USTL
FLANDRES ARTOIS

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

N° d'ordre : 719

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Hocine MOKHTAR - KHARROUBI

SUR QUELQUES FONCTIONS MARGINALES ET LEURS APPLICATIONS

Soutenue le 7 Mai 1987 devant la Commission d'Examen :

Président	M.	P.	POUZET	Université de Lille I
Rapporteurs	MM.	P.J.	LAURENT	Université de Grenoble
		B.	LEMAIRE	Université de Montpellier
		P.	HUARD	E.D.F. Paris
		C.	BREZINSKI	Université de Lille I

Monsieur Pierre POUZET a bien voulu présider le jury de cette thèse ; je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait et l'en remercie très sincèrement.

---o---

Je considère comme un grand avantage que cette thèse ait recueilli l'avis favorable de Monsieur Pierre-Jean LAURENT ; la présence au jury de ce maître des mathématiques appliquées m'honore et témoigne encore plus de l'intérêt qu'il porte à mon travail ; pour tout cela je le remercie bien vivement.

---o---

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur Pierre HUARD, auquel je dois mon initiation à la recherche et à cette belle discipline qu'est l'Analyse Multivoque ; et si un chapitre de thèse n'était pas matière légère, j'oserais lui dédier le premier de celle-ci.

---o---

Avec l'amabilité et la grande compétence qu'on lui connait, Monsieur Bernard LEMAIRE a bien voulu s'intéresser à ce travail et le juger ; sa présence au jury ajoute à l'honneur qu'il me fait ; je l'en remercie bien sincèrement.

---o---

J'assure de toute ma gratitude Monsieur Claude BREZINSKI pour m'avoir accueilli au laboratoire ANO et pour m'avoir permis d'y travailler dans un climat de sympathie et d'entière liberté.

---o---

Que soient enfin remerciés tous ceux qui ont pris part, chacun à sa manière à la réalisation de ce travail ; particulièrement mon épouse dont le soutien constant a été décisif, Mademoiselle DRIESSENS pour son efficacité dans la dactylographie du texte et Monsieur GLANC pour son excellent travail de reprographie.

---o---

A tous mes proches,
particulièrement :

mes parents

ma femme

et mes enfants :
Adda, Nebia, Yamina

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE II. FONCTION D'APPUI ASSOCIÉE À UNE MULTIFONCTION

CHAPITRE III. FONCTION MARGINALE DE PÉNALITÉ

CHAPITRE IV. FONCTIONS MARGINALES ASSOCIÉES À DES PROBLÈMES DE JEUX

---o---

NOTATIONS ET PREMIÈRES DÉFINITIONS

* X et Y désignent des espaces de Banach de dual topologique $\overset{*}{X}$ et $\overset{*}{Y}$.

* La dualité entre espaces étant notée <,>, la dualité entre X×Y et $\overset{*}{X}\times\overset{*}{Y}$ est définie par $<(x,y),(\overset{*}{x},\overset{*}{y})> = <x,\overset{*}{x}> + <y,\overset{*}{y}>$.

* Si Z est l'espace de Banach considéré, $\| \ \|$ désignera sa norme, B_Z sa boucle unité fermée, S_Z sa sphère unité et $\Theta(z)$ le filtre des voisinages du point $z\in Z$.

* $\bar{A}$, int A, $\overline{co}A$ et Z-A, désignent respectivement la fermeture, l'intérieur, la fermeture convexe et le complémentaire du sous ensemble A dans Z.

* $\dim Z<+\infty$ signifie que Z est de dimension finie.

* $\sigma_A^{\#}$ (resp. σ_A^{b}) désigne la fonction d'appui supérieure (resp. inférieure) de A et ψ_A sa fonction indicatrice.

* $N_A(a)$ désigne le cône normal négatif à A en $a\in A$.

* $P_f(Z)$ sera l'espace des fermés de Z et $C(Z)$ l'espace des fonctions numériques continues sur Z.

* Si $g : Z \to \bar{\mathbb{R}}$, g^* (resp. $\overset{**}{g}$) sera la fonction conjuguée (resp. biconjuguée) de g et $\overline{co}g$ sa régularisée convexe (plus grande minorante convexe, s.c.i).

* Une multifonction F de X dans l'ensemble des parties de Y sera notée $F : X \rightrightarrows Y$; lui sont attachés les sous-ensembles :

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, F &= \{x\in X \ / \ F(x) \neq \emptyset\} \\ R(F) &= F(X) \qquad \text{où } F(A) = \bigcup_{a\in A} F(a) \qquad \forall\, A \subset X \\ G(F) &= \{(x,y) \ / \ y\in F(x)\}. \end{aligned}$$

Appelés respectivement domaine, image et graphe de F.

* A toute $F : X \rightrightarrows Y$ est associé $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ définie par :
$F^{-1}(y) = \{x \ / \ y \in F(x)\}$, d'où Dom $F^{-1} = R(F)$ et $R(F^{-1}) =$ Dom F.
Et l'on dira que :

* F est propre (resp. stricte) si Dom $F \neq \emptyset$ (resp. Dom $F = X$)

* F est fermé (resp. convexe) si G(F) est fermé (resp. convexe)

* F est semi-continue supérieurement (s.c.s) en $a \in X$, si pour tout ouvert W de Y, contenant F(a), il existe $V \in \Theta(a)$ avec $F(V) \subset W$.

* F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en $a \in X$, si pour tout ouvert W de Y, rencontrant F(a), il existe $V \in \Theta(a)$ tel que : $F(x) \cap W \neq \emptyset \quad \forall x \in V$.

---o---

CHAPITRE 0

PROBLEMATIQUE GENERALE ET PRESENTATION DES RESULTATS

Sous un titre volontairement général, nous proposons avec de nombreuses applications une étude exhaustive de quelques fonctions marginales du type :

$$(m) \quad \left[\; h(x) = \inf_{y \in F(x)} \phi(x,y) \right.$$

où ϕ est une fonction numérique définie sur un produit d'espaces de Banach $X \times Y$ et F une multifonction de X dans Y.

Comme cadre naturel d'étude des programmes paramétrés et d'analyse de sensibilité des programmes perturbés, ces fonctions ont fait l'objet, depuis une quinzaine d'années, d'une abondante littérature, mais dans la seule perspective de l'analyse marginale ; point de vue consistant essentiellement d'une part à rechercher les conditions minimales sur ϕ et F, qui induisent sur h des propriétés de fermeture, de continuité, de lipschitzité, de convexité ou de sous différentiabilité et susceptibles de mener à une estimation ou à un calcul d'un sous différentiel de h, et d'autre part à préciser (du point de vue des continuités) le comportement du minimiseur M_h défini par :

$$(m') \quad \left[\; M_h(x,\varepsilon) = \{y \in F(x) \;/\; \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon\} \right.$$

Or la considération de telles fonctions recouvre en fait, outre l'analyse marginale, de nombreux aspects dont :

I - L'ANALYSE MULTIVOQUE

En effet, pour un choix convenable de l'objectif ϕ, les propriétés de h peuvent être caractéristiques de celles de F ; et un premier pas dans ce sens est illustré par un résultat de Choquet, caractérisant la continuité de F, par celle des fonctions marginales $\hat{g}$, définies par $\hat{g}(x) = \inf_{y \in F(x)} g(y)$, lorsque g décrit l'espace $\mathcal{C}(Y)$ des fonctions numériques, continues sur Y.

L'espace de référence $\mathcal{C}(Y)$ étant "trop vaste", un pas supplémentaire est franchi par Castaing et Valadier qui montrent que si F est à valeurs convexes, fermées, on peut, sous certaines conditions de compacité, se restreindre au sous espace $\overset{*}{Y}$. Mais en fait, comme sous ensembles de Y, les valeurs F(x) se caractérisent soit par la fonction d'appui (à F(x)) si F est à valeurs convexes fermées, soit par la fonction distance (à F(x)) si F est simplement à valeurs fermées.

Et c'est cette remarque qui fut le point de départ de l'étude systématique que nous avons consacrée aux deux fonctions marginales suivantes :

(1) <u>La fonction distance associée à F</u>

$$d_F : X\times Y \to \bar{\mathbb{R}} \ / \ d_F(x,y) = \begin{cases} \inf\limits_{z\in F(x)} \|y-z\| & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction marginale d_F est alors apparue comme un outil d'une grande flexibilité, puisqu'elle nous a permis de caractériser F des points de vue de la fermeture (du graphe), de la continuité, la continuité uniforme, la convexité (du graphe) et la fermeture convexe (du graphe). Nous introduisons ensuite trois types de convergences (fermée en valeurs, simple et uniforme) de suites (F_n) de multifonctions ; convergences que nous caractérisons entièrement par des convergences de la suite correspondante (d_{F_n}). Il est à noter que si l'on réduit l'espace X à {0}, nous retrouvons le cadre d'analyse des suites de fermés de Y et donc les principaux résultats s'y rattachant. L'intérêt grandissant de l'épiconvergence (convergence des épigraphes de fonctions numériques) dans l'étude des problèmes variationnels, a motivé l'extension que nous en donnons dans le cadre des multifonctions.

Nous caractérisons cela en toute généralité par la convergence fermée de la suite des graphes, puis par l'épiconvergence de la suite (d_{F_n}) lorsque $\dim Y <+\infty$.

Notons que ces résultats peuvent être le point de départ d'une étude de l'épiconvergence des fonctions vectorielles dont l'intérêt est manifeste en optimisation multicritères. Puis lorsque $\dim X<+\infty$ et $\dim Y<+\infty$, et lorsque la suite $\{G(F_n)\}$ converge au sens de la limite d'ensembles vers G(F), avec F_n convexe, nous établissons par le biais de d_F et (d_{F_n}) une convergence de la suite des cônes tangents aux graphes $G(F_n)$, vers le cône tangent au graphe $G(F)$; ce résultat apparaît alors comme une extension aux multifonctions de la convergence des sous différentiels des fonctions convexes et aura une application directe dans l'étude des suites de problèmes convexes du type :

$$(m_n) \quad \left[\begin{array}{l} h_n(x) = \inf\limits_{y \in F_n(x)} \phi_n(x,y) \end{array} \right. \qquad n \in \mathbb{N}$$

---o---

(2) <u>La fonction d'appui associée à F</u>

$$\sigma_F : X \times \overset{*}{Y} \to \bar{\mathbb{R}} \ / \ \sigma_F(x,p) = \begin{cases} \inf\limits_{z \in F(x)} \langle z,p \rangle & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

σ_F (ou plus exactement $\sigma_F^{\#}$ définie par $\sigma_F^{\#}(x,p) = \sigma_{F(x)}^{\#}(p)$) a largement été utilisée notamment pour caractériser les multifonctions, relativement à la continuité (Castaing, Valadier, Aubin, Cellina), la mesurabilité (Castaing, Valadier), l'existence de point fixe ($x \in F(x)$) ou critique ($o \in F(x)$) par de nombreux auteurs.

Nous montrons quant à nous que σ_F caractérise aussi la convexité et la lipschitzité de F ; ce qui nous a permis d'établir que toute multifonction convexe fermée à valeurs bornées est localement lipschitz sur l'intérieur de son domaine ; résultat du type application ouverte qui n'était connu que lorsque la multifonction F considérée est en outre localement bornée, ou est un processus convexe, surjectif (i.e. telle que $G(F)$ est un cône convexe avec $R(F) = Y$).

Nous montrerons plus loin qu'en fait σ_F est un outil essentiel d'étude des problèmes convexes de programmation et de contrôle.

---o---

Le second volet que recouvrent les fonctions marginales concerne :

II - LA PROGRAMMATION MATHEMATIQUE ET LE CONTROLE

Nous illustrons cela sur les aspects suivants :

(1) L'analyse marginale

La fonction d_F trouve une application intéressante dans l'étude des fonctions marginales générales du type (m).

En effet nous établissons un résultat général assurant, sous des conditions relativement simples, l'existence de $V \in \Theta(o)$ dans X, d'une constante $\bar{\ell} > o$ et d'un compact c de Y tels que :

(i) $h(x) = \inf_{y \in c} [\phi(x,y) + \ell d_F(x,y)] \quad \forall x \in V, \forall \ell \geq \bar{\ell}$

(ii) tout y réalisant l'infimum en (i) est dans $M_h(x,o)$

ce qui manifestement fournit un cadre très simplifié d'étude de la fonction marginale h, puisque d_F caractérise F.

Sachant par ailleurs que tout sous différentiel de d_F caractérise un cône tangent à G(F) au point (x,y) considéré (cf. chap.I p), nous constatons que les résultats (i) et (ii) ci-dessus permettent une approche très simple d'estimation (ou de calcul) des sous différentiels de h.

(2) L'approximation des programmes perturbés généraux :

Pour une suite de programmes du type :

$$h_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F_n(x)} \phi_n(x,y) & \text{si } x \in \text{Dom } F_n \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et le programme dit limite :

$$h(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F(x)} \phi(x,y) & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

deux grands aspects sont à considérer :

ler aspect.

Quels types de convergence de (ϕ_n) et (F_n) vers ϕ et F assureraient

(i) une convergence de (h_n) vers h
(2i) une convergence de (∂h_n) vers ∂h
(3i) une convergence de (M_{h_n}) vers M_h ?

---o---

2ème aspect. (plus difficile)

Les convergences précédentes étant identifiées, quelles approximations (ϕ_n) et (F_n) de ϕ et F induiraient ces convergences ?

---o---

Nous n'abordons que le premier aspect ; nous donnons alors des conditions suffisantes assurant l'épi-convergence de (h_n) vers h ; nous montrons ensuite que la convexité se préserve à la limite ; et que dans le cas entièrement convexe (ϕ_n et F_n convexes, fermées), nous obtenous sous des conditions relativement courantes, une convergence de la suite $\{G(\partial h_n)\}$ vers $G(\partial h)$.

Lorsqu'en outre dim $X<+\infty$, nous établissons une convergence de (∂h_n) vers ∂h au sens suivant :

$$\left[\ \partial h_n(x) \subset \partial h(x) + \varepsilon B_X^* \qquad \forall x \in \text{int Dom } h \text{ et } n \geq n(x,\varepsilon)\right.$$

Enfin et toujours dans le cas convexe, une convergence des minimiseurs (M_{h_n}) vers M_h est établie. Les résultats obtenus étendent et précisent les travaux de Zolezzi en approximation variationnelle.

---o---

(3) La pénalisation extérieure en optimisation :

Résoudre par pénalisation extérieure les problèmes généraux

$$(P)\quad \left[\begin{array}{l}\inf\limits_{y\in A} J(y)\\ \text{où } A \subset Y \text{ et } J : Y \to \bar{\mathbb{R}}\end{array}\right.$$

revient en fait à associer à (P) la fonction marginale :

$$\left[\begin{array}{l} h(x) = \inf\limits_{y\in Y} \phi(x,y) \text{ avec} \\ \phi(x,y) = J(y) + x.P(y) \text{ et} \\ P : Y \to \mathbb{R}_+ \ / \ P(y) = 0 \iff y \in A. \end{array}\right.$$

Les résultats généraux sur la pénalisation extérieure revenant en fait aux suivants :

$$\left[\begin{array}{ll} \text{(i)} & \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \text{valeur de } (\mathcal{P}) \\ \text{(2i)} & \limsup\limits_{\substack{x\to+\infty \\ \varepsilon\to 0+}} M_h(x,\varepsilon) \subset \text{ensemble des solutions de } (\mathcal{P}). \end{array}\right.$$

Nous montrons quant à nous, à travers l'étude d'une fonction marginale associée à une famille plus générale de fonctions de pénalités, que les méthodes de pénalités extérieures classiques reviennent toutes à une même méthode "type Uzawa" agissant sur un programme "sup-inf".

Ce qui nous permet de montrer en toute généralité, qu'une pénalité extérieure est exacte si et seulement si la fonction ϕ la définissant admet un col à distance finie.

Nous en déduisons aisément et sans hypothèse de convexité qu'une pénalité exacte est nécessairement non différentiable ; nous montrons ensuite que relativement à une famille de perturbation simple, toute forme de stabilité différentielle de la pénalisation équivaut à l'exactitude.

---o---

(4) Problèmes convexes de programmation et de contrôle :

La fonction marginale h apparaît naturellement comme la fonction de perturbation associée au problème non perturbé

$$\left[\ h(o) = \inf_{y\in F(o)} \phi(o,y)\right.$$

problème que l'on peut reformuler comme suit :

$$(P)\quad \left[\begin{array}{l} \inf J(y) \\ o \in \Delta(y) \\ \text{où } \Delta(y) = F^{-1}(y) \text{ et } J(y) = \phi(o,y) \end{array}\right.$$

et ce seul schéma recouvre les cas suivants :

<u>1er cas</u>

$$(P_m)\quad \left[\begin{array}{l} \inf J(y) \\ g(y) \in Q \\ \quad y \in C \end{array}\right.$$

cas réductible à (P), en considérant simplement la multifonction Δ définie par $\Delta(y) = [Q-g(y)] \times [C-y]$;et si Q est l'un des cônes $\{0\}$, $\mathbb{R}_+^m$ ou $\mathbb{R}_-^\ell$, ou un produit de ceux-là, nous retrouvons le cadre classique de la programmation mathématique.

---o---

<u>2ème cas</u>

$$(P_c)\quad \left[\begin{array}{l} \inf J(y) \\ \\ Ly \in E(y) \end{array}\right. \qquad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{l} L : Y \to Z \\ E : Y \rightrightarrows Z \quad \text{et} \\ Z \text{ un espace de Banach} \end{array}\right.$$

(P_c) se réduit à (P) avec : $\Delta(y) = E(y) - Ly$.

Et si $Ly = (Dy, \gamma y)$ où D est un opérateur différentiel et γ un opérateur de trace et si E est de la forme :

$$E(y) = [\bigcup_{u \in U}(Ay + Bu)] \times C$$

avec A et B des opérateurs binéaires continus et U un ensemble de contrôles, nous retrouvons le cadre classique du contrôle optimal sur les problèmes :

$$\left[\begin{array}{l} \inf J(y) \\ Dy = Ay + Bu \\ u \in U \\ \gamma y \in C \end{array}\right.$$

ces deux cas ont justifié à nos yeux un traitement particulier du problème général :

$$(P)\quad \begin{cases} \inf \phi(x) \\ 0 \in F(x) \end{cases}$$

nous en faisons l'étude complète dans le cas convexe (ϕ et F convexes fermées) ; nous montrons alors que la fonctionnelle :

$$L(x,p) = \phi(x) + \sigma_F(x,p)$$

est un Lagrangien pour (P) et que ses cols $(\bar{x},\bar{p})$ lorsqu'il en existe sont constitués d'une solution $\bar{x}$ pour (P) et d'un vecteur dual $\bar{p}$ attaché à $\bar{x}$.

Il est à noter que le schéma (P) ci-dessus a également été étudié par Borwein par une autre approche mais le seul résultat que ce dernier a dégagé est l'existence de $\bar{p}$ tel que :

$$\inf_{x\in X} L(x,\bar{p}) = \text{valeur de } (P)$$

Nous prouvons quant à nous l'existence de col $(\bar{x},\bar{p})$ sous les conditions int Dom F $\neq \emptyset$, $0 \in$ int R(F) et ϕ inf-compacte. Nous complétons l'étude par un résultat de stabilité de (P) relativement aux perturbations :

$$h(u) = \inf_{0\in F(x)+u} \phi(x)$$

Enfin l'application au contrôle optimal est illustrée sur deux problèmes généraux :

(a) Programmation dynamique discrète

Nous étudions le modèle général :

$$(P_{d_y})\quad \begin{cases} \inf \phi(x_0,\dots,x_n) \\ (x_i,x_{i+1}) \in E_i \qquad i=0,n-1 \\ x_0 \in C_0 \end{cases}$$

où C_0 est un convexe fermé de l'espace de Banach X_0 et où $\forall i\ E_i \subset X_i \times X_{i+1}$, produit d'espaces de Banach avec E_i convexe, fermé et ϕ convexe, propre, s.c.i sur $\prod_{i=0}^{n} X_i$.

Par réduction de (P_{d_y}) à la forme (P), ci-dessus, nous caractérisons entièrement les chemins $(\bar{x}_0,\dots,\bar{x}_n)$ optimaux, puis nous examinons en détail le cas particulier :

$$\left[\begin{array}{l} \inf \phi(x_0,\dots,x_n) \\ x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i \\ u_i \in U_i \\ x_0 \in C_0 \end{array}\right. \qquad i=0,n-1$$

où A_i et B_i sont des opérateurs linéaires continus et U_i des ensembles de contrôles.

---o---

(b) Problèmes de contrôle

Nous proposons une étude du modèle général :

$$(P_c) \quad \left[\begin{array}{l} \inf\limits_{\substack{x \in W_n^{1,\alpha} \\ u \in L_m^{\beta}}} \int_0^T f(t,x(t),u(t))\,dt + g(x(o),x(T)) \\ \qquad (x(t),u(t),\dot{x}(t)) \in E(t) \qquad \text{p.p} \\ \qquad x(0) \in C_0 \\ \\ \text{où } u \text{ désigne un contrôle, } E:[0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ \text{et } \alpha,\beta \in [1,+\infty[\end{array}\right.$$

Nous réduisons (P_c) à la forme (P), puis nous caractérisons les trajectoires et contrôles optimaux ; pour cela nous établissons un résultat d'existence de solution à l'inclusion différentielle perturbée

$$\left[\begin{array}{l} (x(t),0,\ x(t)+v(t)) \in E(t) \text{ p.p où } v \in L_n^{\alpha} \\ \qquad x(0) \in C_0 \end{array}\right.$$

Nous examinons enfin des extensions diverses et le cas particulier :

$$\left[\begin{array}{l} E(t) = \{(a,b,c) \mid c = A(t)\,a + B(t)b \ ;\ b \in U(t)\} \\ \text{où } A(t) \text{ et } B(t) \text{ sont matrices de dimensions convenables et} \\ U \text{ une multi-fonction de contrôle ;} \end{array}\right.$$

ce qui correspond bien évidemment au cas du contrôle optimal en équations d'état linéaire.

Notons qu'un schéma plus simple que (P_c) ci-dessus fit l'objet de travaux de Rockafellar, mais par une approche totalement différente.

Cette dernière et celle que nous proposons se complètent beaucoup plus qu'elles ne s'opposent.

En effet, incorporant la contrainte d'état dans l'objectif par adjonction d'une fonction indicatrice, Rockafellar occulte complètement la difficulté de la contrainte d'état et caractérise les couples optimaux $(\bar{x},\bar{u})$ par le biais d'un Hamiltonien ; ce qui lui permet de dégager une dualité.

Pour notre part, nous caractérisons les couples optimaux directement à l'aide des données f, g, C_0 et la multifonction E.

---o---

Enfin deux classes de problèmes de jeux relèvent des fonctions marginales :

III - ASPECTS NOUVEAUX SUR LES PROBLEMES DE COLS ET DE MIN MAX

Ces problèmes concernent l'existence et les propriétés des couples $(\bar{x},\bar{y}) \in U \subset X \times Y$ tels que :

$$(\text{F-col}) \quad \left[\begin{array}{lll} \phi(x,\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},\bar{y}) & \leq \phi(\bar{x},y) \\ \forall (x,\bar{y}) \in U & \forall\ (\bar{x},y) \in U \end{array}\right.$$

et

$$(\text{G-col}) \quad \left[\begin{array}{l} \phi(x,\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},y) \\ \qquad \forall (x,y) \in U \end{array}\right.$$

Il est clair qu'un G-col est un F-col et que si U est sous la forme produit V×W, ces deux notions coincident avec la notion de col classique ; mais si U n'est pas un produit d'ensembles (nous dirons que les contraintes sont mêlées), l'existence d'un F-col ou d'un G-col est en général sans rapport avec les solutions des problèmes (P) et (D) suivants :

$$(P)\quad \begin{cases} \sup\limits_{x}\ \inf\limits_{y}\ \phi(x,y) \\ (x,y) \in U \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (D)\quad \begin{cases} \inf\limits_{y}\ \sup\limits_{x}\ \phi(x,y) \\ (x,y) \in U \end{cases}$$

un contre-exemple simple est donné pour illustrer cela.

Les F-cols firent l'objet de travaux de Dem'yanov, qui en prouva l'existence en dimension finie avec ϕ continue, concave-convexe et U convexe, compact.

Quant à nous, par une approche beaucoup plus simple, nous caractérisons entièrement les G-cols, puis nous en prouvons l'existence en dimension infinie et sous des conditions plus faibles que celles de Dem'yanov.

Le cas des problèmes (P), (D) et (F-col) est ensuite examiné par le biais des fonctions marginales.

En effet, en considérant U comme le graphe d'une multifonction $F:X \vec{\to} Y$, (P) et (D) se formulent comme suit :

$$(P)\quad \begin{cases} \sup h(x) \\ x \in \mathrm{Dom}\, F \end{cases} \qquad \text{où} \quad h(x) = \inf_{y \in F(x)} \phi(x,y)$$

et

$$(D)\quad \begin{cases} \inf k(y) \\ y \in \mathrm{Dom}\, F^{-1} \end{cases} \qquad \text{où} \quad k(y) = \sup_{x \in F^{-1}(y)} (x,y)$$

Les F-cols sont alors les points fixes de la multifonction :

$$M_\phi : X\times Y \vec{\to} X\times Y \quad / \quad M_\phi(x,y) = M_k(y,0) \times M_h(x,0)$$

Nous prouvons alors l'existence d'un F-col et des solutions pour (P) et (D) sous les conditions :

$$\begin{cases} \text{(i)} & X \text{ et } Y \text{ sont réflexifs et } U \text{ est convexe compact} \\ \text{(2i)} & \phi \text{ est faiblement continue quasi-concave-convexe.} \end{cases}$$

Une extension aux jeux à n-personnes est examinée.

Enfin nous dégageons quelques résultats sur une classe de jeux dynamiques à travers l'étude des fonctions marginales du type :

$$\begin{cases} \begin{cases} h(x) = \sup\limits_{x \in E(s)} \inf\limits_{y \in F(s)} \phi(s,x,y) \text{ et} \\ k(x) = \inf\limits_{y \in F(s)} \sup\limits_{x \in E(s)} \phi(s,x,y) \end{cases} \\ \text{où} \quad E : S \overset{\rightarrow}{\rightarrow} X \quad \text{et} \quad F : S \overset{\rightarrow}{\rightarrow} Y \quad \text{et} \\ \phi : S \times X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \end{cases}$$

avec S espace topologique, puis S espace mesurable.

---o---

Ce travail est organisé en quatre chapitres pouvant aisément être lus de façon indépendante et ont chacun une bibliographie propre.

Les renvois dans le texte concernent donc la bibliographie du chapitre dont la lecture est en cours.

---o---
--o--

CHAPITRE I

FONCTION DISTANCE ASSOCIEE A UNE MULTIFONCTION ET APPLICATIONS

1 - INTRODUCTION

A toute multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est associée la fonction marginale, (dite simplement fonction associée) $d_F : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par :

$$d_F(x,y) = \begin{cases} \inf\limits_{z \in F(x)} \|y-z\| & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

d_F fut utilisée dans des contextes différents par Castaing, Valadier [6] et Salinetti-Wets [23] dans l'étude des multifonctions mesurables, par Rockafellar [19] pour étudier la lipschitzité des multifonctions, par Aubin [1 ; 3] et Cellina [3] pour traiter des inclusions différentielles, et enfin par Penot [15] dans l'étude des différentiabilités des multifonctions.

Pour notre part, nous montrons que d_F caractérise F par rapport à la fermeture (du graphe) [propo. 3.2.1], la continuité (inf, sup et uniforme) [théo. 3.2.2 ; 3.2.3 ; corol. 3.2.1], la convexité (du graphe) [propo. 3.3.1] et enfin la fermeture convexe (du graphe) [propo. 3.3.4].

Trois types de convergence (fermée en valeurs, simple et uniforme) des suites de multifonctions sont étudiés ; nous les caractérisons par des convergences de la suite correspondante des fonctions associées [théo. 4.2.1 ; 4.2.2 et 4.2.3] ; les liens entre ces convergences sont ensuite examinés. Les propriétés des limites éventuelles sont alors dégagées [propo. 4.3.1 ; 4.3.2 et 4.3.3] ; puis ces résultats sont examinés dans le cadre des multifonctions dites paramétrées utiles en contrôle [propo. 4.3.4 ; corol. 4.3.1]. Le lemme de Dini d'équivalence des convergences simple et uniforme est étendu aux multifonctions [propo. 4.2.2].

Une extension aux multifonctions de l'épi-convergence est proposée avec une caractérisation en toute généralité par la convergence fermée des graphes [propo. 4.4.3], puis par l'épi-convergence de la suite des fonctions associées lorsque dim $Y < +\infty$ [propo. 4.4.4].

Une dernière application en analyse multivoque propose une notion d'ε-sous-différentiel pour les multifonctions ; un résultat de convergence de sous-différentiels (cône tangent au graphe) de multifonctions convexes, fermées est établi [théo. 5.1 et 5.2].

Deux application à l'optimisation sont enfin traitées : la première concerne l'analyse marginale ; nous établissons alors pour les programmes perturbés généraux un résultat de pénalisation exacte et uniforme (par rapport à la perturbation) [propo. 6.1.1].

La seconde traitera de l'approximation des programmes perturbés ; des résultats précisant et complétant les travaux de Zolezzi [26] sont établis ; [propo. 6.2.1 à 6.2.6 ; corol. 6.2.1 ; 6.2.2].

---o---

2 - DISTANCE A UN ENSEMBLE ET DISTANCE DE HAUSDORFF

A tout sous ensemble A de Y est associée la fonction distance à A, notée d_A et donnée par :

$$d_A(y) = \begin{cases} \inf\limits_{a \in A} \|y-a\| & \text{si } A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait alors que :

Proposition 2.1 :

(i) $d_A = d_{\bar{A}}$

(2i) d_A est globalement lipschitz de constante 1

(3i) $d_{A_1} \geq d_{A_2} \iff \bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$

(4i) d_A est convexe si et seulement si $\bar{A}$ est convexe.

---o---

Les deux résultats suivants seront utiles.

<u>Proposition 2.2</u> :

Si $A = A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 \ / \ a_i \in A_i \quad i=1,2\}$ alors :

$$d_A = d_{A_1} \nabla d_{A_2}$$

où ∇ désigne l'opérateur d'inf-convolution.

---o---

<u>Preuve</u> :

* Notons provisoirement par ϕ_1, ϕ_2 et ϕ les fonctions distance à A_1, A_2 et A respectivement et soit $g = \phi_1 \nabla \phi_2$; alors :

$$\phi(y) = \inf_{a_2 \in A_2} \inf_{a_1 \in A_1} \|y-a_1-a_2\| = \inf_{a_2 \in A_2} \phi_1(y-a_2)$$

par suite :

$$g(y) = \inf_{z \in Y} [\phi_1(y-z)+\phi_2(z)] \leq \inf_{z \in A_2} \phi_1(y-z) = \phi(y).$$

* Réciproquement, soient $z \in Y$ et $\varepsilon > 0$; il existe alors $a_2^\varepsilon \in A_2$ tel que :

$$\|z - a_2^\varepsilon\| \leq \phi_2(z) + \varepsilon$$

et comme ϕ_1 est globalement lipschitz de constante 1, on a :

$$\phi(y) = \inf_{a_2 \in A_2} \phi_1(y-a_2) \leq \phi_1(y-a_2^\varepsilon) \leq \phi_1(y-z) + \|z-a_2^\varepsilon\| \leq \dots$$

$$\leq \phi_1(y-z) + \phi_2(z) + \varepsilon$$

* ε et z étant arbitraires, le résultat annoncé en découle.

---o---

<u>Proposition 2.3</u> :

Pour tout sous-ensemble non vide A de Y, on a :

$$d_{\overline{co}A} = \overline{co}\, d_A$$

---o---

Preuve :

* Notons provisoirement $\phi = d_A$ et $g = d_{\overline{coA}}$; le calcul de la conjuguée de ϕ donne aisément :

$$\overset{*}{\phi}(\overset{*}{y}) = \sup_{a\in A} \sup_{y\in Y} [<y,\overset{*}{y}> - \|y-a\|]$$

Or on sait que :

$$\sup_{y\in Y} [<y,\overset{*}{y}> - \|y-a\|] = \|\overset{*}{y}\| + <a,\overset{*}{y}>$$

ce qui donne :

$$\overset{*}{\phi}(\overset{*}{y}) = \|\overset{*}{y}\| + \sigma_A^{\#}(\overset{*}{y})$$

* Le même calcul pour g donne :

$$\overset{*}{g}(\overset{*}{y}) = \|\overset{*}{y}\| + \sigma_{\overline{coA}}^{\#}(\overset{*}{y})$$

* Mais comme $\sigma_A^{\#} = \sigma_{\overline{coA}}^{\#}$, on a $\overset{*}{\phi} = \overset{*}{g}$ et donc $\overset{**}{\phi} = \overset{**}{g}$;

le résultat annoncé en découle en remarquant simplement que $\overset{**}{\phi} = \overline{co}d_A$ et que $g = \overset{**}{g}$, puisque g est convexe continue.

---o---

Terminons ce paragraphe en rappelant la notion de distance de Hausdorff et en complétant ses propriétés par un résultat nouveau.

Définitions 2.1 :

Les ensembles considérés sont supposés non vides ; on définit alors :

(i) l'ε-élargissement de A

$$A^{\varepsilon} = \{y \;/\; d_A(y) \le \varepsilon\} = A + \varepsilon B_Y$$

(2i) l'excès de A_1 sur A_2

$$e[A_1,A_2] = \sup_{a\in A_1} d_{A_2}(a)$$

(3i) la distance de Hausdorff entre A_1 et A_2

$$H[A_1,A_2] = \max \{e[A_1,A_2],\ e[A_2,A_1]\}$$

---o---

Les propriétés suivantes sont classiques (cf. par ex. [6]).

Proposition 2.4 :

(i) $e\,[A_1,A_2] = \inf\{\varepsilon \,/\, A_1 \subset A_2^{\varepsilon}\}$ et

$H\,[A_1,A_2] = \inf\{\varepsilon \,/\, A_1 \subset A_2^{\varepsilon} \text{ et } A_2 \subset A_1^{\varepsilon}\}$

(2i) $e\,[A_1,A_2] = 0 \iff \bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$ et

$H\,[A_1,A_2] = 0 \iff \bar{A}_1 = \bar{A}_2$

(3i) H est une distance sur $P_f(Y)$; et muni de H, $P_f(Y)$ est complet.

---o---

Cependant le résultat suivant est nouveau.

Proposition 2.5 :

L'application $A \to d_A$ réalise une isométrie de $P_f(Y)$ muni de H dans $\mathcal{C}(Y)$ muni de la norme de la convergence uniforme sur Y.

---o---

Preuve :

Il s'agit d'établir que :

$$H[A_1,A_2] = \sup_{y \in Y} |d_{A_1}(y) - d_{A_2}(y)|$$

* Soit donc λ un majorant du second membre, alors :

$$(1) \qquad d_{A_i}(y) \leq d_{A_j}(y) + \lambda \qquad \forall\, y \in Y \qquad i \neq j$$

ce qui donne aisément :

$$(2) \qquad A_i \subset A_j + \lambda B_Y \qquad i \neq j$$

La proposition 2.4 mène alors à :

$$(3) \qquad H[A_1,A_2] \leq \lambda$$

* Réciproquement si (3) a lieu, on a évidemment (2), ce qui par passage à la fonction distance exprime que :

$$d_{A_i}(y) \geq d_{A_j+\lambda B_Y}(y) \qquad i \neq j$$

mais par la proposition 2.2 on sait que :

$$d_{A_j+\lambda B_Y}(y) = \inf_{z\in Y} [d_{A_j}(y-z) + d_{\lambda B_Y}(z)]$$

Or la lipschitzité de d_{A_j} donne en particulier :

$$d_{A_j}(y-z) \geq d_{A_j}(y) - \|z\|$$

ce qui rapproché du fait que :

$$d_{\lambda B_Y}(z) = \max \{0, \|z\| - \lambda\}$$

permet d'aboutir à :

$$d_{A_i}(y) \geq \inf_{z\in Y} [d_{A_j}(y) - \|z\| + \|z\| - \lambda]$$

c'est-à-dire à :

$$d_{A_i}(y) \geq d_{A_j}(y) - \lambda \qquad i\neq j$$

ce qui en fait traduit (1) et termine la preuve.

---o---

3 - CARACTERISATION DES MULTIFONCTIONS PAR LA FONCTION DISTANCE

Définition 3.1

A toute multifonction $F : X \overset{\to}{\to} Y$ est associée $d_F : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ donnée par :

$$d_F(x,y) = d_{F(x)}(y) = \begin{cases} \inf\limits_{z \in F(x)} \|y-z\| & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que Dom d_F = Dom $F \times Y$ et que pour tout $x \in$ Dom F, $d_F(x,\cdot)$ est globalement lipschitz de constante 1.

Par ailleurs d_F est également associée à $\bar{F}$, définie par $\bar{F}(x) = \overline{F(x)}$; aussi supposerons-nous dans tout ce qui suit les multifonctions considérées à valeurs fermées ; et ceci ne restreindra que très peu la généralité de l'étude.

---o---

3.1 - Operations sur les multifonctions et fonctions associées

Proposition 3.1.1 :

(i) Si $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ alors $d_F = \inf_{i\in I} d_{F_i}$

(2i) Si $F = \bigcap_{n\in \mathbb{N}} F_n$ où (F_n) décroit par inclusion des valeurs

alors $d_F = \sup_n d_{F_n}$

(3i) Si $F = F_1 + F_2$, alors : $d_F(x,\cdot) = d_{F_1}(x,\cdot) \nabla d_{F_2}(x,\cdot)$

où ∇ est l'opérateur d'inf-convolution.

(4i) Si $F = F_1 \times F_2$ où $F_i : X \rightrightarrows Y_i$ et Y_i un espace de Banach de norme encore notée $\|\ \|$ et si $Y = Y_1 \times Y_2$ est normé par :

$$\|(y_1,y_2)\| = \|y_1\| + \|y_2\| \text{ , alors}$$

$$d_F(x,y_1,y_2) = d_{F_1}(x,y_1) + d_{F_2}(x,y_2)$$

(5i) Soient Z un espace de Banach, $F_1 : Z \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$ et $F = F_1 o F_2$, alors :

(a) si $F_2(x) = u(x)+C$ où $C \subset Z$ et $u : X \to Y$, on a :

$$d_F(x,y) = \inf_{c\in C} d_{F_1} (u(x) + c, y)$$

(b) si $F_1(z) = \lambda z + A$ où $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $A \subset Y$, on a :

$$d_F(x,y) = |\lambda| \inf_{a\in A} d_{F_2}(x, \lambda^{-1}(y-a)).$$

---o---

Preuve :

Assez simple, à l'exception de (3i) qui est une application directe de la proposition 2.2.

---o---

3.2 - Fermeture et continuités des multifonctions

Soit $F : X \overset{\to}{\to} Y$; en associant à toute fonction numérique g sur Y, la fonction marginale $\hat{g}$ définie par :

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F(x)} g(y) & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

nous avons la caractérisation suivante :

Théorème 3.2.1 : [Choquet [7] p. 171]

On suppose F à valeurs fermées ; alors :

(i) F est s.c.s en a $\Longleftrightarrow$ $\forall\, g \in \mathcal{C}(Y)$, $\hat{g}$ est s.c.i en a

(2i) F est s.c.i en a $\Longleftrightarrow$ $\forall\, g \in \mathcal{C}(Y)$, $\hat{g}$ est s.c.s en a.

---o---

L'espace fonctionnel de référence $\mathcal{C}(Y)$ étant "trop vaste", Castaing et Valadier [6] ont montré que si F est à valeurs convexes, on peut sous certaines conditions de compacité, se restreindre au sous-espace $\overset{*}{Y}$. Nous montrons quant à nous qu'en fait d_F permet de caractériser aisément les continuités de F.

Théorème 3.2.2 :

F est s.c.i en a $\Longleftrightarrow$ $\forall\, b \in Y$, d_F est s.c.s en (a,b).

