N° d'ordre : 1409

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

présentée par

Naïma BEDJAOUI

Problème de traction pure en hyperélasticité (d'après Chillingworth, Marsden et Wan)

Soutenue le 29 Septembre 1987 devant la Commission d'Examen :

Président : R. FAURE, Professeur, Université de Lille I
Rapporteur : F. PARSY, Professeur, Université de Lille I
Examinateur : Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, Professeur, Université de Lille I
Membre : D. GUTKIN, Maître de Conférence, Université de Lille I

A la mémoire de mon père

A ma mère

A tous ceux qui m'ont aidée

Je remercie Monsieur Parsy de m'avoir proposé le sujet de cette thèse.

J'exprime également mes remerciements à Monsieur Faure qui a accepté la présidence du jury.

Que Madame Kosmann-Schwarzbach trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance : ses conseils et les multiples séances de travail qu'elle m'a consacrées m'ont énormément aidée.

Monsieur Gutkin m'a aussi fait l'honneur de participer au jury ; je tiens à l'en remercier.

Enfin, je remercie toute l'équipe qui a permis la réalisation matérielle de cette thèse, particulièrement Madame Evrard qui l'a tapée avec beaucoup de soin et de patience.

PLAN

Introduction

Ce travail a pour document de base un article écrit par D.R.J. CHILLINGWORTH, J.E. MARSDEN et Y.H. WAN [2] et consiste en une étude du problème de traction pure pour un corps $\mathcal{B}$ soumis à des charges mortes $\ell = (B, \tau)$ avec B force de volume et τ force de surface.

X désignant un point de $\mathcal{B}$, ϕ une déformation et $F = D\phi$ le gradient de la déformation, les équations d'équilibre s'écrivent dans la configuration de référence $\mathcal{B}$:

$$(E) \quad \begin{cases} -DIV P(X, F(X)) = B(X) & \text{dans} \quad \mathcal{B} \\ P(X, F(X)) \cdot N(X) = \tau(X) & \text{sur} \quad \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

où P est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff.

On désigne par $\mathcal{L}$ l'espace des charges $\ell = (B, \tau)$ de résultante nulle, par $\mathcal{L}_e$ l'espace des charges de $\mathcal{L}$ équilibrées par rapport à l'identité $I_{\mathcal{B}}$, et par $SO(3)$ l'espace des rotations. L'hypothèse $P(X, I) = 0$ (état non déformé libre de contraintes) et le principe d'indifférence matérielle $P(X, QF) = P(X, F)$ pour toute rotation Q de $SO(3)$ impliquent que $\phi = Q_{|\mathcal{B}}$ est solution de (E) lorsque $B = 0$ sur $\mathcal{B}$ et $\tau = 0$ sur $\partial\mathcal{B}$.

En d'autres termes $SO(3)$ constitue l'ensemble des solutions triviales de (E).

Le problème $(P1)$ que l'on se pose est "la recherche des solutions de (E) voisines des solutions triviales $SO(3)$ pour des charges $\ell \in \mathcal{L}$ voisines de 0 et leur description dans certains cas".

On introduit ensuite l'application de charge astatique $k : \mathcal{L} \to M_3$ qui permet d'abord la décomposition de $\mathcal{L}$ en somme directe $\mathcal{L} = \mathrm{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \mathrm{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k$ et, par la suite la reformulation du problème $(P1)$ de trois autres manières $(P2), (P3)$ et $(P4)$. Le groupe $SO(3)$ agissant sur $\mathcal{L}$ de la manière suivante : $Q\ell = (QB(X), Q\tau(X))$, le problème $(P2)$ consiste à "étudier, pour toute charge ℓ_0 de $\mathcal{L}_e$ voisine de 0, la manière dont l'orbite $\mathcal{O}_\ell$ d'une charge ℓ de $\mathcal{L}$ voisine de ℓ_0 rencontre la variété $\mathcal{N}$ (graphe d'une application $F : \mathcal{L}_e \to \mathrm{Asym}$ que l'on déterminera) tangente en 0 à $\mathcal{L}_e$".

$\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{N}$ dépend des valeurs propres de $k(\ell)$ et ne sera déterminée qu'après la classification des charges de $\mathcal{L}_e$ en charges de type $0, 1, 2, 3, 4$. Le problème $(P3)$ s'énonce de la manière suivante : "Pour une charge $\ell_0 = (\mathbf{A}_0, n_0) \in \mathcal{L}_e$ voisine de 0, et $\ell = (\mathbf{A}, n)$ voisine de ℓ_0 (avec $\mathbf{A}_0, \mathbf{A} \in \mathrm{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \mathrm{Sym}_{\mathcal{L}}$ et $n, n_0 \in \ker k$) trouver $Q \in SO(3)$ tel que : $\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) - F(\mathrm{sym}Q\mathbf{A}, Q_n) = 0$ où asym désigne la partie antisymétique de $Q\mathbf{A}$ et sym désigne la partie symétrique de $Q\mathbf{A}$.

Enfin, en posant

$$\begin{aligned} \bar{F} : \mathbf{R} \times \mathcal{L}_e &\to \mathrm{Asym} \\ (\lambda, \ell) &\mapsto \frac{1}{\lambda^2} F(\lambda \ell) \end{aligned}$$

on aboutit à la formuation $(P4)$: "Pour une charge $\ell_0 = (\mathbf{A}_0, n_0) \in \mathcal{L}_e$,pour une charge $\ell = (\mathbf{A}, n)$ voisinede ℓ_0 et pour λ petit, trouver $Q \in SO(3)$ tel que :

$$\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) - \lambda \bar{F}(\lambda, \mathrm{sym}, Q\mathbf{A}, Q_n) = 0$$

Cette dernière formulation montre qu'au voisinage de l'identité, le problème posé a une solution et une seule lorsque la charge $\ell = (B, \tau)$ est de type $0, 1$ ou 2.

Nous en déduisons qu'au voisinage des solutions triviales le problème a quatre solutions lorsque la charge est de type 0. Parmi ces quatre solutions, une seule est un minimum local pour la fonction de potentiel V_ℓ.

Finalement, des résultats concernant la méthode de Liapounov-Schmidt qui consiste à réduire une équation du type $f(\lambda, x)$ (où $x \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ espaces de Banach) en un système dont les équations et les inconnues sont en nombre fini sont appliquées à la résolution du problème selon la formulation $(P4)$.

CHAPITRE I

Préliminaires et position du problème.

Pour les résultats et théorèmes énoncés dans la partie "Préliminaires" on pourra se référer à [1].

I. Préliminaires. Soit $\mathcal{B}$ un ouvert borné de $\mathbf{R}^3$ contenant 0, de frontière $\Gamma = \partial\mathcal{B}$ suffisamment régulière et soit $\bar{\mathcal{B}}$ l'adhérence de $\mathcal{B}$ dans $\mathbf{R}^3$.

$\bar{\mathcal{B}}$ représentera le volume occupé par un solide "non déformé" et sera appelé *configuration de référence*.

Nous noterons X un point courant de l'ensemble $\bar{\mathcal{B}}$, de composantes X_i dans la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbf{R}^3$ et de $\partial_{X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable X_i.

Nous appellerons déformation de la *configuration de référence* une application $\phi : \bar{\mathcal{B}} \to \mathbf{R}^3$ de classe $W^{s,p}(\bar{\mathcal{B}})$ $(1 < p < \infty, s > (3/p) + 1)$ injective telle que $\phi(0) = 0$, ϕ^{-1} de classe $W^{s,p}$ sur $\phi(\bar{\mathcal{B}})$, et préservant l'orientation c'est-à-dire vérifiant : $J(\phi) = \det D\phi(X) > 0$ pour tout $X \in \bar{\mathcal{B}}$, où $J(\phi)$ est le jacobien de ϕ, et la matrice $D\phi$ appelée *gradient de la déformation* est définie par :

$$D\phi = \begin{pmatrix} \partial_{X_1}\phi_1 & \partial_{X_2}\phi_1 & \partial_{X_3}\phi_1 \\ \partial_{X_1}\phi_2 & \partial_{X_2}\phi_2 & \partial_{X_3}\phi_2 \\ \partial_{X_1}\phi_3 & \partial_{X_2}\phi_3 & \partial_{X_3}\phi_3 \end{pmatrix} = (\partial_{X_j}\phi_i) = F$$

i = indice de ligne

j = indice de colonne

les applications ϕ_i étant les composantes de ϕ dans la base $\{e_i\}$.

$F(X)$, la dérivée de ϕ en X, est un élément de $L(T_X\mathcal{B}, \mathbf{R}^3)$ où $T_X\mathcal{B}$ est l'espace tangent à $\mathcal{B}$ en X considéré comme l'ensemble des vecteurs d'origine X dans $\mathbf{R}^3$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les déformations ϕ. A toute déformation ϕ, nous associons un déplacement u, qui est le champ de vecteurs $u : \mathcal{B} \to \mathbf{R}^3$ défini par la relation $\phi = I_{\mathcal{B}} + u$ où $I_{\mathcal{B}}$ désigne l'application identique de $\mathcal{B}$. Le *gradient du déplacement* $\nabla u = (\partial_{X_j} u_i)$ satisfait alors la relation $F = D\phi = I + \nabla u$ où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

Une configuration de référence $\bar{\mathcal{B}}$ et une déformation ϕ étant données, l'ensemble $\phi(\bar{\mathcal{B}})$ est appelé *configuration déformée*.

Soit ϕ une déformation. Si $dV(X)$ représente *l'élément de volume au point* X de la configuration de référence, *l'élément de volume* $dv(x)$ *au point* $x = \phi(X)$ de la configuration déformée est donné par :

$$\begin{aligned} dv(x) &= \{\det D\phi(X)\} dV(X) \\ &= J(\phi) dV(X) \end{aligned}$$

De même si $dA(X)$ représente *l'élément d'aire au point* X du bord de la configuration de référence, l'élément d'aire au point $x = \phi(X)$ de la configuration déformée sera désignée par $da(x)$.

Etant donné un champ de tenseurs $T : \mathcal{B} \to M_3$ suffisamment régulier, nous définissons en chaque point de $\bar{\mathcal{B}}$ sa *divergence* DIVT comme étant le vecteur dont les composantes sont les divergences (au sens habituel) des vecteurs lignes de la matrice T

$$\text{DIV}T = (\partial_{X_j} T_{ij} e_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} & + & \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} & + & \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} & + & \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} & + & \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} & + & \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} & + & \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

De la même manière, nous définissons la divergence *divt* d'un champ de tenseurs $t : \phi(\bar{\mathcal{B}}) \to M_3$ en chaque point de $\phi(\bar{\mathcal{B}})$ par :

$$divt = (\partial_{x_j} t_{ij} e_i) \quad \text{avec la notation} \quad \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\,.$$

Une application de la formule de Green conduit à la relation

$$\int_{\mathcal{B}} \text{DIV}T dV(X) = (\int_{\mathcal{B}} \partial_{X_i} T_{ij} dV(X)) e_i = (\int_{\partial\mathcal{B}} T_{ij} N_j dA(X)) e_i$$

c'est-à-dire : $\int_{\mathcal{B}} \text{DIV}T dV(X) = \int_{\partial\mathcal{B}} T \cdot N dA(X)$. De même, nous obtiendrions :

$$\int_{\phi(\mathcal{B})} divt dv(x) = \int_{\partial\phi(\mathcal{B})} t \cdot n da(x)$$

en notant $dA(X)$ et $da(x)$ les éléments d'aire, et N et n les normales extérieures unitaires le long de $\partial\mathcal{B}$ et $\partial\phi(\mathcal{B})$ respectivement.

A tout tenseur $t(x)$ défini en un point $x = \phi(X)$ de la configuration déformée, nous associons le tenseur $T(X)$ défini au point X de la configuration de référence par la relation :

$$T(X) = \{\det D\phi(X)\} t(x) D\phi(X)^{-T}$$

Si $t : \phi(\bar{\mathcal{B}}) \to M_3$ est un champ de tenseurs, l'application

$$\{t : \phi(\bar{\mathcal{B}}) \to M_3\} \to \{T = (\det D\phi) t \circ D\phi^{-T} : \bar{\mathcal{B}} \to M_3\}$$

ainsi définie est appelée *transformation de Piola*

Théorème [1] *Soit* $T = (\det D\phi)tD\phi^{-T} : \bar{\mathcal{B}} \to M_3$ *le transformé de Piola d'un champ de tenseurs* $t : \phi(\bar{\mathcal{B}}) \to M_3$*, alors*

$$\mathrm{DIV}T(X) = (\det D\phi(X))divt(x) \quad \text{pour tout} \quad x = \phi(X), \quad X \in \mathcal{B}$$

$$T(X)N(X)dA(X) = t(x)n(x)da(x) \quad \text{pour tout} \quad x = \phi(X), \quad X \in \Gamma = \partial\mathcal{B}\ .$$

où $dA(X)$ *et* $da(x)$ *désignent les éléments d'aire aux points* $X \in \Gamma = \partial\mathcal{B}$ *et* $x \in \partial\phi(\bar{\mathcal{B}})$*, de normales extérieures respectives* $N(X)$ *et* $n(x)$*.*

Ce théorème nous donne donc la relation entre les éléments d'aire dans la configuration de référence et dans la configuration déformée.

Tenseur de Cauchy-Green : Si ϕ est une déformation dérivable au point $X \in \mathcal{B}$, nous avons, pour tout point $X + \Delta X \in \mathcal{B}$, la relation suivante :

$$\begin{aligned}\phi(X + \Delta X) - \phi(X) &= D\phi(X)\Delta X + 0(|\Delta X|)\\ &= F(X)\Delta X + 0(|\Delta X|)\end{aligned}$$

et donc $$\begin{aligned}|\phi(X + \Delta X) - \phi(X)|^2 &= \Delta X^T D\phi(X)^T D\phi(X)\Delta X + 0(|\Delta X|^2)\\ &= \Delta X^T F^T(X)F(X)\Delta X + 0(|\Delta X|^2)\end{aligned}$$

Le tenseur $C = D\phi^T D\phi = F^T F$ est appelé *tenseur de Cauchy-Green.*

C est symétrique.

Vu que $F(X) \in L(T_X\mathcal{B}, \mathbf{R}^3)$ et $F^T(X) \in L(\mathbf{R}^3, T_X\mathcal{B})$ alors $C(X) \in L(T_X\mathcal{B}, T_X\mathcal{B})$.

Le tenseur de Cauchy-Green est utilisé dans le calcul des longueurs dans la configuration déformée.

En effet, soit $c = f(\mathcal{I})$ (où $f : \mathcal{I} \to \bar{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{I}$ intervalle compact de $\mathbf{R}$) une courbe tracée dans la configuration de référence.

Les composantes de l'application f étant notées f_i, la longueur de la courbe c est donnée par :

$$\ell(c) = \int_{\mathcal{I}} |f'(t)|dt = \int_{\mathcal{I}} (f_i'(t)f_i'(t))^{\frac{1}{2}}dt$$

et la longueur de la courbe déformée $\phi(c)$ est donnée par :

$$\ell(\phi(c)) = \int_{\mathcal{I}} |(\phi f)'(t)|dt = \int_{\mathcal{I}} (c_{ij}(f(t)) \cdot f_i'(t)f_j'(t))^{\frac{1}{2}}dt\ .$$

Forces appliquées ; systèmes de forces. Nous supposons que le corps occupant une configuration déformée $\phi(\bar{\mathcal{B}})$ est soumis à deux types de *forces appliquées.*

a) *des forces appliquées de volume* correspondant à un champ de vecteurs $d_v : \phi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{R}^3$ appelé densité de forces appliquées de volume par unité de volume de la configuration déformée.

b) *des forces appliquées de surface* correspondant à un champ de vecteurs $d_s = (\partial\phi(\mathcal{B}))_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ défini sur une portion $(\partial\phi(\mathcal{B}))_1$ de la frontière $\partial\phi(\mathcal{B})$ et appelé densité de forces appliquées de surface par unité de surface de la configuration déformée.

Notons $S^2 = \{v \in \mathbf{R}^3/|v| = 1\}$ la sphère unité. Un système de forces associé à une déformation ϕ consiste en :

a) des forces appliquées de volume correspondant au champ de vecteurs

$$dv : \phi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{R}^3$$

b) des forces de surface correspondant à un champ de vecteurs de la forme : $t : \overline{\phi(\mathcal{B})} \times S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ et dont la définition est la suivante :

Etant donné un sous-domaine U de la configuration déformée $\overline{\phi(\mathcal{B})}$ et un point x de sa frontière ∂U où la normale extérieure n est bien définie, une force de surface élémentaire $t(x,n)da$ est exercée sur l'élément d'aire da considéré comme une portion du sous-domaine U.

Si le point x appartient à la portion $(\partial\phi(\mathcal{B}))_1$ de la frontière $\partial\phi(\mathcal{B})$ soumise aux forces appliquées de surface et si le vecteur n coïncide avec la normale extérieure unitaire à $(\partial\phi(\mathcal{B}))_1$ au point x, alors par définition le vecteur $t(x,n)$ coïncide avec la densité $d_s(x)$ des forces appliquées de surface au point x. Le vecteur $t(x,n)$ est appelé *vecteur des contraintes de Cauchy.*

Axiome de l'équilibre statique. Dans toute configuration déformée $\overline{\phi(\mathcal{B})}$ dans laquelle le corps est en équilibre statique, il existe un système de forces $d_v : \phi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{R}^3$ et $t : \overline{\phi(\mathcal{B})} \times S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, associé aux forces appliquées de volume et de surface suivant la définition précédente.

Théorème de Cauchy : Supposons que le champ de densité de forces appliquées de volume $d_v : \phi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{R}^3$ soit continu et que le champ des vecteurs de contraintes de Cauchy

$$t : \overline{\phi(\mathcal{B})} \times S^2 \to \mathbf{R}^3$$
$$(x, n) \mapsto t(x, n)$$

soit continûment dérivable par rapport à la variable x pour tout $n \in S^2$, et continu par rapport à n pour tout $x \in \overline{\phi(\mathcal{B})}$. Alors l'axiome de l'équilibre statique entraîne l'existence d'un champ de tenseurs *continûment dérivable* sur $\phi(\mathcal{B})$:

$$T : \overline{\phi(\mathcal{B})} \to M_3 \quad \text{tel que} \quad t(x,n) = T(x) \cdot n \quad \text{pour tout} \quad x \in \overline{\phi(\mathcal{B})}$$
$$\text{et tout} \quad n \in S^2$$

et tel que
$$\begin{cases} -divT(x) = d_v(x) & \text{pour tout} \quad x \in \phi(\mathcal{B}) \\ T(x) = T(x)^T & \text{pour tout} \quad x \in \overline{\phi(\mathcal{B})} \end{cases}$$

Le tenseur symétrique $T(x)$ est appelé *tenseur des contraintes de Cauchy* au point $x \in \overline{\phi(\mathcal{B})}$.

D'après le théorème précédent, le champ de tenseurs des contraintes de Cauchy est solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -divT = d_v & \text{dans} \quad \phi(\mathcal{B}) \\ T = T^T & \text{dans} \quad \phi(\mathcal{B}) \\ T \cdot n = t & \text{sur} \quad \partial(\phi(\mathcal{B}))_1 \end{cases}$$

Ces équations constituent les *équations d'équilibre dans la configuration déformée.*

Ainsi posées, ces équations ne nous permettent pas le calcul de la déformation ϕ car elles sont établies sur la configuration déformée en termes de la variable $x = \phi(X)$, inconnue du problème.

Par l'intermédiaire de la transormation de Piola, nous les "transportons" sur la configuration de référence pour avoir des équations en termes de la variable X.

Nous introduisons le *premier tenseur de Piola-Kirchhoff* P, défini sur $\bar{\mathcal{B}}$ par la transformation de Piola du tenseur des contraintes de Cauchy T :

$$P(X) = (\det D\phi(X))T(x)D\phi(X)^{-T}, \quad \phi(X) = x \; .$$

La transformation de Piola donne une relation simple entre les divergences de T et de P :

$$\mathrm{DIV} P(X) = (\det D\phi(X)) divT(x), \quad x = \phi(X)$$

Vu que la forme en "divergence" est préservée, nous pourrons donner à nouveau une formulation variationnelle des équations d'équilibre dans la configuration de référence. Nous transformons aussi le vecteur des contraintes de Cauchy $t(x,n) = T(x) \cdot n$ en un vecteur $p(X,N)$ satisfaisant la relation :

$$p(X,N) = P(X) \cdot N$$

Le vecteur $p(X,N)$ est appelé *premier vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff* au point X d'une surface élémentaire de normale N de la configuration de référence.

A la densité de force appliquée de volume $d_v : \phi(\mathcal{B}) \to \mathbf{R}^3$ par unité de volume de la configuration déformée, nous associons le vecteur $B : \mathcal{B} \to \mathbf{R}^3$ défini par la relation :

$$B(X)dV(X) = d_v(x)dv(x) \quad \text{pour tout} \quad x = \phi(X) \in \phi(\mathcal{B})$$

Vu que $dv(x) = (\det D\phi(X))dV(X)$, nous aurons :

$$B(X) = (\det D\phi(X))d_v(x), \quad x = \phi(X), \quad X \in \mathcal{B} \, .$$

Le champ de vecteurs $B : \mathcal{B} \to \mathbf{R}^3$ mesure la densité de force appliquée par unité de volume de la configuration de référence.

A la densité $t : (\partial\phi(\mathcal{B}))_1 \to \mathbf{R}^3$ de force appliquée par unité de surface de la configuration déformée, nous associons le champ de vecteurs $\tau : (\partial\mathcal{B})_1 \to \mathbf{R}^3$ défini par :

$$\tau(X)dA(X) = t(x)da(x), \quad x = \phi(X), \quad X \in (\partial\mathcal{B})_1 \, ,$$

de sorte que

$$\tau(X) = \det D\phi(X)|D\phi(X)^{-T}N|t(x), \quad x = \phi(X), \quad x \in (\partial\mathcal{B})_1 \, .$$

Les équations d'équilibre sur les tenseurs transformés s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rll} -\mathrm{DIV} P = B & \text{dans} & \mathcal{B} \\ (D\phi)(P^T) = P(D\phi)^T & \text{dans} & \mathcal{B} \\ P \cdot N = \tau & \text{sur} & (\partial\mathcal{B})_1 \end{array} \right.$$

Ces équations sont appelées équations *d'équilibre dans la configuration de référence.*

Soit M_3^+ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à déterminant strictement positif et Sym l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3.

Un matériau est dit "élastique" s'il existe une application :

$$\hat{T} : \bar{\mathcal{B}} \times M_3^+ \to \mathrm{Sym}$$
$$(X, m) \mapsto \hat{T}(X, m)$$

appelée *réponse* du matériau, telle que dans toute configuration déformée, le tenseur des contraintes de Cauchy $T(x)$ au point $x = \phi(X)$ soit lié au gradient de la déformation $D\phi(X)$ au point X correspondant de la configuration de référence par la relation :

$$T(x) = \hat{T}(X, D\phi(X)) \quad \text{pour tout} \quad x = \phi(X) \in \overline{\phi(\mathcal{B})}\,,$$

appelée *loi de comportement du matériau considéré.*

En combinant les équations d'équilibre exprimées dans la configuration de référence en termes du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff avec la définition d'un matériau élastique et, en supposant le déplacement imposé sur une partie $(\partial\mathcal{B})_0 = \partial\mathcal{B} - (\partial\mathcal{B})_1$ de la frontière, nous obtenons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{DIV}\,\hat{P}(X, D\phi(X)) = B(X), X \in \mathcal{B} \\ \hat{P}(X, D\phi(X)) \cdot N(X) = \tau(X), X \in (\partial\mathcal{B})_1 \\ \phi(X) = \phi_0(X), X \in (\partial\mathcal{B})_0 \end{cases}$$

où $\hat{P} : \bar{\mathcal{B}} \times M_3^+ \to M_3$ est la réponse associée au premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

La condition $\phi(X) = \phi_0(X), \quad X \in (\partial\mathcal{B})_0 = \Gamma_0$ est appelée *condition aux limites de déplacement* et la condition $\hat{P}(X, D\phi(X))N(X) = \tau(X)$, $X \in (\partial\mathcal{B})_1 = \Gamma_1$ est appelée condition aux *limites de traction.*

Si $\Gamma_0 = \emptyset$, le problème aux limites est un *problème de traction pure.*

Si $\Gamma_1 = \emptyset$, le problème aux limites est un *problème de déplacement pur.*

Un matériau élastique de réponse $\hat{P} : \bar{\mathcal{B}} \times M_3^+ \to M_3$ est *hyperélastique* s'il existe une fonction $\hat{W} : \bar{\mathcal{B}} \times M_3^+ \to \mathbf{R}$ dérivable par rapport à la variable $m \in M_3^+$

pour tout $X \in \bar{\mathcal{B}}$, telle que $\hat{P}(X,m) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial m}(X,m)$ pour tout $X \in \bar{\mathcal{B}}$, $m \in M_3^+$ soit, composante par composante :

$$P_{ij}(X,m) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial m_{ij}}(X,m)$$

La fonction $\hat{W}$ est appelée *densité d'énergie par unité de volume de la configuration de référence.*

Remarque : Les densités des forces appliquées B et τ définies sur la configuration de référence dépendent en principe de la déformation ϕ. Cette déformation étant elle-même une inconnue du problème, la résolution mathématique des équations d'équilibre dans la configuration de référence peut-être compliquée par une éventuelle dépendance en ϕ de leurs seconds membres. Afin de simplifier cela, nous introduisons la notion de *force morte.*

Une force appliquée de *volume* est une *force morte* si la densité $B : \mathcal{B} \to \mathbf{R}^3$ est indépendante de la déformation ϕ considérée.

De la même manière une force appliquée de *surface* est *une force morte* si la densité τ est indépendante de la déformation ϕ considérée.

II. Position du problème. Le but du travail sera la résolution du problème de traction pure pour des forces mortes dans le cas hyperélastique et la caractérisation des solutions dans des cas particuliers (que nous préciserons).

En d'autres termes, nous aurons à étudier le système :

$$\begin{cases} -\mathrm{DIV}\hat{P}(X, D\phi(X)) = B(X) & \text{lorsque} \quad X \in \mathcal{B} \\ \hat{P}(X, D\phi(X))N(X) = \tau(X) & \text{lorsque} \quad X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

sachant qu'il existe une fonction $\hat{W} : \bar{\mathcal{B}} \times M_3^+ \to \mathbf{R}$ dérivable par rapport à la variable $m \in M_3^+$ pour tout $X \in \bar{\mathcal{B}}$, telle que :

$$\hat{P}(X,m) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial m}(X,m) \quad \text{pour tout} X \in \bar{\mathcal{B}}, m \in M_3^+$$

soit

$$\begin{cases} \mathrm{DIV}\hat{P}(X, F(X)) + B(X) = 0 & \text{pour tout} \quad X \in \mathcal{B} \\ \qquad \hat{P}(X, F(X))N(X) = \tau(X) & \text{pour tout} \quad X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

avec $\hat{P}(X,F) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial F}(X,F)$ pour tout $X \in \mathcal{B}$, $\hat{W}$ étant la fonction définie ci-dessus.

Nous désignerons par ℓ le couple (B,τ) appelé *charge* et par L l'ensemble de tous les couples (B,τ). Soit $\mathcal{R}$ la résultante de ℓ définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : L &\to \mathbf{R}^3 \\ \ell &\mapsto \int_{\mathcal{B}} B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X)dA(X)\end{aligned}$$

Nous désignerons par $\mathcal{L}$ l'espace de toutes les charges ℓ de résultante nulle (avec B de classe $W^{s-2,p}$ sur $\mathcal{B}$ et τ de classe $W^{s-1-\frac{1}{p},p}$ sur $\partial\mathcal{B}$).

$\mathcal{L} = \mathrm{Ker}\mathcal{R}$.

Dans tout ce qui suivra, nous noterons P au lieu de $\hat{P}$, W au lieu de $\hat{W}$ et désignerons par (E) les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \mathrm{DIV}P(X,F(X)) + B(X) = 0 \quad \text{pour} \quad X \in \mathcal{B} \\ P(X,F(X))N(X) = \tau(X) \quad \text{pour} \quad X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

Remarque : Si (B,τ) vérifie (E) pour une certaine déformation ϕ, alors $(B,\tau) \in \mathcal{L}$. En effet :

$$(B,\tau) \text{ vérifie } (E) \iff \begin{cases} \mathrm{DIV}P(X,F(X)) + B(X) = 0 \quad \text{pour} \quad X \in \mathcal{B} \\ P(X,F(X))N(X) = \tau(X) \text{ pour } X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

$\Rightarrow \int_{\mathcal{B}}[\mathrm{DIV}P(X,F(X)) + B(X)]dV(X) = 0$

$\Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} \mathrm{DIV}P(X,F(X))dV(X) + \int_{\mathcal{B}} B(X)dV(X) = 0$

$\Leftrightarrow \int_{\partial\mathcal{B}} P(X,F(X))N(X)dA(X) + \int_{\mathcal{B}} B(X)dV(X) = 0$

$\Leftrightarrow \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X)dA(X) + \int_{\mathcal{B}} B(X)dV(X) = 0$

Dans toute la suite du travail nous ferons l'hypothèse (H1) suivante :

(H1) : L'état non déformé est libre de contraintes c'est-à-dire

$$P(X,I) = 0$$

L'hypothèse (H1) entraîne que $\phi = I_{\mathcal{B}}$ est solution de (E) pour $B = 0$ sur $\mathcal{B}$ et $\tau = 0$ sur $\partial\mathcal{B}$.

