N° d'ordre : 711

55376
1987
1

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEANNETTE VAN ISEGHEM-LE LUYER

APPROXIMANTS DE PADÉ VECTORIELS

Thèse soutenue le 19 mars 1987 devant la Commission d'Examen :

Président et Rapporteur : MARONI P. (Université de Paris VI)

Rapporteurs : BREZINSKI C. (Université de Lille I)
DE BRUIN M.G. (Université d'Amsterdam - Pays-Bas)
GRAVES MORRIS P.R. (Université de Bradford - G.-B.)

Examinateurs : GERMAIN-BONNE B. (Université de Lille I)
VIENNOT G. (Université de Bordeaux I)

à François,
Francis,
Sylvie

Je remercie Monsieur Maroni, Directeur de Recherches au C.N.R.S., d'avoir, dès le début, estimé mes efforts concernant l'orthogonalité vectorielle. Il a beaucoup contribué par ses suggestions et ses questions à toute la deuxième partie de cette thèse. Je suis très honorée qu'il ait accepté de présider le jury.

Je remercie Monsieur De Bruin, Professeur associé à l'Université d'Amsterdam, et Monsieur Graves-Morris, Professeur à l'Université de Bradford, d'avoir accepté de lire un manuscrit en français, et d'y avoir apporté des corrections nécessaires. Leurs publications, sur des sujets voisins, ont été pour moi des repères précieux, et je les remercie de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur Viennot, Directeur de Recherches au C.N.R.S., spécialiste d'informatique et de combinatoire, de s'intéresser à ce sujet et de faire partie du jury.

Je remercie mes collègues du laboratoire ANO, et notamment Monsieur Germain-Bonne qui a accepté de faire partie du jury, pour l'accueil qu'ils m'ont fait au sein de ce laboratoire.

Une part particulière de mes remerciements va à Monsieur Brezinski, Professeur à l'Université de Lille I. Il est clair que sans lui, cette thèse n'aurait ni commencé, ni abouti, et je ne sais s'il faut plus admirer sa patience et sa confiance ou ses questions et suggestions depuis le début de mon travail en Analyse Numérique.

Je remercie ceux de mes collègues, notamment Jean-Luc Quéva, qui ont écouté et commenté certaines élucubrations.

Je remercie également Madame Bérat qui a assuré la frappe difficile de ce travail, Mesdames Lloret et Wdowczik, Messieurs Gournay et Provost qui en ont assuré la réalisation matérielle.

TABLE DES MATIERES

.../...

.../...

*

* *

INTRODUCTION

Le nom de Padé est attaché à la recherche d'approximants rationnels d'une fonction. On est ainsi conduit pour une fonction donnée à la construction d'un tableau d'approximants à double entrée, où chaque élément R_{pq} de type (p,q) est entièrement défini par sa position dans le tableau c'est-à-dire par un couple d'entiers (p,q) et par une condition d'approximation optimale : $(f - R_{pq})$ a en zéro, un zéro d'ordre $p+q+1$ au plus, et obtenu dans les bons cas.

Avant même la publication des oeuvres de Padé [21], [22] qui ont conduit à la dénomination de la table de Padé, Hermite avait étudié une généralisation de l'approximation rationnelle ordinaire, qui consiste à approcher simultanément des fonctions exponentielles $(e^{\lambda_i z})$ [14], [15]. Les généralisations des approximants de Padé se font dans deux directions : on cherche $(n+1)$ polynômes qui forment un système dit système I ou polynômes latins, et dit système II ou polynômes allemands :

Soit $(n+1)$ séries formelles $f_i(z)$ $(i = 0,\ldots,n)$ à terme constant non nul, soit $(n+1)$ entiers $\rho_0,\ldots,\rho_n$ positifs ou nuls et $\sigma = \rho_0+\ldots+\rho_n$, on cherche P_i $(i = 0,\ldots,n)$ tels que :

Système I
$$\begin{cases} \deg P_i \leq \rho_i \quad (i = 0,\ldots,n) \\ \sum_{i=0}^{n} P_i(z).f_i(z) = 0(z^{\sigma+n}) \end{cases}$$

Système II
$$\begin{cases} \deg P_i \leq \sigma - \rho_i \quad (i = 0,\ldots,n) \\ P_0 f_i(z) - P_i f_0(z) = 0(z^{\sigma+1}) \quad (i = 1,\ldots,n) \end{cases}$$

Les problèmes relatifs au système I et au système II ne sont pas sans relation [18], mais l'idée qui sera poursuivie ici se rattache de fait au problème II étudié notamment par de Bruin [5, 6]. Prenant f_0 identique à 1, le problème est clairement la recherche d'approximants P_i/P_0 des fonctions f_i pour $i = 1,\ldots,n$. Etant donné ρ_0 et $\rho_1,\ldots,\rho_n$ on pose $\sigma = \rho_1 + \ldots + \rho_n$ on cherche simultanément les n polynômes P_i et le polynôme P_0 $(d^0P_0 \leq \sigma)$

$$\begin{cases} d^0P_i \leq \sigma + \rho_0 - \rho_i & i = 1,\ldots,n \\ (f_i - P_i/P_0)(z) = O(z^{\sigma+\rho_0+1}). \end{cases}$$

Les approximants cherchés sont de type $(\sigma + \rho_0 - \rho_i, \sigma)$, leur point commun est l'ordre d'approximation des f_i. Ils correspondent, de manière unique dans les bons cas, à un $(n+1)$-uplet $(\rho_0\rho_1,\ldots,\rho_n)$.

Le point de vue, qui sera développé ici, est de chercher un approximant de $\mathbb{F} = (f_1,\ldots,f_d)$ c'est-à-dire d fractions rationnelles (P_i/Q) correspondant à un couple d'entiers (p,q) et défini par une condition d'optimalité de l'approximation, comme dans le cas scalaire. Le fait de garder les entiers arbitraires $\rho_0,\ldots,\rho_n$ impliquent une "indépendance" des approximants simultanés, alors que le choix d'un seul degré p pour les numérateurs des approximants conduit à un approximant vectoriel. On peut évidemment considérer le vecteur ayant pour composantes les approximants simultanés, mais on ne pourra obtenir de résultats que composante à composante, alors que dans le cas que nous nommerons vectoriel, les approximants sont définis globalement, et donc les propriétés et algorithmes qu'ils vérifient aussi. Les deux points de vue se recoupent évidemment pour $\rho_1 = \ldots = \rho_n = p$ et $\rho_0 = q$ comme on le verra à la fin de la pre-

mière partie. L'avantage de la construction "simultanée" est d'être en somme adaptative, son revers est de n'être pas globale. Le point de vue vectoriel est global, permet de définir une "table de Padé" à double entrée p,q, chaque élément étant totalement défini par la donnée de p et q. La structure de la table est relativement simple, conduit à une définition de polynômes vectoriellement orthogonaux pour les dénominateurs (2ème partie) et à des algorithmes de calcul (3ème partie).

Nous détaillons maintenant les idées raisonnables qu'on peut retenir pour définir un approximant vectoriel.

Soit $\mathbb{F}(t)$ une fonction vectorielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^d$: $\mathbb{F}(t) = (f_1(t),\ldots,f_d(t))^T$.

On cherche une fraction rationnelle $\mathbb{R}(t) = (r_1(t),\ldots,r_d(t))^T$ de type (p,q), c'est-à-dire chaque r_i sera de type (p,q), et $\mathbb{R}(t)$ réalisera le "meilleur" ordre approximation de $\mathbb{F}(t)$ au voisinage de 0 (approximant de Padé), ou interpolera au sens de Hermite $\mathbb{F}$ en k points avec le "meilleur" ordre total d'interpolation ($k = p+q$ dans le cas des approximants de Newton-Padé scalaires).

La notion de meilleur ordre d'approximation sera la suivante : supposons que $\mathbb{R}(t)$ approxime $\mathbb{F}(t)$ à l'ordre k, ce sera le meilleur ordre s'il est impossible d'améliorer simultanément l'ordre d'approximation des d composantes. Si $d = 1$, on retrouve les approximants de Padé.

Les équivalences classiques entre $f-P/Q = O(t^k)$ et $Qf-P = O(t^k)$, la notion même de fraction rationnelle repose sur la définition d'un produit $Q.f$ ou d'un quotient P/Q. La seule notion de quotient peut suffire à résoudre le problème d'interpolation vectoriel (Graves-Morris [11], qui prend $V^{-1} = V/||V||^2$) par une généralisation du ρ algorithme, mais la solution trouvée est de type (p,q) pour un ordre d'approximation p, qui

n'est pas le meilleur ordre d'approximation.

On peut définir un produit : $(a_1,\ldots,a_d)^T.(b_1,\ldots,b_d)^T = (a_1b_1,\ldots,a_db_d)^T$ par identification d'un vecteur à la diagonale d'une matrice diagonale. Ayant un produit et un quotient classique composante à composante, on retrouve de manière évidente les approximants de Padé composante à composante, les polynômes orthogonaux à coefficients dans $\mathbb{C}^d$, comme vecteur des polynômes orthogonaux relativement à chaque fonctionnelle linéaire composante, l'algorithme de Thiele et l'ε-algorithme. Cette méthode étant la meilleure sur chaque composante est nécessairement la meilleure globalement. Elle n'est en fait que la mise en parallèle de calcul simultané des approximants de Padé des fonctions $f_1,\ldots,f_d$.

Si on se limite à chercher la fraction $\mathbb{R}(t)$ sous la forme $(r_1,\ldots,r_d)$ où tous les r_i ont même dénominateur, le produit $Q.F$ ou P/Q à définir n'est plus que le produit par un scalaire $Q(t)$, et $\mathbb{R}(t) = Q(t)^{-1}(P_1(t),\ldots,P_d(t))$.

On peut, dans ce cas, trouver des approximants de type Padé (Brezinski, [3]). Le problème peut être développé par la recherche du meilleur ordre d'approximation au sens déjà défini. Les dénominateurs seront alors uniquement déterminé par une relation de récurrence à $d+2$ termes qui dans le cas $d = 1$ est la relation d'orthogonalité classique. Ces approximants, qu'on appellera approximants de Padé vectoriels, s'écrivent alors sous forme de rapport de déterminants.

La première partie contient donc toutes les définitions et premières propriétés des approximants de Padé vectoriels notés $[p/q]$, ainsi que le rapport existant entre ceux-ci et des approximants existants. Cette partie reprend et développe les résultats de [26].

On constate dans l'étude classique des approximants de Padé scalaires (Brezinski [3], comme dans le cas des approximants en deux points (Draux [9]) que la structure de la table des polynômes, associés aux dénominateurs Q de $[r+s-1/r]$ par $P_r^s(x) = x^r Q(x^{-1})$, est révélatrice de la structure de la table de Padé elle-même. Nous étudions donc les relations existant entre ces polynômes, qui justifient dans la deuxième partie l'appellation de polynômes vectoriellement orthogonaux ([27]).

Dans la troisième partie, on définit des algorithmes de calcul de ces approximants, notamment une extension de la règle de la croix ([28]) qui prend une forme de comète, c'est-à-dire que les approximants qui interviennent dans le calcul sont disposés selon une forme d'étoile filante. Sans faire une étude numérique de cette algorithme, nous développons quelques cas d'applications de celui-ci à l'accélération de suites vectorielles.

La dernière partie est consacrée à l'étude d'un certain nombre de problèmes de convergence. Les résultats sont évidemment assez parallèles à ceux obtenus dans le cas des approximants simultanés.

Un certain nombre de problèmes restent ouverts au niveau notamment des deux dernières parties, tant au niveau algorithmique par le caractère vectoriel des algorithmes trouvés, que pour les problèmes de convergence qu'on ne risque pas d'épuiser en un seul chapitre.

CHAPITRE I

DEFINITION DES APPROXIMANTS DE PADÉ VECTORIELS.

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition des approximants de type Padé (A.T.P.) vectoriels, donnée par C. Brezinski, et énonçons les propriétés algébriques classiques de ces approximants.

Nous définissons la notion de meilleur ordre d'approximation d'une fonction vectorielle par une fraction rationnelle vectorielle comme un ordre identique sur toutes les composantes et qui ne peut être amélioré sur toutes les composantes à la fois. Dans ce sens, le meilleur ordre d'approximation d'une fonction vectorielle à d composantes par une fraction rationnelle vectorielle de type (p,q) est $p + [q/d]$ (où $[q/d]$ est la partie entière de q/d).

Ces meilleurs approximants rationnels sont logiquement appelés approximants de Padé vectoriels, et leurs dénominateurs sont définis par des relations (R) qui seront appelés relations d'orthogonalité vectorielle.

Dans cette partie, les relations (R) sont utilisées pour obtenir des expressions explicites comme rapport de déterminants des polynômes dénominateurs et des approximants de Padé vectoriels.

Enfin, dans la dernière partie, nous comparons les approximants de Padé vectoriels ainsi définis, avec d'autres approximants rationnels vectoriels existants.

Les résultats de ce chapitre ont été partiellement publiés dans [26].

I - APPROXIMANTS DE TYPE PADE (A.T.P.).

Ces approximants ont été définis par C. Brezinski en [3].

On suppose $\mathbb{F}(t)$ développable en série entière au voisinage de zéro :

$$\mathbb{F}(t) = \sum_{i\geq 0} \Gamma_i t^i \qquad \Gamma_i \in \mathbb{C}^d$$

et Γ la fonctionnelle linéaire de $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}^d$: $\Gamma(x^k) = \Gamma_k$.

On a formellement $\mathbb{F}(t) = \Gamma(\frac{1}{1-xt})$.

Soit $v(x) = \prod_1^n (x-x_i)$ où les x_i sont arbitraires, $\tilde{v}(t) = t^n v(t^{-1})$.

On pose $\mathbb{W}(t) = \Gamma(\frac{v(x)-v(t)}{x-t})$ et $\tilde{\mathbb{W}}(t) = t^{n-1}\mathbb{W}(t^{-1})$ qui est un polynôme vectoriel de degré au plus $n-1$, (Γ agissant sur x).

On a comme dans le cas scalaire :

Théorème 1.1 - Si $P(t)$ est le polynôme d'interpolation de $\frac{1}{1-xt}$ en x_i, $i = 1,\ldots,n$, alors :

$$\Gamma(P)(t) = \tilde{\mathbb{W}}(t)/\tilde{v}(t)$$

$$\mathbb{F}(t) - \Gamma(P(t)) = O(t^n) = \frac{t^n}{\tilde{v}(t)}\Gamma(\frac{v(x)}{1-xt})$$

$$= \frac{t^n}{\tilde{v}(t)} \sum_{i\geq 0} D_i t^i \quad \text{avec} \quad D_i = \Gamma(x^i v(x)).$$

Démonstration : Les démonstrations sont semblables au cas scalaire

$$\tilde{\mathbb{W}}(t) = t^{n-1}\Gamma(\frac{v(t^{-1})-v(x)}{t^{-1}-x})$$

$$= \Gamma(\frac{t^n v(t^{-1})-t^n v(x)}{1-xt}) = \Gamma(\frac{\tilde{v}(t)-t^n v(x)}{1-xt})$$

$$= \tilde{v}(t)\mathbb{F}(t) - t^n\Gamma(\frac{v(x)}{1-xt})$$

donc $$\mathbb{F}(t) - \frac{\tilde{W}(t)}{\tilde{V}(t)} = \frac{t^n}{\tilde{V}(t)} \Gamma\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right) .$$

En développant en série entière $\frac{v(x)}{1-xt}$, on obtient formellement

$$\Gamma\left(\frac{v(x)}{1-xt}\right) = \sum_{i\geq 0} t^i \Gamma(x^i . v(x))$$

d'où le dernier résultat.

Reste à démontrer $\Gamma(P)(t) = \tilde{W}(t)/\tilde{V}(t)$.

Dans le cas où les x_i sont deux à deux distincts

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{v(x)-v(x_i)}{x-x_i} \frac{1}{v'(x_i)} \cdot \frac{1}{1-x_i t}$$

$$\Gamma(P(x))(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{W(x_i)}{v'(x_i)} \frac{1}{1-x_i t} = t^{-1} \sum_{i=0}^{n} \frac{W(x_i)}{v'(x_i)} \frac{1}{t^{-1}-x_i}$$

$$= t^{-1} \frac{W(t^{-1})}{v(t^{-1})} = \frac{\tilde{W}(t)}{\tilde{V}(t)} .$$

La démonstration peut être étendue au cas où les x_i ne sont pas deux à deux distincts. ■

Si on note $\Gamma_i = (c_i^1, \ldots, c_i^d)$, on définit ainsi des fonctionnelles linéaires composantes c^α pour $\alpha = 1,\ldots,d$: $c^\alpha(x_i^j) = c_i^\alpha$, et f_α étant la composante de $\mathbb{F}$: $c^\alpha(1/1-xt) = f_\alpha(t)$.

Il est clair que la composante α de $\tilde{W}(t)/\tilde{V}(t)$ est l'approximant de type Padé $(n-1/n)$ de f_α.

La fraction rationnelle vectorielle $\tilde{W}(t)/\tilde{V}(t)$ est par définition l'approximant de type Padé $(n-1/n)$ de $\mathbb{F}(t)$.

On peut comme dans le cas scalaire définir des approximants (p/q) pour $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}(t) = \Sigma_{h-1}(t) + t^h \mathbb{F}_h(t) \qquad h \in \mathbb{Z}$$

où Σ_{h-1} est la somme partielle de la série jusqu'à l'ordre $h-1$

$$\Sigma_{h-1} = 0 \quad \text{si} \quad h < 1$$

$$\mathbb{F}_h = \sum_{i \geq 0} r_{h+i} t^i$$

$$r_j = 0 \quad \text{si} \quad j < 0$$

on pose $(p+h-1/p)(t) = \Sigma_{h-1}(t) + t^h (p-1/p)\mathbb{F}_h(t)$.

Soit $\mathbb{P}/Q = \Sigma_{h-1}(t) + t^h (p-1/p)\mathbb{F}_h(t) = \Sigma_{h-1}(t) + t^h \mathbb{P}_1/Q(t)$

$$\begin{cases} d^o \mathbb{P} = p+h-1 \\ d^o Q = p \\ (\mathbb{P} - Q\mathbb{F})(t) = t^h (\mathbb{P}_1 - Q\mathbb{F}_h)(t) = 0(t^{p+h}). \end{cases}$$

Donc $\mathbb{P}/Q$ est bien un A.T.P. de $\mathbb{F}$ de type $(p+h-1,p)$.

Théorème 1.2 - Si $\mathbb{F}_h$ est définie comme précédemment, l'A.T.P. $(p+h-1/p)$ est défini et vérifie :

$$(p+h-1/p)(t) = \Sigma_{h-1}(t) + t^h (p-1/p)\mathbb{F}_h(t) \qquad h \in \mathbb{Z}, \quad p \geq 0$$

$$\mathbb{F}(t) - (p+h-1/p)(t) = 0(t^{p+h})$$

$$= \frac{t^{p+h}}{\tilde{Q}(t)} \sum_{i \geq 0} t^i r^h(x^i . Q(x)) = \frac{t^{p+h}}{\tilde{Q}(t)} \sum_{i \geq 0} D_i t^i.$$

Démonstration : On définit la fonctionnelle linéaire r^h par $r^h(x^i) = r_{h+i}$, et on pose $(p+h-1/p) = \mathbb{P}(t)/\tilde{Q}(t)$.

Par définition $\mathbb{P}_{/\tilde{Q}}(t) = \Sigma_{h-1}(t) + \mathbb{P}_{1/\tilde{Q}}(t)$

$\mathbb{P}_{1/\tilde{Q}}(t) = (p-1/p)\mathbb{F}_h$

$$\tilde{Q}(t).\mathbb{F}(t) - \mathbb{P}(t) = \tilde{Q}(t)(\Sigma_{h-1}+t^h\mathbb{F}_h(t)) - (\tilde{Q}(t).\Sigma_{h-1}(t)+t^h\mathbb{P}_1(t))$$

$$= t^h(\tilde{Q}(t)\mathbb{F}_h(t) - \mathbb{P}_1(t))$$

$$= t^h\Gamma^h(\frac{Q(x)}{1-xt})$$

$$\mathbb{F}(t) - \mathbb{P}(t)_{/\tilde{Q}(t)} = \frac{t^h}{\tilde{Q}(t)}\Gamma^h(\frac{Q(x)}{1-xt})$$

$$= \frac{t^h}{\tilde{Q}(t)} \sum_{i\geq 0} t^i\Gamma^h(x^i.Q(x))$$

■

II - PROPRIETES ELEMENTAIRES DES A.T.P.

Nous énonçons ici un certain nombre de propriétés élémentaires des A.T.P. vectoriels. Les démonstrations consistent seulement à dire que les résultats sont vrais composante à composante.

II.1 - Résultats algébriques.

II.1.1 - Deux A.T.P $(p_{/q})$ de même dénominateur, d'une fonction $\mathbb{F}$ coïncident.

II.1.2 - Si $\mathbb{F}$ est remplacée par $\mathbb{F} + \mathbb{R}_k$, ($\mathbb{R}_k$ polynôme de degré k) et si $\mathbb{P}_{/Q}$ est l'A.T.P $(p_{/q})$ de $\mathbb{F}$, alors $(a\mathbb{P} + Q.\mathbb{R}_k)_{/Q}$ est l'A.T.P $(p_{/q})$ de $a\mathbb{F} + \mathbb{R}_k$ pourvu que $p \geq k+q$.

II.1.3 - Covariance homographique.

Soit $z = \psi(t) = \frac{at}{ct+d}$ $(ad \neq 0)$ et $\mathbb{H}(t) = \mathbb{F} \circ \psi(t)$.

Soit $\mathbb{P}_{/Q(z)} = (p_{/q})\mathbb{F}(z)$

alors $\mathbb{P}\circ\psi(t)_{/Q\circ\psi(t)} = (p_{/q})\mathbb{H}(t)$.

II.1.4 - Si $\mathbb{F}(t) = t^k \mathbb{G}(t)$, alors $t^k (p_{/q})_{\mathbb{G}}(t) = (p+k_{/q})_{\mathbb{F}}(t)$.

II.1.5 - $(p_{/q})_{\mathbb{F}} + (p_{/q})_{\mathbb{G}} = (p_{/q})_{\mathbb{F}+\mathbb{G}}$ si les deux premiers A.T.P. cités ont même dénominateur.

II. 2 - Représentation du reste.

II.2.1 - Proposition.- Si $\mathbb{F}$ est analytique au voisinage de zéro, et $d^o\mathbb{P} = p$:

$$(\mathbb{F} - \mathbb{P}_{/Q})(t) = \frac{t^{p+1}}{2i\pi Q(t)} \int_C \frac{1}{(t-u)u^{p+1}} Q(u).\mathbb{F}(u)du$$

où C est un contour de Jordan entourant 0, contenu dans l'intersection des domaines d'holomorphie des f_α.

Démonstration : Cette formule est équivalente à :

$$Q(t).\mathbb{F}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{Q(u).\mathbb{F}(u)du}{u-t} \qquad \text{(formule de Cauchy)}$$

donc $$\mathbb{P}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_C (1 - \frac{t^{p+1}}{u^{p+1}}) \frac{Q(u).\mathbb{F}(u)}{u-t} du$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}$ interpole $Q.\mathbb{F}$ en zéro à l'ordre p. ■

II.2.2 - Proposition.- Si $\mathbb{F}$ est analytique au voisinage de zéro, la fonctionnelle Γ est représentable par une intégrale à valeurs vectorielles :

Si H_β représente les fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphes pour $|u| < \frac{1}{\beta}$;

Si $R = \inf_\alpha R_\alpha$ et f_α est holomorphe dans D_{R_α}

$$g \in H_\beta : \Gamma(g) = \int_{|u|=r} \mathbb{F}(u).g(\frac{1}{u}) \frac{du}{u} \qquad \beta < r < R.$$

Démonstration : On vérifie que $\Gamma(t^i) = \Gamma_i$

$\frac{1}{2i\pi}\int_C \left(\sum_{j\geq 0} \Gamma_j u^j\right)\frac{1}{u^i}\frac{du}{u} = \Gamma_i$ par permutation des signes somme à l'intérieur du domaine d'holomorphie des f_α.

Γ étant linéaire continue, cela suffit à assurer l'unicité de sur l'espace des séries formelles $\mathbb{C}[[X]]$ d'une part, et sur le sous-espace des fonctions holomorphes par continuité. ∎

III - AMELIORATION DE L'ORDRE D'APPROXIMATION.

On cherche $v(x)$ pour que l'ordre d'approximation soit supérieur à n

$$v(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n , \qquad a_n = 1.$$

On a donc n inconnues. Avec les notations des théorèmes 1.1 ou 1.2, on a :

$$D_k = 0 \iff \Gamma(x^k v(x)) = 0$$
$$\iff c^\alpha(x^k v(x)) = 0 \qquad \alpha = 1,\ldots,d$$

donc $D_k = 0$ est équivalent à d équations à vérifier par $a_0,\ldots,a_n$ et donc on peut imposer la condition $D_k = 0$ pour k prenant au plus $\left[n/d\right]$ valeurs, où $\left[n/d\right]$ représente la partie entière de n/d. On a donc le résultat suivant :

Théorème 3.1 - Pour toutes les fractions rationnelles vectorielles de type $(n-1,n)$, l'ordre maximum d'approximation de $\mathbb{F} = (f_1,\ldots,f_d)$ est au moins $n + \left[n/d\right] - 1$.

Pour toutes les fractions rationnelles vectorielles $(p+h,p)$, l'ordre maximum d'approximation de $\mathbb{F} = (f_1,\ldots,f_d)$ est $p+h+\left[p/d\right]$.

Si $\tilde{Q}(t)$ est le dénominateur, il vérifie dans le premier cas :

$$d^oQ = n \qquad \Gamma(x^i.Q(x)) = 0 \quad i = 0,\ldots,\left[n/d\right]-1$$

et dans le second cas : $d^oQ = p \qquad \Gamma^h(x^iQ(x)) = 0 \qquad i = 0,\ldots,\left[p/d\right]$.

Démonstration : Il est clair que l'ordre maximum d'interpolation signifie que toutes les composantes ont au moins cet ordre :

Soit $\mathbb{P} = (P^1,\ldots,P^d)$, on a :

$$(\mathbb{F} - \mathbb{P}_{/\tilde{Q}})(t) = 0(t^k)$$

$$\forall\, \alpha = 1,\ldots,d \qquad (f_\alpha - P^\alpha{}_{/\tilde{Q}}) = 0(t^k).$$

Le résultat provient alors des théorèmes 1.1 et 1.2. En effet, si $d^o\mathbb{P} = p+h-1$ et $d^o\tilde{Q} = p$, l'ordre maximum est au moins $p+h-1$ puisque les A.T.P le réalise, et donc $\mathbb{P}_{/Q}$ est un A.T.P particulier :

$$(\mathbb{F} - \mathbb{P}_{/\tilde{Q}})(t) = 0(t^{p+h+k}) \ ;$$

$\mathbb{P}_{/Q}$ est un A.T.P. et d'après 1.2

$$\Gamma^h(x^iQ(x)) = 0 \quad i = 0,\ldots,k \quad \text{donc} \quad k = \left[p/d\right].$$

IV - DEFINITION ET PROPRIETES DES DENOMINATEURS DES APPROXIMANTS DE PADE VECTORIELS.

IV.1 - Définition.- On appelle P_{nd+k} $(k < d)$ l'unique polynôme unitaire déterminé par :

$$(R) \qquad \begin{cases} \Gamma(x^i.P_{nd+k}(x)) = 0 & i = 0,\ldots,n-1 \\ C^\alpha(x^n.P_{nd+k}(x)) = 0 & \alpha = 1,\ldots,k. \end{cases}$$

Les approximants de type Padé de polynôme générateur P_{nd+k} approximent $\mathbb{F}(t)$ à l'ordre maximal $nd+k+n-1$. De plus, les k premières composantes ont pour ordre d'approximation $nd+k+n$. Ce sont ces approxi-

mants qu'on appellera approximants de Padé vectoriels.

IV.2 - Expression explicite des P_{nd+k} $(n \geq 0,\ 0 \leq k \leq d-1)$.

Les équations $\Gamma(x^i P_{nd+k}) = 0$ et $c^\alpha(x^n P_{nd+k}) = 0$ définissent un système linéaire : Posons $P_{nd+k} = \sum_0^{nd+k} a_i x^i$ et $a_{nd+k} = 1$.

$$\begin{cases} a_0\Gamma_0 + \ldots + a_{nd+k}\,\Gamma_{nd+k} = 0 \\ \vdots \\ a_0\Gamma_{n-1} + \ldots + a_{nd+k}\,\Gamma_{nd+k+n-1} = 0 \\ a_0\Gamma_n^{(k)} + \ldots + a_{nd+k}\,\Gamma_{nd+k+n}^{(k)} = 0 \end{cases}$$

chaque ligne vectorielle représente les d lignes scalaires $a_0 c_h^i + \ldots + a_{nd+k} c_{h+nd+k}^i = 0$, et la dernière ligne représente les k premières lignes scalaires de $(a_0\Gamma_n + \ldots \quad = 0)$.

On appelle $H_{nd+k}(\Gamma_0)$ le déterminant de ce système.

Théorème 4.2 - Une condition nécessaire et suffisante pour que les P_i existent pour tout i est que $H_{nd+k}(\Gamma_0)$ soit non nul pour $n \geq 0$ et k entre 0 et d-1.

P_{nd+k} admet alors pour expression explicite :

$$P_{nd+k}(x) = \frac{1}{H_{nd+k}(\Gamma_0)} \begin{vmatrix} \Gamma_0 & \cdots\cdots & \Gamma_{nd+k} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{n-1} & \cdots\cdots & \Gamma_{nd+k+n-1} \\ \Gamma_n^{(k)} & \cdots\cdots & \Gamma_{nd+k+n}^{(k)} \\ 1 & \cdots\cdots & x^{nd+k} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1.$$

IV.3 - Définition des P_r^s , $r \geq 0$, $s \geq 0$.

Ces polynômes sont définis de telle sorte que $\hat{P}_r^s$ soit le dénominateur de l'approximant de Padé vectoriel $\left[r+s-1/r\right]$, c'est-à-dire P_r^s est unitaire et défini par : notons $r = nd+k$, $0 \leq k < d$

$$(R) \quad \begin{cases} \Gamma(x^i P_r^s(x)) = 0, & i = s,\ldots,s+n-1 \\ C^\alpha(x^{s+n} P_r^s(x)) = 0, & \alpha = 1,\ldots,k \ . \end{cases}$$

Remarque :

Ces conditions sont équivalentes à celles du théorème 3.1 et font toujours intervenir la même fonctionnelle Γ, ce qui allège les notations.

IV.4 - Expression explicite de P_r^s.