---o---

Preuve :

* La norme étant continue, on a immédiatement pour le théorème 3.2.1 :

$$F \text{ s.c.i en a} \Longrightarrow \forall\, b \in Y,\ d_F(\cdot,b) \text{ est s.c.s en a}$$

mais d_F étant globalement lipschitz en y, pour toute suite $(x_n,y_n) \to (a,b)$ on a : $d_F(x_n,y_n) = d_F(x_n,y_n) - d_F(x_n,b) + d_F(x_n,b) \leq \|y_n - b\| + d_F(x_n,b)$.

Le passage à la limite donne alors :

$$\lim\sup d_F(x_n,y_n) \leq \lim \|y_n - b\| + \lim\sup d_F(x_n,b) \leq d_F(a,b)$$

ce qui établit la condition nécessaire.

* Inversement soient $a \in \text{Dom } F$, $b \in F(a)$, et $W \in \Theta(b)$ alors :

(1) $d_F(a,b) = 0$ et $\exists\ \varepsilon > 0$ / $b + \varepsilon B_Y \in W$

En supposant d_F s.c.s en (a,b), pour l'ε ci-dessus, il existerait en particulier $V_\varepsilon \in \Theta(a)$ tel que :

$$d_F(x,b) = \inf_{z \in F(x)} \|z-b\| \leq d_F(a,b) + \varepsilon = \varepsilon$$

par suite :

$$\forall\ x \in V_\varepsilon,\ \exists\ y_\varepsilon \in F(x) \cap [b + \varepsilon B_Y]$$

ceci rapproché de (1) assure que $F(x) \cap W \neq \emptyset$.

---o---

Rappelons deux définitions :

Définition 3.2.1 :

F est dite fermée en a (sup-continue selon Huard [9]) si pour toute suite de $G(F)$, $(x_n,z_n) \to (a,z)$ alors $z \in F(a)$.

Par conséquent F est fermée ($G(F)$ fermé) si et seulement si F est fermée en tout $a \in \text{Dom } F$.

Définition 3.2.2 :

F est dite compacte en a (selon Penot [15]) si toute suite (x_n,z_n) de $G(F)$ admet une valeur d'adhérence dès que $(x_n) \to a$.

---o---

Remarque 3.2.1 :

Il est aisé de vérifier que si F est fermée en a et compacte en a, alors F est s.c.s en a.

---o---

Nous avons alors la caractérisation suivante :

Théorème 3.2.3 :

(i) F s.c.s en a $\Longrightarrow$ $\forall$ b $\in$ Y, d_F s.c.i en (a,b)

$$\left.\begin{array}{l}\text{(2i) } \forall\, b \in Y,\ d_F \text{ s.c.i en } (a,b) \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \quad F \text{ compacte en } a\end{array}\right\} \Longrightarrow F \text{ s.c.s en } a$$

---o---

Preuve :

(i) Si F est s.c.s a, pour tout b $\in$ Y, $d_F(\cdot,b)$ est s.c.i en a par application du théorème 3.2.1.

Par ailleurs d_F étant globalement lipschitz en y, nous avons pour toute suite (x_n,y_n) de limite (a,b)

$$d_F(x_n,y_n) = d_F(x_n,y_n) - d_F(x_n,b) + d_F(x_n,b) \geq -\|y_n-b\| + d_F(x_n,b)$$

ce qui donne par passage à la limite :

$$\liminf d_F(x_n,y_n) \geq d_F(a,b)$$

(2i) Réciproquement si F n'était pas s.c.s en a, il existerait un ouvert W contenant F(a) et tel que :

$$\forall\, V \in \Theta(a), \quad \exists\, x_V \in V \text{ et } z_V \in F(x_V) \cap [Y - W]$$

par suite il existerait une suite (x_n,z_n) de G(F) telle que :

$$(x_n) \to a \qquad \text{et} \qquad (z_n) \subset Y - W.$$

La compacité de F en a assurerait l'existence d'une sous-suite $(x_{n'},z_{n'})$ de limite (a,z) ; par conséquent z $\in$ Y-W (Y-W étant fermé) ; ce qui joint à l'hypothèse d_F est s.c.i en (a,z) mènerait à

$$d_F(a,z) \leq \liminf d_F(x_{n'},z_{n'}) = 0$$

c'est-à-dire à z $\in$ F(a) $\cap$ [Y-W] ; contradiction qui termine la preuve.

---o---

Il est à noter que le second point a fait ressortir dans sa preuve les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.1 :

(i) $\forall\, b \in Y$, d_F s.c.i en (a,b) $\Longrightarrow$ F fermée en a

(2i) d_F s.c.i sur Dom $F \times Y$ $\Longrightarrow$ F fermée.

---o---

Le résultat suivant dû à Penot (notes non publiées) donne une sorte de réciproque à (2i) ci-dessus.

Proposition 3.2.2 : [Penot]

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ où X et Y sont des espaces topologiques de topologie notée ρ et τ et soit Δ une distance sur Y telle que les boules relatives à Δ soient τ-compactes ; alors si F est fermée pour ρ et τ, $\delta(\cdot,b) = \Delta[b,F(\cdot)]$ est s.c.i pour ρ, pour tout $b \in Y$.

---o---

Preuve :

Nous reproduisons ici la preuve de l'auteur.

* En supposant la conclusion fausse, pour un $y \in Y$ et une suite généralisée $(x_i)_{i\in I} \to x$ dans (X,ρ), il existerait $\alpha > 0$ tel que :

$$\liminf_{i\in I} \delta(x_i,y) < \alpha < \delta(x,y)$$

* Nous pouvons donc extraire une sous-suite généralisée $(x_j)_{j\in J}$ de $(x_i)_{i\in I}$ et pour chaque $j \in J$, définir un $z_j \in F(x_j)$ tel que :

$$\Delta(y,z_j) \leq \alpha$$

* La boule de centre y et de rayon α étant compacte, nous pouvons supposer que $(z_j)_{j\in J} \to y$ dans (Y,τ).

* F étant fermée, $y_\infty \in F(x)$; ce qui contredit le fait que :

$$\Delta(y,y_\infty) \leq \alpha < \delta(x,y) \leq \delta(x,y_\infty) + \Delta(y,y_\infty) = \Delta(y,y_\infty).$$

---o---

Remarque 3.2.2 :

Penot fait par ailleurs remarquer que la compacité des boules de Y peut être remplacée par celle de F ; or ceci assurerait que F est s.c.s puisque F est fermée, ce qui par le théorème 3.2.1 montrerait directement que d_F est s.c.i.

---o---

Corollaire 3.2.1 :

Si F est continue à valeurs compactes, F est uniformément continue sur tout compact de Dom F au sens où pour tout compact $V \subset$ Dom F et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$x_1, x_2 \in V,\ \|x_1 - x_2\| \leq \alpha \quad \Longrightarrow \quad H[F(x_1), F(x_2)] \leq \varepsilon.$$

---o---

Preuve :

Soit V un compact de Dom F ; alors $C = F(V)$ est compact ([3] p.42) ; d_F étant continue (théo. 3.2.2 et 3.2.3) est uniformément continue sur le compact $V \times C$; ce qui assure en particulier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$x_1, x_2 \in V,\ y \in C,\ \|x_1 - x_2\| \leq \alpha \Longrightarrow |d_F(x_1, y) - d_F(x_2, y)| \leq \varepsilon$$

et mène aisément à $\qquad H[F(x_1),\ F(x_2)] \leq \varepsilon.$

---o---

3.3 - Propriétés de convexité

Proposition 3.3.1

(i) F est à valeurs convexes $\Longleftrightarrow \forall\, x \in$ Dom F, $d_F(x, \cdot)$ est convexe.

(2i) F est convexe $\Longleftrightarrow d_F$ est convexe.

---o---

Preuve :

(i) Le point (i) résulte de la proposition 2.1.

(2i) La nécessité de la condition (2i) est classique ; la suffisance s'obtient en remarquant simplement que d_F étant à valeurs dans $\bar{R}_+$ nous avons :

$$G(F) = \{(x,y) \ / \ d_F(x,y) \leq 0\}.$$

---o---

Proposition 3.3.2 :

Si F est convexe, fermée, d_F est continue sur int Dom F × Y.

---o---

Preuve :

Par le théorème de Robinson-Ursescu [17, 25], nous savons qu'en particulier F est s.c.i sur int Dom F ; la proposition 3.3.1 et le théorème 3.2.2 assurent alors que d_F est convexe, s.c.s, donc continue sur int Dom F × Y.

---o---

Proposition 3.3.3 :

Si X et Y sont de dimension finie et si F est convexe à valeurs fermées, alors F est fermée et s.c.i en tout point de int Dom F.

---o---

Notons qu'ici la fermeture n'est plus une hypothèse mais une conséquence.

Preuve :

Sous nos hypothèses d_F est convexe (propo. 3.3.1), donc continue sur int Dom d_F = int Dom F × Y.

Le résultat annoncé découle alors du théorème 3.2.2 et de la proposition 3.2.1.

---o---

Proposition 3.3.4 ;

(i) La multifonction $\overline{co}F$ définie par $\overline{co}F(x) = \overline{co}(F(x))$ a pour fonction associée la régularisée convexe en y de d_F.

(2i) Si int Dom F $\neq \emptyset$, $\overline{conv}F$ définie par $G(\overline{conv}F) = \overline{co}\,(G(F))$, a pour fonction associée la régularisée convexe de d_F.

---o---

Preuve :

(i) Le point (i) découle de la proposition 2.3 appliquée à $d_F(x,\cdot) = d_{F(x)}$;

(2i) Notons provisoirement par g la fonction associée à $\overline{conv}F$; on sait alors que g est convexe (propo. 3.3.1), continue sur int Dom g (propo. 3.3.2) et que int Dom $F \times Y \subset$ int Dom g.

* Calculons la conjuguée de d_F ; soit :

$$d_F^*(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) = \sup_{x\in X}\ \sup_{y\in Y}\ [<x,\overset{*}{x}> + <y,\overset{*}{y}> - d_F(x,y)]$$

$$= \sup_{x\in X}\ [<x,\overset{*}{x}> + \sup_{y\in Y}\ [<y,\overset{*}{y}> - \inf_{z\in F(x)} \|y-z\|\ ]\ ]$$

$$= \sup_{x\in X}\ \sup_{z\in F(x)}\ [<x,\overset{*}{x}> + \sup_{y\in Y}\ [<y,\overset{*}{y}> - \|y-z\|\ ]]$$

$$= \sup_{x\in X}\ \sup_{z\in F(x)}\ [<x,\overset{*}{x}> + <z,\overset{*}{y}> + \|\overset{*}{y}\|\ ]$$

$$= \|\overset{*}{y}\| + \sigma^{\#}_{G(F)}\ (\overset{*}{x},\overset{*}{y})$$

* Un calcul identique donnerait pour g :

$$\overset{*}{g}(\overset{*}{x},\overset{*}{y}) = \|\overset{*}{y}\| + \sigma^{\#}_{G(\overline{conv}F)}\ (\overset{*}{x},\overset{*}{y})$$

* Mais comme $\sigma^{\#}_A = \sigma^{\#}_{\overline{co}A}$ et que $G(\overline{conv}F) = \overline{co}G(F)$, on a $d_F^* = \overset{*}{g}$ et donc $d_F^{**} = g^{**}$; on conclut alors en remarquant simplement que $d_F^{**} = \overline{co}d_F$ et que $g = g^{**}$ puisque g est continue sur int Dom g $\neq \emptyset$.

---o---

4 - ANALYSE DES SUITES DE MULTIFONCTIONS

4.1 - Limites d'ensembles

τ et ρ étant deux topologies sur un ensemble Z, on note $z = \tau - \lim z_n$ ou $z_n \xrightarrow{\tau} z$ (resp. $z = \rho - \lim z_n$ ou $z_n \xrightarrow{\rho} z$) si la suite (z_n) converge vers z pour la topologie τ (resp. ρ).

Définitions 4.1: [convergence fermée]

Soit $K(\mathbb{N}) = \{k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ ; injective}\}$;

(i) A toute suite (C_n) de sous-ensembles de Z sont associées les limites supérieure $\rho - \overline{\lim}\, C_n$ et inférieure $\tau - \underline{\lim}\, C_n$ données par :

$$\rho\text{-}\overline{\lim}\, C_n = \bigcup_{k \in K(\mathbb{N})} \{z = \rho\text{-}\lim z_n \text{ ; } z_n \in C_{k(n)} \text{ ; } \forall n\}$$

$$\tau\text{-}\underline{\lim}\, C_n = \{z = \tau\text{-}\lim z_n \text{ ; } z_n \in C_n \text{ ; } \forall n\}$$

(2i) Et l'on dira que (C_n) converge vers C et on notera :

$$C = (\tau,\rho)\text{-}\lim C_n \quad \text{si}$$

$$\rho - \overline{\lim}\, C_n \subset C \subset \tau - \underline{\lim}\, C_n$$

---o---

Les propriétés suivantes sont classiques :

Proposition 4.1.1 [6,7,11,14,21,22]

On suppose que Z est un espace de Banach :

(I) Si $\tau = \rho = s$ topologie forte de Z ; alors :

(i) $s\text{-}\underline{\lim}\, C_n$ et $\rho\text{-}\overline{\lim}\, C_n$ sont fermées et

$$s - \overline{\lim}\, C_n = \bigcap_n \left(\overline{\bigcup_{m \geq n} C_m}\right)$$

(2i) Si $C_n = C \quad \forall n$, $(s,s) - \lim C_n = \overline{C}$

(3i) Si (C_n) est croissante : $(s,s) - \lim C_n = \overline{\bigcup_n C_n}$

(4i) Si (C_n) décroit avec C_n fermé ; $(s,s) - \lim C_n = \bigcap_n C_n$.

(II) Si $\tau = s$ et $\rho = \omega$ topologie faible avec C_n convexe $\forall n$, alors :

(i) $s - \underline{\lim}\, C_n$ est convexe

(2i) Si (C_n) est croissante $(s,\omega) - \lim C_n = \overline{\bigcup_n C_n}$

(3i) Si (C_n) décroit avec C_n fermé ; $(s,\omega) - \lim C_n = \bigcap_n C_n$.

(III) Si $\dim Z < +\infty$ avec $s=\omega=\tau=\rho=$ topologie usuelle et si $C = (\tau,\rho) - \lim C_n$ existe et est compacte avec C_n connexe, il existe $\alpha > 0$ et $\bar{n}$ tels que :

$$n \geq \bar{n} \implies C_n \subset C + \alpha B_Z.$$

4.2 - <u>Convergences de suites de multifonctions</u>

Soient une suite de multifonctions $F_n : X \rightrightarrows Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$.

<u>Définitions 4.2.1</u> :

On dira que (F_n) converge en valeurs vers F sur V au sens de :

(i) <u>la convergence fermée</u> et on note $F = \mathcal{F} - \lim\limits_{V} F_n$ si

$\forall\, x \in V,\ F(x) = (s,s) - \lim F_n(x)$ (s topologie forte de Y)

(2i) <u>la convergence simple</u> et on note $F = H_s - \lim\limits_{V} F_n$ si

$\forall\, x \in V,\ H\,[F_n(x), F(x)] \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (H distance de Hausdorff)

(3i) <u>la convergence uniforme</u> et on note $F = H_u - \lim\limits_{V} F_n$ si

$$\sup_{x \in V} H\,[F_n(x), F(x)] \to 0$$
$$n \to +\infty$$

Nous définirons plus loin la convergence fermée en graphe, que nous nommerons épi-convergence et à laquelle nous consacrerons une étude séparée.

---o---

Remarque 4.2.1 :

Il est clair que si F est propre, les convergences au sens des (i), (2i) et (3i) avec $V \subset \text{Dom } F$, assurent que pour n assez grand F_n est propre.

---o---

Théorème 4.2.1 : [convergence fermée]

(i) Si d_F est limité simple de (d_{F_n}) sur $V \times Y$ et si F est à valeur fermée

alors : $$F = \mathcal{F} - \lim_V F_n$$

(2i) et si $\dim Y < + \infty$, la réciproque a lieu.

---o---

Preuve :

(i) * Soient $x \in V \subset \text{Dom } F$ et $z \in F(x)$; d_F étant limite de (d_{F_n}) on a :

$$\lim d_{F_n}(x,z) = d_F(x,z) = 0$$

et comme $\forall n$, $\exists\, z_n$ tel que $\|z-z_n\| \leq d_{F_n}(x,z) + \frac{1}{n}$, il est clair que $z_n \xrightarrow{s} z$ et donc $z \in s - \underline{\lim}\, F_n(x)$; par suite :

$$F(x) \subset s - \underline{\lim}\, F_n(x)$$

* Soit par ailleurs $z \in s - \overline{\lim}\, F_n(x)$; par définition il existe $k \in K(\mathbb{N})$ tel que $z \in s - \underline{\lim}\, F_{k(n)}(x)$; c'est-à-dire $z = s\text{-}\lim z_n$ avec $z_n \in F_{k(n)}(x)$, $\forall n$; par conséquent :

$$d_{F_{k(n)}}(x,z) \leq \|z - z_n\|$$

Le passage à la limite donne alors :

$$\lim d_{F_n}(x,z) = \lim d_{F_{k(n)}}(x,z) = d_F(x,z) = 0$$

et comme F(x) est fermé, $z \in F(x)$; d'où :

$$s - \overline{\lim}\, F_n(x) \subset F(x)$$

(2i) * Soit $(x,y) \in V \times Y$; F(x) étant fermé et dim Y < +∞, il existe $z \in F(x)$ avec $d_F(x,y) = \|y-z\|$; et comme il existe également $z_n \overset{S}{\to} z$ avec $z_n \in F_n(x)$, on a $d_{F_n}(x,z) \le \|y-z_n\|$ et donc :

(1) $$\limsup d_{F_n}(x,y) \le \|y-z\| = d_F(x,y).$$

* Par ailleurs il existe (t_n) telle que $t_n \in F_n(x)$ et

$$\|y - t_n\| \le d_{F_n}(x,y) + \frac{1}{n}$$

ce qui rapproché de (1) donne :

(2) $$\begin{cases} 0 \le \liminf \|y-t_n\| \le \liminf d_{F_n}(x,y) \le d_F(x,y) \;;\; \text{et} \\ \limsup \|y-t_n\| \le d_F(x,y) \end{cases}$$

* Soit $k_1 \in K(\mathbb{N})$ tel que $\liminf \|y-t_n\| = \lim \|y-t_{k_1(n)}\|$.
Il est clair que grâce à (2), $(t_{k_1(n)})$ est bornée ; Y étant de dimension finie, il existe une valeur d'adhérence t et donc $k_2 \in K(\mathbb{N})$ tels que :

$$t_{k(n)} \overset{S}{\to} t \quad \text{où} \quad k = k_2 \circ k_1.$$

Alors $t \in s - \underline{\lim}\, F_{k(n)} \subset s - \overline{\lim}\, F_n(x) \subset F(x)$ et donc :

(3) $$d_F(x,y) \le \|y-t\| = \liminf \|y-t_n\|.$$

* En rapprochant (1), (2) et (3) le résultat annoncé suit aisément.

---o---

Théorème 4.2.2 : [convergence simple]

On suppose F à valeurs fermées, alors :

$F = H_s - \lim\limits_V F_n$ si et seulement si pour tout $x \in V$, $d_F(x,\cdot)$ est limite uniforme de $(d_{F_n}(x,\cdot))$ sur Y.

---o---

Preuve :

découle immédiatement de la proposition 2.5 qui dans notre contexte donne :

$$\forall\, x \in V,\ H\,[F_n(x),F(x)] = \sup_{y\in Y} |d_{F_n}(x,y) - d_F(x,y)|$$

---o---

Théorème 4.2.3 : [convergence uniforme]

On suppose F à valeurs fermées, alors $F = H_u - \lim\limits_V F_n$ si et seulement si d_F est limite uniforme de (d_{F_n}) sur $V \times Y$.

---o---

Preuve :

La proposition 2.5 donne alors :

$$\sup_{x\in V} H\,[F_n(x),F(x)] = \sup_{(x,y)\in V\times Y} |d_{F_n}(x,y) - d_F(x,y)|$$

d'où le résultat.

---o---

Remarque 4.2.2 :

Il est clair que :

$$F = H_u - \lim_V F_n \implies F = H_s - \lim_V F_n \implies F = \mathcal{F} - \lim_V F_n$$

les résultats suivants établissent certaines réciproques :

---o---

Proposition 4.2.1 :

On suppose $\dim Y < +\infty$, F_n à valeurs connexes et F à valeurs compactes

alors : $\quad F = \mathcal{F} - \lim F_n \implies F = H_s - \lim\limits_V F_n$.

Preuve :

* La proposition 4.1.1 assure l'existence de $\alpha > 0$ et $\bar{n}$ tels que :

(1) $\quad \forall\, n \geq \bar{n},\ F_n(x) \subset F(x) + \alpha B_Y$

et sous nos hypothèses $C = F(x) + \alpha B_Y$ est compact.

* Par ailleurs, par le théorème 4.1.1, d_F est limite simple de (d_{F_n}) sur $V \times Y$; or pour tout $x \in V$, $\{d_F(x,\cdot)\ ;\ d_{F_n}(x,\cdot)\ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille de fonctions globalement lipschitz de même constante 1 ; c'est donc une famille uniformément équicontinue sur Y.

Le second théorème d'Ascoli assure alors qu'en fait $d_F(x,\cdot)$ est la limite uniforme de $(d_{F_n}(x,\cdot))$ sur tout compact ; donc sur C exprimons cela ;
$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ tel que :

$$\forall\, n \geq n_\varepsilon \quad \left[\begin{array}{l} d_{F_n}(x,z) \leq d_F(x,z) + \varepsilon \\ \\ d_F(x,z) \leq d_{F_n}(x,z) + \varepsilon \end{array}\right. \qquad \forall\, z \in C$$

* Ce qui rapproché de (1) ci-dessus donne aisément :

$$F_n(x) \subset F(x) + \varepsilon B_Y \quad \text{et} \quad F(x) \subset F_n(x) + \varepsilon B_Y$$

c'est-à-dire $\quad H\,[F_n(x), F(x)] \leq \varepsilon$.

---o---

Le résultat qui suit étend aux multifonctions le lemme de Dini.

Proposition 4.2.2 :

On suppose satisfaites les conditions suivantes :

(i) $\forall\, n$, F_n est continue à valeurs compactes

(2i) F est continue

(3i) (F_n) est croissante et F est à valeurs compactes ou bien (F_n) décroit ; alors :

$$F = \mathcal{F} - \lim_{\text{Dom } F} F_n \implies F = H_u - \lim_{V} F_n \quad \forall\, V \text{ compact de Dom } F.$$

---o---

Preuve :

* Soit V un compact de Dom F ; il est aisé de voir que dans les deux cas (croissance ou décroissance), la continuité des F_n et de F assure qu'il existe un compact $C \supset F(V)$ avec $C \supset F_n(V)$ $\forall n$ assez grand.

* Il est par ailleurs clair que (d_{F_n}) est monotone avec d_F comme limite simple sur Dom $F \times Y$; ce qui joint au fait que d_{F_n} et d_F sont continues (théo. 3.2.2 et 3.2.3) assure que la convergence est en fait uniforme sur le compact $V \times C$; ce qui donne :

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_\varepsilon \ /\ \forall\, n \geq n_\varepsilon \quad \left[\begin{array}{l} d_{F_n}(x,y) \leq d_F(x,y) + \varepsilon \\ \\ d_F(x,y) \leq d_{F_n}(x,y) + \varepsilon \end{array}\right. \qquad \forall (x,y) \in V \times C$$

et mène aisément à $\sup\limits_{x \in V} H\, [F_n(x), F(x)] \leq \varepsilon$.

---o---

4.3 - Propriétés de la limite

Proposition 4.3.1 : [convexité]

Si $F = \mathcal{F} - \lim\limits_{\text{Dom } F} F_n$ et si F_n est convexe, F l'est aussi.

---o---

Preuve :

* Soient $x_1, x_2 \in$ Dom F et z_1, z_2 tels que $z_i \in F(x_i)$ $i=1,2$; alors il existe $z_n^1 \overset{s}{\rightarrow} z_1$ et $z_n^2 \overset{s}{\rightarrow} z_2$ avec $z_n^i \in F_n(x_i)$ $i=1,2$; la convexité des F_n assure alors que pour tout $\lambda \in [0,1]$, et pour tout n,

$$\lambda z_n^1 + (1-\lambda)\, z_n^2 \in F_n(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2))$$

* Et comme $\lambda z_n^1 + (1-\lambda)\, z_n^2 \overset{s}{\rightarrow} \lambda z_1 + (1-\lambda)\, z_2$, il est clair que :

$$\lambda z_1 + (1-\lambda)\, z_2 \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2).$$

---o---

Proposition 4.3.2 : [continuité]

On suppose F_n continue avec $F = H_u - \lim_V F_n$ et $V \subset$ Dom F ; alors si Y est de dimension finie et si F_n est compacte pour n assez grand où simplement si F est compacte, F est continue sur int V.

---o---

Preuve :

* Les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 assurent la continuité de d_{F_n} sur int V×Y ; mais par le théorème 4.2.3, d_F est continue sur int V×Y comme limite uniforme de (d_{F_n}) ; par suite F est s.c.i (théo. 3.2.2) et fermée (propo. 3.2.1) sur int V.

  Nous aurons alors la continuité de F, si nous prouvons sa compacité ; d'où une partie du résultat.

* Supposons donc Y de dimension finie et F_n compacte pour n assez grand. La convergence uniforme sur V assure qu'il existe $\bar{n}$ tel que :

  (1) $\quad \forall\, n \geq \bar{n} \qquad F(x) \subset F_n(x) + B_Y \qquad \forall\, x \in V.$

  Soit alors (x_m, z_m) suite de G(F) avex $x_m \overset{S}{\to} a \in$ int V.
  Il existe alors $\bar{m}$ tel que :

  $$\forall\, m \geq \bar{m},\ x_m \in V \quad \text{et donc} \quad z_m \in F(x_m) \subset F_n(x_m) + B_Y.$$

* Soit $\overset{*}{n} \geq \max\{\bar{n}, \bar{m}\}$; $\overset{*}{n}$ fixé, alors :

  (2) $\quad \forall\, m \geq \overset{*}{n} \qquad z_m \in F_{\overset{*}{n}}(x_m) + B_Y$

  et donc pour tout m, il existe $u_m \in B_Y$ tel que :

  $$(x_m, z_m - u_m) \in G(F_{\overset{*}{n}}) \quad \forall\, m \geq \overset{*}{n}$$

* En choisissant $\overset{*}{n}$ assez grand pour que $F_{\overset{*}{n}}$ soit compacte, la suite $(z_m - u_m)$ admettra une valeur d'adhérence ; et comme (u_m) est bornée dans Y de dimension finie, (z_m) admettra une valeur d'adhérence ; ceci termine la preuve.

---o---

Remarque 4.3.1 :

Sans la compacité de F ou sans la finitude de la dimension de Y et la compacité des F_n, la H_u-convergence ne préserve à la limite que la fermeture et la semi-continuité inférieure.

---o---

Proposition 4.3.3 :

On suppose que $F = \mathcal{F} - \lim\limits_{V} F_n$ avec V = Dom F ; alors :

(i) Si (F_n) est croissante avec F_n s.c.i, F est s.c.i

(2i) Si (F_n) décroît avec F_n s.c.s., F est fermée.

---o---

Preuve :

La preuve directe est simple ; mais elle est tout aussi simple par les fonctions associées ; en effet, il suffit de remarquer que $d_F = \inf d_{F_n}$ ou $d_F = \sup d_{F_n}$ selon que (F_n) croit ou décroit et que d_{F_n} est s.c.s dans le cas croissant et s.c.i dans le cas décroissant et d'user du théorème 3.2.2 et de la proposition 3.2.1.

---o---

Les deux résultats suivants précisent les propriétés des multifonctions dites paramétrées utiles en théorie du contrôle ;

Proposition 4.3.4 : [paramétrisation I]

Soient U un sous-ensemble d'un espace topologique Z, une multifonction $\Phi : X \times U \rightrightarrows Y$ et $F : X \rightrightarrows Y$ définie par :

$$F(x) = \Phi(x,U) = \bigcup_{u \in U} \Phi(x,u)$$

Alors :

(i) Si Φ est s.c.i, F l'est aussi

(2i) Si Φ est compacte, continue et si U est séquentiellement compact, F est compacte, continue.

---o---

Preuve :

(i) Soit ϕ la fonction associée à Φ ; ϕ est s.c.s (théo. 3.2.2) et $d_F(x,y) = \inf\limits_{u \in U} \phi(x,u,y)$; par suite d_F est s.c.s et donc F est s.c.i (théo. 3.2.2).

(2i) Si Φ est continue, ϕ l'est aussi (théo. 3.2.2 et 3.2.3) ; alors d_F est s.c.i ; en effet si $(x_n,y_n) \to (x,y) \in \text{Dom } d_F$, pour tout n, il existe $u_n \in U$ tel que : $\phi(x_n,u_n,y_n) \le d_F(x_n,y_n)+\frac{1}{n}$; par suite :

(1) $$\liminf \phi(x_n,u_n,y_n) \le \liminf d_F(x_n,y_n)$$

* Soit $k \in K(\mathbb{N})$ tel que $\liminf \phi(x_n,u_n,y_n) = \lim \phi(x_{k(n)},u_{k(n)},y_{k(n)})$ U étant séquentiellement compact, on peut toujours supposer que $u_{k(n)} \to u$ dans U ; la continuité de ϕ donne alors avec (1) :

$$d_F(x,y) \le \phi(x,u,y) = \liminf \phi(x_n,u_n,y_n) \le \liminf d_F(x_n,y_n).$$

Par conséquent F est fermée (propo. 3.2.1) .

La preuve sera achevée si nous prouvons la compacité.

* Soit donc (x_n,z_n) suite de G(F) telle que $x_n \overset{\$}{\to} x$; alors pour tout n, il existe $u_n \in U$ tel que $z_n \in \Phi(x_n,u_n)$.

* U étant séquentiellement compact, il existe $k \in K(\mathbb{N})$ tel que : $u_{k(n)} \to u$ dans U ; par suite :

$$(x_{k(n)},u_{k(n)},z_{k(n)}) \in G(\Phi) \qquad \text{et}$$

$$(x_{k(n)},u_{k(n)}) \to (x,u).$$

* La compacité de Φ assure l'existence d'une valeur d'adhérence de $(z_{k(n)})$ donc de (z_n).

---o---

Corollaire 4.3.1 : [paramétrisation II]

Soient (U_n) une suite de sous-ensembles d'un espace topologique Z et (Φ_n) une suite de multifonctions $\Phi_n : X \times U_n \rightrightarrows Y$, qu'on suppose à valeurs fermées et soit enfin $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs fermées et telle que pour tout $x \in \text{Dom } F$ on a:

(1) $F(x) \subset \ldots \subset \Phi_{n+1}(x,U_{n+1}) \subset \Phi_n(x,U_n) \subset \ldots \qquad \forall n$

(2) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon,x)\ /\ \forall\, n \geq n(\varepsilon,x),\ \Phi_n(x,U_n) \subset F(x) + \varepsilon B_Y.$

Alors si pour n assez grand U_n est séquentiellement compact et Φ_n compacte continue, F est s.c.s.

---o---

Remarque 4.3.2 :

En choisissant pour (Φ_n) une suite de fonctions, on retrouve sous des hypothèses encore plus faibles les théorèmes 1 et 2 de [3] pp. 47-48.

---o---

Preuve :

* Notons $F_n(x) = \Phi_n(x,U_n)$; il est alors clair que (F_n) décroit par inclusions des valeurs et que les hypothèses du corollaire assurent que

$$F = H_s - \lim_V F_n \qquad \text{avec} \qquad V = \text{Dom } F.$$

* Par ailleurs pour tout n, F_n satisfait aux hypothèses de la proposition 4.3.4, par suite F_n est compacte continue pour n assez grand.

* Comme les conditions de la proposition 4.3.3 sont réunies, F est fermée.

* Comme enfin $G(F) \subset G(F_n)$ et que pour n assez grand F_n est compacte, la compacité de F suit ; d'où le résultat.

---o---

4.4 - Epi-convergence de multifonctions

Rappelons qu'étant donnée une famille $\{\phi;\phi_n;n\in\mathbb{N}\}$ de fonctions numériques s.c.i sur un espace topologique (Z,τ), on dit que (ϕ_n) épi-converge vers ϕ et on note $\phi = \text{épi-lim}\ \phi_n$ si, pour tout $z \in Z$, on a :

$$\left[\begin{array}{lll} \text{(i)} & z_n \xrightarrow{\tau} z \implies \liminf \phi_n(z_n) \geq \phi(z) & \text{et} \\ \text{(2i)} & \exists\, (z_n)\ /\ z_n \xrightarrow{\tau} z \text{ et } \limsup \phi_n(z_n) \leq \phi(z). & \end{array}\right.$$

Pour une étude exhaustive de ce type de convergence, nous renvoyons le lecteur à [4,5,10,14,21,24] ; notons simplement la caractérisation suivante :

Proposition 4.4.1 :

$\phi = \text{épi-lim}\ \phi_n \iff \text{épi}\ \phi = (\tau,\tau) - \lim \text{épi}\ \phi_n$

où épi désigne l'épigraphe.

---o---

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étendre dans le cadre des espaces de Banach, l'épi-convergence aux multifonctions et de la caractériser.

---o---

Définitions 4.4.1 :

Soit (F_n) une suite de multifonctions fermées $F_n : X \rightrightarrows Y$; nous définissons la limite inférieure $L_i\, F_n$ [resp. supérieure $L_s\, F_n$] de (F_n) par :

(i) $$(L_i\, F_n)(x) = \bigcup_{(x_n \xrightarrow{s} x)} s - \underline{\lim}\ F_n(x_n)$$

(2i) $$(L_s\, F_n)(x) = \bigcup_{\substack{(x_n \xrightarrow{s} x) \\ k \in K(\mathbb{N})}} s - \underline{\lim}\ F_{k(n)}(x_n)$$

où les réunions considérées sont étendues à toutes suites de limite forte x et à tous les éléments de $K(\mathbb{N})$.

---o---

Remarques 4.4.1 :

1. Il est clair que $(L_i\, F_n)(x) \subset (L_s\, F_n)(x)$; mais $L_i\, F_n$ et $L_s\, F_n$ ne sont en général pas à valeurs fermées.

2. Si $F_n(x) = \phi_n(x) + \mathbb{R}_+$ avec $\phi_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$, s.c.i, nous retrouvons l'épi-limite inférieure et l'épi-limite supérieure de la suite (ϕ_n) ; notions dûes à Rockafellar et Wets [21].

3. Plus généralement si Y est ordonné par un cône fermé P et si $F_n(x) = \phi_n(x) + P$ où $\phi_n : X \to \mathbb{R}$; nous obtenons les notions nouvelles d'épi-limites de suites de fonctions verctorielles.

En rappelant que l'épi-convergence assure la convergence des minimas, nous voyons tout l'intérêt d'une étude de l'épi-convergence des fonctions vectorielles.

---o---

Proposition 4.4.2 :

(i) $G(L_i\, F_n) = s - \underline{\lim}\, G(F_n)$

(2i) $G(L_s\, F_n) = s - \overline{\lim}\, G(F_n)$.

---o---

Preuve :

(i) * Soit $(x,z) \in G(L_i\, F_n)$, alors $z \in (L_i\, F_n)(x)$ et donc il existe $x_n \overset{s}{\to} x$ telle que $z \in s - \underline{\lim}\, F_n(x_n)$; par suite il existe $z_n \overset{s}{\to} z$ avec $z_n \in F_n(x_n)$. En conclusion il existe $(x_n,z_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ avec $(x_n,z_n) \in G(F_n)$; d'où :

$$(x,z) \in s - \underline{\lim}\, G(F_n) \qquad (1)$$

* Réciproquement si (1) a lieu, il existe $(x_n,z_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ avec $z_n \in F_n(x_n)$; ce qui signifie qu'il existe $x_n \overset{s}{\to} x$ avec $z \in s - \underline{\lim}\, F_n(x_n)$; i.e $z \in (L_i\, F_n)(x)$ et donc $(x,z) \in G(L_i\, F_n)$.

(2i) * Soit $(x,z) \in G(L_s\, F_n)$; alors $z \in (L_s\, F_n)(x)$ et donc il existe $x_n \overset{s}{\to} x$ et $k \in K(\mathbb{N})$ tels que $z \in s - \underline{\lim}\, F_{k(n)}(x_n)$.
Par suite il existe $z_n \overset{s}{\to} z$ avec $z_n \in F_{k(n)}(x_n)$; ce qui signifie qu'il existe $(x_n,z_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ et $k \in K(\mathbb{N})$ tels que :
$(x_n,z_n) \in G(F_{k(n)})$; c'est-à-dire $(x,z) \in s - \overline{\lim}\, G(F_n)$.

* Inversement si $(x,z) \in s - \overline{\lim}\, G(F_n)$, il existe $k \in K(\mathbb{N})$ et $(x_n,z_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ avec $(x_n,z_n) \in G(F_{k(n)})$; il existe donc $x_n \overset{s}{\to} x$, $z_n \overset{s}{\to} z$ et $k \in K(\mathbb{N})$ avec $z_n \in F_{k(n)}(x_n)$; il est alors clair que $z \in s - \underline{\lim}\, F_{k(n)}(x_n) \subset (L_s\, F_n)(x)$.

Ceci achève la preuve.

---o---

Corollaire 4.4.1 :

Soient (F_n) une suite de multifonctions et $F : X \overset{\to}{\to} Y$; alors :

(i) $F(x) \subset (L_i\, F_n)(x) \quad \forall x \iff G(F) \subset s - \underline{\lim}\, G(F_n)$

(2i) $F(x) \supset (L_s\, F_n)(x) \quad \forall x \iff G(F) \supset s - \overline{\lim}\, G(F_n)$

---o---

Preuve :

Il suffit de remarquer que (i) équivaut à $G(F) \subset G(L_i\, F_n)$ et que (2i) équivaut à $G(F) \supset G(L_s\, F_n)$ et d'user de la proposition 4.4.1.

---o---

Définition 4.4.2 :

On dira que (F_n) épi-converge vers F et on note $F = \text{épi-lim}\, F_n$ si

$$(L_s\, F_n)(x) \subset F(x) \subset (L_i\, F_n)(x) \qquad \forall x.$$

---o---

Cela se caractérise comme suit :

Proposition 4.4.3 :

On suppose F_n fermée pour n assez grand ; alors :

$$F = \text{épi-lim}\, F_n \iff G(F) = (s,s) - \lim G(F_n)$$

auquel cas F est fermée.

---o---

Preuve :

On fait appel à la proposition 4.4.2 et au corollaire 4.4.1.

---o---

Remarque 4.4.2 :

Si $F_n(x) = \phi_n(x) + P$ et $F(x) = \phi(x) + P$ où P est un cône fermé de Y, on obtient la notion d'épi-convergence de fonctions vectorielles et une caractérisation qui peut être le point de départ d'une étude plus approfondie de la question.

---o---

Le résultat suivant éclaire le rapport de l'épi-convergence de (F_n) à celle de la suite des fonctions associées (d_{F_n}).

Proposition 4.4.4 :

On suppose F_n fermée ; alors :

(i) $d_F = \text{épi-limi } d_{F_n} \implies F = \text{épi-lim } F_n$.

(2i) Si $\dim Y < +\infty$, la réciproque a lieu.

