THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

LOUGHANI Abdelaziz

TRANSFERTS DE PROPRIÉTÉS ENTRE PROCESSUS HARMONISABLES

Membres du Jury

Président : C. GOURIÉROUX
Rapporteur : R. MOCHÉ
Examinateurs : J. DELPORTE
C. LANGRAND
R. THEODORESCU
D. DEHAY

Soutenue le 2 Décembre 1987

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3eme CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

LOUGHANI Abdelaziz

TRANSFERTS DE PROPRIÉTÉS ENTRE PROCESSUS HARMONISABLES

Membres du Jury

Président	:	C. GOURIÉROUX
Rapporteur	:	R. MOCHÉ
Examinateurs		J. DELPORTE
		C. LANGRAND
		R. THEODORESCU
		D. DEHAY

Soutenue le 2 Décembre 1987

Je tiens à exprimer ma très sincère gratitude à :

Monsieur le Professeur Christian Gouriéroux, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse,

Monsieur Raymond Moché, qui m'en a proposé le sujet, et dont les conseils et l'aide efficace m'ont été d'un secours précieux,

Monsieur Dominique Dehay, qui a prêté une attention particulière à mes recherches et à mon manuscrit,

Monsieur le Professeur Jean Delporte dont j'ai suivi un cours de D.E.A. et dont les remarques m'ont beaucoup servi,

Messieurs les Professeurs Claude Langrand et Radu Theodorescu qui ont accepté de lire et de juger mon travail,

Madame Arlette Lengaigne qui l'a soigneusement dactylographié.

P L A N

INTRODUCTION

Ce travail s'applique aux processus harmonisables unidimensionnels dont l'espace-temps est $\mathbb{R}$. Il concerne d'une part, au chapitre II, des propriétés du second ordre (dérivabilité et analycité des processus, au sens L^2), d'autre part, au chapitre III, des critères pour que presque toutes les trajectoires d'un processus harmonisable soient de classe C^k ou C^∞ .

Dans le chapitre I, on rappelle d'abord les définitions et principales propriétés des notions utilisées ensuite (intégration par rapport à une mesure hilbertienne ou à une bimesure, processus harmonisables, relation de domination entre processus harmonisables et entre bimesures, convergence forte et faible d'une suite de mesures stochastiques). Ces rappels sont complétés par certains résultats que nous n'avons pas rencontrés ailleurs. En particulier, μ et ν désignant deux mesures stochastiques dont l'une domine l'autre, nous avons comparé les variations totales de μ et ν, leurs semi-variations, ainsi que les espaces $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\nu)$ des fonctions μ et ν-intégrables, abordant ainsi le thème de la thèse, à savoir : quelles propriétés d'un processus harmonisable dominant se transmettent au processus dominé ? Nous avons aussi examiné la variation totale et la semi-variation d'une mesure orthogonale.

<u>Chapitre II</u>. Le chapitre II est exclusivement consacré à certaines propriétés L^2 d'un processus harmonisable X quelconque dont la mesure stochastique est notée μ. Nous démontrons que si la fonction x^p , $p \in \mathbb{N}^*$ est μ-intégrable, alors X est de classe C^p , au sens de la convergence en moyenne quadratique. Ce résultat est connu pour les processus fortement harmonisables mais semble nouveau pour les processus harmonisables quelconques. Il en résulte que si

$\forall a > 0$, $e^{a|x|}$ est μ-intégrable, X est analytique, ce qui est le cas notamment s'il existe un processus continu stationnaire (L^2) dominant X dont la mesure spectrale m vérifie :

$$\forall a > 0 \quad , \quad \int e^{a|x|} \ . \ m(dx) < +\infty \quad .$$

On obtient ainsi un transfert de propriétés du second ordre.

Des conditions suffisantes nouvelles de dérivabilité ou d'analycité sont ensuite données en utilisant les notions de mesure stochastique à support compact ou à décroissance rapide, que nous avons définies à cette occasion.

Chapitre III. Nous introduisons d'abord au cas particulier des f.a.r. stationnaires continues un critère plus général de N. Kôno pour que presque toutes les trajectoires d'un processus soient de classe C^k . Ensuite nous démontrons un théorème de transfert proprement dit : si un processus réel harmonisable X est dominé par un processus réel Y stationnaire, continu, (r+1)-fois dérivable (au sens L^2), alors il existe une modification de X et une modification de Y dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^r . Le cas des f.a.r. stationnaires, continues dont la mesure stochastique spectrale est à décroissance rapide est examiné, pour terminer.

CHAPITRE I

QUELQUES CRITERES D'INTEGRABILITE PAR RAPPORT A UNE MESURE HILBERTIENNE.

I - INTRODUCTION.

L'intégrabilité par rapport à une mesure vectorielle (aspect ensembliste) a été traitée dans le livre de N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ [11]. Une présentation synthétique en est donnée dans R. MOCHÉ [17]. Le point de vue fonctionnel, que nous n'utilisons pas (intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle), est développé par exemple dans E. THOMAS [24] ou H. NIEMI [19].

Dans ce chapitre, il s'agit surtout de donner quelques conditions d'intégrabilité d'une fonction scalaire par rapport à une mesure hilbertienne. Une autre définition de l'intégrabilité, équivalente à ([11], IV.10.7) ou ([17], IV.22.B), sera énoncée et utilisée ultérieurement.

II - MESURES HILBERTIENNES.

II.0. - Notations et rappels. Dans tout ce qui suit, on note H un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, où $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et A un anneau de parties d'un ensemble quelconque Ω (i.e. une famille de parties de Ω, stable pour l'union, et pour la différence, propre ou non).

II.1. - <u>Définition des mesures hilbertiennes</u> : ([11], [17]). On dit que la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{A} \to H$ est une <u>mesure hilbertienne</u> sur $\mathcal{A}$ si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) (Additivité) : pour tout A , $B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$.

ii) (σ-additivité) : pour toute suite $(A_n ; n \geq 1)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints dont la somme A appartient à $\mathcal{A}$, on a :

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \quad .$$

La condition (ii) est équivalente à la propriété de continuité monotone suivante (μ étant additive) :

$$(A_n , n \geq 1) \subset \mathcal{A} \quad \text{et} \quad A_n \underset{n\to+\infty}{\downarrow} \emptyset \Longrightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad .$$

II.2. - <u>Variation totale d'une mesure hilbertienne</u> : ([11], [17]).

II.2.1. - <u>Définition</u>.- Soit $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$ une application quelconque. Pour toute partie E de Ω, on appelle <u>variation totale de</u> μ <u>sur</u> E , la quantité :

$$V(\mu,E) = \operatorname{Sup}\Big(\sum_{i=1}^{n} ||\mu(A_i)||\Big) ,$$

la borne supérieure étant prise pour tous les choix possibles de n dans $\mathbb{N}^*$, et de $A_1,\dots,A_n$, parties $\mathcal{A}$-mesurables et deux à deux disjointes de E.

La fonction $V(\mu,.) : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ s'appelle <u>la variation totale de</u> μ .

On dit que μ est à variation bornée sur $E \subset \Omega$ si $V(\mu,E) < +\infty$. Si $V(\mu,\Omega) < +\infty$, on dit simplement que μ <u>est à variation bornée.</u>

L'étude de la variation totale d'une mesure hilbertienne est, par exemple, traitée dans ([17], chap. IV, I.B). Signalons au passage que la notion de variation totale permet d'introduire la notion de propriété vraie presque partout et de continuité d'une mesure par rapport à une autre. Par exemple :

II.2.2. - <u>Définitions</u>.- Etant donnée une mesure hilbertienne μ sur un espace mesurable (Ω,A), on dit qu'un événement A est μ-<u>négligeable</u> si $V(\mu,A) = 0$.

Etant données des fonctions f, g, f_1, f_2, ... : $(\Omega,A) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$, on dit que :

- $f = g$ μ-presque partout (μ-p.p.) si $V(\mu,(f \neq g)) = 0$.
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$ si $V(\mu, (f_n \not\to f)) = 0$.

II.3. - <u>Semi-variation d'une mesure hilbertienne</u> : ([11], IV.10.3) ou ([17], chap. IV, I.C).

II.3.1. - <u>Définition</u>.- Soit une application quelconque $\mu : A \to H$. On appelle <u>semi-variation</u> de μ la fonction

$$||\mu|| : P(\Omega) \longrightarrow [0 , +\infty]$$

$$E \rightsquigarrow ||\mu||(E) = \mathrm{Sup}(||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i)||)$$

où la borne supérieure est prise pour tous les choix possibles de n dans $\mathbb{N}^*$, de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ dans $\mathbb{K}_u$, de $A_1,\ldots,A_n$ parties $\mathcal{A}$-mesurables et deux à deux disjointes de E, où $\mathbb{K}_u = \{z \, , \, z \in \mathbb{K} \text{ et } |z| \leq 1\}$ (disque unité fermé de $\mathbb{K}$).

On dit que μ est à semi-variation bornée si $||\mu||(\Omega) < +\infty$.

On va énoncer une série de propositions dont on trouvera les démonstrations détaillées dans ([11], IV. 10.3) et dans ([17], chap. IV, I.C.)

II.3.2. - Proposition.- $||\mu||$ a les propriétés suivantes :

a) $\forall A \in \mathcal{A}$, $||\mu(A)|| \leq ||\mu||(A)$,

b) $E' \subset E'' \subset \Omega \Longrightarrow ||\mu||(E') \leq ||\mu||(E'') \leq V(\mu,E'')$,

c) Si μ est additive, $||\mu||$ est sous-additive sur $\mathcal{A}$; si, de plus, μ est σ-additive, $||\mu||$ est sous-σ-additive sur $\mathcal{A}$,

d) Si μ est additive, $||\mu||(\emptyset) = 0$; de plus, $\forall E \subset \Omega$, $||\mu||(E) \leq 4 \operatorname{Sup}(||\mu(A)||, \ A \in \mathcal{A}, \ A \subset E)$.

II.3.3. - Proposition.- Si μ est une mesure hilbertienne sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, sa semi-variation $||\mu||$ est bornée. De plus, $||\mu|| \,|\, \mathcal{A}$ est sous-σ-additive.

II.3.4. - Proposition.- Si μ est une mesure hilbertienne sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, il existe une mesure positive finie λ sur $(\Omega,\mathcal{A})$ telle que :

- $\forall A \in \mathcal{A}$, $\lambda(A) \leq ||\mu||(A)$,
- $||\mu||(A) \xrightarrow[\substack{\lambda(A) \to 0 \\ A \in \mathcal{A}}]{} 0$.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A})$ désignera un espace mesurable, autrement dit, $\mathcal{A}$ sera une σ-algèbre (de parties de Ω) plutôt qu'un simple anneau.

II.4. - Intégration par rapport à une mesure hilbertienne ([11], IV. 10) et ([17], ch. IV. II).

II.4.1. - Définition.- On dit qu'une fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ est μ-intégrable s'il existe une suite de fonctions étagées $(f_n\ ;\ n \geq 1)$ telle que :

- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$
- $\forall A \in \mathcal{A}$, la suite $\left(\int_A f_n \,.\, d\mu\ ,\ n \geq 1\right)$ est convergente dans H.

Alors on pose :

$$\forall A \in \mathcal{A}\ , \quad \int_A f \,.\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \,.\, d\mu \ .$$

Bien entendu, il s'agit ici d'une extension de l'intégrale définie canoniquement pour les fonctions étagées. Pour une justification de la définition, on peut voir ([11], IV.10.7) ou ([17], p. IV.22).

II.4.2. - Théorème ([17], p. IV.22). En notant $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions scalaires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui sont μ-intégrables, on a :

i) $f\ ,\ g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $a \in \mathbb{K} \Longrightarrow a \,.\, f + g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

et $\forall A \in \mathcal{A}\ , \ \int_A (a.f+g) \,.\, d\mu = a \,.\, \int_A f.d\mu + \int_A g.d\mu \ .$

ii) Pour que la fonction $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ soit μ-intégrable, il suffit qu'elle soit μ-essentiellement bornée (voir les rappels ci-dessous) et alors on a :

$$\forall A \in \mathcal{A}\ , \quad \left\| \int_A f.d\mu \right\| \leq (\mu\text{-}\underset{A}{\text{ess.sup}}(f)) \,.\, \|\mu\|(A) \ .$$

(Rappels : Ayant posé $\mu\text{-ess.}\sup_A(f) = \operatorname{Inf}(\alpha\ ;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$ et $V(\mu, A \cap (|f| \geqslant \alpha)) = 0)$, on dit que f est μ-essentiellement bornée sur A si $\mu\text{-ess.}\sup_A(f) < +\infty$, et simplement que f est μ-essentiellement bornée si elle est μ-essentiellement bornée sur Ω).

iii) $\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, la fonction d'ensemble $\nu_f : \mathcal{A} \longrightarrow H$ définie par $\nu_f(A) = \int_A f \,.\, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$ est une mesure hilbertienne sur $(\Omega,\mathcal{A})$ qui vérifie : $\nu_f(A) \xrightarrow[\substack{||\mu||(A) \to 0 \\ A\in\mathcal{A}}]{} 0$. On peut l'interpréter comme la mesure hilbertienne de densité f par rapport à la mesure hilbertienne μ .

iv) Si H_1 est un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, si l'application $T : H \longrightarrow H_1$ est linéaire et continue, $T \circ \mu : \mathcal{A} \longrightarrow H_1$ est une mesure hilbertienne pour laquelle on a :

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},\mu) \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},T \circ \mu) \quad \text{et}$$

$$\forall A \in \mathcal{A}\ ,\quad T\left(\int_A f \,.\, d\mu\right) = \int_A f \,.\, d(T \circ \mu) \quad .$$

Nous allons maintenant établir une nouvelle condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité.

II.4.3. - Théorème.- Pour qu'une fonction $f : (\Omega,\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ soit μ-intégrable, il suffit qu'il existe une suite $(f_n\ ;\ n \geqslant 1)$ de fonctions mesurables bornées telles que :

1 - $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$

2 - $\forall A \in \mathcal{A}$, $\left(\int_A f_n \,.\, d\mu\ ;\ n \geqslant 1\right)$ est une suite de Cauchy dans H.

Et alors, on a :

$$\forall A \in \mathcal{A} , \quad \int_A f \,.\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n \,.\, d\mu \quad .$$

Démonstration :

a) *Construction d'une suite de fonctions étagées* $(g_n \ ; \ n \geq 1)$ *convergeant* μ-p.p. *vers* f :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n étant une fonction mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées $(g_{n,k} \ ; \ k \geq 1)$ vérifiant de plus :

$$\forall k \geq 1 , \qquad |g_{n,k}| \leq |f_n| \quad .$$

Donc on peut trouver un entier $k(n)$ tel que :

$$\forall k \geq k(n) , \qquad \| g_{n,k} - f_n \|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \quad .$$

Considérons maintenant la suite de fonctions étagées $(g_n \ ; \ n \geq 1)$ définies par : $g_n = g_{n,k(n)}$.

On a donc : $\forall n \geq 1 , \quad \| g_n - f_n \|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$.

Et puisque $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$, l'événement $\Omega_o = \{ f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \}$ vérifie $V(\mu, \Omega_o^c) = 0$ et :

$$\forall x \in \Omega_o , \qquad g_n(x) = (g_n - f_n(x)) + f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) \quad .$$

Donc : $$g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mu\text{-p.p.}} f \ .$$

b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, la suite $\left(\int_A g_n \,.\, d\mu \,,\, n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy dans H : en effet,

$$||\int_A g_n \,.\, d\mu - \int_A f_n \,.\, d\mu|| = ||\int_A (g_n - f_n) \,.\, d\mu||$$

$$\leq ||g_n - f_n||_\infty \,.\, ||\mu||(A) \qquad \text{(d'après le}$$

théorème II.4.2. ii)

$$\leq \frac{1}{2^n} \,.\, ||\mu||(A)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad ;$$

et puisque par hypothèse $\left(\int_A f_n \,.\, d\mu \,,\, n \geq 1\right)$ converge dans H , alors $\left(\int_A g_n \,.\, d\mu \,;\, n \geq 1\right)$ converge vers la même limite.

c) Donc f est μ-intégrable (Déf. II.4.1.) et on a :

$$\int_A f \,.\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \,.\, d\mu$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_A g_n \,.\, d\mu \quad . \blacksquare$$

Remarque : Puisque les fonctions étagées sont bornées, on peut voir que les conditions définissant l'intégrabilité (déf. II.4.1.) sont équivalentes à celles données dans le théorème II.4.3.

