

50 376
1987

93 N° d'ordre : 1394

50376
1987
93

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

FLANDRES-ARTOIS

pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT de 3^{ième} CYCLE en

Electronique

par

BEN HELAL Mahrez

Maître ès-sciences



STABILISATION DE SYSTEMES NON-LINEAIRES :

UNE APPROCHE PARAMETRIQUE.

Exemplaire corrigé après avis du jury

Soutenue le 25 juin 1987 devant le Jury d'examen :

M.	P.	BORNE	Président
M.	D.	MEIZEL	Rapporteur
M.	L.	POVY	Examineur
Mme	G.	DAUPHIN-TANGUY	Examineur
M.	J.P.	RICHARD	Examineur

AVANT-PROPOS

Avant-propos

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Institut Industriel du Nord (I.D.N) sous la direction de Monsieur D.MEIZEL

En premier lieu, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur P.BORNE pour nous avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Monsieur D.MEIZEL nous a confié le thème de cette étude. Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance pour ses orientations, ses conseils précieux et la part active qu'il a eue dans l'aboutissement de ce travail.

Madame G.DAUPHIN-TANGUY a bien voulu juger notre travail et participer au jury de cette thèse, nous la prions d'accepter nos très vifs et sincères remerciements.

Nous sommes très honoré que Monsieur le Professeur L. POVY, ait accepté de participer à ce jury et nous l'en remercions vivement.

Que Monsieur J.P Richard, reçoive nos très sincères remerciements pour s'être intéressé à ce travail et pour avoir bien voulu le juger.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle pour l'aide qu'il nous ont apportée, tant de point de vue scientifique que sur le plan humain.

Nous ne saurions terminer cet avant propos sans remercier Madame FERRAR qui s'est chargée de l'impression de ce rapport de thèse.

SOMMAIRE

CHAPITRE I

I. Définitions / Rappels

I.1 Introduction

I.2 Systèmes dynamiques /Processus

I.2.1 Notion d'état

1.2.2 Principe de contre-réaction ou systèmes bouclés

I.2.3 Modèles de procédés

I.2.3.1 Représentation des systèmes linéaires

I.2.3.2 Représentation des systèmes non-linéaires

I.2.3.2.1 Système de type Luré-Postnikov

I.2.3.2.2 Systèmes réguliers ou bilinéaires

I.3 Stabilité

I.3.1 Stabilité/définitions

I.3.2 Méthodes d'analyses de la stabilité des systèmes non-linéaires

I.3.2.1 Théorème de Lyapunov

I.3.2.2 Méthodes de comparaison (ou d'agrégation)

I.3.2.3 Normes vectorielles

I.3.2.4 Critère pratique de stabilité

I.3.2.5 Hyperstabilité

I.3.2.5.1 Introduction

I.3.2.5.2 Stabilité absolue

I.3.2.5.3 Définition de la propriété de l'hyperstabilité

I.3.2.5.4 Critères de positivité

I.3.2.5.5 Blocs hyperstables

I.4 Synthèse d'un régulateur

I.4.1 Spécifications de structure

I.4.2 Synthèse paramétrique

I.4.2.1 Méthodes applicables à aux systèmes
linéaires stationnaires

I.4.2.1.1 Méthodes fréquentielles

I.4.2.1.2 Placement des pôles

I 5 Conclusion

CHAPITRE II

II.1 Introduction

II.2 Systèmes étudiés

II.2.1 Systèmes à non-linéarités de rang 1

II.2.1.1 Définition

II.2.1.2 Formes canoniques

II.3 Représentations sous-formes remarquables des systèmes étudiés

II.3.1 Forme de type "série"

II.3.2 Représentation en flèche

II.4 Proposition de méthodes de synthèse

II.4.1 Synthèse d'asservissement par utilisation des normes vectorielles

II.4.1.1 Classe de normes vectorielles envisagées

II.4.1.2 Définition du critère d'analyse de la stabilité

II.4.1.3 Méthodes de synthèse associées à la forme "série"

II.4.1.3.1 Calcul du critère d'analyse et de sa sensibilité

II.4.1.4 Méthode de synthèse associée à la forme en flèche

II.4.2 Méthode de synthèse issue de la forme en flèche interprétée par l'hyperstabilité

II.4.2.1 Représentation en flèche

II.4.2.2 Critère d'analyse de la stabilité / théorie de l'hyperstabilité

II.5 Méthodes d'optimisation

II.5.1 Algorithme de Madsen et Schaer-Jacobsen

II.5.2 Algorithme "FAISCEAU"

II.5.2.1 Notion de sous-gradients

II.5.2.2 Notion de sous-différentiel

II.5.2.3 Définition de la direction de descente ou
de plus grande pente

II.5.2.4 Notion de ε sous-gradient et ε sous-
différentiel

II.5.2.5 Algorithme Faisceau sans contraintes

II.5.2.5.1 Principe de l'algorithme

II.5.2.5.2 Calcul du Faisceau

II.5.2.5.3 Calcul de la direction de
descente et de l'espérance de décroissance

II.5.2.5.4 Choix du pas de descente

II.5.2.5.5 Critère d'arrêt

II.5.2.5.6 Présentation globale de
l'algorithme.

II.5.2.6 Conclusion

II.6 Conclusion

Annexe

CHAPITRE III

III.1 Introduction

III.2 Exemple d'application

III.3 Etude de la stabilité : Théorie de l'hyperstabilité

III.3.1 Calcul du critère

III.3.2 Recherche d'une solution

III.3.3 Calcul des dérivées des $b_i(c, \chi_j, p)$

III.3.4 Logiciel de synthèse

III.3.5 Résultat

III.4 Conclusion

INTRODUCTION GENERALE

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la synthèse d'asservissement de processus non-linéaires, envisagée du point de vue de la stabilité de l'origine de l'espace d'état d'un processus en régime libre.

La synthèse est abordée de manière paramétrique : il s'agit de déterminer la valeur d'un ensemble de gains ajustables dans une structure de lois de commande supposée choisie a priori.

Cette détermination s'opère par optimisation d'un critère numérique correspondant à une méthode d'analyse de la stabilité.

Le plan de l'exposé est le suivant :

Dans un premier chapitre, après avoir précisé la classe de processus étudiés, on rappelle les différents concepts utilisés dans ce travail notamment la stabilité et les méthodes qui permettent d'en faire l'analyse (agrégation par norme vectorielles, hyperstabilité).

Le second chapitre présente successivement : des méthodes d'analyse de la stabilité des processus non-linéaires en temps continu, ainsi qu'une démarche unifiée pour transformer ces méthodes d'analyse en méthodes de synthèse en prenant en compte la difficulté d'utilisation de conditions de stabilité qui sont **suffisantes** mais pas nécessaires.

L'utilisation d'algorithmes d'optimisation "non-différentiables" découle naturellement de la méthode proposée. Un exposé des principes de ces algorithmes est alors établi.

Le troisième chapitre illustre l'application de la méthodologie précédente sur un exemple.

La structure du logiciel correspondant y est détaillée et l'utilisation des différents critères et algorithmes y est examinée de manière critique.



CHAPITRE I

I.1 Introduction :

Ce premier chapitre a pour but d'introduire les différentes définitions relatives aux méthodologies et systèmes que nous aurons à considérer au cours de cette étude.

En premier lieu, nous définissons la classe des modèles étudiés.

La synthèse de lois de commande pour cette classe de processus est abordée sous l'angle de la stabilisation de l'origine de l'espace d'état du système étudié.

A cet effet, nous sommes amenés à rappeler les définitions et propriétés relatives à la stabilité.

Par la suite, nous explicitons des méthodes d'étude telles que l'hyperstabilité ou les techniques de majoration par normes vectorielles .

Enfin, dans la dernière partie, nous présentons quelques méthodes de synthèse d'asservissement.

I.2 Systèmes dynamiques / processus :

Un système dynamique (processus) est défini par un ensemble de variables physiques (température, pression, vitesse,...) susceptibles d'évoluer en fonction d'une variable appelée **temps**.

Le temps considéré ici est le temps continu de la physique, la variable temps **t** sera considérée continue /

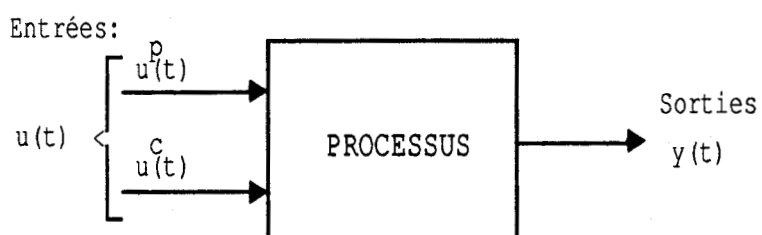
$$t \in T = [t_0, +\infty[\in \mathbb{R}$$

Les processus physiques sont caractérisés par un certain nombre de grandeurs mesurables que nous distinguerons en deux ensembles de variables:

- a) les variables de **sorties** $y(t)$ accessibles à la mesure ($y(t) \in \mathbb{R}^m$)
- b) les variables d'**entrées** $u(t)$ ($u(t) \in \mathbb{R}^e$) qui conditionnent l'évolution des variables de sorties.

Certaines entrées sont affectables, ce sont les entrées de **commande** $u^c(t)$ par lesquelles on peut agir sur le comportement du processus, les autres entrées qui comme les commandes agissent sur l'évolution des sorties et sur lesquelles il est difficile voire impossible d'agir, sont appelées **entrées de perturbations** $u^p(t)$.

Un système dynamique peut alors être représenté par le diagramme suivant :



La représentation de cette transformation entre l'entrée et la sortie peut être faite de deux façons :

- 1) soit directement par une relation de type fonctionnelle causale entrée/sortie : (I.1)

$$u(t) = [u^p(t), u^c(t)] \quad (I.1)$$

$$y(t) = f(t, u(\tau \leq t))$$

C'est ce qu'on appelle une description externe du système dynamique.

- 2) soit indirectement en introduisant la notion d'état du système (description interne).

I.2.1 Notion d'état :

Cette notion permet la description de la dynamique des processus par des relations causales instantannées regroupées dans une équation d'état.

La représentation générale est décrite par des équations différentielles de la forme suivante : (I.2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (I.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^e$, $y \in \mathbb{R}^m$

Le vecteur état $x(t)$ est tel que :

- La sortie à l'instant t ne dépend que de l'état et de l'entrée au même instant.

- De même, l'évolution de l'état à l'instant t ne dépend que de sa valeur et de l'entrée au même instant.
- les fonctions vectorielles f (resp g) sont des fonctions de $R^n \times R^e \times T$ dans R^n (resp R^m).

I.2.2 Principe de contre-réaction ou système bouclé :

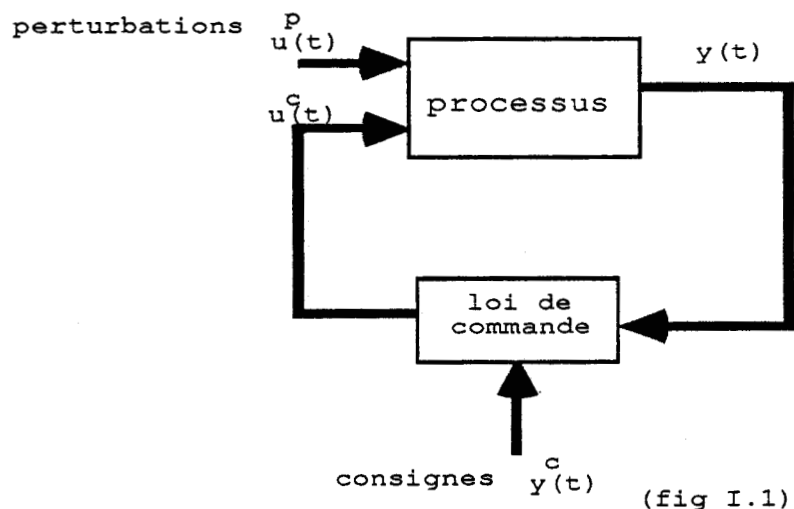
Ce concept de contre-réaction est de loin le concept le plus important de toute l'automatique.

En effet, rappelons qu'un processus physique est soumis à des perturbations sur lesquelles non seulement il est impossible d'agir mais qui sont souvent non mesurées.

la seule information concernant ces perturbations n'est alors disponible que dans les sorties.

Afin de contrebalancer l'effet de ces entrées de perturbations, nous sommes amenés à commander le processus en boucle fermée ou feed-back en réagissant constamment sur les commandes en fonction de l'écart entre la valeur de la sortie $y(t)$ et la valeur de sortie désirée (ou consigne) $y^c(t)$.

Le schéma d'une telle commande est alors la suivante :
(fig I.1)



La structure de la loi de commande doit avoir un comportement de poursuite d'un modèle $y^C(t)$ de la sortie $y(t)$ du processus tel que: (I.3)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (y^C(t) - y(t)) = 0 \quad (I.3)$$

Avant d'aborder les concepts de synthèse de la loi de commande qui permettent d'atteindre cet objectif (I.3), nous proposons de définir les différents modèles susceptibles de représenter les systèmes étudiés appartenant à la classe d'équation d'état (I.2).

I.2.3 Modèles de procédés :

L'équation d'état des systèmes étudiés appartient à la classe suivante : (I.4)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) \cdot x(t) + g(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = h(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (I.4)$$

avec $t \in T = [t_0, +\infty[$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^e$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$

A l'intérieur de cette classe, les systèmes linéaires stationnaires sont les plus connus.

I.2.3.1 Représentation des systèmes linéaires stationnaires :

Les équations d'état de ces systèmes prennent la forme matricielle suivante : (I.5)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (I.5)$$

où A, B, C, et, D sont des matrices de dimensions appropriées.

De même l'équation d'état (I.5) peut être écrite sous forme de fonction de transfert **F(p)** /

$$F(p) = D + C.(p.I - A)^{-1}.B \quad (I.6)$$

où p représente la variable de Laplace.

Inversement (A, B, C, D) est une réalisation de la fonction de transfert F(p).

Cette réalisation est d'ordre (n) minimale si la paire [A, B] est complètement commandable, et la paire [A, C] est complètement observable /Faure P. et al, 1974/

On dit que :

- * [A, B] invariant dans le temps est complètement commandable si le rang de la matrice $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ est égale à la dimension n du vecteur d'état x.
- * [A, C] est complètement observable si le rang de la matrice $[C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T] = n$

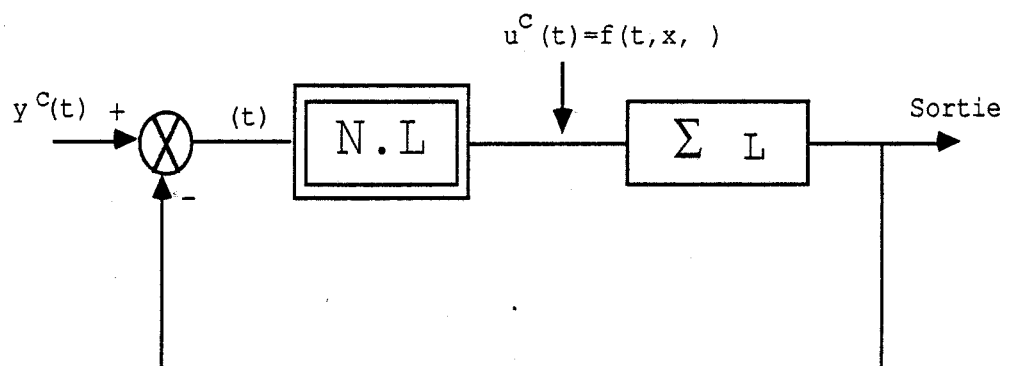
I.2.3.2 Systèmes non-linéaires :

L'utilisation d'un modèle linéaire (I.5) se justifie, en pratique, dans la mesure où l'on reste autour d'un point de fonctionnement (comportement local) /Foulard, et al, 1978/. Si celui-ci varie, seules les valeurs des coefficients du modèle linéaire changent.

Dans le calcul des systèmes de commande automatique, l'utilisation de ces modèles linéaires (I.5) ne s'avère pas toujours applicable. En particulier, lorsque les entrées du processus sont soumises à de fortes variations d'amplitude, les méthodes de calcul doivent rendre compte du caractère non-linéaire du processus qui doit alors apparaître explicitement dans le modèle.

I.2.3.2.1 Systèmes de type Lur'e Postnikov : /Lur'e postnikov, 1951/ ; /Dauphin G., 1983/

Pour cette première classe de modèles non-linéaires, on peut citer les systèmes à retour unitaire dont la branche directe est constituée par un processus avec autant d'entrées que de sorties dont les éléments non-linéaires sont en cascade avec des organes linéaires (ΣL) (cf. fig I.2)



(fig I.2)

Nous envisageons les cas où les non-linéarités satisfont les hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (t, x, \varepsilon) \text{ admissible} \\ \forall i = 1, 2, \dots, n \quad f_i^*(t, x, \varepsilon) = f_i(t, x, \varepsilon) / \varepsilon_i \\ |f_i^*(t, x, \varepsilon)| < +\infty \end{array} \right. \quad (I.7)$$

La représentation d'état correspondante est alors la suivante : (I.8)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.f(t, x, \varepsilon) \\ \varepsilon = y^C(t) - C.x(t) \end{array} \right. \quad (I.8)$$

avec $\dim(u^C) = \dim(C.x) = \dim(f) = m$

En utilisant les gains équivalents $f^*(.)$, il vient : (I.9)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = (A - B.\text{Diag}(f^*(t, x, \varepsilon)).C).x(t) + B.\text{Diag}(f^*(.)).y^C(t) \\ \varepsilon = y^C(t) - C.x(t) \end{array} \right. \quad (I.9)$$

I.2.3.2.2 Systèmes réguliers et bilinéaires en temps continu : /Fliess, 1981/ ; / Levine, 1983/

Les systèmes réguliers sont définis par les équations d'état suivantes : (I.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = (A_0 + \sum_{i=1}^e u_i.A_i).x(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{array} \right. \quad (I.10)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$

$A_0, A_1, \dots$, et C sont des
matrices de dimensions
appropriées.

Une approximation bilinéaire du système non-linéaire (I.2) fût introduite par Fliess /Fliess, 1981/ et qui est définie par le théorème suivant :

Tout système non-linéaire décrit par une fonctionnelle entrées-sorties causale et continue sur $T_*\mathbb{R}^n$ peut être arbitrairement approché par des modèles bilinéaires (I.10) de dimension finie.

Après avoir défini la classe des systèmes étudiés et leurs différents modèles de représentation, nous proposons de rappeler les définitions relatives à la notion de stabilité.

I.3 STABILITE :

I.3.1 Stabilité / définitions :

Dans cette partie, nous proposons de préciser les définitions relatives à la stabilité d'un système continu.

