

N° d'ordre : 85

50376  
1987  
39

50376  
1987  
39

## THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I  
pour obtenir le titre de

Docteur

en

MECANIQUE

par

AJANA BOUITALEB Souad



PALIERES HYDROSTATIQUES EN REGIME TURBULENT

LIMITES DE VALIDITE D'UN MODELE CLASSIQUE

MODELISATION DE L'ECOULEMENT A LA JONCTION DES

CHAMBRES ET DES PORTEES

*Exemplaire corrigé après avis du jury*

Soutenue le 20 janvier 1987

devant la commission d'examen

Membres du jury :

Président : M. MICHEAU, Professeur Université de Lille I  
Rapporteurs : M. DYMENT, Professeur Université de Lille I  
M. FRENE, Professeur Université de Poitiers  
Examineurs : M. CANINI, Ingénieur, Jeumont-Schneider  
M. DEBAILLEUX, Maître de Conférences Université de Lille I  
M. STANISLAS, Ingénieur I.M.F.L.

A la mémoire de mon père,  
A ma mère.

## Avant-propos

Je suis heureuse de pouvoir exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur Le Professeur P.MICHEAU qui m'a dirigée au cours de cette étude. Ses précieux conseils, sa disponibilité et nos fructueuses discussions ont été pour moi une source permanente d'encouragement.

Je remercie vivement Monsieur Le Professeur A.DYMENT qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma très vive gratitude à Monsieur Le Professeur J.FRENE qui a bien voulu juger ce travail.

Monsieur CANNINI ingénieur à la société JEUMONT SCHNEIDER qui a soutenu ces travaux a bien voulu faire partie du jury, je l'en remercie.

Messieurs DEBAILLEUX et STANISLAS ont bien voulu examiner mon travail, je les remercie vivement.

Lors de l'étude de la deuxième partie, j'ai travaillé en étroite collaboration avec Messieurs A.FEIDT et A.BOUTALEB; qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je les remercie aussi pour l'aide active apportée lors de la rédaction.

Je remercie Madame F.RENIEZ pour la dactylographie de ce texte, effectuée avec patience et savoir faire.

Je ne terminerai pas cet avant-propos sans exprimer mes remerciements à l'ensemble des personnes du Laboratoire de construction mécanique de l'EUDIL pour leur amicale sympathie en particulier J.L.MUNOZ pour son aide en informatique.

## SOMMAIRE

	page
<b>INTRODUCTION</b>	<b>5</b>
<b>PREMIERE PARTIE</b>	
<b>CHAPITRE 1 : Les fondements de la lubrification.</b>	<b>9</b>
<b>Regime laminaire, isotherme et isovolume. Equation de Reynolds.</b>	
<b>Application au cas des paliers</b>	
<b>1 Les fondements de la lubrification</b>	<b>9</b>
<b>2 Régime laminaire, isotherme et isovolume. Equation de Reynolds. Application au cas des paliers.</b>	<b>13</b>
<b>2.1 Equation de Reynolds</b>	<b>13</b>
<b>2.2 Application au cas des paliers</b>	<b>22</b>
a) Description d'un palier	<b>22</b>
b) Les hypothèses et leurs conséquences sur l'équation de Reynolds.	<b>24</b>
<b>CHAPITRE 2 : Régime turbulent en lubrification par film mince.</b>	
<b>Equation de Reynolds en régime turbulent.</b>	<b>30</b>
<b>Application au cas des paliers.</b>	
<b>1 Equations générales. Modèle de turbulence.</b>	<b>30</b>
a) Equation générales	<b>30</b>
b) Modèle de turbulence	<b>31</b>

2 Equation de Reynolds en turbulent	41
3 Application au cas des paliers.	41

**CHAPITRE 3 : Palier hydrostatique en régime turbulent** 42  
**Modélisation numérique**

1 Introduction	42
2 Modèle	42
a) Equation de Reynolds	42
b) Alimentation des chambres; Ecoulement dans les chambres	43
c) Ecoulement dans les jonctions	45
d) Discrétisation de l'équation de Reynolds.	47
e) Algorithme général	49
3 Critère de convergence	54
4 Analyse de sensibilité et choix des paramètres	59
5 Résultats pour différentes configurations	61
6 Conclusion	71

**ANNEXES**

<b>ANNEXE 1 : Calcul de la répartition de pression</b>	74
1 Adimensionnement	74
2 Discrétisation	74

<b>ANNEXE 2 : Débit global et débit de chambre</b>	<b>81</b>
1 Débit global	81
2 Débit entrant et sortant des chambres	82
<b>ANNEXE 3 : Détermination de l'effort et de l'angle de calage</b>	<b>84</b>
<b>ANNEXE 4 : Détermination de l'excentricité et de l'angle de calage</b>	<b>87</b>
1 Perturbation suivant X	87
2 Perturbation suivant Y	88
<b>ANNEXE 5 : Etude dynamique</b>	<b>90</b>

## DEUXIEME PARTIE

<b>CHAPITRE 4: Modélisation de l'écoulement à la sortie des chambres</b>	<b>93</b>
1 Introduction	93
2 Enoncé du problème	93
3 Discrétisation, méthode de résolution	
a) Discrétisation temporelle	96
b) Méthode de résolution	100
c) Discrétisation spatiale	101
4 Conditions aux limites	106
5 Organigramme de calcul	106

<b>6 Stabilité, convergence, lissage</b>	
a) Stabilité	111
b) Convergence	113
c) Lissage	114
<b>7 Cas test</b>	115
<b>8 Application au cas de l'écoulement à la sortie d'une chambre</b>	121
8.1 Ecoulement en sortie de chambre dans le plan de symétrie méridien ( écoulement dans le sens axial )	125
8.2 Ecoulement en sortie de chambre au voisinage d'un espace interchambre ( écoulement dans le sens circonférenciel )	134
<b>9 Conclusion</b>	162
<b>CHAPITRE 5 : Problème global</b>	163
1 Mise en place des résultats dans le problème global	163
2 Résultats	164
<b>CONCLUSION</b>	166

## INTRODUCTION

La théorie sur les comportements des mécanismes lubrifiés par des films minces visqueux a débuté en 1886 avec les travaux de Reynolds [1,2] pour des écoulements laminaires et isothermes.

L'utilisation de lubrifiants de faible viscosité et l'augmentation croissante des vitesses de fonctionnement des machines tournantes ont conduit à des régimes d'écoulement turbulents dans les mécanismes.

Taylor [3] montre que le passage du régime laminaire au régime turbulent dans des paliers cylindriques avec arbre tournant se fait par l'intermédiaire d'un écoulement constitué d'une superposition de tores appelé depuis régime tourbillonnaire.

Précisons qu'il est d'usage en lubrification de désigner par régime laminaire le régime situé avant le développement des tourbillons de Taylor et qu'au delà l'écoulement est non laminaire c'est à dire soit tourbillonnaire soit turbulent.

Dès 1959 Constantinescu [4] propose un modèle basé sur la notion de longueur de mélange de Prandtl [5] pour décrire le fonctionnement turbulent. Mais pendant très longtemps on s'intéresse surtout à la lubrification hydrodynamique.

L'état des connaissances en lubrification hydrostatique ou hybride est moins avancé qu'en lubrification hydrodynamique.

L'effort consenti dans ce domaine est dû à l'essor de l'industrie nucléaire.

\*\*\*\*\*

Dans une première partie, après une étude bibliographique sur les paliers hydrostatiques ou hydrodynamiques en régime laminaire et turbulent (chapitre 1 et 2), on s'intéresse à la détermination numérique des caractéristiques de fonctionnement des paliers

hydrostatiques ( chapitre 3 ) .

Pour déterminer l'écoulement dans les portées, on résoud l'équation de Reynolds en régime turbulent.

Le modèle de turbulence utilisé est algébrique. On montre que, quelles que soient les approximations choisies, ( Elrod [6] ou Constantinescu [7] ), on obtient les memes résultats.

Dans la modélisation globale, on suppose que les pressions dans les chambres sont constantes, et on fait appel pour les jonctions chambres-portées, à des schématisations de type monodimensionnel qui nécessitent l'introduction de constantes expérimentales dont les valeurs peuvent notamment dépendre de la géométrie fine des paliers.

On indique la structure de l'algorithme de calcul, puis on présente :

- une analyse de sensibilité en fonction des différents paramètres de la modélisation.

- des comparaisons avec des résultats expérimentaux ou des résultats d'autres auteurs.

\*\*\*\*\*

Dans une deuxième partie , on est amené à considérer de façon plus fine l'écoulement dans les chambres et au voisinage des jonctions chambres-portées ( chapitre 4 ).

Bien que cet écoulement soit typiquement tridimensionnel, on le décompose en deux écoulements bidimensionnels suivant les deux plans de symétrie des chambres. Pour déterminer ces écoulements on résoud numériquement les équations bidimensionnelles de la mécanique des fluides en régime incompressible turbulent. On choisit un modèle de turbulence cohérent avec celui utilisé jusqu'ici dans les portées. Le programme de calcul réalisé permet

de déterminer les coefficients de perte de pression chambre - portée .

On réintroduit ensuite ces constantes dans le programme global (chapitre 5).

**PREMIERE PARTIE**

## CHAPITRE 1: Les fondements de la lubrification.

Régime laminaire, isotherme et isovolume. Equation de Reynolds.

Application au cas des paliers

### 1 Les fondements de la lubrification.

Pour réduire le frottement et l'usure entre deux surfaces en mouvement relatif, il est commode de les séparer par un film fluide lubrifiant mince. Ce dernier peut-être un liquide ou un gaz (figure 1.1).

La charge supportée par le mécanisme est opposée aux effets de pression créés, soit par une source de pression extérieure (lubrification hydrostatique), soit par le mouvement des surfaces (lubrification hydrodynamique). La combinaison des deux effets est la lubrification hybride (figure 1.2).

En lubrification hydrostatique ou hybride deux types d'alimentations sont possibles (figure 1.3) :

- l'alimentation à débit constant.
- l'alimentation à pression constante.

Pour le premier mode on utilise des pompes à débit constant; On obtient une grande rigidité. A cause du cout et de la complexité de l'installation, on utilise plus fréquemment le deuxième mode.

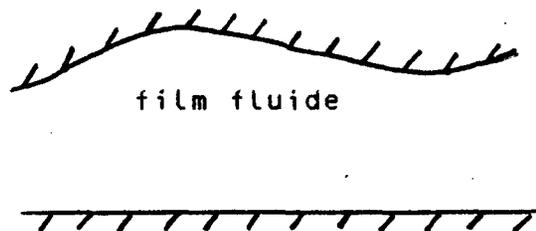
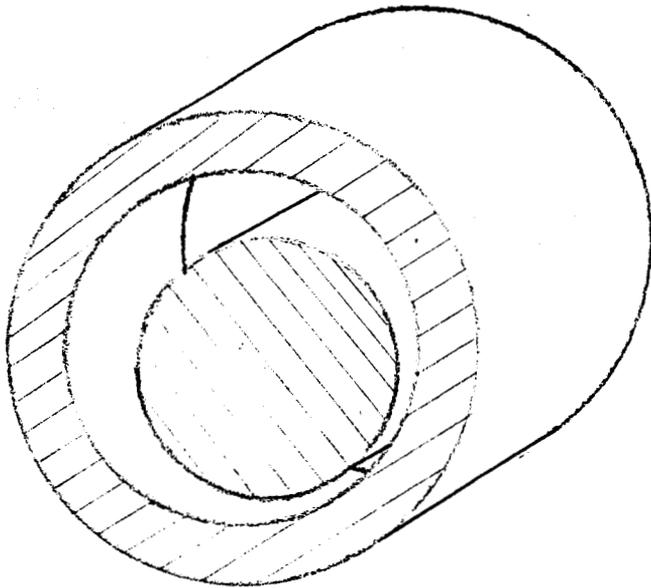
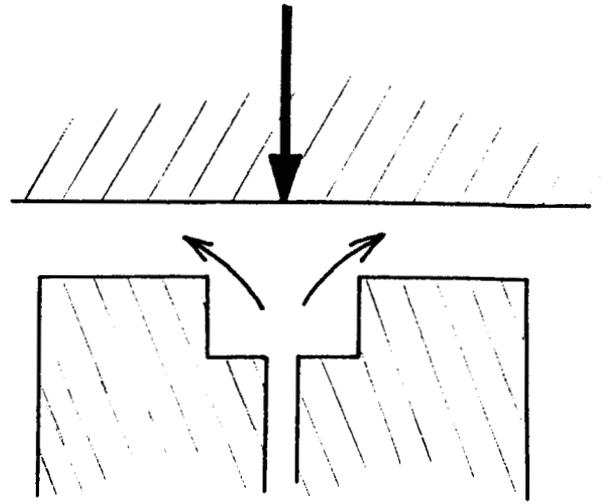


figure 1.1 : La lubrification



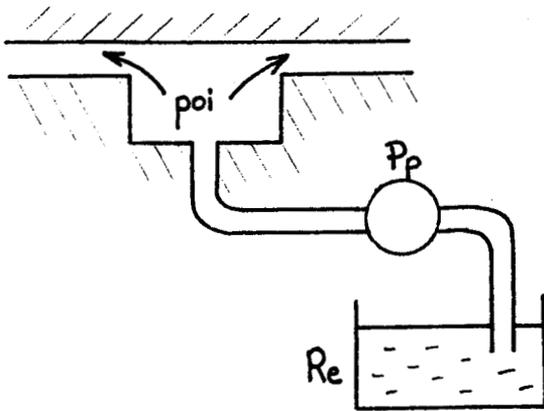
a) Palier hydrodynamique



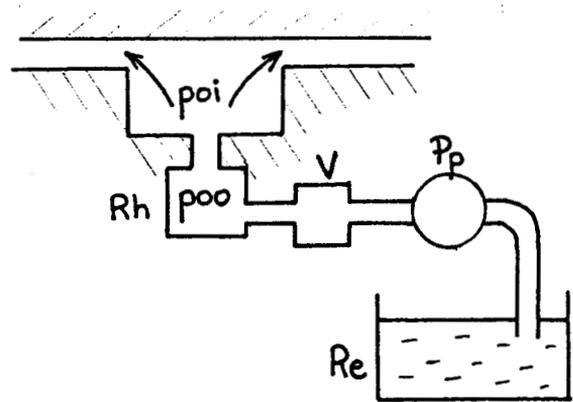
b) butée hydrostatique

figure 1.2 : La lubrification hydrodynamique ou hydrostatique

alimentation à débit constant



alimentation à pression constante



$P_p$ :pompe     $R_h$ :résistance hydraulique     $R_e$ :réservoir

$V$  :valve de décharge à pression constante

$poi$ :pression dans une chambre     $p_{oo}$ :pression d'alimentation



figure 1.3 : Principe de fonctionnement d'une butée

En fonctionnement, on rencontre plusieurs régimes :

-le régime laminaire dans lequel les filets fluides suivent la géométrie du contact.

-le régime turbulent où règne une agitation désordonnée des particules fluides, ce qui nécessite l'introduction de grandeurs moyennes pour caractériser l'écoulement.

-la transition entre ces deux régimes s'effectue lorsque le nombre de Reynolds atteint une valeur critique.

Le nombre de Reynolds habituellement retenu est:

$$R_c = \frac{\rho V_m h}{\mu}$$

$\rho$  :masse volumique du fluide

$\mu$  :viscosité dynamique du fluide

$h$  :épaisseur moyenne du film

$V_m$  :vitesse moyenne du fluide

Pour des nombres de Reynolds faibles, le régime est laminaire. Pour des nombres de Reynolds élevés, le régime est turbulent.

Taylor [8] montre que, pour un palier cylindrique centré il peut se produire un autre régime d'écoulement. Celui-ci se produit à partir de l'écoulement laminaire, sous certaines conditions géométriques; C'est le régime tourbillonnaire, appelé encore tourbillon de Taylor.

Le critère de transition utilisé, est fondé sur le nombre de Taylor défini par :

$$T = R_c \sqrt{\frac{r}{h}}$$

$R_c$  : nombre de Reynolds

$h$  : jeu radial

$r$  : rayon du palier

Les tourbillons de Taylor pour un palier centré apparaissent dès que le nombre de Taylor atteint la valeur critique  $T = 41,2$ . Cette théorie a été vérifiée et confirmée expérimentalement.

Le régime tourbillonnaire peut dans certains cas correspondre au passage du régime laminaire au régime turbulent. (Travaux de Frene [9] et Nicolas [10] )

Par ailleurs on montre que dans le cas laminaire l'écoulement résulte de la superposition de deux écoulements [11] :

-Un écoulement de Couette dû aux mouvements relatifs des surfaces (figure 1.4 a). La variation des vitesses est linéaire suivant l'épaisseur du film.

-Un écoulement de Poiseuille dû au gradient de pression dans le sens de l'écoulement (figure 1.4 b).

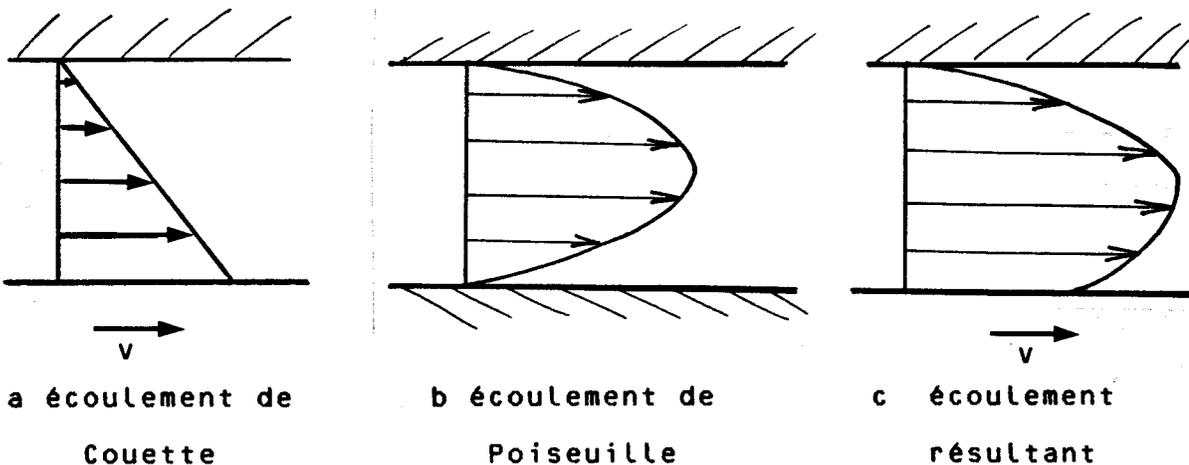


figure 1.4: Différents types d'écoulement dans le cas laminaire

## 2 Régime laminaire, isotherme et isovolume. Equation de Reynolds.

Application au cas des paliers.

Plusieurs études théoriques et expérimentales ont été faites.

( cf [11,12,13,14] )

### 2.1 Equation de Reynolds

En régime laminaire et dans le cas d'un film mince, l'évolution de la pression dans un contact est décrite par l'équation de Reynolds qui est une traduction de l'équation de continuité.

Son origine

\* Les équations de base de la mécanique.

Le comportement d'un milieu continu, isotherme et isovolume est décrit par :

-La loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (1)$$

$x_1, x_2, x_3$  : coordonnées cartésiennes

$u_1, u_2, u_3$  : vitesse d'une particule fluide suivant les directions  $x_1, x_2, x_3$

-La loi fondamentale de la dynamique

appliquée à un milieu déformable qui s'écrit :

$$\rho \gamma_i = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1, 3 \quad j = 1, 3 \quad (2)$$

avec  $\gamma_i$  accélération d'une particule fluide selon la direction  $i$   
 $f_i$  forces intérieures  
 $\sigma_{ij}$  termes du tenseur des contraintes

-La loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 3 \quad j = 1, 3 \quad (3) \text{ avec}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{tenseur taux de déformation}$$

$p$  : pression

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker

$\mu$  : coefficient de viscosité dynamique

\* Les hypothèses de la lubrification par film mince.

Lorsqu'on reporte (3) dans (2) on obtient les équations de Navier

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 3$$

Introduisons un facteur d'échelle ( $\varepsilon$ ) caractérisant la faible épaisseur du film vis à vis des autres dimensions du contact (figure 2.1), ce qui constitue l'hypothèse de la mécanique des films minces.

Afin de déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier, on introduit les variables sans dimensions et d'ordre 1 suivantes

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2}{h}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{x_3}{L}$$

$$\bar{t} = t \frac{V}{L}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{V}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{u_2 L}{h V}$$

$$\bar{u}_3 = \frac{u_3}{V}$$

$$\bar{p} = \frac{h^2}{\mu_0 V L} p$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$R_L = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$\epsilon = \frac{h}{L}$$

Où  $L$  et  $V$  sont les longueurs et vitesses caractéristiques suivant les axes  $0 x_1$ ,  $0 x_3$ ,  $h$  et  $\frac{hV}{L}$  celles suivant  $0 x_2$ ,  $\mu_0$  une viscosité de référence ( figure 2.1 )

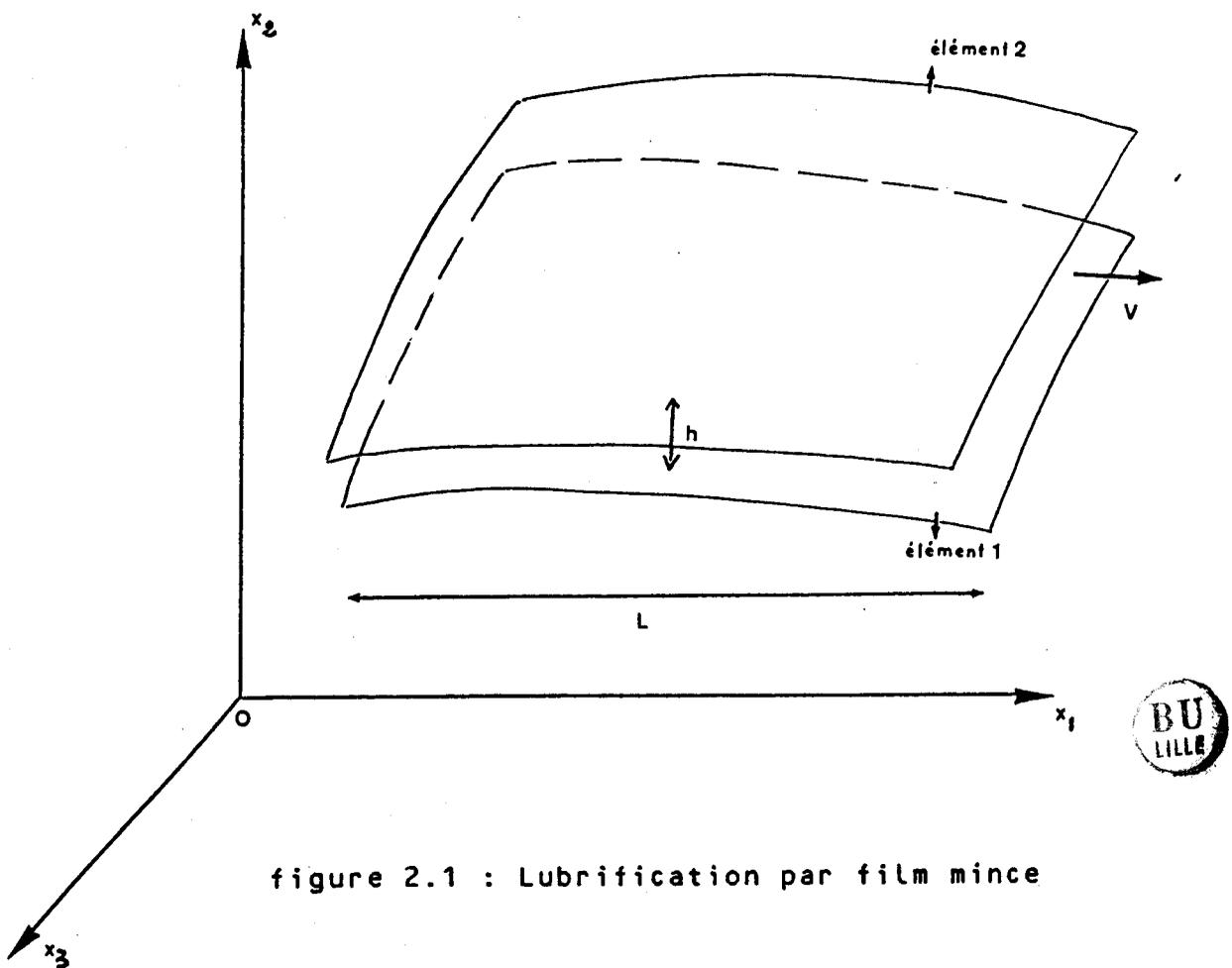


figure 2.1 : Lubrification par film mince

Avec ce choix de variables on suppose impérativement qu'on s'intéresse aux régimes d'écoulement où les contraintes visqueuses gouvernent le champ de pression  $\bar{p} = \frac{h^2}{\mu_0 V L} p$  et

où les temps caractéristiques sont de l'ordre de  $\left(\frac{V}{L}\right)^{-1}$

Pour la plupart des mécanismes  $\varepsilon = \frac{h}{L}$  est de l'ordre de  $10^3$ . Compte tenu de ces changements de variables, les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} = \varepsilon^2 \left[ R_L (\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_j}) + \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3^2} \right) - R_L \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} \right]$$

$$\bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[ 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = \varepsilon^2 \left\{ -\varepsilon^2 R_L \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_j} + \varepsilon^2 \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3^2} \right) + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2^2} - \varepsilon^2 R_L \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} \right] + \right.$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left[ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} = \varepsilon^2 \left[ -R_L \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_j} + \bar{\mu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3^2} \right) - R_L \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} \right.$$

$$\left. \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[ 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2}$$

En négligeant les termes en  $\epsilon^2$  devant les termes d'ordre 0 on obtient :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} = -\epsilon^2 R_L \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_1} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \quad / \quad i = 1 \text{ ou } 3$$

terme de pression                      terme d'inertie                      terme de viscosité

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0$$

La pression ne varie pas dans l'épaisseur du film car  $\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$   
 $p$  est indépendant de  $x_2$ .

Le coefficient  $\epsilon^2 R_L$  caractérise l'importance des termes d'inertie devant les termes de viscosité. En général on négligera l'effet des forces d'inertie devant les forces de viscosité ce qui suppose que:  $\epsilon^2 R_L \ll 1$

soit avec :  $R_h = \epsilon R_L = \frac{\rho V h}{\mu}$ ,  $\epsilon^2 R_L \ll 1$        $R_h \ll \frac{1}{\epsilon}$

Pour des valeurs de  $\epsilon$  de l'ordre de  $10^{-3}$  ceci conduit à  $R_h < 10^3$  ce qui est en accord avec le fait que le régime soit supposé laminaire.

Dans ce cas, et en revenant aux variables dimensionnées, les équations de Navier réduites s'écrivent :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right]$$

Physiquement la viscosité dépend de la température et de la pression :  $\mu = \mu(p, T)$

Comme on l'a déjà dit  $p$  ne dépend pas de  $x_2$ . Il en résulte que pour un écoulement isotherme :  $\frac{\partial \mu}{\partial x_2} = 0$ .

Il vient alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$

L'intégration du système compte tenu des conditions aux limites suivantes :

$$x_2 = h_1(x_1, x_3, t) \left\{ \begin{array}{l} u_1 = U_1(x_1, x_3, t) \\ u_2 = V_1(x_1, x_3, t) \\ u_3 = W_1(x_1, x_3, t) \end{array} \right. \quad x_2 = h_2(x_1, x_3, t) \left\{ \begin{array}{l} u_1 = U_2(x_1, x_3, t) \\ u_2 = V_2(x_1, x_3, t) \\ u_3 = W_2(x_1, x_3, t) \end{array} \right.$$

conduit à :

$$u_1 = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} (x_2^2 - x_2 (h_1 + h_2) + h_1 h_2)}_{\text{écoulement de Poiseuille}} + \underbrace{\frac{U_1 - U_2}{h_1 - h_2} (x_2 - h_1) + U_1}_{\text{écoulement de Couette}}$$

$$u_3 = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} (x_2^2 - x_2 (h_1 + h_2) + h_1 h_2)}_{\text{écoulement de Poiseuille}} + \underbrace{\frac{W_1 - W_2}{h_1 - h_2} (x_2 - h_1) + W_1}_{\text{écoulement de Couette}}$$

La répartition de vitesse  $u_2$  selon l'épaisseur de film  $x_2$  est obtenue à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$u_2$  est inconnue mais ses valeurs limites aux parois sont  $V_1$  et  $V_2$ . En intégrant l'équation de continuité à travers le film, on obtient :

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_2 = 0$$

$$\text{or } \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{h_1}^{h_2} u_1 dx_2 - u_1(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x_1} + u_1(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x_1}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = V_2 - V_1$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{h_1}^{h_2} u_3 dx_2 - u_3(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + u_3(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x_3}$$

Par conséquent l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [(h_2 - h_1) u_{1m}] + \frac{\partial}{\partial x_3} [(h_2 - h_1) u_{3m}] = U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \\ + W_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_3} - W_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + V_1 - V_2$$

avec

$$u_{1m} = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} u_1 dx_2 \quad \text{et}$$

$$u_{2m} = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} u_3 dx_2$$

$$u_{1m} = - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} (h_2 - h_1)^2 + \frac{U_1 + U_2}{2}$$

$$u_{3m} = - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} (h_2 - h_1)^2 + \frac{W_1 + W_2}{2}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} (h_2 - h_1)^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} (h_2 - h_1)^3 \right) = - 12 W_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ + 6 \frac{\partial}{\partial x_1} [(U_1 + U_2) (h_2 - h_1)] + 12 U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} - 12 U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ + 6 \frac{\partial}{\partial x_3} [(W_1 + W_2) (h_2 - h_1)] + 12 W_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + 12 (V_2 - V_1)$$

Si on place l'origine du système d'axes sur l'une des parois (supposée plane) du contact ( figure 2.2 ), en posant  $h_1 = 0$  et  $h_2 = h$  , on obtient l'équation de Reynolds qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x_1} +$$

$$6(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial x_3} + 6h \frac{\partial}{\partial x_1} (U_1 + U_2) + 6h \frac{\partial}{\partial x_3} (W_1 + W_2) + 12 V_2$$

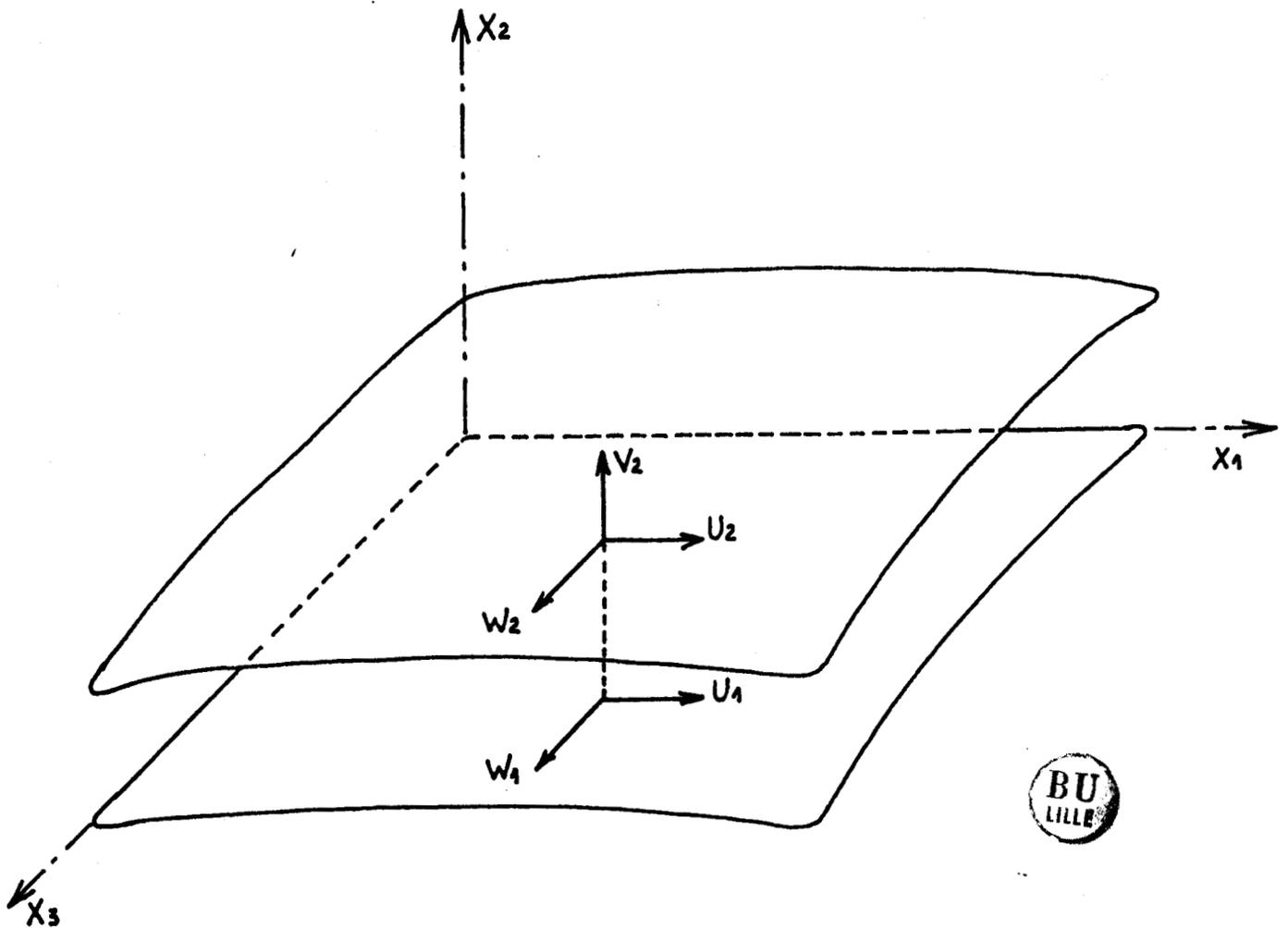


figure 2.2 : Système d'axes lié à l'une des parois

## 2.2 Application au cas des paliers [15]

### a) Description d'un palier

Un palier hydrodynamique est constitué d'un coussinet fixe ,d'un arbre tournant et d'un film lubrifiant (figure 2.3)

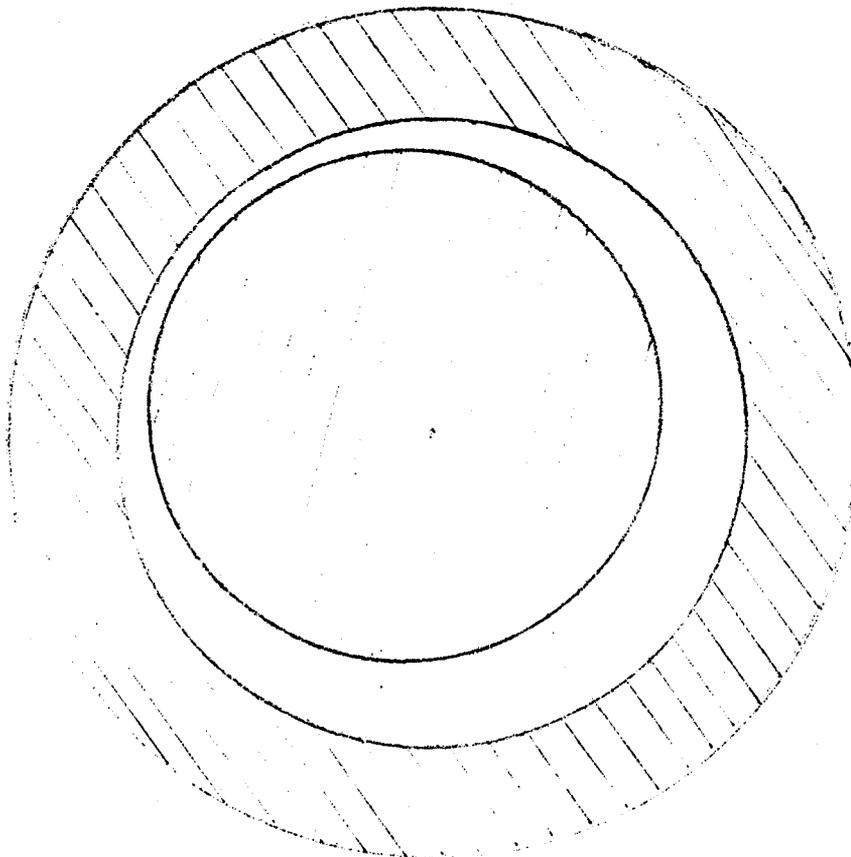


figure 2.3 palier hydrodynamique



Si on creuse des alvéoles dans le coussinet et qu'on les alimente par des pressions importantes, le palier est dit hydrostatique dans le cas où la vitesse de rotation de l'arbre est nulle. Si elle est non nulle, le palier est dit hybride. Les comportements des paliers hydrostatiques ou hybrides étant voisins on adopte le nom d'hydrostatique dans les deux cas ( figure 2.4 )

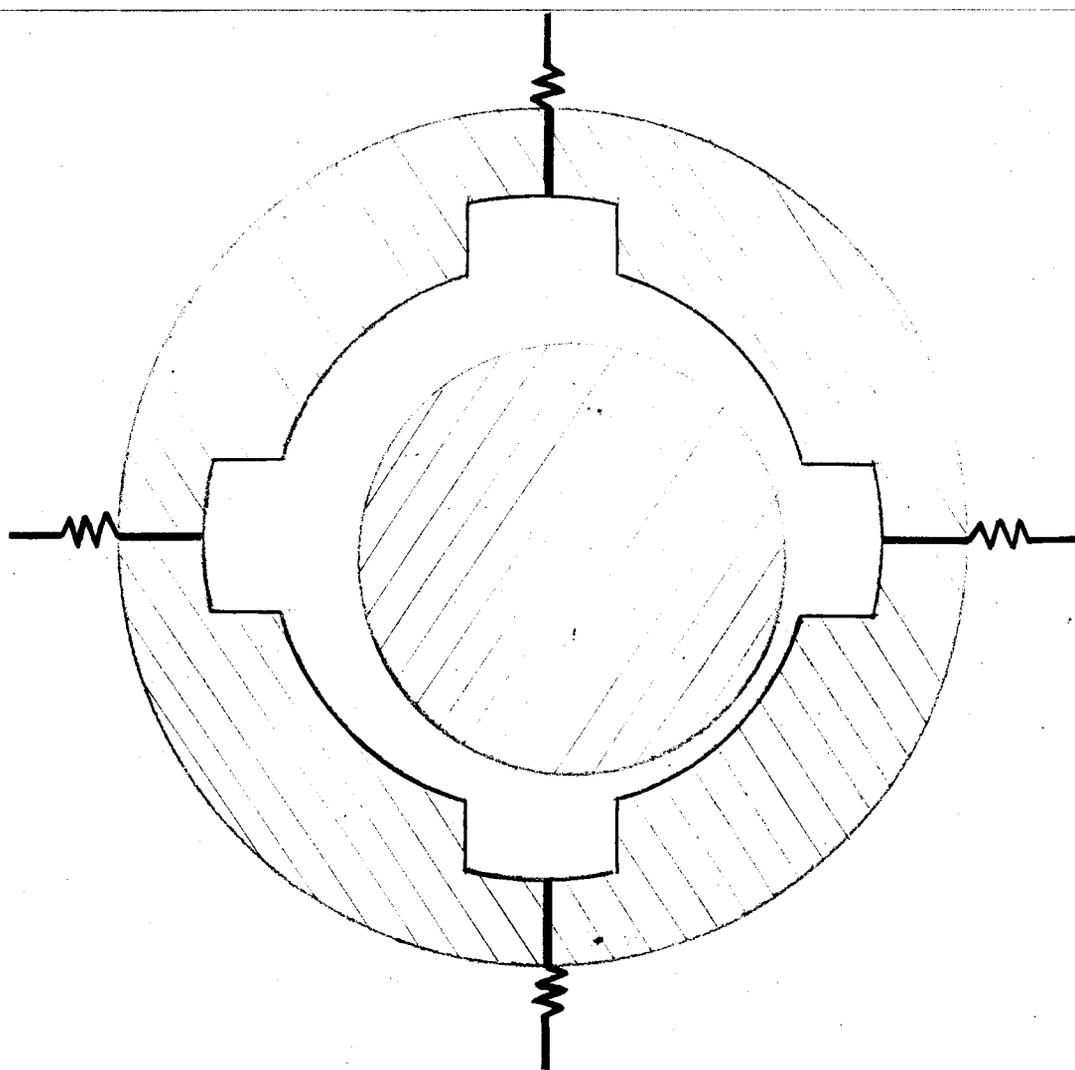


figure 2.4 : palier hydrostatique

Dans un palier hydrodynamique, la portance est une conséquence de la vitesse relative et de la forme des surfaces.

Le palier hydrodynamique est fréquemment utilisé pour guider les lignes d'arbres horizontales chargées.

Dans un palier hydrostatique la portance résulte de l'existence d'une source de pression extérieure et de débit (une pompe le plus souvent).

Un palier hydrostatique est parfois utilisé comme guide d'arbres verticaux ou dans des mécanismes qui démarrent fréquemment sous charge et pour lesquels la vitesse de rotation n'est pas suffisante pour engendrer une portance hydrodynamique.

Par rapport aux paliers hydrodynamiques la mise en oeuvre des paliers hydrostatiques est plus lourde (pompe, résistances

hydrauliques, alvéoles, circuit de retour, etc...) donc plus couteuse. Mais ils présentent l'énorme avantage d'avoir une capacité de charge à vitesse nulle.

b) Les hypothèses et leurs conséquences sur l'équation de Reynolds

-les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles (palier aligné)

-les rayons  $r_2$  de l'arbre et  $r_1$  du coussinet sont très voisins

$$\frac{r_1}{r_2 - r_1} \approx 1000 \quad , \quad \text{on peut négliger la courbure du film,}$$

développer le coussinet et l'assimiler à un plan (figure 2.5).

On est en lubrification par film mince.

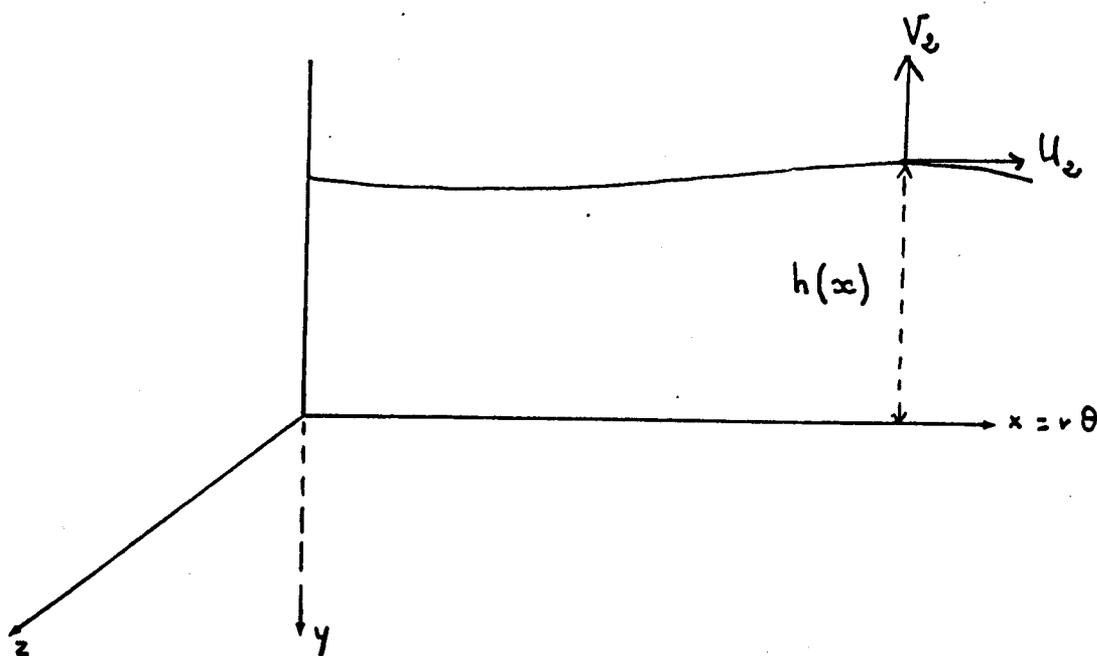


figure 2.5 : Palier developpé

Le coussinet est considéré comme fixe et il n'y a pas de mouvements axiaux relatifs de l'arbre par rapport au coussinet. En prenant pour système d'axes le repère  $x, y, z$  (figure 2.5),

on a :  $U_1 = V_1 = W_1 = 0$  ,  $W_2 = 0$

et l'équation de Reynolds pour un palier hydrodynamique ou hydrostatique s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - 6h \frac{\partial U_2}{\partial x} - 12 V_2$$

L'expression du jeu  $h$  selon une direction radiale définie par rapport au coussinet par l'angle polaire  $\phi$ , s'obtient à partir de considérations géométriques conformément à la figure 2.6. Notons par  $h_0 = r_1 - r_2$  le jeu radial lorsque les centres de l'arbre et du coussinet sont confondus.

Un point  $M$  appartenant à la surface du coussinet est repéré par l'angle  $\theta$  (figure 2.6).

Notons par  $e$ , appelé excentricité, la distance qui sépare le centre de l'arbre du centre du coussinet, et par  $\epsilon$  l'excentricité relative qui est égale à  $\frac{e}{h_0}$ .