Les relations (R) sont équivalentes au système linéaire suivant, avec pour inconnues $a_0,\ldots,a_{r-1}a_r$ coefficients de P_r^s ($a_r = 1$) :

$$\begin{cases} a_0\Gamma_s + \ldots + a_r\Gamma_{r+s} = 0 \\ \vdots \\ a_0\Gamma_{s+n-1} + \ldots + a_r\Gamma_{r+s+n-1} = 0 \\ a_0\Gamma_{s+n}^{(k)} + \ldots + a_r\Gamma_{r+s+n}^{(k)} = 0 \end{cases}$$

Chaque ligne représentant d lignes scalaires, sauf la dernière qui représente les k premières composantes de l'équation vectorielle ($a_0\Gamma_{s+n} + \ldots + a_r\Gamma_{r+s+n} = 0$).

Théorème.- Une condition nécessaire et suffisante pour que P_r^s existe est que le déterminant du système soit non nul. Par analogie avec le cas scalaire, nous le noterons comme un déterminant de Hankel généralisé :

$$H_r^s = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{s+n-1} & & \Gamma_{r+s+n-2} \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s+n-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

P_r^s admet alors une expression explicite :

$$P_r^s(x) = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{s+n-1} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s+n-1} \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s+n}^{(k)} \\ 1 & \cdots\cdots & x^r \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{s+n-1} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s+n-2} \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+s+n-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

V - EXPRESSION DES APPROXIMANTS DE PADE VECTORIELS COMME RAPPORT DE DETERMINANTS

On note $\Sigma_i(t)$ ou Σ_i (si la variable est t) la somme partielle de la série $\sum_{k\geq 0} \Gamma_k t^k$.

V.1 - Cas de $\left[r-1/r\right]$, $r \geq 1$.

$\left[r-1/r\right]$ est l'A.T.P. de dénominateur $\tilde{P}_r^o$ (ou $\tilde{P}_r$)

$$W(t) = \Gamma\left(\frac{P_r(t) - P_r(x)}{t - x}\right) = \sum_1^r a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \Gamma_j t^{i-1-j}\right)$$

$$= \sum_1^r a_i t^{i-1} (\Sigma_{i-1}(t^{-1}))$$

$$\left[r-1/r\right] = \tilde{W}(t)/\tilde{P}_r(t)$$

$$= t^{r-1} W(t^{-1})/t^r \tilde{P}_r(t^{-1})$$

$$= \left| \begin{array}{ccccc} \Gamma_0 & \cdots\cdots & \Gamma_i & \cdots\cdots & \Gamma_r \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Gamma_{n-1} & & & & \Gamma_{r+n-1} \\ \Gamma_n^{(k)} & & & & \Gamma_{r+n}^{(k)} \\ 0 & \cdots\cdots & t^{r-i}\Sigma_{i-1} & \cdots\cdots & \Sigma_{r-1} \end{array} \right| \Big/ \left| \begin{array}{ccc} \Gamma_0 & \cdots\cdots & \Gamma_r \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{n-1} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+n-1} \\ \Gamma_n^{(k)} & \cdots\cdots & \Gamma_{r+n}^{(k)} \\ t^p & \cdots\cdots & 1 \end{array} \right|$$

Seule la dernière ligne du numérateur est vectorielle, les autres étant d lignes scalaires. On a ainsi un approximant vectoriel, le déterminant étant considéré comme formellement développé suivant la dernière ligne.

V.2 - Cas de $\left[r+s-1/r\right]$ $\quad r \geq 1, \quad s \geq 0$ ou $r = 0, \quad s \geq 1.$

$$\left[r+s-1/r\right](t) = \Sigma_{s-1}(t) + t^s \left[r-1/r\right]\mathbb{F}_s(t)$$

$\mathbb{F}(t) = \Sigma_{s-1}(t) + t^s \mathbb{F}_s(t)$ et les sommes partielles de $\mathbb{F}_s$ sont $t^{-s}(\Sigma_{s+p} - \Sigma_{s-1})$

$$\left[r-1/r\right]\mathbb{F}_s = \tilde{W}_s(t) / \tilde{\mathbb{P}}^s_r(t)$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_{s+r} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{t}^s(\Sigma_{s+r-1} - \Sigma_{s-1}) \end{array} \right| \Big/ \left| \begin{array}{ccc} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_{s+r} \\ & & \\ t^r & \cdots\cdots & 1 \end{array} \right|$$

d'où l'expression de $\left[r+s-1/r\right]$, $(r=nd+k)$, où seule la dernière ligne du numérateur est vectorielle :

$$\left[r+s-1_{/r}\right] = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots & \Gamma_{s+i} & \cdots & \Gamma_{s+r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots & \Gamma_{s+n+i}^{(k)} & \cdots & \Gamma_{s+r+n}^{(k)} \\ t^r\Sigma_{s-1} & \cdots & t^{r-i}\Sigma_{s-1+i} & \cdots & \Sigma_{r+s-1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots & \Gamma_{r+s} \\ \vdots & & \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots & \Gamma_{r+s+n}^{(k)} \\ t^r & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

V.3 - Cas de $\left[p_{/p+h}\right]$.

On pose $\bar{\mathbb{F}}_h = t^{-h+1}\mathbb{F}$ et on considère $t^{-h+1}\left[h+p-1_{/h+p}\right]\bar{\mathbb{F}}_h$.

Comme précédemment, on a :

$$t^{-h+1}\left[h+p-1_{/h+p}\right]\bar{\mathbb{F}}_h - \mathbb{F}(t) = t^{-h+1}O(t^{h+p+\left[\frac{h+p}{d}\right]}) = O(t^{p+1+\left[\frac{h+p}{d}\right]}).$$

C'est l'ordre maximum d'approximation.

Comme on peut le voir sur l'expression ci-dessous, les degrés respectifs des numérateur et dénominateur sont p et $p+h$ donc

$$\left[p_{/p+h}\right]\mathbb{F} = t^{-h+1}\left[p+h-1_{/p+h}\right]\bar{\mathbb{F}}_h .$$

Soit $\tilde{W}(t)$ le numérateur : $W(t) = \Gamma\left(\frac{P_{p+h}(x)-P_{p+h}(t)}{x-t}\right)$

le terme général de la dernière ligne (ligne vectorielle) du numérateur $t^{h+p+1}\tilde{W}(t^{-1})$ est :

$$t^{h+p-1}\sum_{j=0}^{i-1}\Gamma_{j-h+1}t^{j-i+1} = t^{h+p-1}\sum_{h-1}^{i-1}\Gamma_{j-h+1}t^{j-i+1}$$

$$= t^{h+p-i}\sum_{0}^{i-h}\Gamma_j t^{j+h-1}$$

$$\left[p_{/p+h}\right] = \begin{vmatrix} \Gamma_o & \cdots & \Gamma_{h+p} \\ \vdots & & \\ \Gamma_n^{(k)} & & \Gamma_{n+h+p}^{(k)} \\ 0 \ \ldots \ 0, t^p\Gamma_o, \ldots, \sum_0^p \Gamma_j t^j & & \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Gamma_o & \cdots & \Gamma_{h+p} \\ \vdots & & \vdots \\ t^{h+p} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

V.4 - Expression générale $\left[p/q\right]$ $(q = nd+k)$.

On reprend des notations classiques, la ligne vectorielle sera la 1ère ligne et les termes d'indice négatif sont nuls.

$$\left[p/q\right] = \begin{vmatrix} \sum_{0}^{p-q} \Gamma_i t^{q+i} & \cdots & \sum_{0}^{p} \Gamma_i t^{i} \\ \Gamma_{p-q+1} & \cdots & \Gamma_{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{p-q+n} & \cdots & \Gamma_{p+n} \\ \Gamma^{(k)}_{p-q+n+1} & \cdots & \Gamma^{(k)}_{p+n+1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} t^{q} & \cdots & 1 \\ \Gamma_{p-q+1} & \cdots & \Gamma_{p+1} \\ \vdots & & \\ \Gamma^{(k)}_{p-q+n+1} & \cdots & \Gamma^{(k)}_{p+n+1} \end{vmatrix}$$

On a $\Sigma_n = \sum_{0}^{n} \Gamma_i t^i$ et $\left[p/q\right]$ peut être exprimé en fonction des Σ_n, et $\Delta\Sigma_n = \Gamma_{n+1} t^{n+1}$. Ceci sera fait plus loin et permettra d'une part le calcul récursif des approximants de Padé vectoriels, d'autre part le lien avec l'accélération de la convergence de suites vectorielles.

VI - COMPARAISON AVEC D'AUTRES APPROXIMANTS VECTORIELS.

VI.1 - Approximants de Padé simultanés, De Bruin ([6]).

L'étude de ces approximants et notamment une extension du théorème de Montessus de Ballore ont été faits par P.R. Graves-Morris et E.B. Saff ([12]).

Partant des A.T.P vectoriels, l'ordre d'approximation est amélioré de la manière suivante :

Soient des entiers $r_0,\ldots,r_d$ et $s = r_1 + \ldots + r_d$

$r_0 \geq r_i - 1 \quad i = i,\ldots,d.$

Il existe des polynômes Q, P_i, $i = 1,\ldots,d$, tels que :

$$\begin{cases} (Qf_i - P_i)(t) = O(t^{s+r_o+1}) & t \text{ voisin de zéro} \\ d^oQ = s \\ d^oP_i = s+r_o-r_i \end{cases}$$

L'idée commune avec les approximants de Padé vectoriels est que l'ordre d'approximation est le même sur toutes les composantes et le dénominateur Q est commun.

Ce qui est différent est que le degré de P_i est variable avec i, ce qui traduit un effort d'approximation modulé selon les composantes, alors qu'il est uniforme dans notre cas. On peut donc s'attendre à des résultats comparables si tous les r_i sont égaux. On peut résumer les comportements de ces deux types d'approximants vectoriels sur le tableau suivant :

	approximants de Padé vectoriels	Approximants de Padé simultanés
meilleure approximation sur la 1ère composante (Q est déterminé) $P_1/_Q = [n-1/n]f_1$	$f_1-P_1/_Q = O(z^{2n})$ $P_1/_Q = [n-1/n]f_1$ $i=2..d,\ P_i/_Q = (n-1/n)f_i$ et $i=2..d\ \ (f_i-P_i/_Q)(t)=O(t^n)$	$r_o=n-1\ \ r_1=n\ \ r_i=0\ \ i\neq 0,1$ $P_1/_Q = [n-1/n]f_1$ $P_i/_Q = (2n-1/n)f_i$ $i=1..d\ \ (f_i-P_i/_Q)(t)=O(t^{2n})$
approximation uniforme	$P_i/_Q = (nd-1/nd)$ $f_i-P_i/_Q = O(t^{nd+n})$	$r_1=\ldots=r_d=n\ \ r_o=n-1$ $P_i/_Q = (nd-1/nd)f_i$
$d^oq = N$ $N = nd+k$ et $k\neq 0$	les approximants sont différents	

Le deuxième cas est le seul où les approximants sont les mêmes. D'un point de vue pratique, un approximant de Padé vectoriel est uniquement déterminé par les degrés des numérateur et dénominateur, comme dans le cas scalaire, alors que les approximants de Padé simultanés ont sans doute plus de souplesse d'utilisation, mais nécessitent des choix annexes $r_1,\ldots,r_d$.

VI.2 - Approximants de Padé généralisés, C. Brezinski ([1]).

Ceux-ci ont été définis en connexion avec l'ε-algorithme topologique.

Rappel de la définition.- $(S_n)_n$ est une suite d'éléments d'un espace vectoriel topologique sur un corps K, qui vérifie

$$(1) \qquad \forall n \quad \sum_{i=0}^{k} a_i (S_{n+i} - S) = 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{0}^{k} a_i \neq 0.$$

Nous supposerons $\sum_{0}^{k} a_i = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité. On considère le système

$$\begin{cases} a_0 + \ldots + a_k = 1 \\ a_0 \Delta S_n + \ldots + a_k \Delta S_{n+k} = 0 \\ \vdots \\ a_0 \Delta S_{n+k-1} + \ldots + a_k \Delta S_{n+2k-1} = 0 \\ a_0 S_n + \ldots + a_k S_{h+k} = S \end{cases}$$

y' étant un vecteur quelconque de E', dual de E, on considère

$$e_k(S_n) = \begin{vmatrix} S_n & & S_{n+k} & \\ \langle y', \Delta S_n \rangle & \ldots & \langle y', \Delta S_{n+k} \rangle & \\ & & & \\ \langle y', \Delta S_{n+k-1} \rangle & \ldots & y', S_{n+2k-1} \rangle & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ & \diagup & \\ & & \text{id} \end{vmatrix}$$

Il est clair que si $(S_n)_n$ vérifie (1), alors $e_k(S_n) = S$.

En considérant $(S_n)_n$ comme les sommes partielles d'une série

$$f(x) = \sum_{i\geq 0} c_i x^i \qquad x \in K,\ c_i \in E$$

on a, par des transformations entre lignes et colonnes :

$$(2)\qquad e_k(S_n) = \begin{vmatrix} S_n & \cdots\cdots & S_{n+k} \\ \langle y', c_{n+1}\rangle & \cdots & \langle y', c_{n+k+1}\rangle \\ \vdots & & \\ \langle y', c_{n+k}\rangle & \cdots & \langle y', c_{n+2k}\rangle \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} x^k & \cdots\cdots & 1 \\ & \text{id} & \end{vmatrix}$$

qui est une fraction rationnelle P/Q de type $(k+n,k)$.

Cette fraction vérifie :

$$P(x) - f(x).Q(x) = O(x^{n+k+1})$$
$$(3)\qquad \langle y', P(x) - f(x).Q(x)\rangle = O(x^{n+2k+1}).$$

Cette dernière propriété justifie le nom d'approximant de Padé généralisé $\left[n+k/k\right]$ donné à $e_k(S_n)$. Il se présente d'ailleurs plutôt comme un approximant de Padé dans la direction y', ou comme l'application de la transformation de Shanks à la suite $\langle y', S_n\rangle$. Il s'ensuit l'existence de l'ε-algorithme topologique.

Ces approximants sont généralisés à des approximants dans plusieurs directions :

$$(4)\qquad \bar{e}_k(S_n) = \begin{vmatrix} S_n & & S_{n+k} \\ \langle y'_1, \Delta S_n\rangle & \cdots & \langle y'_1, \Delta S_{n+k}\rangle \\ \vdots & & \\ \langle y'_k, \Delta S_n\rangle & \cdots & \langle y'_k, \Delta S_{n+k}\rangle \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ & \text{id} & \end{vmatrix}$$

Ces rapports ne peuvent être définis que si $y'_1,\ldots,y'_k$ sont indépendants ; des approximations de Padé peuvent être déduit comme précédemment, si les S_n sont les sommes partielles d'une série f :

$$(5) \qquad \frac{P}{Q}(x) = \begin{vmatrix} S_n & \cdots\cdots & S_{n+k} \\ \langle y'_1, c_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y'_1, c_{n+k} \rangle \\ \vdots & & \\ \langle y'_k, c_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y'_k, c_{n+k} \rangle \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} x^k & \cdots\cdots & 1 \\ & \text{id} & \end{vmatrix}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} P(x) - f(x).Q(x) = 0(x^{n+k+1}) \\ \langle y'_i, P(x) - f(x).Q(x) \rangle = 0(x^{n+k+2}) \end{cases}$$

Supposons E de dimension finie d et prenons $y'_1, \ldots, y'_k, \ldots, y'_d$ comme base duale de celle de E, l'approximant $P/_Q$ est exactement l'approximant de Padé vectoriel $\left[n+k/k\right]$ pour $k \leq d$, ce que l'on reconnait soit à partir de (5), soit à partir de (6). Les approximants de Padé vectoriels se présentent donc comme une extension de cette dernière généralisation.

CHAPITRE II

RELATIONS D'ORTHOGONALITE VECTORIELLE.

Les polynômes P_r^s ont été définis à partir des relations (R) d'orthogonalité vectorielle. Nous étudions ici, parallèlement au cas scalaire, cette notion d'orthogonalité : les polynômes $(P_r^s)_{r\geq 0}$ vérifient une relation de récurrence à d+2 termes (première partie), 2 familles $(P_r^s)_r$ et $(P_r^{s+1})_r$ sont liées par un algorithme Q.D (deuxième partie), et, enfin, on peut étendre le théorème de Shohat-Favard à ces polynômes (troisième partie).

La famille $(P_r^s)_{r,s}$ vérifiant pour chaque s une relation de récurrenc à d+2 termes, on peut lui associer soit la fonctionnelle vectorielle Γ, soit considérer que pour chaque s, c'est une famille $\frac{1}{d}$ orthogonale, associée à une fonctionnelle linéaire L. Nous étudions, dans la quatrième partie, le lien entre coefficients de la relation de récurrence (d), fonctionnelle L et fonctionnelle Γ, et caractérisons les relations de longueur fixe à d+2 termes. Nous démontrons, d'autre part, un algorithme de calcul de ces polynômes, assez semblable à la généralisation de l'algorithme de Neville-Aitken (cinquième partie).

Les résultats des trois premières parties de ce chapitre ont été partiellement publiés dans [27].

Les approximants de Padé vectoriels ont été définis comme des A.T.P. de polynôme générateur P_r^s , unitaires, définis par les relations (R) :

si $r = nd + k$, $0 \leq k \leq d$

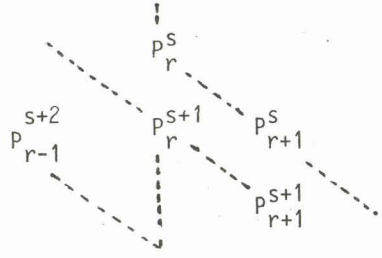
$$(R) \quad \begin{cases} \Gamma(x^i . P_r^s(x)) = 0 & i = s,\ldots,s+n-1 \\ c^\alpha(x^{s+n} . P_r^s(x)) = 0 & \alpha = 1,\ldots,k \end{cases} .$$

Ces polynômes admettent une représentation comme rapport de deux déterminants

$$P_r^s(x) = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots & \Gamma_{s+r} \\ \vdots & & \\ \Gamma_{s+n-1} & \cdots & \Gamma_{s+r+n-1} \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots & \Gamma_{s+r+n}^{(k)} \\ 1 & \cdots & x^r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots & \Gamma_{s+r-1} \\ \vdots & & \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots & \Gamma_{s+r+n-1}^{(k)} \end{vmatrix}} = \frac{H_r^s(x)}{H_r^s} .$$

Ces polynômes seront appelés par la suite vectoriellement orthogonaux, relativement à la fonctionnelle Γ, et on peut considérer ce chapitre comme la justification de cette appellation.

Ces polynômes sont placés dans un tableau à double entrée comme les approximants auxquels ils correspondent : r constant, s variable décrit une colonne ; s constant, r variable décrit une diagonale :



I - RELATION DE RECURRENCE ENTRE LES $(P_r^s)_{r\geq 0}$.

Le théorème est d'abord énoncé et démontré pour $s = 0$.

Théorème I.1 - Les P_{nd+k} vérifient une relation de récurrence à $d+2$ termes, de la forme :

$$(d) \qquad P_{nd+k+1} = (x - \beta_{nd+k+1})P_{nd+k} + \sum_{\mu=1}^{d} \gamma_\mu^{nd+k+1} P_{nd+k-\mu}$$

$$\gamma_d^{r+1} \neq 0 \qquad r \geq d.$$

Démonstration :

Les polynômes P_i ont été supposés unitaires, ils forment donc une base :

$$P_{nd+k+1} - x\,P_{nd+k} = \sum_{0}^{nd+k} \gamma_i P_i$$

$$\Gamma(x^m.P_{nd+k+1} - x\,P_{nd+k}) = 0 \quad \text{si} \quad \Gamma(x^m\,P_{nd+k+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma(x^{m+1}\,P_{nd+k}) = 0$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad m+1 \leq n-1 \quad \text{soit} \quad 0 \leq m \leq n-2$$

$$c^\alpha(x^m.P_{nd+k+1} - x\,P_{nd+k}) = 0 \quad \text{si} \quad m = n-1 \quad \text{et} \quad \alpha = 1,\ldots,k$$

d'où un système de $(n-1)d+k$ équations.

D'autre part : $\Gamma(P_i.x^m) = 0$ si $m \leq \left[\frac{i}{d}\right] - 1$ et

$$c^\alpha(x^m.P_{md+k}) = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,k$$

$$\Gamma\Big(\sum_{0}^{nd+k} x^m \gamma_i P_i\Big) = \sum_{0}^{md-1} \gamma_i \Gamma(x^m P_i).$$

D'où le système, d'abord en Γ, puis en $c^\alpha(\alpha = 1,\ldots,d)$:

$\underline{m = 0}$ $\quad \sum_{0}^{d-1} \gamma_i \Gamma(P_i) = 0$

$$\begin{cases} \gamma_0\, c^1(P_0) = 0 \\ \gamma_0\, c^2(P_0) + \gamma_1\, c^2(P_1) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0\, c^d(P_0) + \ldots + \gamma_{d-1}\, c^d(P_{d-1}) = 0 \end{cases}$$

$\underline{n = 1}$ $\quad \sum_{0}^{2d-1} \gamma_i \Gamma(x\, P_i) = 0 \qquad \begin{cases} \gamma_o c^1(xP_o)+\ldots+\gamma_d c^1(xP_d) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_o c^d(xP_o)+\ldots+\gamma_d c^d(xP_d)+\ldots+\gamma_{2d-1} c^d(xP_{2d-1}) = 0 \end{cases}$

$\underline{m = n-2}$ $\quad \sum_{0}^{(n-1)d-1} \gamma_i \Gamma(x^{n-2}P_i)=0 \qquad \begin{cases} \gamma_o c^1(x^{n-2}P_o)+\ldots+\gamma_{(n-2)d} c^1(x^{n-2}\, P_{(n-2)d}) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_o c^d(x^{n-2}P_o)+\ldots+\gamma_{(n-2)d} c^d(x^{n-2}P_{(n-2)d})+\ldots+ \\ \qquad +\gamma_{(n-1)d-1} c^d(x^{n-2}P_{(n-1)d-1}) = 0 \end{cases}$

$\underline{m = n-1}$ $\quad \sum_{0}^{nd+\alpha} \gamma_i c^\alpha(x^{n-1}P_i) = 0 \qquad \alpha = 1,\ldots,k$

On a finalement un système triangulaire en $\gamma_0,\ldots,\gamma_{(n-1)d+k-1}$ dont le déterminant est : $\prod_{\alpha=1}^{d}\left[c^\alpha(P_{\alpha-1}).c^\alpha(xP_{d+\alpha-1})\ldots c^\alpha(x^{n-2}P_{(n-2)d+\alpha-1})\right]\cdot\prod_{\alpha=1}^{k} c^\alpha(x^{n-1}P_{(n-1)d+\alpha-1})$

En reprenant l'expression explicite des P_i

$$C^\alpha(x^h P_{hd+\alpha-1}) = \frac{1}{H^o_{hd+\alpha-1}} \begin{vmatrix} \Gamma_o & \cdots\cdots & \Gamma_{hd+\alpha-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{h-1} & \cdots\cdots & \Gamma_{(h-1)+hd+\alpha-1} \\ \Gamma_h^{(\alpha-1)} & \cdots\cdots & \Gamma_{h+hd+\alpha-1}^{(\alpha-1)} \\ C_h^\alpha & \cdots\cdots & C_{h+hd+\alpha-1}^\alpha \end{vmatrix} = \frac{H^o_{hd+\alpha}}{H^o_{hd+\alpha-1}}$$

Donc le déterminant est non nul dans l'hypothèse où tous les P_i existent $(H_i^o \neq 0, \ \forall i)$ et donc $\gamma_o = \ldots = \gamma_{(n-1)d+k-1} = 0$.

Finalement, la relation de récurrence s'écrit

$$P_{nd+k+1} = (x - \beta_{nd+k+1})P_{nd+k} + \sum_{\mu=1}^{d} \gamma_\mu^{nd+k+1} P_{nd+k-\mu} \quad .$$

La démonstration de $\gamma_d^{n+1} \neq 0$ est faite au paragraphe I.3 suivant.

Remarques.

1. En particulier, cette formule induit que la famille P_r est $\frac{1}{d}$ orthogonale ([19]), et en considérant les relations (R), il est clair que la famille (P_r) est $\frac{1}{d}$ orthogonale relativement à la fonctionnelle c^1 :

$$c^1(x_i P_r(x)) = 0 \qquad r \geq id+1$$

Nous reprenons ce point en détail dans la quatrième partie.

2. Si $d = 1$, on retrouve une famille (P_r) vérifiant une relation de récurrence à 3 termes, c'est-à-dire orthogonale, et les P_r sont les dénominateurs des approximants de Padé $\left[r-1/r\right]$.

Nous énonçons maintenant le théorème dans le cas général d'une famille $(P_r^s)_{r\geq 0}$, s fixé positif ou nul.

Théorème I.2 - Les $(P_r^s)_{r\geq 0}$ vérifient une relation de récurrence à $d+2$ termes, de la forme : $r = nd+k$, $0 \leq k < d$

$$(d) \qquad P_{r+1}^s = (x - \beta_{r+1}^s)P_r^s + \sum_{\mu=1}^{d} \gamma_\mu^{r+1,s} P_{r-\mu}^s .$$

La démonstration est identique au cas précédent.

Il faut remarquer que dans les relations (R), seule la condition

$$\Gamma(x^i P_r^s(x)) = 0 \qquad i = s,\ldots,s+n-1$$

est nécessaire pour que les approximants de type Padé associés vérifient la condition d'optimalité de l'ordre d'approximation.

Par contre, pour démontrer les théorèmes I.1 et I.2 ci-dessus les deux conditions définies par les relations (R) sont nécessaires.

I.3 - Calcul des coefficients de la relation.

Des méthodes comparables à celles employées pour les polynômes orthogonaux classiques permettent de calculer les coefficients.

Dans le cas $s = 0$, pour simplifier, on détermine $\gamma_d,\ldots,\gamma_{d-k}$: On multiplie (d) par x^{n-1} puis on applique successivement $c^{k+1},\ldots,c^d$:

$$\begin{cases} \gamma_d c^{k+1}(x^{n-1}P_{(n-1)d+k}) = - c^{k+1}(x^nP_r) \\ \gamma_d c^{k+2}(x^{n-1}P_{(n-1)d+k}) + \gamma_{d-1} c^{k+2}(x^{n-1}P_{(n-1)d+k+1}) = -c^{k+2}(x^nP_r) \\ \ldots\ldots \\ \gamma_d c^d(x^{n-1}P_{(n-1)d+k}) + \ldots + \gamma_{d-k} c^d(x^{n-1}P_{(n-1)d+d-1}) = -c^d(x^nP_r). \end{cases}$$

Le système est diagonal, le terme général de la diagonale est :

$$c^{k+i}(x^{n-1}P_{(n-1)d+k+i-1}) = H^o_{(n-1)d+k+i}/H^o_{(n-1)d+k+i-1}$$

et ce terme a été supposé non nul.

Au deuxième membre au moins $c^{k+1}(x^nP_r) = H^o_{r+1}/H^o_r$ est non nul. Donc on a ainsi obtenu $\gamma_d,\ldots,\gamma_{d-k}$ (avec au moins $\gamma_d \neq 0$).

En appliquant de même à (d), multiplié par x^n, $c^1,\ldots,c^k$, on aura un système triangulaire en $\gamma_1,\ldots,\gamma_{d-k-1}$ en fonction des $\gamma_d,\ldots,\gamma_{d-k}$ précédemment calculés. Le déterminant sera pour la même raison non nul. Le terme $c^\alpha(x^nP_r)$ est nul pour $\alpha = 1,\ldots,k$.

β_{r+1} sera calculé en appliquant c^{k+1} à l'égalité multiplié par x^n (de telle sorte que son coefficient $c^{k+1}(x^nP_r)$ soit non nul). Il est obtenu en fonction des γ_μ.

Remarque :

Les calculs ont par rapport au cas classique des termes résiduels encombrants. En particulier, on a supposé pour $r = nd+k$:

$$c^{k+1}(x^n P_r) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \Gamma(x^n P_r) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \Gamma(P_n . P_r) \neq 0 \ .$$

Cette hypothèse se substitue à $c(P_k^2) \neq 0$ dans le cas scalaire. De même si $P_{k+1} = (x-\beta_k)P_k - \lambda_k P_{k-1}$, $\lambda_k \neq 0$ est "remplacé" par $\gamma_d \neq 0$, c'est-à-dire la relation (d) n'est pas de "longueur" inférieure à d+2 (cf. quatrième partie de ce chapitre), sous l'hypothèse $H_r^0 \neq 0$ sur tout r.

II - ALGORITHME QD VECTORIEL.

L'algorithme QD ([1], [13]) peut être étendu au cas vectoriel. La méthode consiste à relier deux familles consécutives $(P_r^s)_{r\geq 0}$ et $(P_r^{s+1})_{r\geq 0}$ Cette méthode, développée dans le cas scalaire, donne l'algorithme QD classique.

Théorème II.1 -

$$(q) \begin{cases} P_{r+1}^s(x) = x\, P_r^{s+1}(x) - q_{r+1}^s\, P_r^s(x) & r \geq 0, \quad s \geq 0 \\ q_{r+1}^s = \dfrac{H_{r+1}^{s+1} . H_r^s}{H_{r+1}^s . H_r^{s+1}} \ . \end{cases}$$

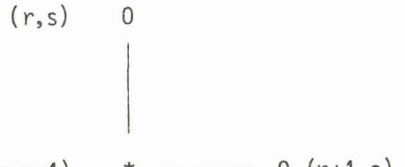
Démonstration : On applique l'identité de Sylvester au déterminant $H_{r+1}^s(x)$, numérateur de $P_{r+1}^s(x)$, puis on divise par $H_{r+1}^s\ H_r^{s+1}$. On obtient

$$H_r^{s+1} . H_{r+1}^s(x) = x\, H_{r+1}^s . H_r^{s+1}(x) - H_{r+1}^{s+1} . H_r^s(x)$$

$$P_{r+1}^s(x) = x\, P_r^{s+1}(x) - \frac{H_{r+1}^{s+1} . H_r^s}{H_{r+1}^s . H_r^{s+1}} \ . \ P_r^s(x) \ .$$

Cette relation est formellement identique au cas scalaire, mais les déterminants H_r^s qui figurent ici, sont les déterminants de Hankel généralisés selon ce qui a été dit au chapitre I, quatrième partie.