Les systèmes étudiés sont représentés par des équations d'état de type suivant : (I.11)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) + g(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (I.11)$$

Supposons une trajectoire $x^d(t)$ nominale (ou désirée). Elle est solution du système précédent (I.11) pour des valeurs données de l'état initial $x(t_0)$ et des entrées $u^d(t \in [t_0, +\infty[)$

$$x^d(t) = x(t, x(t_0), u^d(\tau \leq t)) \quad (I.12)$$

On dit qu'une trajectoire nominale $x^d(t)$ du système (I.11) est **stable** lorsque de faibles modifications de $x(t_0)$ et/ou de $u^d(t \in [t_0, +\infty[)$ entraînent de faibles écarts de la trajectoire d'état générée par rapport à la trajectoire nominale (I.12).

Cette propriété de stabilité s'étudie en ramenant la trajectoire nominale étudiée à l'origine de l'espace d'état.

Ce point d'équilibre est celui de l'équation d'erreur entre la trajectoire courante (I.11) et la trajectoire désirée (I.12).

Nous supposons qu'on peut l'écrire sous la forme suivante (I.13) où les éléments de $A(\cdot)$ sont uniformément bornés.

$$\begin{cases} e(t) = x(t) - x^d(t) \\ \dot{e}(t) = A(t, x(t_0), u^d(t)) \cdot e(t) \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Les perturbations envisagées sont d'abord des modifications de conditions initiales ($e(t_0) \neq 0$) mais également des perturbations sur les entrées $u^d(t)$ qui affectent la dynamique du système (I.13).

Afin de caractériser la stabilité relative au point d'équilibre ($e=0$) (I.13), diverses définitions furent introduites par Hahn /Hahn, 1967/.

Nous présentons ici celles qui sont les plus utilisées.

Le processus concerné est décrit par une équation d'état (I.14)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \quad ; \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Définition 1 : stabilité

L'état ($x=0$) solution du système (I.14) en régime libre est stable au sens de Lyapunov si :

$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in T = [t_0, +\infty[, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tel que

si $\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ on a

$$\|x(t, x(t_0), t_0)\| < \varepsilon$$

Définition 2 : Stabilité asymptotique

La solution ($x \equiv 0$) du système (I.14) est asymptotiquement stable si elle est stable au sens de la définition 1 et si de plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x(t_0), t_0) = 0$$

Définition 3 : Stabilité exponentielle

La solution ($x \equiv 0$) du système (I.14) est stable exponentiellement si

$$\exists (\alpha, \beta, \text{ et } \eta) \in \mathbb{R}^+$$

$$\|x(t_0)\| < \eta$$

$$\forall x(t_0), \forall t \geq t_0 \text{ tel que}$$

$$\|x(t, x(t_0), t_0)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| \cdot e^{-\beta(t-t_0)}$$

Définition 4 : Stabilité asymptotique globale

La solution ($x \equiv 0$) du système (I.14) est asymptotiquement et globalement stable si elle est asymptotiquement stable quelque soit $x(t_0)$.

Après avoir caractérisé la propriété de stabilité, nous proposons dans la suite de rappeler les méthodes d'analyse qui permettent l'étude de la stabilité.

I.3.2 Méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes non-linéaires :

Pour les systèmes linéaires stationnaires, l'étude est facilitée par la connaissance de conditions **NECESSAIRES** et **SUFFISANTES** de stabilité asymptotique qu'on peut mettre sous forme algébrique ou graphique.

Dans le cas général des systèmes non-linéaires, il en va tout autrement.

Les résultats essentiels concernant la stabilité des systèmes non-linéaires sont dûs à Lyapunov /Lyapunov, 1892/.

Dans le premier théorème de Lyapunov, on montre qu'on peut déduire la stabilité **LOCALE** de l'équilibre à partir de celle du système linéaire tangent.

Ce résultat, quoiqu'intéressant, ne permet pas de préciser la taille du domaine d'attraction.

Cette lacune est comblée par le deuxième théorème de Lyapunov que nous rappelons :

I.3.2.1 Théorème de Lyapunov :

Considérons le système différentiel suivant :

(I.15)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ t \in T, \quad x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (\text{I.15})$$

La seconde méthode de Lyapunov permet l'analyse de la stabilité du système (I.15) sans avoir à expliciter la solution.

A cet effet, une fonction $V(x, t)$ doit être choisie telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

a) $V(x, t)$ est une application continue et

différentiable par morceaux de $S \times T \rightarrow \mathbb{R}_+$

b) $V(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall t \in T = [t_0, +\infty[$

c) $\alpha(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall t \in T = [t_0, +\infty[$

où $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ sont des fonctions de classe K au sens de la définition suivante:

Définition: $\Psi(r)$ est une fonction de classe K au sens de Hahn /Hahn, 1967/ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\Psi(0)=0$$

$\Psi(r)$ est une application de $R^+ \rightarrow R^+$

$\Psi(r)$ est une fonction définie continue non décroissante et radialement non bornée.

Il vient alors:

Théorème 1 : S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x,t)$ satisfaisant aux propriétés (a,b,et c) et dont la dérivée par rapport au temps soit non-positive pour tout (t,x) , alors le point d'équilibre $x=0$ est **stable**.

Théorème 2 : S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x,t)$ dont la dérivée pour tout (t,x) /

$$d/dt (V(x,t)) < -\varphi(\|x\|) \leq 0 \quad (I.16)$$

où $\varphi(.)$ est une fonction de classe K au sens de Hahn alors le point d'équilibre ($x=0$) est **asymptotiquement stable**.

I.3.2.2 Méthodes de comparaison (ou d'agrégation) :

La seconde méthode de Lyapunov conduit à reporter l'étude de la stabilité d'un système d'ordre supérieur à l'unité sur celle d'un système de comparaison du premier ordre.

A partir de ce résultat, certains auteurs /R.Bellman, 1962/; /matrozov, 1962/ ; /Bailey, 1966/ et /Grujc' et al, 1973/ ont abordé l'étude de la stabilité de systèmes de grande dimension interconnectés par l'utilisation de la notion de fonctions de Lyapunov vectorielles dont les composantes sont des fonctions de Lyapunov des sous-systèmes.

La technique des normes vectorielles fût introduite en automatique, par MM Borne et Gentina /Borne, 1976/ ; /Gentina, 1976/ pour pouvoir définir systématiquement des systèmes de comparaison non-linéaires d'un ordre quelconque indépendamment de la structure du système étudié.

Nous proposons maintenant de rappeler les définitions formelles relatives à l'étude de la stabilité des systèmes à partir de la notion des normes vectorielles.

I.3.2.3 Normes vectorielles : /Borne, 1976/ /Gentina, 1976/

Une norme vectorielle est un vecteur dont les composantes sont des normes des différents sous-espaces d'un recouvrement de l'espace d'état.

Soit E , un espace vectoriel de dimension n .

Soit $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ un recouvrement de E et $q(x)$ une norme vectorielle application de E dans R^k ($k \leq n$).

+

Les composantes de q sont des normes définies sur les espaces E_i

Ainsi la norme $q_i(.)$ satisfait aux axiomes de normes usuelles: (I.17)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x,y) \in E_i ; \forall \lambda \in \mathbb{C} ; \quad \forall i=1,2,\dots,k \\ q_i(\lambda x) = |\lambda| \cdot q_i(x) \\ q_i(x+y) \leq q_i(x) + q_i(y) \\ \forall x \in E_i ; \{ q_i(x)=0 \} \Leftrightarrow \{ x=0 \} \end{array} \right. \quad (I.17)$$

Considérons la représentation suivante d'un processus non-linéaire en régime libre : (I.18)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t, x(t), u^d(t)) \cdot x(t) \\ t \in [t_0, +\infty[, \quad x \in S \subset \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 , \quad u^d(t) \in \mathbb{R}^e \end{array} \right. \quad (I.18)$$

En associant une norme vectorielle $q(x)$ (I.17) à la matrice de régime libre $A(.)$ de (I.18), nous pouvons ainsi définir une matrice pseudo-majorante (notée $M(q,t,x(t),u^d(t))$) issue de la matrice initiale $A(t,x(t),u^d(t))$ et de la norme vectorielle $q(x)$ (I.17).

La matrice $M(q,t,x(t),u^d(t))$ est dite pseudo-majorante au sens de l'inégalité suivante (I.19) vérifiée composante à composante :

$$\frac{d}{dt^+} (q(x(t))) \leq M(q,\chi) \cdot q(x) \quad (I.19)$$

$$\text{où } \chi = (t, x(t), u^d(t))$$

Considérons maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (z(t)) = M(q, \chi) \cdot z(t) \\ z(t) \in \mathbb{R}_+^k \\ z(t_0) = q(x(t_0)) \end{array} \right. \quad (I.20)$$

En choisissant des matrices pseudo-majorantes $M(q, \chi)$ dont les éléments hors diagonaux sont non-négatifs alors le système (I.20) est un système de comparaison de (I.18) au sens où l'inégalité suivante est vérifiée : (I.21)

$$\forall t, z(t) \geq q(x(t)) \quad (I.21)$$

En conséquence la stabilité (asymptotique) du système de comparaison (I.20) induit celle du système initial (I.18).

L'étude de la stabilité des systèmes de comparaison peut être facilitée par les spécificités des matrices à éléments hors diagonaux non-négatifs.

I.3.2.4 Critère pratique de stabilité:

Nous proposons de présenter le résultat suivant corollaire du théorème de stabilité dû à MM Borne et Gentina /Gentina et al, 1979/ relatif aux systèmes de comparaison (I.20) dont la matrice de régime libre $M(q, \chi)$ possède :

- des éléments non-constants isolés dans une seule rangée.
- des termes hors-diagonaux sont non-négatifs.

Une condition suffisante pour que $x \equiv 0$ (I.18) soit asymptotiquement stable est que les mineurs principaux successifs de $(-M(q, \chi))$ soient tous strictement positifs :

$$(-1)^i \cdot \text{DET}_i (M(q, \chi)) \geq \varepsilon > 0 \quad ; \text{ pour } i=1, 2, \dots, k$$

La matrice $M(q, \chi)$, ainsi définie, peut être représentée sous la forme suivante :

$$M(q, \chi) = \begin{bmatrix} \text{Réel}(a_{11}(.)) & |a_{12}(.)| & ; & \dots & |a_{1n}(.)| \\ |a_{21}(.)| & \text{Réel}(a_{22}(.)) & & & |a_{2n}(.)| \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ |a_{n1}(.)| & ; & \dots & & \text{Réel}(a_{nn}(.)) \end{bmatrix}$$

Les mineurs principaux de cette matrice peuvent être calculés par l'une des deux méthodes suivantes, qui correspondent aux conditions de Kotelyanski (Gantmacher, 1966) :

$$(-1)^1 \Delta_1 = -\text{Réel}(a_{11}(.)) > 0$$

$$(-1)^2 \Delta_2 = + \det \begin{bmatrix} \text{Réel}(a_{11}(.)) & |a_{12}(.)| \\ |a_{21}(.)| & \text{Réel}(a_{22}(.)) \end{bmatrix} > 0$$

$$(-1)^n \Delta_n = \{ (-1)^n \det (M(q, \chi)) \} \geq \varepsilon > 0$$

Ou bien :

$$-\text{Réel}(a_{nn}(\cdot)) > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \text{Réel}(a_{nn}(\cdot)) & |a_{n,n-1}(\cdot)| \\ |a_{n-1,n}(\cdot)| & \text{Réel}(a_{nn}(\cdot)) \end{bmatrix} > 0$$

$$(-1)^n \det (M(q, \chi)) \geq \varepsilon > 0$$

Cette méthode d'analyse peut être ramenée à un seul critère numérique dont la négativité implique la stabilité asymptotique du système étudié.

En effet, ce critère consiste à chercher la valeur propre réelle maximale ε d'une M -matrice construite à partir du système initial (I.18) et d'une norme vectorielle $q(\cdot)$ donnée (I.17).

THEOREME

Soit $\varepsilon(q, \chi, p)$ la valeur propre maximale de
 $M(q, \chi, p)$

$$\text{Soit } \varepsilon(q, p) = \sup_{\chi \in \chi} (\varepsilon(q, \chi, p)) \quad (\text{I.22})$$

$$\text{SI } \varepsilon(q, p) < 0$$

Alors l'équilibre ($x=0$) du système initial
 (I.18) est asymptotiquement stable pour
 toute perturbation $\chi \in \chi$.

Ce résultat d'analyse peut être transformé en méthode de
 synthèse en formulant le problème suivant :

$$\text{Trouver} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{une norme vectorielle } q \\ \text{un vecteur paramètre } p. \end{array} \right.$$

tels que le critère $\varepsilon(q, p)$ défini en (I.22) soit
 négatif.

L'optimisation apporte une méthode de recherche de
 solution à ce problème .

Partant d'un choix initial (q^0, p^0) du couple (q, p) , il
 s'agit de minimiser la fonction $\varepsilon(q, p)$ en espérant ainsi
 atteindre une valeur négative.

I.3.2.5 **Hyperstabilité** : /Popov, 1960, 1973/ ;
/Faure et al, 1979/

I.3.2.5.1 **Introduction:**

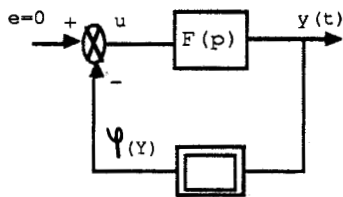
Le concept de l'hyperstabilité fut introduit par Popov /Popov, 1960/.

Il généralise le concept de la stabilité absolue des systèmes de commande linéaires à contre-réaction non linéaire

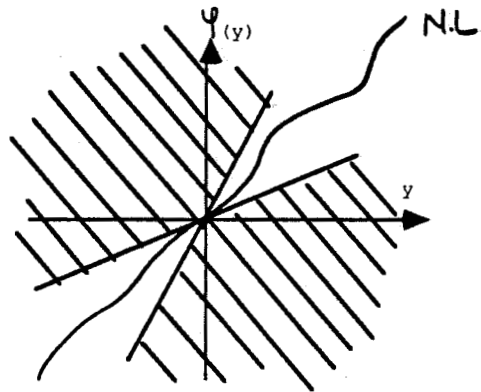
Rappelons en quelques mots ce que signifie stabilité absolue.

I.3.2.5.2 **Stabilité absolue:**

Considérons le système représenté par le schéma bloc suivant : (fig I.3)



(fig I.3)



(fig I.4)

Ce système est décrit par les équations non-linéaires suivantes : (I.22).

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x - B.\varphi(y) \\ y = C.x \end{cases} \quad (I.22)$$

Les caractéristiques des non-linéarités de l'organe en contre-réaction sont situées à l'intérieur d'un secteur angulaire donné et représenté par la figure (I.4).

Cette condition se traduit par l'inégalité suivante :

$$k_1 \cdot y \leq \varphi(y) \leq k_2 \cdot y \quad (\text{I.23})$$

Alors l'étude de la stabilité absolue consiste à déterminer quelles sont les conditions sur le bloc linéaire ($F(p)$) qui permettent d'assurer la stabilité de l'ensemble des asservissements pour lesquels la partie linéaire $F(p)$ est fixée et dont la partie non-linéaire satisfait aux contraintes (I.23).

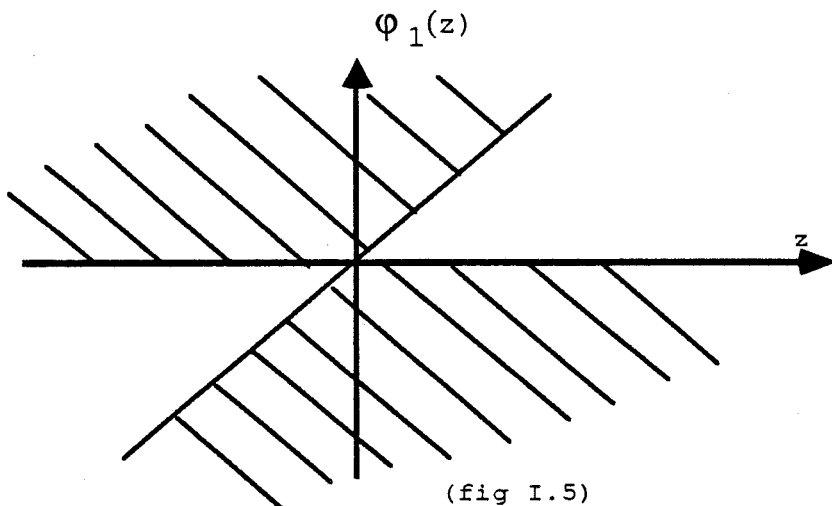
Cette condition peut toujours se ramener sous une forme standard exprimant qu'à tout moment il y a contre-réaction (et non réaction)

En effet, en introduisant une nouvelle variable z telle que :

$$z = -k_1 \cdot C \cdot x + y \quad (\text{I.24})$$

On peut ramener les conditions (I.23) sous la forme suivante : (I.25)

$$0 \leq \varphi_1(z)/z \leq k \quad (\text{I.25})$$



Plus généralement, Popov /Popov, 1960/ a généralisé la notion de stabilité absolue en introduisant le concept d'hyperstabilité.

Ainsi, un système d'entrée $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et de sortie $y(t) \in \mathbb{R}^m$ est un bloc hyperstable (asymptotiquement) s'il est stable (asymptotiquement) pour toutes les commandes qui satisfont à l'inégalité fonctionnelle suivante (I.27) dite " inégalité de Popov "

$$\eta(t_0, \infty) = \int_{t_0}^{+\infty} (u^T(\tau) \cdot y(\tau)) d\tau \quad (\text{I.26})$$

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+, \quad \eta(t_0, \infty) \leq \delta^2 \quad (\text{I.27})$$

Il s'agit bien d'une généralisation du concept de stabilité absolue. En effet, dans le cas monovariable, l'inégalité de Popov :

$$\eta(t_0, t) = \int_{t_0}^t (w(\tau) \cdot y(\tau)) d\tau \quad (\text{I.28})$$

avec $w(\tau) = -u(\tau)$

peut être majorée par la condition suivante :

$$w(\tau) \cdot y(\tau) \geq 0 \quad ; \quad t \in T = [t_0, +\infty [$$

Dans la suite, nous proposons de présenter les définitions relatives à ce concept, les moyens de caractériser les systèmes hyperstables et enfin leurs propriétés remarquables.