$M'$  est un point sur l'arbre

$$\text{On a : } h = |MM'| = |O_1M| - |O_1M'| = r_2 + h_0 - |O_1M'|$$

Appliquons la règle des sinus au triangle (  $O_1, O_2, M'$  )

$$\frac{O_1 M'}{\sin (O_1 O_2 M')} = \frac{r_2}{\sin \theta} = \frac{e}{\sin \alpha}$$

or  $\widehat{O_1 O_2 M'} = \theta - \alpha$

et  $\alpha = \arcsin \left( \frac{e}{r_2} \sin \theta \right)$

En développant le sinus on a :

$$\begin{aligned} \sin (\theta - \alpha) &= \sin \theta \cos \left( - \arcsin \left( \frac{e}{r_2} \sin \theta \right) \right) - \cos \theta \left( \frac{e}{r_2} \sin \theta \right) \\ &= \sin \theta \left[ 1 - \left( \frac{e}{r_2 \sin \theta} \right)^2 \right] - \frac{e}{r_2} \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

d'où  $|O_1 M'| = r_2 \left[ 1 - \left( \frac{e}{r_2} \sin \theta \right)^2 \right]^{1/2} - e \cos \theta$

Or la quantité  $\left( \frac{e}{r_2} \right)$  est très petite devant l'unité (de l'ordre de  $10^{-3}$ ). On peut donc négliger le terme  $\left( \frac{e}{r_2} \sin \theta \right)^2$  devant 1.

$$|O_1 M'| = r_2 - e \cos \theta$$

D'où  $h = h_0 (1 + \epsilon \cos \theta)$

où  $\epsilon = \frac{e}{h_0}$  : excentricité relative



Paramétrage :

$$X = e \sin \phi \quad Y = - e \cos \phi$$

et  $\dot{X} = \dot{e} \sin \phi + e \dot{\phi} \cos \phi$  ,  $\dot{Y} = - \dot{e} \cos \phi + e \dot{\phi} \sin \phi$

d'où  $\vec{V}(O_2) = (-e \dot{\phi} \cos \theta + \dot{e} \sin \theta) \vec{x} + (-e \dot{\phi} \sin \theta + \dot{e} \cos \theta) \vec{y}$

La vitesse du point M' qui appartient à la surface de l'arbre est donnée par:

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(O_2) + \vec{\omega} \wedge O_2 M' = \vec{V}(O_2) + r \omega (\vec{x} + \vec{y} \sin \alpha)$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation de l'arbre et  $(\alpha)$  est petit ( $\cos \alpha \cong 1$ ) et ( $\sin \alpha = \frac{e}{r} \sin \theta = -\frac{dh}{dx}$ )

d'où

$$U_2 = - e \dot{\phi} \cos \theta + \dot{e} \sin \theta + r\omega$$

$$V_2 = - e \dot{\phi} \sin \theta - \dot{e} \cos \theta$$

et  $6 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - 6h \frac{\partial U_2}{\partial x} - 12 V_2 = - 6 \left[ - \frac{e \dot{\phi}}{r \omega} \cos \theta + \frac{\dot{e}}{r\omega} + 1 \right] e \omega \sin \theta$

$$+ \left( \frac{e \dot{\phi} \sin \theta}{r} + \frac{\dot{e}}{r} \cos \theta \right) [12r - 6h_0 (1 + \frac{e}{h_0} \cos \theta)]$$

De façon cohérente avec les hypothèses qui ont servi à déterminer l'équation de Reynolds de base, on suppose d'une part que :  $\frac{h_0}{r} \ll 1$  et d'autre part que le temps caractéristique de référence est de l'ordre de  $\frac{2\pi}{\omega}$  ( paragraphe 2.1, avec

$L \cong 2\pi r$  et  $V = r\omega$  par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left[ r\omega \frac{dh}{dx} + 2\dot{\phi} e \sin \theta + 2\dot{e} \cos \theta \right]$$

En posant :  $x = r\theta$        $z = r\xi$

L'équation de Reynolds dans le repère  $(O_1, \eta, \zeta, \xi)$  (figure 2.6) devient ainsi

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h_0^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{h^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] =$$

$$6 r^2 h_0 [-\varepsilon (\omega - 2\dot{\phi}) \sin \theta + 2 \dot{e} \cos \theta]$$

**CHAPITRE 2: Régime turbulent en lubrification par film mince. Equation de Reynolds en régime turbulent**  
**Application au cas des paliers.**

**1 Equations générales. Modèle de turbulence**

**a) Equations générales**

Pour un fluide isovolume et un écoulement isotherme turbulent, les relations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, exprimées dans un repère  $x, y, z$  à l'aide de grandeurs statistiques moyennes ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ) ont la même structure qu'en régime laminaire à condition d'introduire les termes supplémentaires correspondant au tenseur de Reynolds :

$$\begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir déterminer l'écoulement, il faut modéliser ces tensions turbulentes. Un modèle couramment utilisé consiste à introduire dans une première étape la notion de viscosité turbulente  $\nu_t$  ( hypothèse de Boussinesq ) :

$$\overline{u'^2} = - 2 \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \overline{u'v'} = - \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \quad \overline{u'w'} = - \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right),$$

....

L'équation de quantité de mouvement est alors équivalente à :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(v + v_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [(v + v_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial z} [(v + v_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}] + \frac{\partial}{\partial x} [v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [v_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial z} [v_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}]$$

Comme on l'a vu au chapitre 1, si l'on suppose

$$\frac{h}{L} \ll 1 \quad \text{et} \quad R_{ht} = \frac{Vh}{\nu + \nu_t} \ll \frac{1}{\varepsilon}$$

alors les termes d'inertie du type  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$  deviennent négligeables devant les termes "visqueux" et

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [(v + v_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}]$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [(v + v_t) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}]$$

Soit  $(u, v, w, p)$  représentant dans tout ce qui suit les grandeurs moyennes  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$

#### b) Modèle de turbulence

Pour traduire la turbulence on utilise un schéma algébrique pour déterminer  $\nu_t$  [16,17]

Parmi les modèles possibles on considère le modèle basé sur l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl principalement développé par Constantinescu, et celui basé sur l'hypothèse de "loi de paroi" qui fait appel aux travaux de Ng, Pan et Elrod en particulier.

- Approche de Constantinescu

L'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl exprime les tensions turbulentes en fonction des gradients de vitesses moyennes :

$$v_t = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}$$

La longueur de mélange ( $l$ ) est une fonction de  $y$  qui doit s'annuler près des parois [18].

$$\begin{aligned} l &= ky & \text{pour} & \quad 0 < y < \frac{h}{2} \\ l &= k(h-y) & \text{pour} & \quad \frac{h}{2} < y < h \end{aligned} \quad \text{où } 0.15 < k < 0.4$$

Constantinescu [4] en premier lieu étudie un écoulement monodimensionnel  $w = 0$ , avec, comme conditions aux limites :

$$u(x, 0) = 0 \quad u(x, h) = U_2$$

D'où  $v_t = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$

Dans l'intervalle  $\left[0, \frac{h}{2}\right]$  il obtient :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k^2 y^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

Dans l'intervalle  $\left[\frac{h}{2}, h\right]$ , il aboutit à la même équation en

utilisant la substitution ( $y' = h - y$ )

En considérant les valeurs non dimensionnelles telles que :

$$\bar{u} = \frac{u}{U_2} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{y}{h}$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[ A \bar{y}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right| \right] + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + B_x = 0$$

où

$$A = k^2 R_h ; R_h = \frac{\rho U_2 h}{\mu} ; B_x = - \frac{h^2}{\mu U_2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Lorsqu'il intègre cette équation par rapport à ( $y$ ) il obtient :

$$A \bar{y}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right| + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + B_x \bar{y} + C = 0$$

L'équation précitée s'intègre aussi bien rigoureusement qu'approximativement pour donner la distribution de vitesse moyenne ( $\bar{u}$ ). Constantinescu ayant obtenu par les deux méthodes des résultats identiques a utilisé la deuxième méthode qui est plus simple [4]. Constantinescu et d'autres auteurs ont montré plus tard que seule la méthode rigoureuse donnait des résultats satisfaisant.

Résolution approximative :

Constantinescu suppose l'existence d'une couche laminaire près

des parois. Il néglige alors le terme  $A \bar{y}^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|$  devant le terme  $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$  près des parois.

Le terme  $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$  étant négligeable dans le reste du domaine

Il est facile alors de déterminer les répartitions de vitesses  $u$  pour différentes valeurs de  $B_x$  et d'en déduire les vitesses moyennes  $u_m$  :

$$u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dy$$

Posons :  $u_m = u_{mp} + u_{mc}$

où  $u_{mC}$  est la vitesse moyenne de l'écoulement de Couette laminaire.

En variables adimensionnelles on a:  $\bar{u}_m = \bar{u}_{mp} + \frac{1}{2}$

Dans le cas laminaire:  $u_m = -\frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_2}{2}$

et par conséquent:  $\bar{u}_{mp} = -\frac{1}{12} \frac{h^2}{\mu U_2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{12} B_x$

La vitesse moyenne varie de façon linéaire avec  $B_x$  et ne dépend pas du nombre de Reynolds.

Pour l'écoulement turbulent on peut représenter  $B_x$  en fonction de la vitesse moyenne  $u_{mp}$  pour différents nombres de Reynolds.

Si l'écoulement est du type Couette dû essentiellement à la vitesse d'une des parois alors la figure 3.2 tirée de [4] représente pour différents nombres de Reynolds,  $B_x$  en fonction de  $u_{mp}$ :

$$B_x = k_x \bar{u}_{mp}^n$$

avec  $n$  très voisin de 1 (valeur maximale  $n = 1,09$ )

Si on considère approximativement une variation linéaire alors:

$$B_x = k_x \bar{u}_{mp}$$

Dans le cas laminaire:  $k_x = 12$

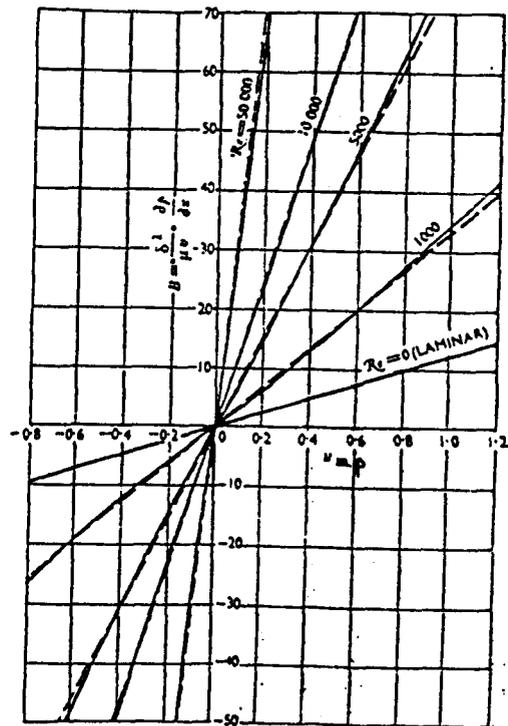


figure 3.2 : variation de  $B_x$  en fonction de  $u_{mp}$  pour différents nombres de Reynolds

En 1959, Constantinescu propose pour  $k_x$  la forme analytique suivante :

$$k_x = 12 + 0.14 (R_h)^{0.725}$$

alors :

$$u_m = - \frac{h^2}{\mu k_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_2}{2}$$

Pour résoudre l'équation en  $w$  Constantinescu suppose alors que  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  dans l'expression de  $v_t$ . On obtient alors la même

équation que pour  $u$  en remplaçant  $u$  par  $w$  et  $B_x$  par  $B_z$ .

$$B_z \cdot B_z = - \frac{h^2}{\mu U_2} \frac{\partial p}{\partial z}$$

il obtient :  $A \bar{y}^2 \left| \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + B_z \bar{y} + C' = 0$

Par le même procédé que pour  $u$ , il détermine  $w$ .

D'après la figure 3.3 tirée de [4] il pose :  $B_z = k_z w_m = k_z \frac{w_m}{U_2}$

avec  $k_z = 12 + 0.09 (R_h)^{0.65}$

d'où  $w_m = - \frac{h^2}{\mu k_z} \frac{\partial p}{\partial z}$

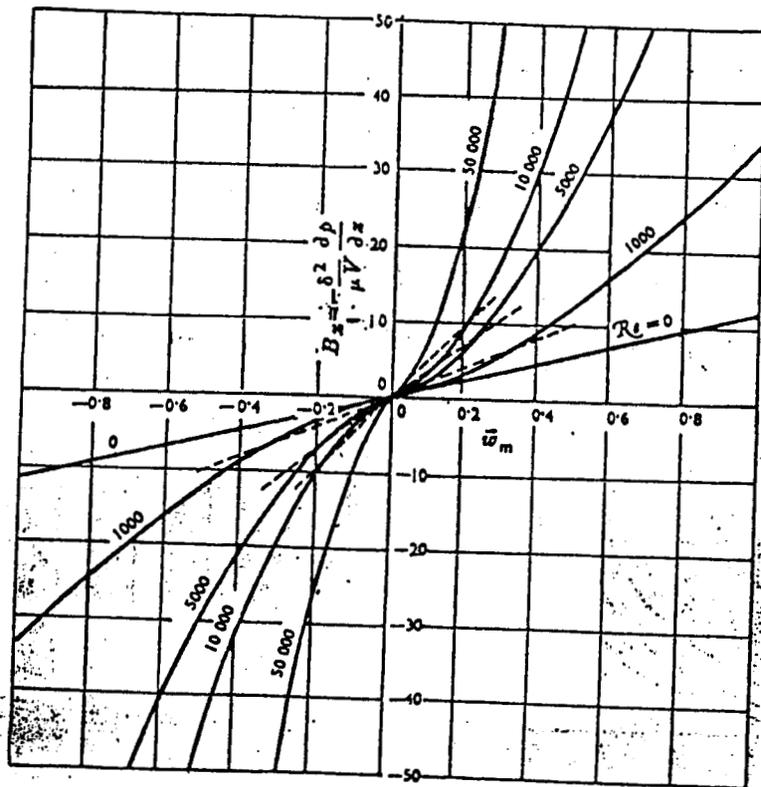


figure 3.3 : Variation de  $B_z$  en fonction de  $w_m$  pour différents nombres de Reynolds

En ce qui concerne cette approche il faut remarquer que le fait de prendre pour  $v_t$ , soit  $l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ , soit  $l^2 \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|$  au lieu de

$$l^2 \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} \quad \text{découple les équations suivant } x \text{ et } z.$$

De plus il n'y a dès lors plus de raisons d'exprimer le  $B_z$  en fonction du  $R_h$ .

En 1965 Ng et Pan [19] ont remédié à ce problème en considérant que l'écoulement de Couette est prépondérant, ce qui leur permet, moyennant une linéarisation, d'obtenir une expression de  $v_t$  qui tient compte du couplage.

En réalité ceci est fait au travers d'une loi de paroi généralisée. Bien sur ils expriment  $u_m$  et  $w_m$  avec des formules semblables à celles de Constantinescu avec des coefficients  $G_x$  et  $G_z$  qui sont des réciproques formelles de  $k_x$  et  $k_z$ . Alors :

$$u_m = - \frac{h^2 G_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_2}{2}$$

$$w_m = - \frac{h^2 G_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Mais dès maintenant l'expression du  $G_z$  pour un écoulement de Couette turbulent prépondérant est justifié.

En 1967 Elrod et Ng [6] et [20] reprennent l'analyse, cette fois sans linéarisation.

Elrod propose pour  $v_t$  une extension de la formule empirique de Reichard :

$$\frac{v_t}{v} = k (y^+ - \delta_1 \operatorname{th} \left( \frac{y^+}{\delta_1} \right))$$

$$\delta_1 = 10.7 \quad k = 0.4$$

avec  $u_p = \left[ \frac{|\tau_p|}{\rho} \right]^{1/2}$  ,  $\tau_p$  : contrainte de cisaillement à la paroi

$$\text{soit } y^+ = y \frac{|\tau_p|}{\rho v}$$

Elrod propose d'étendre le cas bidimensionnel au cas tridimensionnel en remplaçant  $\tau_p$  par  $\tau$  contrainte de cisaillement locale. On a alors :

$$\frac{v_t}{v} = k (y^+ - \delta_1 \operatorname{th} \left( \frac{y^+}{\delta_1} \right))$$

$$y^+ = y \frac{|\tau|}{\rho v}^{1/2}$$

Compte tenu des hypothèses de la lubrification

$$\tau_{xy} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2$$

$$\tau_{yz} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial w}{\partial y}$$

On peut remarquer que pour des  $y^+ \gg \delta_1$  :

$$\frac{v_t}{v} = ky^+ \quad \text{donc } v_t \gg v$$

$$\tau_{xy} \approx \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \tau_{yz} \approx \rho v_t \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$v_t = k^2 y^2 \left| \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right|^{1/2}$$

La loi de paroi généralisée est donc asymptotiquement équivalente à l'hypothèse de longueur de mélange avec  $l = ky$

Connaissant  $v_t$  les équations de quantité de mouvement permettant d'obtenir  $u_m$  et  $w_m$  ont la même structure formelle que celles obtenues par Constantinescu mais les coefficients  $G_x$  et  $G_z$  ont des expressions différentes :

$$G_x = J(1) \frac{J}{I(1)} - J + \left[ \frac{1}{2} - \frac{I}{I(1)} \frac{h u_2}{v} \right] + \left[ \frac{h^3}{\mu v} \frac{\partial p}{\partial x} \right]$$

$$G_z = J(1) \frac{I}{I(1)} - J$$

où

$$I(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{1 + v_t/v} \quad J(\eta) = \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{1 + v_t/v}$$

I et J sont des moyennes de 0 à 1 de  $I(\eta)$  et  $J(\eta)$  respectivement

En 1966 [21], puis finalement en 1970 et 1973 [22, 23], Constantinescu dans une synthèse propose pour  $k_x$  et  $k_z$  des formules dont la forme résulte des travaux précédents.

$G_x$  et  $G_z$  sont interprétés comme la diagonale d'un tenseur  $\vec{G}$

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{U}_2}{2} - \frac{h^2}{\mu} \vec{G} \cdot \nabla p$$

Si l'écoulement est à prédominance Couette [19]:

$$G_x = \frac{1}{k_x} = \frac{1}{12 + 0,0136 R_h^{0.9}}$$

$$G_z = \frac{1}{k_z} = \frac{1}{12 + 0,0043 R_h^{0.96}}$$

$$R_h = \frac{\rho U_2 h}{\mu}$$

Si l'écoulement est essentiellement dû aux gradients de pressions  $\vec{G}$  peut-être déterminé expérimentalement ou calculé analytiquement. La figure 3.4 tirée de [7] permet d'écrire  $G$  sous la forme suivante :

$$G = \frac{6.8}{(R_{ep})^{0.681}} \quad ; \quad R_{ep} = \frac{V_m h}{\nu}$$

$V_m$  vitesse moyenne,  $V_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2}$ .

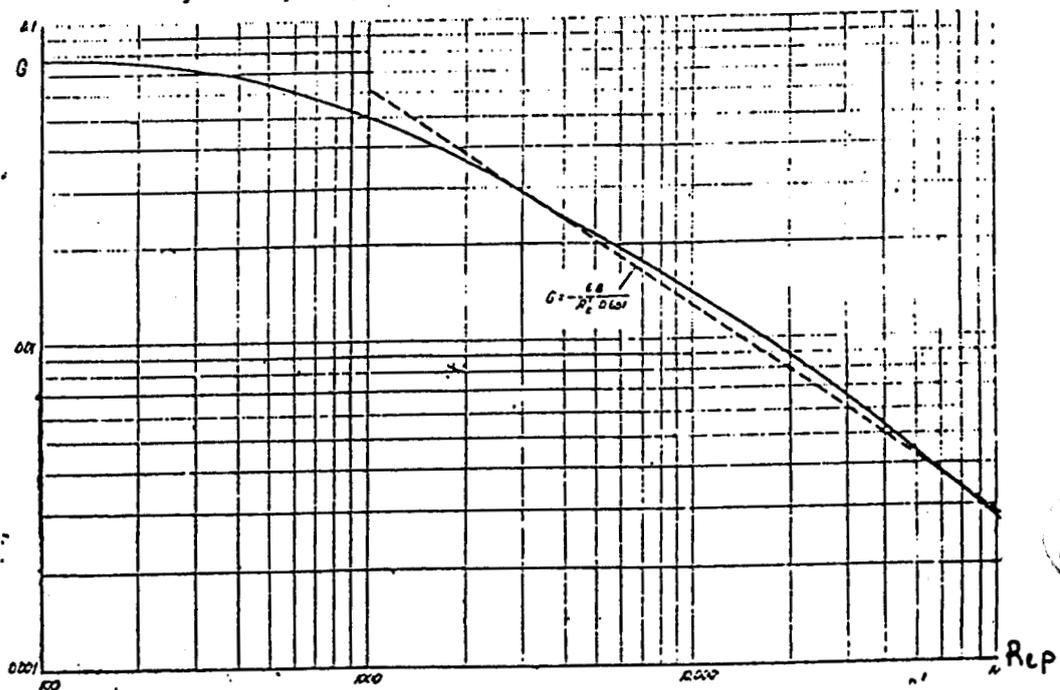


figure 3.4 : Variation de  $G$  en fonction de  $R_{ep}$

Constantinescu indique que les analyses non linéaires ( Elrod par exemple) montrent que les composantes de  $\vec{G}$  prennent, lorsque les gradients de pression croissent, les valeurs  $G_x, G_z$  linéarisées de Couette pour tendre vers la valeur  $G$ . Il utilise alors en pratique les valeurs linéarisées  $G_x, G_z$  tant que  $G_{x,z} < G$  sinon il pose  $G_{x,z} = G$  quand les valeurs linéarisées sont plus grandes que  $G$ .

## 2 Equation de Reynolds en turbulent

Les deux démarches précédentes permettent de déterminer les vitesses moyennes  $u_m$  et  $w_m$  en fonction des gradients de pression et de la vitesse relative des parois. Ces relations ayant la même structure qu'en laminaire, on obtient pour l'équation de Reynolds en turbulent:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{\mu} G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right] = - \frac{U_2}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial U_2}{\partial x} + V_2$$

Les coefficients  $G_x$  et  $G_z$  remplaçant le coefficient  $\left( \frac{1}{12} \right)$

## 3 Application au cas des paliers

Là encore comme en laminaire l'équation de Reynolds en turbulent s'écrit dans le cas des palier dans le repère  $(O_1, \eta, \zeta, \xi)$  ( figure 2.6 ) :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h_0^3 (1 + \epsilon \cos \theta)^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ G_z \frac{h_0^3 (1 + \epsilon \cos \theta)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] =$$

$$\frac{1}{2} r^2 h_0 [-\epsilon (\omega - 2\dot{\phi}) \sin \theta + 2 \dot{\epsilon} \cos \theta]$$

## CHAPITRE 3: Paliers hydrostatiques en régime turbulent

### Modélisation numérique

#### 1 Introduction

La modélisation, maintenant classique, du comportement des paliers hydrostatiques en régime turbulent fait appel à des schématisations nécessitant l'introduction de constantes de type expérimental dont les valeurs peuvent notamment dépendre de la géométrie fine des paliers et des conditions d'environnement.

Dans le but d'évaluer les performances prédictives du modèle on va choisir "les meilleures valeurs" des constantes et on va calculer les caractéristiques de divers paliers. On compare ensuite les résultats obtenus, soit aux résultats d'autres auteurs, soit aux résultats expérimentaux [24].

#### 2 Le modèle

Il consiste essentiellement en l'équation de Reynolds qui permet de déterminer le champ de pression dans les portées, et un modèle de l'écoulement dans les chambres et dans les jonctions (jonctions chambre-portée et jonction portée-extérieur).

##### a) Equation de Reynolds

C'est celle du chapitre précédent :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h_0^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{\mu} C_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C_z \frac{h^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] =$$

$$\frac{1}{2} r^2 h_0 [-\varepsilon (\omega - 2\dot{\phi}) \sin \theta + 2 \dot{\varepsilon} \cos \theta]$$

## CHAPITRE 3: Paliers hydrostatiques en régime turbulent Modélisation numérique

### 1 Introduction

La modélisation, maintenant classique, du comportement des paliers hydrostatiques en régime turbulent fait appel à des schématisations nécessitant l'introduction de constantes de type expérimental dont les valeurs peuvent notamment dépendre de la géométrie fine des paliers et des conditions d'environnement.

Dans le but d'évaluer les performances du modèle on va choisir "les meilleures valeurs" des constantes et on va calculer les caractéristiques de divers paliers. On compare ensuite les résultats obtenus, soit aux résultats d'autres auteurs, soit aux résultats expérimentaux [24].

### 2 Le modèle

Il consiste essentiellement en l'équation de Reynolds qui permet de déterminer le champ de pression dans les portées, et un modèle de l'écoulement dans les chambres et dans les jonctions (jonctions chambre-portée et jonction portée-extérieur).

#### a) Equation de Reynolds

C'est celle du chapitre précédent :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h_o^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{\mu} G_x \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ G_z \frac{h^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] =$$

$$\frac{1}{2} r^2 h_o [-\varepsilon (\omega - 2\dot{\phi}) \sin \theta + 2 \dot{\varepsilon} \cos \theta]$$



Pour un diaphragme ou un orifice, le débit est donné par la relation suivante :

$$Q_t = C_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{oo} - P_{oi})} = K_c \sqrt{P_{oo} - P_{oi}}$$

où  $C_d$  est un coefficient de débit

On suppose que dans chaque chambre les vitesses sont négligeables. Par conséquent l'équation de quantité de mouvement se réduit à ( $P_{oi} = \text{cste}$ ) et l'équation de continuité à :

$$Q_t = \frac{dV}{dt} + Q$$

$V$  étant le volume de la chambre et  $Q$  le débit sortant de la chambre

En statique cette relation se réduit à  $Q_t = Q$

On se souvient que l'équation de Reynolds n'est valable que dans le cas où les temps caractéristiques sont au plus de l'ordre de  $\frac{L}{V}$  (paragraphe 2.1 du chapitre 1).

Dans le cas des paliers :  $\frac{L}{V} = \frac{2\pi}{\omega}$

Si on évalue dans ce cadre les ordres de grandeurs de  $Q$  et  $\frac{dV}{dt}$  on obtient :  $Q \cong L h_o V$  et  $\frac{dV}{dt} = \frac{\alpha h_o L^2}{\beta \frac{L}{V}} = \frac{\alpha}{\beta} h_o LV$

Il en résulte que la relation  $Q_t = Q$  pourra être utilisée en dynamique à condition d'avoir des mouvement de faible amplitude et à basse fréquence ( inférieure à  $\frac{\omega}{2\pi}$  ).

### c) Ecoulement dans les jonctions

En supposant la vitesse de l'arbre nulle, à la frontière des chambres, la pression subirait une diminution à cause du retrécissement. De même lorsqu'on débouche vers l'extérieur, elle subirait une augmentation à cause cette fois de l'élargissement. En effet si on suppose l'écoulement monodimensionnel on a dans ce cas ( figure 4.1 a )

$$P_{oi} = P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \xi_1 \rho \frac{V_1^2}{2}$$

$$= P_1 + cf \rho \frac{V_1^2}{2}$$

$$P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = P_a + \xi_2 \rho \frac{V_2^2}{2}$$

$$P_2 = P_a - cf_1 \rho \frac{V_2^2}{2}$$

cf : coefficient de perte de pression chambre-portée ,  $cf=1+\xi_1$

cf1 : coefficient de perte de pression portée -exterieur,  $cf1=1-\xi_2$

finalement (  $\xi_2$  ) est de l'ordre de 1 et  $P_2 = P_a$

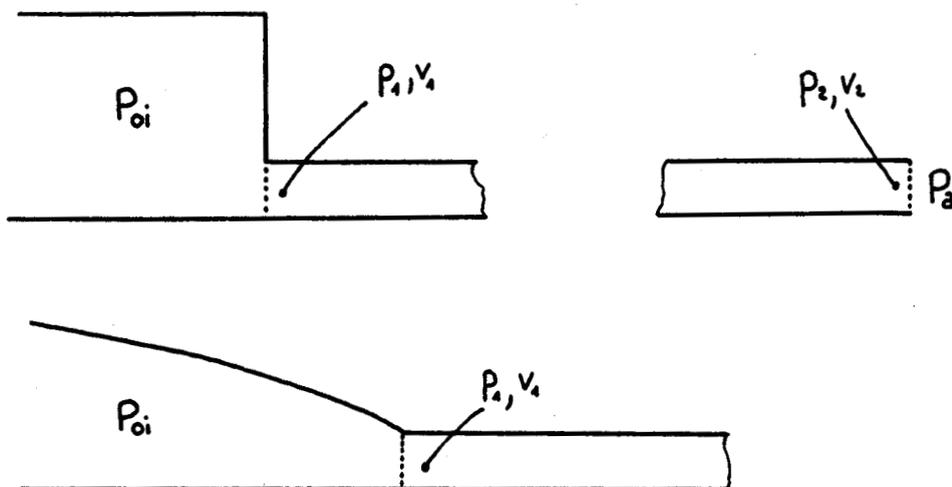


figure 4.1 a : Ecoulement aux jonctions

On a étendu ce résultat au cas où la vitesse de l'arbre  $U_2$  est différente de zéro , en admettant que seule la vitesse débitante, correspondant aux différences de pression chambre-portée, portée -extérieur, intervenait.

Il en résulte alors que , sur les frontières des chambres ( figure 4.1 b ) :

soit  $P_{oi} - P_1 = cf \rho \frac{w_m^2}{2}$

soit  $P_{oi} - P_1 = cf \rho (u_m - \frac{U_2}{2})^2 / 2$

Aux jonctions portées-extérieur ( figure 4.1 b ) :  $P_2 = P_a$

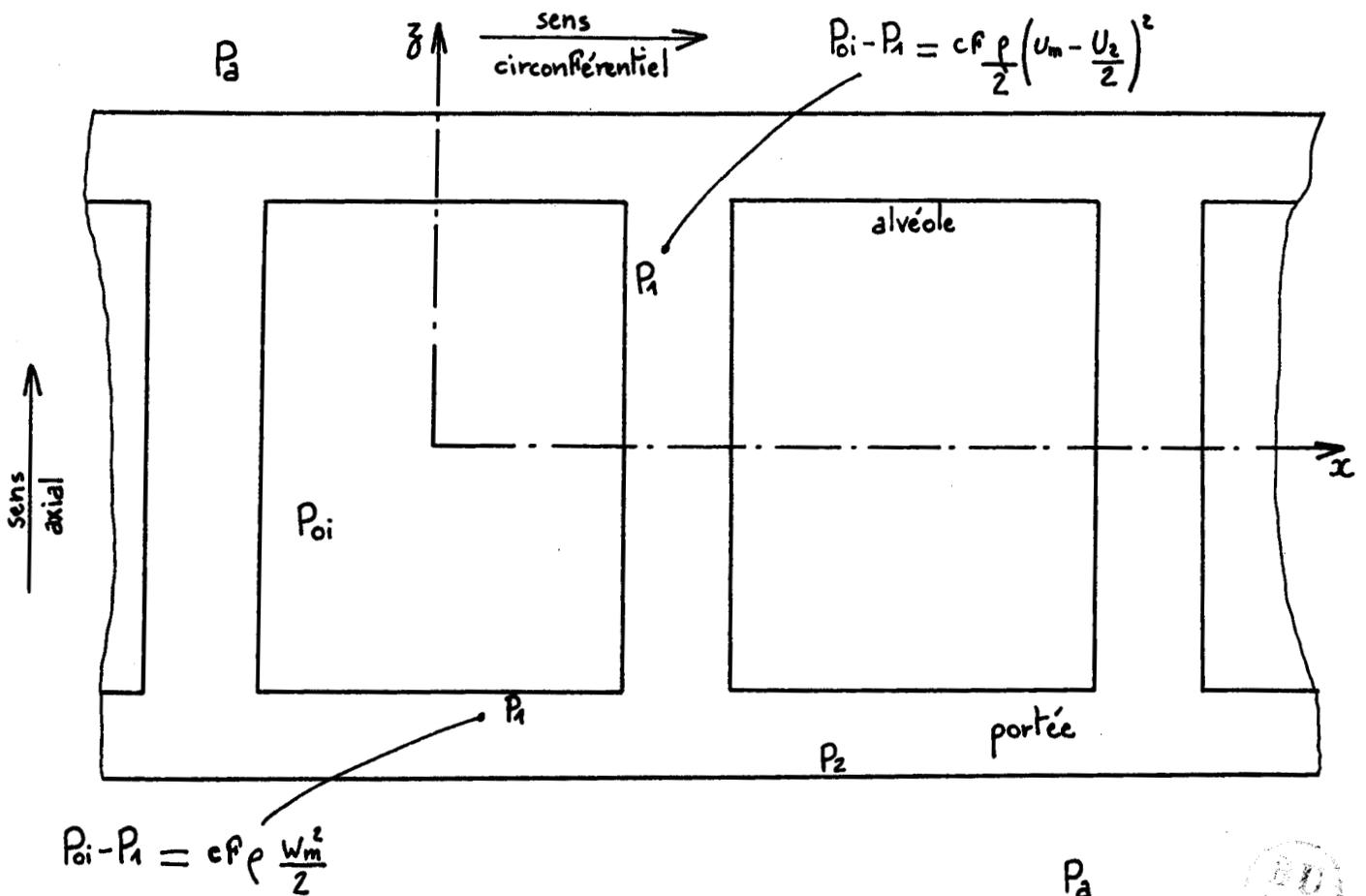


figure 4.1 b : Raccordement alvéole-film mince

#### d) Discrétisation de l'équation de Reynolds

La symétrie du phénomène par rapport au plan médian du coussinet nous permet de n'envisager que la moitié du système ( figure 4.2)

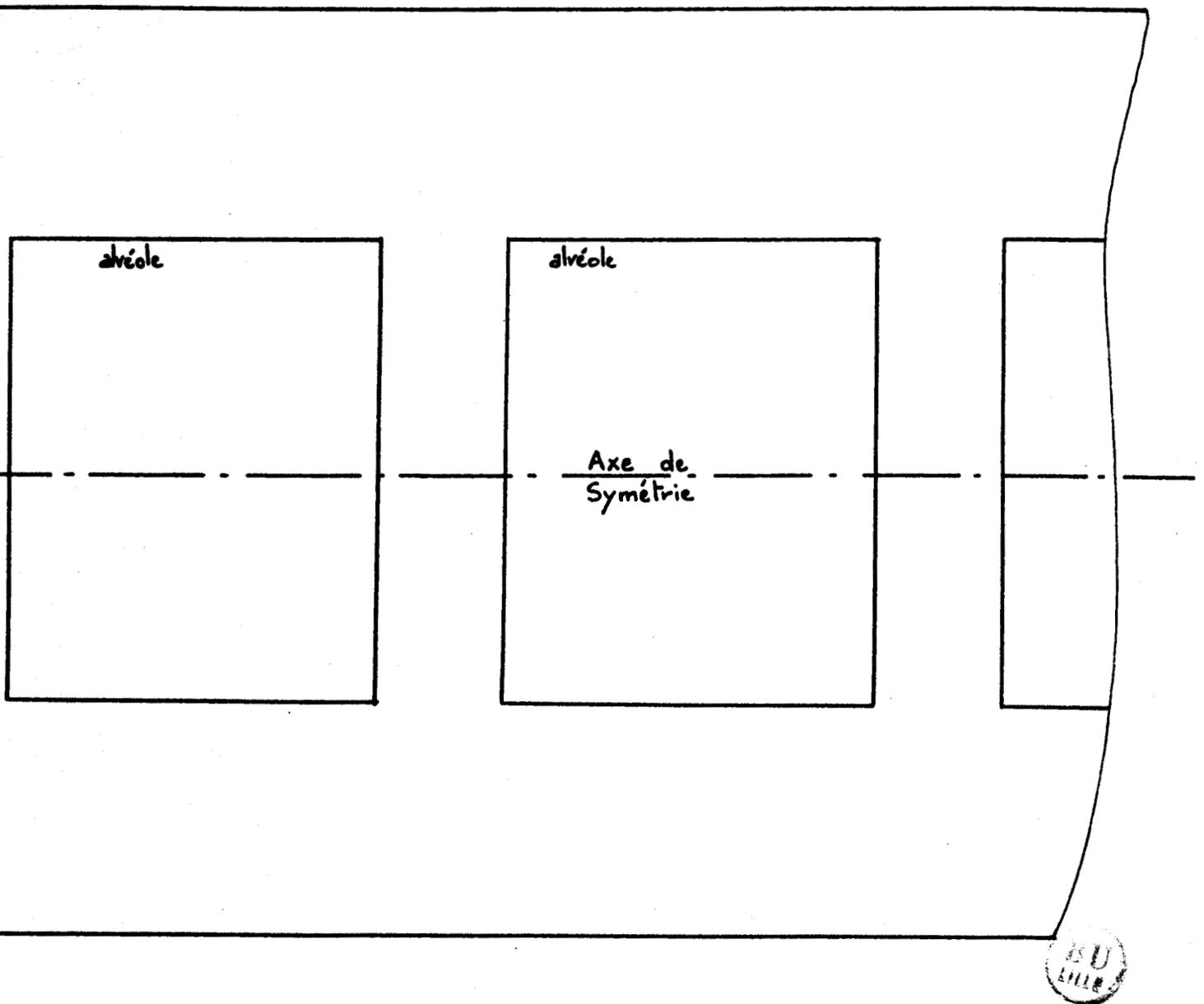


figure 4.2 : Domaine d'intégration

L'équation de Reynolds est discrétisée suivant une méthode de différences finies.

On fait un maillage régulier dans les portées et les interalvéoles. On ne considère pas les chambres puisque la pression est supposée constante à l'intérieur de ces dernières (figure 4.3).

On exprime les gradients de pression en un point  $(i,j)$  en fonction des pressions des points voisins. On obtient alors un système  $AX = B$  (annexe 1).

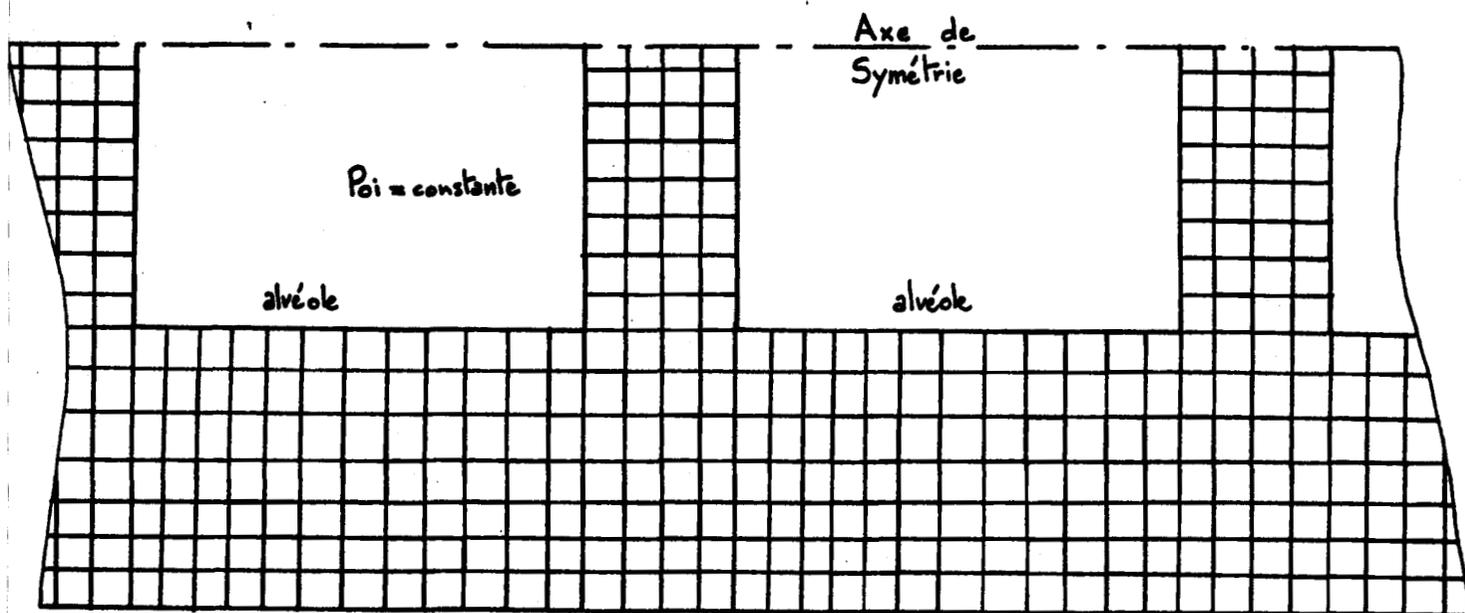


figure 4.3 : Maillage du domaine

## e) Algorithme général

### .Comportement statique

Pour une géométrie de palier donnée ( $\epsilon, \phi$  donnés), le champ de pression dans tout le palier est déterminé finalement par l'équation de Reynolds associée à des conditions aux limites résultant de la modélisation des écoulements dans les chambres et les jonctions (§ b et c).

Du fait de la structure des  $G_x$  et  $G_z$  ( chapitre 2 ), de la structure de ces conditions aux limites ( du type  $\Delta p = k \rho V^2$  ), le système à résoudre est fortement non linéaire.

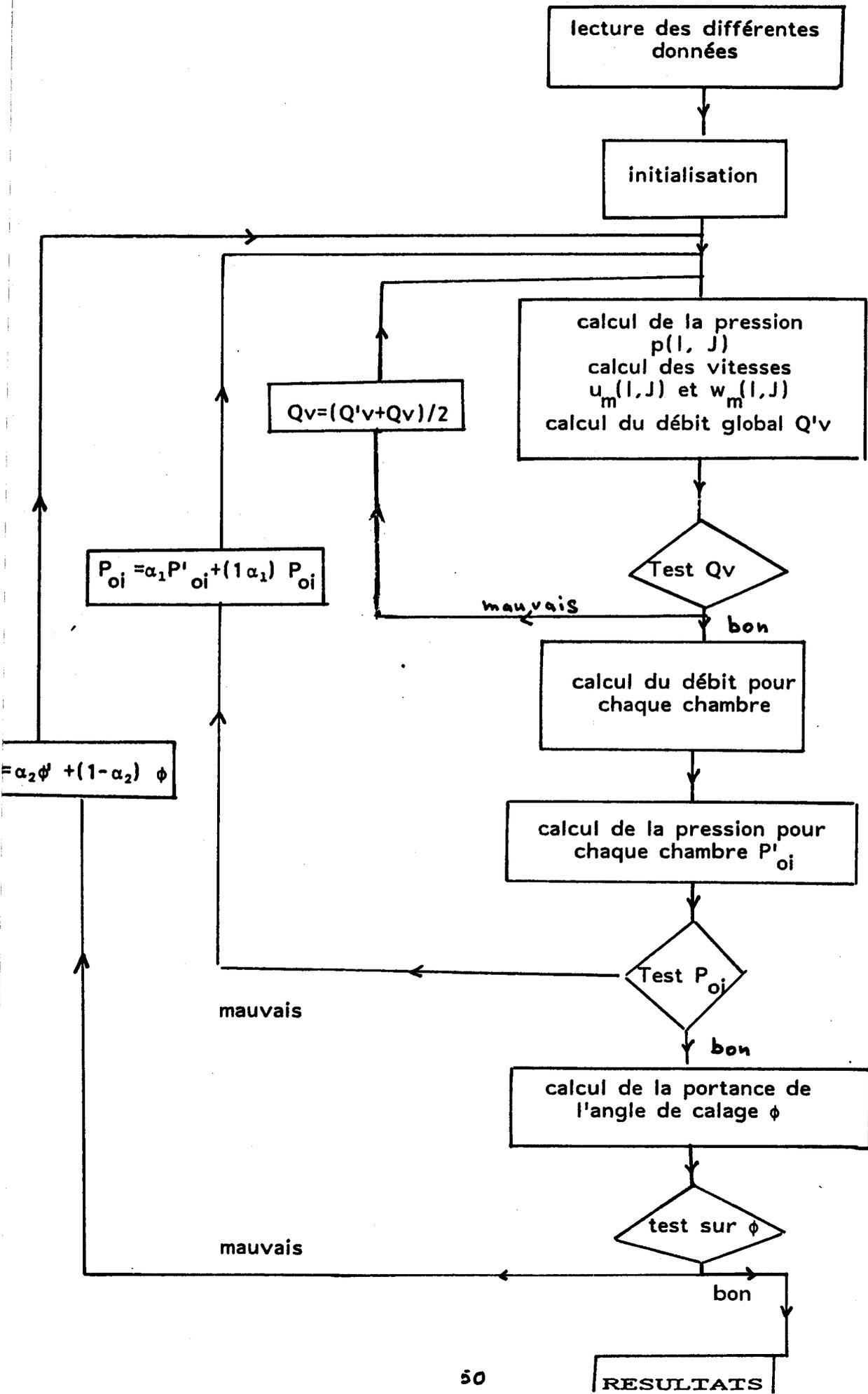
Il est résolu par une méthode itérative de type point fixe avec sous-relaxation en deux étapes ; la première étape se faisant à pression de chambre donnée.

Pour résoudre le système linéaire correspondant strictement à l'équation de Reynolds ( $AX = B$ ) on triangularise la matrice et on résoud par substitution " Algorithme de Gauss " [14](annexe 3). Connaissant les pressions, on peut calculer la force que peut supporter le palier ( annexe 3 ).

Si l'on souhaite connaître la réponse du palier à une force de direction donnée ( détermination de l'angle de calage  $\phi$  ), il suffit à nouveau d'itérer sur la variable  $\phi$  de façon à obtenir une direction de la force  $F$  donnée.

L'organigramme du programme est fournit par le tableau (4.1).

TABLEAU 4.1  
ORGANIGRAMME GENERAL



Finalem<sup>ent</sup> trois processus itératifs sont enclavés les uns dans les autres :

\* en premier pour des pressions de chambres et un angle de calage donnés, on détermine les  $G_x$  et  $G_z$  et les pertes de pression, chambre-portée ,portée-extérieur .