Cette relation lie les polynômes situés en "marche d'escalier"



Théorème II.2 -

$$(e)\begin{cases} P_r^{s+1}(x) - P_r^s(x) = -\sum_{i=r-d}^{r-1} e_{r,i}^s\, P_i^{s+1}(x), & s \geq 0, \quad r \geq d, \\ e_{r,r-d}^s \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration : Comme dans le théorème I.1, on développe $P_r^{s+1} - P_r^s$ sur la base des polynômes P_i^{s+1}, en remarquant que $P_r^{s+1} - P_r^s$ est de degré $r-1$.

$$P_r^{s+1}(x) - P_r^s(x) = \sum_{0}^{r-1} \lambda_i\, P_i^{s+1}(x)$$

$$\Gamma(x^j.(P_r^{s+1} - P_r^s)(x)) = 0, \quad j = s+1,\ldots,s+n-1 \quad (r = nd+k)$$

$$c^\alpha(x^{s+n}.(P_r^{s+1} - P_r^s)(x)) = 0 \qquad \alpha = 1,\ldots,k.$$

Sachant que $c^\alpha(x^{s+1+h}.P_i^{s+1}(x)) = 0$ pour $i \geq hd+\alpha$, les λ_i $i = 0,\ldots,r-1$, vérifient le système linéaire suivant :

$$\sum_{0}^{(j-1)d+\alpha} \lambda_i c^\alpha(x^{s+1+j-1}.P_i^{s+1}(x)) = 0 \qquad \begin{cases} \alpha = 1,\ldots,d \text{ et } j = 1,\ldots,n-1 \\ \alpha = 1,\ldots,k \text{ et } j = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 c^1(x^{s+1}.P_0^{s+1}(x)) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 c^k(x^{s+n}.P_0^{s+1}(x)) + \ldots + \lambda_{(n-1)d+k-1} c^k(x^{s+n}.P_{r-d-1}^{s+1}(x)) = 0. \end{cases}$$

Les termes diagonaux sont :

$$C^h(x^{s+1+j-1}.P^{s+1}_{(j-1)d+h-1}(x)) = H^{s+1}_{(j-1)d+h} \Big/ H^{s+1}_{(j-1)d+h-1} .$$

Ces quantités ont été supposées non nulles donc

$$\lambda_o = \ldots = \lambda_{r-d-1} = 0.$$

On a donc le résultat annoncé.

Les $(\lambda_i)_{i=r-d,\ldots,r-1}$ vérifient alors le système suivant :

$$\Gamma(x^{s+n}(P^{s+1}_r(x) - P^s_r(x)) = \sum_{r-d}^{r-1} \lambda_i \Gamma(x^{s+n} P^{s+1}_i(x))$$

$$\Gamma(x^{s+n+1}(P^{s+1}_r(x) - P^s_r(x)) = \sum_{r-d}^{r-1} \lambda_i \Gamma(x^{s+n+1} P^{s+1}_i(x)).$$

Les premiers membres, écrits avec les c^α, deviennent :

$$- c^\alpha(x^{s+n} P^s_r(x)) \qquad \alpha = k+1,\ldots,d$$

$$- c^\alpha(x^{s+n+1} P^s_r(x)) \qquad \alpha = 1,\ldots,k.$$

Les λ_i vérifient alors un système triangulaire :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{r-d} c^{k+1}(x^{s+n} P^{s+1}_{r-d}(x)) & & = -c^{k+1}(x^{s+n} P^s_r(x)) \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \lambda_{r-d} c^k(x^{s+n+1} P^{s+1}_{r-d}(x)) + \ \ldots \ + \lambda_{r-1} c^k(x^{s+n+1} P^{s+1}_{r-1}(x)) & & = -c^k(x^{s+n+1} P^s_r(x)). \end{array}$$

Le déterminant est le produit des termes diagonaux non nuls.

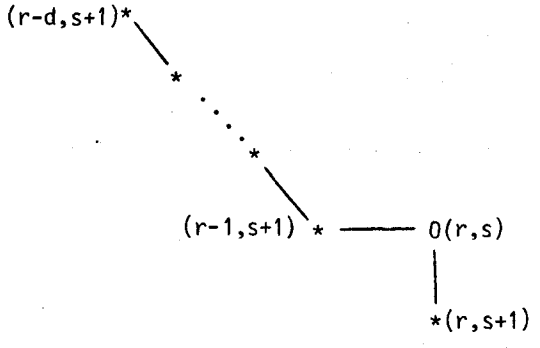
$$\frac{H^{s+1}_{r-d+1}}{H^{s+1}_{r-d}} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{H^{s+1}_r}{H^{s+1}_{r-1}} = \frac{H^{s+1}_r}{H^{s+1}_{r-d}}$$

et le second membre a au moins le terme $-c^{k+1}(x^{s+n} P^s_r(x))$ non nul.

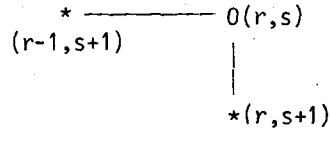
Il est difficile d'avoir une expression explicite des λ_i, c'est-à-dire des $e^s_{r,i}$, mais ils existent et $e^s_{r,r-d}$ est non nul. ■

Si $r \leq d$ et $r \geq 0$, le théorème II.2 est valable comme développement de $P^{s+1}_r - P^s_r$ sur la base P^{s+1}_i, c'est-à-dire $e^s_{ri} = 0$, $i < 0$.

La relation (e) lie les termes situés suivant le diagramme suivant :



Dans le cas $d = 1$, on retrouve $e^s_{r,r-d} = e^s_r$ et le diagramme



Théorème II.3 - Algorithme QD vectoriel.

Les quantités q^s_r et e^s_{ri} sont liées par l'algorithme suivant :

$$(QD)\quad \begin{cases} \text{QD 1} & q^{s+1}_{r+1} + e^{s+1}_{r,r-1} = q^s_{r+1} + e^s_{r+1,r} \\ \text{QD 2} & e^{s+1}_{ri} \cdot q^{s+1}_{i+1} + e^{s+1}_{r,i-1} = e^s_{r,i}\, q^s_{r+1} + e^s_{r+1,i} \qquad i = r-d+1,\ldots,r-1 \\ \text{QD 3} & e^{s+1}_{r,r-d} \cdot q^{s+1}_{r-d+1} = e^s_{r,r-d} \cdot q^s_{r+1} \end{cases}$$

Les conditions initiales de l'algorithme sont détaillées plus loin.

Démonstration : En utilisant successivement les relations (e), puis (q), puis (e), on trouve la relation (d) sous la forme :

$$P^{s+1}_{r+1} = P^{s}_{r+1} - \sum_{r-d+1}^{r} e^{s}_{r+1,i}\, P^{s+1}_{i}$$

$$= x\, P^{s+1}_{r} - q^{s}_{r+1}\, P^{s}_{r} - \sum_{r-d+1}^{r} e^{s}_{r+1,i}\, P^{s+1}_{i}$$

$$= x\, P^{s+1}_{r} - q^{s}_{r+1}(P^{s+1}_{r} + \sum_{r-d}^{r-1} e^{s}_{r,i}\, P^{s+1}_{i}) - \sum_{r-d+1}^{r} e^{s}_{r+1,i}\, P^{s+1}_{i}$$

$$= (x-q^{s}_{r+1}-e^{s}_{r+1,r})P^{s+1}_{r} - \sum_{r-d+1}^{r-1} (e^{s}_{r,i}.q^{s}_{r+1}+e^{s}_{r+1,i})P^{s+1}_{i} - e^{s}_{r,r-d}\, q^{s}_{r+1}\, P^{s+1}_{r-d}\,.$$

On peut de même trouver la relation de récurrence par la démarche (q), puis (e), puis (q), à savoir :

$$P^{s}_{r+1} = x.P^{s+1}_{r} - q^{s}_{r+1}\, P^{s}_{r}$$

$$= x(P^{s}_{r} - \sum_{r-d}^{r-1} e^{s}_{r,i}\, P^{s+1}_{i}) - q^{s}_{r+1}\, P^{s}_{r}$$

$$= (x-q^{s}_{r+1})P^{s}_{r} - \sum_{r-d}^{r-1} e^{s}_{r,i}(P^{s}_{i+1} + q^{s}_{i+1}\, P^{s}_{i})$$

$$= (x-q^{s}_{r+1}-e^{s}_{r,r-1})P^{s}_{r} - \sum_{r-d+1}^{r-1} (e^{s}_{r,i}\, q^{s}_{i+1}+e^{s}_{r,i-1})P^{s}_{i} - e^{s}_{r,r-d}\, q^{s}_{r-d+1}\, P^{s}_{r-d}\,.$$

Réécrivant cette relation à l'indice s+1, et identifiant avec la première relation trouvée, on trouve les relations de récurrence cherchées. ■

Dans le cas d = 1, on a seulement les relations QD1 et QD3 qui sont l'algorithme QD scalaire de Rutihauser.

Soit $E^{s}_{r} = (e^{s}_{r,i})$ $i = r-d,\ldots,r-1$. Les quantités E^{s}_{r} et q^{s}_{r} peuvent être disposées dans un tableau :

$$
\begin{array}{ccccc}
q_{r-1}^{s} & & q_{r}^{s-1} & & \\
 & E_{r-1}^{s} & & E_{r}^{s-1} & \\
q_{r-1}^{s+1} & & q_{r}^{s} & & q_{r+1}^{s-1} \\
 & E_{r-1}^{s+1} & & E_{r}^{s} & \\
q_{r-1}^{s+2} & & q_{r}^{s+1} & &
\end{array}
\quad .
$$

L'algorithme n'est pas réellement en losange, car le calcul de E_r^s ne nécessite pas la connaissance de $q_{r+1}^{s-1}\ q_r^s\ E_r^{s-1}$, mais de $q_{r+1}^{s-1}, q_{r-d+1}^{s}, \ldots, q_{r+1}^{s}, E_r^{s-1}$, si on progresse selon s. De même si l'on progresse selon r, le calcul de E_r^s nécessite non pas $q_r^s\ q_r^{s+1}\ E_{r-1}^{s+1}$, mais $q_r^s, q_{r-d+1}^{s+1}, \ldots, q_r^{s+1}, E_{r-1}^{s}, E_{r-1}^{s+1}$.

Cependant, le calcul progresse à peu près comme dans le cas scalaire :

- si les colonnes sont connues jusqu'à l'indice r, q_{r+1}^s est obtenu par QD3, puis E_{r+1}^s par QD2 et QD1.

- si les diagonales sont connues jusqu'à l'indice s, alors on peut obtenir la diagonale suivante.

- si on a une diagonale d'indice s et une colonne E_{k+d}^*, alors on obtient $q_k^{s+1}, \ldots, q_{k+d}^{s+1}$ par QD3 et QD2, puis q_{k+d+1}^{s+1} (QD1) et E_{k+d+1}^{s+1} (QD3 et QD2), $q_{k+d+2}^{s+2}, \ldots$, c'est-à-dire la diagonale d'indice $s+1$.

Nous précisons maintenant les conditions initiales de l'algorithme. Les relations (q) et (e) s'écrivent :

$$p_{r+1}^s = x\, p_r^{s+1} - q_{r+1}^s\, p_r^s \qquad r \geqslant 0,\ s \geqslant 0$$

$$p_r^{s+1} = p_r^s - \sum_{r-d}^{r-1} e_{r,i}^s\, p_i^{s+1} \qquad r \geqslant 0,\ s \geqslant 0.$$

Comme il a été remarqué déjà $e_{r,i}^s = 0$ si $i < 0$.

D'après ce qu'on a vu sur le fonctionnement de l'algorithme, nous devons définir E_o^s et les colonnes q_k^* pour $k = 1,\ldots,d$.

$$\text{On a :} \begin{cases} E_o^s = 0 \qquad (e^s_{o,i} = 0 \ \text{ car } \ i = -d,\ldots, \\ q_1^s = c_{s+1}^1 \ / \ c_s^1 \\ q^s_{\alpha+1} = \dfrac{H^{s+1}_{\alpha+1} \, H^s_\alpha}{H^s_{\alpha+1} \, H^{s+1}_\alpha} \qquad \alpha = 0,\ldots,d-1 \end{cases}$$

Les deuxième et troisième relations sont directement issues de (q) (th. II.1).

Il faut remarquer que les déterminants H_α^s qui interviennent ont une dimension au plus égale à $d \times d$, ce qui ne peut être très grand dans la pratique. La fonctionnelle c^α intervient pour la première fois dans le calcul à la colonne q_α^* .

Théorème II.4 - Deux quelconques des relations (d), (q), (e) impliquent la troisième.

Démonstration :

(i) : (q) ∪ (e) ==> (d)

c'est la démonstration du théorème précédent.

(ii) : (d) ∪ (q) ==> (e).

Ecrivons (d) sous la forme :

$$P^s_{r+1} = (x - q^s_{r+1} - e_{r,r-1}) P^s_r - \sum_{r-d+1}^{r-1} (e^s_{ri} \, q^s_{i+1} + e^s_{r,i-1}) P^s_i - e^s_{r,r-d} \, q^s_{r-d+1} \, P^s_{r-d}$$

$$P^s_{r+1} = x \, P^{s+1}_r - q^s_{r+1} \, P^s_r \, .$$

Par soustraction, on obtient :

$$x\, P_r^{s+1} = x\, P_r^s - \sum_{r-d}^{r-1} e_{ri}^s (P_{i+1}^s + q_{i+1}^s\, P_i^s)$$

$$= x\left[P_r^s - \sum_{r-d}^{r-1} e_{ri}^s\, P_i^{s+1}\right]$$

C'est la relation (e).

(iii) : (d) $\cup$ (e) ==> (q).

Prenons (d) sous la 1ère forme obtenue au théorème précédent.

$$P_{r+1}^{s+1} = x\, P_r^{s+1} - q_{r+1}^s (P_r^{s+1} + \sum_{r-d}^{r-1} e_{r,i}^s\, P_i^{s+1}) - \sum_{r-d+1}^{r} e_{r+1,i}^s\, P_i^{s+1}$$

$$= x\, P_r^{s+1} - q_{r+1}^s\, P_r^s + (P_{r+1}^{s+1} - P_{r+1}^s)$$

$$\Longrightarrow \quad P_{r+1}^s = x\, P_r^{s+1} - q_{r+1}^s\, P_r^s .$$

III - EXTENSION DU THEOREME DE SHOHAT-FAVARD AUX POLYNOMES VECTORIELLEMENT ORTHOGONAUX.

Nous savons (th. de Shohat-Favard, [10], [25]) que si une famille de polynômes P_n unitaires, de degré n vérifie une relation de récurrence à trois termes :

$$P_{n+1} = (x - \beta_n)P_n - \lambda_n\, P_{n-1}$$

avec tous les λ_n non nuls, alors il existe une fonctionnelle linéaire c unique (à multiplication par un scalaire près) telle que les P_n soient orthogonaux relativement à c, c'est-à-dire vérifient

$$c(P_n\, P_k) = \alpha_n\, \delta_{nk},\ \alpha_n \neq 0.$$

Nous étudions ici la connexion entre relation d'orthogonalité vectorielle et relation de récurrence :

Les polynômes P_r^s ont été obtenus à partir des relations d'orthogonalité vectorielle (R) à partir de la fonctionnelle vectorielle Γ ou des d fonctionnelles scalaires c^α, $\alpha = 1,\ldots,d$, sous l'hypothèse $H_r^s \neq 0$ $(r \geq 0,\ s \geq 0)$

$$(R)\quad \begin{cases} c^\alpha(x^i.P^s_{nd+k}(x)) = 0 & i = s,\ldots,s+n-1, \quad \alpha = 1,\ldots,d \\ c^\alpha(x^{s+n}.P^s_{nd+k}(x)) = 0 & \alpha = 1,\ldots k. \end{cases}$$

Ces polynômes vérifient une relation de récurrence (d) à d+2 termes, pour tout r et s, et cette relation est de "longueur maximum" c'est-à-dire

$$P_{r+1}(x) = (x-\beta_r)P_r(x) - \sum_{i=1}^{d} \gamma_\mu^r\, P_{r-\mu}(x)$$
$$\gamma_d^r \neq 0 \qquad r \geq d.$$

Si r est inférieur à d, la relation existe encore et le dernier terme est non nul c'est-à-dire $\gamma_r^r \neq 0$.

Nous allons montrer maintenant qu'à partir d'une famille $(P_r)_{r\geq 0}$ vérifiant une relation (d) de longueur maximum, il est possible de construire un tableau $(P_r^s)_{r\geq 0, s\geq 0}$ et d fonctionnelles linéaires $c^1,\ldots,c^d$ telles que les relations (R) soient satisfaites.

<u>Théorème</u> III.1 - Soit $(P_r)_{r\geq 0}$ une famille (d) de longueur maximum. Il existe $(P_r^s)_r$ $r \geq 0$, $s \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} P_r^0 = P_r & r \geq 0 \\ (P_r^s)_{r\geq 0} & \text{est une famille (d) (pour chaque } s,\ s \geq 0) \\ (P_r^s)_{r\geq 0} \text{ et } (P_r^{s+1})_{r\geq 0} & \text{sont liés par l'algorithme QD.} \end{cases}$$

Théorème III.2 - Sous la même hypothèse, il existe d fonctionnelles linéaires $c^1,\ldots,c^d$ de l'espace des séries formelles $\mathbb{C}[[X]]$ dans $\mathbb{C}$ telles que les relations (R) soient satisfaites.

c^α est uniquement déterminée par les constantes $c^\alpha_0,\ldots,c^\alpha_{\alpha-1}$.

L'espace des fonctionnelles $\Gamma = (c^1,\ldots,c^d)$ est de dimension (d !).

Démonstration du théorème III.1 :

1ère étape : Construction de q^0_r et $E^0_r = (e^0_{r,r-1},\ldots,e^0_{r,r-d})$.

L'indice supérieur zéro est omis dans cette partie.

$$P_{r+1}(x) = (x-\beta_{r+1})P_r(x) - \sum_{r-d}^{r-1} \gamma^r_\mu P_{r-\mu}(x) \qquad r \geq 0,\ \gamma_\mu = 0 \text{ si } r-\mu < 0.$$

(1) $\beta_{r+1} = q_{r+1} + e_{r,r-1}$

(2) $\gamma^r = e_{r,\mu-1} + e_{r\mu}\, q_{\mu+1} \qquad \mu = r-d+1,\ldots,r-1$

(3) $\gamma^r_{r-d} = e_{r,r-d}\, q_{r+1-d}$.

On raisonne par récurrence : si $P_{r+1},q_1,\ldots,q_r$ sont connus, on obtient $e_{r,r-d}$ par (3) (car $q_{r+1-d} \neq 0$ sinon γ^r_{r-d} serait nul), $e_{r\mu}$ pour $\mu = r-d+1,\ldots,r-1$, par (2) et q_{r+1} par (1). En particulier, les q_i sont non nuls.

Pour les conditions initiales, on a :

$$P_0(x) = 1$$

$r = 0$ $\quad P_1(x) = (x-\beta_1).P_0(x) \qquad q_1 = \beta_1$

$r = 1$ $\quad P_2(x) = (x-\beta_2).P_1(x) - \gamma^1_1.P_0(x) \begin{cases} q_2 + e_{10} = \beta_2 \\ q_1\, e_{10} = \gamma^1_1 \neq 0 \end{cases}$

On obtient donc q_1 puis, e_{10} puis q_2.

Les suites $(q^0_r)_X$ et $(E^0_r)_r$ sont donc entièrement définies pour $r \geq 1$ à partir de la suite P_r, et de la relation (d) vérifie par $(P_r)_{r\geq 0}$.

2ème étape : Construction de $(P_r^1)_{r\geq 0}$.

On montre que $P_{r+1} + q_{r+1} P_r$ est divisible par x :

$$P_{r+1}(x) + q_{r+1} P_r(x) = x P_r(x) - \sum_{r-d}^{r-1} (P_{\mu+1}(x) + q_{\mu+1} P_\mu(x)) e_{r\mu}$$

$$P_1(x) + q_1 P_0(x) = x P_0(x)$$

donc, pour tout μ, $P_{\mu+1} + q_{\mu+1} P_\mu$ est divisible par x et P_r^1 est défini par :

$$P_{r+1}(x) + q_{r+1} P_r(x) = x P_r^1(x) \qquad r \geq 0$$

en particulier $P_0^1(x) = P_0(x) = 1$.

Montrons que la famille $(P_r^1)_r$ est une famille (d).

(P_r) vérifie (d) et (P_r, P_r^1) vérifient (q), donc (e) (th. II.4)

$$P_{r+1}^1(x) = P_{r+1}(x) - \sum_{r-d+1}^{r} e_{r+1,i} P_i^1(x).$$

La double famille P_r, P_r^1 vérifie (q) et (e), donc (d) :

$$P_{r+1}^1(x) = (x - q_{r+1} - e_{r,r-1}) P_r - \sum_{r-d}^{r-1} (\ldots) P_i(x) - e_{r,r-d}\, q_{r+1}\, P_{r-d}(x) - \sum_{r-d+1}^{r-1} e_{r+1,\mu} P_\mu^1(x)$$

$$= (x - q_{r+1})(P_r^1(x) + \sum_{r-d}^{r-1} e_{r\mu} P_\mu^1(x)) - \sum_{r-d}^{r-1} e_{r\mu} (P_{\mu+1}(x) + q_{\mu+1} P_\mu(x)) - \sum_{r-d+1}^{r-1} e_{r+1,\mu} P_\mu^1(x)$$

$$= (x - q_{r+1} - e_{r+1,r}) P_r^1(x) - \sum_{r-d+1}^{r-1} (e_{r\mu}\, q_{r+1} + e_{r+1,\mu}) P_\mu^1(x) - e_{r,r-d}\, q_{r+1}\, P_{r-d}^1(x).$$

A partir de $(P_r^1)_{r\geq 0}$, on peut comme précédemment construire $(q_r^1)_r$ et $(E_r^1)_r$ par l'algorithme Q.D, puis $(P_r^2)_{r\geq 0}$ et ainsi de suite. ■

Démonstration du théorème III.2 :

1ère étape : Définition des c^α, $\alpha = 1, \ldots, d$.

$$c^1(P_r) = 0 \qquad r \geq 1$$

$$\vdots$$

$$c^\alpha(P_r) = 0 \qquad r \geq \alpha$$

$$\vdots$$

$$c^d(P_r) = 0 \qquad r \geq d$$

Soit $P_r(x) = x^r + \sum_0^{r-1} a_{ri}\, x^i$

$$c^\alpha(P_r) = c^\alpha_r + \sum_0^{r-1} a_{ri}\, c^\alpha_i$$

$c^\alpha(P_r) = 0$ définit c^α_r à partir de $c^\alpha_0,\ldots,c^\alpha_{\alpha-1}$.

On veut que $c^\alpha(P_r) = 0$, $\alpha \geq r$, donc tous les c^α_i sont uniquement déterminés à partir des α constantes arbitraires $c^\alpha_0,\ldots,c^\alpha_{\alpha-1}$. En particulier, c^1 est déterminée à partir de c^1_0. Elle est unique à la multiplication par une constante près.

2ème étape : Nous avons à démontrer que (P_r) vérifie les relations (R)

$$\begin{cases} c^\alpha(x^i.P_{nd+k}(x)) = 0 & i = 0,\ldots,n-1, \quad \alpha = 1,\ldots,d \\ c^\alpha(x^n.P_{nd+k}(x)) = 0 & \alpha = 1,\ldots,k. \end{cases}$$

On a, d'après (d)

$$x\, P_r(x) = P_{r+1}(x) + \beta_{r+1}\, P_r(x) - \sum_{r-d}^{r-1} \gamma_\mu\, P_{r-\mu}(x)$$

donc $\quad c^\alpha(P_{r-d}(x)) = 0 \implies c^\alpha(x\, P_r(x)) = 0$

donc $\quad c^\alpha(x\, P_r(x)) = 0$ si $r \geq d+\alpha$

de même si $c^\alpha(P_{r-id}(x)) = 0 \implies c^\alpha(x^i P_r(x)) = 0$

donc $\quad c^\alpha(x^i.P_r(x)) = 0$ si $r \geq id+\alpha$.

3ème étape : Il reste à démontrer que les relations (R) sont satisfaites par tous les polynômes P_r^s .

$$x\, P_r^{s+1}(x) = P_{r+1}^s(x) + q_{r+1}^s\, P_r^s(x)$$

$$c^\alpha(x^i.P_r^{s+1}(x)) = c^\alpha(x^{i-1}.P_{r+1}^s(x)) + q_{r+1}^s\, c^\alpha(x^{i-1}.P_r^s(x))$$

si $i-1 = s,\ldots,s+n-1$ et $\alpha = 1,\ldots,d$,

ou si $i = s+1,\ldots,s+n$ et $\alpha = 1,\ldots,d$

alors $c^\alpha(x^i\, P_r^{s+1}(x)) = 0$

si $i-1 = s+n$ ou $i = s+n+1$ et $\alpha = 1,\ldots,k$

alors de même $c^\alpha(x^i.P_r^{s+1}(x)) = 0$.

Donc les polynômes P_r^s satisfont les relations (R), relativement aux fonctionnelles c^α, $\alpha = 1,\ldots,d$.

La conclusion sur la dimension de l'espace des fonctionnelles Γ solutions, se déduit immédiatement du fait que c^α est déterminée par les α constantes $c_0^\alpha,\ldots,c_{\alpha-1}^\alpha$. ■

Le fait qu'une fonctionnelle linéaire admette une famille de polynômes orthogonaux est caractérisé par la non nullité des déterminants de Hankel. Ce résultat s'étend aux fonctionnelles vectorielles.

Théorème III.3 - Soit $(P_r)_{r\geq 0}$ une famille vérifiant une relation de récurrence (d) :

$$P_{r+1} = (x-\beta_r)P_r - \sum_{\mu=1}^{d} \gamma_\mu^r\, P_{r-\mu}(x).$$

La fonctionnelle Γ du théorème III.2 est supposée telle que $H_1^0,\ldots,H_d^0 \neq 0$. Alors les déterminants H_r^0 (ou H_r) sont non nuls si et seulement si

$$\gamma_d^r \neq 0 \quad r \geq d.$$

Démonstration : D'après le calcul fait en I.3, et en supposant $H_i \neq 0$, $i = 1,\ldots,r$

$$\gamma_d^r \quad c^{k+1}(x^{n-1}.P_{r-d}) = c^{k+1}(x^n.P_r), \quad r = nd+k, \quad k = 0,\ldots,d-1.$$

Si $H_r \neq 0$ et $H_{r-d} \neq 0$, P_{r-d} et P_r ont une expression comme rapport de déterminants :

$$(33) \quad P_r(x) = H_r^o(x)/H_r \qquad H_r^o(x) = \begin{vmatrix} \Gamma_o & \cdots & \Gamma_r \\ \vdots & & \\ \Gamma_{n-1} & \cdots & \Gamma_{r+n-1} \\ \Gamma_n^{(k)} & \cdots & \Gamma_{r+n}^{(k)} \\ 1 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

et $c^{k+1}(x^n P_r) = H_{r+1} / H_r$

donc $\gamma_d^r . H_{r-d+1} / H_{r-d} = H_{r+1} / H_r$.

Montrons maintenant que si $\gamma_d^r \neq 0$ pour tout r, si $H_1,\ldots,H_d \neq 0$, alors $H_r \neq 0$. La démonstration se fait par récurrence et démarre à $r = d$:

$$\left.\begin{array}{l} H_1,\ldots,H_d \neq 0 \\ \gamma_d^d \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P_1,\ldots,P_d \text{ ont l'expression (33) et donc} \\ H_{d+1} \neq 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Donc } H_1,\ldots,H_d H_{d+1} \neq 0 \\ \gamma_1^{d+1} \neq 0 \end{array}\right\} \quad P_{d+1} \text{ a l'expression (33) et } H_{d+2} \neq 0.$$

De même

$$\left.\begin{array}{l} H_1,\ldots,H_r \neq 0 \\ \gamma^r_{r-d} \neq 0 \end{array}\right\} \; P_r \text{ a l'expression (33) et } H_{r+1} \neq 0.$$

Et finalement si $H_1,\ldots,H_d \neq 0$ et $\gamma^r_{r-d} \neq 0$ pour tout $r \geq d$, tous les déterminants de Hankel généralisés H_r sont non nuls.

Inversement, si $\gamma^r_{r-d} = 0$, soit $H_{r+1} = 0$, soit les polynômes P_r ou P_{r-d} ne s'expriment pas par l'expression (33) c'est-à-dire H_r ou H_{r-d} est nul, donc les H_i ne sont pas tous non nuls.

Remarque :

L'hypothèse $H_1,\ldots,H_d$ non nulle définit l'indépendance nécessaire aux fonctionnelles $c^1,\ldots,c^d$.

Ce résultat généralise celui associé aux récurrences à 3 termes

$$P_{n+1} = (x-\beta_n)P_n - \lambda_n P_{n-1} .$$

$\lambda_n \neq 0$, $n \geq 1$ est équivalent à $H_n \neq 0$, $n \geq 1$, ou la fonctionnelle par rapport à laquelle les P_n sont orthogonaux est quasidéfinie.

IV - APPLICATION AUX FAMILLES DE POLYNOMES $\frac{1}{d}$ ORTHOGONAUX.

Une famille de polynômes P_r est dite $\frac{1}{d}$ orthogonale relativement à une forme linéaire L si :

$$L(P_i\, P_r) = 0 \qquad r \geq id+1 \qquad i \geq 0.$$

La famille P_r est strictement $\frac{1}{d}$ orthogonale si

$$L(P_n.P_{nd}) \neq 0 \quad \text{ou} \quad L(x^n.P_{nd}) \neq 0.$$

La famille est régulièrement $\frac{1}{d}$ orthogonale si

$$\det\left[L(P_\nu.P_\mu)\right]_{\nu,\mu=0}^{n} \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Si $d = 1$, les familles strictement et régulièrement $\frac{1}{d}$ orthogonales sont orthogonales au sens simple et $L(P_r^2) \neq 0$, c'est-à-dire que L est quasi-définie (ou non dégénérée ou admissible...).

On sait [19] que si une famille (P_r) vérifie la relation de récurrence (d), elle est $\frac{1}{d}$ orthogonale.

Nous nous intéressons ici au problème inverse, toute suite $\frac{1}{d}$ orthogonale ne vérifiant pas une relation de récurrence (d).

Théorème IV.1 - Une forme L admissible étant donnée, il existe une infinité de suites $\frac{1}{d}$ orthogonales (régulièrement ou strictement), qui vérifient une relation de récurrence à $(d+2)$ termes de type (d).

Démonstration : Nous nous limitons à considérer des familles de polynômes P_r, unitaires, de degré r, vérifiant $P_0 = 1$.

La suite P_r est construite par récurrence, donc nous supposons connus $P_0,\ldots,P_r$. On cherche P_{r+1} $(r = nd+k,\ 0 \leq k < d)$.

On développe sur la base $x P_r, P_r, \ldots, P_0$:

$$P_{r+1}(x) = x.P_r + \sum_0^r \alpha_i^r P_i(x) \qquad (\alpha_i^r = \alpha_i).$$

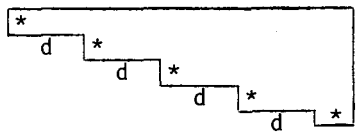
(P_i) est $\frac{1}{d}$ orthogonale donc

$$L(x^\beta P_{r+1}) = 0, \quad \beta = 0,\ldots,n.$$

On a donc le système (E) de n équations à $r+1$ inconnues, suivant :

$$(E)\quad \begin{cases} L(x^{n+1} P_r) + \sum_{0}^{nd} \alpha_i L(x^n P_i) = 0 \\ L(x^n P_r) + \sum_{0}^{(n-1)d} \alpha_i L(x^{n-1} P_i) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{0}^{d} \alpha_i L(x P_i) = 0 \\ \alpha_0 L(P_0) = 0 . \end{cases}$$

Ce système a la forme en escalier suivante :



n+1 équations
$\alpha_0, \ldots, \alpha_{nd}$ (nd+1) inconnues.