I.3.2.5.3 Définition de la propriété de l'hyperstabilité :

Considérons le système linéaire d'équation d'état suivant (I.29) mis en contre-réaction avec un bloc non-linéaire satisfaisant l'inégalité de Popov (I.30)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad (I.29)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^m$$

et

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+, \eta(t_0, \infty) = \int_{t_0}^{\infty} (u^T(\tau) \cdot y(\tau)) d\tau \leq \delta^2 \quad (I.30)$$

Le bloc linéaire (I.29) est dit :

- a) hyperstable si pour toute constante δ , il existe une valeur non négative k telle que pour toute entrée $u(t)$ satisfaisant, l'inégalité (I.30), les trajectoires $x(t)$ solution du système (I.29) satisfont à la condition (I.31)

$$\forall t \in T, \|x(t)\| \leq k(\|x(t_0)\| + \delta) \quad (I.31)$$

- b) Asymptotiquement hyperstable s'il est hyperstable et si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|x(t)\|) = 0$$

A partir de cette première définition, on montre que le système linéaire (I.29) est

- hyperstable (resp asymptotiquement hyperstable) si et seulement si il est positif (resp strictement positif) au sens des définitions des critères de positivité suivantes:

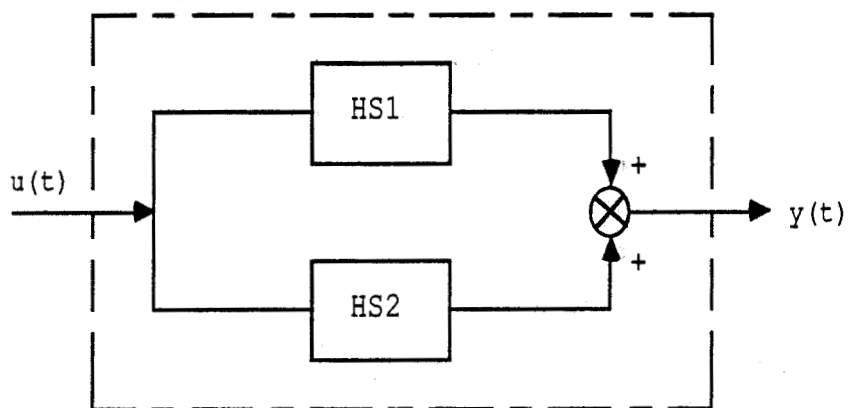
I.3.2.5.4 Critères de (stricte) positivité :
/ Faure et al, 1979/

Une fonction rationnelle $F(p)$ de la variable complexe p ($p = \alpha + j\omega$) est dite strictement réelle positive si :

- a) $F(\alpha)$ est réelle
- b) les pôles de $F(p)$ n'appartiennent pas au demi-plan $\text{Réel}(p) \geq 0$
- c) $\text{Réel}(F(j\omega)) > 0$; $-\infty < \omega < +\infty$

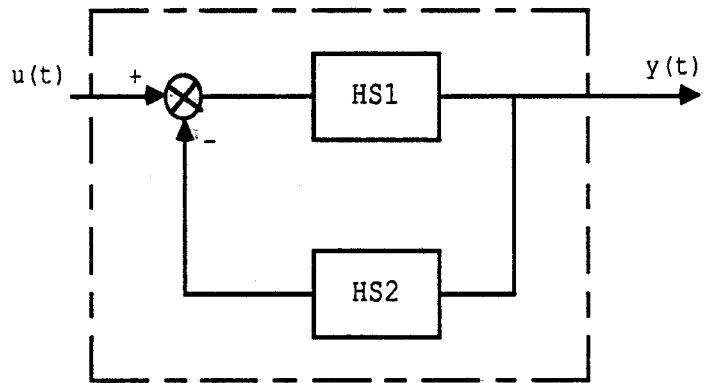
I.3.2.5.5 Blocs hyperstables / Propriétés :

- Le montage en parallèle de deux blocs hyperstables est hyperstable : (fig I.6)



(fig I.6)

- Le montage en contre-réaction de deux blocs hyperstables est hyperstable :
(fig I.7)



(fig I.7)

Dans cette partie, nous avons rappelé quelques méthodes d'étude de la stabilité applicables pour la synthèse d'asservissement.

Par la suite, nous proposons de passer en revue certaines méthodes de synthèse de lois de commande de systèmes dynamiques.

Celles-ci sont envisagées dans le cas où la structure de la loi de commande est déjà choisie.

I.4 Synthèse d'un régulateur :

La synthèse d'un régulateur est une opération qui consiste à définir la loi de commande d'un processus donné de manière à ce que l'asservissement ainsi constitué garantisse un ensemble d'indices de performances (temps de réponse, taux de dépassement, précision,...) pour un domaine donné de perturbations.

On peut distinguer deux aspects dans la synthèse d'asservissement.

Le premier est structurel.

Il est illustré, en linéaire, par le principe du modèle interne de Francis et Wonham que nous rappellerons.

Le second fait l'objet des travaux originaux présentés dans les chapitres suivants.

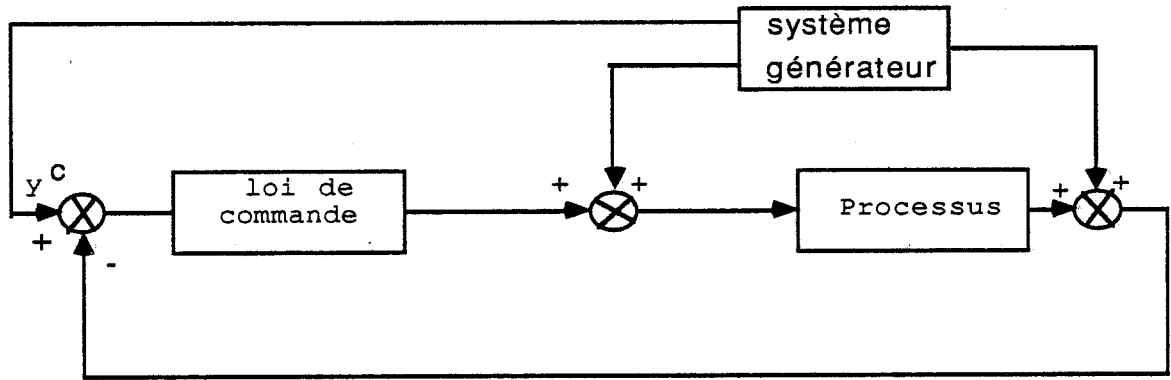
Il concerne la détermination de la **valeur** des gains d'une structure choisie dans la phase conceptuelle.

Comme le montre un exemple bibliographique présenté, cette recherche est généralement itérative et basée sur des techniques d'optimisation mono ou multi-critères.

I.4.1 Spécifications de structure:

Dans le cadre des systèmes linéaires, la classe de modèle (fig I.1) a été abordée par le principe du modèle interne/Francis et al, 1976/:

Ce principe est représenté par la configuration suivante: (fig I.8)



(fig I.8)

Dans cette structure de commande, les entrées de perturbations et de références sont issues d'un système générateur déterministe.

Les équations d'état relatives à ce schéma peuvent être représentées de la manière suivante : (I.32) et (I.33)

* Equations du processus perturbé

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p \cdot x_p(t) + A_r \cdot x_r(t) + B_p \cdot u_p(t) \\ \dot{x}_r(t) = A_{rp} \cdot x_r(t) \\ y_p(t) = C_p \cdot x_p(t) + C_r \cdot x_r(t) \end{cases} \quad (I.32)$$

* Equations du compensateur

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = y_c - y_p(t) \\ \dot{z}(t) = A_c \cdot z(t) + B_c \cdot \varepsilon(t) \\ u_p(t) = C_c \cdot z(t) + D_c \cdot \varepsilon(t) \end{cases} \quad (I.33)$$

où : $x_p(t)$: vecteur d'état du processus

$u_p(t)$: vecteur d'entrée de commande

généré par le régulateur

linéaire (A_c, B_c, C_c, D_c)



$x_r(t)$: vecteur d'état des signaux
des entrées de perturbations
et de références.

$y_p(t)$: vecteur des sorties à
contrôler

$\varepsilon(t)$: est l'erreur de sortie du
processus perturbé par rapport
à l'entrée de référence $y_c(t)$.

L'objet du principe est le suivant:

Le compensateur doit stabiliser en boucle fermée
en maintenant la sortie $y_p(t)$ autour de la
consigne délivrée par le système générateur :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_p(t) - y_r(t)) \rightarrow 0$$

$$\forall x_p(0), \forall z(0), \forall x_r(0)$$

SI:

* Le correcteur contient un modèle de
processus générateur de $x_r(t)$

commandable par $\varepsilon(t)$ et observable
par $u_p(t)$.

* Le système d'état (x_p, z) est
asymptotiquement stable.

Le principe du modèle interne peut être étendu aux
systèmes faiblement non-linéaires dont l'équation d'état du
processus est la suivante : (I.35)

$$\dot{x}_p(t) = A_p \cdot x_p(t) + f_p(x_p) + A_r \cdot x_r(t) + B_p \cdot u_p(t)$$

où $f_p(x_p)$ est de classe C^1 et (I.35)

satisfait à

$$\lim_{\|x_p\| \rightarrow 0} \|f_p(x_p)\| / \|x_p\| = 0$$

$$\|x_p\| \rightarrow 0$$

I.4.2 Synthèse paramétrique :

Le problème de régulation formulé par la condition de poursuite (I.4) est maintenant supposé ramené à un problème de stabilité.

Une fois, la structure de la loi de commande choisie a priori , il s'agit alors de déterminer les valeurs des gains ajustables dans la structure choisie qui satisfont un critère de stabilité donné.

Dans la suite, nous proposons de présenter les méthodes de synthèse employées lors de l'étude des systèmes asservis.

I.4.2.1 Méthodes de synthèse appliquées aux systèmes linéaires :

I.4.2.1.1 Méthodes fréquentielles :

Le théorème central de stabilité est le critère de Nyquist permettant de juger de la stabilité du système en boucle fermée d'après les propriétés d'un système en boucle ouverte.

Les critères de synthèse sont alors les marges de stabilité (marge de gain, marge de phase) ainsi que le facteur de résonance.

Dans ce cas de méthodes, l'étude des lieux de transfert permet de concevoir la structure de la loi de commande améliorant les caractéristiques du système étudié.

I.4.2.1.2 Placement des pôles /Sirisena et al, 1975/

Le processus à étudier est supposé décrit par l'équation d'état suivante : (I.36)

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ y = C.x \\ u = -F.y \end{cases} \quad (I.36)$$

L'objet de problème consiste à trouver la matrice de commande F.

Pour ceci Sirisena et Choi /Sirisena, 1975/ proposent de déterminer une valeur de p^* du vecteur $p \in R^{np}$ de gains ajustables dans la structure permettant de localiser tous les pôles dans une zone D du plan complexe gauche défini de la manière suivante :

$$D = \{s \in C, s = \sigma + j\omega ; h(\sigma, \omega) \leq 0 ; h \text{ est de classe } C_1\} \quad (I.37)$$

Pour une valeur donnée p_i des gains ajustables, ils évaluent le critère suivant: (I.38)

$$J = \sum \{ h(\alpha_i, \beta_i)^2 ; \lambda_i = (\alpha_i + j\beta_i) \} \quad (I.38)$$

La sommation s'effectue sur tous les pôles du système (I.36), en boucle fermée, qui n'appartiennent pas à D avec $\beta_i \geq 0$

Etant donné qu'il existe des expressions explicites pour $h(\alpha, \beta)$ et $\partial h(\alpha, \beta) / \partial \alpha$, $\partial h(\alpha, \beta) / \partial \beta$, un algorithme de type gradient peut être utilisé pour trouver F par minimisation de J (I.38)

Le problème de synthèse initial est ainsi résolu par une technique d'optimisation.

I.5 Conclusion :

Ce premier chapitre nous a permis d'établir les principales définitions relatives à la stabilité (§I.3) et de rappeler les différentes méthodes d'analyse (§I.3.2) utilisées par la suite.

Pour les systèmes non-linéaires, ces méthodes délivrent des conditions de stabilité qui sont suffisantes mais pas nécessaires.

De ce fait, les méthodes employées pour l'étude de la stabilité des processus non-linéaires sont très vastes et très variées.

Deux approches essentielles d'étude de la stabilité ont été introduites .

La première est abordée à partir du critère pratique de stabilité de MM.Borne et Gentina (§I.3.2.4)

La deuxième classe de méthodes, celle issue de la théorie de l'hyperstabilité (§I.3.2.5) nous a permis de ramener l'étude d'un système complexe à l'étude des sous-systèmes.

En effet, l'hyperstabilité des sous-systèmes interconnectés assure dans certaines conditions (§I.3.2.5.5 a,b) la stabilité du système global.

CHAPITRE II

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous définissons une classe de méthodes de synthèse paramétrique applicables aux systèmes non-linéaires à non-linéarités de rang 1 dont nous préciserons la définition en premier lieu.

Ces méthodes de synthèse sont abordées sous l'angle de la stabilisation de l'origine de l'espace d'état d'un système dynamique en régime libre.

Une difficulté liée à la prise en considération de processus non-linéaires apparaît à ce niveau.

En effet, les méthodes d'analyse de la stabilité dont on dispose dans le cadre des systèmes non-linéaires ne délivrent que des conditions **suffisantes** de stabilité.

Par conséquent, les méthodes que nous proposons prennent en compte cette difficulté de manière à obtenir des conditions de stabilité les moins restrictives possibles.

La technique retenue consiste à prendre un critère d'analyse appartenant à une classe paramétrée et à s'efforcer de déterminer simultanément :

- Les gains ajustables de la loi de commande
- Un critère à l'intérieur de la classe paramétrée considérée de manière à obtenir des conditions de stabilité optimales (les moins restrictives).

Après avoir défini la classe des processus étudiés, nous présenterons les différentes méthodes de synthèse que nous définissons à partir :

- des méthodes d'analyse de la stabilité rappelées dans le premier chapitre (§I.3.2)
- des représentations remarquables que nous rappellerons par la suite.

Pour chacune de ces méthodes, nous expliciterons un critère numérique à minimiser ainsi que les éléments de calcul de son gradient (ou plus généralement de ses sous-gradients).

Chacune des méthodes de synthèse peut alors être ainsi présentée comme un problème d'optimisation non-différentiable de type minimax.

Nous présenterons alors les principes d'algorithmes permettant de les résoudre.

II.2 Systèmes étudiés:

Les processus envisagés sont supposés décrits par une équation d'état en régime libre (II.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(x(t)) = F(\chi, p) \cdot x(t) \\ t \in T = [t_0, +\infty[\\ x \in s \subset \mathbb{R}^{n1} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

Dans cette représentation,

- * La variable $\chi \in \chi$ note l'ensemble des arguments des fonctions (composant la matrice $F(\chi, p)$) qui sont non-constantes le long des trajectoires de (II.1).

En particulier χ pourra représenter l'effet :

- d'entrées de perturbations paramétriques
- de changements de points de fonctionnement
- de non-linéarités en l'état
- de non-stationnarités.

- * Le vecteur $p \in \mathbb{R}^{np}$ est un vecteur de gains ajustables qui paramètre une structure de la loi de commande choisie a priori.

- * Les composantes de $F(\chi, p)$ sont supposées bornées par rapport à $\chi \in \chi$.

$$\forall p \in \mathbb{R}^{np} ; \quad \sup_{\chi \in \chi} (\|F(\chi, p)\|) < +\infty$$

$$\chi \in \chi$$

* Le vecteur d'état $x(t)$ note l'écart entre une trajectoire courante et une trajectoire désirée.

Nous sommes donc conduit à étudier la stabilité asymptotique du point d'équilibre $x \equiv 0$.

Vis à vis de cette classe de processus nous nous intéressons aux systèmes dits de rang 1 /Richard .J.P, 1984/ dont nous précisons maintenant la définition.

II.2.1 Systèmes à non-linéarités de rang 1 :

/Richard, 1984/

Considérons les matrices de régime libre $F(\chi, p)$ des systèmes décrits par une équation d'état du type (II.1)

II.2.1.1 Définition:

Une matrice $F(\chi, p)$ de $\mathbb{R}^{n1 \times n1}$ est à non-linéarités de rang 1 si et seulement si ses éléments peuvent être regroupés dans une seule rangée (ligne ou colonne).

Si les non-linéarités sont regroupables dans une seule colonne, la matrice $F(\chi, p)$ est dite de type C(1) (II.2.a) et s'ils sont dans une seule ligne $F(\chi, p)$ est de type L(1) (II.2.b).

La matrice $F(\chi, p)$ prend alors l'une des deux formes suivantes :

Matrice de type C(1) :

$$F(\chi, p) = F_0(p) + f(\chi, p) \cdot u^T(p) \quad (\text{II.2.a})$$

Matrice de type L(1) :

$$F(\chi, p) = F_0(p) + u(p) \cdot f^T(\chi, p) \quad (\text{II.2.b})$$

avec $F_0(p) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$

$u(p) \in \mathbb{R}^{n_1}$

$f(\chi, p) \in \mathbb{R}^{n_1}$: note un vecteur dont
les composantes peuvent
varier le long des
trajectoires du système.

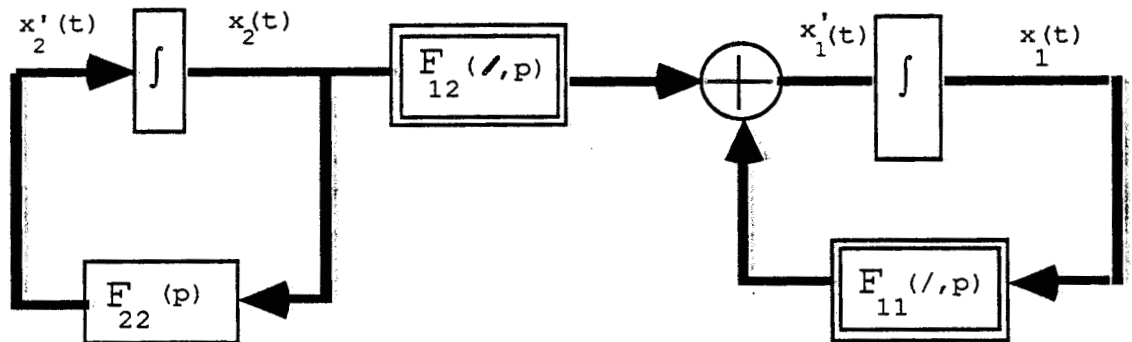
Nous définissons maintenant des formes canoniques des matrices de régime libre (II.2.a) (resp (II.2.b)) pour lesquelles les éléments non-constants sont regroupés soit dans une seule colonne (C(1) (II.5)) soit dans une seule ligne (L(1) (II.4)).

II.2.1.2 Formes canoniques : /Richard J.P, 1984/

En supposant la paire $[F_0(p), u(p)]$ commandable, une similitude permet de ramener la matrice de régime libre initiale (II.2) sous l'une des deux formes canonique (II.4) ou (II.5) /Meizel, 1984/.

Dans le cas contraire ($\text{rang}(F_0(p), u(p)) < n_1$) /Meizel, 1984/, le système initial (II.1) est représentable par la mise en série d'un système linéaire et d'un système non-linéaire sous l'une des deux formes canoniques (II.4) ou (II.5).