\* en deuxième ,on détermine les pressions de chambre pour que les débits d'injection et de sortie chambre soient égaux.

\* en troisième, on détermine l'angle de calage pour que la direction de la portance soit celle choisie.

A chacun de ces processus itératifs correspond un critère de convergence portant sur :

- le débit global du palier (annexe 2)
- les pressions dans les chambres
- l'angle de calage (annexe 3)

#### .Comportement dynamique

Il s'agit de déterminer les matrices de raideur et d'amortissement au voisinage de la position d'équilibre.

#### Coefficients de raideur (annexe 5)

A un accroissement  $\Delta x$  (figure 4.4) correspond une modification de la position statique  $(\epsilon, \phi)$  qui devient  $(\epsilon^*, \phi^*)$

On calcule alors compte tenu de cette modification les pressions des chambres et par suite la nouvelle répartition de charge qui, par différence avec l'état statique, donne les coefficients de raideur  $k_{xx}$  et  $k_{yx}$ .

$$k_{xx} = \frac{F_x - F_{x_0}}{\Delta x} \quad k_{yx} = \frac{F_y - F_{y_0}}{\Delta x}$$

de même, pour un accroissement  $\Delta y$  :

$$k_{xy} = \frac{F_x - F_{x_0}}{\Delta y} \quad k_{yy} = \frac{F_y - F_{y_0}}{\Delta y}$$

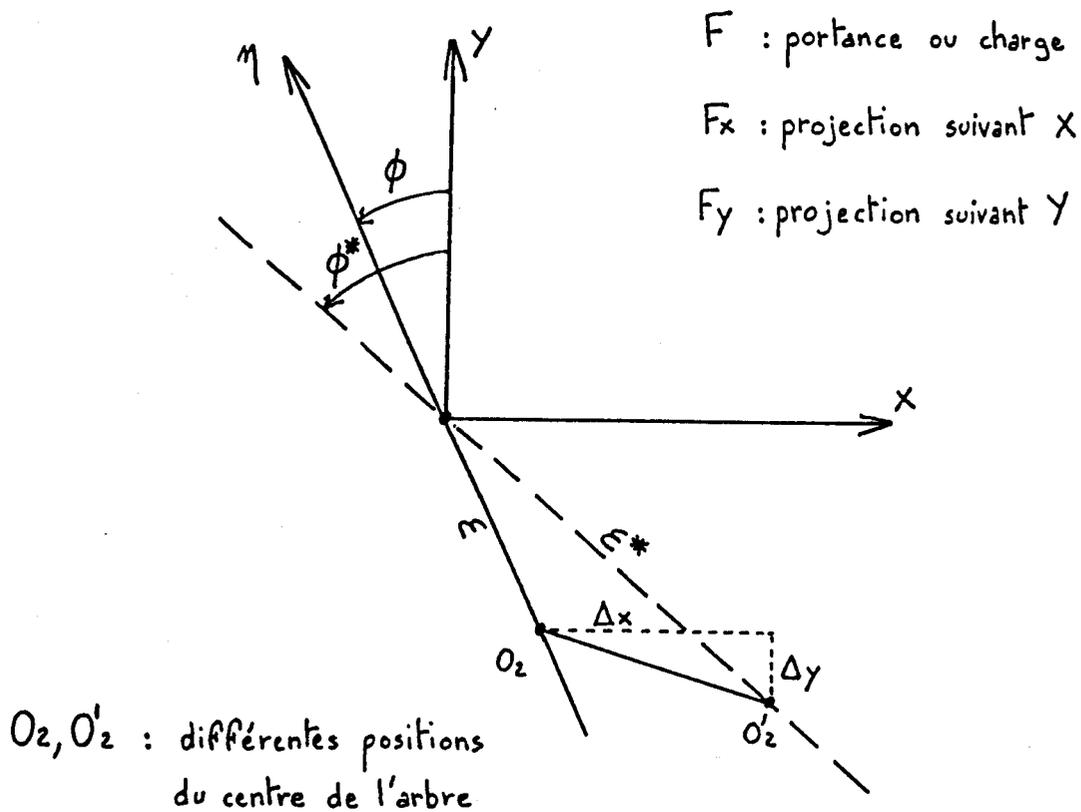


figure 4.4 : Modification de la position statique



## Coefficients d'amortissement

Le calcul se fait autour de la position d'équilibre . Dans l'équation de Reynolds s'ajoutent les termes dynamiques en  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\phi}$  qui viennent modifier le champ des pressions.

Pour un  $\Delta \dot{x}$  ou un  $\Delta \dot{y}$  auxquels correspondent des couples  $(\dot{\epsilon}, \dot{\phi})$  on détermine le nouveau champ de pression et la nouvelle répartition de charge qui, par différence avec l'état statique, donne les coefficients d'amortissement.

### 3 Critères de convergence

Ils ont été établis dans le cadre de l'étude statique d'un palier déterminé après que l'on ait choisi les valeurs raisonnables des paramètres :

- cd (coefficient de débit des diaphragmes)
- cf (coefficient de perte de pression chambre-portée)
- cf1 (coefficient de perte de pression portée-extérieur).

On a déterminé l'influence sur les résultats des précisions demandées sur :

- le débit global
- les pressions de chambres
- l'angle de calage.

Différents cas de calcul ont montré que les résultats devenaient <<suffisamment>> indépendants de ces précisions dès qu'elles étaient respectivement supérieures à 5 % , 2 % et 1 % (Tableau 4.2 ,4.3, 4.4).

La précision sur le débit global qui concerne la convergence de la boucle d'itération la plus interne ( calcul du champ de pression dans les portées connaissant les pressions de chambres ) n'est pas un facteur très important dans la mesure où, elle est suffisante pour assurer qu'il y a convergence.

Ceci résulte du fait que les performances du palier ( portance, angle de calage ) dépendent des niveaux de pressions qui sont fonction essentiellement des pressions de chambre, alors que le débit global dépend des gradients de pression.

	Résultats numériques		Essai
$\Delta Q_v / Q_v$	0,05	0,001	
$\Delta \text{Poi} / \text{Poi}$	0,002	0,002	
$\Delta \phi / \phi$	0,01	0,01	
$Q_v$	71,7	72,7	64
F	9010	9100	7500

Palier à 8 chambres

(excentricité :  $\epsilon = 0.1$ ,  $cf = 1.9$ ,  $cf_1 = 0$ ,  $cd = 0.85$ )

TABLEAU 4.2 : Influence de la précision demandée sur le débit global  $Q_v$



**INFLUENCE DE LA PRECISION DEMANDEE SUR  
LES PRESSIONS DE CHAMBRES  $P_{oi}$**

RESULTATS NUMERIQUES								ESSAI
	0.1	0.05	0.03	0.01	0.005	0.002	0.001	
$\frac{\Delta P_{oi}}{P_{oi}}$								
$\frac{\Delta \phi}{\phi}$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
$Q_v$	65.2	63.8	63.2	62.9	62.7	62.6	62.5	64
F	10 900	9 800	9 500	9 320	9 000	8 760	8 710	7 500

Palier à 8 chambres

excentricité  $\epsilon$  fixée à 0.1 - coefficients fixés  $C_f = 1.9$

$C_{f1} = 0.$

$C_d = 0.7$



INFLUENCE DE LA PRECISION DEMANDEE SUR L'ANGLE DE CALAGE  $\phi$ 

	RESULTATS NUMERIQUES						ESSAI
	0.01	0.01	0.01	0.002	0.002	0.002	
$\frac{\Delta P_{oi}}{P_{oi}}$	0.01	0.01	0.01	0.002	0.002	0.002	
$\frac{\Delta \phi}{\phi}$	0.01	0.005	0.001	0.05	0.01	0.001	
$Q_v$	62.9	62.8	62.8	62.7	62.6	62.6	
F	9320	9300	9290	9000	8700	8680	7500



Palier à 8 chambres

excentricité  $\epsilon$  fixée à 0.1 - coefficients fixés  $C_f = 1.9$  $C_{f1} = 0.$  $C_d = 0.7$

Lorsqu'on descend en dessous de ces valeurs on ne gagne rien en ce qui concerne l'amélioration des résultats, par contre on perd beaucoup en temps de calcul, donc ces valeurs sont raisonnables. C'est la précision sur les pressions de chambres qui est la plus importante à respecter.

#### 4 Analyse de sensibilité et choix des paramètres

Une fois admise la structure générale de la modélisation, différents choix restent possibles.

- choix du modèle de turbulence
- choix des coefficients ( $c_d$ ,  $c_f$ ,  $c_{f1}$ )

Pour traduire la turbulence, comme on l'a déjà dit, (chapitre 2, § 1), on a pris comme modèle, le modèle préconisé par Constantinescu [22].

En ce qui concerne les paramètres ( $c_d$ ), ( $c_f$ ), ( $c_{f1}$ ), on a étudié pour un palier déterminé leurs influences sur les résultats. On a fait varier ( $c_f$ ) dans une plage raisonnable. On a pris les valeurs suivantes: (1,5) ; (1,7) ; (1,9) ; (2)

On a fixé ( $c_{f1}$ ) à zéro ce qui est justifiable puisqu'on a un élargissement brusque vers l'extérieur.

Pour le coefficient ( $c_d$ ) on a choisi une valeur expérimentale 0,85 et une valeur théorique 0,7.

On a comparé les résultats numériques obtenus avec ces différentes variations de paramètres aux résultats expérimentaux (Tableau 4.5). Ceci nous a permis d'en déduire les valeurs optimales :

$$c_d = 0,85 \quad c_{f1} = 0, \quad c_f = 1,9$$

Pour les paliers de grandes dimensions, ayant un nombre de chambres important, la sensibilité des résultats, aux variations de ces trois paramètres est équivalente.

**TABEAU 4.5**

**CHOIX DES COEFFICIENTS Cf et Cd**  
**Cf<sub>i</sub> fixé à 0.**

Palier à 8 chambres  $\epsilon = 0.1$

RESULTATS NUMERIQUES								ESSAI
Cd	0.85	0.7	0.85	0.7	0.85	0.7	0.85	0.85
Cf	1.5	1.5	1.7	1.7	1.9	1.9	2.	
P	3.6	2.9	3.8	3.08	3.8	3.1	3.6	4.03
P	3.7	3.0	3.9	3.2	3.9	3.2	3.8	4.56
P	4.1	3.4	4.2	3.5	4.2	3.6	4.1	4.5
P	4.4	3.7	4.5	3.98	4.6	3.9	4.4	5.08
P	4.6	3.9	4.7	4.08	4.7	4.1	4.6	5.3
P	4.4	3.7	4.6	3.9	4.6	3.9	4.4	5.1
P	4.1	3.9	4.2	3.5	4.3	3.6	4.1	5.07
P	3.7	3.7	3.9	3.2	3.9	3.2	3.8	4.65
Q <sub>v</sub>	70.9	63.6	69.2	62.6	68	62.5	71	64
F	9430	9310	8900	8800	8250	8760	9354	7500



Dans le but d'évaluer les performances prévisionnelles du modèle présenté, on a, après avoir choisi les "meilleures valeurs" des constantes, calculé les caractéristiques de divers paliers et comparé les résultats obtenus, soit aux résultats d'autres auteurs, soit à des résultats expérimentaux.

## 5 Résultats pour différentes configurations

Avec les choix effectués, les caractéristiques statiques et dynamiques de plusieurs paliers ont été déterminées pour des excentricités allant de 0 à 0,8 .

Pour ces différents cas, on a effectivement vérifié que les modèles de Constantinescu généralisés ou Elrod étaient équivalents ( Tableau 4.6 ) .

L'ensemble des résultats sont fournis par les figures(4.5) à (4.21), ils ont été comparés soit à des résultats expérimentaux, soit à des résultats d'autres auteurs .

On constate que :

-quels que soient les paliers, les caractéristiques statiques et les coefficients de raideur obtenus différent des résultats expérimentaux ou des résultats d'autres auteurs au maximum de 20%

-en ce qui concerne les coefficients d'amortissement pour des vitesses de faible amplitude, les différences, notamment avec les résultats expérimentaux, peuvent être importantes; mais les valeurs expérimentales compte tenu des difficultés de mesures, sont sujettes à caution.

-pour les paliers à faible nombre de chambres, nos résultats sont très voisins des résultats d'autres auteurs.

( Nicolas 10 pour le palier à quatre chambres et Chaomleffel 12 pour le palier à trois chambres ) (Tableau 4.7).

	Palier à 3 chambres	Palier à 4 chambres	Palier à 8 chambres rayon a	Palier à 8 chambres rayon b
approximation d'ELROD	$G_x$	0.015	0.0031	0.001
	$G_z$	0.028	0.005	0.0012
approximation de CONSTANTINESCU	$G_x$	0.016	0.0029	0.0011
	$G_z$	0.025	0.0047	0.0011

TABEAU 4.6

COMPARAISON DES COEFFICIENTS  $G_x$ ,  $G_z$  POUR LES MODELES D'ELROD OU CONSTANTINESCU



TABLEAU 4.7

		Palier à 4 chambres	Palier à 3 chambres
* Géométrie du palier:	jeu radial (m)	$0.277 \cdot 10^{-3}$	$0.125 \cdot 10^{-3}$
	rayon du palier (m)	0.1525	0.04
	longueur du coussinet (m)	0.305	0.08
Géométrie des chambres	largeur des chambres (m)	0.1756	0.0628
	longueur des chambres (m)	0.254	0.050
	profondeur des cham- bres (m)	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$(2 \text{ ou } 10) \cdot 10^{-3}$
	rayon du diaphragme	$7.75 \cdot 10^{-3}$	$2.05 \cdot 10^{-3}$
Grandeurs physiques	masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )	915	1000
	viscosité dynamique (Pa.s)	$0.215 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
	pression d'alimenta- tion (Pa)	$2.99 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$
	vitesse de rotation (tr/mn)	500	2 000 ou 5 000 ou 8 000

Géométrie et grandeur physiques des différents paliers



\* Pour certains paliers industriels, c'est volontairement que n'ont pas été fournies les dimensions et échelles, ainsi les rayons a, b, c, d, et e (fig. 4.5 à 4.10 ne sont pas donnés).

Palier à 8 chambres de rayon a.

Figure 4.5

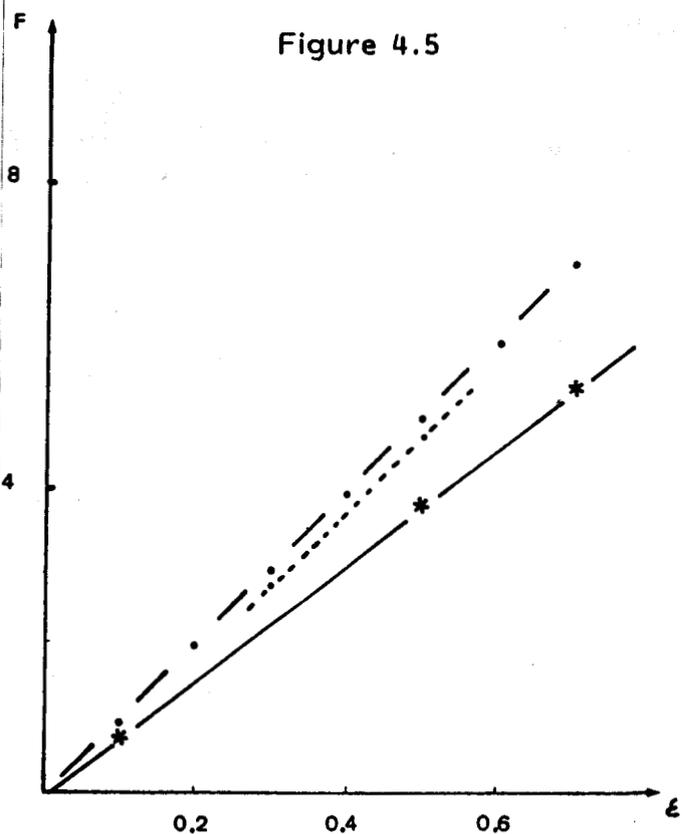


Figure 4.6

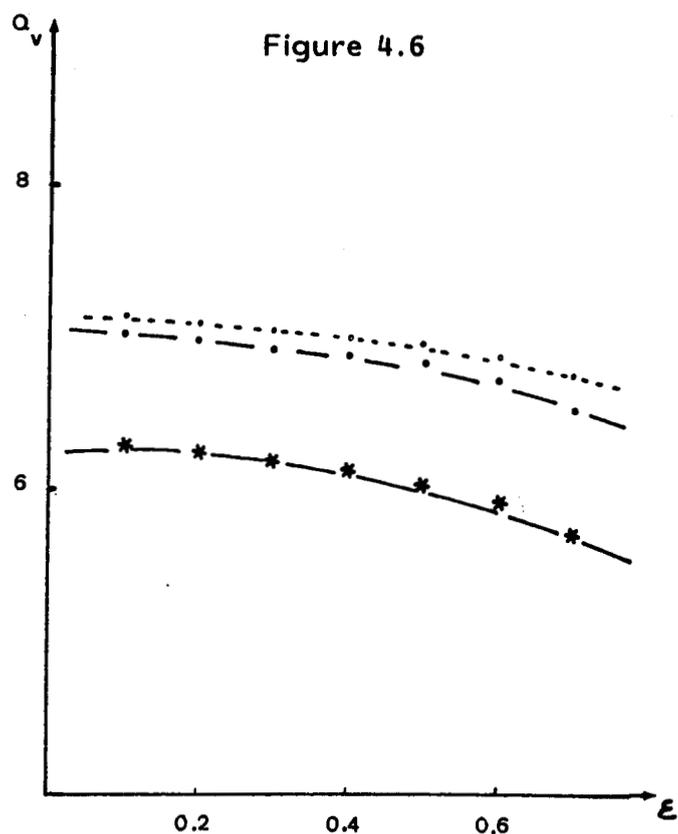


Figure 4.7

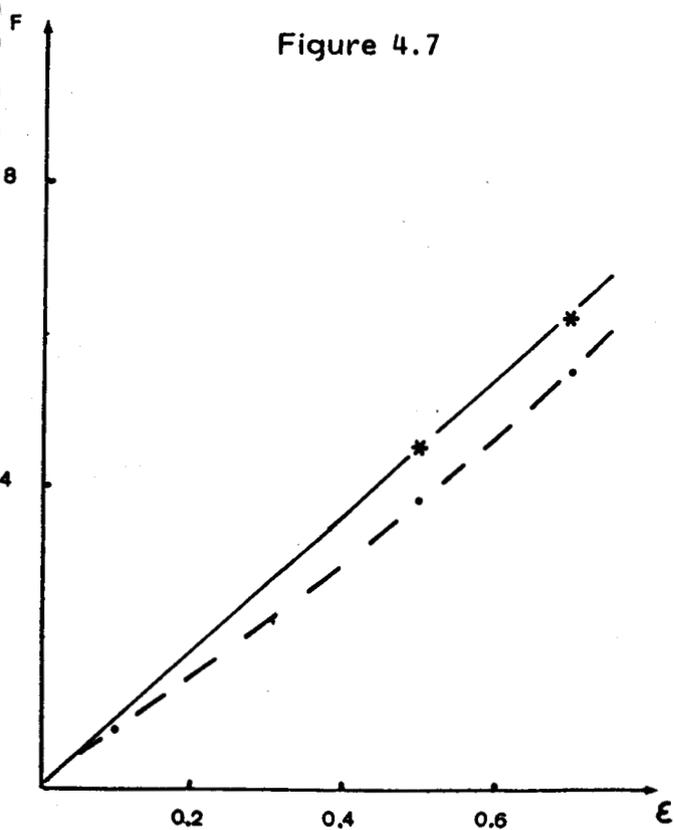
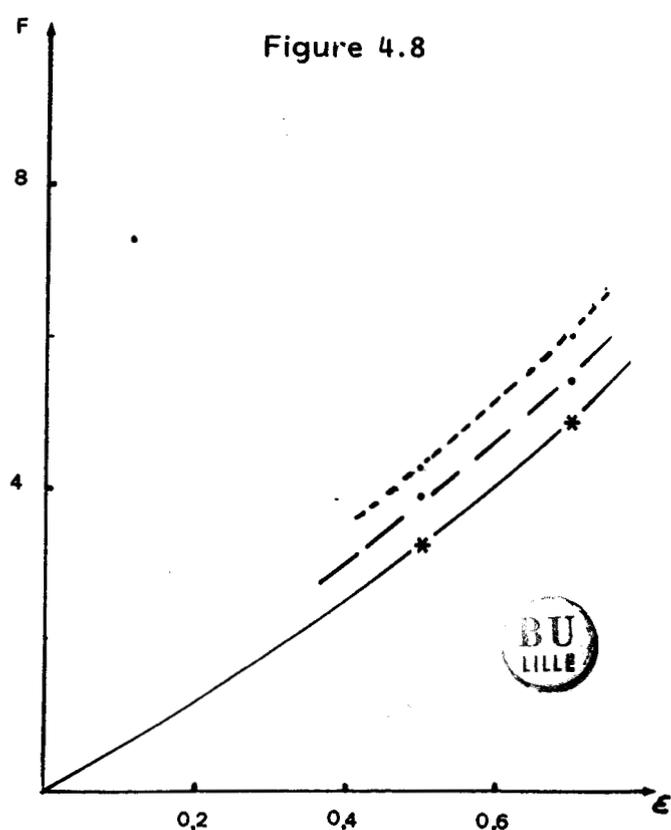


Figure 4.8

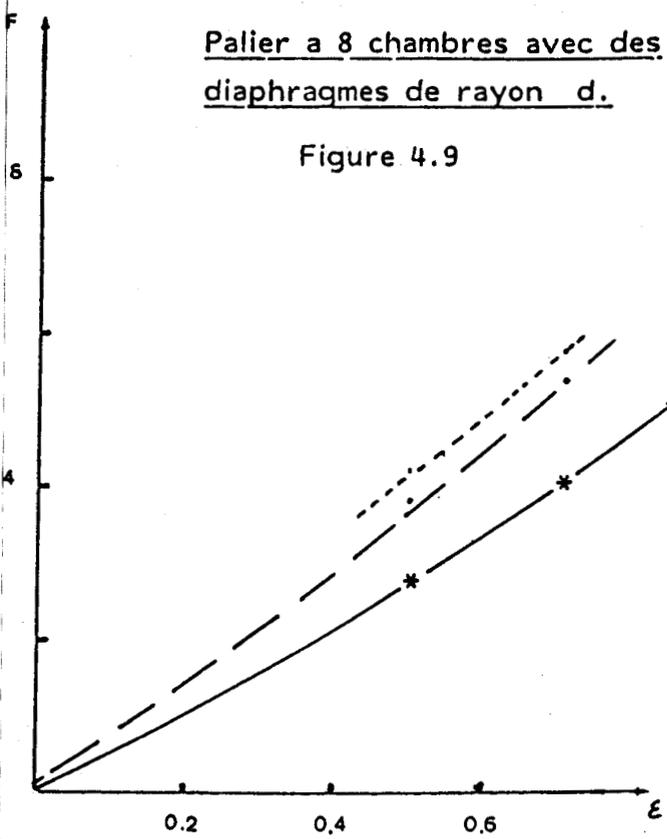


Palier à 8 chambres de rayon b

Palier à 8 chambres avec des diaphragmes de rayon c.

Palier a 8 chambres avec des diaphragmes de rayon d.

Figure 4.9



Palier a 8 chambres avec des diaphragmes de rayon e.

Figure 4.10

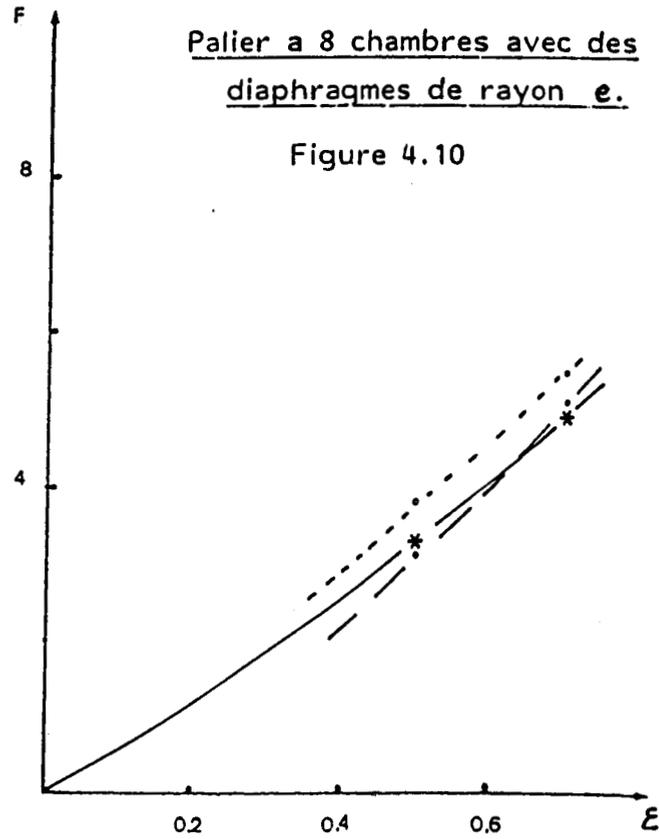
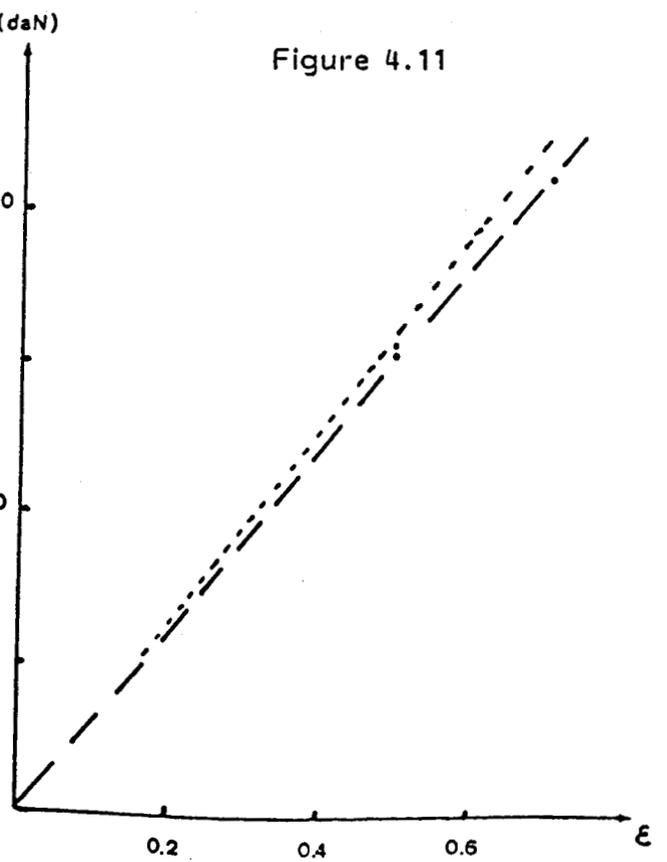


Figure 4.11



Palier a 4 chambres

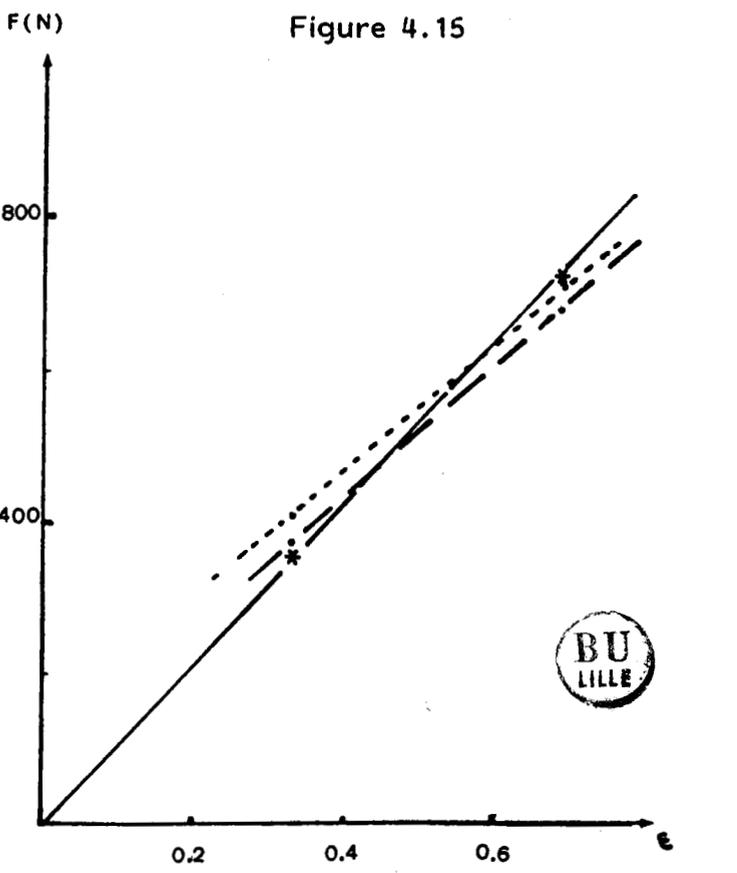
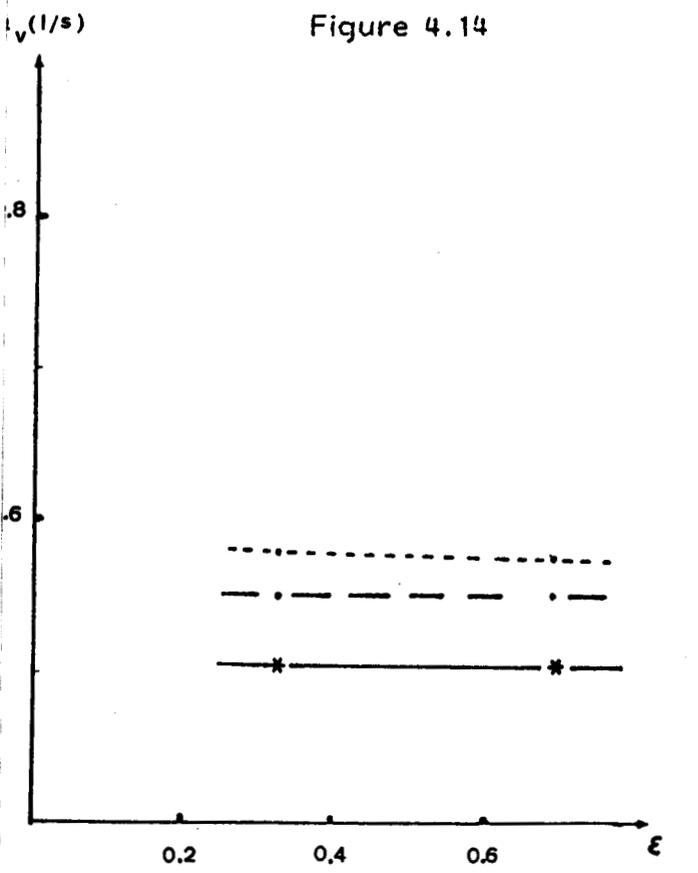
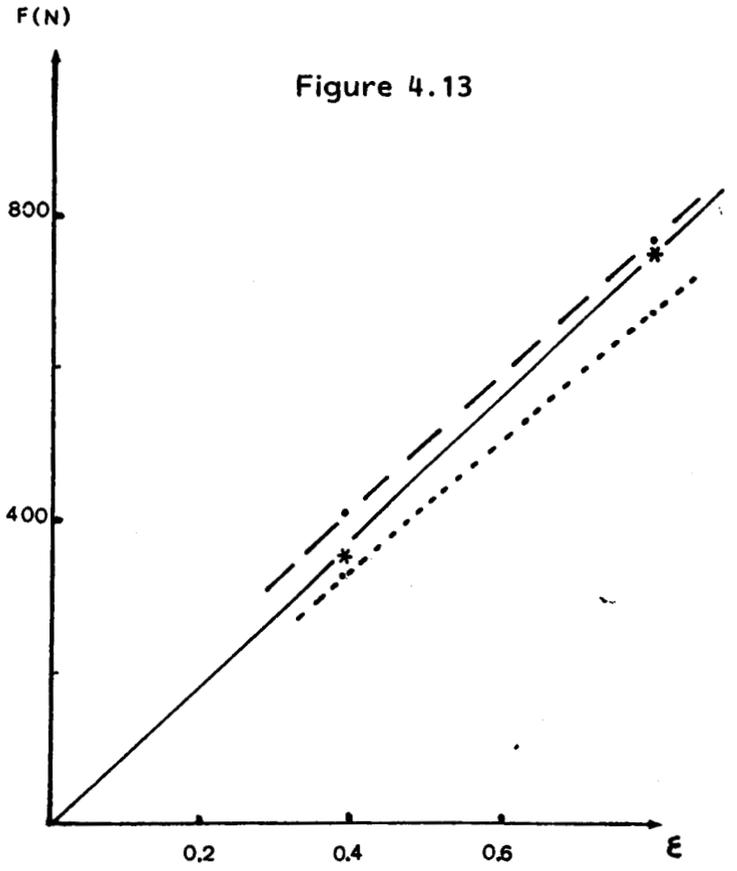
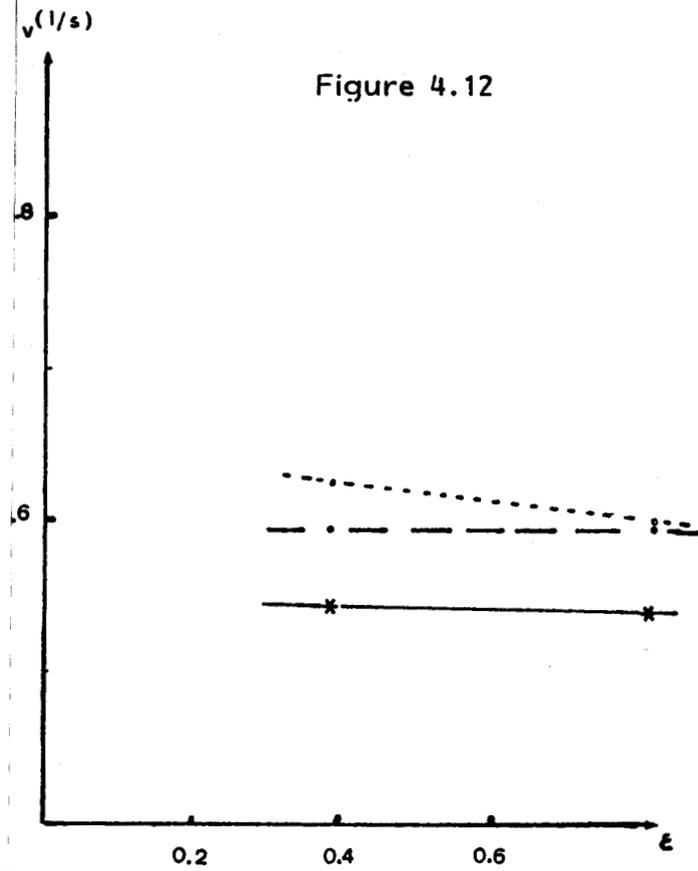
Légendes des figures 4.5 à 4.18

- résultats d'autres auteurs
- résultats expérimentaux
- - - - - résultats obtenus

Variation de la portance et du débit global en fonction de l'excentricité.



Palier à 3 chambres (2 000 Tours/mn)



Palier à 3 chambres (5 000 Tr/mn)

Palier à 3 chambres (8 000 Tours/mn)

Figure 4.16

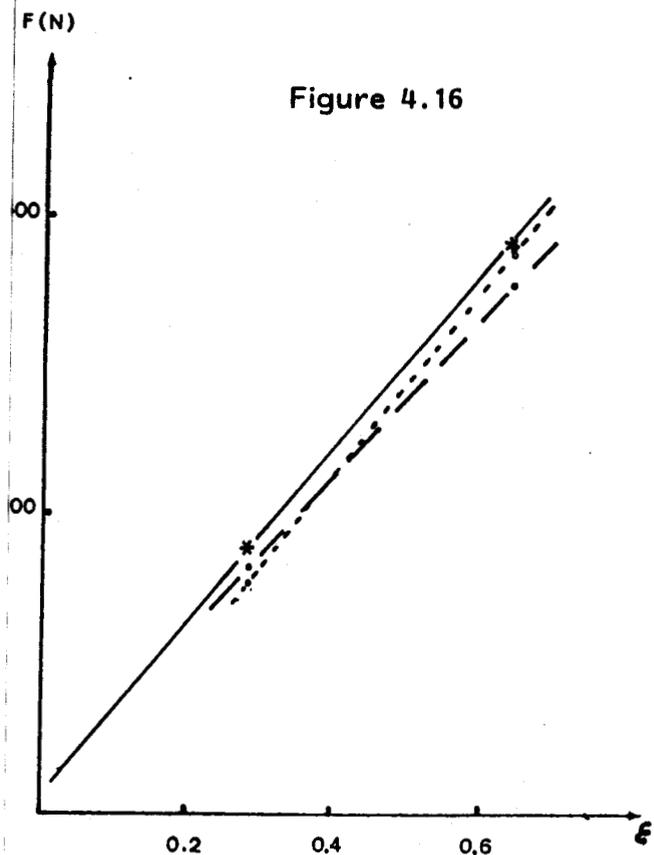
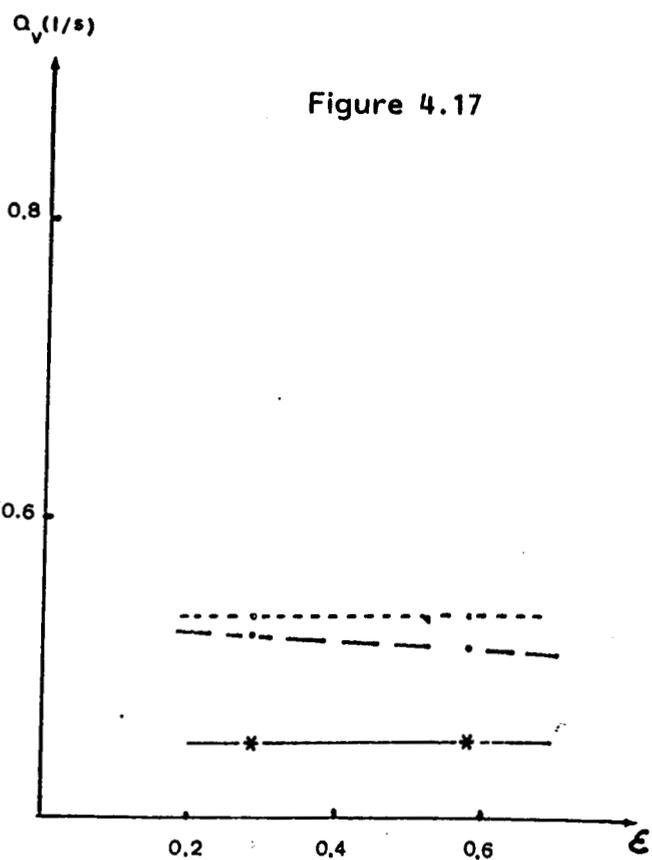


Figure 4.17



Palier à 12 chambres

Figure 4.18

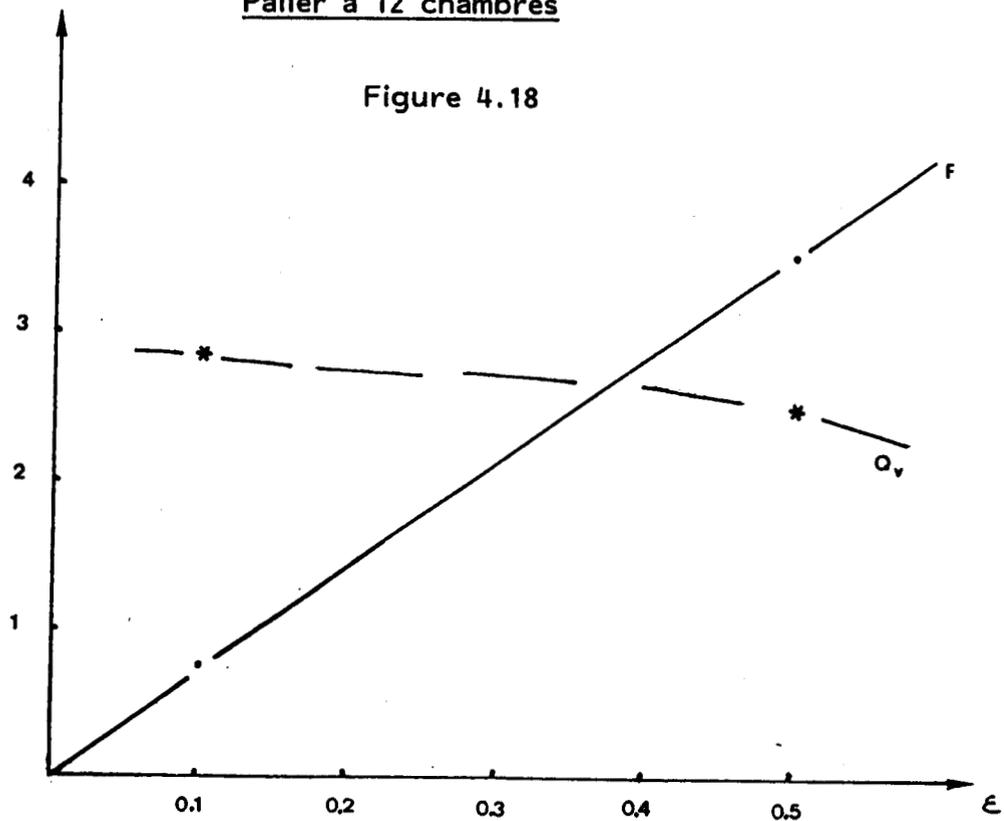


Figure 4.19

COMPARAISON DES PRESSIONS DE CHAMBRES,  
DES RAIDEURS ET DES AMORTISSEMENTS POUR UNE EXCENTRICITE

$$\epsilon = 0,5$$

Paliers à 4 chambres

		résultats d'autres auteurs	résultats obtenus
pressions dans les chambres $10^5$ Pa	$P_1$	2,05	2,16
	$P_2$	2,72	2,70
	$P_3$	2,09	2,18
	$P_4$	1,70	1,78
raideur en $10^8$ N/m	$K_{XX}$	0,41	0,20
	$K_{YX}$	- 0,005	- 0,26
	$K_{XY}$	- 0,017	0,20
	$K_{YY}$	0,47	0,39
Amortissement en $10^6$ Ns/m	$B_{XX}$	0,086	0,16
	$B_{YX}$	0,01	- 0,0035
	$B_{XY}$	- 0,006	0,0043
	$B_{YY}$	0,078	0,155



Figure 4.20

COMPARAISONS DES PRESSIONS DE CHAMBRE, DES  
AIDEURS ET AMORTISSEMENTS POUR UNE EXCENTRICITE  $\epsilon = 0.5$   
Palier à 8 chambres de rayon a

		expériences	résultats d'autres auteurs	résultats obtenus
Pression dans les chambres	$P_1$	3,5		2,3
	$P_2$	3,6		2,6
	$P_3$	3,9		2,8
	$P_4$	4,2		4,0
	$P_5$	5,5		4,1
	$P_6$	5,9		6,0
	$P_7$	6,5		6,1
	$P_8$	6,9		7,0
Raideur	$K_{XX}$	0,77	0,94	0,88
	$K_{YX}$	- 0,23	- 0,106	- 0,18
	$K_{XY}$	0,23	0,106	0,19
	$K_{YY}$	0,80	0,94	0,86
Amortissement	$B_{XX}$	0,81	0,265	0,058
	$B_{YX}$	+ 0,38	- 0,002	- 0,004
	$B_{XY}$	- 0,24	0,006	- 0,003
	$B_{XX}$	0,90	0,264	0,071



Figure 4.21

COMPARAISON DES RAIDEURS  
ET DES AMORTISSEMENTS POUR  $\epsilon = 0,5$

Palier à 8 chambres de rayon b

		expérience	résultats obtenus
Raideur	$K_{XX}$	0.90	0.87
	$K_{YX}$		- 0.65
	$K_{XY}$		+ 0.65
	$K_{YY}$	0.93	0.86
Amortissement	$B_{XX}$	0.77	0.095
	$B_{XY}$		0.000027
	$B_{YX}$		- 0.00053
	$B_{YY}$	0.86	0.095



-pour les paliers à grand nombre de chambres ,nos résultats sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux des autres auteurs. ( Chaomleffel [12] pour le palier à huit chambres de rayon a )

## Conclusion

Un programme de calcul de performances de paliers hydrostatiques en régime turbulent a été réalisé .

Ce programme est opérationnel en milieu industriel.

Le modèle utilisé suppose essentiellement que :

-la pression dans les chambres est constante.

-l'écoulement dans les portées est régi par une équation de Reynolds " turbulente "

-il y a des pertes de pression entre les chambres et les portées d'une part et les portées et l'extérieur d'autre part.

Malgré une "optimisation" des divers coefficients de débit d'alimentation (cd), de perte de pression, chambre-portée (cf), portée-extérieur (cf1) effectuée à partir de l'étude d'un palier, les résultats obtenus montrent qu'on ne peut espérer, avec ce type de modèle prévoir les performances d'un palier ( portance, pression, raideur ) à mieux de 20 % .

Ce n'est pas étonnant, l'analyse de sensibilité effectuée ayant montré que la variation, dans une plage raisonnable, de chacun de ces coefficients entraînait des variations des performances de l'ordre de 10 % .

