N° d'ordre : 1407

T H E S E

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

en Mécanique

par

BRIKH HOCINE

OPTIMISATION DE L'EPAISSEUR DE COQUES MINCES DE REVOLUTION ELASTIQUES.

Soutenue le 25 Septembre 1987 devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président : A. DYMENT, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Rapporteur : F. PARSY, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Membres : J. DENEL, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

G. LALVEE, Maître de Conférences à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

N° d'ordre : 1407

THESE

présentée à

l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

en Mécanique

par

BRIKH Hocine

OPTIMISATION DE L'EPAISSEUR DE COQUES MINCES DE REVOLUTION ELASTIQUES.

Exemplaire corrigé après avis du jury

Soutenue le 25 Septembre 1987 devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président : A. DYMENT, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Rapporteur : F. PARSY, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Membres : J. DENEL, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

G. LALVEE, Maître de Conférences à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur DYMENT qui me fait l'honneur de présider le jury.

Ma profonde reconnaissance va à Monsieur le Professeur PARSY qui m'a proposé ce sujet de recherche, pour ses précieux conseils, sa disponibilité, pour les encouragements qu'il m'a toujours témoignés.
Ma gratitude va également à Messieurs DENEL, Professeur, LALVEE, Maître de Conférences pour accepter de juger ce travail et de participer au jury.

Que Monsieur le Professeur BOIS soit remercié pour m'avoir permis la réalisation des essais numériques.

Mes remerciements sincères vont à Madame PETIAUX, au service de l'imprimerie de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, pour la frappe du manuscrit et de son tirage.

TABLE DES MATIERES

Chapitre IV

Chapitre V

LISTE DES NOTATIONS

$\mathbb{N}$ ensemble des nombres entiers.

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.

Ω^e la coque de révolution.

ω la surface moyenne de la coque de révolution.

e l'épaisseur de la coque mesurée sur la normale à la surface moyenne.

Γ la frontière de .

$\mathcal{E}^2$ l'espace affine euclidien.

Ω un ouvert borné de $\mathcal{E}^2$.

$\bar{\Omega}$ la fermeture de Ω .

γ la frontière de Ω .

E le module de Young.

ν le coefficient de Poisson.

R_1, R_2 courbures principales de ω .

s, θ coordonnées curvilignes orthogonales.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ vecteur déplacement.

$\vec{u}$ déplacement cinématiquement admissible.

$\vec{\vec{\varepsilon}}$ tenseur linéarisé des déformations.

ε_{ij} composantes du tenseur des déformations.

$\vec{\vec{\sigma}}$ tenseur des contraintes.

σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes.

$\{\vec{v}\}$ vecteur colonne $\vec{v}$.

$[A] = [A_{ij}]$ matrice A .

$[A]\{\vec{v}\}$ produit matriciel.
$[A][B]$

${}^t[A]$	transposée de la matrice A .
${}^t\{\vec{v}\}$	transposée du vecteur $\vec{v}$.
$[A]^{-1}$	inverse de la matrice A .
$\mathrm{grad} f$	gradient de la fonction f .
$\mathrm{Grad}\vec{v}$	gradient du vecteur $\vec{v}$.
$(\vec{u},\vec{v})_n$	$(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
	norme en général.
$\Vert\cdot\Vert_V$	norme d'un espace V .
$a(\cdot,\cdot)$	forme bilinéaire sur $V \times V$.
$l(\cdot)$	forme linéaire sur V .
J	énergie potentielle de la coque.
$\langle\cdot,\cdot\rangle_V$	produit scalaire sur V .
V	espace des fonctions admissibles.
$L^p(\Omega)$	espace des fonctions $p^{ième}$ sommables ($1 \leq p \leq +\infty$).
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur Ω .
$H^1(\Omega)$	espace de SOBOLEV d'ordre 1.
$H^1_0(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^m(\Omega)$	espace de SOBOLEV d'ordre m (ici défini pour $m \in \mathbb{N}$) avec $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

INTRODUCTION

Le but du présent travail est d'étendre les résultats d'un article de MM. BOISSERIE et GLOWINSKI paru dans la revue d'E.D.F. (1979), "Etudes et Recherches", sur la résolution Numérique d'un problème modèle d'optimisation de structure. La structure considérée est une coque mince de révolution "élastique".

L'approche retenue est essentiellement basée sur la méthodologie du contrôle optimal : (Hamiltonien et état adjoint).

Après étude préliminaire des coques de révolution et une première formulation variationnelle du problème de l'équilibre d'une coque de révolution par le principe des puissances virtuelles, on choisit alors les champs de LOVE-KIRCHOFF comme champ de déplacements tests dans l'ensemble desquels on cherche la solution du problème : c'est un problème variationnel qui en résulte.

Ce dernier étant traité numériquement à partir du chapitre IV.

Dans cette partie, le champ de déplacements est défini par trois fonctions numériques, elles-mêmes définies sur la surface moyenne notée ω .

La résolution approchée se fait en utilisant l'élément fini de type ARGYRIS pour les trois fonctions (u_i) , i = 1, 2, 3 où

$$u_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto u_i(x,y)$$

Le problème d'optimisation peut être alors formulé en remarquant que si les fonctions représentatrices des forces extérieures qui agissent respectivement sur la coque et sa frontière sont données, l'épaisseur non constante e est une donnée du problème d'équilibre.

On se propose de la considérer comme un paramètre et de trouver sa valeur minimale sous la contrainte d'un poids imposé dans le nombre du problème d'équilibre.

On se donne un e_h^ℓ dans E_{ad}^h (ensemble des épaisseurs admissibles) ce qui permet de calculer :

$\vec{\tilde{u}}_h^\ell$ puis p_h^ℓ est le gradient de la fonction j_h en e_h^ℓ .

$\forall \ell$, $e_h^{\ell+1}$, est choisi de façon à minimiser j_h sur le segment $[e_h, e_h^{\ell'}]$, $e_h^{\ell'}$ est la solution optimale du programme linéaire.

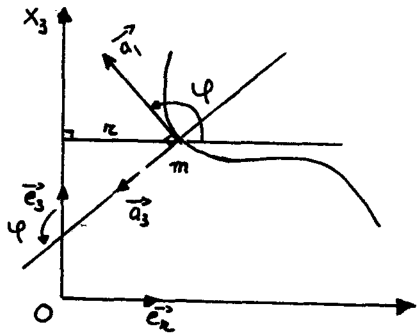
$$\left[\begin{array}{l} \text{Min } (\nabla j_h(e_h), e_h - e_h^\ell) \\ \qquad e_h^\ell, e_h \in E_{ad}^h \cap \Theta_{\mu h}^\ell \end{array}\right.$$

(cf. chapitre IV).

Les programmes numériques ainsi mis en oeuvre (cf. Chapitre VI) sont appliqués au cas particulier d'une coque cylindrique de hauteur finie et encastrée en ses extrémités.

CHAPITRE I

I.1.- *Définition*



L'espace affine $\mathcal{E}^3$ usuel est rapporté à un repère orthonormé $OX_1X_2X_3$ de base associée ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) dans lequel tout point M est repéré par ses coordonnées X_1 , X_2 , X_3 .

Pour les points non situés sur OX_3 , on définit les coordonnées cylindriques par :

(I-1-1) $\quad X_1 = r\cos\theta \; ; \; X_2 = r\sin\theta \; ; \; X_3 \; ; \quad r > 0 \; ; \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

on note classiquement :

(I-1-2) $\quad \vec{e}_r = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta \quad ; \quad \vec{e}_\theta = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = -\vec{e}_1\sin\theta + \vec{e}_2\cos\theta$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$ est orthonormale directe.

Une surface de révolution directe (ω) autour de OX_3 peut être définie par sa méridienne $(\mathcal{M})$ que l'on supposera ici donnée par une représentation paramétrique (dans le demi-plan O , $\vec{e}_r$, $\vec{e}_3$).

(I-1-3) $\quad r = r(s) \quad ; \quad X_3 = X_3(s)$

où $s \in [0, L]$ est l'abscisse curviligne de $(\mathcal{M})$ supposée régulière par morceaux.

On posera :

(I-1-4) $\dfrac{dr}{ds} = \cos\varphi$ et $\dfrac{dX_3}{ds} = \sin\varphi$

et l'on supposera $0 < \varphi < \pi$.

(I-1-5) $(s,\theta) \in [0,L] \times [0,2\pi]$ seront les abscisses curvilignes (orthogonales) définissant (ω) .

Remarque 1

La restriction de $\varphi \in]0,\pi[$ entraine que l'on exclut pour $(\mathcal{M})$ d'être une courbe fermée simple (cas du tore) quoique dans ce cas (en partageant $(\mathcal{M})$ en deux arcs ouverts) on peut se ramener à celui envisagé ici.

I.2.- *L'espace tangent en m à (ω)*

Cet espace sera noté $T_m(\omega)$, il est engendré par :

$$\vec{a_1} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial s} = \vec{e_r}\cos\varphi + \vec{e_3}\sin\varphi$$

$$\vec{e_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{m}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\vec{a_2}$$

$$\vec{a_3} = \vec{a_1} \wedge \vec{e_\theta} = -\vec{e_r}\sin\varphi + \vec{e_3}\cos\varphi$$

$\vec{a_3}$: vecteur normal en m à (ω) est (si $0 < \varphi < \pi$) est dirigé vers OX_3 .

I.3.- *Définition de la coque de révolution*

La coque de révolution Ω^e, d'axe OX_3 , de surface moyenne (ω) et d'épaisseur e sera l'ensemble des points défini par :

$$\Omega^e = \left\{ M / \vec{OM} = \vec{om} + x_3\vec{a_3} \; , \; -e/2 \leq x_3 \leq e/2 \right\} = \omega \times]-e/2, e/2[$$

I.4.- *Géométrie différentielle sur*

a) si $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable on écrira par définition :

(I-4-1) $$\iint_{\omega} f(m)\, d\Gamma = \int_0^L \int_0^{2\pi} f(m(s,\theta))\, ds\, d\theta$$

b) si en outre f est différentiable, son gradient surfacique en m est donné par :

(I-4-2) $$\overrightarrow{grad}_m f = \frac{\partial f}{\partial s} \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

Preuve de (I-4-2).

$$df = \overrightarrow{grad}_m f \cdot \overrightarrow{dm} = \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta$$

mais $$\overrightarrow{dm} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{m}}{\partial \theta} d\theta = \vec{a}_1 ds + \vec{a}_2 d\theta$$

où $\vec{a}_2 = r\, \vec{e}_\theta$ et $\overrightarrow{dm} = \vec{a}_1 ds + r\, \vec{e}_\theta d\theta$, en multipliant scalairement par $\vec{a}_1$ et $\vec{e}_\theta$ on obtient :

$$\vec{a}_1 \cdot \overrightarrow{dm} = ds$$
$$\vec{e}_\theta \cdot \overrightarrow{dm} = r\, d\theta \Longleftrightarrow \frac{1}{r} \vec{e}_\theta\, \overrightarrow{dm} = d\theta$$

finalement on a :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial s} \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right) \overrightarrow{dm} = \overrightarrow{grad}_m f \cdot \overrightarrow{dm}$$

d'où (I-4-2)

c) si : $\vec{v} : \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$, défini sur ω on a :

en procédant comme ci-dessus :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(m(t)) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \otimes \vec{e}_\theta \right) \left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)$$

$$\underset{\text{déf}}{=} \mathbb{G}\mathrm{rad}_m \vec{v} \left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)$$

où le gradient surfacique de $\vec{v}$ est défini par :

(I-4-3) $$\mathbb{G}\mathrm{rad}_m \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \otimes \vec{e}_\theta$$

on a :

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\big(m(t)\big) = \frac{\partial v_i}{\partial s} \frac{ds}{dt} \vec{e}_i + \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_i$$

et $$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{a}_1 \frac{ds}{dt} + r \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \vec{a}_1 \frac{d\vec{m}}{dt} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{d\vec{m}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\big(m(t)\big) = \frac{\partial v_i}{\partial s} \vec{e}_i \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \vec{e}_i \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial v_i}{\partial s} \vec{e}_i \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_\theta \right) \left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \otimes \vec{e}_\theta \right) \left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)$$

$$= \mathbb{G}\mathrm{rad}_m \vec{v} \left(\frac{d\vec{m}}{dt} \right)$$

d'où (I-9-3)

on pose habituellement

$$\vec{\mathcal{U}}(m) = u\,\vec{a}_1 + v\,\vec{e}_\theta + w\,\vec{a}_3$$

d'où $$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s}\,\vec{a}_1 + \frac{\partial v}{\partial s}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial s}\,\vec{a}_3 + u\,\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial s} + v\,\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s} + w\,\frac{\partial \vec{a}_3}{\partial s}$$

or
$$\vec{a}_1 = \vec{e}_r \cos\varphi + \vec{e}_3 \sin\varphi$$

et
$$\frac{\partial \vec{a}_1}{\partial s} = \frac{\partial \vec{a}_1}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \left(-\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_3\right)\frac{d\varphi}{ds} = \vec{a}_3\,\frac{d\varphi}{ds}$$

et
$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \vec{m}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\,\vec{a}_2$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial s} = 0$$

et
$$\vec{a}_3 = -\vec{e}_r \sin\varphi + \vec{e}_3 \cos\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{a}_3}{\partial s} = \frac{\partial \vec{a}_3}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \left(-\vec{e}_r \cos\varphi - \vec{e}_3 \sin\varphi\right)\frac{d\varphi}{ds} = -\vec{a}_1\,\frac{d\varphi}{ds}$$

en reportant ces expressions dans $\dfrac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial s}$ on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial s} - w\frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{a_1} + \frac{\partial v}{\partial s}\,\vec{e_\theta} + \left(\frac{\partial w}{\partial s} + u\,\frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{a_3}$$

on calcule également $\dfrac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{a_1} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\,\vec{a_3} + u\,\frac{\partial \vec{a_1}}{\partial \theta} + v\,\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \theta} + w\,\frac{\partial \vec{a_3}}{\partial \theta}$$

on a :

$$\left[\begin{array}{l} \vec{a_1} = \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial s} = \vec{e_r}\cos\varphi + \vec{e_3}\sin\varphi = \left(\vec{e_1}\cos\theta + \vec{e_2}\sin\theta\right)\cos\varphi + \vec{e_3}\sin\varphi \\ \dfrac{\partial \vec{a_1}}{\partial \theta} = \left(-\vec{e_1}\sin\theta + \vec{e_2}\cos\theta\right)\cos\varphi = \vec{e_\theta}\cos\varphi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_\theta} = -\vec{e_1}\sin\theta + \vec{e_2}\cos\theta \\ \dfrac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \theta} = -\vec{e_1}\cos\theta - \vec{e_2}\sin\theta = -\vec{e_r} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \vec{a_1} = \vec{e_r}\cos\varphi + \vec{e_3}\sin\varphi & \big|\ \cdot\cos\varphi \\ (2) & \vec{a_3} = -\vec{e_r}\sin\varphi + \vec{e_3}\cos\varphi & \big|\ \cdot\sin\varphi \end{array}$$

et l'on fait (2) - (1), on obtient :

$$\vec{a_3} = -\vec{e_r}\sin\varphi + \vec{e_3}\cos\varphi = -\left(\vec{e_1}\cos\theta + \vec{e_2}\sin\theta\right)\sin\varphi + \vec{e_3}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{a_3}}{\partial \theta} = -\left(-\vec{e_1}\sin\theta + \vec{e_2}\cos\theta\right)\sin\varphi = \left(\vec{e_1}\sin\theta - \vec{e_2}\cos\theta\right)\sin\varphi$$

$$= -\vec{e_\theta}\sin\varphi.$$

et l'on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \cos\varphi\right)\vec{a}_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\cos\varphi - w\sin\varphi\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\sin\varphi\right)\vec{a}_3 .$$

or $$\mathrm{Grad}_m \vec{\mathcal{U}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial s} \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial \theta} \otimes \vec{e}_\theta$$

en remplaçant $\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial s}$ et $\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial \theta}$ par leurs expressions dans $\mathrm{Grad}_m \vec{\mathcal{U}}$ on obtient :

(I-4-4) $$\left[\begin{aligned} \mathrm{Grad}_m \vec{\mathcal{U}} &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} - w\frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_1 + \frac{\partial v}{\partial s}\,\vec{e}_\theta \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r} \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\cos\varphi\right)\vec{a}_1 \otimes \vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\cos\varphi - w\sin\varphi\right)\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\sin\varphi\right)\vec{a}_3 \otimes \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial w}{\partial s} + u\frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{a}_3 \otimes \vec{a}_1 \end{aligned}\right.$$

si l'on pose :

$$\vec{\vec{\mathcal{E}}}_m(\vec{\mathcal{U}}) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Grad}_m \vec{\mathcal{U}} + {}^t\mathrm{Grad}_m \vec{\mathcal{U}}\right]$$

on obtient :

$$\vec{\vec{\mathcal{E}}}_m(\vec{U}) = \left(\frac{\partial u}{\partial s} - w\frac{d\varphi}{ds}\right)\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + u\cos\varphi - w\sin\varphi\right)\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\frac{d\varphi}{ds}\right)\left(\vec{a}_1 \otimes \vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta \otimes \vec{a}_1\right)$$

$$+ \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\sin\varphi\right)\left(\vec{a}_3 \otimes \vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta \otimes \vec{a}_3\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + u\frac{d\varphi}{ds}\right)\left(\vec{a}_3 \otimes \vec{a}_1 + \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_3\right).$$

<u>Exemple</u> :

ω surface conique $r = R - s\sin\alpha$; $X_3 = s\cos\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$

(si $\alpha = 0$, ω est une surface cylindrique de rayon R) alors $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Remarque 2

L'opérateur de courbure

$$\text{(I-4-5)} \quad \left[\begin{array}{l} \mathrm{Grad}_m \vec{a}_3 = \dfrac{\partial \vec{a}_3}{\partial s} \otimes \vec{a}_1 + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \vec{a}_3}{\partial \theta} \otimes \vec{e}_\theta \\ \qquad\qquad = -\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_1 \dfrac{d\varphi}{ds} - \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta \dfrac{\sin\varphi}{r} \end{array}\right.$$

définit les courbures principales en m de (ω).

$$\text{(I-4-6)} \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{d\varphi}{ds} \\ \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{\sin\varphi}{r} \end{array}\right.$$

I.5.- *Géométrie différentielle sur Ω^e*

(I-5-1) $$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{om} + x_3 \overrightarrow{a_3} \\ &= (r - x_3 \sin\varphi)\overrightarrow{e_r} + (X_3(s) + x_3 \cos\varphi)\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

Le repère naturel en M de Ω^e est défini par :

(I-5-2) $$\left[\begin{aligned}\overrightarrow{g_1} &= \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial s} = \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial s} + x_3 \frac{\partial \overrightarrow{a_3}}{\partial s} = \overrightarrow{a_1} + x_3\left(-\overrightarrow{a_1}\frac{d\varphi}{ds}\right) \\ &= \overrightarrow{a_1}\left(1 - x_3 \frac{d\varphi}{ds}\right) = \overrightarrow{a_1}\left(1 - \frac{x_3}{R_1}\right) \\ &= \left(1 - x_3\frac{d\varphi}{ds}\right)\left(\overrightarrow{e_r}\cos\varphi + \overrightarrow{e_3}\sin\varphi\right). \\ \overrightarrow{g_\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial \theta} + x_3 \frac{\partial \overrightarrow{a_3}}{\partial \theta}\right) \\ &= \overrightarrow{e_\theta} + x_3\left(-\overrightarrow{e_\theta}\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \overrightarrow{e_\theta}\left(1 - x_3\frac{\sin\varphi}{r}\right) \\ &= \overrightarrow{e_\theta}\left(1 - \frac{x_3}{R_2}\right). \\ \overrightarrow{g_3} &= \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x_3} = \overrightarrow{a_3}\end{aligned}\right.$$

Ces vecteurs sont non nuls (et partout linéairement indépendants).

Si

(I-5-3) $$|x_3| \leq e < \mathrm{Min}\left(|R_1(m)|, |R_2(m)|\right)$$

en particulier si $\frac{e}{|R_1|}$ et $\frac{e}{|R_2|}$ sont $\ll 1$ on a :

L'hypothèse des coques minces.

Les égalités $\vec{g}_1 = \mu(\vec{a}_1)$, $\vec{g}_\theta = \mu(\vec{e}_\theta)$ définissent dans l'hypothèse de (I-5-3) l'automorphisme de $T_m(\omega)$.

(I-5-4) $$\mu = I_2 - x_3 \left(\frac{\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_1}{R_1} + \frac{\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta}{R_2} \right)$$

où

I_2 est l'identité sur $T_m(\omega)$.

La base duale de ($\vec{g}_1$, $\vec{g}_\theta$, $\vec{g}_3$) est donnée par :

(I-5-5) $$\vec{g}^1 = \frac{\vec{a}_1}{\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right)} \quad ; \quad \vec{g}^\theta = \frac{\vec{e}_\theta}{\left(1-\frac{x_3}{R_2}\right)} \quad ; \quad \vec{g}^3 = \vec{g}_3 = \vec{a}_3$$

$$\vec{g}^{-1} = \mu^{-1}(\vec{a}_1) \quad ; \quad \mu^{-1} = \left(\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right)^{-1} \vec{a}_1 \otimes \vec{a}_1 + \left(1-\frac{x_3}{R_2}\right)^{-1} \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta \right)$$

$$\mu^{-1} = \frac{\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_1}{\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right)} + \frac{\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta}{\left(1-\frac{x_3}{R_2}\right)}$$

Soit alors $\vec{\mathcal{U}}$; $M \in \Omega^e_M \longrightarrow \vec{\mathcal{U}}(M) \in \mathbb{R}^3$, un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ défini sur Ω^e, $\underset{M}{\mathrm{Grad}}\,\vec{\mathcal{U}}$ (noté parfois $\frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial M}$) s'écrit :

si $M : t \in \mathbb{R} \longrightarrow M(t) = m(t) + x_3(t)\, a_3(t)$ est

est

un arc de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω^e , on a :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{m}}{dt} + \dot{x}_3 \, \vec{a}_3 + x_3 \left(\frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{a}_3}{ds} + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{a}_3}{d\theta} \right)$$

$$= \vec{a_1}\,\dot{s}\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right) + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\left(1-\frac{x_3}{R_2}\right) + \dot{x}_3\,\vec{a_3}$$

$$= \frac{ds}{dt}\,\vec{g_1} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{g_\theta} + \frac{dx_3}{dt}\,\vec{g_3}$$

et
$$\frac{d\vec{u}}{dt}\left(M(t)\right) = \frac{\partial\vec{u}}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta}\,r\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$
$$= \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial s}\otimes\vec{g}^1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta}\otimes\vec{g}^\theta + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_3}\otimes\vec{a}_3\right)\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)$$

(I-5-6)
$$\mathrm{Grad}_M\,\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial s}\otimes\vec{g}^1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta}\otimes\vec{g}^\theta + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_3}\otimes\vec{a}_3$$

$\vec{u}$ étant défini par ses composantes dans (M , $\vec{a}_1$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{a}_3$)

$$\vec{u}(M) = u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{e}_\theta + u_3\vec{a}_3$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial s} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{u_3}{R_1}\right)\vec{a}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial s}\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{u_1}{R_1}\right)\vec{a}_3$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta} - u_2\cos\varphi\right)\vec{a}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\theta} + u_1\cos\varphi - u_3\sin\varphi\right)\vec{e}_\theta$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_3}{\partial\theta} + \frac{u_2}{R_2}\right)\vec{a}_3 .$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\vec{a_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\vec{e_\theta} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\vec{a_3}$$

Compte tenu de (I-5-5) on obtient :

(I-5-7)

$$\left[\begin{aligned}
\mathbb{G}\mathrm{rad}_M \vec{u} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial M}\right) = & \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{u_3}{R_1}\right)}{\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right)}\vec{a_1}\otimes\vec{a_1} + \\
& \frac{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{u_2}{R_2}\cot g\,\varphi\right)}{\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right)}\vec{a_1}\otimes\vec{e_\theta} + \\
& \frac{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_1\cot g\,\varphi - u_3}{R_2}\right)}{\left(1-\frac{x_3}{R_2}\right)}\vec{e_\theta}\otimes\vec{e_\theta} + \\
& \frac{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{u_2}{R_2}\right)}{\left(1-\frac{x_3}{R_2}\right)}\vec{a_3}\otimes\vec{e_\theta} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\vec{e_\theta}\otimes\vec{a_3} + \\
& \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\vec{a_3}\otimes\vec{a_3} + \frac{\left(\frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{u_1}{R_1}\right)}{\left(1-\frac{x_3}{R_1}\right)}\vec{a_3}\otimes\vec{a_1} + \\
& \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\vec{a_1}\otimes\vec{a_3}\,.
\end{aligned}\right.$$

Par ailleurs, un champ d'endomorphismes symétriques $\vec{\vec{\sigma}}$ sur Ω^e admet la décomposition suivante :

$$\sigma = \sigma_{11}\, \vec{a_1}\otimes\vec{a_1} + \sigma_{12}\left(\vec{a_1}\otimes\vec{e_\theta} + \vec{e_\theta}\otimes\vec{a_1}\right) + \sigma_{22}\, \vec{e_\theta}\otimes\vec{e_\theta}$$

$$+ \sigma_{13}\left(\vec{a_1}\otimes\vec{a_3} + \vec{a_3}\otimes\vec{a_1}\right) + \sigma_{23}\left(\vec{e_\theta}\otimes\vec{a_3} + \vec{a_3}\otimes\vec{e_\theta}\right)$$

$$+ \sigma_{33}\left(\vec{a_3}\otimes\vec{a_3}\right).$$

D'où l'on tire

$$(\text{I-5-8})\quad \left[\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(\sigma\cdot\operatorname{Grad}_M \vec{v}\right) &= \sigma_{11}\,\frac{\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial s} - \dfrac{v_3}{R_1}\right)}{\left(1-\dfrac{x_3}{R_1}\right)} + \\
&\sigma_{12}\left(\frac{\dfrac{\partial v_2}{\partial s}}{\left(1-\dfrac{x_3}{R_1}\right)} + \frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta} - \dfrac{v_2}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi}{\left(1-\dfrac{x_3}{R_2}\right)}\right) + \\
&\sigma_{22}\,\frac{\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_2}{\partial \theta} + \dfrac{v_1\operatorname{cotg}\varphi - v_3}{R_2}\right)}{\left(1-\dfrac{x_3}{R_2}\right)} + \sigma_{23}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \right. \\
&\left.\frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3}{\partial \theta} + \dfrac{v_2}{R_2}}{\left(1-\dfrac{x_3}{R_2}\right)}\right) + \sigma_{33}\,\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \\
&\sigma_{13}\left(\frac{\dfrac{\partial v_3}{\partial s} + \dfrac{v_1}{R_1}}{1-\dfrac{x_3}{R_1}} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE II

II.- PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

II.1.- Définition de la frontière Γ de Ω^e

La frontière Γ de Ω^e est la réunion de :

(II-1-1) $$\Gamma_{\pm}^e = \left\{ M \;/\; \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} \pm e\,\vec{a}_3 \,,\; m \in \omega \right\} = \omega \times \{\pm e\}$$

et de

(II-1-2) $$\Gamma_0^e = \left\{ M / \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om}(s,\theta) + x_3\,\vec{a}_3 \,;\quad s = 0 \text{ ou } L \,,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi, |x_3| < e \right\}$$

étant supposée soumise à des forces de densité massique $\vec{f}$ et sur $\Gamma_{\pm}^e$ à des forces de densité surfacique $\vec{g}_{\pm}$, le déplacement sur Γ_0^e étant imposé (par exemple).

On appelle champ de déplacements sur Ω^e cinématiquement admissible, tout champ de vecteur $\vec{v} \in \mathcal{C}^1(\Omega^e) \cap \mathcal{C}^0(\Gamma_+^e \cap \Gamma_-^e)$ et qui vérifie $\vec{v} = 0$ sur Γ_0^e .

Sous l'effet de ces forces $\overline{\Omega}^e$ se déforme et le vecteur déplacement en chaque point M de $\overline{\Omega}^e$ définit cette déformation.

On a :

(i) $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

(ii) pour tout champ de déplacements virtuels $\vec{v}$:

cinématiquement admissible on a :

$$\int_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(\sigma \circ \frac{\partial \vec{v}}{\partial M}\right) = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} + \int_{\Gamma} \vec{g} \cdot \vec{v}$$

où $\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial M}\right) = \partial_i v_j = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$ $\qquad$ i, j = 1, 2, 3.

$$\mathrm{Tr}(\sigma \circ \mathrm{Grad}_M \vec{v}) = \sigma_{ij}\,\partial_i v_j = \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\vec{v}) .$$

$\vec{f} \cdot \vec{v} = f_j v_j$ $\qquad$ (produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$).

La règle de comportement du matériau que l'on considèrera est celle de l'élasticité linéaire.

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\vec{u})$$

où $\varepsilon_{kl}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_l + \partial_l u_k\right)$

est le tenseur de déformation linéaire associé au déplacement $\vec{u}$ (le tenseur a_{ijkl} est le tenseur de rigidité du matériau).

L'inverse de ce dernier défini par :

$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = [a_{ijkl}]^{-1}\, \sigma_{kl}$ est le tenseur de souplesse.

Le modèle de l'élasticité linéaire consiste à trouver un champ de contraintes

$\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ et un champ de déplacement $\vec{u}$ tels que :

(1) $\vec{u}$ satisfasse les liaisons du solide Ω^e

(2) $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\vec{u})$

(3) $\forall \vec{v}$ admissible.

II.2.- *Première formulation*

$$\int_{\Omega^e} Tr\left(\sigma \circ Grad_M \vec{v}\right) dV = \int_{\Omega^e} \vec{f}\cdot\vec{v}\, dV + \int_{\Gamma} \vec{g}\cdot\vec{v}\, d\Gamma$$

On pose :

$$\vec{f} = f_\alpha \vec{a}_\alpha + f_3 \vec{a}_3$$
$$g = g_\alpha \vec{a}_\alpha + g_3 \vec{a}_3 \quad ; \quad \alpha = 1,2$$

Dans ces conditions le problème de coque s'écrit : trouver $(\vec{u}, \vec{\vec{\sigma}}) \in V^e \times \Sigma^e$ tel que :

$$\int_{\Omega^e} Tr\left(\sigma \circ Grad_M \vec{v}\right) dV = \int_{\Omega^e} \vec{f}\cdot\vec{v}\, dV + \int_{\Gamma} \vec{g}\cdot\vec{v}\, d\Gamma$$

$$\forall \vec{v} \in V^e = \left\{ v = (v_i) \in \left[H^1(\Omega^e) \right]^3, \; v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e \right\}$$

Soit dans le cas de coques de révolution :

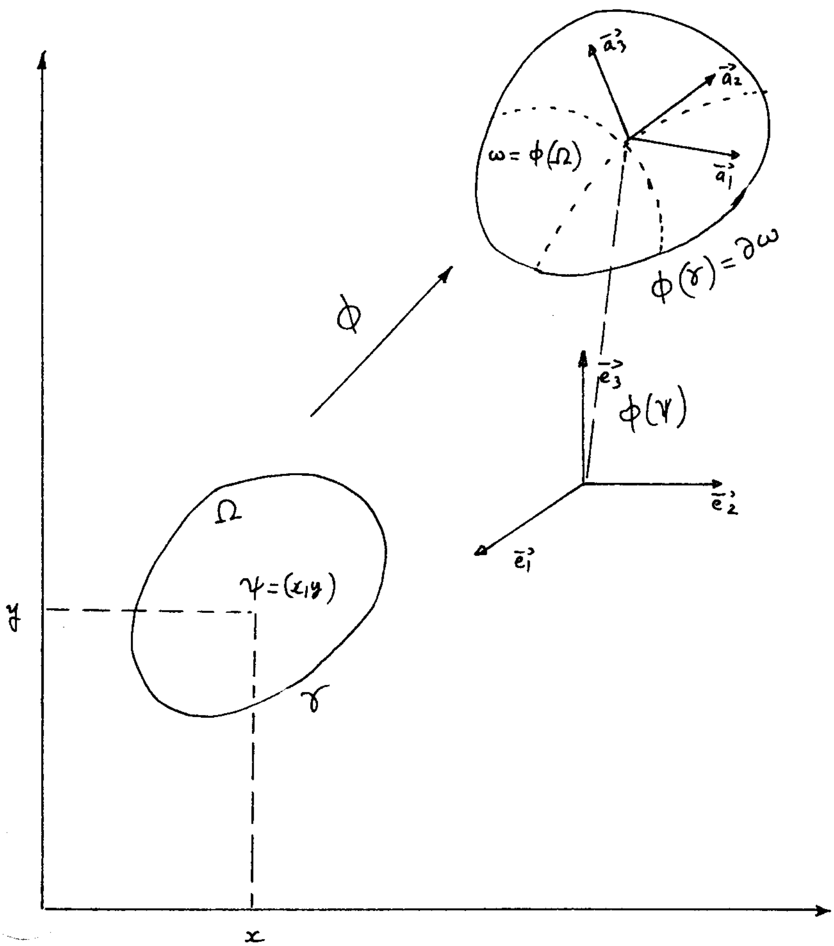
$$\int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \mathrm{Tr} \left(\sigma \circ \mathrm{Grad}_M \vec{v} \right) r \, ds \, d\theta \, dx_3 = \iint_{\omega} \int_{-e/2}^{e/2} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\omega \, dx_3 + \int_\Gamma \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\Gamma$$

II.3.- *Définition de la surface moyenne de la coque de révolution.*

Soit Ω un ouvert borné d'un plan $\mathcal{E}^2$ de frontière γ. La surface moyenne ω de la coque est l'image de la fermeture $\bar{\Omega}$ de l'ouvert Ω par une application $\phi : \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathcal{E}^3$,

$\mathcal{E}^3$ désignant l'espace euclidien usuel :

$$\omega = \left\{ \phi(s, \theta), \; \psi = (s, \theta) \in \bar{\Omega} \right\}$$



$\vec{a_3}$
$\vec{a_2}$
$\omega = \phi(\Omega)$
$\vec{a_1}$
$\phi(\gamma) = \partial\omega$
ϕ
$\vec{e_3}$
$\phi(\psi)$
$\vec{e_2}$
$\vec{e_1}$
Ω
$\psi = (x, y)$
y
γ
x

CHAPITRE III

III.- *FORMULATION DU PROBLEME. THEORIE DE LOVE-KIRCHOFF.*

III.1.- *Hypothèse de LOVE-KIRCHOFF*

Dans l'application du principe des puissances virtuelles, on peut utiliser des champs de déplacements admissibles variés.

Le premier choix correspond dans le cas de coques, à un champ tel que en tout $M = m + x_3 \vec{a}_3$ de Ω^e, le champ $\overset{\Rightarrow}{\varepsilon}(\vec{u})$ associé soit parallèle au plan tangent $T_m(\omega)$ c'est-à-dire qu'il doit vérifier :

(III-1-1) $$\varepsilon_{i3}(\vec{u}) = 0 \quad \forall \; i = 1, 2, 3 .$$

un tel champ sera dit de LOVE-KIRCHOFF.

Afin d'alléger l'écriture dans ce qui suit, il convient de poser :

(III-1-2) $$\left[\begin{array}{l} s = x \\ \theta = y \\ x_3 = z \\ {}^t\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ {}^t\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ k_1(z) = \left(1 - \dfrac{z}{R_1}\right) \\ k_2(z) = \left(1 - \dfrac{z}{R_2}\right) \\ K = \dfrac{1}{R_1 R_2} \\ H = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \end{array}\right.$$

On a :

(III-1-3) $$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}$$

où la matrice $[D]$ est donnée par (III-1-3-1)

(III-1-3-1) $$[D] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

on a aussi

(III-1-4) $$\{\sigma\} = [D]^{-1}\{\varepsilon\} = \frac{E}{1-\nu^2}[A]\{\varepsilon\}$$

où la matrice $[A]$ est donnée par (III-1-4-1)

(III-1-4-1) $$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Les relations (III-1-3) et (III-1-4) permettent d'écrire (II-3) en (III-1-5).

(III-1-5) $$\frac{E}{1-\nu^2}\int_{\Omega^e} {}^t\varepsilon(\vec{u})\,[A]\,\varepsilon(\vec{v})\,dV = \int_{\Omega^e} \vec{f}\cdot\vec{v}\,dv + \int_{\Gamma} \vec{g}\cdot\vec{v}\,d\Gamma$$

On se ramène à la surface moyenne de la coque en calculant l'élément de volume dV .

Calcul de l'élément de volume dV .