Supposons que les suites (P_r) considérées sont strictement $\frac{1}{d}$ orthogonales (hypothèse prise pour simplifier, qui n'est pas fondamentale, comme on le montre à la fin) c'est-à-dire

$$L(x^k P_{kd}) \neq 0.$$

Alors les termes * du système sont non nuls et le système E est de rang n+1. Il faut donc pour définir P_{r+1} choisir r-n constantes :

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{d-1}\ \alpha_{d+1} \cdots \alpha_{(n-1)d-1}\ \alpha_{(n-1)d+1} \cdots \alpha_{nd-1}\ \alpha_{nd+1} \cdots \alpha_r$$

définissent, par (E), les n restantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_{(n-1)d}, \alpha_{nd}$.

Si on veut que (d) soit vérifiée, il suffit d'ajouter les conditions :

$$\alpha_0 = \cdots = \alpha_{(n-1)d+k-1} = 0.$$

Le système (E) utilisé de bas en haut donne :

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{d-1} = 0 \implies \alpha_d = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{(n-2)d-1} = 0 \implies \alpha_{(n-2)d} = 0.$$

Il reste 2 équations

$$\begin{cases} \sum_{(n-2)d+1}^{(n-1)d} \alpha_i \, L(x^{n-1} P_i) = L(x^n P_r) \\ \sum_{(n-2)d+1}^{nd} \alpha_i \, L(x^n P_i) = L(x^{n+1} P_r) . \end{cases}$$

1er CAS : $r = nd$, les 2 seconds membres sont non nuls (au moins $L(x^n P_{nd})$).

$\alpha_{(n-2)d+1} = \ldots = \alpha_{(n-1)d-1} = 0$ impliquent :

$$\begin{cases} \alpha_{(n-1)d} \, L(x^{n-1} P_{(n-1)d}) = L(x^n P_{nd}) \\ \alpha_{(n-1)d} \, L(x^n P_{nd}) + \ldots + \alpha_{nd} \, L(x^n P_{nd}) = L(x^{n+1} P_r). \end{cases}$$

$\alpha_{(n-1)d}$ est défini de manière unique, non nul.

P_{nd+1} dépend de (d) paramètres liés par la deuxième équation, soit (d-1) indépendants

$$P_{nd+1} = x P_{nd} + \sum_{(n-1)d}^{nd} \alpha_i P_i.$$

2ème CAS : $r = nd+k$, $k = 1,\ldots,d-1$.

$L(x^n P_r) = 0$ et $\alpha_{(n-2)d+1} = \ldots = \alpha_{(n-1)d+1} = 0 \implies \alpha_{(n-1)d} = 0.$

Il reste une équation. Si de plus $\alpha_{(n-1)d+1} = \ldots = \alpha_{(n-1)d+k-1} = 0$:

$$\sum_{r-d}^{nd} \alpha_i \, L(x^n P_i) = L(x^{n+1} P_r)$$

et finalement : $P_{nd+k+1} = x P_{nd+k} + \sum_{r-d}^{r} \alpha_i P_i$.

P_{nd+k+1} dépend de $(d+1)$ paramètres liés par une équation, soit d indépendants. Il y a donc une infinité de cas possibles et il existe une infinité de familles (P_r) répondant à la question.

Si les suites cherchées ne sont pas strictement $\frac{1}{d}$ orthogonales (c'est-à-dire $L(x^k P_{kd})$ peut être nul) le système est cependant de rang n si les suites sont $\frac{1}{d}$ orthogonales et pas $\frac{1}{d+1}$ orthogonales et le résultat est identique : il y a une infinité de solutions.

Si $r \leq d$, les conditions d'orthogonalité se réduisent à :

$r = 0,\ldots,d \qquad c(P_r) = 0$

c'est-à-dire une équation :

P_1 est uniquement déterminé ;

P_k dépend de $(k-1)$ constantes arbitraires.

La condition (d) est automatiquement vérifiée comme décomposition de P_{k+1} sur la base $x P_k P_k \ldots P_o$, cette décomposition ayant moins de d+1 termes.

Il y a donc une infinité de familles de polynômes $\frac{1}{d}$ orthogonales qui vérifient la relation de récurrence (d). ■

Si on a une infinité de familles associées à L, on peut essayer dans ces familles de faire un choix canonique, qui correspondra à annuler le plus grand nombre possible de termes de la relation (d). On étudie

d'abord le cas des suites de polynômes strictement $\frac{1}{d}$ orthogonales :

$$\begin{cases} P_{r+1} = x\, P_r + \sum_{r-d}^{r} \alpha_i^r\, P_i \\ L(x^n\, P_{nd}) \neq 0, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Les α_i^r sont assujetis à vérifier le système (E') de 2 équations :

$$(E') \quad \begin{cases} L(x^n\, P_{r+1}) = L(x^{n+1}\, P_r) + \sum_{r-d}^{nd} \alpha_i^r\, L(x^n\, P_i) = 0 \\ L(x^{n-1}\, P_{r+1}) = L(x^n\, P_r) + \alpha_{(n-1)d}^r\, L(x^{n-1}\, P_{(n-1)d}) = 0 \end{cases}$$

si $r \neq nd \quad \alpha_{(n-1)d}^r = 0$

si $r = nd \quad \alpha_{(n-1)d}^{nd} = -L(x^n\, P_{nd})/L(x^{n-1}\, P_{(n-1)d})$.

Dans la première équation, on a $L(x^n\, P_{nd}) \neq 0$, donc le nombre maximum de α_i^r nuls est donné par la solution :

$$\begin{cases} \alpha_{nd}^r = -\, L(x^{n+1}\, P_r)/L(x^n\, P_{nd}) & r \geq nd \\ \alpha_i^r = 0 & r \neq nd \\ \alpha_{(n-1)d}^{nd} = -\, L(x^n\, P_{nd})/L(x^{n-1}\, P_{(n-1)d}) \end{cases}$$

d'où le résultat :

il existe une suite strictement $(\frac{1}{d})$ orthogonale unique, canoniquement associée à L, définie par les relations suivantes : $P_0^* = 1$

$$\begin{cases} P_{nd+k+1}^* = x\, P_{nd+k}^* - \alpha_{nd}^{nd+k}\, P_{nd}^* \qquad k = 1,\ldots,d-1 \\ P_{nd+1}^* = (x - \alpha_{nd}^{nd}) P_{nd}^* - \alpha_{(n-1)d}^{nd}\, P_{(n-1)d}^* \end{cases}$$

$$\alpha^{nd}_{(n-1)d} = \frac{L(x^n P^*_{nd})}{L(x^{n-1} P^*_{(n-1)d})} \quad , \quad \alpha^{nd}_{nd} = \frac{L(x^{n-1}P^*_{(n-1)d}).L(x^{n+1}P^*_{nd}) - L(x^nP^*_{nd}).\ (x^nP^*_{(n-1)d})}{L(x^{n-1}\ P^*_{(n-1)d}).L(x^n\ P^*_{nd})}$$

$$\alpha^{nd+k}_{nd} = \frac{L(x^{n+1}\ P^*_{nd+k})}{L(x^n\ P^*_{nd})} \quad .$$

Si la suite (P_n) cherchée n'est pas strictement $\frac{1}{d}$ orthogonale, on sait que si P_r est $\frac{1}{d}$ orthogonale et n'est pas $\frac{1}{d+1}$ orthogonale, il existe pour tout n, i_n entre $(n-1)d$ et $nd-1$ tel que $L(x^n P_{i_n}) \neq 0$.

On peut donc définir une suite $(\frac{1}{d})$ orthogonale associée à L :

$$\begin{cases} P_{r+1} = x P_r - \alpha^r_{i_n} P_{i_n} - \alpha^r_{r-d} P_{r-d} \\ \alpha^r_{r-d} = 0 \quad \text{si} \quad r \neq nd \quad \text{ou si} \quad r = nd \quad \text{et} \quad L(x^n P_{nd}) = 0 \\ \alpha^r_{i_n} = \dfrac{L(x^{n+1} P_r)}{L(x^{i_n} P_{i_n})} \quad . \end{cases}$$

Le choix n'est pas canonique car il peut y avoir plusieurs indices i_n possibles.

La suite P^*_r ainsi associée canoniquement à L est strictement $\frac{1}{d}$ orthogonale mais "dégénérée" en ce sens que la relation de récurrence a une longueur variable de 2 à d+2. Ce qui précède a montré l'intérêt de relation de récurrence de longueur fixe d+2. Aussi on pourra considérer la suite P^{**}_r strictement $\frac{1}{d}$ orthogonale définie par :

$$P^{**}_o = 1$$

$$P^{**}_{nd+k+1} = x P^{**}_{nd+k} - \alpha^{nd+k}_{nd} P^{**}_{nd} - \alpha^{nd+k}_{(n-1)d+k} P^{**}_{(n-1)d+k} \qquad k = 0,\ldots,k-1$$

$$\alpha^{nd}_{(n-1)d} = \frac{L(x^n P^{**}_{nd})}{L(x^{n-1}\ P^{**}_{(n-1)d})} \qquad \alpha^{nd}_{nd} = \frac{L(x^{n-1}P^{**}_{(n-1)d}).L(x^{n+1}P^{**}_{nd}) - L(x^nP^{**}_{nd})\ (x^nP^{**}_{(n-1)d})}{L(x^{n-1}\ P^{**}_{(n-1)d}).L(x^n\ P^{**}_{nd})}$$

$$\alpha^{nd+k}_{(n-1)d+k} = 1 \qquad \alpha^{nd+k}_{nd} = \frac{L(x^{n+1} P^{**}_{nd+k}) - L(x^n P^{**}_{(n-1)d+k})}{L(x^n P^{**}_{nd})}$$

Cette suite est strictement $\frac{1}{d}$ orthogonale, et "de longueur fixe".

(P^*_r) est canoniquement associée à L : c'est une suite $\frac{1}{d}$ orthogonale ayant le minimum de termes non nuls dans la relation de récurrence (d).

$(P^{**}_r$ est canoniquement associée à L : c'est une suite $\frac{1}{d}$ orthogonale dont la relation de récurrence a le minimum de termes non nuls et telle que $\alpha^r_{r-d} \neq 0$ pour tout r.

Parallèlement à l'étude des polynômes orthogonaux définis par leur relation de récurrence [7], on peut démontrer un certain nombre de résultats partiels pour les suites $\frac{1}{d}$ orthogonales définis par leur relation de récurrence

$$P_{r+1} = x P_r - \sum_{r-d}^{r} \alpha^r_i P_i .$$

Proposition IV.2 - Soit $\mu_0 = L(1)$ et $\mu_0 > 0$:

$L(x^n P_{nd}) > 0 \iff \alpha^{nd}_{(n-1)d} > 0 \qquad n \geq 1$

$L(x^n P_{nd}) \neq 0 \iff \alpha^{nd}_{(n-1)d} \neq 0 \qquad n \geq 0.$

Démonstration :

On a $\alpha^{nd}_{(n-1)d} = \frac{L(x^n P_{nd})}{L(x^{n-1} P_{(n-1)d})}$

$L(x^n P_{nd}) = \alpha^{nd}_{(n-1)d} \cdot \ \ldots \ \cdot \alpha^d_0 . \mu_0$

Proposition IV.3 - Si il existe une suite (P_r) telle que les polynômes P_r aient même parité que leur indice r, alors L est symétrique, c'est-à-dire $\mu_{2n+1} = L(x^{2n+1}) = 0$.

Si les polynômes ont même parité que leur indice, alors

$$\alpha^r_{r-2i} = 0, \quad 2i \in [\![0,d]\!], \quad r \geq 0.$$

Si L est symétrique, toute famille (P_r) n'est pas symétrique (c'est-à-dire P_r n'a pas même parité que son indice), mais les familles P^*_r et P^{**}_r le sont.

Démonstration : Supposons qu'il existe une famille (P_r) symétrique.

Montrons d'abord que $\alpha^r_{r-2i} = 0$.

Soit $Q_r(x) = (-1)^r P_r(-x) = P_r(x)$

$$Q_{r+1}(x) = x\, Q_r(x) - (-1)^{r+1} \sum_{r-d}^{r} \alpha^r_i (-1)^i Q_i(x)$$

$$P_{r+1}(x) = (-1)^{r+1} x\, P_r(x) - \sum_{r-d}^{r} \alpha^r_i (-1)^i P_i(x)$$

$$= x\, P_r(x) - \sum_{r-d}^{r} \alpha^r_i\, P_i(x)$$

$$\Longrightarrow \sum_{r_i=0}^{d} \alpha^r_{r-2i}\, P_i(x) = 0 \quad \Longrightarrow \alpha^r_{r-2i} = 0 \quad 2i \in [\![0,d]\!].$$

$$\begin{cases} P_{2k+1} = x^{2k+1} + \sum_{h=0}^{k-1} \lambda_{2h+1}\, x^{2h+1} \\ L(P_{2k+1}) = 0 \end{cases}$$

$$L(P_1) = L(x) = \mu_1 = 0.$$

Et, par récurrence, on obtient $\mu_{2k+1} = 0$.

Donc si une famille est symétrique, L est symétrique.

Montrons que la réciproque n'est pas vraie :

$P_o = 1$

$P_1 = x - \alpha_o^o P_o \qquad L(P_1) = \mu_1 - \alpha_o^o \mu_o = 0$

$\mu_1 = 0$ $\Bigg\} \Longrightarrow \alpha_o^o = 0$

P_1 est impair et $P_2 = x P_1 - \alpha_o^1 P_o$ est pair.

$P_3 = x P_2 - \alpha_2^2 P_2 - \alpha_1^2 P_1 - \alpha_o^2 P_o$

$L(P_3) = L(x P_2) - \alpha_2^2 L(P_2) - \alpha_1^2 L(P_1) - \alpha_o^2 L(P_o).$

$x P_2$ est impair donc $L(P_3) = - \alpha_o^2 L(P_o) = 0$ et $\alpha_o^2 = 0$

$P_3 = (x - \alpha_2^2)P_2 - \alpha_1^2 P_1$

$= x^3 - \alpha_2^2 x^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_o^1)x + \alpha_2^2 \alpha_o^1$

$$\begin{cases} L(P_3) = 0 = \alpha_2^2(\mu_2 - \alpha_o^1\mu_o) \\ L(P_2) = \mu_2 - \alpha_o^1\mu_o = 0 \end{cases}$$

donc on peut avoir $\alpha_2^2 \neq 0$ et donc P_3 n'est pas impair.

Cependant les suites canoniquement associées à L, P_r^* et P_r^{**} sont symétriques :

Montrons que P_r^* est symétrique :

$r \leq d, \qquad P_{k+1}^* = x P_k^* - \alpha_o^k P_o^*$

$= x^{k+1} - \alpha_o^1 x^k \ldots - \alpha_o^k$

$L(P_{k+1}^*) = 0 \Longrightarrow \mu_{k+1} = \alpha_o^1\mu_k + \ldots + \alpha_o^k\mu_o$

$\mu_1 = \alpha_o^1\mu_o \qquad \alpha_o^1 = 0$

$\mu_2 = \alpha_o^2\mu_o$

$\mu_3 = \alpha_o^2\mu_1 + \alpha_o^3\mu_o$ et $\mu_1 = 0$ donc $\alpha_o^3 = 0.$

.....

On trouve $\alpha_o^{2k+1} = 0$ et P_k^* de même parité que k $(k = 1,\ldots,d)$ En particulier pour P_d^*, $L(x\, P_d^*) \neq 0$ donc P_d^* est impair et d est impair.

$$P_{d+k+1}^* = (x^{k+1} - \alpha_d^d x^k - \ldots - \alpha_d^{d+k})P_d^* - \alpha_o^d\, x^k\, P_o^*$$

$$L(x.P_{d+2k+1}^*) = -\alpha_d^d L(x^{2k+1}\, P_d^*) - \ldots - \alpha_d^{d+2k} L(x\, P_d^*) = 0$$

$$k = 0 \qquad \alpha_d^d = 0$$

$$\ldots \qquad \alpha_d^{d+2} \ldots \alpha_d^{d+2k} = 0$$

donc P_{d+2k+1}^* est pair et P_{d+2k}^* est impair. En particulier, P_{2d}^* est pair.

Supposons n impair, $P_{(n-1)d}^*$ est pair et P_{nd}^* est impair :

$$P_{nd+k+1}^* = (x^{k+1} - \alpha_{nd}^{nd}\, x^k - \ldots - \alpha_{nd}^{nd+k})P_{nd}^* - \alpha_{(n-1)d}^{nd}\, x^k\, P_{(n-1)d}^*\,.$$

Comme précédemment, on calcule $L(x^n\, P_{nd+k+1}^*)$, et on trouve

$$\alpha_{nd}^{nd+2i} = 0$$

donc P_{nd+k+1}^* a même parité que $nd+k+1$.

La démonstration est identique pour n pair.

Pour la famille P_r^{**}, on a le même résultat pour $P_o^{**},\ldots,P_d^{**}$ (et d impair). Puis la relation s'écrit

$$P_{d+2k+1}^{**} = x\, P_{d+2k}^{**} - \alpha_d^{d+2k}\, P_d^{**} - \alpha_{2k}^{d+2k}\, P_{2k}^{**}$$

$$L(x\, P_{d+2k+1}^{**}) = 0 = -\alpha_d^{d+2k} L(x\, P_d^{**}) \implies \alpha_d^{d+2k} = 0$$

P_{d+2k+1}^{**} est pair.

La démonstration se poursuit comme précédemment. ■

L'étude de la répartition des zéros conduit aux deux résultats suivants :

Proposition IV.4 - Si (P_r) est une famille $\frac{1}{d}$ orthogonale associée à L, fonctionnelle définie positive, et si $r = nd+k$, alors P_{r+1} a $n+1$ zéros d'ordre impair dans le support de L [19].

Démonstration : Cette propriété est énoncée dans [19] et se démontre comme pour les polynômes orthogonaux scalaires :

$$r \geq 0, \quad L(P_{r+1}) = 0.$$

L est définie positive donc P_r a un zéro dans le support de L. Soit $\rho(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_\nu)$, avec x_i zéro d'ordre impair de P_{r+1}, alors :

$$L(P_{r+1}(x).\rho(x)) > 0 \quad \text{et} \quad L(P_{r+1}(x).\rho(x)) = 0 \quad \text{si} \quad d^o\rho \leq n,$$

donc $$d^o\rho > n$$

c'est-à-dire P_{r+1} a au moins $(n+1)$ zéros d'ordre impair dans le support de L.

On peut, dans le cas de la famille P_r^*, préciser de plus :

Proposition IV.5 - Dans le cas de la famille P_r^*, P_{nd+k}^* et P_{nd}^* $(0 < k \leq d)$ n'ont pas de zéros communs non nuls.

Démonstration : La démonstration repose sur la forme particulière de la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_{nd+k+1}^*(x) = x\, P_{nd+k}^*(x) - \alpha_{nd}^r\, P_{nd}^*(x) & 0 < k < d \\ P_{nd+1}^*(x) = (x-\alpha_{nd}^{nd})P_{nd}^*(x) - \alpha_{(n-1)d}^{nd}\, P_{(n-1)d}^*(x). \end{cases}$$

Ceci est équivalent à la relation suivante :

$$P^*_{nd+k+1}(x) = (x^{k+1} - \alpha^{nd}_{nd}\, x^k - \ldots - \alpha^{nd+k}_{nd}) P^*_{nd}(x) - \alpha^{nd}_{(n-1)d}\, x^k\, P^*_{(n-1)d} \qquad 0 \leqslant k \leqslant d-1.$$

Si P^*_{nd} et $P^*_{(n-1)d}$ avaient un zéro commun, il serait commun à tous les P_{hd}, y compris P_o ce qui est impossible.

Si P^*_{nd} et P^*_{nd+k} $(0 < k \leqslant d)$ avaient un zéro commun non nul, il serait commun à P^*_{nd} et $P^*_{(n-1)d}$, et c'est impossible.

V - CALCUL RECURSIF DES POLYNOMES P^s_r.

Nous considérons, dans ce paragraphe, une normalisation différente des polynômes P^s_r. Nous obtenons des relations semblables à la généralisation du "M.N.A. algorithm" ([20], [2])

$$P'^s_r = (-1)^r H^s_r(x) \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \Gamma_s & \ldots\ldots & \Gamma_{s+r-1} \\ \Gamma^{(k)}_{s+n} & \ldots\ldots & \Gamma^{(k)}_{s+r+n-1} \end{vmatrix} = H^s_r(x)/H^s_r(1).$$

La normalisation est obtenue par $P'^s_r(1) = 1$, au lieu de P^s_r unitaire.

Soit, pour tout k positif, g_k la fonctionnelle suivante :

$$k = hd+\beta \quad , \quad g_k(i) = c^{\beta+1}(i+h).$$

Avec cette notation, on a :

$$\Gamma_s = (c^1_s, \ldots, c^d_s)^t = (g_o(s), \ldots, g_{d-1}(s))^t$$

$$P'^s_r = \frac{|(x), g_o(s), \ldots, g_{r-1}(s)|}{|1, g_o(s), \ldots, g_{r-1}(s)|} \quad \text{et} \quad P'^s_o = 1$$

Nous indiquons le premier terme de chaque ligne, sauf (x) qui signifie $(1,x,\ldots,x^r)$.

Théorème V.1 -

Soit : $H^s_{r-1,i} = |g_i(s),g_0(s),\ldots,g_{r-1}(s)|$

$$h^s_{r-1,i} = H^s_{r-1,i}/H^s_r(1), \qquad h^s_{-1,i} = g_i(s) \ ;$$

alors : $$P'^s_r(x) = - \frac{h^{s+1}_{r-2,r-1}.P'^s_{r-1}(x) - x\, h^s_{r-2,r-1}\, P'^{s+1}_{r-1}(x)}{\Delta_s\, h^s_{r-2,r-1}}$$

$$h^s_{r-1,i} = - \frac{h^{s+1}_{r-2,r-1}.h^s_{r-2,i} - h^s_{r-2,r-1}.h^{s+1}_{r-2,i}}{\Delta_s\, h^s_{r-2,r-1}}$$

$(\Delta_s\, \psi^s_r = \psi^{s+1}_r - \psi^s_r)$.

Démonstration : En utilisant le théorème de Sylvester pour $(-1)^r H^s_r(x)$ et pour $H^s_{r-1,i}$, on obtient :

$$(-1)^r H^s_r(x) = |(x),g_0(s),\ldots,g_{r-1}(s)| = H'^s_r(x)$$

$$H^{s+1}_{r-1}.H'^s_r(x) = H^{s+1}_r.H'^s_{r-1}(x) - x\, H^s_r.H'^{s+1}_{r-1}(x)$$

$$H^{s+1}_{r-1}.H^s_{r-1,i} = H^{s+1}_r.H^s_{r-2,i} - H^s_r.H^{s+1}_{r-2,i} \qquad i \geq r \geq 1.$$

$$P'^s_r(x) = \frac{H'^s_r(x)}{H'^s_r(1)} \ .$$

En divisant, en haut et en bas par $H^s_{r-1}(1).H^{s+1}_{r-1}(1)$, on a :

$$H^s_r = (-1)^{r-1}\, H^s_{r-2,r-1} \ , \quad h^s_{r-1,i} = H^s_{r-1,i} \ / \ H^s_r(1)$$

$$P'^s_r(x) = - \frac{h^{s+1}_{r-2,r-1}\, P'^s_{r-1}(x) + x\, h^s_{r-2,r-1}\, P'^{s+1}_{r-1}(x)}{\Delta_s\, h^s_{r-2,r-1}}$$

$$h^s_{r-1,i} = - \frac{h^{s+1}_{r-2,r-1}\, h^s_{r-2,i} + h^s_{r-2,r-1}\, h^{s+1}_{r-2,i}}{\Delta_s\, h^s_{r-2,r-1}} \qquad i \geq r \geq 1.$$

Ce résultat peut être étendu, de la manière suivante :

Théorème V.2 -

$$P'^s_{r+m}(x) = \begin{vmatrix} P'^s_r(x) & x\,P'^{s+1}_r(x) \ldots x^m P'^{s+m}_r(x) \\ h^s_{r-1,r} & h^{s+1}_{r-1,r} \cdots h^{s+m}_{r-1,r} \\ \vdots & \vdots \\ h^s_{r-1,r+m-1} & h^{s+1}_{r-1,r+m-1} \cdots h^{s+m}_{r-1,r+m-1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ h^s_{r-1,r} & \cdots & h^{s+m}_{r-1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ h^s_{r-1,r+m-1} & \cdots & h^{s+m}_{r-1,r+m-1} \end{vmatrix}$$

Les quantités $h^s_{r,i}$ vérifient les mêmes relations, en remplaçant la première ligne du numérateur par

$$(h^s_{r-1,i} \cdots h^{s+m}_{r-1,i}).$$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence sur m. Pour m = 1, c'est le résultat du théorème III.1. Le résultat est supposé vrai jusqu'à m. Pour m+1, nous appelons $N(P'^s_{r+m})$ et $D(P'^s_{r+m})$ les numérateur et le dénominateur de P'^s_{r+m}.

$$N = |(x^h P'^{s+h}_r), h^s_{r-1,r}, \ldots, h^s_{r-1,r+m}|$$

$$D = |1, h^s_{r-1,r}, \ldots, h^s_{r-1,r+m}|.$$

On applique l'identité de Sylvester à N et D :

$$N.|h^{s+1}_{r-1,r}, \ldots, h^{s+1}_{r-1,r+m-1}| = N(P'^s_{r+m}).|h^{s+1}_{r-1,r}, \ldots, h^{s+1}_{r-1,r+m}| - x.N(P'^{s+1}_{r+m}).|h^s_{r-1,r}, \ldots, h^s_{r-1,r+m}|$$

$$D.|\quad id\quad| = D(P'^s_{r+m}).|\quad id\quad| - D(P'^{s+1}_{r+m}).|\quad id$$

$$\frac{N}{D} = \frac{P'^{s}_{r+m}(x).A(s+1) - x\, P'^{s+1}_{r+m}(x).A(s)}{A(s+1) - A(s)}$$

$$A(s) = |h^{s}_{r-1,r},\ldots,h^{s}_{r-1,r+m}|/|1,h^{s}_{r-1,r},\ldots,h^{s}_{r-1,r+m-1}|$$

$$= (-1)^{m}\, h^{s}_{r+m-1,r+m}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{N}{D} = P'^{s}_{r+m+1}(x).$$

On démontre de même la formule concernant $h^{s}_{r+m,i}$ en développant

$N' = |h^{s}_{r-1,i},h^{s}_{r-1,r},\ldots,h^{s}_{r-1,r+m}|$. ■

CHAPITRE III

ALGORITHMES DE CALCUL DES APPROXIMANTS DE PADÉ VECTORIELS. APPLICATIONS AUX SUITES VECTORIELLES.

Nous développons ici deux types d'algorithme de calcul des approximants de Padé vectoriels. Le premier se déduit des définitions et expressions sous forme de rapport de déterminants, trouvées au chapitre 1. Nous utilisons des algorithmes de calcul récursif de déterminants ayant une ligne vectorielle ([4]). Le deuxième type d'algorithme est une extension de la règle de la croix, comme dans le cas scalaire, et qui se déduit des théorèmes II.1 et II.2 du chapitre II, qui définissent les quantités q_r^s et $E_r^s = (e_{ri}^s)_{i=r-d,\ldots,r-1}$ du Q.D algorithme vectoriel. Cet algorithme a été publié dans [28].

Ces algorithmes permettent tous un calcul en parallèle des diverses composantes des approximants de Padé vectoriels.

Nous développons, enfin, quelques applications types des algorithmes précédents qui sont employés pour accélérer la convergence de suites vectorielles. Le théorème essentiel est que la limite S d'une suite vectorielle S_n est exactement calculée si et seulement si les termes $(S_n - S)$ vérifient une équation aux différences.

I - ALGORITHMES BASES SUR LE CALCUL RECURSIF DE DETERMINANTS.

Les notations sont celles du chapitre 1.

$$\mathbb{F}(t) = \sum_{i\geq 0} \Gamma_i t^i \ , \quad \Gamma_i = (c_i^1,\ldots,c_i^d)^t \ .$$

$\Sigma_h(t)$ est la somme partielle de degré h de $\mathbb{F}(t)$.

On a obtenu l'expression générale de l'approximant de Padé vectoriel $[p/q]$, $(q = nd+k, \ 0 \leq k < d)$:

$$[p/q] = \begin{vmatrix} \Sigma_{p-q}t^q & \cdots & \Sigma_p \\ \Gamma_{p-q+1} & \cdots & \Gamma_{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{p-q+n} & \cdots & \Gamma_{p+n} \\ \Gamma^{(k)}_{p-q+n+1} & \cdots & \Gamma^{(k)}_{p+n+1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} t^q & \cdots & 1 \\ \Gamma_{p-q+1} & \cdots & \Gamma_{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{p-q+n} & & \Gamma_{p+n} \\ \Gamma^{(k)}_{p-q+n+1} & \cdots & \Gamma^{(k)}_{p+n+1} \end{vmatrix}$$

Dans cette expression, seule la première ligne du numérateur est vectorielle, les autres représentant d lignes scalaires, et le déterminant est considéré comme formellement développé sur la première ligne.

On met ces déterminants sous une forme telle qu'ils puissent être calculés par le "récursive projection algorithm" [4], ou RPA.