---o---

Preuve :

(i) Grâce aux propositions 4.4.1 et 4.4.3, il suffit d'établir que :

$$\text{épi } d_F = (s,s) - \lim \text{épi } d_{F_n} \implies G(F) = (s,s) - \lim G(F_n)$$

* Notons d'abord que comme limite épi d_F est fermé , donc que d_F est s.c.i ; ce qui par la proposition 3.2.1 assure que F est fermée.
Soit $(x,z) \in G(F)$, alors $(x,z,0) \in \text{épi } d_F \subset s - \underline{\overline{\lim}} \text{ épi } d_{F_n}$; par suite, il existe $(x_n,z_n,\lambda_n) \overset{s}{\to} (x,z,0)$ telle que :

$$d_{F_n}(x_n,z_n) \leq \lambda_n \qquad \forall n.$$

* Pour tout n, soit $z'_n \in F_n(x_n)$ tel que :

$$\|z'_n - z_n\| \leq d_{F_n}(x_n,z_n) + \frac{1}{n} \leq \lambda_n + \frac{1}{n} .$$

* Sachant que $z_n \overset{s}{\to} z$ et que $\lambda_n \to 0$, on a aisément $z'_n \overset{s}{\to} z$; on dispose alors de $(x_n,z'_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ avec $(x_n,z'_n) \in G(F_n)$; par conséquent $(x,z) \in s - \underline{\lim}\, G(F_n)$.

* Considérons à présent $(x,z) \in s - \overline{\lim}\, G(F_n)$; alors il existe $(x_n,z_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ et $k \in K(\mathbb{N})$ tels que $(x_n,z_n) \in G(F_{k(n)})$ $\forall n$.

* Par suite $(x_n,z_n,0) \in$ épi $d_{F_{k(n)}}$ et $(x_n,z_n,0) \overset{s}{\to} (x,z,0)$; ce qui joint au fait que $d_F =$ épi - lim d_{F_n}, assure que $(x,z,0) \in$ épi d_F; c'est-à-dire $d_F(x,z) = 0$, et donc $(x,z) \in G(F)$ puisque F est fermée.

(2i) Supposons à présent dim $Y < +\infty$ et $G(F) = (s,s) - \lim G(F_n)$. G(F) est donc fermé ; par suite F(x) est fermé pour tout x ;

* Soit alors $(x,y,\lambda) \in$ épi d_F et soit $z \in F(x)$ tel que :

$$d_F(x,y) = \|y-z\| \leq \lambda \qquad \text{(un tel z existe).}$$

* $(x,z) \in G(F) \subset s - \underline{\lim}\, G(F_n)$; il existe alors $(x_n,z_n) \overset{s}{\to} (x,z)$ avec $z_n \in F_n(x_n)$ pour tout n.

* Soit $y_n = y-z+z_n$; alors $\|y_n-z_n\| = \|y-z\|$ et $\|y_n-y\| = \|z_n-z\| \to 0$ par suite :

$$d_{F_n}(x_n,y_n) \leq d_{F_n}(x_n,z_n) + \|y_n-z_n\| = \|y_n-z_n\| = \|y-z\| \leq \lambda$$

d'où $(x_n,y_n,\lambda) \in$ épi d_{F_n} ; et donc épi $d_F \subset s$-$\underline{\lim}$ épi d_{F_n}.

* Soit enfin $(x,y,\lambda) \in s - \overline{\lim}$ épi d_{F_n} ; il existe donc $k_1 \in K(\mathbb{N})$ et $(x_n,y_n,\lambda_n) \overset{s}{\to} (x,y,\lambda)$ avec $d_{F_{k_1(n)}}(x_n,y_n) \leq \lambda_n$ pour tout n.

* $\forall n$, soit $z_n \in F_{k_1(n)}(x_n)$ tel que $d_{F_{k_1(n)}}(x_n,y_n) = \|y_n - z_n\| \leq \lambda_n$

un tel z_n existe puisque dim $Y < +\infty$ et que F_{k_1} est à valeurs fermées.

* Comme (y_n) et (λ_n) convergent, (z_n) est bornée ; il existe donc $k_2 \in K(\mathbb{N})$ et $z \in Y$ tel que $z_{k_2(n)} \overset{S}{\rightarrow} z$; ainsi en notant :

$\bar{x}_n = x_{k_2(n)}$, $\bar{y}_n = y_{k_2(n)}$, $\bar{z}_n = z_{k_2(n)}$ et $\bar{\lambda}_n = \lambda_{k_2(n)}$, on a :

$$\|y-z\| = \lim \|\bar{y}_n - \bar{z}_n\| \leq \lim \bar{\lambda}_n = \lambda.$$

* Par ailleurs pour tout n, $\bar{z}_n \in F_{k(n)}(\bar{x}_n)$ où $k = k_1 o k_2$;et donc on dispose de $(\bar{x}_n,\bar{z}_n) \overset{S}{\rightarrow} (x,z)$ avec $(\bar{x}_n,\bar{z}_n) \in G(F_{k(n)})$ pour tout n ; ceci rapproché du fait que $G(F) = s - \overline{\lim}\, G(F_n) = \bigcup_{k \in K(\mathbb{N})} s\text{-}\underline{\lim}\, G(F_{k(n)})$ donne $(x,z) \in G(F)$; c'est-à-dire $d_F(x,z) = 0$; par suite :

$$d_F(x,y) \leq d_F(x,z) + \|y-z\| = \|y-z\| \leq \lambda$$

c'est-à-dire $(x,y,\lambda) \in$ épi d_F. Ceci achève la preuve.

---o---

5 - CONVERGENCE DE SOUS DIFFERENTIELS DE MULTIFONCTIONS CONVEXES

Rappelons que suivant Aubin [1] et Penot [15], on peut définir les sous différentiels inférieur et supérieur au sens de Dini d'une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ en $c = (a,b) \in G(F)$ comme suit :

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} \underline{D}F(c)(v) = \liminf\limits_{(t,u)\to(o+,v)} t^{-1}\,[F(a+tu)-b] \\[2ex] \bar{D}F(c)(v) = \limsup\limits_{(t,u)\to(o+,v)} t^{-1}\,[F(a+tu)-b] \end{array}\right.$$

où les limites en questions sont entendues au sens des limites d'ensembles suivant le filtre produit des voisinages de v et des voisinages (à droite) de o ; et que ces multifonctions se caractérisent par :

$$(2)\quad \left[\begin{array}{l} * \ \omega \in \bar{D}F(c)(v) \iff \liminf\limits_{(t,u)\to(o+,v)} d[\omega, t^{-1}[F(a+tu)-b]] = o \\ * \ \omega \in \underline{D}F(c)(v) \iff \lim\limits_{(t,u)\to(o+,v)} d[\omega, t^{-1}[F(a+tu)-b]] = o \\ \text{où } d \text{ est la distance associée à la norme de } Y. \end{array}\right.$$

Mais en considérant la fonction associée d_F et en tenant compte du fait que $(a,b) \in G(F) \iff d_F(a,b) = 0$, on a aisément :

$$(3)\quad \left[\begin{array}{l} \omega \in \bar{D}F(c)(v) \iff \liminf\limits_{(t,u)\ (o+,v)} t^{-1}[d_F(a+tu,b+t\omega)-d_F(a,b)]=o \\ \omega \in \underline{D}F(c)(v) \iff \lim\limits_{(t,u)\ (o+,v)} t^{-1}[d_F(a+tu,b+t\omega)-d_F(a,b)]=o \end{array}\right.$$

ce qui caractérise $\bar{D}F$ et $\underline{D}F$ par des dérivées directionnelles de d_F. Nous pouvons ainsi, combinant les limites sup et inf par rapport aux deux arguments de d_F, définir autant de types de sous différentiels, qui correspondront à autant de types de cône tangent à $G(F)$ en (a,b).

En outre, grâce à la proposition 3.1.1, nous disposons d'une bonne ouverture pour une construction pour chaque type de sous différentiel d'un calcul sous différentiel sur les multifonctions ; ceci n'étant pas notre objet ici, nous renvoyons le lecteur pour une première approche à Aubin [1] et Penot [15].

---o---

Mais dans le cas convexe, nous avons la caractérisation suivante :

<u>Proposition 5.1</u> :

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ convexe, fermée ; alors pour tout $a \in \text{int Dom } F$ et pour tout $b \in F(a)$, on a : $\bar{D}F(a,b) = \underline{D}F(a,b)$ noté $DF(a,b)$ et

$$\omega \in DF(a,b)(v) \iff \dot{d}_F(a,b\ ;\ v,\omega) = o \text{ où}$$

$$\dot{d}_F(a,b\ ;\ v,\omega) = \inf_{t>o} t^{-1}[d_F(a+tv,\ b+t\omega)].$$

---o---

Preuve :

Grâce aux propositions 3.3.1 et 3.3.2, on sait que d_F est convexe, continue sur int Dom F×Y ; par conséquent (résultat classique), nous avons :

$$\liminf_{(t,u)\to(0+,v)} t^{-1}[d_F(a+tu,b+t\omega)-d_F(a,b)] = \lim_{(t,u)\to(0+,v)} t^{-1}[d_F(a+tu,b+t\omega)-d_F(a,b)]$$

$$= \inf_{t>0} t^{-1}[d_F(a+tu,b+t\omega)], \text{ puisque } d_F(a,b) = 0.$$

---o---

Remarque 5.1 :

En notant DF(a,b) et son graphe de la même manière, nous avons :

$$DF(a,b) = \{(v,\omega) \;/\; \dot{d}_F(a,b\;;\;v,\omega) \leq 0\}$$

car d_F est à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$.

---o---

Définition 5.1 :

Soit $F : X \rightrightarrows Y$, convexe, fermée ; nous appellerons ε-sous différentiel de F en $c = (a,b) \in G(F)$, la multifonction $D_\varepsilon F(c)$, dont le graphe encore noté $D_\varepsilon F(c)$ est donné par :

$$D_\varepsilon F(c) = \{(v,\omega) \;/\; \dot{d}_F(a,b\;;\;v,\omega) \leq \varepsilon \,\|(v,\omega)\|\,\}$$

où $\|(\cdot,\cdot)\|$ désigne une norme de X×Y.

---o---

Remarques 5.2 :

1. $\forall\, \varepsilon>0,\ DF(c) \subset D_\varepsilon F(c) \neq \emptyset$

2. $\{D_\varepsilon F(c)\;;\;\varepsilon>0\}$ décroit (par inclusion) avec ε et l'on a :

$$DF(c) = \bigcap_{\varepsilon>0} D_\varepsilon F(c).$$

Ces relations sont, comme on le voit, clairement des extensions directes de celles bien connues pour les fonctions convexes.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.1 : [cf. [16] p.I.1.14]

Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et de Baire et si (C_n) est une suite croissante de convexes, fermés de E avec $\text{int}(\bigcup_n C_n) \neq \emptyset$; alors à partir d'un certain rang les C_n sont d'intérieur non vide et

$$\text{int}\,(\bigcup_n C_n) = \bigcup_n \text{int}\, C_n.$$

---o---

Le théorème suivant prépare le résultat principal.

Théorème 5.1 :

On suppose X et Y de dimension finie et F = épi-lim F_n, avec F_n, convexe, fermée pour tout n ; alors :

(i) si int Dom F $\neq \emptyset$, pour n assez grand int Dom $F_n \neq \emptyset$

(2i) $\forall\, (x,y) \in$ int Dom F×Y, $\forall\, (x_n,y_n) \to (x,y)$ et $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists \bar{n}$ tel que :

$$\forall\, n \geq \bar{n},\ \partial d_{F_n}(x_n,y_n) \subset \partial d_F(x,y) + \varepsilon(B_X \times B_Y)$$

où ∂ désigne l'opérateur sous différentiel des fonctions convexes.

---o---

Preuve :

(i) * Par la proposition 4.4.4, nous savons que d_F = épi-lim d_{F_n} ; et comme pour tout n, d_{F_n} est convexe (propo. 3.3.1), d_F l'est aussi.

* Il est par ailleurs clair que d_F est propre ; ce qui rapproché du fait que G(F) = (s,s) - lim $G(F_n)$ (propo. 4.4.3) assure que pour n assez grand d_{F_n} est propre.

* F_n étant fermée, nous savons (propo. 3.2.2) que pour tout $y \in Y$, $d_{F_n}(\cdot,y)$ est s.c.i ; or il est aisé de voir qu'en fait d_{F_n} est s.c.i ; par suite d_F est s.c.i.

Ceci joint au fait que int Dom d_F = int Dom F×Y ≠ ∅, permet d'user de la proposition 1.6 chap.III de [16], qui assure que :

(1) $\forall (x,y) \in \text{int Dom } F\times Y,\ d_{F_n}(x,y) \to d_F(x,y).$

Or il est clair que le point (i) de la proposition a lieu si et seulement si pour n assez grand int Dom $d_{F_n} \neq \emptyset$.

* X×Y étant de dimension finie, nous savons que pour toute fonction g, convexe, propre sur X×Y, nous avons :

(2) $\text{int épi } g = \{(x,y,\lambda) \ / \ (x,y) \in \text{int Dom } g \text{ et } g(x,y) < \lambda\}$

* Considérons $g_p = \sup\limits_{n\geq p} d_{F_n}$; alors pour p assez grand, g_p est convexe, s.c.i ; et comme la suite (g_p) décroit, la suite (épi g_p) est croissante par inclusion.

* Par ailleurs sachant que int Dom $d_F \neq \emptyset$, (2) assure que : int épi $d_F \neq \emptyset$; soit donc $(x,y,\lambda) \in$ int épi d_F ; alors :

$$(x,y) \in \text{int Dom } d_F \qquad \text{et} \qquad d_F(x,y) < \lambda$$

et soit $\varepsilon > o$ tel que $d_F(x,y) + \varepsilon < \lambda$; grâce à (1) on sait qu'il existe $n_o = n(x,y,\varepsilon)$ tel que :

$$(3) \quad \left[\begin{array}{l} \forall n \geq n_o,\ d_{F_n}(x,y) \leq d_F(x,y) + \varepsilon < \lambda \quad \text{et donc} \\ \qquad g_p(x,y) < \lambda \qquad \forall p \geq n_o \end{array}\right.$$

* Il est alors clair que :

$$(4) \quad \left[\begin{array}{l} \text{int épi } d_F \subset \bigcup\limits_p \text{épi } g_p \text{ et donc} \\ \text{int épi } d_F \subset \text{int } [\bigcup\limits_p \text{épi } g_p] \end{array}\right.$$

* Nous disposons alors d'une suite (épi g_p) croissante de convexes, fermés, dont la réunion est d'intérieur non vide ; on sait par conséquent (lemme 5.1) que pour tout p assez grand int épi $g_p \neq \emptyset$ et que :

(5) $\quad \text{int}\,[\bigcup_p \text{épi}\ g_p] = \bigcup_p \text{int épi}\ g_p.$

* Et comme épi $g_p = \bigcap_{n\geq p}$ épi d_{F_n}, il apparaît clairement que pour n assez grand, int épi $d_{F_n} \neq \emptyset$; ce qui grâce à (2) permet de conclure que int Dom d_{F_n} = int Dom $F_n \times Y \neq \emptyset$.

(2i) La proposition 4.10, chap.I de [16] assure en outre la convergence uniforme de (d_{F_n}) vers d_F sur tout compact de int Dom d_F.

Le résultat (2i) annoncé découle alors d'un résultat classique de convergence de sous différentiels de fonctions convexes [[18] th.24.5 p.233].

---o---

Remarque 5.3 :

En rapprochant (2), (4) et (5) ci-dessus, il ressort clairement que :

$\forall\ x \in$ int Dom F, $\exists\ \bar{n} = n(x)$ tel que $\forall\ n \geq \bar{n}$, $x \in$ int Dom F_n.

---o---

Le résultat suivant donne une convergence des sous différentiels (cônes tangents aux graphes).

Théorème 5.2 :

On suppose satisfaites les conditions du théorème 5.1 ; alors :

$\forall\ x \in$ int Dom F, $\forall\ y \in F(x)$, $\forall\ (x_n,y_n) \to (x,y)$, $(x_n,y_n) \in G(F_n)\ \forall n$ et $\forall\ \varepsilon > o$, $\exists\ \bar{n} = n(x,y,\varepsilon)$ tel que :

$$\forall\ n \geq \bar{n},\ DF(x,y) \subset D_\varepsilon F_n(x_n,y_n).$$

---o---

Preuve :

Le théorème 5.1 assure qu'il existe $\bar{n} = n(x,y,\varepsilon)$ tel que :

$$\forall\ n \geq \bar{n}, \qquad \partial d_{F_n}(x_n,y_n) \subset \partial d_F(x,y) + \varepsilon(B_X \times B_Y).$$

En passant ensuite à la fonction d'appui supérieure et en sachant que celle-ci prise sur le sous différentiel, donne précisément la dérivée directionnelle, on obtient aisément :

$$\dot{d}_{F_n}(x_n,y_n;v,\omega) \leq \dot{d}_F(x,y;v,\omega) + \varepsilon \,\|(v,\omega)\| \quad \forall\ (v,\omega) \quad X\times Y$$

ce qui donne immédiatement :

$$DF(x,y) \subset D_\varepsilon F_n(x_n,y_n)$$

où l'on a convenu de noter de la même manière la multifonction $DF(x,y)$ [resp. $D_\varepsilon F_n(x_n,y_n)$] et son graphe.

---o---

Remarques 5.4 :

1. On notera encore l'analyse directe avec le cas des fonctions convexes.

2. Si (F_n) converge vers F au sens de la convergence fermée ($F = \mathcal{F} - \lim F_n$), simple ($F = H_s - \lim F_n$) ou uniforme ($F = H_u - \lim F_n$) sur $V = \text{Dom } F$, les conclusions des théorèmes 5.1 et 5.2 persistent et les preuves se simplifient considérablement puisque dans chacun de ces cas, pour n assez grand, nous avons $\text{Dom } F \subset \text{Dom } F_n$.

---o---

6 - APPLICATIONS A L'OPTIMISATION

6.1 - Analyse marginale

Soit le cadre général d'analyse marginale :

$$(m)\quad \left[\begin{array}{l} h(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F(x)} \phi(x,y) & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{où } \phi : X\times Y \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad F : X \rightrightarrows Y \\ \text{et soit } M_h : X \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows Y, \text{ le minimiseur :} \\ M_h(x,\varepsilon) = \{y \in F(x) \ / \ \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon\} \end{array}\right.$$

avec la condition de régularité suivante :

$$(R)\quad \left[\begin{array}{l} \text{Il existe } V \in \mathcal{O}(o),\ C \supset F(V) \text{ et } \ell_V > o \text{ tels que :} \\ \\ |\phi(x,y_1) - \phi(x,y_2)| \leq \ell_V \|y_1-y_2\|;\ \forall\, x\in V,\ \forall y_1,y_2 \in C \end{array}\right.$$

---o---

Nous discuterons cette condition après avoir prouvé la

Proposition 6.1.1 :

(i) Sous la condition (R), pour tout $x \in V$ et tout $\ell > \ell_V$, on a :

$$(E)\quad \left[\quad h(x) = \inf_{y\in C} [\phi(x,y) + \ell d_F(x,y)]\right.$$

(2i) Et pour tout $x \in V$, tout y réalisant l'infimum en (E) est dans $M_h(x,o)$.

---o---

Preuve :

(i) Dans le cas contraire, sachant que $C \supset F(V)$, il existerait $x \in V$ et $\ell > \ell_V$ tels que :

$$h(x) > \inf_{y\in C} [\phi(x,y) + \ell d_F(x,y)]$$

Par suite pour tout $\varepsilon > o$, assez petit, il existerait $y_\varepsilon \in C$ tel que :

$$\phi(x,y_\varepsilon) + \ell d_F(x,y_\varepsilon) < h(x) - \ell\varepsilon$$

alors pour $z_\varepsilon \in F(x)$ tel que

$$\|y_\varepsilon - z_\varepsilon\| \leq d_F(x,y_\varepsilon) + \varepsilon$$

nous aurions grâce à (R) :

$$h(x) \leq \phi(x,z_\varepsilon) \leq \phi(x,y_\varepsilon) + \ell\|y_\varepsilon - z_\varepsilon\| \leq \phi(x,y_\varepsilon) + \ell d_F(x,y_\varepsilon) + \ell\varepsilon < h(x)$$

contradiction qui prouve (i).

(2i) Soient $\ell > \ell_V$ et $y \in C$ réalisant l'infimum en (E) ; si $y \notin F(x)$, alors $d_F(x,y) > o$; et pour $\varepsilon > o$ assez petit et $z_\varepsilon \in F(x)$ tels que $\|y-z_\varepsilon\| \leq d_F(x,y) + \varepsilon$, nous aurions grâce à (i) et (R) :

$$h(x) = \phi(x,y) + \ell d_F(x,y) \leq \phi(x,z_\varepsilon) \leq \phi(x,y) + \ell_V\|y-z_\varepsilon\| \leq \ldots$$

$$\leq \phi(x,y) + \ell_V\, d_F(x,y) + \varepsilon\ell_V \;; \quad \text{et donc :}$$

$$(\ell - \ell_V)\, d_F(x,y) \leq \varepsilon\ell_V.$$

* ε étant arbitraire et $d_F(x,y) > o$, nous aurions $\ell \leq \ell_V$; cette contradiction achève la preuve.

---o---

Remarques 6.1.1. :

1. En rappelant que les différents (types de) cônes tangents à G(F), se caractérisent par différents (types de) sous différentiels de d_F (cf. [1] ; [15] et le paragraphe 5 ci-dessus), il apparaît clairement que la proposition ci-dessus donne une bonne ouverture pour une approche très simplifiée de l'estimation (ou du calcul) du sous sous différentiel (correspondant) de la fonction marginale h.

2. La relation (E) sera directement utilisable dans le calcul de ∂h, si le sous ensemble C est compact ; ce sera le cas dès que seront satisfaites les conditions suivantes :

   (R_1) F est localement relativement compacte en o, au sens où il existe $U \in \Theta(o)$ tel que $C = \overline{F(U)}$ est compact.

   (R_2) Pour le compact C, il existe $V \in \Theta(o)$ avec $C \supset F(X)$ et $\ell_V > o$, tels que (R) a lieu.

3. Notons que (R_1) est simplement la formulation dans le cadre le plus général d'une hypothèse de régularité courante [cf. par exemple Rockafellar [20] p.213], et qu'elle est automatiquement satisfaite si dim $X < +\infty$, U est sa boule unité fermée et F est s.c.s à valeurs compactes.

4. Enfin (R_2) est satisfaite si (R_1) l'est et si ϕ est continument différentiable ; ce qui est déjà un cadre général d'analyse marginale. Nous montrons dans ce qui suit que si $\dim Y < +\infty$, (R_1) et la lipschitzité locale de ϕ suffisent.

<u>Proposition 6.1.2</u> :

Si $\dim Y < +\infty$, si F est localement relativement compacte et si ϕ est localement lipschitz, alors l'hypothèse (R) de régularité est satisfaite avec C compact.

---o---

<u>Preuve</u> :

* Soit $U \in \Theta(o)$ tel que $\overline{F(U)}$ soit compact et soit $C = \overline{co}\,(F(U))$; alors C est compact, puisque $\dim Y < +\infty$;

* ϕ étant localement lipschitz, nous avons en particulier : $\forall\, z \in C$, $\exists\, V_z \in \Theta(o)$, $W_z \in \Theta(z)$ et $\ell_z > o$ tels que :

$$|\phi(x,z_1) - \phi(x,z_2)| \leq \ell_z \|z_1 - z_2\| \; ; \; \forall\, x \in V_z,\ \forall\, z_1,z_2 \in W_z.$$

* C étant ainsi recouvert, soit $W_{z_1},\ldots,W_{z_n}$, un sous recouvrement fini ; alors $V = U \cap [\bigcap_{i=1}^{n} V_{z_i}]$, C et $\ell_V = \max_{1\leq i\leq} \ell_{z_i}$, assurent (R).

En effet, soient $x \in V$, et $y_1,y_2 \in C$, alors :

$[y_1,y_2] \subset C \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i}$; et il est clair qu'il existe une suite finie $\{t_1,\ldots,t_m\}$ de l'intervalle $[y_1,y_2]$ telle que :

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = y_1 \; ; \; t_m = y_2 \; ; \; \|y_1 - y_2\| = \sum_{j=1}^{m-1} \|t_j - t_{j+1}\| \text{ et} \\ \forall\, j \in \{1,m\},\ \exists\, i \in \{1,n\} \,/\, t_j \text{ et } t_{j+1} \in V_{z_i} \end{array}\right.$$

Par conséquent, on a aisément :

$$|\phi(x,y_1) - \phi(x,y_2)| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |\phi(x,t_j) - \phi(x,t_{j+1})| \leq \dots$$

$$\dots \leq \ell_V \sum_{j=1}^{m-1} \|t_j - t_{j+1}\| = \ell_V \|y_1 - y_2\|$$

ce qui achève la preuve.

---o---

6.2 - Approximations des programmes perturbés d'optimisation

Pour une famille de programmes perturbés du type :

$$h(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F_n(x)} \phi_n(x,y) & \text{si } x \in \text{Dom } F_n \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases} \qquad n \in N$$

$$h(x) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F(x)} \phi(x,y) & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } \phi,\ \phi_n : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad F,\ F_n : X \overset{\to}{\to} Y$$

deux grands aspects sont à considérer.

1er aspect :

Quels types de convergence de (ϕ_n) et (F_n) vers ϕ et F assurent :

(1) une convergence de (h_n) vers h

(2) une convergence de (∂h_n) vers ∂h

(3) une convergence de (M_{h_n}) vers M_h où

M_h ; M_{h_n} sont les minimiseurs correspondants ?

---o---

2ème aspect : [plus difficile]

Les convergences précédentes étant identifiées, quelles sont les approximations (ϕ_n) et (F_n) de ϕ et F qui induisent ces convergences ?

Dans ce qui suit, nous proposons une étude du 1er aspect ; et pour cela nous aurons besoin des notions suivantes :

Définition 6.2.1 : [De Giorgi]

On dit que (ϕ_n) converge continument vers ϕ et on note $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$, si pour tout $(x,y) \in \mathrm{Dom}\, \phi$ et pour toute suite $(x_n,y_n) \overset{S}{\to} (x,y)$ on a :

$$\lim_n \phi_n(x_n,y_n) = \phi(x,y)$$

---o---

Remarques 6.2.1 :

1. Si $\phi_n = \phi$ $\forall n$, alors $\phi_n \overset{C}{\to} \phi \Longleftrightarrow \phi$ continue.
2. $\phi_n \overset{C}{\to} \phi \Longrightarrow \phi = \text{épi} - \lim \phi_n$.
3. $\phi_n \overset{C}{\to} \phi \Longrightarrow \phi$ est limite simple de (ϕ_n)
4. Si (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ sur tout compact de $\mathrm{Dom}\, \phi$, alors $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$.

---o---

Définition 6.2.2 :

(i) (F_n) sera dite globalement compacte en $a \in X$, si pour tout $k \in K(\mathbb{N})$, toute suite (x_n,y_n) telle que $(x_n,y_n) \in G(F_{k(n)})$ pour tout n, admet une valeur d'adhérence dès que $(x_n) \overset{S}{\to} a$.

(2i) (F_n) sera dite globalement compacte, si elle l'est en tout point.

---o---

Remarque 6.2.2 :

1. Si $F_n = F$, $\forall n$, alors (F_n) globalement compacte $\Longleftrightarrow$ F compacte.

2. Si $F = H_u - \lim\limits_{V} F_n$ pour tout V compact de Dom F et si F est à valeurs compactes, alors (F_n) est globalement compacte en tout $a \in$ Dom F.

3. Si $\dim X < +\infty$, $\dim Y < +\infty$ et si $F = \text{épi} - \lim F_n$, avec $G(F)$ borné, alors (F_n) est globalement compacte en tout point de Dom F ; en effet $G(F)$ étant fermé, est en fait compact ; ce qui rapproché du fait que $G(F) = (s,s) - \lim G(F_n)$ (propo. 4.4.3), permet de faire appel à la proposition 4.1.1., qui assure l'existence de $\alpha > o$ et $\bar{n}$ tels que $\forall\, n \geq \bar{n}, \quad G(F_n) \subset G(F) + \alpha(B_X \times B_Y)$;
la conclusion suit alors aisément.

---o---

Proposition 6.2.1 :

Si $G(F) \subset s - \underline{\lim}\, G(F_n)$ et si $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$ alors :

$$\text{épi } h \subset s - \underline{\lim}\ \text{épi } h_n.$$

---o---

Preuve :

* Il est aisé de vérifier que épi $h \subset s - \underline{\lim}$ épi h_n si et seulement si : $\forall\, x \in \text{Dom } h,\ \exists\ (x_n) \overset{S}{\to} x \ /\ \limsup h_n(x_n) \leq h(x)$.
Soit donc $x \in$ Dom h et soient $\varepsilon > o$ et $y \in F(x)$ tels que :

$$\phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon$$

* $(x,y) \in G(F) \subset s - \underline{\lim}\, G(F_n)$; par suite il existe une suite $(x_n,y_n) \overset{S}{\to} (x,y)$ avec $(x_n,y_n) \in G(F_n)$ pour tout n ; d'où $h_n(x_n) \leq \phi_n(x_n,y_n)$; et comme $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$, on aboutit à :

$$\limsup h_n(x_n) \leq \lim \phi_n(x_n,y_n) = \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon.$$

* ε étant arbitraire, le résultat annoncé suit.

---o---

Proposition 6.2.2 :

Si $G(F) \supset s - \overline{\lim}\, G(F_n)$ avec (F_n) globalement compacte et si $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$, alors

$$\text{épi } h \supset s - \overline{\lim}\ \text{épi } h_n.$$

---o---

<u>Preuve</u> :

* On vérifie aisément que $\text{épi } h \supset s - \overline{\lim}\ \text{épi } h_n$ si et seulement si $\forall\, k \in K(\mathbb{N})$, $\forall\, x_n \overset{S}{\to} x \in \text{Dom } h$, $h(x) \le \liminf h_{k(n)}(x_n)$.

* Soient donc $x_n \overset{S}{\to} x$ et $k \in K(\mathbb{N})$; quitte à extraire des sous suites, nous pouvons supposer que :

(1) $$\liminf h_{k(n)}(x_n) = \lim h_{k(n)}(x_n)$$

Alors trois cas se présentent :

<u>1er cas</u> : $-\infty < \lim h_{k(n)}(x_n) < +\infty$;

alors $\forall\, \varepsilon > o$, $\forall n$, $\exists\, y_n \in F_{k(n)}(x_n)$ tel que :

(2) $$\phi_{k(n)}(x_n,y_n) \le h_{k(n)}(x_n) + \varepsilon.$$

* D'où $\forall n$, $(x_n,y_n) \in G(F_{k(n)})$ avec $x_n \overset{S}{\to} x$ et (F_n) globalement compacte ; par conséquent il existe $k_1 \in K(\mathbb{N})$ et y tels que $(x_{k_1(n)},y_{k_1(n)}) \overset{S}{\to} (x,y)$.

* Sachant que $G(F) \supset s - \overline{\lim}\ G(F_n)$, on a $(x,y) \in G(F)$ et donc

(3) $$h(x) \le \phi(x,y).$$

* Soit $k_2 = k \circ k_1$ et soit (v_n,ω_n) telle que :

$$v_n = x_{k_2(n)} \quad \text{et} \quad \omega_n = y_{k_2(n)} \quad \forall\, n ;$$

alors $(v_n,\omega_n) \overset{S}{\to} (x,y)$ et comme manifestement $\{h_{k_2(n)}(v_n)\}$ est une sous suite de $\{h_{k_{(n)}}(x_n)\}$ on a :

(4) $$\phi_{k_2(n)}(v_n,\omega_n) \le h_{k_2(n)}(v_n) + \varepsilon \quad \forall\, n.$$

* Enfin, puisque $\phi_n \overset{C}{\to} \phi \Longrightarrow \phi = \text{épi} - \lim \phi_n$ on a aussi :

(5) $$\phi(x,y) \le \liminf \phi_{k_2(n)}(v_n,\omega_n) \le \liminf h_{k_2(n)}(v_n) + \varepsilon$$

ce qui rapproché de (3) et (1) mène à :

$$h(x) \leq \phi(x,y) \leq \liminf h_{k(n)}(x_n) + \varepsilon.$$

* ε étant arbitraire, le résultat annoncé suit.

<u>2ème cas</u> : $\liminf h_{k(n)}(x_n) = +\infty$

et comme $x \in \text{Dom } h$, on a $h(x) < +\infty$, et il n'y a rien à prouver quant au résultat annoncé.

<u>3ème cas</u> : $\liminf h_{k(n)}(x_n) = -\infty$

montrons que ce cas est exclu :

pour tout n soit $y_n \in F_{k(n)}(x_n)$ tel que :

(6) $$\phi_{k(n)}(x_n,y_n) \leq h_{k(n)}(x_n) + \frac{1}{n}$$

il est clair qu'un tel y_n existe ; par suite :

Nous disposons de $(x_n,y_n) \in G(F_{k(n)})$ pour tout n, avec $x_n \overset{s}{\to} x$; (F_n) étant globalement compacte, on peut toujours (quitte à considérer comme pour le 1er cas une sous suite k_2) supposer que $(y_n) \overset{s}{\to} y$.

* Or $G(F) \supset s - \overline{\lim}\, G(F_n)$; par conséquent $(x,y) \in G(F)$; d'où

$$h(x) \leq \phi(x,y) \leq \liminf \phi_{k(n)}(x_n,y_n) \leq \liminf h_{k(n)}(x_n) = -\infty$$

et donc $x \notin \text{Dom } h$; cette contradiction termine la preuve.

---o---

<u>Corollaire 6.2.1</u> :

Si $F = \text{épi} - \lim F_n$ avec (F_n) globalement compacte et si $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$ alors

$$h = \text{épi} - \lim h_n.$$

---o---

<u>Preuve</u> :

On fait appel aux propositions 4.4.3 ; 6.2.1. et 6.2.2.

---o---

Corollaire 6.2.2 :

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ fermée compacte} \\ \quad\text{et} \\ \phi \text{ continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} h \text{ s.c.i et} \\ \\ \forall x,\ \exists\, x_n \overset{s}{\to} x \text{ avec } h(x_n) \to h(x) \end{array}\right.$$

---o---

Preuve :

Soient (F_n) et (ϕ_n) définies par $\phi_n = \phi$ et $F_n = F \ \ \forall n$; alors :

* ϕ continue $\Longleftrightarrow$ $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$
* F fermée $\Longleftrightarrow$ $F = \text{épi-lim } F_n$
* F compacte $\Longleftrightarrow$ (F_n) globalement compacte ;

par conséquent (corol. 6.2.1), $h = \text{épi - lim } h_n$; i.e $\text{épi } h = (s,s)\text{-lim épi } h_n$, et comme $h_n = h$, le résultat annoncé suit.

---o---

Proposition 6.2.3 :

Si $F = \text{épi - lim } F_n$ avec (F_n) globalement compacte et si $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$ avec F_n et ϕ_n convexes, alors F, ϕ et h sont convexes fermées.

---o---

Preuve :

User du fait que $G(F) = (s,s) - \lim G(F_n)$, $\text{épi } \phi = (s,s) - \lim \text{épi } \phi_n$, $\text{épi } h = (s,s) - \lim \text{épi } h_n$ et que h_n est convexe pour tout n.

---o---

Proposition 6.2.4 : [convergence de sous-différentiels]

On suppose satisfaites les conditions suivantes :

(1) $F = \text{épi - lim } F_n$ et $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$ avec (F_n) globalement compacte

(2) F_n est convexe, propre, s.c.s à valeurs faiblement compactes

(3) ϕ_n est convexe, propre, s.c.i.

Alors la suite $\{G(\partial h_n)\}$ converge vers $G(\partial h)$ au sens suivant :

(i) $\forall (x,\overset{*}{x})$ tel que $\overset{*}{x} \in \partial h(x)$, il existe $(x_n,\overset{*}{x}_n)$ telle que :

$x_n \overset{s}{\to} x$ et $\overset{*}{x}_n \overset{\omega}{\to} \overset{*}{x}$ et $\overset{*}{x}_n \in \partial h_n(x_n)$ $\forall$ n.

(2i) réciproquement $\forall (x_n,\overset{*}{x}_n)$ telle que $\overset{*}{x}_n \in \partial h_n(x_n)$ $\forall n$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} x_n \overset{s}{\to} x \\ \overset{*}{x}_n \overset{\omega}{\to} \overset{*}{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \overset{*}{x} \in \partial h(x)$$

où ω désigne la convergence faible.

---o---

<u>Preuve</u> :

Sous nos hypothèses h = épi - lim h_n (corol. 6.2.1) et F, ϕ et h sont convexes fermées (propo. 6.2.3).

Le cas Dom $F = \emptyset$ étant sans intérêt, sous supposons F propre ; nous affirmons alors que ϕ et h sont propres ; en effet :

* Sachant que $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$, on a ϕ = épi - lim ϕ_n ; par suite s'il existe (x,y) tel que $\phi(x,y) = -\infty$, alors il existe $(x_n,y_n) \overset{s}{\to} (x,y)$ telle que :

$$\lim\sup \phi_n(x_n,y_n) \leq \phi(x,y)$$

ce qui contredit l'hypothèse que ϕ_n est propre.

* Par ailleurs ϕ ne peut valoir identiquement $+\infty$, car satisfaisant à :

$$\phi(x,y) \leq \lim\inf \phi_n(x_n,y_n) \quad \forall\ (x_n,y_n) \overset{s}{\to} (x,y)$$

nous aurions pour tout (x,y) et les suites constantes $x_n = x$ et $y_n = y$,

$$\phi_n(x,y) = +\infty \qquad \forall n.$$

ce qui encore contredirait le fait que ϕ_n est propre.

* Tout comme pour ϕ, le cas de h se traite en montrant que h_n est propre ; or ϕ_n étant convexe s.c.i est s.c.i pour la topologie forte de X et la topologie faible de Y ; ce qui joint au fait que F_n est à valeurs faiblement compactes, montre clairement que h_n est propre.

* Notons avant de conclure que h_n est s.c.i $\forall n$; en effet, sachant que les ouverts faibles de Y sont aussi des ouverts forts, on voit aisément que F_n est s.c.s pour la topologie faible de Y. On sait alors (résultat classique d'analyse marginale) que h_n est faiblement s.c.i, donc fortement s.c.i, puisque h_n est convexe.

* Ainsi h est convexe, propre, s.c.i et est l'épi-limite de la suite (h_n) de fonctions convexes, propres et s.c.i.

Le théorème de Matzeu [[12]] est donc applicable et donne précisément les résultats (i) et (2i) annoncés.

---o---

Proposition 6.2.5

Sous les conditions de la proposition 6.2.4, si $\dim X < +\infty$ et si $\text{int Dom } F \neq \emptyset$; alors :

(i) $\text{int Dom } h \neq \emptyset$ et $\exists\, \bar{n} \,/\, \forall\, n \geq \bar{n}$ $\quad \text{int Dom } h_n \neq \emptyset$

(2i) (h_n) converge uniformément vers h sur tout compact de int Dom h

(3i) $\forall\, x \in \text{int Dom } h,\ \forall\, x_n \overset{S}{\to} x,\ \exists\, \bar{n}$ tel que :

$$\forall\, n \geq \bar{n},\ \partial h_n(x_n) \subset \partial h(x) + \varepsilon B_{X^*}.$$

---o---

Preuve :

* Il est clair que Dom h $\subset$ Dom F ; inversement si $x \in$ Dom F, alors $h(x) > -\infty$; sinon sachant que h = épi-lim h_n(corol.6.2.1) il existerait $x_n \overset{S}{\to} x$ telle que $\limsup h_n(x_n) \leq h(x)$; ce qui contredirait le fait que h_n est propre (cf. preuve propo. 6.2.4).

* Par conséquent Dom h = Dom F et donc int Dom h $\neq \emptyset$. X étant de dimension finie, nous savons (propo. 1.6 chap. III de [16]) que :

(1) $\forall\, x \in \text{int Dom } h,\ h_n(x) \to h(x).$

* Nous affirmons alors que int Dom $h_n \neq \emptyset$ pour n assez grand. En effet, il est clair que :

(2) $\text{int épi } h = \{(x,\lambda) \,/\, x \in \text{int Dom } h \text{ et } h(x) < \lambda\} \neq \emptyset.$

* Soit $g_p = \sup\limits_{n \geq p} h_n$; alors (g_p) est une suite décroissante de fonctions convexes s.c.i et (épi g_p) croît par inclusion.

* Soit $(x,\lambda) \in$ int épi h, alors $x \in$ int Dom h et $h(x) < \lambda$; et soit $\varepsilon > o$ tel que $h(x) + \varepsilon < \lambda$.