Pour tout M de Ω^e

(III-1-6) $$M = m + x_3 \vec{a_3} \quad , \quad m \in \omega$$

$$dV = \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} ds \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} d\theta \right) . \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_3} dx_3$$

où $\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_3} = \vec{a_3}$ (vecteur normal en m à (ω)) mais de (III-1-6) on a :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial s} + x_3 \frac{\partial \vec{a_3}}{\partial s} = \vec{a_1} - x_3 \vec{a_1} \frac{d\varphi}{ds} = \vec{a_1} \left(1 - x_3 \frac{d\varphi}{ds} \right)$$

et $$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial \theta} + x_3 \frac{\partial \vec{a_3}}{\partial \theta}$$

$$= r \vec{e_\theta} + x_3 \left(- \vec{e_\theta} \sin \varphi \right)$$

$$= \left(r - x_3 \sin \varphi \right) \vec{e_\theta}$$

$$= r \left(1 - x_3 \frac{\sin \varphi}{r} \right) \vec{e_\theta}$$

or $$\frac{\sin \varphi}{r} = \frac{1}{R_2}$$

d'où $$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = r \left(1 - \frac{x_3}{R_2} \right) \vec{e_\theta}$$

avec les notations de (III-1-2) l'élément de volume dV devient :

$$\text{(III-1-7)}\quad \left[\begin{array}{l} dV = \left(1 - \frac{z}{R_1}\right)\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) r \, dx \, dy \, dz \\ dV = k_1(z) \, k_2(z) \, r \, dx \, dy \, dz \end{array}\right.$$

En reportant (III-1-7) dans (III-1-5) on obtient :

$$\text{(III-1-8)}\quad \left[\begin{array}{l} \frac{E}{1-\nu^2} \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} {}^t\varepsilon(\vec{u}) \, [A] \, \varepsilon(\vec{v}) \, k_1(z) k_2(z) \, r(x) \, dx \, dy \, dz = \\ \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \vec{f} \cdot \vec{v} \, k_1(z) k_2(z) \, r(x) \, dx \, dy \, dz + \int_\Gamma \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\Gamma \end{array}\right.$$

où $\quad {}^t\varepsilon(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\vec{u}) & \varepsilon_{22}(\vec{u}) & 2\,\varepsilon_{12}(\vec{u}) \end{bmatrix}$

et $\quad \varepsilon(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\vec{v}) \\ \varepsilon_{22}(\vec{v}) \\ 2\varepsilon_{12}(\vec{v}) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} {}^t\varepsilon(\vec{u}) \, [A] \, \varepsilon(\vec{v}) = {} & \varepsilon_{11}(\vec{u}) \, \varepsilon_{11}(\vec{v}) + \varepsilon_{22}(\vec{u}) \, \varepsilon_{22}(\vec{v}) + \nu \Big(\varepsilon_{11}(\vec{u}) \, \varepsilon_{22}(\vec{v}) + \\ & \varepsilon_{11}(\vec{v}) \, \varepsilon_{22}(\vec{u}) \Big) + 2(1-\nu) \, \varepsilon_{12}(\vec{u}) \, \varepsilon_{12}(\vec{v}) . \end{aligned}$$

on pose :

(III-1-8-1)

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(\vec{u})\,\varepsilon_{11}(\vec{v}) = \dfrac{b_{11}(\vec{u})\,b_{11}(\vec{v})}{(k_1(z))^2} \;;\; \varepsilon_{11}(\vec{v})\,\varepsilon_{22}(\vec{u}) = \dfrac{b_{11}(\vec{v})\,b_{22}(\vec{u})}{k_1(z)\,k_2(z)} \\[2ex] \varepsilon_{22}(\vec{u})\,\varepsilon_{22}(\vec{v}) = \dfrac{b_{22}(\vec{u})\,b_{22}(\vec{v})}{(k_2(z))^2} \;;\; \varepsilon_{12}(\vec{u})\,\varepsilon_{12}(\vec{v}) = b_{12}(\vec{u})\,b_{12}(\vec{v}) \\[2ex] \varepsilon_{11}(\vec{u})\,\varepsilon_{22}(\vec{v}) = \dfrac{b_{11}(\vec{u})\,b_{22}(\vec{v})}{k_1(z)\,k_2(z)} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} b_{11}(\vec{u}) = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{u_3}{R_1} & b_{22}(\vec{u}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{u_1 \cot g\varphi - u_3}{R_2} \\[2ex] b_{11}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} - \dfrac{v_3}{R_1} & b_{22}(\vec{v}) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{v_1 \cot g\varphi + v_3}{R_2} \\[2ex] b_{12}(\vec{u}) = \dfrac{a_u}{k_1(z)} + \dfrac{b_u}{k_2(z)} & b_{12}(\vec{v}) = \dfrac{a_v}{k_1(z)} + \dfrac{b_v}{k_2(z)} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} a_u = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & b_u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - \dfrac{u_2 \cot g\varphi}{R_2} \\[2ex] a_v = \dfrac{\partial v}{\partial x} & b_v = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_1}{\partial x} - \dfrac{v_2 \cot g\varphi}{R_2} \end{cases}$$

On injecte les expressions de (III-1-8) dans (III-1-7) et en prenant le développement en série à l'ordre 1 de $\frac{1}{k_1(z)}$ et $\frac{1}{k_2(z)}$ car $\frac{z}{|R_1|}$ et $\frac{z}{|R_2|} << 1$.

Et on obtient :

(III-1-9)
$$\left[\begin{array}{l}\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2} b_{11}(\vec{u})\,b_{11}(\vec{v})\left(1+\frac{z}{R_1}\right)k_2(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz\,+\right.\\ \iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2} b_{22}(\vec{u})\,b_{22}(\vec{v})\left(1+\frac{z}{R_2}\right)k_1(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz+\nu\left\{\iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2}(b_{11}(\vec{u})\right.\\ \left.\left.b_{22}(\vec{v})+b_{11}(\vec{v})\,b_{22}(\vec{u})\right)r(x)\,dx\,dy\,dz\right\}+2(1-\nu)\iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2} b_{12}(\vec{u})\\ \left.b_{12}(\vec{v})\,r(x)\,dx\,dy\,dz\right\}=\iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2}\vec{f}\cdot\vec{v}\,k_1(z)\,k_2(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz\,+\\ \int_\Gamma \vec{q}\cdot\vec{v}\,d\Gamma.\end{array}\right.$$

On note par

$$\left[\begin{array}{l}a(\vec{u},\vec{v})=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2} b_{11}(\vec{u})\,b_{11}(\vec{v})\left(1+\frac{z}{R_1}\right)k_2(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz\,+\right.\\ \qquad\iint_\omega\int_{-e/2}^{e/2} b_{22}(\vec{u})\,b_{22}(\vec{v})\left(1+\frac{z}{R_2}\right)k_1(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz\,+\end{array}\right.$$

(III-1-10)
$$\left[\begin{array}{l} 2(1-\sigma)\displaystyle\iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} b_{12}(\vec{u})\, b_{12}(\vec{v})\, k_1(z) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz \;+ \\[2ex] \nu \left\{ \displaystyle\iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left(b_{11}(\vec{u}) b_{22}(\vec{v}) + b_{11}(\vec{v}) b_{22}(\vec{u}) \right) r(x)\, dx\, dy\, dz \right\} \Bigg\} \end{array}\right.$$

et (III-1-9) s'écrit :

(III-1-11)
$$\left[\begin{array}{l} a(\vec{u}, \vec{v}) = \ell(\vec{v}) \\ \vec{v} \in V \end{array}\right.$$

où
$$\ell(\vec{v}) = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \vec{f}\cdot\vec{v}\, k_1(z) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz + \int_\Gamma \vec{g}\cdot\vec{v}\, d\Gamma$$

V est un espace à définir dans la suite.

La résolution du problème (III-1-11) nous donne le champ de déplacements $\vec{u}$, de (III-1-1) on a :

(III-1-12)
$$\left[\ \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \quad \text{ceci est équivalent à} \quad u_3 = \tilde{u}_3(x, y)\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\varepsilon_{13}(\vec{u}) = 0 = \left(k_1(z)\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + \dfrac{1}{R_1}\left(u_1 + R_1\dfrac{\partial u_3}{\partial x}\right)\right) \\[2ex] \varepsilon_{23}(\vec{u}) = 0 = \left(k_2(z)\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + \dfrac{1}{R_2}\left(u_2 + \dfrac{R_2}{r}\dfrac{\partial u_3}{\partial y}\right)\right)\end{array}\right.$$

de ces dernières équations on a aisément

(III-1-13) $$u_1 = k_1(z)\,\tilde{u}_1(x,y) - z\,\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}$$

(III-1-14) $$u_2 = k_2(z)\,\tilde{u}_2(x,y) - \frac{z}{r}\,\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y}$$

Les relations (III-1-12), (III-1-13) et (III-1-14) permettent de calculer $b_{11}(\vec{\tilde{u}})$; $b_{11}(\vec{\tilde{v}})$; $b_{22}(\vec{\tilde{u}})$, $b_{22}(\vec{\tilde{v}})$, $b_{12}(\vec{\tilde{u}})$ et $b_{12}(\vec{\tilde{v}})$.

On a :

(III-1-15)
$$\left|\begin{array}{l}
b_{11}(\vec{\tilde{u}}) = k_1(z)\dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} - \dfrac{\tilde{u}_3}{R_1} \\[2ex]
b_{11}(\vec{\tilde{v}}) = k_1(z)\dfrac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} - \dfrac{\tilde{v}_3}{R_1} \\[2ex]
b_{12}(\vec{\tilde{u}}) = \dfrac{k_1(z)\dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} - \dfrac{z}{r}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x\partial y}}{k_1(z)} + \dfrac{\dfrac{1}{r}\left\{k_1(z)\dfrac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x\partial y}\right\} - \ldots}{k_2(z)} \\[2ex]
\qquad\ldots\dfrac{\operatorname{cotg}\varphi\left\{k_2(z)\,\tilde{u}_2 - \dfrac{z}{r}\dfrac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y}\right\}}{k_2(z)} \\[2ex]
b_{12}(\vec{\tilde{v}}) = \dfrac{k_1(z)\dfrac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} - \dfrac{z}{r}\dfrac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x\partial y}}{k_1(z)} + \dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{k_1(z)\dfrac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x\partial y}\right\} - \ldots}{k_2(z)} \\[2ex]
\qquad\ldots\dfrac{\operatorname{cotg}\varphi\left\{k_2(z)\,\tilde{u}_2 - \dfrac{z}{r}\dfrac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y}\right\}}{k_2(z)}
\end{array}\right.$$

$$b_{22}(\tilde{\vec{u}}) = \frac{k_2(z)}{r}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \frac{z}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} + \operatorname{cotg}\varphi\, k_1(z)\,\tilde{u}_1 - \frac{z}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} - \frac{\tilde{u}_3}{R_2}$$

$$b_{22}(\tilde{\vec{v}}) = \frac{k_2(z)}{r}\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - \frac{z}{r}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \operatorname{cotg}\varphi\, k_1(z) - \frac{z}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} - \frac{\tilde{v}_3}{R_2}$$

Les relations définies en (III-1-15) permettent de calculer $\tilde{a}(\tilde{\vec{u}},\tilde{\vec{v}})$.

On a :

$$\int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} \frac{b_{11}(\tilde{\vec{u}})\,b_{11}(\tilde{\vec{v}})\,k_1(z)\,k_2(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz}{(k_1(z))^2} =$$

$$\int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} \frac{b_{11}(\tilde{\vec{u}})\,b_{11}(\tilde{\vec{v}})\,k_2(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz}{k_1(z)} .$$

pour calculer cette intégrale, évaluons le produit $b_{11}(\tilde{\vec{u}})\,b_{11}(\tilde{\vec{v}})$.

$$b_{11}(\tilde{\vec{u}})\,b_{11}(\tilde{\vec{v}}) = k_1^2(z)\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} - z\,k_1(z)\left\{\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\right\} - k_1(z)\left\{\frac{\tilde{v}_3}{R_1}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \frac{\tilde{u}_3}{R_1}\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x}\right\}$$

$$+ \frac{z}{R_1}\left\{\tilde{u}_3\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \tilde{v}_3\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\right\} +$$

$$z^2\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \frac{\tilde{u}_3\,\tilde{v}_3}{R_1^2} .$$

et enfin

$$\frac{b_{11}(\tilde{\vec{u}})\, b_{11}(\tilde{\vec{v}})}{k_1(z)} = k_1(z)\, \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} - z \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \right\} -$$

$$\frac{1}{R_1} \left\{ \tilde{v}_3 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} \right\} + \frac{z}{R_1 k_1(z)} \left\{ \tilde{u}_3 \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \tilde{v}_3 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \right\} + \frac{z^2}{k_1(z)}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1^2 k_1(z)} \tilde{u}_3 \tilde{v}_3 .$$

On pose :

$$\text{(III-1-16)} \qquad \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{b_{11}(\tilde{\vec{u}})\, b_{11}(\tilde{\vec{v}})\, k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz}{k_1(z)} = \sum_{i=1}^{6} c_i$$

où les sont données par :

$$c_1 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} k_1(z)\, k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz = \left(e + \frac{k e^3}{12}\right) \iint_\omega \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} r(x)\, dx\, dy$$

$$c_2 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \right\} z\, k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz = \frac{e^3}{12 R_2} \iint_\omega \left\{ \cdots \right\} r(x)\, dx\, dy .$$

$$c_3 = -\frac{1}{R_1} \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \tilde{v}_3 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x} \right\} k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz = -\frac{e}{R_1} \iint_\omega \left\{ \cdots \right\} r(x)\, dx\, dy .$$

$$c_4 = \frac{1}{R_1} \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \tilde{u}_3 \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + \tilde{v}_3 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \right\} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) k_2(z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\frac{e^3}{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \iint_\omega \left\{ \cdots \right\} r(x)\, dx\, dy .$$

$$C_5 = \int_{\omega}\int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} \right\} z^2 \left(1+\frac{z}{R_1}\right) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\frac{K e^5}{80} \int_{\omega} \left\{ \cdot \,- - - \right\} r(x)\, dx\, dy .$$

$$C_6 = \int_{\omega}\int_{-e/2}^{e/2} \frac{1}{R_1^2}\, \tilde{u}_3 \tilde{v}_3\, k_2(z) \left(1+\frac{z}{R_1}\right) r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\frac{1}{R_1^2} \left(e + \frac{K e^3}{12} \right) \int_{\omega} \tilde{u}_3 \tilde{v}_3\, r(x)\, dx\, dy$$

où $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ (courbure totale).

Calculons aussi le produit $b_{22}(\vec{\tilde{u}})\,b_{22}(\vec{\tilde{v}})$.

$$
\begin{aligned}
b_{22}(\vec{\tilde{u}})\,b_{22}(\vec{\tilde{v}}) = {} & \Big\{ \frac{k_2}{r}(z)\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \frac{z}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} + \operatorname{cotg}\varphi\, k_1(z)\,\tilde{u}_1 - \frac{z}{R_2} \\
& \operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} - \frac{\tilde{u}_3}{R_2} \Big\} . \Big\{ \frac{k_2}{r}(z)\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - \frac{z}{r}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \operatorname{cotg}\varphi \\
& \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} - \frac{\tilde{v}_3}{R_2} \Big\} .
\end{aligned}
$$

et l'on obtient :

$$
\begin{aligned}
b_{22}(\vec{\tilde{u}})\,b_{22}(\vec{\tilde{v}}) = {} & \frac{k_2}{r^2}(z)\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - \frac{z}{r^2}\Big\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} + {} \\
& \frac{r}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \frac{r}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \Big\} + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r R_2} k_1(z) \\
& \Big\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\tilde{v}_1 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\tilde{u}_1 \Big\} - \frac{k_1(z)}{k_2(z)}\frac{z}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\,\Big\{ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2}\tilde{v}_1 + {} \\
& \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2}\tilde{u}_1 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_2}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x}\tilde{u}_1 + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_2}\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}\tilde{v}_1 \Big\} - \frac{1}{r R_2}\Big\{ \\
& \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\tilde{v}_3 + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y}\tilde{u}_3 \Big\} + \frac{z^2}{k_2(z)}\Big\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r R_2} \\
& \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{r R_2}\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2^2}\operatorname{cotg}^2\varphi\,\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} \Big\} \\
& + \frac{z}{R_2 k_2(z)}\Big\{ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2}\tilde{v}_3 + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2}\tilde{u}_3 + \frac{1}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}\tilde{v}_3 + {} \\
& \frac{1}{R_2}\operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x}\tilde{u}_3 \Big\} - \frac{k_1(z)}{k_2(z)}\Big\{ \tilde{u}_1\tilde{v}_3 + \tilde{v}_1\tilde{u}_3 \Big\} + \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi}{k_2(z)} \\
& k_1^2(z)\,\tilde{u}_1\tilde{v}_1 + \frac{1}{R_2^2 k_2(z)}\tilde{u}_3\tilde{v}_3 .
\end{aligned}
$$

On pose :

$$\text{(III-1-17)} \qquad \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{b_{22}(\tilde{\vec{u}})\, b_{22}(\tilde{\vec{v}})\, k_1(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz}{k_2(z)} = \sum_{i=1}^{10} c_i'$$

où les c_i' sont donnés par :

$$c_1' = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} k_2(z) r(x)\, dx\, dy\, dz = \left(e + \frac{Ke^3}{12}\right) \iint_\omega \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \frac{1}{r(x)}\, dx\, dy .$$

$$c_2' = - \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{z\, k_1(z)}{r^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \frac{r}{R_2} \operatorname{cotg} \varphi \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \frac{r}{R_2} \operatorname{cotg} \varphi \left\{ \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} \right\} r(x)\, dx\, dy\, dz = \frac{e^3}{12 R_1} \iint_\omega \{ \cdots \} \frac{1}{r(x)}\, dx\, dy .$$

$$c_3' = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{R_2} k_1^2(z) \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \tilde{v}_1 + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \tilde{u}_1 \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$\frac{\operatorname{cotg} \varphi}{R_2} \left(e + \frac{e^3}{12 R_1^2}\right) \iint_\omega \{ \cdots \cdots \} dx\, dy .$$

$$c_4' = - \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} z\, k_1^2(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \operatorname{cotg} \varphi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} \tilde{v}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} \tilde{u}_1 + \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{R_2} \left\{ \right.\right.$$

$$\left.\left. \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \right\} \right\} r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$- \operatorname{cotg} \varphi \left\{ \frac{e^3}{12} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right) + \frac{e^5}{80 R_1^2 R_2} \right\} \iint_\omega \{ \cdots \} r(x)\, dx\, dy .$$

$$c_5' = -\int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} \frac{1}{R_2} k_1(z) \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \tilde{v}_3 + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \tilde{u}_3 \right\} dx\,dy\,dz =$$

$$-\frac{e}{R_2} \int_\omega \left\{ \cdot \text{—} \right\} dx\,dy .$$

$$c_6' = \int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} z^2 k_1(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \left\{ \frac{1}{2^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2R^2} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \right\} + \frac{1}{R_2^2} \operatorname{cotg}^2\varphi \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} \right\} r(x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\left(\frac{e^3}{12} - \frac{e^5}{80 R_1 R_2} \right) \int_\omega \left\{ - - - \right\} r(x)\,dx\,dy .$$

$$c_7' = \int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} \frac{z}{R_2} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y^2} \tilde{v}_3 + \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} \tilde{u}_3 \right) + \frac{1}{R_2} \operatorname{cotg}\varphi \left(\right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \tilde{v}_3 + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} \tilde{u}_3 \right) \right\} r(x)\,dx\,dy\,dz = \frac{e^3}{12 R_2^2} \int_\omega \left\{ \cdots \right\} r(x)\,dx\,dy .$$

$$c_8' = -\int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_2^2} k_1^2(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \left\{ \tilde{u}_1 \tilde{v}_3 + \tilde{v}_1 \tilde{u}_3 \right\} r(x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$- \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_2^2} \left(e - \frac{e^3}{12} \left(\frac{2}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_1^2} \right) \right) \int_\omega \left\{ \cdot - - \right\} r(x)\,dx\,dy .$$

$$c_9' = \operatorname{cotg}^2\varphi \int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} k_1^3(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \left\{ \tilde{u}_1 \tilde{v}_1 \right\} r(x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\operatorname{cotg}^2\varphi \left(e + \frac{e^3}{4} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2} \right) - \frac{e^5}{80 R_1^3 R_2} \right) \int \tilde{u}_1 \tilde{v}_1 r(x)\,dx\,dy .$$

$$c_{10}' = \int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} \frac{1}{R_2^2} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) k_1(z) \left\{ \tilde{u}_3 \tilde{v}_3 \right\} r(x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\frac{1}{R_2^2}\left(e-\frac{e^3}{4R_1R_2}\right)\int_\omega \tilde{u}_3\,\tilde{v}_3\; r(x)\,dx\,dy\;.$$

Calculons également $b_{11}(\vec{\tilde{u}})\,b_{22}(\vec{\tilde{v}})$.

On a :

$$\begin{aligned}
b_{11}(\vec{\tilde{u}})\,b_{22}(\vec{\tilde{v}}) = {} & k_1(z)\frac{k_2}{r}(z)\,\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - z\,k_1(z)\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \right. \\
& \left.\frac{1}{R_2}\cotg\varphi\,\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \frac{1}{R_2}\cotg\varphi\,\tilde{v}_1\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\right\} + z^2\left\{\right. \\
& \left.\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2}\cotg\varphi\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x}\right\} + \frac{k_1^2(z)}{R_2} \\
& \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\,\tilde{v}_1 + z\left\{\tilde{v}_3\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} + \frac{1}{rR}\,\tilde{u}_3\,\frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. K\cotg\varphi\,\tilde{u}_3\,\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x}\right\} - k_1(z)\left\{\frac{1}{R_2}\,\tilde{v}_3\,\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \right. \\
& \left. K\cotg\varphi\,\tilde{u}_3\,\tilde{v}_1\right\} - \frac{z}{r}\,k_2(z)\,\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2}\,\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \\
& - \frac{k_2(z)}{rR}\,\tilde{u}_3\,\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + K\,\tilde{u}_3\,\tilde{v}_3\;.
\end{aligned}$$

On pose :

$$\text{(III-1-18)}\qquad \int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} b_{11}(\vec{\tilde{u}})\,b_{22}(\vec{\tilde{v}})\,r(x)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{9} d_i$$

où les d_i sont donnés par :

$$d_1 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} k_1(z) \, k_2(z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$\left(e + \frac{K e^3}{12} \right) \int \left\{ \quad \right\} dx \, dy \, .$$

$$d_2 = - \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} z \, k_1(z) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \operatorname{cotg} \varphi \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} + \frac{1}{R_2} \right.$$

$$\left. \operatorname{cotg} \varphi \, \tilde{v}_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \right\} r(x) \, dx \, dy \, dz = \frac{e^3}{12 R_1} \int_\omega \left\{ \cdot \; - \right\} r(x) \, dx \, dy \, .$$

$$d_3 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} z^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \operatorname{cotg} \varphi \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} \right\} r(x) \, dx \, dy \, dz =$$

$$\frac{e^3}{12} \int_\omega \left\{ \cdots \right\} r(x) \, dx \, dy \, .$$

$$d_4 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} z \left\{ \tilde{v}_3 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} + \frac{1}{2 R_1} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x^2} + K \operatorname{cotg} \varphi \, \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} \right\} \cdot$$

$$\cdot \, r(x) \, dx \, dy \, dz = \frac{e^2}{4} \int_\omega \left\{ \cdot \; \cdots \right\} r(x) \, dx \, dy \, .$$

$$d_5 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} k_1(z) \left\{ \frac{1}{R_2} \tilde{v}_3 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + K \operatorname{cotg} \varphi \, \tilde{u}_3 \tilde{v}_1 \right\} \cdot$$

$$\cdot \, r(x) \, dx \, dy \, dz = - e \int_\omega \left\{ - \; — \right\} r(x) \, dx \, dy \, .$$

$$d_6 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{k_1^2(z)}{R_2} \left\{ \tilde{v}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \right\} r(x) \, dx \, dy \, dz =$$

$$\frac{1}{R_2} \left(e + \frac{e^3}{12 R_1^2} \right) \int_\omega \left\{ \cdot \; \cdot \right\} r(x) \, dx \, dy \, .$$

$$d_7 = - \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} z\, k_2(z) \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} dx\,dy\,dz =$$

$$\frac{e^3}{12 R_2} \int_\omega \{ \cdot\cdot \} \,dx\,dy .$$

$$d_8 = - \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \frac{k_2}{R_1}(z) \left\{ \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} dx\,dy\,dz =$$

$$- \frac{e}{R_1} \int_\omega \{ \cdot\cdot \} \,dx\,dy .$$

$$d_9 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} K \left\{ \tilde{u}_3 \; \tilde{v}_3 \right\} r(x)\, dx\,dy\,dz =$$

$$K e \int_\omega \left\{ \tilde{u}_3 \; \tilde{v}_3 \right\} r(x)\, dx\,dy .$$

Un calcul analogue est fait pour calculer

$$\int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} b_{11}(\tilde{\vec v})\, b_{22}(\tilde{\vec u})\, r(x)\, dx\, dy\, dz \; .$$

On pose aussi :

$$\text{(III-1-19)} \qquad \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} b_{11}(\tilde{\vec v})\, b_{22}(\tilde{\vec u})\, r(x)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{9} d'_i$$

où les d'_i sont donnés par les mêmes expressions que celles des d_i en permutant les $\tilde u_i$ et $\tilde v_i$ en exemples :

$$d'_1 = \left(e + \frac{K e^3}{12}\right) \int_\omega \frac{\partial \tilde v_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde u_2}{\partial y}\, dx\, dy \; .$$

$$d'_2 = \frac{e^3}{12 R_1} \int_\omega \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde v_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde u_3}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \cot\varphi \left(\frac{\partial \tilde v_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde u_3}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde v_3}{\partial x^2}\, \tilde u_1 \right) \right\} r(x)\, dx\, dy \; .$$

et enfin : $$d'_9 = d_9 = K e \int_\omega \tilde u_3\, \tilde v_3\, r(x)\, dx\, dy \; .$$

Pour finir le calcul évaluons le produit $b_{12}(\tilde{\vec u})\, b_{12}(\tilde{\vec v})$.

On a :

$$b_{12}(\tilde{\vec u})\, b_{12}(\tilde{\vec v}) = \frac{\partial \tilde u_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde v_2}{\partial x} - z \left(\frac{h_1^{-1}(z)}{r} + h_2^{-1}(z) \right) .$$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \cot g \varphi \left(\tilde{v}_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} - \tilde{u}_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} \right) \right\}$$

$$+ \frac{k_1(z)}{r} k_2^{-1}(z) \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} - \cot g \varphi \left(\tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right) \right\}$$

$$- \frac{z}{r} k_2^{-1}(z) \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} - \cot g \varphi \left(\tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} \right\}$$

$$- \cot g \varphi \left\{ \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} - \cot g \varphi \, \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 \right\} - \frac{z}{r} k_1(z) k_2^{-1}(z) \Bigg\{$$

$$\frac{k_1^{-1}}{r}(z) + k_2^{-1}(z) \Bigg\} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} \right\} +$$

$$\frac{z^2}{r} k_2^{-1}(z) \left(\frac{k_1^{-1}}{r}(z) + k_2^{-1}(z) \right) \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \right\}$$

$$+ z^2 \left(\frac{k_1^{-1}}{r}(z) + k_2^{-1}(z) \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} + \left(\frac{k_1(z)}{r} k_2^{-1}(z) \right)^2 \cdot$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} - z \, k_1(z) \left(\frac{k_2^{-1}}{r}(z) \right)^2 \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} +$$

$$\frac{z^2}{r^2} k_2^{-1}(z) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} \, .$$

On pose :

$$\text{(III-1-20)} \quad \iint_{\omega} \int_{-e/2}^{e/2} b_{12}(\vec{\tilde{u}}) \, b_{12}(\vec{\tilde{v}}) \, k_1(z) \, k_2(z) \, r(z) \, dx \, dy \, dz = \sum_{i=1}^{11} m_i \, .$$

où les m_i sont donnés par :

$$m_1 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} \right\} k_1(z) k_2(z) r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\left(e + \frac{K e^3}{12} \right) \int_\omega \{ \cdot \; \cdots \} r(x)\, dx\, dy \,.$$

$$m_2 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} - \operatorname{cotg} \varphi \left\{ \tilde{v}_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \tilde{u}_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} \right\} \right\} z \left(\frac{k_1^{-1}(z)}{r} + k_2^{-1}(z) \right) k_1(z) k_2(z) r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdot \; \cdots \} z \left(k_2(z) + r(x) k_1(z) \right) dx\, dy\, dz =$$

$$- \frac{e^3}{12 R_2} \int_\omega \{ \cdot \; \cdots \} dx\, dy - \frac{e^3}{12 R_1} \int_\omega \{ \cdots \} r(x)\, dx\, dy =$$

$$- \frac{e^3}{12} \left\{ \frac{1}{R_2} \int_\omega \{ \cdot \; \cdot \} dx\, dy + \frac{1}{R_1} \int_\omega \{ \cdot \; \cdots \} r(x)\, dx\, dy \right. .$$

$$m_3 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} k_1^2(z) \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} - \operatorname{cotg} \varphi \left\{ \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$\iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdots \} k_1^2\, dx\, dy\, dz = - \frac{e^3}{12 R_1^2} \int_\omega \{ \cdot \; \cdot \} dx\, dy \,.$$

$$m_4 = - \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} - \operatorname{cotg} \varphi \left\{ \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \right\} \right\} \cdot$$

$$\cdot z k_1(z)\, dx\, dy\, dz = - \frac{e^3}{12 R_1} \int_\omega \{ \cdots \} dx\, dy \,.$$

$$m_5 = -\int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \operatorname{cotg}\varphi \left\{ \tilde{v}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x} - \operatorname{cotg}\varphi\, \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 \right\} k_1(z)\, k_2(z) \cdot$$

$$\cdot\, r(x)\, dx\, dy\, dz = -\operatorname{cotg}\varphi \left(e + \frac{K e^3}{12} \right) \int_\omega \{ \cdots \}\, r(x)\, dx\, dy\, .$$

$$m_6 = -\int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} \right\} \frac{z}{r(x)}\, k_1(z)\, k_2^{-1}(z) \Big\{ \cdot$$

$$\cdot\, \frac{k_1^{-1}}{r}(z) + k_2^{-1}(z) \Big\} h_1(z)\, h_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz \; =$$

$$-\int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdots \}\, z\, k_1^2(z) \left\{ \frac{k_1^{-1}(z)}{r(x)} + k_2^{-1}(z) \right\} dx\, dy\, dz =$$

$$-\left\{ \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdots \} \frac{z}{r(x)}\, k_1(z)\, dx\, dy\, dz + \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdots \}\, z\, \frac{k_1^2(z)}{k_2(z)}\, dx\, dy\, dz \right\} =$$

$$-\left\{ \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdots \} \frac{z}{r(x)}\, k_1(z)\, dx\, dy\, dz + \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{ \cdots \}\, z\, \frac{k_1^2(z)}{k_2(z)}\, dx\, dy\, dz \right\} =$$

$$-\left\{ \frac{-e^3}{12 R_1} \int_\omega \{ \cdots \} \frac{1}{r(x)}\, dx\, dy + \left\{ \frac{e^3}{12} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1} \right) + \frac{e^5}{80 R_1^2 R_2} \right\} \int_\omega \{ \cdots \}\, dx\, dy \right\} =$$

$$\frac{e^3}{12 R_1} \int_\omega \{ \cdots \} \frac{1}{r(x)}\, dx\, dy - \left(\frac{e^3}{12} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1} \right) + \frac{e^5}{80 R_1^2 R_2} \right) \int_\omega \{ \cdots \}\, dx\, dy\, .$$

$$m_7 = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \right\} z^2 \left\{ \frac{k_1^{-1}(z)}{r(x)} + k_2^{-1}(z) \right\} h_1(z) \cdot$$

$$dx\, dy\, dz \; =$$

$$\left\{ \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{\cdots\} \frac{z^2}{r(x)} dx\,dy\,dz + \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{\cdots\} z^2 k_1(z) k_2^{-1}(z)\, dx\,dy\,dz \right\} =$$

$$\left\{ \frac{e^3}{12} \int_\omega \{\cdots\} \frac{1}{r(x)} dx\,dy + \left(\frac{e^3}{12} - \frac{Ke^5}{80}\right) \int_\omega \{\cdots\}\, dx\,dy \right\} .$$

$$m_8 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} z^2 \left(\frac{k_1^{-1}(z) + k_2^{-1}(z)}{r(x)}\right)^2 r(x) k_1(z) k_2(z) \left\{\frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \tilde{v}_3}{\partial x \partial y}\right\} dx\,dy\,dz =$$

$$= \left\{ \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} 2z^2 \{\cdots\}\, dx\,dy\,dz + \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{\cdots\} \frac{z^2}{r(x)} k_1^{-1}(z) k_2(z)\, dx\,dy\,dz + \right.$$

$$\left. \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{\cdots\} z^2 r(x)\, k_1(z) k_2^{-1}(z)\, dx\,dy\,dz \right\} =$$

$$\left\{ \frac{e^3}{6} \int_\omega \{\cdots\}\, dx\,dy + \left(\frac{e^3}{12} - \frac{Ke^5}{80}\right) \int_\omega \{\cdots\} \frac{1}{r(x)} dx\,dy + \right.$$

$$\left. \left(\frac{e^3}{12} - \frac{Ke^5}{80}\right) \int_\omega \{\cdots\}\, r(x)\, dx\,dy \right\} .$$

$$m_9 = \iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} k_1^2(z) \left\{\frac{k_2^{-1}(z)}{r(x)}\right\}^2 k_1(z) k_2(z) r(x)\, dx\,dy\,dz =$$

$$\iint_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \{\cdots\} \frac{k_1^3(z)}{r(x)} k_2^{-1}(z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$\left\{ e + \left(\frac{1}{R_1^2} - K\right)\frac{e^3}{4} - \frac{1}{R_1^3 R_2} \frac{e^5}{80} \right\} \int_\omega \{\cdots\} \frac{1}{r(x)} dx\,dy .$$

$$m_{10} = \iint_{\omega}\int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} .$$

$$. \, z \, \frac{h_1(z)}{r(x)} \left(h_2^{-1}(z) \right)^2 h_1(z) h_2(z) \, r(x) .$$

$$dx\, dy\, dz \; =$$

$$\iint_{\omega}\int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y}\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y} \right\} \frac{z}{r(x)} h_1^2(z) .$$

$$. \, h_2^{-1}(z) \; dx\, dy\, dz \; =$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1} \right) \frac{e^3}{12} + \frac{e^5}{80 R_1^2 R_2} \right. \int_{\omega} \{ \cdots \} \frac{1}{r(x)} dx\, dy \; .$$

$$m_{11} = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \breve{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \breve{v}_3}{\partial y} \right\} \frac{z^2}{r^2(x)} k_2^{-1}(z)\, k_1(z)\, k_2(z) \,.$$

$$. r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \frac{\partial \breve{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \breve{v}_3}{\partial y} \right\} \frac{z^2}{r(x)} k_1(z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\frac{e^3}{12} \int_\omega \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y} \right\} \frac{1}{r(x)}\, dx\, dy \,.$$

On obtient finalement :

$$\tilde{a}\left(\tilde{\vec{u}}, \tilde{\vec{v}}\right) = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \left\{ \sum_{l=1}^{6} c_i + \sum_{l=1}^{10} c_i' + \nu \left\{ \sum_{l=1}^{9} (d_i + d_i') \right\} + 2(1-\nu) \sum_{l=1}^{11} m_i \right\}$$

où les c_i ; c_1' ; d_i , d_i' et les m_i sont calculés précédemment; ce sont des intégrales qui portent sur la surface moyenne.

L'énergie de déformation est notée :

(III-1-20-1)

$$\tilde{a}\left(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}\right) = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \left\{ \sum_{l=1}^{6} c_i(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) + \sum_{l=1}^{10} c_i'(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) + \right.$$

$$\left. \nu \left\{ \sum_{i=1}^{9} \left(d_i(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) + d_i'(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) \right) \right\} + 2(1-\nu) \sum_{l=1}^{11} m_i(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) \right\} .$$

Calculons aussi $\ell(\vec{\tilde{v}})$.