Rappelons que le théorème de convergence dominée reste valable dans le cas d'une mesure hilbertienne et qu'il s'énonce comme suit :

II.4.4. - Théorème de convergence dominée ([11], th. IV.10.10), ([17], p. IV.31). Soit $(f_n \,;\, n \geq 1) \subset L^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$

On suppose que :

- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$

- $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que : $\forall n \geq 1$, $|f_n| \leq g$ μ-p.p. Alors, f est μ-intégrable et $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f \cdot d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \cdot d\mu$.

D'où l'on déduit facilement :

II.4.5. - <u>Corollaire</u>.- ([17], p. IV.32). Pour que : $f(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ soit μ-intégrable, il suffit que $|f|$ le soit et alors, pour toute suite $(f_n , n \geq 1)$ de fonctions étagées, il suffit que soient vérifiées les conditions :

- $\forall n \geq 1$, $|f_n| \leq |f|$

- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$

pour que l'on ait :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad , \quad \int_A f \cdot d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \cdot d\mu \quad .$$

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, on a :

II.4.6. - <u>Proposition</u>.- Pour que $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ soit μ-intégrable, il faut et il suffit que $|f|$ le soit.

<u>*Démonstration*</u> : D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que si f est μ-intégrable, alors $|f|$ l'est aussi.

Or $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ = f \cdot 1_{A^+}$ et $f^- = - f \cdot 1_{A^-}$ où $A^+ = \{f \geq 0\}$ et $A^- = \{f \leq 0\}$. Puisque f est mesurable, A^+ et A^- le sont aussi, donc $f^+ = f \cdot 1_{A^+}$ et $f^- = - f \cdot 1_{A^-}$ sont μ-intégrables (car f est μ-intégrable). Donc $|f| = f^+ - f^-$, somme de deux fonctions μ-intégrables, est μ-intégrable. ■

III - BIMESURES SPECTRALES ET DOMINATION.

On déduit de Yu. ROZANOV [22] la définition suivante des bimesures :

III.1. - Définition.- On appelle bimesure spectrale sur un anneau $\mathcal{A}$, toute application $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$

$$(A,B) \rightsquigarrow M(A,B)$$

qui vérifie :

i) $\forall A\ ,\ B \in \mathcal{A}\ ,\quad M(A,B) = \overline{M(B,A)}$.

ii) $\forall A_1\ ,\ A_2\ ,\ B \in \mathcal{A}$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow M(A_1 + A_2\ ,\ B) = M(A_1,B) + M(A_2,B) \quad .$$

iii) M est de type positif, i.e. :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\quad \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ et $\forall A_1,\dots,A_n \in \mathcal{A}\ ,$

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \cdot \bar{a}_k\, M(A_j,A_k) \geq 0 \ .$$

iv) $(A_n\ ;\ n \geq 1) \subset \mathcal{A}$ et $A_n \underset{n\to+\infty}{\downarrow} \emptyset \Longrightarrow M(A_n,A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

III.2. - Remarque : Dans le cas où $(\Omega,\mathcal{A})$ est un espace mesurable et où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to C$ est une bimesure spectrale si les deux axiomes suivants sont vérifiés (D. DEHAY [9]) :

v) $\forall A \in \mathcal{A}$, $M(A,.)$ est une mesure complexe sur $(\Omega,\mathcal{A})$;

iii) M est de type positif.

Preuve : On va montrer que le noyau M vérifie les quatre axiomes de la définition III.1. :

i) M étant un noyau complexe de type positif sur $\mathcal{A}$ est automatiquement hermitien ([17], p. II.02).

ii) Si A_1 , A_2 et B appartiennent à $\mathcal{A}$ et si A_1 et A_2 sont disjoints, on a :

$$M((A_1 + A_2), B) = \overline{M(B, (A_1 + A_2))}$$

$$= \overline{M(B,A_1)} + \overline{M(B,A_2)} \quad , \qquad \text{d'après (v)}$$

$$= M(A_1,B) + M(A_2,B) \ .$$

iv) Soit $(A_n, n \geq 1)$ une suite $\mathcal{A}$-mesurable convergeant vers $\emptyset$ en décroissant. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$, $M(A_n \times B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc une suite de mesures complexes $(M(A_n,.) \ ; \ n \geq 1)$ convergeant vers 0 simplement sur la tribu $\mathcal{A}$. En appliquant le théorème de Vitali-Hahn-Saks, ([11], IV.10.6) ou ([17], p. IV.17), on obtient : pour toute suite $(B_m, m \geq 1) \subset \mathcal{A}$ telle que $B_m \underset{m\to+\infty}{\downarrow} \emptyset$,

$$\mathrm{Sup}(|M(A_n \times B_m)| \ , \ n \geq 1) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \quad .$$

On en déduit en particulier : $M(A_n \times A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ∎

Rappelons que l'on appelle <u>mesure stochastique</u> toute mesure hilbertienne à valeurs dans un espace $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$, où $(S,\mathcal{F},P)$ désigne un espace de probabilité quelconque. C'est une simple commodité de langage puisque tout espace de Hilbert H est en bijection isométrique avec un sous-espace de Hilbert d'un tel espace $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$. Autrement dit, toute mesure hilbertienne est une mesure stochastique à une isométrie près. Cela permet d'énoncer la forme générale des bimesures spectrales sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ obtenue par R. MOCHÉ ([17], th. 6, p. IV.35) et H. NIEMI ([20], th. 1).

III.3. - Théorème (Caractérisation des bimesures spectrales).
Soient un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et une application $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$. Pour que M soit une bimesure spectrale sur $(\Omega,\mathcal{A})$, il faut et il suffit qu'il existe un espace probabilisé $(S,\mathcal{F},P)$ et une mesure stochastique $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \qquad M(A \times B) = E(\mu(A) \cdot \overline{\mu(B)}) .$$

Nous appelons M la bimesure spectrale associée à la mesure stochastique μ (bien entendu, μ n'est pas unique).

Remarquons que pour un anneau $\mathcal{A}$ quelconque, on a :

III.4. - Proposition.- ([6], I.2.4., p. 3). Pour toute mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow H$, définie sur un anneau $\mathcal{A}$, la fonction

$$\begin{aligned} M_\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (A,B) &\rightsquigarrow (\mu(A), \mu(B))_H \end{aligned}$$

est une bimesure spectrale.

III.5. - Intégration par rapport à une bimesure spectrale.

III.5.1. - Définition.- Etant donnée une bimesure spectrale M sur $(\Omega,\mathcal{A})$, μ désignant une mesure stochastique telle que $M = M_\mu$, on pose :

- $\ell_{\mathbb{K}}(M) = L^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A},\mu)$,

- $\forall f, g \in \ell_{\mathbb{K}}(M)$ et $\forall A, B \in \mathcal{A}$:

$$\iint_{A\times B} f \otimes \bar{g}\, dM = \iint_{A\times B} f(\omega) \cdot \overline{g(\omega')} \cdot M(d\omega, d\omega') = E\left(\int_A f \cdot d\mu \cdot \overline{\int_B g \cdot d\mu}\right) .$$

Ces définitions sont justifiées par le fait que $L^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A},\mu)$ et $E\left(\int_A f \cdot d\mu \cdot \overline{\int_B g \cdot d\mu}\right)$ ne dépendent pas de μ si $M = M_\mu$ ([17], p. IV.37).

A partir de la définition III.1., on peut faire (cf. [3], 1) une théorie de l'intégration par rapport à une bimesure spectrale, sans invoquer les mesures stochastiques. Compte tenu de nos besoins, la définition III.5.1. basée sur le théorème III.3. rend inutile cette théorie. Il est important de noter que l'intégration par rapport à une bimesure M coïncide avec l'intégrale usuelle par rapport à M^* s'il existe une mesure complexe M^* prolongeant M sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, pour certains couples de fonctions (f,g). Dans ce qui suit, $|M^*|$ désigne la variation totale de M^*.

III.5.2. - <u>Théorème</u>.- ([17], p. IV.39). Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ une bimesure spectrale prolongeable en une mesure scalaire M^* sur $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$. Alors, pour tout couple $(f,g) : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ de fonctions bornées, on a :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad \iint_{A\times B} f \otimes \bar{g} \, dM = \iint_{A\times B} f \otimes \bar{g} \, . \, dM^* \, .$$

III.5.3. - <u>Théorème</u>.- ([17], p. IV.41). Soit $\mu : \mathcal{A} \to L^2_{\mathbb{K}}(S,\mathcal{F},P)$ une mesure stochastique sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ dont la bimesure spectrale M_μ est prolongeable en une mesure scalaire M^* sur $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$.

Pour qu'une fonction $f : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ soit μ-intégrable, il suffit que :

$$\iint |f(x)| \, . \, |f(y)| \, . \, |M^*| \, (dx,dy) < +\infty , \quad \text{et alors on a :}$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, \quad E\left(\int_A f \, . \, d\mu \, . \, \overline{\int_B f \, . \, d\mu}\right) = \iint_{A\times B} f \otimes \bar{f} \, . \, dM_\mu \, .$$

$$= \iint_{A\times B} f \otimes \bar{f} \, . \, dM^* \, .$$

III.6. - Domination entre bimesures.

On reprend ici la définition donnée dans ([17] ; p. VI.48) :

III.6.1. - **Définition.**- Relation de domination entre bimesures.

On dira qu'une bimesure M_2 domine une bimesure M_1 ($M_1 \leq M_2$) si $M_2 - M_1$ est de type positif, autrement dit si $M_2 - M_1$ est une bimesure spectrale, puisqu'il est facile de voir que les propriétés (i), (ii) et (iv) de la définition III.1. sont toujours vérifiées par la différence $M_2 - M_1$.

III.6.2. - **Lemme.**- Soit μ_1 , μ_2 : $\mathcal{A} \longrightarrow H$ deux mesures hilbertiennes sur un anneau $\mathcal{A}$, et M_1 , M_2 les bimesures spectrales qui leur sont respectivement associées (par la proposition III.4.). Si M_2 domine M_1 , alors :

1 - $||\mu_1(.)|| \leq ||\mu_2(.)||$, sur $\mathcal{A}$

2 - $V(\mu_1 , .) \leq V(\mu_2 ,.)$, sur $\mathcal{P}(\Omega)$

3 - $||\mu_1||(.) \leq ||\mu_2||(.)$, sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Démonstration :

1 - Soit $A \in \mathcal{A}$:

$$||\mu_1(A)||^2 = M_1(A \times A) \leq M_2(A \times A) = ||\mu_2(A)||^2 ,$$

donc
$$||\mu_1(A)|| \leq ||\mu_2(A)|| .$$

2 - Soit $E \in \mathcal{A}$. Par définition de la variation totale, on a :

$$V(\mu_1,E) = \mathrm{Sup}\left(\sum_{i=1}^{n} ||\mu_1(A_i)||\right) ,$$

avec les notations habituelles. D'après l'inégalité précédente, on en déduit que :

$$V(\mu_1,E) \leq \operatorname{Sup}\left(\sum_{i=1}^{n} ||\mu_2(A_i)||\right)$$

$$= V(\mu_2, E) \quad .$$

3 - Pour la semi-variation, avec les notations de la définition II.3.1., on a :

$$||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \mu_1(A_j)||^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \cdot \bar{\alpha}_k \cdot M_1(A_j \times A_k)$$

$$\leq \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \cdot \bar{\alpha}_k \cdot M_2(A_j \times A_k) \quad , \text{ par domination.}$$

$$= ||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \mu_2(A_j)||^2$$

Donc on a :

$$||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \mu_1(A_j)|| \leq ||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \mu_2(A_j)|| \quad .$$

D'où le résultat, en prenant les bornes supérieures dans les conditions de la définition II.3.1. ∎

III.6.3. - Théorème.- Soient μ_1 , μ_2 : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ deux mesures stochastiques associées respectivement aux bimesures spectrales M_1 et M_2 . Si M_2 domine M_1 , alors :

- $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu_2) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mu_1)$.
- $\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mu_2)$ et $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$||\int_A f \cdot d\mu_1|| \leq ||\int_A f \cdot d\mu_2|| \quad .$$

Démonstration :

1 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction μ_2-intégrable. Par définition de l'intégrale, il existe une suite $(f_n \; ; n \geq 1)$ de fonctions étagées sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que :

- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \quad \mu_2$-p.p. ,

- $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\left(\int_A f_n \,.\, d\mu_2 \; ; n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$.

On en déduit que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \quad \mu_1$-p.p. puisque

$$0 \leq V(\mu_1 \; , (f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f)) \leq V(\mu_2 \; , (f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f)) = 0 \quad ,$$

d'après le lemme ci-dessus.

2 - Pour toute fonction complexe étagée g sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ notée $g = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \, 1_{A_j}$, on a, pour tout événement A :

$$\begin{aligned} \left|\left|\int_A g \, d\mu_1\right|\right|^2 &= \left|\left|\sum_{j=1}^{p} a_j \; \mu_1(A \cap A_j)\right|\right|^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{p} a_j \, \bar{a}_k \; M_1((A \cap A_j) \times (A \cap A_k)) \\ &\leq \sum_{j,k=1}^{p} a_j \, \bar{a}_k \; M_2((A \cap A_j) \times (A \cap A_k)) \quad , \text{ car } M_2 \text{ domine } M_1 \\ &= \left|\left|\int_A g \, d\mu_2\right|\right|^2 \quad , \text{ en remontant les calculs.} \end{aligned}$$

On a donc $\left|\left|\int_A g \, d\mu_1\right|\right| \leq \left|\left|\int_A g \, d\mu_2\right|\right|$.

3 - $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\left(\int_A f_n \, d\mu_1 \; ; n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy puisque $\left(\int_A f_n \, d\mu_2 \; ; n \geq 1\right)$ en est une et que :

$$\forall n\ ,\ m \geq 1\ ,\ \left|\left|\int_A f_n\, d\mu_1 - \int_A f_m\, d\mu_1\right|\right| = \left|\left|\int_A (f_n - f_m)\, d\mu_1\right|\right|\ ,\quad \text{d'après 2)}$$

$$\leq \left|\left|\int_A (f_n - f_n)\, d\mu_2\right|\right|$$

$$= \left|\left|\int_A f_n\, d\mu_2 - \int_A f_m\, d\mu_2\right|\right|$$

4 - On peut donc conclure que f est μ_1-intégrable et que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ ,\quad \int_A f\, d\mu_1 = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n\, d\mu_1 \quad .$$

Il en résulte que $\left|\left|\int_A f\ .\ d\mu_1\right|\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\left|\int_A f_n\, d\mu_1\right|\right| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\left|\int_A f_n\, d\mu_1\right|\right|$

$$= \left|\left|\int_A f\, d\mu_2\right|\right|\ .\ \blacksquare$$

IV - PROCESSUS HARMONISABLES.

M. LOEVE ([14] ; Sec. 34) a introduit le premier une classe restreinte de processus harmonisables que l'on appelle les processus fortement harmonisables. Les processus harmonisables les plus généraux ont ensuite été définis indépendamment par S. BOCHNER [2] sous le nom de processus V-bornés et par Yu. A. ROZANOV [22]. En fait, c'est D. DEHAY ([6] ; prop. II. 24, p. 38) qui a montré que les processus V-bornés continus sont exactement les processus harmonisables. Notons enfin que l'on peut aussi obtenir les processus harmonisables lorsque l'on considère les mesures vectorielles comme des fonctionnelles linéaires continues (mesures de Radon) sur des espaces de fonctions ad hoc. C'est l'approche de H. NIEMI [19]. Les propriétés générales des processus harmonisables sont rassemblées dans M.M. RAO [21] ou R. MOCHÉ ([17], chap. V).