On multiplie la deuxième ligne, au numérateur et au dénominateur par t^{p+1}, la troisième par t^{p+2} ... :

$$[p/q] = \begin{vmatrix} \Sigma_{p-q}t^q & \cdots & \Sigma_p \\ \Gamma_{p-q+1}t^{p+1} & \cdots & \Gamma_{p+1}t^{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{p-q+n}t^{p+n} & \cdots & \Gamma_{p+n}t^{p+n} \\ \Gamma^{(k)}_{p-q+n+1}t^{p+n+1} & \cdots & \Gamma^{(k)}_{p+n+1}t^{p+n+1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} t^q & \cdots & 1 \\ \Gamma_{p-q+1}t^{p+1} & \cdots & \Gamma_{p+1}t^{p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma^{(k)}_{p-q+n+1}t^{p+n+1} & \cdots & \Gamma^{(k)}_{p+n+1}t^{p+n+1} \end{vmatrix}$$

On simplifie par colonne : t^q pour la première, t^{q-1} pour la seconde ..., et on note $\Delta\Sigma_i = \Gamma_{i+1} t^{i+1} = \Sigma_{i+1} - \Sigma_i$

$$[p/q] = \begin{vmatrix} \Sigma_{p-q} & \cdots\cdots & \Sigma_p \\ \Delta\Sigma_{p-q} & \cdots\cdots & \Delta\Sigma_p \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta\Sigma_{p-q+n-1} & \cdots & \Delta\Sigma_{p+n-1} \\ \Delta\Sigma^{(k)}_{p-q+n} & \cdots\cdots & \Delta\Sigma^{(k)}_{p+n} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \Delta\Sigma_{p-q} & \cdots\cdots & \Delta\Sigma_p \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta\Sigma^{(k)}_{p-q+n} & \cdots\cdots & \Delta\Sigma^{(k)}_{p+n} \end{vmatrix} .$$

On remplace chaque colonne, sauf la première, par la différence avec la précédente, et on pose $h = p-q$:

$$[p/q] = \begin{vmatrix} \Sigma_h & \Delta\Sigma_h & \cdots\cdots & \Delta\Sigma_{p-1} \\ \Delta\Sigma_h & \Delta^2\Sigma_h & \cdots\cdots & \Delta^2\Sigma_{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta\Sigma^{(k)}_{h+n} & \Delta^2\Sigma^{(k)}_{h+n} & \cdots & \Delta^2\Sigma^{(k)}_{p+n-1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Delta^2\Sigma_h & \cdots\cdots & \Delta^2\Sigma_{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2\Sigma^{(k)}_{h+n} & \cdots\cdots & \Delta^2\Sigma^{(k)}_{p+n-1} \end{vmatrix} .$$

On remplace chaque ligne à partir de la troisième pour le numérateur, à partir de la deuxième pour le dénominateur, par sa différence avec la précédente, en utilisant les k premières composantes pour la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix} \Sigma_h & \Delta\Sigma_h & \cdots\cdots & \Delta\Sigma_{p-1} \\ \Delta\Sigma_h & \Delta^2\Sigma_h & \cdots & \Delta^2\Sigma_{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta^n\Sigma_h & \Delta^{n+1}\Sigma_h & \cdots & \Delta^{n+1}\Sigma_{p-1} \\ \Delta^{n+1}\Sigma^{(k)}_h & \Delta^{n+2}\Sigma^{(k)}_h & \cdots & \Delta^{n+2}\Sigma^{(k)}_{p-1} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Delta^2\Sigma_h & \cdots\cdots & \Delta^2\Sigma_{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^{n+1}\Sigma_h & \cdots\cdots & \Delta^{n+1}\Sigma_{p-1} \\ \Delta^{n+2}\Sigma^{(k)}_h & \cdots\cdots & \Delta^{n+2}\Sigma^{(k)}_{p-1} \end{vmatrix} .$$

Soit $(e_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,d}$ la base canonique de $\mathbb{C}^d$, et C l'espace des suites d'éléments de $\mathbb{C}^d$.

Pour $\alpha = 1,\ldots,d$, et j positif, on définit u_α^j et y_h, éléments de C par :

$$u_\alpha^j = (e_\alpha,\ldots,(-1)^i\binom{j}{i}e_\alpha,\ldots,(-1)^j e_\alpha,0\ldots)$$

$$y_h = (\Sigma_{n+h})_{n\geq 0}$$

$$<u_\alpha^j, y_h> = (\sum_0^j (-1)^i \binom{j}{i} \Sigma_{h+i})_\alpha = (\Delta^j \Sigma_h)_\alpha .$$

On définit $(z_m)_{m\geq 0}$, z_m dans C, par :

$$m = jd + \alpha \ , \quad z_m = u_\alpha^{j+1}$$

et $x_h = \Delta y_h$.

Avec ces notations, l'approximant de Padé vectoriel $[q+h/q]$ s'écrit comme les d premières composantes de $E_q^h(y)$, $q = nd+k$:

$$E_q^h(y) = \begin{vmatrix} y_h & x_h \cdots x_{h+q-1} \\ <y_h,z_1> & <x_{h+q-1},z_1> \\ \vdots & \vdots \\ <y_h,z_q> \cdots\cdots & <x_{h+q-1},z_q> \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} <x_h,z_1> \cdots\cdots & <x_{h+q-1},z_1> \\ \vdots & \vdots \\ <x_h,z_q> \cdots\cdots & <x_{h+q-1},z_q> \end{vmatrix}$$

De telles quantités se calculent [4], soit par le RPA (récursive projection algorithm) soit par le CRPA (compact recursive projection algorithm) :

R.P.A.

$$\begin{cases} E_o^h = y_h \\ g_{oi} = x_{h+i-1} \qquad i \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_p^h = E_{p-1}^h - \dfrac{\langle z_p, E_{p-1}^h \rangle}{\langle z_p, g_{p-1,p} \rangle} \cdot g_{p-1,p} & p > 0 \\ g_{p,i} = g_{p-1,i} - \dfrac{\langle z_p, g_{p-1,i} \rangle}{\langle z_p, g_{p-1,p} \rangle} \cdot g_{p-1,p} & i > p > 0 \end{cases}$$

C.R.P.A.

$$\begin{cases} e_o^o = y_h \\ e_o^i = x_{i+h-1} & i \geq 1 \\ e_k^i = e_{k-1}^i - \dfrac{\langle z_k, e_{k-1}^i \rangle}{\langle z_k, e_{k-1}^{i+1} \rangle} \cdot e_{k-1}^{i+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_p^h = e_p^o \ .$$

Ces deux algorithmes sont équivalents, tant par le nombre de quantités à stocker, que par le nombre d'opérations arithmétiques.

II - EXTENSION DE LA REGLE DE LA CROIX.

Dans le cas scalaire, la règle de la croix lie les approximants de Padé disposés selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ W & C & E \\ & S & \end{array} \ .$$

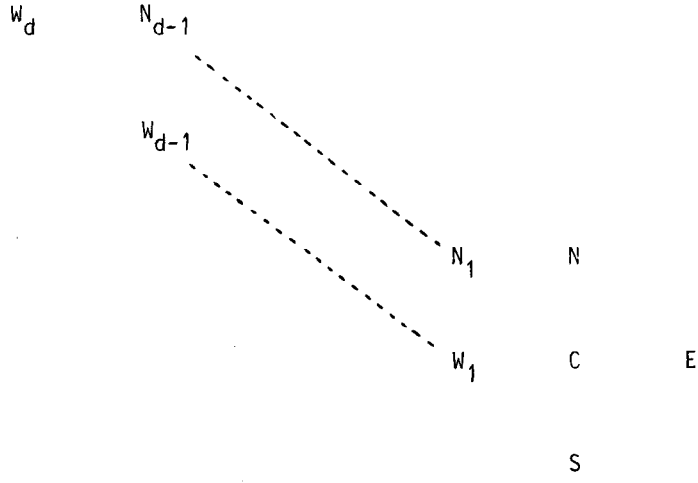
Elle s'écrit sous une des deux formes suivantes :

$$(E - N).(C - W)(S - C) = (C - N)(E - C)(S - W)$$

$$\frac{1}{C\text{-}N} + \frac{1}{C\text{-}S} = \frac{1}{C\text{-}E} + \frac{1}{C\text{-}W} .$$

La deuxième forme n'est valable que si les termes sont non nuls. Elle peut être démontrée à partir du QD algorithme scalaire (th. II.1 et II.2 du chapitre II, dans le cas scalaire) en considérant les q_r^s et e_r^s comme inconnues à éliminer.

Nous allons appliquer cette méthode au cas vectoriel pour trouver une relation liant les approximants de Padé disposés selon le schéma, en comète suivant :



A tout instant du calcul, le cas $d = 1$ permet de retrouver les propriétés du cas scalaire.

Nous savons que : (théorème II.1 et II.2, chapitre II)

$$(1) \qquad P_{r+1}^s(t) = t\, P_r^{s+1}(t) - q_{r+1}^s\, P_r^s(t) \qquad r \geq 0, \quad s \geq 0$$

$$(2) \qquad P_r^{s+1}(t) = P_r^s(t) - \sum_{i=r-d}^{r-1} e_{ri}^s\, P_i^{s+1}(t), \quad r \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Proposition II.1 - Pour $r \geq 0$

$$(3)\quad \begin{cases} Q^s_{r+1}(t) = \Gamma_s P^{s+1}_r(t) + Q^{s+1}_r(t) - q^s_{r+1}\, Q^s_r t) \\ Q^{s+1}_r(t) = -\Gamma_s P^s_r(t) - \sum_{r-d}^{r-1} e^s_{r,i}\, Q^{s+1}_i(t) + tQ^s_r(t)\ . \end{cases}$$

Démonstration :

$$[r+s/r] = \Sigma_s(t) + t^{s+1}\, \frac{\tilde{Q}^{s+1}_r(t)}{\tilde{P}^{s+1}_r(t)}\ .$$

Q^s_r est un polynôme vectoriel à d composantes, de degré r-1.

On applique $\Gamma^s(\Gamma^s(x^i) = \Gamma_{i+s})$ à (1), en utilisant de plus que

$$\Gamma^s(x.R(x)) = \Gamma^{s+1}(R(x)).$$

On obtient, Γ agissant toujours sur x :

$$P^s_{r+1}(t) = t\, P^{s+1}_r(t) - q^s_{r+1}\, P^s_r(t)$$

$$Q^s_{r+1}(t) = \Gamma^s\left[\frac{x\, P^{s+1}_r(x) - t\, P^{s+1}_r(t)}{x - t}\right] - q^s_{r+1}\, Q^s_r(t)$$

$$= \Gamma^s\left[P^{s+1}_r(t) + x\, \frac{P^{s+1}_r(x) - P^{s+1}_r(t)}{x - t}\right] - q^s_{r+1}\, Q^s_r(t)$$

$$= \Gamma_s\, P^{s+1}_r(t) + Q^{s+1}_r(t) - q^s_{r+1}\, Q^s_r(t).$$

On obtient de même la deuxième relation en appliquant Γ^{s+1} à (2). ■

On passe aux quantités $\tilde{Q}^s_r$ et $\tilde{P}^s_r$ par les formules usuelles :

$\tilde{Q}^s_r(t) = t^{r-1}\, Q^s_r(t^{-1})$

$\tilde{P}^s_r(t) = t^r\, P^s_r(t^{-1})$.

On déduit des relations (1), (2), (3), les relations suivantes :

Proposition II.2 -

$$\text{(4.1a)}\quad \tilde{P}^{s}_{r+1}(t) = \tilde{P}^{s+1}_{r} - q^{s}_{r+1}\, t\, \tilde{P}^{s}_{r}(t)$$

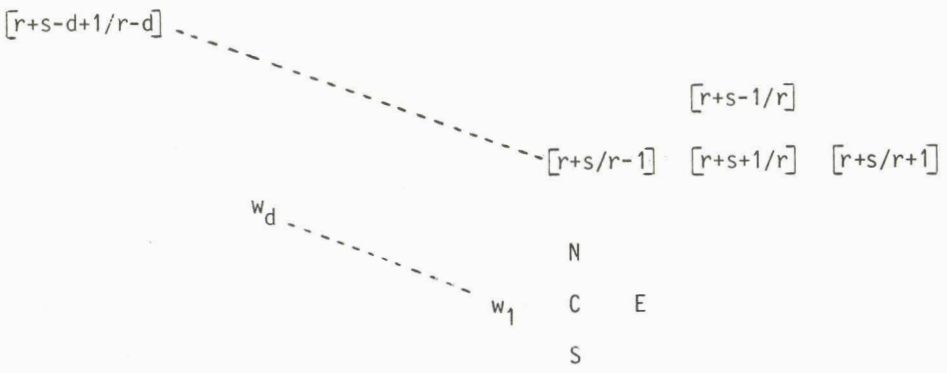
$$\text{(4.1b)}\quad \tilde{P}^{s+1}_{r}(t) = \tilde{P}^{s}_{r}(t) - \sum_{r-d}^{r-1} e^{s}_{r,i}\, t^{r-i}\, \tilde{P}^{s+1}_{i}(t)$$

$$\text{(4.2a)}\quad \tilde{Q}^{s}_{r+1}(t) = \Gamma_s\, \tilde{P}^{s+1}_{r}(t) + t\, \tilde{Q}^{s+1}_{r}(t) - q^{s}_{r+1}\, t\, \tilde{Q}^{s}_{r}(t)$$

$$\text{(4.2b)}\quad t\, \tilde{Q}^{s+1}_{r}(t) = -\Gamma_s\, \tilde{P}^{s}_{r}(t) + \tilde{Q}^{s}_{r}(t) - \sum_{r-d}^{r-1} e^{s}_{r,i}\, t^{r-i+1}\, \tilde{Q}^{s+1}_{i}(t).$$

La démonstration est directe. ■

Nous considérons les approximants du tableau suivant :



$$C = [r+s/r] = \Sigma_s(t) + t^{s+1}\, \frac{\tilde{Q}^{s+1}_{r}(t)}{\tilde{P}^{s+1}_{r}(t)} \quad .$$

Théorème II.3 - Avec les notations ci-dessus, on a les relations suivantes :

$$\text{(5)}\quad (E - N)\tilde{P}^{s}_{r+1} = (C - N).\tilde{P}^{s+1}_{r} \qquad r \geq 0$$

$$\text{(6)}\quad |C-W_1, W_d-W_{d-1}, \ldots, W_2-W_1|.\tilde{P}^{s+1}_{r} = |S-W_1, W_d-W_{d-1}, \ldots, W_2-W_1|.\tilde{P}^{s+2}_{r} \qquad r \geq d$$

Dans la relation (6), on utilise des déterminants : les vecteurs indiqués en sont les colonnes.

Démonstration : Des relations (4.1a) et (4.2a), on tire une relation indépendante de q^s_{r+1} :

$$\tilde{Q}^s_{r+1}(t) - \Gamma_s \tilde{P}^{s+1}_r(t) - t\tilde{Q}^{s+1}_r(t))\, t\tilde{P}^s_r(t) + (\tilde{P}^{s+1}_r(t) - \tilde{P}^s_{r+1}(t))\, t\tilde{Q}^s_r(t) = 0$$

$$\tilde{P}^s_{r+1}(t)\left(\frac{\tilde{Q}^s_{r+1}(t)}{\tilde{P}^s_{r+1}(t)} - \frac{\tilde{Q}^s_r(t)}{\tilde{P}^s_r(t)}\right) = \left(\Gamma_s + t\,\frac{\tilde{Q}^{s+1}_r(t)}{\tilde{P}^{s+1}_r(t)} - \frac{\tilde{Q}^s_r(t)}{\tilde{P}^s_r(t)}\right).\tilde{P}^{s+1}_r(t)$$

$$(5) \qquad (E - N)\tilde{P}^s_{r+1} = (C - N)\tilde{P}^{s+1}_r \ .$$

Des relations (4.1b) et (4.2b), écrites à l'indice s+1, on tire un système d'équations en $e^{s+1}_{r,i}$:

$$\begin{cases} (4.1b) & \sum_{r-d}^{r-1} e^{s+1}_{r,i}\, t^{r-i}\, \tilde{P}^{s+2}_i(t) = \tilde{P}^{s+1}_r(t) - \tilde{P}^{s+2}_r(t) \\ (4.2b) & \sum_{r-d}^{r-1} e^{s+1}_{r,i}\, t^{r-i+1}\, \tilde{Q}^{s+2}_i(t) = -\Gamma_{s+1}\, \tilde{P}^{s+1}_r(t) + \tilde{Q}^{s+1}_r(t) - t\,\tilde{Q}^{s+2}_r(t). \end{cases}$$

C'est un système de d+1 équations, à d inconnues. Si les polynômes $\tilde{Q}^{s+2}_i$ sont supposés indépendants, le système est de rang d, et le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} \tilde{P}^{s+1}_r(t) - \tilde{P}^{s+2}_r(t) & , \ \tilde{P}^{s+2}_{r-d}, \ldots, \tilde{P}^{s+2}_{r-1} \\ -\Gamma_{s+1}\,\tilde{P}^{s+1}_r(t) + \tilde{Q}^{s+1}_r(t) - t\,\tilde{Q}^{s+2}_r(t), & t\,\tilde{Q}^{s+2}_{r-d}, \ldots, t\tilde{Q}^{s+2}_{r-1} \end{vmatrix} = 0$$

$$\tilde{P}^{s+1}_r \begin{vmatrix} 1 & , \ 1 & , \ldots, & 1 \\ -\Gamma_{s+1} + \dfrac{\tilde{Q}^{s+1}_r}{\tilde{P}^{s+1}_r} & , \ t\,\dfrac{\tilde{Q}^{s+2}_{r-d}}{\tilde{P}^{s+2}_{r-d}} & \ldots, & t\,\dfrac{\tilde{Q}^{s+2}_{r-1}}{\tilde{P}^{s+2}_{r-1}} \end{vmatrix} = \tilde{P}^{s+2}_r \begin{vmatrix} 1 & , \ 1 & , \ldots, & 1 \\ t\,\dfrac{\tilde{Q}^{s+2}_r}{\tilde{P}^{s+2}_r} & , \ t\,\dfrac{\tilde{Q}^{s+2}_{r-d}}{\tilde{P}^{s+2}_{r-d}} & \ldots, & t\,\dfrac{\tilde{Q}^{s+2}_{r-1}}{\tilde{P}^{s+2}_{r-1}} \end{vmatrix}$$

$$\tilde{P}_r^{s+1}\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & ,\ldots, & 1 \\ C-\Sigma_{s+1}, & W_d-\Sigma_{s+1}, & \ldots, & W_1-\Sigma_{s+1} & \end{vmatrix} = \tilde{P}_r^{s+2}\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & ,\ldots, & 1 \\ S-\Sigma_{s+1}, & W_d-\Sigma_{s+1}, & \ldots, & W_1-\Sigma_{s+1} & \end{vmatrix}$$

$$\tilde{P}_r^{s+1}|C-W_d,\ W_{d-1}-W_d,\ldots,W_1-W_d| = \tilde{P}_r^{s+2}|S-W_d,\ W_{d-1}-W_d,\ldots,W_1-W_d|$$

$$(6)\quad \tilde{P}_r^{s+1}|C-W_1,\ W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1| = \tilde{P}_r^{s+2}|S-W_1,\ W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1|.$$

La formule (5) est valable pour $r \geq 0$ et la formule (6) pour $r \geq d$. ■

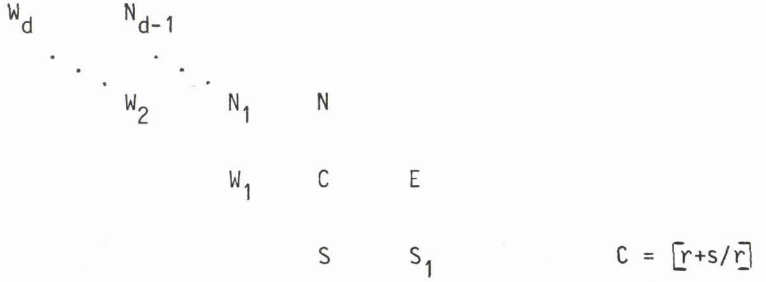
A partir des relations (5) et (6), on peut maintenant prouver une relation entre les approximants de Padé vectoriels de la "croix" ou plutôt de la "comète" précédente. Nous appellerons cette relation la règle de la croix généralisée.

Sa forme implicite est la suivante :

Théorème II.4 -

$$(7)\quad \begin{aligned}&(E-N)|C-W_1,\ W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1| \times |S-C,\ N_{d-1}-N_{d-2},\ldots,N_1-C| \\ &= (C-N)|S-W_1,\ W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1| \times |E-C,\ N_{d-1}-N_{d-2},\ldots,N_1-C|.\end{aligned}$$

Démonstration : On utilise les relations (5) et (6) pour exprimer S_1 dans le tableau suivant :



$$\begin{cases} (S_1-C).\tilde{P}^{s+1}_{r+1} = (S-C).\tilde{P}^{s+2}_{r} \\ |E-C,N_{d-1}-N_{d-2},\ldots,N_1-C|.\tilde{P}^{s}_{r+1} = |S_1-C,N_{d-1}-N_{d-2},\ldots,N_1-C|.\tilde{P}^{s+1}_{r+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (E-N).\tilde{P}^{s}_{r+1} = (C-N).\tilde{P}^{s+1}_{r} \\ |C-W_1,W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1|.\tilde{P}^{s+1}_{r} = |S-W_1,W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1|.\tilde{P}^{s+2}_{r} \end{cases}$$

$$|C-W_1,W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1| \times |S-C,N_{d-1}-N_{d-2},\ldots,N_1-C|.\tilde{P}^{s+1}_{r}.\tilde{P}^{s+2}_{r} =$$
$$|S-W_1,W_d-W_{d-1},\ldots| \times |E-C,N_{d-1}-N_{d-2},\ldots|.\tilde{P}^{s+2}_{r}.\tilde{P}^{s}_{r+1} \ .$$

Et finalement, on obtient la formule (7) :

(7)
$$(E-N) \ . \ |C-W_1,W_d-W_{d-1} \ \ldots| \times |S-C,N_{d-1} - N_{d-2},\ldots|$$
$$= (C-N) \ . \ |S-W_1,W_d-W_{d-1} \ \ldots| \times |E-C,N_{d-1} - N_{d-2},\ldots| \ .$$

Si $d = 1$, les déterminants se réduisent à leur premier terme, et on obtient la règle de la croix scalaire sous la forme produit. ■

On peut trouver une formule plus facile pour calculer E en fonction des autres approximants. On obtient alors une forme explicite de la règle de la croix généralisée.

E^α désigne la $\alpha^{-\text{ième}}$ composante de E :

Théorème II.5 -

$$D_1 = |C-W_1,W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1|, \ D_2 = |S-C,N_{d-1} - N_{d-2},\ldots,N_1-C|$$
$$D_3 = |S-W_1,W_d-W_{d-1},\ldots,W_2-W_1|, \ D_4 = |C-N,N_{d-1} - N_{d-2},\ldots,N_1-C|$$

(8) $\alpha = 1,\ldots,d$
$$\frac{1}{(E-C)^\alpha} + \frac{1}{(C-N)^\alpha} = \frac{D_3D_4}{(C-N)^\alpha D_1 D_2}$$

$$(9) \qquad E-C = (C-N)\frac{D_1D_2}{D_3D_4 - D_1D_2} \quad .$$

Démonstration : On développe la relation (7), et on la considère comme un système linaire d'équations, ayant pour inconnues $(E-C)^\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,d$.

$$E-N = E-C + C-N$$

$$|E-C, N_{d-1}-N_{d-2},\ldots| = \sum_{\alpha=1}^{d} (E-C)^\alpha \Delta^\alpha \quad .$$

On obtient alors les équations, pour $k = 1,\ldots,d$:

$$(E-C)^1(C-N)^k\Delta^1 D_3 + \ldots + (E-C)^k\left[(C-N)^k\Delta^k D_3 - D_1D_2\right] + \ldots = (C-N)^k D_1D_2 \quad .$$

Le déterminant de ce système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (C-N)^1\Delta^1 D_3 - D_1D_2, (C-N)^1\Delta^2 D_3, \ldots & (C-N)^1\Delta^d D_3 \\ (C-N)^2\Delta^1 D_3,\ (C-N)^2\Delta^2 D_3 - D_1D_2, \ldots & \\ (C-N)^d\Delta^1 D_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (C-N)^d\Delta^d D_3 - D_1D_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} (C-N)^i\Delta^i D_3 (-1)^{d-1}(D_1D_2)^{d-1} + (-1)^d(D_1D_2)^d$$

$$\Delta = (-1)^d(D_1D_2)^{d-1}\left[D_1D_2 - D_3D_4\right] \quad \left(D_4 = \sum_{1}^{d} (C-N)^i\Delta^i = |C-N, N_{d-1} - N_{d-2},\ldots|\right).$$

En utilisant les formules de Cramer, $(E-C)^\alpha$ s'écrit sous la forme :

$$(E\text{-}C) = \frac{1}{\Delta} \left| \ldots,\ (C\text{-}N)^{\alpha}\ D_1D_2,\ldots \right|$$

$$\uparrow\ k^{\text{ième}}\ \text{colonne}$$

$$(E\text{-}C)^{\alpha} = \frac{-(C\text{-}N)^{\alpha}\ D_1D_2}{D_1D_2 - D_3D_4} \qquad k = 1,\ldots,d \qquad (9)$$

$$\frac{1}{(E\text{-}C)^{\alpha}} + \frac{1}{(C\text{-}N)^{\alpha}} = \frac{|S\text{-}W_1, W_d\text{-}W_{d-1}\ldots|.|C\text{-}N, N_{d-1}\text{-}N_{d-2}\ldots|}{(C\text{-}N)^{\alpha}.|C\text{-}W_1, W_d\text{-}W_{d-1}\ldots|.|S\text{-}C, N_{d-1}\ldots|} \qquad (\alpha = 1,\ldots,d) \qquad (8)$$

Dans le cas $d = 1$, le second membre pour $\alpha = 1$, est

$$\frac{S\text{-}W_1}{(C\text{-}W_1)(S\text{-}C)} = \frac{1}{S\text{-}C} + \frac{1}{C\text{-}W_1}$$

On trouve à nouveau le cas scalaire. ■

Ces dernières relations fournissent un calcul effectif de la moitié de la table de Padé $[r/s+d]$, $r \geq s+d$, de gauche à droite, dès que les d premières colonnes sont connues.

Nous étudions maintenant l'initialisation de cette algorithme, par l'adjonction de colonnes négatives.

Chaque élément est repéré par la colonne et la diagonale où il se situe. On définit $\bar{W}^d,\ldots,\bar{W}^k,\ldots,\overset{\circ}{\bar{W}}$ comme les termes de la diagonale d'indices s contenant $\overset{\circ}{\bar{W}} = \Sigma_s = [s/o]$, les autres termes $\bar{W}^k$ étant en colonne $(-k)$.

Si un terme est infini, on lui appliquera les règles de calcul suivantes :

$$\frac{1}{|\infty,*,\ldots,*|} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{|\infty,*,\ldots,*|}{|\infty,0,\ldots,0|} = 1.$$

Théorème II.6 -

Soit $\bar{W}^d,\ldots,\overset{\circ}{W}$ les termes de la diagonale d'indice s, définis par :

$$\overset{\circ}{W} = \Sigma_s,\quad \bar{W}^1-\overset{\circ}{W} = (0,\ldots,0,1)^t,\ldots,\bar{W}^{d+1}-\bar{W}^{d+2} = (0,1,0,\ldots,0),\bar{W}^d-\bar{W}^{d+1} = \infty .$$

Avec de telles colonnes négatives, la règle de la croix généralisée (7), (8), (9)) est valable pour $r \geq 0$.

Démonstration : Nous reprenons la démonstration depuis le théorème II.3 pour $r \leq d$.

(5) est valable pour $r \geq 0$.

Le système (4.1b, 4.2b), avec $e^{s+1}_{r,i}$ comme inconnues, devient :

$$\text{(4.1b)}\quad e^{s+1}_{r,o}\, t^r\, P^{s+2}_o(t) + \sum_1^{r-1} e^{s+1}_{r,i}\, t^{r-i}\, \tilde{P}^{s+2}_r(t) = \tilde{P}^{s+1}_r(t) - \tilde{P}^{s+2}_r(t)$$

$$\text{(4.2b)}\quad \sum_1^{r-1} e^{s+1}_{r,i}\, t^{r-i+1}\, \tilde{Q}^{s+2}_i(t) = -\Gamma_{s+1}\, \tilde{P}^{s+1}_r(t) + \tilde{Q}^{s+1}_r(t) - t\tilde{Q}^{s+2}_r(t)$$

C'est un système à d+1 équations et r inconnues, de rang r. Il est équivalent de considérer 4.2b comme un système de d équations, à (r-1) inconnues, de rang r-1, c'est-à-dire que les matrices suivantes sont de rang r-1 :

$$(\tilde{Q}^{s+2}_1,\ldots,\tilde{Q}^{s+2}_{r-1},\ -\Gamma_{s+1}\,\tilde{P}^{s+1}_r + \tilde{Q}^{s+1}_r - t\,\tilde{Q}^{s+2}_r)$$

$$\left(\frac{\tilde{Q}^{s+2}_1}{\tilde{P}^{s+2}_1},\ldots,\frac{\tilde{Q}^{s+2}_{r-1}}{\tilde{P}^{s+2}_{r-1}},\left(-\Gamma_{s+1} + \frac{\tilde{Q}^{s+1}_r}{\tilde{P}^{s+1}_r}\right).P^{s+1}_r - t\,\frac{\tilde{Q}^{s+2}_r}{\tilde{P}^{s+2}_r}\,.\,P^{s+2}_r\right)$$

$$(W_{r-1} - \Sigma_{s+1},\ldots,W_1 - \Sigma_{s+1},(C-W_1).\tilde{P}^{s+1}_r - (S-W_1).\tilde{P}^{s+2}_r$$

$$(W_{r-1}-W_r, W_{r-2}-W_{r-1},\ldots,W_1-W_2,\ (C-W).\tilde{P}^{s+1}_r - (S-W_1).\tilde{P}^{s+2}_r)$$

Si nous supposons que le déterminant formé par les premières lignes est non nul, cette dernière condition est équivalente à :

$$\det \left[(C-W_1).\tilde{P}_r^{s+1} - (S-W_1).\tilde{P}_r^{s+2},\ W_1-W_2,\ldots,W_{r-1}-W_r \quad \begin{matrix} 0 \\ \tilde{I}_{d-r} \end{matrix} \right] = 0$$

où I_{d-r} est la matrice unité d'ordre $d-r$ et $\tilde{I}_{d-r}$ a l'ordre des colonnes inversées. Cette dernière relation est exactement la relation (6) si les colonnes négatives sont définies comme prévu dans l'énoncé de ce théorème pour $k = d-2,\ldots,1$.

Comme W_r est Σ_{s+1}, ceci définit les colonnes négatives de l'indice $(-d+2)$ à -1. En effet, l'équation 4.2b doit être une vraie équation, non réduite à "0 = 0", et donc $(r-1)$ doit être supérieur à 1, ou r supérieur à 2.

Ceci permet d'utiliser (5) et (6), donc (7) et (8) pour $r \geq 2$.

Pour $r = 0$ ou $r = 1$, nous vérifions directement que la quantité E calculée par (8) est l'approximant de Padé.

1er Cas : $r = 0$, $c = [r/o] = \Sigma_s$.