De plus, outre la schématisation excessive de l'écoulement aux jonctions chambres-portées et portées-extérieurs ,diverses autres insuffisances du modèle peuvent être mises en cause :

\*non prise en compte des termes d'inertie de type  $(v \cdot \text{grad } v)$  dans l'équation de Reynolds, ce qui limite l'utilisation du modèle à des cas où le produit du nombre de Reynolds "turbulent" par le facteur de forme, est très inférieur à 1 (nombre de

Reynolds laminaire de quelques milliers) ce qui est légèrement insuffisant

\*non prise en compte des termes d'inertie du type  $(\frac{\partial u}{\partial t})$ , ce qui ne permet d'étudier les coefficients de raideur et d'amortissement qu'à "basse fréquence", fréquence inférieure à  $(\frac{\omega}{2\pi})$  ( $\omega$  vitesse de rotation de l'arbre).

\*non prise en compte des effets thermiques

Néanmoins, dans la modélisation des paliers auxquels nous nous sommes intéressés, l'hypothèse la plus sujette à caution est à notre avis celle relative à l'évaluation des pertes de pression aux jonctions chambres-portées.

Constantinescu a abordé ce problème et les problèmes annexes dans les années 70 à 80 [25,26,27,28,29] mais toujours en utilisant pour résoudre les équations de la mécanique des fluides des méthodes intégrales supposant que le profil de vitesse reste identique à celui correspondant au domaine de validité des équations de Reynolds.

Aussi, pour étudier l'écoulement au voisinage du bord des chambres et déterminer ainsi les pertes de pression correspondantes, nous avons préféré ici mettre en oeuvre une

fluides Dans une première étape nous traitons uniquement un problème bidimensionnel et le modèle de turbulence reste du type "loi de paroi", modèle homogène avec celui utilisé dans les portées .

La technique utilisée est cependant capable d'admettre n'importe quel modèle de turbulence et est généralisable au cas tridimensionnel

## ANNEXE 1: Calcul de la répartition de pression

### 1 Adimensionnement

L'équation de Reynolds s'écrit dans le repère ( 0, η, ζ, ξ. )  
(figure 2.6).

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h^3 G_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{h^3 G_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] = \frac{r^2}{2} [(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2\dot{\epsilon} \cos \theta]$$

Remplaçons (h) par (h<sub>0</sub>H) , (H = 1 + ε cos θ), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{h_0^3 H^3 G_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} [h_0^3 H^3 G_z \frac{\partial p}{\partial \xi}] = h_0 \frac{r^2}{2} [(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2\dot{\epsilon} \cos \theta]$$

En considérant la valeur adimensionnelle de p,

$$\bar{p} = \frac{p}{\mu N} \left( \frac{h_0}{r} \right)^2 \quad \text{où} \quad (N = \frac{\omega}{2\pi})$$

L'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [H^3 G_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}] + \frac{\partial}{\partial \xi} [H^3 G_z \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega - 2\dot{\phi}}{N} \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2 \frac{\dot{\epsilon}}{N} \cos \theta \right]$$

### 2 Discrétisation

Comme indiqué au chapitre 3,

Pour un écoulement à dominance Couette :

$$G_x = 1/(12 + 0,0136 R_h^{0.9})$$

$$G_z = 1/(12 + 0,0043 R_h^{0.96})$$

$$R_h = (\rho U_2 h)/\mu, \quad U_2 = 2\pi N r$$

Pour un écoulement du aux gradients de pression :

$$G_x = G_z = G = \frac{6.8}{(Re_p)^{0.631}}$$

$$Re_p = \rho V_m^* h / \mu \quad ; \quad V_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2}$$

Et compte tenu que l'on a fait l'hypothèse que l'écoulement est globalement de l'un des deux type ( $V_m^* = \max V_m$  sur le domaine . ( $G_x$ ) et ( $G_z$ ) ne dépendent alors que de  $\theta$ .

L'équation de Reynolds devient :

$$H^3 G_x \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} + H^3 G_z \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial H^3 G_x}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega - 2\dot{\phi}}{N} \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2 \frac{\dot{\epsilon}}{N} \cos \theta \right]$$

Pour appliquer la méthode des différences finies, on développe le palier dans le sens circonférentiel, on découpe (figure A1.1) le domaine ainsi obtenu en un certain nombre de rectangles élémentaires, les variables ( $\theta$ ) et ( $\xi$ ) sont remplacées par des variables discrètes ( $k$ ) et ( $j$ )

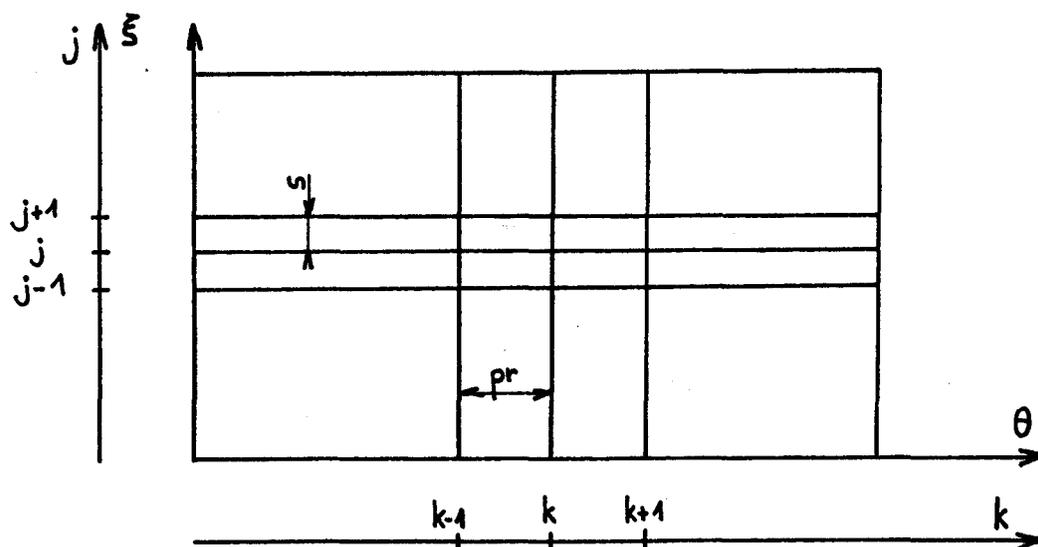


figure A1.1 discrétisation du domaine

La valeur de la pression ( $\bar{p}$ ) au point de coordonnées  $(k, j)$  est fonction de la valeur de ( $\bar{p}$ ) aux points situés au voisinages de celui-ci.

On a les relations suivantes en considérant une erreur d'ordre  $(pr^2)$  ou  $(s^4)$ , ( $pr$  est le pas dans le sens circonférentiel,  $s$  le pas dans le sens axial).

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} (k, j) = \frac{p(k+1, j) - p(k-1, j)}{2 pr}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \theta^2} (k, j) = \frac{p(k+1, j) - 2p(k, j) + p(k-1, j)}{(pr)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial s^2} (k, j) = \frac{p(k, j+1) - p(k, j) + p(k, j-1)}{s^2}$$

Calculons  $\left(\frac{\partial G_x}{\partial \theta}\right)$

$$\frac{\partial G_x}{\partial \theta} = \epsilon \sin \theta G_x^2 oc(k) \times op(k) \times [rey(k) \times H]^{op(k)} / of(k)$$

Si l'écoulement est à dominance Couette :

$$oc(k) = 0,0136$$

$$op(k) = 0,9$$

$$of(k) = 1,0$$

$$rey(k) = \rho U_0 h_0 / \mu$$

Si l'écoulement est du aux gradients de pression :

$$o_c(k) = 6,8$$

$$op(k) = 0,681$$

$$of(k) = (6,8)^2$$

$$Rey(k) = \rho V_m^* h_o / \mu$$

Nous obtenons l'équation discrète suivante :

$$\bar{p}(k,j) = d(k) \bar{p}(k+1,j) + c(k) \bar{p}(k-1,j) + bl(k) [\bar{p}(k,j+1) + \bar{p}(k,j-1)] + b(k)$$

avec

$$d(k) = (H + a \text{ pr}) G_x(k) / [2H \cdot ap \cdot (pr)^2]$$

$$c(k) = (H - a \text{ pr}) G_x(k) / [2H \cdot ap \cdot (pr)^2]$$

$$Bl(k) = G_z(k) / (2 \times ap \times s^2)$$

où

$$a = \frac{\varepsilon \sin \theta}{2} [op(k) \cdot oc(k) \cdot \{Rey(k) \cdot H\}^{op(k)} \cdot G_x(k) / of(k) - 3]$$

$$ap = \frac{G_x(k)}{(pr)^2} + \frac{G_z(k)}{s^2}$$

### Comportement statique

Dans le second membre de l'équation de Reynolds les termes en  $(\dot{\epsilon})$  et  $(\dot{\phi})$  sont nuls, dans l'équation discrétisée ces termes figurent dans le coefficient  $(b)$  qui se réduit à :

$$b(k) = \frac{1}{2} \frac{\omega}{N} \epsilon \sin \theta / (2 a p H^3) = \pi \epsilon \sin \theta (2 a p H^3)$$

L'équation discrétisée se résoud immédiatement, pour un  $(\epsilon)$  et un  $(\phi)$  donné, on peut déterminer le champ de pression.

### Comportement dynamique

Par rapport au comportement statique seul le coefficient  $(b)$  change puisque  $(\dot{\epsilon})$  et  $(\dot{\phi})$  ne sont plus nuls.

Considérons les composantes du vecteur vitesse au point  $(O_2)$  centre de l'arbre (figure A1.2)

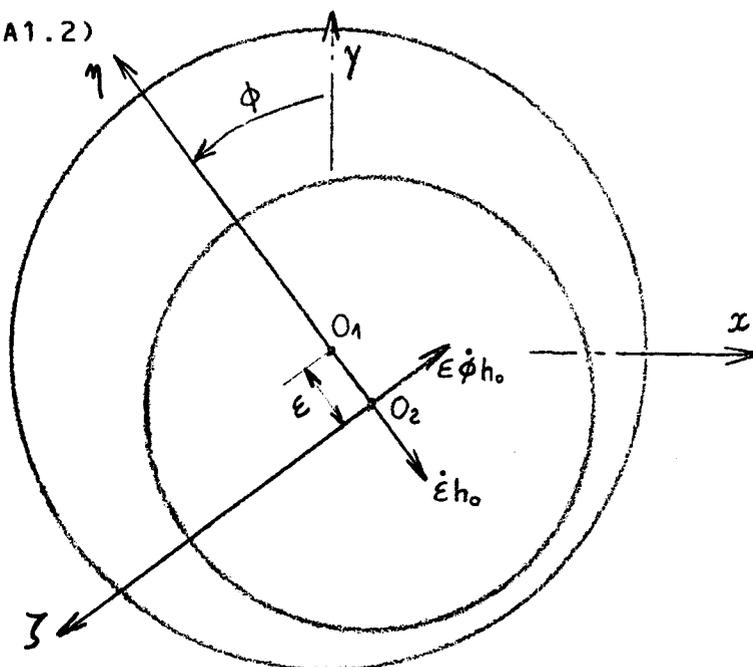


figure A1.2 coupe transversale d'un palier

$$V_x = \dot{\epsilon} h_0 \sin \phi + \epsilon h_0 \dot{\phi} \cos \phi$$

$$V_y = -h_0 \dot{\epsilon} \cos \phi + h_0 \epsilon \dot{\phi} \sin \phi$$

adimensionnons ( $V_x$ ) et ( $V_y$ ) alors :

$$V \ X \ R = \frac{V_x}{h_0 \omega} = \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \sin \phi + \frac{\epsilon \dot{\phi}}{\omega} \cos \phi$$

$$V \ Y \ R = \frac{V_y}{h_0 \omega} = \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \cos \phi - \frac{\epsilon \dot{\phi}}{\omega} \sin \phi$$

a) Considérons dans un premier temps un accroissement ( $V \ X \ R$ )

figure A 1.2 ( $V \ Y \ R = 0$ )

on a alors

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \cos \phi = \epsilon \frac{\dot{\phi}}{\omega} \sin \phi$$

d'où

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\omega} = V \ X \ R \sin \phi \quad \text{et} \quad \frac{\dot{\phi}}{\omega} = V \ X \ R \cos \phi$$

et

$$b(k) = [\pi \epsilon \sin \theta - 2\pi V \ X \ R \sin (\theta + \phi)] / (2 \text{ ap } H^3)$$

b) Soit maintenant un accroissement ( $V \ Y \ R$ ), ( $V \ X \ R = 0$ ), alors :

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \sin \phi = -\epsilon \frac{\dot{\phi}}{\omega} \cos \phi$$

d'où

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\omega} = -\cos \phi \ V \ Y \ R \quad \text{et} \quad \epsilon \frac{\dot{\phi}}{\omega} = \sin \phi \ V \ Y \ R$$

et :

$$b(k) = [\pi \epsilon \sin \theta + 2\pi V Y R \cos (\theta + \phi)] / (2 a p \quad H^3)$$

en conclusion :

$$b(k) = \pi \epsilon \sin \theta / (2 a p \cdot H^3) - 2 a_2 p$$

où

$$a_2 p = 2\pi [V X R \sin (\theta + \phi) - V Y R \sin (\theta + \phi)] / (2 a p \quad H^3)$$

Pour déterminer  $(\vec{p})$  en n'importe quel point du maillage, il suffit de résoudre le système  $(A X = B)$ . On utilise la méthode de résolution directe et l'algorithme de Gauss qui consiste en la réalisation d'une série de rotations élémentaires des vecteurs de base dans lesquelles sont exprimées la matrice et le second membre de telle façon à triangulariser la matrice, puis on résoud par substitution.

## ANNEXE 2 Débit global et débit de chambre

### 1 Débit global $Q_v$

C'est le débit qui sort du palier, et à cause de la symétrie il s'écrit (figure A2.1) :

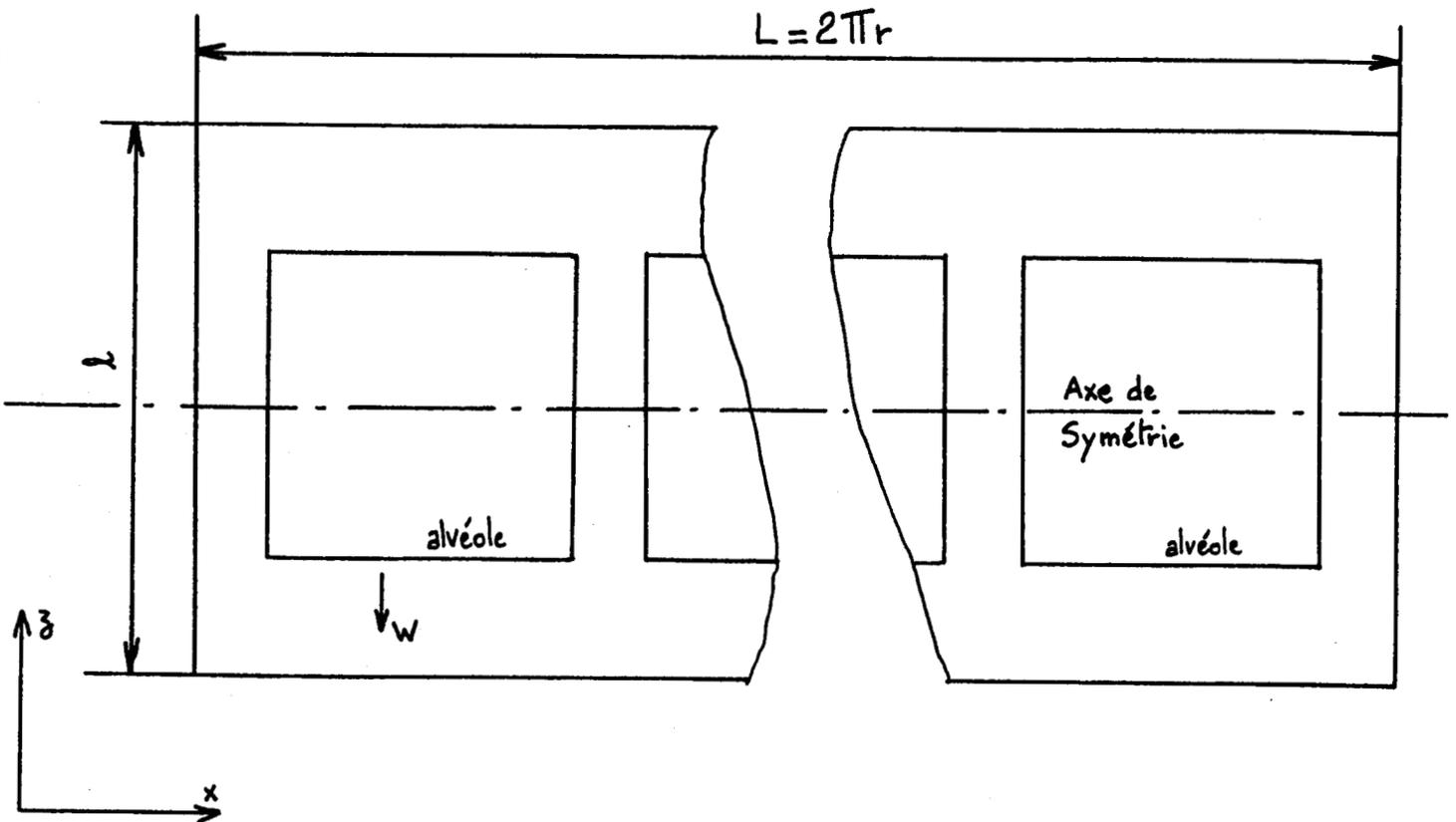
$$Q_v = 2 \int_0^L \int_0^h w \, dy \, dx$$


figure A2.1 Palier développé

En considérant le changement de variable ( $x = r\theta$ ) et ( $\int_0^h w \, dy = h w_m$ ) on a :

$$Q_v = 2 \int_0^{2\pi} r h w_m \, d\theta$$



Pour calculer cette intégrale on utilise la formule de Welde qui est illustré par l'exemple suivant

Soit à calculer l'intégrale de  $(f(x))$  sur l'intervalle  $[a, b]$   
(figure A2.2)

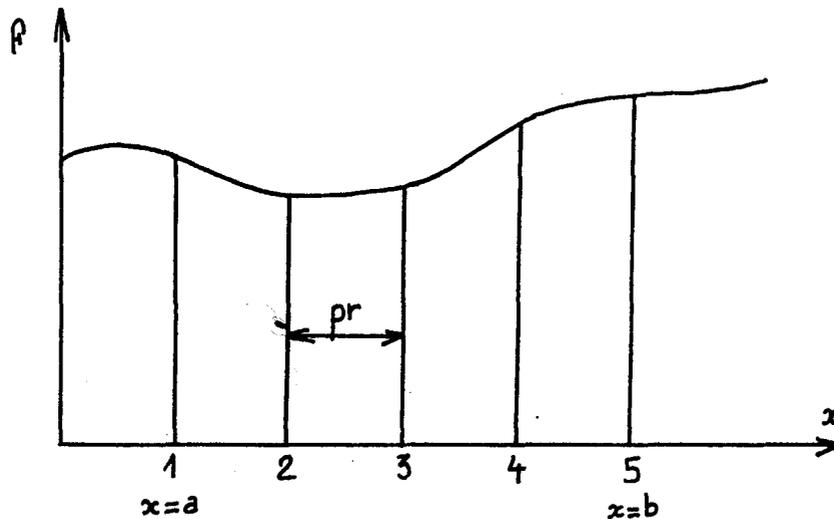


figure A2.2 Domaine d'intégration

Formule de Welde :

$$\int_a^b f(x) dx = [f(1) + 4f(2) + f(3)] \frac{pr}{3} + [f(3) + 4f(4) + f(5)] \frac{pr}{3}$$

2 Débit entrant et sortant des chambres (figure A3.3)

A cause de la symétrie on ne considère qu'une demi-chambre

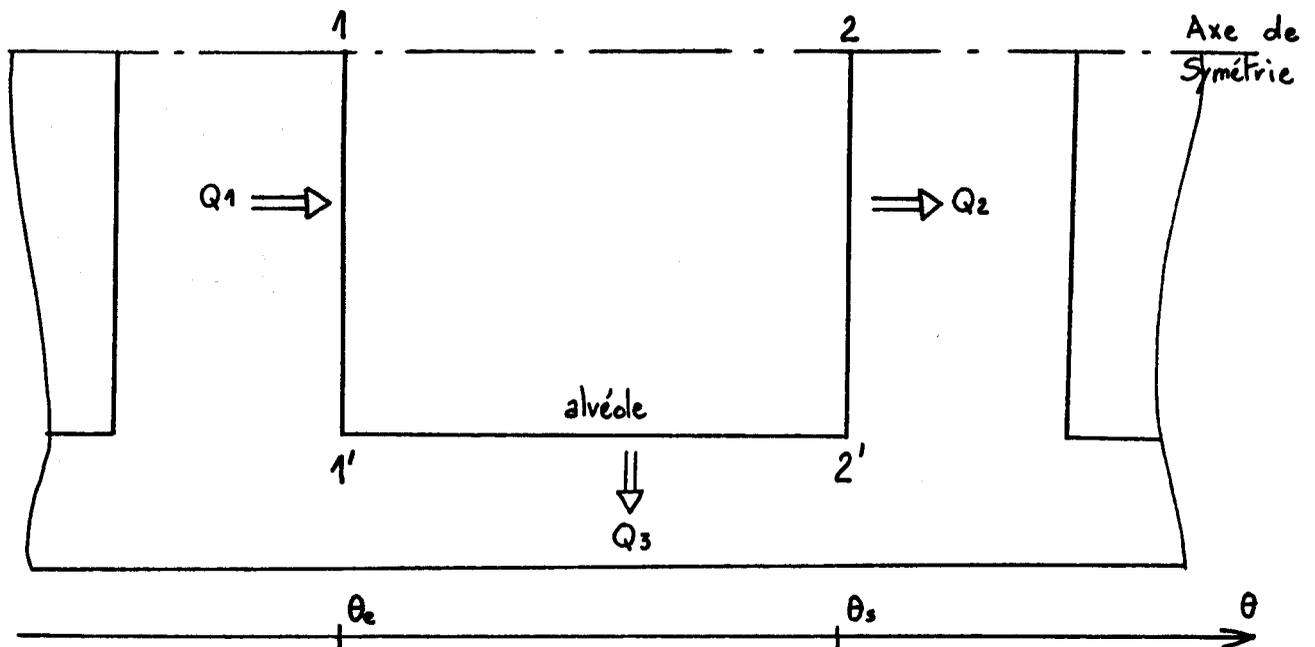


figure A2.2 Domaine d'entrée et de sortie d'une demi chambre

a) Débit entrant par (1 - 1') "débit gauche" ( $Q_1$ ) pour une chambre

$$Q_1 = 2 \int_{1'}^1 \int_0^h u \, dy \, dz = 2 \int_{1'}^1 h u_m \, dz$$

b) Débit sortant par (2 - 2') "débit à droite" ( $Q_2$ ) pour une chambre

$$Q_2 = 2 \int_{2'}^2 \int_0^h u \, dy \, dz = 2 \int_{2'}^2 h u_m \, dz$$

c) Débit sortant de (1' - 2') "débit vertical" ( $Q_3$ ) pour une chambre

$$Q_3 = 2 \int_{1'}^{2'} \int_0^h w \, dy \, dx = 2 \int_{\theta_e}^{\theta_s} h w_m r \, d\theta$$

Pour calculer ces différentes intégrales on fait le produit des vitesses en chaque point par la longueur de l'intervalle. On calcule ainsi les débits entrant et sortant pour une chambre. Le débit de chambre est :

$$Q = -Q_1 + Q_2 + Q_3$$

### ANNEXE 3 Détermination de l'effort et de l'angle de calage

Le champ de pression nous permet de calculer le chargement statique ( portance ) et l'angle de calage. (figure A3.1)

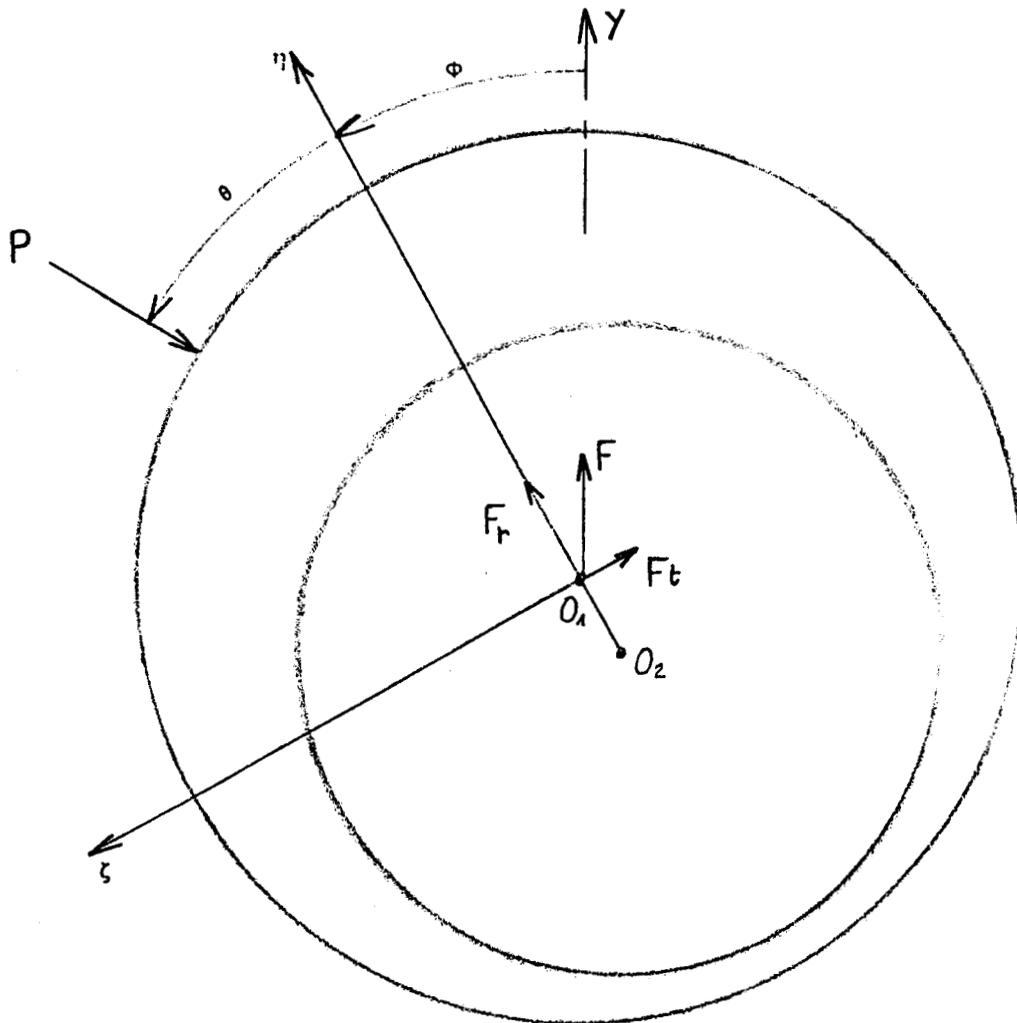


figure A3.1 forces agissant sur le palier

$F$  : résultante des forces de pression

$P$  : charge appliquée sur le palier

$F_r$  : force agissant suivant la ligne des centres

$F_t$  : force agissant suivant la normale à la ligne des centres



En comportement statique : ( $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$ ) donc la charge ou portance est dirigée suivant (Y) et de sens opposé d'où :

$$F_r = F \cos \phi = - \int_0^L \int_0^l p \cos \theta \, dx \, dz$$

$$F_t = - F \sin \phi = + \int_0^L \int_0^l p \sin \theta \, dx \, dz$$

Posons :

$$F = p_m l 2r = 4 p_n r^2 p_m \quad (\text{figure A3.1})$$

où

$$p_n = \frac{l}{2r} \quad , \quad p = p_m S \bar{p} \quad , \quad S = \frac{\mu N}{p_m} \left(\frac{r}{h_0}\right)^2$$

r : rayon du palier

l : hauteur du palier

$p_m$  : pression moyenne dans le palier

S : nombre de sommerfeld

alors

$$F \cos \phi = - 2 \int_0^{pn} \int_0^{2\pi} p_m S r^2 p \cos \theta \, d\theta \, d\xi$$

$$= - 2 p_m S r^2 \underbrace{\int_0^{pn} \int_0^{2\pi} p \cos \theta \, d\theta \, d\xi}_{\text{\$COS}}$$

\\$COS

d'où

$$2 p_n \cos \phi = - S \text{\$COS}$$

de la même manière :

$$2pn \sin \phi = S \int_0^{pn} \int_0^{2\pi} p \sin \theta \, d\theta \, d\xi$$
$$= S \cdot \cancel{\xi} \text{SIN}$$

La valeur de l'angle de calage ( $\phi$ ) est :

$$\text{tg } \phi = \frac{\cancel{\xi} \text{SIN}}{\cancel{\xi} \text{COS}}$$

La valeur du nombre de sommerfeld (S) est :

$$S = \frac{2 \, pn \, \sin \phi}{\cancel{\xi} \text{SIN}}$$

Le module de la charge est :

$$F = 2 \, p_m \, S \, r^2 \, [- \cancel{\xi} \text{COS} \cdot \cos \phi + \cancel{\xi} \text{SIN} \cdot \sin \phi]$$

ANNEXE 4: Détermination de l'excentricité ,  
et de l'angle de calage

A partir d'une position d'équilibre  $(\epsilon_0, \phi_0)$  pour une perturbation en déplacement, on détermine l'excentricité  $(\epsilon^*)$  et l'angle de calage  $(\phi^*)$  (figure A4.1)

1 Perturbation suivant (X)

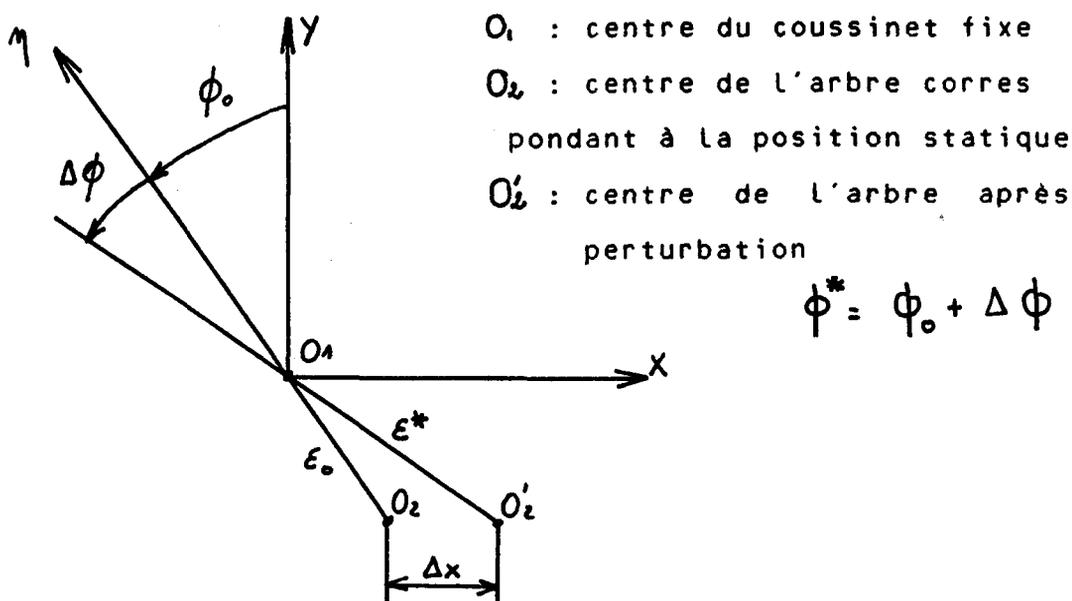


figure A4.1: Position du centre de l'arbre après perturbation suivant (X)

La position statique du centre ( $O_2$ ) est définie par

$$x_0 = e_0 \sin \phi = \epsilon_0 h_0 \sin \phi_0$$

$$y_0 = -e_0 \cos \phi = -\epsilon_0 h_0 \cos \phi_0$$

La position après perturbation suivant (X) du centre de l'arbre ( $O'_2$ ) s'écrit :

$$x_o + \Delta x = (e_o + \Delta e) \sin(\phi_o + \Delta\phi)$$

$$y_o = - (e_o + \Delta e) \cos(\phi_o + \Delta\phi)$$

d'où

$$\text{tg}(\phi_o + \Delta\phi) = \frac{x_o + \Delta x}{y_o} = \frac{e_o \sin \phi_o + \Delta x}{e_o \cos \phi_o}$$

$$\phi^* = \text{Arctg} \frac{e_o \sin \phi_o + \Delta x}{e_o \cos \phi_o}$$

et :

$$e + \Delta e = e^* = \varepsilon^* h_o = \frac{x_o + \Delta x}{\sin \phi^*}$$

$$\varepsilon^* = \frac{e_o \sin \phi_o + \Delta x}{h_o \sin \phi^*} = \frac{\varepsilon_o \sin \phi_o + \Delta x / h_o}{\sin \phi^*}$$

## 2 Perturbation suivant la direction (Y) (figure A4.2)

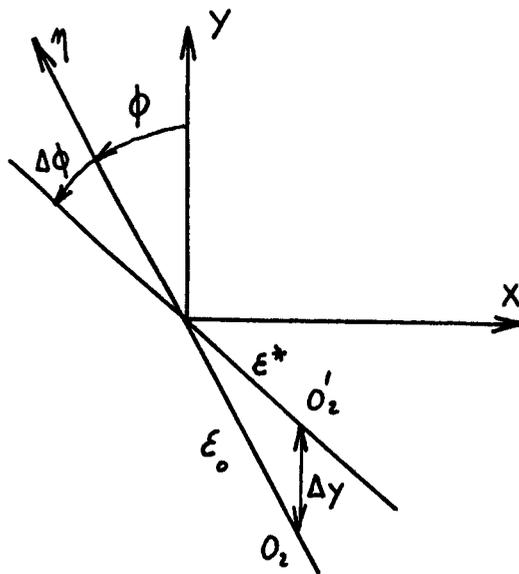


figure A4.2: Position du centre de l'arbre après perturbation suivant (Y)

La position après perturbation suivant ( $\gamma$ ) du centre de l'arbre ( $O_2$ ) s'écrit :

$$x_0 = (e + \Delta e) \sin (\phi + \Delta\phi)$$

$$y_0 + \Delta y = - (e + \Delta e) \cos (\phi + \Delta\phi)$$

d'où

$$\operatorname{tg} \phi^* = \operatorname{tg}(\phi + \Delta\phi) = \frac{\varepsilon_0 \sin \phi_0}{\varepsilon_0 \cos \phi_0 - \Delta Y/h_0}$$

et

$$\varepsilon^* = \frac{e + \Delta e}{h_0} = \frac{x_0 / h_0}{\sin \phi^*} = \frac{\varepsilon_0 \sin \phi_0}{\sin \phi^*}$$

## ANNEXE 5: Etude dynamique

L'étude dynamique repose sur la détermination des coefficients de raideurs et d'amortissement, qui permettent d'établir le comportement d'un palier et d'en déduire les conditions de stabilité.

L'équation de Reynolds permet de déterminer la valeur des composantes statiques ( $F_r$ ) et ( $F_t$ ) . ( figure A3.1 )

Le point ( $O_1$ ) centre du coussinet est fixe. L'équation de la dynamique appliquée à l'arbre s'écrit :

$$m \ddot{x} = R_x \qquad R_x = P_x + F_x$$

avec

$$m \ddot{y} = R_y \qquad R_y = P_y + F_y$$

(x, y) position du centre ( $O_2$ ) de l'arbre.

m : masse de l'arbre

$P_i$  : charge appliquée sur le palier

$F_i$  : force due à la répartition de pression

Introduisons des perturbations ( $\Delta x, \Delta y, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$ ) autour de la position d'équilibre statique ( $x, y, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ ), nous avons alors :

$$m \delta \ddot{x} = \frac{\partial R_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial R_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial R_x}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial R_x}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}$$

$$m \delta \ddot{y} = \frac{\partial R_y}{\partial x} \delta x + \frac{\partial R_y}{\partial y} \delta y + \frac{\partial R_y}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial R_y}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y}$$

si on note les petits déplacement autour de la position d'équilibre (x, y),

Les vitesses de déplacement ( $\dot{x}, \dot{y}$ ), les accélérations ( $\ddot{x}, \ddot{y}$ ), et que l'on

pose :

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = k_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial R_i}{\partial \dot{x}_j} = b_{ij}$$

on obtient :

$$m \ddot{x} = k_{xx} x + k_{xy} y + b_{xx} \dot{x} + b_{xy} \dot{y}$$

$$m \ddot{y} = k_{yx} x + k_{yy} y + b_{yx} \dot{x} + b_{yy} \dot{y}$$

On introduit ainsi les matrices de raideur et d'amortissement  
 Dans le cas où la charge appliquée sur le palier est constante en direction et intensité, elle est dans ce cas égale et de direction opposée à la résultante du champ des pressions obtenue dans le cas du comportement statique.

Les coefficients dynamiques s'écrivent alors :

$$k_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad b_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}$$

## PREMIÈRE PARTIE : NOTATION

$B_x, B_z$	: coefficients de gradient de pression
$b_{xx}, b_{xy}, b_{yx}, b_{yy}$	: coefficients d'amortissement
$c_d$	: coefficient de débit d'un diaphragme
$cf$	: coefficient de perte de pression chambre-portée
$cf_1$	: coefficient de perte de pression portée-extérieure
$e$	: excentricité
$f_i$	: forces intérieures
$F$	: charge, force supportée par le mécanisme dont les composantes sont $F_x$ et $F_y$
$F_{x_0}, F_{y_0}$	: composantes de la charge à l'état statique
$G_x, G_z, G$	: coefficient dépendant du nombre de Reynolds
$h$	: épaisseur du film lubrifiant
$h_0$	: jeu radial
$k_x, k_z$	: coefficient inverse respectivement de $G_x$ et $G_z$
$k_{xx}, k_{xy}, k_{yx}, k_{yy}$	: coefficient de raideur
$L$	: longueur caractéristique (représente aussi la hauteur du palier)
$l$	: largeur du palier
$N$	: nombre de tour
$p$	: pression
$P_a$	: pression atmosphérique
$P_{oi}$	: pression dans une chambre
$P_{oo}$	: pression d'alimentation
$Q$	: débit de chambre
$Q_t$	: débit sortant des diaphragmes
$Q_v$	: débit global du palier
$r$	: rayon du palier
$r_1$	: rayon du coussinet
$r_2$	: rayon de l'arbre
$R_c$	: nombre de Reynolds critique
$R_h$	: nombre de Reynolds de Couette

$R_{ep}$	: nombre de Reynolds dû aux gradients de pression
$U_2$	: vitesse de défilement de l'arbre
$u_{mc}$	: vitesse moyenne de l'écoulement de couette suivant x
$u_{mp}$	: vitesse moyenne due aux gradients de pression suivant x
$V$	: vitesse caractéristique
$V_m$	: vitesse moyenne du fluide dont les composantes sont $u_m, w_m$
$(0, X, Y, Z)$	: repère lié au coussinet
$(0, \eta, \zeta, \xi)$	: repère lié à la ligne des centres
$(M, x, y, z)$	: repère lié à l'arbre
$\rho$	: masse volumique de fluide
$\mu$	: viscosité dynamique du fluide
$\nu$	: viscosité cinématique du fluide
$\nu_t$	: viscosité turbulente ( $\mu_t = \frac{\nu_t}{\rho}$ )
$\sigma_{ij}$	: composantes du tenseur des contraintes
$\epsilon_{ij}$	: composantes du tenseur taux de déformation
$\delta_{ij}$	: symbole de Kronecker
$\epsilon$	: excentricité relative
$\epsilon_0$	: excentricité relative correspondant à l'état de chargement statique
$\phi$	: angle de calage que fait la ligne des centres et la direction fixe OY
$\phi^*$	: angle de calage correspondant à une perturbation
$\phi_0$	: angle de calage correspondant à l'état de chargement statique
$\dot{\phi}$	: dérivée par rapport au temps de $\phi$
$\theta$	: coordonnée circonférentielle réduite
$\xi$	: coordonnée axiale réduite
$\omega$	: vitesse de rotation de l'arbre
$\epsilon^*$	: excentricité relative correspondant à une perturbation
$\dot{\epsilon}$	: dérivée par rapport au temps de $\epsilon$
$\Delta x, \Delta y$	: accroissement suivant les directions respectivement X, Y
$\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$	: accroissement de vitesse suivant les directions respectivement X,

**DEUXIEME PARTIE**

## CHAPITRE 4 : Modélisation de l'écoulement à la sortie des chambres

### 1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a montré que les pertes de pression entre les chambres et les portées jouent un rôle important dans la détermination des caractéristiques de fonctionnement des paliers. Pour évaluer les coefficients de perte de pression, on a fait appel à des constantes de type expérimental. On s'est donc situé à un niveau de schématisation inférieur, par rapport aux autres hypothèses, notamment en ce qui concerne la détermination des coefficients  $C_x$  et  $C_z$  ; D'où la nécessité de faire une étude plus rigoureuse de l'écoulement dans les chambres.

On considère, dans une première étape, un problème global de résolution des équations de la mécanique des fluides en bidimensionnel, que l'on applique au cas de l'écoulement à la jonction d'une chambre et d'une portée .

La méthode de résolution des équations de la mécanique des fluides utilisée dérive directement des travaux du "Los Alamos Scientific Laboratory" (cf ref [30, 31] )

### 2 Enoncé du problème

Pour un fluide homogène isovolume visqueux, les équations bidimensionnelles de la mécanique des fluides s'écrivent, lorsque l'écoulement est isotherme :

$$\frac{d}{dt} \int_S ds - \int_Y (\vec{U} - \vec{u}) \cdot \vec{n} d\gamma = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \int_S \vec{u} dS = \rho \int_Y \vec{u} (\vec{U} - \vec{u}) \cdot \vec{n} d\gamma + \int_S \text{div} \vec{\sigma} ds \quad (2)$$

$\frac{d}{dt}$  : dérivée en suivant le mouvement imposé du domaine élémentaire considéré.

$S(t)$  : surface d'un domaine élémentaire quelconque, ( $S$  est inclus dans le domaine fluide  $\bar{D}$ ) (figure 5.1).

$\gamma(t)$  : frontière du domaine élémentaire considéré.

$\vec{U}$  : vitesse de déplacement des frontières des domaines élémentaires dont les composantes sont  $U$  et  $V$ .

$\vec{u}$  : vitesse du fluide dont les composantes sont  $u$  et  $v$

$\vec{U}-\vec{u}$  : vitesse de convection relative du fluide à travers les domaines élémentaires.

$\rho$  : masse volumique.

$\sigma$  : tenseur des contraintes tel que :

$$\vec{\sigma} = -p \vec{\delta} + \vec{\pi}$$

$p$  : pression.

$\pi$  : tenseur des contraintes visqueuses.

$$\text{avec } \vec{\pi} = 2(\mu + \mu_t) \vec{E} \quad \text{et} \quad E_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$\mu$  : viscosité dynamique.

$\mu_t$  : viscosité turbulente ( hypothèse de Boussinesq ).

$\vec{n}$  : normale extérieure à  $s$ .

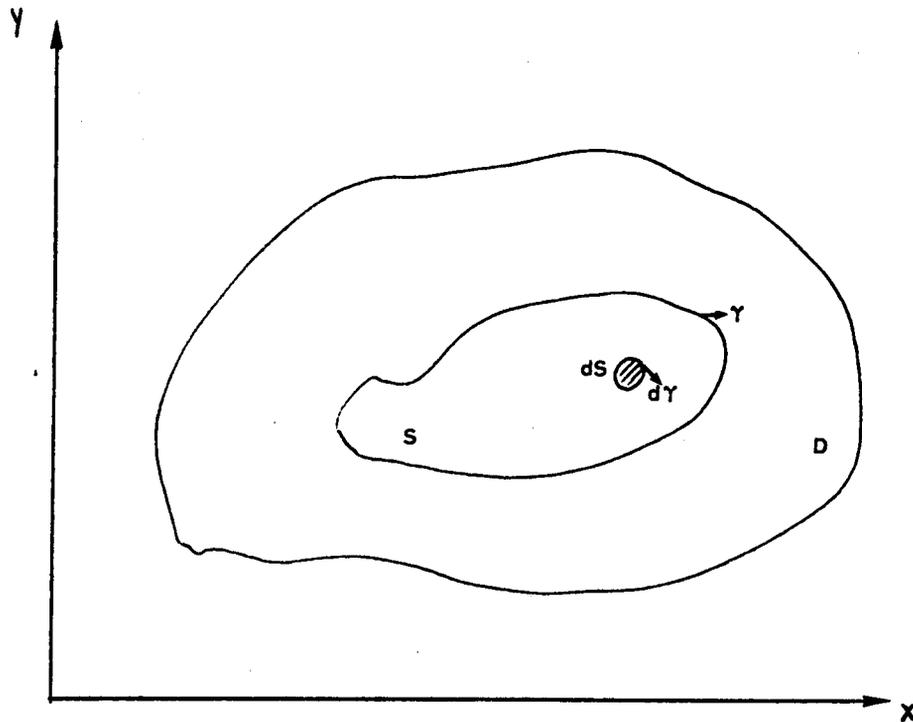


figure 5.1 : Domaine fluide

Lorsque la frontière du domaine élémentaire est fixe ( $\vec{U} = \vec{0}$ ),  
 Les équations (1) et (2) deviennent :

$$\int_Y \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\gamma = 0$$

$$\rho \int_S \frac{d\vec{u}}{dt} \, dS = \int_Y -\rho \vec{u} (\vec{u}, \vec{n}) \, d\gamma + \int_S \text{div } \vec{\sigma} \, dS$$

On retrouve les relations classiques ( point de vue Eulerien ) de  
 la mécanique.

A ces relations doivent être associées les conditions initiales  
 et les conditions aux limites.