IV.1. - Définitions.- ([17], p. V.2.). On dit qu'un processus $X = (X_t\ ,\ t \in \mathbb{R}) : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ est un processus harmonisable s'il existe une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \qquad X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ .\ \mu(dx)\ .$$

Cette mesure est unique ([17], p. V.11) et s'appelle la mesure stochastique spectrale du processus harmonisable X considéré.

IV.2. - Théorème.- ([22], 2 ; [17], p. V.13). Soit $X : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ un processus du second ordre sur $(S,\mathcal{F},P)$. Pour que X soit un processus harmonisable, il faut et il suffit qu'il existe une bimesure spectrale complexe M sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que son noyau K vérifie :

$$\forall t\ ,\ s \in \mathbb{R}\ ,\quad K(t,s) = E(X_t\ .\ \bar{X}_s) = \iint e^{i(tx-sy)}\ .\ M(dx,dy)\ .$$

M est alors la bimesure spectrale M_μ associée à la mesure stochastique spectrale μ du processus harmonisable X . M est donc unique et s'appelle bimesure spectrale du processus X.

IV.3. - Définition.- Si la bimesure spectrale M d'un processus harmonisable X est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on dit que X est fortement harmonisable, ou qu'il admet une mesure spectrale. Si cette mesure admet une densité, on dit que le processus X est à densité spectrale.

IV.4. - Théorème.- ([17], p. V.12 et p. V.2) Soit X un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ . On note $L^2(X)$ (resp. $L^2(\mu)$) le sous-espace de Hilbert de $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$

engendré par $(X(t)\ ;\ t \in \mathbb{R})$ (resp. $(\mu(B)\ ,\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Alors $L^2(X) = L^2(\mu)$, et c'est un espace de Hilbert séparable.

Définissons maintenant la notion de domination entre processus harmonisables.

IV.5. - Comparaison des processus harmonisables.

IV.5.1. - Définition : Relation de domination entre processus harmonisables. Soient X_1 et X_2 deux processus harmonisables de noyaux K_1 et K_2. On dira que X_1 est dominé par X_2 $(X_1 \leqslant X_2)$ si la différence $K_2 - K_1$ de leurs deux noyaux est de type positif, soit si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \quad \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C} \ , \quad \forall t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i \cdot \bar{a}_j \,(K_2(t_i,t_j) - K_1(t_i,t_j)) \geqslant 0 \ .$$

D. DEHAY ([6], II.3.8) a prouvé que $K_2 - K_1$ est de type positif si et seulement si $M_1 \leqslant M_2$.

Nous allons étudier dans le sous-paragraphe suivant le cas particulier des processus harmonisables stationnaires.

IV.6. - Processus harmonisables stationnaires.

IV.6.1. - Théorème.- ([17], p. V.18). Un processus harmonisable est stationnaire si et seulement si sa mesure stochastique spectrale μ est orthogonale (soit si : $\forall A\ ,\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow E(\mu(A)\ .\ \overline{\mu(B)}) = 0)$.

Si $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ est un processus du second ordre stationnaire et continu (en moyenne quadratique), d'après un théorème de Bochner sur les fonctions caractéristiques des lois de probabilité ([15], p. 71), il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et une seule telle que :

$$\forall t , s \in \mathbb{R} , \qquad E(X_t . \bar{X}_s) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)x} . m(dx) ,$$

m s'appelle aussi mesure spectrale de X, en théorie des processus stationnaires. D'après ([17], p. V.18), un tel processus est un processus harmonisable à mesure spectrale, et sa mesure stochastique spectrale μ est orthogonale, d'après le théorème IV.6.1.. Sa bimesure spectrale M (au sens de la théorie des processus harmonisables) est reliée à m par :

$$\forall A , B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \qquad M(A \times B) = m(A \cap B) .$$

Il en résulte notamment que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \qquad m(A) = ||\mu(A)||^2 .$$

Dans la suite, on notera aussi $R(m)$ la mesure positive finie définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ à partir de m par : $\forall A , B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $R(m)(A \times B) = m(A \cap B)$.

IV.6.2. - <u>Lemme</u>.- Soit μ une mesure stochastique orthogonale sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Alors, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $||\mu||(B) = ||\mu(B)||$.

<u>*Démonstration*</u> : Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. D'après la proposition II.3.2., il suffit de montrer que l'on a : $||\mu||(B) \leqslant ||\mu(B)||$. Or on sait que :

$$||\mu||(B) = \operatorname{Sup} \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \mu(A_i) \right|\right| ,$$ avec les notations habituelles ,

$$= \text{Sup} \left\| \int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1_{A_i}(x) \right) \cdot \mu(dx) \right\|$$

$$= \text{Sup} \left(\int \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1_{A_i}(x) \right|^2 \cdot m(dx) \right)^{1/2} ,$$

par définition de l'intégrale par rapport à la bimesure spectrale M associée à μ et d'après ([17], p. V.17), où m est la mesure définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \quad m(A) = M(A \times A) = \|\mu(A)\|^2 ,$$

$$= \text{Sup} \left(\int \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \cdot 1_{A_i}(x) \right) \cdot m(dx) \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \text{Sup} \left(\int \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}(x) \right) \cdot m(dx) \right)^{1/2} , \quad \text{car} \quad |\alpha_i| \leqslant 1$$

pour $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\leqslant (m(B))^{1/2}$$

$$= \|\mu(B)\| \quad . \blacksquare$$

IV.6.3. - <u>Corollaire</u>.- Si μ est une mesure stochastique orthogonale sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et si m est la mesure positive finie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ qui lui est associée comme ci-dessus, on a : $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$ et $\forall f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ et $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,

$$\left\| \int_B f \cdot d\mu \right\|^2 = \int_B |f|^2 \cdot dm \quad .$$

<u>*Démonstration*</u> :

1 - Remarquons d'abord qu'il est équivalent de dire qu'une propriété est vraie μ-p.p. ou qu'elle est vraie m-p.p. En effet,

d'après le lemme précédent, on a, pour tout événément A :

$$m(A) = 0 \Longleftrightarrow ||\mu||(A) = 0 \Longleftrightarrow V(\mu,A) = 0 .$$

2 - Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$. Cela signifie qu'il existe une suite $(f_n , n \geq 1)$ de fonctions étagées sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telles que :

i) $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu\text{-p.p.}} f$

ii) $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\left(\int_A f_n . d\mu \, ; \, n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$. On a donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{m\text{-p.p.}} f$, d'après (1), et comme un calcul précédent montre que pour toute fonction étagée g et tout borélien B , on a : $\left|\left|\int_B g . d\mu\right|\right|^2 = \int_B |g|^2 \, dm$, on voit que pour tout borélien B , on a :

iii) $\int_B |f_p - f_q|^2 \, dm = \left|\left|\int_B (f_p - f_q) \, d\mu\right|\right|^2 \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$, d'après (ii) .

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , m)$. Elle converge donc fortement vers f , ce qui montre que $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , m)$.

3 - Réciproquement, si $\int |f|^2 \, dm < +\infty$, on a aussi $\int |f| \, dm < +\infty$. Appelons $(f_n , n \geq 1)$ une suite de fonctions étagées sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ convergeant partout vers f et telle que :

$$\forall n \geq 1 \;, \qquad |f_n| \leq |f| \;.$$

D'après le théorème de convergence dominée, $\int_{\mathbb{R}} |f_p - f_q|^2 \, dm \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$. On en déduit, d'après (iii) que pour tout borélien B , la suite $\left(\int_B f_n . d\mu \;,\; n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy de $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$. Donc f est μ-intégrable.

4 - Enfin, on a
$$\left\|\int_B f \,.\, d\mu\right\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \left\|\int_B f_n \,.\, d\mu\right\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_B |f_n|^2\, dm = \int_B |f|^2\, dm ,$$

quels que soient f μ-intégrable et $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. ■

IV.6.4. - <u>Remarque</u> : Il résulte du corollaire précédent que si μ est une mesure stochastique orthogonale, on fait de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$, espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ par l'égalité μ-p.p. , un espace de Hilbert en le normant par :

$$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \quad , \qquad \|f\| = \left\|\int f \,.\, d\mu\right\| .$$

Cet espace de Hilbert est identique à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , m)$ à une isométrie près.

IV.6.5. - <u>Corollaire</u>.- Soit M une bimesure spectrale sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ associée à une mesure stochastique μ sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Si M est dominée par une mesure positive finie m sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, en ce sens que $M \leqslant \mathcal{R}(m))$, alors :

$$\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mu) .$$

<u>*Démonstration*</u> : Il s'agit d'une application directe du théorème III.6.3. et du corollaire IV.6.3. ■

<u>*Exemple*</u> : Soit M une bimesure spectrale prolongeable en une mesure scalaire M^* sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Alors la mesure positive finie m^* définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par $m^*(A) = |M^*|(A \times \mathbb{R})$ est une mesure qui domine M ([19], [1]). On en déduit donc que :

IV.6.6. - Corollaire.- Soit μ une mesure stochastique sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dont la bimesure M est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Alors m^* étant la mesure positive finie définie ci-dessus, on a :

$$\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m^*) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \quad .$$

IV.7. - Théorème fondamental de la domination.

On est en fait toujours dans la situation du corollaire IV.6.5. grâce au résultat essentiel suivant, qui semble dû à A. PIETSCH (cf. [17], p. VI.37, [15], [19], [21], ...).

IV.7.1. - Théorème.- Toute bimesure spectrale M sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est dominée par une mesure positive finie m sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $(M \leqslant \mathcal{R}(m))$.

Il est équivalent de dire :

IV.7.2. - Théorème.- Tout processus harmonisable X est dominé par un processus stationnaire continu.

Dans la littérature anglo-saxonne, on dit plutôt que tout processus harmonisable admet une dilatation stationnaire. Ce résultat est très fécond puisqu'il est plus commode d'étudier les processus stationnaires continus que les processus harmonisables quelconques, et que l'on peut espérer que des propriétés du processus stationnaire dominant vont se transférer au processus harmonisable dominé, ce qui est le cadre de notre étude.

IV.8. - Extension d'une bimesure.

Il est crucial de savoir si la bimesure M d'un processus harmonisable est prolongeable ou non en une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Dans le premier cas, on a en effet affaire à un processus fortement harmonisable d'un maniement beaucoup plus commode que les processus harmonisables non fortement harmonisables.

Soit M une bimesure spectrale sur $(\mathbb{R}\ ,\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. On définit sa fonction de répartition ρ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall t\ ,\ s \in \mathbb{R}\ ,\quad \rho(t,s) = M(\,]-\infty,\ t] \times]-\infty,\ s])\ .$$

Et on définit la variation de ρ au sens de Vitali par :

IV.8.1. - <u>Définition</u>.- Soient H un espace de Hilbert et ρ une application de $\mathbb{R}^2$ dans H. On dit que ρ est <u>à variations bornées, au sens de Vitali, dans le rectangle</u> (produit d'intervalles) $I \times J$ lorsqu'il existe une constante b telle que quels que soient $t_1 < \ldots < t_{p+1}$ dans I et $s_1 < \ldots < s_{q+1}$ dans J, on ait :

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} ||\Delta_{jk}(\rho)|| \leqslant b\ , \qquad \text{où}$$

$$\Delta_{jk}(\rho) = \rho(t_{j+1}\ ,\ s_{k+1}) - \rho(t_{j+1} - s_k) - \rho(t_j\ ,\ s_{k+1}) + \rho(t_j\ ,\ s_k)\ .$$

Dans ce cas, on définit la variation de ρ dans le rectangle $I \times J$, au sens de Vitali, par :

$$\mathrm{Var}(\rho\ ,\ I \times J) = \mathrm{Sup}(\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} ||\Delta_{jk}(\rho)||)\ ,$$

la borne supérieure étant prise pour tous les choix possibles de $p\ ,\ q\ ;\ t_1,\ldots,t_{p+1}\ ;\ s_1,\ldots,s_{q+1}$.

On a alors le résultat suivant ([6], th. I.6.8.) :

IV.8.2. - Théorème.- Une bimesure spectrale M est prolongeable en une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ si et seulement si sa fonction de répartition est à variations bornées sur $\mathbb{R}^2$, au sens de Vitali.

IV.8.3. - Remarques :

a) Si M est une bimesure spectrale associée à une mesure stochastique μ, on peut facilement voir à partir du théorème ci-dessus que pour que M soit prolongeable en une mesure scalaire, il suffit que $V(\mu, \mathbb{R}) < +\infty$.

b) Exemple de bimesure prolongeable. Soit m une mesure positive σ-finie quelconque sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S, \mathcal{F}, P)$ une fonction m-Bochner intégrable, autrement dit m-fortement intégrable ([17], chap. III) de $\mathbb{R}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(S, \mathcal{F}, P)$, que l'on suppose ici séparable. La fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S, \mathcal{F}, P)$ définie par $\mu(A) = \int_A f \, dm$ est une mesure stochastique d'après la linéarité de l'intégrale de Bochner et le théorème de Lebesgue ([17], p. III.15).

$$
\begin{aligned}
V(\mu, \mathbb{R}) &= \operatorname{Sup}\left(\sum_{i=1}^{n} ||\mu(A_i)||\right), \quad \text{avec les notations habituelles} \\
&= \operatorname{Sup}\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\left| \int f \cdot 1_{A_i} \cdot dm \right|\right|\right) \\
&\leq \operatorname{Sup}\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} ||f|| \cdot dm\right) \qquad (\text{cf. } [17], \text{ p. III.11}) \\
&\leq \int ||f|| \cdot dm < +\infty .
\end{aligned}
$$

Donc la bimesure spectrale associée à μ est prolongeable en une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, d'après la remarque a). Et ce résultat reste vrai même si la mesure positive m n'est pas σ-finie (cf. [8], p. 17).

c) Il y a des exemples classiques de bimesures spectrales qui ne sont pas prolongeables en une mesure scalaire sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, (cf. par exemple [6], I.5.12, p. 20).

V - REMARQUES SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE MESURES STOCHASTIQUES.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures stochastiques sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ à valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$, où $(S,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé quelconque donné. Il est facile de montrer que $\mathcal{M}$, muni de la norme $\mu \to ||\mu||(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

V.1. - **Proposition**.- Soit $(\mu_n , n \geq 1)$ une suite convergente dans $(\mathcal{M} , || \; ||(\mathbb{R}))$, de limite μ , et M_o une bimesure spectrale sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Pour que l'on ait $M_\mu \leq M_o$, il suffit que :

$\forall n \geq 1 , \quad M_{\mu_n} \leq M_o$.

Démonstration :

$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$||\mu_n(B)-\mu(B)|| = ||(\mu_n-\mu)(B)|| \leq ||\mu_n-\mu||(B) \leq ||\mu_n-\mu||(\mathbb{R}) \quad .$$

Donc $\mu_n(B) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(B)$. Le produit scalaire étant continu dans un espace de Hilbert, nous en déduisons que :

$$\forall A , B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \quad M_{\mu_n}(A \times B) = E(\mu_n(A) \,.\, \overline{\mu_n(B)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M_\mu(A \times B).$$

Avec les notations habituelles, $M_{\mu_n} \leq M_o$ se traduit par :

$$\sum_{j,k=1}^{p} a_j \bar{a}_k M_{\mu_n}(A_j \times A_k) \leqslant \sum_{j,k=1}^{p} a_j \bar{a}_k M_o(A_j \times A_k) \quad .$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on arrive à :

$$\sum_{j,k=1}^{p} a_j \bar{a}_k M_\mu(A_j \times A_k) \leqslant \sum_{j,k=1}^{p} a_j \bar{a}_k M_o(A_j \times A_k) \quad ,$$

ce qui prouve que $M_\mu \leqslant M_o$ (cf. déf. III.6.1.).

