$ it is easy to check that (y_n) has order $(1+\sqrt{5})/2$ and that the order is one if $a = -1/4$.

Let us now use Steffensen's method

$$v_o = y_n$$
$$v_1 = 1+a/v_o$$
$$v_2 = 1+a/v_1$$
$$y_{n+1} = v_o - (v_1-v_o)^2/(v_2-2v_1+v_o)$$

If k exists such that $y_n = C_k$ then, by theorem 1, $y_{n+1} = C_{2k+3}$. Thus, in both cases, if $y_o = C_o = 1$ then

$$y_n = C_{3(2^n-1)}$$

and the order is two if $a \neq -1/4+c$ with $c < 0$ and one if $a = -1/4$.

Steffensen's method is based on Aitken's Δ^2 process. Thus a generalization will consist in using the repeated application of this process and we shall obtain a new method one iteration of which being

$$v_o = y_n$$
$$v_1 = 1+a/v_o$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{2p} = 1+a/v_{2p-1}$$

Then, applying the iterated Δ^2 process to $v_o, \ldots, v_{2p}$ we set

$$y_{n+1} = x_p^{(o)}$$

If k exist such that $y_n = C_k$ then, from theorem 1

$$y_{n+1} = C_{(k+p+1)2^p-1}$$

Thus if $y_o = C_o = 1$ then $y_n = C_{N_n}$ where

$$N_n = [(p+1)2^p-1]\,\frac{2^{pn}-1}{2^p-1}$$

If $a \neq -1/4+c$ with $c < 0$, (y_n) has order 2^p while it has order one only when $a = -1/4$.

Finally we can also use the ε-algorithm as follows

$$v_o = y_n$$
$$v_1 = 1+a/v_o$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{2p} = 1+a/v_{2p-1}$$

Then, applying the ε-algorithm to $v_o, \ldots, v_{2p}$ we set

$$y_{n+1} = \varepsilon_{2p}^{(o)}$$

If k exists such that $y_n = C_k$ then, from theorem 2, we have in both cases $y_{n+1} = C_{(p+1)k+p(p+2)}$. Thus if $y_o = C_o = 1$, $y_n = C_{N_n}$ with

$$N_n = (p+2)\ [(p+1)^n-1]$$

If $a \neq -1/4+c$ with $c < 0$, (y_n) has order $p+1$ and it has order one if $a = -1/4$.

The repeated application of Aitken's process is more powerful than Shanks'transformation.

REFERENCES

[1] C. BREZINSKI
Accélération de la convergence en analyse numérique.
LNM 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[2] C. BREZINSKI
Vitesse de convergence d'une suite.
Rev. Roumaine Math. Pures Appl., to appear.

[3] A. MORET-BLANC
Question 1111.
Nouv. Ann. Math., (2) 12 (1878) 477-480.

[4] G.M. PHILLIPS
Aitken sequences and Fibonacci numbers.
Amer. Math. Monthly, 91 (1984) 354-357.

[5] J.A. SERRET
Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier.
J. Math. Pures Appl., 12 (1847) 518-520.

[6] D. SHANKS
Non linear transformations of divergent and slowly convergent sequences.
J. Math. Phys., 34 (1955) 1-42.

[7] P. WYNN
On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation.
MTAC, 10 (1956) 91-96.

SOME SEQUENCE TRANSFORMATIONS and k-PERIODIC CONTINUED FRACTIONS

A. Lembarki.

Abstract.

Consider a k-periodic continued fraction

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} + \dots$$

where a_n and b_n are complex numbers such that, $a_{nk+i} = a_i$ and $b_{nk+i} = b_i$; $i=0,\dots,k-1$; $n=0,1,\dots$. The $T_{p,q}$ process, which is a generalization of Aitken's process is applied to the sequence of successive convergents

$$c_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

According to how p and q are choosen, a part of the sequence obtained is a subsequence of the original one. Modifying p and q at each stage the whole sequence obtained is a subsequence of the original sequence. The same property is valid when the process is used repeatedly.

0 - INTRODUCTION.

Consider a k-periodic continued fraction,

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} + \dots \qquad (1)$$

where, a_n, $b_n \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{nk+i}=a_i$ and $b_{nk+i}=b_i$ for $i = 0,\dots,k-1$ and $n=0,1,\dots$.

Let

$$c_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

be the nth convergent.

In the case $k=1$ and $a_n=b_n=1$, PHILLIPS [10] showed that applying repeatedly Aitken's Δ^2 process to the sequence $\langle C_n \rangle$, give subsequences of $\langle C_n \rangle$. This result and others were simultaneously generalized to the case where $a_n=a$ and $b_n=b$ by, Mc CABE and PHILLIPS [7] and BREZINSKI and LEMBARKI [2]. In this paper, we are dealing with the case where k is an arbitrary integer ($k \in \mathbb{N}^*$).

When k is greater than 1 the results given by the authors mentioned above are not valid (see Remark 2.2 hereafter). Instead of Aïtken's process we consider the $T_{p,q}$ process which is a special case of the process defined in [3].

$$T_{p,q}^{(1,n)} = \frac{c_n(c_{n+p+q}-c_{n+p})-c_{n+p}(c_{n+q}-c_n)}{(c_{n+p+q}-c_{n+p})-(c_{n+q}-c_n)} \qquad n=0,1,\dots$$

where $p,q \in \mathbb{N}^*$.

Of course, $T_{1,1}$ is Aitken's process [1], $T_{1,p}$ is T_{+p} [4] and $T_{k,k}$ is Δ_{+k} [3].

Remark that $T_{p,q}$ is symmetric with respect to p and q, that is $T_{p,q}=T_{q,p}$. The purpose of this paper is to show that if $k=1$, the sequence obtained when $T_{p,q}$ is applied repeatedely is a subsequence of the initial sequence (section 1).

When k is greater than 1, no terms of $\langle C_n \rangle$ are obtained in general. But when p (or q) is choosen to be a multiple of k then a subsequence of

$\langle T_{p,q}^{(1,n)} \rangle$ is contained in $\langle C_n \rangle$. This property is lost when the process is used repeated ly even if p and q are modified. When the rule of $T_{p,q}$ is modified by changing at each stage the value of q (or equivalently p) a new process called the $T_{p,q}$-cyclic process is obtained. So, repeated $T_{p,q}$-cyclic leads to subsequences of $\langle C_n \rangle$ (section 2 and 3).

We show in particular that in the case where $k=1$, $T_{p,q}$ does not depend on how p and q are separatly choosen, but it depends only on the sum p+q. When k is arbitrary this remark is not valid in general, but if p (or q) is kept to be a multiple of k then the property holds.

Let us recall some notations and propeties.

Let C_n be the nth convergent of (1) as defined before. C_n may be computed by [9] :

$$C_n = A_n/B_n$$
$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}$$
$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \qquad (2)$$
$$A_0 = b_0,\ A_{-1} = 1\ ;\ B_0 = 1,\ B_{-1} = 0$$

Let,

$$B_{m,n+1} = b_{n+1} B_{m,n} + a_{n+1} B_{m,n-1}$$
$$B_{o,n} = B_n,\ B_{m,m} = 1,\ B_{m,m-1} = 0 \qquad n \geqslant m \geqslant o \quad (3)$$

We may prove inductively the following identities, for further details see [8], [9], [11], [12].

$$.B_n = B_{m-1,n} B_{m-1} + a_m B_{m,n} B_{m-2} \qquad n \geqslant m \geqslant 1 \quad (4)$$
$$.A_n B_m - A_m B_n = (-1)^m a_1 \ldots a_{m+1} B_{m+1,n} \qquad n \geqslant m \quad (5)$$
$$.B_{r-1,n} = b_r B_{r,n} + a_{r+1} B_{r+1,n} \qquad n+1 \geqslant r \geqslant 1 \quad (6)$$
$$.B_{r-1,n} B_{r,m} - B_{r-1,m} B_{r,n} = (-1)^{m-r} a_{r+1} \ldots a_{m+1} B_{m+1,n}$$
$$n \geqslant m \geqslant r$$

We refer to [5], [13] for convergence of k-periodic continued fractions.

1 - 1-Periodic continued fractions (k=1).

Let $a_n=a$ and $b_n=b$ for all n. To avoid trivial cases we assume $ab\neq o$.

Let u and u' are the two zeros of $y^2-by-a=0$. Since $a \neq 0$ we have $u.u' \neq 0$. Let $\rho = u'/u$.

In the same way as done in [6] we get :

$$. \; C_n = u. \frac{1-\rho^{n+2}}{1-\rho^{n+1}} \qquad \text{if } u \neq u'$$

$$. \; C_n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{b}{2} \qquad \text{if } u = u'.$$

We assume $\rho^n \neq 1$ for $n = 1,2,\ldots,$ when $u \neq u'$.

Let $p,q\in\mathbb{N}^*$ are two fixed integers. Let $\langle T_{p,q}^{(m,n)}\rangle_n$ the sequence obtained when the $T_{p,q}$ process is applied to the sequence $\langle C_n\rangle$ m times repeatedly.

$$T_{p,q}^{(m,n)} = \frac{T_{p,q}^{(m-1,n)}\left(T_{p,q}^{(m-1,n+p+q)}-T_{p,q}^{(m-1,n+p)}\right)-T_{p,q}^{(m-1,n+p)}\left(T_{p,q}^{(m-1,n+q)}-T_{p,q}^{(m-1,n)}\right)}{\left(T_{p,q}^{(m-1,n+p+q)}-T_{p,q}^{(m-1,n+p)}\right)-T_{p,q}^{(m-1,n+p)}\left(T_{p,q}^{(m-1,n)}\right)}$$

where $T_{p,q}^{(o,n)} = C_n$.

Theorem 1.1.

For any integers $p \neq o$ and $q \neq o$,

i) $T_{p,q}^{(m,n)} = C_{2^m(n+1)+m2^{m-1}(p+q)-1}$ $\qquad n,m=0,1,\ldots$

ii) $T_{p,q}^{(m+r,n)} = T_{2^rp,\,2^rq}^{(m,\,2^r(n+1)+r2^{r-1}(p+q)-1)}$ $\qquad r = 0,1,\ldots$

Proof.

i) Let,

$$S_n = u \cdot \frac{1-\rho^{\alpha n+\beta p+\gamma q+\delta}}{1-\rho^{\alpha n+\beta p+\gamma q+\delta-1}}$$

Simple computations give,

$$\frac{S_n(S_{n+p+q}-S_{n+p})-S_{n+p}(S_{n+q}-S_n)}{(S_{n+p+q}-S_{n+p})-(S_{n+q}-S_n)} = u.\ \frac{1-\rho^{2\alpha n+(\alpha+2\beta)p+(\alpha+2\gamma)q+2\delta-1}}{1-\rho^{2\alpha n+(\alpha+2\beta)p+(\alpha+2\gamma)q+2\delta-2}}$$

Therefore, one applictaion of $T_{p,q}$ to the sequence (S_n) transforms α into 2α, β into $\alpha+2\beta$, γ into $\alpha+2\gamma$ and δ into $2\delta-1$. Let $(S_n^{(1)})$ the sequence thus obtained. Repeating this m times we get,

$$S_n^{(m)} = u\ (1-\rho^{*})/(1-\rho^{*-1})$$

where, $* = 2^m\alpha+(m2^{m-1}\alpha+2^m\beta)p+(m2^{m-1}\alpha+2^m\gamma)q+2^m\delta-2^m+1$.

Now, for $\alpha=1$ and $\beta=\gamma=o$ and $\delta = 2$, we have $S_n = C_n$ and $S_n^{(m)}=T_{p,q}^{(m,n)}$. The assertion 1) follows when $u \neq u'$.

In the case $u = u'$ we consider ,

$$t_n = \frac{\alpha n+\beta p+\gamma q+\delta}{\alpha n+\beta p+\gamma q+\delta-1} \cdot \frac{b}{2}$$

Applying $T_{p,q}$ to (t_n), α and β and γ and δ are transformed in the same way as before. This ends the proof of i).

ii) Assertion ii) follows immediately from i).

Remark 1.

1.1 Assertion i) shows in particular that $T_{p,q}$ depends only on the sum p+q. Never mind how p and q are choosen.

1.2 The second assertion displays the importance of repeating $T_{p,q}$ instead of increasing p and q.

2 - k-Periodic continued fractions.

We consider in this section the case where k is an arbitrary integer. As it has been said in the introduction, Aitken's Δ^2 process does not yield terms of the original sequence (see the numerical example in remak 2.2). But some choices of p and q lead to terms of (C_n) as we shall see.

We assume $C_n \neq C_m$ for $n \neq m$ and $T_{p,q}$ is defined.

Theorem 2.1.

Let $u \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $v \in \mathbb{N}$ and $i \in \{0,\dots,k-1\}$ such that $vk+k-i-1 \neq 0$. Then,

i) $T^{(1,mk+i)}_{uk,vk+k-i-1} = C_{(2m+u+v)k+i}$ $\qquad m = 0,1,2,\dots$

ii) $T^{(1,mk+k-1)}_{uk,q} = C_{(2m+u+2)k+q-1}$ $\qquad m = 0,1,2,\dots$

Proof.

We immediately get the condition,

$$T^{(1,n)}_{p,q}=C_{n+r} \Leftrightarrow (C_{n+p+q}-C_{n+p})(C_{n+r}-C_n)-(C_{n+q}-C_n)(C_{n+r}-C_{n+p})=0$$

Using (5), the previous condition becomes,

$$B_{n+p+1,n+p+q}B_{n+1,n+r}B_{n+q}-B_{n+1,n+q}B_{n+p+1,n+r}B_{n+p+q} = 0.$$

Let $p = uk$.

Now, the k-periodicity of a_n and b_n gives, $B_{n+uk+1,n+uk+q} = B_{n+1,n+q}$. But, $B_{n+1,n+q} \neq 0$ because (5) and the assumption on the sequence (C_n).

Thereforth, $T^{(1,n)}_{uk,q}= C_{n+r} \Leftrightarrow B_{n+1,n+r}B_{n+q}-B_{n+uk+1,n+r}B_{n+uk+q}=0$.

Let, $n = mk+i$, $i \in \{0,\dots,k-1\}$.

The previous condition becomes,

$$\Delta_i = B_{i+1,r+i}B_{mk+q+i}-B_{i+1,r+i-uk}B_{mk+uk+q+i}$$

and $\Delta_i = 0$. Now, if $i = k-1$ and $r=(m+u+1)k+q$ we immediately get $\Delta_i=0$ which demonstrates ii).

To prove i), let $q = vk+k-i-1$ and $r=(m+u+v+1)k$. Then,

$$\Delta_i=B_{i+1,(m+u+v+1)k+i}B_{(m+v+1)k-1}-B_{i+1,(m+v+1)k+i}B_{(m+u+v+1)k-1}$$

Or equivalently (because the periodicity of a_n and b_n),

$$\Delta_i=B_{(m+v+1)k+i+1,(2m+u+2v+2)k+i}\,B_{(m+v+1)k-1}$$
$$-B_{(m+u+v+1)k+i+1,(2m+u+2v+2)k+i}\,B_{(m+v+1)k-1}.$$

No, because $C_n \neq C_{n+1}$ it follows from (5) that

$$\prod_{i=0}^{k-1} a_i \neq 0.$$

. Assume $i = 0$, using (4) we get ,

$$a_1\Delta_0 = B_{(2m+u+2v+2)k}-B_{(m+v+1)k,(2m+u+2v+2)k}B_{(m+v+1)k}$$
$$- B_{(2m+u+2v+2)k}-B_{(m+u+v+1)k,(2m+u+2v+2)k}B_{(m+u+v+1)k} = 0$$

Hence $\Delta_0 = 0$.

. Assume $\Delta_j = 0$ for $j = 0,\ldots,i$.

Let $\alpha = m+v+1$.

Using (6) and (3) we get,

$$a_{i+2}\Delta_{i+1} = B_{\alpha k-1}b_{i+1}(B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i}-a_{i+1}B_{\alpha k+i+1,(2\alpha+u)k+i-1})$$
$$- B_{(\alpha+u)k-1}b_{i+1}(B_{(\alpha+u)k+i-1,2\alpha+u)k+i}-a_{i+1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i-1})$$
$$+a_{i+1}(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i-1}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i-1})$$
$$-b_{i+1}^2\Delta_i.$$
$$= b_{i+1}(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i})$$
$$-b_{i+1}a_{i+1}(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i+1,(2\alpha+u)k+i-1}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i+1,(2\alpha+u)k+i-1}).$$

Using again (6) and (3) to decompose the last parenthesis, we finally obtain,

$$a_{i+2}\Delta_{i+1} = b_{i+1}\,[(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+1,(2\alpha+u)k+i})$$
$$- (B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i-1}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i-1,(2\alpha+u)k+i-1})].$$

Let, H_i be the bracket.

Using (3) we have,

$$B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i}$$
$$= b_i[(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i-1}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i-1}]$$
$$+ a_i[(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i-2}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i-2}]$$
$$= a_i[(B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i,(2\alpha+u)k+i-2}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i,(2\alpha+u)k+i-2}] \quad (*)$$

Using (6), (*) becomes,

$$B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i-2,(2\alpha+u)k+i-2}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i-2,(2\alpha+u)k+i-2}$$
$$-b_{i-1}[B_{\alpha k-1}B_{\alpha k+i-1,(2\alpha+u)k+i-2}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k+i-1,(2\alpha+u)k+i-2}]$$

Now the bracket is zero by (4) when $i = o$, and is trivially verified when $i=1$ and because $\Delta_j = o$ $j = o,\ldots,i$.

Therefore, $H_i = -H_{i-1}$.

To end the proof it suffices to show that $H_o=0$.

Now,

$$H_o = \langle B_{\alpha k-1}B_{(\alpha+u)k}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{\alpha k}$$

$$-\langle B_{\alpha k-1}B_{\alpha k-1,(2\alpha+u)k-1}-B_{(\alpha+u)k-1}B_{(\alpha+u)k-1,(2\alpha+u)k-1}\rangle.$$

Because (6) the second parenthesis becomes,

$$- a_{\alpha k}B_{(\alpha+u)k-1}B_{\alpha k-2}+a_{(\alpha+u)k}B_{(\alpha+u)k-2}$$

Hence,

$$H_o = B_{\alpha k-1}\langle B_{(\alpha+u)k}-a_{(\alpha+u)k}B_{(\alpha+u)k-2}\rangle-B_{(\alpha+u)k-1}B_{\alpha k}-a_{\alpha k}B_{\alpha k-2}\rangle=0$$

from (2).

□

Remark 2.

2.1 As it were mentionned before, $T_{p,q}$ is symmetric on p and q. So the lower indexes in theorem 2.1 may be inverted without changing the result.

2.2. We require p or q to be a multiple of k. This condition is necessary to have some terms of $\langle C_n\rangle$. To see this consider the numerical example :

$$k=2\ ;\ 1 + \frac{3}{1} + \frac{5}{1} + \frac{3}{1} + \ldots = 1.79128784747792$$

n	C_n	n	$T_{1,1}^{(1,n)}$	n	$T_{3,3}^{(1,n)}$
0	1	0	2.636363636363636	0	1.9317269076[illegible]
1	4	1	2.125	1	1.8338839075[illegible]
2	1.5	2	1.971014492753623	2	1.8287487420[illegible]
3	2.333333333333333	3	1.878411910669975	3	1.8041124556[illegible]
4	1.692307692307692	4	1.842404306220096	4	1.8026586357[illegible]
5	1.954545454545455	5	1.817666509211148	5	1.7953523474[illegible]
6	1.758620689655172	6	1.807199125984705	6	1.7949016799[illegible]
7	1.843137254901961	7	1.799668672249776	7	1.7925985568[illegible]
8	1.780612244897959	8	1.796389113981542	8	1.7924543075[illegible]
9	1.808022922636103	9	1.79399283429252	9	1.7917129463[illegible]
10	1.787810383747178	10	1.79293920631052	10	1.7916662771[illegible]
11	1.796717171717172	11	1.792165404493095	11	1.7914259765[illegible]
12	1.790156301962089	12	1.791824100856587	12	1.7914108243[illegible]
13	1.793052201374698	13	1.791573022866034	13	1.7913327576[illegible]
14	1.790919776667646	14	1.791462165731206	14	1.7913278324[illegible]
15	1.791861514480269	15	1.791380569969517	15	1.7913024520[illegible]
16	1.791168134317056	16	1.791344531439436	16	1.7913008505[illegible]
17	1.791474403884715	17	1.791318000789922	17	1.7912925971[illegible]
18	1.791248912804534	18	1.791306281687612	18	1.7912920763[illegible]
19	1.791348519046171	19	1.791297653885793		
20	1.791275184786953	20	1.791293842684303		
21	1.791307579351455	21	1.791291036760 61		
22	1.791283729217555	22	1.791289797271897		

3 - In general, for fixed p and q, $T_{p,q}^{(1,n)}$ is a term of the original sequence only for the values of n as defined in theorem 2.1. This appears clearly through this example.

$$k=3\ ;\ 1 + \frac{3|}{|1} + \frac{5|}{|1} + \frac{2|}{|1} + \frac{3|}{|1} + \ldots = 1.8770145580216$$

n	C_n
0	1
1	4
2	1.5
3	2.125
4	1.692307692307692
5	1.954545454545455
6	1.838983050847458
7	1.911392405063291
8	1.864238410596027
9	1.883615084525358
10	1.871240601503759
11	1.879206428930186
12	1.875892071561248
13	1.878001989484155
14	1.876641065415611
15	1.877206115540346
16	1.876846209046023
17	1.877078274664666
18	1.876981887275496
19	1.877043275152304
20	1.877003690316346
21	1.877020130686967
22	1.877009659862562
23	1.877016411713244
24	1.877013607505845
25	1.877015393492587
26	1.877014241841521
27	1.877014720149295

n	$T_{3,1}^{(1,n)}$	
0	1.983193277310924	
1	1.911392405063291	$= c_7$
2	1.883615084525358	$= c_9$
3	1.879985296820437	
4	1.878001989484155	$= c_{13}$
5	1.877206115540346	$= c_{15}$
6	1.877100890771424	
7	1.877043275152304	$= c_{19}$
8	1.877020130686967	$= c_{21}$
9	1.877017069656388	
10	1.877015393492587	$= c_{25}$

n	$T_{3,3}^{(1,n)}$	
0	1.89695945945946	
1	1.89239662072032	
2	1.879206428930186	$= c_{11}$
3	1.877590513050276	
4	1.877459506741336	
5	1.877078274664666	$= c_{17}$
6	1.877031310910066	
7	1.877027500946 48	
8	1.877016411713244	$= c_{23}$
9	1.877015045417644	
10	1.877014934573958	

n	$T_{3,2}^{(1,n)}$	
0	1.838983050847458	$= c_6$
1	1.859733978234583	
2	1.871240601503759	$= c_{10}$
3	1.875892071561248	$= c_{12}$
4	1.876508525243578	
5	1.876846209046023	$= c_{16}$
6	1.876981887275496	$= c_{18}$
7	1.876999832994732	
8	1.877009659862562	$= c_{22}$
9	1.877013607505845	$= c_{24}$
10	1.877014129617714	

4 - When $k=2$, theorem 2.1 gives $T^{(1,n)}_{2u,2v+1} = C_{2(n+u+v+1)}$ $n = 0,1,\ldots$.
But if the process is repeated no term of (C_n) is obtained.

Example : $k=2$; $b_n=1$, $a_1=3$, $a_2=5$. The first terms of (C_n) are those displayed in remark 2.2.

n	C_n	n	$T^{(1,n)}_{2,1}$	n	$T^{(2,n)}_{2,1}$
23	1.791294264803061	0	1.692307692307692	0	1.79136467576
24	1.791286508106444	1	1.758620689655172	1	1.79129597370
25	1.791289934565222	2	1.780612244897959	2	1.79128870700
26	1.791287411877677	3	1.787810383747178	3	1.79128793839
27	1.791288526255462	4	1.790156301962088	4	1.79128785709
28	1.791287705808824	5	1.790919776667646	5	1.79128784845
29	1.791288068234 88	6	1.791168134317056	6	1.79128784755
30	1.791287801403263	7	1.791248912804534	7	1.79128784748
31	1.791287919274106	8	1.791275184786953	8	1.79128784747
32	1.791287832493184	9	1.791283729217555	9	1.79128784747
33	1.791287870827999	10	1.791286508106444	10	1.79128784747
34	1.791287842604475	11	1.791287411877677	11	1.79128784747
35	1.791287855072003	12	1.791287705808824	12	1.79128784747
36	1.791287845892943	13	1.791287801403263	13	1.79128784747
37	1.791287849947723	14	1.791287832493184	14	1.79128784747
38	1.791287846962442	15	1.791287842604475	15	1.79128784747
39	1.791287848281168	16	1.791287845892943	16	1.79128784747
40	1.791287847310273	17	1.791287846962442	17	1.79128784747
41	1.791287847739158	18	1.791287847310273	18	1.79128784747
42	1.791287847423397	19	1.791287847423397		
43	1.791287847562882	20	1.791287847460188		
44	1.791287847460188	21	1.791287847472153		

In case $k=1$, $T_{p,q}$ depends only on the sum $p+q$, see remark 1.1. when $k>1$ this property is not valid as it appears through the next example. But if p (or q) is kept as a multiple of k then the property holds (property 2.1 hereafter).

Example : $k = 2$, $p+q = 8$; $b_n = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$.

n	$T^{(1,n)}_{6,2}$	n	$T^{(1,n)}_{4,4}$	n	$T^{(1,n)}_{5,3}$
0	1.793522267206478	0	1.793522267206478	0	1.844394296850959
1	1.796717171717172	1	1.796717171717172	1	1.805597652597298
2	1.791524085285602	2	1.791524085285602	2	1.805903010693288
3	1.791861514480269	3	1.791861514480269	3	1.795678710631525
4	1.791312833858376	4	1.791312833858376	4	1.795767517170314
5	1.791348519046171	5	1.791348519046171	5	1.792688266823455
6	1.791290490344236	6	1.791290490344236	6	1.792716051340261
7	1.791294264803061	7	1.791294264803061	7	1.791740388994508
8	1.791288127021123	8	1.791288127021123	8	1.791749309597828
9	1.791288526255462	9	1.791288526255462	9	1.791434718451595
10	1.791287877045983	10	1.791287877045983	10	1.791437607454284
11	1.791287919274106	11	1.791287919274106	11	1.791335581370198
12	1.791287850605417	12	1.791287850605417	12	1.791336519660579
13	1.791287855072003	13	1.791287855072003	13	1.791303368399097
14	1.791287847808724	14	1.791287847808724	14	1.791303673420008
15	1.791287848281167	15	1.791287848281167	15	1.791292894940876
16	1.79128784751291	16	1.79128784751291	16	1.791292994127571

Property 2.1.