A partir d'un système de type L(1) cette décomposition est représentée par le schéma bloc suivant :



Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(\chi, p) & F_{12}(\chi, p) \\ 0 & F_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

(II.3)

$$n = \text{rang} \left([F_0(p), u(p)] \right)$$

$F_{11}(\chi, p)$ se présente sous la forme canonique suivante
(II.4)

BU
LILLE

$$F_{11}(\chi, p) = \begin{bmatrix} -a_1(\chi, p) & -a_2(\chi, p) & \dots & -a_n(\chi, p) \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(II.4)

Forme canonique relative à (II.2.b)

Dans le même esprit, l'étude de stabilité d'un système initialement sous la forme C(1) (II.2.a) se ramène pour la partie intrinsèquement non-linéaire, à l'étude d'un système dont la matrice de régime libre est la suivante : (II.5)

$$FC1(\chi, p) = \begin{bmatrix} -a_1(\chi, p) & 1 & & \\ -a_2(\chi, p) & & \circ & \\ \vdots & & & \\ -a_n(\chi, p) & & & 1 \\ & & \circ & & 0 \end{bmatrix} \quad (II.5)$$

Forme canonique relative à (II.2.a)

Nous proposons dans la suite de focaliser notre étude sur les systèmes dont la matrice de régime libre possède n éléments non-constants isolés dans la première ligne (II.4).

A cette matrice $FL1(.)$ est associé un polynôme symbolique, en l'indeterminée λ : $P(\lambda, \chi, p)$ (II.6) égal au polynôme caractéristique de $FL1(\chi, p)$ (II.4) pour toutes les valeurs fixées de χ :

$$\forall \chi \in \chi ; P(\lambda, \chi, p) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i(\chi, p) \cdot \lambda^{n-i} \quad (II.6)$$

Nous proposons maintenant la définition de deux formes remarquables obtenues par changement de base à partir de la forme canonique précédente (II.4).

II.3 Représentations sous-formes remarquables des systèmes étudiés :

II.3.1 Forme de type "série" : /Meizel, 1979/

Considérons de nouveau une matrice de régime libre sous forme canonique $L(1)$ (II.4)

Définissons un vecteur de représentation c (II.7)/

$$c^T = [c_2, c_3, \dots, c_n] ; c \in C^{n-1} \quad (II.7)$$

Un changement de base approprié $V(c)$ nous permet d'obtenir une matrice équivalente à $FL1(\chi, p)$ /

$$SC(c, \chi, p) = V^{-1}(c) \cdot FL1(\chi, p) \cdot V(c)$$

$$SC(c, \chi, p) = \begin{bmatrix} -b_1(c, \chi, p) & ; & -b_2(c, \chi, p) & ; & \dots & ; & -b_n(c, \chi, p) \\ & 1 & & & & & \\ & & c_2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & c_n & \end{bmatrix} \quad (II.8)$$

Etant donné que les éléments non-constants des matrices $FL1(\chi, p)$ et $SC(c, \chi, p)$ sont isolés sur la même ligne, nous pouvons alors appliquer le théorème suivant dû à Richard /Richard, 1984/ :

Les deux matrices $FL1(\chi, p)$ (II.4) et $SC(c, \chi, p)$ (II.8) sont semblables si elles ont même polynôme symbolique /

$$\det (\lambda I_n - FL1(\chi, p)) = \det (\lambda I_n - SC(c, \chi, p)) \quad (II.9)$$

Ainsi, en identifiant les coefficients de l'égalité (II.9) nous obtenons les éléments définissant la matrice $SC(c, \chi, p)$ /

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\lambda, \chi, p) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i(\chi, p) * \lambda^{n-i} \\ b_1(c, \chi, p) = a_1(\chi, p) + \sum_{i=2}^n c_i \\ b_n(c, \chi, p) = P(\lambda, \chi, p) = D^*(c_n, P(., \chi, p)) \\ \forall i=2, \dots, n \quad b_i(c, \chi, p) = D^*(c_i, c_{i+1}, \dots, c_n, P(., \chi, p)) \end{array} \right. \quad (II.10)$$

D^* est l'opérateur différence divisée que nous définissons dans la suite du paragraphe /Brezinski, 1983/.

Soit f une application de classe c^∞ de $C \rightarrow C^k$.

Soit $c \in C^n$, $c^T = [c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1]$

On appelle différences divisées d'ordre $0, 1, \dots, n$ de la fonction f , les expressions suivantes :

$$\text{Ordre 0} \quad D(c_1; f) = f(c_1)$$

$$\text{Ordre 1} \quad D(c_2, c_1; f) = \begin{cases} \frac{df(c)}{dc} \quad c=c_1 & \text{si } c_2 = c_1 \\ \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, n-1 \quad D(c_i, c_{i-1}, \dots, c_1; f) = \begin{cases} \frac{D(c_{i+1}, c_{i-1}, \dots, c_1; f) - D(c_i, c_{i-1}, \dots, c_1; f)}{c_{i+1} - c_i} & \text{si } c_{i+1} \neq c_i \\ \frac{\partial}{\partial c_i} (D(c_i, c_{i-1}, \dots, c_1; f)) & \text{si } c_{i+1} = c_i \end{cases}$$

Dans le cas où la fonction f est mise sous forme polynômiale nous pouvons définir la linéarité de l'opération différence divisée qui permet de calculer l'expression à partir des différences divisées de la fonction puissance :

$$D(c_{i+1}, c_i, c_{i-1}, \dots, c_1; \sum_{k=1}^n a_k \cdot x^k) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot D(c_{i+1}, c_i, \dots, c_1; x^k)$$

II.3.2 Représentation en flèche : /Benrejeb, 1980/

Considérons de nouveau la matrice de régime libre $L(1)$
(II.4)

Introduisons maintenant un vecteur de paramètres de représentations $c \in \mathbb{C}^{n-1}$ défini par (II.11) :

$$c^T = [c_2, c_3, \dots, c_n] ; \forall i \neq j ; c_i \neq c_j \quad (II.11)$$

La matrice $FL1(\chi, p)$ peut être représentée de manière équivalente par une matrice en flèche : (II.12)

$$FF(c, \chi, p) = \begin{bmatrix} -b_1(c, \chi, p) & -b_2(c, \chi, p) & \dots & -b_n(c, \chi, p) \\ & 1 & & \\ & & c_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & c_n \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

Le polynôme symbolique $P(., \chi, p)$ associé à la matrice $FL1(\chi, p)$ (II.4) est défini par (II.13) :

$$P(\lambda, \chi, p) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i(\chi, p) \cdot \lambda^{n-i} \quad (II.13)$$

La méthode de synthèse consiste alors à minimiser ce critère jusqu'à ce qu'il devienne négatif.

Afin de mener à bien cette optimisation nous détaillerons les calculs des (sous) gradients des critères pour chacune des méthodes traitées.

II.4.1 Synthèse d'asservissement par utilisation des normes vectorielles : /Gentina, 1976/, /Meizel, 1984 b/

II.4.1.1 Classe de normes vectorielles envisagées:

Nous proposons de considérer la classe de normes vectorielles (II.15) pour faciliter l'application du théorème de stabilité établi en (§I.3.2.4)

On définit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ q: x \rightarrow q(x) \\ q_i(x) = |y_i| \quad ; \quad \forall i=1,2,\dots,n \\ y = V.x \quad ; \quad \det(V) \neq 0 \end{array} \right.$$

(II.15)

La matrice de changement de base $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ doit être telle que sa première colonne soit colinéaire à

$$V^T = [1, 0, \dots, 0].$$

Ceci permet de garder dans la première ligne les éléments non- constants de la matrice transformée.

La norme vectorielle induite (II.15) nous permet alors de définir naturellement une matrice pseudo-majorante dont la structure est la suivante : (II.16)

$$M(q, \chi, p) = \begin{bmatrix} * & & * & & * & \cdot & & & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Les * désignent les éléments non-constants

Cette structure correspond à l'une des hypothèses d'application du théorème de MM.Borne&Gentina (§I.3.2.4).

II.4.1.2 Définition du critère d'analyse de la stabilité :

On souhaite déterminer un réglage des composantes de p et une norme vectorielle qui permettent de conclure à la stabilité par utilisation du théorème d'analyse énoncé en (§I.3.2.4).

Dans le cas présent, ce choix se ramène à celui de p et de la matrice V (II.15) ou bien encore, pour une classe donnée de matrice de changement de base $V(c)$ ($c \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\det(V) \neq 0$) à celui aux deux vecteurs:

- de paramètres (p)
- de représentation (c)

La stabilité asymptotique du système étudié est associée à la négativité du critère $\varepsilon(c,p)$ défini comme : (II.17)

$$\varepsilon(c,p) = \sup_{\chi \in \chi} (\varepsilon(c,\chi,p)) \quad (\text{II.17})$$

où $\varepsilon(c,\chi,p)$ est la valeur propre réelle maximale de $M(q,\chi,p)$ (II.16).

Le calcul de ce critère peut être obtenu :

- * Par n'importe quel programme de calcul des valeurs propres. Ou bien par la procédure développée dans /Meizel, 1984.a/ relatives aux matrices à éléments hors diagonaux non-négatifs.

Nous abordons maintenant les méthodes de synthèse associées aux deux formes remarquables de représentation des asservissements forme de type "série" (II.8) et forme en flèche (II.12).

Celles-ci correspondent à deux classes particulières de changement de base $V(.)$ (II.15).

II.4.1.3 Méthodes de synthèse associées à la forme "série" : /Meizel, 1984.b/

Etant donné la définition (II.8) à partir du changement de base $V(c)$ d'une norme vectorielle q , la matrice pseudo-majorante de la matrice de régime libre $FL1(\chi, p)$ (II.4) est définie par $MS(c, \chi, p)$ (II.18):

[illegible]

Notons $\varepsilon(c,p)$ le critère associé à cette représentation :

$$\varepsilon(c, p) = \sup_{\chi \in \chi} (\varepsilon(c, \chi, p))$$

II.4.1.3.1 Calcul du critère d'analyse et de sa sensibilité :

Tant que la valeur propre réelle maximale $\varepsilon(c,p)$ n'est pas négative, on est conduit à minimiser la fonction $\varepsilon(c,p)$ par rapport à ses arguments.

Nous aurons alors à calculer la tendance d'évolution de $\varepsilon(c,p)$ par rapport aux variables ajustables p_j et aux variables de représentation c_i .

On définit:

$$E \subset \mathbb{R}^{np} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que}$$

$$E = \{ \{p_j ; j=1,2,\dots,np\} \cup \{\text{Réel}(c_i)\} \cup \{\text{Im}(c_i)\}, i=2,\dots,n \}$$

on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \beta \in E \\ \chi^* \text{ note un élément de } \chi \text{ tel que} \\ \varepsilon(c,p) = \varepsilon(c,\chi^*,p) \\ \partial(\varepsilon(c,\chi_i,p)) / \partial \beta = V^T(c,\chi_i,p) \cdot \partial M(c,\chi_i,p) / \partial \beta \cdot u(p,c) \\ u(p,c) \text{ est un vecteur propre de } M(c,\chi^*,p) \\ \text{relatif à } \varepsilon(\chi,p). \\ v(c,\chi^*,p) \text{ est un vecteur propre de } M^T(c,\chi^*,p) \\ \text{relatif à } \varepsilon(\chi,p). \\ v(c,\chi^*,p) \cdot u(p,c) = 1 \end{array} \right.$$

(II.19)

Dans la suite nous proposons de montrer comment on peut calculer les accroissements de $MS(c,\chi,p)$ par rapport à β connaissant ceux de la matrice série $SC(c,\chi,p)$.

Les dérivées partielles des éléments de la première ligne de $SC(c, \chi, p)$ s'expriment par les relations suivantes :
(II.20)

$$\begin{aligned} \partial(\text{Réel}(b_1(c, \chi_i, p)) / \partial \beta &= \text{Réel}(\partial b_1(c, \chi, p) / d\beta \\ \forall i=2, \dots, n ; b_i(c, \chi_i, p) &= \text{Réel}(b_i(c, \chi, p)) + j \text{Im}(b_i(c, \chi_i, p)) \end{aligned}$$

(II.20)

Deux cas possibles de calcul des gradients à envisager.

Premier cas:

$$b_i(c, \chi, p) \neq 0$$

alors :

$$\begin{aligned} \partial(|b_i(.)|) / \partial \beta &= \{ \text{Réel}(b_i(.)) \cdot \text{Réel}(\partial(b_i(.)) / \partial \beta + \\ &\quad \text{Im}(b_i(.)) \cdot \text{Im}(\partial(b_i(.)) / \partial \beta) \} / |b_i(.)| \end{aligned}$$

(II.21)

Deuxième cas:

$$b_i(c, \chi, p) = 0$$

alors :

$$\partial(|b_i(.)|) / \partial \beta^+ = |\partial(b_i(.)) / \partial \beta|$$

et

$$\partial(|b_i(.)|) / \partial \beta^- = |\partial(b_i(.)) / \partial \beta|$$

(II.22)

Nous proposons maintenant d'étudier la méthode de synthèse associée à la forme en flèche (II.12).

II.4.1.4 Méthode de synthèse associée à la forme en flèche :

La synthèse est conduite à partir de la forme en flèche (II.12).

A cette matrice, on associe la classe de normes vectorielles définie en (II.15).

Nous obtenons ainsi la matrice pseudo-majorante de régime libre suivante : (II.23)

$$M S (c , \chi , p) = \left[\begin{array}{cccc} -\text{Réel} (b_1(.)) ; & |b_2(.)| ; & \dots ; & |b_n(.)| \\ & 1 & & \text{Réel}(c_2) \\ & | & & \circ \\ & | & & \diagdown \\ & | & & \text{Réel}(c_n) \\ & 1 & & \end{array} \right]$$

(II.23)

De même le critère d'analyse de la stabilité associé à cette forme de représentation est une valeur propre réelle maximale $\varepsilon(c,p)$. Une valeur négative de ce critère permet de conclure à la stabilité asymptotique.

Pour ce mode de représentation (II.23), le calcul du critère $\varepsilon(c,p)$ et sa sensibilité relatifs suit les mêmes démarches que celles employées dans le cas de la représentation série (§II.4.1.3).

Dans ce paragraphe, nous avons mis en évidence une méthodologie de synthèse paramétrique basée sur l'utilisation d'un théorème d'analyse de la stabilité issu des techniques d'agrégation par normes vectorielles.

La mise en oeuvre de cette méthode est facilitée par le mode de représentation équivalente des systèmes étudiés (forme série, et forme en flèche).

Ceci nous permet d'exprimer un critère de stabilité défini par la négativité de la valeur propre réelle maximale $\varepsilon(c,p)$ qui dépend :

- des gains ajustables de la loi de commande p
- d'une base de représentation définie par les paramètres c .

La minimisation de ce critère $\varepsilon(c,p)$ par rapport à (c) et (p) constitue donc une méthode de synthèse permettant d'obtenir p^* et c^* pour lesquelles le système étudié est asymptotiquement stable.

Ce type de problème est mis sous la forme suivante dite MINIMAX /

$$\underset{c,p}{\text{Minimiser}} \quad \varepsilon(c,p) = \sup_{\chi \in \chi} \varepsilon(c,\chi,p)$$

Dans la suite, nous développons une autre méthode de synthèse issue de la théorie de l'hyperstabilité et associée à la forme en flèche.

II.4.2 Méthode de synthèse issue de la forme en flèche interprétée par l'hyperstabilité :

Dans cette partie nous envisageons de mener l'analyse et la synthèse d'une large classe de système à non-linéarités de rang 1.

La méthode de synthèse sera déduite de la théorie de l'hyperstabilité (§I.3.2.5) appliquée à une représentation de matrice de régime libre mise sous forme en flèche.

La synthèse paramétrique est envisagée par l'optimisation d'un critère numérique dont la positivité implique la stabilité du système étudié.

II.4.2.1 Représentation en flèche :

Nous supposons que les systèmes étudiés sont décrits par l'équation d'état suivante : (II.24)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(\chi, p) \cdot x(t) \\ F(\chi, p) = F_0(p) + u(p) \cdot f^T(\chi, p) \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{R}^{n1}$$

(II.24)

En suivant les démarches effectuées dans le paragraphe (§II.2.1.2) nous pouvons ramener l'étude du système étudié initial (II.24) au seul système non-linéaire suivant : (II.25)

$$\dot{x}_1(t) = FL1(\chi, p) \cdot x_1(t)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\lambda, \chi, p) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i(\chi, p) \lambda^{i-n} \\ b_1(c, \chi, p) = a_1(\chi, p) + \sum_{i=2}^n c_i \\ b_i(c, \chi, p) = P(c_i, \chi, p) / \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n (c_i - c_j) , \quad \forall i=2, \dots, n \quad c_i \neq c_j \end{array} \right.$$

Nous proposons le résultat suivant concernant la stabilité de l'origine de l'espace d'état de l'équation (II.24) en régime libre.

II.4.2.2 Critère d'analyse de la stabilité /théorie de l'hyperstabilité :

/Ben Helal et Meizel, 1985/

Considérons le système (II.24) et le point d'équilibre situé à l'origine de l'espace d'état ($x_1 = 0$).

On peut énoncer le théorème suivant dont on trouve la démonstration en annexe.

SI :

- i) la paire $[F_0(p), u(p)]$ de (II.24) est stabilisable
- ii) $\exists c \in \mathbb{R}^{n-1} ; c^T = [c_2, c_3, \dots, c_n] \quad \forall i \neq j \quad c_i \neq c_j$

$$\forall i=2, \dots, n \quad c_i < 0$$

(II.28)

tel que les éléments de la matrice en flèche (II.27) associée vérifient les inégalités suivantes : (II.29)

$$\{ \forall \chi \in \chi \{ \exists c_1 < 0 , \quad b_1(c, \chi, p) \geq -c_1 > 0$$

$$\forall i=2, \dots, n \quad ; \quad b_i(c, \chi, p) \geq 0 \} \}$$

(II.29)

Alors

le point d'équilibre $x \equiv 0$ du système (II.24) est asymptotiquement stable.

A partir de ce résultat d'analyse, on peut définir un critère numérique dont la valeur positive assure la stabilité asymptotique.

Ce critère dépend à la fois:

- des valeurs des gains ajustables p_j dans la loi de commande du processus.
- du choix des $n-1$ paramètres de représentation $c_2, \dots, c_n$.

En effet, définissons

$$b(c,p) = \min_{i=1, \dots, n} [\inf_{\chi \in \chi} (b_i(c, \chi, p))] \quad (II.30)$$

S'il existe

- un vecteur $p \in R^{np}$ de gains ajustables
- un vecteur $c \in R^{n-1}$ de paramètres de représentation

qui satisfont :

$$b(c,p) > 0$$

dans le domaine $\{ \forall i=2, \dots, n ; c_i < 0 \}$

alors on assure la condition (ii) du théorème précédent et par là, la stabilité cherchée.

Le critère $b(c,p)$ (II.30) apparaît alors comme un critère numérique de stabilité que l'on peut rendre positif en le maximisant par rapport aux variables c et p .

Afin de pouvoir appliquer et utiliser aisément les algorithmes implantés pour le cas général du problème d'optimisation de type Minimax, on est amené à définir:

- * un vecteur x contenant les variables $[c_i, p_j]$ d'optimisation du problème (II.30) tel que :

$$x^T = [c^T, p^T] \in \mathbb{R}^{n+np}$$

où n : Ordre du système
 np : Nombre des gains ajustables de la loi de commande.