Nous allons maintenant établir un critère de μ-intégrabilité, dans la situation précédente. Pour cela, rappelons d'abord :

V.2.1. - Lemme.- ([17], p. IV.27) Soit μ une mesure stochastique sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit $(f_n \; ; \; n \geqslant 1)$ une suite de fonctions μ-intégrables convergeant μ-p.p. vers une fonction mesurable f . Alors, une condition suffisante pour que f soit μ-intégrable est que :

$$\text{Sup}\left(\left|\left|\int_A f_n \cdot d\mu\right|\right| \; ; \; n \geqslant 1\right) \xrightarrow[\substack{||\mu||(A) \longrightarrow 0 \\ A \in \mathcal{A}}]{} 0 \quad .$$

V.2.2. - Théorème.- Soit $(\mu_n \; , \; n \geqslant 1)$ une suite convergente dans $(\mathcal{M} \; , \; ||.||(\mathbb{R}))$, de limite μ . Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable et localement bornée soit μ-intégrable, il suffit que :

1 - $\forall n \geqslant 1$, f est μ_n-intégrable ,

2 - $\text{Sup}\left(\left|\left|\int_A f \cdot d\mu_n\right|\right| \; ; \; n \geqslant 1\right) \xrightarrow[\substack{||\mu||(A) \longrightarrow 0 \\ A \in \mathcal{A}}]{} 0 \quad .$

Démonstration : Soit $(K_p \; , \; p \geqslant 1)$ une suite croissante de compacts de $\mathbb{R}$ recouvrant $\mathbb{R}$. En posant $f_p = f \cdot 1_{K_p}$, $p \geqslant 1$, nous

avons $f = \lim_{p\to+\infty} f_p$. D'après le lemme rappelé ci-desus, pour montrer que f est μ-intégrable, il suffit donc de montrer que :
$\mathrm{Sup}\,(||\int_A f_p \,.\, d\mu|| \;;\; p \geq 1) \xrightarrow[\substack{||\mu||(A)\to 0\\ A\in\mathcal{A}}]{} 0$. Or pour tout borélien A ,

on a : $||\int_A f_p \,.\, d\mu - \int_A f_p \,.\, d\mu_n|| \leq ||f_p||_\infty \,.\, ||\mu-\mu_n||(\mathbb{R})$,

où $||f_p||_\infty$ est fini car f est localement bornée, autrement dit est bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$. Comme $||\mu-\mu_n||(\mathbb{R}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que :

$$||\int_A f_p \,.\, d\mu|| = \lim_{n\to+\infty} ||\int_A f_p \,.\, d\mu_n||$$

$$\leq \mathrm{Sup}\,(||\int_A f_p \,.\, d\mu_n|| \;,\; n \geq 1)$$

$$= \mathrm{Sup}(||\int_{A\cap K_p} f \,.\, d\mu_n|| \;,\; n \geq 1) \;.$$

Or l'hypothèse 2 entraîne que :

$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\eta(\varepsilon) > 0$ tel que $A \in \mathcal{A}$ et
$||\mu||(A) \leq \eta(\varepsilon) \Longrightarrow \mathrm{Sup}\{||\int_A f \,.\, d\mu_n||, n \geq 1\} \leq \varepsilon$. Nous avons donc alors :

$\forall p \geq 1$, $||\mu||(A \cap K_p) \leq ||\mu||(A) \leq \eta(\varepsilon)$, donc $||\int_A f_p \, d\mu|| \leq \varepsilon$,

ce qui prouve que :

$$\mathrm{Sup}(||\int_A f_p \,.\, d\mu|| \;,\; p \geq 1) \xrightarrow[\substack{||\mu||(A)\to 0\\ A\in\mathcal{A}}]{} 0 \;. \blacksquare$$

On va maintenant aborder un autre type de convergence dans l'espace $\mathcal{M}$: la convergence étroite.

V.3.1. - <u>Définition</u>.- On dira qu'une suite $(\mu_n \, , \, n \geq 1)$ dans M <u>converge étroitement</u> vers $\mu \in M$, noté $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ si :

$$\forall f \in C_b \quad , \qquad \int f \, . \, d\mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f \, . \, d\mu \quad ,$$

où C_b est l'espace des fonctions complexes continues bornées définies sur $\mathbb{R}$. On voit facilement que la convergence dans l'espace de Banach $(M, || \; || (\mathbb{R}))$ entraîne la convergence étroite.

Dans le cas d'une suite de mesures orthogonales, on a un résultat très simple :

V.3.2. - <u>Théorème</u>.- Soit $(\mu_n \, , \, n \geq 1)$ une suite de mesures orthogonales convergeant étroitement vers $\mu \in M$. Alors, on a :

1 - μ est orthogonale

2 - $\operatorname{Sup}(||\mu_n||(\mathbb{R}) \, , \; n \geq 1) < +\infty$

3 - $\lim\limits_{n \to +\infty} ||\mu_n(B)|| = ||\mu(B)||$ pour tout borélien B de frontière μ-négligeable $(||\mu||(\delta B) = 0)$.

Démonstration :

1 - Notons X_μ (resp. X_{μ_n}) le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ (resp. μ_n). On sait que $\forall n \geq 1$, le processus X_{μ_n} est stationnaire est continu (cf. IV.6.1.). Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_{\mu_n}(t) = \int e^{itx} \mu_n(dx)$.
Comme $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ et que $x \longmapsto e^{itx}$ est continue bornée, on en déduit $X_{\mu_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X_\mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, puis que : $\forall t \, , \, s \in \mathbb{R}$,
$E(X_\mu(t) . \overline{X_\mu(s)}) = \lim\limits_{n \to +\infty} E(X_{\mu_n}(t) \, . \, \overline{X_{\mu_n}(s)})$, qui ne dépend que de la

différence t-s. Autrement dit, X_μ est un processus harmonisable stationnaire et par conséquent, de nouveau d'après IV.6.1., μ est orthogonale.

2 - Puisque $\mathrm{Sup}(||\mu_n||(\mathbb{R})\ ;\ n \geq 1) = \mathrm{Sup}(||\mu_n(\mathbb{R})||\ ;\ n \geq 1)$, le résultat à établir est une conséquence directe de la troisième propriété que nous démontrons maintenant.

3 - Notons m_n , $n \geq 1$ et m les mesures positives finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ définies à partir de μ_n , $n \geq 1$ et μ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \quad m_n(B) = ||\mu_n(B)||^2 \quad \text{et} \quad m(B) = ||\mu(B)||^2 .$$

On sait que $\forall n \geq 1$ et $\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m_n) = L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu_n)$, on a : $\int |f|^2\, dm_n = ||\int f\, d\mu_n||^2$, et de même pour m et μ . Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée, puisque $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$, on a donc :

$$\int |f|^2\, dm_n = ||\int f\, .\, d\mu_n||^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||\int f\, .\, d\mu||^2 = \int |f|^2\, .\, dm \quad .$$

On en déduit que $\int f\, dm_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f\, dm$, d'abord pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, bornée, à valeurs ≥ 0 , puis pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée quelconque.

Par conséquent , $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{e} m$, ce qui entraîne que : pour tout borélien B dont la frontière $\delta(B)$ est m-négligeable, $m(B) = \lim_{n\to+\infty} m_n(B)$, soit $||\mu(B)|| = \lim_{n\to+\infty} ||\mu_n(B)||$, si $||\mu||(\delta B) = 0$. ■

Ceci est une simple amorce d'une étude à faire de la convergence étroite des mesures stochastiques. Cette étude devrait bien entendu être menée pour des mesures stochastiques quelconques (non nécessairement orthogonales).

VI - DEVELOPPEMENT DE PROCESSUS HARMONISABLES ET DE BIMESURES EN SERIES.

Nous donnons ici une condition suffisante pour qu'une bimesure soit prolongeable en une mesure scalaire sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ portant sur le développement en série de cette bimesure.

On sait que pour un processus harmonisable $X = (X_t\ ,\ t \in \mathbb{R})$ sur $(S,\mathcal{F},P)$, de mesure stochastique spectrale μ , $L^2(X) = L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert séparable. On supposera que $L^2(\mu)$ est de dimension hilbertienne infinie, et on désignera par $(\xi_k\ ,\ k \geq 1)$ une base orthonormale de $L^2(\mu)$. Pour tout $k \geq 1$, μ_{ξ_k} définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par $\mu_{\xi_k}(B) = E(\mu(B)\ .\ \bar{\xi}_k)$ est une mesure complexe. Il en résulte que pour tout $n \geq 1$ la fonction d'ensemble $\mu_n : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ définie par : $\mu_n(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{\xi_k}(B)\ .\ \xi_k$ est une mesure stochastique. Notons X_n le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ_n , et M_n sa bimesure spectrale. Il est facile de vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \qquad X_n(t) = \sum_{k=1}^{n} E((X(t)\ .\ \bar{\xi}_k)\ \xi_k\ .$$

Rappelons le théorème bien connu suivant ([21], th. 4.4. ; [19], th. 3.4.1.), que l'on peut démontrer en utilisant des développements en série de processus.

VI.1. - <u>Théorème</u>.- Tout processus harmonisable est limite d'une suite de processus fortement harmonisables, au sens de la convergence uniforme sur tout compact de l'espace - temps $\mathbb{R}$.

Démonstration : On utilise les mêmes notations que ci-dessus.

Lorsque $L^2(X)$ est de dimension finie, le processus X est déjà fortement harmonisable. On suppose donc ici que $L^2(X)$ est de dimension infinie pour éviter un cas trivial.

Le processus X_n , $n \geq 1$, est associé à la mesure stochastique μ_n . Comme $L^2(\mu_n)$ est de dimension finie, X_n est fortement harmonisable. Tout processus harmonisable étant continu, les fonctions $t \mapsto \|X_n(t) - X(t)\|$ sont continues. De plus, la suite $(\|X_n(.) - X(.)\|$, $n \geq 1)$ tend vers 0 en décroissant puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ , } \|X_n(t) - X(t)\|^2 = \sum_{m \geq n+1} |E(X(t) \text{ . } \bar{\xi}_m)|^2 \text{ .}$$

D'après le théorème de Dini, il y a donc convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$. ■

Concernant la relation de domination entre bimesures spectrales, nous avons :

VI.2. - Théorème.- Avec les mêmes notations que ci-dessus, et M_o désignant une bimesure spectrale donnée sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, pour que M_o domine M il faut et il suffit que pour tout $n \geq 1$, M_o domine M_n.

Démonstration : $\forall n \geq 1$, considérons le noyau $M_n^* : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ défini par : $\forall A$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $M(A \times B) = M_n(A \times B) + M_n^*(A \times B)$. Comme $M_n^*(A \times B) = \sum_{k \geq n+1} \mu_{\xi_k}(A) \text{ . } \overline{\mu_{\xi_k}(B)}$, c'est un noyau de type positif, donc $M \geq M_n$. Par conséquent, $M \leq M_o \Longrightarrow \forall n \geq 1$, $M_n \leq M_o$. La réciproque s'obtient par simple passage à la limite puisque sur l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ des pavés mesurables de $\mathbb{R}^2$, $M = \lim_{n \to +\infty} M_n$.

VI.3. - Théorème.- Avec les notations précédentes, la bimesure spectrale M du processus harmonisable considéré X est prolongeable en une mesure complexe sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, autrement dit X est fortement harmonisable si $\sum_{k=1}^{+\infty} (|\mu_{\xi_k}|(\mathbb{R}))^2 < +\infty$. (I) .

Et alors M est dominée par la mesure positive finie m définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par :

$$m(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} |\mu_{\xi_k}|(B) \,.\, |\mu_{\xi_k}|(\mathbb{R}) \quad .$$

Démonstration : Soit B un borélien quelconque de $\mathbb{R}^2$. La série $\sum_{k\geq 1} (\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k})(B)$ converge absolument d'après (I) puisque :

$$\forall k \geq 1 \,,\ |(\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k})(B)| \leq |(\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k})|(B)$$

$$= (|\mu_{\xi_k}| \otimes |\mu_{\xi_k}|)(B) \leq (|\mu_{\xi_k}|(\mathbb{R}))^2 \quad .$$

On peut donc définir une fonction d'ensemble M' sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \,, \qquad M'(B) = \sum_{k\geq 1} (\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k})(B)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} M'_n(B)$$

où $M'_n(B) = \sum_{k=1}^{n} (\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k})(B)$.

M' est donc la limite de la suite des mesures complexes $(M'_n \,,\ n \geq 1)$ donc c'est une mesure complexe (théorème de Vitali-Hahn-Saks, [11], th. III.7.2. et cor. III.7.3.).

Comme pour tout pavé mesurable $A \times B$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$M'(A \times B) = \lim_{n\to+\infty} M'_n(A \times B) = \lim_{n\to+\infty} M_n(A \times B) = M(A \times B) \quad ,$$

M' est un prolongement de M et par conséquent X est fortement harmonisable. On justifie de même à partir de (I) que m est une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Enfin, si on applique le corollaire IV.6.6. aux bimesures spectrales $(A,B) \rightsquigarrow \mu_{\xi_k}(A) \,.\, \overline{\mu_{\xi_k}(B)}$, $k \geq 1$, on trouve qu'une telle bimesure est dominée par la mesure positive finie

$$B \rightsquigarrow |\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k}|(B \times \mathbb{R}) = |\mu_{\xi_k}|(B) \,.\, |\mu_{\xi_k}|(\mathbb{R}) \quad , \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad .$$

Par conséquent, $\forall n \geq 1$, M_n est dominée par la mesure positive finie $B \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} |\mu_{\xi_k}|(B) \,.\, |\mu_{\xi_k}|(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et a fortiori elle est dominée par m. D'après le lemme précédent, M est donc dominée par m. ■

VI.4. - <u>Remarques</u> : Comme M est prolongeable en M' , mesure complexe sur $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, on sait, d'après le corollaire IV.6.6. que M est dominée par la mesure positive finie m^* définie par
$m^*(B) = |M'|(B \times \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

M' étant la somme de la série de mesures complexes $\sum_{k\geq 1} \mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k}$, sa variation totale vérifie :

$$|M'| \leq \sum_{k\geq 1} |\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k}| \,.$$

On en déduit que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :

$$m^*(B) \leq \sum_{k\geq 1} |\mu_{\xi_k} \otimes \bar{\mu}_{\xi_k}| \, (B \times \mathbb{R})$$

$$= \sum_{k\geq 1} |\mu_{\xi_k}|(B) \, . \, |\mu_{\xi_k}|(\mathbb{R}) = m(B) \quad .$$

Cela réduit l'intérêt du théorème précédent car une bimesure étant donnée, une mesure positive finie la dominant est d'autant meilleure qu'elle est plus petite.

CHAPITRE II

DERIVABILITE DES PROCESSUS HARMONISABLES.

I - INTRODUCTION.

Ce chapitre contient essentiellement une condition suffisante pour qu'un processus harmonisable quelconque soit de classe C^p au sens de la dérivation en moyenne quadratique. Cette condition est que la fonction $x \longmapsto x^p$ soit μ-intégrable, μ étant la mesure stochastique spectrale quelconque du processus harmonisable quelconque considéré.

Cette condition suffisante était déjà connue pour les processus stationnaires et continus ([2] S. BOCHNER, th. 2.4.3.), et pour les processus harmonisables à mesure spectrale ([17] R. MOCHÉ, Ex. 5, p. V-22).

Dans le cas plus particulier des processus stationnaires et continus, on verra que cette condition est aussi nécessaire.

Avertissement : Dans ce chapitre, les convergences de suites de $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$, la continuité et la dérivation des processus du second ordre considérées s'entendent au sens de la moyenne quadratique, autrement dit au sens de la topologie forte, ou topologie de la norme, de l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$.

II - DERIVABILITE (en moyenne quadratique).

II.1. - Définition.- Soit $X = (X(t) \; ; \; t \in \mathbb{R})$ un processus du second ordre. On dit que X est dérivable au point $t \in \mathbb{R}$ si la limite en moyenne quadratique de $\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$ quand h tend vers 0 existe. On pose alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X_t^{(1)} \quad .$$

On notera $X_t^{(r)}$ la dérivée r-ième de X au point $t \in \mathbb{R}$, lorsqu'elle existe.

Lorsque X est r-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée r-ième $X^{(r)}$ est continue, on dit que X est de classe C^r .

II.2. - Rappels (M. LOEVE [14] ; Sec. 37).- Soit K le noyau associé au processus du second ordre X. D'après les propriétés de la convergence en moyenne quadratique d'une suite de variables aléatoires du second ordre, X est dérivable si et seulement si la limite de $E\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \cdot \overline{\frac{X(t+k) - X(t)}{k}}\right)$ existe quand h et k tendent vers 0.