Let $u, v \in \mathbb{N}^*$ and $p \geqslant 1-uk$ and $p \geqslant 1-vk$, then

$$T^{(1,n)}_{uk,vk+p} = T^{(1,n)}_{uk+p,vk} \qquad n = 0,1,\ldots$$

Proof.

It suffices to prove $T^{(1,n)}_{uk,r} = T^{(1,n)}_{(u-qk,r+qk)}$ where $q \in \mathbb{Z}$ and $r \in \mathbb{N}^*$ satisfying $u-q \geqslant 1$ and $r+qk \geqslant 1$. Indeed ; we should have :

$$\begin{aligned} T^{(1,n)}_{uk,vk+p} &= T^{(1,n)}_{(u+v)k,p} \\ &= T^{(1,n)}_{p,(u+v)k} \ \text{(symetry)} \\ &= T^{(1,n)}_{uk+p,vk}. \end{aligned}$$

Now, we prove :

$$T^{(1,n)}_{uk,r} = T^{(1,n)}_{(u-q)k,r+qk}.$$

Let $r = vk+t$.

Using (5), we must prove $A(t) = 0$, where,

$$\begin{aligned} A(t) = (-1)^q a_{n+(u-q)k+2} \cdots a_{n+uk+1} B_{n+1,n+(u-q)k} B_{n+vk+t} \\ - B_{n+1,n+uk} B_{n+(v+q)k+t} + B_{n+1,n+qk} B_{n+(u+v)k+t}. \end{aligned}$$

Using (7) replacing r by $n+(u-q)k+1$ and n by $n+(2u-q)k$ and m by $n+uk$, we get,

$$A(t) = (B_{n,n+qk}B_{n+1,n+uk}-B_{n,uk}B_{n+1,n+qk})B_{n+vk+t}$$
$$- B_{n+1,n+uk}B_{n+(v+q)k+t}+B_{n+1,n+qk}B_{n+(u+v)k+t}.$$

or equivalently

$$A(t) = B_{n+1,n+uk}(B_{n,n+qk}B_{n+vk+t}-B_{n+(v+q)k+t})$$
$$- B_{n+1,n+qk}(B_{n,n+uk}B_{n+vk+t}-B_{n+(u+v)k+t})$$

From (4), it follows that,

$$B_{n,n+qk}B_{n+vk}-B_{n+(v+q)k} = -a_{n+1}B_{n+1,n+qk}B_{n+vk-1} \neq 0.$$

Hence, $\Delta_0 = 0$ if,

$$B_{n+(u+v)k} - a_{n+1}B_{n+1,n+uk}B_{n+vk-1} - B_{n,n+uk}B_{n+vk}=0,$$

which is verified because (4).

. If $t = 1$

Using (2) we get,

$$A(1) = b_{n+1}A(o) + a_{n+1}\{B_{n+1,n+uk}[B_{n,n+qk}B_{n+vk+t}-B_{n+(v+q)k+1}]$$
$$- B_{n+1,n+qk}(B_{n,n+uk}B_{n+vk-1}-B_{n+(u+v)k-1}]\}$$

$$= (a_{n+1}B_{n+1,n+uk}B_{n+vk-1})B_{n,n+qk} - (a_{n+1}B_{n+1,n+uk}B_{n+(v+q)k-1})$$
$$- (a_{n+1}B_{n+1,n+qk}B_{n+vk-1})B_{n,n+uk} + (a_{n+1}B_{n+1,n+qk}B_{n+(u+v)k-1}).$$

Developping each parenthesis using (4), we immediately get $A(1) = 0$.

. Now, assume $A_j = 0$ $j = 0,\ldots,t$; $t\geqslant 1$.

To express $B_{n+vk+t+1}$ and $B_{n+(v+q)k+t+1}$ and $B_{n+(u+v)k+t+1}$ using (2) and substituting we get,

$$A(t+1) = b_{n+t+1}A(t)+a_{n+t+1}A(t-1)$$
$$= 0, \text{ because } A(t) = 0 \text{ and } A(t-1) = 0.$$

□

3° - $T_{p,q}$ -Cyclic.

Let us define the $T_{p,q}$-cyclic process as follows : let $u\in\mathbb{N}^*$ and $v\in\mathbb{N}^*$.

-1- Let $m = 0$

-2- Compute $T^{(1,mk+i)}_{uk,vk+k-i-1}$ $i = o$ to $k-1$

-3- Let $m = m+1$ go to -2-.

Now, the repated $T_{p,q}$-cyclic process is defined as,

$$T^{(r+1,mk+i)}_{uk,vk+k-i-1} = [T^{(r,mk+i)}_{uk,vk+k-i-1}(T^{(r,(m+u+v)k+k-1)}_{uk,vk} - T^{(r,(m+u)k+i)}_{uk,vk+k-i-1})$$
$$- T^{(r,(m+u)k+i)}_{uk,vk+k-i-1}(T^{(r,(m+v)k+k-1)}_{uk,vk} - T^{(r,mk+i)}_{uk,vk+k-i-1})]/(*)-(**).$$

where, $T^{(0,n)}_{p,q} = C_n$ and, $(*)$ and $(**)$ are respectively the two parenthesis of the numerator.

Theorem 3.1.

Let $u\in\mathbb{N}^*$ and $v\in\mathbb{N}^*$ then,

$$T^{(r,mk+i)}_{uk,vk+k-i-1} = C_{(2^r(m+1)+r2^{r-1}(u+v)-1)k+i} \qquad m=0,1,\ldots$$
$$i=0,\ldots k-1.$$

Proof.

We establish the assertion by induction on r.

If $r = o$ or $r = 1$, theorem 2.1 concludes. Now, the assertion is assumed to be true up to some $r\geqslant 1$.

To show that the property is valid for $r+1$, using (5) we must show,

$$B_{i+1}(2^r(m+1)+r2^{r-1}(u+v)+2^r(u+v)k+i}B(2^r(m+v+1)+r2^{r-1}(u+v)-1)k+k-1$$
$$- B_{i+1}(2^r(m+1)+r2^{r-1}(u+v)+2^rv)k+i}B(2^r(m+u+v+1)+r2^{r-1}(u+v)k-1)k+k-1=0$$

Which is satisfied, because $\Delta_i = 0$, where Δ_i is defined in the proof of theorem 2.1.

□

REFERENCES

[1] A.C. AITKEN ; On Bernouilli's numerical solution of algebraic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburg 46, (1926) 289-305.

[2] C. BREZINSKI and A. LEMBARKI ; Acceleration of extended Fibonacci sequences, Applied NumM. Math., 1 (1985), 1-8.

[3] J.P. DELAHAYE ; Theorie des transformations de suites en Analyse Numérique. Applications. Thèse, Université de Lille 1, France (1982).

[4] H.L. GRAY and CLARK ; On a class of nonlinear transformations and the applications to the evaluation of infinite series. J. Res. Nat. Bur. Standards sect. B, 73 B (1969) 251-274.

[5] W.B. JONES and W.J. THRON ; Continued fractions : Analytic theory and applications, Encyclopedia of math. and its applications, N° 11, Adisson-Wesley Publishing Compagny, Reading, Mass. 1980.

[6] A.N. KHOVANSKII ; the application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory . P. Nooros, N.V. Groningen, the Netherlands 1963.

[7] J.H. McCABE and G.M. PHILLIPS ; Aitken sequences and generalized Fibonacci Numbers, Math. of Computation, 45, 172 n(1985) 553-558.

[8] P. MONTEL ; Leçons sur les récurrences et leurs applications. Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[9] D. PERRON ; Die lehre Von der Kettenbrüchen. Chelsea Publishing company New-York, 1929

[10] G.M. PHILLIPS ; Aitken sequences and Fibonacci Numbers. Amer. Math. Monthly, V. 91, (1984), 354-357.

[11] A. PRINGSHIEM ; Über die Konvergenz Kettenbrüche. Stizung sberichte der math. phys. Klasse der K. Bayer. Academie der Wissen shaften. Bd. 28, (1898), 295-324.

[12] M. Von PIDOLL : Betrage zur lehre Von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Akademishe Buchdruckerei Von F. Straub, München (1912)fffff, 1-51.

[13] H.S. WALL ; Analytic theory of continued fractions. D. Van Nostrand co. New York (1948).

THE LINEAR CONVERGENCE OF LIMIT PERIODIC CONTINUED FRACTIONS

C. BREZINSKI, A. LEMBARKI

ABSTRACT.

The only linearly convergent continued fractions are limit periodic.

Let us consider the continued fraction

$$\frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \dots$$

where the a_n are complex numbers and $a_n \neq 0$, $n = 1,\dots$

Let $C_n = A_n/B_n$ be its convergents. We set $h_n = B_n/B_{n-1}$. We know (see e.g. [7], [6]) that, if $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ exists $a \in \mathbb{C}$ and $a \neq -\frac{1}{4} + c$ with $c \leq 0$ then the continued fraction is "convergent" in the sense that, $\lim_{n\to\infty} C_n = C \in \mathbb{C}$ or $\lim_{n\to\infty} |C_n| = \infty$. The last case may occur when, $\frac{a_2|}{|1} + \dots = -1$.

For example, the convergents c'_n of the continued fraction :

$$\frac{1|}{|1} - \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|1} + \dots$$

are given by, $C'_n = \frac{1}{3}[1 - (-2)^n]$ $n = 0,1,\dots$ and we have $\lim_{n\to\infty} |C'_n| = \infty$.

Theorem 1.

If, $\exists a \in \mathbb{C}$, $a \neq -\frac{1}{4} + c$ *with* $c \leq 0$ *such that* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *then* $\exists r \in \mathbb{C}$, $|r| < 1$ *such that* :

- *If* $\lim_{n\to\infty} C_n = C$ *is finite then* $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$, *where* $r = -x_1/(1+x_1)$ *and* x_1 *is the root of smallest absolute value in* $x^2+x-a = 0$.

- *If* $\lim_{n\to\infty} |C_n| = \infty$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C'}{C_{n-1} - C'} = 1/r \ \forall C' \in \mathbb{C}$.

  (*If* $r = 0$ *the last assertion means* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n - C'}{C_{n-1} - C'}\right| = \infty$).

Proof.

If $a \neq -\frac{1}{4} - c$ with $c \leq 0$ the sequence (C_n) is "convergent". Now, the two roots of $x^2+x-a=0$ have distinct modulii. Since $B_{n+1} = B_n + a_{n+1}B_{n-1}$ then, by Poincaré's theorem [10], $\exists h \in \mathbb{C}$ such that $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ and h is one of the roots.

But we have [11]

$$\frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} = -1 + 1/h_{n+1} \tag{1}$$

1 - If $\lim_{n\to\infty} C_n = C$ is finite then $h \neq 0$. Hence, $\exists r \in \mathbb{C}$ such that $\lim_{n\to\infty} \Delta C_n / \Delta C_{n-1} = r$ with $|r| \leq 1$. Since the two roots have distinct modulii then $|r| < 1$. Then by a result of Delahaye [2] $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$.

2 - If $\lim_{n\to\infty} |C_n| = \infty$ and $a \neq 0$ then $h \neq 0$. Hence, $\exists r' \in \mathbb{C}$, $|r'| > 1$ such that, $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} = r'$. Let, $r = 1/r'$, a result of Delahaye [2] gives, $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C'}{C_{n-1} - C'} = 1/r$ $\forall C' \in \mathbb{C}$.

Now, if $a = 0$, the two roots are 0 and 1. Since $\lim_{n\to\infty} |C_n| = \infty$ then $h = 0$. Hence, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}}\right| = r'$ where $r' = \infty$. But, from [2, prop. 3, p. 224] we may easily derive $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C'}{C_{n-1} - C'} = 1/r$ with $r = 1/r'$.

□

The first part of this theorem was given in [9] where the authors have omitted the hypothesis : $\lim_{n\to\infty} C_n$ is finite.

Let us now give the reciprocal of this theorem.

Theorem 2.

If $\exists r \in \mathbb{C}$, $r \neq -1$ *such that* $\lim_{n\to\infty} \Delta c_n/\Delta c_{n-1} = r$ *then* $\exists a \in \mathbb{C}$, *such that* $\lim_{n\to\infty} a_n = a = r/(1+r)^2$.

Proof.

From (1) we see that, if $r \neq -1$, $\exists h \neq 0$ and finite such that $\lim_{n\to\infty} h_n = h$.

But $h_{n+1} = 1 + a_{n+1}/h_n$ or $h_n(h_{n+1}-1) = a_{n+1}$ wich shows that $\exists a \in \mathbb{C}$ such that $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

□

Let us study this reciprocal in more detail. As we saw before r and h are related by $h = (1+r)^{-1}$.

If $r = e^{i\theta}$, that is if $|r| = 1$,

$$h = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

Hence $|h|^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sin^2\theta}{4(1+\cos\theta)^2} = \frac{1}{4} - c$ with $c \leq 0$.

Thus, if $|r| \neq 1$, then $|h| \neq (\frac{1}{4} - c)^2$ with $c \leq 0$. Let us now examine $|a|$.

If $|r| = 1$, then

$$a = -\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\sin^2\theta}{4(1+\cos\theta)^2} = -\frac{1}{4} + c.$$

Finally, if $|r| \neq 1$ then $a \neq -\frac{1}{4} + c$ with $c \leq 0$. This last result can be gathered with that of theorem 1 and we get the :

Theorem 3.

$\exists r \in \mathbb{C}^*$ $|r| \neq 1$, $\exists C \in \mathbb{C}$ *such that* $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$ *if and only if* $\exists a \in \mathbb{C}^*$, $a \neq -\frac{1}{4} + c$ *with* $c \leq 0$ *such that* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *Moreover* a *and* r *are related by* $a = -r/(1+r)^2$.

Proof.

$\Rightarrow$) If $\exists C \in \mathbb{C}, \exists r \in \mathbb{C}$ $r \neq 1$ such that $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$ then $\lim_{n\to\infty} \Delta C_n / \Delta C_{n-1} = r$, [2].

By the theorem 2, if $r \neq -1$, then $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ exists with $a = -r/(1+r)^2$. Since $r \neq 0$ is assumed then $a \neq 0$.

Moreover, as we saw above, if $|r| \neq 1$ then $a \neq -\frac{1}{4} + c$ with $c \leq 0$.

$\Leftarrow$) If $a \neq -\frac{1}{4} + c$ with $c \leq 0$ and $a \neq 0$ are assumed, then :

* If $\lim_{n\to\infty} C_n = c$ is finit, the case 1 in the proof of theorem 1 gives, $\exists r \in \mathbb{C}$ such that $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$ with $|r| < 1$ and $h \neq 1$ because $a \neq 0$. Since $r = -1 + 1/h$ then $r \neq 0$.

If $\lim_{n\to\infty} |C_n| = \infty$ and $a \neq 0$ then $h \neq 0$, the case 2 in the proof of theorem 1 ends the proof.

□

Theorem 4.

If the continued fraction $\frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots$ *is convergent with finite limit then : a necessary and sufficient condition that* $\exists C \in \mathbb{C}$, $\exists r \in \mathbb{C}$, $|r| < 1$ *such that* $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$ *is that* $\exists a \in \mathbb{C}$, $a \neq -\frac{1}{4} + c$ *with* $c \leq 0$ *such that* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Proof.

If $\exists C \in \mathbb{C}$, $\exists r \in \mathbb{C}$ $|r| < 1$ such that $\lim_{n\to\infty} \frac{C_n - C}{C_{n-1} - C} = r$ then $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} = r$.

An application of theorem 2 ends the proof of this part.

Conversely, if $\exists a \in \mathbb{C}$ with $a \neq -\frac{1}{4} + c$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Since $\lim_{n\to\infty} C_n = C \in \mathbb{C}$ is assumed, the case 1 of the proof in theorem 1 ends the proof. □

Remarks.

Let us make some remarks on the respective values of a and r when C is finite.

i) $r = 0$ if and only if $a = 0$. Since $r = -1 + 1/h$, $r = 0$ if and only if $h = 1$. If $h = 1$ then $h(h-1) = a = 0$. Reciprocally, if $a = 0$, the zeros of $x^2 - x - a = 0$ are 0 and 1 and thus, by Poincaré's theorem, h is 0 or 1. If $h = 0$ then r is infinite which is impossible because C is assumed being finite. Thus limit periodic continued fractions converge super linearly if and only if $\lim_n a_n = 0$. In that case it is less crucial to be able to accelerate the convergence.

ii) If $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} = 1$ then $a = -1/4$. This is one of the worth case since the convergence, when it occurs, is very slow (logarithmic convergence). Reciprocally if $a = -1/4$, the two zeros of $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ are equal to 1/2 and Poincaré's theorem does not allow to conclude.

Theorem 4 has important consequences concerning the convergence accelera tion of limit periodic continued fractions. Since such fractions are linearly converging if $a \neq 0$ (if $a = 0$, the continued fraction converges super linearly and, thus is less important to accelerate) they can be accelerated in many different ways such as modifications, see [5] for a review, or various sequence transformations, [1], [8].

On the other hand, continued fraction which are not 1-limit periodic will be difficult to accelerate. This follows from the theory of remanence of a set of sequences introduced by Delahaye and Germain-Bonne [4]. It means that a universal algorithmic method for transforming (C_n) into another sequence conver-

periodic (by algorithmic method it is meant a method which does not depend on asymptotic properties of (C_n) but only on a finite number of its terms). Subsets of such continued fractions will have to be considered. Even in the case where the ratios $(C_n-C)/(C_{n-1}-C)$ remain bounded from below and above such a universal transformation cannot exist [3].

Finally let us mention that some similar results seems to exist for limit k-periodic continued fractions. For example it is easy to see that the even and odd partsof a limit 2-periodic continued fraction are limit periodic with the same asymptotic error coefficient. Obviously, by theorem 4, the converse is false.

ACKNOWLEDGEMENTS.

This work was performed under the NATO Research Grant 027.81. We very much benefit from comments by L. Jacobsen and H. Waadeland who are thanked for their help.

REFERENCES.

[1] C. BREZINSKI, *"Successive modifications of limit periodic continued fractions"*. This volume.

[2] J.P. DELAHAYE, *"Théorie des transformations de suites en suites en analyse Numérique. Applications"*. Thèse, Université de Lille 1, France (1982).

[3] J.P. DELAHAYE, *"Accélération de la convergence des suites dont le rapport des erreurs est borné"*. Calcolo, 18 (1981), 103-116.

[4] J.P. DELAHAYE, B. GERMAIN-BONNE, *"Résultats négatifs en accélération de la convergence"*. Numer. Math., 35 (1980), 443-457.

[5] W.B. JONES, W.J. THRON, H. WAADELAND, eds *"Analytic theory of continued fractions"*. Proceedings, Loen, Norway, 1981. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 932, Springer Verlag, Heidelberg, 1982.

[6] W.B. JONES and W.J. THRON, *"Continued fractions, Analytic theory and applications"*. Encyclopedia of mathematics 11 (Adisson Wesley, Reading, M.A., 1980).

[7] A.N. KHOVANSKII, *"The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory"*. (WINN'S translation), P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN (1963).

[8] A. LEMBARKI, *"Acceleration of limit periodic continued fractions by the T_{+m} transformations"*. This volume.

[9] W. NIETHAMMER, H. WIETSHORKE, *"On the acceleration of limit periodic continued fractions"*. Numer. Math., 44 (1984), 129-137.

[10] H. POINCARE, *"Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies"*. Amer. J. Math. (1885), 205-258.

[11] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"Truncation error bounds for limit periodic continued fractions"*. Math. Comp., 40 (1983), 589-597.

ACCELERATION OF LIMIT PERIODIC CONTINUED FRACTIONS BY THE T_{+M} TRANSFORMATION

A. LEMBARKI
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation
U.F.R I.E.E.A.
Université de Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - France

Abstract.

We consider limit periodic continued fractions $b_0 + \frac{a_1|}{|1} + \dots + \frac{a_n|}{|1} + \dots$ *where* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *is finit and not on the ray* $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ *of the negative real axis.*

Using related properties of continued fractions we obtain the T_{+m} *process considered by Gray and Clark, and, the process considered by W.J. Thron and H. Waadeland.*

It follows the possibility of choosing the best process, according to the convergence behaviour of the sequences $\{a_n\}$.

1 - INTRODUCTION

We consider limit periodic continued fractions,

$$C = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \dots \tag{1}$$

where, b_o, a_n $n = 1,\dots$ are complex numbers.

Let $C_n = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \dots \frac{a_n|}{|1}$ be the nth convergent.

It is well known, that C_n may be computed by,

$$C_n = A_n/B_n$$

$$A_n = A_{n-1} + a_n A_{n-2}$$

$$B_n = B_{n-1} + a_n B_{n-2}$$

$$A_o = w_o \; ; \; A_{-1} = 1$$

$$B_o = 1 \; ; \; B_{-1} = 0.$$

The sequence $\{a_n\}$ will be assumed to have a finite limit a, wich is not on the $(-\infty, -\frac{1}{4}]$ of the negative real axis.

2 - PRELIMINARY.

It is known [1], [13] that the continued fraction (1) may equivalently be written in the form :

$$C = b_o + \frac{g_1 a_1|}{|g_1} + \frac{g_1 g_2 a_2|}{|g_2} + \dots + \frac{g_{n-1} g_n a_n|}{|g_n} + \dots \qquad (2)$$

where $g_n \neq 0 \quad n = 1,2,\dots$

The nth convergent is then $c_n = A'_n/B'_n$ where

$$A'_n = g_1 \dots g_n \; A_n \text{ and } B'_n = g_1 \dots g_n \; B_n.$$

Theorem 1.

A sequence $\{g_n\}$ such that $B'_n = 1$ for all n exists if and only if $B_n \neq 0$, $n = 1,\dots$.
In this case the g_n are given by :

$$g_1 = 1$$

$$g_{n+1} = 1/(1+a_{n+1} \, g_n) \qquad n = 1,2,\dots \qquad (3)$$

Proof. The result follows by simple induction.

□

This theorem was already obtained by Euler see [10', p. 37]

Henceforth, we assume $B_n \neq 0$ for all n.

The continued fraction may be written as follow :

$$C = b_o + \frac{a_1|}{|g_1} + \frac{1-g_2|}{|g_2} + \dots + \frac{1-g_n|}{|g_n} + \dots$$

The successive convergents are then computed by :

$$C_{n+1} = g_{n+1} C_n + (1-g_{n+1}) C_{n-1}$$

$$C_o = b_o \qquad g_1 = 1 \tag{4}$$

$$C_1 = b_o + a_1 \qquad g_{n+1} = 1/(1+a_{n+1}g_{n+1}) \qquad n = 1,\dots$$

It follows from (4) that

$$g_{n+1} = 1 + \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} \tag{5}$$

3 - ACCELERATION.

Inspired by the formula in (4) for computing $\{C_n\}$, it is natural to try somme other sequence $\{w_n\}$ instead of $\{g_n\}$.

Let $$T_n = w_n C_{n+1} + (1-w_n)C_n \tag{6}$$

The transformation (6) is so-called rank two composite transformation as defined by C. BREZINSKI in [2].

Obviously

$$T_n = C \iff w_n = -\frac{e_n}{\Delta C_n}$$

$$= 1/(1- e_{n+1}/e_n)$$

where $e_n = C_n - C$.

Such choice of w_n is impossible in practice since it involves the knowledge of c.

Let us study some practical choices of w_n, so that T_n converges to c, and faster than c_n.

a) - Assume, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ exists and $a \notin [-\infty, -\frac{1}{4}]$. This condition is equivalent to $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r$ exists and $|r| < 1$, as it is shown in [3], see also [8].

Thus $\lim_{n\to\infty} - \frac{e_n}{\Delta c_n} = 1/(1-r)$.

One may take $\qquad w_n = 1/(1-r) \qquad n = 0,1,\ldots$

A simple computation shows that, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - c}{e_n} = 0$.

b) - An other choice.

It is clear that

$$e_n = - \sum_{j=o}^{\infty} \Delta c_{n+j}.$$

Let $p \in \mathbb{N}^*$, and take as an approximation of e_n, the quantity,

$$\tilde{e}_n = - \sum_{j=o}^{p-1} \Delta c_{n+j}.$$

This leads to take $w_n = 1/(1-\tilde{e}_{n+1}/\tilde{e}_n)$

$$= (c_{n+p}-c_n)/(\Delta c_n - \Delta c_{n+p}).$$

Since w_n depends on p we replace T_n in (6) by $T_n^{(p)}$.
We get,

$$T_n^{(p)} = \frac{c_{n+p}-c_n}{\Delta c_n - \Delta c_{n+p}} c_{n+1} + \frac{c_{n+1}-c_{n+p+1}}{\Delta c_n - \Delta c_{n+p}} c_n$$

Or equivalently,

$$T_n^{(p)} = \frac{c_{n+p}\, c_{n+1} - c_{n+p+1}\, c_n}{\Delta c_n - \Delta c_{n+p}}$$

or else

$$T_n^{(p)} = \frac{\Delta C_n\, C_{n+p} - \Delta C_{n+p}\, C_n}{\Delta C_n - \Delta C_{n+p}} \tag{7}$$

This is exactly the T_{+p} transformation defined by Gray and Clark in [4], and studied in the case of some monotone sequences by Streit in [5]. Of course $T_n^{(1)}$ is the Δ^2-process applied to the sequence $\{C_n\}$.

To study the convergence behaviour of $T_n^{(p)}$ we shall need some properties.

Let $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. From (5) $g = r+1$ follows.

<u>*Lemma 1.*</u>

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{g_n - g} = \alpha$ *exists if and only if* $\lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}-g}{g_n-g} = \beta$ *exists.*

ii) If α *exists then,* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} = \lambda$ *exists and,* $\beta = \lambda$ *if* $\alpha \neq 0$; $\beta = r$ *if* $\alpha = o$.

Moreover $\alpha = (r-\beta)/(1+r)^3$.

<u>Proof.</u>

It follows from (3) that, $g_{n+1} + g_n\, g_{n+1}\, a_{n+1} = 1$.

Let $g_n = g+\beta_n$ and $a_n = a+\lambda_n$.

Simple computation gives,

$$(1+ga_{n+1})\beta_{n+1}/\beta_n + g^2\lambda_{n+1}/\beta_n + (g+\beta_{n+1})a_{n+1} = 0.$$

Now $\lim_{n\to\infty} (1+g\, a_{n+1}) = 1/g$, $g \neq 0$ because a is finit, the assertion i) is then clear. From this, the last assertions follow immediatly.
Now $\lambda_{n+1}/\lambda_n = (\lambda_{n+1}/\beta_n)(\beta_n/\beta_{n-1})(\beta_{n-1}/\lambda_n)$. Hence $\lambda = \beta$ if $\alpha \neq 0$.