Grâce à (1), $\exists\, \bar{n} = n(x,\varepsilon)$ tel que :

$$\forall\, n \geq \bar{n}, \quad h_n(x) \leq h(x) + \varepsilon < \lambda \qquad \text{et donc}$$

(3) $g_p(x) < \lambda \quad \forall\, p \geq \bar{n}$

* Par conséquent int épi h $\subset \bigcup\limits_p$ épi g_p et donc

$$\text{int épi } h \subset \text{int } [\bigcup_p \text{épi } g_p] \neq \emptyset.$$

Le lemme 5.1 est applicable à la suite (épi g_p) ; et donc à partir d'un certain rang int épi $g_p \neq \emptyset$ avec :

$$\text{int } [\bigcup_p \text{épi } g_p] = \bigcup_p \text{int épi } g_p.$$

* En conclusion, il existe $\overset{*}{n}$ tel que $\forall\, p \geq \overset{*}{n}$

$$\text{int épi } g_p = \text{int } [\bigcap_{n \geq p} \text{épi } h_n] \neq \emptyset$$

le résultat (i) annoncé suit alors aisément grâce à (2).

(2i) Les conditions de la proposition 4.10 chap. I de [16] étant réunies, la convergence de (h_n) vers h est en fait uniforme sur tout compact de int Dom h.

(3i) Grâce à (i) et (2i), le résultat (3i) s'obtient comme conséquence classique de convergence de sous-différentiels de fonctions convexes [[18] th. 24.5 p.233].

---o---

Proposition 6.2.6 : [convergence des solutions]

On suppose satisfaites les conditions de la proposition 6.2.5 ; alors :

(i) $\forall\, x \in$ int Dom h et $\forall\, \varepsilon \geq o$ on a :

$$(L_s\, M_{h_n})(x,\varepsilon) \subset M_h(x,\varepsilon)$$

i.e. $\forall\, (x_n,y_n,\varepsilon_n) \overset{s}{\to} (x,y,\varepsilon)$ et $\forall\, k \in K(\mathbb{N})$ on a :

$$y_n \in M_{h_{k(n)}}(x_n,\varepsilon_n)\ \forall n \implies y \in M_h(x,\varepsilon).$$

(2i) $\forall\, x \in$ int Dom h on a :

$$M_h(x,o) = \bigcap_{\varepsilon>o} s - \underline{\lim}\, M_{h_n}(x,\varepsilon).$$

---o---

Remarques 6.2.3 :

Le résultat (i) est beaucoup plus fin qu'il ne parait ; en effet :

1. Il donne une convergence des solutions approchées, la plus générale qui soit ($k \in K(\mathbb{N})$ est quelconque, et (ε_n) est quelconque).

2. Pour le cas particulier $F_n = F$, $\phi_n = \phi$ et donc $h_n = h$, nous retrouvons les résultats d'approximations des solutions d'un programme perturbé $h(x) = \inf \{\phi(x,y)\ ;\ y \in F(x)\}$; et si en outre $\varepsilon_n = o$ $\forall n$, nous obtenons une convergence des solutions (y_n) réalisant $h(x_n)$ et donc une propriété de fermeture pour M_h.

---o---

<u>Preuve de la proposition 6.2.6</u> :

Pour des commodités d'écriture, nous noterons M et M_n pour M_h et M_{h_n}.

(i) Soient $x \in$ int Dom h, $(x_n,y_n,\varepsilon_n) \overset{S}{\to} (x,y,\varepsilon)$ et $k \in K(\mathbb{N})$ tels

$y_n \in M_{k(n)}(x_n,\varepsilon_n)$ $\forall n$; alors :

(1) $$\phi_{k(n)}(x_n,y_n) \leq h_{k(n)}(x_n) + \varepsilon_n$$

* Ayant $(x_n,y_n) \overset{S}{\to} (x,y)$ avec $(x_n,y_n) \in G(F_{k(n)})$, on a évidemment $(x,y) \in s - \overline{\lim}\, G(F_n) = G(F)$.

* Comme par ailleurs $\phi_n \overset{C}{\to} \phi \implies \phi_{k(n)} \overset{C}{\to} \phi$, (1) donne :

(2) $$\phi(x,y) = \lim \phi_{k(n)}(x_n,y_n) \leq \limsup h_{k(n)}(x_n) + \varepsilon.$$

* Or la proposition 6.2.5 assurant que (h_n) converge uniformément vers h sur tout compact de int Dom h et sachant que $x \in$ int Dom h, on montre aisément que : $h_{k(n)}(x_n) \to h(x)$; ce qui rapproché de (2) donne :

$$(x,y) \in G(F) \text{ et } \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon \text{ ; i.e } y \in M(x,\varepsilon).$$

(2i) Soient $\varepsilon>o$ et $y \in M(x,o)$; alors :

(3) $$(x,y) \in G(F) \quad \text{et} \quad \phi(x,y) \leq h(x)$$

* Mais comme ϕ = épi lim ϕ_n (car $\phi_n \overset{C}{\to} \phi$) et que $(x,y,\phi(x,y)) \in$ épi ϕ, il existe (x_n,y_n,α_n) telle que :

(4) $$\begin{cases} (x_n,y_n,\alpha_n) \overset{S}{\to} (x,y,\phi(x,y)) & \text{et} \\ \phi_n(x_n,y_n) \leq \alpha_n & \forall n \end{cases}$$

* Nous affirmons alors que pour n assez grand on a :

(5) $$\phi_n(x_n,y_n) \leq h_n(x_n) + \varepsilon$$

car dans le cas contraire, il existera t $k \in K(\mathbb{N})$ tel que :

$$h_{k(n)}(x_{k(n)}) + \varepsilon < \phi_{k(n)}(x_{k(n)}, y_{k(n)}) \leq \alpha_{k(n)}$$

par conséquent (x étant intérieur à Dom h) on a :

$$h(x)+\varepsilon = \lim h_{k(n)}(x_{k(n)})+\varepsilon \leq \lim \alpha_{k(n)} = \phi(x,y) \leq h(x)$$

cette contradiction prouve (5) ; ce qui assure que :

$$y \in s - \underline{\lim}\, M_n(x,\varepsilon) \qquad \forall\, \varepsilon > o$$

d'où le résultat annoncé.

---o---

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J.P. AUBIN** : Contingent derivatives of set-valued maps.
Math. Ana. App. part A. Vol. 7.A. pp.159-229

[2] **J.P. AUBIN** : Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems.
Math. Op. Res. Vol.9 n°1 (1984) pp.87-111.

[3] **J.P. AUBIN ; A. CELLINA** : Differential inclusions.
Springer Verlag (1984)

[4] **H. ATTOUCH** : Γ - convergence .
Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz 1982-1983 ; pp.XX1 -XX25.

[5] **H. ATTOUCH ; R.J.B. WETS** : Approximations and convergence in nonlinear optimizations.
Nonlinear - progr. 4. ed. Mangasarian - Mayer - Robinson ; Academic Press (1981).

[6] **C. CASTAING ; M. VALADIER** : Convexe analysis and mesurables multifunctions.
Springer-Verlag Lecture Notes n°580 ; (1977).

[7] **G. CHOQUET** : Outils topologiques et métriques de l'analyse.
Collection Anal. fonct. centre DOC-Univ. Paris.

[8] **B. CORNET** : Topologies sur les fermés d'un espace métrique.
Cahier Math. de la Décision, n°7309, Paris Dauphine.

[9] **P. HUARD** : Optimization algorithms and point to sets maps.
Math. prog. 8 (1975) pp.308-331.

[10] **J.L. JOLY** : Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes.
Thèse d'Etat, Grenoble (1970).

[11] **C. KURATOWSKI** : Topologie. Vol.1, Wroclaw, Varsovie (1948).

[12] **M. MATZEU** : Su un tipo di continuita per l'operator subdifferenziale.
B.U.M.I. 14 (1977) pp.480-490.

[13] **U. MOSCO** : Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.
Adv. in Math. vol.3, (1969) pp.510-585.

[14] **U. MOSCO** : On the continuity of the Young-Fenchal Transform.
J. of Math. Ana. App. vol.35 n°3 (1971) pp.518-539.

[15] **J.P. PENOT** : Differentiability of relations and differential stability ofperturbed optimization problems.
SIAM J. control ; vol.22, n°4, (1984) pp.529-551

[16] **F. ROBERT** : Thèse d'Etat, Grenoble (1976).

[17] **S. ROBINSON** : Regularity and stability of convexmultivalued function.
Math. op. Res. vol.1 (1976) PP.130-143.

[18] **R.T. ROCKAFELLAR** : Convex analysis.
Princeton University Press (1970).

[19] **R.T. ROCKAFELLAR** : Lipschitzian properties of multifunction
Nonlinear analysis (1985), pp.1-26.

[20] **R.T. ROCKAFELLAR** : Math. prog. study n° 21.

[21] **R.T. ROCKAFELLAR ; R.J.B. WETS** : Variational systems, multi-functions and integrands.
Lecture notes n° 1091 (1984) pp.1-54, Springer-Verlag.

[22] **G. SALINETTI ; R.J.B. WETS** : On the convergence of sequences of convex sets.
SIAM Review ; vol.21 n°1 (1979) pp.18-33.

[23] **G. SALINETTI ; R.J.B. WETS** : On the convergence of closed, valued mesurable multifunctions.
Trans. AMS ; v.266 ; n°1 (1981) pp.275-289.

[24] **G. SALINETTI ; R.J.B. WETS ; S. DOLECKI** : Convergence of functions, équi-semi-continuity.
Trans. AMS ; v.276 ; n°1 (1983) pp.409-429.

[25] **C. URSESCU** : Multifunctions with closed convex graph.
Czecop Math. J. n°25 (1975) pp.438-441.

[26] **T. ZOLEZZI** : On stability analysis in mathematical programming.
Math. prog. study n°21 ; pp.227-242.

CHAPITRE II

FONCTION D'APPUI ASSOCIEE A UNE MULTIFONCTION ET APPLICATIONS

1 - INTRODUCTION

A tout $F : X \rightrightarrows Y$ est associée la fonction marginale dite d'appui :

$$\sigma_F : X \times \overset{*}{Y} \to \bar{\mathbb{R}} \quad / \quad \sigma_F(x,p) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in F(x)} \langle y,p \rangle & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

σ_F (ou plus exactement $\sigma_F^{\#}(x,p) = \sigma_{F(x)}^{\#}(p)$) caractérise les multifonctions relativement à la mesurabilité [Castaing-Valadier [7]], la continuité [Castaing-Valadier [7] ; Aubin-Cellina [2]], l'existence de point fixe ($x \in F(x)$) ou critique ($o \in F(x)$) [cf. par ex. [4]].

Nous montrons quant à nous que σ_F caractérise aussi la convexité (propo. 3.3) et la lipschitzité (propo. 3.4) ; nous établissons alors que les multifonctions convexes, fermées à valeurs bornées sont localement lipschitz sur l'intérieur de leur domaine (théo. 4.1) ; résultat qui n'était connu que pour les multifonctions qui sont en outre localement bornées, ou du type processus convexe, surjectif (i.e ayant pour graphe un cône convexe avec $R(F) = Y$) [[4] corol. 2 et 3 p.132].

Nous faisons ensuite l'étude complète du schéma d'optimisation :

$$(P) \quad \begin{cases} \inf \phi(x) \\ o \in F(x) \end{cases}$$

Les résultats dégagés sont alors appliqués à deux grands types de problèmes :

1) En programmation dynamique discrète ; sur les problèmes

$$(P_{d_y})\quad \left[\begin{array}{ll} \inf \phi(x_o,\ldots,x_n) & \\ (x_i,x_{i+1}) \in E_i \;; & i=o,n-1 \\ x_o \in C_o & \end{array}\right.$$

où E_i est un convexe, fermé du produit d'espace de Banach $X_i \times X_{i+1}$, C_o un convexe fermé de X_o et ϕ convexe, propre, s.c.i sur $\prod_{i=o}^{n} X_i$.
Le cas $E_i = \{(a,b) \,/\, b = A_i\, a + B_i\, u_i \;;\; u_i \in U_i\}$ où A_i et B_i sont des opérateurs linéaires continus et U_i un ensemble de contrôles est examiné en détail.

2) En contrôle optimal ; sur les problèmes

$$(P_c)\quad \left[\begin{array}{ll} \inf\limits_{\substack{x \in W_n^{1,\alpha} \\ u \in L_m^{\beta}}} \int_o^T f(t,x(t),u(t))\, dt + g(x(o),x(\tau)) & ;\alpha,\beta \in [1,+\infty[\\ (x(t),u(t),\dot{x}(t)) \in E(t) \quad \text{p.p.} & \\ x(o) \in C_o & \end{array}\right.$$

où C_o est un convexe, fermé de $\mathbb{R}^n$

$E : [0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, fermée, à valeurs convexes

g convexe, propre, s.c.i sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et

f mesurable en t et convexe, propre, s.c.i sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, en ses deux autres arguments.

---o---

Enfin quelques cas particuliers et diverses extensions du modèle (P_c) sont examinés.

---o---

2 - FONCTIONS D'APPUI A UN ENSEMBLE

A tout sous-ensemble C de Y sont associées les fonctions :

$\sigma_C^{\#} : \overset{*}{Y} \to]-\infty, +\infty]$ et $\sigma_C^{b} : \overset{*}{Y} \to [-\infty, +\infty[$ définies par :

$$\sigma_C^{\#}(p) = \sup_{y\in C} \langle y,p\rangle \quad ; \quad \sigma^{b}(p) = \inf_{y\in C} \langle y,p\rangle$$

et dites fonctions d'appui à C respectivement supérieure et inférieure. Sachant que $\sigma_C^{\#}(p) = -\sigma_C^{b}(-p)$, nous ferons usage dans ce qui suit essentiellement de σ_C^{b} , que nous noterons simplement σ_C ; les raisons de ce choix apparaitront par la suite.

Les propriétés suivantes seront utiles.

Proposition 2.1 :

(i) σ_C est concave, positivement homogène, s.c.s et $\sigma_C = \sigma_{\overline{co}C}$

(2i) $\sigma_{\lambda C_1+\mu C_2} = \lambda\, \sigma_{C_1} + \mu\, \sigma_{C_2}$; $\forall\ \lambda,\mu\geq 0$ (on convient que $0\times\infty=0$)

(3i) $C_1 \subset C_2 \Longrightarrow \sigma_{C_1} \geq \sigma_{C_2} \Longleftrightarrow \overline{co}C_1 \subset \overline{co}C_2$

(4i) si C_1 et C_2 sont convexes, fermés avec $C_1 \cap [\mathrm{int}\ C_2] \neq \emptyset$,

alors : $$\sigma_{C_1\cap C_2}(p) = \sup_{q\in \overset{*}{Y}} [\sigma_{C_1}(q) + \sigma_{C_2}(p-q)] \qquad (*)$$

et la sup-convolution $(*)$ est exacte ; i.e

$$\exists\ p_1, p_2 \in \overset{*}{Y} \ /\ p = p_1+p_2 \quad \text{et} \quad \sigma_{C_1\cap C_2}(p) = \sigma_{C_1}(p_1) + \sigma_{C_2}(p_2).$$

---o---

Preuve :

(i) et (2i) sont simples ; (3i) s'obtient par le théorème de Hahn-Banach ; prouvons (4i).

* Soit $C = C_1 \cap C_2$, alors $\psi_C = \psi_{C_1} + \psi_{C_2}$; et comme

$\sigma_C(p) = -\sigma_C^*(-p) = -\psi_C^*(-p)$, on obtient :

(1) $$\sigma_C(p) = -\,[\psi_{C_1} + \psi_{C_2}]^*\,(-p)$$

Or sous nos hypothèses, ψ_{C_1} et ψ_{C_2} sont convexes, propres, s.c.i, avec ψ_{C_2} continue sur int C_2 et ψ_{C_1} finie sur int C_2 ; nous savons alors que :

(2) $$[\psi_{C_1} + \psi_{C_2}]^*\,(q) = \psi_{C_1}^* \nabla \psi_{C_2}^*(q)$$

et cette inf-convolution est exacte.
Ceci rapproché de (1) donne alors :

(3) $$\sigma_C(p) = -\inf_{p_1+p_2=-p}\,[-\sigma_{C_1}(-p_1) - \sigma_{C_2}(-p_2)]$$

c'est-à-dire la sup-convolution (*) ; enfin l'exactitude (2) achève la preuve.

---o---

3 - MULTIFONCTIONS ET FONCTION D'APPUI

A toute multifonction $F : X \overset{\to}{\to} Y$ est associée la fonction dite d'appui

$$\sigma_F : X \times \overset{*}{Y} \to \bar{\mathbb{R}} \quad / \quad \sigma_F(x,p) = \begin{cases} \sigma_{F(x)}(p) & \text{si } x \in \text{Dom } F \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

---o---

Il est clair que $\sigma_F = \sigma_{\overline{co}F}$ où $\overline{co}F(x) = \overline{co}\,(F(x))$; et à l'exception du produit $F_1 o F_2$ de deux multifonctions, toutes les opérations sur les multifonctions correspondent à des fonctions d'appui aisément calculables ; en effet :

Proposition 3.1 :

(i) $\sigma_{\lambda F_1+\mu F_2} = \lambda\, \sigma_{F_1} + \mu\, \sigma_{F_2} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ et

$\sigma_{F_1-F_2}(x,p) = \sigma_{F_1}(x,p) + \sigma_{F_2}(x,-p)$

(2i) si $F_1 = F_2 o h$ où $F_2 : X \overset{\rightarrow}{\rightarrow} Y$ et $h : Z \rightarrow X$ et Z un Banach, alors

$$\sigma_{F_1}(z,p) = \sigma_{F_2}(h(z),p)$$

(3i) si $F_1 = g o F_2$ où $F_2 : Z \overset{\rightarrow}{\rightarrow} X$ et $g : X \rightarrow Y$ linéaire, alors :

$\sigma_{F_1}(z,p) = \sigma_{F_2}(z,g^*(p))$ où g^* est l'adjoint de g

(4i) si $F = F_1 \cap F_2$ avec $F_1(x) \cap [\text{int } F_2(x)] \neq \emptyset \quad \forall\, x \in \text{Dom } F$, alors

$\sigma_F(x,p) = \sup\limits_{q\in Y^*} [\sigma_{F_1}(x,q) + \sigma_{F_2}(x,p-q)]$ et

$\exists\ p_1, p_2 \in Y^* \ / \ p_1 + p_2 = p$ et

$\sigma_F(x,p) = \sigma_{F_1}(x,p_1) + \sigma_{F_2}(x,p_2)$.

---o---

Preuve :

Assez simples ; à l'exception de (4i) qui est une application directe de la proposition 2.1.

---o---

Remarques 3.1 :

1. Si $\dim Y < +\infty$, (4i) a lieu sous la condition plus faible : $F_1(x) \cap [\text{relint } F_2(x)] \neq \emptyset$ où relint désigne l'intérieur relatif.

2. $\sigma_F(x,p)$ étant un infimum, dire que σ_F est propre revient à dire que $\text{Dom } F \neq \emptyset$ et que $\sigma_F > -\infty$ sur $\text{Dom } F \times Y^*$; en fait on caractérise cela comme suit :

Proposition 3.2 :

σ_F est propre si et seulement si Dom F $\neq \emptyset$ et F est à valeurs bornées.

---o---

Preuve :

* Si F est à valeurs bornées, pour tout $x \in$ Dom F, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}_+$ tel que $F(x) \subset \lambda_x B_Y$; par suite :

$$\forall\, p \in Y^*, \quad \sigma_F(x,p) \geq \lambda_x\, \sigma_{B_Y}(p) = -\lambda_x \|p\| > -\infty$$

* Réciproquement si $\sigma_F(x,p) > -\infty \quad \forall\, (x,p) \in \text{Dom } F \times Y^*$, en supposant F(x) non borné, il existerait une suite $(\overset{\ell}{y})$ de F(x) telle que $\|\overset{\ell}{y}\| \to +\infty$; mais comme

$$\langle \overset{\ell}{y}, p\rangle \geq \sigma_F(x,p) \quad \forall\, p \in Y^* \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}$$

nous aurions en fait :

$$|\langle \overset{\ell}{y}, p\rangle| < +\infty \quad \forall\, p \in Y^* \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}$$

et le théorème de Banach-Steinhaus assurerait que $(\overset{\ell}{y})$ est bornée.

---o---

Proposition 3.3 :

(i) Si F est convexe, σ_F est convexe-concave sur $X \times Y^*$.

(2i) La réciproque a lieu si F est à valeurs convexes, fermées.

---o---

Preuve :

(i) Notons d'abord que F est convexe si et seulement si

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)\, F(x_2) \subset F(x(\lambda)) \text{ où } x(\lambda) = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in \text{Dom } F \quad \text{et} \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$$

ce qui pour σ_F donne :

$$\sigma_F(x(\lambda),p) \leq \inf_{y\in\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)} <y,p> = \lambda \inf_{y\in F(x_1)} <y,p> + (1-\lambda) \inf_{y\in F(x_2)} <y,p>$$

c'est-à-dire :

(1) $$\sigma_F(x(\lambda),p) \leq \lambda\, \sigma_F(x_1,p) + (1-\lambda)\, \sigma_F(x_2,p)$$

(2i) Réciproquement, sachant que $\sigma_F = \sigma_{\overline{co}F}$, (1) donne :

$$\sigma_{\overline{co}F(x(\lambda))}(p) \leq \lambda\, \sigma_{\overline{co}F(x_1)}(p) + (1-\lambda)\, \sigma_{\overline{co}F(x_2)}(p) = \sigma_A(p)$$

où $$A = \lambda\, \overline{co}F(x_1) + (1-\lambda)\, \overline{co}F(x_2)$$

c'est-à-dire la convexité de $\overline{co}F$ qui coïncide avec F, dès que F est à valeurs convexes fermées.

---o---

Rappelons deux définitions.

<u>Définition 3.1</u> :

F est dite localement lipschitz autour de $a \in$ int Dom F, s'il existe $V \in \Theta(a)$ et une constante $\ell = \ell(a,V) > o$ tels que :

$$\forall\, x_1,x_2 \in V,\; F(x_1) \subset F(x_2) + \ell\|x_1-x_2\|\, B_Y$$

et l'on dit que F est localement lipschitz, si F l'est autour de tout point de int Dom F.

---o---

<u>Définition 3.2</u> :

Une famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de fonctions numériques définies sur X est dite localement équi-lipschitz autour de $a \in X$, s'il existe $V \in \Theta(a)$,et une constante $\ell = \ell(a,V) > o$, tels que pour tout $i\in I$, ϕ_i est lipschitz sur V avec la constante ℓ.

---o---

On a alors la caractérisation suivante.

Proposition 3.4 :

(i) Si F est localement lipschitz autour de a, alors la famille $\{\sigma_F(.,p)\ ;\ p \in S_Y^*\}$ est localement équi-lipschitz autour de a.

(2i) La réciproque a lieu si F est à valeurs convexes, fermées.

---o---

Preuve :

(i) Soient $a \in \text{int Dom } F$, $V \in \Theta(a)$ et $\ell = \ell(a,V)$ assurant la lipschitzité de F autour de a ; alors :

$$\sigma_F(x_1,p) \geq \inf_{y \in F(x_2)+\ell\|x_1-x_2\|B_Y} \langle y,p\rangle = \sigma_F(x_2,p) + \ell\|x_1-x_2\|\,\sigma_{B_Y}(p)$$

c'est-à-dire :

$$(1) \qquad \sigma_F(x_1,p) \geq \sigma_F(x_2,p) - \ell\|x_1-x_2\| \qquad \forall\, p \in S_{Y^*}$$

(2i) Réciproquement (1) traduit que :

$$\sigma_{\overline{co}F(x_1)}(p) \geq \sigma_{\overline{co}F(x_2)}(p) + \sigma_{\ell\|x_1-x_2\|B_Y}(p) \qquad \forall\, p \in S_{Y^*},\ \forall\, x_1,x_2 \in V$$

les fonctions en jeu étant positivement homogènes, cette dernière relation est en fait vérifiée pour tout $p \in Y^*$; d'où

$$\overline{co}F(x_1) \subset \overline{co}F(x_2) + \ell\|x_1-x_2\|\,B_Y$$

c'est-à-dire la lipschitzité de F autour de a, dès que F est à valeurs convexes, fermées.

---o---

Suit alors immédiatement le

Corollaire 3.1 :

Si F est localement lipschitz autour de a, $\overline{co}F$ l'est aussi sur le même voisinage et avec la même constante.

---o---

4 - MULTIFONCTIONS CONVEXES, FERMEES

Proposition 4.1 :

Si F est convexe, fermée, pour tout $p \in Y^*$, $\sigma_F(.,p)$ est continue sur inf Dom F.

---o---

Preuve :

* F étant convexe, $\sigma_F(.,p)$ est convexe (propo. 3.3), et comme F est fermée, on sait par le théorème de Robinson-Ursescu [10, 18], qu'en particulier F est s.c.i sur int Dom F ; par conséquent (résultat général d'analyse marginale), $\sigma_F(.,p)$ est s.c.s, donc continue sur int Dom F.

---o---

Remarques 4.1 :

1. Rappelons que lorsque $\sigma_F(.,p)$ est pour tout $p \in Y^*$, s.c.i [resp. s.c.s] F est dite hemi-continue supérieurement (h.c.s) [resp. hemi-continue inférieurement (h.c.i)] ; et notons que sous des conditions de compacité l'hemi-continuité caractérise la continuité ; résultats dûs à Valadier [[7] th.II 21 p.52], Castaing [[7] th.II 20 p.51] et Aubin [[2] th.2 p.62].

2. La proposition 4.1 montre alors que toute multifonction convexe, fermée est non seulement s.c.i, mais h.c.s sur int Dom F.

3. Par suite si dim $Y < +\infty$ et si F est à valeurs bornées, F est continue sur l'intérieur de son domaine.

---o---

En fait nous avons la lipschitzité ; en effet :

Théorème 4.1 :

Si F est convexe, fermée et à valeurs bornées, F est localement lipschitz sur int Dom F.

---o---

Preuve :

* Sous ces hypothèses σ_F est propre (propo. 3.2), convexe (propo. 3.3) et continue en x (propo. 4.1) sur int Dom F et concave s.c.s en p (propo.2.1).

* Notons provisoirement (pour des commodités d'écriture) σ au lieu de σ_F et considérons son sous-différentiel ; sous-différentiel des fonctions selle, qui rappelons-le est défini comme suit :

$$(1)\quad \left[\begin{array}{l} \partial\sigma : X \times \overset{*}{Y} \overset{\rightarrow}{\rightarrow} X^{*}\times Y \;/\; \partial\sigma(x,p) = \partial_1\sigma(x,p) \times \partial_2\sigma(x,p) \text{ avec} \\ \partial_1\sigma(x,p) = \{x^{*}\in X^{*} / \sigma(x,p) - \sigma(u,p) \le \langle x-u,x^{*}\rangle \quad \forall\, u \in X\} \\ \partial_2\sigma(x,p) = \{y \in Y / \sigma(x,q) - \sigma(x,p) \le \langle y,p-q\rangle \quad \forall\, q \in Y^{*}\} \end{array}\right.$$

* On sait alors [cf. par ex. [5] pp.133-134] que $\partial\sigma$ est monotone avec

$$(2)\quad \left[\begin{array}{l} \text{Dom } (\partial\sigma) \subset \text{Dom } \sigma = \text{Dom } F \times Y^{*} \text{ et} \\ \text{int Dom } \sigma = \text{int Dom } F \times Y^{*} \subset \text{Dom } (\partial\sigma) \end{array}\right.$$

Ainsi grâce à (2), pour tout (x,p) et (u,q) $\in$ int Dom σ, il existe

$$(x^{*},y) \in \partial\sigma(x,p) \quad \text{et} \quad (u^{*},z) \in \partial\sigma(u,q)$$

ce qui avec (1) donne :

$$(3)\quad \left[\begin{array}{l} \sigma(x,p) - \sigma(u,q) \le \langle x-u,x^{*}\rangle + \langle z,p-q\rangle \quad \text{et} \\ \sigma(u,q) - \sigma(x,p) \le \langle u-x,u^{*}\rangle + \langle y,q-p\rangle \end{array}\right.$$

* Or on sait aussi [cf. [5] p.60] que $\partial\sigma$ est localement borné sur int Dom $\partial\sigma$; par suite :

$$(4)\quad \left[\begin{array}{l} \forall\, (x,p) \in \text{int Dom } F \times Y^{*},\ \exists\, M > o \text{ et } \alpha > o \quad \text{tels que :} \\ \left.\begin{array}{l} \|x-u\| \le \alpha \\ \|p-q\| \le \alpha \\ (u^{*},z) \in \partial\sigma(u,q) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \|u^{*}\| + \|z\| \le M \end{array}\right.$$

ce qui rapproché de (3) assure l'existence de ℓ>o tel que :

$$(5)\quad \left[\begin{array}{l} |\sigma(x,p) - \sigma(u,q)| \leq \ell(\|x-u\| + \|p-q\|) \\ \forall\ (u,q) \in (x,p) + \alpha(B_X \times B_{Y^*}) \end{array}\right.$$

* Enfin grâce à (5), nous pouvons affirmer que :

$$(6)\quad \left[\begin{array}{l} \forall\ x \in \text{int Dom } F,\ \exists\ V \in \Theta(x) \text{ et } \ell = \ell(x,V) > o \quad \text{tels que} \\ \forall\ u \in V,\ \forall\ p \in S_{Y^*}\ ,\ |\sigma_F(x,p) - \sigma_F(u,p)| \leq \ell\|x-u\|. \end{array}\right.$$

* Mais (6) exprime que la famille $\{\sigma_F(.,p)\ ;\ p \in S_{Y^*}\}$ est localement équi-lipschitz autour de tout $x \in$ int Dom F ; le résultat annoncé découle alors de la proposition 3.4.

---o---

Remarques 4.2 :

1. Il est à noter que l'approche de Rockafellar [11] ne permet pas d'établir ce résultat.

2. Ce résultat n'était connu que lorsque F est en outre localement bornée ou est un processus convexe surjectif (i.e ayant pour graphe un cône avec R(F) = Y) [[4] corol. 2 et 3, p.132].

---o---

Corollaire 4.1 :

Toute multifonction convexe, fermée, à valeurs bornées est localement bornée sur l'intérieur de son domaine.

---o---

Et si dim Y < $+\infty$, on affaiblit les hypothèses du théorème 4.1 comme suit :

Corollaire 4.2 :

Si dim Y < $+\infty$ et si F est convexe, fermée avec une valeur bornée, alors F est localement lipschitz sur int Dom F.

---o---

Preuve :

On pourra user du théorème 4.1, si l'on montre que sous les conditions énoncées, F est à valeurs bornées ; mais ceci est précisément un résultat dû à Borwein [[6] propo. 1.11].

---o---

Donnons une dernière propriété générale utile pour la suite :

Proposition 4.2 :

Soit $F : X \overset{\to}{\to} Y$ convexe ; alors :

$$(x^*,-p) \in N_{G(F)}(\bar{x},\bar{y}) \iff \begin{cases} -p \in N_{F(\bar{x})}(\bar{y}) \\ x^* \in \partial_x \sigma_F(\bar{x},p) \end{cases}$$

où ∂_x désigne le sous-différentiel par rapport à x.

---o---

Preuve : simple.

---o---

5 - APPLICATION A L'OPTIMISATION CONVEXE ; CAS GENERAL

Considérons le programme général

$$(P) \quad \begin{cases} \inf \phi(x) \\ o \in F(x) \end{cases}$$

où $F : X \overset{\to}{\to} Y$ est convexe, fermée

$\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est convexe, propre, s.c.i.

---o---

Proposition 5.1 :

Si ϕ est faiblement inf-compacte, alors (P) admet une solution si et seulement si $o \in R(F)$.

---o---

Preuve :

1. Si $o \notin R(F)$ (i.e si $F^{-1}(o) = \emptyset$), le domaine de (P) est vide.

2. Sinon comme convexe fermé, $F^{-1}(o)$ est faiblement fermé et comme ϕ est faiblement s.c.i, l'inf-compacité assure que la valeur de (P) est atteinte.

---o---

5.1 Autres formulations de (P) et programme dual

Etant clair que $o \in F(x) \Longleftrightarrow \sigma_F(x,p) \leq o,\ \forall\, p \in Y^*$, et sachant que $\sigma_F(x,.)$ est positivement homogène, on peut reformuler (P) comme suit :

$$\left[\begin{array}{l} \inf \phi(x) \\ \quad g(x) \leq o \\ \text{où } g(x) = \sup\limits_{p \in B^*_Y} \sigma_F(x,p) \end{array}\right.$$

* Considérons le Lagrangien $\hat{L} : X \times \mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{R}}$, associé :

$$\left[\ \hat{L}(x,\lambda) = \phi(x) + \lambda g(x).\right.$$

---o---

Remarques 5.1.1 :

1. Si $\hat{\phi}$ est la valeur de (P), on sait que :

$$\hat{\phi} = \inf_{x \in X} \ \sup_{\lambda \geq o} \hat{L}(x,\lambda)$$

2. Or $\sigma_F(x,.)$ étant positivement homogène, on a aisément :

$$\forall\, \lambda \geq o \qquad \lambda g(x) = \sup_{p \in B_{Y^*}} \sigma_F(x,\lambda p)$$

3. En notant enfin que $I : \mathbb{R}_+ \times B_{Y^*} \to Y^*$ définie par $I(\lambda,p) = \lambda p$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ \times B_{Y^*}$ sur Y^*, on a immédiatement une formulation Lagrangienne de (P) sur la forme :

$$(P) \qquad \left[\ \inf_{x \in X} \ \sup_{p \in Y^*} [\phi(x) + \sigma_F(x,p)]\right.$$

---o---

Définition 5.1.1 :

On appellera dual de (P) le programme

(D) $$\left[\begin{array}{l} \sup_{p\in Y^*} \inf_{x\in X} \mathbb{L}(x,p) \\ \\ \text{où } \mathbb{L}(x,p) = \phi(x) + \sigma_F(x,p). \end{array}\right.$$

tout revient donc à étudier les cols du Lagrangien $\mathbb{L}$.

5.2 Etude du Lagrangien

Proposition 5.2.1 :

Si F est simplement à valeurs convexes, fermées et sans condition sur ϕ, tout col $(\bar{x},\bar{p})$ sur $X\times Y^*$ du Lagrangien défini par :

$$\mathbb{L}(x,p) = \phi(x) + \sigma_F(x,p)$$

satisfait à :

(i) $\sigma_F(\bar{x},\bar{p}) = o$ [relation d'extrémalité]

(2i) $\bar{x}$ est solution de (P)

(3i) $\bar{p}$ est solution de (D).

---o---

Preuve :

* Exprimons que $(\bar{x},\bar{p})$ est un col ; soit :

(1) $\phi(\bar{x}) + \sigma_F(\bar{x},p) \leq \phi(\bar{x}) + \sigma_F(\bar{x},\bar{p}) \leq \phi(x) + \sigma_F(x,\bar{p})$

$\forall\, p \in Y^*$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, x \in X$

On en déduit alors que :

(2) $\sigma_F(\bar{x},p) \leq \sigma_F(\bar{x},\bar{p}) \qquad \forall\, p \in Y^*$

mais $\sigma_F(\bar{x},.)$ étant homogène (2) n'a lieu que si :

$\sigma_F(\bar{x},p) \leq o \qquad \forall\, p \in Y^* \qquad$ i.e $\; o \in F(\bar{x})\;$ et
$\sigma_F(\bar{x},\bar{p}) = o \qquad$ d'où (i).

* Par ailleurs (1) et (2) donnent aussi :

$$\phi(\bar{x}) \leq \phi(x) + \sigma_F(x,\bar{p}) \qquad \forall\, x \in X.$$

Et donc $\phi(\bar{x}) \leq \phi(x) \quad \forall\, x \in F^{-1}(o)$ (car $\sigma_F(x,\bar{p}) \leq o$) d'où (2i).

* Enfin l'existence du col implique que $\bar{p}$ est solution de (D).

---o---

Théorème 5.2.1 :

On se place dans les conditions du problème (P) et on suppose que :

(1) $\exists\, \tilde{x} \in \text{int Dom } F$, avec ϕ continue en $\tilde{x}$

(2) $o \in \text{int } R(F)$ [qualification des contraintes].

Alors :

(i) $\exists\, \bar{p} \in Y^* \ / \ \hat{\phi} = \inf\limits_{x \in X} \mathcal{L}(x,\bar{p})$

(2i) et si $\bar{x}$ est solution de (P), $(\bar{x},\bar{p})$ est un col de $\mathcal{L}$ sur $X \times Y^*$.

---o---

Preuve :

Considérons les deux sous ensembles de $\mathbb{R} \times Y$ suivants :

$$\mathcal{C} = \{(\alpha,y) \ / \ \exists\, x \in X,\ y \in F(x) \quad \text{et} \quad \alpha + \hat{\phi} \geq \phi(x)\}$$

$$D = \{(\alpha,o) \ / \ \alpha < o\}$$

* D est évidemment convexe ; nous allons montrer que $\mathcal{C}$ est convexe d'intérieur non vide (grâce à (1) et (2)) et que $\mathcal{C} \cap D = \emptyset$; nous pouvons alors séparer $\mathcal{C}$ et D par un hyperplan qui grâce à (2) sera "non vertical".

* $\mathcal{C} \cap D = \emptyset$: car dans le cas contraire, il existerait $\alpha < o$ et $x \in F^{-1}(o)$ tels que $\alpha + \hat{\phi} \geq \phi(x)$ et $\hat{\phi}$ ne serait pas la valeur de (P).

* $\mathcal{C}$ est convexe : soient $(\alpha_1,y_1), (\alpha_2,y_2) \in \mathcal{C}$; $\lambda,\mu \in [o,1]$, $\lambda+\mu = 1$ et $x_1,x_2 \in X$ tels que :

$$y_i \in F(x_i) \quad \text{et} \quad \alpha_i + \hat{\phi} \geq \phi(x_i) \qquad i=1,2$$

Alors pour $x = \lambda x_1 + \mu x_2$, $y = \lambda y_1 + \mu y_2 \in F(x)$, car F est convexe et

$$\lambda\alpha_1 + \lambda\hat{\phi} \geq \lambda\phi(x_1) \quad ; \quad \mu\alpha_2 + \mu\hat{\phi} \geq \mu\phi(x_2)$$

ce qui pour $\alpha = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2$, donne par addition :

$$\alpha+\hat{\phi} \geq \lambda\phi(x_1) + \mu\phi(x_2) \geq \phi(x) \quad \text{puisque } \phi \text{ est convexe.}$$

* <u>int $\mathcal{C} \neq \emptyset$</u> : soient $\tilde{x} \in$ int Dom F, point de continuité de ϕ et $\lambda>\phi(\tilde{x})$; alors :

(1) $\exists\, V \in \Theta(\tilde{x})$, $V \subset$ int Dom F $\quad$ et $\quad \phi(x) < \lambda \quad \forall\, x \in V$

Comme Dom F^{-1} = R(F) et que F^{-1} est convexe fermée (F étant convexe, fermée), on sait par le théorème de Robinson-Ursescû [10, 18] que F^{-1} est s.c.i sur int R(F) $\neq \emptyset$.

Mais sachant aussi que la semi-continuité inférieure des multifonctions se caractérise par le fait que l'image réciproque de tout ouvert est ouverte, on obtient aisément :

(2) $\qquad$ int F(V) $\neq \emptyset$.

Soient enfin $\varepsilon>o$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < \beta + \hat{\phi} - \varepsilon$, alors

$W =]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[\times$ int F(V) est ouvert non vide.