D'où on déduit que :

Corollaire.- Si X est n-fois dérivable, la dérivée $\frac{\partial^{2n} K(t,s)}{\partial t^n \, \partial s^n}$ existe et c'est la covariance du processus $X^{(n)} = (X_t^{(n)} \; , \; t \in \mathbb{R})$, autrement dit : $\frac{\partial^{2n} K(t,s)}{\partial t^n \, \partial s^n} = E(X_t^{(n)} \cdot \bar{X}_s^{(n)}) \quad ; \; t \; , \; s \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

Pour $r = 1$

$$E(X_t^{(1)} \cdot \bar{X}_s) = \lim_{h\to 0} \frac{K(t+h,s) - K(t,s)}{h}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} K(t,s) \quad .$$

On démontre de même facilement que :

$$E(X_t \cdot \bar{X}_s^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial s} K(t,s) \quad ,$$

$$E(X_t^{(1)} \cdot \bar{X}_s^{(1)}) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial t} K(t,s+k) - \frac{\partial}{\partial t} K(t,s)\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial s} K(t,s) \quad ,$$

et plus généralement que pour tout couple d'entiers p et q tels que : $1 \leqslant p$, $q \leqslant n$:

$$E(X_t^{(p)} \cdot \bar{X}_s^{(q)}) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \, \partial s^q} K(t,s) \; . \blacksquare$$

Dans le cas plus particulier d'un processus stationnaire et continu X de mesure spectrale m , on sait (cf. S. BOCHNER [2] ; th. 2.4.3.) que si $\int x^{2n}.m(dx) < +\infty$, le processus X est de classe C^n .

Réciproquement, on a :

Lemme.- Si X est n fois dérivable à l'origine, alors :

$$\int x^{2n} \cdot m(dx) < +\infty \; .$$

Démonstration : Notons μ la mesure stochastique spectrale (orthogonale) de X et supposons que X soit dérivable en 0. Alors pour toute suite $(h_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers 0 , la suite $\left(\frac{X(h_n) - X(o)}{h_n} \; ; \; n \geqslant 1\right)$, autrement dit $\left(\int \frac{e^{ih_n x} - 1}{h_n} \cdot \mu(dx) \; ; \; n \geqslant 1\right)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(X)$.

Comme pour toute fonction $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, $\left\|\int f \cdot d\mu\right\|^2 = \int |f|^2 \cdot dm$ (cf. chap. I, IV.6.4.), la suite de fonction $\left(\frac{e^{ih_n(.)}-1}{h_n} ; n \geq 1\right)$ est convergente dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$. Comme $\frac{e^{ih_nx}-1}{x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ix$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto |x|^2$ est m-intégrable, d'où le résultat pour $n = 1$. On obtient de plus que le processus X est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et que le processus dérivé $X^{(1)}$ vérifie :

$$X^{(1)}_t = \int e^{itx} \cdot (ix) \cdot \mu(dx) \quad ; \quad t \in \mathbb{R} .$$

Montrons maintenant que le résultat précédent s'étend au cas $n = 2$. Par hypothèse, $X^{(1)}$ est dérivable au point 0. Donc la suite $\left(\int ix \cdot \frac{e^{ih_nx}-1}{h_n} \cdot \mu(dx) ; n \geq 1\right)$ est une suite convergente dans $L^2(X)$, et on en déduit comme précédemment que la suite des fonctions $\left(ix \frac{e^{ih_nx}-1}{x} ; n \geq 1\right)$ converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m)$, que $\int |x|^4 \, dm < +\infty$, puis que $X^{(1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et en fin que son processus dérivé $X^{(2)}$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \qquad X^{(2)}(t) = \int (ix)^2 \, e^{itx} \, \mu(dx) .$$

On réitère ensuite le même procédé si $n > 2$. ■

II.3. - <u>Théorème</u>.- Soit $\mu : A \to H$, une mesure hilbertienne sur un espace mesurable (Ω, A) et $f \in L^1_{\mathbb{K}}(\Omega, A, \mu)$. On appelle ν la mesure hilbertienne de densité f par rapport à μ, définie par :

$$\forall A \in \mathcal{A} \ , \quad \nu(A) = \int_A f \, . \, d\mu \ , \quad ([17] \ ; \ p. \ IV.25).$$

Soit $\varphi : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{K}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ une fonction telle que $|\varphi f|$ soit μ-intégrable. Alors φ et $|\varphi|$ sont ν-intégrables et

$$\forall A \in \mathcal{A} \ , \quad \int_A \varphi \, . \, d\nu = \int_A \varphi \, . \, f \, . \, d\mu \ .$$

Démonstration :

a) Lemme.- Soit g une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs ≥ 0. Alors g est μ-intégrable si et seulement s'il existe une fonction $h \geq 0$, μ-intégrable et majorant g.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée pour une suite croissante de fonctions étagées ≥ 0 convergeant vers g. ■

b) Démontrons maintenant le théorème :

i) Si φ est une fonction étagée et mesurable notée $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, . \, 1_{A_i}$; $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{K}$, φ est évidemment ν-intégrable et $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\int_A \varphi \, . \, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, . \, \nu(A \cap A_i)$$ (définition de l'intégrale d'une fonction étagée)

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, . \int 1_{A \cap A_i} \, . \, f \, . \, d\mu$$

$$= \int_A \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, . \, 1_{A_i}\right) . \, f \, . \, d\mu$$

$$= \int_A \varphi \, . \, f \, . \, d\mu \ .$$

ii) Soit $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction pour laquelle $|f\psi|$ est μ-intégrable. ψf est donc μ-intégrable ([17], p. IV.32), de même $|\psi| f$.

Soit $(\psi_n , n \geq 1)$ une suite de fonctions étagées telles que :

- $\forall n \geq 1$, $\quad |\psi_n| \leq |\psi_{n+1}| \leq |\psi|$

- $\psi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi$.

D'après le lemme précédent, il résulte des inégalités :

$$\forall n \geq 1 , \qquad |\, |\psi_n| \,.\, f| = |\psi_n\, f| \leq |\psi\, f|$$

que $|\, |\psi_n| \,.\, f|$ et $|\psi_n \,.\, f|$ sont μ-intégrables, et donc que $|\psi_n|\, f$ et $\psi_n \,.\, f$ le sont aussi. De plus, on a :

$$|\psi_n| \,.\, f \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\psi|\, f \qquad \text{et} \qquad \psi_n \,.\, f \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi \,.\, f \quad .$$

D'après le théorème de convergence dominée ([17], p. IV.31) et i), on obtient, pour tout événement A :

$$\int_A |\psi_n|\, d\nu = \int_A |\psi_n| \,.\, f \,.\, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_A |\psi| .\, f \,.\, d\mu \qquad \text{et}$$

$$\int_A \psi_n\, d\nu = \int_A \psi_n \,.\, f \,.\, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_A \psi \,.\, f \,.\, d\mu \quad .$$

Les suites $(\int_A \psi_n \,.\, d\nu \,;\, n \geq 1)$ et $(\int_A |\psi_n| \,.\, d\nu \,;\, n \geq 1)$ étant convergentes, par définition de l'intégrale par rapport à ν , ψ et $|\psi|$ sont ν-intégrables et vérifient :

$$\begin{aligned} \int_A \psi \,.\, d\nu &= \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n \,.\, d\nu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n \,.\, f \,.\, d\mu \\ &= \int_A \psi \,.\, f \,.\, d\mu \quad . \blacksquare \end{aligned}$$

II.4. - Théorème.- Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,A,P)$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ . Si pour l'entier $n > 1$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est μ-intégrable, alors X est de classe C^n et les dérivées successives de X sont données par :

$$\forall p \in \{1,\dots,n\} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R} , \quad X^{(p)}(t) = \int e^{itx} \cdot (ix)^p \cdot \mu(dx)$$
$$= \int e^{itx} \cdot \mu^{(p)}(dx) ,$$

la mesure stochastique spectrale $\mu^{(p)}$ de $X^{(p)}$, qui est harmonisable, étant la mesure de densité $(ix)^p$ par rapport à μ .

Démonstration :

i) La fonction x^n est μ-intégrable donc la fonction $|x|^n$ l'est aussi. (ch. I, II.4.6.).

$$\forall p \in \{1,\dots,n\} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} , \quad |x|^p \leq 1_{[-1,1]}(x) + |x|^n .$$

Comme $1_{[-1,1]}$ est μ-intégrable, la fonction $1_{[-1,1]}(x) + |x|^n$ l'est aussi, ainsi que les fonctions $|x|^p$ et $(ix)^p$ ([17], p. IV.32). On peut donc définir les mesures stochastiques $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$,..., $\mu^{(n)}$ de densités respectives ix ,..., $(ix)^p$ par rapport à μ .

Remarquons que les mesures complexes correspondantes $\mu_h^{(p)}$, $h \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,A,P)$, $p = 1,\dots,n$, sont les mesures de densités $(ix)^p$ par rapport à μ_h . En effet :

$$\forall A \in \mathcal{A} , \qquad \mu_h^{(p)}(A) = E\left(\int_A (ix)^p \mu(dx) \ . \ \bar{h}\right)$$

$$= \int_A (ix)^p \ \mu_h(dx) \quad .$$

ii) Montrons que X est de classe C^1 .

Pour tout couple de réels (t,x) et pour toute suite $(h_n , n \geq 1)$ de réels non nuls convergeant vers 0 , on a :

$$- \ \frac{e^{i(t+h_n)x} - e^{itx}}{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ix \ e^{itx}$$

$$- \ \left|\frac{e^{i(t+h_n)x} - e^{itx}}{h_n}\right| \leq |x| \ .$$

Comme $|x|$ est μ-intégrable, d'après le théorème de convergence dominée, on voit que X est dérivable, et que l'on a :

$$\int \frac{e^{i(t+h_n)x} - e^{itx}}{h_n} \ . \ \mu(dx) = \frac{X(t+h_n) - X(t)}{h_n}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int e^{itx} \ . \ (ix) \ . \ \mu(dx) = X^{(1)}(t) \ .$$

D'après le théorème précédent, on a de plus, pour tout instant t :

$$X^{(1)}(t) = \int e^{itx}(ix) \ \mu(dx) = \int e^{itx} \ \mu^{(1)}(dx) \quad .$$

Par conséquent le processus dérivé $X^{(1)}$ est harmonisable, et $\mu^{(1)}$ est sa mesure stochastique spectrale. Enfin, $X^{(1)}$ est un processus continu, comme tout processus harmonisable, donc X est plus précisément de classe C^1.

iii) Supposons que l'on ait établi que $X \in C^p$ pour un certain entier $p \leq n$ et que pour $q = 1,\ldots,p$ on ait :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad X^{(q)}(t) = \int e^{itx} \, . \, \mu^{(q)}(dx) \ .$$

Si $p = n$, c'est terminé.

Si $p < n$, montrons que $X \in C^{p+1}$.

Pour cela il suffit de montrer que x est $\mu^{(p)}$-intégrable, d'après (ii). Or ceci est évident d'après le théorème 3 précédent puisque $|\,|x|\,(ix)^p\,| = |x|^{p+1}$ est μ-intégrable par hypothèse. Le processus $X^{(p)}$ est donc dérivable et en appliquant de nouveau le théorème 3, on obtient facilement que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad X^{(p+1)}(t) &= \int e^{itx}(ix) \, \mu^{(p)}(dx) \\ &= \int e^{itx}(ix)^{p+1} \, \mu(dx) \\ &= \int e^{itx} \, . \, \mu^{(p+1)}(dx) \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve que X est de classe C^{p+1} et que $X^{(p+1)}$ est le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale $\mu^{(p+1)}$. Si $p+1 = n$, c'est terminé, sinon on réitère le procédé. ■

II.5. - Remarque : Dans le cas particulier d'un processus stationnaire continu X , on a vu (rappels II.2.) que X est de classe C^n si et seulement si x^{2n} est intégrable par rapport à sa mesure spectrale m sur $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que x^n est intégrable par rapport à sa mesure stochastique spectrale μ (cf. chap. I ; cor. IV.6.3.). Le théorème II.4. admet donc une réciproque dans le cas particulier des processus stationnaires continus. Pour voir si une réciproque de ce théorème existe dans un cadre plus général, établissons d'abord une sorte de réciproque du théorème 3.

II.5.1. - Théorème.- Soit f une fonction scalaire mesurable, localement bornée sur $\mathbb{R}$, intégrable par rapport à une mesure hilbertienne donnée μ sur $\mathbb{R}$ et ν la mesure hilbertienne de densité f par rapport à μ. Alors, pour toute fonction scalaire mesurable localement bornée ψ sur $\mathbb{R}$, on a :

si $|\psi|$ est ν-intégrable, $\psi.f$ est μ-intégrable et pour tout borélien A, $\int_A \psi.f\, d\mu = \int_A \psi.d\nu$.

Démonstration : Soit $(K_n\ ;\ n \geq 1)$ une suite croissante de compacts recouvrant $\mathbb{R}$. Alors, nous avons :

$$\psi\, 1_{K_n}\, f \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi\, f \qquad (1)$$

$$\psi\, 1_{K_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi$$

$$\forall n \geq 1 \qquad |\psi\, 1_{K_n}| \leq |\psi| .$$

Comme $|\psi|$ est ν-intégrable, ainsi d'ailleurs que les fonctions $\psi.1_{K_n}$, $n \geq 1$, parce qu'elles sont bornées, on déduit du théorème de convergence dominée ([17], p. IV.32) que :

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ , \quad \int_A \psi\, 1_{K_n}\, d\nu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_A \psi\, d\nu \quad . \qquad (2)$$

Comme les fonctions $\psi\, 1_{K_n}\, f$, $n \geq 1$, sont bornées, d'après notre théorème II.4.3. du chapitre I, pour montrer que $\psi.f$ est μ-intégrable, il suffit, compte tenu de (1) de montrer que :

(3) $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\left(\int_A \psi\, 1_{K_n}\, f\, d\mu\ ,\ n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy ,

et alors on a :

(4) $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\int_A \psi\, f\, d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_A \psi\, 1_{K_n}\, f\, d\mu$.

Or d'après le théorème 3, puisque $|\psi\, 1_{K_n}\, f|$ est μ-intégrable comme fonction bornée, on a :

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ et } \forall n \geq 1 \ , \quad \int_A \psi\, 1_{K_n}\, f\, d\mu = \int_A \psi\, 1_{K_n}\, d\nu \ .$$

D'après (2), (3) et (4), on peut donc conclure que ψf est μ-intégrable et que pour tout borélien A , $\int_A \psi\, d\nu = \int_A \psi . f\, d\mu$.

II.5.2. - <u>Corollaire</u>.- Soit ψ et f deux fonctions réelles mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R}$, et μ une mesure hilbertienne sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est μ-intégrable et on appelle ν la mesure hilbertienne de densité f par rapport à μ . Alors ψ est ν-intégrable si et seulement si $\psi . f$ est μ-intégrable, et pour tout borélien A , on a :
$\int_A \psi\, d\nu = \int_A \psi f\, d\mu$.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition II.4.6. du chapitre I, il est équivalent de dire que ψ (resp. ψf) est ν (resp. μ)-intégrable ou que $|\psi|$ (resp. $|\psi f|$) l'est. Il suffit alors d'appliquer le théorème II.3. et le théorème II.5.1. ■

II.5.3. - <u>Définition</u>.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une mesure stochastique. Etant donné un borélien A , on notera μ_A la mesure stochastique définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ , \quad \mu_A(B) = \mu(A \cap B) \ .$$

On notera par X_A le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ_A , lorsque X désigne le processus harmonisable de mesure stochastique μ .

II.5.4. - <u>Lemme</u>.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$ une mesure stochastique. Alors on a :

i) $\forall A\ ,\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ ,\quad ||\mu_A||(B) = ||\mu||(A \cap B)$.

ii) $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ ,\quad f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu_A)$ et $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\ ,\quad \int_B f\, d\mu_A = \int_{A \cap B} f\, d\mu$. ■

Démonstration :

i) Soient A et B dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Avec les notations habituelles, on a :

$$||\mu_A||(B) = \mathrm{Sup}(||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \mu_A(A_i)||)$$

$$||\mu_A||(B) = \mathrm{Sup}(||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \mu(A \cap A_i)||) = ||\mu||(A \cap B)\ .$$

ii) Si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$, il existe une suite de fonctions scalaires étagées $(f_n\ , n \geq 1)$ telles que :

- $f_n \to f$ μ-p.p. et
- $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la suite $(\int_A f_n\ .\ d\mu\ ,\ n \geq 1)$ converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$ vers $\int_A f\ .\ d\mu$.