□

Theorem 2.

If $a \notin (-\infty, -\frac{1}{4}]$ *and* $a \neq 0$, *then,*

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(p)}-C}{e_{n+k}} = 0 \qquad k = 0,1,\ldots$$

Moreover if, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{g_n-g} = \alpha$ *exists, then*

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta T_{n+1}^{(p)}}{\Delta T_n^{(p)}} = r\lambda \text{ if } \alpha \neq 0 \text{ and } |\lambda| \neq 1$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta T_{n+1}^{(p)}}{\Delta T_n^{(p)}} = r^2 \text{ if } \alpha = 0$$

where

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} .$$

Proof.

i) We easily get,

$$\frac{T_n^{(p)}-C}{e_{n+k}} = \frac{e_{n+p}}{e_{n+k}} \cdot \frac{e_{n+1}/e_n - e_{n+p+1}/e_{n+p}}{e_{n+1}/e_n - 1 - e_{n+p+1}/e_n + e_{n+p}/e_n}$$

Now, $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = r, |r| \neq 1$ and $r \neq 0$ because a is finit and $a \neq -\frac{1}{4}$ and $a \neq$ see [8], [3].

ii) Using (7), simple computations give

$$\Delta T_n^{(p)} = (C_{n+p+1} - C_{n+1}) \frac{\Delta C_n \, \Delta C_{n+p+1} - \Delta C_{n+1} \, \Delta C_{n+p}}{(\Delta C_n - \Delta C_{n+p})(\Delta C_{n+1} - \Delta C_{n+p+1})}$$

This leads to,

$$\frac{\Delta T_n^{(p)}}{\Delta T_{n-1}^{(p)}} = \frac{C_{n+p+1} - C_{n+1}}{C_{n+p} - C_n} \; \frac{\Delta C_{n+p}}{\Delta C_{n+p-1}} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta C_{n+p-1}}{\Delta C_{n-1}}}{\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} - \frac{\Delta C_{n+p+1}}{\Delta C_n}} \cdot \frac{\frac{\beta_{n+p+2}}{\beta_{n+2}} - 1}{\frac{\beta_{n+p+1}}{\beta_{n+1}} - 1} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_n}$$

$|\beta| \neq 1$ because $|\lambda| \neq 1$. When n tends to infinity we get $r\beta$. Using lemma 1 the assertions ii) and iii) fellow.

$\square$

We remark that λ may be equal to -1 provided that p is odd. On the other hand the results of theorem 2 are conditionned by the existence of α. Obviously, in the case where $a_n = a$ for all n, we have $\alpha = 0$ and interesting properties may be brought out as shown by BREZINSKI and LEMBARKI in [6], see also [11], [12].

We shall now give a sufficient condition to assertain the existence of α.

For this we shall make use of the

<u>Lemma 2.</u>

If, $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a)/(a_n-a) = \lambda$ *exists and* $|\lambda| \neq 1$.
Then, $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a)/(g_n-g)$ *exists if and only if* $\lim_{n\to\infty} \Delta a_{n+1}/\Delta g_n$ *exists. When they exist, the two limits are equal.*

<u>Proof.</u>

It follows from (3) that

$$\Delta a_{n+1} = [\Delta g_n(g_{n+2}-1) - \Delta g_{n+1}]/(g_n g_{n+1} g_{n+2}).$$

Thus,

$$\frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta g_n} = \frac{1}{g_n g_{n+1} g_{n+2}} \left(g_{n+2} - 1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{\beta_{n+2}/\beta_{n+1}-1}{\beta_{n+1}/\beta_n - 1}\right)$$

where $\beta_n = g_n - g$.

Assume first that $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a)/(g_n-g)$ exists.
Using lemma 1, β will exist and $\beta \neq 1$, because $\lambda \neq 1$. It fellows that $\lim_{n\to\infty} \Delta a_{n+1}/\Delta g_n = \alpha$.

Conversly, if $\lim_{n\to\infty} \Delta a_{n+1}/\Delta g_n$ exists, then, $\lim_{n\to\infty} \Delta\beta_{n+1}/\Delta\beta_n = \rho$ exists and $|\rho| \neq 1$ because $|\lambda| \neq 1$. Hence $\lim_{n\to\infty} \beta_{n+1}/\beta_n = \rho$ [7, theorème 1, p. 218].

Now from the proof of lemma 1, we have :

$$g^2(\lambda_{n+1}/\beta_{n+1}) + (1+g\, a_{n+1})\, \beta_{n+1}/\beta_n + g_{n+1}\, a_{n+1} = 0,$$

which gives,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1}/\lambda_n) = \alpha.$$

□

Lemma 3.

Let $\{d_n\}$ *be a sequence of complex numbers, and* $\lim_{n\to\infty} d_n = d$, $|d| \neq 1$ *and* $|d|$ *may be infinity.*

Define a sequence $\{R_n\}$ *as*

$$R_o = 1,\ R_{n+1} = d_{n+1} R_n + 1$$

Then,

i) $\lim_{n\to\infty} R_n = 1/(1-d)$ *if* $|d| < 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} |R_n| = \infty$ *or* $\lim_{n\to\infty} R_n = 1/(1-d)$ *if* $|d| > 1$.

Proof.

We have $R_{n+1} = 1 + d_{n+1} + d_{n+1}d_n + \dots + d_{n+1}d_n \dots d_1$, using [7, lemme 3, p the first assertion follows.

Now, assume $|d| > 1$. No restriction is made to assume $d_n \neq 0$ $n = 1,2,\dots$.
Let, $\gamma_i = 1/d_i$.
Then, $R_{n+1} = [1 + \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 + \dots + \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{n+1} /(\gamma_1 \dots \gamma_{n+1})$.
Let $S_n = 1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_1 \dots \gamma_n$.

Then, $\Delta S_n/\Delta S_{n-1} = \gamma_{n+1}$ and $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$, $|\gamma| < 1$. Hence $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ exists.

. If $S \neq 0$, then $\lim_{n\to\infty} |R_n| = \infty$

. If $S = 0$, since $|\gamma| < 1$, then $\lim_{n\to\infty} S_{n+1}/S_n = \gamma$ [7, p. 218].

Hence $\lim_{n\to\infty} S_n/(\gamma_1\cdots\gamma_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{n+1}/(S_{n+1}/S_n - 1)$

$= \gamma/(\gamma-1)$ where $\gamma = 1/a$.

□

Remarks.

- Lemma 3 is true even if $R_o \neq 1$, one may replace d_1 by d_1R_o.

- It is easy to see that if $|d| > 2$ we have $\lim_{n\to\infty} |R_n| = \infty$. But if $1 < |d| \leq 2$ the two cases $S = 0$ and $S \neq 0$ are possible. To see this, one may take $d_n = -2$, $n = 2,3,\ldots$, then $S = 0$ iff $d_1 = -2/3$.

□

We are now ready to prove the existence of α.

Theorem 3.

If $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a)/(a_n-a) =$ *exists,* $|\lambda| \neq 1$ *and* $|\lambda| \neq |r|$. Then,
$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a)/(g_n-g) = \alpha$ *exists.*

Proof.

Since $|\lambda| \neq 1$, using lemma 2, it is sufficient to show the convergence of $\Delta a_{n+1}/\Delta g_n$.

It follows from (3) that, $\Delta g_n = -g_n(g_n a_{n+1} - g_{n-1}a_n)/(1+g_n a_{n+1})$.

Thus,

$$\Delta a_{n+1}/\Delta g_n = -\frac{(1+g_n a_{n+1})}{g_n} \cdot \frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta a_n} \cdot \frac{1}{\dfrac{g_n(a_{n+1}-a)-g_{n-1}(a_n-a)}{\Delta a_n} + a\dfrac{\Delta g_{n-1}}{\Delta a_n}}$$

Let, $k_n = -\Delta a_{n+1}(1+g_n a_{n+1})/\, g_n(g_n(a_{n+1}-a) - g_{n-1}(a_n-a))$

- $v_n = a\Delta a_n/[g_n(a_{n+1}-a) - g_{n-1}(a_n-a)]$

- $\Delta a_{n+1}/\Delta g_n = k_n\, S_{n+1}$.

We thus obtain, $S_{n+1} = 1/(1 + \frac{v_n}{k_{n-1}} \cdot \frac{1}{S_n})$. The denominator of S_{n+1} is :

$$1 + v_n/k_{n-1} + v_n v_{n-1}/(k_{n-1}k_{n-2}) + \dots + v_n \dots v_1/(k_{n-1}\dots k_o).$$

Now $\lim\limits_{n\to\infty} v_n/k_{n-1} = r/\lambda$ where $r = g-1$.

The lemma 3 ends the proof.

□

Now, we shall study how $T_n^{(p)}$ depends on p.
Let $\varepsilon_{n+1} = e_{n+1}/e_n - r$ and $\beta_n = g_n - g$.

Lemma 4.

If $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ *exists then* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta$ *exists and* $\varepsilon = \beta$.

Proof.

It follows from (4) that, $\varepsilon_{n+1}(r+\varepsilon_n)-\varepsilon_n = \beta_{n+1}(r-1+\varepsilon_n)$. Simple computation gives $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{n+1}/\beta_n = \varepsilon$, because $|r\varepsilon| < 1$.

□

Theorem 4.

If $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ *exists and* $\varepsilon \neq 1$ *then :*

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(p+1)}-c}{T_n^{(p)}-c} = r \cdot \frac{1-r^p}{1-r^{p+1}} \cdot \frac{1-\varepsilon^{p+1}}{1-\varepsilon^p}$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(p)}-c}{T_n^{(1)}-c} = r^{p-1} \cdot \frac{1-r}{1-r^p} \cdot \frac{1-\varepsilon^p}{1-\varepsilon}$$

Proof.

Using (7) and after some computations, we get,

$$\frac{T_n^{(p+1)} - C}{T_n^{(p)} - C} = \frac{e_{n+1}/e_n - e_{n+p+2}/e_{n+p+1}}{e_{n+1}/e_n - e_{n+p+1}/e_{n+p}} \cdot \frac{e_{n+p+1}}{e_{n+p}} \cdot \frac{1-\Delta C_{n+p}/\Delta C_n}{1-\Delta C_{n+p+1}/\Delta C_n}$$

wich tends to

$$\frac{1-\varepsilon^{p+1}}{1-\varepsilon^p} \cdot r \cdot \frac{1-r^p}{1-r^{p+1}} .$$

The second assertion is trivially obtained by writing :

$$\frac{T_n^{(p)}-C}{T_n^{(1)}-C} = \frac{T_n^{(p)}-C}{T_n^{(p-1)}-C} \cdots \frac{T_n^{(2)}-C}{T_n^{(1)}-C} .$$

□

Now let us consider the usual modification of the continued fraction, $S_n(x_1)$ as studied in [8] and [9].

The sequence $\{S_n(x_1)\}$ may be obtained from (6) by taking,

$$w_n = \frac{1}{1+g_{n+1}(1-g)/g}$$

where $g = r+1$ as defined before.

Thus

$$S_{n+1}(x_1) = \frac{c_{n+1}+g'g_{n+1}C_n}{1+g'g_{n+1}}$$

where $g' = (1-g)/g$.
Let us compare $T_n^{(p)}$ to $S_{n+1}(x_1)$ and to $S_{n+p+1}(x_1)$.

Theorem 5.

Let $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ *exists. We have,*

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(p)}-c}{S_{n+1}(x_1)-c} = \lambda r^p \cdot \frac{1-r^2}{r-\lambda} \cdot \frac{1-\lambda^p}{1-r^p} \qquad \text{if } \alpha \neq 0$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}(x_1)-c}{T_n^{(p)}-c} = 0 \qquad \text{if } \alpha = 0$$

Moreover

iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^{(p)}-c}{S_{n+p+1}(x_1)-c} = \frac{1}{\lambda^{p-1}} \cdot \frac{1-r^2}{r-\lambda} \cdot \frac{1-\lambda^p}{1-r^p} \qquad \text{if } \alpha \neq 0 \textit{ and } \lambda \neq 0$$

iv) $$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+p+1}(x_1)-c}{T_n^{(p)}-c} = 0 \qquad \text{if } \alpha = 0 \textit{ or } \lambda = 0$$

Proof.

We may easily obtain,

$$\frac{T_n^{(p)}-c}{S_{n+1}(x_1)-c} = \left[\frac{e_{n+p}}{e_n} \cdot \frac{1-rg_{n+1}/(r+1)}{\Delta e_n/e_n - \Delta e_{n+p}/e_n}\right] \cdot \left[\frac{e_{n+1}/e_n - e_{n+p+1}/e_{n+p}}{e_{n+1}/e_n - rg_{n+1}/(r+1)}\right]$$

the first bracket tends to $-r^p/(1-r^p)$.

Using (3), the second bracket tends to $\varepsilon \cdot \frac{r^2-1}{r-\varepsilon}(1-\varepsilon^p)$. Lemma 1 and lemma 4 end the proof of i) and ii). We proceed in the same way to prove iii) and iv).

□

Remarks.

1°) - The proof of theorem 5 depends upon the existence of $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n$, wich is a special case.

2°) - Theorem 5 shows that if $\alpha = 0$ then $\{S_n(x_1)\}$ converges more rapidly than $\{T_n^{(p)}\}$. This case may be illustrated by taking a periodic continued fraction

$$c = 1 + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \dots .$$

It is easy to see that $S_n(x_1) = c$ for all n. But $T_n^{(1)} = C_{2n+3}$ as it is shown in [6]. On the other hand, if $\alpha \neq 0$ and $\lambda = o$ or $\lambda = 1$, $T_n^{(p)}$ converges more rapidly. Conversly, if $\alpha \neq o$ and $\lambda = 0$, $S_{n+p+1}(x_1)$ is then the faster.

In the other cases the two methods converge nearly in the same manner.

3°) - Computing $S_{n+p+1}(x_1)$ does not need the knowledge of the convergents.

In fact, $S_{n+p+1}(x_1)$ may be computed using the backward recurrence algorithm with x_1, wich needs the same operations as c_{n+p+1}, for this see [10, p. 26]. This is not the case for $T_n^{(p)}$.

Acknowledgment.

I want to thank Professor H. Waadeland for his relevant remarks and suggestions

REFERENCES.

[1] A.N. KHOVANSKI, "*The application of Continued fractions and their generalizations to problems in approximation thoery*". P. NOORDOFF, N.V. GRONINGEN-The Netherlands.

[2] C. BREZINSKI, "*Composite sequence transformations*", Numer. Math., 46 (1985) 311-321.

[3] C. BREZINSKI, A. LEMBARKI, "*The linear convergence of limit periodic continued fraction*". *To appear.*

[4] H.L. GRAY and W.D. CLARK, "*On a class of nonlinear transformations and their applications to the evaluation of infinite series*". J. Res. Nat. Bur. Standards sect. B, 73 B (1969), 251-274.

[5] F. STREIT, "*The T_{+m} transformations*
Math.Comp., 30, (1976), 505-511.

[6] C. BREZINSKI and A. LEMBARKI, "*Acceleration of extended Fibonacci sequences*". Applied Num. Math. 1 (1985).

[7] J.P. DELAHAYE, *"Theorie des transformations de suites en Analyse Numérique Applications"*. Thèse, Université de Lille I, France (1982).

[8] W.J. THRON and H. WAADELAND, *"Accelerating convergence of limit periodic Continued fractions* $K(a_n/1)$*"*. Numer. Math. 34, (1980), 155-170.

[9] W. NIETHAMMER and H. WIETSHORKE, *"On the acceleration of limit periodic Continued Fractions* $K(a_n/1)$*"*. Numer. Math. 44, (1984), 129-137.

[10] JONES, W.B. and THRON, W.J., *"Continued fractions. Analytic theory and applications"*. Numer. Math. 44, (1984), 129-137.

[10'] W.B. JONES, W.J. THRON, *"Continued fractions. Analytic thoerie and applications"*. Encyclopedia of math. and its applications, n° 11, Addisson-Wesl Publishing Company, Reading, Mass. 1980.

[11] G.M. PHILLIPS, *"Aitken sequences and Fibonacci numbers"*. Amer. Math. Mont 91 (1984), 354-357.

[12] J.H. Mc CABE and G.M. PHILLIPS, *"Aitken sequences and Generalized Fibonac Numbers"*. Math. of Computation, 45, n° 172 (1985), 1-6.

[13] O. PERRON, *"Die Lehre von den Kettenbrücken"*. Chelsea Publishing Company New-York, N.Y. (1929).

CONVERGENCE ACCELERATION OF LIMIT k-PERIODIC CONTINUED FRACTIONS

Alami LEMBARKI

1 - INTRODUCTION

Given a continued fraction

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} + \dots \qquad (1)$$

where a_n and b_n are complex numbers and $a_n \neq 0$.

Let,

$$c_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

be its nth convergent. It's well known, see for instance [12] that $c_n = A_n/B_n$ where :

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \quad ; B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \qquad (2)$$
$$A_0 = b_0,\ A_{-1} = 1 \quad ; B_0 = 1,\ B_{-1} = 0.$$

We are dealing with limit k-periodic continued fractions :

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk+i} = a^{(i)} \text{ and } \lim_{n\to\infty} b_{nk+i} = b^{(i)} \text{ where } a^{(i)},\ b^{(i)} \in \mathbb{C}.$$

Henceforth, the continued fraction (1) is assumed to be convergent and has finit value $c \in \mathbb{C}$.

In section 2 we recall and unify some formulas collected from [11], [12], [13] and [17]. Very simple proofs are given. We also recall the contraction of continued fractions that we need thereafter.

To accelerate the convergence, we do not explicitly make use of the concepts of modification of continued fractions or converging factors, for definitions see for instance [16], [18], [19]. We rather derive some properties that $(c_{n+1}-c)/(c_n-c)$, $\Delta c_{n+1}/\Delta c_n$ and related ones satisfie.

This is done in section 3. In section 4 we make use of the results obtained in section 3 to derive some processes of convergence acceleration. We end with section 5 where some numerical examples are given.

2 - Recalls.

a) - Some formulas.

Let us recall some formulas of great use in the sequel. These formulas are collected from [1], [12], [13] and [17] where they are established with various proofs and notations. We would unify them in accordance with Pringsheim's notation and give simple proofs. Let,

$$A_{m,n}/B_{m,n} = b_m + \frac{a_{m+1}|}{|b_{m+1}} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n} \qquad n \geqslant m \geqslant 0$$

Theorem 2.1.

F_1 :
$$A_{m,n+1} = b_{n+1}A_{m,n} + a_{n+1}A_{m,n-1}$$
$$B_{m,n+1} = b_{n+1}B_{m,n} + a_{n+1}B_{m,n-1} \qquad n \geqslant m \geqslant 0.$$
$$A_{0,n} = A_n;\ A_{n,n} = b_n;\ A_{n,n-1} = 1$$
$$B_{0,n} = B_n;\ B_{n,n} = 1\ ;\ B_{n,n-1} = 0$$

F_2 :
$$A_n = A_{m,n}A_{m-1} + a_mB_{m,n}A_{m-2}$$
$$B_n = A_{m,n}B_{m-1} + a_mB_{m,n}B_{m-2} \qquad n \geqslant m \geqslant 1$$

F_3 :
$$A_{r,n} = A_{r,m-1}A_{m,n} + a_mA_{r,m-2}B_{m,n}$$
$$B_{r,n} = B_{r,m-1}A_{m,n} + a_mB_{r,m-2}B_{m,n} \qquad n \geqslant m > r > 0$$

F_4 : i)
$$A_{r,n} = b_rA_{r+1,n} + a_{r+1}B_{r+1,n}$$
$$B_{r,n} = A_{r+1,n}$$
ii)
$$B_{r-1,n} = b_rB_{r,n} + a_{r+1}B_{r+1,n} \qquad n+1 \geqslant r \geqslant 0$$

F_5 :
$$A_nB_m - A_mB_n = (-1)^m a_1 \dots a_{m+1}B_{m+1,n} \qquad n \geqslant m$$

F_6 : i) $A_{r,n}B_{r,m}-A_{r,m}B_{r,n}=(-1)^{m-r}a_{r+1}\dots a_{m+1}B_{m+1,n}$

ii) $B_{r-1,n}B_{r,m}-B_{r-1,m}B_{r,n}=d(-1)^{m-r}a_{r+1}\dots a_{m+1}B_{m+1,n}$ $\quad n \geqslant m \geqslant r$

F_7 : i) $A_{r,n}B_m-A_{r,m}B_n=(-1)^{m-r}a_r\dots a_{m+1}B_{m+1,n}B_{r-2}$

ii) $B_{r-1,n}B_m-B_{r-1,m}B_n=(-1)^{m-r}a_r\dots a_{m+1}B_{m+1,n}B_{r-2}$ $\quad n \geqslant m \geqslant r-1 \geqslant 0$

Proof.

F_1 follows from (2) since $A_{m,n}/B_{m,n}$ may be considered as the nth convergent of the continued fraction

$$b_m + \frac{a_{m+1}|}{|b_{m+1}} + \dots$$

F_2 : Let $m \in N^*$, F_2 is obvious if $n=m$. One may proceed recursively. That, is to assume the equalities are true for some $n \geqslant m$, using F_1 it is easy to see that F_2 is valid when n is replaced by n+1.

F_4 : Let $r \in N$. F_4 is checked when $n = r$. To show that it is valid for $(r,n+1)$ it suffices to use F_1.

F_3 is satisfied if $m = r+1$ to verify that it is valid for m+1 it suffices to use F_1 and F_4.

F_5 : using F_4 ii) it is easily checked that for $m=0$ F_5 is satisfied for all n. Assume that F_5 is true for some $m \geqslant 0$ for all n then by (2)

$$A_nB_{m+1}-A_{m+1}B_n= b_{m+1}(A_nB_m-B_nA_m)+a_{m+1}(A_nB_{m-1}-B_nA_{m-1})$$
$$= (-1)^{m+1}a_1\dots a_{m+1}\,[B_{m,n}-b_{m+1}B_{m+1,n})$$

now by F_4 the brackets is $a_{m+2}B_{m+2,n}$ which ends the proof.

F_6 is got by simple manipulations on developping $A_{r,n}$ and $B_{r,n}$ with the help of F_3. We then use F_5 and F_4.

F_7 follows from F_2 and F_6.

□

b) - Contraction.

Let $\langle k_n \rangle$ be an increasing sequence of integers. The continued fraction whose successive convergents are $c_{k_0}, c_{k_1}, \ldots$ is given by :

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \ldots + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \ldots \qquad (3)$$

where ; $\beta_0 = c_{k_0}$, $\alpha_1 = c_{k_1} - c_{k_0}$, $\beta_1 = 1$

$$\alpha_n = -\langle c_{k_n} - c_{k_{n-1}} \rangle / \langle c_{k_{n-1}} - c_{k_{n-2}} \rangle, \quad \beta_n = 1 - \alpha_n.$$

For further details see for instance [8], [12], [18].

Now, from F_5 follows that,

$$\alpha_1 = (-1)^{k_0} a_1 \ldots a_{k+1} \frac{B_{k_0+1, k_1}}{B_{k_1} B_{k_0}}$$

$$\alpha_n = (-1)^{k_{n-1} - k_{n-2} + 1} a_{k_{n-2}+2} \ldots a_{k_{n-1}+1} \frac{B_{k_{n-1}+1, k_n} B_{k_{n-2}}}{B_{k_{n-2}+1, k_{n-1}} B_{k_n}}$$

with the help of F_7 β_n becomes

$$\beta_n = \frac{B_{k_{n-2}+1, k_n} B_{k_{n-1}}}{B_{k_{n-2}+1, k_{n-1}} B_{k_{n-1}}}$$

where B_{k_n} and $B_{k_{n-1}+1, k_n}$ are assumed to be different from zero.

Let $\langle d_n \rangle$ be defined by

$$d_1 = B_{k_1} \quad \text{and} \quad d_n = B_{k_n} \frac{B_{k_{n-2}+1, k_{n-1}}}{B_{k_{n-1}}}$$

We have

$$d_1 \beta_1 = B_{k_1} \quad , \quad d_1 \alpha_1 = (-1)^{k_0} a_1 \ldots a_{k_0+1} B_{k_0+1, k_1} / B_{k_0}$$

$$d_{n-1} d_n \alpha_n = (-1)^{k_{n-1} - k_{n-2} + 1} a_{k_{n-2}+2} \ldots a_{k_{n-1}+1} B_{k_{n-1}+1, k_n} B_{k_{n-3}+1, k_{n-2}}$$

$$d_n\beta_n = B_{k_{n-2}+1,k_n} \qquad n = 2,3,\dots \text{ and } k_{-1} = 1.$$

The continued fraction (3) is then equivalent to :

$$\beta_0 + \frac{d_1\alpha_1|}{|d_1\beta_1} + \frac{d_1d_2\alpha_2|}{|d_2\beta_2} + \dots + \frac{d_{n-1}d_n\alpha_n|}{|d_n\beta_n} \qquad (4)$$

3° - Limit k-periodic continued fractions.

With the same notations and considerations as in section 2, let $k_n = nk+i$ where $k \in N^*$ and $i \in \{0,\dots,k-1\}$.

Let, $\quad w_0^{(i)} = A_i/B_i \; ; \; w_1^{(i)} = (-1)^i \, a_1\dots a_{i+1}B_{i+1,k+i}/B_{k+i}$

$\quad w_2^{(i)} = (-1)^{k+1} a_{i+2}\dots a_{i+k+1}B_{k+i+1,2k+i}B_i/B_{i+1,2k+i}B_{k+i}$

and

$$w_n^{(i)} = (-1)^{k+1} a_{(n-2)k+i+2}\cdots a_{(n-1)k+i+1} \frac{B_{(n-1)k+i+1,nk+i}B_{(n-3)k+i+1,(n-2)k+i}}{B_{(n-2)k+i+1,nk+i}B_{(n-3)k+i+1,(n-1)k+i}}$$

where the denominators are assumed to be different from zero.

The continued fraction (4) is then equivalent to :

$$w_0^{(i)} + \frac{w_1^{(i)}|}{|1} + \dots + \frac{w_n^{(i)}|}{|1} + \dots \qquad (5)$$

Let $A^{(n)}$, $B^{(n)}$, $A^{(m,n)}$ and $B^{(m,n)}$ have the same meanings as A_n, B_n, $A_{m,n}$ and $B_{m,n}$ when the k-periodic continued fraction

$$b^{(0)} + \frac{a^{(1)}|}{|b^{(1)}} + \dots + \frac{a^{(n)}|}{|b^{(n)}} + \dots$$

is considered.