On a :

$$\ell(\vec{v}) = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \vec{f} \cdot \vec{v}\, k_1(z) k_2(z) r(x)\, dx\, dy\, dz + \int_\Gamma \vec{g} \cdot \vec{v}\, d\Gamma$$

Posons :

$$\ell(\vec{v}) = \ell_1(\vec{v}) + \ell_2(\vec{v})$$

avec

$$\ell_1(\vec{v}) = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} \vec{f} \cdot \vec{v}\, k_1(z) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz$$

$$\ell_2(\vec{v}) = \int_\Gamma \vec{g}\, \vec{v}\, d\Gamma .$$

posons aussi :

$$\ell_1(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{3} \ell_{1i}(\vec{v})$$

où

$$\ell_{1i}(\vec{v}) = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_i v_i\, k_1(z) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz$$

d'après les relations (III-1-12), (III-1-13) et (III-1-14) on a :

$$\ell_{11}(\vec{\tilde{v}}) = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_1 v_1 k_1(z) k_2(z) r(x)\, dx\, dy\, dz = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_1 \Big(k_1(z) \tilde{v}_1 -$$

$$z \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} \Big) k_1 k_2\, r(x)\, dx\, dy\, dz = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_1 \tilde{v}_1\, k_1^2(z) k_2(z) r(x) \,.$$

$$. \, dx\, dy\, dz - \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_1 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} k_1(z) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\Big\{ e + \frac{e^3}{12}\Big(\frac{1}{R_1^2} + 2K\Big)\Big\} \int_\omega f_1 \tilde{v}_1 r(x)\, dx\, dy + \frac{Ke^3}{12} \int_\omega f_1 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x} r(x)\, dx\, dy \,.$$

$$\ell_{12}(\vec{\tilde{v}}) = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_2 \tilde{v}_2\, k_1(z) k_2(z)\, r(x)\, dx\, dy\, dz = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} f_2 \big(k_2(z) \tilde{v}_2 -$$

$$\left.\frac{3}{R}\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y}\right) k_1(z)k_2(z)\lambda(x)\,dx\,dy\,dz = \left\{ e + \frac{e^3}{12}\left(2K + \frac{1}{R_2^2}\right)\right\} \int_\omega f_2 \tilde{v}_2 \lambda(x)\,dx\,dy + .$$

$$\cdot\, \frac{e^3}{12}K \int_\omega f_2 \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial y}\,dx\,dy \,.$$

$$\ell_{13}(\tilde{\vec{v}}) = \int_\omega\int_{-e/2}^{e/2} f_3\, \tilde{v}_3\, k_1(z)k_2(z)\lambda(x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\left(\frac{Ke^3}{12} + e\right) \int_\omega f_3 \tilde{v}_3 \lambda(x)\,dx\,dy \,.$$

et $\ell_1(\tilde{\vec{v}}) = \sum_{i=1}^{3} \ell_{1i}(\tilde{\vec{v}})$.

Un calcul analogue est fait pour $\ell_2(\tilde{\vec{v}})$ d'où :

(III-1-20-2) $$\ell(\tilde{\vec{v}}) = \ell_1(\tilde{\vec{v}}) + \ell_2(\tilde{\vec{v}})$$

avec $$\ell_1(\tilde{\vec{v}}) = \int_\omega {}^t F \tilde{\vec{\vartheta}} \lambda(x)\,dx\,dy$$

$$\ell_2(\tilde{\vec{v}}) = \int_\Gamma {}^t\vec{G}\, \tilde{\vec{\vartheta}}\, d\Gamma .$$

où

$^t\vec{F} =$

$w_1 f_1$	0	0	$w_4 f_2$	0	0	$w_7 f_3$	$w_8 f_1$	$w_9 f_2$	0	0	0

(III-1-20-3) $^t\vec{G} =$

g_1	0	0	g_2	0	0	g_3	0	0	0	0	0

$${}^{t}\vec{\tilde{v}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \tilde{v}_1 & \tilde{v}_{1,x} & \tilde{v}_{1,y} & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_{2,x} & \tilde{v}_{2,y} & \tilde{v}_3 & \tilde{v}_{3,x} & \tilde{v}_{3,y} & \tilde{v}_{3,x^2} & \tilde{v}_{3,xy} & \tilde{v}_{3,y^2} \\ \hline \end{array}$$

avec
$$W_1 = e + \frac{e^3}{12}\left(\frac{1}{R_1^2} + 2K\right) \; ; \; W_4 = e + \frac{e^3}{12}\left(\frac{1}{R_2^2} + 2K\right)$$

$$W_7 = \left(e + \frac{e^3}{12}K\right) \; ; \; W_8 = W_9 = \frac{He^3}{12}$$

$$\tilde{v}_{i,x} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} \; ; \; \tilde{v}_{i,y} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y} \quad \text{pour } i = 1,2,3$$

$$\tilde{v}_{i,x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x^2} \; ; \; \tilde{v}_{i,xy} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x \partial y} \; ; \; \tilde{v}_{i,y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial y^2} \; ; \; i = 3.$$

III.2.- L'espace des fonctions admissibles

Remarque :

Compte-tenu de la définition de la surface moyenne ω définie en (II-3), l'énergie potentielle élastique et le travail des forces extérieures définies respectivement par les relations (III-1-20-1) et (III-1-20-2) sont des intégrales qui porteront sur Ω et sur $\partial\Omega = \gamma$ de fonctions dépendantes de deux coordonnées curvilignes (x, y).

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{a}(\vec{\tilde{v}}, \vec{\tilde{v}})$ ait un sens est que $\vec{\tilde{v}} \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 \times H^2(\Omega)$, voir [4].

D'où l'espace des fonctions admissibles V est défini par :

$$V = (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega).$$

III-3.- Formulation variationnelle du problème continu.

Le problème variationnel s'écrit :

trouver $\vec{\tilde{u}} \in V$ tel que :

$$\text{(III-3-0)} \quad \begin{cases} \tilde{a}(\vec{\tilde{u}}, \vec{\tilde{v}}) = \ell(\vec{\tilde{v}}) \\ \forall \vec{\tilde{v}} \in V \end{cases}$$

où $\ell(\vec{\tilde{v}})$ est donnée par (III-3-1)

$$\text{(III-3-1)} \quad \ell(\vec{\tilde{v}}) = \int_\Omega {}^t\vec{F}\,\vec{\tilde{v}}\, r(x)\, dx\, dy + \int_\gamma {}^tG\,\vec{\tilde{v}}\, d\sigma$$

III.4.- Existence et unicité de la solution du problème défini en (III-3).

Preuve :

La norme sur $V = (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ est donnée par

$$\|\vec{\tilde{v}}\|_V = \left\{ \left(\sum_{k=1}^{2} \|\tilde{v}_k\|^2_{1,\Omega} \right) + \|\tilde{v}_3\|^2_{2,\Omega} \right\}^{1/2}$$

où pour tout entier m

$$\|\tilde{v}\|_{m,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \tilde{v}|^2 dx \right)^{1/2}$$

avec $$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

et $$\partial^\alpha \tilde{v} = \frac{\partial^{|\alpha|} \tilde{v}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Dans un premier temps montrons que la forme linéaire définie (III-3-1) est continue sur V .

Considérons $\ell_1(\vec{\tilde{v}})$

où

$$\ell_1(\vec{\tilde{v}}) = \int_\Omega {}^t\vec{F}\,\vec{\tilde{v}}\,r(x)\,dx\,dy$$

$$\ell_1(\vec{\tilde{v}}) \leq \max_{x\in[0,L]} r(x) \int_\Omega {}^t\vec{F}\,\vec{\tilde{v}}\,dx\,dy$$

$$\leq \alpha_1 \left\{\int_\Omega |{}^t\vec{F}|^2 dx\,dy\right\}^{1/2} \left\{\int_\Omega |\vec{\tilde{v}}|^2 dx\,dy\right\}^{1/2}$$

$$= \alpha_1 \left\{\int_\Omega \left(w_1^2 f_1^2 + w_4^2 f_2^2 + w_7^2 f_3^2 + w_8^2 f_1^2 + w_9^2 f_2^2\right) dx\,dy\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_\Omega |\vec{\tilde{v}}|^2 dx\,dy\right\}^{1/2}$$

$$= \alpha_1 \left\{\int_\Omega \left((w_1^2+w_8^2) f_1^2 + (w_4^2+w_9^2) f_2^2 + w_7^2 f_3^2\right) dx\,dy\right\}^{1/2} \cdot$$

$$\left\{\int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \tilde{v}_{1,y}^2 + \dots + \tilde{v}_{3,y^2}\right) dx\,dy\right\}^{1/2}$$

$$\ell_1^2(\vec{\tilde{v}}) \leq \alpha_1 \int_\Omega \left((w_1^2+w_8^2) f_1^2 + (w_4^2+w_9^2) f_2^2 + w_7^2 f_3^2\right) dx\,dy \times$$

$$\int \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \dots + \tilde{v}_{3,y}^2\right) dx\,dy$$

$$\leq \alpha_1 \alpha_2 \int_\Omega \left(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2\right) dx\,dy \cdot \int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \dots + \tilde{v}_{3,y^2}\right) dx\,dy$$

$$\leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left\{ \int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \tilde{v}_{1,y}^2 \right) dx\,dy + \int_\Omega \left(\tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_{2,x}^2 + \tilde{v}_{2,y}^2 \right) dx\,dy + \right.$$

$$\left. \int_\Omega \left(\tilde{v}_3^2 + \tilde{v}_{3,x}^2 + \tilde{v}_{3,y}^2 + \tilde{v}_{3,x^2}^2 + \tilde{v}_{3,xy}^2 + \tilde{v}_{3,y^2}^2 \right) dx\,dy \right\}$$

$$\ell_1^2(\tilde{\vec{v}}) \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\|\tilde{v}_1\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{v}_2\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{v}_3\|_{1,\Omega}^2 \right)$$

$$\ell_1(\tilde{\vec{v}}) \leq (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \|\tilde{v}_k\|_{1,\Omega}^2 + \|v_3\|_{2,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$$

ie :

$$\ell_1(\tilde{\vec{v}}) \leq M' \, \|\tilde{\vec{v}}\|_V .$$

avec

$$M' = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$$

où $\alpha_1 = \max\limits_{x \in [0,L]} r(x)$

$$\alpha_2 = \sup \left(w_1^2 + w_8^2 ,\; w_4^2 + w_9^2 ,\; w_7^2 \right)$$

$$\alpha_3 = \sup_{1 \leq i \leq 3} \|f_i\|_{0,\Omega}$$

Considérons aussi la quantité

$$l_2(\tilde{\vec{v}}) = \int_\gamma {}^t\vec{G}\,\tilde{\vec{v}}\,d\gamma$$

$$l_2(\tilde{\vec{v}}) \leq \left\{\int |{}^t\vec{G}|^2 d\gamma\right\}^{1/2} \left\{\int_\gamma |\tilde{\vec{v}}|^2 d\gamma\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{\int_\gamma (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)\,d\Gamma\right\}^{1/2} \left\{\int_\gamma (\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \cdots + \tilde{v}_{1,y^2})\,d\Gamma\right\}^{1/2}$$

$$l_2^2(\tilde{\vec{v}}) \leq \sup_{1\leq i\leq 3} \|g_i\|_{0,\gamma} \int_\gamma (\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \cdots + \tilde{v}_{3,y^2}^2)\,d\Gamma$$

$$= \beta \int_\gamma (\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + v_{1,y}^2)\,d\Gamma + \int_\gamma (\tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_{2,x}^2 + \tilde{v}_{2,y}^2)\,d\Gamma$$

$$+ \int_\gamma (\tilde{v}_3^2 + \tilde{v}_{3,x}^2 + \tilde{v}_{3,y}^2 + \tilde{v}_{3,x^2}^2 + \tilde{v}_{3,xy}^2 + \tilde{v}_{3,y^2}^2)\,d\Gamma$$

$$\ell_2^2(\tilde{\vec{v}}) \leq \beta \left(\|\tilde{v}_1\|^2_{1,\gamma} + \|\tilde{v}_2\|^2_{1,\gamma} + \|\tilde{v}_3\|^2_{1,\gamma} \right)$$

or d'après un théorème d'analyse [RAVIART et FAURRE] $\exists\; c(\Omega)$ telle que

$$\|\tilde{v}\|_{0,\gamma} \leq c(\Omega) \|\tilde{v}\|_{1,\Omega} .$$

et on sait que :

$$\|\tilde{v}_i\|_{1,\Omega} \leq \|\tilde{v}_i\|_{2,\Omega}$$

d'où

$$\ell_2^2(\tilde{\vec{v}}) \leq \beta\beta' \left(\|\tilde{v}_1\|^2_{1,\Omega} + \|\tilde{v}_2\|^2_{1,\Omega} + \|\tilde{v}_3\|^2_{2,\Omega} \right)$$

ie :

$$\ell_2(\tilde{\vec{v}}) \leq (\beta\beta')^{1/2} \; \|\tilde{\vec{v}}\|_V = M'' \|\tilde{\vec{v}}\|_V$$

avec $\quad \beta = \sup\limits_{1 \leq i \leq 3} \|g_i\|_{0,\gamma}$

$$\beta' = \sup_{1 \leq i \leq 3} c_i(\Omega)$$

et enfin :

$$\ell(\tilde{\vec{v}}) \leq (M' + M'') \; \|\tilde{\vec{v}}\|_V = M''' \|\tilde{\vec{v}}\|_V$$

où $\quad M'' = (\beta\beta')^{1/2}$

$$M''' = M' + M'' .$$

Pour montrer la continuité de la forme bilinéaire $\tilde{a}\,(\cdot\;,\;\cdot)$ on écrit cette dernière par (III-4-0) .

(III-4-0) $$\tilde{a}(\vec{\tilde{u}},\vec{\tilde{v}}) = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \int_{\Omega} {}^t\vec{\tilde{U}}\,[S_{ij}]\,\vec{\tilde{V}}\, r(x)\, dx\, dy \,.$$

où la matrice $[S_{ij}]$ de dimension (12 × 12) est donnée par (IV-4-1).

Le vecteur colonne ${}^t\vec{\tilde{U}}$ est donné par analogie avec les notations de (III-1-20-3) par :

$${}^t\vec{\tilde{U}} = \boxed{\tilde{u}_1 \,|\, \tilde{u}_{1,x} \,|\, \tilde{u}_{1,y} \,|\, \tilde{u}_2 \,|\, \tilde{u}_{2,x} \,|\, \tilde{u}_{2,y} \,|\, \tilde{u}_3 \,|\, \tilde{u}_{3,x} \,|\, \tilde{u}_{3,y} \,|\, \tilde{u}_{3,x^2} \,|\, \tilde{u}_{3,xy} \,|\, \tilde{u}_{3,y^2}}$$

où

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{u}_{i,x} = \dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} \\ \tilde{u}_{i,y} = \dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \end{array}\right. \qquad \text{pour} \quad = 1, 2, 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{u}_{i,x^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x^2} \\ \tilde{u}_{i,xy} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x \partial y} \\ \tilde{u}_{i,y^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial y^2} \end{array}\right. \qquad \text{pour} \quad = 3$$

$$\tilde{u}_i \;;\; \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Montrons que la forme bilinéaire définie en (III-4-0) est continue. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe une constante telle que :

on a :

$\operatorname{ctg}^2\varphi\left[e+\frac{e^3}{4}\left(\frac{1}{R_1^2}-K\right)-\frac{e^5}{80R_1^2R_2}\right]$	$\frac{\nu}{R_2}\left(e+\frac{e^3}{12R_1^2}\right)$	0	0	0	$\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{2R_2}\left(e+\frac{e^3}{12R_1^2}\right)$	$-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R_2^2}\left[e-\frac{e^3}{12}\left(2K+\frac{1}{R_1^2}\right)+2e\frac{R_2}{R_1}\right]$	$-\operatorname{ctg}^2\varphi\left[\frac{e^3}{12}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)+\frac{e^5}{80}\frac{K}{R_1}\right]$	0	$\frac{\nu e^3}{6}K\operatorname{ctg}\varphi$	0	$-\operatorname{ctg}\varphi\left[\frac{e^3}{12}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)+\frac{e^5K}{80R_1}\right]$
	$2\left(e+\frac{e^3}{12}K\right)$	0	0	0	$\frac{2\nu}{2}\left(e+\frac{Ke^3}{12}\right)$	$-2e\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)$	$\frac{\nu e^3}{6}\operatorname{ctg}\varphi\cdot K$	0	$\frac{e^3}{6R_2}$	0	$\frac{\nu e^3}{6R_1 r}$
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0	$-4(1-\nu)\operatorname{ctg}\varphi\cdot\left(e+\frac{Ke^3}{12}\right)$	$-\left[\frac{(1-\nu)\nu}{6R_1^2 r}\right]\cdot\operatorname{ctg}\varphi$	0	0	$\frac{e^3(1-\nu)\operatorname{ctg}\varphi}{3R_1 r}$	0	$2(1-\nu)\operatorname{ctg}\varphi\, e^3\left[\frac{1+r}{12R_2 r}+\frac{1}{6R_1}\right]$	0
				$4(1-\nu)\left(e+\frac{Ke^3}{12}\right)$	$\frac{e^3}{12R_1^2 r}$	0	0	$-(1-\nu)\frac{e^3}{3R_1 r}$	0	$-2e^3(1-\nu)\left[\frac{R_1+r(1+R_1+R_2)}{12rR_1R_2}\right]$	0
					$e\left[\frac{2\nu}{r^2}\left\{1+\frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{R_1^2}+\right)-\frac{e^4K}{80R_1}\right\}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{Ke^2}{12}\right)\right]$	$-e\left(\frac{2\nu}{rR_1}+\frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{r e^3K\operatorname{ctg}\varphi}{12}$	$\frac{\left[\left(\frac{1}{R_2}-\frac{2}{R_1}\right)\frac{e^3}{12}+\frac{Ke^5}{80R_1}\right]}{r^2}$	$\frac{\nu e^3}{6rR_2}$	$\left[\frac{e^3}{12R_1 r^2}+e^3\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Ke^5}{80R_1}\right]\times\frac{1}{r}$	$\frac{e^3}{12R_1}$
		Sym				$\frac{2}{R_1^2}\left(e+\frac{Ke^3}{12}\right)+\frac{1}{R_2^2}\left(e-\frac{e^3K}{4}\right)$	$\frac{e^2\operatorname{ctg}\varphi}{2R_2}\left(\nu+\frac{e}{6R_2}\right)$	0	$\frac{e^3}{6}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{e^2\nu}{2}\left(1+\frac{1}{Rr}\right)$	0	$\frac{e^3}{12R_2^2 r}$
							$\frac{1}{R_2^2}\operatorname{ctg}^2\varphi\left[\frac{e^3}{12}-\frac{Ke^5}{80}\right]$	0	$\frac{e^3\nu}{6R_2}\operatorname{ctg}\varphi$	0	$\operatorname{ctg}\varphi\left[\frac{e^3}{12}-\frac{e^5K}{80}\right]$
								$(1-\nu)\frac{e^3}{3r^2}$	0	$4(1-\nu)\left[\frac{e^3}{12r^2}+\left(\frac{e^3}{12}-\frac{Ke^5}{80}\right)\frac{1}{r}\right]$	0
									$\frac{Ke^5}{40}$	0	$\frac{\nu e^3}{6r}$
										$2e^3(1-\nu)\left[\frac{1}{3R_1}+\left(\frac{1}{6}-\frac{e^2K}{40}\right)\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\right]$	0
											$\frac{1}{r^2}\left[\frac{e^3}{12}-\frac{e^5K}{80}\right]$

(III- 4 -1)

Montrons que la forme bilinéaire définie en (III-4-D) est continue. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe une constante M telle que :

$$\tilde{a}(\vec{\tilde{u}},\vec{\tilde{v}}) \leq M \|\vec{\tilde{u}}\|_V \|\vec{\tilde{v}}\|_V .$$

On a :

$$\tilde{a}(\vec{\tilde{u}},\vec{\tilde{v}}) = \frac{E}{1-\nu^2} \int_\Omega {}^t\vec{\tilde{U}}\,[S\ddot{y}]\,\vec{\tilde{\vartheta}}\,\iota(x)\,dx\,dy$$

$$\leq \frac{E\alpha}{1-\nu^2} \int_\Omega {}^t\vec{\tilde{U}}\,[S\ddot{y}]\,\vec{\tilde{\vartheta}}\,dx\,dy$$

$$\leq \frac{E\alpha\alpha'}{1-\nu^2} \int_\Omega |{}^t\vec{\tilde{U}}|^2 |\vec{\tilde{\vartheta}}|^2\,dx\,dy$$

$$\leq \frac{E}{1-\nu^2}\alpha\alpha' \left\{ \int_\Omega |{}^t\vec{\tilde{U}}|^2 dx\,dy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_\Omega |{}^t\vec{\tilde{\vartheta}}|^2 dx\,dy \right\}^{1/2}$$

$$\left(\tilde{a}(\vec{\tilde{u}},\vec{\tilde{v}})\right)^2 \leq \left(\frac{E}{1-\nu^2}\alpha\alpha'\right)^2 \left\{ \int_\Omega \left(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_{1,x}^2 + \tilde{u}_{1,y}^2 + \dots + \tilde{u}_{3,y^2}\right) dx\,dy \right\} \cdot \left\{ \int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \dots + \tilde{v}_{3,y^2}\right) dx\,dy \right\}$$

$$= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\alpha\alpha'\right)^2 \left\{ \int_\Omega \left(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_{1,x}^2 + \tilde{u}_{1,y}^2\right) dx\,dy + \int_\Omega \left(\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_{2,x}^2 + \tilde{u}_{2,y}^2\right) dx\,dy + \cdot\right.$$

$$\cdot \int_\Omega \left(\tilde{u}_3^2 + \tilde{u}_{3,x}^2 + \cdots\cdots + \tilde{u}_{3,y^2}^2\right) dx\,dy \,. \left\{ \int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \tilde{v}_{1,y}^2\right) dx\,dy \,+ \right.$$

$$\left. \int_\Omega \left(\tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_{2,x}^2 + \tilde{v}_{2,y}^2\right) dx\,dy + \int_\Omega \left(\tilde{v}_3^2 + \tilde{v}_{3,x}^2 + \cdots\cdots + \tilde{v}_{3,y^2}^2\right) dx\,dy \right\}$$

$$= \frac{E^2}{(1-\nu^2)^2} \left(\|\tilde{u}_1\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{u}_3\|_{2,\Omega}^2 \right) \cdot$$

$$\left(\|\tilde{v}_1\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{v}_2\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{v}_3\|_{2,\Omega}^2 \right)$$

$$= \left(\frac{E}{1-\nu^2} \alpha \alpha' \right)^2 \|\vec{\tilde{u}}\|_V^2 \,.\, \|\vec{\tilde{v}}\|_V^2 \,.$$

d'où :

$$\tilde{a}\left(\vec{\tilde{u}}, \vec{\tilde{v}}\right) \leq M \, \|\vec{\tilde{u}}\|_V \, \|\vec{\tilde{v}}\|_V \,.$$

avec $\quad M = \dfrac{E}{1-\nu^2} \alpha \alpha'$

où $\quad \alpha = \max\limits_{x \in [0,L]} r(x)$

et $\quad \alpha' = \sup \left(\max\limits_{1 \leq i \leq 12} \sum_{j=1}^{12} |s_{ij}| \; ; \; \max\limits_{1 \leq i \leq 12} \sum_{i=1}^{12} |s_{ij}| \right)$

montrons également la V. ellipticite de la forme bilinéaire $\tilde{a}$ (. , .).

Montrons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$\tilde{a}(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) \geq \delta \, \|\tilde{\vec{v}}\|_V^2 .$$

On a :

$$\tilde{a}(\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{v}}) = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \int_\Omega {}^t\tilde{\vec{\vartheta}} \, [S\ddot{y}] \, \tilde{\vec{\vartheta}} \, r(x) \, dx\, dy$$

$$\geq \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \min_{x \in [0,L]} r(x) \int {}^t\tilde{\vec{\vartheta}} \, [S\ddot{y}] \, \tilde{\vec{\vartheta}} \, dx\, dy$$

$$\geq \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) h h' \int_\Omega {}^t\tilde{\vec{\vartheta}} \, \tilde{\vec{\vartheta}} \, dx\, dy$$

$$= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) h h' \int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \dots + \tilde{v}_{3,y^2}^2\right) dx\, dy$$

$$= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) h h' \left\{ \int_\Omega \left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_{1,x}^2 + \tilde{v}_{1,y}^2\right) dx\, dy + \right.$$

$$\left. \int_\Omega \left(\tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_{2,x}^2 + \tilde{v}_{2,y}^2\right) dx\, dy + \int_\Omega \left(\tilde{v}_3^2 + \tilde{v}_{3,x}^2 + \dots + \tilde{v}_{3,y^2}^2\right) dx\, dy \right\}$$

$$= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) h h' \, \|\tilde{\vec{v}}\|_V^2 .$$

d'où $$\tilde{a}(\vec{\tilde{v}},\vec{\tilde{v}}) \geqslant \delta \, \|\vec{\tilde{v}}\|_V^2$$

avec $$\delta = \frac{E}{1-\nu^2}\, h h'$$

où $$h = \min_{x \in [0,L]} r(x)$$

$$h' = \mathrm{Inf}\left(\min_{1\le i\le 12} \sum_{j=1}^{12} |s_{ij}| \; ; \; \min_{1\le j\le 12} \sum_{i=1}^{12} |s_{ij}| \right)$$

La forme bilinéaire $\tilde{a}$ (. , .) est continue et V-elliptique, la forme linéaire est continue, les conditions du Théorème de Lax-Milgrau sont satisfaites donc on a l'existence et l'unicité de la solution du problème défini en (III-3).

La matrice [s_{ij}] définie en (III-4-1) est donnée dans le cas de coques minces de révolution.

Dans le cas particulier d'une coque cylindrique c'est-à-dire

pour : $$r = R_1 = R_2 = R$$

et $$\varphi = \pi/2$$

La matrice [s_{ij}] est donnée par (III-4-2).

Avec les notations définies en (III-1-20-3) et (III-4-1) le problème défini en (III-3) s'écrit :

Trouver $\vec{\tilde{u}} \in V = (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$

tel que :

III-5.- Formulation variationnelle équivalente.

(III-5-0) $$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{E}{1-\nu^2}\right) \displaystyle\int_\Omega {}^t\vec{\tilde{U}}\,[S_{ij}]\,\vec{\tilde{v}}\,r(x)\,dx\,dy = \\ \displaystyle\int_\Omega {}^t\vec{F}\,\vec{\tilde{v}}\,r(x)\,dx\,dy + \int_\gamma {}^t\vec{G}\,\vec{\tilde{v}}\,d\gamma \\ \forall\,\vec{\tilde{v}} \in V. \end{array}\right.$$

0	$\frac{\nu}{R}\left(e+\frac{e^3}{12R^2}\right)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$2\left(e+\frac{e^3}{12R^2}\right)$	0	0	0	$2\nu\left(e+\frac{e^3}{12R^2}\right)$	$-2e\left(\frac{1}{R}+\frac{\nu}{R}\right)$	0	0	$\frac{e^3}{6R}$	0	$\frac{\nu e^3}{6R^2}$
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0	0	0	0	0	0	0	0	0
				$4(1-\nu)\left(e+\frac{e^3}{12R^2}\right)$	$\frac{e^3}{12R^3}$	0	0	$-(1-\nu)\frac{e^3}{3R^2}$	0	$-e^3(1-\nu)\left(\frac{1+R}{3R^2}\right)$	0
					$2\nu\left(e-\frac{2}{R^2}-\frac{e^5}{80R^2}\right)+\frac{1}{R}\left(e+\frac{e^3}{12R^2}\right)$	$\frac{-e}{R^2}(R+2\nu)$	0	$\frac{e^3}{R^3}\left(-\frac{1}{12}+\frac{e^2}{80R^2}\right)$	$\frac{\nu e^3}{6R^2}$	$\frac{e^3}{4R^2}\left(\frac{1}{3R^2}-\frac{1}{3}+\frac{e^2}{20R^2}\right)$.	$\frac{e^3}{12R}$
		Sym				$\frac{1}{R^2}\left(e-\frac{e^3}{4R^2}\right)+\frac{2}{R^2}\left(e+\frac{e^3}{12R^2}\right)$	0	0	$\frac{\nu e^2}{2}\left(1+\frac{1}{R^2}\right)$	0	$\frac{e^3}{12R^3}$
							0	0	0	0	0
								$(1-\nu)\frac{e^3}{3R^2}$	0	$\frac{e^3}{R}(1-\nu)\left[\frac{1}{3R^2}+\frac{1}{3}-\frac{e^2}{20R^2}\right]$	0
									$\frac{e^5}{40R^2}$	0	$\frac{\nu e^3}{6R^2}$
										$2e^3(1-\nu)\left[\frac{1}{3R^2}+\frac{1}{6}-\frac{e^2}{40R^2}\right]+\left(1+\frac{\nu}{R^2}\right)$	0
											$\frac{1}{R^2}\left(\frac{e^3}{12}-\frac{e^5}{80R^2}\right)$

CHAPITRE IV

MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

NOTATIONS LIEES AU CHAPITRE IV

$\mathcal{T}$: Triangle.

$\mathcal{T}_h$: Triangulation de la fermeture de l'ouvert

$\Omega \subset \mathcal{E}^2$

$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$

$P_k(\mathbb{R}^2)$: L'espace des polynômes de degré par rapport à l'ensemble des variables (x , y).

$C^0(\bar{\Omega})$: L'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.

Σ_T : L'ensemble des degré de liberté du triangle T .

$\hat{N}$: Le nombre de degré de liberté total de la triangulation

Généralité sur la méthode d'éléments finis.

La méthode est basée sur la résolution du problème discrétisé suivant :

On cherche $\vec{\tilde{u}}_h \in V_h$ tel que :

(IV-1) $$\begin{cases} \tilde{a}_h(\vec{\tilde{u}}_h, \vec{\tilde{v}}_h) = \ell_h(\vec{\tilde{v}}_h) \\ \forall \vec{\tilde{v}}_h \in V_h \end{cases}$$

où

(IV-1-1) $$\tilde{a}_h(\vec{\tilde{u}}_h, \vec{\tilde{v}}_h) = \beta \int_{\Omega} {}^t\vec{\tilde{u}}_h \, [s_{ij}] \, \vec{\tilde{v}}_h \, r(x) \, dx \, dy$$

$$\beta = \frac{E}{1-\nu^2}$$

(IV-1-2) $$\ell_h(\vec{\tilde{v}}_h) = \int_{\Omega} {}^t\vec{F} \, \vec{\tilde{v}}_h \, r(x) \, dx \, dy + \int_{\gamma} {}^t\vec{G} \, \vec{\tilde{v}} \, d\sigma$$

Dans ce qui suit on suppose que $\bar{\Omega}$ est un polygone. $\bar{\Omega}$ sera recouvert de triangulation T_h (composée de triangles).

On définit le sous-espace V_h de V par :

$$V_h = \{V_{h_1}\}^2 \times V_{h_2}$$ tel que

(IV-2) $$V_h \subset V$$

(en tenant compte des conditions aux limites).

On renvoie le lecteur pour plus de détail à BERNADOU [1], [3].

(IV-2) $$V_h \subset V$$

En tenant compte des conditions aux limites on a :

$$V_{h_1} \subset H^1(\Omega)$$
$$V_{h_2} \subset H^2(\Omega)$$

de sorte que l'inclusion définie par (IV-2) soit satisfaite. On renvoie le lecteur à BERNADOU [1] et [3].

L'approximation $\vec{\tilde{u}}_h \in V_h$ du problème défini en (IV-1) est telle que l'inclusion (IV-2) assure l'existence et l'unicité du problème (IV-1).

Estimation de l'erreur abstraite

Théorème :

Dans le problème discret défini en (IV-1), la forme bilinéaire $\tilde{a}_h$ est V_h -elliptique uniformément par rapport à h dans le sens qu'il existe une constante $\alpha > 0$ (indépendante de h)

(IV-3) telle que :

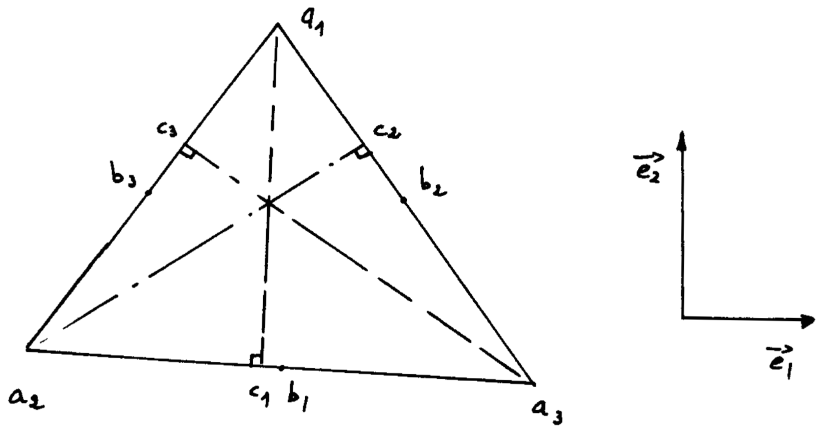
$$\alpha \, \|\vec{\tilde{v}}_h\|_V \leq \tilde{a}_h(\vec{\tilde{v}}_h, \vec{\tilde{v}}_h) \quad \forall \vec{\tilde{v}}_h \in V_h \, .$$

alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|\vec{\tilde{u}} - \vec{\tilde{u}}_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{\vec{\tilde{v}}_h \in V_h} \left\{ \|\vec{\tilde{u}} - \vec{\tilde{v}}_h\|_V + \sup_{\vec{\tilde{w}}_h \in V_h} \frac{\left| \tilde{a}(\vec{\tilde{v}}_h, \vec{\tilde{w}}_h) - \tilde{a}_h(\vec{\tilde{v}}_h, \vec{\tilde{w}}_h) \right|}{\|\vec{\tilde{w}}_h\|_V} \right\} + \sup_{\vec{\tilde{w}}_h \in V_h} \frac{\left| \ell(\vec{\tilde{w}}_h) - \ell_h(\vec{\tilde{w}}_h) \right|}{\|\vec{\tilde{w}}_h\|_V} \right\}$$

Preuve : Voir BERNADOU [1].

IV.4.- *Définition de l'élément fini d'ARGYRIS*



en chaque noeud (a_i) i = 1, 2, 3 on a 6 degré de liberté qualifiés de locaux.

(IV-5) $$\sum_T = \Big\{ v(a_i),\ Dv(a_i)(a_{i-1}-a_i),\ Dv(a_i)(a_{i+1}-a_i)\ 1 \le i \le 3,$$
$$D^2 v(a_i)(a_{m+1}-a_{m-1})^2;\ \begin{matrix} 1 \le i \le 3 \\ 1 \le m \le 3 \end{matrix},\ Dv(b_i)(a_i - c_i),$$
$$1 \le i \le 3 \Big\}.$$

les indices sont définis dans $\{1, 2, 3\}$ modulo 3.

On définit également les degrés de liberté globaux, on remplace les directions des côtés du triangle par des directions fixes des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ puis on norme.

Aux six degrés de liberté locaux relatifs aux sommets (a_j), $j = 1, 2, 3$ correspond les six degrés de liberté globaux suivants :

$$\text{(IV-6)} \quad \left[\begin{array}{l} \Big\{ v(a_i) \,;\; Dv(a_i)\,\vec{e}_1 = \dfrac{\partial v}{\partial x}(a_i) \,;\; Dv(a_i)\,\vec{e}_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a_i) \,; \\[2ex] D^2v(a_i)\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(a_i) \,;\; D^2v(a_i)\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(a_i) \,; \\[2ex] D^2v(a_i)\,(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(a_i) \,. \Big\} \end{array} \right.$$

Ce qui permet de donner l'expression des degrés de liberté locaux en fonctions des globaux.

$$\text{(VI-7)} \quad \begin{bmatrix} Dv(a_i)\,(a_{i-1} - a_i) \\[4ex] Dv(a_i)\,(a_{i+1} - a_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i-1,i} & y_{i-1,i} \\[4ex] x_{i+1,i} & y_{i+1,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x}(a_i) \\[4ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}(a_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D^2v(a_i)\,(a_2-a_3)^2 \\ \\ D^2v(a_i)\,(a_3-a_1)^2 \\ \\ D^2v(a_i)\,(a_1-a_2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{23}^2 & 2x_{23}y_{23} & y_{23}^2 \\ \\ x_{31}^2 & 2x_{31}y_{31} & y_{31}^2 \\ \\ x_{12}^2 & 2x_{12}y_{12} & y_{12}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(a_i) \\ \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(a_i) \\ \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(a_i) \end{bmatrix} \tag{IV-8}$$

où

$$\begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \end{cases} \qquad i,j = 1,\ 2,\ 3\ .$$

Les dérivées normales sont calculées au milieux des côtes, il convient également de les normer et de les orienter (voir BERNADOU-BOISSERIE [5]).

IV.9.- *Matrice de passage des degrés de liberté locaux aux globaux*

(IV-9-1)
$$\left[\mathcal{D}LL(v)\right] = \left[\mathcal{D}LG(v)\right] \cdot \left[\mathcal{D}\right]$$
$$(1 \times 21) \qquad (1 \times 21) \qquad (21 \times 21)$$

avec

(IV-9-2)
$$\left[DLG(v)\right] = \Big[v(ai),\ i=1,2,3\ ;\ \frac{\partial v}{\partial x}(ai), \frac{\partial v}{\partial y}(ai)\ i=1,2,3\ ;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(ai), \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(ai), \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(ai),\ i=1,2,3\ ;\ \frac{\partial v}{\partial \nu_i}(bi),\ i=1,2,3 \Big]$$

(IV-9-3)
$$\begin{aligned}\left[\mathcal{D}LL(v)\right] = \Big[& v(ai),\ i=1,2,3\ ;\ Dv(a_1)\,a_{31}\ ;\ Dv(a_1)\,a_{21}\ ; \\ & Dv(a_2)\,a_{12}\ ;\ Dv(a_2)\,a_{32}\ ;\ Dv(a_3)\,a_{23}\ ;\ Dv(a_3)\,a_{13}\ ; \\ & D^2v(a_1)\,a_{31}^2\ ;\ D^2v(a_1)\,a_{12}^2\ ;\ D^2v(a_2)\,a_{12}^2\ ;\ D^2v(a_2)\,a_{23}^2, \\ & D^2v(a_3)\,a_{\text{[illegible]}}^2,\ D^2v(a_3)\,a_{31}^2\ ;\ D^2v(a_1)\,a_{23}^2\ ; \\ & D^2v(a_2)\,a_{31}^2\ ;\ D^2v(a_3)\,a_{12}^2\ ;\ Dv(bi)\,(ai-ci),\ i=1,2,3 \Big]\end{aligned}$$

D'où la matrice de passe $\mathcal{D}$ des degrés de liberté locaux aux globaux donnée par : (IV-9-4).