- * des fonctions $f_i(\chi, x)$ /

$$f_i(\chi, x) = -b_i(\chi, x) ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Le problème initial (II.30) est alors ramené sous la forme standard suivante : (II.31)

$$\text{Minimiser } F(x) = \sup_{i=1, \dots, n} (f_i(\chi, x)) ; \quad \forall \chi \in \chi \quad (\text{II.31})$$

Dans la suite, nous proposons d'étudier les méthodes d'optimisation que nous aurons à utiliser pour la synthèse d'asservissement utilisant les deux formes remarquables définies en (§II.3).

II.5 Méthodes d'optimisation :

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit des méthodes de synthèse sous la forme de problèmes d'optimisation :

Ceux-ci sont de deux types (a) et (b)

(a) Problème Minimax à contraintes linéaires /

$$\text{Minimiser } F(x) = \max_{i=1, \dots, N} (f_i(x))$$

sur le domaine $D = \{x / x \in \mathbb{R}^n, A \cdot x - b \geq 0\}$

connaissant : $\partial f_i(x) / \partial x_j ; \forall i=1, \dots, N, \forall x \in \mathbb{R}^n$

(II.32)

(b) Problème non-différentiable sans contraintes

Minimiser $f(x)$

Lorsque, en tout point x , il n'existe pas nécessairement de gradient mais plutôt un "sous-différentiel"

généralisant la notion de gradient.

(II.33)

Dans ce paragraphe, nous explicitons deux méthodes chacune solution de l'un des problèmes posés.

Dans le cas (a), ce sera un algorithme dû à des chercheurs danois.

Dans le cas (b), ce sera une méthode dite de "faisceau".

Nous explicitons maintenant les principes de ces deux algorithmes. Pour le second (II.32), nous préciserons alors les définitions de sous-gradients, sous-différentiels, direction de plus grande pente, d' ε -sous-gradients, et de ε -sous-différentiels.

Nous serons ensuite amenés à définir

- a) le critère d'arrêt des itérations
- b) le passage d'une itération à la suivante.

II.5.1 Algorithme de Madsen et Schaer-Jacobsen :

/ Madsen et al, 1978/

Le principe de l'algorithme est le suivant :

Soit x^k le point courant ($x^k \in D \subset \mathbb{R}^m$) et $h_k \in \mathbb{R}^m$ un déplacement à partir de x^k .

on approxime $F(x)$ (II.33) dans le voisinage de x^k par une fonction $F^*(x^k+h)$ définie par la relation suivante :
(II.34)

$$F^*(x^k+h) = \text{Max}_{i=1, \dots, N} \left\{ \left(f_i(x^k) \right) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} \cdot h_j \right\} \quad (\text{II.34})$$

A chaque itération, on définit un domaine ζ^k autour de x^k .

ζ^k est interprété comme le domaine sur-lequel l'approximation $F^*(x^k+h)$ de $F(x^k+h)$ est "correcte".

D'un point de vue technique, ζ^k est un hypercube de centre x^k et de demi-côté λ^k (II.35):

$$\zeta^k = \{ x / x \in \mathbb{R}^m ; \forall j=1, \dots, m ; |x - x^k|_j < \lambda^k \} \quad (\text{II.35})$$

Le critère d'arrêt est la taille λ^k de ce domaine ζ^k "d'approximation correcte".

Dès qu'elle devient trop petite, l'algorithme s'arrête.

Le passage d'une itération à la suivante s'opère en maximisant la décroissance de l'approximation $F^*(x^k+h)$ sur le domaine $\zeta^k \cap D$.

On obtient ainsi x^{k+1} en résolvant le problème de programmation linéaire en h suivant : (II.36)

Minimiser h_{m+1} par rapport à $h \in \mathbb{R}^m$

avec:

$$i=1, \dots, N \quad f_i(x^k) + \sum_{j=1}^m \partial f_i(x^k) / \partial x_j \cdot h_j < h_{m+1}$$

$$\|h\|_{\infty} \leq \lambda^k$$

$$A(x^k+h) + b \geq 0$$

(II.36)

La résolution de ce problème peut être obtenue par n'importe quelle méthode de programmation linéaire (méthode du simplexe /Boudarel et al, 1967/ ; méthode du simplexe révisée /Munksgaard, 1977/.

On obtient ainsi une solution h^k .

L'itération suivante est alors x^{k+1} égale à $x^k + h^k$ à *

condition que la décroissance réelle de F soit conforme à son estimation.

Dans le cas contraire, on maintient x^{k+1} égale à x^k et on réduit le domaine d'approximation correcte $\zeta^{k+1} \subset \zeta^k$

De par sa genèse, x^{k+1} appartient au domaine admissible D (sous réserve que le point initial x^0 y appartienne).

Ce nouveau point permet de tester à posteriori la justesse du domaine d'approximation ζ^k sur lequel on vient de travailler.

A cette fin, on compare la valeur réelle de $F(x^{k+1})$ avec sa prédiction $F^*(x^{k+1})$.

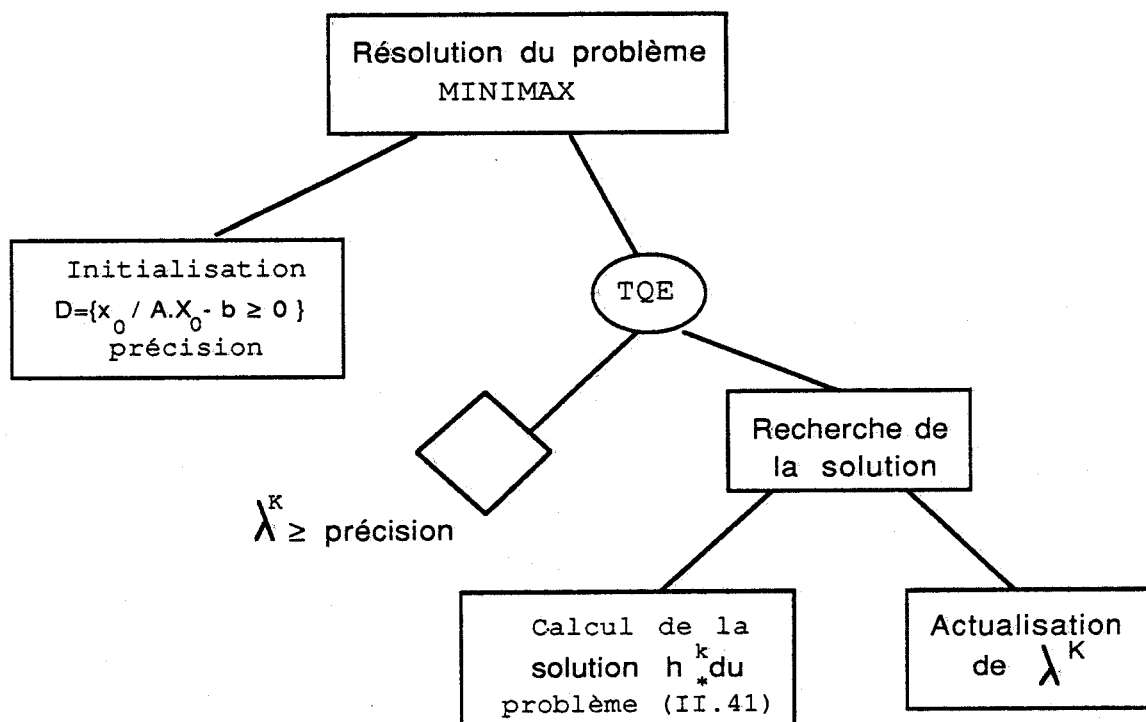
Si cette prédiction est mauvaise, on diminue λ^k (on rapetisse ζ^k (II.35)).

Si cette prédiction est très bonne, on augmente λ^k (on agrandit ζ^k (II.35)).

Si cette prédiction est simplement correcte, on ne modifie pas λ^k .

La comparaison de λ^k avec une précision choisie a priori constitue le test d'arrêt de l'algorithme.

La programmation de l'algorithme est la suivante:

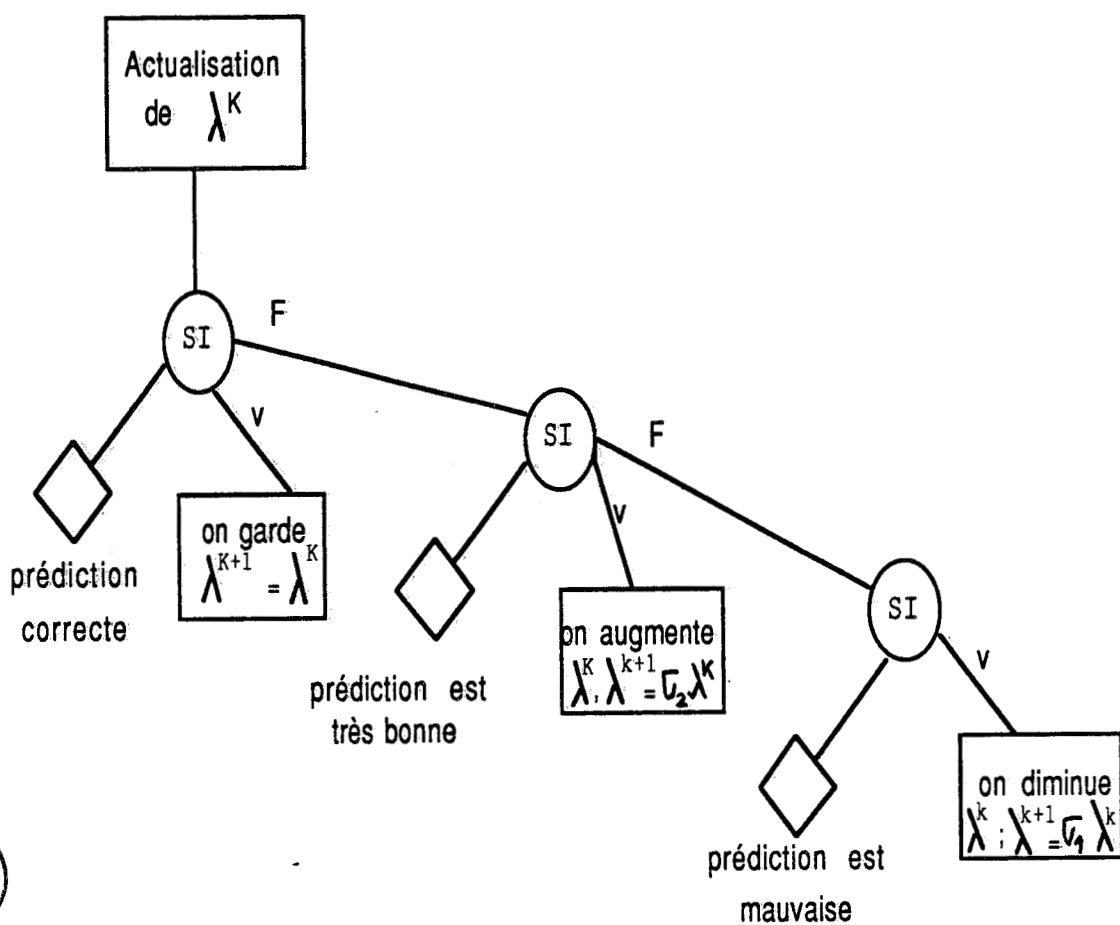


prédiction correcte = $F(x_k) - F(x_k + h_k) \leq \rho_1 (F(x_k) - F^*(x_k + h_k))$

prédiction très bonne = $F(x_k) - F(x_k + h_k) \leq \rho_3 (F(x_k) - F^*(x_k + h_k))$

prédiction mauvaise = $F(x_k) - F(x_k + h_k) \leq \rho_2 (F(x_k) - F^*(x_k + h_k))$

$$\sigma_2 > 1, \sigma_1 < 1; \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 1$$



En conclusion, cet algorithme peut être appliqué au critère de synthèse (II.30) déduit de l'interprétation par l'hyperstabilité de la forme en flèche.

Ceci réclame a priori une discrétisation des modèles dans l'espace des points de fonctionnement pour approximer l'expression

$$\sup_{\chi \in \mathcal{X}} (-b(c, \chi, p))$$

définie sur un support continu $\mathcal{X}$ par une expression de type :

$$\max_{i=1, \dots, \text{Nech}} \{ -b(c, \chi_i, p) \} ; \chi_i \in \mathcal{X} \quad (\text{II.37})$$

définie sur un support discret $\{ \chi_i ; i=1, \dots, \text{Nech} \}$.

Notons que les critères de synthèse (II.17) déduits des techniques de majoration par normes vectorielles ne peuvent pas être optimisés par cet algorithme même après discrétisation de l'ensemble $\mathcal{X}$ des points de fonctionnement.

En effet, la dérivée du terme générique du critère $\varepsilon(.)$ fait apparaître des modules $(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, x+jy \rightarrow (x^2 + y^2)^{1/2})$ (II.19) qui ne sont pas différentiables en zéro.

Les conditions d'application de l'algorithme précédent ne sont donc pas satisfaites.

Pour combler cette lacune, nous proposons maintenant d'aborder la deuxième méthode d'optimisation applicable à des problèmes non-différentiables de type (II.33).

II.5.2 Algorithme " Faisceau " : /Lemarechal C., 1981/

La minimisation des fonctions non-différentiables a été abordé par des méthodes dites de relaxation /Rosen J.R, 1960/ et par les méthodes du plan sécant /Kelly J.E, 1960/.

Pour ces différentes méthodes, la décroissance de la fonction à chaque pas d'itération de l'algorithme n'est pas nécessairement assurée.

Une nouvelle classe de méthode fût introduite par /Mifflin, 1973/ et /Lemarechal, 1975/ qui permet d'obtenir une décroissance monotone de la fonction .

Elle est dite méthode de " **faisceau** ".

Nous proposons, avant d'en exposer la philosophie, de rappeler certaines définitions indispensables relatives aux fonctions non- différentiables.

II.5.2.1 Notion de sous-gradients :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que g_0 est un sous gradient de f au point x_0 , si on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists v(x) : \text{voisinage de } x_0 \\ \forall x \in v(x) , f(x) \geq f(x_0) + \langle x-x_0, g_0 \rangle \end{array} \right. \quad (\text{II.38})$$

$\langle \dots \rangle$ note le produit scalaire euclidien.

Par exemple, considérons $F(x) = \max_{i=1, \dots, m} \{ f_i(x) \}$

où $f_i(x)$ est convexe et différentiable, et soient $g_i(x)$ les gradients des $f_i(x)$ en x_0 , le vecteur g /Pchenitchney et al, 1977/ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = \sum_{i=1}^m u_i \cdot g_i(x) \\ \sum_{i=1}^m u_i = 1, \quad u_i \geq 0 ; \quad u_i = 0 \quad \text{si } f_i(x_0) < F(x_0) \end{array} \right. \quad (\text{II.31})$$

est un sous-gradient de la fonction $F(x)$.

D'un point de vue plus général, on montre que si $f(x)$ est continue en x_0 , on peut toujours définir des sous-gradients en ce point.

L'ensemble de ces sous-gradients nous permet de définir la notion de sous-différentiel.

II.5.2.2 Notion de sous-différentiel :

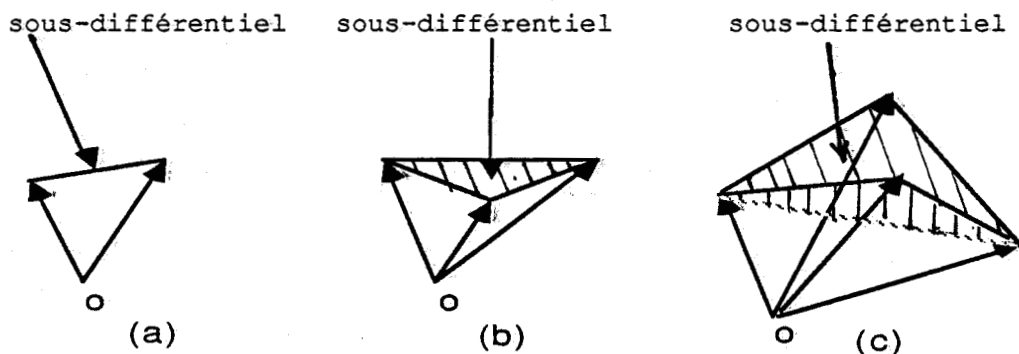
On note $\partial f(x_0)$ le sous-différentiel de f au point x_0 .

Il est défini géométriquement comme l'enveloppe convexe des extrémités de l'ensemble des sous-gradients (issus de l'origine) définis en x_0 .

A titre d'exemples, on observera les sous-différentiels batis dans R^3 à partir de :

- deux sous-gradients (fig II.3.a)
- trois sous-gradients (fig II.3.b)
- quatre sous-gradients (fig II.3.c)

Dans ce dernier exemple (fig II.3.c) on insiste sur la définition de $\partial f(x_0)$ comme enveloppe convexe.

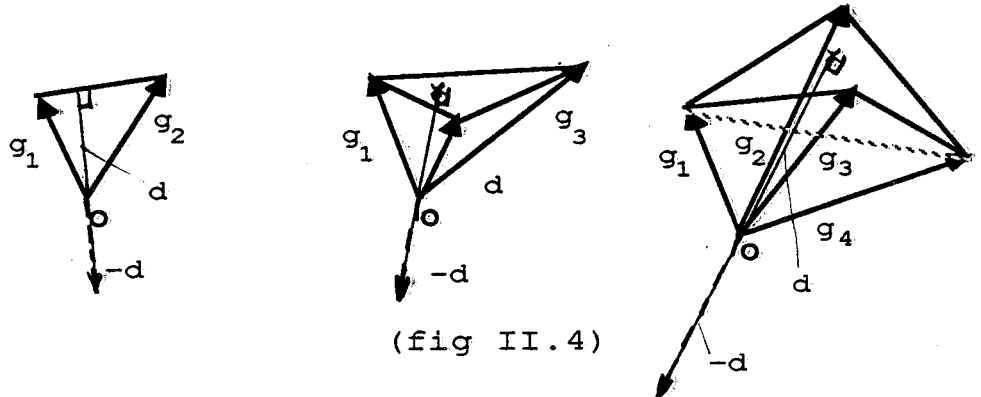


(fig II.3)

II.5.2.3 Définition de la direction de descente ou de plus grande pente : /Lemarechal, 1981/

La direction de descente est construite à partir des sous-gradients par projection de l'origine 0 sur le sous-différentiel.

Nous pouvons ainsi tracer pour chaque exemple de la (fig II.4) la direction de plus grande pente correspondante :



II.5.2.4 Notions de ε sous-gradient

et ε sous-différentiel : /Strodiot et al, 1983/

Cette notion est utilisée pour obtenir une estimation à ε près du minimum de f . Soit x^* une telle estimation. elle satisfait :

$$f(x^*) < \inf (f(x)) + \varepsilon \quad (\text{II.40})$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

a) - Notions de ε sous-gradient :

On dit que $g(y)$ est un ε sous-gradient de f au point y , si on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists v(x) : \text{voisinage de } x_0 \\ \forall y \in v(x) \subset \mathbb{R}^n \\ f(y) - f(x) \geq \langle g(y), y-x \rangle - \varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{II.41})$$

b)- Notion de ε sous-différentiel:

Nous noterons que $\partial_{\varepsilon}f(x)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des extrémités des ε -sous-gradients (II.41).