Let, $a = (-1)^{k+1}a^{(0)}\dots a^{(k-1)}$ and $\theta = a^{(0)}B^{(k-2)}+A^{(k-1)}$.

We have the

Theorem 3.1

If $B^{(i+1,k+i)} \neq o$ $i=o,\dots,k-1$, $\theta \neq o$ and $w = a/\theta^2 \notin (-\infty, -1/4]$, then, $\exists r \in C$, $|r| < 1$ such that :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{nk+i}-c_{(n-1)k+i}}{c_{(n-1)k+i}-c_{(n-2)k+i}} = r$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{nk+i}-c}{c_{(n-1)k+i}-c} = r \qquad i = 0,\dots,k-1$$

where $(r+1)$ is the zero of smallest modulus of $wx^2+x-1=0$.

Proof.

The c_{nk+i} for $n = 0,1,\dots$ are the successive convergents of the continued fraction (5). Taking into account the results of [2] it suffices to show that

$$\lim_{n\to\infty} w_n^{(i)} = w \qquad i = o,\dots,k-1.$$

Now,

$$\lim_{n\to\infty} w_n^{(i)} = (-1)^{k+1} a^{(o)} \dots a^{(k-1)} \left[\frac{B^{(i+1,k+i)}}{B^{(i+1,2k+i)}}\right]^2$$

On the other hand, from F_3 follows that

$$B^{(i+1,2k+i)} = B^{(i+1,k+i)}\left[B^{(i,k+i)} + a^{(i+1)} B^{(i+1,k+i-1)}\right].$$

Thus we have to show that the brackets do not depend on i.

Using F_4 then F_1 we get successively

$$\begin{aligned} B^{(i,k+i)} + a^{(i+1)} B^{(i+1,k+i-1)} &= B^{(i,k+i)} - b^{(i)} B^{(i,k+i-1)} + B^{(i-1,k+i-1)} \\ &= b^{(i)} B^{(i,k+i-1)} + a^{(i)} B^{(i,k+i-2)} - b^{(i)} B^{(i,k+i-1)} \\ &\quad + B^{(i-1,k+i-1)} \\ &= B^{(i-1,k+i-1)} + a^{(i)} B^{(i,k+i-2)} \end{aligned}$$

Hence, $B^{(i+1,2k+i)} = B^{(i+1,k+i)}\left[B^{(k)} + a^{(1)} B^{(1,k-1)}\right]$.

Now, (1) and (F_4) applied to the brackets lead to $B^{(i+1,2k+i)} = \theta B^{(i+1,k+i)}$.

Since by hypothesis $\theta B^{(i+1,k+i)} \neq o$ so is $B^{(i+1,2k+i)}$, hence

$$\lim_{n\to\infty} w_n^{(i)} = w \qquad i = o,\dots,k-1$$

which ends the proof.

□

Remarks.

To define contractions and insure $w_n^{(i)} \neq o$ it has bee assumed that $B_{(n-p)k+i+1,nk+i} \neq o$ and $B_n \neq o$ for $n = 1,2,\dots$; $p = 1,2$; $i = o,\dots,k-1$.

Now let us replace m by $(n-p)k+i+1$ and n by $nk+i$ into F_2 and solve the system where the unknowns are $A_{m,n}$ and $B_{m,n}$. The determinant is $\Delta=(-1)^m a_1\dots a_m$ which must be different from zero and we have $B_{m,n}= (A_{m-1}B_n - A_nB_{m-1})/\Delta$. The above condition may be translated as $B_n \neq o$ $n = 0,1,\dots$, $\Delta \neq o$ and $c_{(n-p)k+i} \neq c_{nk+i}$ for $n = 1,2,\dots$; $i = o,\dots,k-1$ and $p = 1,2$.

Theorem 3.2.

Under the same hypothesis as in theorem 3.1, we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{nk+i} - c_{nk+i-1}}{c_{nk+i-1} - c_{nk+i-2}} = r^{(i)}$$

where,

$$r^{(i)} = -1 + \frac{b^{(i)}}{B^{(i+1,k+i)}} \left[B^{(i+1,k+i-1)} + (-1)^{k+1} a^{(i+2)} \dots a^{(i+k)} (1+r)/\theta\right].$$

In particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{nk+i-1}}{B_{nk+i}} = \left[(-1)^{k+1} a^{(i+2)} \dots a^{(i+k)} (1+r)/\theta + B^{(i+1),k+i-1)}\right]/B^{(i+1,k+i)}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+k}} = (1+r)/\theta.$$

Proof.

From formula F_5 we immediately get

$$\frac{C_{nk+i} - C_{nk+i-1}}{C_{nk+i-1} - C_{nk+i-2}} = -a_{nk+i} \frac{B_{nk+i-2}}{B_{nk+i}}$$

or else,

$$\frac{C_{nk+i}-C_{nk+i-1}}{C_{nk+i-1}-C_{nk+i-2}} = -1 + b_{nk+i} \frac{B_{nk+i-1}}{B_{nk+i}} \qquad (*)$$

In the same way, F_5 and F_7 give

$$\frac{B_{(n-1)k+i}}{B_{nk+i}} = \left[1+ \frac{C_{nk+i}-C_{(n-1)k+i}}{C_{(n-1)k+i}-C_{(n-2)k+i}}\right] \frac{B_{(n-2)k+i+1,(n-1)k+i}}{B_{(n-2)k+i+1,nk+i}}$$

which tends to $(1+r)/\theta$ for $i = 0,\ldots,k-1$.

Hence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+k}} = (1+r)/\theta.$$

Now,

$$\frac{B_{nk+i-1}}{B_{nk+i}} = \frac{\left[B_{nk+i-1}B_{(n-1)k+i+1,nk+i}-B_{(n-1)k+i+1,nk+i-1}B_{nk+i}\right]+B_{(n-1)k+i+1,nk+i-1}}{B_{nk+i}B_{(n-1)k+i+1,nk+i}}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{a_{(n-1)k+i+2}\cdots a_{nk+i}B_{(n-1)k+i}}{B_{(n-1)k+i+1,nk+i}B_{nk+i}} + \frac{B_{(n-1)k+i+1,nk+i-1}}{B_{(n-1)k+i+1,nk+i}} \qquad (\text{by } F_7)$$

Hence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{nk+i-1}}{B_{nk+i}} = (-1)^{k+1} \frac{a^{(i+2)} \dots a^{(i+k)}}{B^{(i+1,k+i)}} \cdot \frac{1+r}{\theta} + \frac{B^{(i+1,k+i-1)}}{B^{(i+1,k+i)}} .$$

The equality (*) ends the proof.

□

Remark.

When the $a^{(i)}$ are assumed to be different from zero, the last two assertions in theorem 3.2 are particular cases of those in [4, theorem 3.1 B. ii)].

Theorem 3.3.

Under the hypothesis of theorem 3.1, the following hold

i) $\prod_{i=0}^{k-1} r^{(i)} = r$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+k+1}-c_{n+k}}{c_{n+1}-c_n} = r$

iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+k}-c}{c_n-c} = r$

iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+2k}-c_{n+k}}{c_{n+k}-c_n} = r$

v) $\lim_{n\to\infty} R_n \dots R_{n+k-1} = (-1)^k \frac{r\theta}{r+1}$

where

$$R_n = \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \dots$$

Proof.

i) We have,

$$\prod_{i=0}^{k-1} r^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{nk+i}-c_{nk+i-1}}{c_{nk+i-1}-c_{nk+i-2}} \cdots \frac{c_{nk+k+i-1}-c_{nk+k+i-2}}{c_{nk+k+i-2}-c_{nk+k+i-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{c_{(n+1)k+i-1}-c_{(n+1)k+i-2}}{c_{nk+i-1}-c_{nk+i-2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^k a_{nk+i}\cdots a_{(n+1)k+i-1} \frac{B_{nk+i-2}}{B_{(n+1)k+i-2}} \cdot \frac{B_{nk+i-1}}{B_{(n+1)k+i-1}}$$

$$= (-1)^k a^{(0)} \ldots a^{(k-1)} \frac{(1-r)^2}{\beta^2}$$

$$= -\omega(1+r)^2 = r \quad \text{(theorem 3.1)}.$$

ii) Let $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{(n+1)k+i+1}-c_{(n+1)k+i}}{c_{nk+i+1}-c_{nk+i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{(n+1)k+i+1}-c_{(n+1)k+i}}{c_{(n+1)k+i}-c_{(n+1)k+i-1}} \cdots \frac{c_{nk+i+2}-c_{nk+i+1}}{c_{nk+i+1}-c_{nk+i}}$$

$$= r^{(i+1)}\ldots r^{(0)} r^{(k-1)}\ldots r^{(i+2)} = r.$$

iii) If suffices to replace n by nk+i and apply theorem 3.1.

iv) $$\frac{c_{n+2k}-c_{n+k}}{c_{n+k}-c_n} = \frac{(c_{n+2k}-c)/(c_{n+k}-c) - 1}{(c_{n+k}-c)/(c_n-c) - 1} \cdot \frac{c_{n+k}-c}{c_n-c}$$

since $r \neq 1$ the assertion follows by simple application of iii).

v) It is easy to check [1] [8] that,

$$R_n = -\frac{B_n}{B_{n-1}} \frac{c_n - c}{c_{n-1} - c} .$$

Hence

$$R_n \cdots R_{n+k-1} = (-1)^k \frac{B_{n+k-1}}{B_{n-1}} \frac{c_{n+k-1} - c}{c_{n-1} - c}$$

which tends to $(-1)^k r\theta/(1+r)$ because iii) and theorem 3.2.

□

4°) - Convergence acceleration.

In general the convergence acceleration of limit k-periodic continued fractions cannot be obtained by the use of the ordinary processes. In fact ; most of the processes are constructed either in the case where R_n is assimilated to R_{n+1}, or e_{n+1}/e_n is assimilated to $\Delta c_{n+1}/\Delta c_n$. In our case, such approximations cannot be valid.
So, we make use of the results obtained into the previous section to derive some processes.

a) - Consider the assertions ii) and iii) - Theorem 3.3 we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+k} - c}{c_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+k+1} - c_{n+k}}{c_{n+1} - c_n}$$

Let (T_n) be the sequence such that,

$$\frac{c_{n+k} - T_n}{c_n - T_n} = \frac{c_{n+k+1} - c_{n+k}}{c_{n+1} - c_n} .$$

Then,

$$T_n = \frac{\Delta c_n c_{n+k} - \Delta c_{n+k} c_n}{\Delta c_n - \Delta c_{n+k}} \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad (4.1)$$

But this is exactly the process T_{+m} where $m=k$ of GRAY and CLARCK [3] see also [10] and [14].

Theorem 4.1.

If the hypothesis of theorem 3.1 are satisfied then,

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n-c}}{c_{n-c}} = 0$

ii) If in addition $r \neq 0$ $(a^{(0)}\ldots a^{(k-1)} \neq 0)$ then,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n-c}}{c_{n+pk-c}} = 0 \qquad p = 1,2,\ldots$$

Proof.

i) Straightforward computation gives

$$\frac{T_{n-c}}{c_n-c} = \frac{(c_{n+k+1}-c_{n+k})/(c_{n+1}-c_n) - (c_{n+k}-c)/(c_n-c)}{(c_{n+k+1}-c_{n+k})/(c_{n+1}-c_n) - 1}$$

Hence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n-c}{c_n-c} = 0$$

by simple application of theorem 3.3 ii) and iii).

ii) $\frac{T_n-c}{c_{n+pk}-c} = \frac{T_n-c}{c_n-c} \cdot \frac{c_n-c}{c_{n+pk}-c}$

the first ratio tends to zero because i) and the second one tends to $1/r^p$ which is finit because $r \neq 0$.

□

b) - Let us consider an other approach.

Let $g_n = B_{n-1}/B_n$ $n = 1,\ldots$.

The sequence (g_n) may be computed by

$$g_1 = 1/b_1 \quad \text{and} \quad g_{n+1} = 1/(b_{n+1}+a_{n+1}g_n) \qquad n = 1,2,\ldots$$

With this notation the continued fraction (1) may be written

$$b_0 + \frac{a_1g_1|}{|1} + \frac{1-b_2g_2|}{|b_2g_2} + \ldots + \frac{1-b_ng_n|}{|b_ng_n} + \ldots$$

and the successive convergents may be computed by

$$c_{n+1} = b_{n+1}g_{n+1}c_n + (1-b_{n+1}g_{n+1})c_{n-1} \quad n = 1,2,\ldots$$
$$c_0 = b_0 \quad \text{and} \quad c_1 = b_0+a_1g_1 \tag{6}$$

From (6) follows that

$$b_{n+1}g_{n+1} = 1+\Delta c_n/\Delta c_{n-1}.$$

We otherwise have [1], [8]

$$c = \frac{c_n+R_ng_nc_{n-1}}{1+R_ng_n}$$

Whence,

$$e_n = \frac{R_ng_n}{1+R_ng_n} \Delta c_{n-1}$$

where $e_n = c_n - c$.

Hence,

$$\frac{e_{n+k}}{e_n} = \left(\frac{R_{n+k}}{R_n} \cdot \frac{1+R_ng_n}{1+R_{n+k}g_{n+k}}\right) \cdot \frac{g_{n+k}}{g_n} \cdot \frac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}} \tag{7}$$

Let (γ_n) be an arbitrary sequence of complex numbers. Define the sequence (V_n) as follows :

$$\frac{c_{n+k}-V_n}{c_n-V_n} = \gamma_n \cdot \frac{g_{n+k}}{g_n} \cdot \frac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}}$$

Hence,

$$V_n = \frac{c_{n+k} - \gamma_n \dfrac{g_{n+k}}{g_n} \cdot \dfrac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}} c_n}{1 - \gamma_n \dfrac{g_{n+k}}{g_n} \cdot \dfrac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}}} \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (4.2)$$

Theorem 4.2.

With the assumptions of theorem 3.1 and, for any convergent sequence (γ_n) of limit 1,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{V_n - c}{c_n - c} = 0$

ii) If in addition $r \neq 0$ then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n - c}{c_{n+pk} - c} = 0 \qquad p = 1,2,\ldots$$

Proof.

From the definition of the g_n we get

$$\frac{g_{n+k}}{g_n} = \frac{B_{n+k-1}}{B_{n-1}} \cdot \frac{B_n}{B_{n+k}}.$$

Now,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+k}} = \frac{1+r}{\theta}$$

(Theorem 3.2) and $r \neq -1$ because w is assumed to be finit.

Hence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+k}}{g_n} = 1.$$

i) Now,

$$\frac{V_n - c}{c_n - c} = \left(\frac{e_{n+k}}{e_n} - \gamma_n \frac{g_{n+k}}{g_n} \cdot \frac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}} \right) / \left(1 - \gamma_n \frac{g_{n+k}}{g_n} \cdot \frac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}} \right).$$

But, from theorem 3.3 ii) and iii) we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+k}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta c_{n+k-1}}{\Delta c_{n-1}} = r$$

Furthermore, $r \neq 1$ (theorem 3.1) and

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1$$

is assumed, hence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n - c}{c_n - c} = o.$$

ii) The assertion ii) is obvious because $r \neq o$ and i).

□

c) - We have proved (theorem 3.3 v)) that

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^k R_{n+1} \cdots R_{n+k} = \frac{r\theta}{1+r} = R.$$

Now,

$$\frac{e_{n+k}}{e_n} = (-1)^k R_{n+1} \cdots R_{n+k} \frac{B_n}{B_{n+k}} \cdot.$$

Let us consider the (W_n) satisfying,

$$\frac{c_{n+k} - W_n}{c_n - W_n} = R \frac{B_n}{B_{n+1}}$$

thus,

$$W_n = \left(c_{n+k} - R \frac{B_n}{B_{n+k}} c_n\right) / \left(1 - R \frac{B_n}{B_{n+k}}\right)$$

or equivalently

$$W_n = (A_{n+k} - RA_n) \,/\, (B_{n+k} - RB_n) \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.3}$$

Of course when $k=1$, W_n is equal to $S_{n+1}(x_1)$ [18]. An other generalization of $S_n(x_1)$ to the limit k-periodic case is given in [4], [6], [7].

It is obvious to see that with the hypothesis of theorem 3.1 we have,

$$\lim_{n\to\infty} (W_n-c)/(c_{n+p}-c) = 0,\ p = 0,1,\ldots$$

provided that

$$\prod_{i=0}^{k-1} a^{(i)} \neq 0$$

5 - NUMERICAL EXAMPLES.

We shall consider two examples to illustrate some behaviours of the processes previously defined.

Example 1.

$$c = \frac{a_1+r}{1} + \frac{a_2+r^2}{1} + \frac{a_1+r^3}{1} + \frac{a_2+r^4}{1}$$

where $a_1 = -0.81$, $a_2 = -0.361$, $r = 0.9$. The value of the continued fraction is $c = -.054114037$ (see [7]).

We compute the value of this continued fraction using (4.1), (4.2), (4.3), and $S_n(x_n)$ where (x_n) is the 2-periodic sequence of right tails of the 2-periodic continued fraction

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \ldots$$

It appears that (4.1) and (4.2) are not as fast as $S_n(x_n)$ or (4.3), although (4.1) and (4.2) need more element operations than the others.

On the other hand $S_n(x_n)$ and (4.3) i.e w_n need nearly the same amount of computations and their lead to approximations of c with the same accuracy as it can be seen on table 5.1.

Table 5.1.

We denote by N.E. (F_n) the number of exact digits when computing F_n. To compute V_n we take $\delta n = 1$ for all n.

n	N.E$(S_n(x_n))$	n	N.E(T_n)	n	N.E(V_n)	n	N.E(W_n)
3	2	1	2	1	2	4	2
5	3	4	3	5	3	8	3
11	4	8	4	9	4	12	4
19	5	12	5	12	5	18	5
25	6	96	7	96	7	26	6
43	7	very slow		very slow		46	7
73	8					74	8
101	9					100	9

Example 2.

$$c = b_0 + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \dots$$

where, $b_0 = -2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -47/28$, $a_3 = 33/28$, $a_4 = -188000/413553$, $a_5 = -2773/5866$ and

$$a_{2n} = -\frac{2}{13}\left[1+4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}\right],$$

$$a_{2n+1} = -\frac{9}{26}\left[1+4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}\right] \quad n = 3,\dots$$

We have $R = 2/13$; $R^{(0)} = -1/2$, $R^{(1)} = -4/13$ and $c = -.68215289427045...$ In this case $S_n(x_n)$, (4.1), (4.2) and (4.3) lead to the value c with nearly the same accuracy (table 5.2). $S_n(x_n)$ and (4.3) are then the best, this is because (4.1) and (4.2) need more computation if compared to the others.

Table 5.2.

We keep the same notations as previously.

n	N.E.$(S_n(x_n))$	n	N.E.(T_n)	n	N.E.(v_n)	n	N.E(w_n)
13	1	11	1	14	1	11	1
18	2	15	2	16	2	16	2
21	3	19	3	19	3	20	3
26	4	23	4	23	4	21	4
27	6	31	6	32	6	26	6
30	7					29	7
34	8	35	8	35	8	33	8
37	9	38	9	38	9	36	9
39	10	42	10	42	10	38	10
41	11	43	11	44	11	40	11
45	12	47	12	47	12	42	12
48	13	50	13	51	13	47	13
51	14	53	14	53	14	50	14

Note that T_n and V_n i.e. (4.1) and (4.2) do not need the knowledge of limit points of (R_n) (respectively) the limit of $R_{n+1}...R_{n+k}$ as it is the c for $S_n(x_n)$ (respectively) w_n, but need only the knowledge of k.

References.

[1] C. BREZINSKI, How to accelerate continued fractions. In "Informatique et Calcul", P. Chenin et al. eds, Masson, Paris, 1986, pp. 35-39.

[2] C. BREZINSKI and A. LEMBARKI, The linear convergence of limit periodic continued fractions. J. Comp. Appl. Math., to appear.

[3] H.L. GRAY and W.D. CLARK, on a class of non linear transformations and they applications to the evaluation of infinite series. J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, 73B, (1969), 251-274.

[4] L. JACOBSEN, A method for convergbence acceleration of continued fractions K $(a_n/1)$. Lecture Notes in Math. 932, Springer (1982), 74-98.

[5] L. JACOBSEN, Convergence of limit k-periodic continued fractions $K(a_n/b_n)$ and their subsequences of their tals. Proc. London Math. Soc. (3), 51 (1985), 563-576.

[6] L. JACOBSEN, Further results on convergence acceleration for continued fractions $K(a_n/1)$. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 281, n° 1 January (1981), 129-146.

[7] L. JACOBSEN, Repeated modification of limit k-periodic continued fractions. Numer. Math. 47 (1985), 577-595.

[8] L. JACOBSEN and H. WAADELAND, Some useful formulas involving tails of continued fractions. Lecture Note in Math. 932, Springer (1982), 99-105.

[9] A.N. KHOVANSKII, The application of continued fractions. P. Noordoff, Ltd. Groningen, The Netherland (1963).

[10] A. LEMBARKI, Acceleration of limit periodic continued fractions by the T_{+m} transformation.
J. Comp. Appl. Math., to appear.

[11] P. MONTEL, Leçon sur les récurrences et leurs applications. Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[12] O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Chelsea Publishing Company New-York, N.Y. (1929).

[13] A. PRINGSHEIM, Uber die Konvergenz unindicher Kettenbrüche. Stizung sberichte der Math. phys. Klasse des K. Bayer. Akademie der Wissen shaften, Bd. 28, (1898), 295-324.

[14] F. STREIT, The T_{+m} transformation. Math. Comp. 30 (1976), 505-511.

[15] W.J. THRON , H. WAADELAND, Accelerating the convergence of limit periodic continued fractions. Numer. Math. 34, (1980), 155-170.

[16] W.J. THRON , H. WAADELAND, Modification of continued fraction, a survey. Lecture Note in Math. 932 (1982), 38-66.

[17] M. VON PIDOL, Betrage zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbruche. Akademishe Buchdruckerei Von F. Straub, München (1912), 1-51.

[18] WILLIAM B. JONNES , W.J. THRON, Continued fractions. Analytic thoery and applications. Encyclopedia of Mathematics and its applications, n° 11 Adisson Wesley, reading Massachussetts (1980).

[19] P. WYNN, Converging factors for continued fractions, Numer. Math. 1, (1959), 272-320.

CONNEXIONS ET ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DES FRACTIONS CONTINUES

$$b_o + \frac{a_1|}{|1} + \ldots, \text{ avec } a_n \to \infty \text{ ou } a_n \to -1/4.$$

-

1 - INTRODUCTION.

Dans [10] Khovanskii propose certaines transformations de fractions continues en fractions continues qu'il appelle par identités (nous reviendrons plus loin sur ce détail). Partant d'une fraction continue correspondante à une série ou à une fonction, son but, est de la transformer en une nouvelle fraction continue qui convergerait "plus vite" que la précédente et dont on peut affirmer la convergence, en utilisant certains résultats de convergence des fractions continues périodiques à la limite. Mais aucune de ces transformations n'a été étudiée.

Nous nous intéressons à l'une seulement de ces transformations. La fraction continue résultante sera désignée par transformée de Khovanskii.

Dans les trois cas où elle a été utilisée dans [10, p. 22, 26, 124, 125], la transformée de Khovanskii ne converge pas plus vite que la partie paire de la fraction continue initiale, bien que celle-ci intervienne dans sa construction. Par contre, Khovanskii trouve que cette identité présente l'avantage "de permettre fréquemment de transformer une fraction continue à éléments quelconques en une deuxième à éléments positifs, ce qui rend souvent possible l'application des critères de convergence relatifs aux fractions à éléments positifs à des fractions continues dont les éléments sont quelconques". Nous voyons ainsi que la transformation de Khovanskii établit une connexion entre une classe de fractions continues à éléments quelconques et les fractions continues à éléments positifs.

Dans [8] L. Jacobsen et H. Waadeland ont établi une connexion "intrinsèque" entre les fractions continues $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots$, $a_n \to \infty$ et celles où $a_n \to -1/4$, en montrant sous certaines hypothèses que lorsque $a_n \to \infty$, les éléments des parties paire et impaire tendent vers $-1/4$. Ceci a une incidence notamment sur la convergence/divergence des fractions continues où $a_n \to \infty$ [8], [11].

Dans la section 2 nous procédons à une étude systématique de la transformée de Khovanskii. Nous explicitons cette transformée en termes de convergents successifs de la fraction continue initiale. Ceci nous permet en particulier de voir que la dite transformation n'établit pas une identité et par conséquent on ne peut pas dire qu'une fraction continue est convergente parce que sa transformée converge comme Khovanskii le laisse sous entendre (voir citation précédente et l'appelation d'identité). Nous verrons, en effet, que la transformée de Khovanskii peut être convergente alors que la fraction continue initiale diverge.

Nous définissons ensuite ce que nous désignons par transformée inverse (T.I.) qui est la fraction continue dont la transformée de Khovanskii est la fraction continue initiale. Une étude des vitesses de convergence des deux transformées sera faite.

Dans la section 3, nous montrons que la transformation de Khovanskii (ainsi que la transformation inverse) transforme certaines fractions continue où $a_n \to \infty$ soit en des fractions continues où $a_n \to -1/4$ soit en des fractions continues 2-périodiques à la limite.

Dans la section 4, nous montrons que bien que la transformée de Khovanskii (il en est de même pour la T.I.) n'accélère pas la convergence des fractions continues à convergence linéaire, elle accélère une classe de fractions continues à convergence logarithmique avec $a_n \to -1/4$.

Nous considérons dans un deuxième paragraphe le cas où $a_n \to \infty$. Pour accélérer la convergence d'une classe de ces fractions continues on peut d'après ce qui précède leur appliquer la transformation de Khovanskii ce qui les ramenerait soit à des fractions continues 2-périodiques à la limite (dans ce cas on peut faire appel à un procédé quelconque destiné à l'accélération de la convergence de ce type de fractions continues), soit à des fractions continues où $a_n \to -1/4$ et dans ce cas une deuxième application de la transformation peut entraîner une accélération de la convergence.

Mais la complexité de cette classe de fractions continues nous conduit à l'examen du comportement de quantités essentielles dans la construction des procédés d'accélération de la convergence, à savoir, le rapport de deux erreurs, le rapport de deux différences et les queues de la fraction continue. Ceci mettra en évidence un aspect oscillatoire et périodique des quantités précédentes, caractère qui, pour une grande classe de fractions continues, rend inutilisable la plupart des procédés usuels. Nous donnons en dernier lieu des procédés pour accélérer quelques sous classes de ces fractions continues.