### 3 Discrétisation, méthode de résolution

#### a) Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle est de type différence finie. Les dérivées  $\frac{d}{dt}$  sont approximées au premier ordre.

Soit  $\Delta t$  le pas de temps de calcul. A partir de la connaissance complète du champ des variables  $A$  à l'instant  $t$  on cherche à connaître le nouveau champ au temps  $t + \Delta t$ .

Dans ce qui suit l'indice inférieur  $n$  (ex :  $u_n$ ) correspond à la valeur de la variable au  $n^{\text{ième}}$  cycle de calcul soit au temps  $t_n$ , l'indice  $n + 1$  au temps  $t_{n+1} = t + \Delta t$ .

la méthode de discrétisation peut-être considérée soit comme une méthode à pas fractionnaires, soit comme une méthode de Lagrange projection.

#### .Methode à pas fractionnaires

Pour calculer les grandeurs à l'instant  $t_{n+1} = t + \Delta t$  connaissant ces grandeurs à l'instant  $t_n = t$ , on utilise le schéma à deux pas fractionnaires suivant :

1<sup>er</sup> demi-pas :

$$\int_{S_L} dS_L - \int_{S_n} dS_n = 0 \quad (1'')$$

$$\frac{\rho \left[ \int_{S_L} \vec{u}_L dS_L - \int_{S_n} \vec{u}_n dS_n \right]}{\Delta t} = \int_{S_n} - \text{grad} \vec{p}_L dS_n + \int_{S_n} \text{div} \vec{\pi}_n dS_n$$

soit

$$\frac{\rho \left[ \int_{S_L} \vec{u}_L dS_L - \int_{S_n} \vec{u}_n dS_n \right]}{\Delta t} = \int_{\gamma_n} -p_L \vec{n} d\gamma_n + \int_{\gamma_n} \vec{\pi}_n \cdot \vec{n} d\gamma_n \quad (2'')$$

avec  $\frac{\vec{x}_L - \vec{x}_n}{\Delta t} = \vec{u}_L$

2<sup>ème</sup> demi-pas :

$$\frac{\int_{S_{n+1}} dS_{n+1} - \int_{S_L} dS_L}{\Delta t} + \int_{\gamma_L} \vec{u}_L \cdot \vec{n} d\gamma_L = 0 \quad (1''')$$

$$\frac{\rho \left[ \int_{S_{n+1}} \vec{u}_{n+1} dS_{n+1} - \int_{S_L} \vec{u}_L dS_L \right]}{\Delta t} = - \int_{\gamma_L} \rho \vec{u}_L (\vec{u}_L \cdot \vec{n}) d\gamma_L \quad (2''')$$

avec  $\frac{\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_L}{\Delta t} = - \vec{u}_L$  d'où  $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n$  et  $S_{n+1} = S_n$

Il résulte finalement de (1''), (2''), (1'''), (2''') que:

$$\int_{\gamma_L} \vec{u}_L \cdot \vec{n} \, d\gamma_L = 0$$

$$\rho \int_{S_n} \frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{\Delta t} \, dS_n = \int_{S_n} -\text{grad} \vec{p}_L \, dS_n + \int_{S_n} \text{div} \vec{\pi}_n \, dS_n$$

$$- \int_{\gamma_L} \rho \vec{u}_L (\vec{u}_L \cdot \vec{n}) \, d\gamma_L$$

équivalent discret du système (1') (2')

Il faut remarquer que l'équation (1''') relative au deuxième demi-pas est identiquement vérifiée.

En effet au premier ordre près  $\int_{S_{n+1}} dS_{n+1} = \int_{S_L} dS_n (1 - \text{div} \vec{u}_L \cdot \Delta t)$ ,

et  $\int_{\gamma_L} \vec{u}_L \cdot \vec{n} \, d\gamma_L = \int_{S_L} \text{div} \vec{u}_L \, dS_L$ , donc au deuxième demi-pas seule l'équation (2''') correspondant à la conservation de la quantité de mouvement est à prendre en compte.

Le deuxième demi-pas est explicite .

Le premier demi-pas est semi-implicite; (1'') s'écrit

$$\int_{S_n} (1 + \text{div} \vec{u}_L \cdot \Delta t) \, dS_n - \int_{S_n} dS_n = 0$$

soit  $\int_{S_n} \text{div} \vec{u}_L \, dS_n = 0$  ou  $\int_{\gamma_n} \vec{u}_L \cdot \vec{n} \, d\gamma_n = 0$  (1<sup>4</sup>)

## .Méthode Lagrange-projection ou Lagrange-Euler

Les grandeurs  $\vec{u}$  obtenues précédemment au premier demi-pas peuvent être considérées comme des grandeurs lagrangiennes. On a en suivant le fluide :  $\vec{U} = \vec{u}$

alors : 
$$\frac{d}{dt} \int_S dS = 0$$

$$\rho \frac{d}{dt} \int \vec{u} dS = \int_S \text{div } \vec{\sigma} dS \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \vec{u}$$

soit de façon discrète :

$$\int_{S_L} dS_L - \int_{S_n} dS_n = 0$$

$$\rho \frac{[\int_{S_L} \vec{u}_L dS_L - \int_{S_n} \vec{u}_n dS_n]}{\Delta t} = - \int_{S_n} \text{grad } p_L dS_n + \int_{S_n} \text{div } \tau_n dS_n$$



avec 
$$\frac{\vec{x}_L - \vec{x}_n}{\Delta t} = \vec{u}_L$$

Puis ayant obtenu  $\vec{u}$  en  $\vec{x}_L$ , on détermine  $\vec{u}$  en  $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n$  avec  $\vec{u}$  au premier ordre en  $\Delta t$ .

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_L + (\overrightarrow{\text{grad } \vec{u}})_L \cdot (-\vec{u}_L \Delta t)$$

$$\vec{x}_n = \vec{x}_L - \vec{u}_L \Delta t$$

Soit toujours au premier ordre en  $\Delta t$  :

$$\int_{S_n} \vec{u}_{n+1} dS_n = \int_{S_L} \vec{u}_L (1 - \text{div } \vec{u}_L \Delta t) dS_L + \int_{S_n} (\text{grad } \vec{u})_L (-\vec{u}_L) \Delta t dS_L$$

$$= \int_{S_L} u_L dS_L - \Delta t \int_{\gamma_L} \vec{u}_L (\vec{u}_L \cdot \vec{n}) d\gamma_L$$

$$\int_{S_n} \vec{u}_{n+1} dS_n - \int_{S_L} \vec{u}_L dS_L = - \Delta t \int_{\gamma_L} \vec{u}_L (\vec{u}_L \cdot \vec{n}) d\gamma_L$$

( Relation identique à (2'''))

Couramment le premier demi-pas de calcul est appelé phase Lagrangienne et le deuxième demi-pas "Résonnage".

#### b) Méthode de résolution

Pour résoudre\*, à chaque instant  $t_n$ , connaissant  $u_n$  ;

i) On élimine, en tenant compte de la discrétisation spatiale,  $\vec{u}_L$  entre (1<sup>4</sup>) et (2'') ce qui fournit une relation pour  $P_L$ , puis ayant calculé  $P_L$  on en déduit  $u_L$ .

ii) On calcule directement  $u_{n+1}$  à partir de (2''').

---

\* Préalablement (1<sup>4</sup>), (2''), (2''') doivent être modifiées pour tenir compte des conditions aux limites.

### c) Discrétisation spatiale des équations

La discrétisation spatiale est de type éléments finis. Le domaine (D) de l'écoulement est supposé être constitué par un recouvrement régulier de quadrilatères ( mailles ), qu'on note (i,j) de surface (s(i,j), i colonne , j ligne ) (figure 5.2), transformés du carré de coté unité (figure 5.3) par la transformation :

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \xi + (x_4 - x_1) \eta + (x_3 + x_1 - x_2 - x_4) \eta \xi$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) \xi + (y_4 - y_1) \eta + (y_3 + y_1 - y_2 - y_4) \eta \xi$$

où

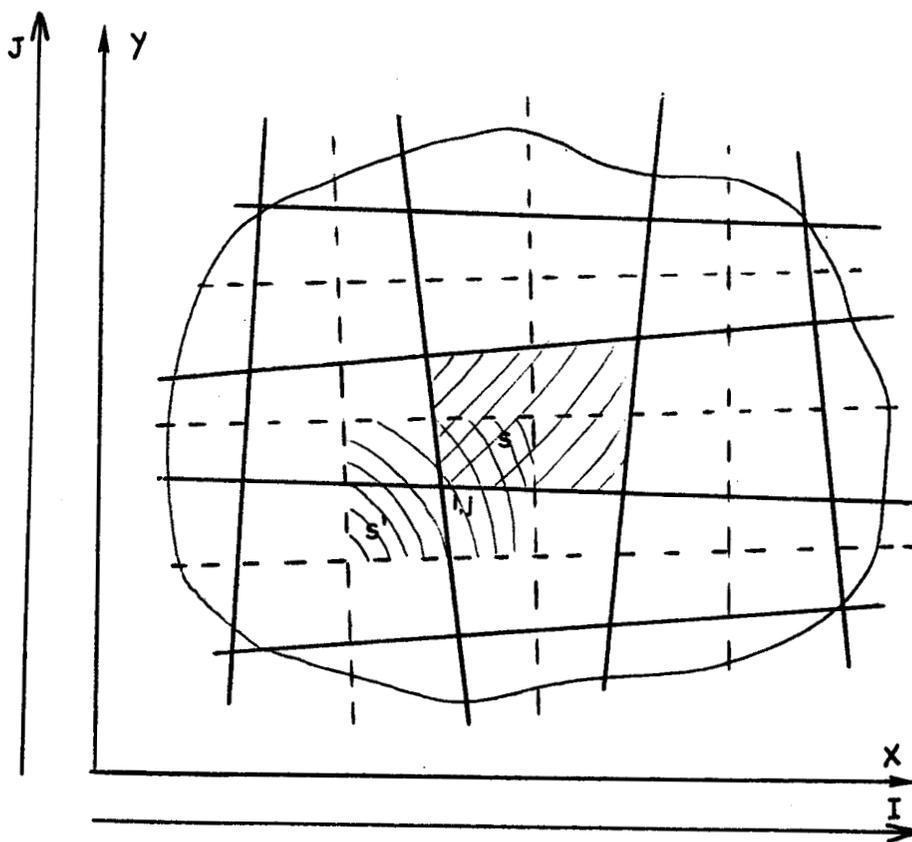


figure 5.2 : Maillage du domaine



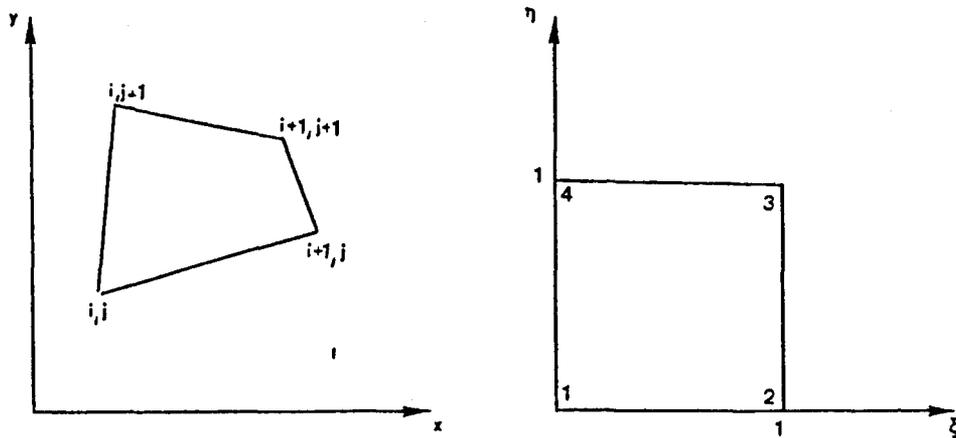


figure 5.3

$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$  sont les coordonnées d'une maille  $(i, j)$  dans l'espace physique avec la numérotation suivante :

$x_1 = x(i, j)$	$y_1 = y(i, j)$
$x_2 = x(i+1, j)$	$y_2 = y(i+1, j)$
$x_3 = x(i+1, j+1)$	$y_3 = y(i+1, j+1)$
$x_4 = x(i, j+1)$	$y_4 = y(i, j+1)$

La représentation des champs de vitesses  $u$  et  $v$  est effectuée à l'aide d'éléments continus sur  $D$  de type bilinéaire sur  $S(i, j)$  éléments isoparamétriques.

Alors la vitesse en un point de la maille s'exprime en fonction des vitesses aux noeuds par :

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \xi + (u_4 - u_1) \eta + (u_3 + u_1 - u_4 - u_2) \eta \xi$$

$$v = v_1 + (v_2 - v_1) \xi + (v_4 - v_1) \eta + (v_3 + v_1 - v_4 - v_2) \eta \xi$$

où

$u_1 = u(i,j)$	$v_1 = v(i,j)$
$u_2 = u(i+1,j)$	$v_2 = v(i+1,j)$
$u_3 = u(i+1,j+1)$	$v_3 = v(i+1, j+1)$
$u_4 = u(i,j+1)$	$v_4 = v(i,j+1)$

La représentation de tous les autres champs est effectuée à l'aide d'éléments constants par maille :  $p, \rho, \pi_{xy} = 2(\mu + \mu_t) E_{xy}^*$

L'équation de conservation de la masse (1'' - 1<sup>4</sup>) s'écrit pour des surfaces  $S(i, j)$  qui sont les mailles de contour  $\gamma(i, j)$  ( figure 5.2 ).

L'évaluation des intégrales correspondant à (1<sup>4</sup>) est immédiate et conduit à des relations linéaires.

$$f_{ij}(\vec{u}_L(i, k)) = 0$$

Les relations correspondant à l'équation de quantité de mouvement (2'' et 2''') s'écrivent pour les surfaces  $S'(i, j)$  entourant les noeuds  $(i, j)$  de contour  $\gamma'(i, j)$ , ( figure 5.2 ).

Les intégrales correspondant à  $\int_{\gamma'_n} \pi_n \cdot n \, d\gamma_n$  et  $\int_{\gamma'_n} -P_L \cdot \vec{n} \, d\gamma_n$

dans (2'') sont encore aisément calculables. L'évaluation des

intégrales  $\int_{S'(i, j)} \vec{u} \, dS$  devrait normalement faire

---

\* Les  $E_{xy}$  sont obtenus par moyenne sur les maille  $S(i, j)$ .

intervenir la vitesse  $u(i,j)$  et les vitesses aux noeuds environnants.

Pour calculer les  $u(i,j)$  en fonction des  $p(i,j)$ , il faudrait alors résoudre un système matriciel pour chaque composante  $u(i,j), v(i,j)$ .

Pour éviter cela, on introduit une approximation supplémentaire qui revient à admettre que  $\vec{u}$  est constant sur  $S'(i,j)$  :  
 $(\vec{u} = \vec{u}(i,j))^\circ$ .

Pour chaque  $(S'(i,j))$  la relation (2'') s'écrit alors :

$$M_{ij} \frac{\vec{u}_{L(i,j)} - \vec{u}_{n(i,j)}}{\Delta t} = F_{ij} (P_{L(l,k)}, \pi_{n(l,k)}) \quad (2^4)$$

avec  $M_{ij} = \rho \int_{S'(i,j)} dx dy$

On fait la même hypothèse pour évaluer les intégrales existantes dans (2''') qui sont elles aussi prises sur  $S'(i,j)$ .

---

\* Ceci présente l'inconvénient de découpler les différents noeuds et pour y remédier, il est nécessaire dans certains cas d'introduire dans l'algorithme un couplage artificiel portant sur les vitesses.

De plus, pour évaluer l'intégrale  $\int_{\delta_L} \rho \vec{u}_L(\vec{u}_L, \vec{n}) d\gamma_L$  on utilise une technique de type différence amont; on obtient finalement les relations :

$$M_{ij} \left[ \frac{\vec{u}_{n+1}(i,j) - \vec{u}_L(i,j)}{\Delta t} \right] = G_{ij} [u_L(l,k)] \quad (2^5)$$

L'ensemble des relations :

$$f_{ij}(\vec{u}_L(l,k)) = 0 \quad (1^5)$$

$$M_{ij} \left[ \frac{u_L(i,j) - u_n(i,j)}{\Delta t} \right] = F_{ij} [P_L(l,k), \pi_n(l,k)] \quad (2^4)$$

$$M_{ij} \left[ \frac{u_{n+1}(i,j) - u_L(i,j)}{\Delta t} \right] = G_{ij} [u_L(l,k)] \quad (2^5)$$

modifiées pour tenir compte des conditions aux limites, constitue ainsi le système à résoudre suivant la méthode indiquée en (3 b). La matrice du système linéaire  $A p_L = B$  fournissant les  $p_L(l,k)$  obtenues par élimination des  $u_L(l,k)$  entre les (1<sup>5</sup>) et (2<sup>4</sup>) est tridiagonale par blocs. On utilise cette particularité pour l'inverser.

#### 4 Conditions aux limites et conditions initiales

Sur les frontières solides, on écrit que la vitesse du fluide est égale à la vitesse de la paroi.

Sur les frontières fluides, on peut imposer des conditions cinématiques ou dynamiques.

Compte tenu de l'application visée on se contente de supposer que la composante tangentielle de la vitesse suivant la frontière et la dérivée normale de la composante normale sont nulles (écoulement monodimensionnel établi). Il en résulte que sur ces frontières, la pression est une constante.

Les conditions aux limites sont discrétisées d'une façon cohérente avec celle exposée au paragraphe 3.

Pour l'état initial, on considère que les vitesses sont nulles, de même pour le champ de pression.

#### 5 Organigramme de calcul

La résolution du système d'équations discrètes correspondant à (1<sup>5</sup>), (2<sup>4</sup>), (2<sup>5</sup>) auxquelles, il faut bien entendu ajouter les conditions aux limites et les conditions initiales est décrite dans les organigrammes des tableaux (5.1 a et 5.1 b).

Dans le tableau 5.1 a, la partie "calcul" constitue le corps du programme. Les autres parties concernent la phase

d'initialisation, de conditions aux limites et de calcul de paramètres.

Dans le tableau(5.1 b), on développe la partie calcul qui se déroule en deux phases.

1<sup>ère</sup> phase :

Elle correspond à la résolution des équations (1<sup>5</sup>) et (2<sup>4</sup>) . C'est la phase Lagrangienne ou premier demi-pas.

Pour déterminer les ( $p_L$ ), on peut résoudre le système matriciel

$$A p_L = B . . \text{ On a préféré résoudre le système équivalent } A(p_L - p_n) = B - A p_n$$

Dans l'interprétation "Lagrangienne" on dispose des valeurs des vitesses, des pressions, aux noeuds et aux centres des éléments, mais ces derniers se sont déplacés.

2<sup>ème</sup> phase

On tient compte des termes de convection : cette phase correspond au 2<sup>ème</sup> demi-pas. On calcule les vitesses pour la décomposition initiale du domaine. A la fin de cette phase, les différentes variables ont évoluées pendant le pas de temps  $\Delta t$  .

La méthode de résolution consiste donc à intégrer dans le temps les équations de quantités de mouvement, l'équation de continuité étant une contrainte à respecter à chaque instant. Dans l'équation de quantité de mouvement, les termes correspondant aux

effets visqueux et à la convection étant pris en compte de façon explicite, il en résulte que le pas de temps doit être choisi de façon à respecter les critères de stabilité correspondants.

TABLEAU 5.1 a  
ORGANIGRAMME DE CALCUL

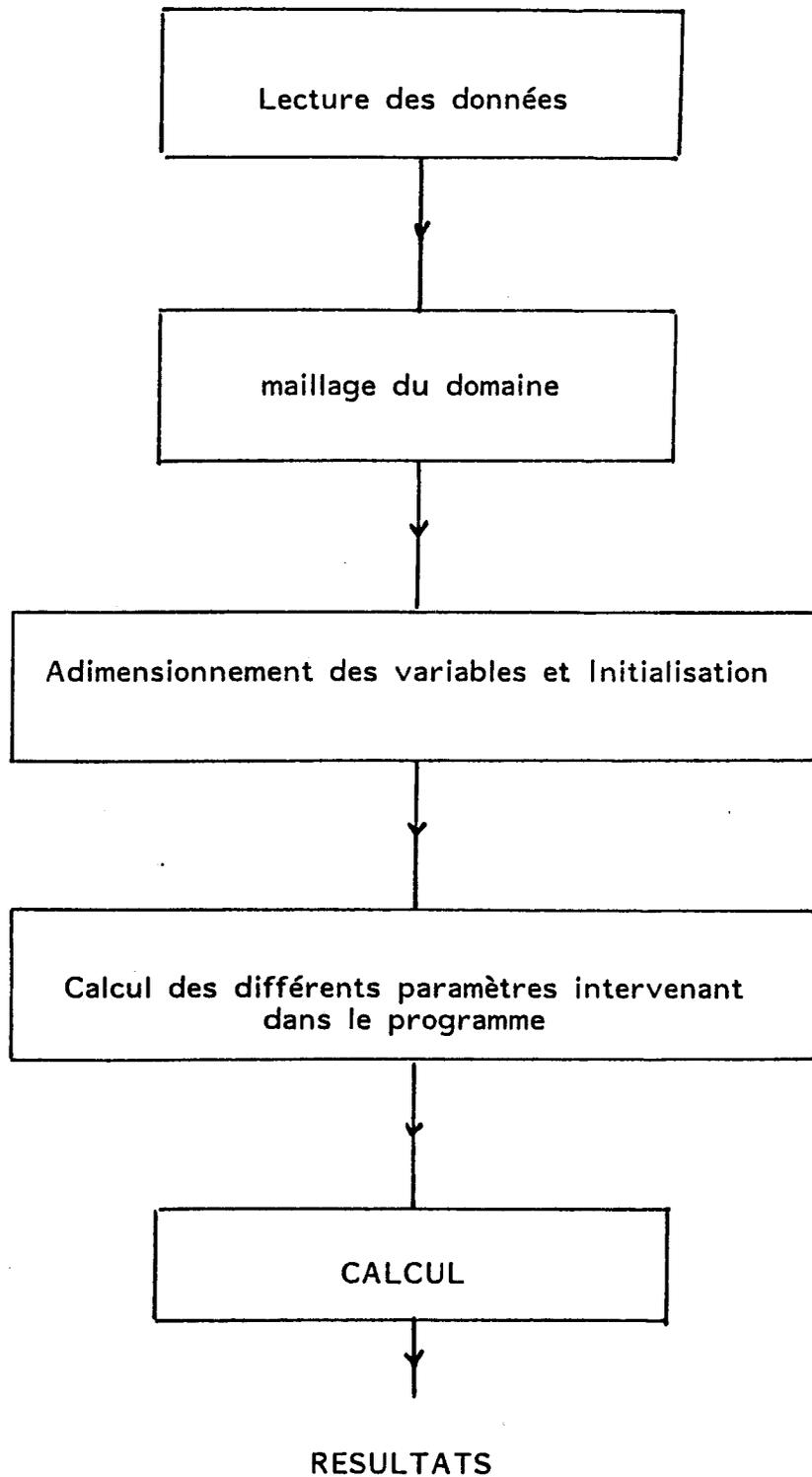
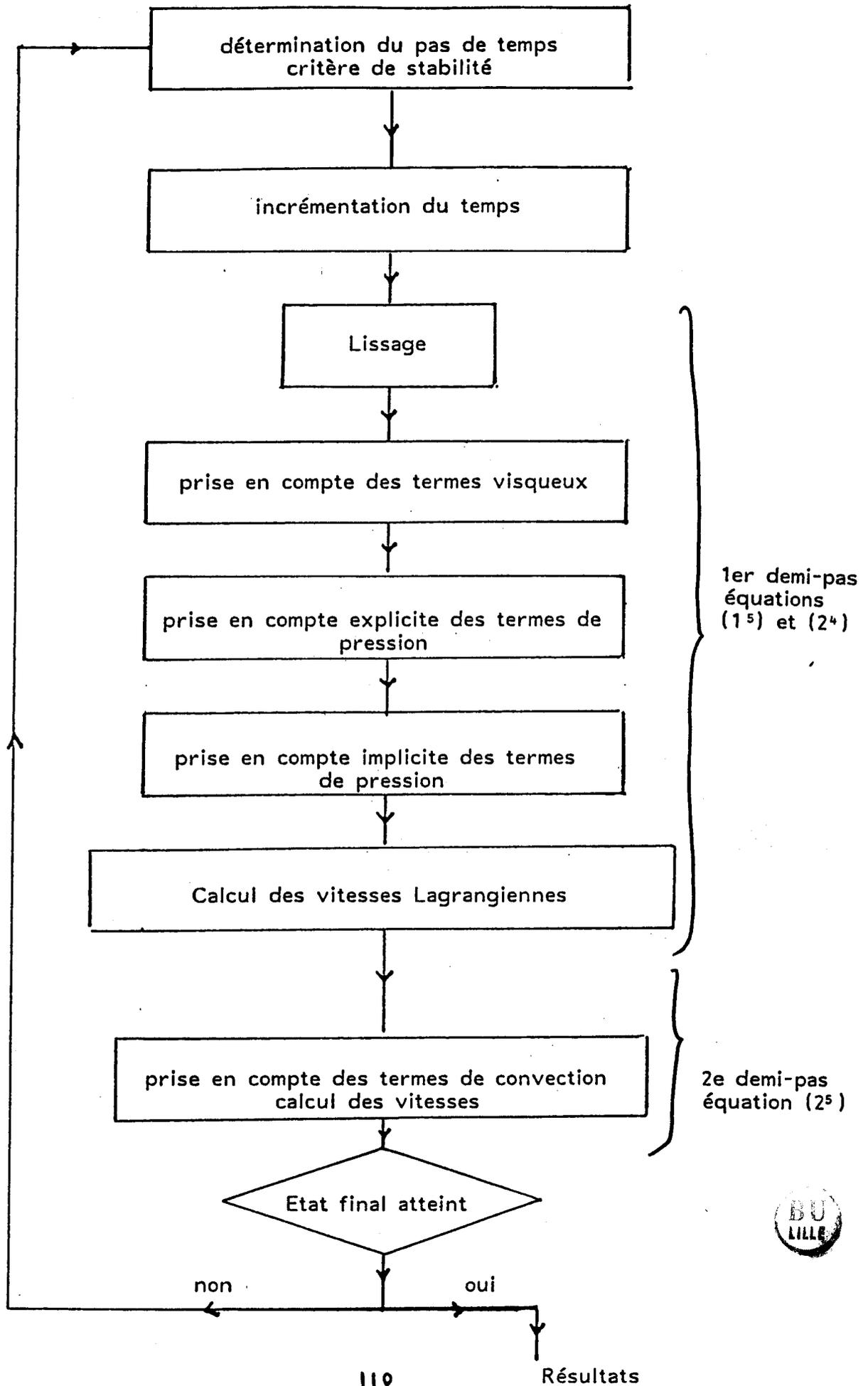


Tableau 5.1 b

CALCUL



## 6 Stabilité. Convergence. Lissage.

### a) Stabilité

\* Critère de stabilité portant sur les termes visqueux.  
Ce critère est obtenu par deux méthodes différentes qui fournissent des conditions nécessaires.

1<sup>ère</sup> méthode :

On utilise la méthode de Von Neuman et le critère classique

$$\Delta t = \frac{2\rho \Delta X^2}{\mu_t}, \quad \Delta t = \min_D \left( \frac{2\rho \Delta X(i,j)^2}{\mu_t(i,j)} \right)$$

$\mu_t(i,j)$  viscosité turbulente dans la maille (i,j) ,  
 $\Delta X(i,j)$  dimension caractéristique de la maille (i,j)

2<sup>ème</sup> méthode :

Pour tenir compte de la structure de la viscosité turbulente, on écrit à chaque instant qu'il doit y avoir stabilité par rapport aux "conditions initiales" c'est à dire :

$$\|\delta \vec{u}_L\| \leq \|\delta u_n\|$$

Les termes visqueux sont pris en compte dans l'équation (2<sup>4</sup>) :

$$\vec{u}_L^* = \vec{u}_n^* + M^{-1} F^*(\mu_t(u_n), u_n) \Delta t$$

où  $(\vec{u}^*, F^*)$  parties visqueuses de  $\vec{u}_L$ ,  $F$  (relation (2<sup>4</sup>))

$$\|\delta u_L^*\| = \left\| \left[ 1 + \left( \frac{\partial M^{-1} F^*}{\partial u} \right) \Delta t \right] \right\| \cdot \|\delta u_n\| \quad \text{et}$$

$$\left\| \left( \frac{\partial M^{-1} F^*}{\partial u} \right)_n \right\| \Delta t \leq 2$$

L'évaluation de  $\left\| \frac{\partial M^{-1} F^*}{\partial u} \right\|$  est faite de façon tout à fait

approchée puisque l'on se contente de prendre pour

$$\left\| \frac{\partial M^{-1} F^*}{\partial u} \right\|_n = \frac{\| M^{-1} F_{n-1}^* - M^{-1} F_n^* \|}{\| u_{n-1} - u_n \|}$$

La deuxième méthode, néanmoins plus satisfaisante puisqu'elle tient compte de la structure de  $(\mu_t)$ , donne des pas de temps plus grands tant que le processus évolue mais risque de devenir imprécise au voisinage d'un état stationnaire.

C'est pour cela que bien que les deux méthodes donnent des valeurs de pas de temps tout à fait comparables au voisinage d'un état stationnaire, on prend en fin de compte pour pas de temps visqueux le maximum des deux pas de temps ainsi calculés.

\* Critère de stabilité portant sur les termes de convection: Comme précédemment on évalue la norme de  $(M^{-1}G)$  intervenant dans l'équation (2<sup>5</sup>).

$$\frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{\Delta t} = M^{-1} G(\vec{u}_L)$$

Pour évaluer cette norme, on utilise la structure des termes  $G(i,j)$  :

$$G(i,j) = \int_{\gamma_{ij}} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\gamma = \sum_{l=1}^{l=4} (\rho f_{ij}^e) \vec{u}_{ij}^{*e}$$

les  $f_{ij}^e$  étant les coefficients de transport de flux pour chaque coté de la maille et les  $\vec{u}_{ij}^{*e}$  étant définis à partir des  $\vec{u}$  suivant la technique des différences amont.

L'évaluation de  $M^{-1}G$  utilisée est  $2 \max_{i,j,e} \left| \frac{f_{ij}^e}{M_{ij}} \right|$  et le pas de temps

est choisi de façon que :

$$\max_{i,j,e} \left| \frac{f_{ij}^e}{M_{ij}} \right| \Delta t \leq 1$$

Pas de temps global

Il est calculé à partir des pas de temps précédents. Il correspond au minimum entre le pas de temps relatif aux termes visqueux et celui relatif aux termes de convection.

#### b) Convergence

A l'état stationnaire  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  ; Bien sûr ceci doit être

évalué en valeur relative. Aussi pour définir la convergence vers l'état stationnaire, on considère à chaque pas de temps le rapport des normes des incréments globaux de vitesses au maximum

des normes des incréments relatifs aux termes visqueux, aux termes de pression ou aux termes de convection. La convergence étant assurée lorsque ce rapport est plus petit qu'une valeur donnée à l'avance  $\epsilon$ .

### c) Lissage

Le fait de découpler la vitesse d'un noeud de celles des noeuds voisins dans le calcul d'intégrales sur  $S'(i,j)$  conduit, lorsque le facteur de forme des mailles (ou la dimension des mailles) est trop grand eu égard aux gradients de vitesse, à des solutions en dents de scie et à une légère instabilité.

Il est possible de remédier de façon simple à cela lors du calcul des termes explicites de (2<sup>4</sup>) en introduisant un lissage par l'intermédiaire d'un terme de viscosité artificielle; Cette viscosité étant liée à la variation de la solution à chaque pas de temps. Compte tenu que, dans le cas présent, on ne s'intéresse qu'aux solutions stationnaires des équations, ceci ne présente aucun inconvénient, la correction due au lissage étant nulle à la convergence.

## 7 Cas tests

Pour tester notre programme de calcul on l'applique au cas de l'écoulement entre deux parois planes parallèles. Les pressions à l'amont  $P_s$  et à l'aval  $P_a$  du domaine sont supposées constantes. Une des parois se déplace avec une vitesse  $(vr)$  (figure 5.4).

Par souci d'homogénéité avec ce qui est fait dans les portées aux chapitres précédents et par souci de simplicité, on utilise le même modèle de turbulence que celui utilisé par Elrod [6] .

On a :

$$\mu_t = \mu k (y^+ - \delta l \operatorname{th} \frac{y^+}{\delta l})$$

$$\text{avec } y^+ = \text{dist } \rho \sqrt{\pi_{xy}} / \mu$$

où (dist) est la distance qui sépare le point considéré de la paroi la plus proche.

Avec des structures de maillage du type indiqué (figure 5.5) on cherche la finesse de maillage à la paroi permettant une bonne représentation de l'écoulement.

La mesure de la qualité de la représentation est l'erreur relative faite sur le gradient de pression, le gradient de référence étant celui calculé à partir des relations de synthèse fournies par Constantinescu [7].

Les résultats obtenus sont les suivants (tableau 5.2). Ils sont tout à fait satisfaisants, notamment dans le cas où la maille à la paroi a une épaisseur égale au 1/64 de la distance des deux parois .

En ce qui concerne les profils de vitesse il en est de même. Par exemple les profils de vitesse obtenus ( cas n°4,8,10 ) ( figure 5.6 ) sont tout à fait comparables aux profils expérimentaux obtenus par Reynolds [33] ( figure 5.7 ) ou par Constantinescu [4] ( figure 5.8 ).

Pour traiter le problème du raccordement chambre-portée où on cherche à évaluer la "perte" de pression au voisinage de ce raccordement, dans le but de ne pas augmenter exagérément les temps de calcul ( $\Delta t = \frac{2\rho \Delta X^2}{\mu_t}$ , cf § 6 a), on choisira par la suite une finesse de maillage avec une maille à la paroi d'épaisseur égale au ( $\frac{1}{32}$ ) de la distance des deux parois.

figure 5.4 : Ecoulement entre deux parois planes parallèles d'épaisseur  $h = 8 \cdot 10^{-4}$  m

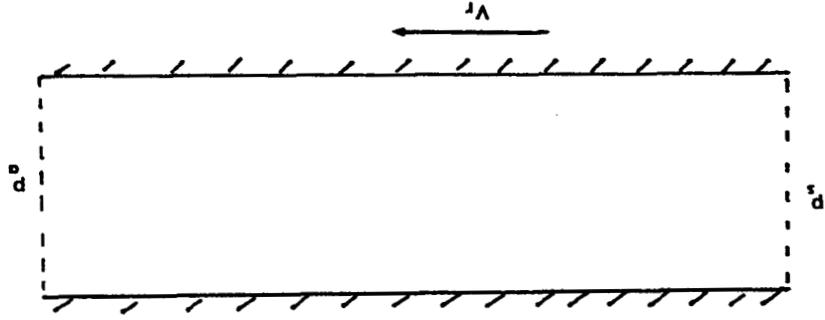
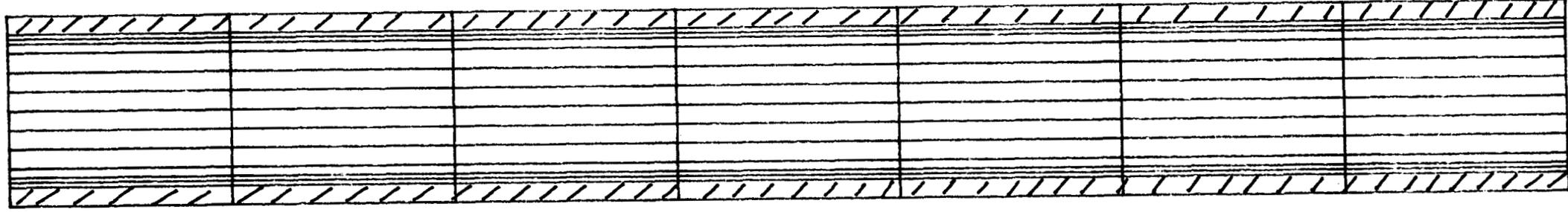


figure 5.5 : Cas test ; maillage du domaine



cas n°	pression en entrée imposée $P_s$ (Pa)	pression en sortie imposée $P_a$ (Pa)	vitesse sur une paroi $V_r$ (m/s)	Débit suivant une section $Q$ ( $m^3/s$ )	finesse du maillage	$(\frac{\partial P}{\partial x})_{num}$ (Pa/m)	$(\frac{\partial P}{\partial x})_{ana}$ (Pa/m)
1	$1.10^5$	$1.25.10^5$	0	$15,9.10^{-3}$	1/64	$36,5.10^5$	$33,5.10^5$
2	$1.10^5$	$1.12.10^5$	0	$10,6.10^{-3}$	1/64	$17,5.10^5$	$16,8.10^5$
3	$1.10^5$	$1.06.10^5$	0	$6,9.10^{-3}$	1/34	$8,75.10^5$	$8,29.10^5$
4	$1.10^5$	$1.08.10^5$	0	$8,5.10^{-3}$	1/64	$11,6.10^5$	$11,57.10^5$
5	$1.10^5$	$1.06.10^5$	0	$6,97.10^{-3}$	1/64	$8,75.10^5$	$8,64.10^5$
6	$1.10^5$	$1.06.10^5$	-20	$12,3.10^{-3}$	1/64	$8,75.10^5$	$7,95.10^5$
7	$1.10^5$	$1.08.10^5$	-20	$12,7.10^{-3}$	1/32	$11,6.10^5$	$8,79.10^5$
8	$1.10^5$	$1.08.10^5$	-20	$13,6.10^{-3}$	1/64	$11,6.10^5$	$10,7.10^5$
9	$1.10^5$	$1.06.10^5$	20	$4,2.10^{-3}$	1/32	$8,75.10^5$	$7,01.10^5$
10	$1.10^5$	$1.06.10^5$	20	$3,3.10^{-3}$	1/64	$8,75.10^5$	$8,67.10^5$

TABLEAU 5.2

Ecoulement entre deux parois planes - Résultats pour différentes configurations

Dans le cas  $V_r < 0$   $B = 43$

Dans le cas  $V_r > 0$   $B = -32$

$$Re = 20000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c = V_r \text{ si } V_r \neq 0 \\ u_c = u_{max} \text{ si } V_r = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c = V_r \text{ si } V_r \neq 0 \\ u_c = u_{max} \text{ si } V_r = 0 \end{array} \right.$$

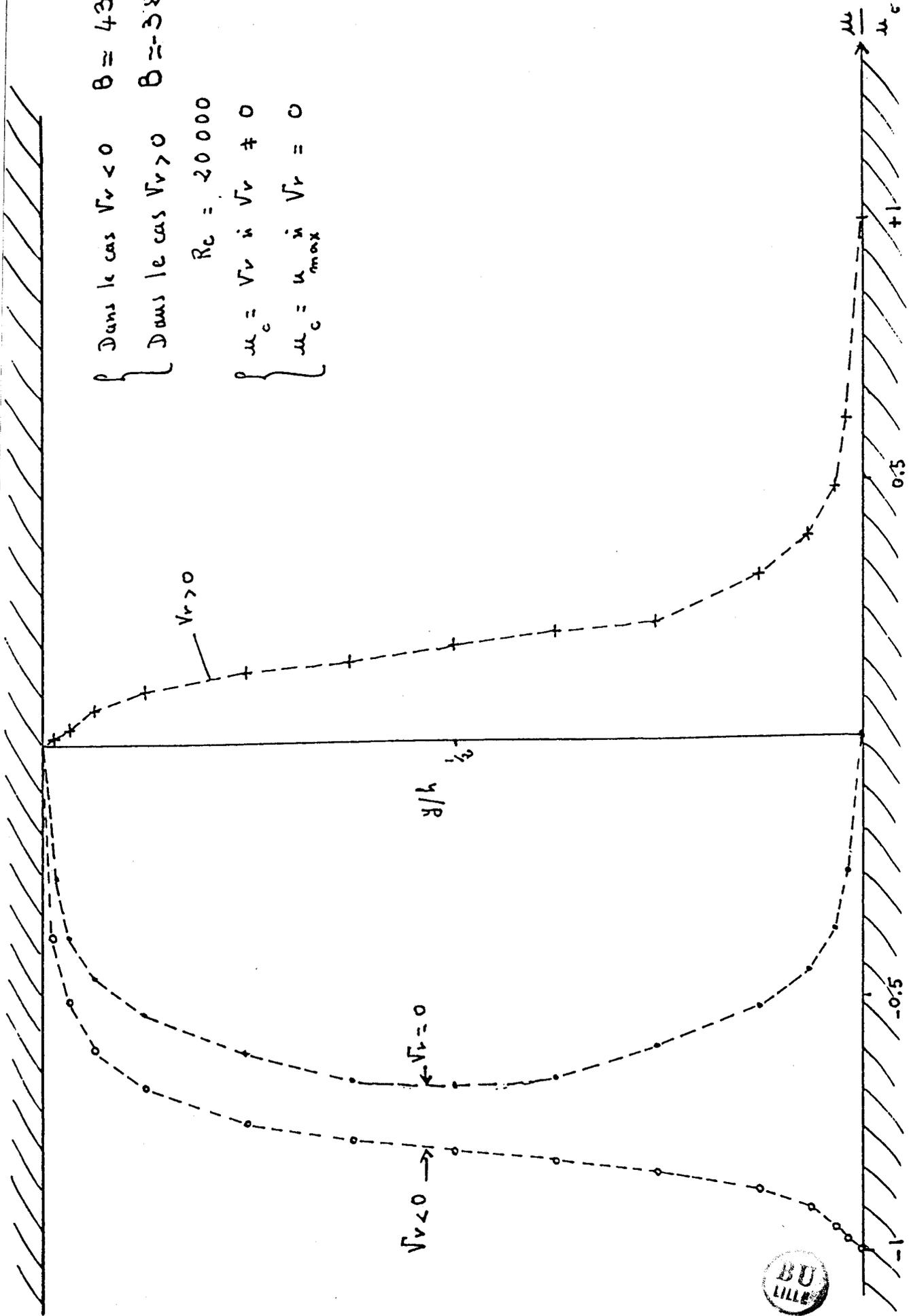


Figure 5.6 Cas tests n° 4-8-10 profils des vitesses

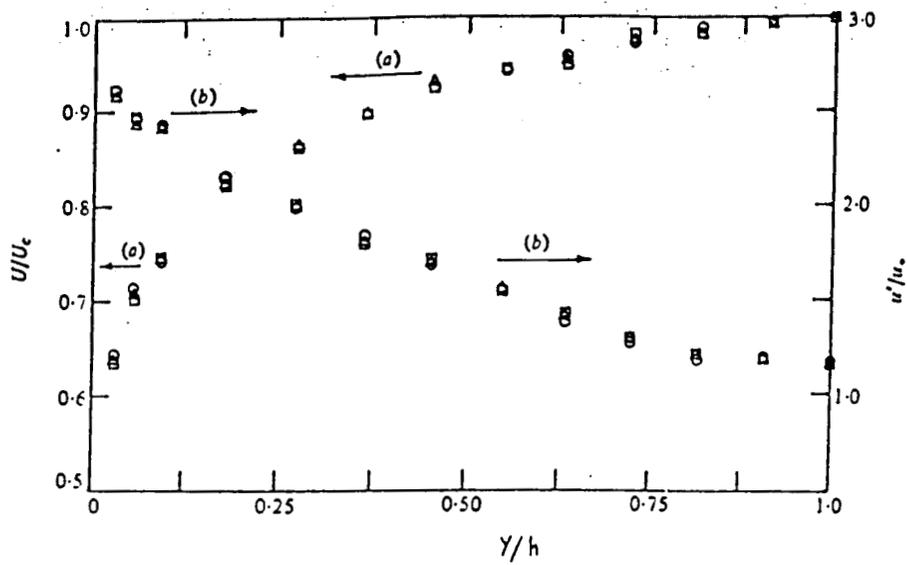
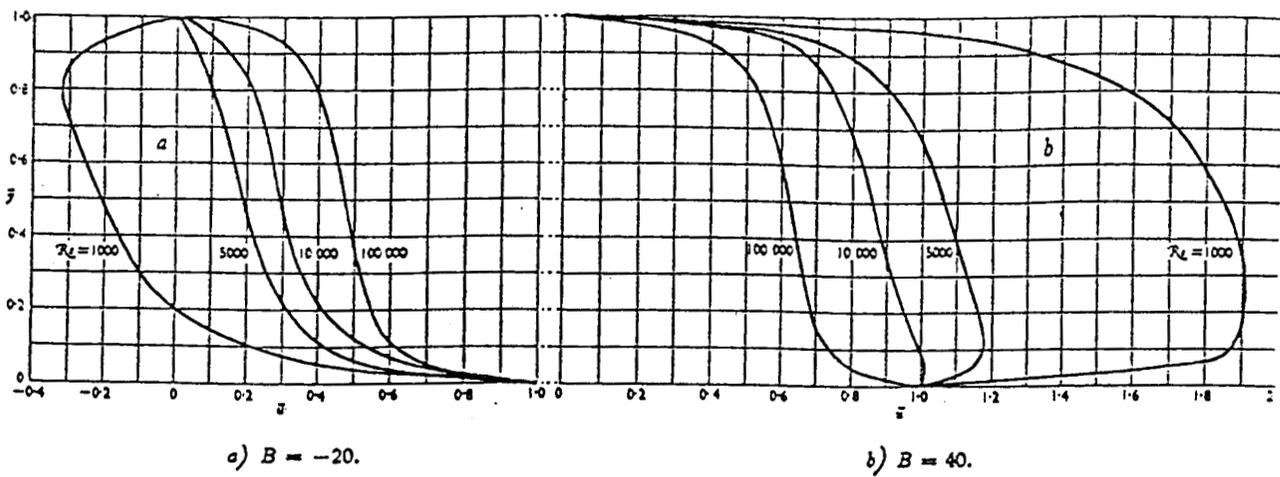


fig 5.7 : profils de vitesse obtenus par Reynolds



$B = B_x$  (cf. chap. 2, paragraphe 1)



fig 5.8 : profils de vitesse fournis par Constantinescu

## 8 Application au cas de l'écoulement à la sortie d'une chambre

L'application a été faite dans le cas du palier à huit chambres ( chapitre 3 ) dont la géométrie dans le sens axial ou circonférenciel est différente ( figure 5.9 ) .