On caractérise ainsi un minimum à ε près lorsque l'origine appartient au ε -sous-différentiel.

Nous proposons maintenant d'exposer l'algorithme Faisceau.

II.5.2.5 Algorithme faisceau sans contraintes :

II.5.2.5.1 Principe de l'algorithme

Cet algorithme permet de résoudre le problème suivant :

Minimiser $f(x)$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

En supposant que :

- f est localement lipschitzienne partout
- en tout point, on peut calculer un sous-gradient de f .

L'originalité de cet algorithme réside dans la recherche de la direction de descente (définie en théorie par projection de l'origine dans le sous-différentiel).

A chaque itération, on actualise une approximation du sous-différentiel au point courant.

Cette approximation est construite à partir des sous-gradients calculés jusqu'à cet instant courant et rangés dans une liste appelée **FAISCEAU**.

L'utilisation de ce faisceau est, en gros, la suivante :

Après avoir calculé une direction de descente sur la base d'un faisceau donné, si la décroissance observée n'est pas celle espérée :

c'est que le faisceau ne donne pas une bonne approximation du sous-différentiel.

On conserve donc l'itération courante ($x_{k+1} = x_k$) et on enrichit le faisceau avant de recalculer une nouvelle direction de descente.

L'algorithme résultant est par ailleurs assez classique. Nous proposons d'en détailler :

- 1) le calcul du faisceau
- 2) le calcul de la direction de descente
- 3) le choix du pas
- 4) le critère d'arrêt

II.5.2.5.1 Calcul du faisceau

Au point courant x_k , l'algorithme stocke les sous- gradients au fur et à mesure de leur calcul dans un faisceau défini à la $k^{\text{ième}}$ itération par

$$\{ g_i / g_i \in \partial f(x_i) ; i=1, \dots, k \}$$

Simultanément, on affecte à chaque sous-gradient un poids p_i^k défini par : (II.42)

$$\forall k, \forall i=1, \dots, k ; \quad p_i^k = f(x_k) - f(x_i) - \langle g_i, x_k - x_i \rangle \quad (\text{II.42})$$

Avec ces définitions et pour une précision $\epsilon_k \geq 0$, l'approximation du ϵ_k -sous-différentiel de f est générée à partir des ϵ_k -sous- gradients du faisceau (II.41) par (II.43)

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^k u_i \cdot g_i(x) \mid \sum_{i=1}^k u_i = 1, u_i \geq 0 ; \right. \\ \left. \text{pour } i = 1, \dots, K ; \sum u_i \cdot p_i^k \leq e_k \right\} \quad (\text{II.43})$$

II.5.2.5.3 Calcul de la direction de descente et de l'espérance de décroissance :

La direction de descente d_k est obtenue par la projection de l'origine sur l'approximation (II.43) du e_k -sous-différentiel.

d_k étant a priori construit à partir des composantes du faisceau :

$$d_k = - \sum_{i=1}^k u_i^k \cdot g_i \quad (\text{II.44})$$

Les composantes $u_i \in \mathbb{R}$ sont ainsi définies par la solution $(u_1^k, u_2^k, \dots, u_k^k)$ du problème suivant : (II.45)

Minimiser par rapport à $u_1, u_2, \dots, u_k$

$$1/2 \left(\left\| \sum_{i=1}^k u_i \cdot g_i \right\| \right)^2$$

$$u_i \geq 0 ; \quad \sum_{i=1}^k u_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^k u_i \cdot p_i^k \leq e_k$$

(II.45)

$$\text{Il vient donc : } d_k = - \sum_{i=1}^k u_i^k \cdot g_i \quad (\text{II.46})$$

A partir de cette direction de descente, on peut déterminer l'espérance de décroissance de f dans la direction d_k .

Pour ceci nous associons à la dernière contrainte inégalité de (II.45) un paramètre de Lagrange λ_k , et le problème (II.45) prend alors la forme équivalente suivante : (II.47)

$$\text{Min } \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^k u_i \cdot g_i \right\|^2 + \lambda_k \cdot \sum_{i=1}^k u_i \cdot p_i^k \mid u_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^k u_i = 1 \right\} \quad (\text{II.47})$$

Des conditions d'optimalité, nous déduisons l'inégalité suivante :

$$\langle d_k, g_i \rangle - \lambda_k \cdot p_i^k \leq v_k ; i=1, \dots, k \quad (\text{II.48})$$

où v_k représente l'espérance de décroissance de f .

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \langle d_k, g_i \rangle &= - \|d_k\|^2 ; i=1, \dots, k \\ \text{et } \sum_{i=1}^k u_i \cdot p_i^k &\leq e_k \end{aligned}$$

alors, cette espérance de décroissance v_k peut être évaluée par :

$$v_k = - \|d_k\|^2 - \lambda_k \cdot e_k \quad (\text{II.49})$$

II.5.2.5.4 Choix du pas de descente h_k :

Afin de simplifier l'exposé de cette procédure, nous envisageons en premier lieu le cas d'une précision idéale ($e_k \equiv 0$).

Soit alors la fonction f à minimiser sur l'espace R^n .

En suivant le paragraphe précédent, nous supposons connue la direction d_k au point x_k , alors nous cherchons la $(k+1)$ ième approximation d'après la formule suivante :

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot d_k \quad \text{avec } h > 0$$

L'espérance de décroissance est alors localement la suivante (g_k est un sous-gradient) : (II.50)

$$f(x_{k+1}) \equiv f(x_k) + h \cdot \langle g_k, d_k \rangle \quad (\text{II.50})$$

Cette estimation n'est valide que dans un voisinage de x_k , il ne faudra pas que le pas h soit trop "grand". Pour que l'algorithme soit efficace, il ne faut pas non plus qu'il soit trop "petit".

- Pour ne pas sortir de la zone où l'approximation (II.50) est correcte, on choisira un pas h qui assure une fraction donnée $m_2 \in]0,1[$ de l'espérance de décroissance.

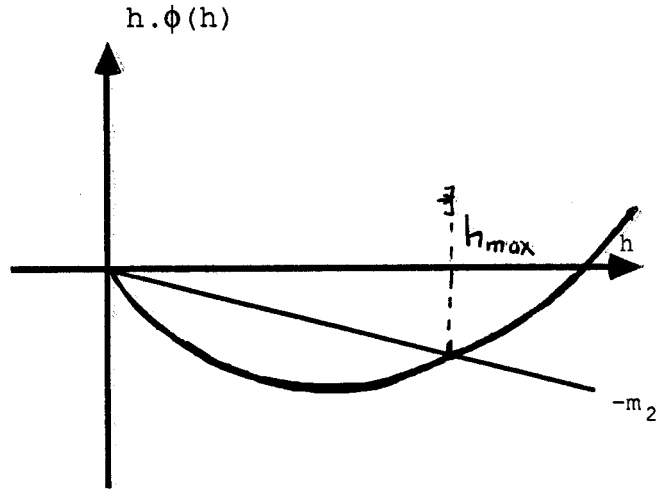
Formellement le pas h choisi doit satisfaire :
(II.51)

$$f(x_k + h \cdot d_k) - f(x_k) \leq -m_2 \cdot h \cdot \|d_k\|^2 \quad (\text{II.51})$$

Notons :

$$h \cdot \phi(h) = f(x_k + h \cdot d_k) - f(x_k) \quad / \quad \|d_k\|^2$$

L'interprétation géométrique de cette condition est donnée fig II.5



(fig II.5)

- A l'inverse, pour éviter un pas trop "petit", on choisit un pas h qui satisfait la condition

$$m_1 \in]0,1[\quad \langle g(x_k + h.d_k), d_k \rangle \geq -m_1 \|d_k\|^2 \quad (\text{II.52})$$

Cette condition s'interprète de la manière suivante :

La valeur du paramètre h devrait minimiser

$$\begin{aligned} & f(x_k + h.d_k) / \\ & f(x_k + h.d_k) = \min_h f(x_k + h.d_k) \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

Cette dernière condition peut également s'écrire

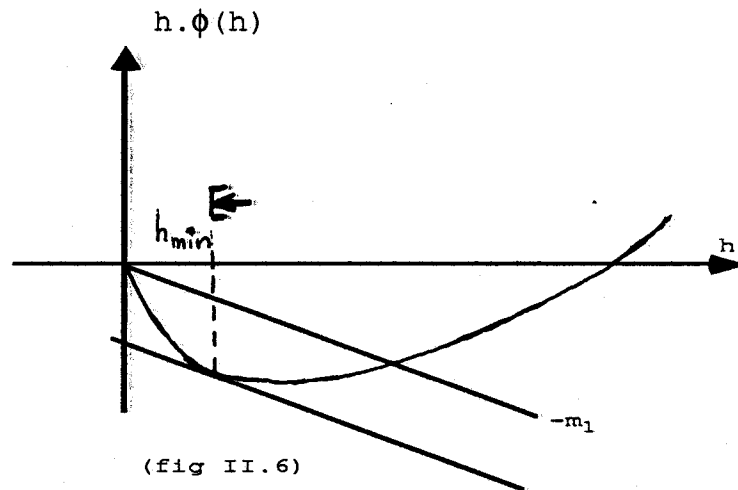
$$\langle g(x_k + h.d_k), d_k \rangle = 0 \quad (\text{II.54})$$

Pratiquement, on ne pourra pas obtenir (II.54) directement, aussi imposera-t-on que ce produit scalaire décroisse (en valeur absolue) suffisamment à chaque itération

Le produit scalaire $\langle g(.) , d \rangle$ étant négatif pour $h=0$, on imposera la condition suivante (II.55), avec une constante $m_1 \in]0,1[$ donnée a priori.

$$\langle g(x_k + h.d_k), d_k \rangle \geq m_1 \langle g(x_k), d_k \rangle \quad (\text{II.55})$$

Cette condition s'écrit plus simplement sous la forme (II.52) et elle est illustrée sur la fig II.6



Remarquons qu'il est possible qu'on n'obtienne pas un pas acceptable, ce qui signifie que la direction de descente obtenue sur la base du faisceau se révèle être inexacte.

Alors on maintient $x_{k+1} = x_k$ et on ajoute un nouveau sous-gradient au " faisceau " pour obtenir une meilleure approximation du sous-différentiel.

La procédure de recherche de pas ainsi établie peut être facilement appliquée au cas où l'algorithme prend en compte un paramètre e_k de précision.

Pour ce faire, il suffit donc de remplacer la dérivée directionnelle $- \|d_k\|^2$ par l'espérance de décroissance (II.49) noté $-v_k$ /

$$v_k = \text{Max} \{ \langle g_i, d_i \rangle - p^k \quad / \quad i=1, \dots, k \}$$

Ceci permet d'obtenir deux inégalités similaires à (II.51) (resp à (II.52)) /

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq m_2 \cdot h_k \cdot v_k$$

et

$$\langle g_{k+1}, d_k \rangle \geq m_1 \cdot v_k$$

II.5.2.5.5 Critère d'arrêt :

Il y a fin du processus itératif lorsque l'espérance de décroissance v_k (II.49) est nulle à une tolérance près.

On procède de la manière suivante :

Si la norme de la direction de descente $\|d_k\|$ (II.46) est nulle, à une tolérance près d , alors le point x_k courant minimise la fonction avec une certaine précision e_k .

Si cette valeur e_k est inférieure à une précision finale $\underline{e}$, il y a arrêt de l'algorithme, sinon on diminue e_k ($e_{k+1} = m_3 \cdot e_k$; avec $m_3 < 1$), avant de relancer l'algorithme.

II.5.2.5.6 Présentation globale de l'algorithme

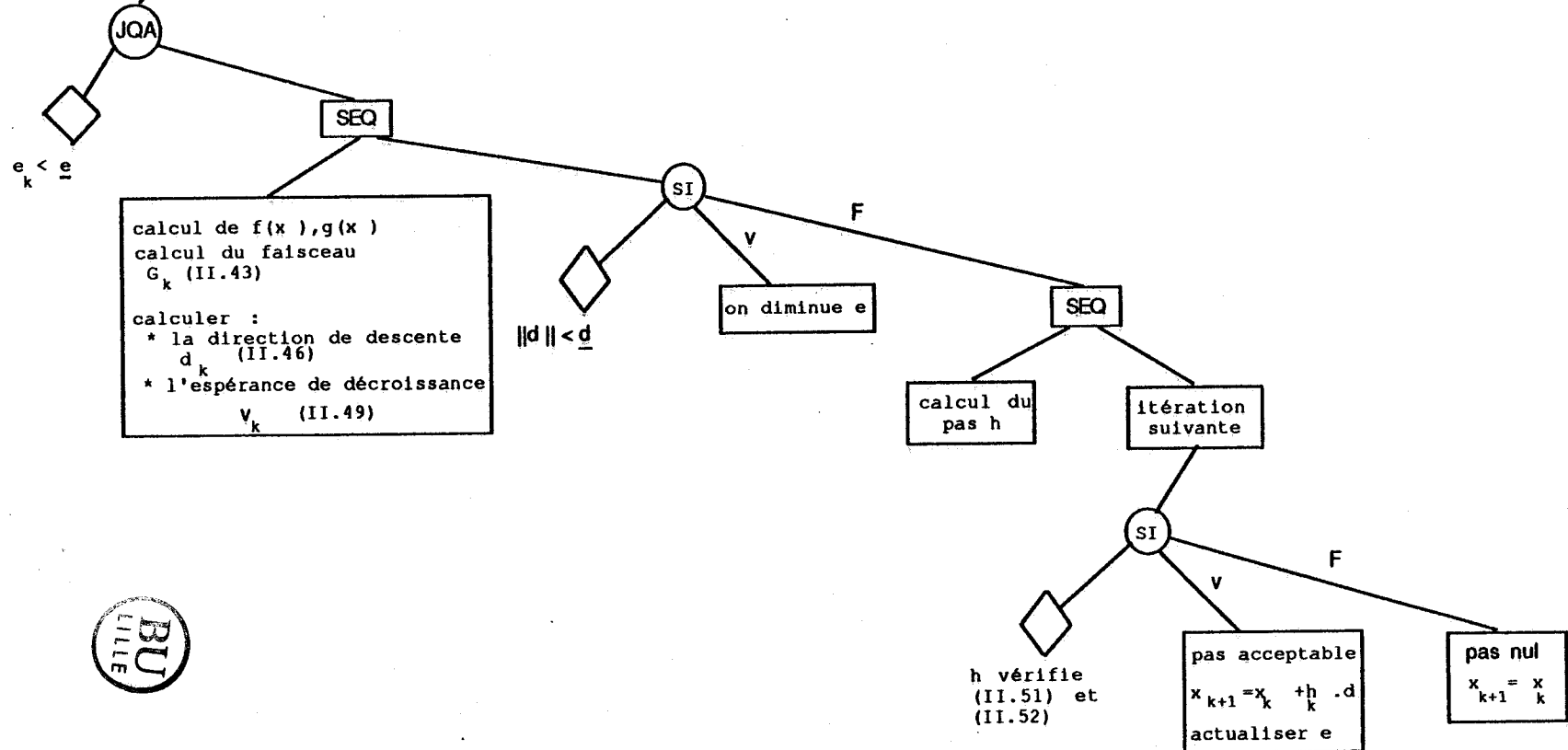
La structure du programme d'optimisation prend alors la forme suivante :

Algorithme Faisceau sans contraintes

Initialisations :

- Valeurs initiales de $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
- Constantes pour le calcul du pas h
 m_1, m_2 , et m_3
- Paramètres de test d'arrêt
 $\underline{e} > 0$; $\underline{d} > 0$
- Procédure de calcul de $f(x_k)$ et d'un sous-gradient $g(x_k)$

Appel de la procédure de minimisation



II.5.2.6 Conclusion

Suivant la méthode de synthèse employée (§II.4.1) nous aurons à utiliser l'un (§II.5.1) ou l'autre (§II.5.2) des deux algorithmes développées dans cette partie.

En effet, l'algorithme (§II.5.1) peut être appliqué au critère de synthèse déduit de l'hyperstabilité de la forme en flèche, mais il ne peut pas l'être dans le cas des critères de synthèse déduits des techniques d'agrégation par normes vectorielles.

Les expressions de ces critères font apparaître des modules qui ne sont pas toujours différentiables.

Dans ce cas nous aurons recours à l'utilisation de l'algorithme Faisceau (§II.5.2).

Nous remarquons que les deux algorithmes nécessitent le calcul en tout point x , de la valeur de la fonction et d'un élément de son sous-différentiel.

II.6 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons pu ramener l'étude de la stabilité d'un système non-linéaire de non-linéarité de rang 1 (§.2.1) à l'étude de systèmes non-linéaires sous formes canoniques simples (§II.2.1.2).

A partir de celles-ci, nous avons introduits deux représentations équivalentes remarquables (forme série (§II.3.1) et forme en flèche (§3.2) permettant l'analyse et la synthèse du système étudié.

Deux classes de méthodes d'analyse et de synthèse ont été abordées, d'une part par utilisation des techniques d'agrégation par normes vectorielles (§II.4.1) et d'autre part par utilisation de la théorie de l'hyperstabilité appliquée à une représentation en flèche (§II.4.2).

Pour chacune de ces deux méthodes nous avons pu exprimer des critères numériques de stabilité.

La négativité (II.17) (resp positivité (II.30)) du critère implique la stabilité asymptotique du système.

L'optimisation constitue une méthode de synthèse des gains ajustables.

Pour résoudre ce problème, deux classes de méthodes sont utilisées.

Dans le cas de l'utilisation de la théorie de l'hyperstabilité, on peut faire appel à un algorithme d'optimisation traitant des problèmes de type MINIMAX (II.31).

Dans le cas de l'utilisation des techniques d'agrégation, on peut employer un algorithme de Faisceau (§II.5.2)

CHAPITRE III

III.1 Introduction

Dans cette partie, nous proposons de mettre en œuvre les méthodes de synthèse développées dans le deuxième chapitre.

Ces méthodes appliquées à un modèle d'une installation de surchauffe d'une centrale thermique déjà envisagée dans /Gentina, 1976/ et /Meizel, 1984/, permettent de déterminer la loi de commande qui assure la stabilité asymptotique du système sur l'ensemble de ses plages de fonctionnement.

Après avoir établi la représentation du modèle considéré, nous proposons de lui appliquer la méthode de synthèse (§II.4.2) déduite de la théorie de l'hyperstabilité.

Cette méthode nous conduit à définir un critère numérique dont la positivité entraîne la stabilité du système considéré.

Par la suite, le critère sera mis sous forme d'un problème d'optimisation de type MINIMAX (II.40) soumis à des contraintes de type inégalités.

L'algorithme de Madsen et al (§II.5.1) permet alors de déterminer les valeurs des gains ajustables de la loi de commande.

III.2 Exemple d'application :

Dans cette partie, nous considérons à titre d'exemple le modèle d'une installation de surchauffe d'une centrale thermique.