2 - TRANSFORMATION DE KHOVANSKII ET PROPRIETES.

2.1 - Transformation de Khovanskii.

La transformation qui nous intéresse rentre dans le cadre de la transformation suivante [10, p. 19-23].

Etant donné une fraction continue de valeur,

$$C = b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots \tag{2.1.1}$$

déterminer une fraction continue

$$K = \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \dots \tag{2.1.2}$$

telle que,

$$C = b_o/(1 + K) \tag{2.1.3}$$

$$= b_o - \frac{b_o c_1 d_2}{c_1 d_2 + c_1 d_2/K} \tag{2.1.4}$$

où $b_o \neq 0$.

Soit $C_n = b_o + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n}$ le $n^{ème}$ convergent de (2.1.1)

et, $K_n = \frac{c_1|}{|d_1} + \dots + \frac{c_n|}{|d_n}$ le $n^{ème}$ convergent de (2.1.2).

Rappelons que la partie paire de (2.1.1) est la fraction continue (lorqu'elle existe) dont les convergents successifs sont (C_{2n}) [9]. De même la partie impaire de (2.1.1) est la fraction continue dont les convergents successifs sont (C_{2n+1}).

Considérons à présent les parties paires C' et K' (respectivement) de (2.1.1.) et (2.1.2) (respectivement).

En remplaçant C par C' et K par K' dans (1.4) on obtient

$$b_o + \frac{a_1b_2|}{|b_1b_2+a_2} - \frac{a_2a_3b_4|}{|(b_2b_3+a_3)b_4+b_2a_4} - \frac{a_4a_5b_2b_6|}{|(b_4b_5+a_5)b_6+b_4a_6} - \dots - \frac{a_{2n-2}a_{2n-1}b_{2n-4}b_{2n}|}{|(b_{2n-2}b_{2n-1}+a_{2n-1})b_{2n}+b_{2n-2}a_{2n}} - \dots$$

$$= b_o - \frac{b_oc_1d_2|}{|(d_1+c_1)d_2+c_2} - \frac{c_2c_3d_4|}{|(d_2d_3+c_3)d_4+d_2c_4} - \frac{c_4c_5d_2d_6|}{|(d_4d_5+c_5)d_6+d_4c_6} - \dots - \frac{c_{2n-2}c_{2n-1}d_{2n-4}d_{2n}|}{|(d_{2n-2}d_{2n-1}+c_{2n-1})d_{2n}+d_{2n-2}c_{2n}} - \dots$$

Les deux fractions continues sont alors identifiées terme à terme, i.e.

$$a_1b_2 = -b_0c_1d_2,\ a_2a_3b_4 = -c_2c_3d_4, \dots$$

et

$$b_1b_2+a_2 = (d_1+c_1)d_2+c_2,\ (b_2b_3+a_3)b_4+b_2a_4 = (d_2d_3+c_3)d_4 + d_2c_4,\ \dots$$

Ceci fournit un système possèdant une infinité de solutions.
La solution qui nous intéresse est celle où Khovanskii fait le choix suivant :

On suppose $b_o = 1$ et soient :

$$c_n = -a_n,\quad d_{2n} = b_{2n} \quad \text{et } d_{2n-1} = \lambda_n\, b_{2n-1} \quad n = 1, \dots$$

où λ_n est déterminé de sorte que ce choix soit solution du système, ce qui conduit en reportant dans (2.1.3) à,

$$1+ \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots = \frac{1|}{|1} - \frac{a_1b_2|}{|a_1b_2+b_1b_2+2a_2} - \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3b_4|}{|b_2b_3b_4+2a_3b_4+2a_4b_2}$$

$$- \frac{a_4b_2|}{|1} - \dots \frac{a_{2n-1}b_{2n}|}{|b_{2n-2}b_{2n-1}b_{2n}+2a_{2n-1}b_{2n}+2a_{2n}b_{2n-2}} - \frac{a_{2n}b_{2n-2}|}{|1} - \dots \qquad (2.1.5)$$

Nous remarquons que la transformation de Khovanskii revient (mis à part le décalage causé par (2.1.3) et (2.1.4)) à identifier deux fractions continues ayant la même partie paire. Rappelons à cet effet que la partie paire de la fraction continue (2.1.1) existe si et seulement si $b_{2n} \neq 0$ $n = 1,2,\dots$ [9, p. 4.2].

En vue de nos préoccupations ultérieures nous supposons pour toute la suite que $b_n \neq 0$ $n = 1,2,\ldots$ Ceci nous place dans le cadre des fractions continue de la forme $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots$. Nous supposerons par ailleurs que b_o est quelconque, quite à ajouter $1-b_o$ aux deux membres de (2.1.1.) et le récupérer à la fin.

Pour la fraction continue $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots$ (2.1.6)
la transformation de Khovanskii donne,

$$b_o-1+ \frac{1|}{|1} - \frac{a_1|}{|1+a_1+2a_2} - \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1+2a_3+2a_4} - \frac{a_4|}{|1} - \ldots - \frac{a_{2n-1}|}{|1+2a_{2n-1}+2a_{2n}} - \frac{a_{2n}|}{|1}+\ldots \tag{2.1.7}$$

Nous restons pour toute la suite dans le cadre de ces fractions continues. La fraction continue (2.1.7) sera désignée par transformée de Khovanskii.

2.2. Propriétés.

Nous supposons pour toute la suite que,

$$1 + a_1 + 2a_2 \neq 0,\ a_{2n-1} + a_{2n} \neq -1/2 \quad n = 2,3,\ldots \text{ et } a_n \neq 0 \quad n = 1,\ldots$$

Posons,

$$d_o = b_o-1 \ ;\ d_1 = 1 \ ;\ d_2 = -\frac{a_1}{1+a_1+2a_2} \ ;\ d_3 = -\frac{a_2}{1+a_1+2a_2} \ ;$$

$$d_{2n} = -\frac{a_{2n-1}}{1+2a_{2n-1}+2a_{2n}} \ ;\ d_{2n+1} = -\frac{a_{2n}}{1+2a_{2n-1}+2a_{2n}} \ .$$

Avec ces notations la transformée de Khovanskii s'écrit

$$K = d_o + \frac{d_1|}{|1} + \frac{d_2|}{|1} + \ldots \tag{2.2.1}$$

Propriétés 2.2.1.

Les convergents successifs de la transformée de Khovanskii sont donnés par,

$$K_o = c_o - 1$$

$$K_{2n} = (C_{2n} - F_n C_{2n-2})/(1-F_n)$$

où $$F_n = (C_{2n} - C_{2n-1})/(C_{2n-1} - C_{2n-2})$$

$$K_{2n+1} = C_{2n}$$

Preuve.

Pour montrer que $K_{2n+1} = C_{2n}$ il suffit de voir que l'expression de la partie paire de la fraction continue initiale est identique à la partie impaire de sa transformée. Les parties respectives existent d'après [9, p. 42-43].

L'expression de K_{2n} s'obtient en remarquant que

$$a_n = - \frac{\Delta C_{n-1}/\Delta C_{n-2}}{(1+\Delta C_{n-1}/\Delta C_{n-2})\,(1+\Delta C_{n-2}/\Delta C_{n-3})}$$

et,

$$d_n = - \frac{\Delta K_{n-1}/\Delta K_{n-2}}{(1+\Delta K_{n-1}/\Delta K_{n-2})\,(1+\Delta K_{n-2}/\Delta K_{n-3})} \qquad n = 3,\ldots$$

En remplaçant d_n et a_n par leurs valeurs et K_{2p+1} par C_{2p}, $p = 2,\ldots,n$ dans,

$$d_{2n+1} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\, d_{2n} \qquad n = 1, 2,\ldots$$

on obtient,

$$\frac{K_{2n} - C_{2n}}{K_{2n} - C_{2n-2}} = \frac{K_{2n-2}-C_{2n-4}}{K_{2n-2}-C_{2n-2}} \cdot \frac{C_{2n}-C_{2n-1}}{C_{2n-1}-C_{2n-2}} \cdot \frac{C_{2n-2}-C_{2n-3}}{C_{2n-3}-C_{2n-4}} \,.$$

Posons, $G_n = (K_{2n}-C_{2n})/(K_{2n}-C_{2n-2})$

et, $F_n = (C_{2n}-C_{2n-1})/(C_{2n-1}-C_{2n-2})$.

La relation précédente s'écrit,

$$G_n = F_n F_{n-1}/G_{n-1}$$

avec, $G_1 = \dfrac{C_2-C_1}{C_1-C_o}$ qu'on peut vérifier en calculant directement K_2.

Il s'en suit que $G_n = \dfrac{C_{2n}-C_{2n-1}}{C_{2n-1}-C_{2n-2}}$, i.e. $G_n = F_n$.

D'où l'expression de K_{2n}.

[

Remarques 2.2.1.

1 - L'égalité $K_{2n+1} = C_{2n}$ a lieu sans aucune hypothèse sur les a_n à cause des théorèmes 2.10 et 2.11 [9, p. 42-43].

2 - La propriété précédente nous montre clairement ce qu'est la transformée de Khovanskii (2.1.7) par rapport à la fraction continue initiale (2.1.6). Ainsi, le fait que $K_{2n+1} = C_{2n}$ montre qu'il n'y a pas lieu d'accélération de la convergence si la suite (K_n) est prise dans son ensemble.

3 - Nous voyons d'un autre côté que si la fraction continue initiale est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} C_{2n} = C$ et $\lim\limits_{n\to\infty} C_{2n+1} = C'$ avec C et C' finis alors $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = C$. Autrement dit la convergence de la transformée de Khovanskii n'implique pas la convergence de la fraction continue initiale.

Voyons d'autre propriétés.

Supposons que la fraction continue initiale soit convergente de limite $c \in \mathbb{C}$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ avec $a \notin (-\infty, -1/4]$ (H).

Nous savons que sous les hypothèses (H) [2], il existe $r \in \mathbb{C}$, $|r| < 1$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}-C}{C_n-C} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} = r.$$

Propriété 2.2.2.

Sous les hypothèses (H) on a,

i) $\lim_{n\to\infty} K_n = C$

ii) $\lim_{n\to\infty} (K_{n+1}-C)/(K_n-C) = -r$

iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{K_{2n}-C}{C_{2n-2}-C} = -r$

Preuve.

i) la fraction continue (2.2.1), est périodique à la limite avec $\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{a}{1+4a} = d$. Comme $a \notin (-\infty, -\frac{1}{4}]$ on a aussi $d \notin (-\infty, -\frac{1}{4}]$. Donc, soit que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$ finie soit que $\lim_{n\to\infty} |K_n| = \infty$ [10]. Or $K_{2n+1} = C_{2n}$ de limite C donc forcément $\lim_{n\to\infty} K_n = C$.

ii) D'autre part r est tel que (1+r) soit la racine de plus petit module de l'équation $ax^2 + x-1 = 0$ [12]. De même $\lim_{n\to\infty} (K_{n+1}-C)/(K_n-C) = P$ avec (1+P) la racine de plus petit module de l'équation $dy^2+y-1 = 0$.
D'où $P = -r$.

iii) Immédiate vue l'expression de K_{2n}.

□

Remarques 2.2.2.

1 - L'assertion i) de la propriété 2.2.2 reste valable même si $|C| = \infty$. Ceci est dû au fait que toute fraction continue périodique à la limite est convergente au sens large [10], les hypothèses sur a étant évidemment maintenues.

D'un autre côté si $a \notin (-\infty, -1/4] \cup \{o\}$ et $|C| = \infty$ on a $|r| \geq 1$ et l'assertion ii) devient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta K_{n+1}}{\Delta K_n} = -r$$

ou encore d'après [3]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}-C'}{K_n-C'} = -r \quad \forall C' \in \mathbb{C}.$$

2 - L'assertion ii) nous laisse entrevoir qu'il est possible de transformer une fraction continue à convergence lagorithmique (r=1) en une fraction continue à convergence "anti-logarithmique" (r=-1) et inversement.

3 - L'hypothèse (H) est trop forte pour avoir seulement la régularité. En effet, si $\lim_{n\to\infty} C_n = C \in \mathbb{C}$ $\exists a,b \in \mathbb{R}$, $a < 1 < b$, $\exists N$:

$$\frac{C_{2n}-C_{2n-1}}{C_{2n-1}-C_{2n-2}} \notin [a,b] \quad \forall n \geq N$$

alors $\lim_{n\to\infty} K_n = C$.

3 - TRANSFORMATION INVERSE.

Nous avons vu dans la propriété 2.2.1 que la transformée de Khovanskii vérifie $K_{2n+1} = C_{2n}$. Ceci entraîne en particulier que si la transformée de Khovanskii est convergente alors la partie paire de la fraction continue initiale est convergente. Une transformée inverse peut nous fournir en particulier des renseignements sur la partie impaire (C_{2n+1}).

Soit donc la fraction continue

$$c = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \dots \quad a_n \in \mathbb{C} \text{ et } a_n \neq 0 \quad n = 1, 2, \dots .$$

Rappelons nous que pour éviter l'hypothèse de Khovanskii $b_o = 1$ nous avons ajouté aux deux membres $1-b_o$ qu'on a retranché à la fin des manipulations. Dans notre cas on a besoin de l'hypothèse $a_1 = 1$. Pour l'éviter nous divisons par a_1 et nous rectifions à la fin.

Cherchons donc une fraction continue

$$v_o + \frac{v_1|}{|1} + \dots$$

dont la transformée de Khovanskii soit

$$\frac{C}{a_1} = \frac{b_o}{a_1} + \frac{1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \dots .$$

Pour ceci faisons les hypothèses

$$1 + a_2 + 2a_3 \neq 0 \text{ et } a_{2n} + a_{2n+1} \neq -1/2 \qquad n = 2,\dots$$

En utilisant (2.2.1) on obtient,

$$v_o = 1 \; ; \; v_1 = \frac{-a_2}{1+a_2+2a_3} \; ; \; v_2 = -\frac{a_3}{1+a_2+2a_3}$$

$$v_{2n-1} = -\frac{a_{2n}}{1+2a_{2n}+2a_{2n+1}} \; ; \; v_{2n} = -\frac{a_{2n+1}}{1+2a_{2n}+2a_{2n+1}}$$

D'où la transformée inverse,

$$b_o + a_1 + \frac{a_1 v_1|}{|1} + \frac{v_2|}{|1} + \dots \qquad (2.3.1)$$

Par L_n nous désignons le $n^{\text{ème}}$ convergent de (2.3.1) et on a la,

Propriété 2.3.1.

Si $1+a_2+2a_3 \neq 0$ et $a_{2n}+a_{2n+1} \neq -1/2 \quad n = 2,\dots$

alors,

i) $L_{2n-1} = (C_{2n+1} - G_n C_{2n-1})/(1-G_n)$

où

$$G_n = (C_{2n+1}-C_{2n})/(C_{2n}-C_{2n-1})$$

$$L_{2n} = C_{2n+1}$$

ii) *Si* $\lim_{n\to\infty} C_n = C \in \mathbb{C}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = a \notin (-\infty, -1/4]$

alors,

$$* \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}-C}{L_n-C} = -r$$

où $r = \lim_{n\to\infty} (C_{n+1}-C)/(C_n-C)$.

$$* \lim_{n\to\infty} \frac{L_{2n-1}-C}{C_{2n-1}-C} = -r$$

Preuve.

Les résultats se démontrent de la même façon que pour les propriétés 2.2.1 et 2.2.2. □

Remarque.2.3.1.

La transformée inverse, tout comme la transformée de Khovanskii, peut être utilisée pour contrôler l'erreur. Supposons en effet que $o < r < 1$ d'après les propriétés 2.2.2 et 2.3.1, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $(L_{n+1}-C)/(L_n-C) < 0$, donc C se trouve dans l'intervalle (L_n, L_{n+1}).
Prenons M tel que $N = 2M-1$, on a $C \in (C_{2p+1}, L_{2p-1})$ $\forall p \geq M$, i.e.

$$C \in (C_{2p+1}, C_{2p+1} - \frac{(C_{2p+1}-C_{2p})(C_{2p+1}-C_{2p-1})}{(C_{2p+1}-C_{2p})-(C_{2p}-C_{2p-1})}) \quad \forall p \geq M.$$

3 - CONNEXIONS.

3.1 - Cas où $a_n \to \infty$.

Plaçons nous dans le cas où $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Nous supposons en plus que, $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}/a_{2n} = \xi$ existe et $\xi \neq -1$.
Nous savons en outre que si $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = \xi$ existe et $|\xi| \neq 1$, la fraction continue diverge [8]. Dans notre cas a_n/a_{n+1}, peut ne pas avoir de limite.

Sous les hypothèses de la section 2, i.e. $1+a_1+2a_2 \neq 0$ et $a_{2n-1}+a_{2n} \neq -1/2$ $n = 2,\ldots$ les éléments de la transformation de Khovanskii (2.2.1) sont tels que,

$$\lim_{n\to\infty} d_{2n} = -\frac{\xi}{2(1+\xi)} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} d_{2n+1} = -\frac{1}{2(1+\xi)}$$

Avec $\xi \neq -1$ on obtient donc, soit une fraction continue 2-périodiques à la limite lorsque $\xi \neq 1$, soit une fraction continue telle que $d_n \to -1/4$ lorsque $\xi = 1$.

<u>Exemple 3.1.1.</u>

Considérons la fraction continue, $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \ldots$

$$b_o = -1 \; ; \; a_1 = 1 \; ; \; a_2 = -33/47 \; ; \; a_3 = -25/47$$

$$a_{2n} = -\frac{6+(3/2)^{2n}}{20} \; ; \; a_{2n+1} = -\frac{4+(3/2)^{2n}}{20} \qquad n = 2,\ldots$$

C'est une fraction continue telle que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{4}{9} \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1.$$

Sa transformée de Khovanskii est 2-périodique à la limite dont les éléments sont,

$$d_o = -2 \; ; \; d_1 = 1 \; ; \; d_2 = -\frac{47}{28} \; ; \; d_3 = 33/28 \; ; \; d_4 = -\frac{188000}{413553}$$

$$d_5 = \frac{2773}{5866} \; ; \; d_{2n} = -\frac{2}{13}\left[1+4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}\right] \; ; \; d_{2n+1} = -\frac{9}{26}\left[1+4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}\right] \; n=3,\ldots$$

Remarquons que la fraction continue initiale est telle que $a_n \to -\infty$ ce qui nous empêche de lui appliquer la plupart des procédés d'accélération de la convergence. Par contre sa transformée de Khovanskii est accélérable par tous les procédés d'accélération de la convergence des fractions continues 2-périodiques à la limite ; citons à titre indicatif [6] [13].

3.2 - Cas où $a_n \to -1/4$.

Dans le cas où $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/4$ on a immédiatement $\lim_{n\to\infty} |d_n| = \infty$.
En récapitulant on a le,

Théorème 3.2.1.

Si $1+a_1+2a_2 \neq 0$ *et* $a_{2n-1}+a_{2n} \neq -1/2$ *la transformée de Khovanskii (2.2.1) est telle que :*

i) si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ *et* $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}/a_{2n} = \xi \neq -1$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} d_{2n} = -\frac{\xi}{2(1+\xi)} \text{ et } \lim_{n\to\infty} d_{2n+1} = -\frac{1}{2(1+\xi)}$$

ii) si $\lim_{n\to\infty} a_n = -1/4$ *alors,*

$$\lim_{n\to\infty} |d_n| = \infty.$$

Exemple 3.2.1.

Prenons la fraction continue [15][14] définie par, $b_o = 0$
$a_n = -(1/4 + (2/3)^n) \quad n = 1,\ldots$

Sa transformée de Khovanskii est précisément la fraction continue initiale considérée dans l'exemple 3.1.1 et dont les éléments tendent vers $-\infty$.

Comme on le verra plus loin, le cas $-\infty$ correspond à des fractions continues difficiles à accélérer. Il peut ainsi paraître aberrant d'appliquer la transformée de Khovanskii au cas -1/4. Mais il n'en est rien puisque dans ce cas la transformation peut être accompagnée d'une accélération de la convergence (comme on le verra en section 4) et qu'on peut constater à travers les valeurs numériques ci-dessous :

Nous avons, $-0.6821528942 = -\frac{1}{|1/4+2/3|} - \ldots - \frac{1}{|1/4+(2/3)^n|} - \ldots$.

D'après [15] on a $c_{10^5} = -0.\underline{68}208$.

A titre de comparaison nous appliquons à la fraction continue ci-dessus le procédé $S_n(-1/2)$ [15].

n	K_n	$S_n(-1/2)$
16	- 0.6049...	- 0.6290...
26	- 0.6806...	- 0.6811...
32	- 0.68202	- 0.68206...
46	- 0.6821524...	- 0.6821525...
58	- 0.6821528907	- 0.6821528919

Nous voyons sur cette exemple qu'on a accélération et que $K_{2n} \simeq S_{2n}(-1/2)$.

4 - ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

Nous examinons dans cette partie le côté accélération de la convergence relatif aux deux cas ; $a_n \to -1/4$ et $|a_n| \to \infty$.

4.1 - Cas où $a_n \to -1/4$.

Nous nous limitons dans ce paragraphe à montrer que la transformée de Khovanskii (il en est de même pour la transformée inverse) accélère la convergence d'une classe de fractions continues telles que $a_n \to -1/4$.

Rappelons que la suite des convergents paires de la transformée de Khovanskii (propriété 2.2.1) sont données par :

$$K_{2n} = (C_{2n} - F_n\, C_{2(n-1)})/(1-F_n)$$

avec,

$$F_n = (C_{2n} - C_{2n-1})/(C_{2n-1} - C_{2(n-1)}).$$

Nous supposons évidemment que les hypothèses relatives à la propriété (2.2.1) sont satisfaites. De même, la fraction continue initiale est supposée convergente de limite finie $C \in \mathbb{C}$.

D'un autre côté lorsque $a_n \to -1/4$, on peut montrer que 1 est forcément un point d'accumulation de la suite $(\Delta C_{n+1}/\Delta C_n)$.

Posons : $e_{n+1}/e_n = 1 - \phi_{n+1}$.

On a le :

Théorème 4.1.1.

Si $\lim_{n\to\infty} \Delta C_{n+1}/\Delta C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ *alors, pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *on a,*

$\lim_{n\to\infty} (K_{2n}-C)/(C_{2n+p}-C) = 0$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \phi_{2n}/\phi_{2n-1}}{\phi_{2n-1}} = 1$.

Preuve.

Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$. Il suffit de montrer l'équivalence en considérant $(K_{2n} - C)/e_{2n-2}$.

Or, $(K_{2n}-C)/e_{2n-2} = 1 - \frac{1-e_{2n}/e_{2n-2}}{1 - F_n}$ (*).

D'autre part, $(C_{2n}-C_{2n-1})/(C_{2n-1}-C_{2n-2}) = (1 - \phi_{2n-1})\ \phi_{2n}/\phi_{2n-1}$

$$= \phi_{2n}/\phi_{2n-1} - \phi_{2n}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \Delta C_{n+1}/\Delta C_n = 1$ on a $\lim_{n\to\infty} \phi_{2n}/\phi_{2n-1} = 1$.

D'un autre côté, $1-e_{2n}/e_{2n-2} = \phi_{2n-1} + \phi_{2n} - \phi_{2n-1}\ \phi_{2n}$ et $1 - F_n = 1-\phi_{2n}/\phi_{2n-1}+\phi_{2n}$

Compte tenu de la relation (*), on a accélération si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} (1 - e_{2n}/e_{2n-2})/(1-F_n) = 1$$

i.e. si et seulement si, $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\phi_{2n}/\phi_{2n-1}-\phi_{2n}}{(1 - \phi_{2n}/\phi_{2n-1})/\phi_{2n-1}+\phi_{2n}/\phi_{2n-1}} = 1$.

Comme $\lim_{n\to\infty} \phi_{2n}/\phi_{2n-1} = 1$, la condition précédente est équivalente à

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \phi_{2n}/\phi_{2n-1})/\phi_{2n-1} = 1. \qquad \square$$

Remarque 4.1.1.

1 - L'hypothèse $\Delta C_{n+1}/\Delta C_n \to 1$ entraîne que $a_n \to -1/4$ à cause de la relation $a_{n+1} = (1-g_{n+1})/(g_n g_{n+1})$ où $g_n = 1 + \Delta C_{n-1}/\Delta C_{n-2}$ $n = 2,\ldots,g_1=1$.

2 - La classe des fractions continues satisfaisant $\lim_{n\to\infty} \Delta C_{n+1}/\Delta C_n = 1$ accélérable par la transformée de Khovanskii ou par $S_n(-1/2)$ [15] est la même. On peut en effet procéder de la même façon qu'au théorème 4.1.1 en écrivant $S_n(-1/2) = (C_n - \frac{g_n}{2} C_{n-1})/(1 - \frac{g_n}{2})$ et montrer que,

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n+p}(-1/2)-C)/(C_{2n+p}-C) = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} (1-\phi_{2n}/\phi_{2n-1})/\phi_{2n-1} = 1.$$

4.2 - Cas où $|a_n| \to \infty$.

Pour les fractions continues telles que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ nous disposons d'un certain nombre de procédés d'accélération de la convergence qui accélèrent certaines sous classes de ces fractions continues. Citons par exemple le Δ^2-d'Aitken [1] le θ_2-algorithme [1] et le procédé de Gill [4] que récemment L. Jacobsen-W.B. Jones-H. Waadeland [7] ont montré accélérer la convergence d'une classe de ces fractions continues. Mais tous ces procédés et bien d'autres sous entendent des considérations du genre,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx \frac{e_n}{e_{n-1}}, \quad \frac{e_{n+1}}{e_n} \approx \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \quad ;$$

C'est le cas par exemple du Δ^2-d'Aitken et du θ_2-algorithme ; ou encore $\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx \frac{g_{n+1}}{g_n} \frac{e_n}{e_{n-1}}$ ou ce qui revient au même $R_n \approx R_{n+1}$ avec $R_n = \frac{a_{n+1}|}{|1} + \frac{a_{n+2}|}{|1} + \cdots$ ce qui est le cas du procédé de Gill [4].

Nous voyons ainsi qu'avoir des renseignements sur le comportement de g_n ($g_n = 1+\Delta C_{n-1}/\Delta C_{n-2}$) et de e_n/e_{n-1} est essentiel dans la conception des procédés d'accélération de la convergence. Nous commençons donc par examiner ces quantités.

4.2.1 - Propriétés.