Soit $SO(3) = \{Q \in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)/Q^TQ = I \quad \text{et} \quad \det Q = +1\}$. Le principe d'indifférence matérielle $P(X,QF) = P(X,F)$ implique que $\phi = Q|_{\mathcal{B}}$ est aussi solution pour tout $Q \in SO(3)$ lorsque $B = 0$ sur $\mathcal{B}$ et $\tau = 0$ sur $\partial\mathcal{B}$.

En d'autres termes, les "solutions triviales" de (E) sont des éléments de $SO(3)$. Le problème fondamentale que nous nous poserons sera :

(P1) : Décrire l'ensemble de toutes les solutions de (E) au voisinage des solutions triviales $SO(3)$ pour des charges variables $\ell \in \mathcal{L}$ voisines de zéro.

CHAPITRE II

Application de la notion de charge astatique
Axes d'équilibre.

Le but de ce chapitre est la décomposition de l'espace $\mathcal{L}$ en somme directe de sous-espaces de $\mathcal{L}$, après l'introduction de l'application de charge astatique et de la notion d'axes d'équilibre.

I. Définitions

1. $\ell = (B, \tau)$ étant une charge de résultante nulle et $\phi : \bar{B} \to \mathbf{R}^3$ étant une déformation, l'application de charge astatique k sera définie par

$$k : \mathcal{L} \times \mathcal{C} \to M_3$$
$$(\ell, \phi) \mapsto k(\ell, \phi) = \int_B B(X) \otimes \overrightarrow{\phi(X)} dV(X) + \int_{\partial B} \tau(X) \otimes \overrightarrow{\phi(X)} dA(X) ,$$

où $\overrightarrow{\phi(X)}$ désigne le vecteur issu de O à $\phi(X)$. On pose $k(\ell) = k(\ell, I_B)$ c'est-à-dire $k(\ell) = \int_B B(X) \otimes \overrightarrow{X} dV(X) + \int_{\partial B} \tau(X) \otimes \overrightarrow{X} dA(X)$.

2. Pour $\phi \in \mathcal{C}$ et $\ell \in \mathcal{L}$, on dit que ℓ est équilibrée par rapport à ϕ si :

$$\mathcal{M}(\ell, \phi) = \int_B \overrightarrow{\phi(X)} \times B(X) dV(X) + \int_{\partial B} \overrightarrow{\phi(X)} \times \tau(X) dA(X) = 0 .$$

On pose $\mathcal{M}(\ell) = \mathcal{M}(\ell, I_B)$ c'est-à-dire

$$\mathcal{M}(\ell) = \int_B \overrightarrow{X} \times B(X) dV(X) + \int_{\partial B} \overrightarrow{X} \times \tau(X) dA(X) .$$

On désigne par $\mathcal{L}_e$ *l'espace des charges de* $\mathcal{L}$ *équilibrées* par rapport à l'identité.

En d'autres termes, si l'on définit l'application "torseur" $\mathcal{T}$ par :

$$\mathcal{T} : L \to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$$
$$\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell) = \{\mathcal{R}(\ell), \mathcal{M}(\ell)\} ,$$

alors $\mathcal{L}_e$ n'est autre que le noyau de $\mathcal{T}$.

3. On appelle *orbite de* $\mathcal{L}$ (respectivement de $\phi \in \mathcal{C}$) l'ensemble suivant :

$$\mathcal{O}_\ell = \{Q\ell / Q\ell(X) = (QB(X), Q\tau(X)), Q \in SO(3)\}$$

(respectivement : $\mathcal{O}_\phi = \{Q\phi / Q\phi = Q \circ \phi, Q \in SO(3)\}$.

(Q est considéré comme application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbf{R}^3$ conservant l'origine).

4. M_3 désignant l'ensemble des matrices 3×3 et Sym désignant l'ensemble des matrices symétriques de M_3, l'ensemble des matrices antisymétriques sera noté Asym.

$\forall m \in M_3,\ m = \frac{1}{2}(m + m^T) + \frac{1}{2}(m - m^T)$.
$m + m^T \in \mathrm{Sym}$
$m - m^T \in \mathrm{Asym}$
$\frac{1}{2}(m - m^T)$ sera noté sym(m)
$\frac{1}{2}(m - m^T)$ sera noté asym(m)
$\mathrm{Sym} \cap \mathrm{Asym} = \{0\}$
On peut donc écrire $M_3 = \mathrm{Sym} \oplus \mathrm{Asym}$.

II. Conditions pour que $\ell = (B, \tau) \in \mathcal{L}$ soit équilibrée par rapport à ϕ

1. Lemme $P(X, F) = F \cdot S(X, C)$ *où* $S(X, C) = 2\frac{\partial W}{\partial C}$

■

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial W}{\partial F} \\ &= \frac{\partial W}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial F} \\ &= \frac{\partial W}{\partial C_{hk}} \cdot \frac{\partial C_{hk}}{\partial F_{ij}} e_i \otimes e_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{hk}}{\partial F_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial F_{ij}} F_{\ell h} F_{\ell k} \\ &= \delta_{i\ell}\delta_{jh} F_{\ell k} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} F_{\ell h} \\ &= \delta_{jh} F_{ik} + \delta_{jk} F_{ih} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}\cdot G_{j\ell} &= \frac{\partial W}{\partial C_{hk}}\cdot\frac{\partial C_{hk}}{\partial F_{ij}}\cdot G_{j\ell}\\
&= \frac{\partial W}{\partial C_{hk}}(\delta_{jh}F_{ik}+\delta_{jk}F_{ih})G_{j\ell}\\
&= [\frac{\partial W}{\partial C_{jk}}\cdot F_{ik}+\frac{\partial W}{\partial C_{hj}}\cdot F_{ih}]\cdot G_{j\ell}\\
&= \frac{\partial W}{\partial C_{jk}}\cdot F_{ik}G_{j\ell}+\frac{\partial W}{\partial C_{hj}}F_{ih}G_{j\ell}\\
&= \frac{\partial W}{\partial C_{jk}}(F_{ki})^T G_{j\ell}+\frac{\partial W}{\partial C_{hj}}F_{ih}G_{j\ell}
\end{aligned}$$

Or $S = 2\frac{\partial W}{\partial C}$. Donc, en faisant la sommation dans l'ensemble de tous les indices, nous aurons

$$\begin{aligned}
P.G &= \frac{1}{2}S(F^TG)+\frac{1}{2}S(G^TF)\\
&= \frac{1}{2}S(F^TG+G^TF)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P(X,F),G\rangle &= \frac{1}{2}\langle S(X,C)),F^TG+G^TF\rangle\\
&= \frac{1}{2}tr(S^T(X,C)(F^TG+G^TF)) \quad \text{car} \quad \langle A,B\rangle = tr(A^TB)\\
&= \frac{1}{2}tr(S^T(X,C)F^TG+S^T(X,C)G^TF)\\
&= \frac{1}{2}tr(S^T(X,C)F^TG)+\frac{1}{2}tr(S^T(X,C)G^TF)\\
&= \frac{1}{2}tr((F\cdot S(X,C))^T\cdot G)+\frac{1}{2}tr(G^TFS^T(X,C))
\end{aligned}$$

vu la commutativité de la trace.

Or $S = 2\frac{\partial W}{\partial C}$. Donc $S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial C_{ji}} = S_{ji}$,

S est donc symétrique.

Par suite :

$$\begin{aligned}
\langle P(X,F),G\rangle &= \frac{1}{2}tr((F\cdot S(X,C))^T\cdot G)+\frac{1}{2}tr(G^T\cdot F\cdot S(X,C))\\
&= \frac{1}{2}tr((F\cdot S(X,C))^T\cdot G)+\frac{1}{2}tr((F\cdot S(X,C))^T\cdot G)^T\\
&= \frac{1}{2}tr((F\cdot S(X,C))^T\cdot G)+\frac{1}{2}tr((F\cdot S(X,C))^T\cdot G)\\
&= tr[(F\cdot S(X,C))^T\cdot G]\\
&= \langle F\cdot S(X,C),G\rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$P(X,F) = F \cdot S(X,C)$$

ou, d'une manière plus abrégée

$$P = F \cdot S\ .$$

Par conséquent, l'hypothèse (H1) est équivalente à l'hypothèse $S(X,I) = 0$.

2. Proposition *1. $\ell = (B,\tau) \in \mathcal{L}$ vérifie (E) $\Rightarrow$ ℓ est équilibrée par rapport à ϕ.*

2. $\ell = (B,\tau) \in \mathcal{L}$ est équilibrée par rapport à $\phi \Leftrightarrow k(\ell,\phi) \in$ Sym.

En particulier, $\ell \in \mathcal{L}_e \Leftrightarrow k(\ell) \in$ Sym.

■ 1. $\ell \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X)dA(X) = 0$

$$\ell \quad \text{vérifie (E)} \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{DIV}P(X,F(X)) + B(X) = 0 & \text{pour} \quad X \in \mathcal{B} \\ \quad P(X,F(X)) \cdot N(X) = \tau(X) & \text{pour} \quad X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi}(X) \times B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi}(X) \times \tau(X)dA(X)$$
$$= \Big[\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}(\phi_j(X)B_k(X))dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}(\phi_j(X)\tau_k(X))dA(X)\Big]e_i$$
$$= \Big[-\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\phi_j(X)(\mathrm{DIV}P(X,F(X)))_k dV(X)$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\phi_j(X)P_{k\ell}(X)N_\ell(X)dA(X)\Big]e_i$$
$$= \Big[-\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\phi_j(X)\frac{\partial P_{k\ell}(X,F(X))}{\partial X_\ell}dV(X)$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\phi_j(X)P_{k\ell}(X)N_\ell(X)dA(X)\Big]e_i$$
$$= \Big[-\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial X_\ell}(\phi_j(X)P_{k\ell}(X,F(X)))dV(X)$$
$$+ \int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \phi_j(X)}{\partial X_\ell}P_{k\ell}(X,F(X))dV(X)$$
$$+ \int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial X_\ell}(\phi_j(X)P_{k\ell}(X,F(X)))dV(X)\Big]e_i$$
$$= \Big[\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \phi_j(X)}{\partial X_\ell} \cdot P_{k\ell}(X,F(X))dV(X)\Big]e_i$$
$$= \Big[\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}F_{j\ell}(X) \cdot P_{k\ell}(X,F(X))dV(X)\Big]e_i$$
$$= \Big[\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}F_{j\ell}(X) \cdot F_{km}(X) \cdot S_{m\ell}(X,C)dV(X)\Big]e_i \text{en raison du lemme précédent.}$$

En $i = 1$, nous aurons :

$$\int_{\mathcal{B}} (F_{2\ell}(X)F_{3m}(X)S_{m\ell}(X,C) - F_{3\ell}(X)F_{2m}(X)S_{m\ell}(X,C))dV(X)$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \Big[(F_{2\ell}(X)F_{3m}(X))S_{m\ell}(X,C) - (F_{2m}(X)F_{3\ell}(X))S_{m\ell}(X,C)\Big] dV(X)$$

Cette expression est nulle en raison de la symétrie de S. Pour $i = 1$, l'expression vaut donc zéro. De même, pour $i = 2$ et $i = 3$, on obtient des valeurs nulles. Donc $\int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi(X)} \times B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi(X)} \times \tau(X)dA(X) = 0$, ce qui prouve bien que ℓ est équilibrée par rapport à ϕ.

2. Supposons d'abord que ℓ est équilibrée par rapport à ϕ, c'est-à- dire :

$$\int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi(X)} \times B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi(X)} \times \tau(X)dA(X) = 0\,,$$

ou encore :

$$\Big[\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\phi_j(X)B_k(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \varepsilon_{ijk}\phi_j(X)\tau_k(X)dA(X)\Big] e_i = 0$$

Comparons $(k,(\ell,\phi))_{ij}$ et $(k(\ell,\phi))_{ji}$:

$$\begin{aligned}
(k(\ell,\phi))_{ij} &= (\int_{\mathcal{B}} B_i(X)\phi_j(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_i(X)\phi_j(X)dA(X)) \\
&= \int_{\mathcal{B}} \phi_j(X)B_i(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \phi_j(X)\tau_i(X)dA(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} \phi_i(X)B_j(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \phi_i(X)\tau_j(X)dA(X) \text{ d'après l'hypothèse} \\
&= \int_{\mathcal{B}} B_j(X)\phi_i(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_j(X)\phi_i(X)dA(X) \\
&= (k(\ell,\phi))_{ji}
\end{aligned}$$

Donc $k(\ell,\phi) \in \mathrm{Sym}$.

Supposons ensuite que $k(\ell,\phi) \in \mathrm{Sym}$ c'est-à-dire $k_{ij}(\ell,\phi) - k_{ji}(\ell,\phi) = 0$

$$(k(\ell,\phi))_{ij} - (k(\ell,\phi))_{ji} = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} B_i(X)\phi_j(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_i(X)\phi_j(X)dA(X) - \int_{\mathcal{B}} B_j(X)\phi_i(X)dV(X)$$
$$- \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_j(X)\phi_i(X)dA(X) = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} \Big[B_i(X)\phi_j(X) - B_j(X)\phi_i(X)\Big] dV(X)$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{B}} \Big[\tau_i(X)\phi_j(X) - \tau_j(X)\phi_i(X)\Big] dA(X) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Big(\int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{kji}\phi_j(X)B_i(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \varepsilon_{kji}\phi_j(X)\tau_i(X)dA(X)\Big) e_k = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1,2,3$$
$$\Leftrightarrow \int_{\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi(X)} \times B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \overrightarrow{\phi(X)} \times \tau(X)dA(X) = 0$$

3. Equivariance de k :

1. $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\forall \phi \in \mathcal{C}$, $\forall Q_1, Q_2 \in SO(3)$, $k(Q_1\ell, Q_2\phi) = Q_1 k(\ell, \phi) Q_2^{-1}$

En particulier : $k(Q\ell) = Qk(\ell)$.

2. Equivariance infinitésimale : $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\forall \phi \in \mathcal{C}$ et $\forall W_1, W_2 \in$ Asym,

$$k(W_1\ell, \phi) = W_1 k(\ell, \phi) \quad \text{et} \quad k(\ell, W_2\phi) = -k(\ell, \phi)W_2\,.$$

En particulier, $k(W\ell) = Wk(\ell)$.

■

$$\begin{aligned} k(Q_1\ell, Q_2\phi) &= \int_{\mathcal{B}} Q_1 B(X) \otimes Q_2\overrightarrow{\phi(X)} dV(X) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}} Q_1 \tau(X) \otimes Q_2\overrightarrow{\phi(X)} dA(X) \\ (Q_1 B(X) \otimes Q_2\overrightarrow{\phi(X)})_{ij} &= Q_{1ik} B_k(X) Q_{2j\ell}\phi_\ell(X) \\ &= Q_{1ik} B_k(X) \phi_\ell(X) Q_{2j\ell} \\ &= Q_{1ik} B_k(X) \phi_\ell(X) (Q_2^T)_{\ell j} \\ &= (Q_1(B(X) \otimes \overrightarrow{\phi(X)}) Q_2^T)_{ij} \end{aligned}$$

Donc

$$Q_1 B(X) \otimes Q_2\overrightarrow{\phi(X)} = Q_1(B(X) \otimes \overrightarrow{\phi(X)}) Q_2^T$$

De la même manière, on montre que :

$$Q_1 \tau(X) \otimes Q_2\overrightarrow{\phi(X)}) = Q_1(\tau(X) \otimes \overrightarrow{\phi(X)}) Q_2^T$$

Vu que Q_1 et Q_2 ne dépendent pas de X, nous aurons :

$$\begin{aligned} k(Q_1\ell, Q_2\phi) &= Q_1 k(\ell, \phi) Q_2^T \\ &= Q_1 k(\ell, \phi) Q_2^{-1} \end{aligned}$$

2. L'équivariance infinitésimale se déduit de 1. En effet, il suffit de poser

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \exp tW_1 \\ Q_2(t) &= \exp tW_2 \qquad t \in \mathbf{R}, \quad W_1, W_2 \in \text{Asym} \end{aligned}$$

$$k(Q_1(t)\ell, \phi) = Q_1(t)k(\ell, \phi) \Leftrightarrow k(\exp tW_1\ell, \phi) = \exp tW_1 k(\ell, \phi)$$

$$\Rightarrow k(W_1\ell, \phi) = W_1 k(\ell, \phi)$$

$$k(\ell, Q_2(t)\phi) = k(\ell, \phi)(Q_2(t))^T \Leftrightarrow k(\ell, \exp tW_2\phi) = k(\ell, \phi)(\exp tW_2)^T$$

$$\Rightarrow k(\ell, W_2\phi) = k(\ell, \phi)W_2^T = -k(\ell, \phi)W_2$$

4. Théorème de décomposition polaire. *Toute matrice inversible M de M_3 s'écrit de manière unique comme le produit OS d'une matrice orthogonale O par une matrice S symétrique, définie positive.*

■ Posons $N = M^T M$. N est symétrique, définie positive. Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres λ_i sont strictement positives.

Il existe une matrice S telle que $N = S^2$. En effet, il suffit de choisir pour S une matrice ayant mêmes directions propres que N et pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de N. Si $N = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P$ avec P orthogonale, posons

$$S = P^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{bmatrix} P$$

La matrice S est symétrique, définie positive. S étant déterminée, il suffit de poser $O = MS^{-1}$.

$$\begin{aligned} OO^T &= (MS^{-1})(MS^{-1})^T \\ &= MS^{-1}(S^{-1})^T M^T \\ &= M(SS^T)^{-1} M^T \\ &= M(S^2)^{-1} M^T \quad \text{car} \quad S \quad \text{est symétrique} \\ &= M(M^T M)^{-1} M^T \\ &= MM^{-1}(M^T)^{-1} M^T \\ &= I \end{aligned}$$

O est donc orthogonale, par suite l'existence de la décomposition est assurée Montrons que la décomposition est unique :

Supposons que $M = OS = O'S'$ avec O, O' matrices orthogonales et S, S' matrices symétriques définies positives.

$$O^T O = O'^T O' = I$$

$$S^T = S, \quad S'^T = S' .$$

$$\left. \begin{aligned} &OS = O'S' \\ &S, S' \quad \text{symétriques} \end{aligned} \right\} \Rightarrow SO^T = S'O'^T$$

$S^2 = SO^TOS = S'O'^TO'S' = S'^2 \Rightarrow S = S'$ car S et S' définies positives.

Par suite la décomposition est unique.

Remarques. 1. Si M n'est pas inversible, la décomposition existe mais n'est pas unique.

En effet soit (M_n) une suite de matrices inversibles convergeant vers une matrice M non inversible.

$M_n = O_nS_n$ et l'espace des matrices orthogonales est compact ([4] p. 19). Il suffit donc d'extraire de (O_n) une sous-suite convergeant vers une matrice orthogonale O et, posant, $S = O^{-1}M$, on aura $M = OS$ où S est symétrique positive (non nécessairement définie) ; O n'est déterminée que sur l'image de S qui est de dimension égale au rang de M. La décomposition n'est donc pas nécessairement unique.

2. Toute matrice M de M_3 peut s'écrire $M = QU$ où $Q \in SO(3)$ et U est symétrique.

Cette décomposition est unique lorsque M est inversible. En effet, il suffit d'appliquer le théorème de décomposition polaire afin d'obtenir $M = OS$ puis de poser $Q = (\det O) \cdot O$, $U = \frac{1}{\det O} \cdot S$.

Théorème de Da Silva : *$\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e \neq \emptyset$; en d'autres termes, toute charge de $\mathcal{L}$ peut être équilibrée par rapport à l'identité sous l'action d'un élément de $SO(3)$.*

■ Montrons qu'il existe $Q \in SO(3)$ tel que $Q\ell \in \mathcal{L}_e$ c'est-à-dire tel que $k(Q\ell) \in \text{Sym}$.

$k(\ell) = M \in M_3$. En vertu de la remarque précédente, nous pouvons écrire $k(\ell) = Q'A$ avec $Q' \in SO(3)$ et $A \in \text{Sym}$.

$$\begin{aligned} k(Q'^T\ell) &= Q'^T k(\ell) \quad \text{car} \quad k \quad \text{est équivariante} \\ &= Q'^T Q' A \\ &= A \in \text{Sym} \end{aligned}$$

Par suite : $Q'^T\ell \in \mathcal{L}_e$. Il suffit donc de poser $Q = Q'^T$ pour avoir $k(Q\ell) \in \text{Sym}$.

■

III. Axes d'équilibre

Soit l'application $\begin{cases} \mathbf{R}^3 \to \text{Asym} \\ v \mapsto \hat{v} \quad \text{tel que} \quad \hat{v}(w) = w \times v \end{cases}$

Si $v = (p, q, r)$, $\hat{v}$ sera de la forme $\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix}$.

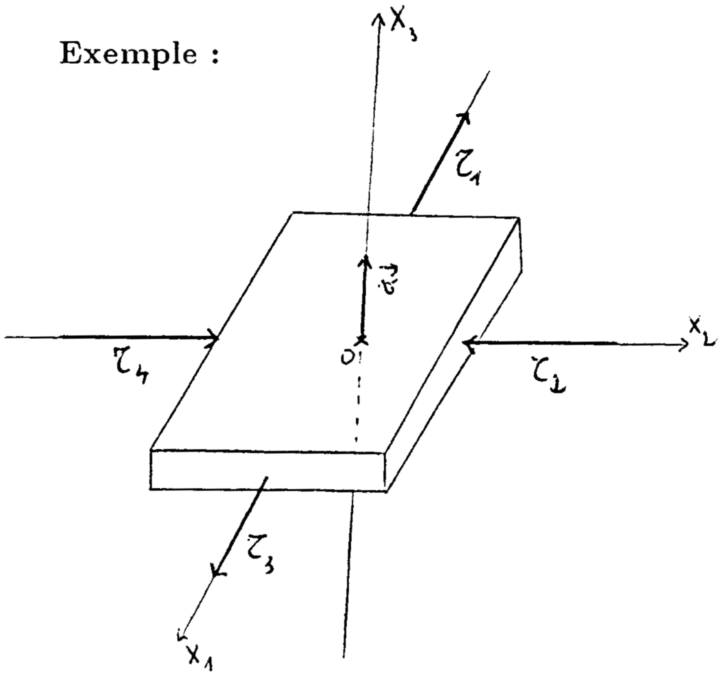
L'application linéaire définie ci-dessus est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Asym est identifié avec $so(3)$ algèbre de Lie de $SO(3)$. Le crochet de Lie satisfait $[\hat{v}, \hat{w}] = (v \times w)\hat{}$.

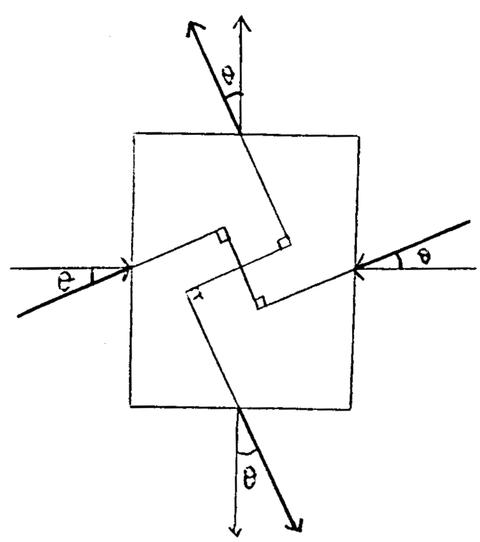
Nous désignerons par $\cdot$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^3$. $\exp\hat{v}$ est la rotation d'angle $\|v\|$ autour du vecteur v dans le sens positif.

1. Définition Soit $\ell \in \mathcal{L}_e$ et $v \in \mathbf{R}^3$, $\|v\| = 1$.

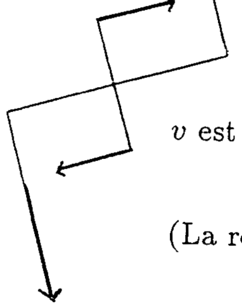
v est un axe d'équilibre pour ℓ si $\exp(\theta\hat{v})\ell \in \mathcal{L}_e$ pour tout réel θ c'est-à-dire lorsque toute rotation de ℓ autour de v ne détruit pas l'équilibre par rapport à l'identité.

Exemple :





Projection sur X_1 o X_2



v est donc un axe d'équilibre

(La rotation de ℓ d'un angle θ autour de v ne détruit pas l'équilibre.)

2. Proposition. *Soit $\ell \in \mathcal{L}_e$ et $\mathbf{A} = k(\ell) \in$ Sym. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *ℓ possède un axe d'équilibre.*

2. *Il existe $v \in \mathbf{R}^3$, $\|v\| = 1$ tel que $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_e$.*

3. *$W \mapsto \mathbf{A}W + W\mathbf{A}$ n'est pas un isomorphisme de* Asym *dans lui-même.*

4. *$tr\mathbf{A}$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.*

■ i) $1 \Rightarrow 2)$: au voisinage de $\theta = 0$.

$$\exp(\theta\hat{v}) = [I + \theta\hat{v} + \frac{1}{2}(\theta\hat{v})^2 + \cdots]$$

L'équivariance infinitésimale donne :

$$k(\exp(\theta\hat{v})\ell) = k(\ell) + (\theta\hat{v})k(\ell) + \frac{1}{2}(\theta\hat{v})^2 k(\ell) + \cdots$$

v est un axe d'équilibre donc $k(\exp(\theta\hat{v})\ell) \in$ Sym pour tout réel θ.

$$\lim_{\theta \to O} \frac{k(\exp(\theta\hat{v})\ell) - k(\ell)}{\theta} = \hat{v}k(\ell) = k(\hat{v}\ell)$$

Le premier membre appartient à Sym donc $k(\hat{v}\ell) \in$ Sym. Par suite $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_e$.

ii) $2) \Rightarrow 1)$ $\exists v \in \mathbf{R}^3$, $\|v\| = 1$ tel que $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_e$

$$k((\exp(\theta\hat{v})\ell) = [I + \theta\hat{v} + \frac{1}{2}(\theta\hat{v})^2 + \cdots]k(\ell)$$

$\hat{v}k(\ell) = k(\hat{v}\ell) \in$ Sym vu que $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_e$. A-t-on $\hat{v}^2 k(\ell) \in Sym$?

$$\begin{aligned}
(\hat{v}^2 k(\ell))^T &= (\hat{v}k(\hat{v}\ell))^T \\
&= k(\hat{v}\ell) \cdot \hat{v}^T \\
&= \hat{v}k(\ell) \cdot \hat{v}^T \\
&= (\hat{v}k(\ell)\hat{v}^T)^T \\
&= (k(\hat{v}\ell) \cdot \hat{v}^T)^T \\
&= \hat{v}k(\hat{v}\ell) \\
&= \hat{v}^2 k(\ell) \,.
\end{aligned}$$

Donc $\hat{v}^2 k(\ell) \in$ Sym.

Faisons une récurrence sur n. Supposons que "$\hat{v}^p k(\ell) \in \mathrm{Sym}$" soit vérifié jusqu'à l'ordre n. Montrons que $\hat{v}^{n+1} k(\ell) \in \mathrm{Sym}$.

$$\begin{aligned}
[\hat{v}^{n+1} k(\ell)]^T &= [\hat{v} k(\hat{v}^n \ell)]^T \\
&= k(\hat{v}^n \ell)\hat{v}^T \\
&= \hat{v} k(\hat{v}^{n-1}\ell)\hat{v}^T \\
&= (\hat{v} k(\hat{v}^{n-1}\ell)\hat{v}^T)^T \\
&= (k(\hat{v}^n \ell)\cdot \hat{v}^T)^T \\
&= \hat{v} k(\hat{v}^n \ell) \\
&= \hat{v}^{n+1} k(\ell)\ .
\end{aligned}$$

donc $\hat{v}^{n+1} k(\ell) \in \mathrm{Sym}$.