Nous affirmons que $W \subset \mathcal{C}$; en effet :

si $(\alpha,y) \in W$, il existe $x \in V$ avec $y \in F(x)$ et $\beta-\varepsilon<\alpha$ ce qui rapproché de (1) donne :

$$\phi(x) < \lambda < \beta+\hat{\phi}-\varepsilon < \alpha+\hat{\phi} \ ; \text{ i.e } (\alpha,y) \in \mathcal{C}.$$

* <u>Séparation de $\mathcal{C}$ et D</u>

Il existe $(\lambda,p) \in \mathbb{R}_+ \times Y^*$, non nul tel que :

$$\sup_{(\alpha,o)\in D} \alpha\lambda \leq \inf_{(\alpha,y)\in\mathcal{C}} \lambda\alpha + \langle y,p\rangle$$

ce qui donne aisément :

$$\lambda(\phi(x) - \hat{\phi}) + \langle y,p\rangle \geq o \qquad \forall\, x \in X, \forall\, y \in F(x)$$

c'est-à-dire :

$$\lambda\phi(x) + \sigma_F(x,p) \geq \lambda\hat{\phi} \qquad \forall\, x \in X.$$

* <u>λ est non nul</u>

Sinon, nous aurions $p \neq o$ et $\sigma_F(x,p) \geq o \quad \forall\, x \in X$; i.e.

$$\inf_{y \in R(F)} \langle y,p\rangle \geq o$$

et la condition $o \in \text{int } R(F)$ mènerait à la contradiction $p=o$.

* En conclusion pour $\bar{p} = \lambda^{-1}p$, on a :

$$\phi(x) + \sigma_F(x,\bar{p}) \geq \hat{\phi} \qquad \forall\, x \in X \text{ ; d'où le résultat (i).}$$

* Le résultat (2i) est alors classique puisque :

$$\hat{\phi} = \phi(\bar{x}) = \inf_{x \in X} \sup_{p \in Y^*} L(x,p) = \inf_{x \in X} L(x,\bar{p}) = \hat{\phi}$$

---o---

5.3 <u>Sur un résultat de stabilité</u>

La condition de régularité $o \in \text{int } R(F)$ suggère tout naturellement d'associer à (P) la famille de perturbation suivante :

$$\Phi : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}} \quad / \quad \Phi(x,y) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } o \in F(x) + y \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la fonction de perturbation $h : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ correspondante

$$h(y) = \inf_{x \in X} \Phi(x,y)$$

---o---

Rappelons deux notions courantes de stabilité.

Définition 5.3.1 : [[8] p.395 ; 397]

(1) (P) est dit inf-stable [resp. stable] si $h(o)$ est fini et h est s.c.i [resp. continue] en o.

(2) (P) est dit inf-dif-stable [resp. dif stable] si $\partial h(o) \neq \emptyset$ [resp. $\partial h(o) = \{\nabla h(o)\}$].

---o---

Proposition 5.3.1 :

Sous les conditions du théorème 5.2.1, (P) est inf-dif-stable.

---o---

Preuve :

* Il est aisé de vérifier que :

(1) $$h^*(p) = \Phi^*(o,p) \qquad \forall\, p \in Y^*$$

* Par ailleurs, sachant que :

$$\Phi(x,y) = \phi(x) + \psi_{F(x)}(-y), \quad \text{on a :}$$

$$\Phi^*(o,p) = \sup_{x \in X} [-\phi(x) + \sup_{y \in Y} [\langle y,p\rangle - \psi_{F(x)}(-y)]]$$

et comme :

$$\sup_{y \in Y} [\langle y,p\rangle - \psi_{F(x)}(-y)] = \psi^*_{F(x)}(-p) = \sigma^{\#}_{F(x)}(-p) = -\sigma^{b}_{F(x)}(p) = -\sigma_F(x,p)$$

on aboutit à :

(2) $$\Phi^*(o,p) = \sup_{x \in X} [-\phi(x) - \sigma_F(x,p)] = -\inf_{x \in X} L(x,p)$$

* Or le théorème 5.2.1 assure qu'il existe $\bar{p} \in Y^*$ tel que :

$$\hat{\phi} = \inf_{x \in X} L(x,\bar{p}) = -\Phi^*(o,\bar{p}).$$

* Ce qui joint au fait que $h(o) = \hat{\phi}$ et rapproché de (1) donne :

(3) $$h^*(\bar{p}) + h(o) = o \; ; \text{ i.e } \; \bar{p} \in \partial h(o).$$

---o---

Remarque 5.3.1 :

On vérifie aisément que si $q \in \partial h(o)$ et si $\bar{x}$ est solution de (P), $(\bar{x},q)$ est col de L.

---o---

5.4 Quelques cas particuliers en programmation convexe

Soient Q un cône convexe, fermé de Y et g : X→Y continue (pour simplifier) et Q-convexe au sens suivant :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda g(x_1) + (1-\lambda)\, g(x_2) \in g(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) + Q \\ \forall\, x_1,\, x_2 \in \text{Dom } g \text{ et } \forall\, \lambda \in [o,1] \end{array}\right.$$

et considéront le programme convexe :

$$(P_{conv}) \left[\begin{array}{l} \inf \phi(x) \\ g(x) \in -Q \\ x \in C \\ \text{où } C \text{ est un convexe fermé de } X \end{array}\right.$$

* On réduit (P_{conv}) à la forme (P) en considérant simplement

$$F : X \overset{\rightarrow}{\rightarrow} Y \times X \quad / \quad F(x) = [g(x) + Q] \times [C - x]$$

On vérifie alors facilement que F est convexe, fermée et que :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_F(x,p,q) = \langle g(x),p\rangle + \sigma_Q(p) + \sigma_C(q) - \langle x,q\rangle \quad \text{où} \\ \qquad \sigma_Q(p) = \begin{cases} o & \text{si} \quad p \in Q^+ \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \\ \qquad \text{avec } Q^+ \text{ cône polaire positif de } Q. \end{array}\right.$$

* La formulation Lagrangienne de (P_{conv}) est alors :

$$\left[\ \inf_{x \in X} \sup_{p \in Q^+} \sup_{q \in X^*} [\phi(x) + \langle g(x),p\rangle + \sigma_C(q) - \langle x,q\rangle]\right.$$

* En remarquant enfin que :

$$\sup_{q \in X^*} [\sigma_C(q) - \langle x,q \rangle] = \begin{cases} o & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On aboutit à la formulation finale

$$(P_{conv}) \left[\inf_{x \in C} \sup_{p \in Q^+} [\phi(x) + \langle g(x),p \rangle] \right.$$

* Ce qui redonne la dualité classique avec comme dual

$$(D_{conv}) \left[\sup_{p \in Q^+} \inf_{x \in C} [\phi(x) + \langle g(x),p \rangle] \right.$$

* Et si l'on particularise Y à $\mathbb{R}^n$ et Q à $\mathbb{R}_+^m \times \{o\}^{n-m}$, on retrouve le cadre habituel de la programmation mathématique.

* Notons enfin que dans ce contexte, l'hypothèse $o \in \text{int } R(F)$ signifie que :

$$\left[\begin{array}{l} \text{il existe } V \in \Theta(o) \text{ dans } X \text{ et } W \in \Theta(o) \text{ dans } Y \text{ tels que :} \\ \qquad \forall\, (v,\omega) \in V \times W,\ \exists\, x \in X \text{ avec} \\ \qquad\qquad \left[\begin{array}{l} x+\omega \in C \\ v \in g(x) + Q \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ce qui est plus faible que de supposer l'existence de $\tilde{x} \in \text{int } C$ avec $g(\tilde{x}) \in \text{int } (-Q)$; hypothèse de type Slater qui nécessite en particulier que $\text{int } Q \neq \emptyset$.

---o---

6 · SUR UN SCHEMA GENERAL DE PROGRAMMATION DYNAMIQUE DISCRETE

Considérons le modèle général suivant :

(1) pour $i=o,n$, X_i est un espace de Banach d'élément générique x_i

(2) $C_o \subset X_o$ est un convexe, fermé

(3) pour $i=o,n-1$, $E_i \subset X_i \times X_{i+1}$ est un convexe fermé

(4) soient $X = \prod_{i=o}^{n} X_i$ et $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$, convexe, propre s.c.i.

Et soit le programme

$$(P_{d_y}) \quad \left[\begin{array}{ll} \inf \phi(x_o,\dots,x_n) & \\ (x_i,x_{i+1}) \in E_i & i=o,n-1 \\ x_o \in C_o & \end{array}\right.$$

<u>Définitions 6</u> :

(1) $x = (x_o,\dots,x_n)$ est dit chemin admissible si

$$x_o \in C_o \qquad \text{et} \qquad (x_i,x_{i+1}) \in E_i \qquad i=o,n-1$$

(2) Et si en outre x réalise l'infimum, x est dit optimal.

---o---

On se propose dans ce qui suit de caractériser les chemins optimaux :

6.1 Réduction du problème et propriétés générales

Pour tout $i=o,n-1$, définissons $S_i : X_i \rightrightarrows X_{i+1}$ par :

(1) $$S_i(a) = \{b \;/\; (a,b) \in E_i\}$$

Par suite $G(S_i) = E_i$ et donc S_i est convexe, fermée.
Et soit $F : X \rightrightarrows X$ définie par :

(2) $$\left[\begin{array}{l} F(x) = [C_o - x_o] \times \prod_{i=o}^{n-1} [S_i(x_i) - x_{i+1}] \\ \text{où } x = (x_o,\dots,x_n). \end{array}\right.$$

Il est alors clair que (P_{d_y}) prend la forme réduite :

$$(P)\quad \left[\begin{array}{l} \inf \phi(x) \\ \\ o \in F(x) \end{array}\right.$$

---o---

<u>Proposition 6.1.1</u> :

F est convexe fermée avec :

$$\text{Dom } F = [\prod_{i=o}^{n-1} \text{Dom } S_i] \times X_n$$

---o---

<u>Preuve</u> :

Résulte directement de la définition (2) de F et de la fermeture et la convexité de C_o et des S_i, i=o,n-1.

---o---

<u>Proposition 6.1.2</u> :

On suppose en outre que :

(3) $\qquad \text{int } E_i \neq \emptyset \qquad \forall\ i=o,n-1$

alors int Dom F $\neq \emptyset$.

---o---

<u>Preuve</u> :

Il est clair (vue l'expression de Dom F) que int dom F $\neq \emptyset$ si et seulement si int Dom $S_i \neq \emptyset$ pour i=o,n-1.

* Considérons les projecteurs $\pi_i : X_i \times X_{i+1} \to X_i$ définis par :

$$\pi_i(a,b) = a \qquad i=o,n-1$$

alors π_i est linéaire continu avec :

$$\pi_i(\text{int } E_i) \subset \text{int Dom } S_i \qquad i=o,n-1$$

* Le théorème de l'application ouverte assurant que π_i (int E_i) est ouvert, le résultat annoncé en découle.

---o---

Proposition 6.1.3 :

On suppose qu'il existe un chemin $\tilde{x} \in X$ intérieur, i.e tel que :

(4) $\tilde{x}_0 \in \text{int } C_0$; $(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) \in \text{int } E_i$ $\qquad i=0,n-1$

alors $o \in \text{int } R(F)$.

---o---

Preuve :

* $o \in \text{int } R(F)$ s'exprime en fait comme suit :

$$(5) \quad \left[\begin{array}{ll} \exists\, V \in \Theta(o) \text{ dans } X \text{ tel que } \forall\, v \in V,\ \exists\, x \in X \text{ avec} & \\ x_0 + v_0 \in C_0 & \\ (x_i, x_{i+1} + v_{i+1}) \in E_i & i=o,n-1 \end{array}\right.$$

* Soient $\alpha>o$ et $\rho_i>o$ pour $i=o,n-1$ tels que :

$$\tilde{x}_0 + \alpha B_{X_0} \subset C_0 \quad \text{et}$$

$$(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) + \rho_i (B_{X_i} \times B_{X_{i+1}}) \subset E_i \qquad i=o,n-1$$

* Soit enfin $\rho = \min \{\alpha , \rho_i \quad i=o,n-1\}$; il est alors clair que :

$$\tilde{x}_0 + \rho B_{X_0} \subset C_0 \quad \text{et}$$

$$(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) + \rho(\{o\} \times B_{X_{i+1}}) \subset E_i \qquad i=o,n-1$$

* Par conséquent, en normant X par $\|x\| = \sum_{i=o}^{n} \|x_i\|$, tout $v \in X$ et tel que $\|v\| \leq \rho$ satisfait manifestement à :

$$\tilde{x}_0 + v_0 \in C_0$$

$$(o, v_{i+1}) \in \rho(\{o\} \times B_{X_{i+1}}) \quad \text{et donc}$$

$$(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1} + v_{i+1}) \in E_i \qquad i=o,n-1.$$

---o---

Remarque 6.1.1 :

Il est clair que les conditions (3) et (4) sont suffisantes, mais non nécessaires pour que F satisfasse à int Dom F $\neq \emptyset$ et $o \in$ int R(F).

---o---

Donnons une dernière condition assurant l'existence d'un chemin optimal.

Proposition 6.1.4 :

S'il existe un chemin admissible et si les ensembles E_i sont faiblement compacts, (P_{d_y}) admet une solution.

---o---

Preuve :

* L'ensemble des chemins admissibles est convexe, fermé puisqu'il est égal à $F^{-1}(o)$ supposé non vide.

* Soient les projecteurs $\pi_i : X_i \times X_{i+1} \to X_i$ et $\pi : X_{n-1} \times X_n \to X_n$ tels que :

$$\forall\ i=o,n-1\ ;\ \pi_i(x_i,x_{i+1}) = x_i \quad \text{et} \quad \pi(x_{n-1},x_n) = x_n$$

et soit $K = \pi_o(E_o) \times \ldots \times \pi_{n-1}(E_{n-1}) \times \pi(E_{n-1})$.

Il est alors clair que tout chemin admissible appartient à K.

* Comme opérateurs linéaires, continus, π_i et π sont aussi faiblement continus (cf. par ex. Brezis ; Analyse Fonctionnelle th.III.9, p.39). Par conséquent K est faiblement compact ; et comme convexe, fermé (donc faiblement fermé) l'ensemble des chemins admissibles est donc faiblement compact dans K.

* On conclut, en remarquant simplement que ϕ étant convexe, propre, s.c.i est faiblement s.c.i.

---o---

6.2 Lagrangien et conditions d'optimalité

En notant l'élément générique de X^* par (ω,v) où $\omega \in X_o^*$ et $v \in \prod_{i=1}^{n} X_i^*$, le Lagrangien a pour expression :

$$(1) \quad \left[\ L(x,\omega,v) = \phi(x) + \sigma_{C_o}(\omega) - \langle\omega,x_o\rangle + \sum_{i=o}^{n-1} \sigma_{S_i}(x_i,v_{i+1}) - \langle v_{i+1},x_{i+1}\rangle \right.$$

Exprimons que $(\bar{x},q,p)$ est un col de L sur $X \times X^*$; soit :

$$(2) \quad \left[\ \begin{array}{ll} L(\bar{x},\omega,v) \leq L(\bar{x},q,p) \leq L(x,q,p) & \\ \forall\ (\omega,v) \in X^* & \forall\ x \in X \end{array} \right.$$

* La première inégalité du col donne :

$$(3) \quad \left[\ \begin{array}{lll} L(\bar{x},\omega,p) \leq L(\bar{x},q,p) & \forall\ \omega \in X_o^* & \\ L(\bar{x},q,p_{v_{i+1}}) \leq L(\bar{x},q,p) & \forall\ v_{i+1} \in X_{i+1}^* & i=o,n-1 \\ \text{où } p_{v_{i+1}} = (p_1,\ldots,p_i,\ v_{i+1},\ p_{i+2},\ldots,\ p_n) & & \end{array} \right.$$

* Ce qui donne aisément :

$$(4) \quad \left[\ \begin{array}{ll} -q \quad \in N_{C_o}(\bar{x}_o) & \\ -p_{i+1} \in N_{S_i(\bar{x}_i)}(\bar{x}_{i+1}) & i=o,n-1 \end{array} \right.$$

* Notons provisoirement par $\mu_i(.)$ la fonction $\sigma_{S_i}(.,p_{i+1})$ et considérons la seconde inégalité du col, qui exploitée sous la forme :

$$\lim_{\lambda \to o_+} \lambda^{-1}[L(\bar{x}+\lambda x,q,p) - L(\bar{x},q,p)] \geq o \qquad \forall\ x \in X$$

donne aisément :

$$(5) \quad \left[\ \begin{array}{l} \dot{\phi}(\bar{x};x) - \langle q,x_o\rangle + \sum_{i=o}^{n-1} \dot{\mu}_i(\bar{x}_i;x_i) - \sum_{i=o}^{n-1} \langle p_{i+1},x_{i+1}\rangle \geq o \\ \forall\ x = (x_o,\ldots,x_n) \in X \qquad \text{et où :} \\ \dot{\phi} \text{ et } \dot{\mu}_i \text{ désignent les dérivées directionnelles.} \end{array} \right.$$

* En rappelant enfin que celles-ci sont les fonctions d'appui supérieures des sous-différentiels correspondants qui sont faibles-$\star$ compacts, on aboutit à :

$$(6) \quad \left[\min_{x\in X} \max_{x^*\in\partial\phi(\bar{x})} \max_{\substack{z_i^*\in\partial\mu_i(\bar{x}_i)\\ o\le i\le n-1}} [\langle x^*,x\rangle - \langle q,x_o\rangle + \sum_{i=o}^{n-1}\langle z_i^*,x_i\rangle - \sum_{i=o}^{n-1}\langle p_{i+1},x_{i+1}\rangle] = o \right.$$

* Un théorème de min-max [1] permet alors d'affirmer qu'il existe $x^* = (x_o^*,\ldots,x_n^*) \in \partial\phi(\bar{x})$ et $z_i^* \in \partial\mu_i(\bar{x}_i)$ $\quad i=o,n-1$, satisfaisant à :

$$\sum_{i=o}^{n} \langle x_i^*,x_i\rangle - \langle q,x_o\rangle + \sum_{i=o}^{n-1}\langle z_i^*,x_i\rangle - \sum_{i=o}^{n-1}\langle p_{i+1},x_{i+1}\rangle = o \ ; \ \forall\, x\in X \ ;$$

ce qui mène après des modifications simples à :

$$(7) \quad \left[\begin{array}{l} \langle x_o^*+z_o^*-q,x_o\rangle + \sum_{i=o}^{n-1}\langle x_i^*+z_i^*-p_i,x_i\rangle + \langle x_n^*-p_n,x_n\rangle = o \\ \forall\,(x_o,\ldots,x_n) \in X \end{array} \right.$$

* Par conséquent :

$$(8) \quad \left[\ q = x_o^*+z_o^* \ ; \ p_n = x_n^* \quad \text{et} \quad p_i = x_i^*+z_i^* \qquad i=1,n-1 \right.$$

---o---

Nous sommes à présent à même de prouver le

<u>Théorème 6.2.1</u> :

Sous les conditions générales définissant (P_{d_y}), on suppose en outre que :

(1) $\quad \exists\, \tilde{x} \in X \ / \ \tilde{x}_o \in \text{int}\, C_o \ ; \ (\tilde{x}_i,\tilde{x}_{i+1}) \in \text{int}\, E_i \qquad i=o,n-1$

(2) $\quad$ les ensembles E_i sont faiblement compacts.

Alors (P_{d_y}) admet une solution ; et pour toute solution $\bar{x}$, il existe $(x_o^*,\ldots,x_n^*) \in \partial\phi(\bar{x})$ et un chemin dit dual $(p_o,\ldots,p_n)$ tels que :

$$
(9) \quad \left[\begin{array}{ll} -p_o \in N_{C_o}(\bar{x}_o) & \\ (p_i - x_i^*, -p_{i+1}) \in N_{E_i}(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) & i=o,n-1 \\ p_n = x_n^* & \end{array} \right.
$$

---o---

<u>Preuve</u> :

* En notant que $z_i^* \in \partial\mu_i(\bar{x}_i)$ et en considérant (4), nous constatons que nous disposons de :

$$
z_i^* \in \partial_{x_i}\sigma_{S_i}(\bar{x}_i, p_{i+1}) \quad \text{et} \quad -p_{i+1} \in N_{S_i(\bar{x}_i)}(\bar{x}_{i+1}) \qquad i=o,n-1
$$

La proposition 4.2 assure alors que cela équivaut à :

$$
(10) \qquad (z_i^*, -p_{i+1}) \in N_{E_i}(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) \qquad i=o,n-1
$$

* Enfin en notant $q=p_o$ et en considérant (4) et (8), on aboutit avec (10) aux résultats annoncés en (9).

* L'existence d'un chemin $\bar{x}$ optimal est assurée par la proposition 6.1.4.

---o---

6.3 <u>Dualité dans un cas partiellement linéaire</u>

On considère le programme :

$$
(\bar{P}_{d_y}) \quad \left[\begin{array}{ll} \inf \phi(x_o, \ldots, x_n) & \\ x_{i+1} = A_i\, x_i + B_i\, u_i & \\ u_i \in U_i & i=o,n-1 \\ x_o \in C_o & \end{array} \right.
$$

où U_i est un convexe fermé d'un espace de Banach Z_i et

$$
\left. \begin{array}{l} A_i : X_i \to X_{i+1} \\ \\ B_i : Z_i \to X_{i+1} \end{array} \right\} \quad \text{linéaires continus.}
$$

* $(\bar{P}_{d_y})$ se réduit (P_{d_y}) en considérant les ensembles E_i donnés par :

$$
E_i = \{(a,b) \in X_i \times X_{i+1} \ / \ \exists\, u_i \in U_i \text{ avec } b = A_i a + B_i u_i\}
$$

Remarques 6.3.1 :

1. Il est clair que int Dom F $\neq \emptyset$, puisque Dom F = $\prod_{i=o}^{n} X_i$.

2. La condition o $\in$ int R(F) est satisfaite, car R(F) = X ; en effet $\forall$ v $\in$ X, v = $(v_o,\dots,v_n)$, $\exists$ $(x_o,\dots,x_n)$ $\in$ X / v $\in$ F(x) ; i.e tel que :

$$v_o + x_o \in C_o \quad \text{et}$$

$$x_{i+1} + v_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i \quad \text{pour un contrôle } u_i;\ i=o,n-1.$$

Il suffit alors de calculer x de proche en proche.

$$\left[\begin{array}{ll} x_o \in C_o - v_o & \text{et} \\ x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i - v_{i+1} & i=o,n-1 \\ \text{avec un choix quelconque des contrôles } u_i. & \end{array}\right.$$

3. On vérifie enfin aisément que si C_o et U_i, i=o,n-1, sont faiblement compacts, l'ensemble des chemins admissibles est non vide (o $\in$ R(F) = X), faiblement compact ; ce qui assure l'existence d'un chemin optimal ; d'où le

Corollaire 6.3.1 :

Soit $\bar{x} = (\bar{x}_o,\dots,\bar{x}_n)$ un chemin optimal correspondant au contrôle $(\bar{u}_o,\dots,\bar{u}_{n-1})$; alors il existe $(x_o^*,\dots,x_n^*) \in \partial\phi(\bar{x})$ et un chemin dual $(p_o,\dots,p_n) \in X^*$ tels que :

$$(11) \qquad \left[\begin{array}{l} -p_o \in N_{C_o}(\bar{x}_o) \\ p_i - A_i^* p_{i+1} = x_i^* \\ -B_i^* p_{i+1} \in N_{U_i}(\bar{u}_i) \\ p_n = x_n^* \end{array}\right. \qquad i=o,n-1$$

---o---

Considérons le programme dual de $(\bar{P}_{d_y})$; soit :

$$(\bar{D}_{d_y}) \qquad \left[\ \sup_{z^* \in X^*} \inf_{x \in X} [\phi(x) + \sigma_F(x,z^*)]\right.$$

où un calcul simple donne :

$$\sigma_F(x,z^*) = \sigma_{C_o}(z_o^*) + \sum_{i=o}^{n-1} \sigma_{U_i}(B_i^* \, z_{i+1}^*) + \sum_{i=o}^{n-1} \langle A_i^* z_{i+1}^* - z_i^*, x_i \rangle + \langle z_n^*, x_n \rangle$$

* Or l'infimum en x dans $(\bar{D}_{d_y})$ mène à :

$$\inf_{x \in X} [\phi(x) + \langle x, x^* \rangle] = -\phi^*(-x^*)$$

où $x_i^* = A_i^* \, z_{i+1}^* - z_i^*$; $i=o,n-1$

$x_n^* = z_n^*$.

* Ce qui donne pour dual le programme dynamique :

$$(\bar{D}_{dy}) \left[\begin{array}{ll} \sup\limits_{v \in X^*} \ \sigma_{C_o}(v_o) + \sum\limits_{i=o}^{n-1} \sigma_{U_i}(B_i^* \, v_{i+1}) - \phi^*(-x^*)] & \\ A_i^* \, v_{i+1} - v_i = x_i^* & i=o,n-1 \\ v_n = x_n^* & \end{array} \right.$$

et pour solution de $(\bar{D}_{dy})$ le chemin dual $(p_o,\ldots,p_n)$.

---o---

<u>Remarques 6.3.2</u> :

1. x^* apparaît alors comme un contrôle pour le dual.

2. Ainsi les chemins et contrôles optimaux $\bar{x} = (\bar{x}_o,\ldots,\bar{x}_n)$ et $\bar{u} = (\bar{u}_o,\ldots,\bar{u}_{n-1})$ pour $(\bar{P}_{dy})$ et $p = (p_o,\ldots,p_n)$ et $x^* = (x_o^*,\ldots,x_n^*)$ pour $(\bar{D}_{dy})$ sont liés par les relations synthétiques suivantes :

$$\left[\begin{array}{lll} (1) & \phi(\bar{x}) + \phi^*(-x^*) = o & \\ (2) & A_i^* \, p_{i+1} - p_i = x_i^* & i=o,n-1 \\ & p_n = x_n^* & \\ (3) & \sigma_{C_o}(p_o) + \langle p_o, x_o \rangle = o & \\ & \sigma_{U_i}(B_i^* \, p_{i+1}) + \langle B_i^* \, p_{i+1}, \bar{u}_i \rangle = o & i=o,n-1. \end{array} \right.$$

---o---

7 - SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES DE CONTROLE

Dans tout ce qui suit $T \in]o,+\infty[$ et pour $s \in [1,+\infty]$, nous noterons :

* L_n^s (L^s si $n=1$) l'espace de Banach usuel des fonctions Lebesgue-sommables $v = [o,T] \to \mathbb{R}^n$, pour la norme :

$$\|v\|_s = \left(\int_0^T |v(t)|^s \, dt \right)^{1/s} \qquad \text{si } 1 \le s < +\infty$$

$$\|v\|_\infty = \text{ess.} \sup_{o \le t \le T} |v(t)|$$

où $|.|$ est la norme induite pour le produit scalaire $<.,.>$ de $\mathbb{R}^n$.

* $W_n^{1,s}$ l'espace de Banach des fonctions absolument continues $x : [o,T] \to \mathbb{R}^n$, telles que x et $Dx = \dot{x} \in L_n^s$; la norme étant

$$\|x\|_W = |x(o)| + \|Dx\|_s$$

* "p.p" l'abréviation de "presque partout sur [o,T]".

---o---

Rappelons alors que :

(1) $\forall\, s \in [1,+\infty[$, le dual $(L_n^s)^*$ de L_n^s s'identifie à $L_n^{s^*}$ où $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^*} = 1$, par la représentation unique suivante :

$$\forall\, v^* \in (L_n^s)^*, \; \exists\, v \in L_n^{s^*} \quad \text{tel que :}$$

$$v^*(u) = <v^*,u> = \int_0^T <v(t),u(t)> dt \qquad \forall\, u \in L_n^s.$$

Nous conviendrons alors dans tout ce qui suit d'identifier v^* et v et de noter simplement v^*.

(2) Sachant que T est fini, on montre aisément (grâce à l'inégalité de Hölder) qu'il existe $\beta>o$ tel que :

$$\forall\, x \in W_n^{1,s}, \quad \|x\|_C \le \beta \|x\|_W$$

où $\|\cdot\|_C$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $[o,T]$.

---o---

7.1 Formulation du problème

Nous nous proposons d'étudier le modèle de contrôle suivant :

$$
(P_c) \quad \left[\begin{array}{l}
\inf\limits_{\substack{x \in W_n^{1,\alpha} \\ u \in L_m^{\beta}}} \int_o^T f(t,x(t),u(t))\, dt + g(x(o),x(T)) \\
\qquad (x(t),u(t), \dot{x}(t)) \in E(t) \quad \text{p.p} \\
\qquad x(o) \in C_o \\
\text{où } u \text{ désigne un contrôle et } E : [o,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\
\text{avec } \alpha,\beta \in [1,+\infty[
\end{array} \right.
$$

---o---

Pour lequel nous supposons satisfaites les :

Hypothèses de base :

(H)

(1) g est convexe, propre, s.c.i sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

(2) C_o est convexe, compact dans $\mathbb{R}^n$

(3) E est à valeurs convexes, fermées avec Dom $E = [o,T]$.

(4) $\forall\, t \in [o,T]$, $f(t,.,.)$ est convexe, propre, s.c.i sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f(.,a,b)$ est mesurable sur $[o,T]$, avec

$$f(.,x(.), u(.)) \in L^1,\ \forall\, (x,u) \in L_n^{\alpha} \times L_m^{\beta}$$

7.2 Réduction du problème et propriétés générales

Notons $X = W_n^{1,\alpha} \times L_m^{\beta}$, $Y = L_n^{\alpha} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et soient :

$$
\left[\begin{array}{ll}
S : L_n^{\alpha} \times L_m^{\beta} \rightrightarrows L_n^{\alpha} & / \quad S(x,u) = \{z \ / \ (x(t),u(t),z(t)) \in E(t) \text{ p.p}\} \\
F : X \rightrightarrows Y & / \quad F(x,u) = [S(x,u)-L(x,u)] \times [C - \gamma x] \quad \text{où} \\
C = C_o \times \mathbb{R}^n, \quad \gamma x = (x(o),x(T)) & \text{et} \quad L(x,u) = Dx = \dot{x}
\end{array} \right.
$$

---o---

Il est alors clair que (P_c) prend la forme réduite :

$$(P) \quad \left[\begin{array}{l} \inf \phi(x,u) \\ \\ o \in F(x,u) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} \phi(x,u) = k(x,u) + g(\gamma x) \quad \text{et} \\ \\ k(x,u) = \int_0^T f(t,x(t),u(t))\, dt \end{array}\right.$$

---o---

Proposition 7.2.1 :

S est convexe, fermée.

---o---

Preuve :

La convexité se déduit aisément de celle des valeurs de E ; prouvons la fermeture.

* Soit $(x_\ell, u_\ell, z_\ell) \to (x,u,z)$ dans $L_n^\alpha \times L_m^\beta \times L_n^\alpha$ avec $(x_\ell, u_\ell, z_\ell) \in G(S)$.

  On sait alors qu'il existe une sous suite encore notée (x_ℓ, u_ℓ, z_ℓ) telle que :

$$(x_\ell(t),\ u_\ell(t),\ z_\ell(t)) \to (x(t),\ u(t),\ z(t)) \quad \text{p.p.}$$

* Et comme E est à valeurs fermées, nous avons :

$$(x(t),\ u(t),\ z(t)) \in E(t) \quad \text{p.p.} \quad ; \quad \text{i.e} \quad (x,y,z) \in G(S).$$

---o---

Proposition 7.2.2 :

F est convexe, fermée.

---o---

Preuve :

La convexité se déduit aisément de celles de S et C_o et de la linéarité des opérateurs L et γ ; prouvons la fermeture :

* Soit $(x_\ell,\ u_\ell,\ y_\ell) \to (x,u,y)$ dans $W_n^{1,\alpha} \times L_m^\beta \times [L_n^\alpha \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n]$ avec $(x_\ell,\ u_\ell,\ y_\ell) \in G(F) \quad \forall\, \ell$; alors :

* $x_\ell \to x$ dans $W_n^{1,\alpha}$ et donc :

  $Dx_\ell \to Dx$ dans L_n^α et $x_\ell \to x$ uniformément sur $[o,T]$;

par conséquent :

$$x_\ell \to x \text{ dans } L_n^\alpha \quad \text{et } \gamma x_\ell \to \gamma x$$

* Et comme pour tout ℓ, il existe $z_\ell \in S(x_\ell,u_\ell)$ et $(a_\ell,b_\ell) \in \mathcal{C}_o \times \mathbb{R}^n$ tels que $y_\ell = (z_\ell - Dx_\ell,\ a_\ell - x_\ell(o),\ b_\ell - x_\ell(T))$

et que $y_\ell \to y$ dans $L_n^\alpha \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe (z,a,b) tel que :

$$z_\ell \to z \text{ dans } L_n^\alpha \quad \text{et} \quad (a_\ell,b_\ell) \to (a,b) \text{ dans } \mathcal{C}_o \times \mathbb{R}^n.$$

* S étant fermée et (u_ℓ) tendant vers u dans L_m^β, on a $z \in S(x,u)$ et donc $y = (z - Dx,\ a - x(o),\ b - x(T)) \in F(x)$.

---o---

Proposition 7.2.3 :

Si E est mesurable à valeurs convexes, fermées, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) $\qquad (x^*,u^*,z^*) \in N_{G(S)}(\bar{x},\bar{u},\bar{z})$

(II) $\qquad (x^*(t),u^*(t),z^*(t)) \in N_{E(t)}(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t)) \quad$ p.p.

---o---

Preuve :

Notons pour des commodités d'écriture

$$s(x(t),u(t),z(t)) = \langle x^*(t),x(t)\rangle + \langle u^*(t),u(t)\rangle + \langle z^*(t),z(t)\rangle$$

* Si (II) a lieu, (x^*,u^*,z^*) satisfait à :

$$s(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t)) = \sigma^{\#}_{E(t)}(x^*(t),u^*(t),z^*(t)) \qquad \text{p.p.}$$

par suite, pour tout $(x,u,z) \in G(S)$, nous avons par définition

$$(x(t),u(t),z(t)) \in E(t) \qquad \text{p.p.} \qquad \text{et donc}$$

$$s(x(t),u(t),z(t)) \le s(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t)) \quad \text{p.p.}$$

* Ce qui par sommation sur [o,T], mène aisément à (I).

* Réciproquement si (I) a lieu ; alors :

$$\langle x^*,\bar{x}\rangle + \langle u^*,\bar{u}\rangle + \langle z^*,\bar{z}\rangle = \sup_{(x,u,z)\in G(S)} \langle x^*,x\rangle + \langle u^*,u\rangle + \langle z^*,z\rangle \text{ i.e}$$

$$\int_o^T s(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t))dt = \sup_{(x,u,z)\in G(S)} \int_o^T s(x(t),u(t),z(t))dt$$

* Mais grâce à [[12] corol. 3F p.189], nous savons que :

$$\sup_{(x,u,z)\in G(S)} \int_o^T s(x(t),u(t),z(t))dt = \int_o^T \sup_{(a,b,c)\in E(t)} s(a,b,c)\, dt$$

ce qui donne en définitive :

$$(1) \quad \langle x^*,\bar{x}\rangle + \langle u^*,\bar{u}\rangle + \langle z^*,\bar{z}\rangle = \int_o^T \sigma^{\#}_{E(t)}(x^*(t),u^*(t),z^*(t))\, dt.$$

* En supposant que (II) n'a pas lieu, nous pouvons partitionner $[o,T]$ en trois sous ensembles I_1, I_2, I_3 mesurables et tels que :

$$(2) \left[\begin{array}{lll} \text{mesure } (I_3) = o \quad ; \quad \text{mesure } (I_2) > o & & \\ s(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{z}(t)) = \sigma^{\#}_{E(t)}(x^*(t), u^*(t),z^*(t)) & & \text{si } t \in I_1 \\ s(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t)) < \sigma^{\#}_{E(t)}(x^*(t), u^*(t),z^*(t)) & & \text{si } t \in I_2 \end{array}\right.$$

En sommant sur $[o,T]$, nous avons évidemment

$$\int_o^T s(\bar{x}(t),\bar{u}(t,\bar{z}(t)\, dt = \int_{I_1\cup I_2} s(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t))\, dt$$

ce qui rapproché de (2) mène à :

$$\langle x^*,\bar{x}\rangle + \langle u^*,\bar{u}\rangle + \langle z^*,\bar{z}\rangle = \int_o^T s(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{z}(t))\, dt < \ldots$$

$$< \int_o^T \sigma^{\#}_{E(t)}(x^*(t),u^*(t),z^*(t))\, dt$$

et contredit (1).

---o---

Proposition 7.2.4 :

k est convexe, propre, continue sur $L_n^\alpha \times L_m^\beta$.

---o---

Preuve :

Les hypothèses (H) sur f, donnent aisément la convexité de k et assurent que Dom k = $L_n^\alpha \times L_m^\beta$; par conséquent, la continuité de k sera assurée dès que k sera s.c.i, puisque toute fonction convexe, propre, s.c.i sur un espace de Banach (ici $L_n^\alpha \times L_m^\beta$) est continue sur l'intérieur de son domaine.

* Soient donc λ et $(x_\ell,u_\ell) \to (x,u)$ dans $L_n^\alpha \times L_m^\beta$, avec

(1) $$k(x_\ell,u_\ell) \leq \lambda \qquad \forall\, \ell$$

On sait alors qu'il existe une sous suite encore notée (x_ℓ,u_ℓ) telle que :

$$(x_\ell(t),u_\ell(t)) \to (x(t),u(t)) \quad \text{p.p}$$

* f(t,.,.) étant s.c.i, nous avons :

$$f(t,x(t),u(t)) \leq \liminf f(t,x_\ell(t),u_\ell(t)) \quad \text{p.p}$$

considérons alors la suite (h_ℓ) définie par :

(2) $$h_\ell(t) = f(t,x_\ell(t),u_\ell(t)) - f(t,x(t),u(t)) \qquad \forall\, t$$

alors $h_\ell(t) \geq o$ p.p, et comme $f(.,x(.),u(.)) \in L^1$, il existe $\bar\lambda$ tel que :

$$\int_0^T f(t,x(t),u(t)\, dt \geq \bar\lambda$$

ce qui rapproché de (1) et (2) mène à :

$$\int_0^T h_\ell(t)\, dt \leq \lambda - \bar\lambda \qquad \forall\, \ell$$

* Le lemme de Fatou est donc applicable à (h_ℓ) ; par suite :

$$o \leq \int_0^T \liminf h_\ell(t)\, dt \leq \liminf \int_0^T h_\ell(t)\, dt$$

ce qui grâce à (2) donne aisément :

$$k(x,u) = \int_0^T f(t,x(t),u(t))\,dt \le \liminf \int_0^T f(t,x_\ell(t),u_\ell(t))\,dt \le \lambda$$

---o---

Proposition 7.2.5 :

ϕ est convexe, continue sur X.

---o---

Preuve :

* La convexité est simple à vérifier ; prouvons la continuité.
Soit $(x_\ell,u_\ell) \to (x,u)$ dans $W_n^{1,\alpha} \times L_m^\beta$, alors $u_\ell \to u$ dans L_m^β et $x_\ell \to x$ dans $W_n^{1,\alpha}$; et comme il existe β>o tel que :

$$\|x_\ell - x\|_C \le \beta\|x_\ell - x\|_W \qquad \text{on a :}$$

$x_\ell \to x$ dans L_n^α et $\gamma x_\ell \to \gamma x$;

* Enfin g étant continue (car convexe, propre, s.c.i) sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$k(x_\ell,u_\ell) + g(\gamma x_\ell) = \phi(x_\ell,u_\ell) \to \phi(x,u) = k(x,u) + g(\gamma x).$$

---o---

Le résultat suivant sera utile.

Proposition 7.2.6 : [[12] corol.3E p.189]

$$(x^*,u^*) \in \partial k(x,u) \iff (x^*(t),u^*(t)) \in \partial f(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p}$$

où $\partial f(t,x(t),u(t)) = \partial_x f(t,x(t),u(t)) \times \partial_u f(t,x(t),u(t))$.

---o---

Remarques 7.2.1 :

En admettant l'existence d'une solution à (P_c), il est clair que le Lagrangien associé au problème réduit admettra un col dès que seront satisfaites les conditions suivantes :

(1) int Dom F $\neq \emptyset$

(2) o $\in$ int R(F).

---o---

Ces conditions seront examinées plus loin ; admettons-les pour le moment et étudions le Lagrangien que nous supposons donc admettre un col.