Cet exemple a été choisi pour son caractère non-linéaire.

En effet, les paramètres dynamiques du système varient en fonction de la puissance fournie par la centrale.

Cette puissance (notée P) peut elle même varier dans l'intervalle [120, 250]MW.

Le modèle considéré est la représentation d'état suivante: (III.1)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} -a_1^P(\chi) & -a_2^P(\chi) & -a_3^P(\chi) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^P(t) + \begin{bmatrix} 1^P(\chi) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^C(t) \\
 \theta(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{x}^P(t)
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

avec χ : représente la puissance P (MW)
fournie par la centrale

$$\chi = (P - 120) \text{ (MW)} / 100 \text{ (MW)} \quad \chi \in [0., 1.3]$$

$\theta(t)$: température de sortie à réguler

$u^C(t)$: ouverture d'une vanne de désurchauffe

Des identifications menées autour de différents points de fonctionnement ont permis de proposer les lois d'évolution des paramètres dynamiques ($a_i^p(\chi)$; $i=1,2,3$) suivantes : (III.2)

$$a_1^p(\chi) = 10^{-1} * (4.475 * \chi^2 - 1.145 * \chi + 1.278)$$

$$a_1^p(\chi) = 1.705 * \chi^3 - 0.083 * \chi + 1.716$$

$$a_2^p(\chi) = 2.726 * \chi^{5/2} - 0.029 * \chi + 1.084$$

$$a_3^p(\chi) = 3.073 * \chi^{5/2} + 0.118 * \chi + 0.228$$

(III.2)

La figure (III.1) représente l'évolution, avec la puissance fournie, du comportement des paramètres dynamiques (III.2) du processus.

Afin de simplifier l'étude ultérieure, nous proposons d'approcher chaque courbe $a_i^P(\chi)$; $i = 1, 2, 3$ et $l_1^P(\chi)$ figure

(III.1) par un ensemble de 7 segments de droites défini par les abscisses ($\chi_0 = 0$; $\chi_1 = 0.2$; $\chi_2 = 0.4$; $\chi_3 = 0.5$; $\chi_4 = 0.7$; $\chi_5 = 0.9$; $\chi_6 = 1.1$ et $\chi_7 = 1.3$).

Dans chaque intervalle considéré, les différentes courbes $a_i^P(\chi)$ et $l_1^P(\chi)$ peuvent alors être approximées par les expressions suivantes : (III.3)

$$\forall \chi \in [0., 1.3] ; \exists j \in [0, 1, 2, \dots, 6] ; \chi \in [\chi_j, \chi_{j+1}]$$

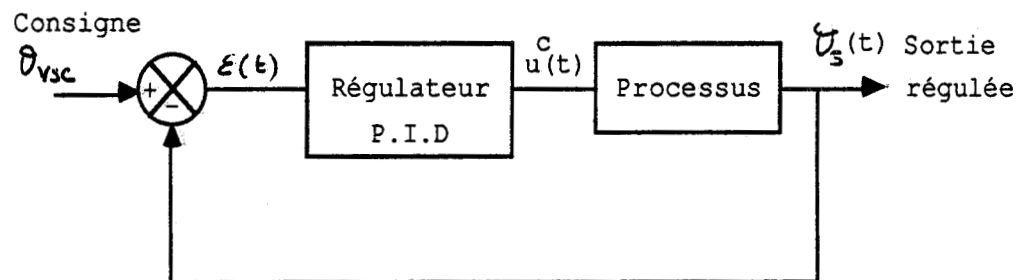
$$a_i^P(\chi) = a_i^P(\chi_j) + \frac{a_i^P(\chi_{j+1}) - a_i^P(\chi_j)}{(\chi_{j+1} - \chi_j)} * (\chi - \chi_j)$$

$$l_1^P(\chi) = l_1^P(\chi_j) + \frac{l_1^P(\chi_{j+1}) - l_1^P(\chi_j)}{(\chi_{j+1} - \chi_j)} * (\chi - \chi_j)$$

(III.3)

En vue d'assurer un fonctionnement en régulateur à consigne constante, on propose une structure de contrôle par P.I.D.

La structure d'une telle régulation est alors la suivante :



(fig III.2)

$$\varepsilon(t) = \theta_{vsc} - \theta_s(t)$$

$$u^c(t) = p_1 \cdot \dot{\varepsilon}(t) + p_2 \cdot \varepsilon(t) + p_3 \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

$$u^c(t) = -p_1 \cdot \dot{\theta}_s(t) + p_2 \cdot (\theta_{vsc} - \theta_s(t)) + p_3 \int_0^t (\theta_{vsc} - \theta_s(\tau)) d\tau$$

Le système ainsi bouclé est alors représenté par l'équation d'état de régime libre suivante : (III.4)

$$\dot{x}(t) = FL1(\chi, p) \cdot x(t)$$

$$FL1(\chi, p) = \begin{bmatrix} -a_1(\chi, p) & -a_2(\chi, p) & -a_3(\chi, p) & -a_4(\chi, p) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(III.4)

avec

$p = [p_1, p_2, p_3]^T$: Coefficients ajustables
de la loi de commande

$$a_1(\chi, p) = a_1^p(\chi)$$

$$a_2(\chi, p) = a_2^p(\chi) + p_1 * 1_1^p(\chi)$$

$$a_3(\chi, p) = a_3^p(\chi) + p_2 * 1_1^p(\chi)$$

$$a_4(\chi, p) = p_3 * 1_1^p(\chi)$$

La forme particulière de la matrice de régime libre $FL1(\chi, p)$ (III.4) conduit à envisager l'application des critères d'analyse de stabilité établis dans le deuxième chapitre (§II.4.2.2).

III.3 Etude de la stabilité / Théorie de l'hyperstabilité

Afin de pouvoir appliquer le critère de stabilité établi en (§II.4.2.2), nous sommes amenés à définir une représentation en flèche $FF(c, \chi, p)$ (III.5) équivalente à $FL1(\chi, p)$ (III.4).

Introduisons le vecteur de paramètres de représentation suivant :

$$c = [c_2, c_3, c_4]^T \in \mathbb{R}^3 ; c_2 \neq c_3, c_2 \neq c_4 \text{ et } c_3 \neq c_4$$

$$FF(\chi, p) = \begin{bmatrix} -b_1(c, \chi, p) & -b_2(c, \chi, p) & -b_3(c, \chi, p) & -b_4(c, \chi, p) \\ 1 & c_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

(III.5)

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\lambda, \chi, p) = \lambda^4 + \sum_{i=1}^4 a_i(\chi, p) \cdot \lambda^{4-i} \\ b_2(c, \chi, p) = P(c_2, \chi, p) / ((c_2 - c_3) * (c_2 - c_4)) \\ b_3(c, \chi, p) = P(c_3, \chi, p) / ((c_3 - c_2) * (c_3 - c_4)) \\ b_4(c, \chi, p) = P(c_4, \chi, p) / ((c_4 - c_2) * (c_4 - c_3)) \\ b_1(c, \chi, p) = a_1(c, p) + \sum_{i=2}^4 c_i \end{array} \right.$$

III.3.1 Calcul du critère :

Compte tenu du critère établi en (§II.4.2.2) et en regard de la matrice en flèche (III.5) le critère de stabilité est le suivant : (III.6)

$$\begin{array}{l} \forall \chi \in [0., 1.3] \\ \forall i, j=2, 3, 4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b_1(c, \chi, p) > 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} b_i(c, \chi, p) > 0 \\ c_i \neq c_j \\ c_i < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (III.6)$$

La synthèse est alors menée en définissant le critère suivant :

$$b(c, p) = \min_{i=1, 2, 3, 4} \{ \inf_{\chi \in [0., 1.3]} (b_i(c, \chi, p)) \} \quad (III.7)$$

La positivité de ce critère implique alors la stabilité asymptotique du système (III.4).

Nous aurons par la suite à maximiser ce critère par rapport aux variables p et c en espérant obtenir une valeur positive de $b(c,p)$.

Les lois de variation (en fonction de χ) des paramètres initiaux (III.3) sont exprimées sous forme linéaires par morceaux. Il en est donc de même des coefficients $a_i(\chi,p)$ (III.4) et des coefficients $b_i(c,\chi,p)$ (III.5).

Le critère (III.7) prend alors la forme simplifiée suivante (III.8)

$$\begin{aligned}
 b(c,p) &= \min_{i=1,2,3,4} \left\{ \min_{j=0,1,\dots,7} (b_i(c,\chi_j,p)) \right\} \\
 &= \min_{\substack{i=1,2,3,4 \\ j=0,1,\dots,7}} \{ b_i(c,\chi_j,p) \}
 \end{aligned}
 \tag{III.8}$$

La positivité du critère (III.8) entraîne la stabilité de l'origine de l'espace d'état ($x \equiv 0$) de (III.4).

III.3.2 Recherche d'une solution :

L'objet de notre problème est de rechercher parmi les paramètres de représentations (c) et les gains ajustables de la loi de commande (p) des valeurs particulières qui satisfassent aux conditions de l'hyperstabilité du processus (III.6) sur le domaine global $\chi \in \chi = [0., 1.3]$ de variation χ

Après avoir mis ce critère (III.8) sous forme de problème d'optimisation de type MINIMAX /

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \varepsilon(c,p) = \text{Max} (-b_i(c, \chi_j, p)) \\ c, p & \begin{array}{l} i=1,2,3,4 \\ j=0,1,\dots,7 \end{array} \end{array}$$

Nous faisons appel à l'algorithme développé en (§II.5.1) afin d'obtenir les valeurs optimales des gains ajustables p_1, p_2 et p_3 et les paramètres de représentation c_2, c_3 et c_4 .

Cet algorithme nécessite en premier lieu la définition du module de calcul des fonctions $b_i(c, \chi_j, p)$ ainsi que leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres de représentation c_2, c_3 et c_4 et aux variables des gains ajustables p_1, p_2 et p_3 .

la condition $c_i \neq c_j$ du critère (III.6) est traduite par l'introduction d'une fonction de pénalisation (fig III.3) de type suivant : (III.9)

$$\text{Notons } x = c_i - c_j$$

$$P(x) = \left| \begin{array}{ll} \frac{1.}{|x|} + \frac{|x|}{\varepsilon^2} - \frac{2.}{\varepsilon} & \text{si } |x| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

ε est pris de l'ordre de 10^{-6} .

$$\begin{array}{ll} \text{avec :} & P(-x) = P(x) \\ & P(0) = \infty \end{array}$$

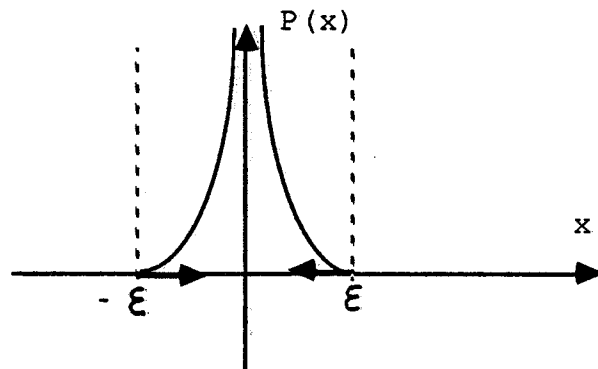
$$P'(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{-1.}{x^2} + \frac{1.}{\epsilon^2} * \text{signe}(x) & \text{si } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

$$P'(x) \leq 0$$

et

$\Rightarrow$ la dérivée est continue

$$P'(\epsilon) = 0$$



fig(III.3)



En tenant compte de la fonction de pénalisation, nous obtenons le critère suivant :

Minimiser par rapport à c et p

$$\varepsilon(c, p) = \text{Max}_{\substack{l, i=1, 2, 3, 4 \\ j=0, 1, \dots, 7}} (-b_i(c, \chi_j, p) , c_i + P(c_i - c_l))$$

Où $P(c_i - c_l)$ représente le maximum de $\text{Penal}(c_i, c, p)$ / i

$$\text{Penal}(i, c) = \text{Max}_{\substack{l=2, 3, 4 \\ l \neq i}} P(c_i - c_l)$$

III.3.3 Calcul des dérivées des $b_i(c, \chi_j, p)$:

Les notations utilisées sont les suivantes :

- Nordre : représente l'ordre du système étudié
- Nreg : représente le nombre de paramètres de réglage de la loi de commande

a) dérivées partielles des $b_i(c, \chi_j, p)$ par rapport aux composantes p_j

$$\forall i = 2, \dots, \text{Nordre}$$

$$\forall j = 1, \dots, \text{Nreg}$$

$$b_i(c, \chi, p) = \frac{P(c_i, \chi, p)}{\text{Nordre} \prod_{\substack{l=2 \\ l \neq i}} (c_i - c_l)}$$

$$b_1(c, \chi, p) = a_1(\chi, p) + \sum_{i=2}^{\text{Nordre}} c_i$$

Il vient :

$$\forall j = 1, \dots, \text{Nreg}$$

$$\frac{\partial b_i(c, \chi, p)}{\partial p_j} = \left(\frac{1}{\text{Nordre} \prod_{\substack{l=2 \\ l \neq i}} (c_i - c_l)} \right) * \sum_{l=1}^{\text{Nordre}} c_l^{(\text{Nordre}-1)} * \frac{\partial a_1(\chi, p)}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial b_1(c, \chi, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial a_1(\chi, p)}{\partial p_j}$$

b) Dérivées partielles des $b_i(c, \lambda, p)$ par rapport aux paramètres de représentation c_k :

$\forall i = 2, \dots, \text{Nordre}$

si $i=k$ alors

$$\frac{\partial b_i(c, \lambda, p)}{\partial c_i} = \frac{1.}{\prod_{\substack{l=2 \\ l \neq i}}^{\text{Nordre}} (c_i - c_l)} * \frac{\partial P(c_i, \lambda, p)}{\partial c_i} +$$

$$- \sum_{\substack{l=2 \\ l \neq i}}^{\text{Nordre}} \frac{1.}{(c_i - c_l)} * b_i(c, \lambda, p)$$

si $i \neq k$ alors

$$\frac{\partial b_i(c, \lambda, p)}{\partial c_k} = \frac{1.}{(c_i - c_k)} * b_i(c, \lambda, p)$$

c) Calcul des dérivées partielles de la fonction de pénalisation (III.10) :

Les dérivées de $P(c_i - c_j)$ sont calculables à partir de (III.10)

$$\forall j = 1, \dots, \text{Nreg} \quad \frac{\partial (c_i + \text{Penal}(i, c))}{\partial p} = 0.$$

$\forall i = 1, \dots, \text{Nordre}$

si $i=k$ alors

$$\frac{\partial (c_i + \text{Penal}(i, c))}{\partial c} = 1. + \frac{\partial P(c_i - c_j)}{\partial c}$$

si $i \neq k$ alors

$$\frac{\partial (c_i + \text{Penal}(i, c))}{\partial c} = + \frac{\partial P(c_i - c_j)}{\partial c}$$

III.3.3 Logiciel de synthèse :

Le programme principal se compose de :

- Dimensionnements des tableaux des paramètres du problème optimiser.
- Initialisation des paramètres du problème (données du problème).
- Appel de la procédure de minimisation.
- Impression des résultats.

Les données définissant le problème sont :

- Les paramètres des fonctions non-linéaires du processus.
- L'intervalle χ de variation de l'entrée de perturbation χ .
- L'ordre du système noté Nordre.
- Le nombre de gains ajustables dans la loi de commande noté Nreg.



- Les valeurs initiales

- * des paramètres de représentation $c_2, c_3, \dots, c_{\text{Nordre}}$ choisis apriori avec une partie réelle non positive.
- * des gains ajustables $p_1, p_2, \dots, p_{\text{Nreg}}$.

La procédure d'optimisation utilise un module (FONCT) qui délivre la valeur de la fonction et la valeur des dérivées.

Dans le cas de l'exemple traité (III.8), la structure du module FONCT est organisée de la manière suivante :

SUBROUTINE FONCT(N,M,X,A,B)

* Entrées : N nombre de variables à optimiser

(N=6 dans l'exemple traité (III.8))

M nombre de fonctions à optimiser

(M=Nordre x Nech dans l'exemple traité (III.8))

$x = [c_2, c_3, c_4, p_1, p_2, p_3]^T$ tableau réel $x(n)$

FL1(1 - Nech) Tableaux réels , indicés en Nech,
 FL2(1 - Nech) contenant les valeurs des fonctions
 FL3(1 - Nech) des paramètres dynamiques définissant
 FL (1 - Nech) le processus (III.3) aux différents
 points (Nech) de fonctionnement.

* Sorties :

B : tableau réel B(M)

M= Nech x Nordre

B(i) : contient les fonctions $b_i(x)$ et
 éventuellement $b_i(x) + \text{Penal}$

A : tableau réel A(M,N)

A(i,j) : représente $\partial b_i(x) / \partial x_j$ et
 éventuellement ∂Penal

Sous programmes appelés :

Pardyn

Penal

DPenal

- Module : Pardyn

Ce module calcule le polynôme symbolique $P(c_i, c, p)$ et
 ses dérivées partielles par rapport à (c) et (p)

* Entrées : Idem

* Sorties : Polsym

Derpol

- Module Penal

Ce module calcule la valeur de la fonction de
 pénalisation (III.9)

* Entrées : Idem

Eps1 : précision / $|c_i - c_j| \leq \text{Eps1}$

* Sorties : Penal

DPenal

- Module Prolin

Ce module résoud le problème de programmation linéaire (II.44) par utilisation de la méthode du simplexe révisée.

Le langage de programmation utilisé est le fortran 77 /Lignelet ,1982/.

Ce choix se justifie par l'orientation du Fortran vers les problèmes de nature numérique.

Le programme d'optimisation est implanté sur un ordinateur VAX 11/750.

L'écriture du programme a été réalisé de façon modulaire.

Ainsi pour une application donnée, l'utilisateur définit le module de calcul de la fonction FONCT .

Le dialogue entre un utilisateur et le module d'optimisation (appelé MINMAX) intervient à deux niveaux :

- Appel du module d'optimisation par l'utilisateur
- Appel itératif du module FONCT par le module d'optimisation

III.3.5 Résultat :

L'utilisation de l'algorithme de Madsen (II.5.1) nous a permis d'obtenir des valeurs numériques des paramètres c_2 , c_3 , c_4 , p_1 , p_2 et p_3 pour lesquelles le critère $b(c,p)$ (III.7) est positif et les contraintes c_i ($i=2,3,4$) sont négatives.

Ces valeurs sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} p_1^* = 7.92 & p_2^* = -.119 & p_3^* = .228 \cdot 10^{-2} \\ c_2^* = -.7219 & c_3^* = -.031 \cdot 10^{-2} & c_4^* = -.01615 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

Le critère ($b(c,p)$ III.8) correspondant à ces valeurs est :

$$b(c^*,p^*) = .1213$$

III.4 Conclusion :

Cet exemple fut étudié respectivement par /Gentina, 1976/ et /meizel, 1984/.