Tous les termes du second membre de l'expression suivante sont donc symétriques : $k(\exp(\theta\hat{v})\ell) = [I + \theta\hat{v} + \frac{1}{2}(\theta\hat{v})^2 + \cdots]k(\ell)$. Par suite, $k(\exp(\theta\hat{v})\ell) \in \mathrm{Sym}$ et ℓ a donc un axe d'équilibre v.

iii) 2) $\Rightarrow$ 3) $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_e$ donc $k(\hat{v}\ell) \in \mathrm{Sym}$. Or $k(\hat{v}\ell) = \hat{v}k(\ell) = \hat{v}\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned}
\hat{v}\mathbf{A} &= (\hat{v}\mathbf{A})^T \\
&= \mathbf{A}^T\hat{v}^T \\
&= -\mathbf{A}\hat{v} \quad \text{car} \quad \hat{v} \in \mathrm{Asym}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{A}\hat{v} + \hat{v}\mathbf{A} = 0$.

$$\begin{cases} \mathrm{Asym} \to \mathrm{Asym} \\ \quad W \mapsto \mathbf{A}W + W\mathbf{A} \end{cases} \text{n'est, par conséquent, pas un isomorphisme}$$

iv) 3) $\Rightarrow$ 2)

$$\begin{cases} \mathrm{Asym} \to \mathrm{Asym} \\ \quad W \mapsto \mathbf{A}W + W\mathbf{A} \end{cases} \text{n'est pas un isomorphisme}$$

Il existe donc $w \in \mathbf{R}^3$, $w \neq 0$ tel que $\mathbf{A}\hat{w} + \hat{w}\mathbf{A} = 0$. Il existe donc aussi

$v \in \mathbf{R}^3$, $\|v\| = 1$ (il suffit de prendre $v = \frac{w}{\|w\|}$) tel que $\mathbf{A}\hat{v} + \hat{v}\mathbf{A} = 0$.

$$\begin{aligned} k(\hat{v}\ell) &= \hat{v}k(\ell) \\ &= \hat{v}\mathbf{A} \\ &= -\mathbf{A}\hat{v} \\ &= \mathbf{A}^T\hat{v}^T \\ &= (\hat{v}\cdot\mathbf{A})^T \\ &= (k(\hat{v}\ell))^T \end{aligned}$$

Donc $k(\hat{v}\ell) \in \mathrm{Sym}$. D'où $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_e$.

v) 3)$\Leftrightarrow$ 4) Désignons par $[u, v, w]$ le produit mixte :

$$[Bu, Bv, Bw] = (\det B)[u, v, w]$$

$$e^{\mathbf{A}} = \exp\mathbf{A} = I + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \cdots$$

$$[e^{\mathbf{A}}u, e^{\mathbf{A}}v, e^{\mathbf{A}}w] = \det e^{\mathbf{A}}[u, v, w] = e^{tr\mathbf{A}}[u, v, w]$$

Pour $\mathbf{A}$ petit, $e^{\mathbf{A}} \sim I + \mathbf{A}$, $\quad e^{tr\mathbf{A}} \sim 1 + tr\mathbf{A}$. Il en résulte :

$$[u, v, w] + [\mathbf{A}u, v, w] + [u, \mathbf{A}v, w] + [u, v, \mathbf{A}w] = [u, v, w] + tr\mathbf{A}[u, v, w]$$

soit

$$[\mathbf{A}u, v, w] + [u, \mathbf{A}v, w] + [u, v, \mathbf{A}w] = tr\mathbf{A}[u, v, w]\,.$$

Introduisons à présent l'élément L de M_3, défini par $L = (tr\mathbf{A})I - \mathbf{A}$.

$$tr\mathbf{A}[u, v, w] = [\mathbf{A}u, v, w] + [u, \mathbf{A}v, w] + [u, v, \mathbf{A}w]$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} tr\mathbf{A}(u \times v)\cdot w &= (\mathbf{A}u \times v)\cdot w + (u \times \mathbf{A}v)\cdot w + (u \times v)\cdot \mathbf{A}w \\ &= (\mathbf{A}u \times v)\cdot w + (u \times \mathbf{A}v)\cdot w + \mathbf{A}^T(u \times v)\cdot w \end{aligned}$$

soit

$$tr\mathbf{A}(u \times v) = \mathbf{A}u \times v + u \times \mathbf{A}v + \mathbf{A}^T(u \times v)$$

en d'autres termes :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u \times v + \mathbf{A}^T(u \times v) &= (tr\mathbf{A})u \times v - u \times \mathbf{A}v \\ &= u \times (tr\mathbf{A})v - u \times \mathbf{A}v \\ &= u \times \big((tr\mathbf{A})v - \mathbf{A}v\big) \\ &= u \times Lv \end{aligned}$$

Nous avons donc : $\hat{v}(\mathbf{A}u) + \mathbf{A}^T\hat{v}(u) = (Lv)\hat{}(u)$ soit

$$\begin{aligned}(Lv)\hat{} &= \hat{v}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\hat{v}\\ &= \hat{v}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{v} \quad \text{car} \quad \mathbf{A} \in \mathrm{Sym}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathbf{A}\hat{v} + \hat{v}\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (Lv)\hat{} = 0 \Leftrightarrow Lv = 0 \Leftrightarrow (tr\mathbf{A})v - \mathbf{A}v = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}v = (tr\mathbf{A})v$$

Donc $\mathbf{A}\hat{v} + \hat{v}\mathbf{A} = 0$ si et seulement si v est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $tr\mathbf{A}$. ∎

3. Corollaire *Soit $\ell \in \mathcal{L}_e$ et $\mathbf{A} = k(\ell) \in \mathrm{Sym}$. Soient, a, b, c les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Alors : ℓ n'a pas d'axe d'équilibre $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$.*

∎

$$\begin{aligned}\ell \text{ a un axe d'équilibre} \quad &\Leftrightarrow tr\mathbf{A} \quad \text{est une valeur propre de } \mathbf{A}\\ &\Leftrightarrow tr\mathbf{A} = a \quad \text{ou} \quad tr\mathbf{A} = b \quad \text{ou} \quad tr\mathbf{A} = c\\ &\Leftrightarrow a+b+c = a \text{ ou } a+b+c = b \text{ ou } a+b+c = c\\ &\Leftrightarrow b+c = 0 \quad \text{ou} \quad a+c = 0 \quad \text{ou} \quad a+b = 0\\ &\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0\end{aligned}$$

∎

4. Proposition. *1* $\ker k$ *est constitué des charges de $\mathcal{L}_e$ pour lesquelles tout axe est un axe d'équilibre.*

2. $k : \mathcal{L} \longrightarrow M_3$ est surjective.

∎ 1. $k : \mathcal{L} \longrightarrow M_3$

$$\begin{aligned}\ker k &= \{\ell \in \mathcal{L},\ k(\ell) = 0\}\\ &= \{\ell \in \mathcal{L}_e,\ k(\ell) = 0\} \quad \text{car} \quad \ell \in \mathcal{L}_e \Leftrightarrow k(\ell) \in \mathrm{Sym}\end{aligned}$$

v est le vecteur unitaire d'un axe d'équilibre de $\ell \in \mathcal{L}_e$ si et seulement si $\hat{v}\ell \in \mathcal{L}_c$. Il suffit donc de montrer que $\ker k = \{\ell \in \mathcal{L}_e, W\ell \in \mathcal{L}_e \quad \text{pour tout} \quad W \in \mathrm{Asym}\}$. Supposons d'abord que $\ell \in \ker k$: $\forall W \in \mathrm{Asym}$, $k(W\ell) = Wk(\ell) = 0$; donc $W\ell \in \mathcal{L}_e$. Supposons ensuite que $\ell \in \mathcal{L}_e$ soit tel que $W\ell \in \mathcal{L}_e$ pour tout $W \in \mathrm{Asym}$:

$$\begin{aligned}W\ell \in \mathcal{L}_e \Leftrightarrow k(W\ell) \in \mathrm{Sym} \Leftrightarrow \mathrm{Wk}(\ell) = (Wk(\ell))^T \Leftrightarrow Wk(\ell)\\ = -k(\ell)W \Leftrightarrow WA + AW = 0\end{aligned}$$

Cette condition est équivalente, si l'on pose $W = \hat{v}$, à :

$$\mathbf{A}\hat{v} + \hat{v}\mathbf{A} = 0 \quad \forall v \in \mathbf{R}^3 \quad \text{i.e.} \quad \widehat{(Lv)} = 0 \quad \forall v \in \mathbf{R}^3 \quad \text{i.e.} \quad L = 0$$

En d'autres termes, $(tr\mathbf{A})I = \mathbf{A}$ soit $3tr\mathbf{A} = tr\mathbf{A}$. D'où $\mathbf{A} = 0$, c'est-à-dire $k(\ell) = 0$. Donc $\ell \in \ker k$.

2) Montrons que $k : \mathcal{L} \longrightarrow M_3$ est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}k = \mathrm{M}_3$. Munissons $\mathcal{L}$ du produit scalaire non dégénéré suivant :

$$((\ell, \bar{\ell})) = \int_{\mathcal{B}} B(X) \cdot \bar{B}(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X) \cdot \bar{\tau}(X) dA(X)$$

Soit $Q \in SO(3)$:

$$\begin{aligned} ((Q\ell, Q\bar{\ell})) &= \int_{\mathcal{B}} QB(X) \cdot Q\bar{B}(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} Q\tau(X) \cdot Q\bar{\tau}(X) dA(X) \\ &= \int_{\mathcal{B}} Q^T QB(X) \cdot \bar{B}(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} Q^T Q\tau(X) \cdot \bar{\tau}(X) dA(X) \\ &= \int_{\mathcal{B}} B(X) \cdot \bar{B}(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X) \cdot \bar{\tau}(X) dA(X) \\ &= ((\ell, \bar{\ell})) \end{aligned}$$

Ce produit scalaire est donc invariant par $SO(3)$. Munissons M_3 du produit scalaire noté $\ll\ \gg$ défini par :

$$\forall A, B \in M_3 \ , \ \ll A, B \gg = tr(A^T B)$$

M_3 est un espace euclidien pour ce produit scalaire. Munis des deux produits scalaires définis ci-dessus, $\mathcal{L}$ et M_3 s'identifient à leurs duals respectifs.

Par conséquent, nous associons à l'opérateur linéaire continu $k : \mathcal{L} \longrightarrow M_3$ son adjoint $k^t : M_3 \longrightarrow \mathcal{L}$ défini par : $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\forall D \in M_3$: $((\ell, k^t(D))) = \ll k(\ell), D \gg$

$$\ll k(\ell), D \gg = tr((k(\ell))^T D)$$

$$k(\ell) = \int_{\mathcal{B}} B(X) \otimes X dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X) \otimes X dA(X)$$

$$k_{ij}(\ell) = \int_{\mathcal{B}} B_i(X) X_j dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_i(X) X_j dA(X)$$

Posons

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \left((k(\ell))^T D\right)_{ij} \\ &= \left(k(\ell)\right)^T_{ih} D_{hj} \\ &= \left(k(\ell)\right)_{hi} D_{hj} \\ &= \left[\int_{\mathcal{B}} B_h(X) X_i dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_h(X) X_i dA(X)\right] D_{hj} \end{aligned}$$

$$tr\big((k(\ell))^T D\big) = \sum_{i=1}^{3} c_{ii}$$

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \sum_{h=1}^{3}\Big(\int_{\mathcal{B}} B_h(X)X_i dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_h(X)X_i dA(X)\Big)D_{hi} \\ &= \sum_{h=1}^{3}\Big(\int_{\mathcal{B}} B_h(X)D_{hi}X_i dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_h(X)D_{hi}X_i dA(X)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} = &\int_{\mathcal{B}} B_1(X)D_{11}X_1 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_1(X)D_{11}X_1 dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_2(X)D_{21}X_1 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_2(X)D_{21}X_1 dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_3(X)D_{31}X_1 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_3(X)D_{31}X_1 dA(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{22} = &\int_{\mathcal{B}} B_1(X)D_{12}X_2 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_1(X)D_{12}X_2 dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_2(X)D_{22}X_2 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_2(X)D_{22}X_2 dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_3(X)D_{32}X_2 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_3(X)D_{32}X_2 dA(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{33} = &\int_{\mathcal{B}} B_1(X)D_{13}X_3 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_1(X)D_{13}X_3 dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_2(X)D_{23}X_3 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_2(X)D_{23}X_3 dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_3(X)D_{33}X_3 dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_3(X)D_{33}X_3 dA(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ll k(\ell), D \gg &= tr((k(\ell))^T D) \\ &= c_{11} + c_{22} + c_{33} \\ &= \int_{\mathcal{B}} B_1(X)(D_{11}X_1 + D_{12}X_2 + D_{13}X_3)dV(X) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_1(X)(D_{11}X_1 + D_{12}X_2 + D_{13}X_3)dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_2(X)(D_{21}X_1 + D_{22}X_2 + D_{23}X_3)dV(X) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_2(X)(D_{21}X_1 + D_{22}X_2 + D_{23}X_3)dA(X) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} B_3(X)(D_{31}X_1 + D_{32}X_2 + D_{33}X_3 dV(X) \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_3(X)(D_{31}X_1 + D_{32}X_2 + D_{33}X_3)dA(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ll k(\ell), D \gg &= \int_{\mathcal{B}} B(X) DX dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X) DX dA(X) \\ &= \int_{\mathcal{B}} B(X)(DX - D_O) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X)(DX - D_O) dA(X)\end{aligned}$$

où D_O est constant.

Posons $\hat{D} : X \mapsto (DX, DX)$, $\mathcal{R}(\hat{D}) \in \mathbf{R}^3$ (pas nécessairement nul). Soit $\hat{\hat{D}}X = (DX - D_0, DX - D_0)$ où D_0 est constant. D_0 est constant, nous le choisissons tel que $D_0 = \frac{\mathcal{R}(\hat{D})}{\int_{\mathcal{B}} dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} dA(X)}$. Par suite :

$$\mathcal{R}(D_0) = \mathcal{R}(\hat{D}) \frac{\int_{\mathcal{B}} dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} dA(X)}{\int_{\mathcal{B}} dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} dA(X)} = \mathcal{R}(\hat{D}) .$$

$$\mathcal{R}(\hat{\hat{D}}) = \mathcal{R}(\hat{D}) - \mathcal{R}(D_0) = \mathcal{R}(\hat{D}) - \mathcal{R}(\hat{D}) = 0$$

donc $\hat{\hat{D}} \in \mathcal{L}$.

Nous avons donc $\ll k(\ell), D \gg = ((\ell, \hat{\hat{D}}))$ avec $\hat{\hat{D}} \in \mathcal{L}$. Or par définition, $\ll k(\ell), D \gg = ((\ell, k^t(D)))$ et $((\ ,\ ))$ est non dégénéré sur $\mathcal{L}$, donc $k^t(D) = \hat{\hat{D}}$. Si $\hat{\hat{D}} = 0$ alors $D_0 = -\hat{D}(0) = 0$ et $\hat{D} = 0$ c'est-à-dire $D = 0$. Donc $\ker k^t = \{0\}$ et on en déduit que k^t est injective.

$$\begin{aligned}\forall \ell \in \mathcal{L}\ , \ll k(\ell), D \gg = 0 &\Leftrightarrow \forall \ell \in \mathcal{L}\ , ((\ell, k^t(D))) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \ell \in \mathcal{L}\ , ((\ell, k^t(D))) = ((\ell, k^t(0))) \\ &\Rightarrow k^t(D) = k^t(0) \\ &\Rightarrow D = 0\end{aligned}$$

Nous avons donc $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\ll k(\ell), D \gg = 0 \Rightarrow D = 0$.

Imk n'est orthogonal qu'à $\{0\}$ dans M_3 donc Imk $= \mathrm{M}_3$. Par suite $k : \mathcal{L} \to M_3$ est surjective.

$$k(\ell_1) = k(\ell_2) \Leftrightarrow k(\ell_1 - \ell_2) = 0 \Leftrightarrow \ell_1 - \ell_2 \in \ker k\ .$$

$$\ell_1 - \ell_2 = 0 \Leftrightarrow \ell_1 - \ell_2 \in (\ker k) \cap (\ker k)^{\perp}$$

Donc $k|_{(\ker k)^{\perp}} \to M_3$ est injective.

Par suite $k|_{(\ker k)^{\perp}} : (\ker k)^{\perp} \to M_3$ est un isomorphisme.

Posons $j = (k|_{(\ker k)^{\perp}})^{-1}$.

$j : M_3 \to (\ker k)^\perp$ est aussi un isomorphisme.

$$j(M_3) = (\ker k)^\perp$$
$$M_3 = \text{Asym} \oplus \text{Sym}$$

Donc $j(\text{Asym} \oplus \text{Sym}) = (\ker k)^\perp \Leftrightarrow \text{j}(\text{Asym}) \oplus \text{j}(\text{Sym}) = (\ker k)^\perp$.

Posons $j(\text{Asym}) = \text{Asym}_{\mathcal{L}}$ et $j(\text{Sym}) = \text{Sym}_{\mathcal{L}}$.

Nous aurons donc :$\text{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \text{Sym}_{\mathcal{L}} = (\ker k)^\perp$, soit : $\text{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k = (\ker k)^\perp \oplus \ker k$.

Montrons que $(\ker k)^\perp \oplus \ker k = \mathcal{L}$.

$(\ker k)^\perp \oplus \ker k \subset \mathcal{L}$ (facile)

Soit $\ell \in \mathcal{L}$: si $\ell \in (\ker k)^\perp$, ℓ peut s'écrire $\ell = \ell + 0$.

Si $\ell \notin (\ker k)^\perp$, $\exists! \ell' \in (\ker k)^\perp$ tel que $k(\ell) = k(\ell')$, soit $\exists! \ell' \in (\ker k)^\perp$ tel que $\ell - \ell' \in \ker k$ ou encore $\exists! \ell' \in (\ker k)^\perp$ tel que $\ell = \ell' + \ell_0$ avec $\ell_0 \in \ker k$.

Nous avons donc $\mathcal{L} \subset (\ker k)^\perp \oplus \ker k$. Par suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\ker k)^\perp \oplus \ker k \\ &= \text{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k \end{aligned}$$

Remarque : Soit $\ell \in \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k$; ℓ s'écrit de manière unique $\ell = \ell_s + \ell_0$ avec $\ell_s \in \text{Sym}_{\mathcal{L}}$ et $\ell_0 \in \ker k$

$$k(\ell) = \underbrace{k(\ell_s)}_{\in Sym} + \underbrace{k(\ell_0)}_{=0}$$

Donc $k(\ell) \in \text{Sym}$ et par suite $\ell \in \mathcal{L}_e$. Réciproquement : soit $\ell \in \mathcal{L}_e$:

$$\begin{aligned} \ell \in \mathcal{L}_e \Rightarrow k(\ell) \in \text{Sym} \Rightarrow \text{j}(\text{k}(\ell)) \in \text{Sym} \Rightarrow \ell \in \text{Sym}_{\mathcal{L}} \\ \Rightarrow \ell \in \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k \ . \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}_e = \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k$. Par conséquent :

$$\mathcal{L} = \text{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{L}_e \ .$$

CHAPITRE III

Reformulations du problème

Le problème de traction pure sera reformulé de plusieurs manières. Certaines simplifieront la recherche des solutions, d'autres permettront la description de ces solutions.

I. Expression des équations d'équilibre (E) à l'aide d'une application $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$. Relation entre l'application $k : \mathcal{L} \to M_3$ et $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$.

$\mathcal{C}$ étant l'ensemble de toutes les déformations ϕ, définissons une application Φ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C} &\to \mathcal{L} \\ \phi &\mapsto \Phi(\phi) = (-\mathrm{DIVP}, \mathrm{P} \cdot \mathrm{N}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(\phi)(X) = (-\mathrm{DIVP(X, F(X)), P(X, F(X)) \cdot N(X)})$$

Soit (E) les équations d'équilibre déjà citées :

$$(E) : \quad \begin{cases} \mathrm{DIVP(X, F(X)) + B(X) = 0} & \text{pour} \quad X \in \mathcal{B} \\ P(X, F(X)) \cdot N(X) = \tau(X) & \text{pour} \quad X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\mathrm{DIVP(X, F(X)) = B(X)} & \text{pour} \quad X \in \mathcal{B} \\ P(X, F(X)) \cdot N(X) = \tau(X) & \text{pour} \quad X \in \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (-DIVP(X, F(X)), P(X, F(X)) \cdot N(X)) = (B(X), \tau(X)) = \ell \in \mathcal{L}\ .$$

Donc, exprimées à l'aide de la fonction Φ, les équations d'équilibre (E) deviennent $\Phi(\phi) = \ell$.

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{L} \xrightarrow{k} M_3$$

$$\begin{aligned} k \circ \Phi(\phi) &= k(\Phi(\phi)) \\ &= k(-DIVP, P \cdot N) \\ &= \int_{\mathcal{B}} (-DIVP) \otimes \overrightarrow{X}\, dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} (P \cdot N) \otimes \overrightarrow{X}\, dA(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big(k(\Phi(\phi))\Big)_{ij} &= \int_{\mathcal{B}} -(DIV P)_i X_j dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} (P_{ih}N_h) X_j dA(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} X_j dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} (P_{ih}X_j) N_h dA(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} X_j dV(X) + \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial (P_{ih}X_j)}{\partial X_h} dV(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} X_j dV(X) + \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} X_j dV(X) + \int_{\mathcal{B}} P_{ih} \frac{\partial X_j}{\partial X_h} dV(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} P_{ij} dV(X)
\end{aligned}$$

d'où $k(\Phi(\phi)) = \int_{\mathcal{B}} P dV$.

Dans le cas plus général où $\left\{ \begin{array}{l} k : \mathcal{L} \times \mathcal{C} \to M_3 \\ \quad (\ell, \phi) \mapsto k(\ell, \phi) \end{array} \right.$, nous aurons :

$$k(\Phi(\phi), \phi) = \int_{\mathcal{B}} (-DIV P) \otimes \phi(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} (P \cdot N) \otimes \phi(X) dA(X) .$$

$$\begin{aligned}
\Big(k(\Phi(\phi), \phi)\Big)_{ij} &= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} \phi_j(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} (P_{ih}N_h) \phi_j(X) dA(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} \phi_j(X) dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} (P_{ih}\phi_j(X)) N_h dA(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} \phi_j(X) dV(X) + \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial (P_{ih}\phi_j(X))}{\partial X_h} dV(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} \phi_j(X) dV(X) + \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial P_{ih}}{\partial X_h} \phi_j(X) dV(X) \\
&+ \int_{\mathcal{B}} P_{ih} \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial X_h} dV(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} P_{ih} F_{jh}(X) dV(X) \\
&= \int_{\mathcal{B}} P_{ih} (F^T(X))_{hj} dV(X)
\end{aligned}$$

Donc

$$k(\Phi(\phi), \phi) = \int_{\mathcal{B}} P \cdot F^T dV .$$

II. Dérivée de l'application Φ :

Nous nous proposons à présent de calculer la dérivée de Φ. Pour cela, nous introduisons les tenseurs d'élasticité ainsi que certaines de leurs propriétés.

1. Tenseurs d'élasticité :

Définitions

$$A(X,F) = \frac{\partial P}{\partial F}(X,F) \quad \text{est appelé tenseur d'élasticité}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(X,C) &= \frac{\partial S}{\partial C}(X,C)\\ &= 2\frac{\partial^2 W}{\partial C \partial C}(X,C) \quad \text{est appelé second tenseur d'élasticité}\end{aligned}$$

$$c(X) = 2\mathbf{C}(X,I) \quad \text{est appelé tenseur classique d'élasticité}$$

Remarques : $A(X,F) = \frac{\partial P}{\partial F}(X,F) \in L(L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3), L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3))$.

Soit G et $H \in L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3) = L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3) \simeq M_3$.

Posons : $A(X,F)(G,H) = \ll A(X,F)G, H \gg$

$$\begin{aligned}L(L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3), L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3)) &\simeq L(L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3), L^*(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3))\\ &= L(L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3), L(L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3),\mathbf{R}))\\ &\simeq L^2(L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3),\mathbf{R})\end{aligned}$$

Nous pouvons donc considérer $A(X,F)$ comme une forme bilinéaire sur $L(T_X\mathcal{B},\mathbf{R}^3)$. Dans le cas hyperélastique, vu que $P = \frac{\partial W}{\partial F}$, nous aurons $A = \frac{\partial^2 W}{\partial F \partial F}$ qui sera donc une forme symétrique en G et H.

Relations entre les divers tenseurs d'élasticité.

1) $2A(X,F)\cdot(G,H) = \mathbf{C}(X,C)(F^TH+H^TF, F^TG+G^TF)+S(X,C)(H^TG+G^TH)$

2) $A(X,I)\cdot(G,H) = \frac{1}{4}c(X)(G+G^T, H+H^T)$

■

$$\begin{aligned}A(X,F)\cdot(G,H) &= \ll A(X,F)\cdot G, H \gg\\ A(X,F)\cdot G &= \frac{\partial P}{\partial F}(X,F)\cdot G\\ P(X,F)\cdot G &= \frac{1}{2}S(X,C)[F^TG+G^TF] \quad \text{(déjà démontré)}\\ &= \frac{\partial W}{\partial C}(X,C)[F^TG+G^TF]\end{aligned}$$

$$[P(X,F+H)-P(X,F)]\cdot G = \frac{\partial W}{\partial C}(X,(F^T+H^T)(F+H))[(F^T+H^T)\cdot G$$
$$+G^T(F+H)] - \frac{\partial W}{\partial C}(X,F^TF)[F^TG+G^TF]$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{\partial P}{\partial F}\Big(X,F)H\Big]G + 0(H^TH) \\
&= \frac{\partial W}{\partial C}(X,(F^T+H^T)(F+H)\Big)\Big[(F^T+H^T)\cdot G + G^T(F+H)\Big] \\
&- \frac{\partial W}{\partial C}(X,F^TF)\Big[F^TG+G^TF\Big] \\
&= \Big[\frac{\partial W}{\partial C}(X,F^TF+F^TH+H^TF+H^TH) \\
&- \frac{\partial W}{\partial C}(X,F^TF)\Big]\Big[(F^T+H^T)G+G^T(F+H)\Big] \\
&+ \frac{\partial W}{\partial C}(X,F^TF)[H^TG+G^TH]
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
A(X,F)\cdot(G,H) &= \frac{\partial^2 W}{\partial C\partial C}(X,C)(F^TH+H^TF,F^TG+G^TF) \\
&+ \frac{1}{2}S(X,C)(H^TG+G^TH) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{C}(X,C)(F^TH+H^TF,F^TG+G^TF) \\
&+ \frac{1}{2}S(X,C)(H^TG+G^TH)
\end{aligned}$$

Par suite

$$A(X,I)(G,H) = \frac{1}{2}\mathbf{C}(X,I)(H+H^T,G+G^T) + \frac{1}{2}S(X,I)(H^TG+G^TH)$$

Or $S(X,I)=0$. Donc

$$A(X,I)(G,H) = \frac{1}{2}\mathbf{C}(X,I)(H+H^T,G+G^T)$$

Et, en termes de tenseur classique d'élasticité :

$$\begin{aligned}
A(X,I)(G,H) &= \frac{1}{4}c(X)(H+H^T,G+G^T) \\
&= \frac{1}{4}c(X)(G+G^T,H+H^T) \quad \text{car } A \text{ est symétrique en } G \text{ et } H
\end{aligned}$$

Conséquences : Si nous considérons les formes quadratiques associées à $A(X,I)$ et $c(X)$, nous aurons :

$$A(X,I)(G,G) = \frac{1}{4}c(X)(G+G^T, G+G^T)$$

que nous écrirons (en faisant un abus de notation) :

$$A(X,I)\cdot G = \frac{1}{4}c(X)(G+G^T)$$

Soit $4A(X,I)\cdot G = c(X)(G+G^T)$. Si G est symétrique,

$$\begin{aligned} 4A(X,I)\cdot G &= c(X)(2G) \\ &= 4c(X)\cdot G \end{aligned}$$

soit $A(X,I)\cdot G = c(X)\cdot G$.

2. Proposition : *$D\Phi(I_{\mathcal{B}}) : T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ n'est pas un isomorphisme.*

■

$$\begin{aligned} &\phi = I_{\mathcal{B}} + u \\ &D(\phi+u) = F + \nabla u \\ &\Phi(\phi+u) - \Phi(\phi) = D\Phi(\phi)u + \quad \text{termes de degré} \quad \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\phi+u)(X) &= (-\mathrm{DIVP}(\mathrm{X}, \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \nabla \mathrm{u}((\mathrm{X})), \mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \nabla \mathrm{u}(\mathrm{X}))\cdot \mathrm{N}(\mathrm{X})) \\ \Phi(\phi)(X) &= (-\mathrm{DIVP}(\mathrm{X}, \mathrm{F}(\mathrm{X})), \mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{F}(\mathrm{X}))\cdot \mathrm{N}(\mathrm{X})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X, F(X) + \nabla u(X)) - P(X, F(X)) &= \frac{\partial P}{\partial F}(X, F(X))\cdot \nabla u(X) + \text{termes de degré supérieur} \\ &= A(X, F(X))\cdot \nabla u(X) + \text{termes de degré supérieur} \end{aligned}$$

La dérivée de Φ en ϕ sera donc donnée par :

$$D\Phi(\phi)\cdot u = (-\mathrm{DIV}(\mathrm{A}\cdot\nabla\mathrm{u}), (\mathrm{A}\cdot\nabla\mathrm{u}).\mathrm{N})$$

Par suite :

$$D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u = (-\mathrm{DIV}(\mathrm{A}(\mathrm{X},\mathrm{I})\cdot\nabla\mathrm{u}), (\mathrm{A}(\mathrm{X},\mathrm{I})\cdot\nabla\mathrm{u})\cdot\mathrm{N})$$

Or :

$$4A(X,I)\cdot G = c(X)(G+G^T)$$

Donc :

$$4A(X,I)\cdot\nabla u = c(X)(\nabla u+\nabla u^T)$$
$$= 4c(X)\cdot e \quad \text{avec} \quad e=\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla u^T)$$

Ceci donne :

$$D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u = (-\mathrm{DIV}(\mathrm{c}\cdot\mathrm{e}),(\mathrm{ce})\mathrm{N})\,.$$

Montrons que $\forall u\in T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C},\quad D\Phi(I_{\mathcal{B}})u\in\mathcal{L}_e$.

Posons $(-\mathrm{DIV}(\mathrm{c}\cdot\mathrm{e}),(\mathrm{ce})\mathrm{N}) = (\mathrm{B},\tau) = \ell$. Il suffit donc de vérifier que $k(\ell)\in\mathrm{Sym}$.