1	0	0	0	0	0	0	0													0
0	1	0	0	0	0	0	0													0
0	0	1	0	0	0	0	0													0
0	0	0	x_{31}	x_{21}	0	0	0													0
0	0	0	y_{31}	y_{21}	0	0	0													0
0	0	0	0	0	x_{12}	x_{32}	0	0	0	0	0	0								0
0	0	0	0	0	y_{12}	y_{32}	0	0	0	0	0	0								0
					0	0	x_{23}	x_{13}	0	0	0	0								0
					0	0	y_{23}	y_{13}	0	0	0	0								0
					0	0	0	0	x_{31}^2	x_{12}^2	0	0	0	0	x_{23}^2	0	0	0	0	0
					0	0	0	0	$2x_{31}y_{31}$	$2x_{12}y_{12}$	0	0	0	0	$2x_{23}y_{23}$	0	0	0	0	0
					0	0	0	0	y_{31}^2	y_{12}^2	0	0	0	0	y_{23}^2	0	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	0	x_{12}^2	x_{23}^2	0	0	0	x_{31}^2	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	0	$2x_{12}y_{12}$	$2x_{23}y_{23}$	0	0	0	$2x_{31}y_{31}$	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	0	y_{12}^2	y_{23}^2	0	0	0	y_{31}^2	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	0	0	0	x_{23}^2	x_{31}^2	0	0	x_{12}^2	0	0	0
								0	0	0	0	0	$2x_{23}y_{23}$	$2x_{31}y_{31}$	0	0	$2x_{12}y_{12}$	0	0	0
								0	0	0	0	0	y_{23}^2	y_{31}^2	0	0	y_{12}^2	0	0	0
								0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	m_1	0	0
								0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	m_2	0
0								0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	m_3

IV.10.- Les polynômes de base et leurs dérivées

On désigne par P_k l'espace des polynômes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à k par rapport à l'ensemble des variables.

La dimension de P_k est donnée par RAVIART et THOMAS [15]

$$\dim P_k = C^k_{n+k} \quad ,$$

k est le degré du polynôme de P_k .

n est le nombre de variables.

Dans le cas de notre travail, $k = 5$ et $n = 2$ et $\dim P_k = 21$.
Ceci explique le fait qu'on ait rajouté les 3 dérivées normales calculées aux milieux des côtes [a_i , a_j] dans l'élément fini d'Argyrès.

A l'aide des relations (IV-9-1) on peut exprimer les vingt et un (21) monômes de base à l'aide des 21 monômes en (λ_i)$_i$, i = 1, 2, 3 (λ_i coordonnées barycentriques) homogènes de degré 5.

avec

$$\left[\begin{array}{l}
\lambda_1(x,y) = \left[(x-x_2)\,y_{23} + (y-y_2)\,x_{32}\right] \times \dfrac{1}{\Delta} \\
\lambda_2(x,y) = \left[(x-x_3)\,y_{31} + (y-y_3)\,x_{13}\right] \times \dfrac{1}{\Delta} \\
\lambda_3(x,y) = \left[(x-x_1)\,y_{12} + (y-y_1)\,x_{21}\right] \times \dfrac{1}{\Delta} \\
\Delta = x_{13}\,y_{23} + x_{23}\,y_{31} .
\end{array}\right.$$

les polynômes de base s'écrivent sous forme matricielle par : (IV-10-1).

$$\text{(IV-10-1)} \qquad \underset{(21\times 1)}{[\,P\,]} = \underset{(21\times 21)}{[\,\mathcal{A}\,]} \quad \underset{(21\times 1)}{[\,\lambda\,]}$$

On pose :

$$(\text{IV-10-2})\quad \left[\begin{array}{l} \Pi_T(v) = \sum_{i=1}^{3} v(a_i)\, p_i^0 + \sum_{i=1}^{3} \left(Dv(a_i)\, a_{i-1,i}\, p_{i,i-1}^1 + Dv(a_i) \cdot \right. \\ \quad \left. \cdot\, a_{i+1,i}\, p_{i,i+1}^1 \right) + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(D^2 v(a_i)\, a_{j+1,j-1}^2\, p_{i,j}^2 \right) + \\ \quad \sum_{i=1}^{3} Dv(b_i)\, (a_i - c_i)\, p_{1,i}^3 \end{array}\right.$$

où :

$\Pi_T v$ est l'interpolant de v sur le triangle T .

La relation définie en (IV-10-1) est donnée explicitement par BERNADOU et BOISSERIE [5].

IV.10.3.- *Dérivées des polynômes de base*

Les dérivées sont calculées par rapport aux variables x et y .

On note :

$$(\text{IV-10-3-1})\quad \left[\begin{array}{l} \partial_i p = \dfrac{\partial p}{\partial \lambda_i} \\ \partial_{ij} p = \dfrac{\partial^2 p}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \\ \underset{(2\times 1)}{\left[\partial_i p\right]} \doteq \underset{(2\times 2)}{\left[\mathcal{A}\right]} \cdot \underset{(2\times 1)}{\left[\partial_i \lambda\right]} \qquad \text{pour} \quad = 1, 2, 3 \\ \text{et} \\ \left[\partial_{ij} p\right] = \left[\mathcal{A}\right] \left[\partial_{ij} \lambda\right] \qquad \text{pour} \quad , \quad = 1, 2, 3. \end{array}\right.$$

en dérivant par rapport à x et y on obtient :

(IV-10-3-2)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \right) = \frac{1}{\Delta} \left[y_{23} \partial_1 p + y_{31} \partial_2 p + y_{12} \partial_3 p \right] \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} \right) = \frac{1}{\Delta} \left[x_{32} \partial_1 p + x_{13} \partial_2 p + x_{21} \partial_3 p \right] \end{cases}$$

or
$$\partial_{xx} \lambda_i = \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial x^2} = 0$$
$$\partial_{yy} \lambda_i = \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial y^2} = 0$$
$$\partial_{xy} \lambda_i = \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial x \partial y} = 0$$

On a :

(IV-10-3-3)
$$\begin{cases} \partial_{x^2} p = \dfrac{1}{\Delta^2} \Big[y_{23}^2 \partial_{11} p + y_{31}^2 \partial_{22} p + y_{12}^2 \partial_{33} p + 2 \big\{ y_{23} y_{31} \partial_{12} p + \\ \qquad y_{31} y_{12} \partial_{23} p + y_{12} y_{23} \partial_{31} p \big\} \Big] . \\ \partial_{xy} p = \dfrac{1}{\Delta^2} \Big[y_{23} x_{32} \partial_{11} p + y_{31} x_{13} \partial_{22} p + y_{12} x_{21} \partial_{33} p + \\ \qquad (y_{23} x_{13} + y_{31} x_{32}) \partial_{12} p + (y_{31} x_{21} + y_{12} x_{13}) \partial_{23} p \\ \qquad + (y_{12} x_{32} + y_{23} x_{21}) \partial_{31} p \Big] . \\ \partial_{yy} p = \dfrac{1}{\Delta^2} \Big[x_{32}^2 \partial_{11} p + x_{13}^2 \partial_{22} p + x_{21}^2 \partial_{33} p + \\ \qquad 2 \big\{ x_{32} x_{13} \partial_{12} p + x_{13} x_{21} \partial_{23} p + x_{21} x_{32} \partial_{31} p \big\} \Big] . \end{cases}$$

Les relations définies par (IV-9-3) et (IV-10-2) permettent d'écrire :

$$\Pi_T v = \underset{(1\times 21)}{\left[\mathcal{B}LL(v)\right]}\ \underset{(21\times 1)}{\left[p\right]} \qquad \text{(IV-10-4)}$$

ou encore grâce aux relations (IV-9-1) et (IV-10-1)

$$\Pi_T v = \underset{(1\times 21)}{\left[\mathcal{B}LG(v)\right]}\ \underset{(21\times 21)}{\left[\mathcal{B}\right]}\ \underset{(21\times 21)}{\left[\mathcal{A}\right]}\ \underset{(21\times 1)}{\left[\lambda\right]} \qquad \text{(IV-10-5)}$$

ceci permet de calculer les dérivées de l'interpolant défini en (IV-10-5) par :

$$\text{(IV-10-6)} \quad \left[\begin{aligned} \partial_x \Pi_T v &= \left[\mathcal{B}LG(v)\right]\left[\mathcal{B}\right]\left[\mathcal{A}\right]\left[\partial_x\lambda\right] \\ \partial_{xx} \Pi_T v &= \left[\mathcal{B}LG(v)\right]\left[\mathcal{B}\right]\left[\mathcal{A}\right]\left[\partial_{xx}\lambda\right] \\ \partial_{xy} \Pi_T v &= \left[\mathcal{B}LG(v)\right]\left[\mathcal{B}\right]\left[\mathcal{A}\right]\left[\partial_{xy}\lambda\right] \end{aligned}\right.$$

Le calcul est analogue pour les dérivées par rapport à la variable y. Les matrices colonnes $[\partial_x\lambda]$, $[\partial_y\lambda]$ sont définies en fonction des matrices colonnes $[\partial_i\lambda]$ (i = 1, 2, 3) de la façon suivante :

$$\text{(IV-10-7)} \quad \left[\begin{aligned} \underset{(21\times 1)}{\left[\partial_x\lambda\right]} &= \frac{1}{\Delta}\left[y_{23}\left[\partial_1\lambda\right] + y_{31}\left[\partial_2\lambda\right] + y_{12}\left[\partial_3\lambda\right]\right] \\ \underset{(21\times 1)}{\left[\partial_y\lambda\right]} &= \frac{1}{\Delta}\left[x_{32}\left[\partial_1\lambda\right] + x_{13}\left[\partial_2\lambda\right] + x_{21}\left[\partial_3\lambda\right]\right] \end{aligned}\right.$$

On obtient également les matrices des dérivées secondes $[\partial_{xx}\lambda]$, $[\partial_{yy}\lambda]$ en fonction des matrices $[\partial_{k\ell}\lambda]$ pour k, ℓ = 1, 2, 3 par analogie avec les relations définies en (IV-10-3-3).

(IV-10-8)

$$[\partial_{xx}\lambda] = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{ y_{23}^2\,[\partial_{11}\lambda] + y_{31}^2\,[\partial_{22}\lambda] + y_{12}^2\,[\partial_{33}\lambda] + 2\,\big\{ y_{23}y_{31}\,[\partial_{12}\lambda] + y_{31}y_{12}\,[\partial_{23}\lambda] + y_{12}y_{31}\,[\partial_{31}\lambda]\big\}\Big\}$$

$$[\partial_{xy}\lambda] = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{ y_{23}x_{32}\,[\partial_{11}\lambda] + y_{31}x_{13}\,[\partial_{22}\lambda] + y_{12}x_{21}\,[\partial_{33}\lambda] + (y_{23}x_{13} + y_{31}x_{32})\,[\partial_{12}\lambda] + (y_{31}x_{21} + y_{12}x_{13})\,[\partial_{23}\lambda] + (y_{31}x_{21} + x_{13}y_{12})\,[\partial_{13}]\Big\}$$

$$[\partial_{yy}\lambda] = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{ x_{32}^2\,[\partial_{11}\lambda] + x_{13}^2\,[\partial_{22}\lambda] + x_{21}^2\,[\partial_{33}\lambda] + 2\big(x_{32}x_{13}\,[\partial_{12}\lambda] + x_{31}x_{21}\,[\partial_{23}\lambda] + x_{21}x_{32}\,[\partial_{31}\lambda]\big)\Big\}$$

On donne la matrice colonne $\,{}^{t}[\lambda]$

$$
(\text{IV-10-9}) \quad \left[\begin{array}{l} \boxed{\lambda_1^5 \,|\, \lambda_2^5 \,|\, \lambda_3^5 \,|\, \lambda_1^4\lambda_3 \,|\, \lambda_1^4\lambda_2 \,|\, \lambda_2^4\lambda_1 \,|\, \lambda_2^4\lambda_3 \,|\, \lambda_3^4\lambda_2 \,|\, \lambda_3^4\lambda_1 \,|\, \lambda_1^3\lambda_3^2} \\[2ex] \boxed{\lambda_1^3\lambda_2^2 \,|\, \lambda_2^3\lambda_1^2 \,|\, \lambda_2^3\lambda_3^2 \,|\, \lambda_3^3\lambda_2^2 \,|\, \lambda_3^2\lambda_1^2 \,|\, \lambda_1^3\lambda_2\lambda_3 \,|\, \lambda_1\lambda_2^3\lambda_3 \,|\, \lambda_1\lambda_2\lambda_3^3 \,|\, \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^2 \,|\, \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^2 \,|\, \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3} \end{array} \right.
$$

On obtient les matrices $[\partial_i\lambda]$ et $[\partial_{k\ell}]$ pour i = 1, 2, 3 et k , ℓ = 1, 2, 3 par dérivation.

Par analogie avec les notations (IV-9-2) on désigne par :

les matrices des degrés de libertés globaux relatifs aux composantes $\tilde{u}_{ih}$ du champ $\vec{\tilde{u}}_h$, i = 1, 2, 3.

Soient : $[\vartheta LG(\tilde{u}_{1h})]$, $[\vartheta LG(\tilde{u}_{2h})]$, $[\vartheta LG(\tilde{u}_{3h})]$.

On a alors :

$$
(\text{IV-11}) \quad [\vartheta LL(\tilde{u}_{ih})] = [\vartheta LG(\tilde{u}_{ih})] \times [\vartheta] \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.
$$

On désigne également par analogie avec les notations de (III-1-20-3) le vecteur ligne

$$
(\text{IV-12}) \quad {}^{t}\vec{\tilde{\mathcal{U}}}_h = \left[\tilde{u}_{1h} \;\; \tilde{u}_{1h,x} \;\; \tilde{u}_{1h,y} \;\; \tilde{u}_{2h} \;\; \tilde{u}_{2h,x} \;\; \tilde{u}_{2h,y} \;\; \tilde{u}_{3h} \;\; \tilde{u}_{3h,x} \;\; \tilde{u}_{3h,y} \;\; \tilde{u}_{3h,x^2} \;\; \tilde{u}_{3h,xy} \;\; \tilde{u}_{3h,y^2} \right]
$$

et d'après les relations définies en (IV-10-6) on a :

$$
\tilde{u}_{ih,x} = \frac{\partial \tilde{u}_{ih}}{\partial x} = [\vartheta LG(\tilde{u}_{ih})]\,[\vartheta]\,[\mathcal{A}]\,[\partial_x\lambda]
$$

pour i = 1, 2, 3.

$$\tilde{u}_{ih,y} = \frac{\partial \tilde{u}_{ih}}{\partial y} = \left[\mathcal{D}LG(\tilde{u}_{ih})\right]\left[\mathcal{D}\right]\left[A\right]\left[\partial_y \lambda\right]$$

pour $i = 1, 2, 3.$

$$\tilde{u}_{ih,x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{ih}}{\partial x^2} = \left[\mathcal{D}LG(\tilde{u}_{ih})\right]\left[\mathcal{D}\right]\left[A\right]\left[\partial_{x^2} \lambda\right]$$

$$\tilde{u}_{ih,xy} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{ih}}{\partial x \partial y} = \left[\mathcal{D}LG(\tilde{u}_{ih})\right]\left[\mathcal{D}\right]\left[A\right]\left[\partial_{xy} \lambda\right]$$

$$\tilde{u}_{ih,y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{ih}}{\partial y^2} = \left[\mathcal{D}LG(\tilde{u}_{ih})\right]\left[\mathcal{D}\right]\left[A\right]\left[\partial_{y^2} \lambda\right].$$

pour $i = 3.$

En reportant ces expressions dans le vecteur ligne ${}^t\vec{\tilde{U}}_h$ on obtient :

$$ {}^t\vec{\tilde{U}}_h = \left[\mathcal{D}G(\vec{\tilde{u}}_h)\right]\left[\mathcal{D}B\right]\left[LAMBDA\right] \qquad \text{(IV-13)}$$

où

$$\underset{(1\times 63)}{\left[\mathcal{D}G(\vec{\tilde{u}}_h)\right]} = \left[\underset{(1\times 21)}{\left[DLG(\tilde{u}_{1h})\right]}\ \underset{(1\times 21)}{\left[\mathcal{D}LG(\tilde{u}_{2h})\right]}\ \underset{(1\times 21)}{\left[DLG(\tilde{u}_{3h})\right]}\right].$$

$$\underset{(63\times 63)}{\left[DB\right]} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathcal{D}A & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{D}A & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathcal{D}A \\ \hline \end{array}$$

$$
\underset{(63X12)}{[LAMBDA]} = \begin{bmatrix}
\lambda & \partial x\lambda & \partial y\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & \partial x\lambda & \partial y\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \partial x\lambda & \partial y\lambda & \partial x^2\lambda & \partial xy\lambda & \partial y^2\lambda
\end{bmatrix}
$$

On a de même

$$
{}^t\vec{\tilde{v}}_h = [\partial G(\vec{\tilde{v}}_h)]\,[\partial B]\,[LAMBDA]
$$

et la forme bilinéaire définie en (IV-1-1) devient :

$$
\text{(IV-14)} \quad \left[\; \begin{aligned}
\tilde{a}_h(\vec{\tilde{u}}_h, \vec{\tilde{v}}_h) = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{T\in T_h} & \Big\{ [\partial G(\vec{\tilde{u}}_h)]\,[\partial B] \Big\} \cdot \\
& \cdot \Big\{ \int_T [LAMBDA]\,[S\ddot{y}]^t [LAMBDA]\, r(x)\, dx\, dy\, dz \Big\} \cdot \\
& \cdot\, {}^t[\partial B]\, {}^t[\partial G(\vec{\tilde{v}}_h)] \Big\} \cdot
\end{aligned} \right.
$$

de même la forme linéaire définie en (IV-1-2) s'écrit :

$$
\text{(IV-15)} \quad \left[\; \begin{aligned}
\ell(\vec{\tilde{v}}_h) = \sum_{T\in T_h} & \Big\{ \Big\{ \int_T {}^t\vec{F}\, {}^t[LAMBDA]\, r(x)\, dx\, dy \Big\} \times \\
& {}^t[\partial B]\, {}^t[DG(\vec{\tilde{v}}_h)] \Big\} + \\
\sum_{T\in\gamma} & \Big\{ \Big(\int_{\partial T} {}^t\vec{G}\, {}^t[LAMBDA]\, d\Gamma \Big) \times {}^t[\partial B]\, {}^t[\partial G(\vec{\tilde{v}}_h)] \Big\}
\end{aligned} \right.
$$

où ∂T est la frontière du triangle T.

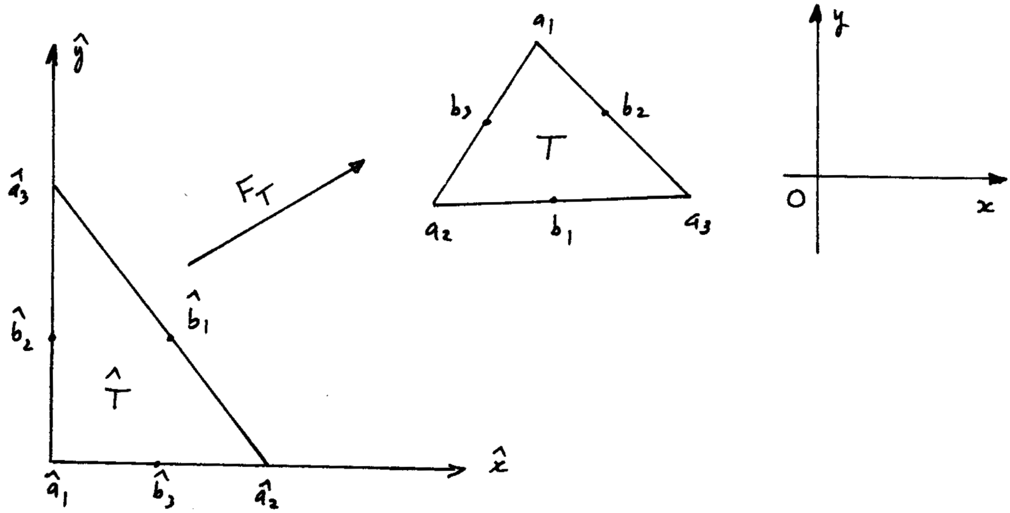
Soit :

(IV-16) $$\int_T [LAMBDA]\,[Sij]^t\,[LAMBDA]\,r(x)\,dx\,dy$$

Pour calculer

$$\int_T [LAMBDA]\,[Sij]^t\,[LAMBDA]\,r(x)\,dx\,dy$$

on se ramène sur le triangle de référence $\hat{T}$. On considère le triangle dit de référence $\hat{T}$ de sommets $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{a}_3$ pris dans le sens direct, les milieux des côtes étant $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, $\hat{b}_3$.



On définit l'application affine F_T par :

$F_T(\hat{a}_i) = a_i$, $i = 1, 2, 3$ mais aussi $F_T(\hat{b}_i) = b_i$ ($i = 1, 2, 3$).

On obtient :

$$F_T(\hat{x},\hat{y}) = a_1 + \hat{x}\, a_{21} + \hat{y}\, a_{31}$$

connaissant les coordonnées des sommets (a_i) , i = 1, 2, 3 soient

$a_1(x_1, y_1)$; $a_2(x_2, y_2)$ et $a_3(x_3, y_3)$.

L'application affine F_T s'écrit matriciellement :

$$F_T(\hat{x},\hat{y}) = [M_T]\,\hat{d} + a_T \in T \tag{IV-17}$$

$$F_T : \hat{T} \longrightarrow T$$

avec $\hat{d} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $a_T \in \mathbb{R}^2$

$$[M_T] = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ & \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix} \quad ; \quad a_T = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Soit le schéma d'intégration numérique sur $\hat{T}$ défini par

$$\int_{\hat{T}} \hat{\phi}(\hat{x},\hat{y})\, d\hat{x}\, d\hat{y} \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_\ell\, \hat{\phi}(\hat{b}_\ell) \tag{IV-18}$$

Toutes les intégrales apparaissant dans (IV-14) sont de la forme :

$$\int_T \phi(x,y)\, dx\, dy .$$

En utilisant la correspondance usuelle entre ϕ et $\hat{\phi}$ par l'application affine F_T , c'est-à-dire :

$$\hat{\phi} = \phi \circ F_T \qquad \text{et} \qquad \phi = \hat{\phi} \circ F_T^{-1} \quad .$$

On peut écrire :

$$\text{(IV-19)} \qquad \int_T \phi(x,y)\, dx\, dy = \det [M_T] \int_{\hat{T}} \hat{\phi}(\hat{x},\hat{y})\, d\hat{x}\, d\hat{y} \, .$$

Le schéma de quadrature numérique (IV-18) sur $\hat{T}$ induit le schéma de quadrature sur T par :

$$\text{(IV-19-1)} \qquad \int_T \phi(x,y)\, dx\, dy \simeq \sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,T}\, \phi(b_{\ell,T})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} b_{\ell,T} &= F_T(\hat{b}_\ell) \\ q_{\ell,T} &= \det [M_T]\, \hat{q}_\ell \end{aligned} \right. \; ; \quad 1 \leq \ell \leq L$$

On a alors :

$$\text{(IV-19-2)} \qquad \int_T \phi(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \det[M_T]\,\hat{q}_\ell\,\phi(b_{\ell,T})$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \det[M_T]\,\hat{q}_\ell\,F_T(\hat{b}_\ell)$$

$$= \det[M_T] \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_\ell\,\hat{\phi}(\hat{b}_\ell)$$

On pose :

$$\phi(x,y) = [LAMBDA]\,[S_{ij}]\,{}^t[LAMBDA]\,r(x)$$

d'après (IV-19-2) la forme bilinéaire définie en (IV-14) devient :

$$\text{(IV-20)} \qquad \left[\begin{array}{l} \breve{a}_h(\tilde{\vec{u}}_h,\tilde{\vec{v}}_h) = \beta \displaystyle\sum_{T\in T_h} \Big\{ |\det[M_T]|\,[DG(\tilde{\vec{u}}_h)]\,[\delta B] \Big\{ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_\ell\,\hat{\phi}(\hat{b}_\ell) \Big\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot\, {}^t[DB]^t[\delta G(\tilde{\vec{v}}_h)] \Big\} . \end{array}\right.$$

où

$$\hat{\phi}(\hat{b}_\ell) = \hat{\phi}(\hat{x},\hat{y}) = \Big\{ [L\hat{A}MBDA]\,[\hat{S_{ij}}]\,{}^t[L\hat{A}MBDA]\,r(x) \Big\}(\hat{b}_\ell)$$

Dans les matrices [LAMBDA] : $[S_{ij}]$ on remplace x , y par leurs correspondants $\hat{x}$ et $\hat{y}$ suivant l'application F_T.

$$F_T : \begin{array}{l} \hat{T} \longrightarrow T \\ (\hat{x},\hat{y}) \longmapsto F_T(x,y) = \big(F_1(\hat{x},\hat{y}),\, F_2(\hat{x},\hat{y})\big) = (x,y) \end{array}$$

avec $$F_T(\hat{x},\hat{y}) = [M_T]\,\hat{a} + a_T$$

ie : $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$\begin{cases} x = x_1 + x_{21}\hat{x} + x_{31}\hat{y} \\ y = y_1 + y_{21}\hat{x} + y_{31}\hat{y} \end{cases}$$

de même la forme linéaire définie en (IV-15) s'écrit :

$$\text{(IV-21)} \quad \left[\ell(\vec{\tilde{v}}_h) = \sum_{T \in T_h} \left\{ \det[\Pi_T] \left\{ \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_e \hat{\Psi}(\hat{be}) + \int_{\partial T \cap \gamma} {}^t\vec{G}\, {}^t[LAMBDA]\, d\Gamma \right\} . \; {}^t[DB]\, {}^t[\mathcal{B}G(\vec{\tilde{v}}_h)] \right\} . \right.$$

où $\quad \hat{\Psi}(\hat{be}) = {}^t\vec{F}(\hat{be}) \left\{ {}^t[L\hat{AMBDA}]\, \hat{\varepsilon}(x) \right\} (\hat{be})$

on pose

$$\text{(IV-22)} \quad \left[\begin{aligned} [Z_T] &= \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_e \, \phi(\hat{be}) \\ \Delta_T &= \det [M_T] \\ [Y_T^1] &= \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_e \, \hat{\Psi}(\hat{be}) \\ [Y_T^2] &= \int_{\partial T} {}^t\vec{G}\, {}^t[LAMBDA]\, d\gamma . \end{aligned} \right.$$

à l'aide des relations (IV-22) on peut écrire le système (IV-23) suivant :

(IV-23)
$$\left[\begin{array}{l} \beta \displaystyle\sum_{T \in T_h} \left\{ |\Delta_T| \left[\vartheta G(\vec{\tilde{u}}_h)\right] [DB] [Z_T] \, {}^t[DB] \, {}^t\left[\vartheta G(\vec{\tilde{v}}_h)\right] \right\} = \\ \\ \displaystyle\sum_{T \in T_h} \left\{ \left(|\Delta_T| \left[Y_T^1\right] + \left[Y_T^2\right] \right)^t [DB] \, {}^t\left[D G(\vec{\tilde{v}}_h)\right] \right\} \\ \\ \forall \vec{\tilde{v}}_h \in V_h \end{array}\right.$$

soit $\left\{ \hat{\vec{\tilde{u}}}_h \right\}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{3\hat{N}}$. Où $\hat{\vec{\tilde{u}}}_h$ a pour composantes trois vecteurs $\tilde{u}_{ih}$, $i = 1, 2, 3$ de $\mathbb{R}^{\hat{N}}$, chacun des vecteurs $\hat{u}_{jh}$ a pour ième composante $\tilde{u}_{jh}(x_i, y_i)$.

Soit A_T l'application de $\mathbb{R}^{3\hat{N}}$ dans $\mathbb{R}^{63}$ définie par :

(IV-24)
$$\left[\begin{array}{l} {}^t\left\{ \hat{\vec{\tilde{u}}}_h \right\} {}^t A_T = \left[\vartheta G(\vec{\tilde{u}}_h)\right] \quad \text{ie :} \\ \\ A_T \left\{ \hat{\vec{\tilde{u}}}_h \right\} = {}^t\left[\vartheta G(\vec{\tilde{u}}_h)\right] \end{array}\right.$$

Cette dernière a pour matrice associée $\underset{(63 \times 3\hat{N})}{[A_T]}$.

On obtient alors :

(IV-25) $$[A_T] \left\{ \hat{\vec{\tilde{u}}}_h \right\} = {}^t\left[\vartheta G(\vec{\tilde{u}}_h)\right]$$

ainsi on peut écrire (IV-23) en transposant et en remplaçant par (IV-25).

$$(\text{IV-26})\qquad \left[\begin{array}{l} \beta\ {}^t\left\{\hat{\tilde{\vec{v}}}_h\right\}\left\{\displaystyle\sum_{T\in T_h}\left\{|\Delta_T|\ {}^t[A_T]\ {}^t[DB]\ [Z_T]\ [DB]\ [A_T]\right\}\right\}\left\{\hat{\tilde{\vec{u}}}_h\right\} = \\[2ex] {}^t\left\{\hat{\tilde{\vec{v}}}_h\right\}\left\{\displaystyle\sum_{T\in T_h}\left\{{}^t[A_T]\ {}^t[DB]\left(|\Delta_T|\ [Y_T^1]+[Y_T^2]\right)\right\}\right\} \\[2ex] \forall\,\hat{\tilde{\vec{v}}}_h \in V_h \end{array}\right.$$

En posant

$$[\hat{H}] = \beta \sum_{T\in T_h}\left\{|\Delta_T|\ {}^t[A_T]\ {}^t[DB]\ [Z_T]\ [DB]\ [A_T]\right\}$$

$$\{\hat{b}\} = \sum_{T\in T_h}\left\{{}^t[A_T]\ {}^t[DB]\left(|\Delta_T|\ [Y_T^1]+[Y_T^2]\right)\right\}$$

on obtient le système linéaire suivant :

$$(\text{IV-27})\qquad [\hat{H}]\left\{\hat{\tilde{\vec{u}}}_h\right\} = \left\{\hat{b}\right\}$$

où $\beta = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)$.

L'intégrale définie en (IV-16) peut être calculée exactement si l'on intègre des polynômes. C'est le cas de coques cylindriques, où les éléments de la matrice $[S\ddot{y}]$ sont constants ($R_1 = R_2 = r$) et les éléments de la matrice [LAMBDA] sont des polynômes.

On a :

$$\int_T [LAMBDA]\,[S\ddot{y}]^t[LAMBDA]\,r(x)\,dx\,dy =$$

$$|\Delta_T| \int_{\hat{T}} [\widehat{LAMBDA}]\,[\hat{S\ddot{y}}]^t[\widehat{LAMBDA}]\,r(\hat{x})\,d\hat{x}\,d\hat{y}$$

Dans le cas de coques cylindriques l'intégrale ci-dessus devient :

$$\text{(IV-28)} \quad \left[\begin{aligned} &\int_T [LAMBDA]\,[S\ddot{y}]^t[LAMBDA]\,dx\,dy = \\ &|\Delta_T| \int_{\hat{T}} [\widehat{LAMBDA}]\,[\hat{S\ddot{y}}]^t[\widehat{LAMBDA}]\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \\ &|\Delta_T| \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_\ell\,\hat{\Phi}(\hat{b}_\ell) \end{aligned}\right.$$

où $\hat{\Phi}(\hat{b}_\ell) = \left([\widehat{LAMBDA}]\,[\hat{S\ddot{y}}]^t[\widehat{LAMBDA}]\right)(\hat{b}_\ell)$

et l'on a aussi :

$$\text{(IV-29)} \quad \int_T {}^t\vec{F}\,[LAMBDA]\,dx\,dy = |\Delta_T| \int_{\hat{T}} {}^t\vec{F}\,[\widehat{LAMBDA}]\,d\hat{x}\,d\hat{y}$$

On utilise une formule de quadrature Numérique qui intègre exactement les polynômes de degré dix.

Soit :

$$\int_{\hat{T}} \hat{\psi}(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \sum_{\ell=1}^{20} \vec{q}_\ell\,\hat{\psi}(\vec{b}_\ell)$$

La matrice colonne $[Y_T^1]$ de (IV-22) s'écrit :

$$\text{(IV-30)} \quad [Y_T^1] = |\Delta_T| \sum_{\ell=1}^{20} {}^t\hat{\vec{F}}(\hat{b}_\ell)\,{}^t[\widehat{LAMBDA}](\hat{b}_\ell) = \sum_{\ell=1}^{20} \hat{q}_\ell\,\hat{\psi}(\vec{b}_\ell).$$

Puis le calcul de $[Y_T^2]$ se fait de la manière suivante :

$$[Y_T^2] = \int_{\partial T} {}^t\vec{G}\,{}^t[LAMBDA]\,dr$$

avec

$${}^t\vec{G} = [g_1 \; 0 \; 0 \; g_2 \; 0 \; 0 \; g_3 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0]$$

ainsi

$$\text{(IV-31)} \quad {}^t[Y_T^2] = \int_{\partial T} [LAMBDA]\,\vec{G}\,dr$$

le produit $[LAMBDA].\vec{g}$ est une matrice colonne de dimension (63 x 1).

Ecrivons la forme de cette matrice:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
[\lambda] & [\partial x\lambda] & [\partial y\lambda] & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\hline
\square & \square & \square & [\lambda] & [\partial x\lambda] & [\partial y\lambda] & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\
\hline
\square & \square & \square & \square & \square & \square & [\lambda] & [\partial x\lambda] & [\partial y\lambda] & [\partial x^2\lambda] & [\partial xy\lambda] & [\partial y^2\lambda] \\
\hline
\end{array}$$

Pour écrire complètement cette matrice écrivons les matrices colonnes $[\partial x\lambda]$; $[\partial y\lambda]$; $[\partial x^2\lambda]$; $[\partial xy\lambda]$ et $[\partial y^2\lambda]$.