$\bar{W}^d - \bar{W}^{d+1} = \infty$ implique

$$\frac{D_3}{D_1} = \frac{|S-W_1,\ \bar{W}^d-\bar{W}^{d+1},\ldots,\bar{W}^2-\bar{W}^1|}{|C-W,\ \bar{W}^d-\bar{W}^{d+1},\ldots,\bar{W}^2-\bar{W}^1|} = 1$$

$$\frac{D_4}{D_2} = \frac{|C-N,\ \bar{N}^{d+1}-\bar{N}^{d+2},\ldots,\bar{N}^1-C|}{|S-C,\ \bar{N}^{d+1}-\bar{N}^{d+2},\ldots,\bar{N}^1-C|} = \frac{(C-N)^1}{(S-C)^1}$$

$$\frac{1}{(E-C)^\alpha} = \frac{-1}{(C-N)^\alpha} + \frac{1}{(C-N)^\alpha}\frac{(C-N)^1}{(S-C)^1}$$

$$E^\alpha = C^\alpha - \frac{1}{\Delta\Sigma_s^\alpha} + \frac{1}{\Delta\Sigma_s^\alpha}\frac{\Delta\Sigma_s^1}{\Delta\Sigma_{s+1}^1}$$

$$E^{\alpha} = \Sigma_s^{\alpha} + \frac{c_{s+1}^1 \, c_s^{\alpha} \, t^{s+1}}{c_s^1 - c_{s+1}^1 \, t} \quad \text{ou} \quad E = \Sigma_s + \frac{c_{s+1}^1 \, t^{s+1}}{c_s^1 - c_{s+1}^1 \, t} \, \Gamma_s \ .$$

On peut démontrer que E est $[s/1]$, soit en vérifiant la définition des approximants de Padé vectoriels, soit en comparant avec la relation (5). La seconde méthode est plus rapide.

$$([s/1]-N).\tilde{P}_1^s = (C-N).\tilde{P}_0^{s+1}$$

$$\tilde{P}_0^{s+1} = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{P}_1^s = 1 - q_1^s \, t \quad \text{avec} \quad q_1^s = \frac{c_{s+1}^1}{c_s^1}$$

$$[s/1] - C = (C-N) \, \frac{1-\tilde{P}_1^s}{\tilde{P}_1^s}$$

$$= \Gamma_s \, \frac{c_{s+1}^1}{c_s^1 - c_{s+1}^1 \, t} \, t^{s+1}$$

$$(10) \qquad E = [s/1] = \Sigma_s + \Gamma_s \, \frac{c_{s+1}^1}{c_s^1 - c_{s+1}^1 \, t} \, t^{s+1}$$

2ème Cas : $r = 1$.

On vient de calculer la colonne $[s/1]$, donc on peut calculer E par les relations (7) ou (8) et comparer avec $[s+1/2]$ calculé à partir de (5).

$$E-C = (C-N) \, \frac{1}{\frac{D_3 D_4}{D_1 D_2} - 1}$$

$$C = [s+1/1] = \Sigma_{s+1} + \frac{c_{s+2}^1}{c_{s+1}^1 - c_{s+2}^1 \, t} \, t^{s+2} \, \Gamma_{s+1}$$

$$W_1 = \overset{\circ}{W} = [s+1/o] = \Sigma_{s+1},\ N_1 = \overset{\circ}{N} = \Sigma_s$$

$$\frac{D_3}{D_1} = \frac{|S-W_1,\ \bar{W}^{d+1} - \bar{W}^{d+2},\ldots,\bar{W}^1-\overset{\circ}{W}|}{|C-W_1,\ \bar{W}^{d+1} - \bar{W}^{d+2},\ldots,\bar{W}^1-\overset{\circ}{W}|} = \frac{(S-W_1)^1}{(C-W_1)^1}$$

$$\frac{D_4}{D_2} = \frac{|C-N,\ \bar{N}^{d+1} - \bar{N}^{d+2},\ldots,\overset{\circ}{N}-C|}{|S-C,\ \bar{N}^{d+1} - \bar{N}^{d+2},\ldots,\overset{\circ}{N}-C|} = \frac{|C-N,\ \overset{\circ}{N}-C|^{1,2}}{|S-C,\ \overset{\circ}{N}-C|^{1,2}} \ .$$

Les déterminants, utilisés dans les expressions de D_2 et D_4, ne concernent que les deux premières lignes des vecteurs.

$$C - \overset{\circ}{N} = \frac{c^1_{s+2}t^{s+2}}{c^1_{s+1}-c^1_{s+2}t}\Gamma_{s+1} + t^{s+1}\Gamma_{s+1} = \frac{c^1_{s+1}}{c^1_{s+1}-c^1_{s+2}t}t^{s+1}\Gamma_{s+1}$$

$$S - \overset{\circ}{W} = \frac{c^1_{s+2}}{c^1_{s+2}-c^1_{s+3}t}t^{s+2}\Gamma_{s+2}$$

$$C - N = \frac{c^1_{s+1}}{c^1_{s+1}-c^1_{s+2}t}t^{s+1}\Gamma_{s+1} - \frac{c^1_{s+1}t^{s+1}}{c^1_{s}-c^1_{s+1}t}\Gamma_s$$

$$S - C = \frac{c^1_{s+2}}{c^1_{s+2}-c^1_{s+3}t}t^{s+2}\Gamma_{s+2} - \frac{c^1_{s+2}t^{s+2}}{c^1_{s+1}-c^1_{s+2}t}\Gamma_{s+1}$$

$$\frac{D_3}{D_1} = \frac{c^1_{s+2}}{c^1_{s+1}}\frac{c^1_{s+1} - c^1_{s+2}\,t}{c^1_{s+2} - c^1_{s+3}\,t} \quad \text{et} \quad \frac{D_4}{D_2} = \frac{c^1_{s+1}}{c^1_{s+2}}\frac{c^1_{s+2} - c^1_{s+3}\,t}{c^1_{s} - c^1_{s+1}\,t}\frac{|\Gamma_s,\Gamma_{s+1}|^{1,2}}{|\Gamma_{s+1},\Gamma_{s+2}|^{1,2}}\frac{1}{t}$$

$$\frac{D_3D_4}{D_1D_2} = \frac{c^1_{s+1} - c^1_{s+2}\, t}{c^1_s - c^1_{s+1}\, t} \cdot \frac{|\Gamma_s, \Gamma_{s+1}|^{1+2}}{|\Gamma_{s+1}\, \Gamma_{s+2}|^{1,2}} \frac{1}{t} .$$

De la relation (5), on déduit :

$$(\lceil s+1/2 \rceil - N).\tilde{P}^s_2 = (C-N).\tilde{P}^{s+1}_1$$

$$\lceil s+1/2 \rceil - C = (C-N)\, \frac{\tilde{P}^{s+1}_1 - \tilde{P}^s_2}{\tilde{P}^s_2} = (C-N)\, \frac{1}{\dfrac{\tilde{P}^{s+1}_1}{\tilde{P}^{s+1}_1 - \tilde{P}^s_2} - 1}$$

$$\frac{\tilde{P}^{s+1}_1}{\tilde{P}^{s+1}_1 - \tilde{P}^s_2} = \frac{1 - q^{s+1}_1 t}{q^{s+1}_2\, t\, \tilde{P}^s_1} = \frac{1}{t}\, \frac{1 - \dfrac{c^1_{s+2}}{c^1_{s+1}}\, t}{\dfrac{c^1_s}{c^1_{s+1}}\, \dfrac{H^{s+1}_2}{H^s_2}\, (1 - \dfrac{c^1_{s+1}}{c^1_s}\, t)}$$

$$= \frac{1}{t}\, \frac{c^1_{s+1} - c^1_{s+2}\, t}{c^1_s - c^1_{s+1}\, t}\, \frac{H^{s+1}_2}{H^s_2}$$

$$= \frac{D_3D_4}{D_1D_2} .$$

Finalement, $E = \lceil s+1/2 \rceil$.

ce qui achève la démonstration. ■

Remarques : On peut regarder le développement de Taylor de $\lceil s/1 \rceil$ et $\lceil s+1/2 \rceil$ au voisinage de 0. On trouve :

$$r = 0 \quad : \quad E = \lceil s/1 \rceil = \Sigma_s + \Gamma_s\, \frac{c^1_{s+1}}{c^1_s - c^1_{s+1}\, t}\, t^{s+1}$$

$$= \Sigma_s + \Gamma_s \frac{c^1_{s+1}}{c^1_s} t^{s+1}\left(1 + \frac{c^1_{s+1}}{c^1_s} t + \dots\right)$$

$$\left.\begin{aligned} (E^1 - \mathbb{F}^1)(t) &= 0(t^{s+2}) \\ (E^\alpha - \mathbb{F}^\alpha)(t) &= 0(t^{s+1}) \quad (\alpha \geq 1) \end{aligned}\right\} (E-\mathbb{F})(t) = 0(t^{s+\left[\frac{1}{d}\right]+1})$$

$$r = 1: \quad E = \left[s+1/2\right] = \Sigma_{s+1} + \Gamma_{s+1} \frac{c^1_{s+2}}{c^1_{s+1} - c^1_{s+2}\, t} t^{s+2} + \frac{C - N}{\frac{D_3 D_4}{D_1 D_2} - 1}$$

$$\frac{C - N}{\frac{D_3 D_4}{D_1 D_2} - 1} = \Gamma_{s+1} t^{s+1} \frac{\left(\frac{\Gamma_{s+1}}{c^1_{s+1} - c^1_{s+2} t} - \frac{\Gamma_s}{c^1_s - c^1_{s+1} t}\right)}{\frac{1}{t} \frac{c^1_{s+1} - c^1_{s+2} t}{c^1_s - c^1_{s+1} t} \frac{|\Gamma_s, \Gamma_{s+1}|^{1,2}}{|\Gamma_{s+1}, \Gamma_{s+2}|^{1,2}} - 1}$$

$$= t^{s+2}(A + 0(t))$$

$$A = \frac{\Gamma_{s+1} - \frac{c^1_{s+1}}{c^1_s} \Gamma_s}{\frac{c^1_{s+1}}{c^1_s} \frac{|\Gamma_s, \Gamma_{s+1}|^{1,2}}{|\Gamma_{s+1}, \Gamma_{s+2}|^{1,2}}} \qquad A^1 = 0, \; A^2 = \frac{|\Gamma_{s+1}, \Gamma_{s+2}|^{1,2}}{c^1_{s+1}} = c^2_{s+2} - c^1_{s+2} \frac{c^2_{s+1}}{c^1_{s+1}}$$

$$E = \Sigma_{s+1} + \frac{c^1_{s+2}}{c^1_{s+1}} \Gamma_{s+1} t^{s+2} + A\, t^{s+2} + 0(t^{s+2})$$

$$\left.\begin{aligned} (E^1 - \mathbb{F}^1)(t) &= 0(S^{s+3}) \\ (E^2 - \mathbb{F}^2)(t) &= 0(t^{s+3}) \\ (E^\alpha - \mathbb{F}^\alpha)(t) &= 0(t^{s+2}) \quad \alpha \geq 2 \end{aligned}\right\} (E - \mathbb{F})(t) = 0(t^{s+1+\left[\frac{2}{d}\right]+1})$$

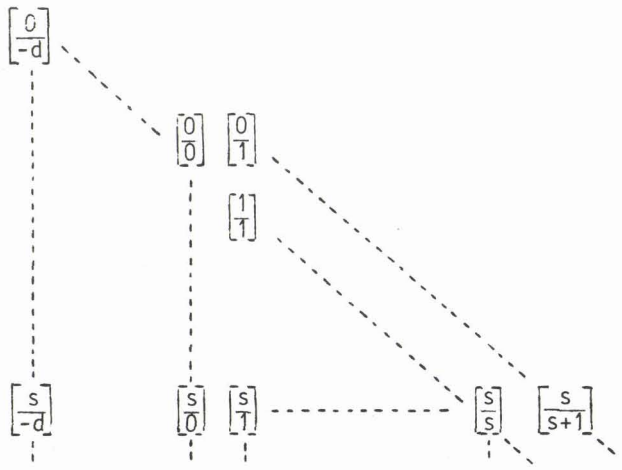
Ce calcul met en évidence le fait que l'ordre d'approximation s'améliore colonne par colonne, c'est-à-dire à chaque colonne, une composante de plus a un ordre d'approximation amélioré. Au bout de d colonnes, l'ordre d'approximation de toutes les composantes est amélioré de 1. Cette amélioration se fait dans l'ordre des composantes 1, 2,...,d grâce à l'hypothèse faite au cours du théorème II.6 : le déterminant formé des r premières lignes de

$$(W_{r-1} - W_r, \ldots, W_1 - W_2, (C-W).\tilde{P}_r^{s+1} - (S-W_1).\tilde{P}_r^{s+2})$$

est non nul.

D'un point de vue algorithmique, cette hypothèse n'est pas trop contraignante : si on calcule la colonne k+1 (ou nd+k+1) ($0 \leqslant k < d$) on peut permuter les lignes k+1,...,d des vecteurs de telle sorte que le mineur considéré soit non nul. Si tous les mineurs sont nuls, on ne peut poursuivre le calcul.

Finalement, avec l'initialisation par les colonnes précédentes, on peut calculer les approximants $[s/r]$, $s+1 \geqslant r$



Il faudrait définir des lignes négatives pour calculer la partie

supérieure de la table de Padé, et à partir du théorème II.4, formule (7), déduire le calcul explicite de S à partir des W_i, N_i, N, C, E.

III - APPLICATIONS AUX SUITES VECTORIELLES.

Une série étant donnée $\mathbb{F}(t) = \sum_{i\geq 0} r_i t^i$, on lui associe la suite des ses sommes partielles. Inversement, une suite vectorielle S_n étant donnée, on peut lui associer la série $\sum_{i\geq 0} (\Delta S_i) t^i$. Donc à la notion d'approximant de Padé, on peut comme dans le cas scalaire, associer une transformation de suites, analogue à la transformation de Shanks ([1])

$$(1)\quad r = nd+k \qquad \psi_r(S_h) = \begin{vmatrix} S_h & \cdots & S_{h+r} \\ \Delta S_h & \cdots & \Delta S_{h+r} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{h+n}^{(k)} & \cdots & \Delta S_{h+r+n}^{(k)} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & \text{idem} & \end{vmatrix}$$

où seule la première ligne du numérateur est vectorielle, les autres représentent d lignes scalaires, sauf la dernière qui représente les k premières composantes de $\Delta S_{h+n} \cdots \Delta S_{h+r+n}$.

On trouve la limite de S_n sous la forme $\mathbb{F}(1)$ et $\psi_r(S_h)$ est égal d'après le calcul fait au début du 3ème chapitre, à $[r+h/r]_{\mathbf{F}}$.

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème III.1 - Une condition nécessaire et suffisante pour que $\psi_r(S_n) = S$ quelque soit $h > N$ est que la suite (S_h) vérifie

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (S_{h+i} - S) = 0, \quad \forall\, h \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i \neq 0 \quad (a_i \in \mathbb{C}).$$

Démonstration :

Supposons $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ et $r = nd+k \quad (0 \leq k < d)$.

L'équation $\sum_{i=1}^{r} a_i(S_{h+i} - S) = 0$ définit un système d'équations linéaires, d'inconnues a_i :

$$\begin{cases} a_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_r = 1 \\ a_0\,\Delta S_h + \ldots\ldots\ldots + a_r\,\Delta S_{h+r} = 0 \\ \vdots \\ a_0\,\Delta S_{h+n} + \ldots\ldots + a_r\,\Delta S_{h+r+n} = 0 \\ a_0\,S_h + \ldots\ldots\ldots + a_r\,S_{h+r} = S \end{cases} .$$

Ce système est équivalent à $\varphi_r(S_h) = S$ si son déterminant n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \Delta S_h & \ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta S_{h+r} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta S_{h+n}^{(k)} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta S_{h+r+n}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Remarque : Contrairement aux théorèmes analogues démontrés pour le ε-algorithme vectoriel, ou topologique, la condition est ici nécessaire et suffisante et non pas seulement suffisante. Ceci provient de l'expression sous forme d'un rapport de déterminants de $\varphi_r(S_h)$, qui n'existe pas pour l'ε-algorithme vectoriel.

Un certain nombre de propriétés découlent de ce résultat et se démontrent comme dans le cas scalaire.

Théorème III.2 - Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_r(S_h) = S$ est que

$$S_n = S + \sum_{i=1}^{k} A_i(n)\, r_i^n + \sum_{k+1}^{j} \left[B_i(n).\cos(b_i n) + C_i(n).\sin(b_i n) \right] e^{w_i n} + \sum_{j}^{m} c_i\, \delta_{in}$$

où r_i, w_i, b_i sont dans $\mathbb{C}$ $(r_i \neq 1)$, A_i, B_i, C_i sont des polynômes en n à coefficients vectoriels, c_i est un vecteur et où :

$$m + \sum_{i=1}^{k} d_i + 2 \sum_{k+1}^{d} d_i = r-1 \qquad \begin{aligned} d_i &= d^o A_i + 1 && i = 1,\ldots,k \\ &= \sup(d^o B_i, d^o C_i) + 1, && i = k+1,\ldots,j \end{aligned}$$

Propriété I.3 - Quelque soit a dans $\mathbb{C}$ et B dans $\mathbb{C}^d$

$$\varphi_r(a\, S_h + B) = a\, \varphi_r(S_h) + B.$$

Le résultat se déduit clairement de la définition (1) de $\varphi_r(S_h)$.

Les applications se déduisent du théorème III.1, comme dans le cas de l'ε-algorithme scalaire, ou de l'epsilon algorithme topologique ou vectoriel. Nous ne citerons donc que les types d'applications, les hypothèses et les résultats pouvant être raffinés comme dans les cas précédents [1].

III. 1 - Résolution des systèmes linéaires.

Théorème III.3 - Soit la suite vectorielle générée par $X_{n+1} = AX_n + B$ où A est une matrice $d \times d$, telle que $I - A$ soit inversible. Si X est la solution du système $(I-A)^{-1}.B$, et si m le degré du polynôme minimal pour le vecteur $\overset{o}{X}-X$ et r l'ordre de multiplicité de 0 pour ce polynôme, alors

$$\varphi_{m-r}(X_i) = X \qquad i \geq r.$$

Démonstration : Si p est le polynôme minimal de A pour $\overset{o}{X}-X$:

$$p(A)(\overset{o}{X}-X) = \sum_{0}^{m} a_i A^i(\overset{o}{X}-X) = 0$$

$$(\sum_{0}^{m} a_i(X^i-X)) = 0$$

et le résultat se déduit alors du théorème III.1.

L'extension aux suites $X_n = \sum_{1}^{k} A_i X_{n-i} + B$ se démontre de même en passant au système équivalent $Y_{n+1} = A\, Y_n$.

$$Y_n = (x_{n+i}-x, x_n-x, x_{n-1}-x, \ldots, x_{n-k+2}-x)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots\cdots & A_k \\ I & \cdots\cdots & 0 \\ & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \text{ de dimension } (kd \times kd)$$

III.2 - Résolution des systèmes non linéaires $X = F(X)$.

Il s'agit d'une généralisation de la méthode de Steffenson :

$$U_o = X_n,\quad U_1 = F(U_o), \ldots, U_k = F(U_{k-1}),\quad X_{n+1} = \phi_{m-r}(U_o)$$

où m est le degré de polynôme minimal de $F(X)$ pour le vecteur X_n-X, r la multiplicité de zéro comme racine de ce polynôme minimal et $k = 2(m-r)+1$.

Alors, si il existe X tel que $X = F(X)$, si F est différentiable au sens de Frechet au voisinage de X, et si $I-F'(X)$ est inversible, alors il existe un voisinage V de X tel que pour tout X_o de V, la suite X_n converge vers X de manière au moins quadratique.

La démonstration consiste à prouver que les U_i vérifient :

$$\sum_r^m a_i U_i = X(\sum_r^m a_i) + O(||X_n - X||^2)$$

donc $$\vartheta_{m-r}(U_o) = X_{n+1} = X + O(||X_n - X||^2).$$

III.3 - Valeurs propres.

Soit A une matrice et S_n la suite générée par $S_{n+1} = AS_n$.

On a le résultat suivant :

Théorème III.4 - Si les valeurs propres de A sont $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ de vecteurs propres associés V_i , $i = 1,\ldots,d$ et $S_o = \sum_1^d a_i V_i$.

On suppose $|\lambda_1| > \ldots > |\lambda_d|$.

On a $\vartheta_k(S_n) \sim \sum_{k+1}^d \lambda_i^n z_i$ $\quad (z_i = a_i v_i$ et n assez grand)

$$\frac{(\vartheta_{k+1}(S_n))^\alpha}{(\vartheta_k(S_n))^\alpha} - \lambda_{k+1} = O((\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_{k+1}})^n) \quad \text{(pour } n \text{ grand)}$$

Ce résultat est identique à celui obtenu avec l'ε-algorithme vectoriel.

Démonstration :

$$[n/0] = S_n = \sum_1^d \lambda_i^n z_i .$$

Calculons $[n/1]$ par la règle précédente :

$$c = [n/0] \ , \quad E = [n+1/1]$$

$$E - C = (C-N) \frac{1}{\frac{(C-N)^1}{(S-C)^1} - 1}$$

$$= \sum_{1}^{d} (\lambda_i - 1)\lambda_i^{n-1} z_i \frac{1}{\frac{\lambda_1^{n-1}(\lambda_1 - 1)z_1 + \ldots}{\lambda_1^{n}(\lambda_1 - 1)z_1 + \ldots} - 1}$$

$$\cong \sum_{1}^{d} (\lambda_i - 1)\lambda_i^{n-1} z_i \cdot \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} - 1} \quad \text{(quand } n \text{ tend vers l'infini)}$$

$$\cong - \lambda_1^n z_1 \qquad \Longrightarrow \qquad E \cong \sum_{2}^{d} \lambda_i^n z_i .$$

Supposons le résultat vrai jusqu'en colonne k :

$$C = [n+k/k] = \vartheta_k(S_n) \cong \sum_{k+1}^{d} \lambda_i^n z_i$$

$$(C-N) \cong \sum_{k+1}^{d} \lambda_i^{n-1}(\lambda_i - 1) z_i$$

$$\overset{\circ}{N} - C = [n+k-1/k-1] - [n+k/k] \cong \lambda_k^n z_k$$

$$\overset{1}{N} - \overset{\circ}{N} = [n+k-1/k-2] - [n+k-1/k-1] \cong \lambda_{k-1}^n z_{k-1}$$

$$\frac{D_4}{D_2} = \frac{|C-N,\ N - \overset{k-1}{N},\ \overset{k-2}{N},\ldots,N - C|}{|S-C,\qquad \text{idem}\qquad|} \cong \frac{1}{\lambda_{k+1}}$$

$$\frac{D_3}{D_1} = \frac{|S - W_1,\ldots|}{|C - W_1,\ldots|} \sim \frac{|W_1,\ldots|}{|W_1,\ldots|} \sim 1 .$$

Donc $E - C \cong (C-N) \dfrac{1}{\frac{1}{\lambda_{k+1}} - 1} \cong - \lambda_{k+1}^n z_{k+1}$

$$E \cong \sum_{k+2}^{d} \lambda_i^n z_i \ . \ \blacksquare$$

IV - QUELQUES EXEMPLES.

Nous citons ici quelques exemples d'applications,calculés par la règle de la croix généralisée, afin d'illustrer le fonctionnement de cet algorithme, et ce qu'on peut attendre de la table de Padé vectorielle.

1. Suites vérifiant une équation aux différences.

$$U_n = \frac{U_{n-2}}{2}$$

```
 0.200D+01
 0.100D+01
-0.100D+01

 0.000D+00   -0.667D+00
 0.100D+01    0.100D+01
 0.000D+00   -0.333D+00

 0.100D+01    0.500D+00    0.542D-19
 0.500D+00    0.750D+00   -0.108D-18
 0.500D+00   -0.250D+00   -0.271D-19

 0.000D+00    0.333D+00
 0.500D+00    0.500D+00
 0.000D+00   -0.167D+00

 0.500D+00
 0.250D+00
-0.250D+00
```

$$U_n = \frac{U_{n-3}}{2}$$

```
 0.100D-13
 0.100D+01
 0.000D+00

 0.000D+00    0.833D-14
 0.100D+01    0.100D+01
 0.000D+00    0.000D+00

 0.500D-13    0.263D-13    0.124D-13
 0.150D+01    0.126D+01    0.106D+01
 0.100D+01    0.526D+00    0.118D+00

 0.500D-14   -0.625D-15    0.750D-14   0.616D-32
 0.500D+00    0.375D+00    0.643D+00   0.434D-18
 0.000D+00   -0.125D+00    0.714D-01   0.407D-19

 0.000D+00    0.417D-14    0.656D-14
 0.500D+00    0.500D+00    0.563D+00
 0.000D+00    0.000D+00    0.625D-01

 0.250D-13    0.132D-13
 0.750D+00    0.632D+00
 0.500D+00    0.263D+00

 0.250D-14
 0.250D+00
 0.000D+00
```

Le deuxième exemple démarre avec deux données initiales a priori voisines. Le bon déroulement du calcul prouve simplement que ce n'est pas ce genre de cas qui bloque le calcul.

2. Systèmes d'équations linéaires.

```
0.100D+01
0.100D+01
0.100D+01
```

$$X = \begin{pmatrix} 0,2 & 11 & 3 \\ 0 & 0,1 & 5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} X$$

(m = 3, r = 0)

```
0.142D+02   -0.427D+01
0.510D+01   -0.638D+00
0.500D+00    0.120D+01

0.604D+02    0.494D+02    0.388D+02
0.301D+01    0.351D+01    0.269D+01
0.250D+00    0.310D+00    0.485D+00

0.459D+02    0.104D+03    0.356D+01   -0.295D-16
0.155D+01    0.739D+01    0.247D+00   -0.152D-17
0.125D+00    0.625D+00    0.444D-01   -0.156D-18

0.266D+02   -0.903D+01    0.212D+00
0.780D+00   -0.643D+00    0.147D-01
0.625D-01   -0.528D+01    0.264D-02

0.141D+02   -0.119D+01
0.391D+00   -0.846D-01
0.313D-01   -0.686D-02

0.721D+01
0.195D+00
0.156D-01
```

```
0.100D+01
0.100D+01
0.100D+01
```

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

(m = 3, r = 1)

```
0.600D+01   -0.562D+00
0.600D+01   -0.562D+00
0.300D+01    0.375D+00

0.270D+02    0.556D+00    0.909D-01
0.330D+02   -0.100D+01   -0.818D+00
0.120D+02    0.667D+00    0.545D+00

0.129D+03    0.116D+00    0.714D-16    0.598D-16
0.159D+03   -0.209D+00   -0.795D-16    0.250D-16
0.570D+02    0.140D+00    0.732D-16    0.350D-17

0.618D+03    0.243D-01    0.425D-17
0.762D+03   -0.437D-01    0.235D-15
0.273D+03    0.291D-01   -0.906D-16

0.296D+04    0.507D-02
0.365D+04   -0.912D-02
0.131D+04    0.608D-02

0.142D+05
0.175D+05
0.627D+04
```

Le premier système génère une suite initiale convergente, et le second une suite divergente, ce qui ne change pas le résultat. On constate bien sur le second exemple où A admet 0 comme valeur propre que la limite est atteinte en $\psi_2(X_1)$, 2ème terme de la colonne 2. Sur ces exemples, la convergence n'est pas améliorée dans les premières colonnes, mais seulement dans la colonne prévue (3 ou 2) par un résultat algébrique.

3. Système d'équations non linéaires.

Nous reprenons simplement deux exemples traités dans [1] avec l'algorithme scalaire sur chaque terme ou l'ε-algorithme vectoriel.

Exemple 3.1 :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{y^4}{4} - \dfrac{3}{4} \\ \\ y = -0.405\ e^{1-x^2} + 1.405\ . \end{cases}$$

La solution est (-1,+1). Les itérations de base convergent lentement car les valeurs propres du jacobien calculé à la solution sont $\pm$ 0.9. En partant de $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, on obtient, en utilisant l'ε-algorithme scalaire :

n	x_n	y_n
1	- 0.85	0.87
2	- 0.97	0.97
3	- 0.9980	0.9978
4	- 0.99995	0.999984
5	- 0.99999998	0.9999999991

En utilisant la règle de la croix généralisée :

n	x_n	y_n
1	- 0.846	0.839
2	- 0.956	0.965
3	- 0.997	0.998
4	- 1	1

La suite est stationnaire à partir de $n = 4$.

Exemple 3.2 :

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{2} + x - \frac{1}{2} \\ y = \sin x + \sin(y-1) + 1 \ . \end{cases}$$

Une solution est (0,1). Le jacobien en ce point est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc on peut poser $X_{n+1} = \psi_2(U_o)$ avec $U_o = X_n$, $U_i = \mathbb{F}(U_{i-1})$, $i = 1,\ldots,4$, ou $X_{n+1} = \psi_1(U_1)$.

Avec l'ε-algorithme vectoriel (utilisé de manière comparable à $X_{n+1} = \psi_1(U_1)$), on trouve en partant de $x_o = \frac{1}{2}$ et $y_o = 1$:

n	x_n	y_n
1	0.28	1,22
2	0.15	0.907
3	$0.11\ 10^{-1}$	0.9928
4	$0.61\ 10^{-4}$	0.999957
5	$0.19\ 10^{-8}$	0.9999999983
6	$0.52\ 10^{-17}$	1

Avec la règle de la croix généralisée et $X_{n+1} = \psi_1(U_1)$

n	x_n	y_n
1	0.217	0.984
2	$0.14\ 10^{-1}$	1
3	$0.18\ 10^{-2}$	1
4	$0.10\ 10^{-4}$	1
5	$0.48\ 10^{-9}$	1
6	$0.11\ 10^{-17}$	1

Avec la règle de la croix généralisée et $X_{n+1} = \vartheta_2(U_o)$

n	x_n	y_n
1	0.172	1.30
2	- 0.109	1.09
3	$0.55\ 10^{-5}$	1.
4	$0.48\ 10^{-12}$	1.

Dans les deux cas d'utilisation de la règle de la croix généralisée, la suite est stationnaire à partir de la dernière itération signalée. Dans les deux cas étudiés, la convergence est plutôt meilleure qu'avec les autres algorithmes.

CHAPITRE IV

PROBLEMES DE CONVERGENCE

Nous regroupons, dans ce chapitre, un certain nombre de résultats de convergence. La question centrale est la localisation des zéros des approximants de Padé vectoriels. Sans pouvoir répondre à la question dans le cas général, on étudie le cas où $\mathbf{F}$ est une fonction méromorphe.

On étend le théorème de Montessus de Ballore par deux méthodes (parties IV et V), et sous de bonnes hypothèses de régularité dans la répartition des zéros, on montre la convergence des colonnes du QD algorithme vers l'inverse des pôles (parties I, II). La convergence de ces suites est linéaire comme dans le cas scalaire si la dimension d est impaire.

Ces résultats sont les derniers trouvés, et sont actuellement publiés en notes ANO (Lille) [30, 31].

I - EVALUATION DE H_r^s.

Cette partie a des calculs comparables à ceux de [13].

Théorème I.1 - Soit f^α méromorphe, d'ensemble de pôles (supposés simples) E^α et soit $E = \bigcup_1^d E_\alpha$.

$E = \{z_1,\ldots,z_m,\ldots\}$ où les z_i sont rangés par ordre de module croissant.

On suppose qu'il existe r et σ : $|z_r| < \sigma < |z_{r+1}|$.