$(k(\ell))_{im} = \int_{\mathcal{B}} B_i(X)X_m dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}}\tau_i(X)X_m dA(X)\,.$

$$B_i(X) = (-\mathrm{DIV}(c\cdot e))_i = -\frac{\partial}{\partial X_j}(C_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k})$$
$$\tau_i(X) = ((c\cdot e)\cdot N)_i = c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\cdot N_j$$

$$\begin{aligned}(k(\ell))_{im} &= -\int_{\mathcal{B}}\Big[\frac{\partial}{\partial X_j}(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k})\Big]X_m dV(X)\\
&+\int_{\partial\mathcal{B}}(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}N_jX_m dA(X)\\
&= -\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial}{\partial X_j}(X_m c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k})dV(X)+\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial X_m}{\partial X_j}c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV(X)\\
&+\int_{\partial\mathcal{B}}c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}N_jX_m dA(X)\\
&= \int_{\mathcal{B}}\frac{\partial X_m}{\partial X_j}c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV(X)\\
&= \int_{\mathcal{B}}c_{imhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV(X)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k(\ell))_{mi} &= \int_{\mathcal{B}}\frac{\partial X_i}{\partial X_j}c_{mjhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV(X)\\
&= \int_{\mathcal{B}}c_{mihk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV(X)\,.\end{aligned}$$

Or d'après [4bis] (p. 209), $c_{mihk}=c_{imhk}$. Donc :

$$(k(\ell))_{mi} = \int_{\mathcal{B}}c_{imhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV(X) = (k(\ell))_{im}$$

Par suite : $D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u\in\mathcal{L}_e,\quad \forall u\in T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C}$. Ceci prouve la non-surjectivité de $D\Phi(I_{\mathcal{B}})$

Remarque.

$$u \in \text{Asym} \Leftrightarrow u + u^T = 0 \Rightarrow e = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = 0 \Rightarrow D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot u = 0$$

Donc Asym $\subset$ Ker$D\Phi(\mathrm{I}_{\mathcal{B}})$. Donc $D\Phi(I_{\mathcal{B}})$ n'est pas injective. Par suite $D\Phi(I_{\mathcal{B}})$ n'est pas un isomorphisme.

Si $D\Phi(I_{\mathcal{B}})$ était un isomorphisme, l'équation $\Phi(\phi) = \ell$ aurait une solution unique pour ϕ voisin de $I_{\mathcal{B}}$ et ℓ petit (en vertu du théorème de la fonction inverse).

Faisons alors l'hypothèse suivante : (H2) : Il y a ellipticité forte c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad A(X, I)(v \otimes \xi, v \otimes \xi) \geq \varepsilon \|\xi\|^2 \|v\|^2$$

pour tout $\xi \in (T_X\mathcal{B})^*$ et $v \in \mathbf{R}^3$, avec $v \otimes \xi \in L(T_X\mathcal{B}, \mathbf{R}^3)$ défini par : $(v \otimes \xi)(V) = \xi(V) \cdot v$.

Posons $\mathcal{C}_{\text{sym}} = \{u \in T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C} | \nabla u \in \text{Sym}\}$. Soit $\xi \in (T_X\mathcal{B})^*$ et $v \in \mathbf{R}^3$ tel que $e(X) = \xi(X)v = (v \otimes \xi)(X)$ et $\|v\| = 1$.

Ainsi, nous aurons $\|e\| = \|\xi\|$.

$$(H2) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad A(X, I)(e, e) \geq \varepsilon \|e\|^2$$

Or $A(X, I)(e, e) = c(X)e$ car e est symétrique. Donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $ce \geq \varepsilon \|e\|^2$
Soit $u \in \mathcal{C}_{\text{sym}}$:

$$D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot u = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -\text{DIV(ce)} = 0 & \text{et} \\ c \cdot e \cdot N = 0 & \end{cases} \Rightarrow c \cdot e = 0$$

$0 = ce \geq \varepsilon \|e\|^2$ donc $e = 0$.

$e = 0 \Leftrightarrow \nabla u = -\nabla u^T$ or $\nabla u \in \text{Sym}$ donc $\nabla u = 0$, soit $u =$ constante $= u(0) = 0$ (car $\phi(0) = 0$ par hypothèse). C'est-à-dire Ker$D\Phi(\mathrm{I}_{\mathcal{B}})|_{\mathcal{C}_{\text{sym}}} = \{0\}$. Par suite $D\Phi(I_{\mathcal{B}})|_{\mathcal{C}_{\text{sym}}}$ est injective. De plus ([4] p. 320). $W^{s-2,p} = \text{Im}(\mathcal{D}|_{\mathrm{H}^2_\partial \cap \mathrm{W}^{s,p}}) \oplus$ Ker$\mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(u) &= \text{DIV(A} \cdot \nabla\text{u)} \\ &= DIV(c \cdot e) \end{aligned}$$

$H^2_\partial = \{u \in H^2, (A \cdot \nabla u)N = 0 : \text{sur une portion de } \partial\mathcal{B}\}$

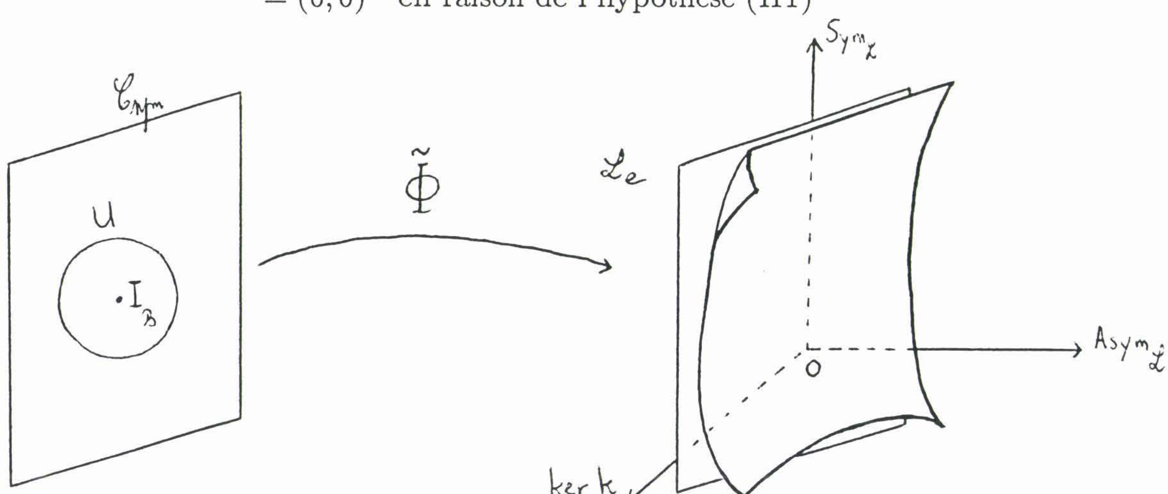
Dans $\mathcal{C}_{\rm sym}, \mathrm{Ker}\mathcal{D} = \{0\}$. Donc $W^{s-2,p} = \mathrm{Im}(\mathcal{D}|_{\mathrm{H}^2_{\mathcal{B}}\cap \mathrm{W}^{s,p}}) \subset \mathrm{Im}(\mathcal{D}|_{\mathrm{W}^{s,p}})$. Par suite :

$$W^{s-1,p} \subset W^{s-1-\frac{1}{p},p} \subset W^{s-2,p} \subset \mathrm{Im}(\mathcal{D}|_{\mathrm{W}^{s,p}})$$

et $\forall B \in W^{s-1,p}$, $\exists u \in W^{s,p}$ tel que $\mathrm{DIV}(\mathrm{c}\cdot\mathrm{e}) = \mathrm{B}$.

$D\Phi(I_{\mathcal{B}})|_{\mathcal{C}_{\rm sym}}$ est donc surjective. $D\Phi(I_{\mathcal{B}})|_{\mathcal{C}_{\rm sym}} : \mathcal{C}_{\rm sym} \to \mathcal{L}_e$ est un isomorphisme. Par suite, en vertu du théorème de l'application inverse, $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathcal{C}_{\rm sym}}$ est un difféomorphisme d'une boule ouverte centrée en $I_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{C}_{\rm sym}$ sur une sous-variété de $\mathcal{L}$ contenant

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}}) &= (-\mathrm{DIVP}(\mathrm{X},\mathrm{I}), \mathrm{P}(\mathrm{X},\mathrm{I})\mathrm{N})\\ &= (0,0) \quad \text{en raison de l'hypothèse (H1)}\end{aligned}$$



Posons $\mathcal{N} = \tilde{\Phi}(U) \subset \mathcal{L}$. Vu que $D\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}}) : \mathcal{C}_{\rm sym} \to \mathcal{L}_e$ est un isomorphisme, $T_{\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}})}\mathcal{N} = \mathcal{L}_e$.

$\forall \ell \in \mathcal{N}$, $\exists u \in U$, tel que $\tilde{\Phi}(u) = \ell$.

$\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} = \mathrm{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{L}_e$. Soient $\tilde{\Phi}_a(u)$ et $\tilde{\Phi}_e(u)$ les projections respectives de $\tilde{\Phi}(u)$ sur $\mathrm{Asym}_{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{L}_e$

$\tilde{\Phi}_a = P_a \circ \tilde{\phi}$ avec P_a projection sur $\mathrm{Asym}_{\mathcal{L}}$. $\tilde{\Phi}_a : \mathcal{C}_{\rm sym} \to \mathrm{Asym}_{\mathcal{L}}$

$\tilde{\Phi}_e = P_e \circ \tilde{\phi}$ avec P_e projection sur $\mathcal{L}_e$. $\tilde{\Phi}_e : \mathcal{C}_{\rm sym} \to \mathcal{L}_e$.

$\tilde{\Phi}(u) = \tilde{\Phi}_a(u) + \tilde{\Phi}_e(u)$ est une écriture unique de $\tilde{\Phi}(u)$ comme somme d'éléments de $\mathrm{Asym}_{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{L}_e$.

Posons : $F = \tilde{\Phi}_a \circ \tilde{\Phi}_e^{-1}$.

$\mathcal{L}_e \overset{\tilde{\Phi}_e^{-1}}{\to} \mathcal{C}_{\text{sym}} \overset{\tilde{\Phi}_a}{\to} \text{Asym}_{\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned} F(0) &= \tilde{\Phi}_a(\tilde{\Phi}_e^{-1}(0)) \\ &= \tilde{\phi}_a(I_{\mathcal{B}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DF(0) &= D(\tilde{\Phi}_a \circ \tilde{\Phi}_e^{-1})(0) = D\tilde{\Phi}_a(\tilde{\Phi}_e^{-1})(0)) \cdot D\tilde{\Phi}_e^{-1}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{N} = \tilde{\Phi}(U) = \{(\ell_e, \ell_a) \in \mathcal{L}_e \times \text{Asym}_{\mathcal{L}} | F(\ell_e) = \ell_a\}\ .$$

$\mathcal{N}$ est donc aussi le graphe de l'application F définie ci-dessus. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

3. Proposition : *Il existe une boule centrée en $I_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{C}_{\text{sym}}$ dont l'image $\mathcal{N}$ par $\tilde{\Phi}$ est une sous-variété de $\mathcal{L}$ tangente en 0 à $\mathcal{L}_e$. $\mathcal{N}$ est aussi le graphe d'une application unique $F : \mathcal{L}_e \to \text{Asym}_{\mathcal{L}}$ telle que $F(0) = 0$ et $DF(0) = 0$.*

Remarques : 1. Soit $\phi \in \mathcal{C}$ une solution de (E). $\exists Q \in SO(3)$ telle que $\bar{\phi} = Q\phi \in \mathcal{C}_{\text{sym}}$. En effet : posons $\bar{\phi} = Q\phi = I_{\mathcal{B}} + u$ avec $u \in T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C}$ et $\nabla u \in \text{Sym}$.

$$\begin{aligned} \nabla u &= \nabla(Q\phi - I_{\mathcal{B}}) \\ &= Q\nabla\phi - I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla u \in \text{Sym} &\Leftrightarrow Q\nabla\phi - I = (Q\nabla\phi - I)^T \\ &\Leftrightarrow Q\nabla\phi = (\nabla\phi)^T Q^T \end{aligned}$$

Posons $M = \nabla\phi$. Peut-on trouver Q tel que $QM = M^T Q^T$?

En vertu du théorème de décomposition polaire nous pouvons écrire $M = RU$ avec U symétrique et $R \in SO(3)$.

$$QM = M^T Q^T \Leftrightarrow QRU = UR^T Q^T$$

Donc si $M = RU$, il suffit de *choisir* $Q = R^T$ pour que $QM = M^T Q^T$. ϕ est solution de (E) donc $\Phi(\phi) = \ell$, $\ell \in \mathcal{L}$.

Par suite $\Phi(\bar{\phi}) = \Phi(Q\phi) = Q\Phi(\phi) = Q\ell$; l'orbite de ℓ rencontre donc le graphe de F en $\Phi(\bar{\phi})$.

Réciproquement, si l'orbite de ℓ rencontre $\mathcal{N}$ en $\Phi(\bar{\phi}) = Q\ell$, alors $\phi = Q^{-1}\bar{\phi}$ satisfait (E).

2. Il existe un voisinage U de $I_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{C}_{\text{sym}}$ tel que :

$$(\phi \in U \quad \text{et} \quad Q\phi \in U) \Rightarrow Q = I$$

Si $\mathcal{O}_\ell$ rencontre $\mathcal{N}$ en k points $Q_i\ell = \Phi(\bar{\phi}_i)$, $i = 1, \cdot, k$, alors les $\bar{\phi}_i$ sont distincts car Φ est biunivoque sur un voisinage $U_{I_{\mathcal{B}}}$ de $I_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{C}_{\text{sym}}$.

Si ce voisinage est contenu dans U (cela est possible : il suffit de prendre $U_{Id_{\mathcal{B}}} \cap U$) alors les points $Q_i^{-1}\bar{\phi}_i = \phi_i$ sont eux aussi distincts d'après ce qui précède.

Le problème (P1) sera donc équivalent au problème (P2) suivant :

(P2) : Pour une charge $\ell_0 \in \mathcal{L}_e$ voisine de 0 étudier la manière dont $\mathcal{O}_\ell$ rencontre le graphe de F pour des charges ℓ voisines de ℓ_0.

Il a déjà été établi que : $\mathcal{L} = \text{Asym}_{\mathcal{L}} \oplus \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k$. La suppression de j et l'identification de $\text{Sym}_{\mathcal{L}}$ avec Sym et $\text{Asym}_{\mathcal{L}}$ avec Asym nous permettent d'écrire $\ell \in \mathcal{L}$ de la manière suivante :

$$\ell = (\mathbf{A}, n) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} \in M_3 (= \text{Sym} \oplus \text{Asym} \approx \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \text{Asym}_{\mathcal{L}}) \quad \text{et} \quad \text{n} \in \ker k\,.$$

L'action de $SO(3)$ sur $\mathcal{L}$ est donnée par : $Q\ell = (Q\mathbf{A}, Qn)$. Cherchons à reformuler (P2) en utilisant les notations introduites

$$F : \mathcal{L}_e \to \text{Asym}_{\mathcal{L}}$$

$\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ est le graphe de F. $(\mathbf{A}', n') \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \text{asym}\mathbf{A}' = F(\text{sym}\mathbf{A}', n')$

$(\mathbf{A}', n') \in \mathcal{O}_\ell \Leftrightarrow \exists Q \in SO(3)$ tel que $(\mathbf{A}', n') = (Q\mathbf{A}, Qn)$.

Donc $(\mathbf{A}', n') \in \mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists Q \in SO(3)$ tel que $\text{asym}(Q\mathbf{A}) = F(\text{sym}Q\mathbf{A}, Qn)$, (P2) peut donc être énoncé de la manière suivante :

(P3) : Pour $\ell_0 = (\mathbf{A}_0, n_0) \in \mathcal{L}_e$, ℓ_0 voisin de zéro et $\ell = (\mathbf{A}, n)$ voisin de ℓ_0, trouver $Q \in SO(3)$ tel que $\text{asym}(Q\mathbf{A}) - F(\text{sym}Q\mathbf{A}, Qn) = 0$.

Définissons ensuite l'application $\bar{F}$ par

$$\bar{F} : \mathbf{R} \times \mathcal{L}_e \to \text{Asym}$$
$$(\lambda, \ell) \mapsto \frac{1}{\lambda^2} F(\lambda\ell)$$

$$\begin{aligned}\bar{F}(\lambda, \mathrm{sym}Q\mathbf{A}, Qn) &= \frac{1}{\lambda^2} F(\lambda \mathrm{sym}Q\mathbf{A}, \lambda Qn) \\ &= \frac{1}{\lambda} F(\mathrm{sym}Q\mathbf{A}, Qn)\end{aligned}$$

Le problème (P3) peut s'énoncer alors de la manière suivante :

(P4) : Pour $\ell_0 = (\mathbf{A}_0, n_0) \in \mathcal{L}_e$, ℓ voisin de ℓ_0 et λ petit, trouver $Q \in SO(3)$ tel que : $\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) - \lambda \bar{F}(\lambda, \mathrm{sym}Q\mathbf{A}, Qn) = 0$.

CHAPITRE IV

Elements de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$

L'étude de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ dépendant des valeurs propres de $k(\ell)$, nous sommes amenés à classifier les charges équilibrées par rapport à l'identité dans la première partie de ce chapitre.

Nous passerons ensuite à la détermination de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ suivant les cas.

I. Classification des charges ℓ de $\mathcal{L}_e$.

1. *Charges de type 0* : $\ell \in \mathcal{L}_e$ est dite "charge de type 0" si ℓ n'a pas d'axe d'équilibre et si les valeurs propres de $k(\ell)$ sont distinctes.

2. *Charges de type 1* : $\ell \in \mathcal{L}_e$ est dite "charge de type 1" si ℓ n'a pas d'axe d'équilibre et si deux seulement des valeurs propres de $k(\ell)$ sont égales et non nulles.

3. *Charges de type 2* : $\ell \in \mathcal{L}_e$ est dite "charge de type 2" si ℓ n'a pas d'axe d'équilibre et si les 3 valeurs propres de $k(\ell)$ sont égales, (et, par conséquent non nulles).

4. *Charges de type 3* : $\ell \in \mathcal{L}_e$ est dite "charge de type 3" si $\dim\ker k(\ell) = 2$ (c'est-à-dire si deux valeurs propres seulement sont nulles. Dans ce cas, il y a présence d'un axe d'équilibre).

5. *Charges de type 4* : $\ell \in \mathcal{L}_e$ est dite "charge de type 4" si $k(\ell) = 0$. (Dans ce cas aussi, il y a nécessairement présence d'un axe d'équilibre).

6. Remarque :

– Si une charge de $\mathcal{L}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre, elle est nécessairement de type $0, 1$ ou 2.

– Par contre, une charge de $\mathcal{L}_e$ ayant un axe d'équilibre n'est pas nécessairement de type 3 ou 4. Exemple : ℓ tel que $k(\ell) = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$ ou $k(\ell) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$.

La classification ci-dessus ne décrit pas $\mathcal{L}_e$ tout entier.

Nous introduisons alors de nouveaux type de charges afin de décrire $\mathcal{L}_e$. Si ℓ possède un axe d'équilibre, les valeurs propres a, b, c de $k(\ell)$ sont telles que $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$. Ceci est équivalent à $a = -b$ ou $b = -c$ ou $c = -a$.

Nous entendons alors par *charge de type* $0'$ une charge ℓ' de $\mathcal{L}_e$ telle que $k(\ell')$ ait ses valeurs propres distinctes avec seulement deux d'entre elles opposées, c'est-à-dire :

$$k(\ell') = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & -a' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} \text{ ou } k(\ell') = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & -b' \end{bmatrix} \text{ ou } k(\ell') = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & -a' \end{bmatrix}$$

avec a', b', c' non nulles.

Nous remarquons que

$$\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & -a' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & -c' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & -b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & -a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & -b' & 0 \\ 0 & 0 & a' \end{bmatrix}$$

Par suite toute charge ℓ' de type $0'$ appartient à l'orbite $\mathcal{O}_\ell$ d'une charge ℓ de type 1.

Donc étudier $\mathcal{O}_{\ell'} \cap \mathcal{L}_e$ lorsque ℓ' est de type $0'$ revient à étudier $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ lorsque ℓ est de type 1.

Nous dirons que ℓ'' est *de type* $1'$ si $k(\ell'') = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ avec $a \neq 0$.

Dans ce cas aussi, $k(\ell'') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

Donc toute charge de type $1'$ appartient à l'orbite d'une charge de type 2.

Les sept types de charges définis décrivent $\mathcal{L}_e$ tout entier ; cependant, le but de la classification étant la détermination de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$, cette dernière peut se faire sans que les charges de types $0'$ et $1'$ soient considérées.

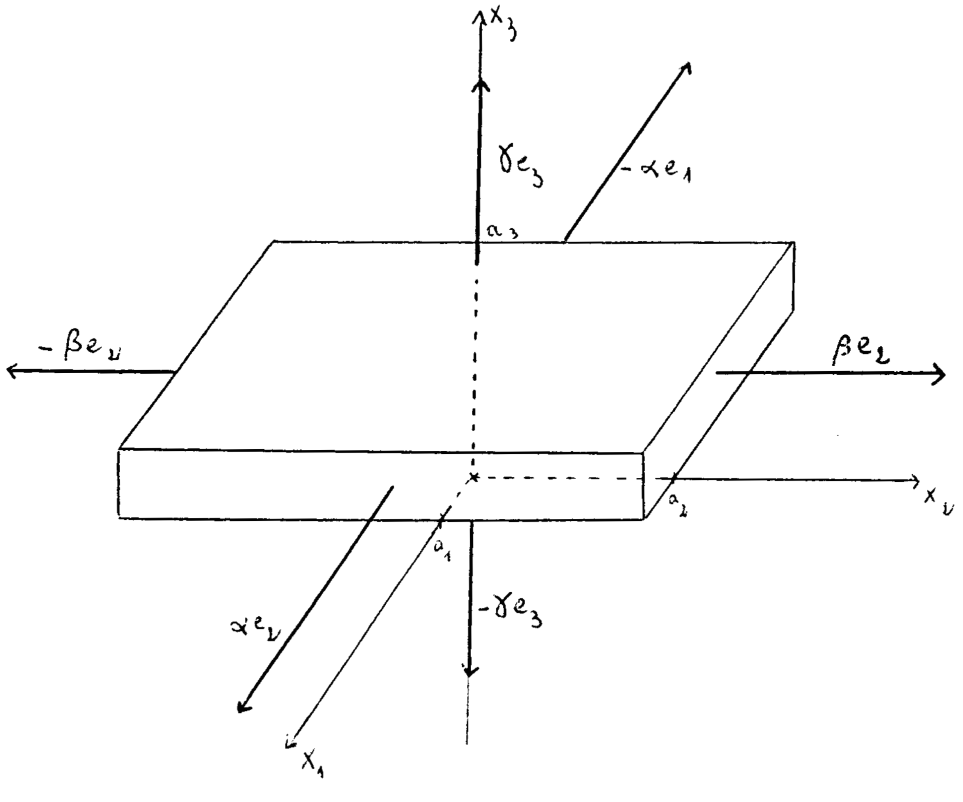
7. *Exemples :* Essayons d'illustrer chaque type de charge par un exemple simple.

Soit $\mathcal{B} \in \mathbf{R}^3$ défini par : $(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \begin{cases} |X_1| < a_1 \\ |X_2| < a_2 \,(a_1, a_2, a_3 > 0). \\ |X_3| < a_3 \end{cases}$

Supposons que $\mathcal{B}$ ne soit soumis qu'à des force de surface, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}(X) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \tau(x) = \begin{cases} \pm\alpha e_1 & \text{pour} \quad X \in \bar{\mathcal{B}} \cap \{X_1 = \pm a_1\} \\ \pm\beta e_2 & \text{pour} \quad X \in \bar{\mathcal{B}} \cap \{X_2 = \pm a_2\} \\ \pm\gamma e_3 & \text{pour} \quad X \in \bar{\mathcal{B}} \cap \{X_3 = \pm a_3\} \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. (Les signes + se correspondent et les signes - aussi)



$\ell = (B, \tau)$ est équilibrée par rapport à l'identité. En effet :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{B}} \vec{X} \times B(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) \\
&= \int_{\partial\mathcal{B}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) \quad \text{car} \quad B = 0 \\
&= \int_{\{X_1=a_1\}\cap\bar{\mathcal{B}}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) + \int_{\{X_2=a_2\}\cap\bar{\mathcal{B}}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) \\
&+ \int_{\{X_3=a_3\}\cap\bar{\mathcal{B}}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) \\
&+ \int_{\{X_1=-a_1\}\cap\bar{\mathcal{B}}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) \\
&+ \int_{\{X_2=-a_2\}\cap\bar{\mathcal{B}}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X) \\
&+ \int_{\{X_3=-a_3\}\cap\bar{\mathcal{B}}} \vec{X} \times \tau(X)dA(X)
\end{aligned}$$

Sur $\{X_1 = a_1\} \cap \bar{\mathcal{B}}$, $\tau(X) = \alpha e_1$ et $\vec{X} = a_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$

Sur $\{X_2 = a_2\} \cap \bar{\mathcal{B}}$, $\tau(X) = \beta e_2$ et $\vec{X} = X_1e_1 + a_2e_2 + X_3e_3$

Sur $\{X_3 = a_3\} \cap \bar{\mathcal{B}}$, $\tau(X) = \gamma e_3$ et $\vec{X} = X_1e_1 + X_2e_2 + a_3e_3$

Sur $\{X_1 = -a_1\} \cap \bar{\mathcal{B}}$, $\tau(X) = -\alpha e_1$ et $\vec{X} = -a_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$

Sur $\{X_2 = -a_2\} \cap \bar{\mathcal{B}}$, $\tau(X) = -\beta e_2$ et $\vec{X} = X_1e_1 - a_2e_2 + X_3e_3$

Sur $\{X_1 = -a_3\} \cap \bar{\mathcal{B}}$, $\tau(X) = -\gamma e_3$ et $\vec{X} = X_1e_1 + X_2e_2 - a_3e_3$

$$\vec{X}\times\tau(X) = \begin{cases}
\alpha X_2e_2 \times e_1 + \alpha X_3e_3 \times e_1 = -\alpha X_2e_3 + \alpha X_3e_2 \text{ sur } \{X_1 = a_1\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
-\alpha X_2e_2 \times e_1 - \alpha X_3e_3 \times e_1 = \alpha X_2e_3 - \alpha X_3e_2 \text{ sur } \{X_1 = -a_1\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
\beta X_1e_1 \times e_2 + \beta X_3e_3 \times e_2 = \beta X_1e_3 - \beta X_3e_1 \text{ sur } \{X_2 = a_2\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
-\beta X_1e_1 \times e_2 - \beta X_3e_3 \times e_1 = -\beta X_1e_3 + \beta X_3e_1 \text{ sur } \{X_2 = -a_2\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
\gamma X_1e_1 \times e_3 + \gamma X_2e_2 \times e_3 = -\gamma X_1e_2 + \gamma X_2e_1 \text{ sur } \{X_3 = a_3\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
-\gamma X_1e_1 \times e_3 - \gamma X_2e_2 \times e_3 = \gamma X_1e_2 - \gamma X_2e_1 \text{ sur } \{X_3 = -a_3\} \cap \bar{\mathcal{B}}
\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{B}} \vec{X} \times \tau(X) dA(X) = & \int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_3}^{a_3} -\alpha X_2 e_3 dX_2 dX_3 + \int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_3}^{a_3} \alpha X_3 e_2 dX_2 dX_3 \\
& + \int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_3}^{a_3} \alpha X_2 e_3 dX_2 dX_3 + \int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_3}^{a_3} -\alpha X_3 e_2 dX_2 dX_3 \\
& + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_3}^{a_3} \beta X_1 e_3 dX_1 dX_3 + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_3}^{a_3} -\beta X_3 e_1 dX_1 dX_3 \\
& + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_3}^{a_3} -\beta X_1 e_3 dX_1 dX_3 + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_3}^{a_3} \beta X_3 e_1 dX_1 dX_3 \\
& + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2} -\gamma X_1 e_2 dX_1 dX_2 + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2} \gamma X_2 e_1 dX_1 dX_2 \\
& + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2} \gamma X_1 e_2 dX_1 dX_2 + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2} -\gamma X_2 e_1 dX_1 dX_2 \\
& = 0
\end{aligned}
$$

ℓ est donc équilibrée par rapport à l'identité.

A présent, essayons d'évaluer $k(\ell)$:

Vu que $B = 0$, $k(\ell) = \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X) \otimes \vec{X} dA(X)$

$$
\begin{aligned}
\tau(X) \otimes \vec{X} &= (\pm\alpha e_1) \otimes (\pm a_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3) \quad \text{sur} \quad \{X_1 = \pm a_1\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
\tau(X) \otimes \vec{X} &= (\pm\beta e_2) \otimes (X_1 e_1 \pm a_2 e_2 + X_3 e_3) \quad \text{sur} \quad \{X_2 = \pm a_2\} \cap \bar{\mathcal{B}} \\
\tau(X) \otimes \vec{X} &= (\pm\gamma e_3) \otimes (X_1 e_2 + X_2 e_2 \pm a_3 e_3) \quad \text{sur} \quad \{X_3 = \pm a_3\} \cap \bar{\mathcal{B}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k(\ell) = & \int_{-a_2}^{a_2}\int_{-a_3}^{a_3} (\pm\alpha e_1) \otimes (\pm a e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3) dX_2 dX_3 \\
& + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_3}^{a_3} (\pm\beta e_2) \otimes (X_1 e_1 \pm a_2 e_2 + X_3 e_3) dX_1 dX_3 \\
& + \int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2} (\pm\gamma e_3) \otimes (X_1 e_1 + X_2 e_2 \pm a_3 e_3) dX_1 dX_2 \\
& = (2a_1\alpha)(4a_2a_3) e_1 \otimes e_1 + (2a_2\beta)(4a_1a_3) e_2 \otimes e_2 + (2a_3\gamma)(4a_1a_2) e_3 \otimes e_3 \\
& = 8a_1a_2a_3(\alpha e_1 \otimes e_1 + \beta e_2 \otimes e_2 + \gamma e_3 \otimes e_3) \\
& = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0
\end{aligned}
$$

Si au plus une des valeurs propres α, β ou γ est nulle, $(\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma) \neq 0$. Ceci confirme bien que $\ell = (B, \tau)$ n'a pas d'axe d'équilibre.