Or d'après les relations (IV-10-8) on obtient :

$$\text{(IV-32)}\quad \Delta\cdot[\partial x\lambda] = \begin{array}{|c|}
\hline
5y_{23}\lambda_1^4 \\
\hline
5y_{31}\lambda_2^4 \\
\hline
5y_{12}\lambda_3^4 \\
\hline
4y_{23}\lambda_1^3\lambda_3 + y_{12}\lambda_1^4 \\
\hline
4y_{23}\lambda_1^3\lambda_2 + y_{31}\lambda_1^4 \\
\hline
4y_{31}\lambda_2^3\lambda_1 + y_{23}\lambda_2^4 \\
\hline
4y_{31}\lambda_2^3\lambda_3 + y_{12}\lambda_2^4 \\
\hline
4y_{12}\lambda_3^3\lambda_2 + y_{31}\lambda_3^4 \\
\hline
4y_{12}\lambda_3^3\lambda_1 + y_{23}\lambda_3^4 \\
\hline
3y_{23}\lambda_1^2\lambda_3^2 + 2y_{12}\lambda_1^3\lambda_3 \\
\hline
3y_{23}\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2y_{3}\lambda_1^3\lambda_2 \\
\hline
3y_{31}\lambda_2^2\lambda_1^2 + 2y_{23}\lambda_1\lambda_2^3 \\
\hline
\end{array}$$

$3y_{31}\lambda_2^2\lambda_3^2 + 2y_{12}\lambda_2^3\lambda_3$
$3y_{12}\lambda_3^2\lambda_2^2 + 2y_{31}\lambda_3^3\lambda_2$
$3y_{12}\lambda_3^2\lambda_1^2 + 2y_{23}\lambda_1\lambda_3^3$
$3y_{23}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + y_{31}\lambda_1^3\lambda_3 + y_{12}\lambda_1^3\lambda_2$
$3y_{31}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + y_{23}\lambda_2^3\lambda_3 + y_{12}\lambda_1\lambda_2^3$
$3y_{12}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + y_{31}\lambda_1\lambda_3^3 + y_{23}\lambda_2\lambda_3^3$
$2y_{31}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + 2y_{12}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + y_{23}\lambda_2^2\lambda_3^2$
$2y_{23}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + 2y_{12}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + y_{31}\lambda_1^2\lambda_3^2$
$2y_{23}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + 2y_{31}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + y_{12}\lambda_1^2\lambda_2^2$

(VI-32)

$\Delta.\left[\partial_y\lambda\right] =$

$5x_{32}\lambda_1^4$
$5x_{13}\lambda_2^4$
$5x_{21}\lambda_3^4$
$4x_{32}\lambda_1^3\lambda_3 + x_{21}\lambda_1^4$
$4x_{32}\lambda_1^3\lambda_2 + x_{13}\lambda_1^4$
$4x_{13}\lambda_2^3\lambda_1 + x_{32}\lambda_2^4$
$4x_{13}\lambda_2^3\lambda_3 + x_{21}\lambda_2^4$
$4x_{21}\lambda_3^3\lambda_2 + x_{13}\lambda_3^4$
$4x_{21}\lambda_3^3\lambda_1 + x_{32}\lambda_3^4$
$3x_{32}\lambda_1^2\lambda_3^2 + 2x_{21}\lambda_1^3\lambda_3$
$3x_{32}\lambda_1^2\lambda_2^2 + 2x_{13}\lambda_1^3\lambda_2$
$3x_{13}\lambda_2^2\lambda_1^2 + 2x_{32}\lambda_1\lambda_2^3$
$3x_{13}\lambda_2^2\lambda_3^2 + 2x_{21}\lambda_2^3\lambda_3$
$3x_{21}\lambda_3^2\lambda_2^2 + 2x_{31}\lambda_3^3\lambda_2$
$3x_{21}\lambda_3^2\lambda_1^2 + 2x_{32}\lambda_1\lambda_3^3$
$3x_{32}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + x_{13}\lambda_1^3\lambda_3 + x_{21}\lambda_1^3\lambda_2$
$3x_{13}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + x_{32}\lambda_2^3\lambda_3 + x_{21}\lambda_1\lambda_2^3$
$3x_{21}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + x_{13}\lambda_1\lambda_3^3 + x_{32}\lambda_2\lambda_3^3$

$2x_{13}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + 2x_{21}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + x_{32}\lambda_2^2\lambda_3^2$
$2x_{32}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + 2x_{21}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + x_{13}\lambda_1^2\lambda_3^2$
$2x_{32}\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + 2x_{13}\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + x_{21}\lambda_1^2\lambda_2^2$

(IV-32) $\Delta.[\partial x^{\circ}\lambda] =$

$20y_{23}^2\lambda_1^3$
$20y_{31}^2\lambda_2^3$
$20y_{12}^2\lambda_3^3$
$12y_{23}^2\lambda_1^2\lambda_3 + 8y_{12}y_{23}\lambda_1^3$
$12y_{23}^2\lambda_1^2\lambda_2 + 8y_{23}y_{31}\lambda_1^3$
$12y_{31}^2\lambda_1\lambda_2^2 + 8y_{23}y_{31}\lambda_2^3$
$12y_{31}^2\lambda_2^2\lambda_3 + 8y_{31}y_{12}\lambda_2^3$
$12y_{12}^2\lambda_3^2\lambda_2 + 8y_{31}y_{12}\lambda_3^3$
$12y_{12}^2\lambda_3^2\lambda_1 + 8y_{12}y_{23}\lambda_3^3$
$12y_{12}y_{23}\lambda_1^2\lambda_3 + 6y_{23}^2\lambda_1\lambda_3^2 + 2y_{12}^2\lambda_1^3$
$12y_{23}y_{31}\lambda_1^2\lambda_2 + 6y_{23}^2\lambda_1\lambda_2^2 + 2y_{31}^2\lambda_1^3$
$12y_{23}y_{31}\lambda_1\lambda_2^2 + 6y_{31}^2\lambda_1^2\lambda_2 + 2y_{23}^2\lambda_2^3$
$12y_{31}y_{12}\lambda_2^2\lambda_3 + 6y_{31}^2\lambda_2\lambda_3^2 + 2y_{12}^2\lambda_2^3$
$12y_{31}y_{12}\lambda_2\lambda_3^2 + 6y_{12}^2\lambda_2^2\lambda_3 + 2y_{31}^2\lambda_3^3$
$12y_{12}y_{23}\lambda_1\lambda_3^2 + 6y_{12}^2\lambda_1^2\lambda_3 + 2y_{23}^2\lambda_3^3$
$6y_{23}^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 6y_{23}y_{31}\lambda_1^2\lambda_3 + 6y_{12}y_{23}\lambda_1^2\lambda_2 + 2y_{31}y_{12}\lambda_1^3$
$6y_{31}^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 6y_{23}y_{31}\lambda_2^2\lambda_3 + 6y_{31}y_{12}\lambda_1\lambda_2^2 + 2y_{12}y_{23}\lambda_2^3$
$6y_{12}^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 6y_{12}y_{23}\lambda_2\lambda_3^2 + 6y_{31}y_{12}\lambda_1\lambda_3^2 + 2y_{23}y_{31}\lambda_3^3$
$8y_{31}y_{12}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4y_{12}y_{23}\lambda_2^2\lambda_3 + 4y_{23}y_{31}\lambda_2\lambda_3^2 + 2y_{31}^2\lambda_1\lambda_2^2 + 2y_{12}^2\lambda_1\lambda_2^2$
$8y_{12}y_{23}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4y_{31}y_{12}\lambda_1^2\lambda_3 + 4y_{23}y_{31}\lambda_1\lambda_3^2 + 2y_{12}^2\lambda_1^2\lambda_2 + 2y_{23}^2\lambda_2\lambda_3^2$
$8y_{23}y_{31}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4y_{12}y_{23}\lambda_1\lambda_2^2 + 4y_{31}y_{12}\lambda_1^2\lambda_2 + 2y_{31}^2\lambda_1^2\lambda_3 + 2y_{23}^2\lambda_2^2\lambda_3$

$$
\Delta\left[\partial xy\lambda\right] =
\begin{array}{|l|}
\hline
20\, y_{23} x_{32}\, \lambda_1^3 \\
\hline
20\, y_{31} x_{13}\, \lambda_2^3 \\
\hline
20\, y_{12} x_{21}\, \lambda_3^2 \\
\hline
12\, y_{23} x_{32}\, \lambda_1^2 \lambda_3 + 4\mu_1\, \lambda_1^3 \\
\hline
12\, y_{23} x_{32}\, \lambda_1^2 \lambda_2 + 4\mu_2\, \lambda_1^3 \\
\hline
12\, y_{31} x_{13}\, \lambda_2^2 \lambda_1 + 4\mu_2\, \lambda_2^3 \\
\hline
12\, y_{31} x_{13}\, \lambda_2^2 \lambda_3 + 4\mu_3\, \lambda_2^3 \\
\hline
12\, y_{12} x_{21}\, \lambda_3^2 \lambda_2 + 4\mu_3\, \lambda_3^3 \\
\hline
12\, y_{12} x_{21}\, \lambda_3^2 \lambda_1 + 4\mu_1\, \lambda_3^3 \\
\hline
6 x_{32} y_{23}\, \lambda_1 \lambda_3^2 + 2 y_{12} x_{21}\, \lambda_1^3 + 6\mu_1\, \lambda_1^2 \lambda_3 \\
\hline
6 x_{32} y_{23}\, \lambda_1 \lambda_2^2 + 2 y_{12} x_{13}\, \lambda_1^3 + 6\mu_2\, \lambda_1^2 \lambda_2 \\
\hline
6 x_{13} y_{31}\, \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 y_{23} x_{32}\, \lambda_2^3 + 6\mu_2\, \lambda_1 \lambda_2^2 \\
\hline
6 x_{13} y_{31}\, \lambda_2 \lambda_3^2 + 2 y_{12} x_{21}\, \lambda_2^3 + 6\mu_3\, \lambda_2^2 \lambda_3 \\
\hline
6 x_{21} y_{12}\, \lambda_2^2 \lambda_3 + 2 y_{31} x_{13}\, \lambda_3^3 + 6\mu_3\, \lambda_2 \lambda_3^2 \\
\hline
6 x_{21} y_{12}\, \lambda_1^2 \lambda_3 + 2 y_{23} x_{32}\, \lambda_3^3 + 6\mu_1\, \lambda_1 \lambda_3^2 \\
\hline
6 x_{32} y_{23}\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 3\mu_2\, \lambda_1^2 \lambda_3 + 3\mu_1 \lambda_1^2 \lambda_2 + \mu_3\, \lambda_1^3 \\
\hline
6 x_{13} y_{31}\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 3\mu_2 \lambda_2^2 \lambda_3 + \mu_1\, \lambda_2^3 + 3\mu_3\, \lambda_1 \lambda_2^2 \\
\hline
6 x_{21} y_{12}\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \mu_2\, \lambda_3^2 + 3\mu_1 \lambda_2 \lambda_3^2 + 3\mu_3\, \lambda_1 \lambda_3^2 \\
\hline
2 x_{13} y_{31}\, \lambda_1 \lambda_3^2 + 2 y_{12} x_{21} \lambda_1 \lambda_2^2 + 2\mu_2 \lambda_2 \lambda_3^2 + 2\mu_1\, \lambda_2^2 \lambda_3 + 4\mu_3\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
\hline
2 x_{32} y_{23}\, \lambda_2 \lambda_3^2 + 2 y_{12} x_{21}\, \lambda_1^2 \lambda_2 + 2\mu_2 \lambda_1 \lambda_3^2 + 2\mu_3 \lambda_1^2 \lambda_3 + 4\mu_1\, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
\hline
2 x_{32} y_{23}\, \lambda_2^2 \lambda_3 + 2 y_{31} x_{13} \lambda_1^2 \lambda_3 + 2\mu_1 \lambda_1 \lambda_2^2 + 4\mu_2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 2\mu_3\, \lambda_1^2 \lambda_2 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{(IV-32)}
$$

où : $\mu_1 = y_{12} x_{32} + y_{23} x_{21}$; $\mu_2 = y_{23} x_{13} + y_{31} x_{32}$

$\mu_3 = y_{31} x_{21} + y_{12} x_{13}$.

$$\Delta \cdot [\partial g^2 \lambda] = \left[\begin{array}{|c|}
\hline
20 x_{32} \lambda_1^3 \\ \hline
20 x_{13}^2 \lambda_2^3 \\ \hline
20 x_{21}^2 \lambda_3^3 \\ \hline
12 x_{32}^2 \lambda_1^2 \lambda_3 + 8 x_{21} \lambda_1^3 \\ \hline
12 x_{32}^2 \lambda_1^2 \lambda_2 + 8 x_{32} x_{13} \lambda_1^3 \\ \hline
12 x_{13}^2 \lambda_1 \lambda_2^2 + 8 x_{32} x_{13} \lambda_2^3 \\ \hline
12 x_{13}^2 \lambda_2^2 \lambda_3 + 8 x_{13} x_{21} \lambda_2^3 \\ \hline
12 x_{21}^2 \lambda_3^2 \lambda_2 + 8 x_{13} x_{21} \lambda_3^3 \\ \hline
12 x_{21}^2 \lambda_3^2 \lambda_1 + 8 x_{21} x_{32} \lambda_3^3 \\ \hline
12 x_{21} x_{32} \lambda_1^2 \lambda_3 + 6 x_{32}^2 \lambda_1 \lambda_3^2 + 2 x_{21}^2 \lambda_1^3 \\ \hline
12 x_{32} x_{13} \lambda_1^2 \lambda_2 + 6 x_{32}^2 \lambda_1 \lambda_2^2 + 2 x_{13}^2 \lambda_1^3 \\ \hline
12 x_{32} x_{13} \lambda_1 \lambda_2^2 + 6 x_{13}^2 \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 x_{32}^2 \lambda_2^3 \\ \hline
12 x_{13} x_{21} \lambda_2^2 \lambda_3 + 6 x_{13}^2 \lambda_2 \lambda_3^2 + 2 x_{21}^2 \lambda_2^3 \\ \hline
12 x_{13} x_{21} \lambda_2 \lambda_3^2 + 6 x_{21}^2 \lambda_2^2 \lambda_3 + 2 x_{13}^2 \lambda_3^3 \\ \hline
12 x_{21} x_{23} \lambda_1 \lambda_3^2 + 6 x_{21}^2 \lambda_1^2 \lambda_3 + 2 x_{32}^2 \lambda_3^3 \\ \hline
6 x_{32}^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 6 x_{32} x_{13} \lambda_1^2 \lambda_3 + 6 x_{21} x_{32} \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 x_{13} x_{21} \lambda_1^3 \\ \hline
6 x_{13}^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 6 x_{32} x_{13} \lambda_2^2 \lambda_3 + 6 x_{13} x_{21} \lambda_1 \lambda_2^2 + 2 x_{21} x_{32} \lambda_2^3 \\ \hline
6 x_{21}^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 6 x_{21} x_{32} \lambda_2 \lambda_3^2 + 6 x_{13} x_{21} \lambda_1 \lambda_3^2 + 2 x_{32} x_{13} \lambda_3^3 \\ \hline
8 x_{13} x_{21} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 4 x_{21} x_{32} \lambda_2^2 \lambda_3 + 4 x_{32} x_{13} \lambda_2 \lambda_3^2 + 2 x_{13}^2 \lambda_1 \lambda_2^2 + 2 x_{21}^2 \lambda_1 \lambda_2^2 \\ \hline
8 x_{21} x_{32} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 4 x_{13} x_{21} \lambda_1^2 \lambda_3 + 4 x_{32} x_{13} \lambda_1 \lambda_3^2 + 2 x_{21}^2 \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 x_{32}^2 \lambda_2 \lambda_3^2 \\ \hline
8 x_{32} x_{13} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 4 x_{21} x_{32} \lambda_1 \lambda_2^2 + 4 x_{13} x_{21} \lambda_1^2 \lambda_2 + 2 x_{13}^2 \lambda_1^2 \lambda_3 + 2 x_{32}^2 \lambda_2^2 \lambda_3 \\ \hline
\end{array}\right]$$

La matrice colonne $[\lambda]$ est donnée par (IV-10-9).

Les relations (IV-10-9) et (IV-32) permettent d'écrire explicitement la matrice [LAMBDA] . Posons :

$$\underset{(63 \times 12)}{[\text{LAMBDA}]} \cdot \underset{(12 \times 1)}{\vec{G}} = \underset{(63 \times 1)}{[\Theta]}$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} [\theta_1] \\ \hline [\theta_2] \\ \hline [\theta_3] \end{bmatrix} \begin{matrix} (21 \times 1) \\ (21 \times 1) \\ (21 \times 1) \end{matrix} \qquad \text{(IV-33)}$$

avec :

$$[\theta_1] = [\lambda] \cdot g_1$$

$$[\theta_2] = [\lambda] \cdot g_2$$

$$[\theta_3] = [\lambda] \cdot g_3$$

et (IV- 31) devient :

$$\text{(IV-34)} \qquad {}^t[Y_T^2] = \int_{\partial T} \begin{Bmatrix} [\lambda] \cdot g_1 \\ [\lambda] \cdot g_2 \\ [\lambda] \cdot g_3 \end{Bmatrix} d\Gamma$$

On intègre à l'aide de la formule de quadrature de SIMPSON :

$$\text{(IV-35)} \qquad \int_{\partial T} [\lambda]_k\, g_j\, d\Gamma = \frac{h}{3} \Big\{ [\lambda]_k(a_\ell)\, g_j(a_\ell) + 4\, [\lambda]_k(a_{\ell+3})\, + $$

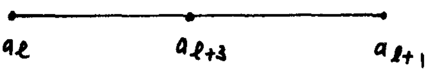
$$g_j(a_{\ell+3}) + [\lambda]_k(a_{\ell+1})\, g_j(a_{\ell+1}) \Big\} .$$

où $[\lambda]_k$ est la kième composante de la matrice colonne $[\lambda]$.

Pour

$$k = 1, 2, \ldots 21$$
$$j = 1, 2, 3$$
$$\ell = 1, 2, 3 \, [\mathrm{mod}\, 3]$$

avec



$$h = d(a_\ell, a_{\ell+1}).$$

On obtient alors pour $\ell = 1, 2, 3$ suivant que :

$\partial T \cap \gamma = [a_1, a_2]$; respectivement $[a_2, a_3]$ et $[a_3, a_1]$:

$$\ell = 1 \quad : \quad [a_1, a_2]$$
$$\ell = 2 \quad : \quad [a_2, a_3]$$
$$\ell = 3 \quad : \quad [a_3, a_1]$$

Dans chacun des cas ci-dessus on obtient pour ${}^t[Y_T^2]$:

$$\boxed{\begin{matrix} \ell = 1 \\ j = 1 \end{matrix}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_1]\, d\gamma = \frac{h}{3} \begin{array}{|c|} \hline g_1(a_1) \\ \hline g_1(a_2) \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

(IV-36)

$$\boxed{\begin{array}{l} l=1 \\ j=2 \end{array}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_2]\, d\Gamma = \frac{h}{3}$$

$g_2(a_1)$
$g_2(a_2)$
0
0
0
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
0

(IV-36)

$$\boxed{\begin{array}{l} l = 1 \\ j = 3 \end{array}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_3]\, d\gamma = \frac{h}{3}$$

$g_3(a_1)$
$g_3(a_2)$
0
0
1
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
0

(IV-36)

$$\boxed{\begin{matrix} \ell = 2 \\ j = 1 \end{matrix}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_1] \, d\Gamma = \frac{h}{3}$$

0
$g_1(a_2)$
$g_1(a_3)$
0
0
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
0

(IV-36)

$$\boxed{\begin{array}{l} \ell = 2 \\ j = 2 \end{array}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_2]\, d\sigma = \frac{h}{3} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline g_2(a_2) \\ \hline g_2(a_3) \\ \hline 0 \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline \vert \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

(IV-36)

$$\boxed{\begin{array}{l} l = 2 \\ j = 3 \end{array}}$$

0
$g_3(a_2)$
$g_3(a_3)$
0
0
0
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
0

$$\int_{\partial T} [\theta_3]\, dr = \frac{h}{3}$$

(IV-36)

$$\boxed{\begin{array}{l} \ell = 3 \\ j = 1 \end{array}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_1]\, d\Gamma = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} g_1(a_1) \\ 0 \\ g_1(a_3) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV-36}$$

$\ell = 3$
$j = 2$

$g_2(a_1)$
0
$g_2(a_3)$
0
0
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1
0

$$\int_{\partial T} [\theta_2] \, d\gamma = \frac{h}{3}$$

(IV-36)

$$\boxed{\begin{array}{l} \ell = 3 \\ j = 3 \end{array}}$$

$$\int_{\partial T} [\theta_3]\, d\Gamma = \frac{h}{3}$$

$g_3(a_1)$
0
$g_3(a_3)$
0
0
'
'
'
'
'
'
'
'
'
'
'
'
'
'
'
0

(IV-36)

En posant :

$$b_i^T = \int_{\partial T} [\theta_i]\, d\gamma \qquad i = 1, 2, 3 .$$

On peut écrire :

(IV-37) $$^t[Y_T^2] = \frac{h}{3} \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix}$$

où les b_i^T sont donnés explicitement par les relations (IV-36).

<u>*Remarque*</u> :

Dans le cas de coques cylindriques l'intégrale définie en (IV-28) peut être calculée exactement à l'aide de la formule suivante :

(IV-38) $$\int_{\hat{T}} \hat{x}^\alpha \hat{y}^\beta \, d\hat{x}\, d\hat{y} = \frac{\alpha !\ \beta !}{(\alpha + \beta + 2)!}$$

Cette dernière se généralise sous la forme suivante :

$\forall \alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$.

$$\int_{\hat{T}} \hat{x}^{\alpha_1}\,\hat{y}^{\alpha_2}\,(1-\hat{x}-\hat{y})^{\alpha_3}\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \frac{\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i)!}{\left(\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\right)+2\right)!} \tag{IV-39}$$

Si $(\lambda_i)_i$ est le système de coordonnées barycentriques associé au triangle T on a :

$$\int_{T} \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\lambda_3^{\alpha_3}\,dx\,dy = 2\ \text{mesure}\,(T)\,\frac{\prod_{i=1}^{3}(\alpha_i)!}{\left(\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\right)+2\right)!} \tag{IV-40}$$

cette formule permet de calculer $\int_T \phi(x,y)\,dx\,dy$ sans utiliser le changement de variable par F_T (transformation affine). De même si les f_i , $i = 1, 2, 3$ sont des polynômes le $[Y_T^1]$ se calcule aussi aisément à l'aide de la formule (IV-40).

On a :

$$^t[Y_T^1] = \int_T [\text{LAMBDA}]\,.\,\vec{F}\,dx\,dy$$

posons :

$$[\text{LAMBDA}]\,.\,\vec{F} = \underset{(63\times 1)}{[a]}\ ; \quad \text{avec :}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ [a_3] \end{bmatrix}$$

où

$$[a_1] = [\lambda] \cdot w_1 f_1$$

$$[a_2] = [\lambda] \cdot w_4 f_2$$

$$[a_3] = [\lambda] w_7 f_3 + [\partial_x \lambda] w_8 f_1 + [\partial_y \lambda] \cdot w_9 f_2$$

et $$[Y_T^1]$$

devient :

$$ {}^t[Y_T^1] = \iint_T \begin{Bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ [a_3] \end{Bmatrix} dx\,dy$$

$$= |\Delta_T| \iint_{\hat{T}} \begin{Bmatrix} [\hat{a}_1] \\ [\hat{a}_2] \\ [\hat{a}_3] \end{Bmatrix} d\hat{x}\,d\hat{y}$$

CHAPITRE V

OPTIMISATION DE L'EPAISSEUR

On remarque que si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont données, la fonctionnelle définie en (V-1) est uniquement fonction de l'épaisseur e par (III-4-1) et (III-5).

(V-1) $$j(e) = J\left(\vec{\tilde{u}}(e), e\right)$$

où la fonctionnelle J est donnée par :

$$J\left(\vec{\tilde{v}}, e\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} {}^{t}\vec{\tilde{\vartheta}}\,[S_{ij}](e)\,\vec{\tilde{\vartheta}}\,r(x)\,dx\,dy$$

où $\vec{\tilde{\vartheta}}$ est un vecteur donné par les relations (III-1-15-3).

$[S_{ij}](e)$: matrice définie par (III-1-20).

V.2.- *Ensembles des épaisseurs admissibles*

Dans ce qui suit on impose à l'épaisseur la condition suivante :

$$e \in E_{ad}$$

où

$$E_{ad} = \left\{ e \,/\, 0 < \alpha_1 \leq e \leq \alpha_2 \,;\; \left|\frac{de}{dx}\right| \leq C \,;\; P_0 = 2\pi\int_0^L e(x)\,r(x)\,dx \right.$$

la relation : $P_0 = 2\pi \displaystyle\int_0^L e(x)\,r(x)\,dx$

traduit le fait que le poids de la structure est imposé.

(V-2-2) $$P_o = \int_\omega \int_{-e/2}^{e/2} dV = \int_{-e/2}^{e/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L} k_1(z)k_2(z)\,r(x)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^{L}\int_{-e/2}^{e/2} (1 - 2Hz + z^2 K)\,r(x)\,dx\,dz$$

$$= 2\pi \int_0^{L} \left(e(x) + \frac{K e^3(x)}{12}\right) r(x)\,dx$$

$$= 2\pi \left\{ \int_0^{L} e(x)\,r(x)\,dx + \int_0^{L} \frac{K e^3(x)}{12}\,r(x)\,dx \right\}$$

or on est dans le cas de coques minces, l'épaisseur est de l'ordre de $1/10$.

On peut écrire $P_o = \beta_1 + \beta_2$ où $\beta_2 = 2\pi K \int_0^{L} \frac{e^3(x)}{12} r(x)\,dx$

et $\frac{Ke^3}{12} \simeq 10^{-6}$ ceci implique que $\beta_2 \simeq 0$, d'où

$$P_o = 2\pi \int_0^{L} e(x)\,r(x)\,dx = \beta_1$$

V.3.- *Formulation du problème d'optimisation*

Le problème à résoudre est le suivant :

(V-3-1) $$\left[\begin{array}{l} \mathrm{Min}\ j(e) \\ \quad e \in E_{ad} \end{array}\right.$$

la fonctionnelle j étant fonction de l'épaisseur e par (III-4-1) : (III-5).

V.4.- Approximation

On approche le problème (V-3-1) par un problème en dimension finie.

Pour cela on approche l'espace V par V_h ce qui est fait au chapitre IV (V_h est défini en IV-2), puis l'ensemble des épaisseurs admissibles E_{ad} par E^h_{ad} et enfin le système (III-5) est approché par le système linéaire en dimension finie (IV-27). On approche ensuite la fonction J définie en (V-1-1) par J_h d'où une approximation j_h de j. On définit alors le problème d'optimisation approché par (V-4-1).

(V-4-1) $$\left[\begin{array}{l} \mathrm{Min}\ j_h(e_h) \\ \quad e_h \in E^h_{ad} \end{array}\right.$$

où

$$j_h(e_h) = J\left(\vec{\tilde{u}}_h(e_h), e_h\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega {}^t\vec{\tilde{U}}_h\,[S_{ij}](e_h)\,\vec{\tilde{U}}_h\,r(x)\,dx\,dy \, .$$

Le problème approché défini en (V-4-1) est un problème de programmation non linéaire.

Sa résolution nécessite une méthode itérative. On peut utiliser des méthodes de type gradient.

D'une manière générale, on se donne :

(V-4-2) $e_h^0 \in E_{ad}^h$

puis

(V-4-3) $\left[\begin{array}{l} e_h^k \text{ étant connu, on détermine le gradient de } j_h(e_h^k) \text{ et on} \\ \text{déduit par un procédé à définir } e_h^{k+1}. \end{array}\right.$

Calcul du gradient $\nabla j_h(e_h)$

Soit e_h , pour calculer $\nabla j_h(e_h)$ on utilise la technique du contrôle optimal à savoir : l'hamiltonien et l'état adjoint.

Pour calculer donc $\nabla j(e)$ on procède comme suit : on note : $\tilde{a}(e;\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire et symétrique définie par :

$$\tilde{a}(e;\vec{\tilde{u}},\vec{\tilde{v}}) = \beta \int_\Omega \vec{\tilde{u}}\,[S_{ij}](e)\,\vec{\tilde{v}}\,r(x)\,dx\,dy\,.$$

le problème défini en (III-5) s'écrit alors :

(V-4-4) $$\left[\begin{array}{l} \tilde{a}(e;\vec{\tilde{u}},\vec{\tilde{v}}) = \displaystyle\int_\Omega {}^t\vec{F}\,\vec{\tilde{v}}\,r(x)\,dx\,dy + \int_\gamma {}^t\vec{G}\,\vec{\tilde{v}}\,d\Gamma \\ \forall \vec{\tilde{v}} \in V\,;\ \vec{\tilde{u}} \in V. \end{array}\right.$$

On introduit alors l'Hamiltonien par :

(V-4-4-1) $$H(\tilde{\vec{v}}, e, q) = J(\tilde{\vec{v}}, e) + \tilde{a}(e; \tilde{\vec{v}}, q) - \ell(e; \tilde{\vec{v}})$$

où

(V-4-4-2) $$\ell(e; \tilde{\vec{v}}) = \int_{\Omega} {}^t\vec{F}\tilde{\vec{v}}\, r(x)\, dx\, dy + \int_{\gamma} {}^t\vec{G}\tilde{\vec{v}}\, d\Gamma$$

pour e donnée, on détermine le champ de déplacement $\tilde{\vec{u}}$ par la résolution du problème (V-4-4).

D'une manière précise, on détermine une approximation $\tilde{\vec{u}}_h$ et par la résolution du système linéaire défini en (IV-27), puis p par

(V-4-5). $$\begin{cases} \tilde{a}(e; p, \tilde{\vec{v}}) = -\left\langle \dfrac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}}(\tilde{\vec{u}}, e) / \tilde{\vec{v}} \right\rangle_V \quad \forall \tilde{\vec{v}} \in V \\ \\ p \in V \end{cases}$$

en fait $\dfrac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}}$ représente le gradient de la fonctionnelle J en $\tilde{\vec{v}}$ (note usuellement $\nabla_{\tilde{\vec{v}}} J$).

En théorie du contrôle optimal (V-4-5) et p sont généralement appelés l'équation d'état adjointe et le vecteur d'état adjoint. Les fonctions $\tilde{\vec{u}}$, e , p sont connues, on calcule $j'(e) = \dfrac{dj(e)}{de}$ par :

$$(V\text{-}4\text{-}6) \quad \nabla j(e) = \frac{dj(e)}{de} = \frac{\partial H}{\partial e}(\tilde{\vec{u}}, e, p) = \frac{\partial J}{\partial e}(\tilde{\vec{u}}, e) + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e; \tilde{\vec{u}}, p) - \cdot \frac{\partial \ell}{\partial e}(e; \tilde{\vec{v}}).$$

Preuve de (V-4-6)

$\tilde{\vec{u}}(e)$ est donné par :

$$(1) \quad \forall \tilde{\vec{v}} \in V \; ; \; \tilde{a}(e; \tilde{\vec{u}}(e), \tilde{\vec{v}}) = \ell(e; \tilde{\vec{v}})$$

$p(e)$ est donné par :

$$(2) \quad \forall \tilde{\vec{v}} \in V \; ; \; \tilde{a}(e; p(e), \tilde{\vec{v}}) = - \left\langle \frac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}}(\tilde{\vec{u}}(e), e) / \tilde{\vec{v}} \right\rangle$$

où $\ell(e, \tilde{\vec{v}})$ est donnée par (V-4-4-2).

On a :

$j(e) = J(\tilde{\vec{u}}(e), e)$ donc

$$\frac{dj(e)}{de} = \left\langle \frac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}}(\tilde{\vec{u}}(e), e) / \frac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de} \right\rangle + \frac{\partial J}{\partial e}(\tilde{\vec{u}}(e), e)$$

d'après la relation (2), où l'on fait $\tilde{\vec{v}} = \dfrac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de}$ et on a :

$$(i) \quad \left\langle \frac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}}(\tilde{\vec{u}}(e), e) / \frac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de} \right\rangle = - \tilde{a}\left(e; p(e), \frac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de}\right)$$

d'après (1), que l'on différentie par rapport à e, on a :

$$(ii) \quad \frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e; \tilde{\vec{u}}(e), \tilde{\vec{v}}) + \tilde{a}\left(e; \frac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de}, \tilde{\vec{v}}\right) = \frac{\partial \ell}{\partial e}(e; \tilde{\vec{v}})$$

$$\forall \tilde{\vec{v}} \in V.$$

en faisant $\tilde{\vec{v}}' = p(e)$ dans (ii) et en tenant compte de la symétrie de la forme bilinéaire $\tilde{a}(e;\cdot,\cdot)$ il vient :

(iii) $$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e;\tilde{\vec{u}}(e), p(e)) + \tilde{a}\left(e; p(e), \frac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de}\right) - \frac{\partial \ell}{\partial e}(e;\tilde{\vec{v}}') = 0$$

en reportant (iii) dans (i) il vient :

(iv) $$\left\langle \frac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}'}(\tilde{\vec{u}}(e), e) \,/\, \frac{d\tilde{\vec{u}}(e)}{de} \right\rangle = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e;\tilde{\vec{u}}(e), p(e)) - \frac{\partial \ell}{\partial e}(e,\tilde{\vec{v}}')$$

On obtient alors :

$$\frac{dj(e)}{de} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e;\tilde{\vec{u}}(e), p(e)) - \frac{\partial \ell}{\partial e}(e,\tilde{\vec{v}}') + \frac{\partial J}{\partial e}(\tilde{\vec{u}}(e), e)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial e}(\tilde{\vec{u}}'(e), e, p(e)).$$

$\langle \cdot / \cdot \rangle_V$ désigne le produit scalaire dans V, de (iii) de (V-4-6) on a :

$$\tilde{a}(e; p(e), \tilde{\vec{v}}') = \frac{\partial \ell}{\partial e}(e,\tilde{\vec{v}}') - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e;\tilde{\vec{u}}(e), \tilde{\vec{v}}')$$

d'après (i)

$$-\left\langle \frac{\partial J}{\partial \tilde{\vec{v}}'}(\tilde{\vec{u}}(e), e) \,/\, \tilde{\vec{v}}' \right\rangle = \tilde{a}(e; p(e), \tilde{\vec{v}}') =$$
$$\frac{\partial \ell}{\partial e}(e,\tilde{\vec{v}}') - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e;\tilde{\vec{u}}(e), \tilde{\vec{v}}')$$

on obtient alors :

(V-4-7)
$$\left[\begin{array}{l} \tilde{a}(e\,;p(e),\tilde{\vec{v}}) + \dfrac{\partial \tilde{a}}{\partial e}(e\,;\tilde{\vec{u}}(e),\tilde{\vec{v}}) = \dfrac{\partial \ell(e,\tilde{\vec{v}})}{\partial e} \\ \tilde{\vec{v}} \in V \end{array}\right.$$

la résolution du problème (V-4-7) founira le vecteur adjoint p.

Le problème approché de (V-4-7) s'écrit :

(V-4-8)
$$\left[\begin{array}{l} \tilde{a}_h(e\,;p_h,\tilde{\vec{v}}_h) + \dfrac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e\,;\tilde{\vec{u}}_h,\tilde{\vec{v}}_h) = \dfrac{\partial \ell(e,\tilde{\vec{v}}_h)}{\partial e} \\ \tilde{\vec{v}}_h \in V_h \end{array}\right.$$

avec

(V-4-8-1)
$$\left[\begin{array}{l} \tilde{a}_h(e\,;p_h,\tilde{\vec{v}}_h) = \beta \displaystyle\int_\Omega {}^tP_h\,[S_{ij}](e)\,\tilde{\vec{\vartheta}}_h\,r(x)\,dx\,dy \\ \tilde{a}_h(e\,;\tilde{\vec{u}}_h,\tilde{\vec{v}}_h) = \beta \displaystyle\int_\Omega {}^t\tilde{\vec{U}}_h\,[S_{ij}](e)\,\tilde{\vec{\vartheta}}_h\,r(x)\,dx\,dy \\ \ell(e,\tilde{\vec{v}}_h) = \displaystyle\int_\Omega {}^t\vec{F}\,\tilde{\vec{\vartheta}}_h\,r(x)\,dx\,dy \\ \tilde{\vec{v}}_h \in V_h. \end{array}\right.$$

où $\tilde{\vec{\mathcal{U}}}_h$; $\tilde{\vec{\mathcal{V}}}_h$; P_h ; $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont donnés par les relations (III-1-20-3). Posons :

$$\ell_d(e, \tilde{\vec{v}}_h) = \frac{\partial \ell}{\partial e}(e, \tilde{\vec{v}}_h)$$

(V-4-8-2) $$\ell_d(e, \tilde{\vec{v}}_h) = \int_\Omega {}^t\vec{F}_d \, \tilde{\vec{\mathcal{V}}}_h \, r(x) \, dx \, dy .$$

où

$${}^t\vec{F}_d = \begin{bmatrix} w'_1 f_1 & 0 & 0 & w'_4 f_2 & 0 & 0 & w'_7 f_3 & w'_8 f_1 & w'_9 f_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$w'_1 = 1 + \frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{R_1^2} + 2K\right) \quad ; \quad w'_4 = 1 + \frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{R_2^2} + 2K\right)$$

$$w'_7 = \left(1 + \frac{e^2}{4}K\right) \quad ; \quad w'_8 = w'_9 = \frac{3e^2}{2r} H$$

on a :

$$\tilde{a}_h(e; \tilde{\vec{u}}_h, \tilde{\vec{v}}_h) = \beta \int_\Omega {}^t\tilde{\vec{\mathcal{U}}}_h \, [S\ddot{y}](e) \, \tilde{\vec{\mathcal{V}}}_h \, r(x) \, dx \, dy$$

$$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e; \tilde{\vec{u}}_h, \tilde{\vec{v}}_h) = \beta \int_\Omega {}^t\tilde{\vec{\mathcal{U}}}_h \frac{d}{de}[S\ddot{y}](e) \, \tilde{\vec{\mathcal{V}}}_h \, r(x) \, dx \, dy$$

on pose : $$\frac{d}{de}[S\ddot{y}] = [S\ddot{y}]_d(e)$$

et l'on peut écrire

(V-4-8-3) $$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}\left(e\,;\vec{\tilde{u}}_h,\vec{\tilde{v}}_h\right) = \beta \int_{\Omega} {}^t\vec{\tilde{U}}_h\,[S_{ij}]_d(e)\,\vec{\tilde{\vartheta}}_h\, r(x)\,dx\,dy$$

où : $[S_{ij}]_d^{(e)}$ est donnée par (V-4-9) dans le cas général (coques de révolution).

Dans le cas particulier de coques cylindriques, est donnée par (V-4-10).

En tenant compte des relations et notations du chapitre IV; la forme bilinéaire définie en (V-4-8-1) s'écrit :

(V-4-11) $$\tilde{a}_h\left(e\,;p_h,\vec{\tilde{v}}_h\right) = \beta \sum_{T\in T_h} \left\{ |\Delta_T|\,[DG(p_h)]\,[DB]\,[Z_T]\,{}^t[DB]\,{}^t[DG(\vec{\tilde{v}}_h)] \right\}$$

et d'après la relation (IV-2-5), (V-4-11) devient :

(V-4-12) $$\tilde{a}_h\left(e\,;p_h,\vec{\tilde{v}}_h\right) = \beta \left\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\right\} \left\{ \sum_{T\in T_h} \left\{ |\Delta_T|\,{}^t[A_T]\,[DB]\,{}^t[Z_T]\,{}^t[DB]\,[A_T] \right\} \right\} \left\{\hat{p}_h\right\}.$$

avec des notations évidentes : (V-4-12) s'écrit :

(V-4-13) $$\tilde{a}_h\left(e\,;p_h,\vec{\tilde{v}}_h\right) = \beta \left\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\right\} \left[\hat{H}_p\right] \left\{\hat{p}_h\right\}$$

où $$\beta = \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right).$$

On obtient également pour la relation définie en (V-4-8-3).