---o---

7.3 Lagrangien et conditions d'optimalité

En notant l'élément générique de $Y^* = L_n^{\alpha*} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par (v,ω) où $v \in L_n^{\alpha*}$ et $\omega = (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, le Lagrangien a pour expression :

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{L}(x,u,v,\omega) = \phi(x,u) + \sigma_S(x,u,v) - \langle Dx,v\rangle + \sigma_C(\omega) - \langle\omega,\gamma x\rangle \\ \text{où } \sigma_S(x,u,v) = \inf\limits_{z\in S(x,u)} \int_o^T \langle z(t),v(t)\rangle\ dt \\ \qquad \langle Dx,v\rangle = \int_o^T \langle v(t), \dot{x}(t)\rangle\ dt \\ \qquad \langle\omega,\gamma x\rangle = \langle a,x(o)\rangle + \langle b,x(T)\rangle . \end{array}\right.$$

* Exprimons sur $((\bar{x},\bar{u}),(p,q))$ est un col de $\mathcal{L}$; soit :

$$(1)\quad \left[\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\mathcal{L}(\bar{x},\bar{u},v,\omega) \leq \mathcal{L}(\bar{x},\bar{u},p,q) \leq \mathcal{L}(x,u,p,q)} \\ \forall\ v \in L_n^{\alpha*} & \forall\ x \in W_n^{1,\alpha} \\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \forall\ u \in L_m^{\beta} \end{array}\right.$$

* De la première inégalité du col, on retire que :

$$(2)\quad \left[\begin{array}{ll} \mathcal{L}(\bar{x},\bar{u}, v,q) \leq \mathcal{L}(\bar{x},\bar{u},p,q) & \forall\ v \in L_n^{\alpha^*} \\ \mathcal{L}(x,u,p\ ,\omega) \leq \mathcal{L}(x,u,p,q) & \forall\ \omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

ce qui donne aisément (et exprime en fait que) :

$$(3)\quad \left[\begin{array}{l} -p \in N_{S(\bar{x},\bar{u})}(D\bar{x}) \\ -q \in N_C(\gamma\bar{x}) \end{array}\right.$$

* En exploitant la seconde inégalité du col sous la forme :

$$\lim_{\lambda\to o_+} \lambda^{-1}[L(\bar{x}+\lambda x,\bar{u}+\lambda u,p,q) - L(\bar{x},\bar{u},p,q)] \geq o \qquad \forall\ x \in W_n^{1,\alpha},\ u \in L_m^{\beta},$$

et en notant $\mu_p(x,u) = \sigma_S(x,u,p)$, on aboutit aisément à :

$$(4)\quad \left[\begin{array}{l} \dot{k}(\bar{x},\bar{u};x,u) + \dot{g}(\gamma\bar{x};\gamma x) + \dot{\mu}_p(\bar{x},\bar{u};x,u) - \langle Dx,p\rangle - \langle q,\gamma x\rangle \geq o \\ \qquad\qquad \forall\ x \in W_n^{1,\alpha} \quad \text{et} \quad u \in L_m^{\beta} \\ \text{où } \dot{k},\ \dot{g} \text{ et } \dot{\mu}_p \text{ désignent les dérivées directionnelles.} \end{array}\right.$$

* En rappelant que celles-ci sont les fonctions d'appui supérieures aux sous différentielles correspondants qui sont faibles-* compacts, cette dernière relation mène à :

$$(5)\quad \left[\begin{array}{l} \min\limits_{\substack{x\in W_n^{1,\alpha} \\ u\in L_m^{\beta}}} \ \max\limits_{\substack{(\overset{*}{\eta}_1,\overset{*}{\zeta}_1)\in\partial k(\bar{x},\bar{u}) \\ (\overset{*}{\eta}_2,\overset{*}{\zeta}_2)\in\partial\mu_p(\bar{x},\bar{u}) \\ \overset{*}{z}\,\in\,\partial g(\gamma\bar{x})}} [\langle\overset{*}{\eta}_1+\overset{*}{\eta}_2,x\rangle+\langle\overset{*}{\zeta}_1+\overset{*}{\zeta}_2,u\rangle-\langle Dx,p\rangle+\langle\overset{*}{z}-q,\gamma x\rangle] = o \end{array}\right.$$

* Par un théorème de minmax [1], nous savons alors qu'il existe $(\overset{*}{x}_1,\overset{*}{u}_1)$, $(\overset{*}{x}_2,\overset{*}{u}_2)$ et $\overset{*}{\omega}$ tels que :

$$(6)\quad \left[\begin{array}{l} (\overset{*}{x}_1,\overset{*}{u}_1) \in \partial k(\bar{x},\bar{u}) \\ (\overset{*}{x}_2,\overset{*}{u}_2) \in \partial\mu_p(\bar{x},\bar{u}) = \partial_{(x,u)}\ \sigma_S(\bar{x},\bar{u},p) \\ \overset{*}{\omega} \in \partial g(\gamma\bar{x}) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \\ \langle\overset{*}{x}_1+\overset{*}{x}_2,x\rangle+\langle\overset{*}{u}_1+\overset{*}{u}_2,u\rangle-\langle Dx,p\rangle+\langle\overset{*}{\omega}-q,\gamma x\rangle = o \\ \qquad \forall\ x \in W_n^{1,\alpha} \quad \text{et} \quad \forall\ u \in L_m^{\beta} \end{array}\right.$$

* Mais pour successivement x=o puis u=o, cette dernière égalité équivaut à :

$$\left[\begin{array}{ll} \langle\overset{*}{x}_1+\overset{*}{x}_2,x\rangle - \langle Dx,p\rangle + \langle\overset{*}{\omega}-q,\gamma x\rangle = o & \forall\ x \in W_n^{1,\alpha} \\ \langle\overset{*}{u}_1+\overset{*}{u}_2,u\rangle = o & \forall\ u \in L_m^{\beta} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$\left[\begin{array}{ll} (7) & \displaystyle\int_o^T <\overset{*}{x}_1(t)+\overset{*}{x}_2(t),x(t)>dt-\int_o^T <p(t),\dot{x}(t)>dt=<q_o-\overset{*}{a},x(o)>+<q_T-\overset{*}{b},x(T)> \\ & \qquad \forall\ x \in W_n^{1,\alpha}, \quad \text{où} \quad q=(q_o,q_T) \text{ et } \overset{*}{\omega}=(\overset{*}{a},\overset{*}{b}) \\ (8) & \displaystyle\int_o^T <\overset{*}{u}_1(t)+\overset{*}{u}_2(t),u(t)>\ dt = o \qquad \forall\ u \in L_m^\beta \end{array}\right.$$

* Sachant que l'espace des fonctions continues à support compact dans $[o,T]$ est dense dans L_m^β, (8) donne aisément

$$(9) \quad \left[\ \overset{*}{u}_1(t) + \overset{*}{u}_2(t) = o \quad p.p\right.$$

* L'utilisation en (7) du lemme classique de Dubois-Raymond assure alors que p est absolument continue avec :

$$(10) \quad \left[\begin{array}{l} \dot{p}(t) + \overset{*}{x}_1(t) + \overset{*}{x}_2(t) = o \qquad p.p \\ p(o) = \overset{*}{a} - q_o\ ;\ p(T) = q_T - \overset{*}{b} \end{array}\right.$$

* Notons à ce niveau, que nous disposons de $(\overset{*}{x}_2,\overset{*}{u}_2,p)$ tel que :

$$- p \in N_{S(\bar{x},\bar{u})}(D\bar{x}) \quad \text{et} \quad (\overset{*}{x}_2,\overset{*}{u}_2) \in \partial\mu_p(\bar{x},\bar{u}) = \partial\sigma_S(\bar{x},\bar{u},p)$$

ce qui par la proposition 4.2 équivaut à :

$$(11) \quad \left[\ (\overset{*}{x}_2,\overset{*}{u}_2,-p) \in N_{G(S)}(\bar{x},\bar{u},D\bar{x})\right.$$

---o---

Nous sommes à présent en mesure de prouver le :

Théorème 7.3.1 :

On suppose en outre des hypothèses (H) que :

(1) E est mesurable

(2) int Dom F $\neq \emptyset$ et $o \in$ int R(F)

Alors pour toute solution $(\bar{x},\bar{u})$ de (P_c), il existe p: $[o,T] \to \mathbb{R}^n$ tel que :

(i) $\quad$ p est absolument continue sur $[o,T]$

(2i) $\quad$ $(-\dot{p}(t),o,-p(t)) \in N_{E(t)}(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\dot{\bar{x}}(t)) + [\partial f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \times \{o\}]$ p.p

(3i) $\quad$ $(p(o),-p(T)) \in \partial g(\bar{x}(o),\bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(o),\bar{x}(T))$ $\quad$ et où

(4i) $\quad$ $N_C(\bar{x}(o),\bar{x}(T)) = N_{C_o}(\bar{x}(o)) \times \{o\}$.

---o---

Preuve :

* La proposition 7.2.3 est applicable en (11) ci-dessus et donne :

$$(\overset{*}{x}_2(t),\overset{*}{u}_2(t),-p(t)) \in N_{E(t)}(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\dot{\bar{x}}(t)) \quad \text{p.p}$$

* La proposition 7.2.6 assurant que :

$$(\overset{*}{x}_1(t),\overset{*}{u}_1(t)) \in \partial f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \quad \text{p.p}$$

il suffit de rapprocher (3), (6), (9) et (10) pour conclure.

---o---

7.4 Sur les conditions $o \in \text{int } R(F)$ et int Dom $F \neq \emptyset$

Soient les projecteurs π_i, $i=1;3$, donnés par :

$$\pi_1(a,b,c) = a, \ \pi_2(a,b,c) = b \quad \text{et} \quad \pi_3(a,b,c) = c$$

et soit $\hat{E} : [o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\hat{E}(t,a,b) = \{c \ / \ (a,b,c) \in E(t)\}$$

---o---

Proposition 7.4.1 :

Si E est fermée, à valeurs convexes, avec $\pi_3(R(E))$ borné, alors $\hat{E}$ est s.c.s à valeurs convexes, compactes.

---o---

Preuve :

* Il est clair que $\hat{E}$ est à valeurs convexes, fermées.

  Soit $K = \overline{\pi_3(R(E))}$; alors K est compact et contient $R(\hat{E})$; suite $\hat{E}$ est à valeurs compactes dans le compact K.

* $\hat{E}$ sera s.c.s dès que $G(\hat{E})$ sera fermé ; or :

$$G(\hat{E}) = \{(t,a,b,c) \ / \ (a,b,c)\} \in E(t) \ = G(E) \text{ qui est fermé.}$$

---o---

Remarque 7.4.1 :

Ce résultat persiste si l'on remplace la condition $\pi_3(R(E))$ borné par l'hypothèse plus faible :

$$\left[\begin{array}{l} \pi_3 \circ E \text{ est localement bornée sur } [o,T] \text{ ; i.e telle que :} \\ \forall\, t \in [o,T],\ \exists\, V \in \Theta(t) \text{ avec } \pi_3(E(V)) \text{ borné.} \end{array}\right.$$

---o---

Proposition 7.4.2 :

Si E est fermée à valeurs convexes, avec $\pi_3(R(E))$ borné et si

$$\forall\, t \in [o,T],\ \forall\, a \in \mathbf{R}^n,\ \exists\, c \in \mathbf{R}^n \ / \ (a,o,c) \in E(t)$$

Alors $\forall\, x_o \in \mathbf{R}^n$, $\forall\, v : [o,T] \to \mathbf{R}^n$, continue, $\exists\, x : [o,T] \to \mathbf{R}^n$, absolument continue, solution de l'inclusion différentielle :

$$(I_v) \left[\begin{array}{ll} (x(t),o,\dot{x}(t) + v(t)) \in E(t) & \text{p.p} \\ x(o) = x_o & \end{array}\right.$$

---o---

Preuve :

Notons d'abord que (I_v) se formule aussi comme suit :

$$(I_v) \left[\begin{array}{ll} \dot{x}(t) \in \hat{E}(t,x(t),o) - v(t) & \forall\, t \in [o,T] \\ x(o) = x_o & \end{array}\right.$$

* Or $\hat{E}$ est s.c.s, à valeurs convexes, compactes (propo. 7.4.1) ; par suite $\hat{E}_v : (t,a) \to \hat{E}_v(t,a) = \hat{E}(t,a,o) - v(t)$, hérite des propriétés de $\hat{E}$ et satisfait à : $\mathrm{Dom}\, \hat{E}_v = [o,T] \times \mathbf{R}^n$.

* Par ailleurs, v étant fixé, l'élément de norme minimale de $\hat{E}_v(t,a)$ noté $m(\hat{E}_v(t,a))$, qui est simplement la projection de $v(t)$ sur $\hat{E}(t,a,o)$ est uniformément dans le compact $K = \overline{\pi_3(R(E))}$.

* Les conditions d'application d'un résultat d'Aubin-Cellina [[2] th.4 p.101] sont donc réunies ; d'où l'existence de la solution annoncée.

---o---

Nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat de surjectivité suivant :

Théorème 7.4.1 :

Si E est fermée à valeurs convexes, avec $\pi_3(R(E))$ borné et si

$$\forall\, t \in [o,T],\ \forall\, a \in \mathbf{R}^n,\ \exists\, c \in \mathbf{R}^n \,/\, (a,o,c) \in E(t)$$

alors $\qquad R(F) = Y \qquad$ (et donc $o \in \mathrm{int}\, R(F)$).

---o---

Preuve :

* Soit $(v,\omega) \in Y = L^\alpha_n \times [\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n]$ où $v \in L^\alpha_n$ et $\omega = (a,b) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; alors $(v,\omega) \in R(F)$ si et seulement si il existe $x \in W^{1,\alpha}_n$ et $u \in L^\beta_m$, tels que $(v,\omega) \in F(x,u)$; i.e tels que :

$$\text{(I)} \qquad \left[\begin{array}{ll} (x(t),\, u(t),\, \dot{x}(t) + v(t)) \in E(t) & \text{p.p} \\ (x(o)+a,\ x(T)+b) \in C_o \times \mathbf{R}^n & \end{array} \right.$$

* Nous savons que par densité, il existe une suite (v_ℓ) de fonctions continues à support compact sur $[o,T]$ et telle que :

$$v_\ell \to v \quad \text{dans} \quad L^\alpha_n.$$

* Or par la proposition 7.4.2, nous savons que :

$\forall\, \ell,\ \exists\, x_\ell : [o,T] \to \mathbf{R}^n$, absolument continue, solution de

$$(I_\ell) \quad \left[\begin{array}{l} (x(t),o,\ \dot{x}(t)+v_\ell(t)) \in E(t) \qquad p.p \\ \qquad x(o) = x_o = c_o - a\ ;\ c_o \in C_o \text{ fixé} \end{array} \right.$$

* Quitte à extraire des sous suites, nous pouvons supposer que

$$v_\ell(t) \to v(t) \qquad p.p$$

* On sait alors (cf. Brezis. Anal. Fonct. th.IV.9 p.58) qu'il existe $\delta \in L^\alpha_n$ telle que

$$|v_\ell(t)| \le \delta(t) \qquad p.p$$

et comme T est fini, $\delta \in L^1$.

Par ailleurs sachant que $K = \overline{\pi_3(R(E))}$ est compact et que :

$$\dot{x}_\ell(t) + v_\ell(t) \in K \qquad p.p$$

il existe $\beta > o$ tel que :

$$(1) \qquad |\dot{x}_\ell(t)| \le \beta + \delta(t) = \bar{\delta}(t) \qquad \forall\ \ell$$

et donc $\bar{\delta} \in L^1$ et l'on déduit aisément que :

$$(2) \qquad |x_\ell(t)| \le |x_o| + \|\bar{\delta}\|_1 \qquad \forall\ t \in [o,T] \qquad \forall\ \ell$$

* Les relations (1) et (2) permettent d'affirmer grâce à [[2] th.4 p.13] qu'il existe $x : [o,T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue et telle que :

$$(3) \quad \left[\begin{array}{ll} x_\ell \to x & \text{uniformément sur } [o,T] \\ \dot{x}_\ell \to \dot{x} & \text{faiblement dans } L^1_n. \end{array} \right.$$

* Nous affirmons alors que

$$(4) \qquad \dot{x}_\ell + v_\ell \to \dot{x}+v \quad \text{faiblement dans } L^1_n$$

En effet, T étant fini, tout $\eta \in L^\infty_n$ est dans $L^{\alpha^*}_n$ $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1 \right)$

et donc : $\quad |\langle \eta, v_\ell - v \rangle| \le \|\eta\|_{\alpha^*} \cdot \|v_\ell - v\|_\alpha$

et comme $v_\ell \to v$ dans L^α_n, on aboutit à :

$$<\eta, \dot{x}_\ell + v_\ell - \dot{x} - v> = <\eta, \dot{x}_\ell - \dot{x}> + <\eta, v_\ell - v> \to o.$$

Les relations (3), (4) ci-dessus réunissent les conditions d'application d'un théorème de convergence [[2] th.1, p.60] qui assure alors que :

$$\left[\begin{array}{ll} (x(t),\, o,\, \dot{x}(t) + v(t)) \in E(t) & \text{p.p} \\ x(o) + a = c_o \in C_o & \\ x(T) + b \in \mathbf{R}^n & \end{array}\right.$$

* Reste simplement à vérifier que $\dot{x} \in L_n^\alpha$ pour que x soit dans $W_n^{1,\alpha}$.
Or $\dot{x}(t) + v(t) \in K = \overline{\pi_3(R(E))}$ p.p
et comme K est compact, il existe $\bar{\beta}>o$ tel que

$$|\dot{x}(t)| \leq |v(t)| + \bar{\beta} \qquad \text{p.p}$$

Enfin puisque $v \in L_n^\alpha$ et que T est fini, manifestement $\dot{x} \in L_n^\alpha$;

en conclusion $(v,\omega) \in F(x,o)$.

---o---

Théorème 7.4.2

Si E est fermée, mesurable avec $\pi_3(R(E))$ borné et si

$$\forall\ (t,a,b) \in [o,T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m,\ \exists\ c \in \mathbf{R}^n \ /\ (a,b,c) \in E(t)$$

alors $$W_n^{1,\alpha} \times L_m^\beta \subset \text{Dom } S.$$

---o---

Avant de prouver cela, notons le

Corollaire 7.4.1 :

Sous les conditions du théorème 7.4.2, on a :

$$\text{Dom } F = W_n^{1,\alpha} \times L_m^\beta \qquad \text{(et donc int Dom } F \neq \emptyset).$$

---o---

Preuve du corollaire 7.4.1 :

Soit $(x,u) \in W_n^{1,\alpha} \times L_m^\beta$, alors (théo. 7.4.2) il existe $z \in L_n^\alpha$ avec $z \in S(x,u)$; par suite $\forall\ (a,b) \in C_o \times \mathbf{R}^n$, $y = [z-Dx,\ a-x(o),\ b-x(T)] \in F(x,u)$.

---o---

Preuve du théorème 7.4.2 :

Sous nos hypothèses, nous pouvons montrer tout comme pour la proposition 7.4.1 que $\hat{E}$ définie par $\hat{E}(t,a,b) = \{c \;/\; (a,b,c) \in E(t)\}$ est s.c.s à valeurs compactes avec Dom $\hat{E} = [o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; par conséquent l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ par $\hat{E}$ est fermée.

* Soit $(x,u) \in W_n^{1,\alpha} \times L_m^{\beta}$; et considérons :

$\tau : [o,T] \to [o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;/\; \tau(t) = (t,x(t),u(t))$ et

$\Delta : [o,T] \overset{\to}{\to} \mathbb{R}^n \quad / \quad \Delta(t) = \hat{E}(t,x(t),u(t)) = \hat{E}o\tau(t)$

Alors Δ est à valeurs non vides (Dom $\Delta = [o,T]$) fermées ;

* Nous affirmons que Δ est mesurable ; soit donc A fermé dans $\mathbb{R}^n$; alors $\Delta^{-1}(A) = \tau^{-1}(\hat{E}^{-1}(A))$; et comme $\hat{E}^{-1}(A)$ est fermé et que τ est mesurable, $\Delta^{-1}(A)$ est mesurable.

* Par conséquent Δ admet une sélection mesurable [[12] corol.1C p.163] soit z une telle sélection ; alors $(x(t),u(t),z(t)) \in E(t)$ p.p ; et donc $z(t) \in K = \overline{\pi_3(R(E))}$ p.p ; et comme K est compact, manifestement $z \in L_n^{\alpha}$; c'est-à-dire $z \in S(x,u)$.

---o---

En rapprochant les théorèmes 7.3.1 ; 7.4.1 et le corollaire 7.4.1, nous aboutissons au résultat synthétique suivant :

Théorème 7.4.3 :

On suppose que :

(1) f,g et C_o satisfont aux hypothèses de base (H).

(2) E est fermée, mesurable avec $\pi_3(R(E))$ borné et satisfait à : $\forall\ (t,a,b) \in [o,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ \exists\ c \in \mathbb{R}^n \;/\; (a,b,c) \in E(t)$.

Alors pour toute solution $(\bar{x},\bar{u})$ de (P_c) il existe $p : [o,T] \to \mathbb{R}^n$ telle que :

(i) $p \in W_n^{1,\alpha^*} \qquad \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1\right)$

(2i) $(-\dot{p}(t),o,-p(t)) \in N_{E(t)}(\bar{x}(t),\bar{u}(t),\dot{\bar{x}}(t)) + (\partial f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \times \{o\})$ p.p

(3i) $(p(o),-p(T)) \in \partial g(\bar{x}(o),\bar{x}(T)) + N_C(\bar{x}(o),\bar{x}(T))$ et où

(4i) $N_C(\bar{x}(o),\bar{x}(T)) = N_{C_o}(\bar{x}(o)) \times \{o\}$

---o---

Corollaire 7.4.2 :

Sous les conditions du théorème 7.4.3, le problème (P_c) est inf-dif-stable par rapport aux perturbations (sur les contraintes) :

$$(x(t),\ u(t),\ \dot{x}(t) + v(t)) \in E(t) \qquad \text{p.p}$$

$$x(o) \in C_o + a$$

$$x(T) = b$$

où $(v,a,b) \in L_n^{\alpha} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

---o---

Preuve :

Il suffit de rapprocher la proposition 5.3.1, le théorème 7.4.1 et le corollaire 7.4.1.

---o---

Remarque 7.4.2 :

L'existence d'une solution au problème (P_c) sera assurée dès que la fonctionnelle ϕ est faiblement inf-compacte ; c'est-à-dire telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\{(x,u) \ / \ \phi(x,u) \leq \lambda\}$ est faiblement compact ; ce sera le cas si la conjuguée $\overset{*}{\phi}$ de ϕ est continue à l'origine.

Pour des conditions générales assurant cela, nous renvoyons le lecteur à [17].

---o---

7.5 Cas particuliers et extensions diverses

* Lorsque la multifonction E prend la forme :

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} E(t) = \{(a,b,c) \ / \ c = A(t)a + B(t)b \ ; \ b \in U(t)\} \text{ où} \\ \forall\ t \in [o,T],\ A(t) \text{ et } B(t) \text{ sont des matrices } (n\times n) \text{ et } (n\times m) \text{ et} \\ U : [o,T] \overset{\rightarrow}{\rightarrow} \mathbb{R}^m \quad \text{avec} \quad \text{Dom } U = [o,T]. \end{array} \right.$$

Nous retrouvons le cadre classique du contrôle sur les équations linéaires

$$\left[\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) & \text{p.p} \\ u(t) \in U(t) & \\ x(o) \in C_o & \end{array}\right.$$

* On vérifie alors aisément que si U est mesurable à valeurs convexes fermées et si $A(t)$ et $B(t)$ sont à composantes mesurables, E est mesurable à valeurs convexes, fermées.

* L'identification de $N_{E(t)}(a,b,c)$ s'obtient par un calcul simple :

$$(2) \qquad \left[\ (\overset{*}{a},\overset{*}{b},\overset{*}{c}) \in N_{E(t)}(a,b,c) \right. \iff \left[\begin{array}{l} \overset{*}{a} + A^*(t)b^* = o \\ \overset{*}{c} + B^*(t)b^* \in N_{U(t)}(c) \end{array}\right.$$

ce qui dans le cadre du théorème 7.3.1 mène aux conditions d'optimalité classiques.

* Supposons pour simplifier que $\alpha=\beta=1$ alors sous les conditions

$$\|A(\cdot)\| \in L^\infty \qquad \text{et} \qquad \|B(\cdot)\| \in L^\infty$$

on montre aisément que Dom F = $W_n^{1,1} \times L_m^1$; d'où int Dom F $\neq \emptyset$.

* Par ailleurs $o \in$ int R(F), puisque $R(F) = Y = L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
en effet soit $(v,a,b) \in L_n^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et soit u un contrôle tel que :
$u \in K = \{u \in L_m^1 \ / \ u(t) \in U(t) \quad \text{p.p}\}$;

alors le problème de Cauchy :

$$\left[\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) - v(t) & \text{p.p} \\ x(o) = x_o - a \ ; \quad \text{pour } x_o \in C_o & \end{array}\right.$$

admet une solution globale x sur $[o,T]$; et sous nos conditions manifestement $x \in W_n^{1,1}$; d'où $(v,a,b) \in F(x,u)$.

* Il est à noter le fait important que les opérateurs de dérivation ou de trace ainsi que $A(t)$ et $B(t)$ n'interviennent que comme opérateurs

linéaires continus ; aussi peut-on en manipulant convenablement l'intégrale de Bochner et les distributions vectorielles, traiter suivant la même approche les problèmes convexes de contrôle sur les équations différentielles linéaires opérationnelles ou aux dérivées partielles, sous le schéma réduit :

$$\left[\begin{array}{l} F(x,u) = [S(x,u) - L(x,u)] \times [C-\gamma x] \quad \text{où} \\ S(x,u) = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u, \text{ avec } \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \text{ linéaires continus} \\ L(x,u) = Dx \quad \text{et} \quad u \in U \text{ ensemble des contrôles} \\ D \text{ un opérateur différentiel linéaire et } \gamma \text{ un opérateur} \\ \quad \text{linéaire de trace} \end{array}\right.$$

et si $\mathcal{B} \equiv o$ et $C = U$, on obtient le schéma du contrôle frontière.

* Le seul point difficile dans ce cas consiste à satisfaire la condition $o \in \text{int } R(F)$; ce qui en fait revient à assurer des solutions au problème perturbé :

$$\left[\begin{array}{ll} Dx = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u + v & \\ \gamma x = \omega & \text{où } (v,\omega) \text{ est une perturbation.} \end{array}\right.$$

On retrouverait ainsi aisément les principaux résultats de [[5] chap.3 et 4].

* Notons enfin que notre approche s'applique aussi à l'extension suivante :

$$\left[\begin{array}{l} \inf\limits_{\substack{x \in W^{1,\alpha}(o,T;X_1) \\ u \in L^{\beta}(o;T;X_2)}} \int_0^T f(t,x(t),u(t))dt + g(x(o),x(T)) \\ \qquad (x(t),u(t),\dot{x}(t)) \in E(t) \quad \text{p.p} \\ \qquad x(o) \in C_o \end{array}\right.$$

(pour les espaces considérés, nous renvoyons le lecteur à [5] chap.1).

Les conclusions du théorème 7.4.3 persistent sous les conditions :

(1) $1 < \alpha, \beta < +\infty$

(2) X_1 est un Hilbert et X_2 un Banach réflexif

(3) C_o est un convexe, faiblement compact de X_1

(4) $E : [o,T] \overset{\rightarrow}{\rightarrow} X_1 \times X_2 \times X_1$, fermée, mesurable (au sens de [7]) avec Dom $E = [o,T]$ et telle que :

* $\pi_3(R(E))$ relativement compact (où $\pi_3(a,b,c) = c$)

* $\forall t \in [o,T]$, $\forall\ a \in X_1$, $\forall\ b \in X_2$, $\exists\ c \in X_1$ / $(a,b,c) \in E(t)$

(5) g convexe, propre, continue sur $X_1 \times X_1$

(6) $\forall\ t \in [o,T]$, $f(t,\cdot,\cdot)$ convexe, propre, continue sur $X_1 \times X_2$ et $\forall (a,b) \in X_1 \times X_2$, $f(\cdot,a,b)$ Lebesgue mesurable sur $[o,T]$ avec

$$f(\cdot,x(\cdot),u(\cdot)) \in L^1,\ \forall\ (x,u) \in W^{1,\alpha}(o,T;X_1) \times L^{\beta}(o,T;X_2)$$

---o---

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J.P. AUBIN** : Théorème du minimax pour une classe de fonctions.
C.R.A.S. Série A, 274 (1972) pp.455-458.

[2] **J.P. AUBIN ; A. CELLINA** : Differential inclusions.
Springer-Verlag (1984)

[3] **J.P. AUBIN ; F.H. CLARKE** : Shadow prices and duality.
SIAM J. Cont. V17 ; n°5 ; (1979) ; pp.567-586

[4] **J.P. AUBIN ; I. EKELAND** : Applied Nonlinear Analysis.
Wiley. Interscience (1984).

[5] **V. BARBU ; Th. PRECUPANU** : Convexity and optimization.
Sijthoff-Noordhoff (1978).

[6] **J. BORWEIN** : Multivalued convexity and optimization.
Math. prog. 13 (1977) pp.183-199.

[7] **C. CASTAING ; M. VALADIER** : Convex analysis and mesurable multifunctions.
Lecture Notes in Mathematics n°580. Pringer-Verlag (1977).

[8] **P.J. LAURENT** : Approximation et optimisation.
Hermann (1972).

[9] **P. PALLU DE LA BARRIERE** : On the cost of constraints.
in Math. theory of control ; ed. A.V. Balakrishnan, L.W. Neustadt Academic Press (1967).

[10] **S. ROBINSON** : Regularity and stability for convex multivalued functions.
Math. op.res. (1976) V°1, PP.130-143.

[11] **R.T. ROCKAFELLAR** : Lipschitzian properties of multifunctions.
à paraître dans Nonlinear Analysis.

[12] **R.T. ROCKAFELLAR** : Integral functionals, normal integrands and mesurable selections.
in Lecture notes in Math. n°543 (1975) pp.157-207.

[13] **R.T. ROCKAFELLAR** : Existence and duality theorems for convex Problems of Bolza.
Trans. of the A.M.S. Vol.159 (1971) pp.1-40.

[14] **R.T. ROCKAFELLAR** : Integrals which are convex Functionals II.
Pacific J. of Math. vol.39 n°2 (1971) pp.439-468.

[15] **R.T. ROCKAFELLAR** : Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations.
J. of Math. Anal. App. vol.32 n°1 (1970) pp.174-222.

[16] **R.T. ROCKAFELLAR** : State constraints in convex control problems of Bolza.
SIAM J. Control V.10 n°4 (1972) pp.691-715.

[17] **R.T. ROCKAFELLAR** : Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange.
Advances in Math. vol.15; n°3 ; (1975) pp.312-333.

[18] **C. URSESCU** : Multifunctions with closed convex graph.
Czecop Math. J. n°25 (1975) pp.438-441.

CHAPITRE III

FONCTION MARGINALE DE PENALITE

1 - INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de dégager à travers l'étude d'une fonction marginale quelques aspects nouveaux de dualité et de stabilité des pénalités extérieures ; afin d'en saisir la portée, il serait utile de rappeler les principaux résultats attachés à ces méthodes.

Supposons dans cette introduction le programme considéré du type :

$$(\mathcal{P}) \quad \left[\begin{array}{l} \hat{J} = \inf \{J(y) \ / \ g_i(y) \leq 0 \quad i=1,q \ ; \ g_i(y)=0 \quad i=q+1,m\} \\ \\ \text{où } J,\ g_i \ : Y \to \bar{\mathbb{R}} \ ; \ i=1,m \end{array} \right.$$

La pénalisation extérieure consiste en fait à associer à $(\mathcal{P})$ la fonction marginale h définie comme suit :

$$\left[\begin{array}{l} \qquad\qquad h(x) = \inf \{\phi(x,y) \ / \ y \in Y\} \text{ où} \\ \phi(x,y) = J(y) + x.P(y) \quad ; \quad P(y) = d(g_1(y),\ldots,g_m(y)) \quad \text{et} \\ d \geq 0 \text{ avec } d(v) = 0 \Longleftrightarrow v_i \leq 0 \ i=1,q \text{ et } v_i = 0 \quad i=q+1,m \end{array} \right.$$

En notant par S l'ensemble (éventuellement vide) des solutions de $(\mathcal{P})$, les résultats généraux [6,9] sur les pénalités se résument en fait en :

$$\left[\begin{array}{l} * \ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \hat{J} \\ * \ \limsup\limits_{\substack{x \to +\infty \\ \varepsilon \to 0+}} M_h(x,\varepsilon) \subset S \qquad \text{avec} \\ \quad M_h(x,\varepsilon) = \{y \ / \ \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon\} \ \forall (x,\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^2 \end{array} \right.$$

• Par ailleurs l'instabilité numérique des pénalités (x devant tendre vers l'infini), donna lieu à une recherche des pénalités dites exactes ; c'est-à-dire pour lesquelles il existe $\bar{x}$ fini, réalisant l'égalité

$$(P_{\bar{x}}) \quad \left[\ \hat{J} = h(\bar{x}) = \inf_{y \in Y} \phi(\bar{x},y) \right.$$

Sur cet aspect, nous pouvons citer [4,16,19] pour le cas convexe, [2,5,8,11,16] pour le cas continument différentiable et [17] pour le cas localement lipschitz ; et tous ces travaux ont consisté essentiellement à établir des correspondances entre les solutions locales de (P) et celles de $(P_{\bar{x}})$ et à définir des bornes pour $\bar{x}$.

Au plan de la dualité et dans le cas où $d(v) = \sum_{i=1}^{m} d_i(v_i)$, nous pouvons citer Fiacco-Mac.Cormik [6], Lootsma [12] et Auslender [1], qui ont montré sous des conditions de régularité (du second ordre), que pour $\overset{\ell}{x} \to +\infty$, tout $(\overset{\ell}{u},\overset{\ell}{y})$ défini par :

$$\left[\begin{array}{l} \overset{\ell}{y} \text{ est solution de } (P_{\overset{\ell}{x}}) \text{ et} \\ \overset{\ell}{u}_i = \overset{\ell}{x}.\dot{d}_i(g_i(\overset{\ell}{y})) \quad i=1,m \quad ; \ \dot{d}_i \text{ dérivée de } d_i \end{array}\right.$$

satisfait aux contraintes du programme dit dual :

$$(\mathcal{D}) \quad \left[\begin{array}{l} \sup\ [J(y) + \sum_{i=1}^{m} u_i.g_i(y)] \\ \nabla J(y) + \sum_{i=1}^{m} u_i.\nabla g_i(y) = 0 \\ u_i \geq 0 \qquad i=1,q \end{array}\right.$$

et que toute valeur d'adhérence $(\bar{u},\bar{y})$ est constituée d'une solution $\bar{y}$ de $(\mathcal{P})$ et d'un vecteur dual $\bar{u}$ attaché à $\bar{y}$.

Cependant Zangwill [19] remarque un caractère dual plus spécifique des pénalités, mais ne l'exploite pas ; il montre en effet que la fonction de pénalité ϕ, qu'il propose, satisfait à la relation :

$$\left[\ \sup_{x \geq 0} \inf_{y \in Y} \phi(x,y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \geq 0} \phi(x,y) \right.$$

et que dans le cas convexe, continument différentiable, le premier membre de cette égalité traduit le programme :

$$(\mathcal{D}_l)\quad \left[\begin{array}{l} \sup \phi(x,y) \\ \nabla y\ \phi(x,y) = 0 \\ \quad x \geq 0 \end{array}\right.$$

Il obtient ainsi des résultats comparables à ceux de [6]. Ces résultats furent ensuite étendus par Roode [16] et Palashek [14], dans le cadre des Lagrangiens généralisés.

Cependant, dans tous les cas, la dualité dégagée restait toujours attachée au dual $(\mathcal{D})$ qui nécessite au moins la différentiabilité. Pour notre part, nous abandonnons complètement ce point de vue, pour donner dans un cadre plus général un aspect dual spécifique des pénalités extérieures ; nous prouvons alors que :

(i) Les pénalités extérieures relèvent toutes d'un même schéma de résolution "type Uzawa" agissant sur un programme "sup-inf" ; et qu'une pénalité est exacte si et seulement si la fonction de pénalité correspondante admet un col à distance finie.

(2i) Nous déduisont alors aisément qu'une pénalité exacte est nécessairement non différentiable ; nous aurons alors étendu au cadre le plus général un résultat que Bertsekas [4] prouva dans le cas convexe et en dimension finie.

(3i) Nous prouvons enfin, dans une étude de stabilité, que relativement à une perturbation simple, les pénalités extérieures sont en général inf-stables et que toute forme de stabilité différentielle équivant à l'exactitude.

2 - SUR UN ASPECT DUAL DE LA PENALISATION EXTERIEURE

(Y,τ) étant un espace topologique, on considère le programme :

$$(\mathcal{P})\quad \left[\begin{array}{l} \inf J(y) \\ y \in A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i \end{array}\right.$$

où :

$$\left[\begin{array}{l} * \ \ A_i \text{ est fermé dans } Y \text{ (pour } \tau\text{) ; } i=1,m \\ * \ \ J : Y \to \bar{\mathbb{R}} \text{ est inf-compacte (pour } \tau\text{).} \end{array}\right.$$

---o---

Notons $X = \mathbb{R}^m$ et $W = \{x \in X \ / \ \mu(x) \geq 0\}$ où $\mu : X \to \mathbb{R} \ / \ \mu(x) = \min_{1 \leq i \leq m} x_i$

Définition 2.1 : On appellera pénalité pour (P), toute fonction $\phi : X \times Y \to \mathbb{R}$ telle que :

(1) $\phi(x,\cdot)$ est s.c.i sur Y, $\forall\, x \in W$

(2) $\phi(x,y) = J(y)$ si $y \in A$ ou si $x = 0$

(3) $\phi(x,y) > J(y)$ si $y \notin A$ et $x \in \operatorname{int} W$

(4) $\phi(x,y) > \phi(x',y)$ si $y \notin A$ et $x-x' \in \operatorname{int} W$

(5) $\lim\limits_{\mu(x)\to+\infty} \phi(x,y) = +\infty$ si $y \notin A$.

---o---

Définition 2.2 : On appellera pénalité pour le domaine A, toute fonction $\phi_A : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$, satisfaisant à (1) - (5) ci-dessus avec $J \equiv 0$.