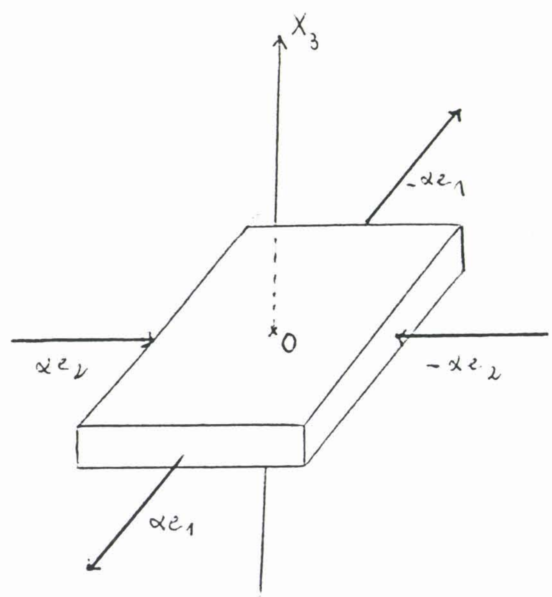
- Si α, β, γ sont distinctes, ℓ est de type 0.

– Type 1 : Pour que ℓ soit de type 1, il suffit de prendre, par exemple, $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

Dans l'exemple cité par Chillingworth, Marsden et Wan dans [2] p. 316, la charge, qui appartient à $\mathcal{L}_e$, a un axe d'équilibre. Elle n'est donc pas, contrairement à ce qui est affirmé, de type 1.

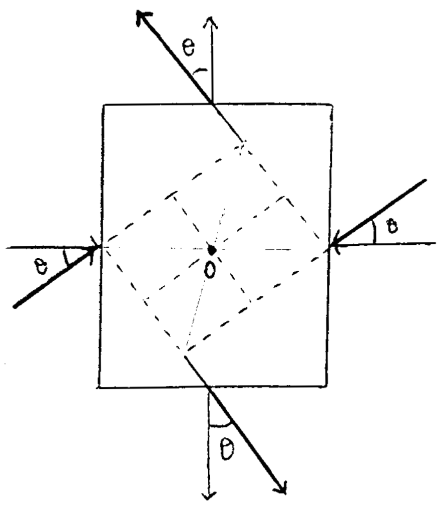
Dans ce cas $k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ℓ est donc de type $0'$. C'est la rotation de ℓ de 180^o autour d'un axe horizontal (par exemple OX_1) qui donne une charge de type 1.

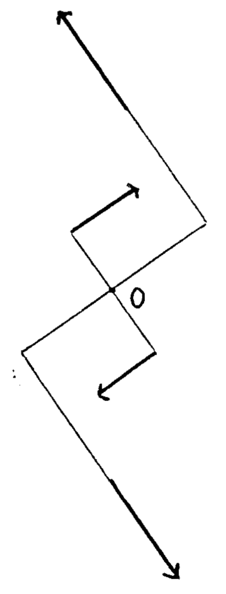
En effet :



$$k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \ell \text{ est une charge équilibrée avec axe d'équilibre.}$$

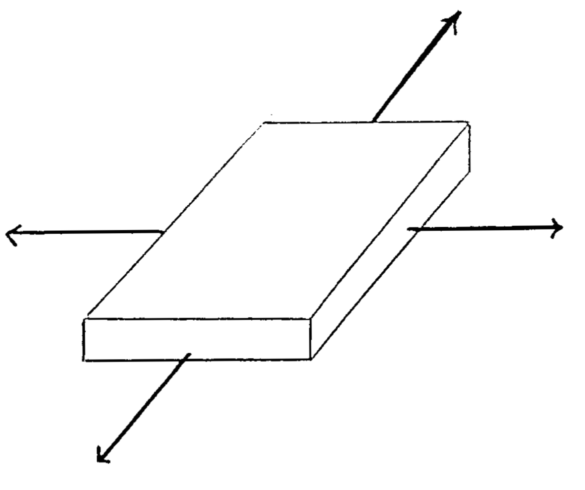
Projection sur $X_1 0 X$



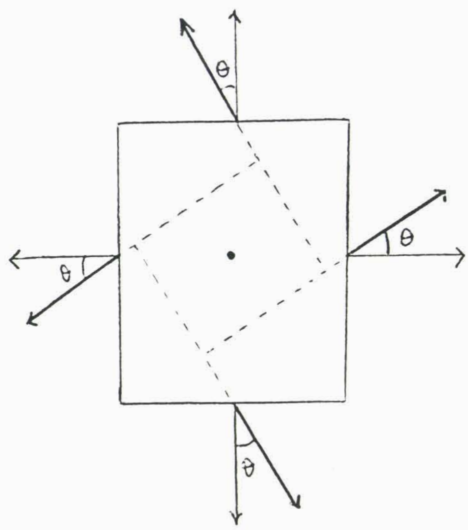


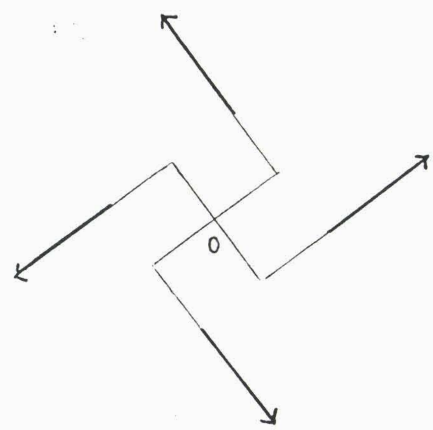
La rotation de ℓ d'un angle θ autour de $0X_3$ ne détruit pas l'équilibre. $0X_3$ est donc un axe d'équilibre.

La rotation de ℓ de 180^o autour de $0X_1$ donne :



$k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ℓ est une charge de type 1.



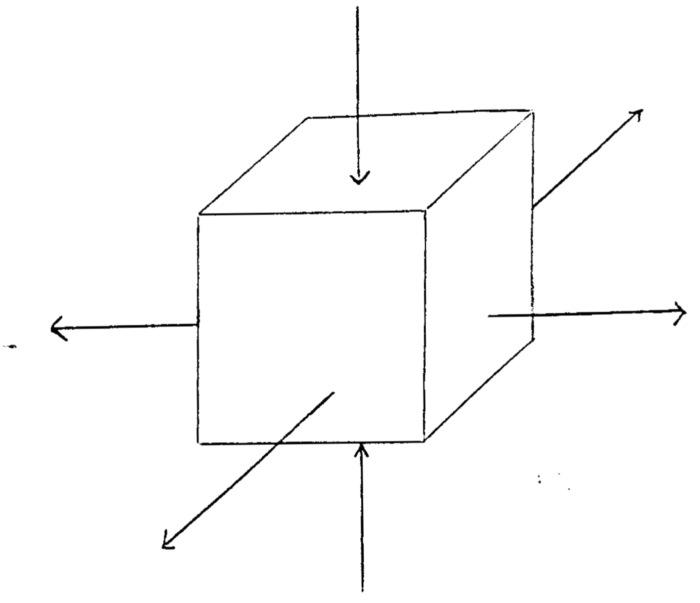


OX_3 n'est plus un axe d'équilibre.

Type 2 : Pour que la charge citée dans le cas général soit de type 2, il suffit de prendre $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$. Dans ce cas

$$k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

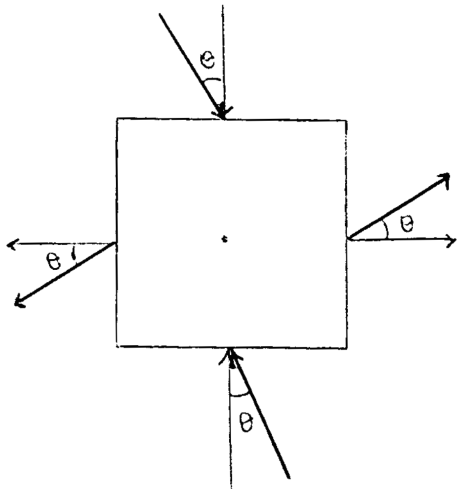
De même que pour le type 1, l'exemple cité par Chillingworth, Marsden et Wan ([2] p. 316) présente une charge de $\mathcal{L}_e$ avec axes d'équilibre. Dans ce cas aussi, c'est la rotation de ℓ de 180^o autour d'un axe vertical (par exemple OX_3) qui en fait une charge de type 2.



$$k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

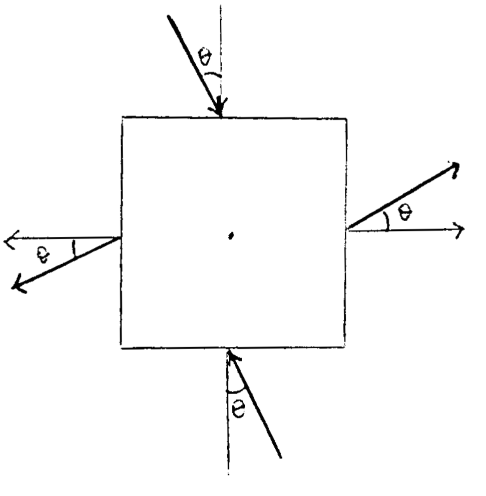
ℓ est une charge équilibrée avec axe d'équilibre ; ℓ est de type 1'.

Projection sur $X_1 \circ X_3$



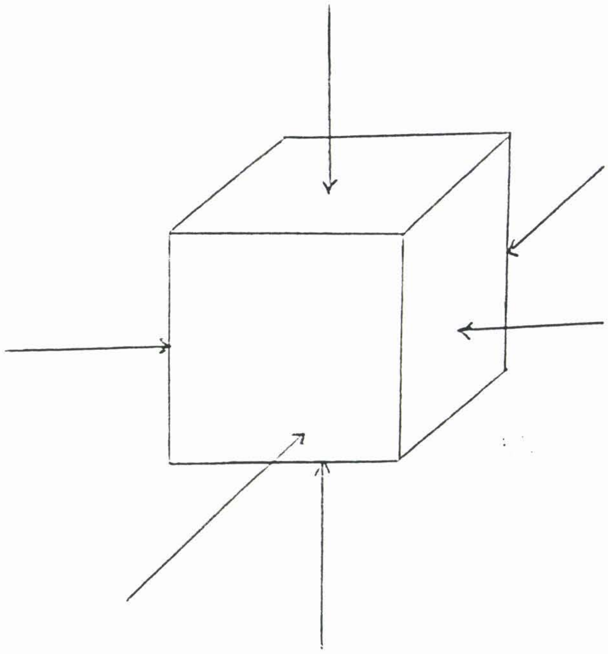
OX_2 est un axe d'équilibre

Projection sur $X_2 \circ X_3$



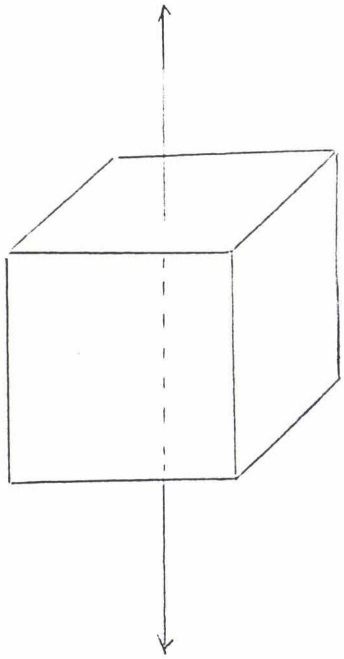
OX_1 est un axe d'équilibre

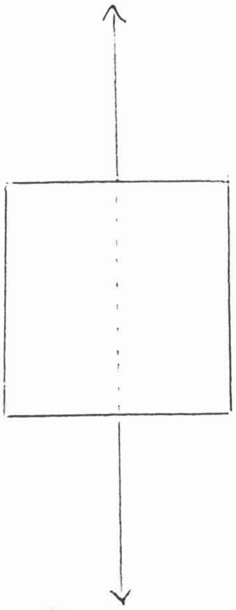
La rotation de ℓ de 180^O autour de $0X_3$ donne :



$$k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} ; \ \ell \text{ est une charge de type 2.}$$

Type 3 : pour que ℓ soit de type 3, il suffit de prendre 2 et seulement 2 parmi les α, β, γ nuls. Par exemple $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma \neq 0$.





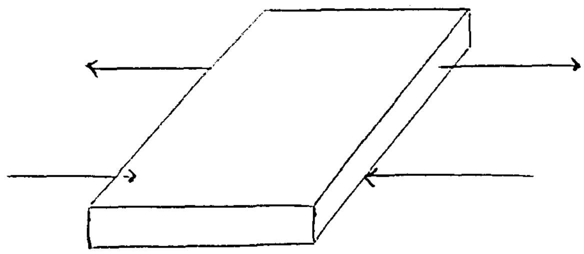
$$k(\ell) = 8a_1a_2a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

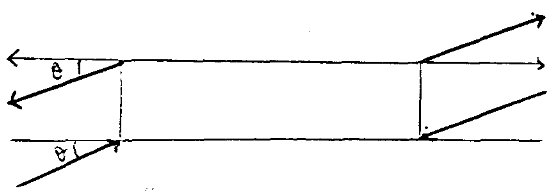
Toute rotation autour de l'axe OX_3 ne détruit pas l'équilibre.

OX_3 est donc un axe d'équilibre.

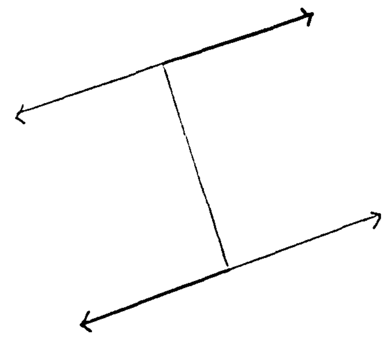
ℓ est une charge de type 3

Type 4 : Pour que ℓ soit de type 4, il suffit de prendre $\alpha = \beta = \gamma = 0$





Projection sur $X_1 \circ X_2$



OX_3 est un axe d'équilibre

(Ce n'est pas le seul, dans ce cas tout axe est un axe d'équilibre)

II. Elements de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$

1. Lemme : 1) Si $\mathbf{A} \in \mathrm{Sym}$ est tel que $\dim \ker \mathbf{A} \leq 1$, alors

$Q \in SO(3)$, $Q\mathbf{A} = \mathbf{A} \Rightarrow Q = I$. On dit que $\mathbf{A}$ n'a pas d'isotropie.

2) Si $\mathbf{A} \in \mathrm{Sym}$ est tel que $\dim \ker \mathbf{A} = 2$, alors : $Q\mathbf{A} = \mathbf{A} \Rightarrow Q$ est une rotation d'angle θ autour d'une droite fixe $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On dit que $\mathbf{A}$ admet le cercle S^1 pour isotropie.

3) La matrice nulle dans Sym admet $SO(3)$ pour isotropie.

Remarques : Le 1) du lemme peut donc être appliqué à toutes les charges ℓ de type $0, 1$ ou 2 telles que $k(\ell) = \mathbf{A}$.

Le 2) du lemme peut être appliqué aux charges ℓ de type 3 telles que $k(\ell) = \mathbf{A}$

Le 3) du lemme peut être appliqué aux charges ℓ de type 4 telles que $k(\ell) = \mathbf{A}$.

Preuve du lemme :

1) Soit $Q \in SO(3)$

Tout $Q \neq I$ agit sur $\mathbf{R}^3$ par une rotation d'angle θ autour d'un axe unique (droite passant par l'origine).

$Q\mathbf{A} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \forall v \in \mathbf{R}^3$, $Q\mathbf{A}v = \mathbf{A}v$, c'est-à-dire $Q|_{\mathrm{Im}\mathbf{A}} = I_{\mathrm{Im}\mathbf{A}}$ (Q est l'identité sur Im$\mathbf{A}$).

En d'autres termes, l'image de $\mathbf{A}$ est contenue dans l'ensemble invariant par Q.

Or pour toute rotation (distincte de l'identité) l'ensemble des vecteurs invariants est une droite vectorielle (l'axe de rotation). Donc $\dim \mathrm{Im}\mathbf{A} = 0$ ou 1.

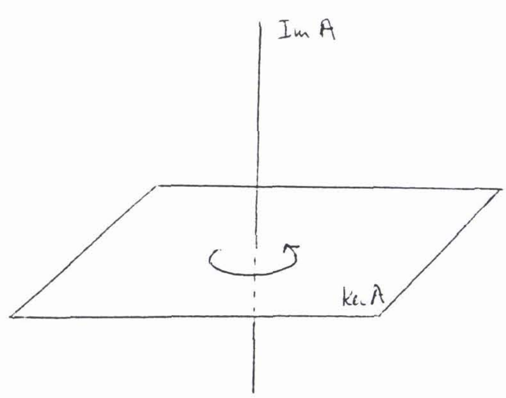
Ainsi, nous aurions $\dim \ker \mathbf{A} = 3$ ou 2, ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse $\dim \ker \mathbf{A} \leq 1$.

Donc $Q\mathbf{A} = \mathbf{A} \Rightarrow Q = I$.

2) $\dim \ker \mathbf{A} = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\mathbf{A} = 1$.

$Q\mathbf{A} = \mathbf{A} \Rightarrow Q$ est l'identité sur Im$\mathbf{A}$ $\Rightarrow$ Q est une rotation autour de la droite Im$\mathbf{A}$.

Inversement, si Q est une rotation autour de la droite Im$\mathbf{A}$, il est clair que $Q\mathbf{A} = \mathbf{A}$.



2. Proposition $\ell \in \mathcal{L}_e$ étant une charge de type 0, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ est constitué de 4 charges et ces dernières sont toutes de type 0.

- ℓ n'a pas d'axe d'équilibre donc $(a+b)(a+c)(b+c) \neq 0$.

  ℓ est de type 0 donc $a \neq b \neq c \neq a$.

$$\ell' = (B', \tau') \in \mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e \Leftrightarrow \begin{cases} \exists Q \in SO(3) \quad \text{tel que} \quad Q\ell = \ell' \\ \qquad \text{et} \qquad \Leftrightarrow \exists Q \in SO(3) \quad \text{tel que} \\ h(\ell') \in \text{Sym} \end{cases}$$

$Q\ell = \ell'$ et $k(Q\ell) \in Sym \Leftrightarrow \exists Q \in SO(3)$ tel que $Q\mathbf{A} = Qk(\ell) \in \text{Sym}$ et $Q\ell = \ell'$.

Nous sommes donc ramenés à étudier $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \text{Sym}$, c'est-à-dire à chercher $Q \in SO(3)$ tel que $Q\mathbf{A} = S \in \text{Sym}$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ dans une base de vecteurs propres.

Soit :

$$S_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Il est clair que $S_1, S_2, S_3, S_4 \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \text{Sym}$.

Montrons que ce sont les seuls éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \text{Sym}$.

Soit $S \in \text{Sym}$ tel que $Q\mathbf{A} = S$.

$$Q\mathbf{A} = S \Leftrightarrow Q\mathbf{A} = \mathbf{A}Q^T = S \Rightarrow \mathbf{A}Q^TQ\mathbf{A} = S^2 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = S^2$$

a, b, c, valeurs propres de $\mathbf{A} = k(\ell)$, sont distinctes et telles que $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ car ℓ est de type 0.

En d'autres termes :

$$\begin{cases} a \neq b \\ \text{et} \\ a \neq -b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a \neq c \\ \text{et} \\ a \neq -c \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b \neq c \\ \text{et} \\ b \neq -c \end{cases}$$

Les valeurs propres a^2, b^2, c^2 de $\mathbf{A}^2$ (i.e. de S^2) sont donc distinctes. Par suite, le sous-espace propre de $\mathbf{A}^2$ correspondant à une valeur propre donnée est de dimension 1.

Soit λ une valeur propre de S et v un vecteur propre

$Sv = \lambda v \Rightarrow S^2 v = S(Sv) = S(\lambda v) = \lambda^2 v \Rightarrow v$ est un vecteur propre de S^2 associé à la valeur propre λ^2.

Donc $\lambda^2 = a^2$ ou $\lambda^2 = b^2$ ou $\lambda^2 = c^2$.

Soit $\lambda = \pm a$ ou $\lambda = \pm b$ ou $\lambda = \pm c$.

Par ailleurs, $\det \mathbf{A} = \det S$ donc les matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

ne conviennent pas et seules S_1, S_2, S_3, S_4 conviennent.

Connaissant les éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \mathrm{Sym}$ lorsque ℓ est de type 0, cherchons les éléments de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$.

$k(Q\ell) = Qk(\ell)$ donc $k(\mathcal{O}_\ell) = \mathcal{O}_{k(\ell)}$

$\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \mathrm{Sym} = \mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym} = k(\mathcal{O}_\ell) \cap \mathrm{Sym}$ contient 4 points :

$k^{-1}(\mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym}) = k^{-1}(k(\mathcal{O}_\ell) \cap \mathrm{Sym})$

$k^{-1}(\mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym}) = \mathcal{O}_\ell \cap k^{-1}(\mathrm{Sym})$

$k^{-1}(\mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym}) = \mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$

Montrons que k est injective dans $\mathcal{O}_\ell$.

Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{O}_\ell$.

$$k(\ell_1) = k(\ell_2) \Leftrightarrow k(Q_1\ell) = k(Q_2\ell) \Leftrightarrow Q_1 k(\ell) = Q_2 k(\ell) \Leftrightarrow \underbrace{Q_2^T Q_1}_{\in SO(3)} k(\ell) = k(\ell)$$

$\mathbf{A} = k(\ell)$ a 3 valeurs propres distinctes donc $\dim\ker\mathbf{A} = 0$.

En vertu du lemme précédent, $Q_2^T Q_1 = I$ i.e. $Q_1 = Q_2$ i.e. $\ell_1 = \ell_2$. k est donc injective.

Ce résultat est aussi valable pour ℓ de type 1 ou 2 car dans ce cas là aussi, $\dim\ker\mathbf{A} \leq 1$.

$\mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym}$ est constitué de 4 points et k injective.

Donc $k^{-1}(\mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym}) = \mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ est aussi constitué de 4 points $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ tels que :

$$k(\ell_1) = S_1, \quad k(\ell_2) = S_2, \quad k(\ell_3) = S_3 et k(\ell_4) = S_4$$

Les 4 charges $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ n'ont pas d'axe d'équilibre et ont des valeurs propres distinctes. Elles sont toutes les quatre de type 0.

3. Proposition. $\ell \in \mathcal{L}_e$ étant une charge de type 1, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ est constitué de deux points et d'un ensemble de points isomorphes à $\mathbf{RP}^1$

■ Pour les mêmes raisons que celles citées pour la proposition précédente, nous nous intéresserons d'abord aux éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \mathrm{Sym}$.

ℓ est de type 1 donc $\mathbf{A} = k(\ell) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ dans une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres. Cherchons $Q \in SO(3)$ telle que $Q\mathbf{A} = \mathbf{A}Q^T$.

$Q = I$ est une solution triviale.

Soit v un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$ et Q une rotation autour de v (distincte de I).

$$\begin{aligned} Q\mathbf{A} = \mathbf{A}Q^T \Leftrightarrow Q\mathbf{A}Q = \mathbf{A} &\Rightarrow Q\mathbf{A}Qv = \mathbf{A}v \\ &\Leftrightarrow Q\mathbf{A}v = \mathbf{A}v \quad \text{car} \quad Qv = v \\ &\Rightarrow \mathbf{A}v = cte v \\ &\Leftrightarrow v \quad \text{vecteur propre de} \quad \mathbf{A} \end{aligned}$$

Donc

$\{Q \in SO(3) - I | Q\mathbf{A} \in \mathrm{Sym}\} \subset \{Q_w \in SO(3) - I / Q_w =$ rotation autour d'un vecteur propre w de $\mathbf{A}\}$

$\forall w \in E(a) \bigcup E(c)$ (sous-espaces propres associés à a ou c)

$$Q_w\mathbf{A}w = \mathbf{A}w \Leftrightarrow Q_w\mathbf{A}w = \mathbf{A}Q_w w$$

Donc $Q_w\mathbf{A} = \mathbf{A}Q_w$ sur $E(a) \bigcup E(c)$.

Par ailleurs $Q_w\mathbf{A} = \mathbf{A}Q_w^T$.

Donc

$$Q_w\mathbf{A} = \mathbf{A}Q_w^T = Q_w^T\mathbf{A} \Rightarrow Q_w^2\mathbf{A} = \mathbf{A} \Rightarrow Q_w^2 = I$$

car $\mathbf{A}$ n'a pas d'isotropie.

Donc Q est une rotation de π autour de w.

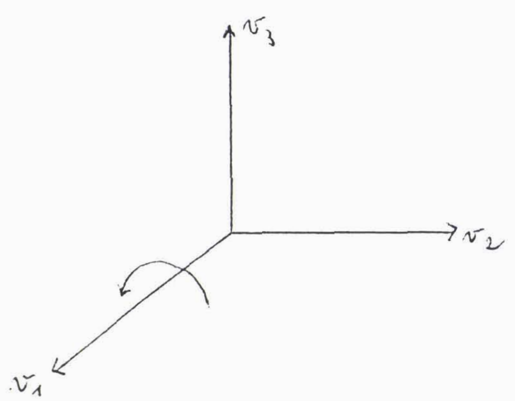
Donc

$\{Q \in SO(3) | Q\mathbf{A} \in \text{Sym}\} \subset \{\text{Q} \in \text{SO(3)} | \text{Q} = \text{rotation de } 0 \text{ ou } \pi \text{ autour d'un vecteur propre } w \text{ de } \mathbf{A}\}$.

Montrons à présent que si Q est une rotation de 0 ou de π autour d'un vecteur propre de $\mathbf{A}$, alors $Q\mathbf{A} \in \text{Sym}$.

$*$ Si $Q =$ rotation de 0 autour de n'importe quel vecteur, c'est-à-dire $\mathbf{Q} = I$, alors $Q\mathbf{A} = \mathbf{A}Q$ (trivial).

$**$ Si $Q =$ rotation de π autour de v_1 :



Soit $v \in \mathbf{R}^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}, v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$$\begin{aligned}
Q\mathbf{A}v &= Q\mathbf{A}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \\
&= Q(a\lambda_1 v_1 + a\lambda_2 v_2 + c\lambda_3 v_3) \\
&= Q(a\lambda_1 v_1) + Q(a\lambda_2 v_2) + Q(c\lambda_3 v_3) \\
&= a\lambda_1 Q v_1 + a\lambda_2 Q v_2 + c\lambda_3 Q v_3 \\
&= a\lambda_1 v_1 - a\lambda_2 v_2 - c\lambda_3 v_3 \\
&= \mathbf{A}(\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3) \\
&= \mathbf{A}(Q(\lambda_1 v_1) + Q(\lambda_2 v_2) + Q(\lambda_3 v_3)) \\
&= \mathbf{A}Q(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) \\
&= \mathbf{A}Qv
\end{aligned}$$

Remarque : Si Q est une rotation de π autour de v_2 ou de v_3, un calcul analogue sera fait pour montrer que $Q\mathbf{A} = \mathbf{A}Q$.

Conclusion

$$\begin{aligned}
\{Q \in SO(3) | Q\mathbf{A} \in \mathrm{Sym}\} = \{I\} \bigcup \{Q \in SO(3) - I | Q = & \\
&\text{rotation de } \pi \text{ autour d'un vecteur propre de } A\} \\
&\approx \{I\} \bigcup \{Q \in SO(3) - I | Q = \\
&\text{rotation de } \pi\text{autour de } v_3\} \\
&\bigcup \{Q \in SO(3) - I | Q = \\
&\text{rotation de } \pi \text{ autour d'un vecteur propre de } \mathbf{A} \text{ associé à } a\}
\end{aligned}$$

Posons Q_{v_3} = rotation de π autour de v_3.

$$i.e. \quad Q_{v_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{soit} \quad Q_{v_3}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$\{Q \in SO(3) - I | Q =$ rotation de π autour d'un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $a\} \approx \mathbf{RP}^1$ car $E(a)$ de dimension 2.

Donc $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \mathrm{Sym}$ est constitué de deux points : $\mathbf{A}, Q_{v_3}\mathbf{A}$ et d'un ensemble isomorphe à $\mathbf{RP}^1$.

Dans ce cas aussi, $\dim \ker \mathbf{A} = 0$.

Donc $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e = k^{-1}(\mathcal{O}_{k(\ell)} \cap \mathrm{Sym}) = k^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \mathrm{Sym})$ est aussi constitué de deux points ℓ et $Q_{v_3}\ell$ et d'un ensemble de points isomorphe à $\mathbf{RP}^1$.