Alors on a :

(1) $\mathbb{F}(t) = \sum_1^r \frac{R_i}{z_i - t} + \mathbb{G}(t)$ ($\mathbb{G}(t)$ holomorphe dans le disque D_σ, $R_i \in \mathbb{C}^d$)

(2) $H_r^s = C_r(u_1,\ldots,u_r)^s\left(1 + O\left(\left(\frac{\rho}{|u_r|}\right)^s\right)\right)$; $u_i = z_i^{-1}$, $|u_{r+1}| < \rho < |u_r|$.

C_r est une constante indépendante de s ; si $r = nd+k$ alors :

(3) $$C_r = \begin{vmatrix} R_1 & \cdots\cdots & R_r \\ R_1u_1 & \cdots\cdots & R_ru_r \\ \vdots & & \vdots \\ R_1^{(k)}u_1^n & \cdots\cdots & R_r^{(k)}u_r^n \end{vmatrix} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1\ldots r}} (u_i - u_j) \cdot \prod_{i=1}^r u_i$$

Démonstration :

On a $\mathbb{F}(t) = \sum_{n\geq 0} \Gamma_n t^n = \sum_1^r \frac{R_i}{z_i - t} + \mathbb{G}(t)$ (1)

On a en effet la relation pour $\alpha = 1,\ldots,d$: $f^\alpha(t) = \sum_1^r \frac{r_i^\alpha}{z_i - t} + g^\alpha(t)$

g^α holomorphe dans D_σ.

Donc on a obtenu la relation (1) avec $R_i = (r_i^1,\ldots,r_i^d)$.

Soit $\mathbb{G}(t) = \sum_{n\geq 0} B_n t^n$, alors :

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^r R_i u_i^{n+1} + B_n$$

On reporte cette expression dans H_r^s , qu'on développe linéairement par rapport aux colonnes. On a alors

$$H_r^s = D_r^s + \hat{D}_r^s$$

où D_r^s représente la somme de tous les déterminants ne contenant que des termes $R_i u_i^k$ et $\hat{D}_r^s$ représentent la somme de tous les déterminants contenant au moins une colonne de type $(B_p,\ldots,B_{p+n}^{(k)})$.

$$D_r^s = \sum_{i_1\ldots i_r} \begin{vmatrix} R_{i_1} u_{i_1}^{s+1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & R_{i_r} u_{i_r}^{s+r} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{i_1}^{(k)} u_{i_1}^{s+n+1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & R_{i_r}^{(k)} u_{i_r}^{s+r+n} \end{vmatrix}$$

$$D_r^s = u_1^{s+1}\ldots u_r^{s+1} \begin{vmatrix} R_1 & \ldots\ldots & R_r \\ R_1 u_1 & \ldots\ldots & R_r u_r \\ \vdots & & \vdots \\ R_1^{(k)} u_1^n & \ldots\ldots & R_r^{(k)} u_r^n \end{vmatrix} \sum_{i_1\ldots i_r} \varepsilon(\sigma) u_{i_1}^0 u_{i_2}^1 \ldots u_{i_r}^{r-1}$$

($\varepsilon(\sigma)$ représente la signature de la permutation : $\sigma(k) = i_k$)

$$= u_1^{s+1}\ldots u_r^{s+1} \begin{vmatrix} R_1 & \ldots\ldots & R_r \\ \vdots & & \\ R_1^{(k)} u_1^n & \ldots\ldots & R_r^{(k)} u_r^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & u_1 & \ldots\ldots & u_1^{r-1} \\ & & & \\ 1 & u_r & \ldots\ldots & u_r^{r-1} \end{vmatrix} .$$

Compte tenu de (3), on obtient donc

$$D_r^s = C_r u_1^s \ldots u_r^s .$$

Pour étudier $\hat{D}_r^s$, on a d'après les formules de Cauchy appliquées aux fonctions g^α : $\forall \rho \quad |z_r| < \frac{1}{\rho} < |z_{r+1}|$

$$|u_{r+1}| < \rho < |u_r|$$

$||B_n|| < \mu \rho^n$. La somme $\hat{D}_r^s$ est finie et tous les termes sont du même ordre, donc finalement :

$$\Longrightarrow \qquad \hat{D}_r^s = O((u_1,\ldots,u_{r-1}\ \rho)^s).$$

En regroupant les deux résultats, on obtient :

$$H_s^r = C_r(u_1,\ldots,u_r)^s(1 + O((\frac{\rho}{|u_r|})^s)) \qquad (2)$$

Corollaire I.1 - Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème I.1, le résultat s'étend aux cas de pôles multiples par une technique de confluence [13].

Remarque : La constante C_r est indépendante de la numérotation des pôles, elle dépend seulement des pôles et des résidus en ces pôles.

Dans le cas où $\mathbb{F}$ est rationnelle, on a deux résultats semblables au cas scalaire.

Théorème I.2 - Si $\mathbb{F}$ est une fonction rationnelle de type (r+h,r), alors

$$H_m^s = 0 \qquad m > r \qquad s \geq 0$$

$$H_r^s = C_r(u_1,\ldots,u_r)^s \qquad s > h.$$

Démonstration : La démonstration se déduit du calcul du théorème 1.

Théorème I.3 - Si $H_m^s = 0$ $\quad m > r$ et $s \geq 0$;

si $H_r^s \neq 0$ $\quad s > h$,

alors $\mathbb{F}$ est rationnelle de type $(r+h,r)$.

Démonstration : Soit $\mathbb{F}(t) = \sum_{i\geq 0} \Gamma_i t^i$, $\Gamma_i = (c_i^1,\ldots,c_i^d)^t$.

$H_{r+1}^s = 0$ implique que la ligne $(c_{s+n}^{k+1},\ldots,c_{s+r-n-1}^{k+1})$ est combinaison linéaire des lignes

$$r_{s+i}^{\alpha} = (c_{s+i}^{\alpha},\ldots,c_{s+i+r-1}^{\alpha}) \quad \begin{cases} \alpha = 1\ldots d \text{ et } i = 0\ldots n-1 \\ \alpha = 1\ldots k \text{ et } i = n \end{cases}$$

Démontrer que $\mathbb{F}$ est rationnelle de type $(r+h,r)$ est équivalent à chercher un polynôme unitaire de degré r qui vérifie :

$$(\sum_{i\geq 0} \Gamma_i t^i).(\sum_{0}^{r} b_j t^j) = \text{polynôme vectoriel de degré } (r+h)$$

c'est-à-dire $(\sum_{i\geq 0} c_i^{\alpha} t^i).(\sum_{0}^{r} b_j t^j) = \text{polynôme scalaire de } d^0 r+h$; ce qui est équivalent à :

$$\sum_{i=0}^{r} c_{r+s-i}^{\alpha} b_i = 0, \quad s > h \text{ et } \alpha = 1,\ldots,d.$$

Les r premières équations forment un système (S) $s = h+1,\ldots,h+n$, $\alpha = 1,\ldots,d$ et $s = h+n+1$, $\alpha = 1,\ldots,k$, qui admet une solution b non nulle : si $b_0 = 0$ alors H_k^{h+2} serait nul ; si $b_r = 0$, alors H_r^{h+1} serait nul.

Les équations suivantes étant combinaisons linéaires des premières sont vérifiées et donc $\mathbb{F}$ est rationnelle de type $(r+h,r)$.

Remarque : Le calcul précédent n'est évidemment valable que si la constante C_r n'est pas nulle. Or cette constante peut être nulle même dans de "bons" cas. Par exemple si une des fonctions f_α est entière (ou holomorphe dans D_σ) tous les r_i^{α}, $(i = 1,\ldots,r)$ sont nuls donc C_r est un déterminant avec une ligne nulle. De manière précise, on a la condition nécessaire de non nullité suivante :

Proposition I.4 - Pour $r = nd+k$, C_r est nul, si une des fonctions f_α a n (si $1 \leq \alpha \leq k$) ou $n-1$ (si $k < \alpha \leq d$) pôles au plus.

Démonstration :

$$C_r = \begin{vmatrix} R_1 & \cdots\cdots & R_r \\ R_1u_1 & \cdots\cdots & R_ru_r \\ \vdots & & \vdots \\ R_1^{(k)}u_1^n & \cdots\cdots & R_r^{(k)}u_r^n \end{vmatrix}$$

Pour α entre 1 et k, supposons que f_α ait moins de $(n+1)$ pôles et groupons les lignes associées à f_α au début du déterminant :

$$C_r = \varepsilon \begin{vmatrix} r_1^\alpha, r_2^\alpha & \cdots\cdots & r_r^\alpha \\ r_1^\alpha u_1, r_2^\alpha u_2 & & r_r^\alpha u_r \\ \vdots & & \\ r_1^\alpha u_1^n, r_2^\alpha u_2 & \cdots\cdots & r_r^\alpha u_1^n \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Supposons que ces pôles soient $z_1,\ldots,z_p$ (en renumérotant au besoin les z_i) alors, $r_i^\alpha = 0$, $i > p$. En développant en mineurs de dimension p, il est clair que $C_r = 0$ si $p < n+1$.

Si α est entre $k+1$ et d, il n'y a que n lignes concernées, et on conclut de même que C_r est nul si f_α $(k+1 \leq \alpha \leq d)$ a moins de n pôles.

De manière négative, on a donc, pour que C_r soit non nul, il faut que f_α ait au moins $n+1$ pôles $(1 \leq \alpha \leq k)$ et au moins n pôles $(k+1 < \alpha < d)$.

Dans le cas scalaire d'une fonction f à r pôles, on sait que

H_r^s est non nul sous les hypothèses du théorème I.1, pour s assez grand. Ici, ce n'est pas suffisant et $C_r \neq 0$ doit être interprété comme une condition suffisante d'indépendance polaire des fonctions f_α. Graves Morris et Saff ([12]) trouvent aussi ce type de notion d'indépendance polaire à propos des approximants simultanés de fonctions méromorphes. Nous comparons maintenant la relation existant entre ces deux notions.

Reprenons la définition de Graves Morris et Saff :

Définition.- $f_1,\ldots,f_d$ sont des fonctions méromorphes polairement indépendantes relativement aux entiers $\rho_1,\ldots,\rho_d$ ($\sum_1^d \rho_i > 0$) dans D_R : il n'existe pas de polynômes Π_α ($\partial^o \Pi_\alpha \leq \rho_\alpha - 1$ si $\rho_\alpha \geq 1$ et $\Pi_\alpha \equiv 0$ si $\rho_\alpha = 0$) tels que la fonction

$$\phi(z) = \sum_{\alpha=1}^{d} \Pi_\alpha(z).f_\alpha(z)$$

soit analytique dans D_R.

Supposons les pôles simples et écrivons f_α sous la forme

$$f_\alpha(z) = \sum_{i=1}^{r} \frac{r_i^\alpha}{z_i - z} + g_\alpha(z)$$

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sum_{\alpha=1}^{d} \Pi_\alpha(z).r_i^\alpha}{z_i - z} + \sum_{\alpha=1}^{d} \Pi_\alpha(z).g_\alpha(z)$$

$\phi(z)$ holomorphe dans D_R est équivalent au système suivant :

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \Pi_\alpha(z_i) r_i^\alpha = 0, \qquad i = 1,\ldots,r.$$

C'est un système linéaire de r équations à $(\sum_{\alpha=1}^{d} \rho_\alpha)$ inconnues,

les inconnues étant les coefficients des Π_α. Dans le cas où $\Sigma\rho_\alpha = r$, l'existence des Π_α, non identiquement nuls, est équivalente à dire que le déterminant du système est nul.

Le système s'écrit :

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \sum_{j=1}^{\rho_\alpha - 1} a_j^\alpha z_i^j r_i^\alpha = 0, \quad i = 1,\ldots,r .$$

Le déterminant de ce système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1^{\rho_1-1} r_1^1,\ldots,r_1^1, z_1^{\rho_2-1} r_1^2,\ldots,r_1^2,\ldots\ldots\ldots r_1^d \\ \vdots \\ z_r^{\rho_1-1} r_r^1,\ldots,r_r^1, z_r^{\rho_2-1} r_r^2,\ldots,r_r^2,\ldots\ldots\ldots r_r^d \end{vmatrix} .$$

En transposant, et en regroupant les lignes où apparaissent z_i^0, puis z_i^1, on obtient :

$$\Delta = \varepsilon \begin{vmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \ldots\ldots\ldots & r_r^1 \\ \vdots & \vdots & & \\ r^d & r_2^d & \ldots\ldots\ldots & r_r^d \\ z_1 r_1^1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & z_r r_r^d \\ \vdots & & & \\ z_1 r_1^d & \ldots\ldots\ldots\ldots & & z_r r_r^d \\ \vdots & & & \vdots \end{vmatrix}$$

Si $\rho_1 = \ldots = \rho_k = n+1$ et $\rho_{k+1} = \ldots = \rho_d = n$, alors Δ et C_r sont proportionnels. Donc la condition $C_r \neq 0$ est équivalente à dire que $f_1,\ldots,f_d$ sont polairement indépendantes (au sens de G.M et S) dans le disque contenant r pôles, $(r = nd+k)$, relativement aux entiers

n+1 (k fois) et n (d-k) fois.

II - CONVERGENCE DU QD ALGORITHME.

Théorème II.1 - Toujours sous les hypothèses du théorème I.1, on a :

$$\text{si } |z_r| < |z_{r+1}| \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{H_r^{s+1}}{H_r^s} = u_1,\ldots,u_r$$

$$\text{si } |z_r| < |z_{r+1}| < |z_{r+2}| \quad \lim_{s\to\infty} q_{r+1}^s = \lim \frac{H_{r+1}^{s+1}}{H_{r+1}^s} \cdot \frac{H_r^s}{H_r^{s+1}} = u_{r+1}$$

Démonstration : Les deux résultats se déduisent immédiatement de la relation (2) du théorème I.1.

Nous étudions maintenant la convergence des suites $e_{r,i}^s$, $i = r-d,\ldots,r-1$. Si les polynômes P_r^s sont définis par les relations d'orthogonalité vectorielle (R), les $e_{r,i}^s$ sont solution du système obtenu de la manière suivante :

$$\begin{cases} c^\alpha(x^{s+n}(P_r^{s+1} - P_r^s)) = -\sum_{r-d}^{r-1} \lambda_i c^\alpha(x^{s+n} P_i^{s+1}) & \alpha = k+1,\ldots,d \\ c^\alpha(x^{s+n+1}(P_r^{s+1} - P_r^s)) = -\sum_{r-d}^{r-1} \lambda_i c^\alpha(x^{s+n+1} P_i^{s+1}) & \alpha = 1,\ldots,k. \end{cases}$$

On a donc le système triangulaire suivant, avec $\lambda_i = e_{r,i}^s$:

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda_{r-d}\, c^{k+1}(x^{s+n} P_{r-d}^{s+1}) & = c^{k+1}(x^{s+n} P_r^s) \\ \vdots \qquad\qquad \ddots & \\ \lambda_{r-d}\, c^k(x^{s+n+1} P_{r-d}^{s+1}) + \ldots + \lambda_{r-1} c^k(x^{s+n+1} P_{r-1}^{s+1}) & = c^k(x^{s+n+1} P_r^s). \end{cases}$$

Les polynômes $P^{s+1}_{r-d},\ldots,P^{s+1}_{r},P^{s}_{r}$ sont supposés exister, donc les déterminants de Hankel correspondants sont supposés non nuls.

Pour i entre 1 et d, on définit $H^{s}_{r,k+i}$:

$$H^{s}_{r,k+i} = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_r \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma^{(k)}_{s+n} & \cdots\cdots & \Gamma^{(k)}_{s+n+r} \\ c^{k+i}_{s+n} & \cdots\cdots & c^{k+i}_{s+n+r} \end{vmatrix} \quad \text{si} \quad k < k+i \leqslant d$$

$$\text{ou} \quad H^{s}_{r,k+i} = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_r \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma^{(k)}_{s+n} & \cdots\cdots & \Gamma^{(k)}_{s+n+r} \\ c^{k+i-d}_{s+n+1} & \cdots\cdots & c^{k+i-d}_{s+n+1} \end{vmatrix} \quad \text{si} \quad d < k+i \leqslant d+k \,.$$

Proposition II.2 - Si $\mathbb{F}$ est rationnelle, d'ordre polaire total r, alors

$$H^{s}_{r,k+i} = 0 \qquad i = 1,\ldots,d$$

$$e^{s}_{r,i} = 0 \qquad i = r-d,\ldots,r-1.$$

Démonstration : Le système (4) a pour termes diagonaux $H^{s+1}_{r-d+i+1}/H^{s+1}_{r-d+i}$ qui sont supposés non nuls. Le deuxième membre du système est $H^{s}_{r,k+i}/H^{s}_{r}$, i = 1,...,d. Le même calcul que pour le théorème I.1 ou I.3 montre que $H^{s}_{r,k+i} = 0$, $i \geqslant 1$; donc, la seule solution du système (4) est la solution nulle.

Théorème II.3 - Avec les hypothèses du théorème I.1, on obtient :

si $|z_{r-d}| < |z_{r-d+1}| < |z_{r-d+2}|$

et $|z_r| < |z_{r+1}| < |z_{r+2}|$

$$e^s_{r,r-d} \sim \frac{K_r}{u_{r-d+1}} \left(\frac{u_{r+1}}{u_{r-d+1}}\right)^s \quad \text{et} \quad \lim_{s\to\infty} e^s_{r,r-d} = 0$$

si $|z_{r-d}| < \ldots < |z_{r-d+i+2}|$

et $|z_r| < |z_{r+1}| < |z_{r+2}|$

$$e^s_{r,r-d+i} \sim \frac{K_{r,i}}{u_{r-d+i+1}} \left(\frac{u_{r+1}}{u_{r-d+i+1}}\right)^s \quad \text{et} \quad \lim_{s\to\infty} e^s_{r,r-d+i} = 0$$

Démonstration :

D'après le système (4)

$$e^s_{r,r-d} \cdot \frac{H^{s+1}_{r-d+1}}{H^{s+1}_{r-d}} = \frac{H^s_{r+1}}{H^s_r} \quad .$$

Soit $\bar{C}_r = C_r\left(1 + 0\left(\frac{\rho}{|u_r|}\right)^s\right)$

$$e^s_{r,r-d} = \frac{\bar{C}_{r-d}}{\bar{C}_{r-d+1}} \cdot \frac{\bar{C}_{r+1}}{\bar{C}_r} \cdot \left(\frac{u_{r+1}}{u_{r-d+1}}\right)^s \cdot \frac{1}{u_{r-d+1}} \quad .$$

De même, par les formules de Cramer

$$e^s_{r,r-d+1} = \frac{H^{s+1}_{r-d}}{H^{s+1}_{r-d+2}} \begin{vmatrix} \frac{H^{s+1}_{r-d+1}}{H^{s+1}_{r-d}} & \frac{H^s_{r+1}}{H^s_r} \\ \frac{H^{s+1}_{r-d,k+2}}{H^{s+1}_{r-d}} & \frac{H^s_{r,k+2}}{H^s_r} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} H^{s+1}_{r-d+1} & H^{s}_{r+1} \\ H^{s+1}_{r-d,k+2} & H^{s}_{r,k+2} \end{vmatrix}}{H^{s+1}_{r-d+2} \quad H^{s}_{r}}$$

$$e^{s}_{r,r-d+i} = \frac{H^{s+1}_{r-d+i}}{H^{s+1}_{r-d+i+1}} \begin{vmatrix} H^{s+1}_{r-d+1} & & 0 & H^{s}_{r+1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & H^{s+1}_{r-d+i} & H^{s}_{r,k+i} \\ H^{s+1}_{r-d,k+i+1} & \cdots & H^{s+1}_{r-d+i-1,k+i+1} & H^{s}_{r,k+i+1} \end{vmatrix} \frac{1}{H^{s+1}_{r-d+1} \cdots H^{s+1}_{r-d+i} \; H^{s}_{r}}$$

D'après le théorème I.1

$$\text{si } |z_r| < |z_{r+1}| \text{ , } H^{s}_{r} = C_r(u_1,\ldots,u_r)^s(1 + O(\frac{\rho}{|u_r|})^s)$$

de même pour $H^{s}_{r,k+i}$ qui, étant d'ordre r+1, se comporte comme H^{s}_{r+1} :

$$\text{si } |z_{r+1}| < |z_{r+2}| \text{ , } H^{s}_{r,k+i} = C_{r,k+i}(u_1,\ldots,u_{r+1})^s(1 + O(\frac{\rho}{|u_{r+1}|})^s).$$

Donc on peut appliquer ces relations à tous les déterminants $H^{s}_{r,i}$ considérés si :

$$|z_{r-1}| < \ldots < |z_{r-d+i+2}| \quad \text{et} \quad |z_r| < |z_{r+1}| < |z_{r+2}|$$

$$\Rightarrow \quad e^{s}_{r,r-d+i} = \bar{K}_{r,i} \; \frac{(u_{r+1})^s}{(u_{r-d+i+1})^s}$$

$$\lim_{s\to\infty} \bar{K}_{r,i} = K_{ri} = \begin{vmatrix} C_{r-d+1} & & 0 & & C_{r+1} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & C_{r-d+i} & & \\ C_{r-d,k+i+1} & \cdots & C_{r-d+i-1,k+i+1} & & C_{r,k+i+1} \end{vmatrix} \frac{1}{C_{r-d+1}\cdots C_{r-d+i-1}C_{r-d+i+1}C}$$

$$\text{donc} \quad e^s_{r,r-d+i} \cong \frac{K_{r,i}}{u_{r-d+i+1}} \left(\frac{u_{r+1}}{u_{r-d+i+1}}\right)^s$$

$$\lim_{s\to\infty} e^s_{r,r-d+i} = 0.$$

III - NATURE DE LA CONVERGENCE DE LA SUITE $(q_r^s)_s$ VERS u_r (d impair).

Dans le cas scalaire, la suite $(q_r^s)_s$ est convergente et linéaire [23].

Nous reprenons cette démarche et utilisons les lemmes suivants [8].

Une suite convergente x_n est dite linéaire, de vitesse λ si :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda, \quad |\lambda| < 1.$$

Dans ce qui suit, les suites considérées sont convergentes.

Lemme III.1 - Si $|\lambda| \neq 1$, on a l'équivalence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda \iff \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \lambda .$$

Si $|\lambda| = 1$, il n'y a aucune implication ni dans un sens ni dans l'autre.

Lemme III.2 - Si x_n et y_n sont linéaires de vitesses λ et μ ($|\lambda| > |\mu|$), alors $(x_n.y_n)$ est linéaire de vitesse λ.

Si $|\lambda| = |\mu|$ on ne peut conclure.

Lemme III.3 - Si x_n est linéaire de vitesse λ, de limite x non nulle, x_n^{-1} est linéaire de vitesse λ.

On écrit $q_{r+1}^s = \dfrac{t_s(r+1)}{t_s(r)}$, $t_s(r) = \dfrac{H_r^{s+1}}{H_r^s}$.

Dans le cas scalaire, on démontre que $t_s(r)$ est une suite linéaire (lemme II.1) de vitesse $\dfrac{u_{r+1}}{u_r}$, donc q_{r+1}^s est linéaire de vitesse $\dfrac{u_{r+1}}{u_r}$ ou $\dfrac{u_{r+2}}{u_{r+1}}$ (lemmes II.2 et II.3) pourvu que $\left|\dfrac{u_{r+1}}{u_r}\right| \neq \left|\dfrac{u_{r+2}}{u_{r+1}}\right|$

L'étude de la linéarité de t_s se fait en étudiant :

$$\frac{\Delta t_s(r)}{\Delta t_{s-1}(r)} = \frac{H_r^{s+2}/H_r^{s+1} - H_r^{s+1}/H_r^s}{H_r^{s+1}/H_r^s - H_r^s/H_r^{s-1}}$$

$$= \frac{H_r^{s+2}.H_r^s - (H_r^{s+1})^2}{H_r^{s+1}.H_r^{s-1} - (H_r^s)^2} \cdot \frac{H_r^s.H_r^{s-1}}{H_r^s.H_r^{s+1}} \quad .$$

Le quotient se transforme par l'identité de Sylvester que nous étendons d'abord aux déterminants de Hankel généralisés qui sont ici utilisés.

Lemme III.4 - Extension de l'identité de Sylvester aux déterminants de Hankel généralisés (d impair).

Soit $r = nd+k$ et $h_s = (\Gamma_s,\ldots,\Gamma_{s+n},\Gamma_{s+n+1}^{(k)})^t$ vecteur à $r+d$

composantes.

Soit e_1 le bloc de d colonnes, r+d lignes commençant par Id_d puis 0.

Soit e_{n+1} le bloc de d colonnes, r+d lignes finissant par Id_d et 0 avant.

On note (e_i^j) un choix arbitraire de j colonnes parmi e_i, $\hat{e}_i^j$ les colonnes complémentaires, et $M^j_{s,k}$ le déterminant $(r+d) \times (r+d)$ suivant :

$$|e_1^j, h_s, \ldots, h_{s+k}, e_{n+1}^{r+d-k-j}|.$$

Enfin, ε_j (ε'_j) est égal à $(-1)^\alpha$ où α est la somme des indices des colonnes considérées dans e_1^j (dans e_{n+1}^j). Alors l'identité de Sylvester se généralise sous la forme suivante (pour d impair)

$$H_r^{s-1}.H_r^{s+1} - (H_r^s)^2 = \sum_{j=1}^{d} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j+1} M^j_{s,r-1}.M^{d+1-j}_{s-1,r+1} + \sum_{j=1}^{d-1} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j} M^j_{s,r} M^{d-j}_{s-1,r}$$

(le $\sum$ intérieur signifiant somme sur les choix possibles de j colonnes dans e_1 et d-j ou d+1-j colonnes dans e_{n+1}).

Démonstration : On considère la matrice A de dimension $2(r+d) \times 2(r+d)$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & h_s & \cdots & h_{s+r-2} & h_{r+s-1} & h_{s-1} & 0 & \cdots & 0 & e_{n+1} \\ e_1 & 0 & \cdots & 0 & h_{r+s-1} & h_{s-1} & h_s & \cdots & h_{r+s-2} & e_{n+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{vmatrix} \qquad e_{n+1} = \begin{vmatrix} & 0 & \\ 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} \qquad d \times (r+d)$$

Par soustraction, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & h_s & \cdots & h_{r+s-2} & 0 & 0 & -h_s & \cdots & -h_{r+s-2} & 0 \\ e_1 & 0 & & 0 & h_{r+s-1} & h_{s-1} & h_s & \cdots & h_{r+s-z} & e_{n+1} \end{vmatrix}$$

En développant en mineurs de taille $r+d$, on voit que $\det A = 0$.
On développe alors $\det A$, avec A sous la forme initiale, en mineurs de taille $r+d$. Les termes sont de la forme $\varepsilon M_1 M_2$ où M_1 est formé à partir des $(r+d)$ premières lignes et M_2 des $r+d$ dernières.

* Si on prend strictement moins de $(r-1)$ colonnes en h_i dans M_1, alors $M_2 = 0$.

* Si on prend $(r-1)$ termes en h_i dans M_1, pour que $M_2 \neq 0$, il faut que ce soit $h_s \cdots h_{s+r-2}$ que l'on complète par j colonnes dans e_1 et $d+1-j$ dans e_{n+1}

$$M_1.M_2 = |e_1^j, h_s \cdots h_{r+s-2}, e_{n+1}^{d+1-j}|.|\hat{e}_1^j.h_{s+r-1}\ h_{s-1}\ h_s \cdots h_{s+r-2}; \hat{e}_{n+1}^{d+1-j}|.$$

Ce terme a un "correspondant" : c'est le cas où on prend $(r+1)$ colonnes en (h_i) dans M_1 et la partition de e_1 : $\hat{e}_1^j$

$$M_1'.M_2' = |\hat{e}_1^j, h_s \cdots h_{s+r-1}\ h_{s-1}\ \hat{e}_{n+1}^{d+1-j}|.|e_1^j, h_s \cdots h_{s+r-2}\ e_{n+1}^{d+1-j}|.$$

On a $M_1 = M_2'$ et $M_1' = M_2$.

Ces termes apparaissent dans $\det A$ affectés d'un signe $(-1)^\alpha$ où α est la somme des indices des colonnes considérées dans M_1 ou M_1' : Calculons α et α', α correspondant à M_1 et α' à M_1'. On note $k_1 \cdots k_j$ les colonnes considérées dans $(e_1)^j$ et

$2r+d+k_i'$ celles considérées dans $(e_{n+1})^{d+1-j}$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{j} k_i + (d+1+ \ldots + d+r-1) + (d+1-j)(2r+d) + \sum_{i=1}^{d+1-j} k'_i$$

$$\alpha' = (\frac{d(d+1)}{2} - \sum_{1}^{j} k_i) + (d+1+ \ldots + d+r+1) + (j-1)(2r+d) + (\frac{d(d+1)}{2} - \sum_{1}^{d+1-j} k'_i)$$

Pour savoir si ces termes s'ajoutent ou se compensent, il suffit de calculer la différence $\alpha-\alpha'$ modulo 2 :

$$\alpha'-\alpha = \frac{d(d+1)}{2} + (d+r+d+r+1) + d(2r+d) + \frac{d(d+1)}{2}$$

$$\alpha'-\alpha = 1 + d^2 \quad (2) \quad .$$

Soit $\alpha'-\alpha = 1+d \quad (2)$:

. si d est impair les termes s'ajoutent ;

. si d est pair les termes disparaissent.

* Si on prend r termes en h_i, on a de manière similaire :

$$M_1.M_2 = |e_1^j, h_s \ldots h_{s+r-1}, e_{n+1}^{d-j}|.|\hat{e}_1^j\ h_{s-1}\ h_s \ldots h_{s+r-2}, \hat{e}_{n+1}^{d-j}|$$

$$\text{ou } M'_1.M'_2 = |e_1^{j'}, h_s \ldots h_{s+r-2}, h_{s-1}, e_{n+1}^{\lambda-j'}|.|\hat{e}_1^{j'}, h_{r+s-1}, h_s, \ldots, h_{r+s-2}, \hat{e}_{n+1}^{\lambda-j}| \quad .$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } M'_2 = (-1)^r M_1 \\ \qquad\quad M'_1 = (-1)^r M_2 \end{array}\right\} \text{ si } \hat{e}_1^{j'} = e_1^j$$

Il faut voir si ces termes s'ajoutent ou non :

$$\alpha = (\sum_{1}^{j} k_i) + d + 1 + \ldots + d + r + (d-j)(d+2r) + \sum_{1}^{d-j} k'_i)$$

$$\alpha' = (\frac{d(d+1)}{2} - \sum_{1}^{j} k_i) + d+1+\ldots+d+r-1+d+r+1+j(d+2r) + (\frac{d(d+1)}{2} - \sum_{1}^{d-j} k'_i)$$

$\alpha - \alpha' = 1 + d^2$ (2)

$\alpha - \alpha' = 1 + d$ (2).

Finalement, si d est pair le développement de $\det A$ donne $0 = 0$, si d est impair, on obtient deux fois chaque terme.