(V-4-14) $$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}\left(e\,;\vec{\tilde{u}}_h,\vec{\tilde{v}}_h\right) = \beta \sum_{T\in T_h} \left\{ |\Delta_T|\,[DG(\vec{\tilde{u}}_h)]\,[DB]\,[Z_T^d]\,{}^t[DB]\,{}^t[DG(\vec{\tilde{v}}_h)] \right\}$$

$\operatorname{ctg}\varphi\left[1+\frac{3e^2}{4}\left(\frac{1}{R_1^2}-K\right)-\frac{e^4K}{16R_1^2}\right]$	$\frac{\nu}{R_2}\left(1+\frac{e^2}{4R_1^2}\right)$	0	0	0	$\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{2R_2}\left(1+\frac{e^2}{4R_1^2}\right)$	$-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R_2^2}\left[1-\frac{e^2}{4}\left(2K+\frac{1}{R_1^2}\right)+\frac{2R_2}{R_1}\right]$	$-\frac{\operatorname{ctg}^2\varphi}{R_2}\left[\frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)+\frac{e^4K}{16R_1}\right]$	0	$\frac{\nu e^2}{2}K\operatorname{ctg}\varphi$	0	$-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r}\left[\frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)+\frac{Ke^4}{16R_1}\right]$
	$2\left(1+\frac{e^2}{4}K\right)$	0	0	0	$\frac{2\nu}{r}\left(1+\frac{Ke^2}{4}\right)$	$-2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)$	$\frac{K\nu}{2}e^2\operatorname{ctg}\varphi$	0	$\frac{e^2}{2R_2}$	0	$\frac{\nu e^2}{2R_1r}$
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0	$-4(1-\nu)\left(1+\frac{e^2K}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\varphi$	$-\frac{(1-\nu)\operatorname{ctg}\varphi}{6R_1^2r}$	0	0	$\frac{e^2(1-\nu)}{R_1r}\operatorname{ctg}\varphi$	0	$6(1-\nu)\operatorname{ctg}\varphi\, e^2\cdot\left[\frac{1+r}{12R_2r}+\frac{1}{6R_1}\right]$	0
				$4(1-\nu)\left(1+\frac{Ke^2}{4}\right)$	$\frac{e^2}{4R_1^2r}$	0	0	$-(1-\nu)\frac{e^2}{R_1r}$	0	$-6e^2(1-\nu)\left[\frac{R_1+r(1+R_1+R_2)}{12R_1R_2r}\right]$	0
					$2\nu\left[1+\frac{3e^2}{4}\left(\frac{1}{R_1^2}-K\right)-\frac{e^4K}{16}\right]+\frac{1}{3}\left(1+\frac{Ke^2}{4}\right)$	$-\left(\frac{e\nu}{2R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{Ke^2r}{4}\operatorname{ctg}\varphi$	$\frac{\left(\frac{1}{R_2}-\frac{2}{R_1}\right)\frac{e^2}{4}+\frac{Ke^4}{16}}{r^2}$	$\frac{\nu e^2}{2rR_2}$	$\left[\frac{e^2}{4R_1r}+\frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2}{R_2}\right)+\frac{Ke^4}{16R_1}\right]\frac{1}{r}$	$\frac{e^2}{4R_1}$
		Sym.						0	$\frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+e\nu\left(\frac{1}{R_1r}+1\right)$	0	$\frac{e^2}{4R_2^2r}$
							$\frac{1}{R_2^2}\operatorname{ctg}^2\varphi\left[\frac{e^2}{4}-\cdot\frac{Ke^4}{16}\right]$	0	$\frac{e^2\nu\operatorname{cotg}\varphi}{2R_2}$	0	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{2R_2}\left(\frac{e^2}{4}-\frac{Ke^4}{16}\right)$
								$(1-\nu)\frac{e^2}{r^2}$	0	$4(1-\nu)\left[\frac{e^2}{4r^2}+\left(\frac{e^2}{4}-\frac{Ke^4}{16}\right)\frac{1}{r}\right]$	0
									$\frac{Ke^4}{80}$	0	$\frac{\nu e^2}{2r}$
										$6e^2(1-\nu)\left[\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{6}-\frac{eK}{20}\right)\left(\frac{1}{r^2}+1\right)\right]$	0
											$\frac{1}{r^2}\left(\frac{e^2}{4}-\frac{Ke^4}{16}\right)$

0	$\frac{\nu}{R}\left(1+\frac{e^2}{4R^2}\right)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$2\left(1+\frac{e^2}{4R^2}\right)$	0	0	0	$\frac{2\nu}{R}\left(1+\frac{e^2}{4R^2}\right)$	$-2\left(\frac{1}{R}+\frac{\nu}{R}\right)$	0	0	$\frac{e^2}{2R}$	0	$\frac{\nu e^2}{2R^2}$
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0	0	0	0	0	0	0	0	0
				$4(1-\nu)\left(1+\frac{e^2}{4R^2}\right)$	$\frac{e^2}{2R^3}$	0	0	$-(1-\nu)\frac{e^2}{R^2}$	0	$-e^2(1-\nu)\left(\frac{1+R}{R^2}\right)$	0
					$2\nu\left(1-\frac{2}{R^2}-\frac{e^4}{16R^4}\right)+\frac{1}{R}\left(1+\frac{e^2}{4R^2}\right)$	$-\frac{1}{R^2}(R+2\nu)$	0	$\frac{3e^2}{R^3}\left(-\frac{1}{72}+\frac{e^2}{40R^2}\right)$	$\frac{\nu e^2}{2R^2}$	$\frac{3}{4R^2}\left(\frac{1}{3R^2}-\frac{1}{3}+\frac{e}{10R}\right)$	$\frac{e^2}{4R}$
		Sym.				$\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{3e^2}{4R^2}\right)$	0	0	$e^{\nu}\left(1+\frac{1}{R^2}\right)$	0	$\frac{e^2}{4R^3}$
							0	0	0	0	0
								$(1-\nu)\frac{e^2}{R^2}$	0	$\frac{3e^2}{R}(1-\nu)\left[\frac{1}{3R}+\frac{1}{3}-\frac{e}{70R^2}\right]$	0
									$\frac{e^4}{8R^2}$	0	$\frac{\nu e^2}{2R^2}$
										$6e^2(1-\nu)\left[\frac{1}{3R}+\left(\frac{1}{6}-\frac{e}{20R^2}\right)\left(1+\frac{1}{R^2}\right)\right]$	0
											$\frac{1}{R^2}\left(\frac{e^2}{4}-\frac{e^4}{16R^2}\right)$

(V-4-15) $$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e;\vec{\tilde{u}}_h,\vec{\tilde{v}}_h) = \beta\,{}^t\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\}\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\{\omega_T\,{}^t[A_T][DB]\,{}^t[Z_T^d]\,{}^t[DB][A_T]\}\right\}\{\hat{\vec{\tilde{u}}}_h\}.$$

On a de même avec des notations évidentes :

$$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e;\vec{\tilde{u}}_h,\vec{\tilde{v}}_h) = \beta\,{}^t\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\}\,[\hat{H}_p^d]\,\{\hat{\vec{\tilde{u}}}_h\}$$

en posant : $\vec{\tilde{u}}_h = p_h$; $\left(\{\hat{\vec{\tilde{u}}}_h\} = \{\hat{p}_h\}\right)$

on obtient alors :

(V-4-16) $$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e;p_h,\vec{\tilde{v}}_h) = \beta\,{}^t\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\}\,[\hat{H}_p^d]\,\{\hat{p}_h\}$$

et l'on a finalement :

(V-4-17) $$\tilde{a}_h(e;p_h,\vec{\tilde{v}}_h) + \frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e;p_h,\vec{\tilde{v}}_h) = \beta\,{}^t\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\}\left\{[\hat{H}_p]+[\hat{H}_p^d]\right\}\{\hat{p}_h\}.$$

en posant :

$$[\mathcal{H}_p] = \left\{[\hat{H}_p]+[\hat{H}_p^d]\right\} ;$$

(V-4-18) $$\tilde{a}_h(e;p_h,\vec{\tilde{v}}_h) + \frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e;p_h,\vec{\tilde{v}}_h) = \beta\,{}^t\{\hat{\vec{\tilde{v}}}_h\}\,[\mathcal{H}_p]\,\{\hat{p}_h\}.$$

la relation (V-4-8-2) s'écrit aussi avec les notations du chapitre IV.

(V-4-19) $$\ell_d(e;\vec{\tilde{v}}_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left\{\Delta_T\,[Y_T^d]\,{}^t[DB]\,{}^t[D\,\sigma(\vec{\tilde{v}}_h)]\right\}$$

(V-4-20) $$\ell_d(e;\vec{\tilde{v}}_h) = {}^t\{\hat{\tilde{\vec{v}}}_h\} \sum_{T\in T_h} \left\{ |\Delta_T|\, {}^t[A_T]\,[DB]\, {}^t[Y_T^d] \right\}$$

(V-4-21) $$\ell_d(e;\vec{\tilde{v}}_h) = {}^t\{\hat{\tilde{\vec{v}}}_h\}\,\{\hat{b}_p\}$$

où : $$\{\hat{b}_p\} = \sum_{T\in T_h} \left\{ |\Delta_T|\, {}^t[A_T]\,[DB]\, {}^t[Y_T^d] \right\}$$

le problème défini en (V-4-8) s'écrit alors :

(V-4-22) $$\left[\begin{array}{l} p\,[\mathcal{H}_p]\,\{\hat{p}_h\} = \{\hat{b}_p\} \\ p_h,\ \hat{b}_p \in \mathbb{R}^{3\hat{N}} \end{array}\right.$$

(V-4-22) est un système linéaire qui fournira la fonction p_h , approximation de p .

Par analogie avec les relations définies en (IV-22) les matrices $[Z_T^d]$ et $[Y_T^d]$ sont données par :

$$[Z_T^d] = \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_\ell\, \hat{\phi}_d(\hat{b}_\ell)$$

$$[Y_T^d] = \sum_{\ell=1}^{L} \hat{q}_\ell\, \hat{\psi}_d(\hat{b}_\ell)$$

où :

$$\hat{\Phi}_d(\hat{be}) = \hat{\Phi}_d(\hat{z}, \hat{j}) = \left\{ [\widehat{LAMBDA}] [Sy]_d(c)^t [\widehat{LAMBDA}] \, r(\hat{z}) \right\} (\hat{be}) .$$

$$\hat{\Psi}_d(\hat{be}) = \hat{\Psi}_d(\hat{z}, \hat{j}) = {}^t\vec{F}_d(\hat{be}) \left\{ {}^t[\widehat{LAMBDA}] \, r(\hat{x}) \right\} (\hat{be}) .$$

V.5.- *Résolution du problème approché (V-4-1)*

La résolution de ce problème se fera par une méthode de FRANK-WOLFE du fait que l'ensemble des épaisseurs admissibles E_{ad} (E^h_{ad}) est défini par un ensemble de relations linéaires.

V.5.1.- *Description de l'Algorithme*

On se donne un e^0_h dans E^h_{ad} .

e^k_h étant connu : on calcul $\vec{\tilde{u}}^k_h$,

puis p^k_h ,

ce qui permet de calculer $\nabla j_h(e^k_h)$.

$\forall k$, e^{k+1}_h est déterminé à partir de e^k_h de la manière suivante :

On résoud le programme linéaire :

$$\text{(V-5-2)} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Min} \left(\nabla j_h(e^k_h), e_h - e^k_h \right) \\ e_h, e^k_h \in E^h_{ad} \cap \Theta^k_{h\mu} \end{array} \right.$$

où : $\Theta^k_{h\mu} = \{ e_h \text{ tel que } |e_h - e^k_h| \leq \mu \}$

En faisant varier μ on obtient une suite $(\mu_k), k$ pour définir $\theta^k_{h\mu}$.

Soit $e^{k'}_h$ la solution du programme linéaire (V-5-2), e^{k+1}_h est choisi de façon à minimiser la fonction $\dot{j}_h$ sur le segment $[e^k_h, e^{k'}_h]$.

e^{k+1}_h est donc la solution du problème de minimisation unidimensionnel.

$$\text{(V-5-3)} \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{Min} \ \dot{j}_h(e_h) \\ \quad e_h \in [e^k_h, e^{k'}_h] \end{array} \right.$$

ie :

$$\left[\begin{array}{l} \dot{j}_h(e^{k+1}_h) \leq \dot{j}_h(e_h) \\ \quad \forall e_h \in [e^k_h, e^{k'}_h]. \end{array} \right.$$

Les méthodes utilisées pour résoudre le problème (V-5-3) sont diverses entre autre : Armijo, Dichotomie, Fibonnaci).

CHAPITRE VI

APPLICATION NUMERIQUE

Résolution numérique d'un problème de coque cylindrique circulaire encastrée en son bord.

La formulation de ce problème est la suivante : trouver $\vec{\tilde{u}} \in V = (H^1_0(\Omega))^2 \times H^2_0(\Omega)$ tel que :

$$\text{(VI-1)} \quad \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega {}^t\vec{\tilde{u}}\,[S_{ij}]\,\vec{\tilde{v}}\,dx\,dy = \int_\Omega {}^t\vec{F}\,\vec{\tilde{v}}\,dx\,dy \\ \forall \vec{\tilde{v}} \in V \end{array} \right.$$

les vecteurs $\vec{\tilde{u}}$, $\vec{\tilde{v}}$ sont donnés par les relations (III-1-20-3).

Le vecteur ${}^t\vec{F}$ dans le cas de coque cylindrique est donné par (VI-2).

$$\text{(VI-2)} \qquad {}^t\vec{F} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline w_1 f_1 & 0 & 0 & w_4 f_2 & 0 & 0 & w_7 f_3 & w_8 f_1 & w_9 f_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

où :

$$\left[\begin{array}{l} w_1 = e\left(1 + \dfrac{e^2}{4R^2}\right) = w_4 \\ w_7 = e\left(1 + \dfrac{e^2}{12R^2}\right) \\ w_8 = w_9 = \dfrac{e^3}{R^2} \end{array} \right.$$

La solution du problème approché (VI-1) est donnée par la résolution du système linéaire (VI-3).

$$
(\text{VI-3}) \quad \left[\begin{array}{l}
\beta \displaystyle\sum_{T \in T_h} \left\{ |\Delta_T| \, [DG(\vec{u}_h)] \, [DB] \, [Z_T] \, {}^t[DB] \, {}^t[DG(\vec{v}_h)] \right\} = \\[2ex]
\displaystyle\sum_{T \in T_h} \left\{ |\Delta_T| \, {}^t[Y'_T] \, {}^t[DB] \, [DG(\vec{v}_h)] \right\}
\end{array} \right.
$$

La matrice $[Z_T]$ est donnée par les relations (IV-22). La matrice colonne $[Y'_T]$ est définie en (IV-30) en tenant compte de (VI-2).

On rappelle que :

$$[Z_T] = \sum_{\ell=1}^{20} \hat{q}_\ell \, \vec{\phi}(\hat{b}_\ell)$$

$$[Z_T] = \sum_{\ell=1}^{20} \left(\hat{q}_\ell \, [\widehat{LAMBDA}] \, [\hat{S}_y] \, [\widehat{LAMBDA}] \right) (\hat{b}_\ell)$$

$$[Y'_T] = \sum_{\ell=1}^{20} \hat{q}_\ell \, \vec{\Psi}(\hat{b}_\ell)$$

$$[Y'_T] = \sum_{\ell=1}^{20} \hat{q}_\ell \, {}^t\vec{F}(\hat{b}_\ell) \, {}^t\left\{ [\widehat{LAMBDA}] (\hat{b}_\ell) \right\}$$

La résolution du système défini en (VI-3-) fournira le champ de déplacement $\vec{\tilde{u}}_h$ (approximation de $\vec{\tilde{u}}$). Afin de calculer le $\nabla j(e) = \frac{dj(e)}{de}$ il faudra aussi calculer le vecteur d'état adjoint approché p par la résolution du système linéaire (VI-4) :

(VI-4)
$$\left[\begin{array}{l} \beta \sum\limits_{T\in T_h} \Big\{ |\Delta T| \, [DG(p_h)] [DB] \left([Z_T] + [Z_T^d] \right) \cdot \\ \qquad \cdot {}^t[DB]\, {}^t[DG(\vec{\tilde{v}}_h)] \Big\} = \\ \sum\limits_{T\in T_h} \Big\{ |\Delta T| \, {}^t[Y_T^d] \, {}^t[DB] \, {}^t[DG(\vec{\tilde{v}}_h)] \Big\} \end{array}\right.$$

avec

$$[Z_T^d] = \sum_{\ell=1}^{20} \hat{q}_e \, \hat{\Phi}_d(\hat{b}_e)$$

$$[Y_T^d] = \sum_{\ell=1}^{20} \hat{q}_e \, \hat{\Psi}_d(\hat{b}_e)$$

où

$$\left[\begin{array}{l} \hat{\Phi}_d(\hat{b}_e) = \hat{\Phi}_d(\hat{z},\hat{y}) = \left\{ [\hat{LAMBDA}] [S_{ij}]_d(e) \, {}^t[\hat{LAMBDA}] \right\} (\hat{b}_e) \\ \hat{\Psi}_d(\hat{b}_e) = \hat{\Psi}_d(\hat{z},\hat{y}) = {}^t\vec{F}_d(\hat{b}_e) \left\{ {}^t[\hat{LAMBDA}] \, (\hat{b}_e) \right\} . \\ \beta = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) . \end{array}\right.$$

La matrice $[S_{ij}]_d^{(e)}$ est donnée en (V-4-10) le vecteur ${}^t\vec{F}_d$ est donné par : (VI-4-1).

(VI-4-1) $${}^t\vec{F}_d = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline w'_1 f_1 & 0 & 0 & w'_4 f_2 & 0 & 0 & w'_7 f_3 & w'_8 f_1 & w'_9 f_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

où

$$\left[\begin{array}{l} w'_1 = \left(1 + \dfrac{3e^2}{4R^2}\right) \\ w'_4 = w'_1 \\ w'_7 = \left(1 + \dfrac{e^2}{4R^2}\right) \\ w'_8 = w'_9 = \dfrac{3e^2}{R^2} \end{array}\right.$$

VI-5.- Application

E , ν : sont constants.

$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq 2\pi$

$$\left[\begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = \dfrac{4Ee\nu}{1-\nu^2}\left(L^2 - x^2\right)x \\ f_3 = \dfrac{Ee}{12R^2(1-\nu^2)}\left\{\left(12 + \dfrac{e^2}{R^2}\right)\left(L^2 - x^2\right) + 8\nu e^2\left(L^2 - 3x^2\right) + 24e^2R^2\right\} \end{array}\right.$$

Cette application correspond au cas où la coque est encastrée sur les bords $x = 0$ et $x = L$.

Les bords $y=\mu_1$ et $y=\mu_2$ sont des bords fictifs sur lesquels on applique des conditions de symétrie liés à la symétrie du champ de pression ($\tilde{f}$ est indépendant de y et $f_1 = 0$). La prise en compte des conditions aux limites est donnée par les tableaux suivants :

(VI-5-0)

Bords	Sommet du triangle							Milieu du côte
		$\tilde{u}$	$\tilde{u}_{,x}$	$\tilde{u}_{,y}$	$\tilde{u}_{,x^2}$	$\tilde{u}_{,xy}$	$\tilde{u}_{,y^2}$	$\tilde{u}_{,n}$
$x=0$ $x=L$	$\tilde{u}_1$	0	1	0	1	1	0	0
	$\tilde{u}_2$	0	1	0	1	1	0	0
	$\tilde{u}_3$	0	0	0	1	0	0	0

Bords	Sommet du triangle							Milieu du côte
		$\tilde{u}$	$\tilde{u}_{,x}$	$\tilde{u}_{,y}$	$\tilde{u}_{,x^2}$	$\tilde{u}_{,xy}$	$\tilde{u}_{,y^2}$	$\tilde{u}_{,n}$
$y=\mu_1$ $y=\mu_2$	$\tilde{u}_1$	0	0	0	0	0	0	0
	$\tilde{u}_2$	1	1	0	1	0	0	0
	$\tilde{u}_3$	1	1	0	1	0	0	0

VI-5-1.- *Remarque*

La matrice du système linéaire défini en (VI-4) est en partie celle du système linéaire défini en (VI-3).

La remarque est faite dans le but de construire les 2 matrices simultanément.

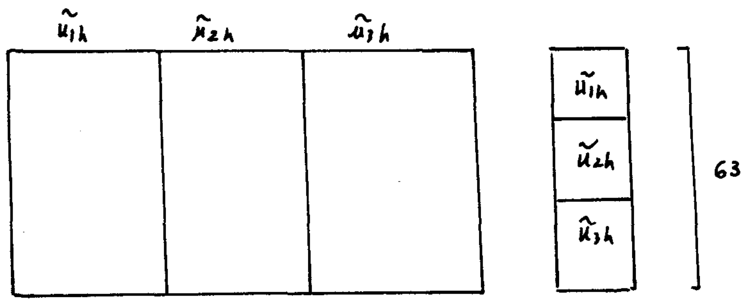
VI-6.- *Maillage utilisé*

(voir page suivante).

VI-6-1.- *Arbre programmatique*

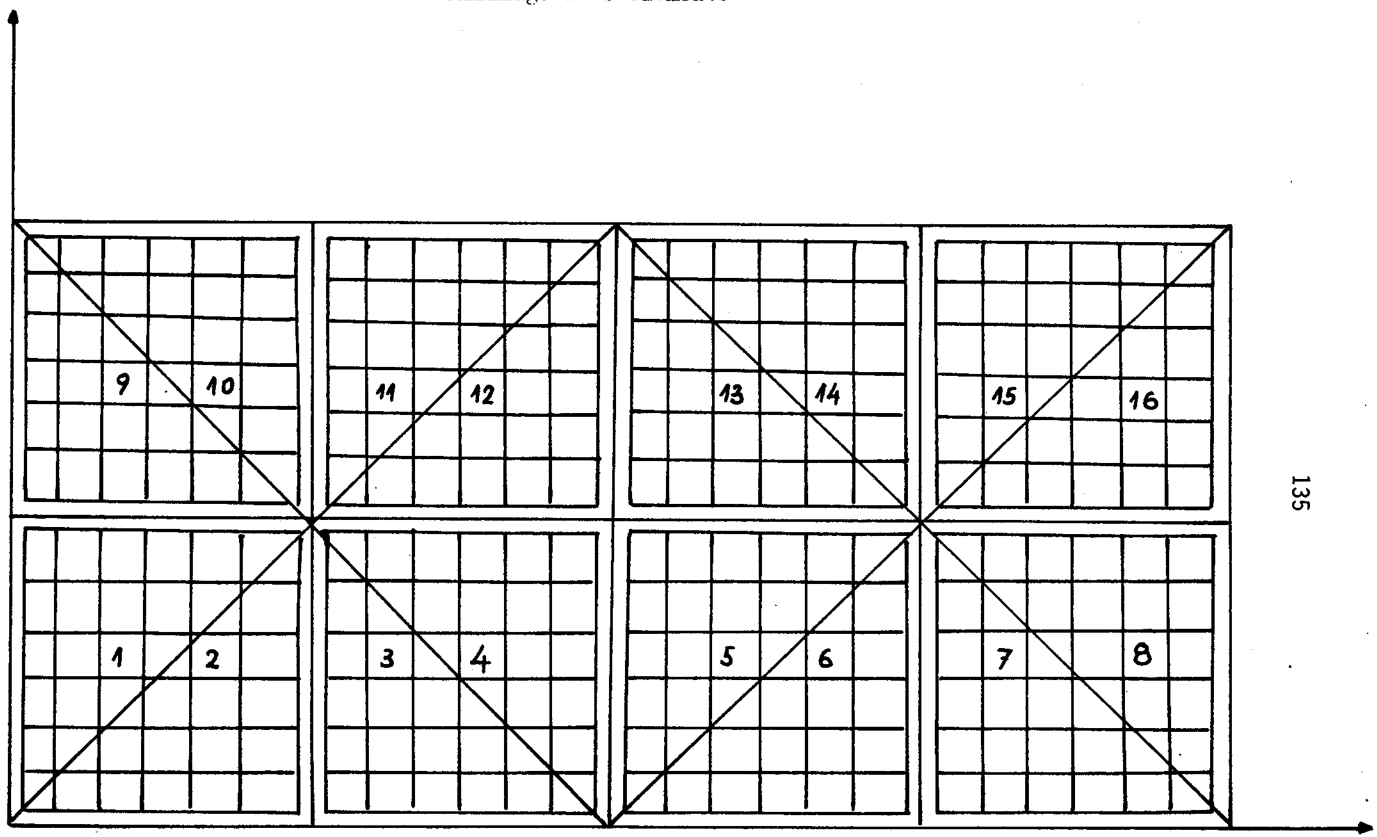
Celui-ci donne la résolution des deux systèmes linéaires, la détermination des degrés de liberté du champ de déplacement, champ de déplacement adjoint.

Disposition matricielle

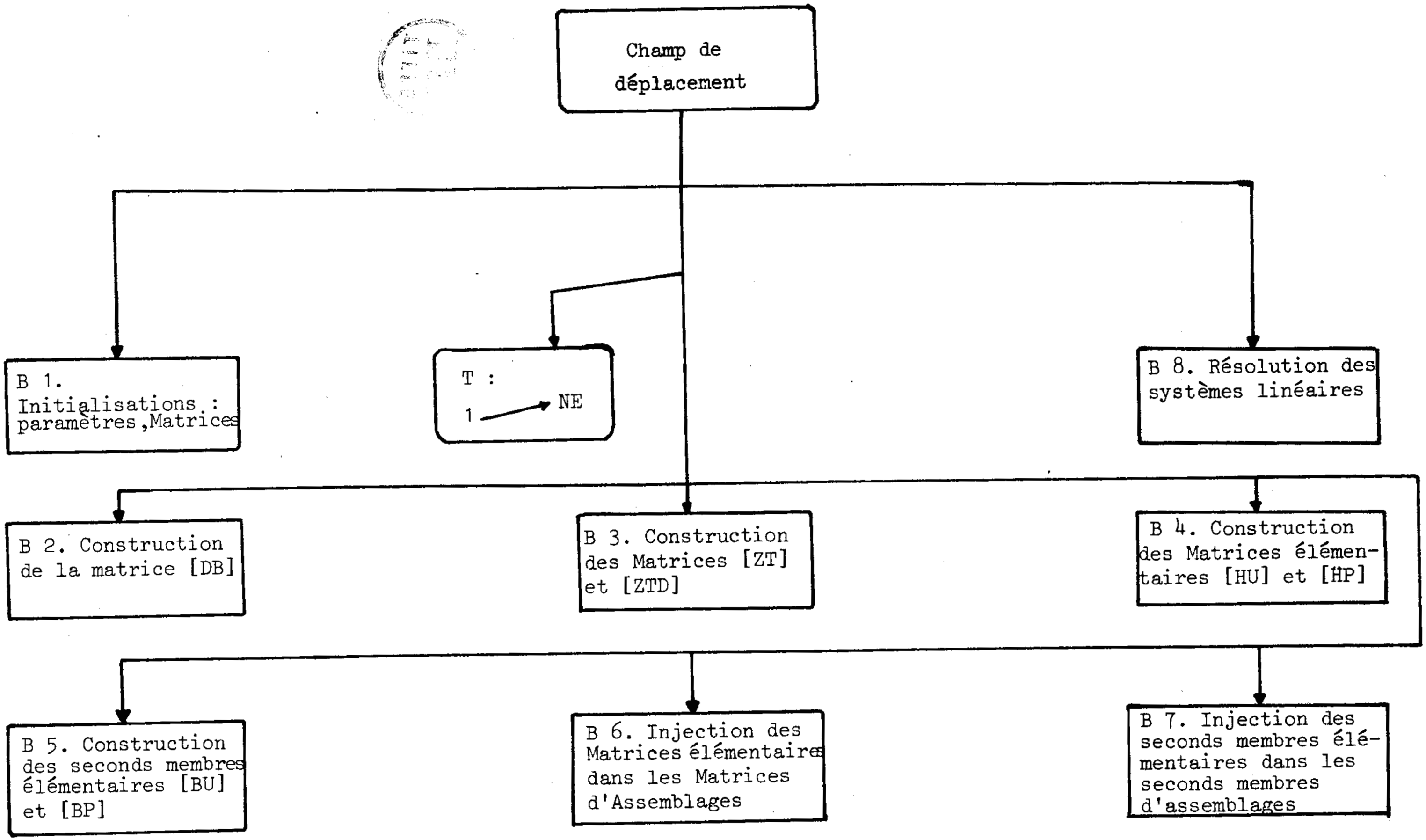


Maillage à 16 éléments

(VI-6)



Les points du maillage représentent les noeuds : $\hat{b}_\ell = (\hat{x}_\ell , \hat{y}_\ell)$ d'intégration.


Champ de déplacement
B 1. Initialisations : paramètres, Matrices
T : 1 → NE
B 8. Résolution des systèmes linéaires
B 2. Construction de la matrice [DB]
B 3. Construction des Matrices [ZT] et [ZTD]
B 4. Construction des Matrices élémentaires [HU] et [HP]
B 5. Construction des seconds membres élémentaires [BU] et [BP]
B 6. Injection des Matrices élémentaires dans les Matrices d'Assemblages
B 7. Injection des seconds membres élémentaires dans les seconds membres d'assemblages

(VI-6-1)

VI-7.- *Résolution des systèmes linéaires*

Les matrices $[H1]$ et $[H2]$ étant symétriques, définies positives. On utilise la méthode de Cholesky pour résoudre chacun des deux systèmes. On veut résoudre :

$$[H1]\{U\} = \{B1\}$$
$$[H2]\{P\} = \{B2\}$$

On factorise respectivement $[H1]$ et $[H2]$ sous la forme $[C1]\,{}^t[C1]$ respectivement $[C2]\,{}^t[C2]$ avec $[C1]$, $[C2]$ des matrices triangulaires inférieures, ce qui permet de décomposer chaque système en deux systèmes triangulaires à savoir :

(VI-7-1) $$\begin{cases} [C1]\{V1\} = \{B1\} & \text{(Descente)} \\ {}^t[C]\{U\} = \{V1\} & \text{(Remontée)} \end{cases}$$

respectivement :

(VI-7-2) $$\begin{cases} [C2]\{V2\} = \{B2\} & \text{(Descente)} \\ {}^t[C2]\{P\} = \{V2\} & \text{(Remontée)} \end{cases}$$

La solution approchée du champ de déplacement

$\vec{\tilde{u}}^{\ell}_{h} = \left(\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h}\right)$, α = 1, 2, 3 est donnée par la relation (VI-8)

(VI-8) $$\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ [\mathcal{B}LG(\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h})]_j [D]_j [A][\lambda]_j \right\}$$

avec α = 1, 2, 3.

NE : étant le nombre d'éléments (triangle) de la triangulation.

On a de même pour le champ de déplacement adjoint (vecteur d'état adjoint).

$$p_h^{\ell} = \left(p_{\sigma h}^{\ell}\right) \quad , \ \sigma = 1,\ 2,\ 3.$$

(VI-9) $$p_{\sigma h}^{\ell} = \sum_{k=1}^{NE} \left\{ \left[DLG(p_{\sigma h}^{\ell})\right]_k [D]_k [\mathcal{A}] [\lambda]_k \right\}$$

Dans les expressions des relations (VI-8) et (VI-9) seule, la matrice $[\mathcal{A}]$ de dimension (21 X 21) reste invariante à chaque itération.

Le produit matriciel $[D]_k [\mathcal{A}]$ est calculé à chaque itération; il est stocké dans la matrice $[STO]$ de dimension (168,21) = (NE* 21,21).

On a alors :

(VI-10) $$[STO]_k = [D]_k [\mathcal{A}] \quad , \quad k = 1,2,3,4,5,6,7,8 .$$

$$\underset{(168,21)}{[STO]} = \begin{bmatrix} [STO]_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ [STO]_8 \end{bmatrix}$$

par (VI-10) on peut écrire les relations (VI-8) et (VI-9) respectivement par :

(VI-11) $$\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \left[DLG(\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h})\right]_j \cdot \left[STD\right]_j \left[\lambda\right]_j \right\} ; \alpha = 1,2,3$$

(VI-12) $$p^{\ell}_{\gamma h} = \sum_{k=1}^{NE} \left\{ \left[DLG(p^{\ell}_{\gamma h})\right] \left[STD\right]_k \left[\lambda\right]_k \right\} ; \gamma = 1,2,3$$

on pose également :

$$\left[DLG(\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h})\right]_j \cdot \left[STD\right]_j = \left[DU_\alpha\right]_j$$

et

$$\left[DLG(p^{\ell}_{\gamma h})\right]_k \left[STD\right]_k = \left[DP_\gamma\right]_k$$

et l'on obtient finalement :

(VI-13) $$\left[\begin{array}{l} \tilde{u}^{\ell}_{\alpha h} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \left[DU_\alpha\right]_j \left[\lambda\right]_j \right\} \\ \\ \alpha = 1,2,3 \end{array}\right.$$

(VI-14) $$\left[\begin{array}{l} p^{\ell}_{\gamma h} = \sum_{k=1}^{NE} \left\{ \left[DP_\gamma\right]_k \left[\lambda\right]_k \right\} \\ \\ \gamma = 1,2,3 \end{array}\right.$$

Les matrices $\left[DU_\alpha\right]_k$, $\left[DP_\gamma\right]_k$ sont de dimension (1 x 21).

Les composantes (λ_i), $i = 1, 2, 3$ de la matrice $[\lambda]$ donnée par (IV-4-6-3) pour chaque triangle par (VI-15).

(VI-15)

Element 1	Element 2
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\,x$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(x+y\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-y\right)$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-x\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-y\right)$ $\lambda_3(x,y) = y/8$
Element 3	**Elément 4**
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-y-1\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-1/2\right)$ $\lambda_3(x,y) = y/8$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(x+y-1\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-x\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-y\right)$
Element 5	**Elément 6**
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-1\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-x+y\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-y\right)$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}-x\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-y-1\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\,y$.

Elément 7	Elément 8
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(2-x-y)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}(x-3/2)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}y$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(x-y-1)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}(2-x)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}-y)$
Elément 9	**Elément 9**
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(1-x-y)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}x$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(y-1/2)$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(x+y-1)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}-x)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}-y)$
Elément 10	**Elément 11**
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(x+y-1)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}-x)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2}-y)$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(x-1/2)$ $\lambda_2(x,y) = 1/8(y-x)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(1-y)$
Elément 12	**Elément 13**
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(1-x)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}(x-y)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(y-1/2)$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}(2-x-y)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}(x-1)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}(y-1/2)$

Elément 14	Elément 15
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(x+y-2\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}-x\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-y\right)$	$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-3/2\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-x+y\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\left(1-y\right)$
Elément 16	
$\lambda_1(x,y) = \frac{1}{8}\left(2-x\right)$ $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{8}\left(x-y+1\right)$ $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{8}\left(y-1/2\right)$.	

VI-16.- Prise en compte des conditions aux limites

Dans le cas de notre application, elles sont données par (VI-50). En fait on donne les degrés de liberté sur les bords x et y pour $\tilde{u}^{\ell}_{1h}$, $\tilde{u}^{\ell}_{2h}$ et $\tilde{u}^{\ell}_{3h}$ respectivement (p^{ℓ}_{1h}, p^{ℓ}_{2h} et p^{ℓ}_{3h}) par (IV-9-2). On a :

sur le bord $x = 0$; $x = L$.

0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0

$\to [DLG(\tilde{u}^{\ell}_{3h})]$

$\to [DLG(\tilde{u}^{\ell}_{1h})]$

; $[DLG(\tilde{u}^{\ell}_{2h})] = [DLG(\tilde{u}^{\ell}_{1h})]$ respectivement :
$[DLG(p^{\ell}_{2h})] = [DLG(p^{\ell}_{1h})]$.

sur le bord $y = \mu_1$ et $y = \mu_2$.

0	0	0	-	-	-	-	-	-	.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0

1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0

$\to [DLG(\tilde{u}^{\ell}_{1h})]$

$\to [DLG(\tilde{u}^{\ell}_{2h})]$

$[DLG(\tilde{u}^{\ell}_{2h})] = [DLG(\tilde{u}^{\ell}_{3h})]$, respectivement $([DLG(p^{\ell}_{2h}) = [DLG(p^{\ell}_{3h})]$.

Soit δ l'application de I_a dans I où $I_a \subset \mathbb{N}$; $I \subset \mathbb{N}$, avec $\mathrm{card}\, I_a = \mathrm{card}\, I$.

$$i_r \longrightarrow \delta(i_r) = r \in I .$$

i_r : signifie élément i de rang r dans I_a.