4. Proposition. $\ell \in \mathcal{L}_e$ étant une charge de type 2, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ est constitué d'un point et d'un ensemble isomorphe à $\mathbf{RP}^2$.

■ ℓ est de type 2 donc $k(\ell) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ dans une base de vecteurs propres.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = aI \,,\ a \neq 0 \,.$$

$$\begin{aligned} \forall Q \in SO(3), \qquad Q\mathbf{A}Q^T &= QaIQ^T \\ &= aQQ^T \\ &= aI \\ &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

Soit $Q' \in SO(3)$ tel que $Q'\mathbf{A} \in$ Sym c'est-à-dire $Q'\mathbf{A} = \mathbf{A}Q'^T$.

$Q'\mathbf{A} = \mathbf{A}Q'^T \Leftrightarrow Q'^2\mathbf{A} = Q'\mathbf{A}Q'^T = \mathbf{A} \Rightarrow Q'^2 = I$ car $\mathbf{A}$ n'a pas d'isotropie.

Par suite $Q' = I$ ou $Q' =$ rotation d'angle π autour d'une droite quelconque de $\mathbf{R}^3$.

Et, pour les mêmes raisons que celles déjà citées à la fin de la proposition précédente, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ sera constitué d'un point (ℓ) et d'un ensemble isomorphe à $\mathbf{RP}^2$. ■

5. Proposition. $\ell \in \mathcal{L}_e$ étant une charge de type 3, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ est constitué de $(\{\ell\} + \ker k) \bigcup (\{-\ell\} + \ker k)$.

■

$$k(\ell) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ car } \ell \text{ est de type 3} \qquad c \neq 0.$$

Soit $v \in \mathbf{R}^3$, Q une rotation autour de v.

$Q\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \Leftrightarrow \mathrm{Q}\mathbf{A}\mathrm{Q} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathrm{Q}\mathbf{A}\mathrm{Q}v = \mathbf{A}v \Leftrightarrow \mathrm{Q}\mathbf{A}v = \mathbf{A}v$

Supposons que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ dans une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres.

Or $\mathbf{A}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c\lambda_3 \end{pmatrix}$ est colinéaire aux vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à c.

$QAv = Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c\lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q$ laisse le sous-espace propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre c invariant.

Par suite

$$\begin{aligned} Q = I \quad \text{ou} \quad Q = &\quad \text{rotation de} \quad \pi \quad \text{autour de} \quad v_1 \\ \text{ou} \quad Q = &\quad \text{rotation de} \quad \pi \quad \text{autour de} \quad v_2 \end{aligned}$$

Soit $Q = I$ ou $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou $Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,ce qui correspond à $Q\mathbf{A} = \mathbf{A}$ ou $Q\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

Donc $\mathcal{O}_{\mathbf{A}} \cap \mathrm{Sym} = \{\mathbf{A}, -\mathbf{A}\}$.

Quels sont les éléments de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$?

$Q\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \Leftrightarrow \mathrm{Q}k(\ell) \in \mathrm{Sym} \Leftrightarrow k(\mathrm{Q}\ell) \in \mathrm{Sym} \Leftrightarrow \mathrm{Q}\ell \in \mathcal{L}_e \Leftrightarrow \mathrm{Q}\ell \in \mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$

$Q\mathbf{A} = \mathbf{A} \Leftrightarrow Qk(\ell) = k(\ell) \Leftrightarrow k(Q\ell) = k(\ell) \Leftrightarrow k(Q\ell - \ell) = 0$

$\Leftrightarrow Q\ell - \ell \in \mathrm{Ker}k \Leftrightarrow \mathrm{Q}\ell \in \{\ell\} + \ker k$

De même

$$Q\mathbf{A} = -\mathbf{A} \Leftrightarrow Q\ell \in \{-\ell\} + \ker k$$

■

Conclusion : Lorsque $\ell \in \mathcal{L}_e$ est de type 3,

$$\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e = (\{-\ell\} + \ker k) \bigcup (\{\ell\} + \ker k)$$

6. Proposition.(triviale). Si $\ell \in \mathcal{L}_e$ est de type 4, $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e = \mathcal{O}_\ell$.

CHAPITRE V

Solutions de l'équation $\Phi(\phi) = \lambda\ell$ au voisinage des solutions triviales $SO(3)$ lorsque ℓ est de type 0

Nous montrerons d'abord que $\Phi(\phi) = \lambda\ell$ admet une solution et une seule au voisinage de l'identité lorsque λ est petit et ℓ n'a pas d'axe d'équilibre. L'étude de $\Phi(\phi) = \lambda\ell$ avec ℓ de type 0 permettra de montrer que ceci n'est plus vrai au voisinage des solutions triviales $SO(3)$.

I. Propriétés des charges de $\mathcal{L}_e$ sans axe d'équilibre

1. Proposition *Une charge $\ell \in \mathcal{L}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre si et seulement si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e \oplus T_\ell \mathcal{O}_\ell$.*

Preuve :

$$\mathcal{O}_\ell = \{Q\ell / Q \in SO(3)\}$$

$$T_I SO(3) = \{W / W \in \text{Asym}\}$$

$$T_\ell \mathcal{O}_\ell = \{W\ell / W \in \text{Asym}\}$$

a) Supposons que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e \oplus T_\ell \mathcal{O}_\ell$ et montrons que si $\ell \in \mathcal{L}_e$ alors ℓ n'a pas d'axe d'équilibre ce qui est équivalent à montrer que l'application

$$\begin{aligned} \text{Asym} &\to \text{Asym} \\ W &\mapsto \mathbf{A}W + W\mathbf{A} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = k(\ell) \quad (\mathbf{A} \in \text{Sym car } \ell \in \mathcal{L}_e) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

$\forall \ell' \in \mathcal{L}$, $\ell' = \ell_e + W_\ell$ avec $\ell_e \in \mathcal{L}_e$ et $W \in$ Asym, ℓ_e et $W\ell$ uniques.

Nous aurons donc $W\ell = \ell' - \ell_e$. Par suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}W + W\mathbf{A} = 0 &\Leftrightarrow k(\ell)W + Wk(\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(Wk(\ell))^T + Wk(\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(k(W\ell))^T + k(W\ell) = 0 \\ &\Leftrightarrow -(k(\ell' - \ell_e))^T + k(\ell' - \ell_e) = 0 \\ &\Leftrightarrow -k^T(\ell') + k^T(\ell_e) + k(\ell') - k(\ell_e) = 0 \end{aligned}$$

$\ell_e \in \mathcal{L}_e$ donc $k(\ell_e) = k^T(\ell_e)$.

Par conséquent $\mathbf{A}W + W\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow k(\ell') = k^T(\ell')$, soit $\ell' \in \mathcal{L}_e$.

Nous savons que $\ell' = \ell_e + W\ell$ avec $\ell_e \in \mathcal{L}_e$ et $W \in$ Asym.

Or $\ell' \in \mathcal{L}_e$ donc $W\ell = 0$ soit $W = 0$.

Conclusion : $\mathbf{A}W + W\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow W = 0$.

L'application

$$\begin{aligned} \text{Asym} &\to \text{Asym} \\ W &\mapsto \mathbf{A}W + W\mathbf{A} \quad \text{est un isomorphisme} \end{aligned}$$

Donc ℓ n'a pas d'axe d'équilibre.

b) Supposons ensuite que $\ell \in \mathcal{L}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre et montrons alors que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e \oplus T_\ell \mathcal{O}_\ell$.

$\ell \in \mathcal{L}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre; en d'autres termes :

$$\begin{aligned} \text{Asym} &\to \text{Asym} \\ W &\mapsto k(\ell)W + Wk(\ell) \quad \text{est un isomorphisme} \end{aligned}$$

$\forall W' \in$ Asym, $\exists W \in$ Asym tel que $W' = k(\ell)W + Wk(\ell)$.

Soit $\ell' \in \mathcal{L}$.

$$\begin{aligned} k(\ell') &= \text{sym}(k(\ell')) + \text{asym}(k(\ell')) \\ &= \frac{1}{2}(k(\ell') + k^T(\ell')) + \frac{1}{2}(k(\ell') - k^T(\ell')) \end{aligned}$$

Posons $k(\ell') - k^T(\ell') = W'$

$\exists W \in$ Asym tel que

$$\begin{aligned} W' = k(\ell') - k^T(\ell') &= k(\ell)W + Wk(\ell) \\ &= -(Wk(\ell))^T + Wk(\ell) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{asym}(k(\ell')) &= \text{asym}(Wk(\ell)) \\ &= \text{asym}(k(W\ell)) \end{aligned}$$

Par suite $k(\ell') = S + k(W\ell)$ avec S matrice symétrique (car deux matrices ayant mêmes parties symétiques sont égales à une matrice symétrique près).

$k : \mathcal{L} \to M_3$ est surjective :

$$\forall m \in M_3, \ \exists \ell" \in \mathcal{L} \quad \text{tel que} \quad k(\ell") = m\,.$$

En particulier pour S, $\exists \ell" \in \mathcal{L}$ tel que $k(\ell") = S$ i.e. $\ell" = \ell_e \in \mathcal{L}_e$. Donc $k(\ell') = k(\ell_e) + k(W\ell)$ c'est-à-dire $\ell - \ell_e - W\ell \in \ker k \subset \mathcal{L}_e$ soit $\ell' - \ell_e - W\ell = \ell'_e$ élément de $\mathcal{L}_e$. Par suite :

$$\begin{aligned} \ell' &= \ell_e + \ell'_e + W\ell \\ &= \ell_{1e} + W\ell \quad \text{avec} \quad \ell_{1e} = \ell_e + \ell'_e \in \mathcal{L}_e \end{aligned}$$

Cette écriture est-elle unique ?

Supposons les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \ell' &= \ell_{1e} + W\ell \\ &= \ell'_{1e} + W'\ell \quad \text{avec} \quad \ell_{1e}, \ell'_{1e} \in \mathcal{L}_e \quad \text{et} \quad W, W' \in \text{Asym} \end{aligned}$$

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} k(\ell') &= k(\ell_{1e}) + Wk(\ell) \\ &= k(\ell'_{1e}) + W'k(\ell) \\ \text{asym}k(\ell') &= \frac{1}{2}(Wk(\ell) + k(\ell)W) \\ &= \frac{1}{2}(W'k(\ell) + k(\ell)W') \end{aligned}$$

Soit $Wk(\ell) + k(\ell)W = W'k(\ell) + k(\ell)W'$.

Or :

$$\begin{aligned} &\text{Asym} \to \text{Asym} \\ &\quad W \mapsto k(\ell)W + Wk(\ell) \quad \text{est un isomorphisme} \end{aligned}$$

Donc $Wk(\ell) + k(\ell)W = W'k(\ell) + k(\ell)W' \Rightarrow W = W'$

$$W = W' \Rightarrow \ell_{1e} + W\ell = \ell'_{1e} + W\ell \Rightarrow \ell_{1e} = \ell'_{1e}$$

Tout élément de $\mathcal{L}$ s'écrit comme somme d'un élément de $\mathcal{L}_e$ et d'un élément de $T_\ell \mathcal{O}_\ell$ de manière unique

$$\begin{aligned} W\ell \in \mathcal{L}_e \Leftrightarrow k(W\ell) \in \text{Sym} \Leftrightarrow \mathrm{Wk}(\ell) = (\mathrm{Wk}(\ell))^{\mathrm{T}} = -\mathrm{k}(\ell)\mathrm{W} \\ \Leftrightarrow Wk(\ell) + k(\ell)W = 0 \Leftrightarrow W = 0 \Leftrightarrow = W\ell = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_e \cap T_\ell \mathcal{O}_\ell = \{0\}$.

Par suite : si $\ell \in \mathcal{L}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre alors $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e \oplus T_\ell \mathcal{O}_\ell$.

2. Théorème : *Soit ℓ une charge de $\mathcal{L}_e$ sans axe d'équilibre. Alors pour λ suffisamment petit, il existe $\bar{\phi}$ unique dans C_{sym} et $\bar{Q}$ unique voisin de l'identité dans $SO(3)$ tel que : $\phi = \bar{Q}^{-1}\bar{\phi}$ satisfasse l'équation de traction $\Phi(\phi) = \lambda\ell$.*

Preuve : Dans la formulation (P4) du problème, nous avons introduit l'application H suivante :

$$\begin{aligned} H : \mathbf{R} \times SO(3) &\to \text{Asym} \\ (\lambda, \bar{Q}) &\mapsto H(\lambda, \bar{Q}) = \text{asym}(\bar{Q}\mathbf{A}) - \lambda \bar{F}(\lambda, \text{sym}(\bar{Q}\mathbf{A}), \bar{Q}n) \end{aligned}$$

avec $\ell = (\mathbf{A}, n) \in \mathcal{L}_e = \text{Sym}_{\mathcal{L}} \oplus \ker k$.

$H(0, \bar{Q}) = \text{asym}(\bar{Q}(\mathbf{A})$ est linéaire en $\bar{Q}$. Donc

$$\begin{aligned} D_{\bar{Q}}H(0, \bar{Q})W &= \text{asym}(W\mathbf{A}) \quad \forall \bar{Q} \in SO(3) \\ &= \frac{1}{2}(W\mathbf{A} - \mathbf{A}^T W^T) \\ &= \frac{1}{2}(W\mathbf{A} + \mathbf{A}W) \end{aligned}$$

En particulier

$$D_{\bar{Q}}H(0, I)W = \frac{1}{2}(W\mathbf{A} + \mathbf{A}W)$$

Par hypothèse, ℓ n'a pas d'axe d'équilibre. Donc

$$\begin{aligned} \text{Asym} &\to \text{Asym} \\ W &\mapsto \mathbf{A}W + W\mathbf{A} \quad \text{est un isomorphisme} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} D_{\bar{Q}}H(0, I) : \text{Asym} &\to \text{Asym} \\ W &\mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{A}W + W\mathbf{A}) \quad \text{est aussi un isomorphisme} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le théroème des fonctions implicites. Par conséquent, $H(\lambda\bar{Q}) = 0$ peut être résolue de manière unique pour $\bar{Q}$ voisin de I dans $SO(3)$ comme fonction de λ voisin de 0 dans $\mathbf{R}$.

Soit il existe $\bar{Q}$ unique voisin de I dans $SO(3)$ tel que

$$\text{asym}(\bar{Q}\mathbf{A}) - \lambda\bar{F}(\lambda, \text{sym}(\bar{Q}\mathbf{A}), \bar{Q}n) = 0$$

lorque λ est voisin de zéro. Par suite, il existe $\bar{Q}$ unique voisin de I dans $SO(3)$ tel que : $\lambda(\bar{Q}\mathbf{A}, \bar{Q}n) \in \mathcal{N}$. Φ est un isomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{N}$. Donc il existe $\bar{\phi}$ unique voisin de l'identité dans $\mathcal{C}_{\text{sym}}$ tel que

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{\phi}) &= \lambda(\bar{Q}\mathbf{A}, \bar{Q}n)\\ &= \lambda\bar{Q}\ell\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{Q}^{-1}\bar{\phi}) &= \lambda\bar{Q}^{-1}\bar{Q}\ell\\ &= \lambda\ell\end{aligned}$$

Soit, en posant $\phi = \bar{Q}^{-1}\bar{\phi}$, $\Phi(\phi) = \lambda\ell$ cqfd..

II. Solutions de l'équation $\Phi(\phi) = \lambda\ell$ au voisinage des solutions triviales $SO(3)$ lorsque ℓ est de type 0.

1. Théorème : *Soit $\ell_0 \in \mathcal{L}_e$ une charge de type 0. Alors pour λ suffisamment petit, $\Phi(\phi) = \lambda\ell_0$ a exactement 4 solutions $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ dans un voisinage des solutions triviales $SO(3) \subset \mathcal{C}$.*

Preuve : D'après l'étude de $\mathcal{O}_\ell \cap \mathcal{L}_e$ (chapitre IV), $\mathcal{O}_{\lambda\ell_0}$ rencontre $\mathcal{L}_e$ en quatre points S_1, S_2, S_3, S_4 lorsque λ est suffisamment petit et ℓ_0 de type 0.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\lambda\ell_0} \cap \mathcal{L}_e &= \{S_1, S_2, S_3, S_4\}\\ &= \{\lambda Q_1\ell_0, \lambda Q_2\ell_0, \lambda Q_3\ell_0, \lambda Q_4\ell_0\}\end{aligned}$$

$Q_i\ell_0$ de type 0, $i = 1, \cdots, 4$ i.e. $Q_i\ell_0$ n'a pas d'axe d'équilibre.

$Q_i\ell_0$ est de type 0, donc d'après le théorème précédent, l'équation $\Phi(\phi_i) = \lambda Q_i\ell_0$ admet une solution et une seule au voisinage de l'identité lorsque λ est suffisamment petit.

Cette solution ϕ_i s'écrit $\phi_i = \bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i$ avec $\bar{Q}_i$ unique voisin de I dans $SO(3)$ et $\bar{\phi}_i$ unique dans $\mathcal{C}_{\text{sym}}$.

$$\Phi(\bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i) = \lambda Q_i\ell_0 \Leftrightarrow \Phi(Q_i^{-1}\bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i) = \lambda\ell_0$$

$Q_i^{-1}\bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i = Q_i\bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i$ car $Q_i \in \text{Sym}$.

$Q_i\bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i$ est voisine de $Q_i \in SO(3)$ et solution de l'équation $\Phi(\phi) = \lambda\ell_0$, $i = 1, \cdots, 4$.

Montrons que les $Q_i\bar{Q}_i^{-1}\bar{\phi}_i$, $i = 1, \cdots, 4$ sont distincts.

Soit $i \neq j$; supposons que :

$$Q_i \bar{Q}_i^{-1} \bar{\phi}_i = Q_j \bar{Q}_j^{-1} \bar{\phi}_j \Leftrightarrow \bar{\phi}_i = \bar{Q}_i Q_i^{-1} Q_j \bar{Q}_j^{-1} \bar{\phi}_j$$
$$= \bar{Q}_i Q_i Q_j \bar{Q}_j^{-1} \bar{\phi}_j \quad \text{car} \quad Q_i \in \text{Sym}$$

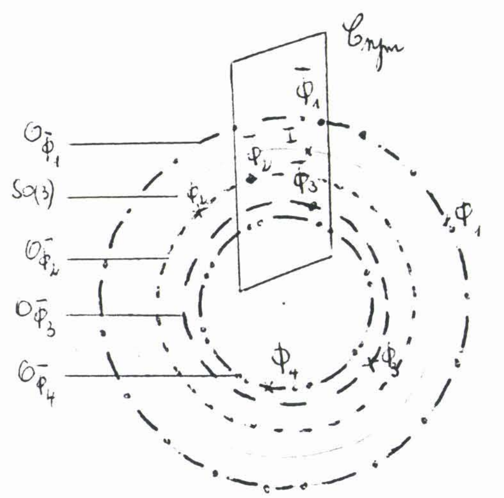
$\bar{\phi}_i \in \mathcal{C}_{\text{sym}}$ donc $\bar{Q}_i Q_i Q_j \bar{Q}_j^{-1} \bar{\phi}_j \in \mathcal{C}_{\text{sym}}$

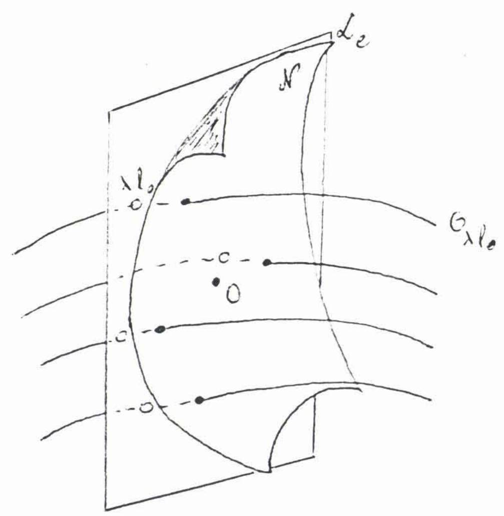
$$\left.\begin{array}{r} \bar{\phi}_j \in \mathcal{C}_{sym} \\ \bar{Q}_i Q_i Q_j \bar{Q}_j^{-1} \bar{\phi}_j \in \mathcal{C}_{sym} \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{Q}_i Q_i Q_j \bar{Q}_j^{-1} = I$$
$$\Longrightarrow Q_i Q_j = \bar{Q}_i^{-1} \bar{Q}_j$$

Or $\bar{Q}_i$ et $\bar{Q}_j$ sont voisines de l'identité dans $SO(3)$.

Donc $Q_i \bar{Q}_i^{-1} \bar{\phi}_i = Q_j \bar{Q}_j^{-1} \bar{\phi}_j \Rightarrow Q_i Q_j$ voisine de l'identité dans $SO(3)$.

Ceci est impossible car $Q_i Q_j$ n'est pas voisin de l'identité dans $SO(3)$, $i \neq j$. Par suite $\Phi(\phi) = \lambda \ell_0$ a quatre solutions $Q_i \bar{Q}_i^{-1} \bar{\phi}_j$, $i = 1, \cdots, 4$ voisines des solutions triviales $SO(3)$ lorsque ℓ_0 est de type 0 et λ suffisamment petit.





2. Définitions 1. *Une solution ϕ de $\Phi(\phi) = \ell$ sera dite "stable" si ϕ et un minimum local dans C de la fonction de potentiel V_ℓ définie par :*

$$V_\ell : C \to \mathbf{R}$$
$$\phi \mapsto V_\ell(\phi) = \int_{\mathcal{B}} W(\phi) dV - < \ell, \phi >^{(1)}$$

---

(1) $W(\phi)$ est un abus de notation pour $W(X, D\phi)$ ou $W(X, C)$

où

$$< \ell, \phi >= \int_{\mathcal{B}} \mathcal{B}(X) \cdot \phi(X) dV(X) + \int_{\partial \mathcal{B}} \tau(X) \cdot \phi(X) dA(X) = trk(\ell, \phi)$$

2. Si ϕ n'est pas stable, son indice est la dimension du plus grand sous-espace de vecteurs u tangents à $\mathcal{C}$ en ϕ tels que V_ℓ soit décroissante le long d'une courbe tangente à u en ϕ.

Remarque : Soit ϕ_0 tel que $\Phi(\phi_0) = \ell$ et ϕ_0 minimum local dans $\mathcal{C}$ de V_ℓ, c'est-à-dire ϕ_0 stable.

Soit u_0 un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en ϕ_0 et c une courbe de $\mathcal{C}$ tangente à u en ϕ_0.

ϕ_0 est un minimum local de V_ℓ dans $\mathcal{C}$ donc V_ℓ ne peut décroitre le long de c.

Par suite l'indice 0 correspond à la stabilité.

3. Lemme. *Soit $\ell \in \mathcal{L}_e$ une charge de type 0 et $k(\ell) = \mathbf{A}$. Soit L l'application définie par*

$$L : \mathcal{C} \to \mathbf{R}$$

$$\phi \mapsto < \ell, \phi >$$

Soit $S_{\mathbf{A}} = \{Q \in SO(3)/Q\mathbf{A} \in \text{Sym}\} = \{\text{Q} \in \text{SO}(3)/\text{Q}\ell \in \mathcal{L}_\text{e}\}$.

Alors $S_{\mathbf{A}}$ est l'ensemble des points critiques de $\ell|_{\mathcal{O}_{I_{\mathcal{B}}}}$. Ces points sont non dégénérés avec les indices $0, 1, 2,$ et 3 ; l'indice de $Q \in S_{\mathbf{A}}$ est le nombre des valeurs propres négatives de $Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I$

Preuve : ℓ estune charge de type 0. Donc ℓ n'a pas d'axe d'équilibre. Par suite $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e \oplus T_\ell \mathcal{O}_\ell$.

$$T_\ell \mathcal{O}_\ell = \{W\ell/W \in \text{Asym}\} \approx \text{Asym} = T_I SO(3)$$

Soit $\ell' \in \mathcal{L}_e$

$$\begin{aligned}
\forall W \in \text{Asym}, < \ell', W > &= tr(k(\ell', W)) \\
&= tr(-k(\ell', I)W) \\
&= -tr(k(\ell')W) \\
&= -tr(W^T k(\ell')) \\
&= tr(Wk(\ell')) \\
&= tr(k(\ell')W)) \\
< \ell', W >= -tr(k(\ell')W) &= tr(k(\ell') \cdot W)
\end{aligned}$$

Donc $\forall W \in$ Asym, $< \ell', W >= 0$. Par suite Asym $\subset (\mathcal{L}_e)^\perp$

Donc $\ell \in \mathcal{L}_e \Leftrightarrow \ell \in (T_I SO(3))^\perp$.

Soit $Q \in S_{\mathbf{A}}$ c'est-à-dire $Q\ell \in \mathcal{L}_e$ ou encore $Q\ell \in (T_I SO(3))^\perp = (\text{Asym})^\perp$

$< Q\ell, W >= 0 \ \forall W \in \text{Asym} \Leftrightarrow < \ell, Q^T W >= 0 \ \forall W \in \text{Asym} \Leftrightarrow \ell \in (T_{Q^T} SO(3))^\perp$ où $T_{Q^T} SO(3) = \{Q^T W / W \in \text{Asym}\}$.

Posons ensuite :

$$\begin{aligned} L_{SO(3)} = L|_{\mathcal{O}_{I_B}} : SO(3) &\to \mathbf{R} \\ Q &\mapsto < \ell, Q > \\ DL_{SO(3)}(Q^T) : T_{Q^T} SO(3) &\to \mathbf{R} \\ Q^T W &\mapsto < \ell, Q^T W > \end{aligned}$$

$$DL_{SO(3)}(Q^T) \cdot Q^T W = 0 \Leftrightarrow < \ell, Q^T W >= 0 \Leftrightarrow < Q\ell, W >= 0 \,.$$

Donc Q^T est un point critique de $L_{SO(3)}$ si et seulement si $Q\ell \in (T_I SO(3))^\perp$ c'est-à-dire si et seulement si $Q\ell \in \mathcal{L}_e$.

Donc $S_{\mathbf{A}} = \{Q \in SO(3) / Q\ell \in \mathcal{L}_e\}$ est égal à l'ensemble des points critiques de $L|_{\mathcal{O}_{I_B}}$.

On considère les courbes suivantes dans $SO(3)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to SO(3) \\ t &\mapsto Q_t = (\exp tW)Q \\ Q_0 &= Q \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\exp tW)Q|_{t=0} = WQ \in T_Q SO(3)$$

Donc WQ est un vecteur tangent en $Q (= Q_0)$ à $SO(3) \subset \mathcal{C}$ et WQ est un vecteur tangent à la courbe $(\exp tW)Q$ au point Q.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}L(\exp tW)Q|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} < \ell, \exp tWQ >)|_{t=0} \\
&= < \ell, W^2Q > \\
&= trk(\ell, W^2Q) \\
&= tr[k(\ell, Q)W^2] \\
&= tr[k(\ell, I)Q^{-1}W^2] \\
&= tr[\mathbf{A}Q^{-1}W^2] \\
&= tr[W^2(\mathbf{A}Q^{-1})^T] \\
&= tr[W^2(Q^{-1})^T\mathbf{A}^T] \\
&= tr[W^2Q\mathbf{A}]
\end{aligned}$$

Etudions la forme quadratique $tr(W^2Q\mathbf{A})$ lorsque $Q \in S_{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned}
tr(W^2Q\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}[tr(W^2Q\mathbf{A}) + tr(W^2Q\mathbf{A})] \\
&= \frac{1}{2}tr[WQ\mathbf{A}W + Q\mathbf{A}W^2] \\
&= \frac{1}{2}tr[(WQ\mathbf{A} + Q\mathbf{A}W)W]
\end{aligned}$$

$WQ\mathbf{A} + Q\mathbf{A}W \in$ Asym. Soit $w \in \mathbf{R}^3$ tel que $\hat{w} = W$

$$WQ\mathbf{A} + Q\mathbf{A}W = ([(Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I)w]^\wedge)^T .$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
tr(W^2Q\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}tr\Big(([(Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I)w]^\wedge)^T\hat{w}\Big) \\
&= [(Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I) \cdot w] \cdot w \text{ avec } w \text{ tel que } \hat{w} = W
\end{aligned}$$

Si $Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I$ est définie positive, $tr(W^2Q\mathbf{A}) \geq 0.Q$ est donc stable dans ce cas.

Si λ est une valeur propre de $Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I$ associée au vecteur propre w alors :

$$tr(\hat{w}^2Q\mathbf{A}) = \lambda\|w\|^2$$

$\hat{w}Q$ est tangent à $SO(3)$ en Q et $expt\hat{w}Q$ est une courbe tangente à $\hat{w}Q$ en Q.

Par suite la dimension du plus grand sous-espace de vecteurs $\hat{w}Q$ tangents à $SO(3)$ en Q tel que L soit décroissante le long d'une courbe tangente à $\hat{w}Q$ est égale au nombre de valeurs propres négatives de $Q\mathbf{A} - tr(Q\mathbf{A})I$.

Montrons à présent que les points de S_A sont non dégénérés avec les indices 0, 1, 2 et 3.