L'écoulement dans les chambres est évidemment tridimensionnel. Mais, on a constaté en étudiant les résultats des modélisations globales ( chapitre 3 ) que :

-les composantes des vitesses suivant z ( figures 5.10 ) dans espaces interchambre sont faibles sauf au voisinage des bords extérieurs.

-les vitesses induites par l'alimentation sont faibles par rapport aux vitesses dans les jonctions "chambre-portée".

Il en résulte que pour étudier l'écoulement dans les jonctions chambre-portée, il est légitime dans une première approximation de décomposer l'écoulement tridimensionnel suivant des plans tels que  $P_1$  ou  $P_2$  ( figures 5.10 ) qui correspondent, au moins au voisinage des jonctions, à des surfaces de courant.

De plus on suppose qu'il existe dans la chambre une zone centrale où la pression est quasi constante.

On est aussi amené à traiter des problèmes avec des géométries et des conditions aux limites du type de celles indiquées figures 5.11 a , 5.11 b et 5.12 .

En ce qui concerne le modèle de turbulence on utilise encore le modèle de loi de paroi généralisée; pour qu'il soit valable dans tout le domaine, on remplace la contrainte de cisaillement

$\tau_{xy}$  par l'expression suivante  $(\mu + \mu_t) \sqrt{2E_{xx}^2 + 2E_{yy}^2 + 4E_{xy}^2}$

A noter que les modèles de turbulence de type longueur de mélange sont très voisins des modèles de sous-grille [32] ce qui justifie par certains cotés leur utilisation dans des situations complexes.

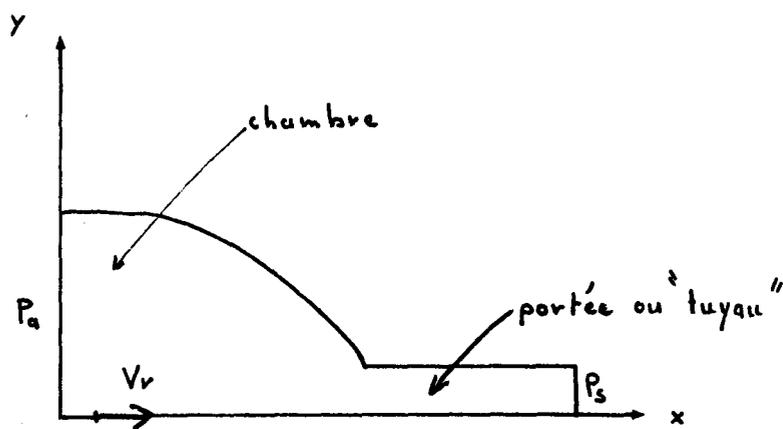


figure 5.11 a

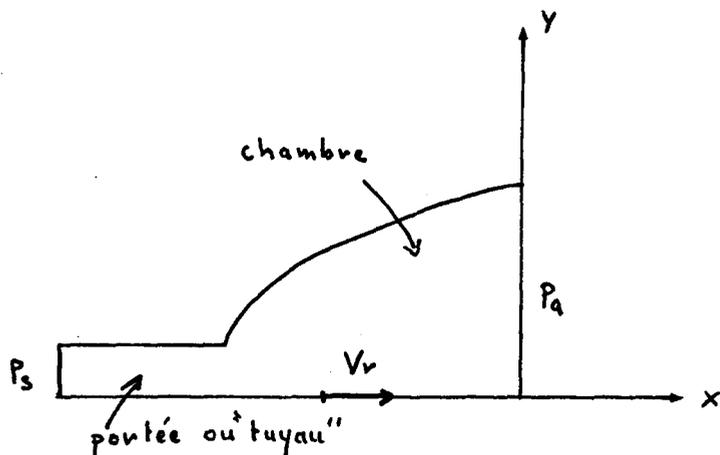


figure 5.11 b

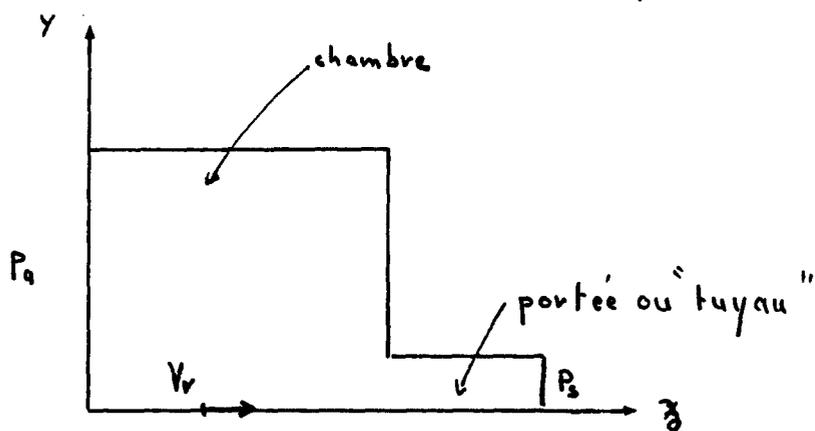


figure 5.12.



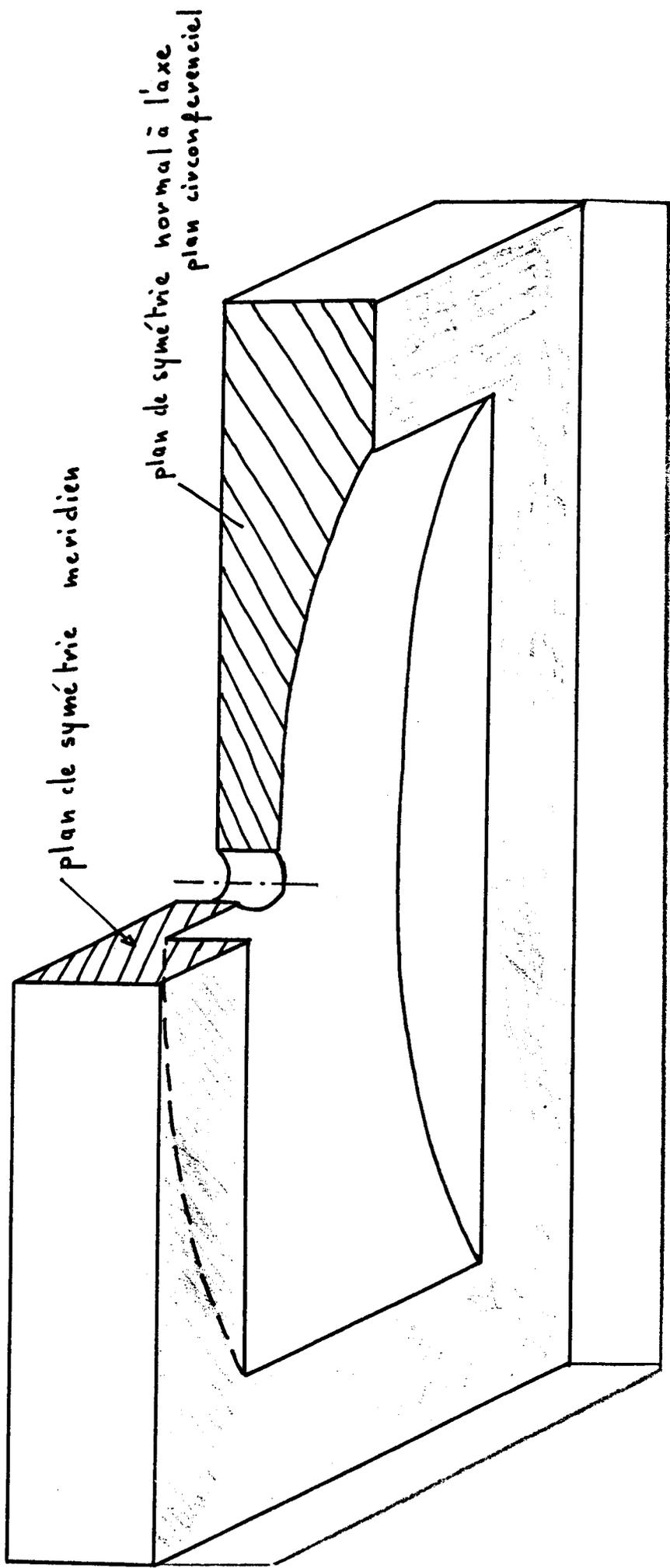


Figure 5.9: Géométrie du Palier à 5 chambres.



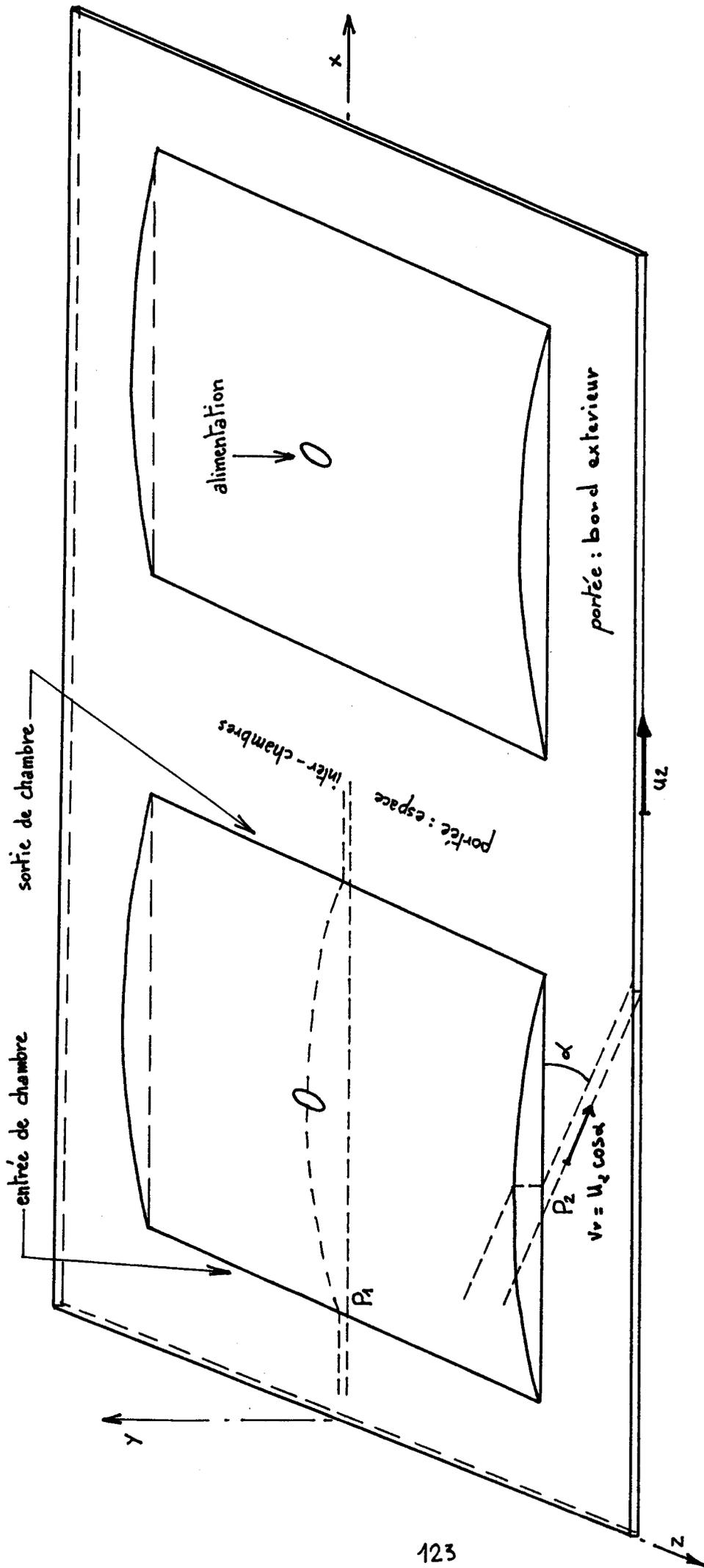


figure 5.10 a : Géométrie du Palier à 8 chambres .

$\alpha$  est défini  $\tan \alpha = \frac{w_{im}}{u_{im}}$  ( $u_{im}, w_{im}$  : vitesses moyennes du fluide cf chapitre 3)





## 8.1 Ecoulement en sortie de chambre dans le plan de symétrie méridien ( écoulement dans le sens axial)

Vu la géométrie du domaine, on choisit un maillage tel que celui des figures (5.13). Différents cas de calcul sont effectués (tableau 5.3 ).

### Résultats:

Les structures des champs de pression et de vitesse sont semblables pour les différents cas traités.

Par exemple pour le cas (C) , on constate sur les figures (5.14) à (5.15) qu'il y a :

- une large zone de recirculation en haut de la chambre.

- un décollement juste au voisinage du rétrécissement.

D'une façon générale l'allure des champs de vitesses et de pression est bien continue sauf dans le " tuyau "; Ceci est vraisemblablement du aux erreurs de la discrétisation signalées précédemment (§2.c et 6.c), erreurs amplifiées par le fait que pour éviter des temps de calcul trop élevés on a des mailles dont le facteur de forme varie de 10 à 100.

Notons au passage que pour un maillage (15\*26) le temps de calcul est de l'ordre de 40 minutes CPU sur le DPS8.

Les profils de pressions pour les différents cas sont donnés par la figure (5.16).

Pour résumer l'ensemble des résultats on a cherché une corrélation permettant d'obtenir une relation fournissant la

perte de pression chambre-portée. Pour ce faire, on a utilisé une méthode des moindres carrés.

Pour évaluer le  $\Delta p$  pression-tuyau, on a pris la différence entre la pression (Pa) et la pression obtenue en prolongeant la courbe de pression dans la partie "tuyau" jusqu'à la jonction chambre-tuyau (fig 5.15).

Les résultats sont bien représentés ( tableau 5.3 ) par la relation :

$$\Delta p = \rho u_m^2 - 0,26 \rho V_r^2 + 0,1 \rho u_m V_r$$

où,  $u_m$  est la vitesse débitante et  $V_r$  la vitesse de la paroi défilante.

Vraisemblablement le terme  $\rho u_m^2$  correspond à la perte de pression liée au retrécissement brusque alors que les termes  $\rho u_m V_r$  et  $\rho V_r^2$  correspondent à l'énergie apportée par la paroi défilante au fluide par frottement.

Figure 5.13 : Ecoulement en sortie de chambre dans le plan de symétrie méridien . Maillage du domaine .

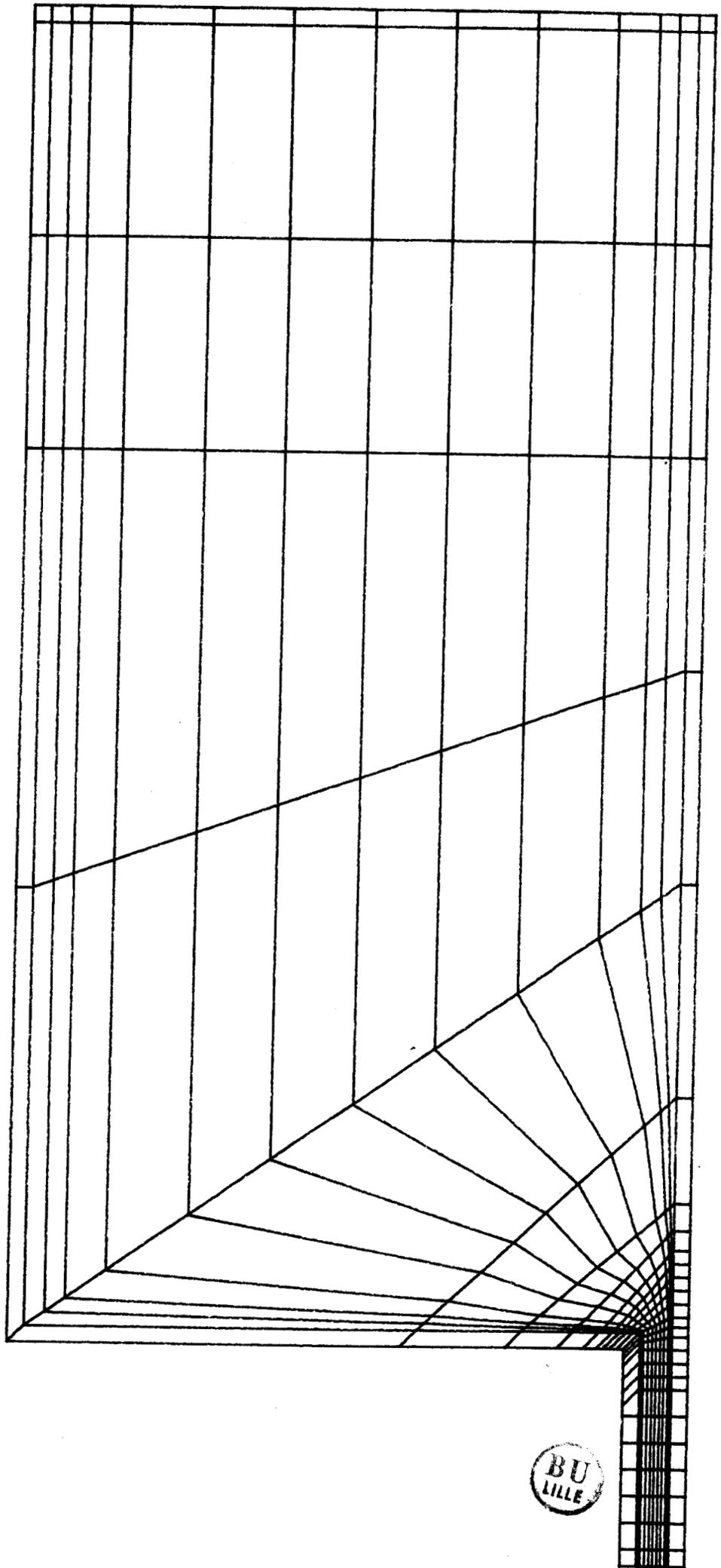
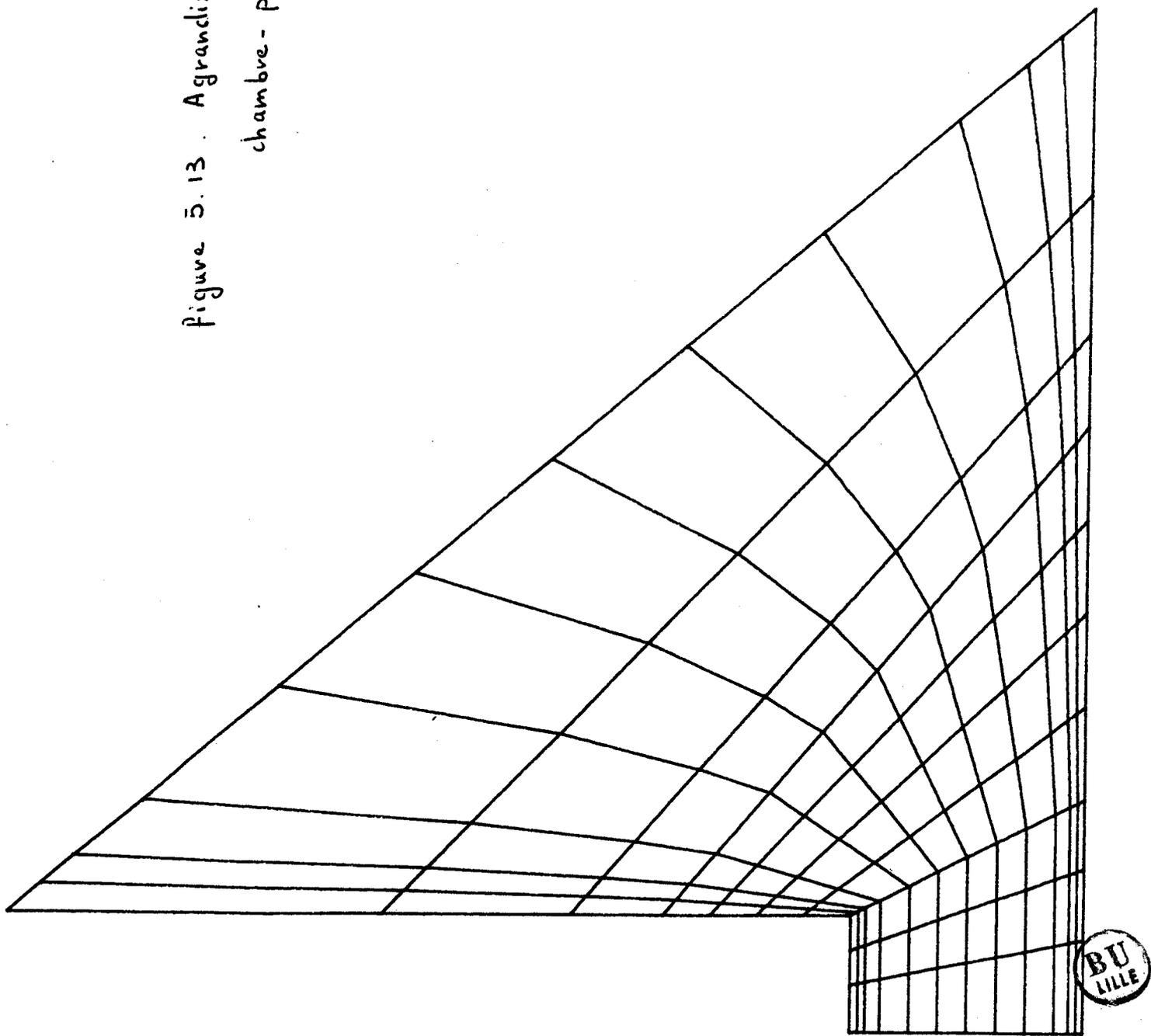


Figure 5.13 . Agrandissement à la jonction  
chambre - pontée .



$$P_a = 3.7 \cdot 10^5$$

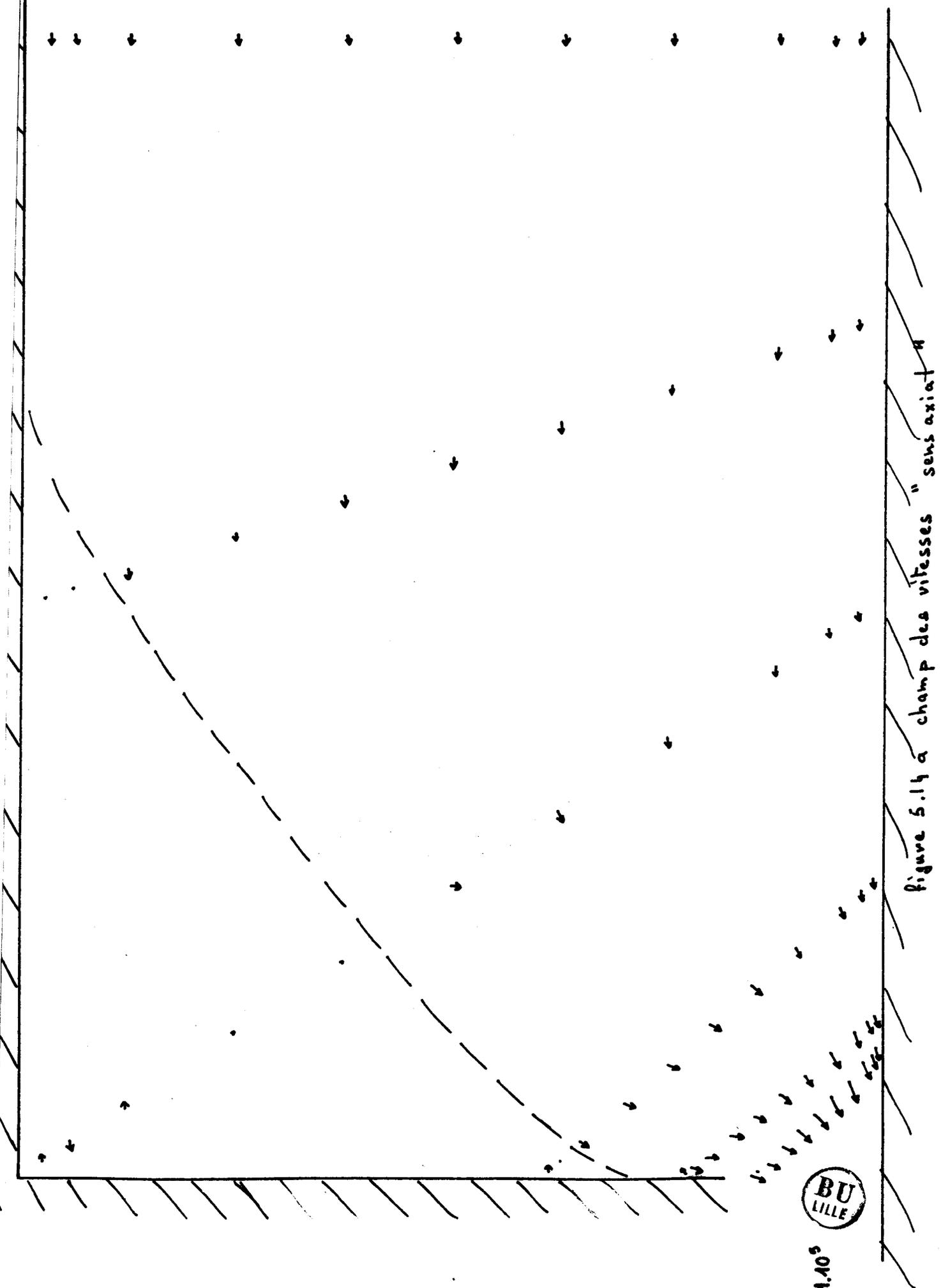


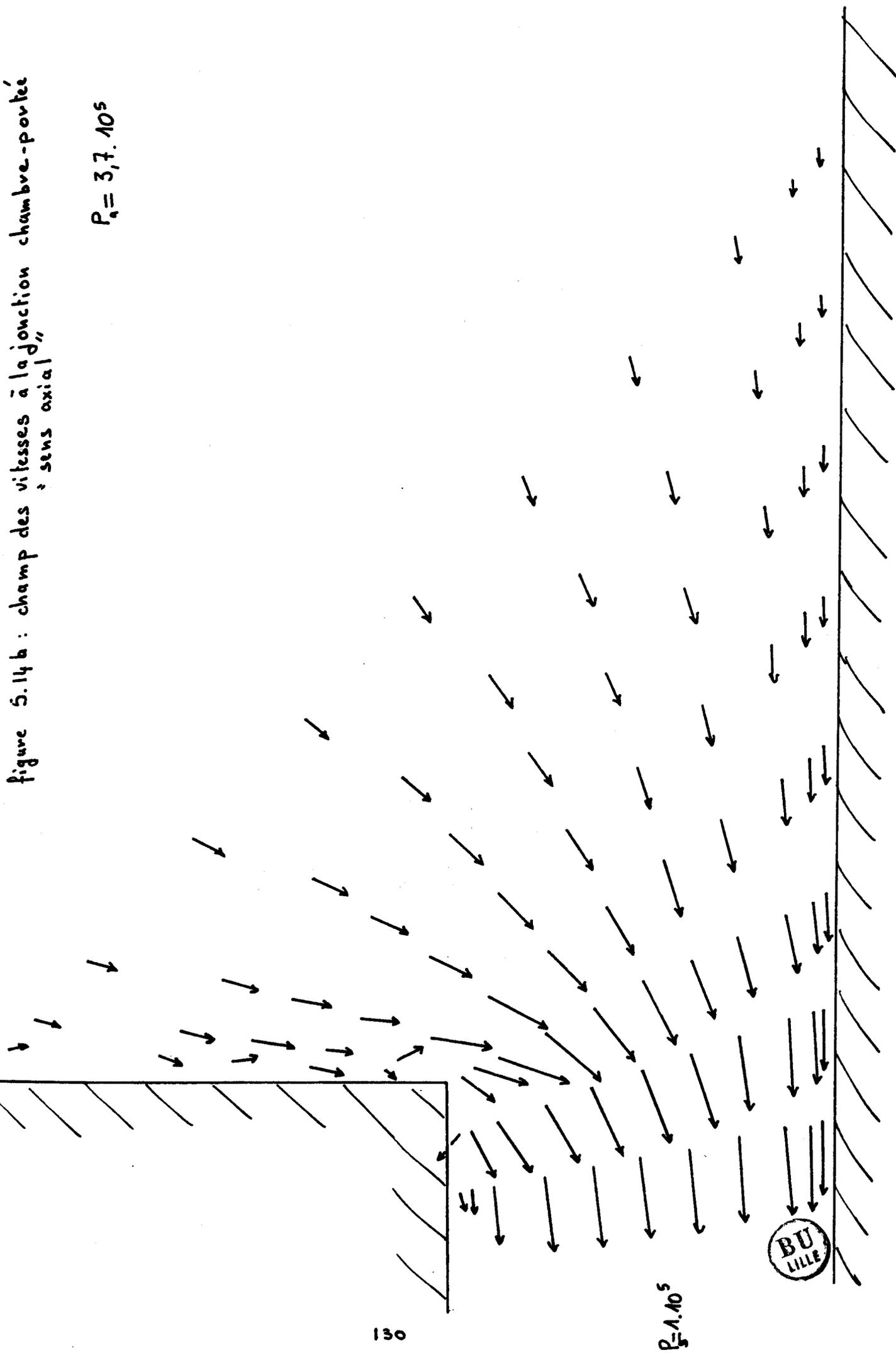
Figure 5.14 a champ des vitesses " sens axial "

BU  
LILLE

$$P_a = 4 \cdot 10^5$$

figure 5.14 b : champ des vitesses à la jonction chambre-portée  
, sens axial

$$P_a = 3,7 \cdot 10^5$$



$$P_s = 1 \cdot 10^5$$

BU  
LILLE

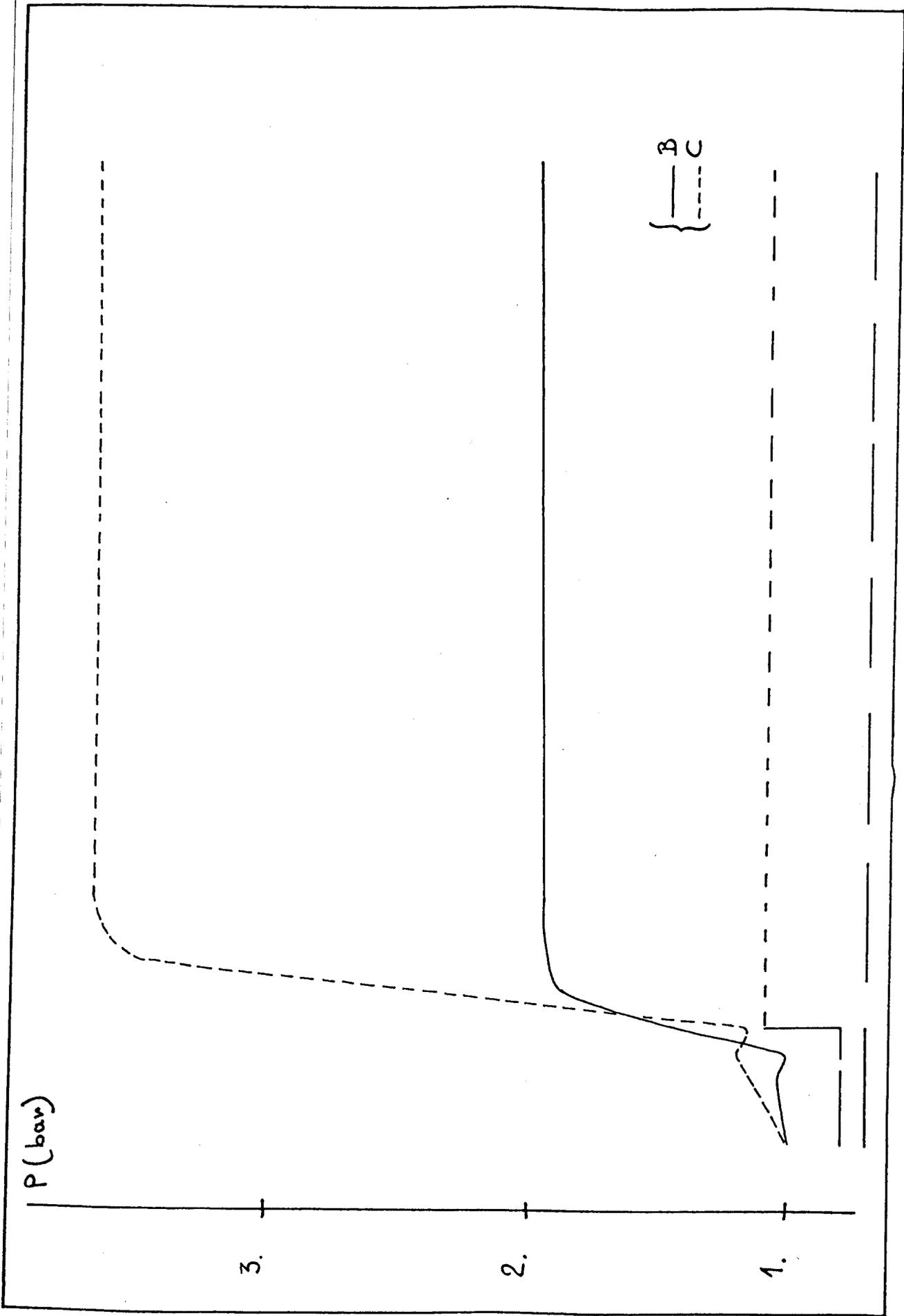


Figure 5.15 : profil des champs de pression



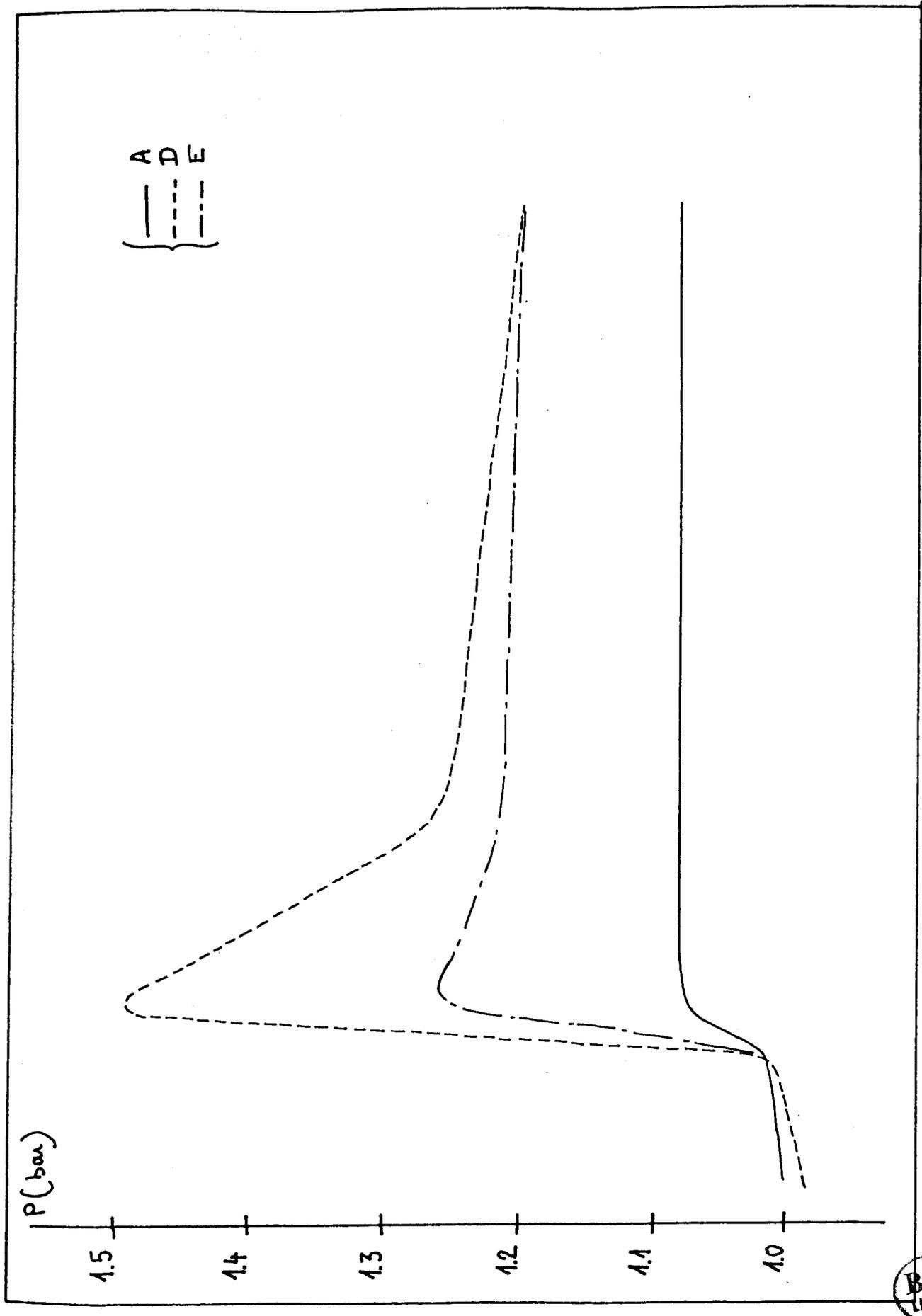


figure 5.16 : profils des champs de pression



Cas	$P_s$ (Pa)	Pa	$V_r$ (m/s)	Q ( $m^3/s$ )	$u_m$ (m/s)	$\Delta p_{num}$ (Pa)	$\Delta p_{correlation}$ (Pa)	écart
A	$1 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	0	$- 2,08 \cdot 10^{-3}$	- 2,6	7 000	6 790	3%
B	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	0	$- 7,54 \cdot 10^{-3}$	- 9,4	87 000	89 200	2,5%
C	$1 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^5$	0	$- 12,2 \cdot 10^{-3}$	- 15,25	235 000	234 000	3%
D	$1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	-10	$- 5 \cdot 10^{-3}$	- 6,25	18 400	18 400	0%
E	$1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	-20	$- 8,2 \cdot 10^{-3}$	- 10,3	19 000	19 000	0%



TABLEAU 5.3

Écoulement dans le sens axial. Les différents cas traités

## 8.2 Ecoulement en sortie de chambre au voisinage d'un espace interchambre (Ecoulement dans le sens circonférenciel)

A priori deux types d'écoulement doivent être considérés:

-celui où la vitesse de défilement de la paroi est "sortante" de la chambre ( $V_r < 0$  fig 5.11.a )

-celui où la vitesse de défilement de la paroi est "entrante" dans la chambre ( $V_r > 0$  fig 5.11.b )

La pression dans la chambre est généralement supérieure à la pression dans les portées.

Il en résulte que, pour le premier type on a une seule configuration correspondante à des vitesses débitantes ( $u$ ) négatives .

Par contre pour le deuxième type, différentes configurations peuvent se rencontrer. On distinguera par la suite trois configurations correspondant à trois allures du profil de vitesse dans le "tuyau" (fig 5.17) ( $0 < u_m < V_r/2$ ,  $u_m > V_r/2$  et  $u_m < 0$ )

Il est clair qu'il n'y a pas de solution de continuité entre ces diverses configurations, le profil de vitesse évoluant de façon continue en fonction des valeurs respectives de  $(P_a - P_s)$  et  $(V_r)$ .

Dans tous les cas on a discrétisé le domaine de la même façon. (fig 5.17.b et 5.17.c).

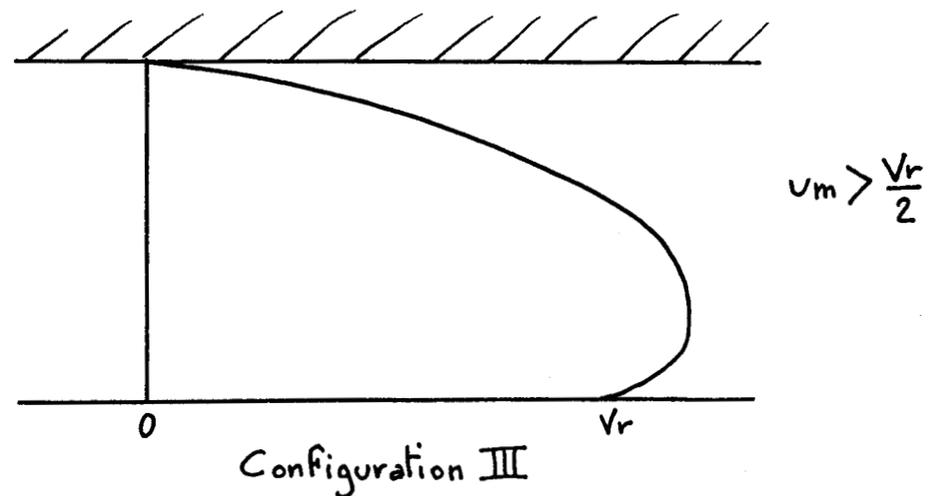
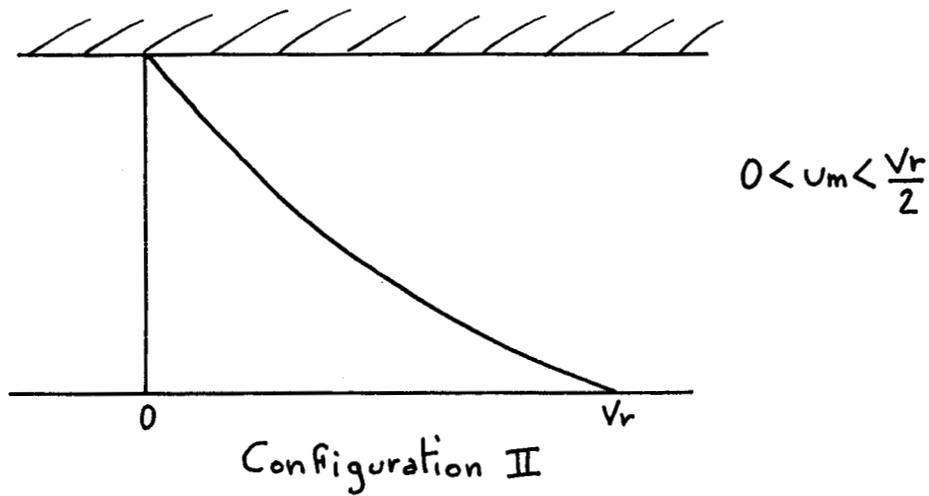
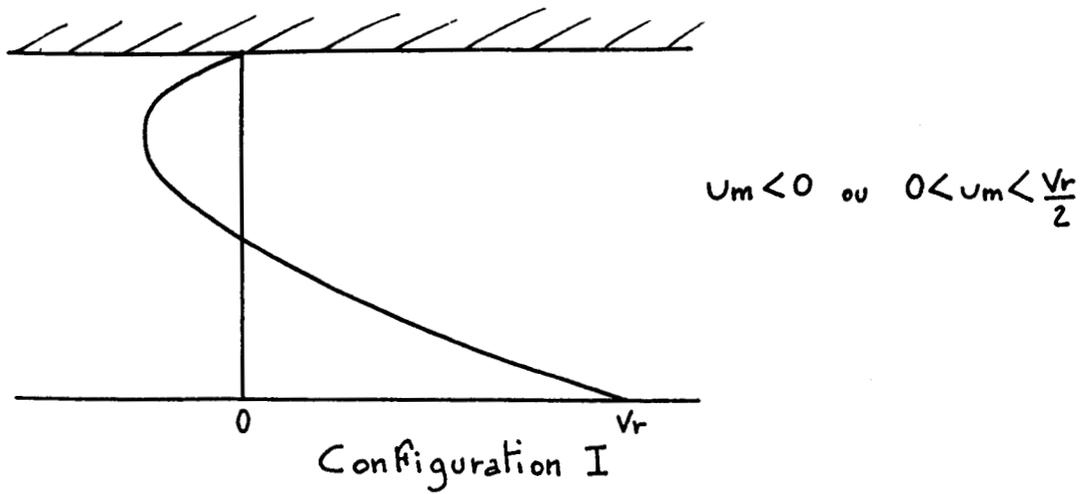


fig 5.17 : allure du profil des vitesses dans le tuyau ( $v_r > 0$ )

Figure 5.17 b : écoulement dans le sens circonferenciel.  
Maillage du domaine.