Pour la même structure de réglage adoptée (P.I.D), le premier auteur a obtenu, d'une manière heuristique, 11 réglages des gains ajustables p_j , quant au deuxième, il a pu couvrir tout le domaine de variation de la puissance par 5 intervalles.

Tandis qu'avec la méthode employée (§II.5.1) pour la synthèse paramétrique de lois de commande stabilisantes, nous avons obtenu un seul réglage pour tout le domaine de variations de χ .

ANNEXE

ANNEXE

**Démonstration du critère d'analyse de la
stabilité établi en (§II.4.2.2)**

/Ben Helal, Meizel, 1985/

Considérons le système d'équation d'état suivant : (A.1)

$$\dot{x}(t) = FF(c, \chi, p) \cdot x(t)$$

avec :

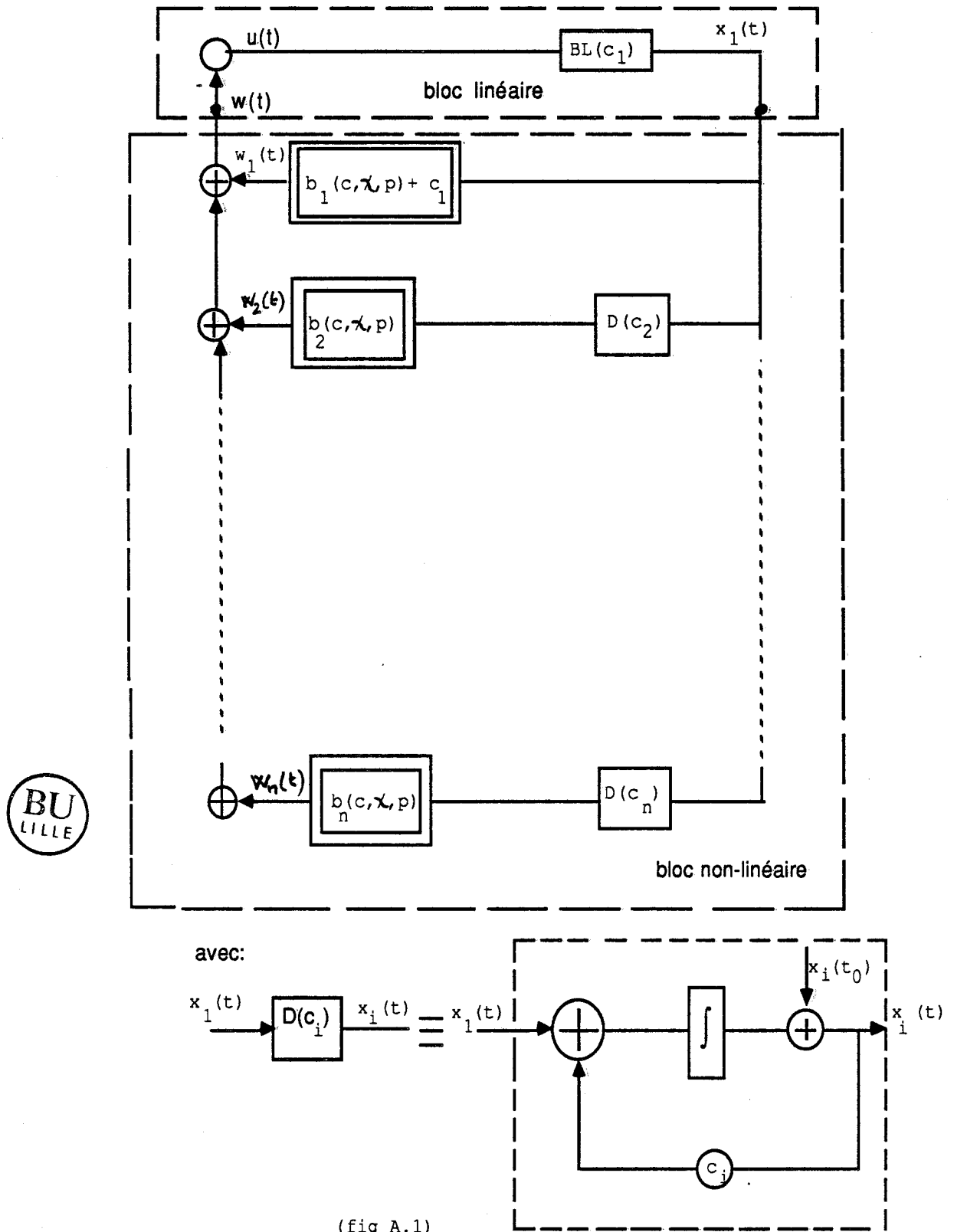
$$FF(c, \chi, p) = \begin{bmatrix} -b_1(c, \chi, p) & ; & -b_2(c, \chi, p) & ; & \dots & ; & -b_n(c, \chi, p) \\ & 1 & & & & & \\ & | & c_2 & & & & \\ & | & & \circ & & & \\ & | & & & \ddots & & \\ & | & & & & c_n & \\ & 1 & & & & & \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

La matrice $FF(c, \chi, p)$ peut être interprétée comme la mise d'un bloc linéaire ($BL(c_1)$) en contre-réaction avec n blocs non-linéaires (fig A.1).

En vertu de la théorie de l'hyperstabilité (§I.3.2.5) le système (A.1) est asymptotiquement hyperstable si :

- a) le bloc linéaire $BL(c_1)$ est strictement réel positif
- b) chaque contre-réaction en parallèle satisfait l'inégalité de Popov : /Popov, 1973/

Le système d'entrée $x_1(t)$ et de sortie $w(t)$ (fig A.1) est constitué de la mise en parallèle de blocs satisfaisant l'inégalité de Popov, il satisfait donc l'inégalité de Popov.

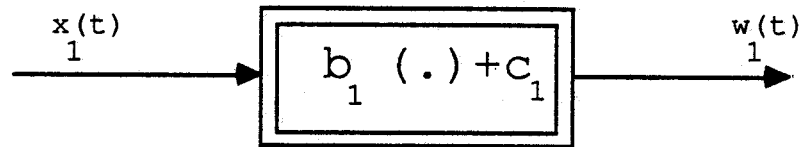


$$\forall i=1, \dots, n; \exists \delta \in \mathbb{R}; \forall t > t_0; \forall \chi \in \mathcal{X};$$

$$\eta_i(t_0, t) \geq -\delta^2$$

$$\text{avec : } \eta_i(t_0, t) = \int_{t_0}^t x_1(\tau) \cdot w_i(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

- a) c_1 est supposé négatif, le bloc linéaire $BL(c_1)$ est strictement réel positif.
- b) soit la contre-réaction statique constituée par le bloc $(b_1(c, \chi, p) + c_1)$ d'entrée x_1 et de sortie w_1 .



$$\begin{aligned} \forall \chi \in \mathcal{X}, \eta_1(t_0, T) &= \int_{t_0}^T x_1(t) \cdot w_1(t) dt \\ &= \int_{t_0}^T x_1(t) \cdot (b_1(.) + c_1) dt \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La quantité $(b_1(.) + c_1)$ est supposée positive, il vient donc

$$\eta_1(t_0, T) \geq 0$$

- c) considérons la contre-réaction du schéma bloc non-linéaire suivant : (fig A.2)

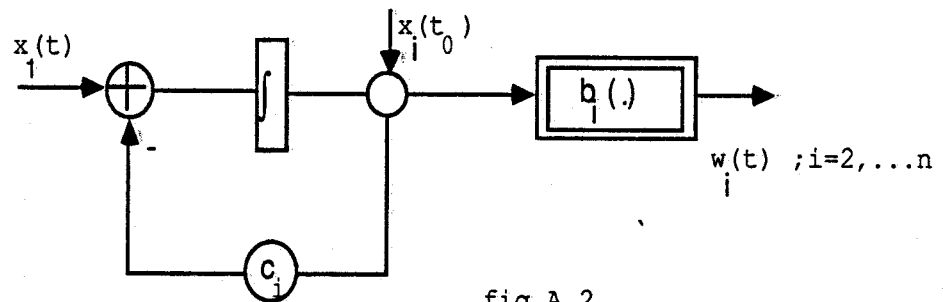


fig A.2

la fonctionnelle entrée-sortie est définie par la relation suivante: (A.4)

$$\eta_i(t_0, T) = \int_{t_0}^T x_1(t) \cdot w_i(t) dt \quad (A.4)$$

Cette relation peut être décomposée de la manière suivante: (A.5)

$$\begin{aligned} \eta_i(t_0, T) &= \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot x_i(t) \cdot x_1(t) dt \\ &= \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot x_i(t) \cdot (\dot{x}_i(t) - c_i \cdot x_i(t)) dt \\ &= 1/2 \left(\int_{t_0}^T b_i(.) \cdot d(x_i^2(t)) \right) \\ &\quad - c_i \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot x_i^2(t) \cdot dt \end{aligned} \quad (A.5)$$

En supposant que la quantité $b_i(.)$ est positive /

$$\forall \chi \in \chi ; \quad 0 \leq b_i(.) \leq \bar{b}_i$$

alors le premier terme de $\eta_i(t_0, T)$ satisfait

$$\int b_i(.) \cdot d(x_i^2(t)) \geq - \bar{b}_i \cdot x_i^2(t_0)$$

De même, la constante $(-c_i)$ et la fonction $b_i(.)$ sont non-négatives alors le deuxième terme de $\eta_i(t_0, T)$

$$-c_i \int_{t_0}^T b_i(.) \cdot x_i^2(t) \cdot dt$$

est non-négatif.

Il vient alors:

$$\forall i=2, \dots, n ; \forall t \geq t_0, \quad \eta_i(t_0, T) \geq -1/2 \bar{b}_i \cdot x_i^2(t_0) \quad (A.6)$$

Ainsi la contre-réaction du bloc non-linéaire $(x_1(t) \rightarrow w_i(t))$ satisfait l'inégalité de Popov.

Le point $x_1=0$ du système linéaire d'entrée $u(t)$ et de sortie $x_1(t)$ est donc asymptotiquement hyperstable s'il est strictement réel positif ($c_1 < 0$).

Du fait que l'entrée $x_1(t)$ de tous les blocs de contre-réaction $D(c_i)$ (cf fig A.1) est bornée et tend vers zéro, et en supposant que tous les c_i sont négatifs alors on peut conclure que les sorties $x_i(t)$ ($i=2,3, \dots, n$) sont aussi bornées et tendent vers zéro avec $x_1(t)$.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Nous avons présenté deux méthodes de synthèse paramétrique applicables à la stabilisation du fonctionnement de processus non-linéaires autour d'un point d'équilibre fixe.

Chacune de ces méthodes optimise l'utilisation de critères d'analyse de la stabilité à l'intérieur d'une classe donnée.

L'utilisation de méthodes d'optimisation "non-différentiables" permet ainsi d'obtenir les conditions de stabilité les moins restrictives dans un contexte d'étude donnée.

La stratégie de choix de l'une ou l'autre méthode, d'une structure de commande, de l'initialisation des paramètres avant optimisation ne sont pas traitées ici et mériteraient une attention soutenue dans des travaux futurs.

Les résultats présentés montrent en effet que ce choix, plus logique que numérique, est déterminant.

L'étude présentée, quant à elle permet de réduire le choix entre de très nombreuses tactiques de réglage à un nombre beaucoup plus faible d'alternatives stratégiques.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

ALLEXEEVE V., TIKHOMIROV V., FOMINE S. (1982)

"Commande optimale"

Editions MIR, Moscou.

BAILEY F.N. (1966)

"The applications of second method of Lyapunov to interconnected systems"

J.SIAM of Control, Ser A, Vol.3.

BELLMAN R. (1962)

"Vector Lyapunov functions"

J.SIAM of Control, Ser A, Vol.1.

BEN HELAL M., MEIZEL D. (1985)

"MINIMAX-PARAMETRIC-DESIGN of linear feed-back control systems"

AMSE conf "Modelling and simulation", Monastir, Nov 85, vol 1.A, pp 165 - 173.

BENREJEB M. (1980)

"Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hiérarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés"

Thèse de Doctorat es-sciences physiques, n°479, U.S.T.Lille I.

BORNE P. (1976)

"Contribution à l'étude des systèmes discrets non-linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés"

Thèse de Doctorat ès-sciences physiques, n°346, U.S.T.Lille I.

BOUDAREL, DELMAS et GUICHET (1967)

"Commande optimale des processus"

DUNOD, Paris.

BREZINSKI C.

"Cours d'analyse numérique discrète" U9
Publications du laboratoire de calcul de l'U.S.T.Lille I.

DAUPHIN-TANGUY G. (1983)

"Sur la représentation multi-modèle des systèmes
singulièrement perturbés. Application à l'analyse et à la
synthèse"
Thèse de Doctorat ès-sciences physiques, n°600, U.S.T.Lille I.

FAURE P., CLERGET M., et GERMAIN F. (1979)

"Opérateurs rationnels positifs". Application à l'hyper-
stabilité et aux processus aléatoires.
DUNOD.

FAURE P., DEPEYROT M. (1974)

"Eléments d'automatiques"
DUNOD.

FLIESS M., NORMAND-CYROD D. (1981)

"La propriété d'approximation des systèmes réguliers (ou
bilinéaires)"
C.N.R.S 81 : outils et modèles mathématiques pour
l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du
signal.
Tome 1, Editions du C.N.R.S.

FOSSARD A. (1972)

"Commande des systèmes multi-dimensionnels"
DUNOD.

FOULARD C., GENTIL S., SANDRAZ (1978)

"Commande et régulation par ordinateur numérique "
Editions Eyrolles Paris.

FRANCIS B.A, WONHAM W.M (1976)

"The internal model principle of control theory"
Automatica, Vol 12, PP 457 - 465.

GANTMACHER F.R. (1966)

"Théorie des matrices"

Tome I et II DUNOD, Paris.

GENTINA J.C. (1976)

"Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes
continus non-linéaires de grande dimension"

Thèse de Doctorat ès-sciences physiques ,U.S.T.Lille I.

GENTINA J.C., BORNE P., BURGAT C., BERNUSSOU J., GRUJIC Lj.T.
(1979)

"Sur la stabilité des systèmes de grande dimension. Normes
vecorielles"

R.A.I.R.O, Vol 13, n° 1.

GRUJIC Lj.T., SILJAK D.D. (1973)

"Asymptotic stability and instability of large-scale
systems"

I.E.E.E, Trans on AC, Dec 73.

GRUJIC Lj.T., GENTINA J.C., BORNE P. (1976)

"General agregation of large scale system by vector Lyapunov
functions and vector norms"

In J. control, vol 24, n°4.

HAHN W. (1967)

"Stability of motion"

Springer Verlag, New-york.

KELLY J.E. (1960)

"The cutting plane method for solving convex programs"

Journal of SIAM 8, pp 703 - 712.

LEMARECHAL C. (1975)

"An extension of "DAVIDON" Methods to non-differentiable
problems"

Mathematical Programming study 3, North Holland, pp 95 - 109.

LEMARECHAL C., STRODIOT J.J., et BIHAIN A. (1981)

"On a bundle algorithm for non-smooth optimization"
Nonlinear programming 4, Academic-Press, New York,
pp 245-282.

LEVINE J. (1983)

"Un aperçu élémentaire de la théorie moderne des systèmes
non-linéaires"
R.A.I.R.O, automatique/systems analysis and control, Vol 17,
n° 4, pp 277 - 321.

LIGNELET (1982)

"Fortran 77 - langage Fortran v "
Editions Masson

LUR'E-POSTNIKOV A.I (1951)

"On some non-linear problems in the theory of automatic
control"
H.M Stationery Office, London.

MADSEN K., SCHJAER-JACOBSEN H., VOLDBY J. (1975)

"Automated minimax design of networks"
I.E.E.E Trans Circuits-Systems, Vol 22, pp 791-796 october 75.

MADSEN K., SCHJAER-JACOBSEN H. (1978)

"Lineary constrained minimax optimization"
Mathematical programming, study 14, pp 208 - 223.

MATROZOV V.M. (1962)

"Sur la stabilité du mouvement"
Prikl. Math. Mech, pp 885 - 895 et pp 992 - 1002 (en russe).

MEIZEL D., GENTINA J.C. (1984.a)

"Définition d'une méthodologie de conception assistée
d'asservissements non-linéaires par l'utilisation de
techniques d'agrégation par normes vectorielles"
Actes de la 6^{ième} conf. INRIA sur l'analyse et l'optimisation
des systèmes, in "Lecture Notes in Control and Information
Sciences", vol 63, t.1, pp 245 - 258.

MEIZEL D. (1984.b)

"Sur la synthèse paramétrique d'asservissements de processus non-linéaires"

Thèse de Doctorat ès-sciences physiques ,U.S.T.Lille I.

MIFFLIN R. (1977)

"An algorithm for constrained optimization with semi-smooth functions"

Mathematical of operations Research 2.2, pp 191 - 207.

MUNKSGAARD N. (1977)

"LPMGN a fortran subroutine for the solution of linear programming problems"

Report n° : NI 77-02, Institute of Numerical Analysis, Technical University of Danemark, Lyngby, Danemark, April 77.

PCHENITCHNY B., DANILINE Y. (1977)

"Méthodes numériques dans les problèmes d'extrémum"

Editions MIR, Moscou.

POPV V.M. (1960)

"Nouveaux critères de stabilité pour les systèmes automatiques non-linéaires"

Revue d'electrecité et d'énergie, vol 1.

POPV V.M. (1973)

"L'hyperstabilité des systèmes automatiques"

DUNOD, Paris.

RICHARD J.P. (1984)

"Définition d'invariants polynomiaux adaptés à la modélisation et à l'étude des systèmes non-linéaires et non-stationnaires"

Thèse de Doctorat ès-sciences physiques ,n°639, U.S.T.Lille I.

ROCKAFELLAR R.T. (1970)

"Convex analysis"

Princeton university press.

ROSEN J. 1960

"The gradient projection method for non-linear programming".
"linear constraints"

SIAM journal, 8, pp 181 - 217.

SIRISENA H.R. et CHOI S.S (1975)

"Pole placement in prescribed region of the complex plane
using output feed back"

I.E.E.E Trans on AC dec 75.

STRODIOT J.J, HIIEN NGUYEN V., et HEUKEMES N. 1983

" ϵ -optimal solutions in nondifferentiable convex programming
and some related questions"

Mathematical Programming, 25.

RESUME

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la synthèse d'asservissement de processus non-linéaires envisagée du point de vue de la stabilité de l'origine de l'espace d'état d'un processus en régime libre.

L'analyse de la stabilité par les techniques d'agrégation par normes vectorielles ou par la théorie de l'hyperstabilité permet de définir une approche paramétrique pour l'obtention de la valeur des gains ajustables de loi de commande choisie a priori.

La négativité de ces critères permet de conclure à la stabilité du système étudié.

L'utilisation d'algorithmes d'optimisation de type "non-différentiables" est alors envisagée pour résoudre ce problème.



Mots clefs :

Systemes non-linéaires
Stabilité
Normes vectorielles
Hyperstabilité
Synthèse d'asservissement
Synthèse paramétrique
Optimisation non-différentiable