$S_{\mathbf{A}} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ avec

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

soit :

$$Q_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, Q_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

$$Q_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, Q_4\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

$$Q_1\mathbf{A} - tr(Q_1\mathbf{A})I = \begin{bmatrix} -(b+c) & 0 & 0 \\ 0 & -(a+c) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b) \end{bmatrix}$$

$$Q_2\mathbf{A} - tr(Q_2\mathbf{A})I = \begin{bmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & -a+b \end{bmatrix}$$

$$Q_3\mathbf{A} - tr(Q_3\mathbf{A})I = \begin{bmatrix} -b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+c & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

$$Q_4\mathbf{A} - tr(Q_4\mathbf{A})I = \begin{bmatrix} b+c & 0 & 0 \\ 0 & -a+c & 0 \\ 0 & 0 & -a+b \end{bmatrix}$$

Plaçons-nous dans le cas où $a > b > c > 0$.

Vu que ℓ est de type 0, a, b, c sont distinctes et $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Par suite les valeurs propres de $Q_i\mathbf{A} - tr(Q_i\mathbf{A})I$ sont distinctes $(i = 1, \cdots, 4)$

$Q_1\mathbf{A} - tr(Q_1\mathbf{A})I$ a 3 valeurs propres négatives.

$Q_2\mathbf{A} - tr(Q_2\mathbf{A})I$ n'a aucune valeur propre négative.

$Q_3\mathbf{A} - tr(Q_3\mathbf{A})I$ a 1 valeur propre négative.

$Q_4\mathbf{A} - tr(Q_4\mathbf{A})I$ a 2 valeurs propres négatives.

Conclusion : Si $a > b > c > 0$,

Q_1 a pour indice 3

Q_2 est stable

Q_3 a pour indice 1

Q_4 a pour indice 2

Suivant les valeurs de a, b, c quel élément de $S_{\mathbf{A}}$ est stable ?

Les cas qui peuvent se présenter sont les suivants (dans chaque cas, un seul Q_i est stable et les trois autres ont pour indices respectifs 1,2 et 3 ; nous ne préciserons dans ce qui suit que la rotation qui est stable.)

1) Si $a > b > c > 0$, Q_2 est stable.

2) Si $a > b > 0 > 0$, Q_2 est stable.

3) Si $a > c > b > 0$, Q_3 est stable.

4) Si $a > c > 0 > b$, Q_3 est stable.

5) Si $a > 0 > b > c$ et $a < |b| < |c|$, Q_1 est stable.

   Si $a > 0 > b > c$ et ($a > |c|$ ou $a > |b|$), Q_2 est stable.

6) Si $a > 0 > c > b$ et $a < |c| < |b|$, Q_1 est stable.

   Si $a > 0 > c > b$ et ($a > |c|$ on a $a > |b|$), Q_3 est stable.

7) Si $b > a > c > 0$, Q_2 est stable.

8) Si $b > a > 0 > c$, Q_2 est stable.

9) Si $b > c > a > 0$, Q_4 est stable.

10) Si $b > c > 0 > a$, Q_4 est stable.

11) Si $b > 0 > a > c$ et $b < |a| < |c|$, Q_1 est stable

    Si $b > 0 > a > c$ et $b > |a|$ ou $b > |c|$, Q_2 est stable.

12) Si $b > 0 > c > a$ et $b < |c| < |a|$, Q_1 est stable

    Si $b > 0 > c > a$ et $b > |c|$ ou $b > |a|$, Q_4 est stable.

13) Si $c > a > b > 0$, Q_3 est stable.

14) Si $c > a > 0 > b$, Q_3 est stable.

15) Si $c > b > a > 0$, Q_4 est stable.

16) Si $c > b > 0 > a$, Q_4 est stable.

17) Si $c > 0 > b > a$, $c < |b| < |a|$, Q_1 est stable.

Si $c > 0 > b > a$ et $c > |b|$ ou $c > |a|$, Q_4 est stable.

18) Si $c > 0 > a > b$ et $c < |a| < |b|$, Q_1 est stable.

Si $c > 0 > b > a$ et $c > |a|$ ou $c > |b|$, Q_3 est stable.

19) Si $0 > a > b > c$, Q_1 est stable.

20) Si $0 > a > c > b$, Q_1 est stable.

21) Si $0 > b > a > c$, Q_1 est stable.

22) Si $0 > b > c > a$, Q_1 est stable.

23) Si $0 > c > a > b$, Q_1 est stable.

24) Si $0 > c > b > a$, Q_1 est stable.

Conclusion : Les valeurs propres a, b et c éant ordonnées suivant l'ordre croissant, si leurs valeurs absolues respectives forment une suite décroissante, c'est Q_1 qui est stable.

Dans tous les autres cas, c'est la rotation d'angle π autour d'un vecteur propre correspondant à la plus petite des valeurs propres a, b, c, qui est stable.

4. Définition : *Le tenseur d'élasticité classique c est dit stable si c satisfait la condition* (H3) *suivante :*

$$(H3) \qquad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad c(X)(e,e) \geq \eta \|e\|^2$$

Remarque : (H3) $\Rightarrow$ (H2) (voir [4] p. 241).

Théorème : *Supposons que les hypothèses (H1) et (H3) soient vérifiées et que ℓ_0 soit de type O. Alors pour λ suffisamment petit, une seule parmi les $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ (trouvées en théorème 1, paragraphe II, Chapitre V), est stable.*

Les autres ont pour indice 1,2,3.

Dans le cas limite où $\lambda \to 0$, ϕ_i est stable si et seulement si $tr(Q_i\mathbf{A})I - Q_i\mathbf{A} \in$ Sym *est définie positive. En général, l'indice de ϕ_i est le nombre de valeurs propres négatives de $tr(Q_i\mathbf{A})I - Q_i\mathbf{A}$.*

■ Soit $\phi_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\Phi(\phi_0) = \lambda\ell_0 = \ell$

$$V_\ell(\phi) = \int_{\mathcal{B}} W(X, D\phi)dV - < \ell, \phi >$$

Soit $u \in T_\phi\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} V_\ell(\phi+u) - V_\ell(\phi) &= \int_{\mathcal{B}} [W(X, D(\phi+u)) - W(X, D\phi)]dV - [< \ell, \phi+u > - < \ell, \phi >] \\ &= \int_{\mathcal{B}} [W(X, F+\nabla u) - W(X, F)]dV - [< \ell, \phi+u > - < \ell, \phi >] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(X, F+\nabla u) - W(X, F) &= \frac{\partial W}{\partial F}(X, F)\nabla u + O(\|\nabla u\|) \\ &= P(X, F)\nabla u + O(\|\nabla u\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < \ell, \phi+u > - < \ell, \phi > &= trk(\ell, \phi+u) - trk(\ell, \phi) \\ &= tr[k(\ell, \phi) + k(\ell, u)] - trk(\ell, \phi) \\ &= trk(\ell, u) \end{aligned}$$

$D_\phi V_\ell(\phi)u = \int_{\mathcal{B}} P(X, F)\nabla u dV - trk(\ell, u)$, soit

$$D_\phi V_\ell(\phi)u = \int_{\mathcal{B}} P(X, F)\nabla u dV - \int_{\mathcal{B}} B \cdot u dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \tau \cdot u dA$$

$\Phi(\phi_0) = \ell$ par hypothèse.

Donc $-\mathrm{DIV}P(X, F_0(X)) = B(X)$ et $P(X, F_0(X))N(X) = \tau(X)$ avec $F_0 = D\phi_0$.

Par suite :

$$\begin{aligned} D_\phi V_\ell(\phi_0)u &= \int_{\mathcal{B}} P_{ij}(X, F_0) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dV - \int_{\mathcal{B}} B \cdot u dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \tau \cdot u dA \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial}{\partial X_j}(P_{ij}u_i) - \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} u_i\right) dV - \int_{\mathcal{B}} B \cdot u dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \tau \cdot u dA \\ &= \int_{\mathcal{B}} (\mathrm{DIV}(P \cdot u) - (\mathrm{DIV}P)u) dV - \int_{\mathcal{B}} BudV - \int_{\partial\mathcal{B}} \tau \cdot u dA \\ &= \int_{\mathcal{B}} -\mathrm{DIV}P \cdot u dV + \int_{\partial\mathcal{B}} P \cdot uN dA - \int_{\mathcal{B}} B \cdot u dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \tau \cdot u dA \\ &= \int_{\mathcal{B}} (-\mathrm{DIV}P + B)u dV + \int_{\partial\mathcal{B}} (P \cdot N - \tau) \cdot u dA \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc ϕ_0 *est un point critique de* V_ℓ.

$$D^2_\phi V_\ell(\phi)\cdot(u,u) = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial P}{\partial F}(X,F)(\nabla u,\nabla u)dV$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 W}{\partial F \partial F}(X,F)(\nabla u,\nabla u)dV$$

$D^2_\phi V_\ell(\phi)(u,u) = \int_{\mathcal{B}} A(X,F)(\nabla u,\nabla u)dV$.

ϕ_0 est telle que $\Phi(\phi_0) = \lambda\ell_0 = \ell$. Si $\lambda = 0$, $\Phi(\phi_0) = 0$ soit $\phi_0 \in SO(3)$.

$\forall Q \in SO(3)$, $\Phi(Q) = Q\Phi(I_{\mathcal{B}})$ et $P(X,Q) = P(X,I) = 0$, soit $W(X,Q)$ est constant sur $\mathcal{O}_{I_{\mathcal{B}}}$

$$V_\ell(Q) = \int_{\mathcal{B}} W(X,Q)dV - < \ell, Q >$$
$$= \int_{\mathcal{B}} W(X,I)dV - < \ell, Q > \; .$$

Par suite

$$D^2_\phi V_\ell(Q)(u,u) = \int_{\mathcal{B}} A(X,I)\cdot(\nabla u,\nabla u)dV$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{4}c(X)(\nabla u + \nabla u^T, \nabla u + \nabla u^T)dV$$
$$= \int_{\mathcal{B}} c(X)(e(X),e(X))dV \quad \text{où} \quad e = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

et, d'après l'hypothèse (H3) :

$$D^2_\phi V_\ell(Q)(u,u) \geq \int_{\mathcal{B}} \eta \|e\|^2 dV$$
$$= \eta \|e\|^2_{L^2}$$

Par ailleurs : $T_{\phi_0}\mathcal{C} = T_{\phi_0}\mathcal{O}_{\phi_0} \oplus (T_{\phi_0}\mathcal{O}_{\phi_0})^\perp$ et, d'après l'inéglité de Korn ([4] p 324, [3]) $\|e\|^2_{L^2} \geq$ (constante) $\|u\|^2_{H^1}$ lorsque $u \in (T_{\phi_0}\mathcal{O}_{\phi_0})^\perp$

Donc si $D^2_\phi V_\ell$ est restreint à $(T_{\phi_0}\mathcal{O}_{\phi_0})^\perp$,

$$D^2_\phi V_\ell(u,u) \geq \eta' \|u\|^2_{H^1}$$

Comme ϕ_0 est voisin d'un élément $Q \in SO(3)$, nous aurons par continuité : $D^2_\phi V_\ell(\phi_0)(u_1,u) \geq \eta'\|u\|^2_{H^1}$. Par suite ϕ_0 est un minimum pour $V_\ell = V_{\lambda\ell_0}$ dans les directions transverses à $\mathcal{O}_{\phi_0}$.

Restreignons à présent $V_\ell = V_{\lambda\ell_0}$ à $\mathcal{O}_{\phi_0}$.

$W(Q\phi_0) = W(\phi_0)$ en vertu du principe d'indifférence matérielle. W est donc constant sur $\mathcal{O}_{\phi_0}$, $DV_{\ell|_{\mathcal{O}_{\phi_0}}} = -DL_{|_{\mathcal{O}_{\phi_0}}}$ et, par conséquent, tout point critique de $V_{\ell|_{\mathcal{O}_{\phi_0}}}$ est un point critique de $L_{|_{\mathcal{O}_{\phi_0}}}$.

$\phi_0 \in \mathcal{O}_{\phi_0}$ et ϕ_0 point critique de V_ℓ (déjà démontré). Il suffit donc de déterminer l'indice de ϕ_0 par rapport à $L_{|_{\mathcal{O}_{\phi_0}}}$.

Soit
$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to \mathcal{O}_{\phi_0} \\ t &\mapsto (exptW)\phi_0 \end{aligned}$$
$$\frac{d}{dt}(exptW\phi_0)|_{t=0} = W\phi_0 .$$

$W\phi_0$ est tangent à $\mathcal{O}_{\phi_0}$en ϕ_0.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < \ell, exptW\phi_0 > |_{t=0} &=< \ell, W\phi_0 > \\ \frac{d^2}{dt^2} < \ell, exptW\phi_0 > |_{t=0} &=< \ell, W^2\phi_0 > \\ &= tr[k(\ell\phi_0)W^2] \\ &= tr[k(\Phi(\phi_0), \phi_0)W^2] \end{aligned}$$

ϕ_0 s'écrit $Q_0\bar{Q}_0^{-1}\bar{\phi}_0$ avec $Q_0 \in S_{\mathbf{A}}$, $\bar{Q}_0$ voisin de I dans $SO(3)$ et $\bar{\phi}_0 \in \mathcal{C}_{\text{sym}}$
$tr[k(\Phi(\phi_0), \phi_0)W^2)] = tr(S_0W^2)$ avec $S_0 = k(\Phi(\phi_0), \phi_0) = \int_{\mathcal{B}} P_0F_0^T dV \in \text{Sym}$

$$\begin{aligned} tr[k(\Phi(\phi_0), \phi_0)W^2] &= tr(S_0W^2) \\ &= tr(W^2S_0) \\ &= [(S_0 - tr(S_0)I)w]w \quad \text{avec} \quad \hat{w} = W \end{aligned}$$

Si $S_0 - tr(S_0)I$ est définie positive, ϕ_0 est stable pour $L|_{\mathcal{O}_{\phi_0}}$.

Par suite : si $tr(S_0)I - S_0$ est définie positive, ϕ_0 est stable pour V_ℓ

$$\begin{aligned} k(\Phi(\phi_0), \phi_0) &= k(\ell, \phi_0) \\ &= k(\ell)Q_0^{-1}\bar{Q}_0 \\ &= k(\ell)Q_0\bar{Q}_0 \quad \text{car} \quad Q_0 \in \text{Sym} \end{aligned}$$

Dans le cas limite où $\lambda \to 0$, $S_0 = k(\ell)Q_0\bar{Q}_0 \to k(\ell)Q_0$
$$\begin{aligned} &= \mathbf{A}Q_0 \\ &= Q_0\mathbf{A} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $S_0 - (trS_0)I$ tendent alors vers les valeurs propres de $Q_0\mathbf{A} - tr(Q_0(\mathbf{A})I$. De plus les valeurs propres de $Q_0\mathbf{A} - tr(Q_0\mathbf{A})$ sont non nulles. Donc les valeurs propres de $S_0 - tr(S_0)I$ et celles de $Q_0\mathbf{A} - tr(Q_0\mathbf{A})I$ sont de même signe en général.

Par suite, l'indice de ϕ_0 est égal au nombre de valeurs propres négatives de $tr(Q_0\mathbf{A})I - Q_0\mathbf{A}$, soit au nombre de valeurs propres positives de $Q_0\mathbf{A} - tr(Q_0\mathbf{A})I$, contrairement à ce qui est affirmé dans [2] p. 310.

CHAPITRE VI

Résolution du problème par la méthode de Liapounov-Schmidt

Des résultats essentiellement pris dans [4] seront cités puis appliqués à la résolution du problème selon la formulation (P4).

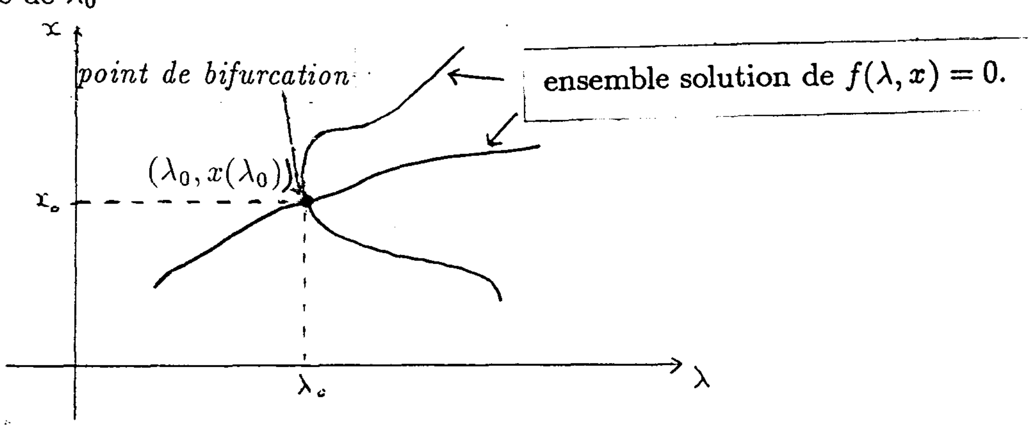
Ces résultats concernent la méthode de Liapounov-Schmidt qui consiste à réduire une équation du type $f(\lambda, x) = 0$ (où $x \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathcal{P}$, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ espaces de Banach) en un système dont les équations et les inconnues sont en nombre fini.

I. Méthode de Liapounov-Schmidt et bifurcation.

Soit $f(\lambda, x) = 0$ une équation non-linéaire où f est un opérateur non linéaire, x le vecteur solution et λ un paramètre. x peut varier lorsque λ varie d'où la notation $x(\lambda)$ pour les branches solutions.

Un *point de bifurcation* d'une branche solution $x(\lambda)$ est un point $(\lambda_0, x(\lambda_0))$ par lequel passe une autre branche solution $x_1(\lambda)$.

Donc $x(\lambda_0) = x_1(\lambda_0)$ et $x(\lambda) \neq x_1(\lambda)$ pour tout $\lambda \neq \lambda_0$, λ appartenant à un voisinage de λ_0



Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach et $f : \mathcal{P} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une application de classe C^k, $k \geq 3$.

Soit $D_x f(\lambda, x)$ la dérivée de f par rapport à x, une application continue de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

Soit $f(\lambda_0, x_0) = 0$ et $\mathcal{X}_1 = \ker D_x f(\lambda_0, x_0)$.

Supposons que $\mathcal{X}_1$ soit de dimension finie et possède un complémentaire $\mathcal{X}_2$, c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$.

Supposons que $\mathcal{Y}_1 = \mathrm{Im} D_x f(\lambda_0, x_0)$ soit fermé et que $\mathcal{Y}_2$ soit un complémentaire de dimension finie de $\mathcal{Y}_1$.

Soit $P : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_1$ la projection sur $\mathcal{Y}_1$. Supposons que $D_x f(\lambda_0, x_0)$ ne soit pas un isomorphisme (sinon, (λ_0, x_0) ne serait pas un point de bifurcation).

Essayons de réduire l'équation $f(\lambda, x) = 0$. Posons $x(\lambda) = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $x_2 \in \mathcal{X}_2$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_2 &= x(\lambda) - x_1 \\ &= u(\lambda, x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda, x) = 0 &\Leftrightarrow f(\lambda, x_1 + x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (P + I - P) f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1)) = 0 \\ &\Leftrightarrow P f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1)) + (I - P) f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1)) = 0 \end{aligned}$$

Or $f(\lambda, x) = 0 \Rightarrow P f(\lambda, x) = 0$. Donc $(I - P) f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1) = 0$. $x_1 \in \mathcal{X}_1$, $\mathrm{Im}[(\mathrm{I}-\mathrm{P})\mathrm{f}] = \mathcal{Y}_2$ donc $(I - P) f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1)) = 0$ est un système de $[\dim \mathcal{Y}_2]$ équations à $[\dim \mathcal{X}_1]$ inconnues.

Cette réduction de l'équation $f(\lambda, x) = 0$ à un système dont les équations et les inconnues sont en nombre fini est appelée méthode de *Liapounov-Schmidt*.

L'équation réduite $(I - P) f(\lambda, x_1 + u(\lambda, x_1)) = 0$ et appelée *équation de bifurcation.*

II. Equation de bifurcation.

Le problème (P4) consistait à chercher, pour $\ell_0 = (\mathbf{A}_0, n_0) \in \mathcal{L}_e$ pour $\ell = (\mathbf{A}, n)$ voisin de ℓ_0 et pour λ petit, $Q \in SO(3)$ tel que

$$H(\lambda, \mathbf{A}, n, Q) \equiv \mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) - \lambda \bar{F}(\lambda, \mathrm{sym} Q\mathbf{A}, Qn) = 0\,.$$

La résolution de cette équation nécessite l'introduction du champ de vecteurs $X_{\mathbf{A}_0}$ invariant à droite sur $SO(3)$ et défini par $X_{\mathbf{A}_0}(Q) = \mathrm{asym}(Q\mathbf{A}_0) \cdot Q$ translation à droite de $\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}_0) \in so(3) = T_I SO(3)$ dans $T_Q SO(3)$.

Posons $X(\lambda, \mathbf{A}, n, Q) = k(H(\lambda, \mathbf{A}, n, Q)) \cdot Q$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} X(0, \mathbf{A}_0, n_0, Q) &= k(H(0, \mathbf{A}_0, n_0, Q)) \cdot Q \\ &= k(\text{asym}_{\mathcal{L}}(Q\mathbf{A}_0)) \cdot Q \\ &= k(j(\text{asym}(Q\mathbf{A}_0)) \cdot Q \\ &= \text{asym}(Q\mathbf{A}_0) \cdot Q \\ &= X_{\mathbf{A}_0}(Q) \end{aligned}$$

Remarque : $H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = 0 \Leftrightarrow X(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = 0$.

En effet :

•
$$\begin{aligned} H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = 0 &\Rightarrow k(H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q)) = 0 \\ &\Rightarrow X(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = 0 \end{aligned}$$

••
$$\begin{aligned} X(\lambda, \mathbf{A}, n, Q) = 0 &\Leftrightarrow k(H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q)) \cdot Q = 0 \\ &\Rightarrow k(H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q)) = 0 \\ &\Rightarrow H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) \in \text{Ker} k \end{aligned}$$

or $H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) \in \text{Asym}_{\mathcal{L}}$ donc $H(\lambda, \mathbf{A}, n, Q) = 0$.

Posons

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{A}_0} &= \{Q \in SO(3)/\text{asym}(Q\mathbf{A}_0) = 0\} \\ &= \{Q \in SO(3)/X_{\mathbf{A}_0}(Q) = 0\}\ . \end{aligned}$$

Lemme *Supposons* $\mathbf{A}_0$, *élément de* Sym *de type quelconque. Alors pour* $Q \in S_{\mathbf{A}_0}$,

$$T_Q S_{\mathbf{A}_0} = \{WQ/W \in \text{Asym} \quad \text{et} \quad WQ\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0 W = 0\} = \ker DX_{\mathbf{A}_0}(Q)$$

■ $S_{\mathbf{A}_0} = \{Q \in SO(3)/Q\mathbf{A}_0 \in \text{Sym}\} = \{\mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3)/\mathrm{Q}\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\}$.

a) Montrons que $T_Q S_{\mathbf{A}_0} = \{WQ/W \in \text{Asym et } WQ\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0 W = 0\}$.

$$T_Q SO(3) = \{m'(0), m \in SO(3) \quad \text{et} \quad m(0) = Q\}$$

$m \in SO(3)$ donc $mm^T = I$, $m(0) = Q$, $m^T(0) = Q^T$.

Par suite $m'm^T(0) + mm'^T(0) = 0$

$$\begin{aligned} m'Q^T + Qm'^T &= 0 \\ MQ^T + QM^T &= 0 \\ MQ^T &= -QM^T \\ &= -(MQ^T)^T \end{aligned}$$

Donc $MQ^T = W \in$ Asym, soit $M = WQ$, $W \in$ Asym.

$$T_Q SO(3) = \{WQ, W \in Asym\}$$
$$T_Q S_{\mathbf{A}_0} = \{m'(0), m \in S_{\mathbf{A}_0} \quad \text{et} \quad m(0) = Q\} \subset T_Q S0(3)$$

$m \in S_{\mathbf{A}_0} \Longleftrightarrow mm^T = I$, $\det m = +1$ et $m\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0 m^T$

$$\begin{cases} m\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0, m^T \\ mm^T = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m'\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0 m'^T \\ \quad \text{et} \\ m' = WQ \quad \text{car} \quad m' \in T_Q SO(3) \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} WQ\mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}_0 (WQ)^T \\ &= \mathbf{A}_0 Q^T W^T \\ &= -\mathbf{A}_0 Q^T W \\ &= -(Q\mathbf{A}_0)^T W \\ &= -Q\mathbf{A}_0 W \quad \text{car} \quad Q\mathbf{A}_0 \in \text{Sym} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} T_Q S_{\mathbf{A}_0} &= \{WQ/W \in \text{Asym} \quad \text{et} \quad WQ\mathbf{A}_0 = -Q\mathbf{A}_0 W\} \\ &= \{WQ/W \in \text{Asym} \quad \text{et} \quad WQ\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0 W = 0\} \end{aligned}$$

b) Montrons que :

$$\ker DX_{\mathbf{A}_0}(Q) = \{WQ/W \in \text{Asym et } WQ\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0 W = 0\}$$

$$X_{\mathbf{A}_0} : SO(3) \to TSO(3) = \bigcup_Q T_Q SO(3)$$
$$Q \mapsto \text{asym}(Q\mathbf{A}_0) \cdot Q$$

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{A}_0}(Q) &= \frac{1}{2}(Q\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0 Q^T) \cdot Q \\ &= \frac{1}{2}(Q\mathbf{A}_0 Q - \mathbf{A}_0) \end{aligned}$$

Soit $\bar{X}_{\mathbf{A}_0}$ le prolongement de $X_{\mathbf{A}_0}$ dans M_3

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\mathbf{A}_0}(Q+h)-\bar{X}_{\mathbf{A}_0}(Q) &= \frac{1}{2}[(Q+h)\mathbf{A}_0(Q+h)-Q\mathbf{A}_0Q], \qquad \forall h \in M_3\\ &= \frac{1}{2}[\ \underbrace{Q\mathbf{A}_0h+h\mathbf{A}_0Q}_{\text{partie linéaire en } h}\ +h\mathbf{A}_0h]\end{aligned}$$

Donc $D\bar{X}_{\mathbf{A}_0}(Q)\cdot h = \frac{1}{2}[Q\mathbf{A}_0h+h\mathbf{A}_0Q]$

Ramenons-nous à $SO(3)$:

$$\begin{aligned} DX_{\mathbf{A}_0}(Q) : T_QSO(3) &\to TSO(3)\\ WQ &\mapsto DX_{\mathbf{A}_0}(Q)(WQ) = D\bar{X}_{\mathbf{A}_0}(Q)\cdot(WQ)\\ &= \frac{1}{2}[Q\mathbf{A}_0WQ+WQ\mathbf{A}_0Q]\\ &= \mathrm{asym}(WQ\mathbf{A}_0)\cdot Q\end{aligned}$$

$$\ker DX_{\mathbf{A}_0}(Q) = \{WQ \in T_QSO(3)/DX_{\mathbf{A}_0}(Q)(WQ)=0\}\,.$$

$$\begin{aligned} DX_{\mathbf{A}_0}(Q)(WQ)=0 &\Leftrightarrow Q\mathbf{A}_0WQ+WQ\mathbf{A}_0Q=0\\ &\Leftrightarrow Q\mathbf{A}_0W+WQ\mathbf{A}_0=0\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}\ker DX_{\mathbf{A}_0}(Q) &= \{WQ \in T_QSO(3)/WQ\mathbf{A}_0+Q\mathbf{A}_0W=0\}\\ &= \{WQ/W \in \text{Asym et } WQ\mathbf{A}_0+Q\mathbf{A}_0W=0\}\end{aligned}$$

Remarques : 1) $\ker DX_{\mathbf{A}_0}(Q) \neq \{0\}$ donc $DX_{\mathbf{A}_0}(Q)$ n'est pas un isomorphisme.

2) $Q\mathbf{A}_0WQ+WQ\mathbf{A}_0Q = (Q\mathbf{A}_0W+WQ\mathbf{A}_0)\cdot Q$

$$\begin{aligned}(Q\mathbf{A}_0W+WQ\mathbf{A}_0)^T &= (Q\mathbf{A}_0W)^T+(WQ\mathbf{A}_0)^T\\ &= W^T(Q\mathbf{A}_0)^T+(Q\mathbf{A}_0)^TW^T\\ &= -WQ\mathbf{A}_0-Q\mathbf{A}_0W\\ &= -(WQ\mathbf{A}_0+Q\mathbf{A}_0W)\end{aligned}$$

donc $Q\mathbf{A}_0W+WQ\mathbf{A}_0 \in$ Asym et $DX_{\mathbf{A}_0}(Q)\cdot(WQ) \in T_QSO(3)$.

Lemme : *Supposons que* $\mathbf{A}_0$ *soit de type quelconque. Alors pour tout point* Q *de* $S_{\mathbf{A}_0}$, $\mathrm{ImDX}_{\mathbf{A}_0}(\mathrm{Q})$ *image de* $DX_{\mathbf{A}_0}(Q)\ :\ T_Q(SO(3) \to TSO(3)$ *est le complémentaire orthogonal de* $T_QS_{\mathbf{A}_0}$.

■

$$DX_{\mathbf{A}_0}(Q) = \mathrm{asym}(WQ\mathbf{A}_0)\cdot Q = \frac{1}{2}[Q\mathbf{A}_0WQ + WQ\mathbf{A}_0Q]$$

$$T_QS_{\mathbf{A}_0} = \{WQ/W \in \mathrm{Asym} \quad \text{et} \quad WQ\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0W = 0\}$$

Montrons que $\mathrm{ImDX}_{\mathbf{A}_0}(\mathrm{Q})$ est orhogonal à $T_QS_{\mathbf{A}_0}$.