Dans le cas de notre maillage

$$I_a = \{1, 2, 7, 8, 9, 10, 15, 16\}$$

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

et :

$$\delta(1_1) = 1$$

$$\delta(2_2) = 2$$

$$\delta(7_3) = 3$$

$$\delta(8_4) = 4$$

$$\vdots$$

$$\delta(16_8) = 8 \, .$$

L'application δ renumerote les éléments de la triangulation. Connaissant les coordonnées des sommets et les degrés de liberté suivant les bords $(x = 0 \, ; \, x = L)$, $(y = \mu_1 \, , \, y = \mu_2)$, on peut calculer $\tilde{\mu}^{\ell}_{\alpha h}$ (respectivement $p^{\ell}_{\gamma h}$) pour α , γ = 1, 2, 3 relatifs aux bords x et y par (VI-16) et (VI-17).

$$\text{(VI-16)} \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{\mu}^{\ell}_{\alpha h} = \displaystyle\sum_{i=1}^{Mex} \Big\{ [DX_\alpha][D]_i [A][\lambda]_i \Big\} + \sum_{k=1}^{ney} \Big\{ [DY_\alpha][D]_k [A][\lambda]_k \Big\} \\ \\ \alpha = 1, 2, 3 \\ \\ \end{array} \right.$$

$$
\text{(VI-17)}\quad
\begin{cases}
P^{\ell}_{\gamma h} = \sum_{i=1}^{mex} \left\{ [DX_{\gamma}][D]_i[\mathcal{A}][\lambda]_i \right\} + \sum_{k=1}^{mey} \left\{ [DY_{\gamma}][D]_k[\mathcal{A}][\lambda]_k \right\} \\
\gamma = 1,\ 2,\ 3
\end{cases}
$$

où mex est le nombre d'éléments situés sur le bord x

mey est le nombre d'éléments situés sur le bord y .

On stocke à nouveau les produits matriciels dans la matrice $[D]_i[\mathcal{A}]$ définie en (VI-10).

Les relations définies par (VI-16) et (VI-17) s'écrivent respectivement par (VI-18) et (VI-19).

$$
\text{(VI-18)}\quad
\begin{cases}
\tilde{\mathcal{M}}^{\ell}_{\alpha h} = \sum_{i=1}^{mex} \left\{ [DX_{\alpha}][STD]_i[\lambda]_i \right\} + \sum_{k=1}^{mey} \left\{ [DY_{\alpha}][STD]_k[\lambda]_k \right\} \\
\alpha = 1,\ 2,\ 3
\end{cases}
$$

$$
\text{(VI-19)}\quad
\begin{cases}
P^{\ell}_{\gamma h} = \sum_{i=1}^{mex} \left\{ [DX_{\gamma}][STD]_i[\lambda]_i \right\} + \sum_{k=1}^{mey} \left\{ [DY_{\gamma}][STD]_k[\lambda]_k \right\} \\
\gamma = 1,\ 2,\ 3.
\end{cases}
$$

Les relations définies par (VI-18) et (VI-19) s'écrivent respectivement par (VI-20) et (VI-21).

(VI-20)
$$\left[\begin{array}{l} \tilde{u}^{l}_{\alpha h} = \sum_{d=1}^{nex}\left\{[DU_\alpha X]_d [\lambda]_d\right\} + \sum_{k=1}^{ney}\left\{[DU_\alpha Y]_k [\lambda]_k\right\} \\ \\ \alpha = 1, 2, 3 \end{array}\right.$$

(VI-21)
$$\left[\begin{array}{l} p^{l}_{\gamma h} = \sum_{d=1}^{nex}\left\{[DU_\gamma X]_d [\lambda]_d\right\} + \sum_{k=1}^{ney}\left\{[DU_\gamma Y]_k [\lambda]_k\right\} \\ \\ \gamma = 1, 2, 3. \end{array}\right.$$

Les matrices colonnes $[DU_\alpha X]$ et $[DU_\gamma Y]$ pour α, γ = 1, 2, 3 sont données en annexe.

Exemple numérique

Pour $e^{l}_{h} = 1.e\text{-}02$ les composantes du champ de déplacement données par les relations (VI-13) respectivement (VI-14) et en tenant compte des conditions aux limites : relations (VI-20) et (VI-21) sont :

(VI-22)
$$\left[\begin{array}{l} \tilde{u}^{l}_{\alpha h} = \sum_{k=1}^{NE}[DU_\alpha]_k [\lambda]_k + \sum_{i=1}^{nex} [DU_\alpha X]_i [\lambda]_i + \sum_{d=1}^{ney}[DU_\alpha Y]_d [\lambda]_d \; ; \\ \\ \alpha = 1, 2, 3 \end{array}\right.$$

respectivement

(VI-23)
$$\begin{cases} p_{\gamma h}^{\ell} = \sum_{k=1}^{NE} [DP_\gamma]_k [\lambda]_k + \sum_{i=1}^{nex} [DU_\gamma X]_i [\lambda]_i + \sum_{j=1}^{ney} [DU_\gamma Y]_j [\lambda]_j \,) \\ \\ \gamma = 1,\ 2,\ 3\ . \end{cases}$$

Les éléments situés sur le bord x sont : T_1 , T_4 , T_5 et T_8 ; ceux situés sur le bord y sont : T_2 , T_3 , T_6 et T_7.

D'après (VI-22) respectivement (VI-23) on a :

$$\tilde{u}_{1h}^{\ell} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^t[DU_1]_k [\lambda]_k \right) + {}^t[DU_1X] \left\{ [\lambda]_1 + [\lambda]_4 + [\lambda]_5 + [\lambda]_8 \right\} + {}^t[DU_1Y] \cdot \left\{ [\lambda]_2 + [\lambda]_3 + [\lambda]_6 + [\lambda]_7 . \right\}$$

mais $\quad {}^t[DU_1Y] = [0\ 0 \cdots\cdots\ 0]$

et
$$\boxed{\tilde{u}_{1h}^{\ell} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^t[DU_1]_k [\lambda]_k \right) + \left({}^t[DU_1X]\ [\lambda SX] \right)}$$

où $\quad [\lambda SX] = [\lambda]_1 + [\lambda]_4 + [\lambda]_5 + [\lambda]_8$

$$\tilde{u}^{\ell}_{2h} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^{t}[DU2]_{k}[\lambda]_{k}\right) + {}^{t}[DU1X]\left\{[\lambda]_{1} + [\lambda]_{4} + [\lambda]_{5} + [\lambda]_{8}\right\} + $$

$$+ {}^{t}[DU2Y]\left\{[\lambda]_{2} + [\lambda]_{3} + [\ ]_{6} + [\lambda]_{7}\right.$$

$$\boxed{\tilde{u}^{\ell}_{2h} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^{t}[DU2]_{k}[\lambda]_{k}\right) + {}^{t}[DU1X][\lambda SX] + {}^{t}[DU2Y][\lambda SY]}$$

où $$[\lambda SY] = \left([\lambda]_{2} + [\lambda]_{3} + [\lambda]_{6} + [\lambda]_{7}\right)$$

et $$[DU1X] = [DU2X].$$

$$\tilde{u}^{\ell}_{3h} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^{t}[DU3]_{k}[\lambda]_{k}\right) + {}^{t}[DU3X][\lambda SX] + {}^{t}[DU2Y][\lambda SY]$$

avec

$$[DU2Y] = [DU3Y]$$

$$\boxed{p^{\ell}_{1h} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^{t}[DP1]_{k}[\lambda]_{k}\right) + {}^{t}[DU1X][\lambda SX]}$$

$$\boxed{p^{\ell}_{2h} = \left(\sum_{k=1}^{NE} [DP2]_{k}[\lambda]_{k}\right) + {}^{t}[DU1X][\lambda SX] + {}^{t}[DU2Y][\lambda SY]}$$

$$\boxed{p^{\ell}_{3h} = \left(\sum_{k=1}^{NE} {}^{t}[DP3]_{k}[\lambda]_{k}\right) + {}^{t}[DU3X][\lambda SX] + {}^{t}[DU2Y][\lambda SY]}$$

les matrices $[DU\alpha]$, $\alpha = 1, 2, 3$, $[DUiX]$ et $[DUiY]$ sont données en annexe.

On donne également en annexe les degrés de liberté globaux $\left[DLG(\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h})\right]$ et $\left[DLG(p^{\ell}_{\gamma h})\right]$ $\alpha, \gamma = 1, 2, 3.$

On trouve pour les composantes $\left(\tilde{u}^{\ell}_{\alpha h}\right)_{\alpha=1,2,3}$ et $\left(p^{\ell}_{\gamma h}\right)_{\gamma=1,2,3}$:

$$\tilde{u}^{\ell}_{1h} \simeq 0$$

$$\tilde{u}^{\ell}_{2h} \simeq 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{\ell}_{3h} = \frac{1}{8^3}\Big(&\left(\tfrac{1}{2}-x\right)(x-y)\,y\left(xy-3x+\tfrac{y}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+(2-x-y)\left(x-3/2\right)y\cdot\Big(\\ &2x^2+3xy+y^2-\tfrac{15x}{2}-\tfrac{11y}{2}+29/4\Big)+(x+y-1)\left(\tfrac{1}{2}-x\right)\left(\tfrac{1}{2}-y\right)\cdot\\ &\cdot\left(2x^2+y^2+3xy-\tfrac{7}{2}x-\tfrac{5}{2}y+3/2\right)+\\ &\left(x-3/2\right)(1-x+y)(1-y)\left(2x^2-y^2-xy-\tfrac{11x}{2}+\tfrac{3}{2}y+4\right)\Big).\end{aligned}$$

$$p^{\ell}_{1h} \simeq 0$$

$$p^{\ell}_{2h} \simeq \tilde{u}^{\ell}_{3h} - \frac{1}{5\times 8^5}(x+y)\left(\tfrac{1}{2}-y\right)^2 x^2$$

$$p^{\ell}_{3h} = \tilde{u}^{\ell}_{3h}.$$

Connaissant $\vec{\tilde{u}}_h^\ell = (\tilde{u}_{\alpha h}^\ell)$, $\alpha = 1,2,3$ et $p_h = (p_{rh}^\ell)_{r=1,2,3}$

on peut alors calculer le gradient de la fonctionnelle j_h en e_h^ℓ $(l=0)$.

VI-24.- Calcul du gradient de la fonctionnelle en .

D'après (V-4-6)

(VI-24-1)
$$\left[\begin{aligned} \nabla j_h(e_h^\ell) = \frac{dj}{de}(e_h^\ell) = \frac{\partial H}{\partial e}(\vec{\tilde{u}}_h^\ell, e_h^\ell, p_h^\ell) = \frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e_h^\ell, \vec{\tilde{u}}_h^\ell, p_h^\ell) \\ + \frac{\partial J_h}{\partial e}(\vec{\tilde{u}}_h^\ell, e_h^\ell) - \frac{\partial \ell_h}{\partial e}(\ ,p_h^\ell). \end{aligned}\right.$$

On calcul explicitement les termes de $\frac{\partial H}{\partial e}(\vec{\tilde{u}}_h^\ell, e_h^\ell, p_h^\ell)$.

D'après (V-4-8-3) et (V-4-8-2) on a :

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}(e_h^\ell, \vec{\tilde{u}}_h^\ell, p_h^\ell) &= \beta R \int_\Omega {}^t\vec{\tilde{U}}_h [S_{ij}]_d (e_h^\ell) P_h \, dx\,dy \\ \frac{\partial \ell_h}{\partial e}(e_h^\ell, p_h^\ell) &= R \int_\Omega {}^tF_d P_h \, dx\,dy = \ell_d(e_h^\ell, p_h) \end{aligned}\right.$$

et
$$\frac{\partial J_h}{\partial e}(\vec{u}_h^\ell, e_h^\ell) = \frac{R}{2} \int_\Omega {}^t\vec{\tilde{U}}_h [S_{ij}]_d (e_h^\ell) \vec{\tilde{U}}_h \, dx\,dy$$

on pose :

$$\boxed{\begin{aligned} &K_c = \beta R \\ &\tilde{u}_{ih,\cdot}^\ell = a_i \quad \text{pour } i = 1,12 \quad (\text{ie} : \tilde{u}_{1h}^\ell = a_1 ; \tilde{u}_{2h} = a_4 \ldots \tilde{u}_{3h,y^2}^\ell = a_{12}). \\ &p_{1h,\cdot}^\ell = b_j \quad \text{pour } j = 1,12 \quad (\text{je} : p_{1h}^\ell = b_1 ; p_{2h}^\ell = b_4 , \ldots p_{3h,y^2}^\ell = b_{12}). \end{aligned}}$$

on a :

$$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}\left(e_h^\ell, \vec{\tilde{u}}_h^\ell, p_h^\ell\right) = K_c \int_\Omega {}^t\vec{\tilde{\mathcal{U}}}_h \, [S\ddot{y}]_d \left(e_i^\ell\right) P_h \, dx \, dy \, .$$

la matrice $[S\ddot{y}]_d(e_h^\ell)$ à éléments réels est donnée dans le cas cylindrique par (V-4-10); les vecteurs $\vec{\tilde{\mathcal{U}}}_h$ et P_h sont donnés par (III-1-20-3).

On pose également :

$${}^tQ^1 = {}^t\vec{\tilde{\mathcal{U}}}_h [S\ddot{y}] \quad \text{et} \quad {}^tQ^1 \vec{\tilde{\mathcal{U}}}_h = Q .$$

$$\left({}^tQ^1\right)_j = \sum_{k=1}^{12} a_k s_{kj} = q_j \quad , \quad j = 1,12$$

et $$Q = \sum_{j=1}^{12} q_j b_j = \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^{12} a_k s_{kj} b_j$$

et $$\frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}\left(e_h^\ell, \vec{\tilde{u}}_h^\ell, p_h^\ell\right) = K_c \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^{12} s_{kj} \int_\Omega a_k b_j \, dx \, dy \, .$$

on pose $$c_{kj} = \int_\Omega a_k b_j \, dx \, dy \quad ; \quad k,j = 1,12 \quad \text{et}$$

(VI-24-2) $$\left[\; \frac{\partial \tilde{a}_h}{\partial e}\left(e_h^\ell, \vec{\tilde{u}}_h^\ell, p_h^\ell\right) = K_c \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^{12} s_{kj} c_{kj} \right.$$

un calcul analogue donne pour $\frac{\partial J_h}{\partial e}\left(\vec{\tilde{u}}_h^\ell, e_h^\ell\right)$ et $\frac{\partial \ell_h}{\partial e}\left(e_i^\ell, p_h^\ell\right)$:

(VI-24-3) $$\left[\; \frac{\partial J_h}{\partial e}\left(\vec{\tilde{u}}_h^\ell, e_h^\ell\right) = \frac{R}{2} \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^{12} s_{kj} t_{kj} \right.$$

où :
$$t_{kj} = \int_\Omega a_k a_j \, dx\, dy \quad ; \quad k,j = 1,12$$

$$\frac{\partial \ell_h}{\partial e}(e_h^\ell, p_h^\ell) = R \sum_{i=1}^{12} \int_\Omega F_i b_i \, dx\, dy$$

(VI-24-4)
$$\left[\frac{\partial \ell_h}{\partial e}(e_h^\ell, p_h^\ell) = R \sum_{j=1}^{12} \xi_j \right.$$

où :
$$\xi_j = \int F_j b_j \, dx\, dy \quad ; \quad j = 1,12$$

Finalement le gradient de j_h en e_h^ℓ définis en (VI-24-1) s'écrit :

$$\nabla j_h(e_h^\ell) = Kc \sum_{k=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} s_{kj} c_{kj} + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} s_{kj} t_{kj} - R \sum_{j=1}^{12} \xi_j$$
$$= \sum_{k=1}^{12} \sum \left(Kc\, s_{kj} c_{kj} + \frac{R}{2} s_{kj} t_{kj} \right) - R \sum_{j=1}^{12} \xi_j$$

(VI-24-5)
$$\left[\nabla j_h(e_h^\ell) = \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^{12} s_{kj} \left(Kc\, c_{kj} + \frac{R}{2} t_{kj} \right) - R \sum_{j=1}^{12} \xi_j \right.$$

les c_{kj} , t_{kj} et ξ_j sont calculées une fois pour toute (k, j = 1, 12).

Dans le cas de notre application les c_{kj} sont nuls pour k = 1, 6 et j = 1, 12; et :

k = 7, 12; j = 1, 3 .

Soit un total de 90 éléments : (6 X 12 + 6 X 3). Les éléments $c_{kj} \neq 0$ sont pour k = 7, 12 et j = 4,12 soit : 6 X 9 = 54.

* Les t_{kj} non nuls sont pour k = 7, 12; j = 7, 12 soit 6 x 6 = 36.
* Les z_j non nuls sont : z_4 et z_j pour j = 7, 9.

Soit un total de 4 éléments.

Le calcul explicite des c_{kj}, t_{kj} et z_j a donné :

<u>pour k = 7, 12; j = 4, 12</u>

$c_{7,4} = 2.5$; $c_{7,5} = 9.0$; $c_{7,6} = 0.$; $c_{7,7} = 2.5$; $c_{7,8} = 9.0$;

$c_{7,9} = 0.$; $c_{7,10} = 0.$; $c_{7,11} = 0.$; $c_{7,12} = 0.$

$c_{8,4} = 9.$; $c_{8,5} = 1.2$; $c_{8,6} = 0.$; $c_{8,7} = 9.0$; $c_{8,8} = 7.2$;

$c_{8,9} = 0.$; $c_{8,10} = 42.$; $c_{8,11} = 0.$; $c_{8,12} = 0.$

$c_{9,k} = 0. \quad \forall k = 4, 12.$

$c_{10,4} = 1.9$; $c_{10,5} = 42.$; $c_{10,6} = 0.$; $c_{10,7} = 1.9$; $c_{10,8} = 42.$;

$c_{10,9} = 0.$; $c_{10,10} = 255.3$; $c_{10,11} = 0.$; $c_{10,12} = 0.$

$c_{11,k} = 0. \quad \forall k = 4, 12.$

$c_{12,k} = 0 \quad \forall k = 4, 12.$

pour k = 7, 12; j = 7, 12

$t_{7,7} = 2.5$; $t_{7,8} = 9.$; $t_{7,9} = 0.$; $t_{7,10} = 1.9$; $t_{7,11} = 0.$

$t_{7,12} = 0.$

$t_{8,7} = 9.$; $t_{8,8} = 7.2$; $t_{8,9} = 0.$; $t_{8,10} = 42.$; $t_{8,11} = 0.$; $t_{8,12} = 0.$

$t_{9,k} = 0. \quad \forall k = 7,12$

$t_{10,7} = 1.9$; $t_{10,8} = 42.$; $t_{10,9} = 0.$; $t_{10,10} = 255.3$; $t_{10,11} = 0.$; $t_{10,12} = 0.$

$t_{i,k} = 0 \quad \forall i = 9,12$ et $k = 7,12$.

pour j = 4, 7, 8, 9.

ζ_4 = 9019. ; ζ_7 = - 48.3; ζ_8 = 0. ; ζ_9 = 0 .

Le calcul du $\nabla j_h(e_h^\ell)$ se fait par sous-programme.

VI.25.- *L'espace discret*

$$E_{ad}^h = \left\{ 0 < \alpha_1 \le e_i^{\ell+1} \le \alpha_2 \ ; \ |e_{i+1}^{\ell+1} - e_i^{\ell+1}| \le hC \ ; \ P_0 = 2\pi R \int_0^L e_i^{\ell+1} dx \quad \text{pour} \quad 1 \le i \le n \right\}$$

où :

$$\begin{cases} e_{i+1}^{\ell+1} = e^{\ell+1}(x_{i+1}) \\ h = x_{i+1} - x_i \end{cases} \qquad 1 \le i \le n .$$

Le domaine linéaire E_{ad}^h s'écrit :

$$\text{(VI-25-1)} \quad \left[\begin{array}{lll} e_i^{l+1} & \leq \alpha_2 & (1) \\ e_i^{l+1} & \geq \alpha_1 & (2) \\ -e_i^{l+1} + e_{i+1}^{l+1} & \leq hc & (3) \\ e_i^{l+1} - e_{i+1}^{l+1} & \leq hc & (4) \\ e_i^{l+1} & = \frac{P_0}{2\pi R L} & (5) \end{array}\right. \quad ; \; 1 \leq i \leq n$$

On peut écrire également le domaine $\theta_{i\mu}^{l}$ par :

$$\text{(VI-25-2)} \quad \left[\begin{array}{ll} e_i^{l+1} \leq \mu + e_i^{l} & (6) \\ -e_i^{l+1} \leq \mu - e_i^{l} & (7) \end{array}\right. \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

Le problème d'optimisation linéaire s'écrit par (VI-26).

$$\text{(VI-26)} \quad \left[\begin{array}{l} \mathrm{Min}\left(\nabla j_h(e_i^{l}),\, e_i^{l+1} - e_i^{l}\right) \\ e_i^{l+1},\, e_i^{l} \in D_L \end{array}\right.$$

où : $D_L = E_{ad}^{h} \cap \theta_{i\mu}^{l}$

La résolution du programme linéaire (VI-26) se fera par la méthode simpliciale (cas général ie : $Ax \geq b$, $x \geq 0$).

La formulation standard du programme linéaire (VI-26) s'écrit :

(VI-26-1)
$$\left[\begin{array}{l} \text{Min}\left\{\left(\nabla j_h(e_i^{\ell}),\, e_i^{\ell+1}-e_i^{\ell}\right)+\lambda\sum_{j\in J} va_j\right\} \\ e_i^{\ell},\, e_i^{\ell+1},\, va_j \in D_{LS} \end{array}\right.$$

J = {ensemble des indices relatifs aux variables artificielles}

va_j : variable artificielle d'indice j .

D_{LS} : domaine linéaire standard : c'est le domaine D_L auquel on a rajouté les variables d'écarts contraintes (1), (3), (4), (6) et (7); les variables artificielles contraintes (2) et (5).

λ : coefficient réel très grand de l'ordre de 10 fois les coefficients des $e_i^{\ell+1}$.

Le programme linéaire (VI-26-1) s'écrit également (VI-26-2).

(VI-26-2)
$$\left[\begin{array}{l} -\text{Max}-\left\{\left(\nabla j_h(e_i^{\ell}),\, e_i^{\ell+1}-e_i^{\ell}\right)+\lambda\sum_{j\in J} va_j\right\} \\ e_i^{\ell},\, e_i^{\ell+1},\, va_j \in D_{LS} \end{array}\right.$$

Le problème d'optimisation linéaire (VI-26-2) étant résolu, soit $e_h^{\ell+1}$ sa solution optimale.

On résoud alors le problème de minimisation unidimensionnelle

(VI-27)
$$\left[\begin{array}{l} \text{Min } j_h(e_h) \\ e_h \in \left[e_h^{\ell},\, e_h^{\ell+1}\right] \end{array}\right.$$

par Armijo.

où : $$\dot{j}_h(e_h) = \frac{R}{2} \int_{\Omega} {}^t\tilde{\vec{u}}_h \, [Sij](e_h) \, \tilde{\vec{u}}_h \, dx\,dy$$

La matrice $[Sij](e_h)$ est donnée par (III-4-2) dans le cas de coques cylindriques.

On a également :

$$\dot{j}_h(e_h) = \frac{R}{2} \sum_{k=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} s_{kj}(e_h)\, t_{jk}$$

où $$t_{kj} = \int_{\Omega} a_k q_j \, dx\,dy \qquad k\,,j = 1,\ 12$$

les t_{jk} étant déjà été calculés pour le gradient de $\dot{j}_h$.

Le problème (VI-27) s'écrit alors :

(VI-27-1). $$\left[\begin{array}{l} \text{Min} \ \dfrac{R}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} s_{kj}(e_h)\, t_{jk} \\ e_h \in \left[e_h^{\ell},\ e_h^{\ell+1}\right]. \end{array}\right.$$

CONCLUSION

L'exemple ainsi traité n'est qu'un cas particulier. Les calculs sont assez volumineux et nécessitent beaucoup d'espace mémoire donc de temps sur ordinateur. Le lecteur pourra s'en convaincre depuis le chapitre IV (mise en oeuvre numérique). A l'évidence une analyse objective voire optimale des calculs et de stockage s'impose.

Il serait alors souhaitable de traiter plusieurs applications pour pouvoir tirer des conclusions sur les résultats du principe méthodologique employé. Suivant le même principe on pourrait éventuellement envisager d'optimiser d'autres paramètres et traiter de grandes déformations pour l'épaisseur.