Rappelons 12 que : $g_{n+1} = 1/(1+a_{n+1}g_n)$; $g_1 = 1$ (4.2.1.1.)

$$C_{n+1} = g_{n+1}\, C_n + (1-g_{n+1})\, C_{n-1} \quad n = 1,2,\ldots \quad (4.2.1.2)$$

On a aussi, $e_{n+1}/e_n = -g_{n+1}R_{n+1}$ $\quad n = 1,2,\ldots$

<u>*Lemme 4.2.1.1.*</u>

i) 0 *est point d'accumulation de la suite* (g_n).

ii) Soit $r \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *un point d'accumulation de* $\dfrac{e_n}{e_{n-1}}$ *(i.e* $\lim\limits_{N'} e_n/e_{n-1}=r$*) alors* $\lim\limits_{n\in N'} e_{n+1}/e_n = 1/r$.

iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} g_n$ *existe alors, tout point d'accumulation* $\rho \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de e_n/e_{n-1} (i.e. $\lim\limits_{n\in N''} e_n/e_{n-1} = \rho$) *vérifie :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{n\in N''} \frac{e_{n+2p}}{e_{n+2p-1}} = \rho \text{ et } \lim_{n\in N''} \frac{e_{n+2p+1}}{e_{n+2p}} = 1/\rho.$$

<u>Preuve</u>.

i) Soit g un point d'accumulation de (g_n), $\lim\limits_{n\in M} g_n = g$ où M un sous ensemble infini de $\mathbb{N}$. Si $g \neq 0$, comme $|a_n| \to \infty$ la relation (4.2.1.1) nous donne immédiatement $\lim\limits_{n\in M} g_{n+1} = 0$.

ii) D'après i) $\exists M' \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{m\in M'} g_{n+1} = 0$. Soit donc r un point d'accumulation de $(e_n/e_{n-1})_{n\in M'}$, i.e. $\lim\limits_{n\in N'} e_n/e_{n-1} = r$, $N' \subseteq M'$.

De la relation (4.2.1.2) on a, $e_{n+1}/e_n = g_{n+1} + (1-g_{n+1})e_{n-1}/e_n$.
D'où $\lim\limits_{n\in N'} e_{n+1}/e_n = 1/r$.

iii) Découle d'une application répétive de la relation,

$$e_{n+1}/e_n = g_{n+1} + (1-g_{n+1})e_{n-1}/e_n.$$

□

Remarque 4.2.1.1.

L'intérêt du lemme 4.2.1.1 réside essentiellement dont le fait qu'il nous dévoile l'aspect oscillatoire du rapport e_n/e_{n-1} et la nature périodique de ces oscillations. Cette situation est inévitable lorsque e_n/e_{n-1} n'a pas de limite comme le montre l'assertion ii).

Exemple 4.2.1.1.

Pour illustrer le lemme 4.2.1.1 considérons la fraction continue

$$C = \frac{1|}{|1} - \frac{1/3|}{|1} - \frac{4/3|}{|1} - \frac{1/2|}{|1} - \frac{9/2|}{|1} - \dots - \frac{(n-1)^2/2|}{|1} - \frac{(n+1)^2/2|}{|1} - \dots$$

Les convergents successifs sont données par,

$$C_1 = 1 \; ; \; C_{2n} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \; ; \; C_{2n+1} = \frac{1}{n+1} \qquad n = 1,2,\dots .$$

Sa limite est donc $C = 0$.
De plus,

$$* \; g_{2n} = \frac{2}{n+1} \; ; \; g_{2n+1} = -1/n \qquad n = 1,\dots$$

$$* \; \frac{e_{2n}}{e_{2n-1}} = \frac{2n+1}{n+1} \; ; \; \frac{e_{2n+1}}{e_{2n}} = \frac{n}{2n+1}$$

On a donc

$$* \; \lim_{n\to\infty} g_n = 0 \; (\text{i.e. } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} = -1)$$

$$* \; \lim_{n\to\infty} \frac{e_{2n}}{e_{2n-1}} = 2 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{e_{2n+1}}{e_{2n}} = 1/2.$$

Nous voyons sur cet exemple que g_n et g_{n+1} sont de signes opposés. Comme e_n/e_{n-1} est de signe constant et ses deux points d'accumulations sont finis non nuls, on déduit (compte tenu de la relation, $e_n/e_{n-1} = -g_n R_n$) que la queue R_n oscille alternativement entre $-\infty$ et $+\infty$.

Pour accélérer la convergence de cette fraction continue il est donc impossible d'utiliser les procédés basés sur des considérations du genre

$R_n \approx R_{n+1}$ ou $e_n/e_{n-1} \approx \Delta c_n/\Delta c_{n-1}$ puisque dans notre cas ces approximations n'ont pas de sens.

Pour recueillir le maximum de renseignements voyons d'autres résultats.

Lemme 4.2.1.2.

Si $\lim_{n\to\infty} |R_n| = \infty$ *alors* $\lim_{n\to\infty} R_n/R_{n+2}$ *existe si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_{n+2}$ *existe. De plus, lorsqu'elles existentles deux limites sont égales.*

Preuve.

On a, $a_{n+1} = R_n(1+R_{n+1})$. D'où, $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \dfrac{R_n}{R_{n+2}} \cdot \dfrac{(1+1/R_{n+1})}{(1+1/R_{n+2})}$, ce qui rend l'assertion évidente.

□

Lemme 4.2.1.3.

Si $\lim_{n\to\infty} e_n/e_{n-1} = r$ *existe alors,*

i) $r = \pm 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} R_n/R_{n+1}$ *existe si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} g_{n+1}/g_n$ *existe.*

De plus, lorsqu'elles existent, les deux limites sont égales.

iii) $\lim_{n\to\infty} |R_n| = \infty$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} g_n$ *existe (forcément 0).*

iv) $\lim_{n\to\infty} R_n/R_{n+2}$ *existe si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} g_{n+2}/g_n$ *existe.*

Lorsqu'elles existent, les deux limites sont égales.

v) Si $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ *et* $\lim_{n} g_{n+1}/g_n = \beta$ *existe alors* $\lim a_n/a_{n+1} = \xi$ *existe et* $\beta^2 = \xi$.

Preuve.

i) découle immédiatement du lemme 4.2.1.1 ii).
Les autres assertions s'obtiennent facilement à l'aide de la relation $e_n/e_{n-1} = -g_n R_n$. v) découle de ii) et du lemme 4.2.1.2.

L'assertion i) du lemme 4.2.1.3 est particulièrement intéressante du point de vue de l'accélération de la convergence. En effet, lorsque r existe, l'assertion nous fait envisager deux situations totalement différentes. La première correspond à $r = -1$; dans ce cas, de la relation (4.2.1.2) on a immédiatement $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ i.e. $\lim_{n\to\infty} \Delta C_n/\Delta C_{n-1} = -1$, et se trouve ainsi dans le cadre des fractions continues accélérable par la quasi-totalité des procédés d'accélération de la convergence. Par contre, lorsque $r = 1$, la situation est particulièrement complexe. Ceci est dû au fait que 0 est un point d'accumulation de (g_n) (lemme 4.2.1.1, assertion i)).

Pour examiner ces deux éventualités nous nous plaçons dans le cas réel i.e. $b_o \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}$ $n = 1,2,\ldots$.
Nous serons amener en outre à supposer que $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ existe (on a forcément $g = 0$). Cette dernière considération n'est effectivement pas entraînée par les hypothèses $\lim |a_n| = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n$ existe, comme on peut le constater sur l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.2.1.2.

Soit la fraction continue

$$c = \frac{C_1|}{|1} - \frac{\lambda_2|}{|1+\lambda_2} - \ldots - \frac{\lambda_n|}{|1+\lambda_n} - \ldots$$

où,

$$C_1 > 0 \quad ; \quad \lambda_2 = -\mu_2$$

$$\lambda_{2n+1} = (1 + (-1)^n \mu_{2n})(-1 + (-1)^{n+1} \mu_{2n+1})$$

$$\lambda_{2n+2} = \frac{\mu_{2n+2}}{\mu_{2n}} \cdot \frac{[1+(-1)^n(-1+(-1)^{n+1} \mu_{2n+1}) \mu_{2n}]}{(1 - (-1)^{n+1} \mu_{2n+1})}$$

pour $n = 1, 2,\ldots$.

(μ_n) étant une suite telle que :

$$0 < \mu_n < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}\mu_{2n+1} = \infty.$$

On peut par exemple prendre $\mu_n = 1/\sqrt{n+1}$ $n = 2,\dots$.

Les convergents successifs de cette fraction continue sont donnés par,

$$C_o = 0 \quad ; \quad C_1 > 0 \text{ (arbitraire)}$$

$$C_{2n} = (1 + (-1)^n \mu_{2n})\, C_{2n-1}$$

$$C_{2n+1} = [1 + (-1)^n(-1+(-1)^{n+1} \mu_{2n+1})\mu_{2n}]\, C_{2n}$$

Les conditions imposées sur les μ_n font que $C = 0$.
De plus,

* $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = 1$

* $g_{2n+1} = 1 + \lambda_{2n+1} \to 0$

* $g_{2n+2} = 1 + \lambda_{2n+2}$ qui ne peut pas être de limite

nulle puisque

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{2n+2} = \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \frac{\mu_{2n+2}}{\mu_{2n}}$$

si elle existe, avec $\mu_n > 0$ pour tout n.

Lemme 4.2.1.4.

Avec, $b_o \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$ $n = 1,2,\dots$.

Si $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = r$ *et* $\lim_{n\to\infty} g_n$ *existent on a,*

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow r = -1.$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow r = +1.$

Preuve.

Les deux assertions se démontrent de la même façon. Nous donnons la démonstration de la deuxième.

Raisonnons par l'absurde.
Supposons $r = -1$. La suite des erreurs s'écrit alors, $e_{n+1} = (-1+\varepsilon_{n+1})e_n$ où $\varepsilon_n \to 0$.
Donc, $\Delta C_n = (-2+\varepsilon_{n+1})e_n$.
D'où, $1 + \Delta C_{n+1}/\Delta C_n = (\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_{n+2}-\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2})/(2-\varepsilon_{n+1})$.
Or, $g_{n+2} = 1 + \Delta C_{n+1}/\Delta C_n$ (relation 4.2.1.2).
D'autre part, de la relation (4.2.1.1) on a,

$$a_{n+2}\, g_{n+1} g_{n+2} = 1-g_{n+2}.$$

Comme, $g_n \to 0$ et $a_n \to -\infty$,

$$\exists N : \forall n \geq N,\ (1+\Delta C_{n+2}/\Delta C_n)(1+\Delta C_{n+2}/\Delta C_{n+1}) < 0$$

où N est supposé suffisamment grand pour assurer $|\varepsilon_n| < 1\ \forall n \geq N$.

L'inégalité précédente se traduit par,

$$(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2})(\varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+3} - \varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}) < 0 \quad \forall n \geq N \qquad (1)$$

ou encore,

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} < \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} \\ \text{et} \\ \varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+3} > \varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} > \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} \\ \text{et} \\ \varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+3} < \varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3} \end{cases} \qquad (1')$$

Ces conditions ne peuvent être vérifiées que si (ε_n) est une suite alternée à partir d'un certain rang.

En effet, supposons $0 < \varepsilon_{n+1} < 1$ et $0 < \varepsilon_{n+2} < 1$.

On dit forcément avoir,

$$\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} > \varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2} \text{ et } \varepsilon_{n+2}+\varepsilon_{n+3} > \varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}.$$

Donc $\varepsilon_{n+2}(\varepsilon_{n+3}-1) > \varepsilon_{n+3}$ ce qui entraîne $\varepsilon_{n+3} < 0$.
Mais, puisque $\varepsilon_{n+2} + \varepsilon_{n+3} < \varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+1}$ et

$$(1 + \frac{\Delta c_{n+2}}{\Delta c_{n+1}})(1+ \frac{\Delta c_{n+3}}{\Delta c_{n+2}}) < 0,$$

on doit avoir d'après (1'), $\varepsilon_{n+3} + \varepsilon_{n+4} > \varepsilon_{n+3}\varepsilon_{n+4}$. Donc $\varepsilon_{n+3}(\varepsilon_{n+4}-1) < \varepsilon_{n+4}$, comme $\varepsilon_{n+3} < 0$ on a $\varepsilon_{n+4} > 0$ et ainsi de suite.

On peut refaire le même raisonnement avec $-1 < \varepsilon_{n+1} < 0$ et $-1 < \varepsilon_{n+2} < 0$.
La suite (ε_n) et donc alternée à partir d'un certain rang.
Soit donc, $\varepsilon_n = (-1)^n \gamma_n$ $1 > \gamma_n > o$ $n \geq N$ et $\gamma_n \to 0$.
Ecrivons les égalités (1) pour $n = 2p$ et $n = 2p+1$ pour $p \geq N'$ où $N' \geq \lceil \frac{N}{2} + 2 \rceil$.

On obtient,

$$\begin{cases} [\gamma_{2p+1}-\gamma_{2p+2}-\gamma_{2p+1}\gamma_{2p+2}][\gamma_{2p+2}-\gamma_{2p+3}+\gamma_{2p+2}\gamma_{2p+3}] > 0 \\ \text{et} \\ [\gamma_{2p+2}-\gamma_{2p+3}+\gamma_{2p+2}\gamma_{2p+3}][\gamma_{2p+3}-\gamma_{2p+4}-\gamma_{2p+3}\gamma_{2p+4}] > 0 \end{cases} \qquad (1")$$

Or, $\gamma_{2p+1}-\gamma_{2p+2}-\gamma_{2p+1}\gamma_{2p+2} < 0$ n'est pas possible. Si non,

Si non, $\gamma_{2p+1}-\gamma_{2p+2}-\gamma_{2p+1}\gamma_{2p+2} < 0 \Rightarrow \gamma_{2p+2} > \frac{\gamma_{2p+1}}{1+\gamma_{2p+1}}$.

Mais, pour que (1") soit vérifiée on doit avoir aussi,

$$\gamma_{2p+2}-\gamma_{2p+3}+\gamma_{2p+2}\gamma_{2p+3} < 0 \text{ et donc } \gamma_{2p+2} < \frac{\gamma_{2p+3}}{1+\gamma_{2p+3}}$$

De même, il faudrait que, $\gamma_{2p+3}-\gamma_{2p+4}-\gamma_{2p+3}\gamma_{2p+4} < 0$ et aussi de suite

Ce qui entraîne $\dfrac{\gamma_{2p+1}}{1+\gamma_{2p+1}} < \dfrac{\gamma_{2p+3}}{1+\gamma_{2p+3}}$ $\forall p \geq N'$. Donc (γ_{2p+1}) est croissante

ce qui contredit la convergence vers 0 de (γ_n).

On a donc, $\gamma_{2p+1} - \gamma_{2p+2} - \gamma_{2p+1}\gamma_{2p+2} > 0$ et avec (1") on obtient,

$$\gamma_{2p+m} - \gamma_{2p+m+1} + (-1)^m \gamma_{2p+m}\gamma_{2p+m+1} > 0 \quad p \geq N',\ m = 0,1,\dots .$$

Or,

$$\gamma_{2p+1} - \gamma_{2p+2} - \gamma_{2p+1}\gamma_{2p+2} > 0 \iff \gamma_{2p+2} < \frac{\gamma_{2p+1}}{1+\gamma_{2p+1}}$$

et,

$$\gamma_{2p+2} - \gamma_{2p+3} + \gamma_{2p+2}\gamma_{2p+3} > 0 \iff \gamma_{2p+2} \quad \frac{\gamma_{2p+3}}{1+\gamma_{2p+3}}$$

D'où,

$$\frac{1}{1+\gamma_{2p\ 1}} < 1 - \gamma_{2p} < \frac{1}{1+\gamma_{2p+1}} \tag{2}$$

Or,

$$e_{2p+1} = [(-1+(-1)^{2p+1}\gamma_{2p+1})(-1+(-1)^{2p-1}\gamma_{2p-1})\dots(-1+(-1)^{2N'+1}\gamma_{2N'+1})] *$$

$$[(-1+(-1)^{2p}\gamma_{2p})(-1+(-1)^{2p-2}\gamma_{2p-2})\dots(-1+(-1)^{2N'}\gamma_{2N'+2})]e_{2N'}$$

$$= [(1+\gamma_{2p+1})(1+\gamma_{2p-1})\dots(1+\gamma_{2N'+1})(1-\gamma_{2p})\dots(1-\gamma_{2N'+2})]\ e_{2N'}$$

A l'aide de (2) on a,

$$|e_{2p+1}| \geq (1+\gamma_{2p+1})\dots(1+\gamma_{2N'+1})\left(\frac{1}{1+\gamma_{2p-1}}\right)\left(\frac{1}{1+\gamma_{2p-3}}\right)\dots\left(\frac{1}{1+\gamma_{2N'+1}}\right) \quad |e_{N'}|$$

Donc, $|e_{2p+1}| \geq (1+ {}_{2p+1}) \; |e_{2N'}|$

$$> |e_{2N'}|$$

Ce qui contredit la convergence de (C_n). Donc $r = 1$. □

<u>Exemple 4.2.1.3.</u>

Voyons un exemple où l'assertion ii) du lemme 4.2.1.4 est satisfaite. Soit,

$$c = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots + \frac{a_n|}{|1} + \ldots$$

où, $b_o = 0$; $a_1 = 1$; $a_2 = -\lambda_2/(1+\lambda_2)$; $a_n = -\lambda_n/[(1+\lambda_n)(1+\lambda_{n-1})]$ $n = 3,\ldots$.

Avec, $\lambda_2 = 1/(1+\alpha)$

$$\lambda_{2n+1} = -(1+\alpha+\sqrt{2n-1})/\sqrt{2n+1} \qquad n = 1,\ldots$$

$$\lambda_{2n+2} = -(-1+\sqrt{2n+1})/(\alpha+\sqrt{2n+1}) \qquad n = 1,\ldots$$

où α un réel tel que, $\alpha \geq 0$.

Les convergents de cette fraction continue peuvent se calculer par,

$$C_1 = 1$$
$$C_{n+1} = C_n(1+\varepsilon_{n+1})$$

où

$$\varepsilon_{2n} = 1/(\alpha+\sqrt{2n-1}) \text{ et } \varepsilon_{2n+1} = -1/\sqrt{2n+1} \qquad n = 1,\ldots .$$

On a,

. $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0 \qquad (C = 0)$

. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

. $\lim g_n = 0 \qquad (\lim \Delta C_{n+1}/\Delta C_n = -1)$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = 1$$

Remarque 4.2.1.3.

Le lemme 4.2.1.4, sous les conditions où il est énoncé, renferme des renseignements très intéressants pour la recherche de procédés d'accélération de la convergence. En effet, l'assertion ii) nous assure un cas où $r = 1$. La suite (a_n) étant réelle et nous savons que $a_{n+1} = (1-g_{n+1})g_n g_{n+1}$. Donc lorsque $a_n \to -\infty$, g_n et g_{n+1} sont constamment de signes opposés. D'autre part, on a $e_{n+1}/e_n = -g_{n+1}R_{n+1}$, comme $r=1$, g_{n+1} et R_{n+1} sont de signes opposés. Donc R_n et R_{n+1} sont eux aussi de signes opposés et oscillent alternativement de $-\infty$ à $+\infty$.

Ceci est évidemment le cas pour la fraction continue de l'exemple précédent.

On a :

$$g_{2n} = \frac{\alpha+1}{\alpha+\sqrt{2n-1}} \quad ; \quad g_{2n+1} = -\frac{1+\alpha-(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}}$$

$$R_{2n} = -\frac{1+\alpha+\sqrt{2n-1}}{\alpha+1} \quad ; \quad R_{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{1+\alpha-(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}} \; .$$

Restons dans le cas réel.

Lemme 4.2.1.5.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r$ *existe,* $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \beta$ *existe alors*

i) ou bien $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *ou bien* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

De plus $\beta = 1$ *lorsque* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *et* $\beta = -1$ *lorsque* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

ii)

* $\beta = 1$ *si et seulement si* $r = -1$.

* $\beta = -1$ *si et seulement si* $r = +1$.

Preuve.

i) $\lim_{n\to\infty} g_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r$ existe on a $r = \pm 1$ d'après le lemme 4.2.1.3 i)), dans $\lim_{n\to\infty} |R_n| = \infty$. De plus $\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R_{n+1}} = \beta$ (lemme 4.2.1.3 ii)). Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R_{n+2}} = \beta^2$ et le lemme 4.2.1.2 donne $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \xi$ existe et $\xi = \beta^2$. Or $|\xi| = 1$ (sans cela la fraction continue diverge [8]), donc $\xi = \beta^2 = 1$. Donc a_n et a_{n+1} sont de même signe à partir d'un certain rang. Comme $|a_n| \to \infty$ on a $a_n \to +\infty$ ou bien $a_n \to -\infty$.

ii) D'après la démonstration de i) on a $\beta = \pm 1$ et $\xi = \beta^2 = 1$. Donc si $r = 1$ on a nécessairement $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ compte tenu de l'assertion i) et du lemme 4.2.1.4. Donc g_n et g_{n+1} sont de signes opposés (à partir d'un certain rang). Donc $\beta = -1$. Réciproquement, si $\beta = -1$, g_n et g_{n+1} sont de signes opposés. Donc $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Donc $r = 1$ à cause du lemme 4.2.1.4.

Même raisonnement dans le cas $r = -1$.

□

Le lemme 4.2.1.5 signifie en particulier que si $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}$ existe et $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$, $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ (et $\frac{R_n}{R_{n+1}}$) n'a pas de limite lorsque $-\infty$ et $+\infty$ sont tout deux points d'accumulation de (a_n).

4.2.2 - Accélération de la convergence.

A travers les lemmes et plus particulièrement le lemme 4.2.1.4, plusieurs sous-classes de fractions continues où $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ se distinguent. L'une de ces sous-classes est accélérable par pratiquement tous les procédés existants à savoir celle où $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = -1$. Une deuxième classe serait celle où $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = 1$ et $\lim g_n = 0$. Cette dernière classe n'est certainement pas accélérable et la quasi-totalité des procédé existant n'en accélèrent même pas une seule fraction continue.

a - Le procédé T_{+2}.

L'assertion ii) du lemme 4.2.1.1 nous montre que lorsque $\lim e_{n+1}/e_n$

Par contre l'assertion iii) du même lemme nous suggère d'estimer que e_{n+1}/e_n et e_{n+3}/e_{n+2} se confondent à partir d'un certain rang.

Soit donc (T_n) la suite définie par,

$$(C_{n+1}-T_n)/(C_n-T_n) = (C_{n+3} - T_n)/(C_{n+2}-T_n), \qquad n = 0,1,\ldots$$

En isolant T_n on obtient,

$$T_n = \frac{C_{n+2} - \dfrac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_n} C_n}{1 - \dfrac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_n}} \qquad n = 0,1,\ldots$$

ou d'une façon équivalente

$$T_n = \frac{C_{n+1} - t_n C_n}{1 - t_n} \qquad n = 0,1,\ldots$$

où $$t_n = (g_{n+2}-1)g_{n+3}/g_{n+2}.$$

Le procédé ainsi obtenu correspond au choix m=2 dans le procédé T_{+m} de GRAY et CLARK [5].

Théorème 4.2.2.1.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = -1$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - C}{e_n} = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = 1$$

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1$ et $\lim g_n$ *existe alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - C}{e_n} = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\phi_{n+3}/\phi_{n+1})/\phi_{n+1}}{g_{n+2}} = 0 .$$

où, $\phi_{n+1} = 1 - e_{n+1}/e_n$.

Preuve.

On a, $\dfrac{T_n - C}{e_n} = \dfrac{e_{n+1}/e_n - t_n}{1 - t_n}$

$$= 1 - \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 - t_n}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n - C}{e_n} = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-e_{n+1}/e_n}{1-t_n} = 1$ (*)

i) Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = -1$ de la relation (4.2.1.2) on a immédiatement $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$.

Comme $t_n = g_{n+3} - g_{n+3}/g_{n+2}$, la condition (*) est satisfaite si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n+3}/g_{n+2} = 1$.

ii) Supposons cette fois ci que $\lim\limits_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = r \neq -1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$.

D'après le lemme 4.2.1.4 on a forcément $r = 1$. D'autre part, de la relation (4.2.1.2) on a,

$$g_{n+2} = 1 + \phi_{n+2}/\phi_{n+1} - \phi_{n+2}$$

Donc, $1-t_n = \phi_{n+3} - \phi_{n+3}/\phi_{n+2} + \dfrac{1+\phi_{n+3}/\phi_{n+2} - \phi_{n+3}}{2+\phi_{n+2}/\phi_{n+1} - \phi_{n+2}}$

$$= \phi_{n+3} + \frac{1-\phi_{n+3}/\phi_{n+1}}{1+\phi_{n+2}/\phi_{n+1} - \phi_{n+2}}$$

ou encore, $1-t_n = \phi_{n+3} + (1-\phi_{n+3}/\phi_{n+1})/g_{n+2}$.

Comme on a supposé $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_{n+2}/\phi_{n+1} = -1$.

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-t_n}{\phi_{n+1}} = 1$ si et seulement si $(1-\phi_{n+3}/\phi_{n+1})/(\phi_{n+1}g_{n+2}) = 0$.

$\square$

Remarque 4.2.2.1.

1) Comme nous l'avons signalé à la suite du lemme 4.2.1.3, lorsque $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = -1$, la plupart des procédés d'accélération accélèrent la convergence de ces fractions continues. Mais à travers l'assertion i) du théorème précédent nous voyons que le T_{+2} exige que $\lim_{n\to\infty} g_{n+1}/g_n = 1$.
Or sous cette condition on doit avoir aussi, $\lim_{n\to\infty} R_n/R_{n+1} = 1$ à cause de l'assertion ii) du lemme 4.2.1.3. En utilisant le lemme 4.2.1.2 on doit donc avoir, $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = 1$. Cette dernière condition est donc nécessaire pour que le T_2 accélère la convergence dans le cas $r = -1$.

De même, sous les hypothèses de l'assertion ii), la condition d'accélération sous entend qu'on doit nécessairement avoir $\lim_{n\to\infty} g_{n+1}/g_n = -1$, ce qui conduit de la même façon que précédemment, à ce que $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = 1$.

La condition $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = 1$ est donc nécessaire pour que le T_{+2} accélère la convergence des fractions continues telles que $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n$ et $\lim_n g$ existent (avec $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$).

2) Le T_{+2} est pourtant l'un des rares (nous n'en avons pas rencontré un deuxième) procédés qui accélère la convergence aussi bien lorsque $r = -1$ que lorsque $r = 1$ dans le cas où $\lim_{n\to\infty} \Delta c_{n+1}/\Delta c_n = -1$.

D'autre part le T_{+2} peut accélérer la convergence de certaines fractions continues même si $\lim_n e_{n+1}/e_n$ n'existe pas, comme on peut le constater sur la fraction continue de l'exemple 4.2.1.1.