Soit $\mathrm{asym}(WQ\mathbf{A}_0)\cdot Q \in \mathrm{ImDX}_{\mathbf{A}_0}(\mathrm{Q})$ et $W'Q \in T_QS_{\mathbf{A}_0}$ ($W' \in$ Asym et $W'Q\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0W' = 0$).

Calculons le produit scalaire suivant (déjà défini p.26)

$$\begin{aligned}
\ll \mathrm{asym}(WQ\mathbf{A}_0)\cdot Q, W'Q \gg &= \frac{1}{2} \ll Q\mathbf{A}_0WQ + WQ\mathbf{A}_0Q, W'Q \gg \\
&= \frac{1}{2}(\ll Q\mathbf{A}_0WQ, W'Q \gg + \ll WQ\mathbf{A}_0Q, W'Q \gg) \\
&= \frac{1}{2}(tr[(Q\mathbf{A}_0WQ)^T\cdot W'Q] + tr[(WQ\mathbf{A}_0Q)^T\cdot W'Q])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr[(Q\mathbf{A}_0WQ)^T\cdot W'Q] &= tr[(Q^TW^TQ\mathbf{A}_0)\cdot W'Q] \\
&= tr[QQ^TW^TQ\mathbf{A}_0W'] \\
&= tr[W^TQ\mathbf{A}_0W'] \\
&= tr[-WQ\mathbf{A}_0W']
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr[(WQ\mathbf{A}_0Q)^T\cdot W'Q] &= tr[Q^TQ\mathbf{A}_0W^TW'Q] \\
&= tr[\mathbf{A}_0W^TW'Q] \\
&= tr[-\mathbf{A}_0WW'Q] \\
&= tr[-Q\mathbf{A}_0WW']
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\ll \mathrm{asym}(WQ\mathbf{A}_0)\cdot Q, W'Q \gg &= \frac{1}{2}(tr[-WQ\mathbf{A}_0W'] + tr[-Q\mathbf{A}_0WW']) \\
&= -\frac{1}{2}(tr[WQ\mathbf{A}_0W'] + tr[Q\mathbf{A}_0WW']) \\
&= -\frac{1}{2}(tr[Q\mathbf{A}_0W'W] + tr[W'Q\mathbf{A}_0W]) \\
&= -\frac{1}{2}tr[(Q\mathbf{A}_0W' + W'Q\mathbf{A}_0)W] \\
&= 0 \quad \text{car} \quad W'Q \in T_QS_{\mathbf{A}_0} \\
&\text{c'est-à-dire} \quad W'Q\mathbf{A}_0 + Q\mathbf{A}_0W' = 0
\end{aligned}$$

Par suite $\mathrm{ImDX}_{\mathbf{A}_0}(\mathrm{Q})$ et $T_QS_{\mathbf{A}_0}$ sont orthogonaux.

Les deux lemmes précédents vont nous permettre d'appliquer la méthode de Liapounov-Schmidt à l'équation $X(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = 0$ où $(\lambda, \mathbf{A}, n)$ est le pramètre et Q est la variable.

$\mathcal{X}_1 = \ker DX_{\mathbf{A}_0}(Q) = T_Q S_{\mathbf{A}_0}$ est de dimension finie et possède $\mathcal{X}_2 = \mathrm{ImDX}_{\mathbf{A}_0}(\mathrm{Q})$ comme complémentaire (orthogonal).

$\mathcal{Y}_1 = \mathrm{ImDX}_{\mathbf{A}_0}(\mathrm{Q})$ est de dimension finie et admet $\mathcal{Y}_2 = T_Q S_{\mathbf{A}_0}$ (de dimension finie) pour complémentaire dans $T_Q SO(3)$.

Soit $P : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_1$ la projection sur $\mathcal{Y}_1$ et $I - P : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_2$ la projection sur $\mathcal{Y}_2$.

$DX_{\mathbf{A}_0}(Q)$ n'est pas un isomorphisme.

Posons $\tilde{X}(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = (I - P)X(\lambda, \mathbf{A}, n; Q)$ c'est-à-dire $\tilde{X}$ est la projection de X sur $\mathcal{Y}_2$.

$\tilde{X}(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) = 0$ est donc l'équation de bifurcation.

Le but de ce qui suit est de montrer que la partie essentielle de $\tilde{X}$ est un gradient.

$$\begin{aligned}
X(\lambda, \mathbf{A}, n; Q) &= k(H(\lambda, \mathbf{A}, n; Q)) \cdot Q \\
&= [k(\mathrm{asym}_{\mathcal{L}}(Q\mathbf{A}) - \lambda \bar{F}(\lambda, \mathrm{sym}_{\mathcal{L}} Q\mathbf{A}, Q_n)]Q \\
&= [k(\mathrm{asym}_{\mathcal{L}}(Q\mathbf{A}) - \lambda k(\bar{F}(\lambda, \mathrm{sym}_{\mathcal{L}} Q\mathbf{A}, Q_n))]Q \\
&= k(j(\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}))) - \lambda k(\frac{1}{2}G(Q\ell_0) + \frac{\lambda}{6}C(Q\ell_0) + \cdots)]Q \\
&= [\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) - \frac{\lambda}{2}k(G(Q\ell_0)) + \cdots]Q
\end{aligned}$$

On pose $(\mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) - \frac{1}{2}\lambda k G(Q\ell_0))Q = X_2(\lambda, \mathbf{A}, n; Q)$.

Lemme : *Soit $\ell \in \mathcal{L}$ et $\mathbf{A} = k(\ell)$. Soit $X_{\mathbf{A}}(Q)$ un champ de vecteurs sur $SO(3)$ défini par : $X_{\mathbf{A}}(Q) = \mathrm{asym}(Q\mathbf{A}) \cdot Q$. Alors $X_{\mathbf{A}} = -\mathrm{grad}\tilde{\ell}$ où $\tilde{\ell}$ est une application définie par :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell} : SO(3) &\to \mathbf{R} \\
Q &\mapsto \tilde{\ell}(Q) = < \ell, Q^T I_{\mathcal{B}} >
\end{aligned}$$

■ Pour la démonstration de ce lemme, deux égalités sont nécessaires :

(1) : Si $E \in M_3$, $W \in \mathrm{Asym}$, alors $\ll E, W \gg = \ll \mathrm{asym} E, W \gg$

(2) : Si $E \in M_3$, $\ell \in \mathcal{L}$, $\phi \in \mathcal{C}$, alors $< \ell, E\phi > = \ll E, k(\ell, \phi) \gg$

En effet :

$$\begin{aligned}
\ll \text{asym}E, W \gg &= \ll \frac{1}{2}(E - E^T), W \gg \\
&= \frac{1}{2} \ll E, W \gg -\frac{1}{2} \ll E^T, W \gg \\
&= \frac{1}{2}tr(E^T W) - \frac{1}{2}tr(EW) \\
&= \frac{1}{2}tr(E^T W) - \frac{1}{2}tr((EW)^T) \\
&= \frac{1}{2}tr(E^T W) - \frac{1}{2}tr(W^T E^T) \\
&= \frac{1}{2}tr(E^T W) - \frac{1}{2}tr(E^T W^T) \\
&= \frac{1}{2}tr(E^T W) - \frac{1}{2}tr(E^T W) \\
&= tr(E^T W) \\
&= \ll E, W \gg
\end{aligned}$$

Plus généralement, nous pouvons remarquer que :

$$\forall A, B \in M_3, \ll A, \text{asym}B \gg = \ll \text{asym}A, \text{asym}B \gg.$$

$$\begin{aligned}
\bullet\bullet \qquad < \ell, E\phi > &= tr(k(\ell, E\phi)) \\
&= tr(k(\ell, \phi)E^T) \\
&= tr(E^T k(\ell, \phi)) \\
&= \ll E, k(\ell, \phi) \gg
\end{aligned}$$

Démontrons à présent le lemme énoncé :

$$\begin{aligned}
d\tilde{\ell}(Q) \cdot (WQ) &= < \ell, (WQ)^T I_{\mathcal{B}} > \\
&= \ll (WQ)^T, k(\ell I_{\mathcal{B}}) \gg \\
&= \ll (WQ)^T, \mathbf{A} \gg \\
&= \ll Q^T W^T, \mathbf{A} \gg \\
&= \ll W^T, Q\mathbf{A} \gg \\
&= - \ll W, Q\mathbf{A} \gg \\
&= - \ll W, \text{asym}(Q\mathbf{A}) \gg \\
&= - \ll WQ, \text{asym}(Q\mathbf{A}) \cdot Q \gg \\
&= - \ll WQ, X_{\mathbf{A}}(Q) \gg \\
&= - \ll X_{\mathbf{A}}(Q), WQ \gg
\end{aligned}$$

Donc nous avons bien $X_{\mathbf{A}} = -\text{grad}\tilde{\ell}$.

Lemme : $D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C} \to \mathcal{L}_e$ *est une application symétrique, c'est-à-dire :* $< D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot u, v > = < u, D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot v >$, $\forall u, v \in T_{I_{\mathcal{B}}}\mathcal{C}$.

■ On a vu que $D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot u = (-\mathrm{DIV}(c \cdot e), (c \cdot e) \cdot N)$ avec $e = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$

$$< \ell, \phi > = \int_{\mathcal{B}} B(X)\phi(X)dV(X) + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau(X) \cdot \phi(X)dA(X)$$

$$\begin{aligned} < D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot u, v > &= \int_{\mathcal{B}} -\mathrm{DIV}(c \cdot e) \cdot v dV + \int_{\partial\mathcal{B}} (c \cdot e) \cdot N \cdot v dA \\ &= \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial}{\partial X_j}(c \cdot e)_{ij} v_i dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \Big[(c \cdot e) \cdot N\Big]_i v_i dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial X_j}(c \cdot e)_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial X_j}(c_{ijhk} e_{hk}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial X_j}\left[c_{ijhk}\frac{1}{2}(\nabla u_{hk} + \nabla u_{kh})\right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{1}{2}c_{ijhk}\nabla u_{hk} + \frac{1}{2}c_{ijhk}\nabla u_{kh}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{1}{2}c_{ijhk}\nabla u_{hk} + \frac{1}{2}c_{ijhk}\nabla u_{kh}\right) \end{aligned}$$

car $c_{ijhk} = c_{ijkh}$ ([5] p. 209). Donc

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial X_j}(ce)_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial X_j}(c_{ijhk}\nabla u_{hk}) \\ &= \frac{\partial}{\partial X_j}(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(c \cdot e) \cdot N]_i &= (c \cdot e)_{ij} N_j \\ &= c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k} N_j \end{aligned}$$

Par suite :

$$< D\Phi(I_{\mathcal{B}}) \cdot u, v > = \int_{\mathcal{B}} -\frac{\partial}{\partial X_j}(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}) v_i dV + \int_{\partial\mathcal{B}} (c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k} N_j) v_i dA$$

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k} \cdot v_i\right) = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\right) \cdot v_i + c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\right) v_i = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k} v_i\right) - c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}$$

Et

$$< D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u, v > = -\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X_j}\Big(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}v_i\Big)dV + \int_{\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}dV$$
$$+\int_{\partial\mathcal{B}}\Big(c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}N_j\Big)v_i dA$$

Ce qui donne, après application du théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
< D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u, v > &= -\int_{\partial\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}v_i N_j dA + \int_{\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}dV \\
&\quad + \int_{\partial\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}N_j v_i dA \\
&= \int_{\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}dV
\end{aligned}$$

De la même manière on montre que :

$$\begin{aligned}
< D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot v, u > &= \int_{\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial v_h}{\partial X_k}\frac{\partial u_i}{\partial X_j}dV \\
&= \int_{\mathcal{B}} c_{hkij}\frac{\partial v_h}{\partial X_k}\frac{\partial u_i}{\partial X_j}dV \quad \text{car} \quad c_{ijhk} = c_{hkij} \quad \text{([4 bis] p.209)} \\
&= \int_{\mathcal{B}} c_{ijhk}\frac{\partial v_i}{\partial X_j}\frac{\partial u_h}{\partial X_k}dV \quad \text{après changement d'indices} \\
&= < D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u, v >
\end{aligned}$$

$D\Phi(I_{\mathcal{B}})$ est donc symétrique.

Lemme : $< Q\ell_0, u_{WQ} > = < (WQ)\ell_0, u_Q >$ *pour* $Q\ell_0$ *et* $(WQ)\ell_0 \in \mathrm{Sym}$ *et* $u_Q = D\Phi(I_{\mathcal{B}})^{-1}(Q\ell_0)$

■

$$\begin{aligned}
< Q\ell_0, u_{WQ} > &= < Q\ell_0, D\Phi(I_{\mathcal{B}})^{-1}(WQ\ell_0) > \\
&= < D\Phi^{-1}(I_{\mathcal{B}})^T(Q\ell_0), WQ\ell_0 > \\
&= < (D\Phi^{-1}(I_{\mathcal{B}})^T)^{-1}(Q\ell_0), WQ\ell_0 > \\
&= < D\Phi(I_{\mathcal{B}})^{-1}(Q\ell_0), WQ\ell_0 > \quad \text{car} \quad D\Phi \quad \text{symétrique} \\
&= < u_Q, WQ\ell_0 > \\
&= < WQ\ell_0, u_Q >
\end{aligned}$$

Lemme : *Soit* $\mathcal{F}$ *une application définie par :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : \mathcal{C} &\to \mathrm{Asym} \\
\phi &\mapsto \mathcal{F}(\phi) = \mathrm{asym}[k(\Phi(\phi))]
\end{aligned}$$

Alors :
$$\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}) = 0$$
$$D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}) = 0$$

et
$$\begin{aligned} D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u) &= 2\text{asym}(\int_{\mathcal{B}} \nabla u \cdot c(e)dV) \\ &= -2\text{asym}k(\ell_u, u) \end{aligned}$$

où $\ell_u = (b_u, \tau_u)$, $b_u = -DIV(c(e))$ *et* $\tau_u = (c \cdot e) \cdot N$. *Si on identifie* Asym *avec* $\mathbf{R}^3$, *cette expression devient :*
$$-D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u) = \int_{\mathcal{B}} b_u \otimes u dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_u \otimes u dA .$$

■
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi) &= \text{asym}[k(\Phi(\phi))] \\ &= \text{asym}[\int_{\mathcal{B}} P(\phi)dV] \end{aligned}$$

$P(I_{\mathcal{B}}) = 0$ donc $\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}) = 0$.

Calculons $D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})u$.
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I_{\mathcal{B}} + u) - \mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}) &= \mathcal{F}(I_{\mathcal{B}} + u) \\ &= \text{asym}[k(\Phi(I_{\mathcal{B}} + u))] \\ &= \text{asym}[\int_{\mathcal{B}} P(I_{\mathcal{B}} + \nabla u)dV] \\ &= \text{asym}[\int_{\mathcal{B}} (P(I_{\mathcal{B}} + \nabla u) - P(I_{\mathcal{B}}))dV] \\ &\text{car} \quad P(I_{\mathcal{B}}) = 0 \end{aligned}$$

$P(I_{\mathcal{B}} + \nabla u) - P(I_{\mathcal{B}}) = \frac{\partial P}{\partial F}(I_{\mathcal{B}})\nabla u +$ termes de degré ≥ 2.
$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial F}(I_{\mathcal{B}})\nabla u &= A(I) \cdot \nabla u \\ &= \frac{1}{4}c(I)(\nabla u + \nabla u^T) \\ &= c(I)(\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)) \\ &= c(I) \cdot e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}) \cdot u &= \mathcal{F}(I_{\mathcal{B}} + u) - \mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}) - \quad \text{termes de degré} \quad \geq 2 \\ &= \text{asym} \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial P}{\partial F} \cdot \nabla u dV \\ &= \text{asym} \int_{\mathcal{B}} c \cdot e dV \\ &= 0 \quad \text{car} \quad c \cdot e \quad \text{est symétrique.} \end{aligned}$$

Calculons $D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u)$:

$$\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}+u)-\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})=D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})\cdot u+D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u)+\quad \text{termes de degré} > 2$$

$F(I_{\mathcal{B}})=0$ et $D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})u=0$. Donc :

$$D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u)=\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}+u)-\text{ termes de degré } > 2$$

$$\begin{aligned}
F(I_{\mathcal{B}}+u)&=\text{asym}[k(\Phi(I_{\mathcal{B}}+u))]\\
&=\text{asym}[\int_{\mathcal{B}}P(I+\nabla u)dV]\\
&=\text{asym}[\int_{\mathcal{B}}(P(I+\nabla u)-P(I))dV]\quad \text{car}\quad P(I)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(I+\nabla u)-P(I)&=\frac{\partial P}{\partial F}(I)\cdot\nabla u+\frac{\partial^2 P}{\partial F^2}(I)(\nabla u,\nabla u)+\text{ termes de degré } > 2\\
&=D_FP(I)\cdot\nabla u+D_F^2P(I)(\nabla u,\nabla u)+\text{ termes de degré } > 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u)&=\text{asym}\Big[\int_{\mathcal{B}}\Big(D_FP(I)\nabla u+D_F^2P(I)(\nabla u,\nabla u)\Big)dV\Big]\\
&=\text{asym}\Big[\int_{\mathcal{B}}D_FP(I)\nabla u dV\Big]+\text{asym}\Big[\int_{\mathcal{B}}D_F^2P(I)(\nabla u,\nabla u)dV\Big]
\end{aligned}$$

$P=F\cdot S$ donc

$$\begin{aligned}
D_FP(F)\cdot\nabla u&=D_F(F\cdot S(F))\cdot\nabla u\\
&=\nabla uS(F)+F\cdot D_FS(F)\cdot\nabla u
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_FP(I)\cdot\nabla u&=\nabla u\cdot S(I)+D_FS(I)\nabla u\\
&=D_FS(I)\nabla u \text{ car } S(I)=0 \text{ d'après (H1)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
D_FP(I)\cdot\nabla u&=A(X,I)\cdot\nabla u\\
&=\frac{1}{4}c(X)(\nabla u+\nabla u^T)\\
&=c(X)\cdot(\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla u^T))\\
&=c(X)\cdot e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_F^2P(f)(\nabla u,\nabla v)&=D_F(\nabla uS(F)+FD_FS(F)\cdot\nabla u)\nabla v\\
&=\nabla u\cdot D_FS(F)\nabla v+\nabla v\cdot D_FS(F)\nabla u+FD_F^2S(F)(\nabla u,\nabla v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_F^2P(I)\cdot(\nabla u,\nabla u)&=\nabla u\cdot D_FS(I)\nabla u+\nabla uD_FS(I)\nabla u+D_F^2S(I)(\nabla u,\nabla u)\\
&=2\nabla uD_FS(I)\nabla u+D_F^2S(I)(\nabla u,\nabla u)
\end{aligned}$$

Donc

$$D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})\cdot(u,u)=\text{asym}\Big[\int_{\mathcal{B}}D_FS(I)\nabla u dV+\int_{\mathcal{B}}2\cdot\nabla u D_FS(I)\nabla u dV$$
$$+\int_{\mathcal{B}}D_F^2S(I)(\nabla u,\nabla u)dV\Big]$$

$D_FS(I)$ et $D_F^2S(I)$ sont symétriques, par suite :

$$\text{asym}\int_{\mathcal{B}}D_FS(I)\nabla u dV=\text{asym}\int_{\mathcal{B}}D_F^2S(I)(\nabla u,\nabla u)dV=0$$

et

$$D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u)=2\text{asym}\int_{\mathcal{B}}\nabla u\cdot D_FS(I)\cdot\nabla u dV$$
$$=2\text{asym}\int_{\mathcal{B}}\nabla u\cdot c(e)dV$$

$$\Big(\int_{\mathcal{B}}\nabla u\cdot c\cdot e\cdot dv\Big)_{ij}=\int_{\mathcal{B}}(\nabla u)_{ik}(c\cdot e)_{kj}dV$$
$$=\int_{\mathcal{B}}(c\cdot e)_{kj}(\nabla u)_{ik}dV$$
$$=\int_{\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}(\nabla u)_{ik}dV \text{ car } c\cdot e \text{ symétrique}$$
$$=\int_{\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}dV$$
$$=\int_{\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}dV-\int_{\partial\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}u_iN_kdA+\int_{\partial\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}u_iN_kdA$$
$$=\int_{\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial X_k}dV-\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial((c\cdot e)_{jk}u_i)}{\partial X_k}dV+\int_{\partial\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}N_ku_idA$$
$$=-\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial(c\cdot e)_{jk}}{\partial X_k}u_idV+\int_{\partial\mathcal{B}}(c\cdot e)_{jk}N_ku_idA$$
$$=-\int_{\mathcal{B}}\Big[\text{DIV}(c\cdot e)\Big]_ju_idV+\int_{\partial\mathcal{B}}(c\cdot e\cdot N)_ju_idA$$
$$=\int_{\mathcal{B}}(b_u)_ju_idV+\int_{\partial\mathcal{B}}(\tau_u)_ju_idA$$
$$=\Big(\int_{\mathcal{B}}b_u\otimes udV\Big)_{ji}+\int_{\partial\mathcal{B}}\tau_u\otimes udA\Big)_{ji}$$

Par suite $\Big(\int_{\mathcal{B}}\nabla u\cdot c\cdot e\cdot dV\Big)_{ij}-\Big(\int_{\mathcal{B}}\nabla u\cdot e\cdot dV)_{ji}$

$$=\Big(\int_{\mathcal{B}}b_u\otimes udV\Big)_{ji}+\Big(\int_{\partial\mathcal{B}}\tau_u\otimes udA\Big)_{ji}-\Big(\int_{\mathcal{B}}b_u\otimes udV\Big)_{ij}$$
$$-\Big(\int_{\partial\mathcal{B}}\tau_u\otimes udA)_{ij}=\Big(\int_{\mathcal{B}}b_u\otimes udV+\int_{\partial\mathcal{B}}\tau_u\otimes udA\Big)_{ij}$$
$$-\Big(\int_{\mathcal{B}}b_u\otimes udV+\int_{\partial\mathcal{B}}\tau_u\otimes udA\Big)_{ji}$$

Donc

$$\text{asym}\int_{\mathcal{B}} \nabla u \cdot c\dot{e} dV = -\text{asym}\Big[\int_{\mathcal{B}} b_u \otimes u dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_u \otimes u dA\Big]$$

et

$$\begin{aligned} D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,u) &= 2\text{asym}\int_{\mathcal{B}} \nabla_u c(e) dV \\ &= -2\text{asym}\Big[\int_{\mathcal{B}} b_u \otimes u dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \tau_u \otimes u dA\Big] \\ &= -2\text{asym}k(\ell u, u) \end{aligned}$$

Remarque : Relation entre k et le terme de degré 2 du développement de Taylor de F au voisinage de 0.

Soit $F(\ell) = \frac{1}{2}G(\ell) + \frac{1}{6}C(\ell) + \cdots$ le développement de Taylor de F au voisinage de 0.

$$(G(\ell) = D^2F(0)(\ell,\ell), \ C(\ell) = D^3F(0)(\ell,\ell,\ell)$$

$\forall\phi \in \mathcal{C}_{\text{sym}}$, F existe et $\mathcal{F}(\phi) = FP_e\Phi(\phi)$ où P_e est la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}_e$.

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})\cdot u &= D(FP_e\Phi(I_{\mathcal{B}}))\cdot u \\ &= D(FP_e)(\Phi(I_{\mathcal{B}}))\cdot D\Phi(I_{\mathcal{B})}\cdot u \\ &= DF(P_e(\Phi(I_{\mathcal{B}}))\cdot DP_e(\Phi(I_{\mathcal{B}}))\cdot D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u \\ &= DF(0)\cdot D(P_e\Phi(I_{\mathcal{B}}))\cdot u \\ &= DF(0)\cdot D(\Phi(I_{\mathcal{B}}))\cdot u \\ D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,v) &= D(D\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})\cdot u)\cdot v \\ &= D(DF(0)\cdot D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u)\cdot v \\ &= D^2F(0)(D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u)\cdot D(D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u)v \end{aligned}$$

Or $D\Phi(I_{\mathcal{B}})(u+v) - D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot u = D\Phi(I_{\mathcal{B}})\cdot v$ car $D\Phi(I_{\mathcal{B}})$ linéaire.

Donc $D(D\Phi(I_{\mathcal{B}})u)v = D\Phi(I_{\mathcal{B}})v$ et

$$\begin{aligned} D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u,v) &= D^2F(0)(D\Phi(I_{\mathcal{B}})u)(D\Phi(I_{\mathcal{B}})v) \\ &= D^2F(0)(D\Phi(I_{\mathcal{B}})u, D\Phi(I_{\mathcal{B}})v) \end{aligned}$$

Soit $u_\ell = D\Phi(I_{\mathcal{B}})^{-1}\ell$

$$\begin{aligned} D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}})(u_\ell,u_\ell) &= D^2F(0)(D\Phi(I_{\mathcal{B}})u_\ell, D\Phi(I_{\mathcal{B}})u_\ell) \\ &= D^2F(0)(\ell,\ell) \\ &= G(\ell) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme :

$$\begin{aligned} D^2\mathcal{F}(I_{\mathcal{B}}(u_\ell, u_\ell) &= -2\text{asym}k(\ell_{u_\ell}, u_\ell) \\ &= -2\text{asym}k((b_{u_\ell}, \tau_{u_\ell}), u_\ell) \end{aligned}$$

alors $G(\ell) = -2\text{asym}k\Big((b_{u_\ell}, \tau_{u_\ell}), u_\ell\Big)$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}G(\ell) = -\text{asym}k(\ell_{u_\ell}, u_\ell)$. Soit à présent l'application $\tilde{\tilde{\ell}}$ telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\ell}} : SO(3) &\to \mathbf{R} \\ Q &\mapsto < \ell, \frac{1}{2}\lambda Q^T u_Q > \end{aligned}$$

Déterminons $D\tilde{\tilde{\ell}}(Q)$:

$$\begin{aligned} D\tilde{\tilde{\ell}}(Q) : T_Q SO(3) &\to \mathbf{R} \\ WQ &\mapsto D\tilde{\tilde{\ell}}(Q)WQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \tilde{\tilde{\ell}}(Q) &= < \ell, \frac{1}{2}\lambda Q^T u_Q > \\ &= \frac{1}{2}\lambda < \ell, Q^T u_Q > \end{aligned}$$

Donc $D\tilde{\tilde{\ell}}(Q) = \frac{1}{2}\lambda D < \ell, Q^T u_Q >$

$$\begin{aligned} D < \ell, Q^T u_Q > WQ &= D_Q(< \ell, Q^T u_Q >)WQ \\ &= < \ell, D_Q(Q^T) \cdot WQu_Q > + < \ell, Q^T D_Q(u_Q) \cdot WQ > \end{aligned}$$

Calculons

a) $D_Q(Q^T)WQ$

b) $D_Q(u_Q)WQ$

a) $(Q + WQ)^T - Q^T = (WQ)^T$ linéaire en WQ donc $D_Q(Q^T)WQ = (WQ)^T$.

b) $u_Q = [D\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}})^{-1}](Q\ell_0)$

$$\begin{aligned} u_Q(Q + WQ) - u_Q(Q) &= (D\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}})^{-1})(Q\ell_0 + WQ\ell_0) - D\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}})^{-1}(Q\ell_0) \\ &= D\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}})^{-1}(WQ\ell_0) \\ &= u_{WQ} \text{ linéaire en } WQ \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} D < \ell, Q^T u_Q > WQ &= < \ell, (WQ)^T u_Q > + < \ell, Q^T u_{WQ} > \\ &= < \ell, (WQ)^T u_Q > + < Q\ell, u_{WQ} > \\ &= < (WQ)\ell, u_Q > + < Q\ell, u_{WQ} > \end{aligned}$$

Or $< Q\ell, u_{WQ} > = < (WQ)\ell, u_Q >$.

Donc :

$$\begin{aligned}
D < \ell, Q^T u_Q > WQ &= < (WQ)\ell, u_Q > + < (WQ)\ell, u_Q > \\
&= 2 < (WQ)\ell, u_Q > \\
&= 2 < Q\ell, W^T u_Q > \\
&= -2 < Q\ell, W u_Q > \\
&= -2 < W, k(Q\ell, u_Q) > \quad \text{(égalité (2) page 85.)} \\
&= -2 < W, \mathrm{asym}k(Q\ell, u_Q) > \quad \text{(égalité (1) page 85.)} \\
&= -2 < WQ, \mathrm{asym}k(Q\ell, u_Q)Q > \\
&\text{(produit scalaire invariant par rotation)} \\
&= -2 < WQ, -\frac{1}{2}G(Q\ell)Q > \\
&= < WQ, G(Q\ell) \cdot Q >
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.G. CIARLET : Elasticité tridimensionnelle, *Masson 1986.*

[2] D.R.J. CHILLINGWORTH, J.E. MARSDEN et Y.H. WAN : Symmetry and bifurcation in three dimensional elasticity, *Part I, Arch. Rational, Mech. Anal. 80, 295-331.*

[3] G. DUVAUT, J.L. LIONS : Les inéquations en mécanique et en physique, *Dunod 1972.*

[4] J.E. MARSDEN : Qualitative methods in bifurcation theory *Bull. of the American Mathematical Society, Vol. 84, number 6, Nov. 1978.*

[4bis] J.E. MARSDEN, T.J.R HUGUES : Mathematical foundations of elasticity, *Prentice Hall 1983.*

[5] R. MNEIMNE, F. TESTARD : Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann 1986.*