On note $\varepsilon_j = (-1)^{\alpha}$ où α est la somme des indices des j colonnes considérées dans e_1^j, $\varepsilon'_{j'} = (-1)^{\alpha'}$ où α' est la somme des indices des j' colonnes considérées dans $e_{n+1}^{j'}$ $M^j_{s,k}$ le déterminant formé par les colonnes $e_1^j\ h_s \ldots h_{s+k}, e_{n+1}^{d+r-k-j}$, $k = r-1, r$ ou $r+1$.

On obtient :

$$\sum_{j=1}^{d} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j+1}\ M^j_{s,r-1}\ M^{d+1-j}_{s-1,r+1} + \sum_{j=0}^{d} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j}\ M^j_{s,r}\ M^{d-j}_{s-1,r} = 0.$$

Le $\sum$ muet correspond à la somme sur les choix possibles de j colonnes dans e_1 et de $d-j$ ou $d+1-j$ colonnes dans e_{n+1}.

Dans la deuxième somme, on a :

pour $j = d$, $e_1^j = e_1$ et $\hat{e}_{n+1}^{d-j} = e_{n+1}$

$$\varepsilon_j \cdot |e_1, h_s \ldots h_{s+r-1}| \cdot |h_{s-1} \ldots h_{s+r-2}\ e_{n+1}| = H_r^{s+1} \cdot H_r^{s-1} (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}}$$

pour $j = 0$, $\hat{e}_1^j = e_1$ et $e_{n+1}^{d-j} = e_{n+1}$

$$\varepsilon_j |h_s \ldots h_{s+r-1}\ e_{n+1}| \cdot |e_1, h_{s-1} \ldots h_{s+r-2}| = (H_r^s)^2 (-1)^{d^2 + \frac{d(d+1)}{2}}$$

donc, on a :

$$H_r^{s+1} \cdot H_r^{s-1} - (H_r^s)^2 = \sum_{j=1}^{d} \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j+1}\ M^j_{s,r-1}\ M^{d+1-j}_{s-1,r+1} + \sum_{j=1}^{d-1} \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j}\ M^j_{s,r} \cdot M^{d-j}_{s-1,r} \cdot \blacksquare$$

Remarque : Si $d = 1$, la deuxième somme de la dernière égalité est vide et la première se réduit à $j = 1$ donc $e_1^j = e_1$ et $e_{n+1}^{d-j+1} = e_{n+1}$.

$$\varepsilon_j \varepsilon'_{d-j+1} |e_1, h_s \cdots h_{s+r-2}\ e_{n+1}| \cdot |h_{r+s-1}\ h_{s-1} \cdots h_{r+s-2}| = H_{r-1}^{s+1} \cdot H_{r+1}^{s-1} .$$

On retrouve l'identité de Sylvester classique.

Les déterminants $M_{s,r}^j$ s'évaluent comme les déterminants de Hankel dans le théorème I.1 :

Lemme III.5 - Soit $M_{s,k}^j = |e_1^j, h_s \cdots h_{s+k-1}, e_{n+1}^{r+d-j-k}|$ $\quad j \geq 1$

$$j < d,\ M_{s,k}^j = C_{jk}(u_1 \cdots u_k)^s(1 + O(|\frac{\rho}{u_k}|^s)) \quad k = r-1, r \quad |u_{k+1}| < \rho < |u_k|$$

$$j = d,\ M_{s,k-1}^d = C_{j,r-1}(u_1 \cdots u_{r-1})^{s+1}(1 + O(|\frac{\rho}{u_{r-1}}|)^{s+1}) \quad |u_r| < \rho < |u_{r-1}|$$

Démonstration : $h_s = (\Gamma_s \cdots \Gamma_{s+n+1}^{(k)})^T$.

En développant $M_{s,r}^j$ par rapport aux j premières colonnes, on fait disparaître j lignes de $(\Gamma_s \cdots \Gamma_{s+r-1})$, mais pour j inférieur ou égal à $(d-1)$, on garde toujours au moins une ligne de $(\Gamma_s \cdots \Gamma_{s+r-1})$. En procédant comme au théorème I.1, on trouve donc :

$$M_{s,k}^j = C_{j,k}(u_1 \cdots u_k)^s(1 + (|\frac{\rho}{u_k}|^s)) \quad j = 1 \ldots d-1 \quad |u_{k+1}| < \rho < |u_k|$$

où $C_{j,k}$ dépend de k $(k = r-1$ ou $r)$ et de la partition j.

Si $j = d$, $e_1^j = e_1$, mais nous n'avons à considérer que $k = r-1$

$$|e_1^j\ h_s \cdots h_{s+r-2}, e_{n+1}^{d-j+1}| = |e_1\ h_s \cdots h_{s+r-2}, e_{n+1}^1|$$

$$= \begin{vmatrix} \Gamma_{s+1} & \cdots\cdots & \Gamma_{s+r-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \Gamma^{(k)}_{s+n+1} & \cdots\cdots & \Gamma^{(k)}_{s+n+r} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{vmatrix} .$$

C'est un déterminant H^{s+1}_{r-1} à une des d dernières lignes près. Mais le même calcul qu'au théorème I.1 donne :

$$M^{j}_{d,r-1} = C_{d,r-1}(u_1 \ldots u_{r-1})^{s+1}(1 + O(|\frac{\rho}{u_{r-1}}|^{s+1}) \quad |u_r| < \rho < |u_{r-1}| .$$

Proposition II.6 - Convergence et type de convergence de $(t_s(r))_s$ et $(q^s_{r+1})_s$, (d impair).

Démonstration : Etude de la limite $\Delta t_s(r)/\Delta t_{s-1}(r)$.

$$\Delta t_{s-1} = \frac{H^{s+1}_r H^{s-1}_r - (H^s_r)^2}{H^{s-1}_r H^s_r} .$$

$$H^{s+1}_r . H^{s-1}_r - (H^s_r)^2 = \sum_{j=d} \varepsilon'_1 M^d_{s,r-1} . M^1_{s-1,r+1} + \sum_{j=1}^{d-1} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d+1-j} M^j_{s,r-1} M^{d+1-j}_{s-1,r+1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{d-1} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d-j} M^j_{s,r} . M^{d-j}_{s-1,r}$$

$$= (u_1 \ldots u_{r-1})^{s+1}(u_1 \ldots u_{r+1})^{s-1} A$$

$$+ (u_1 \ldots u_{r-1})^{s}(u_1 \ldots u_{r+1})^{s-1} B$$

$$+ (u_1 \ldots u_{r})^{s}(u_1 \ldots u_{r})^{s-1} C$$

$$A = (1 + O(|\frac{\rho}{u_{r-1}}|^{s+1}))(1 + O(|\frac{\rho'}{u_{r+1}}|^{s-1}) \sum \varepsilon'_1 C_{d,r-1} C_{1,r+1}$$

$$B = (1 + O(|\frac{\rho}{u_{r-1}}|^{s}))(1 + O(|\frac{\rho'}{u_{r+1}}|^{s-1}). \sum_{j=1}^{d-1} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d+1-j} C_{j,r} C_{d-j+1,r}$$

$$C = (1 + O(|\frac{\rho'}{u_r}|^{s}))(1 + O(|\frac{\rho''}{u_r}|^{s-1})). \sum_{j=1}^{d-1} \sum \varepsilon_j \varepsilon'_{d+1-j} C_{j,r} C_{d-j,r} .$$

Et toujours selon le théorème I.1 ou le lemme II.5, ce résultat est possible pour tous ρ $\rho'\rho''$ vérifiant :

$$|u_{r+2}| < \rho' < |u_{r+1}| < \rho'' < |u_r| < \rho < |u_{r-1}|.$$

D'autre part, d'après le théorème I.1

$$H_r^s = C_r(u_1 \dots u_r)^s(1 + O((\frac{\rho''}{|u_r|})^s)$$

$$H_r^{s-1}.H_r^s = (u_1 \dots,u_r)^{2s-1} D$$

$$D = C_r^2(1 + O((\frac{\rho''}{|u_r|})^s)^2 \qquad \lim_{s\to\infty} D = D_1 = C_r^2 \neq 0 .$$

Finalement, on obtient :

$$\Delta t_{s-1}(r) = \frac{(u_1\dots u_{r-1})^{2s}(u_r\ u_{r+1})^{s-1}A+(u_1\dots u_{r-1})^{2s-1}(u_r\ u_{r+1})^{s-1}B+(u_1\dots u_r)^{2s-1}C}{(u_1\dots u_r)^{2s-1}\ D} .$$

Toutes les quantités A B C D s'écrivent sous la forme :

$$A = (1 + O(|\frac{\rho}{u_{r-1}}|^{s+1}))(1 + O(|\frac{\rho'}{u_{r+1}}|^{s-1}).A_1.$$

Les quantités d'indice 1 sont de vraies constantes et

$\lim_{s\to\infty} A = A_1$ (de même pour BCD, $D_1 \neq 0$)

$$\Delta t_{s-1}(r) = u_1,\ldots,u_{r-1}\ \frac{u_{r+1}^{s-1}}{u_r^s}\frac{A}{D} + \frac{u_{r+1}^{s-1}}{u_r^s}\frac{B}{D} + \frac{C}{D} \quad .$$

On sait que $\lim_{s\to\infty} t_s(r) = u_1 \ldots u_r$ donc la limite de $\Delta t_{s-1}(r)$ vaut zéro, donc $C_1 = 0$ et $C = 0$.

Finalement, $\Delta t_{s-1}(r) = \frac{u_{r+1}^{s-1}}{u_r^s}\left(\frac{u_1\ldots u_{r-1}A+B}{D}\right)$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Delta t_s(r)}{\Delta t_{s-1}(r)} = \frac{u_{r+1}}{u_r} \quad .$$

Sous l'hypothèse déjà plusieurs fois utilisée que $|u_{r+1}| < |u_r|$, la suite $(t_s(r))_s$ est donc linéaire, de vitesse $\frac{u_{r+1}}{u_r}$.

Si, de plus, on suppose $\left|\frac{u_r}{u_{r+1}}\right| \neq \left|\frac{u_r}{u_{r-1}}\right|$ alors la suite $q_r^s = t_s(r)/t_s(r-1)$ est linéaire de vitesse la quantité de plus grand module entre $\frac{u_{r+1}}{u_r}$ et $\frac{u_r}{u_{r-1}}$. ■

IV - ZEROS DES POLYNOMES VECTORIELLEMENT ORTHOGONAUX.

Ces polynômes ont été définis par les relations d'orthogonalité vectorielles (R), et admettent une représentation comme rapport de deux déterminants :

$$P_r^s(x) = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots & \Gamma_{s+r} \\ \vdots & & \\ \Gamma_{s+n-1} & \cdots & \Gamma_{s+r+n-1} \\ \Gamma_{s+n}^{k)} & \cdots & \Gamma_{s+r+n}^{(k)} \\ 1 & \cdots & x^r \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots & \Gamma_{s+r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots & \Gamma_{s+r+n-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$= H_r^s(x)/H_r^s \ .$$

Les zéros de ces polynômes peuvent être trouvés par une méthode directe déduit des paragraphes précédents, ou en considérant les P_r^s comme dénominateurs des approximants de Padé vectoriels et en étendant le théorème de Montessus de Ballore au cas vectoriel par une méthode de variables complexes. Cette deuxième méthode est développée au paragraphe suivant.

Théorème IV.1 - Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème I.1, on a

$$H_r^s(u) = C_r(u_1 \ldots u_r)^s \left[\prod_1^r (u-u_i) + O((\frac{\rho}{|u_r|})^s \right]$$

uniformément pour u dans tout ensemble borné.

Démonstration :

$$H_r^s(x) = \begin{vmatrix} \Gamma_s & \cdots\cdots & \Gamma_{s+r} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{s+n}^{(k)} & \cdots\cdots & \Gamma_{s+n+r}^{(k)} \\ 1 & \cdots\cdots & x^r \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_s = \sum_{i=1}^{r} R_i u_i^{s+1} + B_s \ .$$

On utilise la multilinéarité du déterminant vis-à-vis des lignes et on trouve :

$$H_r^s(x) = D_r^s(x) + \hat{D}_r^s(x).$$

$\hat{D}_r^s(x)$ représente la somme des déterminants où figure au moins une ligne en B_i.

$D_r^s(x)$ est un polynôme de degré r en x, de coefficient directeur

$$C_r(u_1 \dots u_r)^s.$$

D'autre part, en utilisant toujours la linéarité par rapport aux lignes scalaires : $\sum_1^r R_i u_i^{s+k} = \left(\sum_1^r R_i^\alpha u_i^{s+k} \right)_{\alpha=1,\dots,d}$, le déterminant se décompose en une somme de déterminants dont seuls ne sont pas nuls :

$$D_r^s(x) = \sum_{i_1 \dots i_r} \begin{vmatrix} r_{i_1}^\alpha u_{i_1}^{s+1} & \dots\dots\dots\dots & r_{i_1}^\alpha u_{i_1}^{s+r+1} \\ \\ r_{i_r}^\alpha u_{i_r}^{s+n+1} & \dots\dots\dots\dots & r_{i_r}^\alpha u_{i_r}^{s+r+n+1} \\ 1 & \dots\dots\dots\dots & x^r \end{vmatrix}$$

Dans ces déterminants, chaque u_i apparaît dans une ligne et donc

$$D_r^s(u_i) = 0, \quad i = 1 \dots r .$$

Finalement, on a l'expression de $D_r^s(x)$:

$$D_r^s(x) = C_r(u_1 \dots u_r)^s . \prod_1^r (x-u_i).$$

Pour $\hat{D}_r^s(x)$, le même raisonnement qu'au théorème I.1, montre que pour x dans tout ensemble borné du plan, on a :

$$\hat{D}_r^s(x) = C_r(u_1 \dots u_r)^s . O(|\frac{\rho}{u_r}|^s).$$

On a finalement :

$$H_r^s(x) = C_r(u_1 \dots u_r)^s \left[\prod_1^r (x-u_i) + O(|\frac{\rho}{u_r}|^s) \right].$$

On peut comme pour le théorème I.1 étendre le résultat au cas où les z_i ne sont pas des pôles simples pour f_α.

Corollaire IV.2 - Sous les mêmes hypothèses, les zéros des polynômes orthogonaux convergent vers les $(u_i)_{i=1\ldots r}$ quand s tend vers l'infini.

Corollaire IV.3 - Si $\mathbb{F}$ rationnelle, d'ordre polaire total r, alors les polynômes orthogonaux P_r^s sont exactement, pour $s \geq 0$:

$$P_r^s(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-u_i).$$

V - THEOREME DE MONTESSUS DE BALLORE.

Cette démonstration utilisant la théorie des variables complexes est une variante de celle de Saff [24], et est à rapprocher du résultat obtenu par Saff et Graves-Morris pour les approximants simultanés [12].

Nous résumons maintenant les données, avant l'énoncé du théorème.

Soit $\mathbb{F}$ la fonction $\mathbb{F} = (f_1 \ldots f_d)$.

f_α est holomorphe dans le disque D_τ de rayon τ sauf en un nombre fini de points z_i qui sont des pôles $(z_i \neq 0)$.

L'ensemble des pôles de f_α est appelé E_α, contient m_α points.

r est le nombre de points de $\bigcup_{\alpha=1}^{d} E_\alpha$: $r \leq \sum_{\alpha=1}^{d} m_\alpha = m$;

r n'est égal à m que dans le cas où les E_α sont disjoints.

On veut démontrer que la colonne d'indice r de la table de Padé vectorielle converge vers $\mathbb{F}$, uniformément sur tout compact de $D = D_\tau - \{z_i\}$, et que les zéros des dénominateurs q_r^s (notés q_r) convergent vers les points z_i. On suppose essentiellement que les approximants $[s/r]$ existent, ce qui fait différer la démonstration de celle obtenue dans le cas scalaire par Saff. On peut obtenir une extension à des approximants de Padé vectoriels multipoints en les définissant comme les approximants de Padé vectoriels.

Théorème V.1 - Soit $\mathbb{F} = (f_1,\ldots,f_d)$ une fonction holomorphe dans le disque de rayon τ, sauf peut-être en nombre fini de points $E = \bigcup_{\alpha=1}^{d} E_\alpha$, E_α étant l'ensemble des pôles de f_α. Soit D le domaine obtenu en enlevant les pôles du disque $|z| < \tau$, et r le nombre d'éléments de E. On suppose que les approximants de Padé vectoriels $[s/r]$ existent pour tout s. Alors les approximants de Padé vectoriels $[s/r]$ convergent, quand s tend vers l'infini, vers $\mathbb{F}$ uniformément sur tout compact de D. Les pôles de ces approximants convergent vers les pôles de $\mathbb{F}$.

Les E_α sont assujetis à la condition décrite en début de démonstration.

Démonstration : Nous supposons que $\{z_1,\ldots,z_r\} = E$ sont rangés de telle sorte que, $r = nd+k$:

$$E_1 = \{z_1,\ldots,z_{n+1}\}$$

$$\{z_{n+2},\ldots,z_{2n+2}\} \subset E_2 \subset \{z_1,\ldots,z_{2n+2}\}$$

$$\vdots$$

$$\{z_{(k-1)n+k},\ldots,z_{kn+k}\} \subset E_k \subset \{z_1,\ldots,z_{kn+k}\}$$

$$\{z_{kn+k+1},\ldots,z_{(k+1)n+k}\} \subset E_{k+1} \subset \{z_1,\ldots,z_{n(k+1)+k}\}$$

$$\vdots$$

$$\{z_{(d-1)n+k+1},\ldots,z_{nd+k}\} \subset E_d \subset \{z_1,\ldots,z_{nd+k}\} \quad .$$

Cette hypothèse qui implique notamment que chaque f_α a au moins n pôles (ou $n+1$ pour les k premières fonctions) n'est pas optimum comme il est indiqué dans la remarque suivant cette démonstration.

Pour $\alpha = 1,\ldots,k$, on pose $Z^\alpha(z) = \prod_{i=(\alpha-1)n+\alpha}^{\alpha n+\alpha} (z-z_i)$, $\quad d^0Z^\alpha = n+1$

Pour $\alpha = k+1,\ldots,d$, on pose $Z^\alpha(z) = \prod_{(\alpha-1)n+k+1}^{\alpha n+k} (z-z_i)$, $\quad d^0Z^\alpha = n$.

On utilisera les notations classiques suivantes :

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{r} (z-z_i)$$

$$\omega_0 = 1 \qquad \omega_k(z) = \prod_{1}^{k} (z-z_i)$$

$$q_r(z) = \sum_{k=1}^{r} a_k\, \omega_{k-1}(z) + Q(z) \quad (q_r \text{ et } a_k \text{ dépendent de } s)$$

$$[s/r] = \mathbb{P}_s/q_r = (P_s^\alpha/q_r)_{\alpha=1,\ldots,d} \ .$$

Les relations précédentes déterminent complètement les a_k, contrairement à la démonstration de Saff ([24]).

C_R est un cercle de centre 0, de rayon R $(R < \tau)$ contenant les z_i

et z dans son intérieur.

Par définition de l'approximant de Padé vectoriel, on a :

$$\alpha = 1,\ldots,d \qquad P_s^\alpha/q_r(z) - f_\alpha(z) = 0(z^{s+n+\varepsilon}) \qquad \begin{matrix}\varepsilon = 2 & \alpha = 1,\ldots,k \\ \varepsilon = 1 & \alpha = k+1,\ldots,d\end{matrix}$$

P_s^α interpole $q_r.\mathbf{f}^\alpha$ en 0 à l'ordre $s+n+\varepsilon$.

$P_s^\alpha\, Z^\alpha$ interpole $q_r.Z^\alpha.f_\alpha$ en 0 à l'ordre $s+n+\varepsilon$ et est un polynôme de degré $s+n+\varepsilon-1$. On peut donc appliquer le formule d'Hermite :

$$P_s^\alpha.Z^\alpha(z) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C_R}\left(1 - \frac{z^{n+s+\varepsilon}}{t^{n+s+\varepsilon}}\right)\frac{q_r.Z^\alpha.f_\alpha(t)}{t - z}\,dt \qquad \alpha = 1,\ldots,d.$$

$P_s^\alpha.Z^\alpha(z_i) = 0$ pour z_i zéro de Z^α.

En remplaçant q_r par son développement sur la base (ω_k), on trouve que les a_k vérifient le système de r équations à r inconnues suivant :

$$\sum_{k=1}^{r} a_k\, c_{ik}^\alpha = d_i^\alpha \qquad \alpha = 1,\ldots,d \qquad i : z_i \text{ zéro de } Z^\alpha$$

$$c_{ik}^\alpha = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C_R}\left(1 - \frac{z_i^{n+s+\varepsilon}}{t^{n+s+\varepsilon}}\right)\frac{\omega_{k-1}.Z^\alpha.f_\alpha(t)}{t - z_i}\,dt$$

$$d_i^\alpha = -\frac{1}{2i\Pi}\int_{C_R}\left(1 - \frac{z_i^{n+s+\varepsilon}}{t^{n+s+\varepsilon}}\right)\frac{Q.Z^\alpha f_\alpha(t)}{t - z_i}\,dt\ .$$

L'indice supérieur α de c_{ik}^α et d_i^α peut être omis, car il est entièrement défini par i : $i = h_1\, n + h_2$

si $h_1 \leq k$ $\quad h_2 \leq h_1 \quad \alpha = h_1$

$\qquad\qquad\quad h_2 > h_1 \quad \alpha = h_1+1$

si $h_1 > k$ $\quad h_2 \leq k \quad \alpha = h_1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad h_2 > k \quad \alpha = h_1+1$.

$$\lim_{s\to\infty} c_{ik} = \tilde{c}_{ik} = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C_R} \frac{\omega_{k-1}.Z^{\alpha}.f_{\alpha}(t)}{t - z_i}\,dt \quad \neq 0 \quad k = i,i-1,\ldots,i-n$$

$$= 0 \quad k > i$$

$$\lim_{s\to\infty} d_i = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C_R} \frac{Q.Z^{\alpha}.f_{\alpha}(t)}{t - z_i}\,dt = 0$$

Les a_k sont donc solutions d'un système asymptotiquement triangulaire de diagonale non nulle, et de second membre nul ; on a donc

$$\lim_{s\to\infty} a_k = 0$$

$$\lim_{s\to\infty} q_r(z) = Q(z) \quad \textit{uniformément sur tout compact de } D.$$

Pour tout compact K de D, et pour s assez grand, q_r n'a pas de zéros dans K, donc q_r et Q sont bornés supérieurement et inférieurement dans K.

$$P_s^{\alpha}.Z^{\alpha}(z) - q_r.Z^{\alpha}.f_{\alpha}(z) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C_R} \frac{z^{n+s+\varepsilon}}{t^{n+s+\varepsilon}} \frac{q_r.Z^{\alpha}.f_{\alpha}(t)}{t - z}\,dt$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\left[\sup_{\alpha}\sup_{z\in K} |(P_s^{\alpha}/q_r - f_{\alpha})(z)|\right]^{1/s} \leq \frac{R}{\tau} < 1 .$$

On a donc la convergence souhaitée.

Supposons qu'un pôle z_i soit multiple d'ordre μ pour une fonction f_{α} et intervienne μ' fois dans Z^{α}.

On aura μ' équations du type :

$$(P_s^\alpha . Z^\alpha)^{(j)}(z_i) = 0, \qquad i = 0,\ldots,\mu'-1.$$

Pour ce pôle z_i, on a donc μ' équations

$$\sum_{k=1}^{r} a_k c_{jk}^\alpha = d_j^\alpha$$

$$\lim_{s\to\infty} c_{jk}^\alpha = \frac{j!}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{\omega_{k-1} . Z^\alpha . f_\alpha(t)}{(t-z_i)^{j+1}} \qquad j = 0,\ldots,\mu'-1 \quad k = 1,\ldots,r \ .$$

La démonstration se poursuit sans modifications.

Remarque 1 :

Ce qui est strictement nécessaire à la démonstration est le fait que le déterminant $|c_{ik}|_{i,k}$ admet pour limite un déterminant $|\tilde{c}_{ik}|_{i,k}$ non nul. Les hypothèses faites sur les E_α font que $|\tilde{c}_{ik}|_{i,k}$ est triangulaire de diagonale non nulle. Il pourrait évidemment être non nul sans être triangulaire.

Remarque 2 :

Les problèmes précédents rejoignent le problème de l'indépendance polaire des fonctions f_α. Ce problème n'apparaît pas explicitement car il est masqué par l'hypothèse d'existence des approximants de Padé vectoriels $[s/r]$, $s \geqslant 0$.

Que ce soit par l'une quelconque des deux méthodes développées aux parties IV et V, il faut noter qu'on trouve l'ensemble E des pôles, mais qu'on ne peut distinguer de quelle fonction f_α un point z_i est pôle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREZINSKI C. - Accélération de la convergence en Analyse Numérique, LN 584, (1977), Springer Verlag.

[2] BREZINSKI C. - The Mühlbach Neville Aitken algorithm and some extensions, BIT 20, (1980), p. 444-451.

[3] BREZINSKI C. - Padé type approximants and general orthogonal polynomials, Birkäuser Verlag, Basel (1980).

[4] BREZINSKI C. - Recursive interpolation, extrapolation and projection, J. of Comp. and Appl. Math. 9, (1983), p. 369-376, North Holland.

[5] de BRUIN M.G. - Some convergence results in simultaneous rational approximation to the set of hypergeometric function $({}_1F_1(1;c_i;z))_{i=1...n}$ in Padé approximation and its applications, ed. Werner LN n° 1071, p. 12-33 (1983).

[6] de BRUIN M.G. - Simultaneous Padé approximation and orthogonality 74.83 in Polynômes orthogonaux et applications, Bar-le-Duc (1984), ed. Brezinski and Co, LN 1171, Springer Verlag.

[7] CHIHARA T.S. - An introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, (1978).

[8] DELAHAYE J.P. - Théorie des transformations de suites en Analyse Numérique. Applications. Thèse, Lille (1982).

[9] DRAUX A. - Polynômes orthogonaux formels. Applications. Thèse, Lille (1981).

[10] FAVARD J. - Sur les polynômes de Tchebycheff, C.R. Acad. des Sc. 200 (1935), p. 205.

[11] GRAVES-MORRIS P.R. - Vector valued rationals interpolants I. Numer. Math. 42, p. 331-348 (1965).

[12] GRAVES-MORRIS P.R. and SAFF E.B. - A de Montessus theorem for vector valued rational interpolants, 227-242, in Rational approximation and interpolation. Tampa 83 ed by P.R. Graves-Morris and Co. LN 1105, Springer Verlag.

[13] HENRICI P. - Applied and computational complex analysis, J. Wiley and Sons (1971).

.../...

[14] HERMITE Ch. - Sur la fonction exponentielle, Oeuvres t. III, 150-181 (1873), Gauthier Villars, Paris.

[15] HERMITE Ch. - Sur la généralisation des fractions continues algébriques, Oeuvres t. IV, 357-377 (1893), Gauthier Villars, Paris.

[16] KAKEHASHI T. - The decomposition of coefficients of power series and the divergence of interpolation polynomials. Proc. Japan Acad. 31, n° 8, 517 (1955).

[17] KAKEHASHI T. - On interpolations of Analytic Functions I and II, Proc. Japan Acad. 32, n° 10, 707 (1956).

[18] LOXTON J.H. and VAN DER POORTEN J. - Multi-dimensional generalizations of the Padé table, Rocky Mountain, J. of Math. Vol. 9, n° 3, p. 385-393 (1979).

[19] MARONI P. - Generalisation du théorème de Shohat-Favard sur les polynômes orthogonaux, C.R. Ac. des Sc. t. 239 (6 juillet 1981).

[20] MÜHLBACH G. - The general Neville-Aitken algorithm and some applications, Numer. Math. 31, p. 97-110 (1978).

[21] PADÉ H. - Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 9, supplément 1.93 (1892).

[22] PADÉ H. - Sur la généralisation des fractions continues algébriques, J. de Math. Pures et Appliquées, 4e série, 10.291-329 (1894).

[23] PREVOST M. - Calculation of poles of meromorphic functions with q.d, r.s algorithms... J.C.A.M. to appear (1987).

[24] SAFF E.B. - An extension of Montessus de Ballore's theorem on the Convergence of Interpolating Rational Functions, J. of Approx. Theory 6. p. 63-67 (1972).

[25] SHOHAT J.A. - Sur les polynômes orthogonaux, C.R. Acad. des Sc. 207 (1938), p. 556.

[26] VAN ISEGHEM J. - Vector Padé approximants, 11th IMACS Worl Congres Numer. Math. and Appl. 1 ed. Vichnevetsky and Vignes (1986), North Holland, Amsterdam.

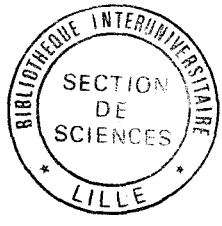
[27] VAN ISEGHEM J. - Vector orthogonal relations. Vector QD algorithm. J.C.A.M. to appear (1987).

[28] VAN ISEGHEM J. - An extended cross rule for vector Padé approximants, Appl. Numer. Math. 2 (1986), p. 143-155.

[29] WALLIN H. - The divergence problem for multipoint Padé approximants of meromorphic functions, J.C.A.M. to appear (1987).

[30] VAN ISEGHEM J. - Convergence of the vector QD algorithm. Zeros of vector orthogonal polynomials, n° 169 ANO, Lille, (octobre 1985).

[31] VAN ISEGHEM J. - Convergence and divergence of columns of vector Padé approximants associated to meromorphic functions, ANO, Lille, (janvier 1987).



RÉSUMÉ

****

Le nom de Padé est attaché à la recherche d'approximants rationnels d'une fonction. Le problème, ici étudié, est la définition puis l'étude d'approximants vectoriels d'une fonction vectorielle $\mathbf{F} = (f_1,\ldots,f_d)$. Le point de vue se distingue d'une approximation simultanée sur les composantes (développée depuis Hermite, c'est-à-dire avant même les travaux de Padé), car l'approximation sera à la fois simultanée et uniforme ; elle sera définie de la manière suivante : on cherche, pour chaque couple d'entiers (s,r), $(d+1)$ polynômes P_α, $\alpha = 1,\ldots,d$, de degré s et Q de degré r tels que :

$$(f_\alpha - P_\alpha/Q)(z) = O(z^{s+[r/d]+1}) \qquad \alpha = 1,\ldots,d.$$

L'ordre d'approximation est le meilleur en ce sens qu'il ne peut être amélioré sur toutes les composantes à la fois.

Le travail se partage naturellement en quatre parties : définitions et expressions des approximants comme rapport de deux déterminants, étude de la table des polynômes associés aux dénominateurs, qui justifient leur appellation de vectoriellement orthogonaux, définition d'algorithmes de calcul, problèmes de convergence.

MOTS CLÉS

APPROXIMANTS
APPROXIMANTS DE PADÉ
POLYGONES ORTHOGONAUX
QD ALGORITHME