Nous avons en effet ;

$$\frac{T_{2n}-C}{C_{2n}-C} = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \to 0$$

et

$$\frac{T_{2n+1}-C}{C_{2n+1}-C} = \frac{5n}{(n+1)(n+2)} \to 0$$

bien que, $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{2n}}{e_{2n-1}} = 2$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{2n+1}}{e_{2n}} = 1/2$, avec $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

b - Le procédé "Anti-Δ^2".

Plaçons nous dans le cas où $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} = -1$ $(g_n \to 0)$
Une première idée qu'on peut avoir dans ce cas est d'estimer que e_{n+1}/e_n est comparable à $-\Delta C_{n+1}/\Delta C_n$.

Ceci revient à générer la suite (Z_n) telle que :

$$(C_{n+1}-Z_n)/(C_n-Z_n) = -\Delta C_{n+1}/\Delta C_n.$$

D'où,

$$Z_n = \frac{C_{n+1} + \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} C_n}{1 + \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n}} \qquad n = 0,1,\ldots$$

Posons : $\phi_{n+1} = 1 - e_{n+1}/e_n$.

Théorème 4.2.2.2.

Si $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ *alors*

$\lim_{n\to\infty} (Z_n - C)/(C_n - C) = 0$ *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} (1 + \phi_{n+1}/\phi_n)/\phi_n = 0.$

Preuve.

On a $\lim_{n\to\infty} (Z_n-C)/(C_n-C) = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 + \Delta C_{n+1}/\Delta C_n} = 1.$

D'autre part,

$$\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{e_{n+2}/e_{n+1} - 1}{e_{n+1}/e_n - 1}$$

D'où,

$$1 + \Delta c_{n+1}/\Delta c_n = 1 + \phi_{n+2}/\phi_{n+1} - \phi_{n+2}$$

Comme on a supposé $\lim \Delta c_{n+1}/\Delta c_n = -1$, on a $\lim_{n\to\infty} \phi_{n+2}/\phi_{n+1} = -1$.
La condition d'accélération est donc équivalente à,

$$\lim_{n\to\infty} [(1 + \phi_{n+2}/\phi_{n+1})/ \phi_{n+1} - \phi_{n+2}/\phi_{n+1}] = 1.$$

i.e. à

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \phi_{n+2}/\phi_{n+1})/\phi_{n+1} = 0.$$

□

Remarque 4.2.2.2.

1°) Pour illustrer un aspect de ces deux procédés reprenons la fraction continue de l'exemple 4.2.1.3. C'est une fraction continue dont la convergence est d'autant plus lente que α est petit. Pour $\alpha = 0$ des essais numériques en simple précision donnent : $C_2 = 2$; $C_{5000} = 0.15$ ...

Pour ces deux procédés on a les limites asymptotiques.

$$\lim_n \frac{T_n - C}{C_n - C} = \frac{1}{2+\alpha}$$

$$\lim_n \frac{Z_n - C}{C_n - C} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Donc, si $\alpha \neq 0$ on ne peut pas avoir accélération, mais seulement une amélioration. Remarquons dans ce sens le côté complémentaire des deux procédés. En effet, plus α est grand meilleure est l'amélioration par le T_{+2}, moins bonne est celle due à Z et inversement.

Par contre, pour $\alpha = 0$ le procédé Z accélère la convergence et on a :

$$Z_{2n} = C \quad n = \quad , 2,...$$

$$\frac{Z_{2n+1}-C}{C_{2n+1}-C} = \frac{1+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1} - 1} \cdot (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) \to 0.$$

2°) Nous avons vu que dans le cas réel avec $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n} g_n = 0$ et $r = 1$, R_n et R_{n+1} oscillent alternativement de $-\infty$ à $+\infty$ et sont de signes opposés. D'un autre côté, lorsque $\lim\limits_{n} R_n/R_{n+1}$ existe elle vaut forcément ± 1 à cause du lemme 4.2.1.2 et le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}$ lorsqu'elle existe doit être de module 1 sans cela la fraction continue diverge [8] .
Dans notre cas cette limite est 1 lorsqu'elle existe. Donc $\lim\limits_{n} R_n/R_{n+1} = -1$ lorsqu'elle existe.

Ceci nous conduit à l'estimation $R_n \approx -R_{n+1}$.

On a donc à résoudre,

$$x_n^2 - x_n + a_{n+1} = 0$$

Nous savons d'autre part (Remarque 4.2.1.3) qu'à partir d'un certain rang g_n et R_n sont de signes opposés.

La racine x_n choisie sera donc celle qui est de signe opposé à celui de g_n. On calcule ensuite $S_n(x_n)$, où [16]

$$S_n(x_n) = \frac{A_n + x_n A_{n-1}}{B_n + x_n B_{n-1}} .$$

$S_n(x_n)$ est une alternative du procédé de Gill [4], destiné uniquement au cas $r=1$ et $\lim g_n = 0$.

RÉFÉRENCES.

[1] C. BREZINSKI, *"Accélération de la convergence en Analyse Numérique"*. Lecture Notes in Mathematics, 582, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[2] C. BREZINSKI and A. LEMBARKI, *"The linear convergence of limit periodic continued fractions"*, J. Comp. Appl. Math., to appear.

[3] J.P. DELAHAYE, *"Théorie des transformations de suites en analyse numérique. Applications"*. Thèse, Université de Lille 1 (1982).

[4] J. GILL, *"Convergence acceleration for continued fractions* $K(a_n/1)$ *with* $\lim a_n = 0$. Lectures Notes in Mathematics, 932 Springer-Verlag, Heidelberg, (1981) 67-70.

[5] H.L. GRAY and W.D. CLARK, *"On a class of nonlinear transformations and their applications to the evaluation of infinite series"*. J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B, 73 B (1969), 251-274.

[6] L. JACOBSEN, *"Repeated modifications of limit k-periodic continued fractions"*. Numer. Math., 47, (1985), 577-595.

[7] L. JACOBSEN, W. JONES, H. WAADELAND, *"Convergence acceleration for continued fractions* $K(a_n/1)$, *where* $a_n \to \infty$. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, To appear.

[8] L. JACOBSEN, H. WAADELAND, *"Even and odd parts of limit periodic continued fractions"*. J. Comp. Appl. Math., 15 (1986), 225-233.

[9] W.B. JONES, W.J. THRON, *"Continued fractions, Analytic theory and Applications"*. Encyclopedia of Mathematics 11 (Adisson Wesley, Reading MA, 1980).

[10] A.N. KHOVANSKII, *"The application of continued fractions and their generalizations to problems in* Approximation Theory. P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN (1963).

[11] E. SØRSDAL, H. WAADELAND, *On the convergence of a certain class of continued fractions* $K(a_n/1)$ *with* $a_n \to \infty$. Lecture Notes in Mathematics 1199, Springer Verlag, Heidelberg (1985) 285-293.

[12] A. LEMBARKI, *"Acceleration of limit periodic continued fractions by the* T_{+m} *transformations"*, J. Comp. Appl. Math. to appear.

[13] A. LEMBARKI, *Convergence Acceleration of limit k-periodic continued fractions"*, Appl. Numer. Math., to appear

[14] A. PRINGSHEIM, *"Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche"*. Akad. Nat. Wiss. Kl. Sitzber. 28, (1899), 295-324.

[15] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"Accelerating convergence of limit periodic continued fractions"*. Numer. Math. 34, (1980), 155-170.

[16] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"Modifications of continued fractions, a Survey"*. Lecture Notes in Mathematics, 932, Springer-Verlag, Heidelberg. (1981), 38-66.

ACCÉLÉRATION ET SUR-ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

-

1 - PRELIMINAIRES ET NOTATIONS.

1.1 - Préliminaires.

Soit (C_n) une suite de convergents successifs d'une fraction continue à éléments complexes, convergente de limite $C \in \mathbb{C}$.

Nous savons qu'évaluer la valeur d'une fraction continue c'est évaluer la limite de la suite de ses convergents successifs (voir par exemple [5]) et qu'accélérer la convergence d'une fraction continue, c'est accélérer la convergence de ses convergents successifs (voir par exemple [12]). D'autre part, dans le domaine des fractions continues, certaines quantités sont apparues naturellement, comme les queues R_n de la fraction continue [5] et le rapport de deux dénominateurs partiels g_n (voir [6] pour les notations).

Dans les procédés d'accélération de la convergence de suites les quantités qui apparaissent naturellement sont les rapports des erreurs $(C_{n+1}-C)/(C_n-C)$ et les rapports des différences $\Delta C_{n+1}/\Delta C_n$ (voir par exemple [1]). Mais toutes ces quantités sont liées, puisque,

$$\frac{C_{n+1}-C}{C_n-C} = -g_{n+1}R_{n+1}$$

et

$$g_{n+1} = 1 + \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}}$$

(voir par exemple [6]). Les considérations que nous ferons porteront essentiellement sur $(C_{n+1}-C)/(C_n-C)$ et g_n.

1.2 - Notations.

* (C_n) la suite dont on accélère la convergence, $C \in \mathbb{C}$ sa limite.

* $e_n = C_n - C$

* $\varepsilon_{n+1} = e_{n+1}/e_n - r$ où $r = \lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n$ si r existe.

* $g_{n+1} = 1 + \Delta C_n/\Delta C_{n-1}$; $g_1 = 1$

* $\beta_{n+1} = \dfrac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} - r$

* $a_{n+1} = (1-g_{n+1})/g_n g_{n+1}$

* $R_n = \dfrac{a_{n+1}|}{|1} + \dfrac{a_{n+2}|}{|1} + \dots$

2 - UN RESULTAT GENERAL SUR L'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE.

Soit F un procédé d'accélération de la convergence défini par $F_n = T_n$, où T_n est une certaine expression.

Si $T_n \neq C_n$ (ce qui est acquis au moins à partir d'un certain rang) et si $C_n \neq C_{n+1}$ (ce qui est également acquis puisque (C_n) est la suite des convergents successifs d'une fraction continue [5]), F_n peut toujours se mettre sous la forme,

$$F_n = \frac{C_{n+1} - f_n C_n}{1 - f_n} \tag{1}$$

Dans le cas où le procédé F fournit un tableau de valeurs, on peut le considérer comme étant une succession de procédés qui sont ses colonnes, ses diagonales ou autres.

La transformation (1) prend ainsi un caractère tout à fait général.

Théorème 2.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n - C}{C_n - C} = 0 \textit{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 - f_n} = 1.$$

Corollaire 2.1.

Si $\lim_{n\to\infty} (\frac{e_{n+1}}{e_n} - f_n) = 0$ *et si,* $\exists a,b$ *tels que* $a < 1 < b$ *et* $f_n \notin [a,b]$ *à partir d'un certain rang alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n - C}{C_n - C} = 0.$$

Preuves.

On a

$$\frac{F_n - C}{C_n - C} = \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - f_n}{1 - f_n}$$

$$= 1 - \frac{1 - e_{n+1}/e_n}{1 - f_n}.$$

D'où les assertions à la fois du théorème et du corollaire.

Remarques 2.1.

1 - Le théorème montre qu'en général la condition $\lim_{n\to\infty} (\frac{e_{n+1}}{e_n} - f_n) = 0$ ne suffit pas pour accélérer la convergence de n'importe quelle suite.

En particulier, si $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = 1$, l'accélération n'est acquise que si, en plus de la condition précédente, e_{n+1}/e_n et f_n convergent de la même façon vers 1.

2 - Nous avons convenu que les convergents figurant explicitement dans F_n sont successifs. Ceci n'est pas nécessaire et il est même parfois utile de prendre C_n et C_{n+p} (ou autres) où p est choisi en fonction de la nature de la fraction continue (voir par exemple les démarches suivies dans [7], [8]).

Définition 2.2.

Pour toute transformation,

$$F_n = \frac{C_{n+1} - f_n C_n}{1 - f_n}$$

- (f_n) *sera appelé par facteur d'accélération.*

- *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{1-e_{n+1}/e_n}{1 - f_n} = 1$ *nous dirons que* f_n *est une approximation accélérante du rapport* e_{n+1}/e_n *(ou facteur accélérant pour la suite* (C_n)*).*

Remarque 2.2.

Avec la définition 2.2, le théorème 2.1 montre en particulier l'équivlaence entre la recherche d'un procédé d'accélération de la convergence et la recherche d'une approximation accélérante du rapport des erreurs.

Voyons d'autres aspects.

Supposons que, $\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = r$ existe.

Soit (f_n) telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = r$.

Posons, $\phi_n = f_n - r$

Cas 1.

Si $r \neq 1$, f_n est alors un facteur accélérant et on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n - C}{e_n} = 0 .$$

Or, $\frac{F_n - C}{e_n} = \varepsilon_{n+1}(1 - \phi_n/\varepsilon_{n+1})/(1-f_n)$.

Donc, si ϕ_n/ε_{n+1} ne tend pas vers 1, $(F_n-C)/e_n$ converge vers 0 au mieux comme ε_{n+1}.

Donc les suites les mieux accélérées pour un choix donné du facteur d'accélération f_n sont celles pour lesquelles f_n est un facteur accélérant et $\lim_{n\to\infty} \phi_n/\varepsilon_{n+1} = 1$.

Cette propriété peut servir de base aussi bien dans la construction de procédés d'accélération que dans le choix du procédé qu'on utiliserait pour accélérer (C_n) ou toute une classe de fractions continues.

Définition 2.3.

Une suite (C_n) est sur-accélérée (ou, on a une sur-accélération) si, $\lim_{n\to\infty} \phi_n/\varepsilon_{n+1} = 1$.

Cas 2. $r = 1$.

Dans ce cas, $\dfrac{F_n-C}{e_n} = 1 - \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\phi_n}$.

Donc la propriété $\lim_{n\to\infty} \phi_n/\varepsilon_{n+1}=1$ qui assurait la sur-accélération lorsqu'on était dans le cas $r \neq 1$, devient dans le cas logarithmique une condition nécessaire et suffisante pour avoir accélération simple.

3 - INTERPRETATION DE QUELQUES PROCEDES.

Passons en revue quelques procédés d'accélération de la convergence connues et donnons les facteurs d'accélération à partir desquels ils sont construits.

Notons que f_n peut être donné par différentes expressions qui sont équivalentes et redonnent le même procédé.

1 - Le Δ^2 d'AITKEN [1].

$$f_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} .$$

2 - LE θ_2 DE BREZINSKI [1].

Rappelons que le θ_2 est défini par :

$$\theta_2^{(n)} = \frac{D_1^{(n)} C_{n+2} - D_1^{(n+1)} C_{n+1}}{D_1^{(n)} - D_1^{(n+1)}}$$

$$D_1^{(n)} = \frac{\Delta C_n \Delta C_{n+1}}{\Delta C_n - \Delta C_{n+1}}$$

Son facteur d'accélération est

$$f_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\dfrac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_{n+1}} - 1}{2\,\dfrac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_{n+1}} - \dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} - 1}$$

ou d'une façon équivalente

$$f_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\dfrac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} - 1}{\dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} - 1} .$$

Remarquons que,

$$\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} = \frac{e_{n+1}}{e_n} \cdot \frac{\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1}{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}$$

donc,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\dfrac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\dfrac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 1} .$$

Le θ_2 revient donc à remplacer dans le second membre de cette expression e_{n+1}/e_n par $\Delta C_n/\Delta C_{n-1}$.

3 - LE T_{+2} de GRAY et CLARK [8].

$$f_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\dfrac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_{n+1}} + 1}{\dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} + 1} .$$

4 - LE PROCEDE $S_n(x_1)$ de GILL [4].

$$f_n = r \cdot \frac{\dfrac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} + 1}{r + 1}$$

5 - LA PROCEDURE θ de BREZINSKI [2].

Soit Z une transformation donnée par, $Z_n = C_n + D_n$; la procédure θ consiste à prendre comme nouveau procédé,

$$\theta(Z_n) = C_n - \frac{\Delta C_n}{\Delta D_n} D_n .$$

Son facteur d'accélération est

$$f_n = \frac{C_{n+1} - Z_{n+1}}{C_n - Z_n}$$

Soit z_n le facteur d'accélération de Z. f_n devient,

$$f_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{z_n - 1}{z_{n+1} - 1} .$$

6 - L'ε-ALGORITHME de WYNN [14].

nous intéressent).

En utilisant la règle de WYNN [1],

$$(\varepsilon_{k+2}^{(n)} - \varepsilon_k^{(n+1)})^{-1} - (\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_{k-2}^{(n+2)})^{-1} = (\varepsilon_k^{(n+2)} - \varepsilon_k^{(n+1)})^{-1} - (\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)})^{-1}$$

On obtient,

$$\varepsilon_{k+2}^{(n)} = (\varepsilon_k^{(n+1)} - f_n^{(k+2)} \varepsilon_k^{(n)})/(1-f_n)$$

où,

$$f_n^{(k+2)} = \frac{\Delta\varepsilon_k^{(n+1)}}{\Delta\varepsilon_k^{(n)}} \cdot \frac{\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_{k-2}^{(n+2)}}{\varepsilon_k^{(n+2)} - \varepsilon_{k-2}^{(n+2)}}$$

$f_n^{(k+2)}$ est le facteur d'accélération de la colonne k+2.

4 - DOMAINE DE SUR-ACCELERATION (DSA).

Définition 4.1.

Nous désignons par domaine de sur-accélération d'un procédé F, *défini par (1), l'ensemble*

$$\mathrm{DSA}(F) = \{(C_n) \quad \textit{convergente de la limite finie: } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - d}{f_n - d} = 1 \ \forall d \in \mathbb{C}\}$$

Théorème 4.1.

Pour toute suite $(C_n) \in \mathrm{DSA}(F)$ *on a,*

i) $\lim_{n\to\infty} (F_n - C)/e_n = 0$

ii) r' *est point d'accumulation de* e_{n+1}/e_n *si et seulement si* r' *est point d'accumulation de* f_n.

iii) Si r' *est point d'accumulation de* e_{n+1}/e_n ($\exists N' \subseteq \mathbb{N}$ *tel que* $\lim_{n\in N'} e_{n+1}/e_n = r'$) *et* $r' \neq 1$ *alors,*

1 $$\lim_{n\in N'} \frac{F_n - C}{e_n \varepsilon'_{n+1}} = 0 \qquad \text{(sur-accélération de la suite partielle } (C_n)_{n \in N'}\text{)},$$

où, $\varepsilon'_{n+1} = \dfrac{e_{n+1}}{e_n} - r' \quad n \in N'$.

<u>Preuve</u>.

i) Découle immédiatement du théorème 2.1 avec $d = 1$.

ii) Il suffit de prendre $d = r'$.

iii) On a, $\lim_{n\in N'} \dfrac{F_{n-C}}{e_n} = \lim_{n\in N'} \left(1 - \dfrac{r'-f_n}{r'-e_{n+1}/e_n}\right)/(1-f_n)$.

De l'assertion ii) on a $\lim_{n\in N'} f_n = r'$.

Comme, $r' \neq 1$ et $(C_n) \in DSA(F)$, on a,

$$\lim_{n\in N'} \frac{F_n - C}{e_n \varepsilon'_{n+1}} = \frac{0}{1-r'} = 0.$$

□

En vue d'avoir plus de précisions sur ce que pourrait être le DSA des procédés usuels nous considérons le sous-ensemble des fractions continues dont la suite (C_n) des convergents successifs vérifient :

$$\lim_{n\to\infty} e_{n+1}/e_n = r \text{ existe avec } |r| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n = \varepsilon \text{ existe.}$$

Nous désignons cet ensemble par A i.e.

$$A = \{(C_n) : \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r \text{ existe et } |r| < 1 \ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon \text{ existe}\}.$$

Propriété 4.1.

Soit $c_n = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \dots + \frac{a_n|}{|1}$, $b_o \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}^*$ $n = 1,2,\dots$.

1. *Si* $(c_n) \in A$ *alors*

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta \text{ existe et } \varepsilon = \beta.$$

$$ii)\ \exists a \in \mathbb{C},\ \exists \delta \in \mathbb{C} \text{ avec } |\delta| \le 1,\ \lim_{n\to\infty} a_n = a\ .$$

De plus, si $r = o$ *ou* $\varepsilon \neq r$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} = \delta$ *existe et* $\delta = \varepsilon$.

2. *Si* $\exists c \in \mathbb{C}$, $\exists \delta \in \mathbb{C}$, $\exists a \in \mathbb{C}$ *avec* $a \notin]-\infty, -\frac{1}{4}]$ *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} = \delta$

alors, $\exists r \in \mathbb{C}$ $|r| < 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} = r$. *De plus*

$$i)\ \text{Si } r = o \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \delta.$$

$$ii)\ \text{Si } r \neq o \text{ et } |\delta| \neq |r| \quad \text{alors } \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \beta \text{ existe et } \beta = \delta \text{ ou } \beta = r.$$

$$iii)\ \text{Si } \beta \text{ existe et } r \neq o \quad \text{alors } \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \beta.$$

Preuve.

1- i) est prouvé dans [6, lemme 4]. Pour ii), l'existance de a est prouvée dans [3] et le reste de l'assertion est prouvée dans [6, lemme 1].

2- Pour l'existence de r voir [3].

De la relation $\frac{\Delta c_n}{\Delta c_{n-1}} = \frac{e_n}{e_{n-1}} \frac{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}{\frac{e_n}{e_{n-1}}}$ on a :

$$\beta_{n+1} = \frac{r\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n + \varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n + r-1} .$$

D'autre part, on a [6] $a_{n+1} = \dfrac{1-g_{n+1}}{g_n g_{n+1}}$ où $g_{n+1} = 1 + \dfrac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}}$.

Posons $\delta_n = a_n - a$, on a

$$\delta_{n+1} = - [\frac{1}{r+1} \beta_{n+1} - \frac{r}{(1+r)^2} g_{n+1} \beta_n]/(g_n g_{n+1}) .$$

i) Si $r = 0$ on a :

$$\cdot \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \cdot \frac{g_{n-1}}{g_n} . \text{ Donc } \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \delta.$$

$$\cdot \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \cdot \frac{\varepsilon_{n+1}^{-1}}{\varepsilon_n^{-1}} . \text{ Donc } \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = \delta.$$

ii) On a

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \cdot \frac{\frac{1}{1+r} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} - \frac{r}{(1+r)^2} g_{n+1}}{\frac{1}{1+r} \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} - \frac{r}{1+r} g_n} \cdot \frac{g_{n-1}}{g_{n+1}} .$$

D'où, $g_{n+1} = (\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} x_{n+1} - \dfrac{\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1}}) + \dfrac{\gamma_n x_{n+1}}{\alpha_{n+1} y_n}$ où,

$$y_n = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}, \; x_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}, \; \alpha_n = \frac{1}{1+r} \frac{g_n}{g_{n-1}} \text{ et } \gamma_n = - \frac{r}{(1+r)^2} \frac{g_n}{g_{n-1}} .$$

L'équation caractéristique est $y^2 - (\delta+r)y+r\delta = 0$. Donc, si $|\delta| \neq |r|$ les deux racines sont de modules distincts. Donc d'après le théorème de Poincaré [10] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} = \beta$ existe et c'est l'une des deux racines. Donc $\beta = \delta$ ou $\beta = r$.

iii) On a, $(r-1)\beta_{n+1} = (r+\varepsilon_n)\varepsilon_{n+1} - (1+\beta_{n+1})\varepsilon_n$. On forme $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$ et on procède de la même façon que précédemment. On obtient alors l'équation caractéristique $x^2 - (\beta + \frac{1}{r})x + \frac{\beta}{r} = 0$. Les racines sont $\frac{1}{r}$ et β. Comme $0 < |r| < 1$ on a $|\beta| \neq |\frac{1}{r}|$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ existe et $\varepsilon = \beta$.

L'ensemble A est donc une partie assez restreinte de l'ensemble de toutes les fractions continues à convergence linéaire mais il possède les bonnes propriétés de celui-ci.

On pourrait penser que les procédés usuels font un peu mieux que d'accélérer A, c'est à dire le sur-accélérer.

A titre indicatif on a :

Propriété 4.2.

i) $A \cap DSA(\Delta^2) = A \cap DSA(\theta_2) = \{(C_n) \in A : r(1-\varepsilon) = 0\}$

ii) $A \cap DSA(S_n(x_1)) = \{(C_n) \in A : \varepsilon = r,\ r \neq 0\}$

iii) $A \cap DSA(T_{+2}) = \{(C_n) \in A : r(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) = 0\}$

Preuve.

On a,

$$\beta^{\bullet}_{n+2} = \frac{\varepsilon_{n+1}(\varepsilon_{n+2}+r-1) + r\varepsilon_{n+2} - r\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+1} + r-1}$$

$$= (\varepsilon_{n+1}(\varepsilon_{n+2}-1) + r\varepsilon_{n+2})/(\varepsilon_{n+1}+r-1) \qquad (**).$$

i) Pour le Δ^2 on a, $f_n = \Delta C_{n+1}/\Delta C_n$.

La condition de sur-accélération se traduit par,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta_{n+2}} = 1.$$

De la relation (**) on obtient immédiatement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\beta_{n+2}} = \frac{r-1}{r\varepsilon-1}, \quad r\varepsilon-1 \neq 0 \text{ car } |r| < 1 \text{ et } |\varepsilon| \leq 1.$$

Donc, $(C_n) \in A \cap DSA(\Delta^2) \iff \dfrac{r-1}{r\varepsilon-1} = 1$

$$\iff r(1-\varepsilon) = 0$$

Pour le θ_2, en utilisant (**) on obtient,

$$f_n - r = \frac{r\beta_{n+3}+\beta_{n+2}(\beta_{n+3}+r-1)-2r\beta_{n+3}+r\beta_{n+2}}{2\beta_{n+3}-\beta_{n+2}+r-1}$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{f_n - r} = \lim_{n\to\infty} (2\beta_{n+3}-\beta_{n+2}+r-1) \frac{\varepsilon_{n+1}/\beta_{n+2}}{r\dfrac{\beta_{n+3}}{\beta_{n+2}} + \beta_{n+3}+2r-1 -2r.\dfrac{\beta_{n+3}}{\beta_{n+2}}}$$

$$= -\frac{(1-r)^2}{(r\varepsilon-1)[r\varepsilon-2r+1]} \quad \text{si } r \neq \frac{1}{2-\varepsilon}$$

Si $r = \dfrac{1}{2-\varepsilon}$ on a, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{f_n - r} = \infty$ car $r \neq 1$.

Donc,

$$(C_n) \in A \cap DSA(\theta_2) \iff r(1-\varepsilon) = 0.$$

ii) Pour $S_n(x_1)$ on a, $f_n = \dfrac{r}{1+r}\left(1 + \dfrac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}}\right)$.