ANNEXE

```
c     *************************************************************
c     les matrices ab,or representent respectivement les abscisses et
c     ordonnees des sommets de chaque triangle
c     les matrices x et y : les coordonnees des noeuds d'integration
c     les matrices l1,l2,l3 : les coordonnees barycentriques
c     pe : est l'epaisseur de la coque
c     E  : est le module de young
c     mu : est le coefficient de poisson
c     *************************************************************
        dimension ab(8,3),or(8,3),x(8,20),y(8,20),zt(63,63),ztd(63,63)
       dimension tla(12,63),xa(3),yo(3),s(12,12),sd(12,12),a(21,21)
       dimension d(21,21),f(12),fd(12),pm1(63,12),pm2(63,12),pf1(63,63)
       dimension pf2(63,63),bu(63),bp(63),pv1(63,63),pv2(63,63),bvu(63)
       dimension bvp(63),yt(63),ytd(63),zs(63,63),hu(63,63),hp(63,63)
       dimension h1(504,504),h2(504,504),b1(504),b2(504)
        dimension da(21,21),db(63,63),tdb(63,63)
        dimension c1(504,504),c2(504,504),tc1(504,504),tc2(504,504)
        dimension u(504),p(504),v(504),vp(504)
       real      l1(20),l2(20),l3(20),la(63,12)
       real      mu,ld
          do 600 i=1,504
          do 600 j=1,504
          h1(i,j)=0.
 600      h2(i,j)=0.
c     *************************************************************
c     construction des coordonnees des sommets de chaque triangle
c     *************************************************************
        ab(1,1)=0.
        ab(1,2)=1.
        ab(1,3)=0.
        ab(2,1)=1.
        ab(2,2)=0.
        ab(2,3)=1.
        or(1,1)=0.
        or(1,2)=0.
        or(1,3)=1.
        or(2,1)=1.
        or(2,2)=1.
        or(2,3)=0.
        k=0
        do 1 i=3,4
        k=k+1
        do 2 j=1,3
        ab(i,j)=1.+ab(k,j)
  2     or(i,j)=or(k,j)
  1     continue
        lk=0
        do 3 i=5,8
        lk=lk+1
        do 4 j=1,3
        ab(i,j)=ab(lk,j)
  4     or(i,j)=1.+or(lk,j)
  3     continue
c      *************************************************************
c      fin de construcion des coordonnees des sommets
c      *************************************************************
c      contruction de la matrice a
c      *************************************************************
        do 5 i=1,21
        do 5 j=1,21
```

```
5     a(i,j)=0.
      do 6 i=1,9
6     a(i,i)=4.
      do 7 i=10,15
7     a(i,i)=2.
      do 8 i=16,18
8     a(i,i)=-2.
      do 9 i=19,21
9     a(i,i)=64.
      a(1,4)=20.
      a(1,5)=20.
      a(1,10)=40.
      a(1,11)=40.
      a(1,16)=80.
      a(1,20)=60.
      a(1,21)=60.
      a(2,6)=20.
      a(2,7)=20.
      a(2,12)=40.
      a(2,13)=40.
      a(2,17)=80.
      a(2,19)=60.
      a(2,21)=60.
      a(3,8)=20.
      a(3,9)=20.
      a(3,14)=40.
      a(3,15)=40.
      a(3,18)=80.
      a(3,19)=60.
      a(3,20)=60.
      a(4,10)=16.
      a(4,16)=16.
      a(4,20)=34.
      a(4,21)=-20.
      a(5,11)=16.
      a(5,16)=16.
      a(5,20)=34.
      a(5,21)=-20.
      a(6,12)=16.
      a(6,17)=16.
      a(6,19)=-20.
      a(6,21)=34.
      a(7,14)=16.
      a(7,17)=16.
      a(7,19)=34.
      a(7,21)=-20.
      a(8,14)=16.
      a(8,18)=16.
      a(8,19)=34.
      a(8,20)=-20.
      a(9,15)=16.
      a(9,18)=16.
      a(9,19)=-20.
      a(9,20)=34.
      a(10,16)=2.
      a(10,20)=3.
      a(10,21)=-2
      a(11,16)=2.
      a(11,20)=-2
      a(11,21)=3.
```

```
      a(12,17)=2.
      a(12,19)=-2.
      a(12,21)=3.
      a(13,17)=2.
      a(13,19)=3.
      a(13,21)=-2.
      a(14,18)=2.
      a(14,19)=3.
      a(14,20)=-2.
      a(15,18)=2.
      a(15,19)=-2.
      a(15,20)=3.
      a(16,20)=2.
      a(16,21)=2.
      a(17,19)=2.
      a(17,21)=2.
      a(18,19)=2.
      a(18,20)=2.
c     ****************************************************************
c     fin de construction des elements de la matrice a
c     ****************************************************************
      xp=20.
      e=0.33
      mu=0.3
      m=21
      n=63
      r=20.
      pe=1./10.
      s1=pe*pe
      s2=s1*pe
      s3=s2*s1
      s4=s1*s1
      s5=r*r
      s6=s5*r
      s7=mu/r
      s8=pe+s2/(12.*s5)
      s9=1.+s2/(4.*s5)
      ld=40.
      qp=1./20.
      ba=e/(1.-mu*mu)
c     ************************************************************
c     initialisation des matrices s et sd
c     ************************************************************
      do 15 i=1,12
      do 15 j=1,12
      s(i,j)=0.
 15   sd(i,j)=0.
c     ************************************************************
c     calcul des elements non des matrices s et sd
c     ************************************************************
      s(1,2)=s7*s8
      s(2,2)=2.*s8
      sd(1,2)=s7*s9
      sd(2,2)=2.*s9
      s(2,6)=2.*s7*s8
      s(2,7)=((-2.*pe)/r)*(1.+mu)
      s(2,10)=s2/(6.*r)
      s(2,12)=mu*s2/(6.*s5)
      sd(2,6)=2.*s7*s9
      sd(2,7)=(-2*(1.+mu))/r
```

```
      sd(2,10)=s1*2./r
      sd(2,12)=(mu*s1)/(2.*s5)
      s(5,5)=4.*(1.-mu)*s8
      s(5,6)=s2/(12.*s6)
      s(5,9)=-(1.-mu)*s2/(3.*s5)
      s(5,11)=-s2*(1.-mu)*(1.+r)/(3.*s5)
      sd(5,5)=4.*(1.-mu)*s9
      sd(5,6)=s1/(2.*s6)
      sd(5,9)=-(1.-mu)*s1/s5
      sd(5,11)=-s1*(1.-mu)*(1.+r)/s5
      s(6,6)=(2.*mu)*(pe-(2./s5)-s3/(80.*s6))+(1./r)*s8
      s(6,7)=(-pe/s5)*(r+2.*mu)
      s(6,9)=(s2/s6)*((s1/(80.*s5))-1./12.)
      s(6,10)=(mu*s2)/(6.*s5)
      s(6,11)=(s2/(4.*s5))*((1./(3.*s5))-(1./3.)+(s1/(20.*s5)))
      s(6,12)=s2/(12.*r)
      sd(6,6)=(2.*mu)*(1.-(2./s5)-(s4/(16.*s6)))+(1./r)*s9
      sd(6,7)=(-1/s5)*(r+2.*mu)
      sd(6,9)=((3.*s1)/s6)*((-1/12.)+pe/(40.*s5))
      sd(6,10)=(mu*s1)/(2.*s5)
      sd(6,11)=(3./(4.*s5))*((1./(3.*s5))-(1./3)+pe/(10.*s5))
      sd(6,12)=s1/(4.*r)
      s(7,7)=(1./s5)*(pe-s2/(4.*s5))+((2./s5)*s8)
      s(7,10)=((s1*mu)/2.)*(1.+1./s5)
      s(7,12)=s2/(12.*s6)
      sd(7,7)=(1./s5)*(1.-(3.*s1)/(4.*s5))
      sd(7,10)=(pe*mu)*(1.+1./s5)
      sd(7,12)=s1/(4.*s6)
      s(9,9)=(1.-mu)*(s2/(3.*s5))
      s(9,11)=(((1.-mu)*s2)/r)*((1./(3.*r))+(1./3.)-(s1/(20.*s5)))
      sd(9,9)=(1.-mu)*(s1/s5)
      sd(9,11)=(((1.-mu)*3.*s1)/r)*((1./(3.*r))+(1./3.)-pe/(10.*s5))
      s(10,10)=s3/(40.*s5)
      s(10,12)=(mu*s2)/(6.*s5)
      sd(10,10)=s4/(8.*s5)
      sd(10,12)=(mu*s1)/(2.*s5)
      al=1.-mu
      ar=1.+1./s5
      s(11,11)=(2.*al*s2)*(1./(3.*r)+((1./6.)-s1/(40.*s5))*ar)
      sd(11,11)=6*s1*al*(1./(3.*r)+((1./6.)-pe/(20.*s5))*ar)
      s(12,12)=((s2/12.)-(s3/(80.*s5)))*(1./s5)
      sd(12,12)=(1./s5)*((s1/4.)-s4/(16.*r))
      do 16 j=1,12
      do 17 i=j,12
      if(i.eq.j) go to 17
      s(i,j)=s(j,i)
      sd(i,j)=sd(j,i)
 17   continue
 16   continue
c     ***************************************************************
c     fin des calculs des des matrices s et sd
c    ****************************************************************
c     calcul des elements non nuls des matrices lignes f et fd
c     ***********************************************************
      do 100 i=1,12
      f(i)=0.
 100  fd(i)=0.
      q1=pe+s2/(4.*s5)
      q2=s2/s5
      q3=1.+(3.*s1)/(4.*s5)
```

```
      q4=1.+s1/(4.*s5)
      q5=3.*s1/s5
      q6=(pe*mu)/(1.-mu*mu)
      q7=(e*pe)/((12.*s5)*(1.-mu*mu))
      f1=0.
      f2=4.*q6*(ld-xp*xp)*xp
      q8=12.+s1/s5
      f3=q7*(q8*(ld*ld-xp*xp)+(8.*mu*s1)*(ld*ld-3.*xp*xp)+24.*s1*s5)
      f(1)=q1*f1
      f(4)=q1*f2
      f(7)=s8*f3
      f(8)=q2*f1
      f(9)=q2*f2
      fd(1)=q3*f1
      fd(4)=q3*f2
      fd(7)=q4*f3
      fd(8)=q5*f1
      fd(9)=q5*f2
c     ******************************************************************
c      fin des calculs
c     ********************************************************
c     construction des coordonnees des noeuds d'integration
c     ************************************************************
      do 45 i=1,6
      x(1,i)=i/8.
      y(1,i)=1./8.
      x(5,i)=x(1,i)
      y(5,i)=1.+y(1,i)
      j1=8-i
      x(2,i)=j1/8.
      y(2,i)=7./8.
      x(6,i)=x(2,i)
 45   y(6,i)=1.+y(2,i)
      do 46 i=7,11
      m2=i-6
      j2=14-i
      x(1,i)=m2/8.
      y(1,i)=1./4.
      x(5,i)=x(1,i)
      y(5,i)=1.+y(1,i)
      x(2,i)=j2/8.
      y(2,i)=3./4.
      x(6,i)=x(2,i)
 46   y(6,i)=1.+y(2,i)
      do 48 i=12,14
      if(i.eq.14) go to 47
      m3=i-11
      j3=19-i
      x(1,i)=m3/8.
      y(1,i)=3./8.
      x(5,i)=x(1,i)
      y(5,i)=1.+y(1,i)
      x(2,i)=j3/8.
      y(2,i)=5./8.
      x(6,i)=x(2,i)
      y(6,i)=1.+y(2,i)
 47   x(1,i)=1./2.
      y(1,i)=3./8.
      x(2,i)=1./2.
      y(2,i)=5./8.
```

```
      x(5,i)=x(1,i)
      y(5,i)=1.+y(1,i)
      x(6,i)=x(2,i)
      y(6,i)=1.+y(2,i)
48    continue
      do 49 i=15,17
      m4=i-14
      j4=22-i
      x(1,i)=m4/8.
      y(1,i)=1./2.
      x(5,i)=x(1,i)
      y(5,i)=1.+y(1,i)
      x(2,i)=x(1,i)
      y(2,i)=1.+y(1,i)
      x(6,i)=x(2,i)
49    y(6,i)=1.+y(2,i)
      do 50 i=18,19
      m5=i-17
      j5=25-i
      x(1,i)=m5/8.
      y(1,i)=5./8.
      x(5,i)=x(1,i)
      y(5,i)=1.+y(1,i)
      x(2,i)=j5/8.
      y(2,i)=3./8.
      x(6,i)=x(2,i)
50    y(6,i)=1.+y(2,i)
      x(1,20)=1./8.
      y(1,20)=7./8.
      x(5,20)=x(1,20)
      y(5,20)=1.+y(1,20)
      x(2,20)=7./8.
      y(2,20)=1./4.
      x(6,20)=x(2,20)
      y(6,20)=1.+y(2,20)
      do 52 ie=3,4
      do 51 ni=1,20
      je=ie-2
      x(ie,ni)=1.+x(je,ni)
51    y(ie,ni)=y(je,ni)
52    continue
      do 54 ie=7,8
      do 53 nn=1,20
      jj=ie-2
      x(ie,nn)=1.+x(jj,nn)
53    y(ie,nn)=y(jj,nn)
54    continue
c     ************************************************************
c     fin de construction des coordonnees des noeuds d'integration
c     ************************************************************
c     formation des matrices elementaires et des matrices d'assemblage
c     ******************************************************************
      do 70 ne=1,8
      do 71 ns=1,3
      xa(ns)=ab(ne,ns)
71    yo(ns)=or(ne,ns)
c     *******************************************************
      x13=xa(1)-xa(3)
      x21=xa(2)-xa(1)
      x32=xa(3)-xa(2)
```

```
      y12=yo(1)-yo(2)
      y23=yo(2)-yo(3)
      y31=yo(3)-yo(1)
      x12=-x21
      x23=-x32
      x31=-x13
      y21=-y12
      y32=-y23
      y13=-y31
      det=(x13*y23)+(x23*y31)
c     ***********************************************************
c     construction de la matrice d
c     ***********************************************************
      do 72 i=1,21
      do 72 j=1,21
 72   d(i,j)=0.
      do 73 ls=1,3
 73   d(ls,ls)=1.
      d(4,4)=x31
      d(4,5)=x21
      d(5,4)=y31
      d(5,5)=y21
      d(6,6)=x12
      d(6,7)=x32
      d(7,6)=y12
      d(7,7)=y32
      d(8,8)=x23
      d(8,9)=x13
      d(9,8)=y23
      d(9,9)=y13
      d(10,10)=x31*x31
      d(10,11)=x12*x12
      d(10,16)=x23*x23
      d(11,10)=2.*x31*y31
      d(11,11)=2.*x12*y12
      d(11,16)=2.*x23*y23
      d(12,10)=y31*y31
      d(12,11)=y12*y12
      d(12,16)=y23*y23
      d(13,12)=x12*x12
      d(13,13)=x23*x23
      d(13,17)=x31*x31
      d(14,12)=2.*x12*y12
      d(14,13)=2.*x23*y23
      d(14,17)=2.*x31*y31
      d(15,12)=y12*y12
      d(15,13)=x23*x23
      d(15,17)=y31*y31
      d(16,14)=x23*x23
      d(16,15)=x31*x31
      d(16,18)=x12*x12
      d(17,14)=2.*x23*y23
      d(17,15)=2.*x31*y31
      d(17,18)=2.*x12*y12
      d(18,14)=y23*y23
      d(18,15)=y31*y31
      d(18,18)=y12*y12
c     ****************************************************************
c     fin de construction de la matrice d
c     ****************************************************************
```

```
c     calcul des coordonnees barycentriques
c     *******************************************************************
      do 80 l=1,20
      l1(l)=(((x(ne,l)-xa(2))*y23)+((y(ne,l)-yo(2))*x32))/det
      l2(l)=(((x(ne,l)-xa(3))*y31)+((y(ne,l)-yo(3))*x13))/det
      l3(l)=(((x(ne,l)-xa(1))*y12)+((y(ne,l)-yo(1))*x21))/det
c     *******************************************************************
      u1=l1(l)
      u2=l1(l)**2
      u3=l1(l)**3
      u4=u1*u3
      u5=u1*u4
      v1=l2(l)
      v2=v1*v1
      v3=v1*v2
      v4=v1*v3
      v5=v1*v4
      w1=l3(l)
      w2=w1*w1
      w3=w1*w2
      w4=w1*w3
      w5=w1*w4
c      ******************************************************************
c    calcul des elements de la matrice lambda=(LA)
c      ******************************************************************
      do 60 i=1,63
      do 60 j=1,12
 60   la(i,j)=0.
      la(1,1)=u5
      la(2,1)=v5
      la(3,1)=w5
      la(4,1)=u4*w1
      la(5,1)=u4*v1
      la(6,1)=v4*u1
      la(7,1)=v4*w1
      la(8,1)=w4*v1
      la(9,1)=w4*u1
      la(10,1)=u3*w2
      la(11,1)=u3*v2
      la(12,1)=v3*u2
      la(13,1)=v3*w2
      la(14,1)=w3*v2
      la(15,1)=w3*u2
      la(16,1)=u3*v2
      la(17,1)=u1*v3*w1
      la(18,1)=u1*v1*w3
      la(19,1)=u1*v2*w2
      la(20,1)=u2*v1*w2
      la(21,1)=u2*v2*w1
c     ***********************************************************
      la(1,2)=(5.*y23*u4)/det
      la(2,2)=(5.*y31*v4)/det
      la(3,2)=(5.*y12*w4)/det
      la(4,2)=((4.*y23*u3*w1)+(y12*u4))/det
      la(5,2)=((4.*y23*u3*v1)+(y31*u4))/det
      la(6,2)=((y23*v4)+(4.*y31*v3*u1))/det
      la(7,2)=((4.*y31*v3*w1)+(y12*v4))/det
      la(8,2)=((y31*w4)+(4.*y12*w3*v1))/det
      la(9,2)=((y23*w4)+(4.*y12*w3*u1))/det
      la(10,2)=((3.*y23*u2*w2)+(2.*y12*u3*w1))/det
```

```
      la(11,2)=((3.*y23*u2*v2)+(2.*y31*u3*v1))/det
      la(12,2)=((2.*y23*u1*v3)+(3.*y31*v2*u2))/det
      la(13,2)=((3.*y31*v2*w2)+(2.*y12*v3*w1))/det
      la(14,2)=((2.*y31*w3*v1)+(3.*y12*w2*v2))/det
      la(15,2)=((2.*y23*u1*w3)+(3.*y12*w2*u2))/det
      la(16,2)=((3.*y23*u2*v1*w1)+(y31*u3*w1)+(y12*u3*v1))/det
      la(17,2)=((y23*v3*w1)+(3.*y31*u1*w1*v2)+(y12*u1*v3))/det
      la(18,2)=((y23*v1*w3)+(y31*u1*w3)+(3.*y12*u1*v1*w2))/det
      la(19,2)=((y23*v2*w2)+(2.*y31*u1*v1*w2)+(2.*y12*u1*v2*w1))/det
      la(20,2)=((2.*y23*u1*v1*w2)+(y31*u2*w2)+(2.*y12*u2*v1*w1))/det
      la(21,2)=((2.*y23*u1*v2*w1)+(2.*y31*u2*v1*w1)+(y12*u2*v2))/det
c     ******************************************************************
      la(1,3)=(5.*x32*u4)/det
      la(2,3)=(5.*x13*v4)/det
      la(3,3)=(5.*x21*w4)/det
      la(4,3)=((4.*x32*u3*w1)+(x21*u4))/det
      la(5,3)=((4.*x32*u3*v1)+(x13*u4))/det
      la(6,3)=((x32*v4)+(4.*x13*v3*u1))/det
      la(7,3)=((4.*x13*v3*w1)+(x21*v4))/det
      la(8,3)=((x13*w4)+(4.*x21*w3*v1))/det
      la(9,3)=((x32*w4)+(4.*x21*w3*u1))/det
      la(10,3)=((3.*x32*u2*w2)+(2.*x21*u3*w1))/det
      la(11,3)=((3.*x32*u2*v2)+(2.*x13*u3*v1))/det
      la(12,3)=((2.*x32*u1*v3)+(3.*x13*v2*u2))/det
      la(13,3)=((3.*x13*v2*w2)+(2.*x21*v3*w1))/det
      la(14,3)=((2.*x13*w3*v1)+(3.*x21*w2*v2))/det
      la(15,3)=((2.*x32*u1*w3)+(3.*x21*w2*u2))/det
      la(17,3)=((x32*v3*w1)+(3.*x13*u1*v2*w1)+(x21*u1*v3))/det
      la(18,3)=((x32*v1*w3)+(x13*u1*w3)+(3.*x21*u1*v1*w2))/det
      la(19,3)=((x32*v2*w2)+(2.*x13*u1*v1*w2)+(2.*x21*u1*v2*w1))/det
      la(20,3)=((2.*x32*u1*w2*v1)+(2.*x21*u2*v1*w1)+(x13*u2*w2))/det
      la(21,3)=((2.*x32*u1*v2*w1)+(2.*x13*u2*v1*w1)+(x21*u2*v2))/det
      la(16,3)=((3.*x32*u2*w1*v1)+(x13*u3*w1)+(x21*u3*v1))/det
c     ******************************************************************
c     transfert des colonnes 1,2,3 de la en colonnes 4,5,6,7,8,9
c     ******************************************************************
      do 90 jc=1,3
      is=jc+3
      id=jc+6
      do 91 il=1,21
      ir=il+21
      it=il+42
      la(ir,is)=la(il,jc)
 91   la(it,id)=la(il,jc)
 90   continue
c     ************************************************************
c     calcul des elements des colonnes 10,11 et 12
c     ************************************************************
      c21=x21*x21
      c32=x32*x32
      c13=x13*x13
      d23=y23*y23
      d31=y31*y31
      d12=y12*y12
      de=det*det
c     ************************************************************
       la(43,10)=(20.*d23*u3)/de
       la(44,10)=(20.*d31*v3)/de
       la(45,10)=(20.*d12*w3)/de
       la(46,10)=((12.*d23*u2*w1)+(8.*y12*y23*u3))/de
```

```
      la(47,10)=((12.*d23*u2*v1)+(8.*y23*y31*u3))/de
      la(48,10)=((12.*d31*u1*v2)+(8.*y23*y31*v3))/de
      la(49,10)=((12.*d31*v2*w1)+(8.*y31*y12*v3))/de
      la(50,10)=((12.*d12*w2*v1)+(8.*y31*y12*w3))/de
      la(51,10)=((12.*d12*w2*u1)+(8.*y12*y23*w3))/de
      la(52,10)=((6.*d23*u1*w2)+(12.*y12*y23*u2*w1)+(2.*d12*u3))/de
      la(53,10)=((6.*d23*u1*v2)+(12.*y23*y31*u2*v1)+(2.*d31*u3))/de
      la(54,10)=((2.*d23*v3)+(12.*y23*y31*u1*v2)+(6.*d31*u2*v1))/de
      la(55,10)=((6.*d31*v1*w2)+(12.*y31*y12*v2*w1)+(2.*d12*v3))/de
      la(56,10)=((2.*d31*w3)+(12.*y31*y12*v1*w2)+(6.*d12*v2*w1))/de
      la(57,10)=((2.*d23*w3)+(12.*y12*y23*u1*w2)+(6.*d12*u2*w1))/de
      a1=(6.*d23*u1*v1*w1)+(6.*y23*y31*u2*w1)+(6.*y12*y23*u2*v1)
      a2=(6.*d31*u1*v1*w1)+(6.*y23*y31*u2*w1)+(2.*y12*y23*v3)
      a3=(6.*d12*u1*v1*w1)+(6.*y12*y23*v1*w2)+(2.*y23*y31*w3)
      a4=(2.*d31*u1*w2)+(2.*d12*u1*w2)+(4.*y23*y31*v1*w2)
      a5=(2.*d23*v1*w2)+(2.*d12*u2*v1)+(4.*y23*y31*u1*w2)
      a6=(2.*d23*v2*w1)+(2.*d31*u2*w1)+(8.*y23*y31*u1*v1*w1)
      la(58,10)=(a1+(2.*y31*y12*u3))/de
      la(59,10)=(a2+(6.*y31*y12*u1*v2))/de
      la(60,10)=(a3+(6.*y31*y12*u1*w2))/de
      la(61,10)=(a4+(4.*y12*y23*v2*w1)+(8.*y31*y12*u1*v1*w1))/de
      la(62,10)=(a5+(8.*y12*y23*u1*v1*w1)+(4.*y31*y12*u2*w1))/de
      la(63,10)=(a6+(4.*y12*y23*u1*v2)+(4.*y31*y12*u2*w1))/de
c     ***************************************************************
      la(43,11)=(20.*y23*x23*u3)/de
      la(44,11)=(20.*y31*x13*v3)/de
      la(45,11)=(20.*y12*x21*w3)/de
      la(46,11)=((12.*y23*x32*u2*w1)+4.*(y12*x32+y23*x21)*u3)/de
      la(47,11)=((12.*y23*x32*u2*w1)+4.*(y23*x13+y31*x32)*u3)/de
      la(48,11)=((12.*y31*x13*v2*u1)+4.*(y23*x13+y31*x32)*v3)/de
      la(49,11)=((12.*y31*x13*v2*w1)+4.*(y31*x21+y12*x13)*v3)/de
      la(50,11)=((12.*y12*x21*w2*v1)+4.*(y31*x21+y12*x13)*w3)/de
      la(51,11)=((12.*y12*x21*w2*u1)+4.*(y12*x32+y23*x21)*w3)/de
      t1=(6.*y23*x32*u1*w2)+(2.*y12*x21*u3)+6.*(y12*x32+y23*x21)*u2*w1
      t2=(6.*y23*x32*u1*v2)+(2.*y31*x13*u3)+6.*(y23*x13+y31*x32)*u2*v1
      t3=(6.*y31*x13*u2*v1)+(2.*y23*x32*v3)+6.*(y23*x13+y31*x32)*u1*v2
      t4=(6.*y31*x13*v1*w2)+(2.*y12*x21*v3)+6.*(y31*x21+y12*x13)*v2*w1
      t5=(2.*y31*x13*w3)+(6.*y12*x21*v2*w1)+6.*(y31*x21+y12*x13)*v1*w2
      t6=(2.*y23*x32*w3)+(6.*y12*x21*u2*w1)+6.*(y12*x32+y23*x21)*u1*w2
      t7=(6.*y23*x32*u1*v1*w1)+3.*(y23*x13+y31*x32)*u2*w1
      t8=(6.*y31*x13*u1*v1*w1)+3.*(y23*x13+y31*x32)*v2*w1
      t9=(6.*y12*x21*u1*v1*w1)+3.*(y12*x32+y23*x21)*v1*w2
      t10=(2.*y31*x13*u1*w2)+(2.*y12*x21*u1*v2)
      t11=2.*(y23*x13+y31*x32)*v1*w2+2.*(y12*x32+y23*x21)*v2*w1
      t12=(2.*y23*x32*v1*w2)+(2.*y12*x21*u2*v1)
      t13=2.*(y23*x13+y31*x32)*u1*w2+4.*(y12*x32+y23*x21)*u1*v1*w1
      t14=(2.*y23*x32*u2*w1)+(2.*y31*x13*u2*w1)
      t15=4.*(y23*x13+y31*x32)*u1*v1*w1+2.*(y12*x32+y23*x21)*u1*v2
      la(52,11)=t1/de
      la(53,11)=t2/de
      la(54,11)=t3/de
      la(55,11)=t4/de
      la(56,11)=t5/de
      la(57,11)=t6/de
      la(58,11)=(t7+3.*(y12*x32+y23*x21)*u2*v1+(y31*x21+y12*x13)*u3)/de
      la(59,11)=(t8+(y12*x23+y23*x21)*v3+3.*(y31*x21+y12*x13)*u1*v2)/de
      la(60,11)=(t9+(y23*x13+y31*x32)*v2+3.*(y31*x21+y12*x13)*u1*w2)/de
      la(61,11)=(t10+t11+4.*(y31*x21+y12*x13)*u1*v1*w1)/de
      la(62,11)=(t12+t13+2.*(y31*x21+y12*x13)*u2*w1)/de
      la(63,11)=(t14+t15+2.*(y31*x21+y12*x13)*u2*v1)/de
```

```
c     ************************************************************************
      la(43,12)=(20.*c32*u3)/de
      la(44,12)=(20.*c13*v3)/de
      la(45,12)=(20.*c21*w3)/de
      la(46,12)=((12.*c32*u2*w1)+(8.*x21*x32*u3))/de
      la(47,12)=((12.*c32*u2*w1)+(8.*x32*x13*u3))/de
      la(48,12)=((12.*c32*u2*v1)+(8.*x32*x13*v3))/de
      la(49,12)=((12.*c13*v2*w1)+(8.*x13*x21*v3))/de
      la(50,12)=((12.*c21*w2*v1)+(8.*x13*x21*w3))/de
      la(51,12)=((12.*c21*w2*u1)+(8.*x21*x32*w3))/de
      la(52,12)=((6.*c32*u1*w2)+(12.*x21*x32*u2*w1)+(2.*c21*u3))/de
      la(53,12)=((6.*c32*u1*v2)+(12.*x32*x13*u2*v1)+(2.*c13*w3))/de
      la(54,12)=((2.*c32*v3)+(12.*x32*x13*u1*v2)+(2.*c13*u2*v1))/de
      la(55,12)=((6.*c13*v1*w2)+(12.*x13*x21*v2*w1)+(2.*c21*v3))/de
      la(56,12)=((2.*c13*w3)+(12.*x13*x21*v1*w2)+(6.*c21*v2*w1))/de
      la(57,12)=((2.*c32*w3)+(12.*x21*x32*u1*w2)+(6.*c21*u2*w1))/de
      z1=(6.*c32*u1*v1*w1)+(6.*x32*x13*u2*w1)
      z2=(6.*x21*x32*u2*v1)+(2.*x13*x21*u3)
      z3=(6.*c13*u1*v1*w1)+(6.*x13*x21*u1*v2)
      z4=(6.*x32*x13*v2*w1)+(2.*x21*x32*v3)
      z5=(6.*c21*u1*v1*w1)+(6.*x21*x32*v1*w2)
      z6=(2.*x32*x13*w3)+(6.*x13*x21*u1*w2)
      z7=(2.*c13*u1*w2)+(2.*c21*u1*v2)+(4.*x32*x13*v1*w2)
      z8=(4.*x21*x32*v2*w1)+(8.*x13*x21*u1*v1*w1)
      z9=(2.*c32*v1*w2)+(2.*c21*u2*v1)+(8.*x21*x32*u1*v1*w1)
      z10=(4.*x32*x13*u1*w2)+(4.*x13*x21*u2*w1)
      z11=(2.*c32*v2*w1)+(2.*c13*u2*w1)+(8.*x32*x13*u1*v1*w1)
      z12=(4.*x21*x32*u1*v2)+(4.*x13*x21*u2*v1)
      la(58,12)=(z1+z2)/de
      la(59,12)=(z3+z4)/de
      la(60,12)=(z5+z6)/de
      la(61,12)=(z7+z8)/de
      la(62,12)=(z9+z10)/de
      la(63,12)=(z11+z12)/de
c     ************************************************************************
c     fin des calculs des elements de la matrice lambda=la
c     ************************************************************************
c     transposition de la matrice la (tla)
c     ************************************************************************
      do 92 i=1,63
      do 93 j=1,12
 93   tla(j,i)=la(i,j)
 92   continue
c     ************************************************************************
c     calcul du produit matriciel d par a
c     ************************************************************
       do 120 i=1,m
       do 120 j=1,m
       st=0.
       do 121 kk=1,m
 121   st=st+d(i,kk)*a(kk,j)
 120   da(i,j)=st
c     ************************************************************
c     injecton de la matrice da dans la matrice db
c     ************************************************************
       do 122 i=1,n
       do 122 j=1,n
 122   db(i,j)=0.
       li=0
 125   do 123 i=1,21
```

```
      n1=i+li
      do 124 j=1,21
      n2=j+li
 124  db(n1,n2)=da(i,j)
 123   continue
      li=li+21
      if(li.le.42) go to 125
c     ********************************************************
c     transposition de la matrice db sa transposee est tdb
c     ********************************************************
      do 127 i=1,n
      do 127 j=1,n
 127  tdb(i,j)=db(j,i)
c     ********************************************************
c     formation des matrices elementaires zt ztd bu bp
c     ********************************************************
      do 95 i=1,63
      do 95 j=1,63
      g1=0.
      g2=0.
      do 96 kb=1,12
      g1=g1+la(i,kb)*s(kb,j)
 96   g2=g2+la(i,kb)*sd(kb,j)
      pm1(i,j)=g1
 95   pm2(i,j)=g2
c     ***************************
      do 97 i=1,63
      do 97 j=1,63
      g1=0.
      g2=0.
      do 98 kb=1,12
      g1=g1+pm1(i,kb)*tla(kb,j)
 98   g2=g2+pm2(i,kb)*tla(kb,j)
      pf1(i,j)=g1
 97   pf2(i,j)=g2
c     ***************************
      do 99 i=1,63
      o1=0.
      o2=0.
      do 130 j=1,12
      o1=o1+f(j)*tla(j,i)
 130  o2=o2+fd(j)*tla(j,i)
      bu(i)=o1
 99   bp(i)=o2
c     ******************************************************
c      sauvegarde des premiers produits matriciels
c     ******************************************************
      if(l.gt.1) go to 101
      do 102 i=1,63
      do 102 j=1,63
      pv1(i,j)=pf1(i,j)
 102  pv2(i,j)=pf2(i,j)
      do 103 kb=1,63
      bvu(kb)=bu(kb)
 103  bvp(kb)=bp(kb)
        go to 80
 101   do 104 i=1,63
       do 104 j=1,63
       pv1(i,j)=pv1(i,j)+pf1(i,j)
 104   pv2(i,j)=pv2(i,j)+pf2(i,j)
```

```
      do 105 i=1,63
      bvu(i)=bvu(i)+bu(i)
 105  bvp(i)=bvp(i)+bp(i)
 80   continue
c       ************************************************
c       fin de la sommation
c       ************************************************
      do 106 i=1,63
      do 106 j=1,63
      zt(i,j)=pv1(i,j)*qp
 106  ztd(i,j)=pv2(i,j)*qp
      do 107 i=1,63
      yt(i)=bvu(i)*qp
 107  ytd(i)=bvp(i)*qp
c     ***************************************
c     calcul de la somme des deux matrices zt et ztd
c     ***********************************************
      do 108 i=1,63
      do 108 j=1,63
 108  zs(i,j)=zt(i,j)+ztd(i,j)
c     **********************************************
      do 109 i=1,63
      do 109 j=1,63
      g1=0.
      g2=0.
      do 110 kb=1,63
      g1=g1+db(i,kb)*zt(kb,j)
 110  g2=g2+db(i,kb)*ztd(kb,j)
      pv1(i,j)=g1
 109  pv2(i,j)=g2
c     ***********************************
      do 111 i=1,63
      do 111 j=1,63
      g1=0.
      g2=0.
      do 112 kb=1,63
      g1=g1+pv1(i,kb)*tdb(kb,j)
 112  g2=g2+pv2(i,kb)*tdb(kb,j)
      hu(i,j)=g1*det
 111  hp(i,j)=g2*det
c     ***********************************
      do 113 i=1,63
      g3=0.
      g4=0.
      do 114 j=1,63
      g3=g3+yt(j)*tdb(j,i)
 114  g4=g4+ytd(j)*tdb(j,i)
      bu(i)=g3*det
 113  bp(i)=g4*det
c     ***********************************
c     injection des matrices elementaires hu hp dans les matr d'ass
c     h1 et h2
c     ************************************
      if(ne.ge.2) go to 115
      nh=0
      go to 118
 115  nh=nh+63
 118  do 116 i=1,63
      ia=i+nh
      do 117 j=1,63
```

```
      ja=j+nh
      h1(ia,ja)=hu(i,j)
 117  h2(ia,ja)=hp(i,j)
 116  continue
c     *****************************************
c     injection des seconds elementaires dans les seconds membres
c     d'assemblage
c     ***********************************************************
      do 119 ib=1,63
      im=ib+nh
      b1(im)=bu(ib)
 119  b2(im)=bp(ib)
c     ***********************************************************
 70   continue
c     ***********************************************************
c     fin de construction des systemes lineaires
c     ***********************************************************
c     factorisation des matrices h1 et h2
c     ***********************************************************
c     initialisations
c     ***********************************************************
      do 190 i=1,504
      do 190 j=1,504
      c1(i,j)=0.
 190  c2(i,j)=0.
      c1(1,1)=sqrt(h1(1,1))
      c2(1,1)=sqrt(h2(1,1))
      do 200 i=2,63
      c1(i,1)=h1(i,1)/c1(1,1)
 200  c2(i,1)=h2(i,1)/c2(1,1)
c     ***********************************
      do 201 i=2,504
      do 202 j=i,504
        e1=0.
        e2=0.
        e3=0.
        e4=0.
      if(j.eq.i) go to 204
      do 206 l=1,i-1
        e2=e2+c1(i,l)*c1(j,l)
 206    e4=e4+c2(i,l)*c2(j,l)
        go to 203
 204    do 205 k=1,i-1
          e1=e1+c1(i,k)*c1(i,k)
 205      e3=e3+c2(i,k)*c2(i,k)
          c1(i,i)=sqrt(abs(h1(i,i)-e1))
          c2(i,i)=sqrt(abs(h2(i,i)-e3))
          go to 202
 203      c1(j,i)=(h1(j,i)-e2)/c1(i,i)
          c2(j,i)=(h2(j,i)-e4)/c2(i,i)
 202  continue
 201  continue
c     ***********************************************************
c     transposition des matrices c1 et c2
c     ***********************************************************
      do 400 i=1,504
      do 401 j=1,504
        tc1(i,j)=c1(j,i)
 401    tc2(i,j)=c2(j,i)
 400  continue
```

```
c      ***********************************************************
c      resolution des deux systemes lineaires
c      c1tc1u=b1 et c2tc2p=b2
c      ***********************************************************
c      resolution descente
c      ***********************************************************
       v(1)=b1(1)/(c1(1,1)*ba)
       vp(1)=b2(1)/(c2(1,1)*ba)
       do 300 i=2,504
       r1=0.
       r2=0.
       do 301 k=1,i-1
       r1=r1+c1(i,k)*v(k)
 301   r2=r2+c2(i,k)*vp(k)
       v(i)=(b1(i)-r1)/(c1(i,i)*ba)
 300   vp(i)=(b2(i)-r2)/(c2(i,i)*ba)
c      ***********************************************************
c      resolution remontee
c      ***********************************************************
       u(504)=v(504)/tc1(504,504)
       p(504)=vp(504)/tc2(504,504)
        do 500 i=1,503
           ix=i-1
           iy=503-ix
           r1=0.
           r2=0.
        do 501 k=iy+1,504
        r1=r1+tc1(iy,k)*u(k)
 501    r2=r2+tc2(iy,k)*p(k)
        u(iy)=(v(iy)-r1)/tc1(iy,iy)
 500    p(iy)=(vp(iy)-r2)/tc2(iy,iy)
c      ***********************************************************
c      fin de la resolution des deux systemes lineaires
c      ***********************************************************
c      impression des solutions : champs de deplacements (adjoint)
c      ***********************************************************
       do 800 i=1,504
       write(5,801) i
 801   format(' i=',i3)
       write(5,802) u(i),p(i)
 802   format(1x,2(f10.4,5x))
 800   continue
        stop
        end
```

i		
i = 1	-0.0000	-0.0000
i = 2	0.0000	0.0000
i = 3	0.0000	0.0000
i = 4	-0.0000	-0.0000
i = 5	-0.0000	-0.0000
i = 6	-0.0000	-0.0000
i = 7	0.0000	0.0000
i = 8	0.0000	-0.0000
i = 9	-0.0000	-0.0000
i = 10	0.0000	0.0000
i = 11	-0.0000	-0.0000
i = 12	-0.0000	-0.0000
i = 13	0.0000	0.0000
i = 14	-0.0000	-0.0000
i = 15	0.0000	0.0000
i = 16	0.0000	-0.0000
i = 17	-0.0000	0.0000
i = 18	0.0000	0.0000
i = 19	0.0000	0.0000
i = 20	0.0000	0.0000
i = 21	0.0000	0.0000
i = 22	-0.0001	-0.0087
i = 23	-0.0001	-0.0100
i = 24	-0.0001	-0.0086
i = 25	-0.0000	-0.0006
i = 26	-0.0000	-0.0006
i = 27	0.0000	0.0014
i = 28	-0.0000	-0.0007
i = 29	-0.0000	-0.0007
i = 30	0.0000	0.0012

$\alpha = 1,2,3$

$\gamma = 1,2,3$

pour $\begin{cases} i = 1,21 \rightarrow [DLG(\tilde{u}_{1h})] \\ i = 22,42 \rightarrow [DLG(\tilde{u}_{2h})] \\ i = 43,63 \rightarrow [DLG(\tilde{u}_{3h})] \end{cases}$

$[DLG(\tilde{u}_{\alpha h})]$

$[DLG(p_{\gamma h})]$

```
i= 31
   -0.0000        -0.0000
i= 32
   -0.0000        -0.0000
i= 33
   -0.0000        -0.0000
i= 34
   -0.0000        -0.0001
i= 35
    0.0000         0.0001
i= 36
   -0.0000        -0.0000
i= 37
   -0.0000        -0.0000
i= 38
    0.0000         0.0001
i= 39
   -0.0000        -0.0001
i= 40
    0.0000         0.0000
i= 41
    0.0000         0.0000
i= 42
    0.0000         0.0000
i= 43
    0.0000         0.0000
i= 44
    0.0000         0.0000
i= 45
    0.0000         0.0000
i= 46
    0.0000         0.0000
i= 47
    0.0000         0.0000
i= 48
   -0.0000        -0.0000
i= 49
    0.0000         0.0000
i= 50
    0.0000         0.0000
i= 51
   -0.0000        -0.0000
i= 52
    0.0000         0.0000
i= 53
    0.0000         0.0000
i= 54
    0.0000         0.0000
i= 55
    0.0000         0.0000
i= 56
   -0.0000        -0.0000
i= 57
    0.0000         0.0000
i= 58
    0.0000         0.0000
i= 59
   -0.0000        -0.0000
i= 60
    0.0000         0.0000
```

```
i= 61
   0.0000        0.0000
i= 62
   0.0000        0.0000
i= 63
   0.0000        0.0000
i= 64
   0.0000        0.0000
i= 65
  -0.0000       -0.0000
i= 66
   0.0000        0.0000
i= 67
  -0.0000       -0.0000
i= 68
  -0.0000       -0.0000
i= 69
  -0.0000       -0.0000
i= 70
   0.0000        0.0000
i= 71
   0.0000        0.0000
i= 72
   0.0000        0.0000
i= 73
   0.0000        0.0000
i= 74
   0.0000        0.0000
i= 75
   0.0000        0.0000
i= 76
  -0.0000       -0.0000
i= 77
   0.0000        0.0000
i= 78
  -0.0000       -0.0000
i= 79
  -0.0000       -0.0000
i= 80
   0.0000        0.0000
i= 81
   0.0000        0.0000
i= 82
   0.0000        0.0000
i= 83
   0.0000        0.0000
i= 84
   0.0000        0.0000
i= 85
  -0.0001       -0.0096
i= 86
  -0.0001       -0.0101
i= 87
  -0.0001       -0.0076
i= 88
   0.0000        0.0007
i= 89
   0.0000        0.0007
i= 90
  -0.0000       -0.0014
```

```
i= 91
     0.0000          0.0007
i= 92
     0.0000          0.0006
i= 93
    -0.0000         -0.0011
i= 94
    -0.0000         -0.0000
i= 95
    -0.0000         -0.0000
i= 96
    -0.0000         -0.0000
i= 97
    -0.0000         -0.0001
i= 98
     0.0000          0.0001
i= 99
    -0.0000         -0.0000
i=100
    -0.0000         -0.0000
i=101
     0.0000          0.0001
i=102
    -0.0000         -0.0001
i=103
     0.0000          0.0000
i=104
     0.0000          0.0000
i=105
     0.0000          0.0000
i=106
     0.0000          0.0000
i=107
     0.0000          0.0000
i=108
     0.0000          0.0000
i=109
    -0.0000         -0.0000
i=110
    -0.0000         -0.0000
i=111
     0.0000          0.0000
i=112
    -0.0000         -0.0000
i=113
    -0.0000         -0.0000
i=114
     0.0000          0.0000
i=115
     0.0000          0.0000
i=116
     0.0000          0.0000
i=117
     0.0000          0.0000
i=118
     0.0000          0.0000
i=119
    -0.0000         -0.0000
i=120
     0.0000          0.0000
```

```
i=121
    0.0000          0.0000
i=122
   -0.0000         -0.0000
i=123
    0.0000          0.0000
i=124
    0.0000          0.0000
i=125
    0.0000          0.0000
i=126
    0.0000          0.0000
```

i	[DU1]	[DU2]	[DU3]	[DP1]	[DP2]	[DP3]
i= 1	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 2	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 3	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 4	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 5	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 6	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 7	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 8	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 9	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 10	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 11	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 12	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 13	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 14	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 15	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 16	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 17	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 18	-0.0000	-0.0003	0.0000	-0.0000	-0.0346	0.0000
i= 19	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0400	0.0000
i= 20	0.0000	-0.0003	0.0000	0.0000	-0.0345	0.0000
i= 21	-0.0000	-0.0017	0.0000	-0.0000	-0.1720	0.0000
i= 22	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 23	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 24	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000

i= 25	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 26	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 27	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 28	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 29	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 30	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 31	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 32	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 33	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 34	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 35	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 36	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 37	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 38	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 39	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0383	0.0000
i= 40	-0.0000	-0.0004	0.0000	-0.0000	-0.0404	0.0000
i= 41	0.0000	-0.0003	0.0000	0.0000	-0.0302	0.0000
i= 42	0.0000	-0.0019	0.0000	0.0000	-0.1927	0.0000

i	DU1X	DU2X	DU3X	DU1Y	DU2Y	DU3Y
i= 1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.0000	4.0000
i= 2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.0000	4.0000
i= 3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.0000	4.0000
i= 4	2.0000	2.0000	0.0000	0.0000	22.0000	22.0000
i= 5	2.0000	2.0000	0.0000	0.0000	22.0000	22.0000
i= 6	-2.0000	-2.0000	0.0000	0.0000	18.0000	18.0000
i= 7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	20.0000	20.0000
i= 8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	20.0000	20.0000
i= 9	-2.0000	-2.0000	0.0000	0.0000	18.0000	18.0000
i= 10	9.5000	9.5000	0.5000	0.0000	48.5000	48.5000
i= 11	9.5000	9.5000	0.5000	0.0000	48.5000	48.5000
i= 12	-6.5000	-6.5000	0.5000	0.0000	32.5000	32.5000
i= 13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	40.0000	40.0000
i= 14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	40.0000	40.0000
i= 15	-6.5000	-6.5000	0.5000	0.0000	32.5000	32.5000
i= 16	19.0000	19.0000	1.0000	0.0000	97.0000	97.0000
i= 17	-8.0000	-8.0000	0.0000	0.0000	72.0000	72.0000
i= 18	-8.0000	-8.0000	0.0000	0.0000	72.0000	72.0000
i= 19	20.0000	20.0000	0.0000	0.0000	140.0000	140.0000
i= 20	21.5000	21.5000	1.5000	0.0000	138.5000	138.5000
i= 21	-32.5000	-32.5000	1.5000	0.0000	84.5000	84.5000

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNADOU M. Méthodes conformes d'éléments finis avec intégration numérique pour les problèmes de coques. Rapport I.R.I.A. Laboria (1977).

[2] BERNADOU M. Analyse Numérique du modèle linéaire de coques minces de KOITER, thèse d'état Paris VI (1978).

[3] BERNADOU M. Problème continu.

[4] BERNADOU M., CIARLET P.G. Ellipticité du problème linéaire de coques de W. KOITER.

[5] BERNADOU M., BOISSERIE J.M. Implémentation de l'élément fin d'ARGYRIS. Rapport I.R.I.A. Laboria (1978).

[6] BERNADOU M., BOISSERIE J.M. Implémentation des problèmes généraux de coques. Rapport I.R.I.A. Laboria (1978).

[7] BOISSERIE J.M., GLOWINSKI R. Optimisation de la loi d'épaisseur pour une coque mince de révolution (revenue E.D.F., Etudes et Recherches).

[8] CIARLET P.G. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

[9] CIARLET P.G. Conforming finite element methods for the shell problems. The mathematics of finite element applications. Academic Press New-York (1976).

[10] CIARLET P.G. The finite element method for elliptic problems, North Holland (1978).

[11] DHATT G., TOUZOUT G. Une présentation de la méthode des éléments finis.

[12] HENRY J.P., PARSY F. Cours d'Elasticité.

[13] MINOUX M. Programmation mathématique théorie et algorithme (tome 1 et 2).

[14] RAVIART P.A., FAURRE P. Cours d'analyse numérique. Ecole Polytechnique Paris (1976).

[15] RAVIART P.A., THOMAS J.M. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

RESUME

Le présent travail a pour but d'appliquer la méthode de résolution numérique d'un problème de contrôle optimal à l'optimisation de l'épaisseur d'une coque élastique mince de révolution soumise à un chargement ne respectant pas forcément cette symétrie. On se place dans les hypothèses de KIRCHOFF-LOVE.

La solution est caractérisée comme réalisant le minimum de l'énergie potentielle de la coque pour une épaisseur donnée; c'est un problème variationnel classique, dépendant d'un paramètre, l'épaisseur.

L'optimisation de l'épaisseur par la technique de l'hamiltonien et de l'état adjoint (qui revient à minimiser la norme L2 du champ de déplacement) est étudiée de manière détaillée.

Le programme général est écrit mais n'a pu être appliqué qu'à une coque cylindrique.