---o---

Remarque 2.1 : Il est aisé de voir que ϕ est une pénalité pour (P) si et seulement si il existe une pénalité ϕ_A pour A telle que :

$$\phi(x,y) = J(y) + \phi_A(x,y) \quad \forall\, (x,y) \in X \times Y$$

---o---

Suivant Bertsekas [3], nous pouvons remarquer que toutes les méthodes de pénalités classiques (m=1) traduisent essentiellement la relation :

$$\lim_{x\to+\infty} \inf_{y\in Y} \phi(x,y) = \inf_{y\in Y} \lim_{x\to+\infty} \phi(x,y) = \hat{J}$$

cette relation s'étend aisément au cas vectoriel (m>1) pour $\mu(x)\to+\infty$; mais en fait nous avons la relation de dualité suivante :

Proposition 2.1 : [dualité I]

Toute pénalité ϕ pour (P) satisfait à l'égalité de dualité

$$\left[\ \inf_{y\in Y} \sup_{x\in W} \phi(x,y) = \sup_{x\in W} \inf_{y\in Y} \phi(x,y)\right.$$

---o---

La preuve utilise les éléments et résultats suivants :

Définition 2.3 :

1. $h : W \to \bar{\mathbb{R}} \quad / \quad h(x) = \inf\limits_{y \in Y} \phi(x,y)$

est dite fonction marginale de pénalité

2. $M_h : W \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows Y \quad / \quad M_h(x,\varepsilon) = \{y \ / \ \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon\}$

le minimiseur correspondant

---o---

Proposition 2.2 :

(i) h est finie sur W et satisfait à

$$\sup_{x \in W} h(x) = \hat{J}$$

(2i) Pour tout $\lambda \geq 0$ fini

$$M_h(W \times [0,\lambda]) = \bigcup_{\substack{x \in W \\ 0 \leq \varepsilon \leq \lambda}} M_h(x,\varepsilon) \text{ est relativement compact.}$$

Preuve :

* J étant inf-compacte, il existe α fini tel que :

$$(1) \qquad -\infty < \alpha \leq \inf_{y \in Y} J(y) \leq \inf_{y \in A} J(y) = \hat{J} < +\infty$$

Par ailleurs la définition de ϕ assure que :

$$(2) \qquad \inf_{y \in Y} J(y) \leq \inf_{y \in Y} \phi(x,y) = h(x) \leq \inf_{y \in A} \phi(x,y) = \hat{J}$$

par suite (1) et (2) menent à :

$$(3) \qquad -\infty < \alpha \leq h(x) \leq \hat{J} < +\infty \qquad \forall\ x \in W \text{ ; d'où (i)}$$

* Soient $\lambda \geq 0$ fini et $(x,\varepsilon) \in W \times [0,\lambda]$; alors :

$y \in M_h(x,\varepsilon) \Longleftrightarrow J(y) \leq \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon \leq \hat{J} + \lambda$; et donc

$M_h(x,\varepsilon) \subset \{y \ / \ J(y) \leq \hat{J} + \lambda\}$ qui est compact ; d'où (2i)

* Soit enfin $(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y},\varepsilon_\ell)$ telle que :

$$\begin{cases} \overset{\ell}{y} \in M_h(\overset{\ell}{x}\,,\varepsilon_\ell) \ ; \ \overset{\ell+1}{x} - \overset{\ell}{x} \in W \quad \forall \ell \\ \mu(\overset{\ell}{x}) \to +\infty \quad \text{et} \quad \varepsilon_\ell \to 0_+ \end{cases}$$

(ε_ℓ) tendant vers zéro, $(\overset{\ell}{y})$ est relativement compacte, puisque pour ℓ suffisamment grand :

$$J(\overset{\ell}{y}) \leq \phi(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y}) \leq h(\overset{\ell}{x}) + \varepsilon \leq \hat{J} + 1$$

quitte à extraire des sous suites, nous pouvons supposer que $(\overset{\ell}{y})$ converge vers $\bar{y}$.

Nous affirmons alors que $\bar{y} \in A$; sinon $\phi(\overset{\ell}{x},\bar{y}) \to +\infty$ par suite il existerait ℓ_1 tel que :

$$\phi(\overset{\ell_1}{x},\bar{y}) \geq |4\hat{J}| + 1.$$

* $\phi(\overset{\ell_1}{x},.)$ étant s.c.i, il existerait ℓ_2 tel que :

$$\forall \ell \geq \ell_2,\ \phi(\overset{\ell_1}{x},\overset{\ell}{y}) \geq |3\hat{J}| + 1$$

* Soit $\ell \geq \max\{\ell_1,\ell_2\}$ et tel que $\varepsilon_\ell < 1$; alors :

$$\overset{\ell}{x} - \overset{\ell_1}{x} \in \text{int } W \text{ et } \phi(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y}) \geq \phi(\overset{\ell_1}{x},y) \geq |3\hat{J}|+1$$

ce qui rapproché de (2) mènerait à :

$$|3\hat{J}|+1 \leq \phi(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y}) \leq h(\overset{\ell}{x}) + \varepsilon_\ell \leq \hat{J}+1.$$

contradiction qui prouve que $\bar{y} \in A$.

* Et comme

$$J(\overset{\ell}{y}) \leq \phi(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y}) \leq h(\overset{\ell}{x}) + \varepsilon_\ell \leq \hat{J} + \varepsilon_\ell$$

le passage à la limite donne :

$$J(\bar{y}) \leq \liminf J(\overset{\ell}{y}) \leq \liminf \varepsilon_\ell + \hat{J} = \hat{J}$$

c'est-à-dire l'optimalité de $\bar{y}$.

* On conclut en remarquant simplement que :

$$\hat{J} = J(\bar{y}) \leq \liminf h(\overset{\ell}{x}) \leq \limsup h(\overset{\ell}{x}) \leq \hat{J}.$$

---o---

<u>Preuve de la proposition 2.1</u>

Il est aisé de vérifier que :

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in W} \phi(x,y) = \inf_{y \in A} J(y) = \hat{J}$$

et donc tout revient à prouver que :

$$\sup_{x \in W} \inf_{y \in Y} \phi(x,y) = \sup_{x \in W} h(x) = \hat{J}$$

ce qu'exprime précisément la proposition 2.2.

3 - <u>PROGRAMME DUAL ET PENALITES EXACTES</u>

Le primal $(\mathcal{P})$ a donc même valeur que le dual :

$$(\mathcal{D}) \quad \left[\begin{array}{l} \sup h(x) \\ x \in W \end{array}\right.$$

En fait leurs solutions se correspondent en toute généralité comme suit :

<u>Proposition 3.1</u> : [dualité II]

Pour toute pénalité ϕ et pour tout $\varepsilon \geq 0$ fini, nous avons :

(i) $\bar{x} \in W$ est ε-solution de $(\mathcal{D})$ si et seulement si $A \cap M_n(\bar{x},\varepsilon) \neq \emptyset$

(2i) auquel cas, tout $\bar{y} \in A \cap M_n(\bar{x},\varepsilon)$ est ε-solution de $(\mathcal{P})$.

---o---

<u>Preuve</u>

* $\bar{x} \in W$ est ε-solution de $(\mathcal{D})$ si et seulement si

(1) $$\hat{J} \leq h(\bar{x}) + \varepsilon$$

alors toute solution $\hat{y}$ de (P) (et il en existe) satisfait à :

$$\hat{y} \in A \text{ et } \phi(\bar{x},\hat{y}) = \hat{J}(\hat{y}) = \hat{J} \leq h(\bar{x}) + \varepsilon ;$$

Par suite il existe bien $\hat{y} \in A \cap M_h(\bar{x},\varepsilon)$.

* Réciproquement si $\bar{y} \in A \cap M_h(\bar{x},\varepsilon)$, nous avons :

$$\hat{J} \leq J(\bar{y}) = \phi(\bar{x},\bar{y}) \leq h(\bar{x}) + \varepsilon \leq \hat{J} + \varepsilon$$

et donc $\bar{x}$ satisfait (1) et $\bar{y}$ est ε-solution de $(\mathcal{P})$.

---o---

Remarques 3.1 :

1) Pour ε=o, nous obtenons un résultat de dualité complète.

2) Rappelons qu'en programmation mathematique, une pénalité scalaire (m=1) est dite exacte s'il existe $\bar{x}\geq 0$ fini tel que :

$$(*) \quad \left[\; h(\bar{x}) = \inf_{y\in Y} \phi(\bar{x},y) = \hat{J} \right.$$

cette définition s'étend évidemment au cas vectoriel (m>1) ; mais en remarquant que (*) signifie que $\bar{x}$ est solution du dual $(\mathcal{D})$, nous pouvons grâce à la proposition 3.1 (i) définir l'exactitude comme suit :

Définition 3.1 :
Une pénalité ϕ pour $(\mathcal{P})$ sera dite exacte si :

$$\exists\, \bar{x} \in W \text{ avec } |x| < +\infty \text{ et } A \cap M_h(\bar{x},0) \neq \emptyset$$

on dira aussi que ϕ est exacte en $\bar{x}$.

---o---

Proposition 3.2 :
Une pénalité ϕ est exacte si et seulement si elle admet un col $(\bar{x},\bar{y})$ sur $W\times Y$ avec $|\bar{x}|<+\infty$; auquel cas ϕ est exacte en $\bar{x}$ et $\bar{y}$ est solution de $(\mathcal{P})$.

---o---

Preuve

* Si ϕ est exacte, il existe $\bar{x} \in W$ tel que $|\bar{x}|<+\infty$ et $A \cap M_h(\bar{x},0)\neq\emptyset$; nous savons alors par la proposition 3.1 que :

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x} \text{ est solution de } (\mathcal{D}) \\ \forall\ \bar{y} \in A \cap M_h(\bar{x},0) \text{ est solution de } (\mathcal{P}) \text{ et} \\ h(\bar{x}) = \hat{J} = J(\bar{y}) \end{array}\right.$$

ce qui signifie que $(\bar{x},\bar{y})$ est un col de ϕ sur $W\times Y$ avec $|x|<+\infty$.

* Réciproquement si $(\bar{x},\bar{y})$ est un tel col ; nous savons (comme résultat classique sur les cols) que $\bar{x}$ est solution de $(\mathcal{D})$; ce qui équivaut (propo. 3.1) à $A \cap M_h(\bar{x},0) \neq \emptyset$; d'où l'exactitude.

---o---

Proposition 3.3 :

On suppose ici qu' Y est un espace vectoriel normé ; alors toute pénalité exacte est nécessairement non différentiable.

---o---

Preuve

* Nous savons qu'il existe une pénalité ϕ_A pour A telle que :

$$\phi(x,y) = J(y) + \phi_A(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in W \times Y$$

* Par suite, si ϕ est différentiable en y, $J(.) = \phi(0,.)$ et $\phi_A(x,.) = \phi(x,.) - J(.)$, sont différentiables en y.

* Supposons ϕ exacte en $\bar{x} \in W$, alors il existe $\bar{y} \in A \cap M_n(\bar{x},0)$ avec

$$\hat{J} = \phi(\bar{x},\bar{y}) = \inf_{y\in Y} \phi(\bar{x},y) \text{ ; par suite}$$

$$\nabla_y\phi(\bar{x},\bar{y}) = \nabla J(\bar{y}) + \nabla_y\ \phi_A(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

* Et comme $\phi_A \geq 0$, $\phi_A(\bar{x},.)$ atteint son minimum libre sur A, donc au point $\bar{y}$; ce qui donne $\nabla_y\ \phi_A(\bar{x},\bar{y}) = 0$, et mène au résultat absurde $\nabla J(\bar{y}) = 0$.

---o---

Conclusion :

Ainsi pour des programmes dont l'objectif J atteint son minimum libre hors des contraintes (ce qui est l'objet même de l'optimisation contrainte), une pénalité exacte ne peut être différentiable. Ce résultat connu dans le cas convexe, en dimension finie [4], est à présent étendu au cas général et sans convexité.

Remarque 3.2 :

Si ϕ est exacte en $\bar{x}$, $\hat{J} = \inf_{y \in Y} \phi(\bar{x},y)$ et $A \cap M_h(\bar{x},0) \neq \emptyset$; or ce qu'il est naturel d'attendre d'une pénalité exacte est qu'elle satisfasse à :

$$M_h(\bar{x},0) \subset A$$

Les deux résultats suivants répondent à cela.

---o---

Proposition 3.4 :

Si ϕ est exacte en $\bar{x} \in W$, alors :

$$M_h(x,0) \subset A, \ \forall\, x \ / \ x-\bar{x} \in \text{int } W.$$

Nous dirons alors que ϕ est totalement exacte en x.

---o---

Preuve :

* En revenant à la définition de ϕ, on voit aisément que :

$$h(\bar{x}) \leq h(x)$$

et comme ϕ est exacte en $\bar{x}$, nous avons en fait :

$$\hat{J} = h(\bar{x}) \leq h(x) \leq \sup_{x' \in W} h(x') = \hat{J}$$

* Soit donc $y \in M_h(x,0)$; alors $\phi(x,y) = h(x) = \hat{J}$, et en supposant $y \notin A$, nous aurions par définition de ϕ

$$\phi(\bar{x},y) < \phi(x,y) \text{ ; et par suite :}$$

$$\hat{J} = h(\bar{x}) \leq \phi(\bar{x},y) < \phi(x,y) = h(x) = \hat{J}$$

contradiction qui montre qu'en fait $M_h(x,0) \subset A$.

---o---

Rappelons une définition :

Définition 3.2 (*)

Nous dirons qu'une pénalité $\bar{\phi}$ majore la pénalité ϕ si l'on a :

$$\bar{\phi}(x,y) > \phi(x,y) \quad \forall\, y \notin A,\ \forall\, x \in \text{int } W.$$

---o---

Notons que pour obtenir une majoration de ϕ, il suffit d'ajouter à ϕ une pénalité ϕ_A de A.

---o---

Proposition 3.5 :

ϕ et $\bar{\phi}$ étant des pénalités pour $(\mathcal{P})$, si ϕ est exacte en $\bar{x} \in$ int W, et si $\bar{\phi}$ majore ϕ, alors $\bar{\phi}$ est totalement exacte en $\bar{x}$.

---o---

Preuve :

Soient $\bar{h}$ la fonction marginale de pénalité associée à $\bar{\phi}$ et $y \in M_{\bar{h}}(\bar{x},o)$. En supposant $y \notin A$, nous avons la contradiction immédiate :

$$\hat{J} = h(\bar{x}) \leq \phi(\bar{x},y) < \bar{\phi}(\bar{x},y) = \bar{h}(\bar{x}) \leq \hat{J}$$

---o---

Remarque 3.3 :

Ainsi l'exactitude totale s'obtient à partir d'une pénalité exacte ϕ, par une perturbation positive soit de ϕ (majoration), soit de paramètre $\bar{x}$ $(x-\bar{x} \in \text{int } W)$.

---o---

(*) Il est à noter que dans le cas scalaire (m=1) la notion de majoration et la proposition correspondante sont dues à HUARD [9].

Le résultat suivant précise une propriété des pénalités scalaires (m=1)

Proposition 3.6 :

On suppose que m=1 et que la pénalité ϕ est concave en x sur $\mathbb{R}_+$; alors s'il existe $x_2 > x_1 \geq 0$ tels que les programmes :

$$\left[\begin{array}{ll} \inf\limits_{y\in Y} \phi(x_1,y) & \text{(I)} \\ & \\ \inf\limits_{y\in Y} \phi(x_2,y) & \text{(II)} \end{array}\right.$$

ont même valeur, celle-ci est précisément $\hat{J}$ et toute solution de (II) est solution de $(\mathcal{P})$.

---o---

Preuve :

* Toute solution de (II) sera solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si ϕ est totalement exacte en x_2 ; ce qui sera le cas dès que ϕ est exacte en x_1 (propo. 3.4).

* Or il est aisé de voir que sous nos hypothèses la fonction marginale h est concave, croissante sur $\mathbb{R}_+$;
  et comme $h(x_1) = h(x_2)$ avec $x_1 > x_2$, nécessairement :

  $$\begin{array}{lll} h(x) \leq h(x_1) & \forall\ x \leq x_1 & \text{et} \\ h(x) = h(x_1) & \forall\ x \geq x_1 & \end{array}$$

  et donc $\sup\limits_{x\geq 0} h(x) = h(x_1) = \hat{J}$.

---o---

Remarque 3.4 :

Cette propriété ne s'étend pas au cas vectoriel (m>1), mais fournit cependant un test d'arrêt intéressant pour les algorithmes de pénalités scalaires.

---o---

4 - PENALITES AFFINES

Définition 4.1 :

(Y,τ) étant un espace topologique, une pénalité ϕ pour (P) sera dite affine, si elle l'est en x sur W.

---o---

On montre alors aisément que ϕ est de la forme :

$$\left[\begin{array}{l} \phi(x,y) = J(y) + \langle x,P(y)\rangle \text{ où} \\ \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ désigne le produit scalaire de } \mathbb{R}^m \text{ et} \\ P \text{ une fonction vectorielle à composantes } P_i,\ i=1,m\ ; \\ \text{telles que :} \\ P_i : Y \to \mathbb{R}_+ \ /\ P_i(y) = 0 \Longleftrightarrow y \in A_i \qquad i=1,m. \end{array}\right.$$

---o---

Proposition 4.1 :

Pour toute pénalité affine ϕ :

(i) h est concave, propre, continue sur int W.

(2i) En tout $x \in$ int W, le surdifférentiel de h, noté $\bar{\partial}h(x)$ est non vide, convexe, compact et est donné par :

$$\bar{\partial}h(x) = \overline{co}\left[\bigcup_{y\in M_h(x,0)} \{P(y)\}\right]$$

---o---

Preuve :

* h est finie sur W (propo. 2.2), concave comme infimum de fonctions affines ; h est donc continue sur int W, puisque $W \subset \mathbb{R}^m$.

* Son surdifférentiel en $x \in$ int W est donc non vide, convexe, faiblement compact, et comme $W \subset \mathbb{R}^m$, le compacité est forte.

* Sachant que $\bigcup_{x\in W} M_h(x,0)$ est relativement compact (propo. 2.2), il existe un compact C tel que :

$$h(x) = \inf_{y\in C} \phi(x,y) \qquad \forall\, x \in W.$$

* On peut donc user d'un résultat de Valadier [[10] p.355] qui assure que :

$$\bar{\partial} h(x) = \overline{co}\left[\bigcup_{y \in M_h(x,0)} \bar{\partial}_y \phi(x,y)\right] \quad \forall x \in \text{int } W.$$

et sachant que $\bar{\partial}_y\ \phi(x,y) = \{P(y)\}$, le résultat annoncé suit :

---o---

Proposition 4.2 :

Pour toute pénalité affine ϕ, h admet en tout $x \in$ int W, une dérivée directionnelle $\dot{h}(x;\cdot)$ finie, donnée par :

$$\dot{h}(x;s) = \inf_{y \in M_h(x,0)} \langle s,P(y)\rangle$$

et si P est continue, l'infimum est en fait un minimum.

---o---

Preuve :

* L'existence de $\dot{h}(x;s)$ est conséquence d'un résultat général d'analyse convexe [[10] p.354] qui assure en outre que :

$$\dot{h}(x;s) = \min_{s^* \in \bar{\partial} h(x)} \langle s,s^*\rangle$$

* Notons $D(x) = \bigcup_{y \in M_h(x,0)} \{P(y)\}$; alors $\bar{\partial} h(x) = \overline{co}\ D(x)$ qui est compact et comme $s^* \to \langle s,s^*\rangle$ est linéaire continue on a :

$$\dot{h}(x;s) = \min_{s^* \in \overline{co}\ D(x)} \langle s,s^*\rangle = \inf_{s^* \in D(x)} \langle s,s^*\rangle = \inf_{y \in M_h(x,0)} \langle s,P(y)\rangle$$

* $M_h(x,0) = \{y \ / \ \phi(x,y) \leq h(x)\}$ est compact, comme fermé dans un compact C (cf. preuve propo. 4.1) ; et si P est continue, il en est de même de $y \to \langle s,P(y)\rangle$, et l'infimum est alors un minimum.

---o---

Interprétation dans le cas scalaire (m=1)

La pénalité dans ce cas est de la forme :

$$\begin{cases} \phi(x,y) = J(y) + x.Q(y) \text{ où } x \in \mathbb{R}_+ \text{ et} \\ Q : Y \to \mathbb{R}_+ \ / \ Q(y) = 0 \Longleftrightarrow y \in A. \end{cases}$$

récapitulons les propriétés dégagées :

(a) h est concave, propre, continue sur $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ et satisfait à

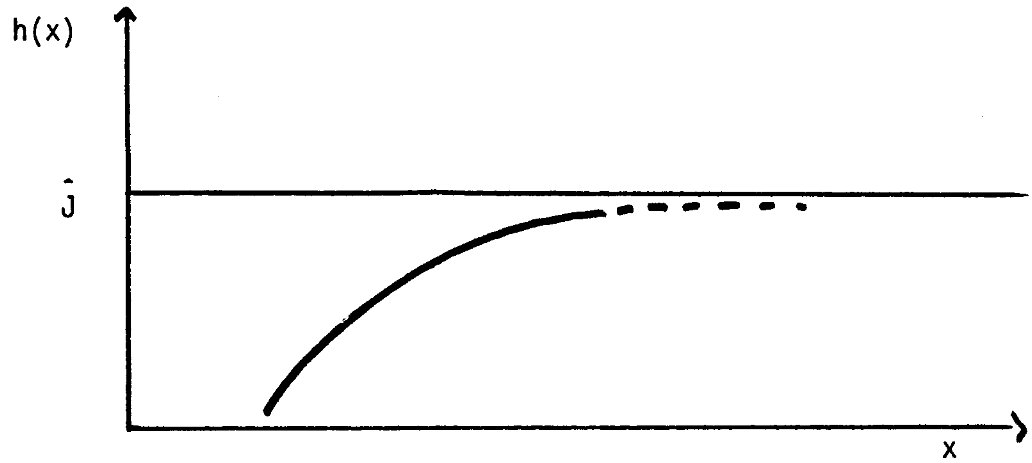
$$\sup_{x \geq 0} h(x) = \hat{J}$$

(b) en tout $x > 0$, h possède une dérivée à droite finie donnée par :

$$\dot{h}(x_+) = \min_{y \in M_h(x,0)} Q(y) \geq 0$$

Le graphe de h a donc l'une des formes suivantes :

lère forme



ainsi la droite $\Delta(x) = \hat{J}$ est asymptote au graphe de h ; dans ce cas $\sup_{x \geq 0} h(x)$ est réalisé pour $x = +\infty$.

Mais comme h est une fonction d'une variable réelle, de dérivée à droite toujours positive, on voit clairement que :

— Le choix de paramètres x tendant vers l'infini, dans la pénalisation correspond en fait à un déplacement selon la direction de plus forte pente de la fonction marginale h.

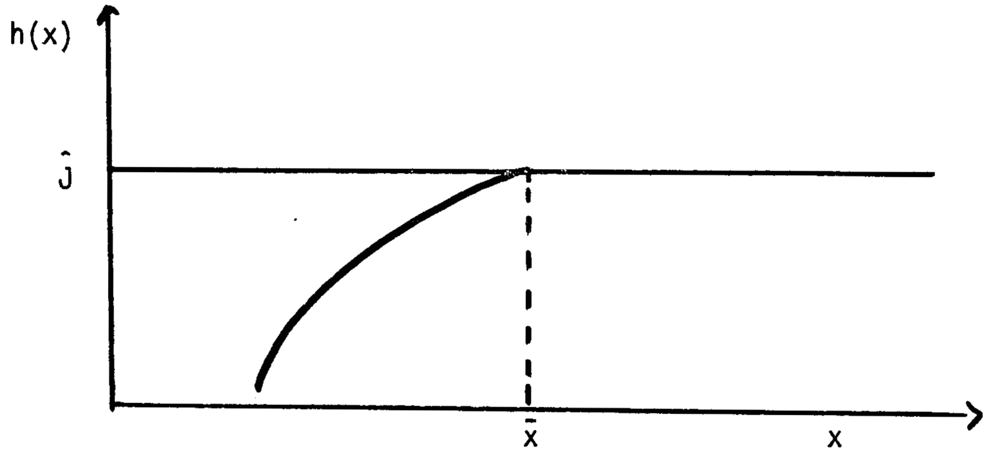
Ainsi les méthodes classiques de pénalités extérieures relèvent toutes d'un même schéma de résolution "type Uzawa" agissant sur :

$$\sup_{x \geq 0} \inf_{y \in Y} \phi(x,y)$$

ce qui suggère naturellement le cas vectoriel.

---o---

2ème forme



Ainsi $\sup_{x\geq 0} h(x)$ est atteint en $\bar{x}$ à distance finie ; $\bar{x}$ est donc solution du dual ; ce qui par la proposition 3.1 assure que $A \cap M_h(\bar{x},0) \neq \emptyset$ et signifie que la pénalité est exacte.

---o---

5 - ALGORITHME CONTROLE DE PENALISATION

La preuve de la proposition 2.2 a bien montré qu'une condition suffisante de convergence des pénalités est que la suite $({}^{\ell}y, {}^{\ell}x)$ satisfasse aux conditions :

$$(\mathrm{I}) \quad \left[\begin{array}{ll} * & \mu({}^{\ell+1}x - {}^{\ell}x) \geq 0 \text{ et } \mu({}^{\ell}x) \to +\infty \\ * & \forall \ell,\ {}^{\ell}y \in M_h({}^{\ell}x, \varepsilon_{\ell}) \text{ où } \varepsilon_{\ell} \to 0+ \end{array}\right.$$

Auquel cas la convergence a lieu au sens suivant :

$$(\mathrm{II}) \quad \left[\begin{array}{ll} * & \lim h({}^{\ell}x) = \hat{J} \\ * & \text{toute valeur d'adhérence de } ({}^{\ell}y) \text{ est solution de } (\mathcal{P}) \end{array}\right.$$

Et c'est sous cette forme qu'opèrent tous les algorithmes de pénalités. Or les conditions (I) ne distinguent en rien les pénalités exactes de celles qui ne le sont pas : et le choix à priori d'une suite $({}^{\ell}x)$ telle que (I), a pour conséquence évidente une instabilité numérique.

Aussi proposons-nous une modification simple qui permet un meilleur contrôle de la suite $({}^{\ell}x)$ et qui mène à des algorithmes convergents au sens

(II) et finis (au sens du nombre d'itérations ℓ) si et seulement si la pénalité correspondante est exacte.

---o---

<u>Algorithme</u> :
Soit $\overset{\circ}{x} \in W$; faire $\ell = 0$.

<u>Itération ℓ</u> :

(*) Déterminer $\overset{\ell}{y} \in M_h(\overset{\ell}{x},0)$

(2*) si $P(\overset{\ell}{y}) = 0$ stop

(3*) sinon faire :

$$\overset{\ell+1}{x}_i = \overset{\ell}{x}_i + \max \{P_i(\overset{\ell}{y}) \; ; \; \frac{1}{\ell}\} \quad i=1,m$$

aller en (*) avec $\ell+1$.

<u>Proposition 5.1</u> :

(i) L'algorithme est fini si et seulement si la pénalité est exacte.

(2i) Si l'algorithme est infini, il converge au sens (II) ci-dessus et $\lim P(\overset{\ell}{y}) = 0$.

---o---

<u>Preuve</u> :
Notons d'abord que :

(1) $\overset{\ell+1}{x}_i - \overset{\ell}{x}_i \geq \frac{1}{\ell}$ et donc $\overset{\ell}{x}_i \geq \overset{\circ}{x}_i + \sum_{q=1}^{\ell-1} \frac{1}{q}$; $\forall \ell$

* Il est clair que si l'algorithme est fini, il existe ℓ tel que $P(\overset{\ell}{y}) = 0$ et $\overset{\ell}{y} \in M_h(\overset{\ell}{x};0)$; i.e $\overset{\ell}{y} \in A \cap M_h(\overset{\ell}{x},0)$; d'où l'exactitude.

* Réciproquement si ϕ est exacte en $\bar{x}$, grâce à (1), il existe ℓ tel que :

(2) $\overset{\ell}{x}_i > \bar{x}_i$ pour tout i.

et pour le premier ℓ tel que (2), ϕ serait totalement exacte en $\overset{\ell}{x}$; i.e $M_h(\overset{\ell}{x},0) \subset A$; et donc $P(\overset{\ell}{y}) = 0$; d'où la finitude de l'algorithme.

* Supposons à présent l'algorithme infini, alors grâce à (1), on a :

(3) $\overset{\ell}{x}_i \to +\infty \quad \forall i$ et donc $\mu(\overset{\ell}{x}) \to +\infty$; d'où

$\lim h(\overset{\ell}{x}) = \sup\limits_{x \in W} h(x) = \hat{J}$ (cf. preuve propo. 2.2)

Par ailleurs, J étant inf-compacte,

$\exists\ \alpha \ / \ -\infty < \alpha \leq J(\overset{\ell}{y}) \quad \forall \ell$; par suite

$0 \leq \langle \overset{\ell}{x}, P(\overset{\ell}{y}) \rangle = h(\overset{\ell}{x}) - J(\overset{\ell}{y}) \leq \hat{J} - \alpha < +\infty.$

ce qui rapproché de (3) mène à $\lim P(\overset{\ell}{y}) = 0$.

---o---

Remarque 5.1 :
Il est à noter qu'aucune hypothèse n'est formulée quant à la fonction P.

---o---

6 - STABILITE DES PENALITES AFFINES

Nous savons, par la proposition 2.2, qu'il existe un compact C tel que :

$$M_h(x,0) \subset C \qquad \forall\ x \in W$$

Aussi peut-on sans perte de généralité supposer que $A \subset C$; ce que nous ferons dans tout ce qui suit :

Définition 6.1 :
A $(\mathcal{P})$ est associée la fonction de perturbation k définie par :

$k : W \to \bar{\mathbb{R}} \quad / \quad k(u) = \inf\limits_{y \in F(u)} J(y)$ où

$F : W \rightrightarrows Y \quad / \quad F(u) = \hat{A}(u) \cap C$ et

$\hat{A} : W \rightrightarrows Y \quad / \quad \hat{A}(u) = \{y \ / \ P_i(y) \leq u_i \ ; \ i=1,m\}.$

---o---

Remarque 6.1 :
$\forall\ u, v \in W$ tels que $u-v \in W$, on a :

$A = \hat{A}(0) \subset \hat{A}(v) \subset \hat{A}(u)$ et donc

$\hat{J} = k(0) \geq k(v) \geq k(u).$

Proposition 6.1 :

Si $\forall i$, P_i est s.c.i, alors F est continue à l'origine pour la topologie induite sur W.

---o---

Preuve :

* F étant à valeurs dans le compact C, F sera s.c.s dès qu'elle sera fermée ; ce qui se déduit aisément de la fermeture de $\hat{A}$; or il est facile de voir que $G(\hat{A})$ est fermé puisque P_i est s.c.i.

* F est s.c.i ; en effet pour toute suite généralisée $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans W de limite 0 et pour tout $y \in F(0) = \hat{A}(0) \cap C = A \cap C = A$, il existe bien $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ définie par $y_\lambda = y$ et telle que $y_\lambda \in F(u_\lambda)$ $\forall\lambda$.

---o---

Définition 6.2 : [inf-stabilité]

La pénalité sera dite inf-stable si k est s.c.i à l'origine.

---o---

Proposition 6.2 :

Si $\forall i$, P_i est s.c.i, la pénalité est inf-stable.

---o---

Preuve :

* J étant inf-compacte est en particulier s.c.i ; et comme F est continue à l'origine et à valeurs compactes, la semi-continuité inférieure de $k(\cdot) = \inf\limits_{y\in F(\cdot)} J(y)$ est une propriété classique des fonctions marginales.

---o---

Remarque 6.2 :

Ainsi toutes les pénalités affines classiques sont inf-stables.

---o---

Proposition 6.3 :
$\forall \bar{x} \in W$, $\forall \bar{y} \in M_h(\bar{x},0)$, $\bar{y}$ est solution du programme :

$$\left[\begin{array}{l} \inf J(y) \\ y \in D(\bar{y}) \cap C \end{array}\right.$$

où $\quad D(\bar{y}) = \{y \;/\; P_i(y) \le P_i(\bar{y}) \;;\; i=1,m\}$.

Preuve :

* Si $\bar{y} \in M_h(\bar{x},0) \subset C$, on a $\bar{y} \in C$, et :

$$J(\bar{y}) + <\bar{x},P(\bar{y})> \le J(y) + <\bar{x},P(y)> \qquad \forall\, y \in Y$$

c'est-à-dire :

$$J(\bar{y}) - J(y) \le <\bar{x}, P(y) - P(\bar{y})>$$

et comme $\bar{x}_i \ge 0$ $\forall i$, on a immédiatement :

$$y \in D(\bar{y}) \implies J(\bar{y}) \le J(y).$$

---o---

Remarque 6.1 : [conséquences pratiques]

* Soit $(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y})$ où $\overset{\ell}{y} \in M_h(\overset{\ell}{x},0)$, une suite engendrée par un algorithme quelconque de pénalités extérieures affines ; alors :

(1) $\quad \overset{\ell}{y}$ est solution de $\inf \{J(y) \;/\; y \in D(\overset{\ell}{y})\}$ (propo. 6.3)

Or en remarquant que :

$$D(\overset{\ell}{y}) = \hat{A}(\overset{\ell}{u}) \quad \text{où} \quad \overset{\ell}{u} = P(\overset{\ell}{y})$$

on aboutit à :

(2) $\quad J(\overset{\ell}{y}) = k(P(\overset{\ell}{y}))$.

Et sachant que :

$$h(\overset{\ell}{x}) = J(\overset{\ell}{y}) + <\overset{\ell}{x},P(\overset{\ell}{y})> \le \hat{J}$$

on obtient :

$$h(\overset{\ell}{x}) - J(\overset{\ell}{y}) = <\overset{\ell}{x},P(\overset{\ell}{y})> \ge 0 \text{ et donc}$$

(3) $\quad J(\overset{\ell}{y}) \le \hat{J}$

Et comme dans tous les cas $P(\overset{\ell}{y}) \to 0$ et que k est s.c.i à l'origine (propo. 6.2), on aboutit avec (3) à :

$$\left[\begin{array}{l} \hat{J} = k(0) \leq \liminf k(P(\overset{\ell}{y})) = \liminf J(\overset{\ell}{y}) \leq \ldots \\ \qquad \ldots \leq \limsup k(P(\overset{\ell}{y})) = \limsup J(\overset{\ell}{y}) \leq \hat{J} \end{array}\right.$$

et donc en fait à :

$$(4) \quad \left[\begin{array}{l} \lim J(\overset{\ell}{y}) = \lim k\,[P(\overset{\ell}{y})] = \hat{J} \; ; \text{ d'où} \\ P(\overset{\ell}{y}) \text{ voisine de } 0 \Longrightarrow J(\overset{\ell}{y}) \text{ voinine de } \hat{J}. \end{array}\right.$$

* Par ailleurs la proposition 4.2 donne aisément :

$$(5) \quad \left[\; \forall\, s \in W,\ |s| \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \dot{h}(\overset{\ell}{x};s) \leq |P(\overset{\ell}{y})|. \right.$$

* Et comme enfin h est concave, continue sur int W, il ressort clairement de (4) et (5) que du point de vue algorithmique, le test d'arrêt :

$$(T_1) : \quad |P(\overset{\ell}{y})| \leq \varepsilon$$

est convenable et sera satisfait certainement avant (au sens du nombre d'itérations) que le test classique :

$$(T_2) : \quad 0 \leq h(\overset{\ell}{x}) - J(\overset{\ell}{y}) = \langle \overset{\ell}{x}, P(\overset{\ell}{y}) \rangle \leq \varepsilon.$$

---o---

Proposition 6.4 :
Les fonctions marginales h et de perturbation k satisfont à :

$$\forall\, x \in W,\ h(x) = \inf_{u \in W} [k(u) + \langle x,u \rangle]$$

---o---

Preuve :
Soit $K : W \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ / $K(u,y) = \begin{cases} J(y) & \text{si } y \in F(u) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors $k(u) = \inf_{y \in Y} K(u,y)$ et donc pour tout $x \in W$

$$\inf_{u\in W} [k(u) + \langle x,u\rangle] = \inf_{y\in Y} \inf_{u\in W} [K(u,y) + \langle x,u\rangle]$$

Or il est aisé de voir que :

$$\inf_{u\in W} [K(u,y) + \langle x,y\rangle] = \begin{cases} J(y) + \langle x,P(y)\rangle & \text{si } y \in C \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

par conséquent :

$$\inf_{u\in W} [k(u) + \langle x,u\rangle] = \inf_{y\in C} [J(y) + \langle x,P(y)\rangle] = h(x)$$

puisque $M_h(x,0) \subset C$.

---o---

Définition 6.3 :

On dira que $z \in W$ est un sous gradient de k à droite en $u \in W$, si :

$$k(v) - k(u) \geq \langle z,v-u\rangle \quad \forall\, v \in W \,/\, v-u \in W$$

et on notera $\partial^+ k(u)$ l'ensemble éventuellement vide de ces sous gradients.

---o---

Définition 6.4 : [inf-diff-stabilité]

On dira que la pénalité est inf-diff-stable si :

$$\partial^+ k(0) \neq \emptyset.$$

---o---

Proposition 6.5 :

Une pénalité affine est inf-diff-stable si et seulement si elle est exacte ; plus précisément nous avons :

$$\phi \text{ exacte en } \bar{x} \iff -\bar{x} \in \partial^+ k(0).$$

---o---

Preuve :

(a) Condition suffisante : $\forall\, z \in \partial^+ k(0)$ et $\forall\, u \in W$, on a :

$$0 \geq k(u) - k(0) \geq \langle z,u\rangle \; ; \qquad \text{d'où}$$

$$<z,u> \leq 0 \quad \forall\, u \in W \; ; \text{ i.e } z_i \leq 0 \quad \forall\, i=1,m \; ; \text{ et :}$$

$$k(0) = \hat{J} = \inf_{u\in W} [k(u) - <z,u>] = h(-z).$$

et donc la pénalité est exacte en $x = -z$.

(b) Condition nécessaire : Si ϕ est exacte en x ; alors :

$$h(x) = \inf_{u\in W} [k(u) + <x,u>] = \hat{J} = k(0) \qquad \text{et donc :}$$

$$k(0) \leq k(u) + <x,u> \qquad \forall\, u \in W$$

c'est-à-dire $-x \in \partial^+ k(o)$.

---o---

Définition 6.5 : [stabilité locale]

On dire que ϕ est localement stable si :

$$\forall\, (\overset{\ell}{u}) \subset W \; ; \; \overset{\ell}{u} \to 0 \text{ et } \overset{\ell}{u} \neq 0 \quad \forall \ell, \text{ on a :}$$

$$\limsup \frac{k(\overset{\ell}{u}) - k(0)}{|\overset{\ell}{u}|} < +\infty$$

$$\left(\text{i.e } \liminf \frac{k(0) - k(\overset{\ell}{u})}{|\overset{\ell}{u}|} > -\infty \right)$$

---o---

C'est la forme de stabilité différentielle la plus faible que l'on puisse espérer ; cependant dans le cas des pénalités affines, nous avons la caractérisation suivante :

Proposition 6.6 :

Une pénalité affine est localement stable si et seulement si elle est exacte.

---o---

Preuve :

(a) Condition nécessaire : Si ϕ est exacte en x alors $-x \in \partial^+ k(0)$ grâce à la proposition 6.5 ; par suite :

$$0 \geq k(u) - k(0) \geq <-x,u> \qquad \forall\, u \in W.$$

Il est alors clair que :

$$|k(u) - k(0)| \le |x| \cdot |u| \qquad \forall\, u \in W$$

d'où évidemment la stabilité locale.

(b) Condition suffisante :

* Supposons la pénalité localement stable et non exacte ; et considérons une suite $(\overset{\ell}{x},\overset{\ell}{y})$ telle que :

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} \overset{\circ}{x},\ \overset{\ell+1}{x} - \overset{\ell}{x} \in W \quad \text{et} \quad \mu(\overset{\ell}{x}) \to +\infty \\ y_\ell \in M_h(\overset{\ell}{x},0) \end{array}\right.$$

nous savons alors que :

$$(2) \quad \left[\begin{array}{ll} h(\overset{\ell}{x}) = J(\overset{\ell}{y}) + \langle \overset{\ell}{x}, P(\overset{\ell}{y})\rangle & \\ J(\overset{\ell}{y}) = k(P(\overset{\ell}{y})) & \text{(cf. remarque 6.1)} \\ \lim P(\overset{\ell}{y}) = 0 & \text{(propo. 6.1)} \end{array}\right.$$

* La stabilité locale permet aisément d'assurer l'existence de $\beta>0$ fini tel que :

$$(3) \quad \left[\begin{array}{l} |k(0) - k(P(\overset{\ell}{y}))| \le \beta \sum_{i=1}^{m} P_i(\overset{\ell}{y}) \quad \forall\, \ell \quad \text{et donc} \\ \hat{J} = k(0) \le k(P(\overset{\ell}{y})) + \beta \sum_{i=1}^{m} P_i(\overset{\ell}{y}) \end{array}\right.$$

* Et comme $h(\overset{\ell}{x}) \le \hat{\hat{J}} = k(0)$, avec (2) on aboutit à :

$$\sum_{i=1}^{m} \overset{\ell}{x}_i \quad P_i(\overset{\ell}{y}) \le \beta \sum_{i=1}^{m} P_i(\overset{\ell}{y})$$

et sachant que $\overset{\ell}{x}_i \to +\infty$ et que $P_i(\overset{\ell}{y}) \ge 0 \quad \forall i$, la contradiction est immédiate.