Donc, si $r = 0$ le procédé n'offre aucun intérêt.

D'autre part, $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{f_n - r} = \dfrac{1+r}{r}\,\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\beta_{n+1}}$ $(r \neq 0)$.

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{f_n - r} = 1 \iff \frac{1+r}{r} \cdot \frac{(r-1)\varepsilon}{r\varepsilon - 1} = 1$$

$$\iff (r^2-1)\varepsilon = r(r\varepsilon - 1)$$

$$\iff \varepsilon = r.$$

Donc, $A \cap DSA(S_n(x_1)) = \{(C_n) \in A : \varepsilon = r \text{ et } r \neq 0\}$.

iii) Se démontre de la même façon que pour le θ_2.

□

Remarque 4.2.

Aucun des procédés précédents n'a un domaine de sur-accélération qui contient A. Leurs domaines de sur-accélération ne coupe A que ponctuellement i.e pour une ou deux valeurs de ε.

Remarquons aussi la complémentarité de $S_n(x_1)$ et du Δ^2 (ou θ_2). Comme nous l'avons rappelé précédemment β (et donc ε) prend l'une des deux valeurs r ou δ. Or si $\varepsilon \neq r$, $S_n(x_1)$ ne sur-accélère pas la convergence. Mais dans ce cas, $\varepsilon = \delta$, si en plus $\delta = 1$ le Δ^2 sur-accélère la convergence et inversement, si $\varepsilon = r$, $S_n(x_1)$ sur-accélère et le Δ^2 ne sur-accélère pas la convergence. Cette remarque rejoint la comparaison faite dans [6] entre les procédés T_{+m} et $S_n(x_1)$.

Exemple 4.1.

$$C_{n+1} = C_n(r + \varepsilon_{n+1}),\ C_o = 1,\ |r| < 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

1- $\varepsilon_n = 1/n \qquad (\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to 1)$.

$\underline{\Delta^2}$:

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - C}{C_n - C} \sim \frac{r}{(1-r)^2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \qquad \text{(sur-accélération)}.$$

$\underline{S_n(x_1)}$:

$$\frac{S_n(x_1) - C}{C_n - C} \sim -\frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{n+1} \qquad \text{(accélération simple)}.$$

2 - $\varepsilon_n = r^n \qquad (\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \to r)$

$\underline{\Delta^2}$:

$$\frac{\varepsilon_2^{(n)} - C}{C_n - C} \sim -\frac{1}{1+r} \cdot r^{n+2} \qquad \text{(accélération simple)}$$

e.

$\underline{S_n(x_1)}$:

$$\frac{S_n(x_1) - C}{C_n - C} \sim \frac{1}{(r^2-1)(1-r)} \cdot r^{2n+1} \qquad \text{(sur-accélération)}.$$

ce.

5 - PROCEDES SUR-ACCELERANT L'ENSEMBLE A.

Soit T, le procédé formel défini par,

$$T_n = \frac{C_{n+1} - (1-\lambda_n)\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} C_n}{1 - (1-\lambda_n)\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n}}$$

où (λ_n) est une suite auxiliaire telle que, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. On a la

Proposition 5.1.

Si, $\forall (C_n) \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\beta_{n+2}} = \dfrac{\varepsilon-1}{r\varepsilon-1}$ *alors,* T *est un procédé de sur-accélérat pour* A.

Preuve.

Soit $(C_n) \in A$.

Le facteur d'accélération de T est, $t_n = (1-\lambda_n)\dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n}$.

Comme $(C_n) \in A$ on a, $(C_n) \in DSA(T) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{t_n - r} = 1$.

Or,

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{t_n - r} = \frac{\varepsilon_{n+1}/\beta_{n+2}}{1-\lambda_n - r\dfrac{\lambda_n}{\beta_{n+2}}}$$

De, $\beta_{n+2} = \dfrac{\varepsilon_{n+1}(\varepsilon_{n+2}-1)+r\varepsilon_{n+2}}{\varepsilon_{n+1}+r-1}$ on déduit, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\beta_{n+2}} = \dfrac{r-1}{r\varepsilon-1}$, $r\varepsilon-1 \neq 0$ car $|r| < 1$.

Donc, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\beta_{n+2}} = \dfrac{\varepsilon-1}{r\varepsilon-1}$ on a, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ et,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{t_n - r} = \frac{(r-1)/(r\varepsilon-1)}{1-r(\varepsilon-1)/(r\varepsilon-1)} = 1.$$

□

5.1 - Choix particuliers de (λ_n).

* Choix 1.

Pour que T soit un procédé de sur-accélération pour A, il suffit que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\beta_{n+2}} = \dfrac{1-\varepsilon}{1-r\varepsilon}$, comme nous venons de le voir.

Or, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \varepsilon$.

Il suffit donc de prendre,

$$\lambda_n = \frac{\beta_{n+2} - \beta_{n+3}}{1 - \frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} \frac{\beta_{n+3}}{\beta_{n+2}}} \qquad (*)$$

où rappelons le, $\beta_{n+1} = \frac{\Delta c_n}{\Delta c_{n-1}} - r$.

Ainsi, le procédé X défini par,

$$X_n = \frac{c_{n+1} - x_n c_n}{1 - x_n}$$

$$x_n = \frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} \left[1 + \frac{\frac{\Delta c_n}{\Delta c_{n+1}} - \frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n}}{1 - \frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} \cdot \frac{\frac{\Delta c_{n+2}}{\Delta c_{n+1}} - r}{\frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} - r}} \right]$$

est un procédé de sur-accélération. pour A.

Remarquons que X_n a besoin de quatre convergents successifs : c_n, c_{n+1}, c_{n+2} et c_{n+3}, soit le même nombre que pour le θ_2. Cependant X_n à besoin en plus de la connaissance de r.

L'écriture de x_n est assez compliquée, on peut légèrement la modifier en écrivant :

$$\frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} \cdot \frac{\frac{\Delta c_{n+2}}{\Delta c_{n+1}} - r}{\frac{\Delta c_{n+1}}{\Delta c_n} - r} = \frac{\Delta c_{n+2} - r\Delta c_{n+1}}{\Delta c_{n+1} - r\Delta c_n} .$$

* Choix 2.

Ce deuxième choix est une modification du précédent en vue de ne pas utiliser r.

Dans l'expression (*) du choix précédent remplaçons, $\frac{\beta_{n+3}}{\beta_{n+2}}$ par $\frac{\Delta\beta_{n+2}}{\Delta\beta_{n+1}}$.

Soit donc,

$$\lambda'_n = -\frac{\Delta\beta_{n+2}}{1 - \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\Delta\beta_{n+2}}{\Delta\beta_{n+1}}}$$

et,

$$Y_n = \frac{C_{n+1} - (1-\lambda'_n)\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} C_n}{1 - (1-\lambda'_n)\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n}}.$$

Le procédé Y ainsi obtenu, n'est pas tout à fait un procédé de sur-accélération pour A. On a,

$$DSA(Y) \cap A = A \setminus \{(C_n) \in A : \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = 1 \text{ \underline{et} } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\beta_{n+1}}{\Delta\beta_n} \neq 1\}.$$

Y_n peut s'écrire aussi,

$$Y_n = \frac{C_{n+1} - y_n C_n}{1 - Y_n}$$

$$y_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} \cdot \mu_n - 1}{\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \mu_n - 1} \tag{5.2}$$

$$\mu_n = \frac{\frac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_{n+1}} - \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n}}{\frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} - \frac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}}}.$$

Nous avons vu, dans la section 2 que le facteur d'accélération du θ_2 est :

$$f_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \cdot \frac{\dfrac{\Delta C_n}{\Delta C_{n-1}} - 1}{\dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} - 1}$$

On voit ainsi que y_n se différencie de f_n par la correction μ_n.

Remarque 5.1.

1 - Remplaçons dans (5.1) r par 1, on obtient,

$$X'_n = \frac{C_{n+1} - x'_n C_n}{1 - x'_n}$$

$$x'_n = \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} \left[1 + \frac{\dfrac{\Delta C_{n+2}}{\Delta C_{n+1}} - \dfrac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n}}{1 - \dfrac{\Delta C_{n+2} - \Delta C_{n+1}}{\Delta C_{n+1} - \Delta C_n}} \right] \tag{5.1'}$$

X' ainsi obtenu accélère la convergence des fractions continues à convergence linéaire et d'autres à convergence logarithmique, mais ne sur-accélère dans A que les suites telles que $\varepsilon = r$. En ce qui concerne la sur-accélération X'_n rejoint donc $S_n(x_1)$.

2 - Le paramètre μ_n dans (5.2) s'écrit aussi,

$$\mu_n = \frac{\Delta g_{n+2}}{\Delta g_{n+1}} .$$

D'autre part, on peut voir dans [8] des fractions continues telles que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1, \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta C_{n+1}}{\Delta C_n} = -1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta g_{n+1}}{\Delta g_n} = -1.$$

Si l'on se place dans les conditions précitées, y_n peut, sous certaines conditions, tendre vers 1 et donc Y peut accélérer la convergence d'une sous-classe de ces fractions continues, ce qui est impossible aussi bien pour le θ_2 que pour la plupart des procédés (voir [8]).

6 - SUR-ACCELERATION EN TERME DES ELEMENTS ET DES QUEUES DE LA FRACTION CONTINUE.

Soit $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots$ une fraction continue de limite finie $c \in C$ avec $b_o \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ $n = 1,2,\ldots$.

Rappelons que $C_n = b_o + \frac{a_1|}{|1} + \ldots + \frac{a_n|}{|1}$ est son $n^{\text{ème}}$ convergent et peut se calculer par les relations (voir par exemple [9]) :

$$A_n = A_{n-1} + a_n A_{n-2} \; ; \; B_n = B_{n-1} + a_n B_{n-2}$$

$$A_{-1} = 1, \; A_o = b_o \; ; \; B_{-1} = 0, \; B_o' = 1$$

$$C_n = A_n/B_n.$$

Pour accélérer la convergence d'une fraction continue, il est parfois utile d'utiliser la notion de modification d'une fractions continue [11]. Elle consiste à générer la suite définie par

$$S_n(\omega_n) = \frac{A_n + \omega_n A_{n-1}}{B_n + \omega_n B_{n-1}} \qquad n = 0,1,\ldots$$

où (ω_n) est une suite auxiliaire appelée suite de facteurs de convergence [13]. De plus ω_n est censée être une approximation de R_n [13].

Pour ramener $S_n(\omega_n)$ sous la forme de F_n considéré dans les sections précédentes, nous faisons une translation d'indices et nous posons

$$S_n'(r_n) = \frac{A_{n+1} + r_n A_n}{B_{n+1} + r_n B_n} \qquad n = 0,1,\ldots$$

où r_n doit être cette fois ci une approximation de R_{n+1}.

$S_n'(r_n)$ s'écrit aussi

$$S_n'(r_n) = \frac{C_{n+1} + r_n g_{n+1} C_n}{1 + r_n g_{n+1}} \qquad n = 0,1,\ldots$$

Nous supposons en outre et pour toute la suite que la fraction continue est périodique à la limite, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ existe, de plus $a \notin (-\infty, -1/4]$.

Nous savons que sous ces conditions, et le fait que C est supposée finie que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = r$ existe et $|r| < 1$ (voir par exemple [2]). De plus $\lim_{n\to\infty} R_n = x_1$ existe et x_1 est la racine de plus petit module de l'équation $x^2+x-a = 0$ (voir [9] [12]). De plus $x_1 = -\frac{r}{r+1}$.

Posons :

$$\phi_n = R_n - x_1$$

$$\delta_n = a_n - a.$$

Avec ces notations et considérations on a la

Propriété 6.1.

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \phi$ *existe si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta$ *existe. De plus* $\phi = \delta$ *(quand elles existent).*

ii) Si δ *existe alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\phi_n} = \frac{1-r\delta}{1+r}$.

iii) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \phi$ *existe alors*

- *si* $r = 0$ *on a* $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \delta$

- *si* $r \neq 0$ *et* $|r| \neq |\delta|$ *on a* $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ *existe et* $\varepsilon = r$ *ou* δ.

iv) *Si* $\lim \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ *existe et* $r = 0$ *ou* $\varepsilon \neq r$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \phi$ *existe*

v) *Si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ *existe alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{\varepsilon - r}{\varepsilon(r-1)^2(1+r)}$

$(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\phi_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}}\right| = \infty$ *si* $\varepsilon = 0$ *et* $r \neq 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}} = -1$ *si* $r = 0)$

<u>Preuve.</u>

De la relation $R_n(1+R_{n+1}) = a_{n+1}$ on a

$$x_1\phi_{n+1} + (1+x_1)\phi_n + \phi_n\phi_{n+1} = \delta_{n+1}.$$

Donc si $x_1 = 0$ on a $\phi_n(1+\phi_{n+1}) = \delta_{n+1}$. Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \phi$ existe si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta$ existe. De plus $\phi = \delta$.

Si $x_1 \neq 0$ on a

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} \cdot \frac{x_1 \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} + 1+x_1+\phi_{n+1}}{x_1 \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} + 1+x_1+\phi_n}.$$

Posons :

$$X_n = \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}}\ ,\ y_n = 1 + x_1 + \phi_n \text{ et } \gamma_n = \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\ .$$

On a $x_1\ X_{n+1} + (y_{n+1} - x_1\gamma_n) - \frac{y_n\gamma_n}{X_n} = 0$. L'équation caractéristique est $x_1X^2+(1+x_1-\delta x_1)X - \delta(1+x_1) = 0$. Les racines sont δ et $-\frac{1+x_1}{x_1} = \frac{1}{r}$. Comme $0 < |r| < 1$ on a $|\delta| \neq |\frac{1}{r}|$ et le théorème de Poincaré [10] assure que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} = \phi$ existe et $\phi = \delta$ ou $\phi = \frac{1}{r}$. Comme $|\frac{1}{r}| > 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = 0$ on a forcément $\phi = \delta$.

Inversement, supposons $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{\phi_{n-1}} = \phi$ existe. Comme $|\frac{1+x_1}{x_1}| > 1$ on a $\phi + 1 + x_1 \neq 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \phi$.

ii) Evidente.

iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \phi$ existe, d'après i) on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta$ existe. L'assertion découle immédiatement de la propriété 4.1.

iv) Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \varepsilon$ existe. De l'assertion iii) propriété 4.1 on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta$ existe et donc d'après i) on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \delta$ existe.

v) On a $\frac{e_{n+1}}{e_n} = r = -g_{n+1}\ R_{n+1} - r$. Donc $\varepsilon_{n+1} = \frac{r}{1+r}\ \beta_{n+1} - g_{n+1}\phi_{n+1}$.

D'où $\phi_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1} - r\varepsilon_n - \varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}{(1+r)(\varepsilon_n+r-1)g_{n+1}}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{\varepsilon - r}{\varepsilon(r^2-1)(r+1)}$ si $\varepsilon \neq 0$

et $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\phi_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}}| = \infty$ si $\varepsilon = 0$ et $r \neq 0$. Si $r = 0$ on a $\phi_n = \varepsilon_{n+1}\frac{(1-\varepsilon_n)}{(\varepsilon_n-1)g_{n+1}}$.

Donc $\lim \frac{\phi_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}} = -1$.

□

Soit $A' = \{b_o + \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \ldots = C \in \mathbb{C}\ ;\ b_o \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C},\ \lim_n a_n = a \in \mathbb{C},$

$$a \notin (-\infty, -\tfrac{1}{4}] \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a}{a_n-a} = \delta \text{ existe}\} .$$

Posons :

$$r_n = x_1 + \psi_n .$$

Soit (C_n) la suite des convergents successifs d'une fraction continue de A'.

On a :

$$\frac{S'_n(r_n)-C}{e_n} = (r_n - R_{n+1}) \frac{g_{n+1}}{1+g_{n+1}r_n}$$

$$= \phi_{n+1}\left(\frac{\psi_n}{\phi_{n+1}} - 1\right) \frac{g_{n+1}}{1+g_{n+1}r_n} .$$

D'où la

Proposition 6.1.

Pour toute fraction continue de A' on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\phi_{n+1}} = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{\phi_{n+1}} = 1.$$

Remarque 6.1.

1 - A l'aide de l'assertion ii) propriété 6.1 on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\phi_{n+1}} = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\delta_{n+2}} = 0.$$

2 - Pour toute fraction continue de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est définie en section 4), la condition $\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\phi_{n+1}} = 0$ est équivalente à la sur-accélération sauf lorsque $\varepsilon = r$ et $\varepsilon \neq 0$ ou $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon \neq r$ (à cause de l'assertion v) propriété 6.1. Plus précisément on a,

$$\text{Si } \varepsilon = r \neq 0 \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\phi_{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\varepsilon_{n+1}} = 0$$

$$\text{Si } \varepsilon = 0 \text{ et } \varepsilon \neq r \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\varepsilon_{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n(r_n)-C}{e_n\,\phi_{n+1}} = 0.$$

Définition 6.1.

Une modification $S'_n(r_n)$ *sur-accélère* A' *si* $\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{\phi_{n+1}} = 1.$

Théorème 6.1.

Une modification $S'_n(r_n)$ *sur-accélère* A' *si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{\delta_{n+2}} = \frac{1+r}{1-r\delta}.$$

Preuve.

A l'aide de l'assertion ii) propriété 6.1 on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{\phi_{n+1}} = 1 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n}{\delta_{n+2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\delta_{n+2}}{\phi_{n+1}} = 1 \text{ si et seulement s}$$

$\lim \frac{\psi_n}{\cdot} \cdot \frac{1-r\delta}{\cdot} = 1$. Comme $r| < 1$ le rapport $\frac{1-r\delta}{\cdot}$ est fini et non nul.

D'où le résultat.

□

Remarque 6.2.

1 - Dans la définition 6.1 la sur-accélération par une modification n'est pas tout à fait équivalente à la sur-accélération utilisée dans les sections précédentes. Ceci s'explique par la remarque 6.1.

Deux choix de modifications sur-accélérant A'.

1 - Un choix simple lorsqu'on connaît r et δ est de prendre :

$$\psi_n = \frac{1+r\delta}{1-r}\,\delta_{n+2} \text{ c'est à dire } \psi_n = \frac{\delta_{n+2}}{1+x_1+x_1\delta}\,.$$

Ce qui donne

$$r_n = \frac{a_{n+2}+x_1^2\delta}{1+x_1+x_1\delta}\,.$$

2 - Un deuxième choix consiste à remplacer δ par le rapport $\dfrac{\delta_{n+2}}{\delta_{n+1}}$.

Ce qui donne

$$r_n = \frac{a_{n+2} + x_1^2\dfrac{\delta_{n+2}}{\delta_{n+1}}}{1+x_1+x_1\dfrac{\delta_{n+2}}{\delta_{n+1}}}$$

Exemples numériques.

1°. $\mathrm{Log}(1+x) = \dfrac{x|}{|1} + \dfrac{\frac{x}{2}|}{|1} + \dfrac{\frac{x}{6}|}{|1} + \dfrac{\frac{x}{3}|}{|1} + \dfrac{\frac{x}{5}|}{|1} + \dots + \dfrac{\frac{nx}{2(2n-1)}|}{|1} + \dfrac{\frac{nx}{2(2n+1)}|}{|1} + \dots$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{x}{4}$ et $x_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{1+x}}{2}$.

D'autre part $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = -1$.

Nous comparons pour différentes valeurs de x les procédés $S_n(x_1)$ [12], le θ_2 [2] et le procédé correspondant au premier choix du paragraphe précédent, défini par

$$T_n = \frac{A_n + r_n A_{n-1}}{B_n + r_n B_{n-1}} \qquad n = 1,\ldots$$

avec, $r_n = \frac{\sqrt{1+x}}{2} - \frac{2+x}{4} + a_{n+1}$.

Nous disposerons dans la première colonne quelques approximations de Log(1+x) et dans les colonnes suivantes le nombre d'itérations nécessaires pour chacun des procédés.

1 - $\underline{x = 1}$ (Log2 = 0,69314718055994...)

Approx. de Log 2	T...	S...(x_1)	$\theta_2^{(\ldots)}$
. 69...	2	3	3
. 6931...	4	5	4
. 693147...	7	7	7
. 6931471805...	10	13	12
. 69314718055994...	15	18	17

2 - $\underline{x = -0,9}$ (Log 0,1 = -2,3025850929940...)

Approx. de Log 0,1	T...	S...(x_1)	$\theta_2^{(\ldots)}$
- 2.30...	3	7	9
- 2.3025...	8	14	17
- 2,3025850...	17	24	27
- 2.30258509299...	31	36	38
- 2.3025850929940...	37	44	45

3 - $\underline{x = -0,99}$ (Log 10^{-2} = -4,6051701859881...)

Approx. de Log 0,01	T...	S...(x_1)	$\theta_2^{(...)}$
- 4.60...	13	24	51
- 4.6051...	29	46	65
- 4.605170...	53	69	80
- 4.60517018...	69	86	103
- 4.6051701859...	87	114	131
- 4.605170185988...	117	137	150

4 - $\underline{x = -0,999}$ (Log 10^{-3} = -6,9077552789...)

Approx de Log 0,001	T...	S...(x_1)	$\theta_2^{(...)}$
- 6,...	5	38	25
- 6.9...	41	69	107
- 6.907..	67	116	145
- 6.9077..	97	140	189
- 6.90775...	127	172	229
- 6.907755..	167	213	279
- 6.9077552...	183	252	302

Remarquons que T_n peut s'écrire aussi

$$T_n = \frac{A_{n+1} + x_1' A_{n-1}}{B_{n+1} + x_1' B_{n-1}}$$

avec $x_1' = x_1 - \frac{x}{4}$. T_n exige donc le même nombre d'opérations que $S_{n+1}(x_1)$.

Par contre $\theta_2^{(n)}$ demande beaucoup plus d'opérations.

Pour les quatre valeurs de x considérées le procédé T est le meilleur. L'écart se creuse d'autant plus que x est voisin de -1.

2 - Considérons la fraction continue

$$c = \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} + \dots$$

avec $a_n = -\frac{1}{4} - (\frac{2}{3})^n \quad n = 1,2,\dots$

On a $C = -0.68215289427045\dots$

Pour cette fraction on a le tableau

Approx. de C	T...	S...(-0,5)	$\theta_2(\dots)$
- .6...	12	17	24
- .68...	17	27	33
- .682...	20	33	41
- .682152...	26	46	57
- .68215289...	31	59	64
- .6821528942704...	45	87	95

Pour cette exemple on a $r_n = 1 + 6a_{n+1}$. Donc par rapport à $S_n(-0,5)$, T_n ne demande qu'une addition et une multiplication supplémentaires (par itération). Cependant la suite (T_n) converge à peu près deux fois plus vite (en nombre d'itérations) que $S_n(-0,5)$ et $\theta_2^{(n)}$.

RÉFÉRENCES.

[1] C. BREZINSKI, *"Accélération de la convergence en analyse numérique"*, Lecture Notes in Mathematics, 582, Springer Verlag Heidelberg, 1977.

[2] C. BREZINSKI, *"Some new convergence acceleration methods"*, Math. Comp. 39 (1982), 133-145.

[3] C. BREZINSKI, A. LEMBARKI, *"The linear convergence of limit periodic continued fractions"*, J. Comp. Appl. Math. (To appear).

[4] J. GILL, *"The use of attractive fixed points in accelerating the convergence of limit periodic continued fractions"*. Amer. Math. Soc. 47, n° 1, (1975), 119-126.

[5] W.B. JONES, W.J. THRON, *"Continued fractions. Analytic theory and applications"*, Encyclopedia of Mathematic and its applications, n° 11 Addison Wesley, reading Massachussetts (1980).

[6] A. LEMBARKI, *"Acceleration of limit periodic continued fractions by the T_{+m} transformation"*. J. Comp. Appl. Math. (to appear).

[7] A. LEMBARKI, *"Convergence acceleration of limit k-periodic continued fractions"*, Appl. Numer. Math., to appear.

[8] A. LEMBARKI, *"Connexions et accélération de la convergence des fractions continues* $b_o + \frac{a_1|}{|1} + \ldots : a_n \to \infty$ *et* $a_n \to -1/4$*"*. These chapter 6.

[9] O. PERRON, *"Die Lehre Von der Kettenbrüchen"*, Chelsea Publishing Company New-York (1929).

[10] H. POINCARE, *"Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies"*, Amer. Math., 7(1885) 205-258.

[11] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"Modifications of continued fractions, a survey"*. Lecture Notes in Mathematics, 932, Springer Verlag, Heidelberg, New-York (1981), 38-66.

[12] W.J. THRON, H. WAADELAND, *"Accelerating convergence of limit periodic continued fractions"*. Numer. Math. 34, (1980), 155-170.

[13] P. WYNN, *"Converging factors for continued fractions"*, Numer. Math. 1, (1959), 272-320.

[14] P. WYNN, *"On a divice for computing the* $e_m(S_n)$ *transformation"*, MTAC 10, (1956), 91-96.

RESUME

La valeur d'une fraction continue est la limite de la suite de ses convergents successifs. La convergence de cette suite peut être lente. Il est connu qu'une transformation algorithmique accélérant toutes les fractions continues ne peut pas exister. Il est donc nécessaire de considérer des classes. Les fractions continues k-périodiques constituent un modèle simple qui permet de dégager des propriétés imprévisibles (comme la possibilité de transformer une fraction continue à convergence logarithmique en une autre à convergence linéaire) de procédés connus. Il permet aussi de préciser la nature des procédés à construire pour accélérer des classes plus générales. Les fractions continues périodiques à la limite sont les seules qui convergent linéairement (lorsqu'elles ne convergent pas logarithmiquement). Il est possible, pour des sous-classes de ces fractions continues de prévoir parmi les procédés existant ceux qui les accélèrent le mieux. Les fractions continues k-périodiques à la limite sont d'une autre nature et nécessitent la construction de procédés à caractère k-périodique. D'autres classes dont la convergence et soit logarithmique soit inqualifiable se distinguent par la lenteur de leur convergence et la complexité de leur étude. Une étude approfondie du comportement des erreurs différences et des queues permet une classification et conduit à la construction de procédés adéquats. D'un autre côté, la recherche habituelle d'un procédé d'accélération est généralement basée sur des expressions algébriques. Le procédé obtenu n'est d'accélération rapide que pour une classe restreinte de fractions continues. Une caractérisation de l'accélération de la convergence conduit naturellement à la sur-accélération. La sur-accélération consiste à construire un procédé dont l'accélération est rapide pour une classe nettement plus grande.

Mots clés

Fraction continue.
Accélération de la convergence.
Sur-accélération.