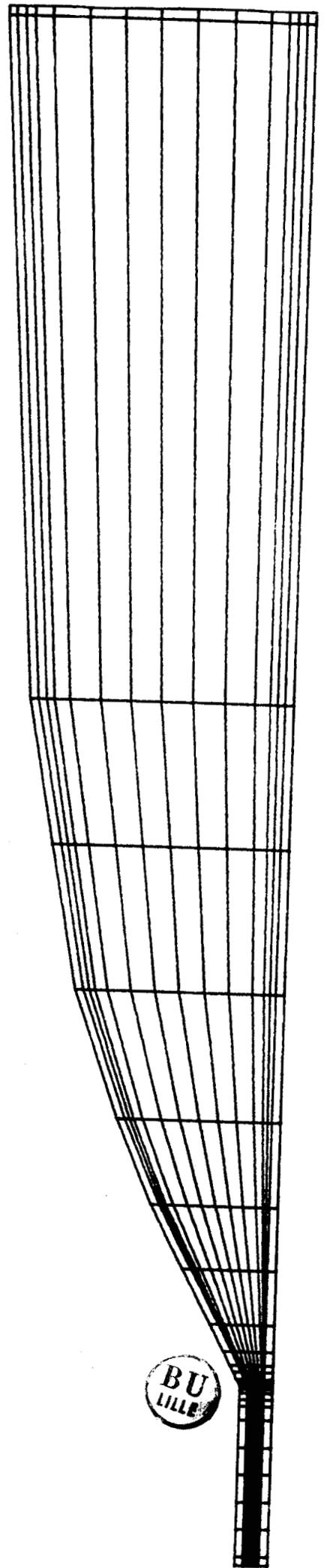
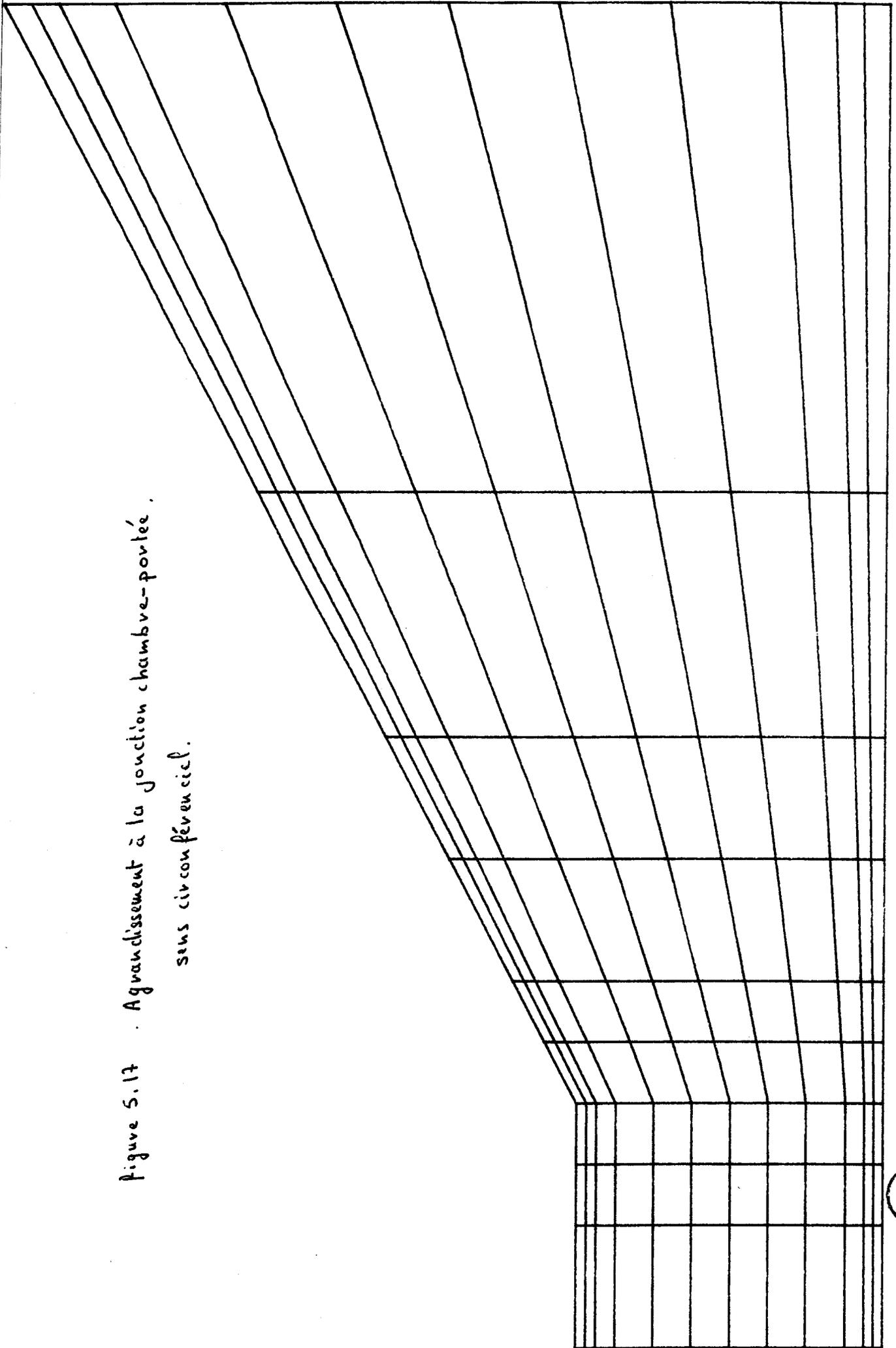


Figure 5.17 . Agrandissement à la jonction chambre-portée,  
sans circonférenciel.



BU  
LILLE

### 8.2.1 Ecoulement "sortant".

Les résultats sont tout à fait semblables à ceux trouvés en (8.1). Ils sont présentés dans les figures (5.18 a et b) (5.19) et (5.20 a, b, c) et dans le tableau (5.4).

L'ensemble des résultats est bien corrélé par la relation:

$$\Delta p = 0,68 \rho u_m^2 - 0,33 \rho V_r^2 - 0,19 \rho V_r u_m$$

Ceci est tout à fait cohérent avec les résultats obtenus au paragraphe (8.1). La géométrie de la chambre étant moins abrupte la perte de pression dans le retrécissement est plus faible tandis que la récupération de pression due au frottement est meilleure.

figure 5.18 a : Ecoulement "sortant" - Profil des vitesses dans la chambre

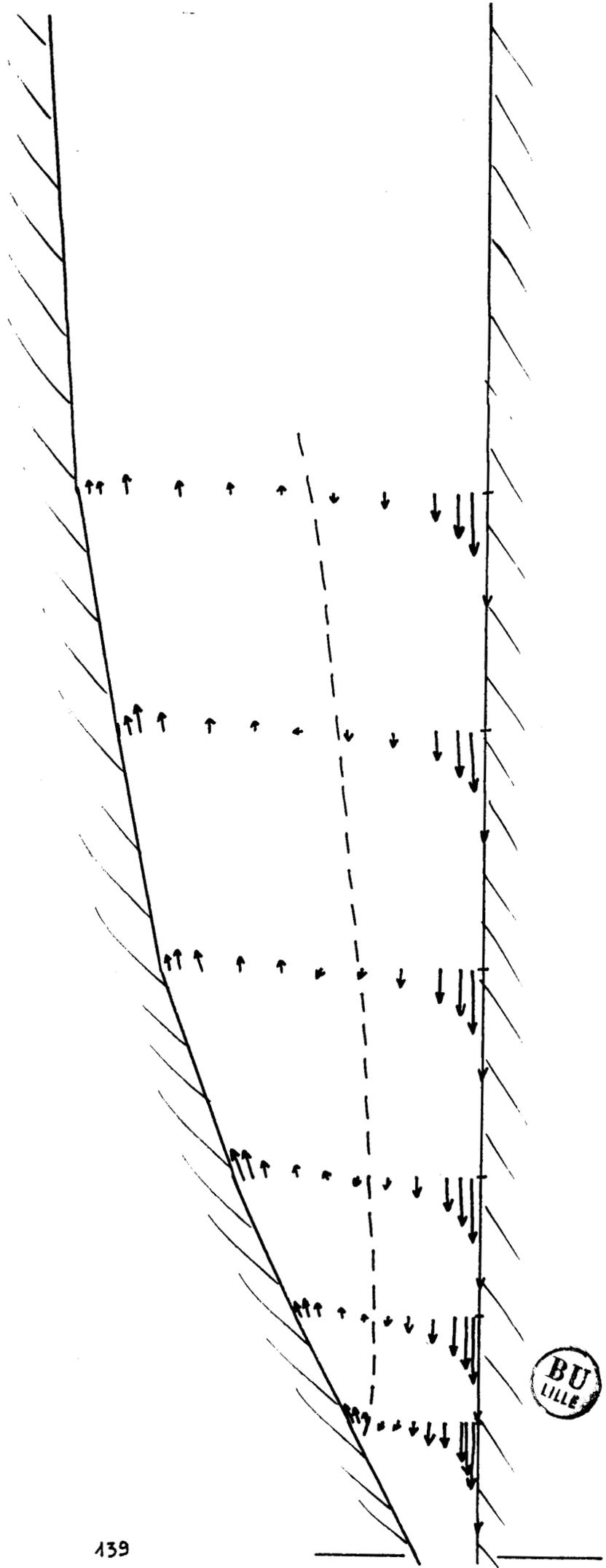
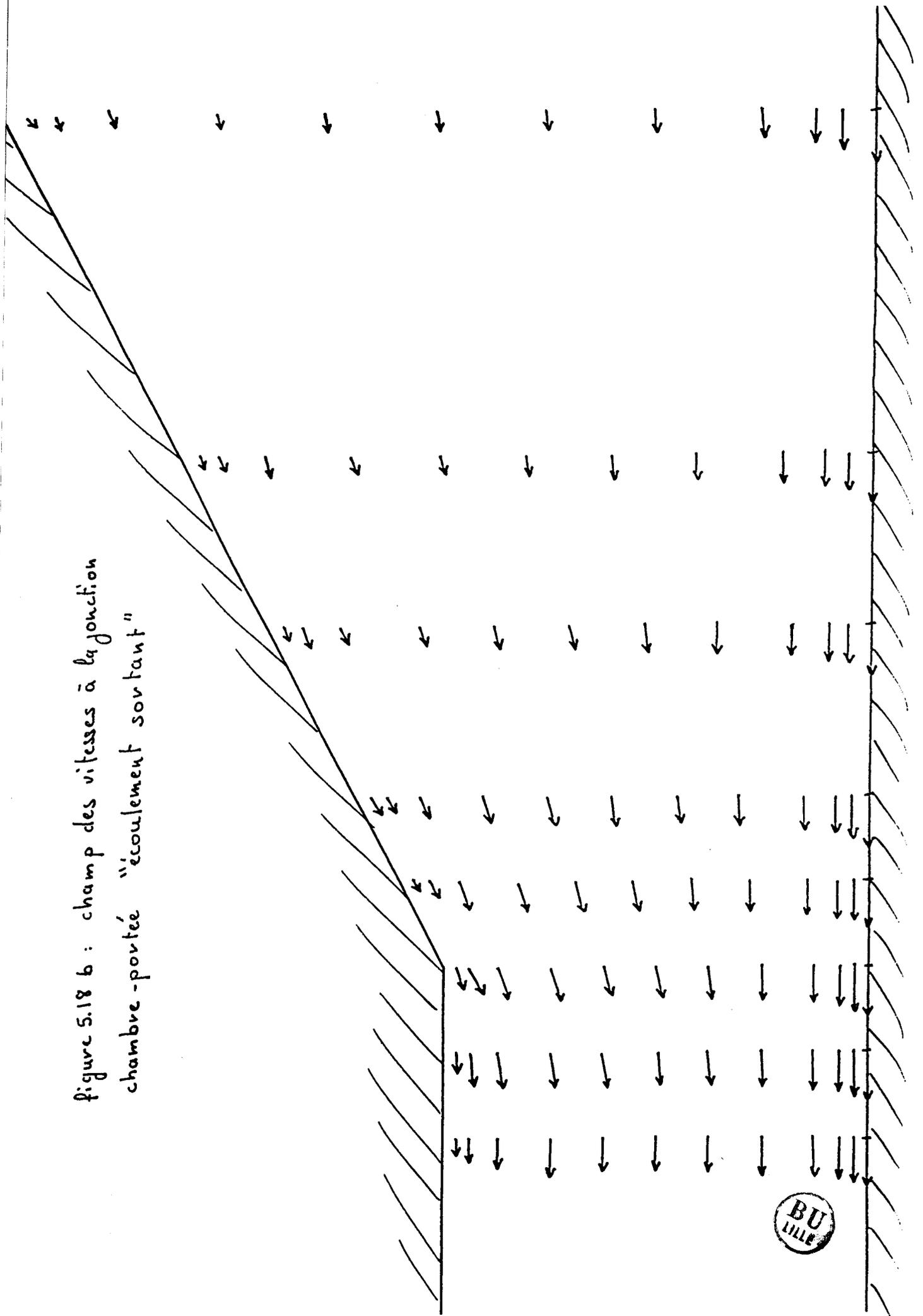


figure 5.18 b : champ des vitesses à la jonction  
chambre - portée "écoulement sortant"



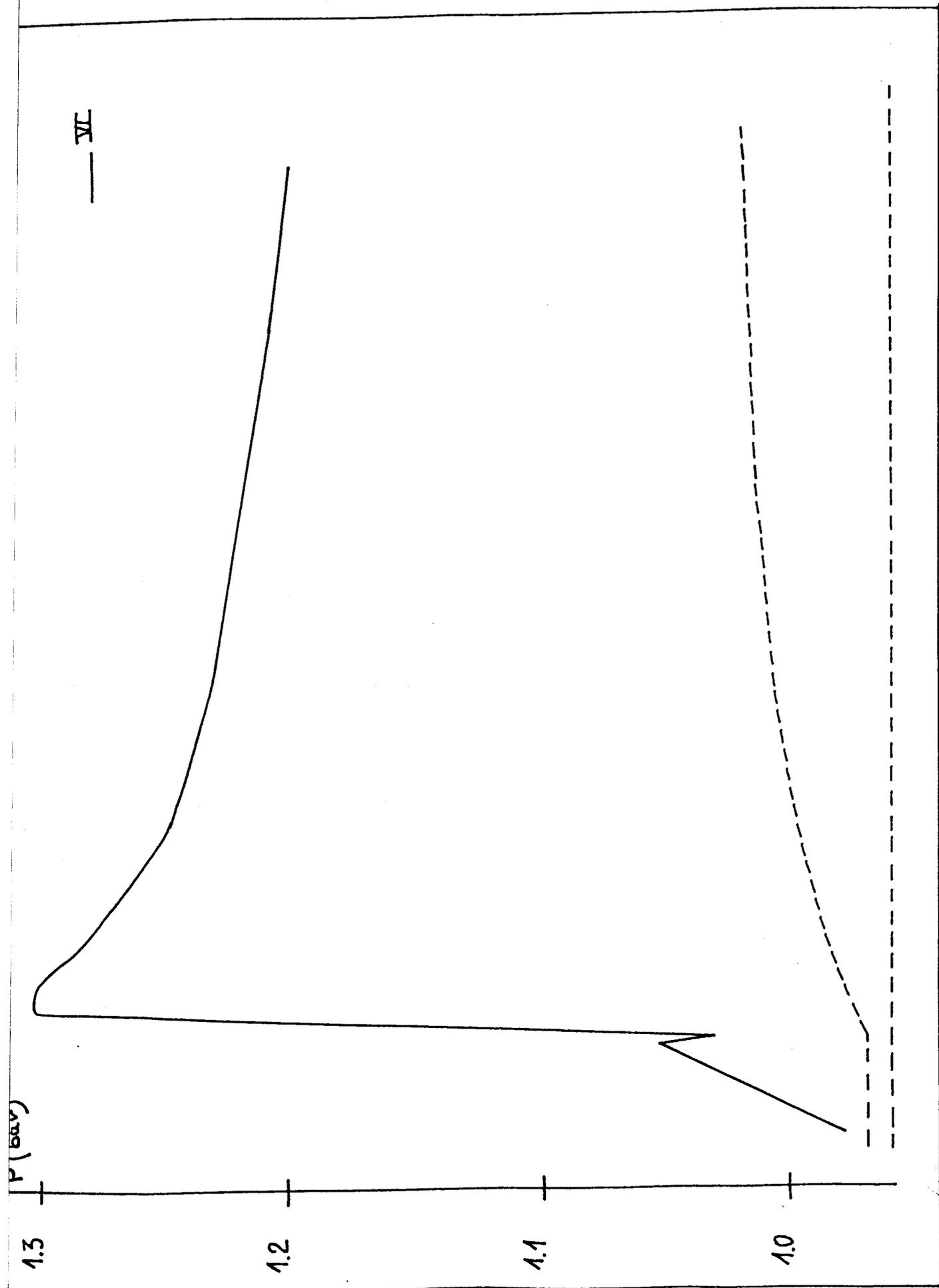


figure 5.19 profil des pressions cas n° VI détaillé

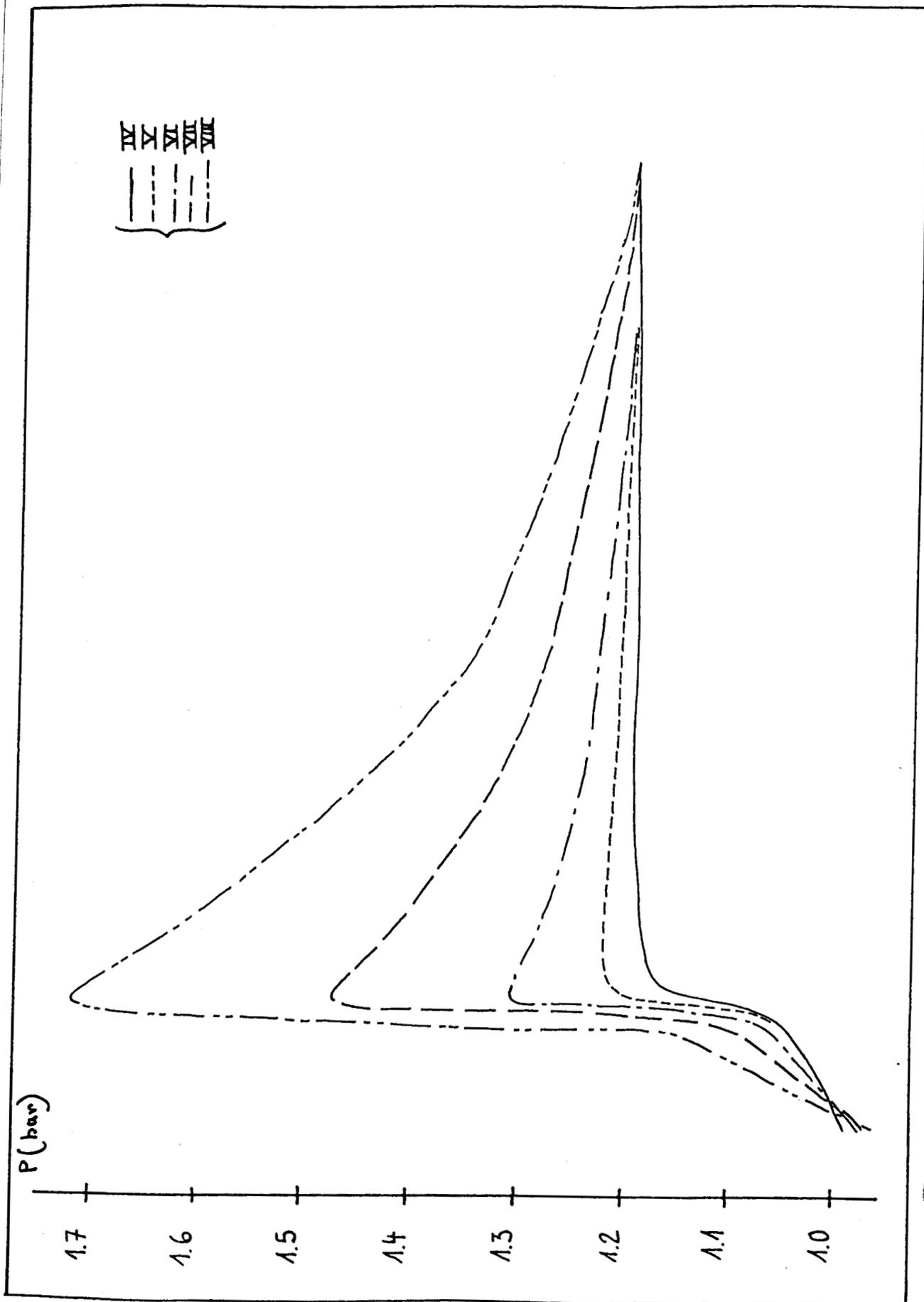


Figure 5.20 b : Ecoulement "sortant" profil des pressions des cas traités



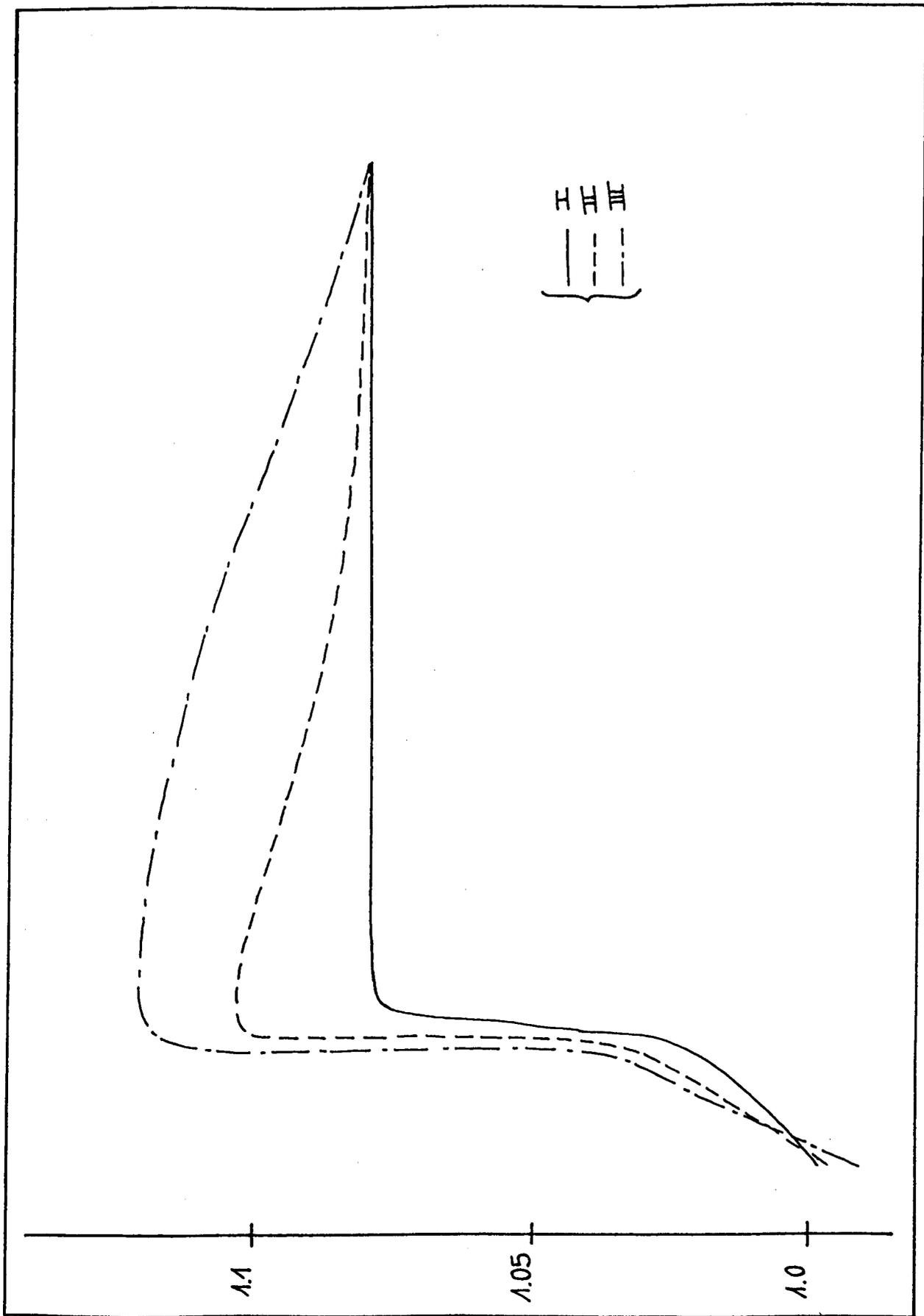


Figure 5.20 a : Profils de pression - Ecoulement "soutant"  
 cas I - II - III.



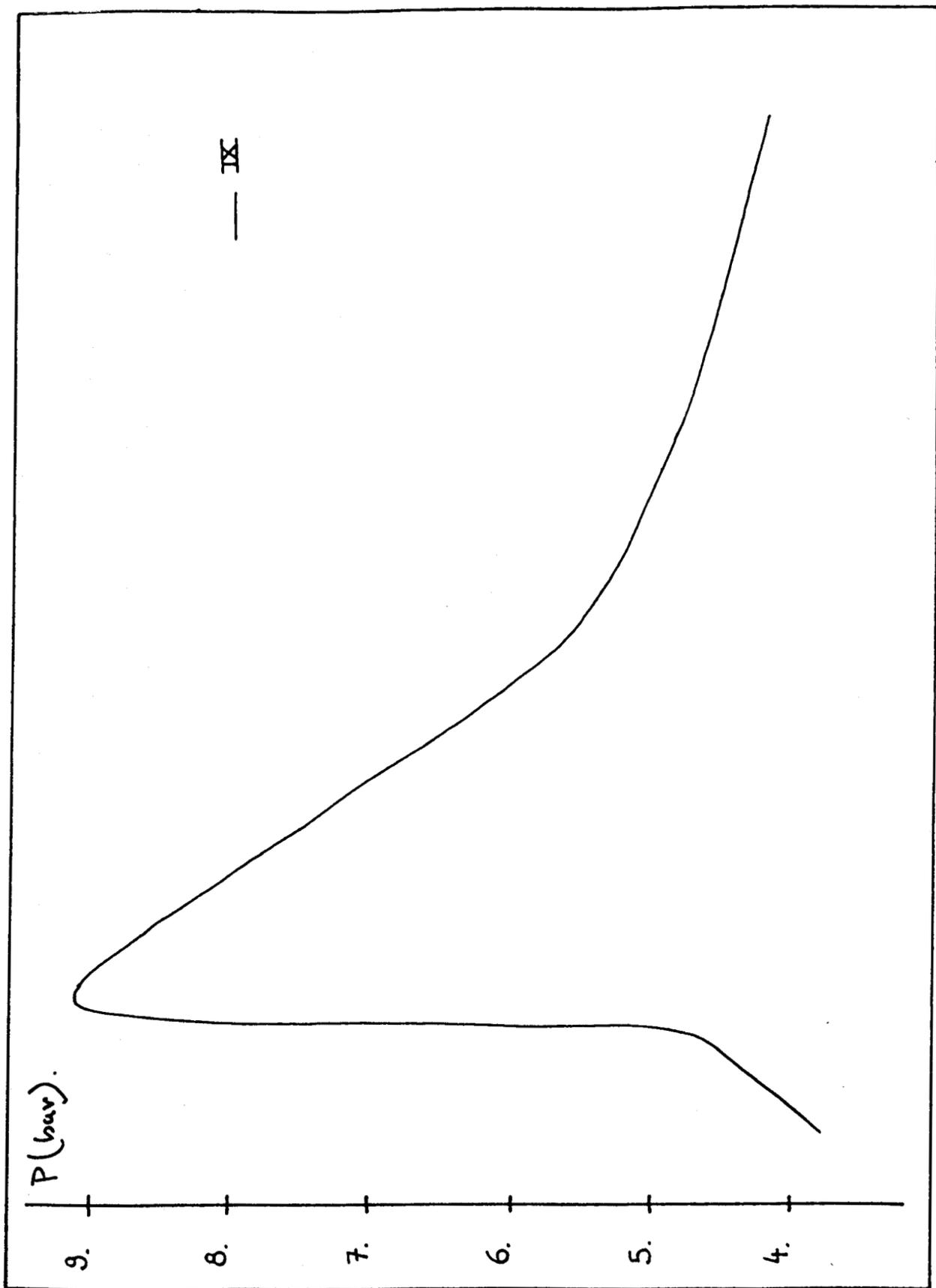


figure S.20 c : Ecoulement "surtant" profil de pression du cas IX



cas	pression en entrée Ps (Pa)	pression en sortie (Pa)	Vitesse d'une paroi Vr (m/s)	Débit dans le tuyau Q (m <sup>3</sup> /s)	vitesse débitante u <sub>m</sub> (m/s)	Δp <sub>num</sub> (Pa)	Δp <sub>correction</sub> (Pa)	écart en valeur relative
I	1.10 <sup>5</sup>	1.08.10 <sup>5</sup>	0	- 2,34.10 <sup>-3</sup>	- 2,9	6 000	5 812	3 %
II	1.10 <sup>5</sup>	1,08.10 <sup>5</sup>	-5	- 3,11.10 <sup>-3</sup>	- 3,89	6 000	5 870	2 %
III	1.10 <sup>5</sup>	1,08.10 <sup>5</sup>	-10	- 4,76.10 <sup>-3</sup>	- 5,95	3 700	2 930	20 %
IV	1.10 <sup>5</sup>	1,2.10 <sup>5</sup>	0	- 3,77.10 <sup>-3</sup>	- 4,7	15 400	15 000	2 %
V	1.10 <sup>5</sup>	1,2.10 <sup>5</sup>	-5	- 4,32.10 <sup>-3</sup>	- 5,4	15 600	16 870	8 %
VI	1.10 <sup>5</sup>	1,2.10 <sup>5</sup>	-10	- 5,59.10 <sup>-3</sup>	- 6,99	13 800	14 056	1,8%
VII	1.10 <sup>5</sup>	1,2.10 <sup>5</sup>	-15	- 7,3.10 <sup>-3</sup>	- 9,12	10 300	9 626	6 %
VIII	2.10 <sup>5</sup>	2,2.10 <sup>5</sup>	-20	- 9,26.10 <sup>-3</sup>	-11,6	5 700	5 280	7 %
IX	4.10 <sup>5</sup>	4,2.10 <sup>5</sup>	-60	- 2,6.10 <sup>-2</sup>	-32,5	- 80 000	-79 900	1

TABLEAU 5.4

Ecoulement dans le sens circonférenciel "sortant". Les cas étudiés



### 8.2.2.Écoulement "entrant".

Pour ce type d'écoulement il était difficile de prévoir a priori les différentes configurations d'écoulement possibles en fonction de  $(P_a - P_s)$  et  $(V_r)$ .

Finalement trois configurations ont été obtenues:

1)celles de la configuration(I)(Tableau 5.5).

Les profils de vitesse dans le tuyau et dans la chambre sont semblables (fig 5.21 a et b).

L'écoulement est piloté par la différence de pression sauf au voisinage de la paroi mobile.

Les champs de pression (fig.5.22)correspondent effectivement à une perte de pression dans le sens de l'écoulement.

Cette configuration ne correspondant pas à celle rencontrée dans les paliers n'a pas été exploitée plus à fond.

2)Celles correspondant à la configuration(II) à des vitesses débitantes positives et à des gradients de pression dans le "tuyau" positifs (Tableau 5.6).

Les profils de vitesse dans le tuyau et dans la chambre ont les allures fournies sur les figures(5.23 a et b)

On constate qu'il y a une forte recirculation dans la chambre qui s'étend jusqu'au tuyau (fig 5.24 a et b).

Les profils de pression sont donnés figure(5.24 a et b)

Une exploitation identique à celles précédemment effectuées conduit à la relation:

$$\begin{aligned}\Delta p &= - 0,92 \rho u_m^2 - 0,15 \rho V_r^2 + 0,9 \rho u_m V_r \\ &\cong 0,9 \rho u_m (V_r - u_m) - 0,15 \rho V_r^2\end{aligned}$$

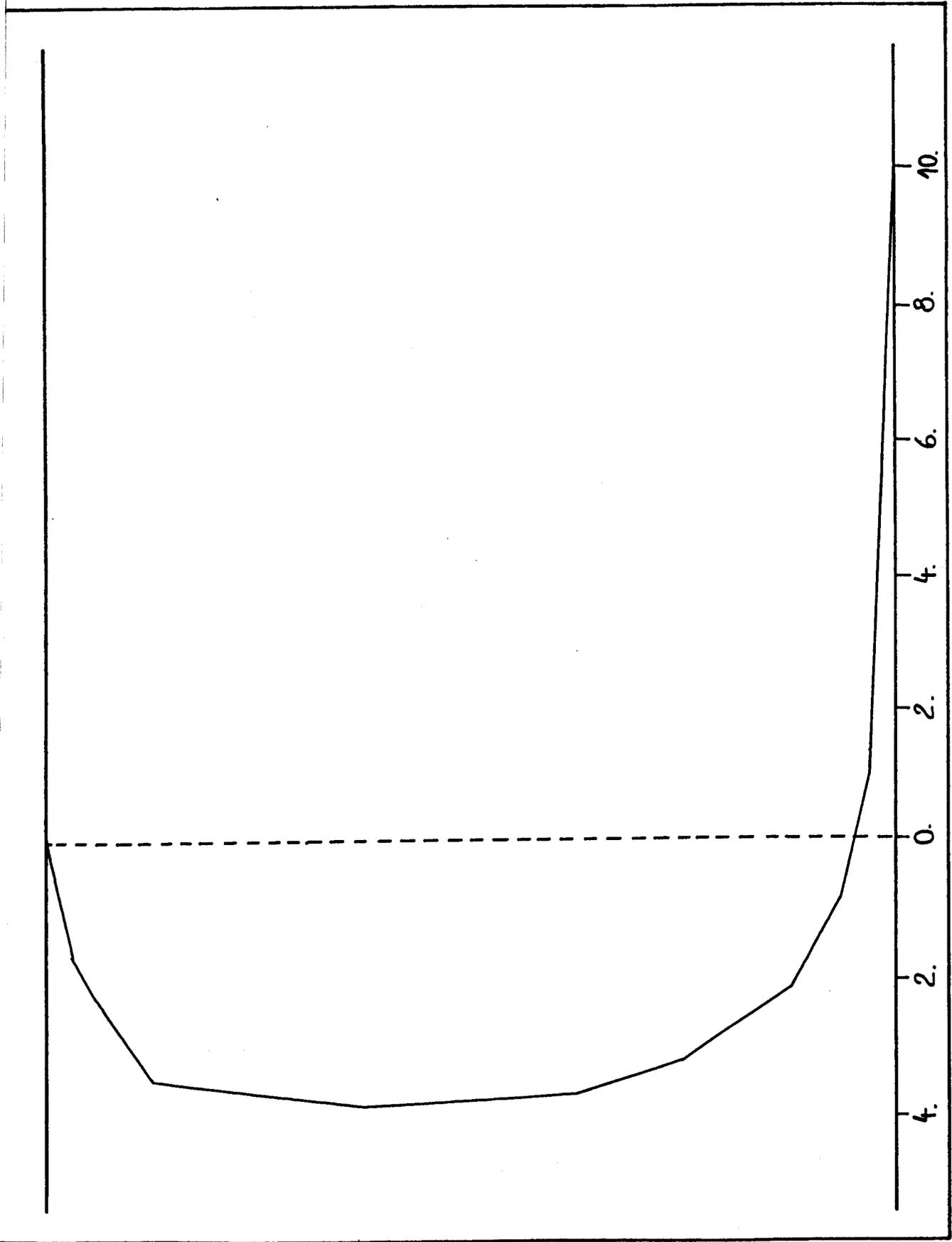


Fig 5.31 a) écoulement "entrant" : profil de vitesse dans le tuyau ( $u_m < 0$ )



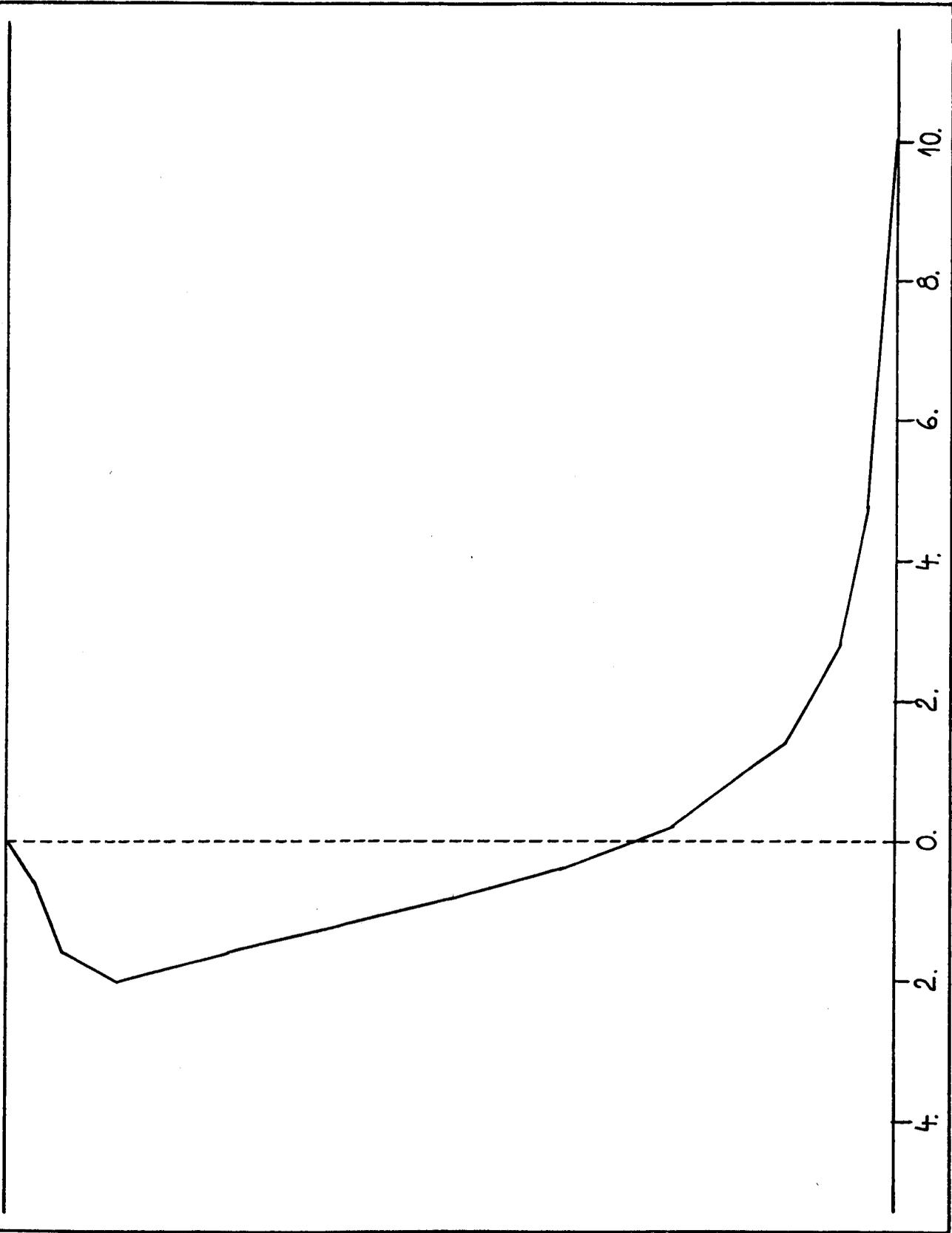


Fig 5.81 b) écoulement "entrant" : profil de vitesse dans la chambre ( $U_m < 0$ )



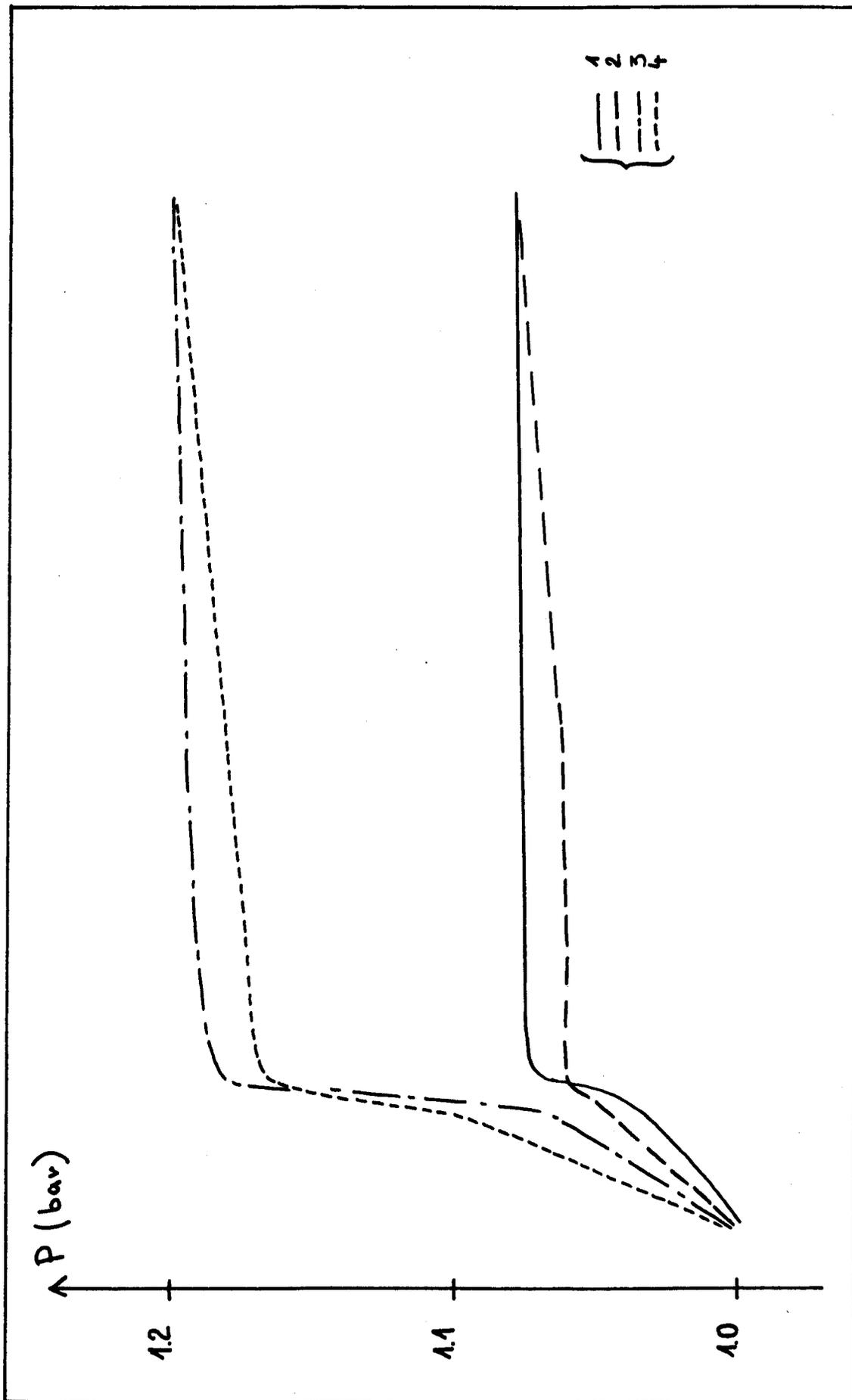


fig 5.22 Ecoulement entrant : profil de pression ( $\mu_m < 0$ )



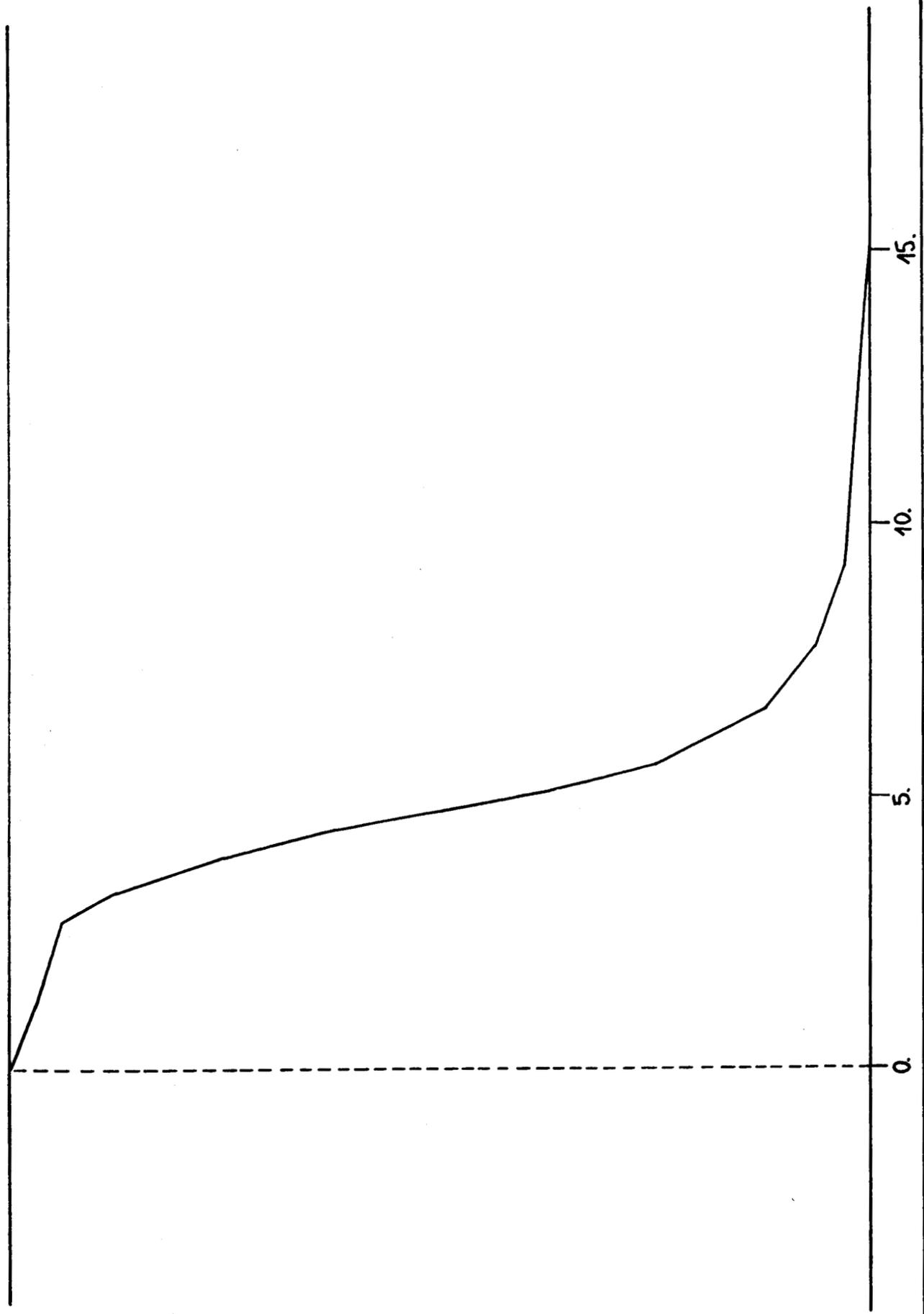


fig 5.33 a) écoulement "entrant" : profil de vitesse dans le tuyau ( $u_m > 0$  et  $\frac{df}{dz} > 0$ )