Définition 6.6 : [stabilité d'ordre p]

La pénalité sera dite stable d'ordre $p \in \mathbb{N}$, s'il existe $\Pi : W \to \mathbb{R}$, admettant sur int W, des dérivées jusqu'à l'ordre p continues et telle que :

$$\left[\begin{array}{ll} k(0) = \Pi(0) & \text{et} \\ k(u) \ge \Pi(u) & \forall\, u \in W. \end{array}\right.$$

---o---

Cette forme de stabilité fut introduite par Rockafellar [15] dans le cadre de l'analyse marginale ; mais dans le cas des pénalités extérieures nous avons la caractérisation suivante :

Proposition 6.7 :

Une pénalité affine est exacte si et seulement si elle est stable d'ordre $p \geq 1$.

---o---

Preuve :

(a) Condition nécessaire : Si ϕ est exacte, en x, alors (propo. 6.5) $-x \in \partial^+ k(o)$; c'est-à-dire :

$$k(u) \geq k(0) + \langle -x,u \rangle \qquad \forall\, u \in W\ ;$$

par suite $\Pi(u) = k(0) - \langle x,u \rangle$ répond à la question.

(b) Condition suffisante : La stabilité d'ordre $p \geq 1$ assure en particulier

$$k(u) - k(0) \geq \Pi(u) - \Pi(0) = \langle \nabla\Pi(0), u \rangle + |u|\ \varepsilon(u)$$

où $\varepsilon(u) \to 0$ avec u ; et sachant que $k(0) \geq k(u) \quad \forall\, u \in W$; on aboutit à :

$$\frac{|k(0) - k(u)|}{|u|} \leq |\nabla\Pi(0)| + |\varepsilon(u)|$$

ce qui assure évidemment la stabilité locale (cf. déf. 6.5) qui, nous le savons (propo. 6.6) équivaut à l'exactitude.

---o---

CONCLUSION

Cette approche générale a permis d'unifier dans un cadre général ((y,τ) espace topologique) toutes les méthodes de pénalités extérieures, de dégager un caractère dual qui leur est spécifique et enfin de caractériser les pénalités exactes du point de vue de la stabilité.

Par ailleurs, l'aspect vectoriel montre clairement qu'il n'est pas nécessaire à priori de pénaliser toutes les contraintes de la même façon ; de plus toute cette étude peut être reprise en ne pénalisant que partiellement les contraintes ; plus précisément pour un domaine de la forme :

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i \right) \cap C$$

on peut définir une fonction marginale partielle de pénalité par :

$$h(x) = \inf_{y \in C} \phi(x,y) \qquad (*)$$

et tous les résultats dégagés précédemment persistent et si en outre C est compact, l'inf-compacité de l'objectif J est inutile.

Cette façon de faire, loin d'être guidée par un simple souci de généralisation, peut en fait présenter des avantages si l'on prend soin de n'introduire dans la fonction de pénalité ϕ que les contraintes non linéaires en égalité par exemple ; la sélection de ces contraintes se faisant bien entendu sur la base de la méthode choisie pour résoudre le programme (*).

---o---

BIBLIOGRAPHIE

[1] **A. AUSLENDER** : Méthodes et théorèmes de dualité.
RAIRO (4e année) NR1 (1970) pp. 9-45.

[2] **M.S. BAZARAA ; J.J. GOODE** : Sufficient conditions for a globally exact penalty function without convexity.
Math. Prog. Study 19 (1982) pp. 1-15.

[3] **D.P. BERTSEKAS** : Multipliers methods ; a survey.
Automatica. V.12 (1976) pp. 133-145.

[4] **D.P. BERTSEKAS** : Necessary and sufficient conditions for a penalty to be exact.
Math. Prog. V.9 (1975) pp. 87-99.

[5] **J.P. EVANS ; F.J. GOULD ; J.W. TOLLE** : Exact penaly function in nonlinear programming.
Math. Prog. V.4 (1973) pp.72-97.

[6] **A. FIACCO ; G.Mc.CORMICK** : Nonlinear programming.
J. Wiley ; New York (1968).

[7] **J. GAUVIN ; J.W. TOLLE** : Differential stability in nonlinear programming.
SIAM J. Cont. and Optim. Vol.15 ; n°2 (1977) pp. 294-311.

[8] **S.P. HAN ; O.L. MANGASARIAN** : Exact penalty function.
Math. Prog. V.17 (1979) pp; 251-269.

[9] **P. HUARD** : Algorithmes généraux.
Cours DEA, Lille (1972).

[10] **J.P. LAURENT** : Approximation et optimisation.
Dunod, (1972).

[11] **J.B. LASERRE** : Exact penalty functions and Lagrange Multipliers.
RAIRO Automatique ; Vol.14 ; n°2 ; (1980) pp. 117-125.

[12] **F.A. LOOTSMA** : Boundary properties of Penalty functions.
Thèse Eindoven (1970).

[13] **T. PIERTZYKOWSKI** : An exact potential method for constrained maxima.
SIAM J. Num. Anal. V.6 (1969) pp. 299-304.

[14] **M.A. POLLATSHEK** : Generalized duality theory in nonlinear programming.
Israelien Institud of Technology ; Mimeograph Serie n°122.

[15] **R.T. ROCKAFELLAR** : Augmented Lagrande Multiplier function and duality.
SIAM J. Cont. V.12 ; n°2 ; (1974) pp. 268-285.

[16] **J.D. ROODE** : Generalized Lagrangien Function in Mathematical Programming.
Thèse Leiden (1968).

[17] **E. ROSENBERG** : Exact penalty functions and stability in locally lipschitz programming.
Math. Prog. 30 (1984) pp. 340-356.

[18] **A. WIERZBICKI ; S. KURCYUSZ** : Projection on a cone ; penalty functional and duality theory.
SIAM J. Cont. ; V.15 , n°1 (1977) pp. 25-56.

[19] **W. ZANGWILL** : Nonlinear programming via penalty function.
Management sci. Vol.13 ; n°5 (1967) pp. 344-358.

CHAPITRE IV

FONCTIONS MARGINALES ASSOCIEES A DES PROBLEMES DE JEUX

1 - PROBLEMES INF-SUP ET DE COLS EN CONTRAINTES MELEES

1.1 - Problèmes retenus et propriétés générales

X et Y étant des espaces de Banach, soient Π_X, Π_Y les projecteurs sur X et Y et soit $U \subset X \times Y$.

En notant $\Pi_X(U) = V$ et $\Pi_Y(U) = W$, il est clair que :

$$U \subset V \times W \qquad (*)$$

et que l'égalité n'a lieu que si U est sous la forme produit $\overset{*}{V} \times \overset{*}{W}$; auquel cas $V = \overset{*}{V}$ et $W = \overset{*}{W}$.

Définition 1.1.1 :

Lorsque l'inclusion (*) est stricte, nous dirons que les contraintes sont mêlées.

---o---

Dans ce cas U peut être considéré comme le graphe d'une multi-fonction $F : X \rightrightarrows Y$ telle que :

$$V = \text{Dom } F \qquad \text{et} \qquad W = R(F).$$

Pour toute fonction $\phi : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$, nous pouvons associer au couple (U,ϕ) plusieurs problèmes :

(1) Problème primal

$$\left[\ \sup_x \inf_y \{\phi(x,y) \ / \ (x,y) \in U\}\right.$$

Mais avec l'identification $U = G(F)$, on peut reformuler ce problème à l'aide des fonctions marginales comme suit :

$$(P) \quad \left[\begin{array}{l} \sup\limits_{x \in \mathrm{Dom}\, F} h(x) \qquad \text{où} \qquad h(x) = \inf\limits_{y \in F(x)} \phi(x,y) \end{array} \right.$$

---o---

(2) Problème dual

$$\left[\begin{array}{l} \inf\limits_{y} \sup\limits_{x} \{\phi(x,y) \;/\; (x,y) \in U\} \end{array} \right.$$

qui se formule également comme suit :

$$(D) \quad \left[\begin{array}{l} \inf\limits_{y \in \mathrm{Dom}\, F^{-1}} k(y) \qquad \text{où} \qquad k(y) = \sup\limits_{x \in F^{-1}(y)} \phi(x,y) \end{array} \right.$$

---o---

(3) Problème F-col [ROSEN [10] ; DEM'YANOV [4]]

Déterminer les couples $(\bar{x},\bar{y}) \in U$ tels que :

$$\left[\begin{array}{ll} \phi(x,\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},y) & \\ \forall (x,\bar{y}) \in U & \forall (\bar{x},y) \in U. \end{array} \right.$$

ce problème se formule en fait comme suit :

$$(\text{F-col}) \quad \left[\begin{array}{ll} \phi(x,\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},y) & \\ \forall x \in F^{-1}(\bar{y}) & \forall y \in F(\bar{x}) \end{array} \right.$$

---o---

Notons que si $(\bar{x},\bar{y}) \in G(F)$ et satisfait à :

$$(1) \qquad \phi(x,\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},y) \qquad \forall (x,y) \in G(F)$$

alors $(\bar{x},\bar{y})$ est un F-col, mais que la réciproque est fausse.

L'intérêt des couples $(\bar{x},\bar{y})$ tels que (1) apparaîtra lors de l'étude du :

(4) Problème G-col

$$
(\text{G-col}) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{Déterminer } (\bar{x},\bar{y}) \in G(F) \text{ tel que :} & \\ \phi(x,\bar{y}) \leq \phi(\bar{x},y) & \forall\ (x,y) \in G(F) \end{array}\right.
$$

---o---

Remarques 1.1.1 :

Il est clair que si $U = G(F) = \overset{*}{V} \times \overset{*}{W}$, les problèmes (P) et (D) sont des problèmes "inf-sup" classiques et que les problèmes (F-col) et (G-col) coïncident avec le problème du col classique, sur lequel nous pouvons citer principalement les résultats de Nicaïdo [9], Sion [11], Moreau [8], Aubin [1], Bensoussan [3], Lemaire [6], Terkelsen [12], Barbu-Precupanu [2], McLinden [7], en notant cependant que les preuves de tous ces résultats, s'appuient de façon essentielle sur le fait que U est sous forme produit $\overset{*}{V} \times \overset{*}{W}$ (i.e F constante).

Mais par contre si U est le graphe d'une multifonction F non constante, ces preuves tombent en défaut ; et contrairement au cas du col classique, un F-col ou un G-col est en général sans rapport avec les solutions de (P) et (D), pour la raison essentielle que l'inégalité classique "sup inf ≤ inf sup", est fausse, comme le montre l'exemple simple ci-dessous tiré de [5] :

$$
\left[\begin{array}{l} G(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2+y^2 \leq 4 \ ;\ y+2x \leq 2 \ ;\ y\geq 1 \ ;\ x\geq o\} \\ \phi(x,y) = x^2 + y^2 \quad ; \quad \text{alors :} \\ 5 = \max\limits_{x}\ \min\limits_{\substack{y \\ (x,y)\in G(F)}} \phi(x,y) > \min\limits_{y}\ \max\limits_{\substack{x \\ (x,y)\in G(F)}} \phi(x,y) = 4 \end{array}\right.
$$

---o---

Le résultat suivant assure l'existence d'un (F-col).

Théorème 1.1.1 [Dem'yanov [4]]

Si G(F) est convexe, compact et si ϕ est continue, concave-convexe (i.e concave en x et convexe en y), alors ϕ admet un F-col.

---o---

Cependant en toute généralité, on a aisément la

Proposition 1.1.1 :

Soient α la valeur de (P) et β celle de (D) ;

(i) s'il existe un F-col, on a :
$\beta \leq \alpha$ et l'inégalité peut être stricte

(2i) si $\alpha=\beta$, tout F-col $(\bar{x},\bar{y})$ est constitué d'une solution $\bar{x}$ de (P) et d'une solution $\bar{y}$ de (D)

(3i) réciproquement si $\alpha=\beta$ et si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont solutions de (P) et (D), alors : $(\bar{x},\bar{y}) \in G(F) \Longrightarrow (\bar{x},\bar{y})$ est un F-col.

---o---

Proposition 1.1.2 :

Si ϕ est quasi-concave et s.c.s en x et quasi-convexe et s.c.i en y (on note ϕ q-concave-convexe, s.c) et si G(F) est convexe, compact, alors :

$\beta \leq \alpha$ et l'inégalité peut être stricte.

---o---

Preuve :

* G(F) étant convexe, compact, et les projecteurs Π_X et Π_Y continus, $V = \text{Dom } F = \Pi_X(G(F)$ et $W = R(F) = \Pi_Y(G(F))$ sont convexes, compacts ;

* Il suffit alors de remarquer que pour tout $(x,y) \in G(F)$, on a :

$$F(x) \subset W \quad \text{et} \quad F^{-1}(y) \subset V$$

et d'user du théorème de Sion [11], sur le couple $(\phi, V\times W)$.

---o---

1.2 - Découplage d'un jeu mêlé et G-col :

A toute fonction $\phi : X\times Y \to \bar{\mathbb{R}}$, associons suivant Rosen [10] et Dem'yanov [4], la fonction dite de découplage :

$$\left[\begin{array}{l} \Phi : G(F) \times G(F) \to \bar{\mathbb{R}}, \text{ définie par :} \\ \Phi(z,t) = \phi(x,\omega) - \phi(v,y) \text{ où } z = (x,y) \text{ et } t = (v,\omega). \end{array}\right.$$

Nous avons alors aisément la

Proposition 1.2.1 :

(i) $\Phi(z,t) = - \Phi(t,z)$ et donc $\Phi(z,z) = o \quad \forall z$

(2i) si ϕ est s.c.s en x et s.c.i en y (on note s.c), Φ est s.c.s en z et s.c.i en t (on note aussi s.c).

---o---

Rappelons une notion de convexité :

Définition 1.2.1 : [Terkelsen [12]]

Une fonction numérique g définie sur un espace vectoriel E est dite presque convexe (on note p-convexe) si :

$\forall\ x_1,x_2 \in E$, et $\forall\ \lambda \in [o,1]$, $\exists\ x_3 \in E$ tel que :

$$g(x_3) \leq \lambda\ g(x_1) + (1-\lambda)\ g(x_2).$$

---o---

Il est à noter que toute fonction convexe est p-convexe, mais que la p-convexité et la quasi-convexité sont sans rapport.

---o---

Proposition 1.2.2 :

Si ϕ est p-concave-convexe [i.e si $-\phi(\cdot,y)$ et $\phi(x,\cdot)$ sont p-convexes], alors Φ est p-concave-convexe.

---o---

Preuve :

Soient $z_1 = (x_1,y_1)$, $z_2 = (x_2,y_2)$ et $t = (v,\omega)$ quelconques ; alors pour tout $\lambda \in [o,1]$, il existe $z_3 = (x_3,y_3)$ tel que :

$$\left[\begin{array}{l} -\ \phi(x_3,\omega) \leq -\ \lambda\phi(x_1,\omega) - (1-\lambda)\ \phi(x_2,\omega) \quad \text{et} \\ \phi(v,y_3) \leq \lambda\phi(v,y_1) + (1-\lambda)\ \phi(v,y_2) \end{array}\right.$$

ce qui par addition donne :

(1) $$- \Phi(z_3,t) \leq - \lambda\Phi(z_1,t) - (1-\lambda)\, \Phi(z_2,t)$$

z_1 et z_2 étant quelconques la proposition 1.2.1 (i) mène à

(2) $$\Phi(t,z_3) \leq \lambda\Phi(t,z_1) + (1-\lambda)\, \Phi(t,z_2)$$

ce qui avec (1) achève la preuve.

---o---

Théorème 1.2.1 : [découplage]

$\bar{z}$ est un G-col de ϕ si et seulement si, il existe $\bar{t}$ tel que $(\bar{z},\bar{t})$ est un col classique de Φ sur $G(F) \times G(F)$, auquel cas $\bar{t}$ est également un G-col de ϕ.

---o---

Preuve :

* Il est clair que $\bar{z} \in G(F)$ est un G-col si et seulement si :

(1) $$\Phi(\bar{z},t) \geq o \qquad \forall\ t \in G(F)$$

mais la proposition 1.2.1 (i) donne aussi

(2) $$\Phi(z,\bar{z}) \geq o \qquad \forall\ z \in G(F)$$

ce qui joint au fait que $\Phi(\bar{z},\bar{z}) = o$ assure que $(\bar{z},\bar{z})$ est un col de Φ sur $G(F) \times G(F)$; et $\bar{t} = \bar{z}$ convient.

* Réciproquement si $(\bar{z},\bar{t}) \in G(F) \times G(F)$ est un col de Φ, on a :

$$\Phi(z,\bar{t}) \leq \Phi(\bar{z},\bar{t}) \leq \Phi(\bar{z},t) \qquad \forall\ (z,t) \in G(F) \times G(F)$$

ce qui pous le couple $(z,t) = (\bar{t},\bar{z})$ mène à :

$\Phi(\bar{z},\bar{t}) = o$

$\Phi(\bar{z},t) \geq o \quad \forall t \in G(F)$ et donc $\bar{z}$ est un G-col

$\Phi(\bar{t},z) = -\Phi(z,\bar{t}) \geq o \quad \forall\ z\in G(F)$ et donc $\bar{t}$ est un G-col

---o---

<u>Théorème 1.2.1</u> : [existence]

Si G(F) est convexe, compact et si ϕ est s.c et p-concave-convexe, ϕ admet un G-col.

---o---

<u>Preuve</u> :

Φ est donc s.c (propo. 1.2.1) et p-concave-convexe (propo 1.2.2). On peut donc user du théorème de Terkelsen [12] qui assure l'existence d'un col $(\bar{z},\bar{t})$ de Φ sur $G(F) \times G(F)$; et donc $\bar{z}$ et $\bar{t}$ (éventuellement égaux) sont des G-cols de ϕ (th. 1.2.1).

---o---

<u>Proposition 1.2.3</u> :

Si G(F) est convexe, compact et si ϕ est concave-convexe, s.c, l'ensemble des G-cols de ϕ est non vide, convexe, compact ; et si ϕ est strictement concave-convexe, ϕ admet un G-col unique.

---o---

<u>Preuve</u> :

* Notons $\tilde{U}$ cet ensemble ; nous savons alors pour les théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 que l'ensemble des cols de Φ sur $G(F) \times G(F)$ est non vide, convexe, compact (propriété classique des cols), et que c'est précisément $\tilde{U} \times \tilde{U}$;

* et si ϕ est strictement concave-convexe, on vérifie aisément que Φ l'est aussi ; ce qui réduit $\tilde{U} \times \tilde{U}$ à $(\bar{z},\bar{t})$; et comme $(\bar{z},\bar{z})$ et $(\bar{t},\bar{t})$ sont aussi des cols de Φ, nécessairement $\bar{z} = \bar{t}$.

---o---

<u>Remarques 1.2.1</u> :

(1) Le théorème de Dem'yanov [4], fut prouvé en dimension finie, avec ϕ concave-convexe, continue ; et ce par une technique de point fixe.

Ainsi le théorème 1.2.2 est non seulement une extension non évidente de tous les résultats de cols classiques, mais est prouvé par une approche très simple et sous des hypothèses nettement affaiblies.

(2) Cependant si ϕ n'est que quasi-concave-convexe, Φ n'hérite pas de

cette propriété ; on ne peut alors user sur $(\Phi, G(F) \times G(F))$ des résultats de cols.

---o---

Ce dernier cas nécessite donc une approche particulière ; elle sera basée essentiellement sur des propriétés de fonctions marginales.

Mais avant de développer cela, donnons à titre de simple remarque, une propriété (dont la preuve est simple) des problèmes "inf sup" classiques.

---o---

Supposons ici U sous la forme V×W (ce qui correspond à F telle que Dom F = V et $F(x) = W \quad \forall\, x \in V$), et considérons les programmes suivants :

$$(P_\phi) \quad \left[\ \sup_{x\in V} \inf_{y\in W} \phi(x,y) \right. ; \qquad\qquad (D_\phi) \quad \left[\ \inf_{y\in W} \sup_{x\in V} \phi(x,y) \right.$$

$$(P_\Phi) \quad \left[\ \sup_{z\in U} \inf_{t\in U} \Phi(z,t) \right.$$

---o---

Propriété 1.2.1 :

(i) Si $\bar{p}$, $\bar{d}$ et $\bar{\alpha}$ désignent les valeurs respectives de (P_ϕ), (D_ϕ) et (P_Φ) alors : $\qquad \bar{\alpha} = \bar{d} - \bar{p}$

(2i) $\bar{z} = (\bar{x},\bar{y})$ est solution de (P_Φ) si et seulement si $\bar{x}$ est solution de (P_ϕ) et $\bar{y}$ solution de (D_ϕ).

---o---

D'où tout l'intérêt de la résolution à priori de (P_Φ) qui donnerait des solutions à (P_ϕ) et (D_ϕ) et la valeur $\bar{\alpha}$ de la discontinuité primal-dual (gap) ; et si celle-ci est nulle, $\bar{z}$ est un col de ϕ sur U.

---o---

1.3 - Problèmes primal et dual

Sachant que (P) et (D) ont même structure, et que les fonctions marginales h et k jouent des rôles symétriques, notre étude sera limitée à (P). Les propriétés de (D) s'en déduiront aisément :

Rappelons les données de (P) :

$$(P)\quad \left[\begin{array}{l} \sup h(x) \\ \\ x \in \operatorname{Dom} F \end{array}\right. \qquad \text{où} \qquad \begin{array}{l} F : X \rightrightarrows Y \quad \text{et} \\ \\ h(x) = \inf\limits_{y \in F(x)} \phi(x,y) \end{array}$$

---o---

Théorème 1.3.1 :

On suppose X et Y réflexifs.

Si G(F) est convexe, compact et si ϕ est faiblement continue, h est s.c.s sur Dom F et (P) admet une solution.

---o---

La preuve utilise les éléments et résultats suivants :

* Pour tout $\varepsilon > o$, définissons

$$(1)\quad \left[\; F_\varepsilon : X \rightrightarrows Y \quad / \quad G(F_\varepsilon) = G(F) + \varepsilon(B_X \times B_Y) \right.$$

* On a alors aisément :

$$(2)\quad \left[\; F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon B_Y \qquad \forall\, x \in \operatorname{Dom} F \right.$$

* Considérons alors la fonction marginale associée

$$(3)\quad \left[\; h_\varepsilon(x) = \inf_{y \in F_\varepsilon(x)} \phi(x,y) \right.$$

---o---

Proposition 1.3.1 :

Sous les conditions du théorème 1.3.1, pour tout $\varepsilon > o$, h_ε est s.c.s sur Dom F.

---o---

Preuve :

* Etant clair que int $G(F_\varepsilon) \neq \emptyset$, le théorème de l'application ouverte, assure que :

(4) $\quad \left[\; \Pi_X(\text{int } G(F_\varepsilon)) \text{ est ouvert non vide pour tout } \varepsilon > o \right.$

* Et comme manifestement

(5) $\quad \left[\; \text{Dom } F \subset \Pi_X \; (\text{int } G(F_\varepsilon)) \subset \text{Dom } F_\varepsilon \qquad \forall \; \varepsilon > o \right.$

F_ε comme multifonction convexe, fermée est grâce au théorème de Robinson-Ursescu s.c.i sur int Dom F_ε, donc sur Dom F, puisque nous avons (4) et (5).

* Enfin ϕ étant continue, puisque faiblement continue, le résultat annoncé suit comme propriété classique des fonctions marginales.

---o---

Proposition 1.3.2 :

Sous les conditions du théorème 1.3.1, h est s.c.s sur Dom F, comme limite uniforme sur Dom F d'une famille de fonctions s.c.s.

---o---

Preuve :

* Il est clair que grâce à (2) ci-dessus, on a :

(6) $\quad \left[\; h_\varepsilon(x) \leq h(x) \qquad \forall \; x \in \text{Dom } F \quad \text{et} \quad \forall \; \varepsilon > o \right.$

* G(F) étant convexe, compact et X et Y réflexifs, $G(F_\varepsilon)$ est faiblement compact ;

Par suite ϕ est uniformément continue sur $G(F_\varepsilon)$ pour la topologie faible de X×Y ; ce qui assure en particulier que :

$$(7) \quad \left[\begin{array}{l} \forall \; \varepsilon' \in \,]o,\varepsilon], \; \exists \; V_\varepsilon \in \Theta(o) \text{ dans Y faible tel que :} \\ y - y' \in V_\varepsilon \Longrightarrow |\phi(x,y) - \phi(x,y')| \leq \varepsilon' \quad \forall \; x \in \text{Dom } F \end{array} \right.$$

* V_ε étant également un ouvert fort, il existe $\varepsilon'' \in]o,\varepsilon']$ tel que :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon'' B_Y \subset V_\varepsilon \text{ ; et comme } F_{\varepsilon''}(x) = F(x) + \varepsilon'' B_Y \text{, on a :} \\ \forall\, y \in F_{\varepsilon''}(x),\ \exists\, y' \in F(x) \text{ tel que } y-y' \in \varepsilon'' B_Y \text{ ; et donc} \\ \phi(x,y') \le \phi(x,y) + \varepsilon' \ ; \end{array}\right.$$

* Par conséquent :

$$(8) \quad \left[\begin{array}{ll} h(x) \le \phi(x,y') \le \phi(x,y) + \varepsilon & \forall\, y \in F_{\varepsilon''}(x) \text{ et donc} \\ h(x) \le h_{\varepsilon''}(x) + \varepsilon' & \forall\, x \in \text{Dom } F. \end{array}\right.$$

* Enfin comme $\varepsilon'' > o$, on a $h_{\varepsilon''}(x) \le h(x) \quad \forall\, x \in \text{Dom } F$;

En définitive, nous avons abouti à :

$$\left[\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > o,\ \exists\, \varepsilon'' \in]o,\varepsilon] \text{ tel que :} \\ \sup\limits_{x \in \text{Dom } F} |h(x) - h_{\varepsilon''}(x)| \le \varepsilon \end{array}\right.$$

* On peut donc extraire une famille $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>o}$ qui converge uniformément sur Dom F vers h ; le résultat annoncé suit grâce à la proposition 1.3.1.

---o---

Preuve du théorème 1.3.1 :

G(F) étant compact, Dom F = $\Pi_X(G(F))$ est compact ; ce qui joint au fait que h est s.c.s (propo. 1.3.2) assure l'existence d'une solution à (P).

---o---

Remarque 1.3.1 :

Il est clair que sous les conditions du théorème 1.3.1, la même démarche que celle adoptée pour h, montrerait que k est s.c.i sur R(F) qui est compact, comme projection pour Π_Y de G(F) ; ce qui assure une solution à (D).

---o---

1.4 - Problème F-col

Considérons les minimiseurs :

$$M_h : X \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows Y \quad / \quad M_h(x,\varepsilon) = F(x) \cap \{y/\phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon\}$$

$$M_k : Y \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows Y \quad / \quad M_k(y,\varepsilon) = F^{-1}(y) \cap \{x/k(y) \leq \phi(x,y) + \varepsilon\}$$

---o---

Proposition 1.4.1 :

Sous les conditions du théorème 1.3.1, si ϕ est en outre quasi-concave-convexe, M_h (resp. M_k) est s.c.s à valeurs convexes, compactes.

---o---

Preuve :

* M_h est à valeurs convexes, puisque $F(x)$ est convexe et que $\{y \;/\; \phi(x,y) \leq h(x) + \varepsilon\}$ est convexe.

* Par ailleurs ϕ étant continue (car faiblement continue) et h s.c.s (propo. 1.3.2), M_h est évidemment fermée à valeurs dans le compact $R(F)$; le résultat annoncé suit ; de même pour M_k.

---o---

Théorème 1.4.1 :

Sous les conditions du théorème 1.3.1, si ϕ est en outre quasi-concave-convexe, ϕ admet un F-col.

---o---

Preuve :

Considérons la multifonction :

$$M_\phi : X \times Y \rightrightarrows X \times Y \quad / \quad M_\phi(x,y) = M_k(y,o) \times M_h(x,o)$$

* La proposition 1.4.2 assure alors que M_ϕ est s.c.s à valeurs convexes, compactes.

* On sait alors [[1] th. 4 p. 284] que M_ϕ admet un point fixe $(\bar{x},\bar{y})$; et on vérifie aisément que $(\bar{x},\bar{y})$ est un F-col.

---o---

Remarques 1.4.1 :

(1) Toute cette étude en 1.3 et 1.4 peut être reprise en supposant G(F) simplement convexe, fermé, mais ϕ inf-compacte en y et sup-compacte en x.

(2) Il est à noter que toutes les propriétés ont été construites de manière que M_ϕ admette un point fixe.
La même démarche permettrait l'extension suivante :

* Soient $X_1,\dots,X_n$, n espaces de Banach réfléxifs et U un convexe, compact de $X_1 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

* Pour tout i, définissons $F_i : X_i \rightrightarrows \prod_{j\neq i} X_j$ par :

$$G(F_i) = U.$$

* Soient par ailleurs n fonctions $\phi_i : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \bar{\mathbb{R}}$ faiblement continues et telle que : $\forall\, x_i \in X_i$, $\phi_i(\dots,x_i,\dots)$ est quasi-convexe.

* On lui associe alors la fonction marginale

$$h_i : X_i \to \bar{\mathbb{R}} \quad / \quad h_i(x_i) = \inf_{\substack{x\in U \\ \Pi_i(x)=x_i}} \phi_i(x)$$

où π_i est le projecteur sur X_i.

* Considérons enfin le minimiseur : M_i défini par :

$$M_i(x_i,\varepsilon) = \{x\in U \;/\; \Pi_i(x) = x_i \text{ et } \phi_i(x) \le h_i(x_i) + \varepsilon\}$$

* Alors la multifonction : $M : X \rightrightarrows X$ définie par :

$$M(x) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i(x_i,o) \quad \text{où} \quad x = (x_1,\dots,x_n)$$

admet un point fixe $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$.

Ces points fixes sont appelés point d'équilibre de jeux à n personnes non coopératifs contraints.

(3) Le théorème 1.4.1 est au vu de l'extension décrite en remarque 2, une généralisation du théorème de Nash [[1] th. 1 p.268] par l'abandon de la convexité de $\phi(x,\cdot)$ et $-\phi(\cdot,y)$ et l'extension à la dimension infinie.

(4) Il semble qu'en général l'ensemble des F-cols ne jouisse pas de propriétés particulières (telle que la convexité) ; mais il est aisé de voir qu'il est fermé comme ensemble des points fixes de M_ϕ qui est fermée puisque s.c.s.

---o---

2 - SUR UNE CLASSE DE JEUX DYNAMIQUES

Considérons le modèle général de jeu suivant :

$$(J)\quad \left[\begin{array}{lll} (1) & S & \text{désigne un ensemble d'états du jeu} \\ (2) & E : S \overset{\rightarrow}{\rightarrow} X & \text{désigne les stratégies du 1er joueur} \\ (3) & F : S \overset{\rightarrow}{\rightarrow} Y & \text{désigne les stratégies du 2ème joueur} \\ (4) & \phi : S\times X\times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}} & \text{désigne une fonction de coût du jeu.} \end{array}\right.$$

Associons au jeu (J), les fonctions valeur inférieure et valeur supérieure du jeu : h et k : $S \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ définies par :

$$\left[\begin{array}{l} h(s) = \sup\limits_{x\in E(s)} \inf\limits_{y\in F(s)} \phi(s,x,y) \\ \\ k(s) = \inf\limits_{y\in F(s)} \sup\limits_{x\in E(s)} \phi(s,x,y) \end{array}\right.$$

Il est alors clair que :

$$\left[\; h(x) \leq k(x) \qquad \forall\, s \in S\right.$$

Se posent alors les questions suivantes :

(Q_1) (J) admet-il une fonction valeur v ? c'est-à-dire telle que : $v(s) = h(x) = k(s) \quad \forall\, s \in S$
Et quelles sont ses propriétés éventuelles ?

Il est à noter qu'en général, v n'existe pas et que lorsqu'elle existe, elle peut n'être même pas mesurable.

---o---

(Q_2) En l'absence de v, quelles sont les propriétés (continuité ou simplement mesurabilité) de h et k ?

Et enfin :

(Q_3) A-t-on des stratégies conservatives pour les joueurs ? c'est-à-dire des fonctions :
$\bar{x} : S \to X$ et $\bar{y} : S \to Y$, sélections de E et F respectivement et telles que :

$$\begin{cases} h(s) = \sup\limits_{x \in E(s)} \phi(s,x,\bar{y}(s)) & \forall\, s \in S \quad \text{et} \\ k(s) = \inf\limits_{y \in F(s)} \phi(s,\bar{x}(s),y) & \forall\, s \in S \end{cases}$$

---o---

Nous répondons à cela dans deux situations différentes, lorsque S est un espace topologique, puis lorsque S est un espace mesurable.

---o---

<u>Proposition 2.1</u> :

On suppose que S est un espace topologique, que ϕ est continue et que E et F sont continues à valeurs compactes ; alors :

(i) h et k sont continues

(ii) il existe $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des stratégies conservatives mesurables par rapport à la tribu Borelienne de S notée B(S).

---o---

Preuve :

* Considérons les fonctions marginales définies par :

$$\left[\begin{array}{ll} \hat{h}(s,x) = \inf\limits_{y\in F(s)} \phi(s,x,y) \; ; \; \hat{k}(s,y) = \sup\limits_{x\in E(s)} \phi(s,x,y) \; ; \text{ alors :} \\ h(s) = \sup\limits_{x\in E(s)} \hat{h}(s,x) \; ; \; k(s) = \inf\limits_{y\in F(s)} \hat{k}(s,y) \end{array}\right.$$

* Or par une propriété classique des fonctions marginales, sous nos hypothèses $\hat{h}$ et $\hat{k}$ sont continues.

* Ce qui rapproché des hypothèses sur E et F, assure (grâce à la même propriété) la continuité de h et k.

* Considérons les minimiseurs particuliers :

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{M}_h(s) = \{x \in E(s) \;\; / \;\; \hat{h}(s,x) \geq h(s)\} \\ \tilde{M}_k(s) = \{y \in F(s) \;\; / \;\; \hat{k}(s,y) \leq k(s)\} \end{array}\right.$$

Nous savons alors (résultat classique d'analyse marginale) que $\tilde{M}_h$ et $\tilde{M}_k$ sont s.c.s à valeurs non vides compactes. Par conséquent [[13] corol.III.3 p.63] , ils sont mesurables, relativement à B(S). Par suite [[13] th.III.8 p.66] $\tilde{M}_h$ et $\tilde{M}_k$, admettent des sélections mesurables relativement à B(S). On vérifie alors aisément que ces sélections sont des stratégies conservatives.

---o---

Proposition 2.2 :

En outre des conditions de la proposition 2.1, on suppose E et F à valeurs convexes et ϕ telle que pour tout $s \in S$, $\phi(s,\cdot,\cdot)$ est presque concave-convexe, alors le jeu admet une fonction valeur continue.

---o---

Preuve :

* Pour tout $s \in S$, fixé, $\phi(s,\cdot,\cdot)$ satisfait aux conditions du théorème de Terkelsen [12], qui est applicable, puisque $E(s)$ et $F(s)$ sont convexes, compacts ; d'où l'existence d'un col de $\phi(s,\cdot,\cdot)$ sur $E(s) \times F(s)$.

* Or l'existence d'un col pour tout $s \in S$ assure que $h(s) = k(s)$ pout tout s ; ce qui mène au résultat annoncé grâce à la proposition 2.1.

---o---

Proposition 2.3 :

On suppose à présent que S est un espace mesurable muni d'une tribu de B(S).

(1) Si ϕ est de Caratheodory, c'est-à-dire mesurable en s et continue en (x,y).

(2) Et si E (resp. F) est mesurable relativement à B(S) et est à valeurs compactes, alors :

(i) h et k sont mesurables relativement à B(S)

(2i) il existe des stratégies conservatives, mesurables relativement à B(S).

---o---

Preuve :

* Pour tout s fixé, $\phi(s,\cdot,\cdot)$ étant continue et $F(s)$ (resp. $E(s)$) compact, $\hat{h}(s,\cdot)$ (resp. $\hat{k}(s,\cdot)$) est continue ;
et comme $\phi(\cdot,x,y)$ et $F(\cdot)$ (resp. $E(\cdot)$) sont mesurables,
$\hat{h}(\cdot,x)$ (resp. $\hat{k}(\cdot,y)$) est mesurable [[13] Lemme III.39 p.86].

* Par conséquent $\hat{h}$ (resp. $\hat{k}$) est de Caratheodory ; et comme

$$h(s) = \sup_{x \in E(s)} \hat{h}(s,x) \qquad \text{et} \qquad k(s) = \inf_{y \in F(s)} \hat{k}(s,y)$$

une seconde application de [[13] Lemme III.39 p.86] assure que h et k sont mesurables relativement à B(S).

* Par une conséquence de [[13] Lemme III.39 p.86 et 87], nous savons que les minimiseurs $\tilde{M}_h$ et $\tilde{M}_k$ sont mesurables et donc admettent des sélections mesurables qui sont évidemment des stratégies conservatives.

---o---

Remarque 2.1 :

Si $\forall s$, $\phi(s,\cdot,\cdot)$ est presque concave-convexe, alors pour tout s, $\phi(s,\cdot,\cdot)$ admet un col sur $E(s) \times F(s)$ (Terkelsen [12]) ; ce qui assure l'existence d'une fonction valeur du jeu mesurable.

---o---
--o--
-o-

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J.P. AUBIN** : Mathematical methods of games and economic theory. North. Holland (1982)

[2] **V. BARBU ; TH. PRECUPANU** : Convexity and optimization in Banach spaces. Sijthoff - Noordhoff. International Publishers (1978)

[3] **A. BENSOUSSAN** : Sur les méthodes de décomposition. Cahier IRIA n°11 Tome 2 (1972)

[4] **V.F. DEM'YANOV ; A.B. PEVNYI** : Numerical methods for finding saddle points. Comp. Math. and Math. Phys. V12 ; N5 ; (1972) pp. 1099-1127.

[5] **J. FICHELET** : Quelques classes de problèmes max-min. Cahier du BURO (Belgique) n°2 (1977) pp.13-17.

[6] **B. LEMAIRE** : Thèse d'Etat. Paris VI (1970)

[7] **Mc LINDEN** : A minimax theorem. Math. of op. Res. V9 ; n°4 ; (1984) pp.576-591.

[8] **J.J. MOREAU** : Theoremes inf-sup. CRAS Paris n°258 (1964) pp. 2720-2722.

[9] **H. NICAIDO** : On Von-Neuman minimax theorem. Pacific J. Math. V;4 (1954) pp.65-72.

[10] **G.B. ROSEN** : Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-persons games. Econometrica V.33 ; n°3 (1965) pp. 520-534.

[11] **M. SION** : On general minimax theorem. Pacific J. Math. V.8 (1958) pp.171-176.

[12] **F. TERKELSEN** : Some minimax theorems. Math. Scand. V.13 (1973) pp;405-413.

[13] **C. CASTAING ; M. VALADIER** : Convex analysis and mesurable multifunctions. Lecture notes in Math. n°580 (1977).

RÉSUMÉ

Un traitement unifié des rapports entre une multifonction F et les fonctions marginales associées : $h(x) = \inf \{J(x,y) \; ; \; y \in F(x)\}$, est proposé, sous le double aspect des conséquences des propriétés de J et F sur h et inversement de celles de h sur F pour des J convenables.

Une étude exhaustive des fonctions marginales $d_F(x,y) = d(y,F(x))$ et $s_F(x,p) = s(p,F(x))$, où d est une distance et s une fonction d'appui, a permis de construire toute une analyse multivoque. Des applications à l'analyse marginale, aux rapports de la stabilité et de la pénalisation et à l'approximation variationnelle sont traitées.

Une étude du modèle global $\inf \{J(x) \; ; \; o \in F(x)\}$ est proposée avec des applications à un schéma général de programmation dynamique discrète et à une classe de problèmes de contrôle. Enfin deux familles de problèmes de jeux sont analysées par le biais des fonctions marginales.

MOTS-CLÉS

Fonctions marginales ; Convergences de multifonctions.
Approximation variationnelle ; Pénalité et stabilité.
Optimisation et dualité ; Programmation dynamique.
Contrôle optimal ; Problèmes de jeux.