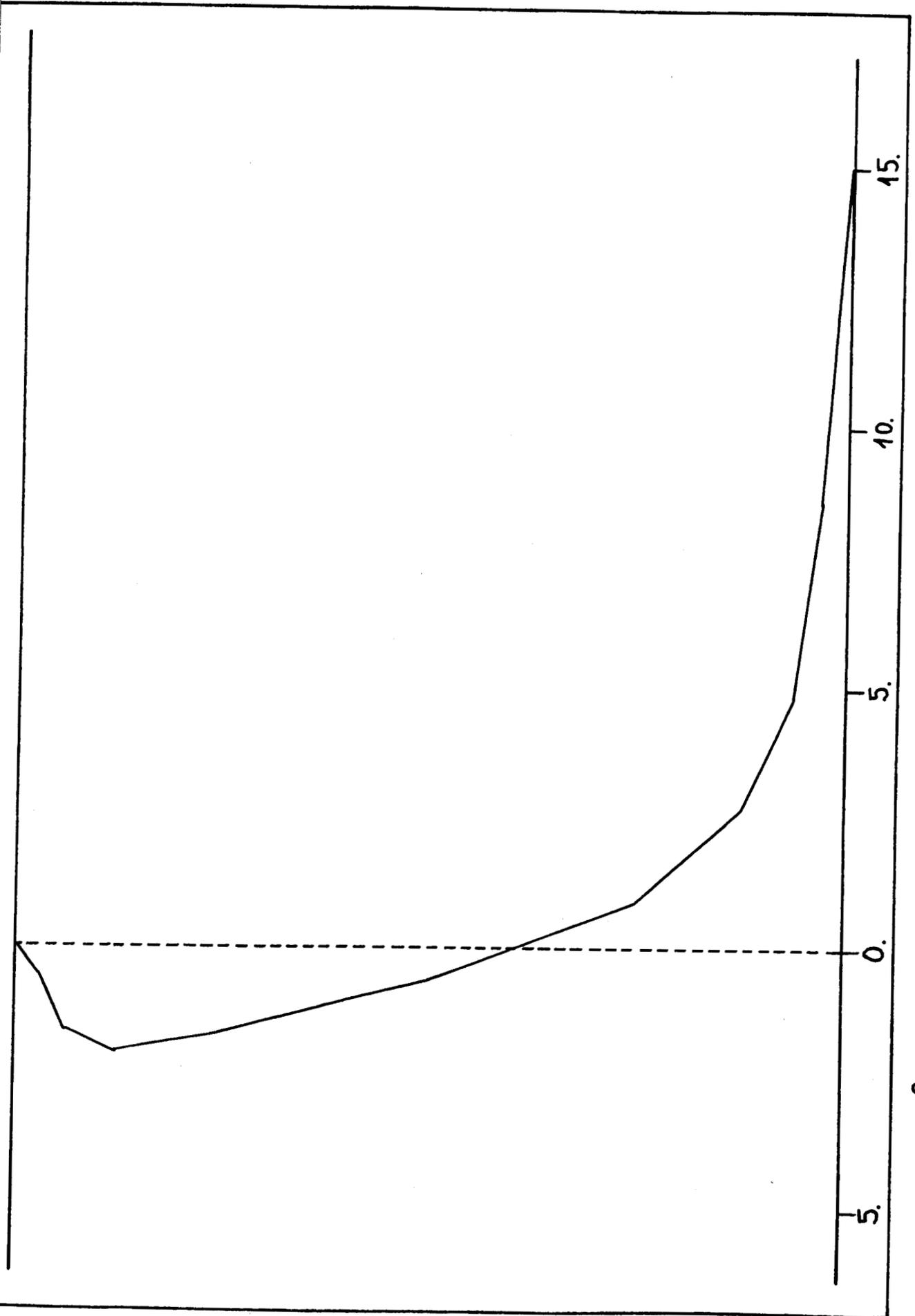
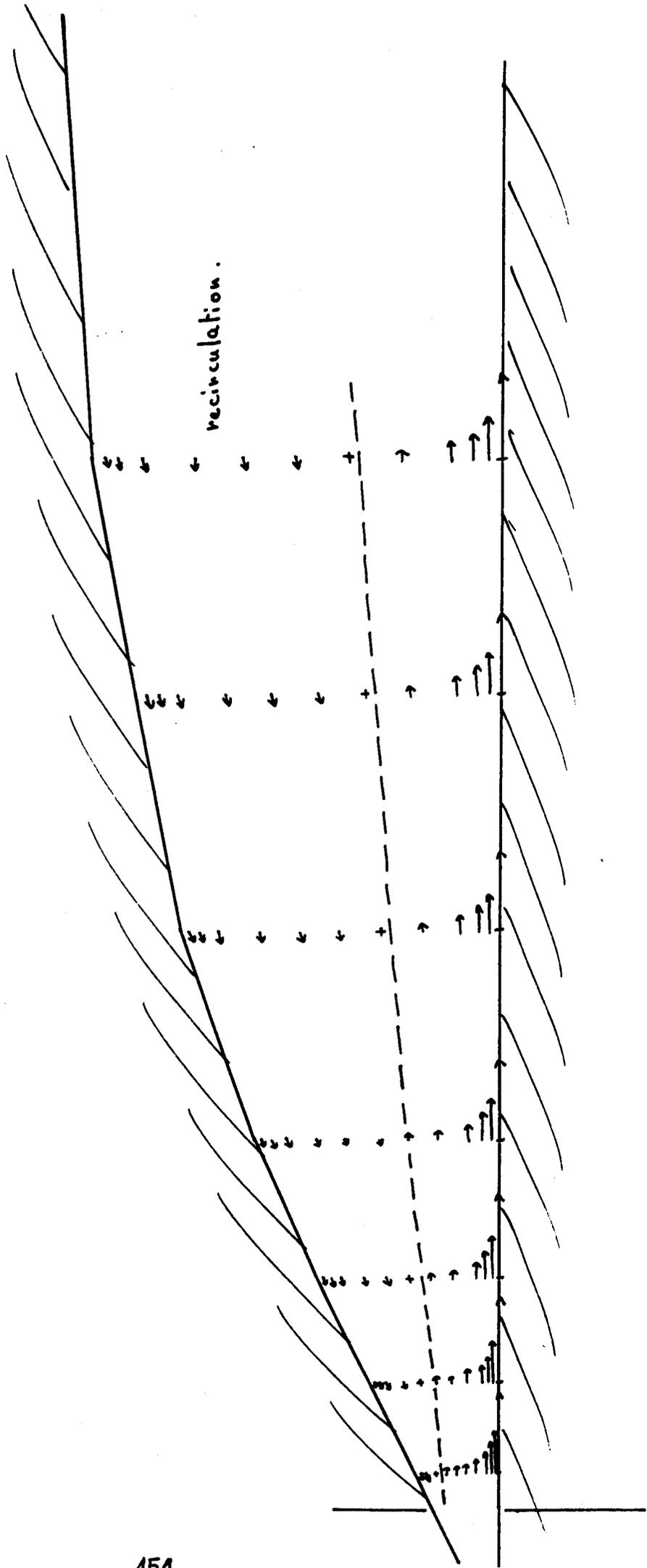


fig 5.23 b) écoulement "entrant" : profil de vitesse dans la chambre ( $U_m > 0$  et  $\frac{dP}{dz} > 0$ )



Fig 5.24 g): Ecoulement "entrant" - champ des vitesses. ( $\mu_m > 0$   $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ )



BU  
LILLE



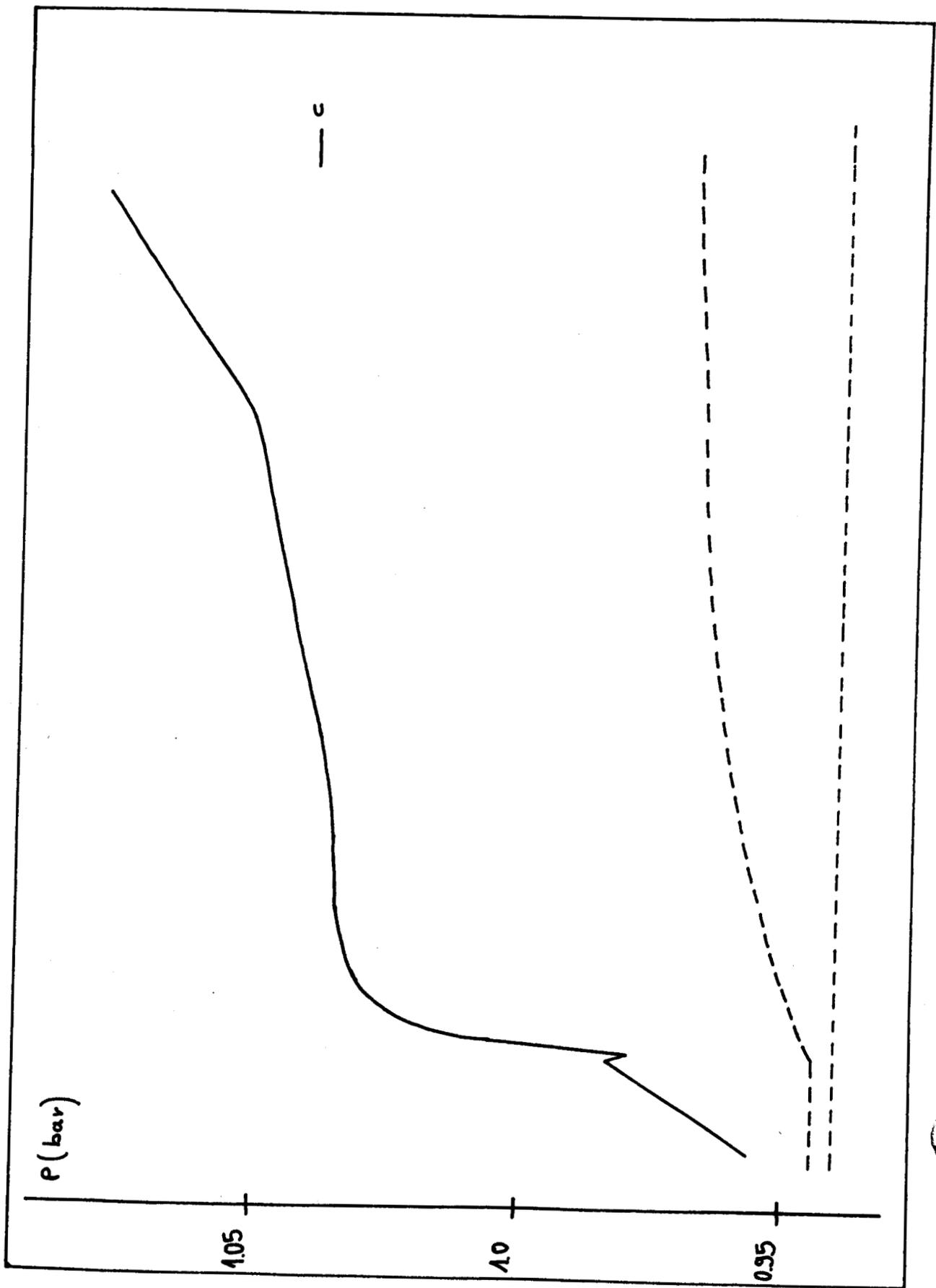


Fig 24' a) Ecoulement "entrant" profil de pression détaillé cas où  $\mu_m > 0$   $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$

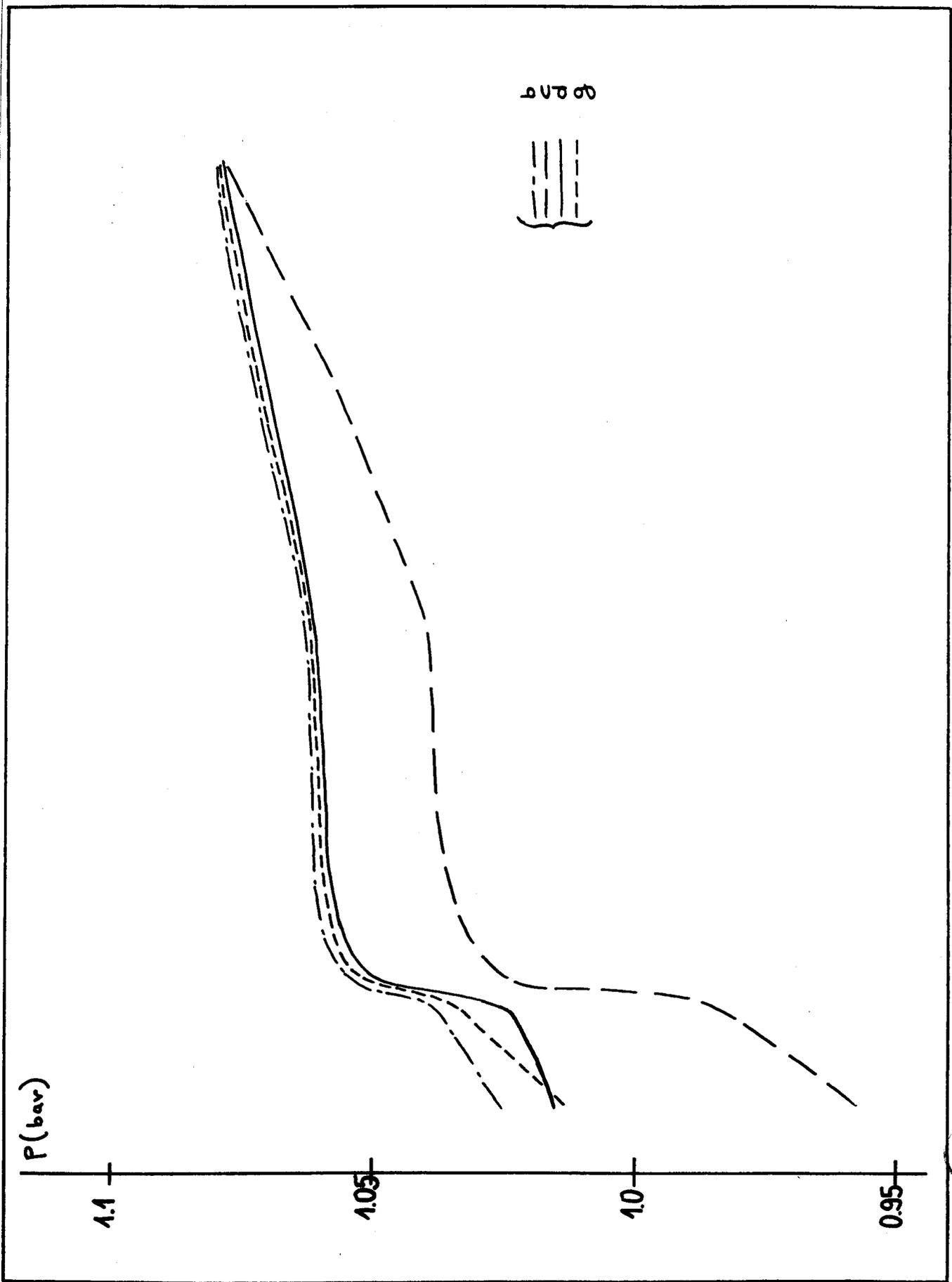


Fig 24' b) Ecoulement "entrant" Profils de pression ( $u_m > 0, \frac{\partial P}{\partial x} > 0$ )



Cas	$P_s$	$P_a$	$V_r$	$Q$	$u_m$	$\Delta p_{um}$
1	$1 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	5	$-1,7 \cdot 10^{-3}$	-2,12	2 200
2	$1 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	10	$-0,41 \cdot 10^{-3}$	-0,5	2 000
3	$1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	5	$-3,2 \cdot 10^{-3}$	-4	13 000
4	$1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	10	$-2,3 \cdot 10^{-3}$	-2,87	10 000
5	1.	1,25	20	$1,74 \cdot 10^3$	+2,18	9 150
6	1,02	1,08	10	$0,84 \cdot 10^{-3}$	1,05	2 500
7	0	4	60	$2,4 \cdot 10^{-3}$	3.	104 200

TABLEAU 5.5. - Configuration I



Cas	$P_s$ (Pa)	$P_a$ (Pa)	$V_r$ (m/s)	$Q$ $m^3/s$	$u_m$ m/s	$\Delta P_{num}$	$\Delta P_{correlation}$	écart
a	$1,06 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	5	$1,37 \cdot 10^{-3}$	1,7	1 050	1 130	7%
b	$1,02 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	10	$2,67 \cdot 10^{-3}$	3,3	4 250	4 277	6%
c	$0,96 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	15	$3,96 \cdot 10^{-3}$	4,95	9 400	9 384	1,6%
d	$1,01 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	10	$3,29 \cdot 10^{-3}$	4,1	5 900	5 903	0
e	$1,5 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^5$	60	$1,78 \cdot 10^{-2}$	22,25	187 000	186 900	0

TABLEAU 5.6

Ecoulement dans le sens circonférenciel "entrant" - configuration II



3) Celles correspondant à la configuration III à des vitesses débitantes positives et à des gradients de pression dans le tuyau négatifs (Tableau 5.7), (fig 5.25 a et b profils de vitesse), (fig 5.26 a profils de pression).

L'étendue de la zone de recirculation est plus faible que précédemment.

Les "pertes" de pression sont bien corrélées (Tableau 5.7) par la relation

$$\Delta p = 0,37 \rho u_m^2 + 0,15 \rho V_r^2 - 0,3 \rho u_m V_r$$

On peut constater (tableaux 5.6 et 5.7) que conformément à ce qui a été prévu par Constantinescu le gradient de pression dans la partie tuyau est du signe contraire à  $u_m - V_r/2$ .

Par ailleurs les deux relations précédentes se recourent bien pour  $u_m = \frac{V_r}{2}$

On obtient :  $\Delta p = 0,07 \rho V_r^2$  pour la configuration II et

$$\Delta p = 0,09 \rho V_r^2 \quad \text{pour la configuration III.}$$

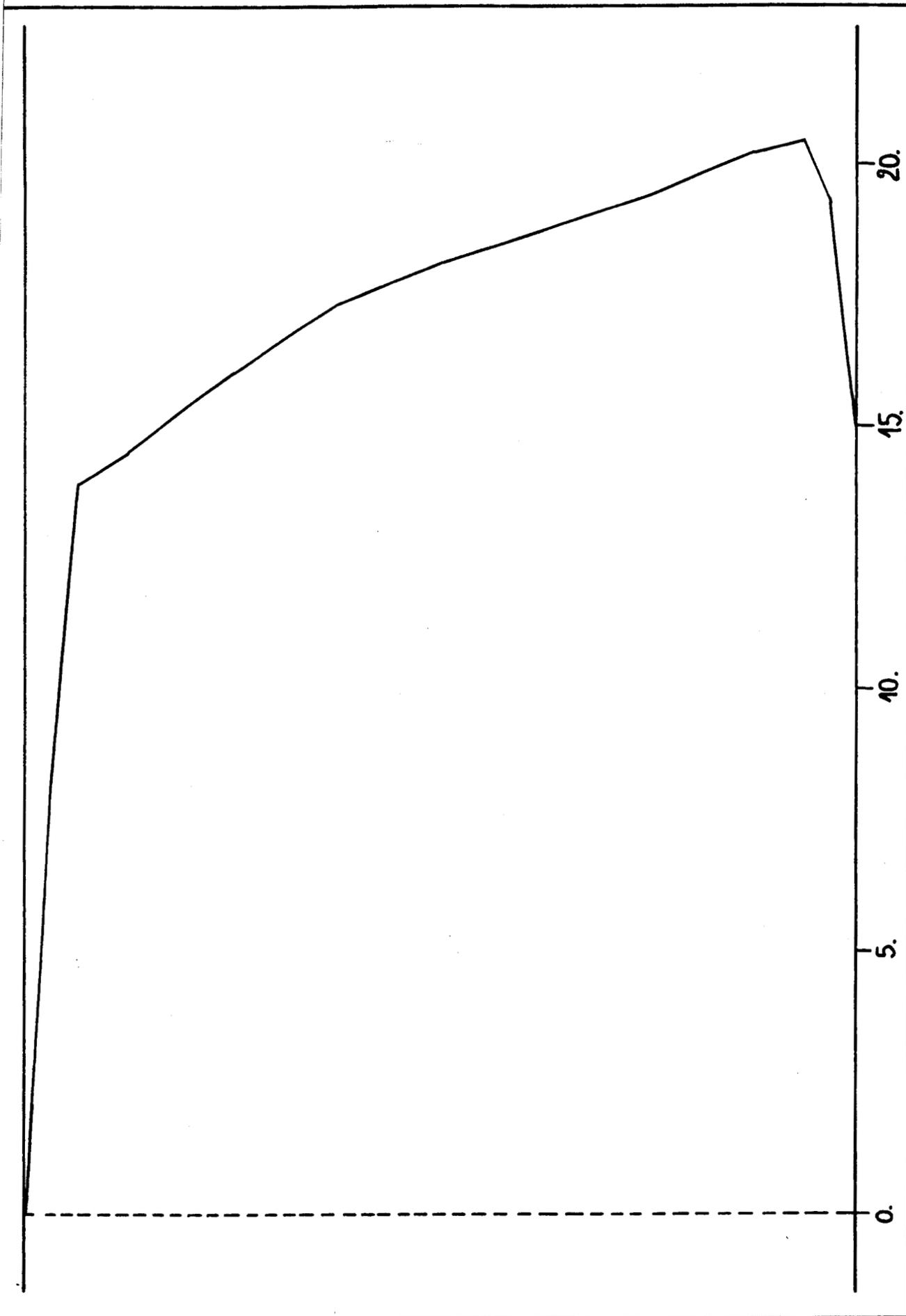


fig 5.25 a) écoulement "entrant" : profil de vitesse dans le tuyau ( $u_m > 0$  et  $\frac{dp}{dx} < 0$ )



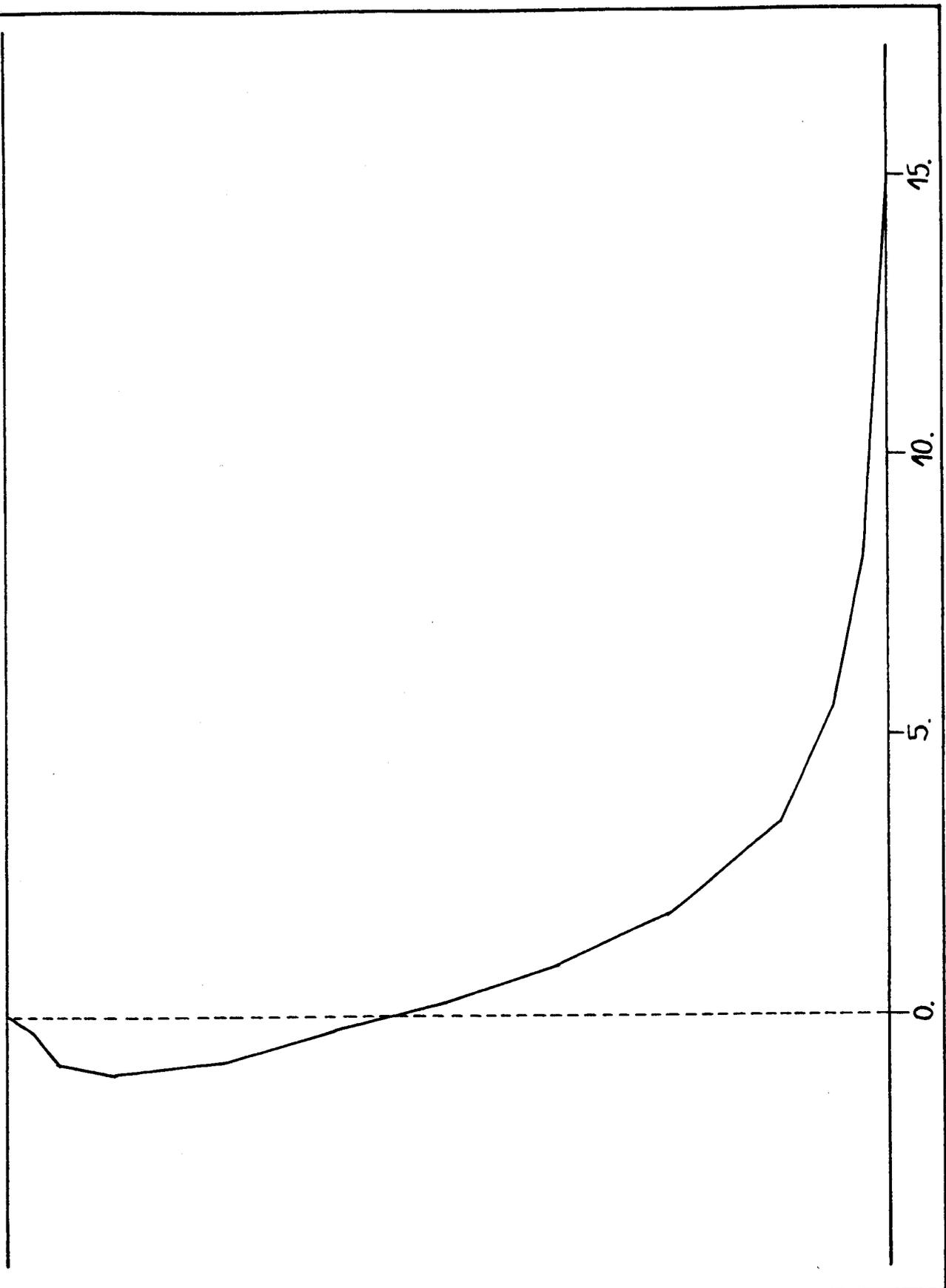


Fig 5.25 b) écoulement "entrant" : profil de vitesse dans la chambre ( $U_m > 0$  et  $\frac{dp}{dx} < 0$ )



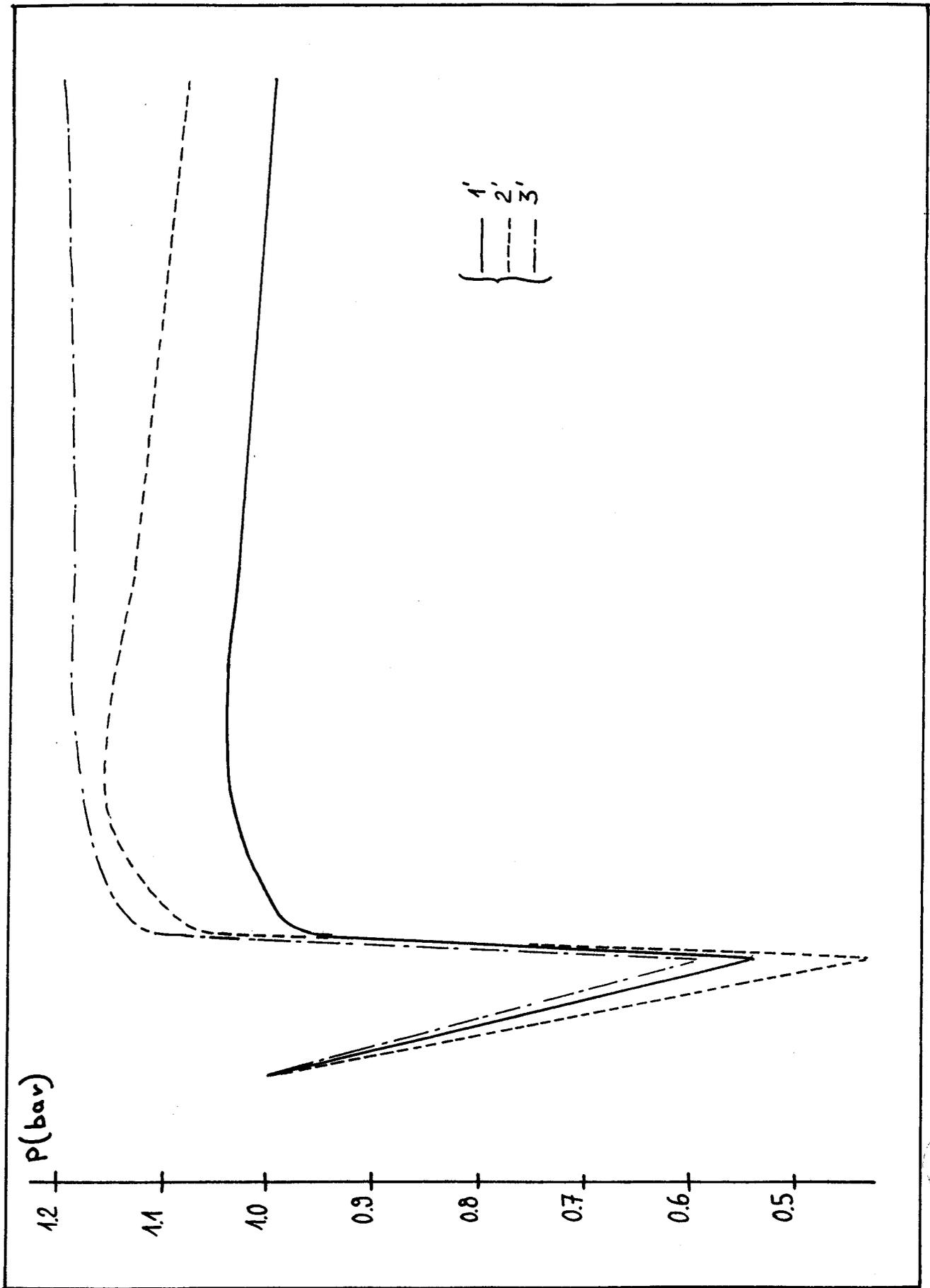


Figure 5.26 Ecoulement "entrant" ( $u_m > 0$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ ) profils des pressions



cas	$P_s$ (Pa)	$P_a$ (Pa)	$V_r$ (m/s)	$Q$ ( $m^3/s$ )	$u_m$ (m/s)	$\Delta p_{num}$	$\Delta p$ correlation	écart
1'	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	5	$1,05 \cdot 10^{-2}$	13	44 020	48 800	11%
2'	$1 \cdot 10^5$	$1,08 \cdot 10^5$	15	$1,37 \cdot 10^{-2}$	17	66 090	66 609	8%
3'	$1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	20	$1,19 \cdot 10^{-2}$	14,85	53 547	53 372	1%
4'	$16 \cdot 10^5$	$16,2 \cdot 10^5$	30	$5,7 \cdot 10^{-2}$	71,25	1 404 000	1 403 380	0,03%

TABLEAU 5.7

Écoulement dans le sens circonférenciel "entrant"  
configuration III

## 9 Conclusion.

Le programme de résolution des équations de la mécanique des fluides écrit est opérationnel.

Des tests effectués dans le cas de l'écoulement entre deux plans parallèles montrent qu'au moins dans cette situation simple il permet de prévoir les caractéristiques de l'écoulement avec une précision satisfaisante.

Les calculs effectués pour déterminer l'écoulement au voisinage des jonctions chambre-portées pour un palier à 8 chambres donnent des résultats cohérents entre eux.

Ils ont permis d'obtenir effectivement des corrélations fournissant les "pertes" de pression chambre-portée.

Outre que ces relations ont été obtenues avec un nombre d'expériences numériques limitées, ce qui n'a pas permis par exemple d'exprimer les coefficients en fonction d'un nombre de Reynolds, leur validité dépend évidemment :

- de la validité du modèle de turbulence utilisé.

- des erreurs dues à la méthode de calcul elle-même (erreurs de schéma, erreurs dues à la finesse de discrétisation du domaine erreurs numériques).

## CHAPITRE 5 : Problème global

### 1. Mise en place des résultats dans le problème global.

Les corrélations obtenues précédemment correspondent comme indiqué à la géométrie d'un palier à 8 chambres.

Pour utiliser ces relations dans le programme de calcul de palier décrit dans la première partie, on remplace les pertes de pression utilisées jusqu'alors  $\Delta p = cf \rho (u_m - \frac{u_2}{2})^2 / 2$

$$\text{et } \Delta p = cf \rho w_m^2 / 2$$

par les relations obtenues:

en sortie de chambre "axialement"

$$\Delta p = \rho V_m^2 - 0,26 \rho V_r^2 + 0,1 \rho V_m V_r$$

en sortie de chambre "circonférencielle"

$$\Delta p = 0,68 \rho V_m^2 - 0,25 \rho V_r^2 - 0,19 \rho V_m V_r$$

en entrée de chambre "circonférenciellement"

configuration II

$$\Delta p = -0,92 \rho V_m^2 - 0,15 \rho V_r^2 + 0,9 \rho V_m V_r$$

en entrée de chambre "circonférenciellement"

configuration III

$$\Delta p = 0,37 \rho V_m^2 + 0,15 \rho V_r^2 - 0,3 \rho V_m V_r$$

avec  $V_m = \sqrt{u_m^2 + w_m^2}$  et  $V_r = U_2 u_m / V_m$  conformément à

ce qui a été indiqué au paragraphe 8 du chapitre 4.

Pour des raisons de temps et de coût informatique seul un calcul a été effectué pour  $\epsilon = 0.1$ .

### Résultats

#### Palier à 8 chambres de rayon a

Comparaison des résultats avec les anciennes et nouvelles pertes de pression pour  $\epsilon = 0.1$

		Résultats avec les anciennes pertes de pression	Résultats avec les nouvelles pertes de pression	Résultats expérimentaux
Débit global	Qv	71	57	62,5
angle de cala- ge	$\phi$	0,18	0,36	0,31
Force	F	9010	8600	7500



On peut constater sur le tableau ci-dessus qu'il y a une amélioration sensible des résultats relatifs aux caractéristiques globales du palier, notamment en ce qui concerne l'angle de calage. Ceci indique que vraisemblablement la répartition des pressions est plus exacte.

Bien sur il aurait été intéressant d'effectuer aussi une comparaison sur les valeurs des coefficients de raideur et d'amortissement mais on ne dispose pas des résultats expérimentaux correspondants.

## DEUXIÈME PARTIE : NOTATION

$\rho$	: masse volumique du fluide
$\vec{\sigma}$	: tenseur des contraintes
$\vec{\pi}$	: tenseur des contraintes visqueuses
$\delta$	: symbole de Kronecker
$\mu$	: viscosité dynamique
$\mu_t$	: viscosité turbulente
$S(t)$	: surface d'un domaine élémentaire quelconque
$\gamma(t)$	: frontière du domaine élémentaire
$\vec{n}$	: normale extérieure à $S$
$p$	: pression
$P_s$	: pression à l'amont
$P_a$	: pression à l'aval
$Q$	: débit suivant une section
$P_1, P_2$	: plans qui correspondent à des surfaces de courant
$u_m$	: vitesse débitante
$V_r$	: vitesse de la paroi défilante
$\Delta t$	: accroissement du pas de temps de calcul
$\vec{u}$	: vitesse du fluide dont les composantes sont $u$ et $v$
$\vec{U}$	: vitesse de déplacement des frontières du domaine élémentaire

## CONCLUSION :

L'écoulement dans un palier hydrostatique est en fait tridimensionnel, laminaire ou turbulent.

On s'est intéressé dans cette étude au cas turbulent et isotherme

On peut distinguer dans un tel palier trois zones: les chambres ou alvéoles, les portées, les jonctions chambre-portée ou portée-extérieur.

Dans une première partie on a, suivant un modèle classique mis au point un programme de calcul de l'écoulement où:

-dans les chambres, la pression est supposée uniforme.

-dans les portées, l'écoulement est régi par une équation de Reynolds bidimensionnelle.

-dans les jonctions, on suppose qu'il y a une "perte" de pression de la forme  $\Delta p = c_f \rho (V_m - V_{zn})^2 / 2$ ,  $c_f$  étant un coefficient sans dimension,  $\rho$  la masse spécifique du fluide,  $V_m$  et  $V_{zn}$  les composantes normales aux frontières de la vitesse moyenne dans les portées et de la vitesse de défilement de l'arbre.

Ce programme de calcul est opérationnel. Les équations à résoudre étant fortement non linéaires, la convergence du processus de calcul est délicate.

La détermination de la valeur du coefficient  $c_f$  pour les jonctions chambre-portée a été effectuée par optimisation pour un palier donné.

Cette valeur étant admise, les caractéristiques de différents paliers ont été déterminées et les résultats obtenus comparés soit à des résultats expérimentaux, soit à des résultats d'autres auteurs. Les écarts pour les pressions, portances, raideurs sont inférieurs à 20% , mais de caractère aléatoire . De ce fait ,il semble bien que l'on soit arrivé aux limites du type de modèle utilisé.

Les causes d'erreurs sont de deux ordres:

- les limitations inhérentes à l'utilisation de l'équation de Reynolds , et plus spécialement de l'équation de Reynolds en turbulent .
- les limitations liées à la modélisation de l'écoulement dans les chambres et aux jonctions chambre-portée.

Dans une deuxième partie ,on s'est intéressé à l'écoulement dans les jonctions chambre-portée, dans le but d'évaluer la validité des hypothèses faites à ce niveau .

Pour cela on a mis en oeuvre un programme de résolution des équations bidimensionnelles de la mécanique des fluides.

Le modèle de turbulence utilisé est du type loi de paroi généralisée.

Différents cas de calcul ont été effectués, soit pour des géométries différentes, soit pour des conditions aux limites différentes .

Après avoir fait une analyse rapide de la structure des écoulements obtenus, on propose des corrélations fournissant la "perte" de pression dans les jonctions chambre-portée .

Les résultats, cohérents entre eux, montrent que:

- Si l'on peut estimer qu'il existe au voisinage du centre d'une chambre une zone à pression uniforme, il y a cependant au voisinage de ses frontières de fortes variations de pression.
- Les "pertes" de pression chambre-portée s'expriment différemment suivant les situations rencontrées, et ne peuvent être traduites par une relation unique.

A partir des corrélations obtenues, un calcul global des performances d'un palier a été refait .

On constate une amélioration sensible des résultats.

Néanmoins ces résultats demandent à être confortés.

Notamment on peut mettre en cause :

-La méthodologie pour obtenir les corrélations de "perte" de pression. Le nombre d'expériences numériques faites est assez restreint, et par conséquent les valeurs des coefficients obtenus approximatives. Ce ne sont sans doute pas des constantes mais plutôt des fonctions d'un nombre de Reynolds à déterminer.

-La validité du modèle de turbulence utilisé (simple modèle algébrique) tant pour obtenir les coefficients entrant dans les équations de Reynolds ( travaux de CONSTANTINESCU, ELROD et alii) que pour obtenir les corrélations de "pertes" de pressions chambre-portée. Seules des expériences fines permettant de

déterminer les caractéristiques de la turbulence pour des écoulements fortement cisailés pourront permettre de définir le meilleur modèle possible .Le programme de résolution des équations de la mécanique des fluides que nous avons mis en oeuvre, capable de par sa structure d'accepter n'importe quel modèle de turbulence, sera alors un outil précieux.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] REYNOLDS O. : "On the theory of lubrication and its application to M. BEAUCHAMP Tower's experiments" - Phil. Trans. Roy Soc. London, A117 p. 157-234 (1886)
- [ 2 ] REYNOLDS O. : "An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels" - Phil. Trans. Roy. Soc. 174-935 (1883)
- [ 3 ] TAYLOR G.I. : "Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders" - Phil. Trans., séries A vol. 223 p. 289-343 (1923)
- [ 4 ] CONSTANTINESCU V.N. : "On turbulent lubrication" M. Eng., M. sc Techn., vol 173 n° 38 (1959)
- [ 5 ] PRANDTL L. : (1925) "Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, Zeitschr. f. Angew. math. u. Mech. 5, 136
- [ 6 ] ELROD H.G., J.R. and C.W. NG : "A theory for turbulent fluid films an its application to Bearings" Journal of lubrication technology - Trans. ASME series F., vol. 89, n° 3 July 1967 pp. 356-363
- [ 7 ] CONSTANTINESCU V.N. : "Basic Relationships in turbulent lubrication and Their Extension to include thermal effect" - Journal of lubrication technology, Trans. ASME, April 1973, p. 147-154
- [ 8 ] TAYLOR G.I. "Statical Theory of turbulence" - Proc. Roy. Soc. A 151, 421
- [ 9 ] FRENE J. : "Régime d'écoulement non laminaire en film minces - Application aux paliers lisses" - Thèse de Docteur ès Sciences Physiques présentée à l'Université Claude Bernard à Lyon en 1974
- [ 10 ] NICOLAS D. "Les régimes non laminaires en lubrification réduction du frottement par addition de polymères" - Thèse Docteur ès Sciences à Lyon 1979
- [ 11 ] La lubrification : INSA Lyon
- [ 12 ] CHAOMLEFFEL J.P. : "Influence des forces d'inertie en lubrification hybride" - Diplôme de docteur-ingénieur spécialité mécanique - Institut national des Sciences appliquées de Lyon, décembre 1983
- [ 13 ] WARNER Paul C. : "Static and Dynamic properties of partial journal bearings" - Journal of basic engineering. Trans ASME, june 1963, p. 247-257

- [14] DEBAILLEUX Ch. : "Etude du comportement d'un palier hydrostatique" - Thèse de Docteur de 3e cycle présentée à l'Université des Sciences et Techniques de Lille en 1977
- [15] DEBAILLEUX Ch., J.C.L. MARTI : "Résolution numérique de l'équation de Reynolds appliquée à des paliers cylindriques de type hydrodynamique et hydrostatique" - Note interne I, E.U.D.I.L. Construction Mécanique Université de Lille I, décembre 1981
- [16] SPALDING D.B. and B.E.LAUNDER : "Mathematical models of turbulence". Department of Mechanical Engineering - Imperial College of science and technology, London England (1972)
- [17] FAVRE A. : "La turbulence en Mécanique des Fluides" - Collection Gauthier Villars, publié avec le concours du C.N.R.S. (1976)
- [18] CONSTANTINESCU V.N. : "Influence of the law of variation of the mixing length on the turbulent motion in the lubricant layer" - Studii si Cercetari de mecanica aplicata Acad. R.P.R. 1960, 11.5
- [19] N.G. C.W et PAN C.H.T. : "A linearized turbulent lubrication theory" - J. of basic engineering. Trans. ASME sep. 1965, p. 675-682
- [20] ELROD H.G. et ANWAR I. et COLSHER R. : "Transient lubricating film with inertia - Turbulent flow." Journal of tribology - Trans. of the ASME January 1984, vol. 106, p. 134-139
- [21] CONSTANTINESCU V.N. : "On the improvement of the turbulent lubrication theory, by using the mixing length hypothesis" - Institute of applied mechanics of the Academy of the R.P.R. Rev. Roum. Sci. Techn. mec. appl. Tome 10, n° 2, p. 421-437, Bucarest 1965
- [22] CONSTANTINESCU V.N. et C.H.T. PAN et A.J. SMALLEY et J.H. VOHR "Lubrication phenomena in a film of low Kinematic viscosity" - Rev. Roum Sci techn. Mec. Appl, tome 15 n° 2, p. 479-502, Bucarest (1970)
- [23] CONSTANTINESCU V.N. : "On the influence of inertia forces in hydrostatic turbulent lubrication" - Rev. Roum. Sci. techn-Mec. Appl., Tome 18, n° 2, p. 283-310, Bucarest 1973
- [24] AJANA BOUTALEB S. "Etude des paliers hydrostatiques en régime turbulent : limites de validité s'un modèle classique" - Mémoire présenté à la réunion S.F.N. - S.H.F. sur la Mécanique des Fluides, Paris, 9-10 octobre 1985 - Revue Française de Mécanique n° 1986-1, p. 39-46
- [25] CONSTANTINESCU V.N. and GALETUSE S. : "On the possibilities of improving the accuracy of the evaluation of inertia Forces in laminar and turbulent film" - Journal of lubrication technology - Trans. of the ASME, January 1974, P. 69-79
- [26] CONSTANTINESCU V.N. and GALETUSE S. and KENNEDY F. "On the comparison between lubrication theory, including turbulence and inertia forces, and some existing experimental data" - Journal of lubrication technology. Trans. of the ASME, july 1975, p. 439-449

- [27] CONSTANTINESCU V.N. "On the influence of inertia force in turbulent an lamina Self-Acting films". - J. of lubrication technology. Trans. ASME July 1970, p. 473-481
- [28] CONSTANTINESCU V.N. et GALETUSE S. "Pressure Drop due to inertia forces in Step Bearings". J. of lubrication technology. Trans. ASME January 1976, p. 167-174.
- [29] CONSTANTINESCU V.N. et GALETUSE S. "Operating characteristics of journal Bearings in turbulent inertial flow". J. of lubrication technology April 1982, Vol. 104, p. 173-180
- [30] Anthony A. AMSDEN et CYRIL W. HIRT - "Yaqui : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program for fluid flow at all Speeds" - Los Alamos scientific Laboratory Report LA 5 100, March 1973
- [31] William E. PRACHT - "Calculating three-dimensional Fluid flows at all Speeds with an EulerianLagrangian Computing Mesh" - J. of computational Physics, Vol. 17, n° 2, february 1975
- [32] MASSON P.J. and GALLEN N.S. - "On the magnitude of the subgrid-scale eddy coefficient in large-eddy simulations of turbulent channel flow". J. fluid Mech. 1986, vol. 162, pp. 439-462, Printed in Great Britain
- [33] ELTELBANY. M.M.M. and REYNOLDS A.J. - "Turbulence in plane channel flows" - J. fluid Mech. Printed in Great Britain 1981, vol. III, p. 283-318