Etant donné un borélien A , et en ce qui concerne la mesure stochastique μ_A , on en déduit que :

$$||\mu_A||\ ((f_n \not\longrightarrow f_n)) = ||\mu||\ (A \cap (f_n \not\longrightarrow f))$$

$$\leq ||\mu||\ (f_n \not\longrightarrow f) = 0\ .$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mu_A\text{-p.p.}} f$.

De plus les fonctions f_n , $n \geq 1$, étant étagées, il est clair que pour tout borélien B , on a :

$$\int_B f_n \, d\mu_A = \int_{A \cap B} f_n \, d\mu \quad .$$

Puisque $\int_{A \cap B} f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{A \cap B} f \, d\mu$, on en déduit que $(\int_B f_n \, d\mu_A \ , \ n \in \mathbb{N})$ est une suite de Cauchy.

Par conséquent f est μ_A-intégrable et pour tout borélien B , on a :

$$\int_B f \, . \, d\mu_A = \lim_{n\to+\infty} \int_B f_n \, d\mu_A = \lim_{n\to+\infty} \int_{A \cap B} f_n \, d\mu = \int_{A\cap B} f \, d\mu \quad . \blacksquare$$

Finalement, on peut énoncer :

II.5.5. - <u>Théorème</u>.- Soit $(X(t) \ , \ t \in \mathbb{R})$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ , et un entier $p \geq 1$. Alors les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

(a) la fonction x^p est μ-intégrable ,

(b) $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, X_A est de classe C^p ,

(c) $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, X_A est p fois dérivable à l'origine .

<u>*Démonstration*</u> : <u>Supposons d'abord que (a) est vérifiée</u>. Alors pour tout borélien A la fonction x^p est μ_A-intégrable, d'après le lemme II.5.4., donc X_A est de classe C^p d'après le théorème II.4., donc (a) $\Longrightarrow$ (b) .

Comme il est clair que (b) $\Longrightarrow$ (c) , montrons pour terminer que (c) $\Longrightarrow$ (a).

On suppose donc maintenant que (c) est vérifiée.

Soit $(h_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels > 0 convergeant vers 0.
Quel que soit le borélien A, comme X_A est dérivable en 0, on a :

$$X_A^{(1)}(o) = \lim_{n\to+\infty} \frac{X_A(h_n) - X_A(o)}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \int \frac{e^{ih_n x} - 1}{h_n} \mu_A(dx)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_A \frac{e^{ih_n x} - 1}{h_n} \mu(dx) ,$$

d'après le lemme II.5.4., les fonctions $g_n(x) = \dfrac{e^{ih_n x} - 1}{h_n}$, $n \geq 1$

étant μ-intégrables comme fonctions bornées. Comme cette suite de fonctions converge vers ix, x est μ-intégrable d'après le théorème II.4.3. du chapitre I.

Si $p = 1$, la condition (a) est donc vérifiée.

Si $p > 1$, on poursuit la démonstration.

Supposons que l'on ait démontré que x^q est μ-intégrable, pour un certain q compris entre 1 et $p-1$. Alors on a vu que pour tout borélien A, X_A est de classe C^q, et $X_A^{(q)}$ est le processus harmonisable dont la mesure stochastique spectrale $\mu_A^{(q)}$ est la mesure de densité $(ix)^q$ par rapport à μ_A (th. II.4.).

Nous avons donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \quad X_A^{(q)}(t) = \int e^{itx} \mu_A^{(q)}(dx) = \int e^{itx} (ix)^q \mu_A(dx)$$

$$= \int_A e^{itx}(ix)^q \mu(dx) = \int_A e^{itx} \mu^{(q)}(dx) .$$

Comme $X_A^{(q)}$ est dérivable à l'origine, quel que soit A , d'après la première partie de cette démonstration x est $\mu^{(q)}$-intégrable. D'après le corollaire II.5.1., x^{q+1} est donc μ-intégrable. En réitérant si nécessaire le procédé, on obtient (a). ■

III - ANALYCITE DES PROCESSUS HARMONISABLES.

Nous abordons maintenant certaines questions d'analycité des processus harmonisables ([14], sec. 37 ; [17], p. VI.17).

III.1. - Définition.- Soit $X = (X(t)\ ,\ t \in \mathbb{R})$ un processus du second ordre. On dira qu'il est analytique s'il est de classe C^∞ et si

$$\forall t\ ,\ h \in \mathbb{R}\ , \qquad X(t+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \cdot X^{(n)}(t) \ .$$

III.2. - Théorème.- Soit $X = (X(t)\ ,\ t \in \mathbb{R})$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ .

On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que la fonction $e^{a|x|}$ soit μ-intégrable. Alors X est de classe C^∞ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \forall h \in [-a\ ,\ a]\ , \qquad X(t+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} X^{(n)}(t) \ .$$

Démonstration :

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nous avons : $|x|^p \leq \frac{p!}{a^p} e^{a|x|}$.

Comme $e^{a|x|}$ est μ-intégrable, on déduit du lemme II.3.a. que $|x|^p$ l'est aussi, puis du théorème II.4. que X est de classe C^p quel que soit l'entier p , autrement dit que X est de classe C^∞ .

Soit $h \in [-a, a]$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , posons :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(ihx)^p}{p!} e^{itx} .$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \qquad S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{i(t+h)x}$$

$$\forall n \geq 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} , \quad |S_n(x)| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|hx|^p}{p!} = e^{|h||x|} \leq e^{a|x|} .$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int S_n(x)\, \mu(dx) = \sum_{p=0}^{n} \int e^{itx} \frac{(ihx)^p}{p!} \mu(dx) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} X^{(p)}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(t+h) . \blacksquare$$

On en déduit trivialement le corollaire suivant :

III.3. - Corollaire.- Soit X un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ . Si quel que soit $a > 0$, la fonction $e^{a|x|}$ est μ-intégrable, alors le processus X est analytique.

IV - EXEMPLES.

A - Processus fortement harmonisables.

Soit $X = (X_t , t \in \mathbb{R})$, un processus fortement harmonisable de bimesure spectrale M , de mesure stochastique spectrale μ . Notons M^* le prolongement de M à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

D'après ([17], th. 12, p. IV. 41), s'il existe $a > 0$ tel que :

$$\iint e^{a(|x|+|y|)} \cdot |M^*| \ (dx,dy) < +\infty \quad ,$$

la fonction $e^{a|x|}$ est μ-intégrable, et le théorème précédent s'applique.

B - Que le processus harmonisable considéré X soit fortement harmonisable ou non, c'est-à-dire que sa bimesure M soit prolongeable ou non en une mesure M^* sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on sait qu'il existe un processus stanaire continu X^* de mesure stochastique spectrale orthogonale μ^* dominant X (th. IV.7.2., chap. I). Notant m^* la mesure spectrale de X^* (définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par $m^*(B) = ||\mu^*(B)||^2$) , on a :

$$L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu^*) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, m^*) \quad \text{(cor. IV.6.3., chap. I)}$$

$$L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu^*) \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \quad \text{(th. III.6.3., chap. I)} \quad .$$

On voit donc que pour que X soit analytique, il suffit que :

$$\forall a > 0 \ , \quad \int e^{a|x|} \ m^*(dx) < +\infty \ .$$

Mais ce critère a le grave inconvénient suivant : on ne sait pas, dans le cas général, construire une mesure dominante m^* à partir du procesus donné X .

Si X est fortement harmonisable par contre, la mesure m^* définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ , \quad m^*(B) = |M^*|(B \times \mathbb{R}) \quad \text{convient (ex. IV.6.6., chap. I).}$$

C - <u>Processus harmonisables dont la mesure stochastique est à support compact</u>.

IV.C.1. - <u>Définition</u>.- On dira qu'une mesure stochastique μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que

$||\mu||(\mathbb{R}-K) = 0$ ou, ce qui est équivalent, tel que $V(\mu, \mathbb{R}-K) = 0$.

IV.C.2. - Théorème.- Tout processus harmonisable dont la mesure stochastique spectrale est à support compact est analytique.

Démonstration : Soit μ une mesure stochastique à support compact K . Pour tout réel $a > 0$ donné, notons f la fonction $f(x) = e^{a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Comme $V(\mu, (f \neq f\, 1_K)) = V(\mu, \mathbb{R} - K) = 0$, et que $f \cdot 1_K$ est bornée, f est μ-essentiellement bornée, donc elle est intégrable.

Ainsi $e^{a|x|}$ est μ-intégrable pour tout réel $a > 0$. Il suffit d'appliquer le corollaire III.3. pour conclure. ■

IV.C.3. - Remarquons au passage que :

Lemme.- Si μ_1 et μ_2 désignent deux mesures stochastiques sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ et si μ_2 domine μ_1 , alors si μ_2 est à support compact, μ_1 l'est aussi.

Démonstration : On utilise l'inégalité : $||\mu_1||(.) \leq ||\mu_2||(.)$ (chap. I, lemme III.6.2.).

Donc tout processus harmonisable, dominé par un processus harmonisable dont la mesure stochastique spectrale est à support compact, a lui-même cette propriété.

IV.C.4. - Exemples de mesures stochastiques à support compact dont la bimesure spectrale n'est pas prolongeable (d'après [12]).

Ces exemples montrent qu'un processus harmonisable dont la mesure stochastique spectrale est à support compact n'est pas nécessairement facile à étudier en ce sens qu'il peut ne pas être fortement harmonisable.

a) Considérons le noyau $k : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ défini par :

$$k(m,n) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si} \quad m = n \\ \pi/2 \ \dfrac{\sin(\pi/2(m-n))}{\pi/2(m-n)} & \text{si} \quad m \neq n \ . \end{cases}$$

On vérifie que :

$$\forall m\ ,\ n \in \mathbb{Z}\ , \qquad k(m,n) = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \frac{y}{2}(m-n)} \, . \, dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \frac{y}{2} m} \, . \, e^{-i \frac{y}{2} n} \, . \, dy \ .$$

C'est donc un noyau hermitien de type positif, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \quad \forall a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C}\ , \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_i \, \bar{a}_j \, k(i,j) \geq 0 \ .$$

Par conséquent ([14] ; Sec. 37 : covariance criterion and normality), il existe une fonction aléatoire gaussienne réelle centrée $(G_n\ , n \in \mathbb{Z})$ définie sur un certain espace de probabilité (Ω,A,P) et telle que :

$$\forall m\ ,\ n \in \mathbb{Z}\ , \qquad k(m,n) = E(G_m \, . \, \bar{G}_n) \ .$$

De plus, le processus gaussien $(G_n\ , n \in \mathbb{Z})$ est strictement stationnaire, car il est stationnaire, puisque sa covariance est une fonction de $m-n$.

b) Montrons que si $(t_n\ , n \geq 1)$ est une suite de nombres complexes tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^2 < +\infty$, alors $(t_n G_n\ , n \geq 1)$ est une famille sommable dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,A,P)$. Pour toute partie finie K de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\|\sum_{n\in K} t_n G_n\|^2 = \sum_{m,n\in K} t_m \bar{t}_n E(G_m \cdot \bar{G}_n)$$

$$= \sum_{m,n\in K} t_m \bar{t}_n k(m,n)$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n\in K} t_n e^{i\frac{y}{2}n}|^2 dy$$

$$\leqslant \pi \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n\in K} t_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}|^2 dx ,$$

ce qui donne :

(I) $$\|\sum_{n\in K} t_n G_n\|^2 \leqslant \pi \sum_{n\in K} |t_n|^2 ,$$

car $(\frac{e^{in(.)}}{\sqrt{2\pi}} , n \geqslant 1)$ est une famille orthonormale dans $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi;\pi],\mathcal{B}_{[-\pi,\pi]}, dx)$.
Etant donné $\varepsilon > 0$, comme $\sum_{n\geqslant 1} |t_n|^2 < +\infty$, on peut trouver une partie finie $J(\varepsilon)$ de $\mathbb{N}^*$ telle que pour toute partie finie K de $\mathbb{N}^*$ ne rencontrant pas $J(\varepsilon)$, on ait :

$$\pi \sum_{n\in K} |t_n|^2 < \varepsilon^2 .$$

D'après la majoration précédente, on a alors :

$$\|\sum_{n\in K} t_n G_n\| \leqslant \varepsilon .$$

Cela signifie que la suite $(t_n G_n , n \geqslant 1)$ vérifie le critère de Cauchy.
Elle est donc sommable ([10] ; th. 1 bis, § 15.A).

Etant donnée une suite $(s_n , n \geqslant 1)$ de réels deux à deux distincts, puisque $(t_n G_n , n \geqslant 1)$ est sommable, on définit une mesure stochastique μ

sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \qquad \mu(B) = \sum_{n:s_n \in B} t_n G_n \quad .$$

Cette définition est justifiée par le fait que $(t_n G_n , n \geq 1)$ est commutativement convergente ([10] ; prop. 10, § 15.B) et σ-additive en vertu de l'associativité de la somme d'une série commutativement convergente ([10] ; th.6 , § 15.C). La mesure μ vérifie notamment :

- $\forall n \geq 1 , \quad \mu(s_n) = t_n G_n$,

- $||\mu||(\mathbb{R} - S) = 0$, où $S = (s_n , n \geq 1)$,

μ est donc une mesure stochastique discrète à support dénombrable S. C'est évidemment aussi une mesure stochastique à bimesure σ-finie (cf. [7]). De plus, si S est relativement compact, par exemple si $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = \frac{1}{n}$, μ est une mesure stochastique à support compact.

c) Pourtant, pour certains choix des t_n , $n \geq 1$, la bimesure M de μ n'est pas prolongeable en une mesure spectrale. Par exemple, posons $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\ \mathrm{Log}(n+1)}$ ([12]).

Si M était prolongeable en une mesure de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, en utilisant la σ-additivité de la variation totale de son prolongement, on aurait :

$$|M|\ (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \sum_{m,n\geq 1} |M|(s_m,s_n) + \sum_{m\geq 1} |M|((s_m)\times(\mathbb{R}-S))$$

$$+ \sum_{n\geq 1} |M|((\mathbb{R}-S)\times(s_n)) + |M|((\mathbb{R}-S)\times(\mathbb{R}-S))$$

$$= \sum_{m,n\geq 1} |M|(s_m,s_n)$$

$$= \sum_{m,n\geq 1} |E(\mu(s_m)\ .\ \overline{\mu(s_n)})|$$

$$= \sum_{m,n\geq 1} t_m\ t_n\ |k(m,n)|$$

Comme $|k(m,n)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m-n\in 2\mathbb{Z}\ , \\ \dfrac{1}{m-n} & \text{sinon}\ , \end{cases}$

on a :

$$|M|(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_{2k+1+n}\ t_n\right)$$

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\sum_{\ell=2k+2}^{+\infty} t_\ell^2\right) \qquad \text{car} \quad t_n \geq t_{2k+n+1}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{2k+2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ \mathrm{Log}^2(x+1)}$$

(comparaison d'une série et d'une intégrale)

$$\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \int_{2k+3}^{+\infty} \frac{dx}{x\ \mathrm{Log}^2 x}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Log}(2k+3)} = +\infty \quad \text{(série de Bertrand)}$$

Cela contredit le fait que $|M|$ serait une mesure positive finie. Donc M n'est pas prolongeable pour ce choix des t_n , $n\geq 1$, quel que soit le choix de $(s_n\ ,\ n \geq 1)$. On appellera bimesure d'Edwards une bimesure de ce type.

d) <u>Mesures dominant les bimesures d'Edwards.</u>

On a vu (cf. b) que toute bimesure d'Edwards M vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C}$, $\|\sum_{i=1}^{n} a_i\, t_i\, G_i\|^2 \leq \pi \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\, t_i^2$,
ce qui s'écrit encore :

$$\text{(II)} \qquad \|\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(s_i)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\, D(s_i)$$

en notant D la mesure positive finie sur $(\mathbb{R},\, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ définie par
$D = \pi \sum_{n\geq 1} t_n^2\, \delta_{s_n}$.

Quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$ et les n boréliens $A_1,\ldots,A_n$ ne rencontrant chacun qu'une partie finie $S_1,\ldots,S_n$ de S , nous avons encore, quels que soient les nombres complexes $a_1,\ldots,a_n$:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} a_i (\sum_{s\in S_i} \mu(s))\|^2$$

$$= \|\sum_{1\leq i\leq n,\, s\in S_i} a_i\, \mu(s)\|^2 \ .$$

Si l'on suppose de plus que $S_1,\ldots,S_n$ sont deux à deux disjointes, on a, d'après (II) :

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i\, .\, \mu(A_i)\|^2 \leq \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ s\in S_i}} |a_i|^2\, D(s)$$

$$= \sum_{1\leq i\leq n} |a_i|^2\, D(S_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\, D(A_i) \ .$$

Supposons maintenant que $A_1,\dots,A_n$ soient des boréliens quelconques deux à deux disjoints. Pour $i = 1,\dots,n$, A_i est limite d'une suite croissante $(A_{i,p}\ ,\ p \geq 1)$ de boréliens rencontrant S suivant une partie finie.

On pourra donc appliquer l'inégalité ci-dessus à $A_{1,p},\dots,A_{n,p}$ qui sont deux à deux disjoints.

De plus $\mu(A_i) = \lim\limits_{p\to+\infty} \mu(A_{i,p})$, et $D(A_i) = \lim\limits_{p\to+\infty} D(A_{i,p})$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\ \mu(A_i)\right\|^2 &= \lim_{p\to+\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\ \mu(A_{i,p})\right\|^2 \\ &\leq \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\ D(A_{i,p}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\ D(A_i) \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction étagée (c'est-à-dire mesurable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs) f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nous avons :

$$\text{(III)} \qquad \left\| \int f\ .\ d\mu \right\|^2 \leq \int |f|^2\ dD\ .$$

La bimesure d'Edwards associée à $(s_n\ ,\ n \geq 1)$ est donc dominée par la mesure $\pi\ .\ \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\ \mathrm{Log}^2(n+1)}\ \delta_{s_n}$, et par toutes les mesures positives finies majorant cette mesure. (III) est la traduction donnée à la domination par CHATTERJI ([4], lemme 2).

D - Processus harmonisables dont la mesure stochastique est à décroissance rapide.

IV.D.1. - Définition.- On dira qu'une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,A,P)$ est à décroissance rapide si $x^p \, . \, ||\mu||(\mathbb{R}-[-x,x]) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout entier $p \geq 1$.

IV.D.2. - Remarques :

- Toute mesure stochastique ν sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ vérifie : $||\nu||(\mathbb{R}-[-x,x]) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Si μ est à support compact, elle est évidemment à décroissance rapide.

- Soit μ et ν deux mesures stochastiques sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Si μ domine ν et si μ est à décroissance rapide, ν l'est aussi puisque :

$\forall x > 0$, $||\mu||\,(\mathbb{R}-[-x,x]) \geq ||\nu||\,(\mathbb{R}-[-x,x])$ (cf. lemme III.6.2. du chapitre I).

IV.D.3. - Théorème.- Soit $X = (X(t),\, t \in \mathbb{R})$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ. S'il existe un entier $p \geq 1$ tel que : $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p \, . \, ||\mu||([-n-1,-n[\cup]n,n+1]) < +\infty$, alors la fonction $|x|^p$ est μ-intégrable. Par conséquent X est de classe C^p et ses dérivées successives sont données par le théorème II.4.

Démonstration : Notons f la fonction $x \longmapsto |x|^p$ et pour tout entier $n \geq 1$, posons $f_n = f \, . \, 1_{[-n,n]}$.

$(f_n,\, n \geq 1)$ est une suite de fonctions bornées qui converge partout vers f.

Soit A un borélien quelconque de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$\left\|\int_A f_{n+1}\, d\mu - \int_A f_n\, d\mu\right\| = \left\|\int_A (f_{n+1} - f_n)\, d\mu\right\|$$

$$= \left\|\int_{A \cap ([-n-1,-n[\, \cup\,]n,n+1])} f_{n+1}\, d\mu\right\|$$

$$\leq (n+1)^p\, \|\mu\|\, ([-n-1,-n[\, \cup\,]n,n+1]) .$$

On en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\|\int_A f_{n+1}\, d\mu - \int_A f_n\, d\mu\right\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{r=0}^{p} C_p^r\, n^r\right)(\|\mu\|([-n-1,-n[\, \cup\,]n,n+1]))$$

$$= \sum_{r=0}^{p} C_p^r \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^r\, \|\mu\|\, ([-n-1,-n[\, \cup\,]n,n+1])\right)$$

$$< +\infty , \quad \text{par hypothèse} .$$

On en déduit que, quel que soit le borélien A, $\left(\int_A f_n\, d\mu ,\ n \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy. Comme $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, d'après le théorème II.4.3. du chapitre I, f est μ-intégrable, ce qu'il fallait démontrer. ■

IV.D.4. - Corollaire.- *Tout processus harmonisable dont la mesure stochastique spectrale est à décroissance rapide est de classe C^{∞}.*

Démonstration : Pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p\, \|\mu\|([-n-1,-n[\, \cup\,]\, n,n+1]) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^p \,.\, \|\mu\|\, (\mathbb{R}-[-n,n]) \qquad (S)$$

Comme μ est à décroissance rapide, $n^{p+2} \,.\, \|\mu\|(\mathbb{R}-[-n,n]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $n^p\, \|\mu\|\, (\mathbb{R}-[-n,n]) = O(\frac{1}{n^2})$, donc la série (S) converge et par conséquent on peut appliquer le théorème précédent, quel que soit l'entier $p \geq 1$. ■

IV.D.5. - Théorème.- Soit $X = (X(t),\ t \in \mathbb{R})$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ . On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $e^{ax} . ||\mu|| (\mathbb{R}-[-x,x]) \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$.
Alors X est de classe C^{∞} et nous avons :

$$X(t+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} X^{(n)}(t) \ , \quad t \in \mathbb{R} \ , \quad h \in]-a,a[\ .$$

Démonstration : Il suffit de montrer que quel que soit $\alpha \in]0,a[$, $f(x) = e^{\alpha|x|}$ est μ-intégrable, d'après le théorème III.2.

Pour cela, utilisons les fonctions $f_n = f \,.\, 1_{[-n,n]}$, $n \geq 1$.
Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||\int_A f_{n+1}\, d\mu - \int_A f_n\, d\mu|| = \sum_{n=1}^{+\infty} ||\int_{A\cap([-n-1,-n[\ \cup\ ]n,n+1])} f_{n+1}\, d\mu||$$

$$\leq \sum_{n\geq 1} e^{\alpha(n+1)} ||\mu|| (\mathbb{R}-[-n,n]) \ .$$

Comme le terme général de cette dernière série est un $O(\frac{1}{n^2})$, parce que $\alpha < a$ et que $e^{an} ||\mu||(\mathbb{R}-[-n,n]) \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$, on en déduit que $(\int_A f_n\, d\mu \ , n \geq 1)$ est une suite de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega,A,P)$, quel que soit le borélien A. Comme les fonctions f_n , $n \geq 1$, sont mesurables bornées et qu'elles convergent vers f , f est μ-intégrable d'après le théorème II.4.3. du chapitre I. ∎

IV.D.6. - On en déduit évidemment le corollaire suivant :

Corollaire.- Si la mesure stochastique spectrale μ d'un processus harmonisable X vérifie :

$$\forall a > 0 \ , \qquad e^{ax} . ||\mu|| (\mathbb{R}-[-x,x]) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \ ,$$

alors X est analytique

CHAPITRE III

SUR LA REGULARITE DES TRAJECTOIRES DE CERTAINS PROCESSUS HARMONISABLES.

I - INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, on démontre des critères pour que presque toutes les trajectoires d'un processus harmonisable soient de classe C^k . Ces résultats sont basés sur un critère de N. Kôno pour qu'un L_p-processus ait presque toutes ses trajectoires de ce type. On commence d'abord par traduire le critère de Kôno pour les f.a.r. mesurables séparables du second ordre stationnaires continues dont la mesure spectrale possède certains moments ; puis on transfère ces propriétés de régularité des trajectoires à certains processus harmonisables, en utilisant la technique de domination.

II - SUR LA DERIVABILITE DES TRAJECTOIRES D'UNE F.A.R. STATIONNAIRE.

II.1. - Opérateurs - différences.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ et $h \in [0,1[$

$\forall t \in [0,1-h]$, on pose $(\Delta_h^{(1)}(f))(t) = f(t+h) - f(t)$. Ensuite si $2h < 1$, on pose :

$$\forall t \in [0,1-2h] , \quad (\Delta_h^{(2)}(f))(t) = \Delta_h^{(1)}(\Delta_h^{(1)}(f))(t)$$

$$= f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)$$

et ainsi de suite. Si $(r+1)h < 1$ et $(\Delta_h^{(r)}(f))(t)$ ayant été défini pour $t \in [0,1-rh]$, on pose

$$\forall t \in [0,1-(r+1)h] , \quad (\Delta_h^{(r+1)}(f))(t) = \Delta_h^{(1)}(\Delta_h^{(r)}(f))(t) \quad .$$

On démontre aisément que ces opérateurs - différences vérifient (cf. [13], p. 14) :

- si $rh < 1$,

$$\forall t \in [0,1-rh] , \quad (\Delta_h^{(r)}(f))(t) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k \, . \, f(t+kh)$$

- et si $(p+q)\, h < 1$,

$$\forall t \in [0,1-(p+q)h] , \quad (\Delta^{(p+q)}(f))(t) = (\Delta_h^{(p)}(\Delta_h^{(q)}(f)))(t)$$

$$= (\Delta_h^{(q)}(\Delta_h^{(p)}(f)))(t) \; .$$

II.2. - L_p-processus .

N. Kôno ([13], p. 1) appelle L_p-processus, $p \geq 1$ toute f.a.r. $X : [0,1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'espace de probabilité (Ω,A,P), mesurable, séparable (cf. [18], III.4.) dont presque toutes les trajectoires $X(.,\omega)$ appartiennent à $L^p([0,1], dt)$, c'est-à-dire que :

$$P\{\omega : \int_0^1 |X(t,\omega)|^p \, . \, dt < +\infty\} = 1$$

(la mesurabilité de $\{\omega : \int_0^1 |X(t,\omega)|^p \, . \, dt < +\infty\}$ est assurée par la mesurabilité relativement à $A \otimes B([0,1])$ de la f.a.r. X , d'après le théorème de Fubini).

II.3. - Critère de N. Kôno.

En utilisant les opérateurs - différences, N. Kôno a obtenu le critère intégral suivant pour la dérivabilité de presque toutes les trajectoires d'un L_p-processus ([13], cor. 3, p. 4) :

Théorème.- Soit X un L_p-processus qui vérifie, pour un certain réel $\alpha > 0$ l'inégalité (I) suivante :

$$(\mathrm{I}) \quad \int_0^{\alpha} \left(\int_0^{\delta} \int_0^{1-(r+1)h} E(|(\Delta_h^{(r+1)}X)(t)|^p)\, dt\, dh\right)^{1/p} \delta^{-(1+r+\frac{2}{p})}\, d\delta < +\infty .$$

Alors presque toutes les trajectoires de X sont de classe C^r .

II.4. - Remarques :

a) $C^r_{\mathbb{R}}([0,1])$ désignant l'ensemble des fonctions réelles de classe C^r sur $[0,1]$, on peut démontrer que : $\{\omega : X(.,\omega) \in C^r_{\mathbb{R}}\ [0,1]\} \in A$, si bien que le théorème de N. Kôno signifie que : $P\{\omega : X(.,\omega) \in C^r_{\mathbb{R}}\ [0,1]\} = 1$.

b) Le théorème de N. Kôno est aussi valable lorsque X est une f.a.c. dont les parties réelle et imaginaire sont des L_p-processus. En effet, si $X = \eta + i\xi$ où η (resp. ξ) est la partie réelle (resp. imaginaire) de X , on a pour $t \in [0,1-rh]$, $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}(\Delta_h^{(r)}\, X(.,\omega))(t) &= \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\, C_r^k\, X(t+kh,\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\, C_r^k\, \eta(t+kh,\omega) + i \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\, C_r^k\, \xi(t+kh,\omega) \\ &= (\Delta_h^{(r)}\, \eta(.,\omega))(t) + i(\Delta_h^{(r)}\, \xi(.,\omega))(t) .\end{aligned}$$

Donc si la condition (I) est vérifiée pour le processus complexe X , elle est aussi vérifiée pour ses composantes réelle et imaginaire, dont presque toutes ses trajectoires sont donc de classe C^r .

c) Si X est un processus harmonisable réel, on sait ([17], p. V.1.) qu'il est continu en moyenne quadratique, donc en probabilité. D'après un théorème de Doob (voir [18] p. 87), il existe une f.a.r. $\tilde{X}$ définie sur le même espace de probabilité, équivalente à X , qui est séparable et mesurable. Evidemment, puisque les processus harmonisables sont caractérisés par leur noyau, la f.a.r. $\tilde{X}$ est harmonisable. $\tilde{X}$ est aussi appelée une modification de X.

d) Si X est une f.a.r. harmonisable séparable et mesurable, sa restriction à l'espace - temps $[0,1]$ est un L_2-processus, puisque nous avons :

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^1 X^2(t,\omega)\ .\ dt\right) &= \int_\Omega \left(\int_0^1 X^2(t,\omega)\ dt\right) P(d\omega) \\ &= \int_0^1 \left(\int_\Omega X^2(t,\omega)\ P(d\omega)\right) dt \\ &= \int_0^1 ||X(t)||^2\ dt \\ &\leqslant (||\mu||(\mathbb{R}))^2 < +\infty \quad , \end{aligned}$$

où μ est la mesure stochastique spectrale de X. On en déduit que pour presque tout ω , on a :

$$\int_0^1 X^2(t,\omega)\ dt < +\infty \quad . \blacksquare$$

Ces deux dernières remarques sont utilisées ci-dessous.

II.5. - <u>Théorème</u>.- Soit $X = (X(t)\ ;\ t \in \mathbb{R})$ une f.a.r. du second ordre stationnaire et continue dont la mesure spectrale m admet un moment d'ordre 4 fini : $\int x^4\ m(dx) < +\infty$.

Alors il existe une modification $\tilde{X}$ de X dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

Démonstration : D'après le théorème de Doob rappelé en II.4.c., il existe une modification $\tilde{X}$ de X qui est mesurable et séparable.

Cas $\int x^4\, m(dx) = 0$. On a alors $m = m(o)\,\delta_o$, donc $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $E((\tilde{X}(t) - \tilde{X}(s))^2) = 0$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $P\{\tilde{X}(t) = \tilde{X}(o)\} = 1$. Comme de plus $\tilde{X}$ est séparable, presque toutes les trajectoires de X sur $\mathbb{R}$ sont constantes. Par conséquent, le théorème est trivialement vrai dans ce cas.

Cas $0 < \int x^4\, m(dx) < +\infty$. On pose $k(h) = E(X(h).X(o))$, $h \in \mathbb{R}$.

Il s'agit de montrer que le processus $\tilde{X}$ vérifie la condition (I) du théorème de Kôno pour $r = 1$ et $p = 2$.

Soit $t \in [0,1-2h]$ et $h \in [0,1/2[$.

$$E(|(\Delta_h^{(2)}X)(t)|^2) = E(|X(t) - 2X(t+h) + X(t+2h)|^2)$$
$$= 6k(o) - 8k(h) + 2k(2h) .$$

Comme $k(h) = \int e^{ihx} . m(dx)$, cette égalité s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} E(|(\Delta_h^{(2)}\, X)(t)|^2) = g(h) &= \int (6 - 8\cos(hx) + 2\cos(2hx))\, m(dx) \\ &= 4 \int (1-\cos(hx))^2\, m(dx) \\ &= 16 \int (\sin(\tfrac{hx}{2}))^4\, m(dx) \\ &= 16 \int F(h,x)\, m(dx), \end{aligned}$$

en posant $F(h,x) = (\sin(\frac{hx}{2}))^4$.

Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial^r F}{\partial h^r}$, pour $r = 1,2,3,4$, afin de déterminer le comportement de g au voisinage de 0 .

$$\frac{\partial F}{\partial h}(h,x) = 2x \sin^3(\frac{hx}{2}) \cdot \cos(\frac{hx}{2})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(h,x) = x^2 \; (3 \sin^2(\frac{hx}{2}) - 4 \sin^4(\frac{hx}{2})$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial h^3}(h,x) = \frac{x^3}{2}(\sin hx) \; (3 - 8 \sin^2 \frac{hx}{2})$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial h^4}(h,x) = x^4 (\frac{\cos(hx)(3 - 8 \sin^2(\frac{hx}{2}))}{2} - 2 \sin^2(hx)) \quad .$$

On en déduit que $|\frac{\partial^r F}{\partial h^r}(h,x)| \leq \frac{9}{2} |x|^r$, pour $r = 1,2,3,4$ et pour $x, h \in \mathbb{R}$.

Puisque $\int x^4 \, . \, m(dx) < + \infty$, on peut donc appliquer quatre fois de suite le théorème sur la dérivation de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre, qui permet de conclure que g est de classe C^4 et que pour $r = 1,2,3$ et 4 , on a :

$$g^{(r)}(h) = 16 \int \frac{\partial^r F(h,x)}{\partial h^r} \; m(dx) \quad .$$

On voit alors que :

- $g(o) = g^{(1)}(o) = g^{(2)}(o) = g^{(3)}(o) = 0$

- $g^{(4)}(o) = 24 \int x^4 \; m(dx) > 0$.

$g^{(4)}$ étant continue, il existe $\alpha > 0$, $\alpha < \frac{1}{2}$ tel que :

$$|t| \leq \alpha \Longrightarrow g^{(4)}(t) > 0 .$$

On en déduit successivement que sur $]0,\alpha]$ $g^{(3)}$, $g^{(2)}$, $g^{(1)}$ sont strictement positives, donc g est strictement croissante sur $[0,\alpha]$. On déduit de plus des calculs précédents qu'au voisinage de 0 , $g(\delta)$ est équivalent à $(\int x^4 \, m(dx)) \, \delta^4$ (1).

Nous pouvons maintenant montrer que le critère de Kôno est vérifié.

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\int_0^\delta \int_0^{1-2h} E(|(\Delta_h^{(2)}\tilde{X})(t)|^2) \, dt \, dh\right)^{1/2} \delta^{-3} \, d\delta$$

$$= \int_0^\alpha \left(\int_0^\delta \int_0^{1-2h} g(h) \, dt \, dh\right)^{1/2} \delta^{-3} \, d\delta$$

$$= \int_0^\alpha \left(\int_0^\delta (1-2h) \, g(h) \, dh\right)^{1/2} \delta^{-3} \, d\delta$$

$$\leq \int_0^\alpha (\delta g(\delta))^{1/2} \delta^{-3} \, d\delta \, , \quad \text{car} \quad (1-2h) \, g(h) \leq g(\delta) \quad \text{dans} \quad [0,\delta]$$

$$= \int_0^\alpha \delta^{-5/2} (g(\delta))^{1/2} \, d\delta < +\infty \, , \quad \text{d'après (1)} .$$

Donc les restrictions de presque toutes les trajectoires de $\tilde{X}$ à l'espace-temps $[0,1]$ sont de classe C^1 . ■

II.6. - Théorème.- Soit $X = (X(t) \, , \, t \in \mathbb{R})$ une f.a.r. du second ordre stationnaire et continue dont la mesure spectrale m a un moment d'ordre 4 fini. Alors il existe une modification $\tilde{X}$ de X dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme précédemment, on introduit une version séparable et mesurable quelconque $\tilde{X}$ de X.

$\forall n \geq 1$, posons $\tilde{X}_n(t) = \tilde{X}(n(2t-1))$, $t \in \mathbb{R}$

ou plus précisément : $\tilde{X}_n(t,\omega) = \tilde{X}(n(2t-1),\omega)$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$,

(Ω,A,P) désignant l'espace de probabilité sur lequel est définie la f.a.r. donnée X.

Quel que soit $n \geq 1$, $\tilde{X}_n$ est une f.a.r. du second ordre mesurable, séparable, continue et stationnaire puisque :

$$\forall t , s \in \mathbb{R} , \quad E(\tilde{X}_n(t).\tilde{X}_n(s)) = k\ (n(2t-1) - n(2s-1))$$

$$= k\ (2n(t-s))$$

$$= \int e^{2in(t-s)x}\ m(dx)$$

$$= \int e^{i(t-s)x}\ m_{\psi_n}(dx) ,$$

où m_{ψ_n} est la mesure image de m par l'application $\psi_n(x) = 2nx$.
D'après le théorème de transfert, cette mesure, qui est la mesure spectrale de $\tilde{X}_n$ vérifie :

$$\int x^4\ m_{\psi_n}(dx) = (2n)^4 \int x^4\ m(dx) < +\infty .$$

D'après le théorème précédent, pour presque tout ω, la trajectoire $\tilde{X}_n(t,\omega)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, donc $\tilde{X}(t,\omega)$ est de classe C^1 sur $[-n,n]$. On en déduit que presque toutes les trajectoires de $\tilde{X}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.7. - Remarques : La condition $\int x^4\, m(dx) < +\infty$ du théorème précédent implique aussi (voir les rappels II.2. du chapitre II) que X est de classe C^2 au sens de la convergence en moyenne quadratique. En particulier, on a : $X^{(1)}(t) = \int e^{itx}\,(ix)\,\mu(dx)$, $t \in \mathbb{R}$, où μ est la mesure stochastique spectrale orthogonale de X.

Comme presque toutes les trajectoires de $\tilde{X}$ sont de classe C^1 , pour tout instant t l'égalité $X^{(1)}(t) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{\tilde{X}(t+h) - \tilde{X}(t)}{h}$ est vraie aussi bien au sens de la convergence en moyenne quadratique qu'au sens de la convergence p.s.

On notera $\tilde{X}^{(1)}$ une f.a.r. mesurable dont presque toutes les trajectoires vérifient : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{X}^{(1)}(t,\omega) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{X}(t,\omega)$.

C'est une version de $X^{(1)}$, qui est séparable.

II.8. - Théorème.- Soit $X = (X_t\ ,\ t \in \mathbb{R})$ une f.a.r. du second ordre stationnaire et continue, de mesure spectrale m telle que : $\int x^{2(r+1)}\, m(dx) < +\infty$ pour un certain entier $r \geq 1$.
Alors il existe une modification $\tilde{X}$ de X dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^r sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme $\int x^4\, m(dx) < +\infty$, il existe d'après le théorème précédent une modification de X notée $\tilde{X}$ dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Si $r = 1$, la démonstration est terminée. Supposons donc maintenant que l'on a $r > 1$.

La f.a.r. $\tilde{X}^{(1)}$ définie ci-dessus est mesurable séparable, stationnaire et continue, et sa mesure stochastique spectrale orthogonale est la mesure $\mu^{(1)}$ de densité ix par rapport à la mesure stochastique spectrale μ de X. Sa mesure spectrale $m^{(1)}$ est la mesure de densité x^2 par rapport à m puisque pour tout borélien B, on a :

$$m^{(1)}(B) = ||\mu^{(1)}(B)||^2 = ||\int_B ix \, d\mu(x)||^2$$

$$= \iint_{B\times B} xy \, M(dx,dy) \quad , \text{ où } M \text{ est la bimesure de } X$$

$$= \int_B x^2 \, m(dx) \ .$$

Puisque $\int x^6 \, m(dx) = \int x^4 \, m^{(1)}(dx)$ et comme $\tilde{X}^{(1)}$ est mesurable et séparable, presque toutes ses trajectoires sont de classe C^1 d'après le théorème précédent, donc presque toutes les trajectoires de X sont de classe C^2.

Si $r = 2$, la démonstration est terminée. Sinon, on itère le procédé.

III - TRANSFERT DES PROPRIETES PRECEDENTES A CERTAINS PROCESSUS HARMONISABLES.

III.1. - Théorème.- Soit X un processus harmonisable réel dominé par une f.a.r. du second ordre Y stationnaire et $(r+1)$-fois dérivable en moyenne quadratique. Alors il existe une modification $\tilde{X}$ de X et une modification $\tilde{Y}$ de Y dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^r sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

a) Y est une f.a.r. du second ordre stationnaire et $(r+1)$-fois dérivable, donc $\int x^{2r+2} \, m(dx) < +\infty$, où m est la mesure spectrale de Y (cf. II.2., chap. II). D'après le théorème II.8., il existe une modification $\tilde{Y}$ de Y dont presque toutes les trajectoires sont de classe C^r sur $\mathbb{R}$.

b) La suite de la démonstration concerne le processus X qui est harmonisable sans être nécessairement stationnaire ni même fortement harmonisable. Soit X une version mesurable et séparable de X. Montrons que le critère de Kôno s'applique pour $r = 1$, $p = 2$ à la restriction de $\tilde{X}$ à l'espace-temps $[0,1]$.

La démonstration repose entièrement sur l'inégalité de domination suivante : $\forall h \in [0, 1/2[$ et $\forall t \in [0, 1-2h]$, nous avons :

$$E(|(\Delta_h^{(2)} X)(t)|^2) = E((X(t)-2X(t+h) + X(t+2h))^2)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} a_i \bar{a}_j \; E(X(t_i) X(t_j)) ,$$

où $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$, $t_1 = t$, $t_2 = t+h$, $t_3 = t+2h$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{3} a_i \bar{a}_j \; E(Y(t_i) Y(t_j)) , \quad \text{car } Y \text{ domine } X$$

$$= E(|(\Delta_h^{(2)} Y)(t)|^2) .$$

Puisque la condition (I) du critère de Kôno est satisfaite par Y , parce que $\int x^4 \, m(dx) < +\infty$ (voir la démonstration du théorème II.5.), elle est donc vérifiée par $\tilde{X}$. Par conséquent presque toutes les trajectoires de $\tilde{X}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$.

Plus généralement, le processus harmonisable $\tilde{X}_n$, $n \geq 1$, défini par $\tilde{X}_n(t,\omega) = \tilde{X}(n(2t-1),\omega)$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ est dominé par la f.a.r. Y_n définie de même par $Y_n(t,\omega) = Y(n(2t-1),\omega)$. Cette f.a.r. vérifie aussi la condition (I) (voir la démonstration du théorème II.6.). Donc X_n a presque toutes ses trajectoires de classe C^1 sur $[0,1]$ et par conséquent X a presque toutes ses trajectoires de classe C^1 sur $[-n,n]$, quel que soit $n \geq 1$. Presque toutes ses trajectoires sont donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Si $r = 1$, la démonstration est terminée. On suppose dans la suite $r > 1$.

d) Lemme.- Si X et Y sont deux f.a.r. du second ordre sur $\mathbb{R}$, dérivables en moyenne quadratique et si X est dominée par Y , alors le processus dérivé $X^{(1)}$ est dominé par $Y^{(1)}$.

Démonstration du lemme : Soient K_X et K_Y les noyaux de X et de Y. Comme Y domine X , $K = K_Y - K_X$ est un noyau de type positif. On sait que l'on peut construire un espace de probabilité, et sur cet espace deux f.a.r. gaussiennes centrées indépendantes V et W de noyaux respectifs K_X et K . Alors $U = V + W$ a pour noyau K_Y .

Comme X et Y sont dérivables en moyenne quadratique, V et U le sont aussi, ainsi que $W = U - V$. De plus on a $U^{(1)} = V^{(1)} + W^{(1)}$; et $V^{(1)}$ et $W^{(1)}$ sont deux processus indépendants centrés.

Par conséquent, on a $K_{U^{(1)}} = K_{V^{(1)}} + K_{W^{(1)}}$, ou $K_{Y^{(1)}} - K_{X^{(1)}} = K_{W^{(1)}}$, ce qui montre que $Y^{(1)}$ domine $X^{(1)}$. ■

e) *Suite de la démonstration*. Le processus $\tilde{X}^{(1)}$ introduit dans les remarques II.7. est donc un processus harmonisable réel mesurable séparable dominé par $Y^{(1)}$ dont la mesure spectrale $m^{(1)}$ satisfait à :

$$\int x^{2r}\, m^{(1)}(dx) = \int x^{2r+2}\, m(dx) < +\infty .$$

En particulier on a : $\int x^4\, m^{(1)}(dx) < +\infty$. D'après le résultat du paragraphe (b) ; on en déduit que presque toutes les trajectoires de $\tilde{X}^{(1)}$ sont de classe C^1 , donc presque toutes les trajectoires de $\tilde{X}$ sont de classe C^2 . Si $r = 2$, la démonstration est terminée ; sinon, on itère le procédé. ∎

III.3. - Remarque : D'après le théorème de domination rappelé au paragraphe IV.7. du chapitre I, n'importe quel processus harmonisable X est toujours dominé par un processus stationnaire continu Y. Le problème est de trouver à quelles conditions portant sur le processus donné X , il existe un processus stationnaire continu Y dominant X , et dont la mesure spectrale m admette certains moments. Ce problème est ouvert si X n'est pas fortement harmonisable. Sinon, on obtient le résultat satisfaisant suivant :

III.4. - Théorème.- Soit X un processus réel fortement harmonisable, mesurable et séparable. M^* désignant la mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ qui prolonge sa bimesure, si

(II) $$\int x^{2(r+1)} |M^*| (dx \times \mathbb{R}) < +\infty \text{ , alors X est de classe } C^{r+1} \text{ ,}$$

et presque toutes ses trajectoires sont de classe C^r sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : D'après ([17], th. 12, p. IV.41), la condition (II) implique que la fonction x^{r+1} est intégrable par rapport à la mesure stochastique spectrale μ du processus harmonisable X. Il est donc de classe C^{r+1} d'après le théorème II.4. du chapitre II.

De plus toute f.a.r. du second ordre stationnaire continue de mesure spectrale $m(B) = |M^*| (B \times \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ domine X (IV.B., chap. II) et est (r+1)-fois dérivable en moyenne quadratique (II.2., chap. II). On peut donc appliquer le théorème III.1. ∎

III.5. - A titre d'exemple, notons que :

Théorème.- Toute f.a.r. du second ordre X stationnaire, continue, mesurable, séparable, dont la mesure stochastique spectrale est à décroissance rapide a presque toutes ses trajectoires de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème III.1., X étant de classe C^{∞} en moyenne quadratique (cor. IV.D.4., chap. II).■

III.6. - On peut de nouveau faire le même genre de remarque qu'en III.3. : quand un processus harmonisable réel est-il dominé par une f.a.r. X du second ordre stationnaire continue dont la mesure stochastique spectrale est à décroissance rapide ? Un tel processus mesurable et séparable aurait aussi presque toutes ses trajectoires de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, ce qui donnerait un nouveau théorème de transfert de propriétés du processus dominant au processus dominé.

III.7. - On peut énoncer un tel théorème dans le cas particulier suivant :

Théorème.- Tout processus harmonisable mesurable et séparable de mesure stochastique spectrale à support compact, étant dominé par un processus stationnaire continu dont la mesure stochastique spectrale est à support compact, a presque toutes ses trajectoires de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

B I B L I O G R A P H I E.

[1] ABREU J.L. - A note on harmonizable and stationary sequences, Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 15 (1970) p. 48-51.

[2] BOCHNER S. - Stationarity, boundedness, almost periodicity of random-valued functions ; Proc. Third Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II (1956), p. 7-27.

[3] CHANG D.K. and RAO M.M. - Bimeasures and nonstationary processes ; in : Real and stochastic analysis, M.M. Rao Ed. J. Wiley (New-York) (1986) p. 7-118.

[4] CHATTERJI S.D. - Orthogonally scattered dilation of Hilbert space valued set functions ; in : Proc. Measure Theory, Oberwolfach (1981).

[5] CRAMER H. and LEADBETTER M.R. - Stationary and related stochastic processes ; Wiley (New-York) (1967).

[6] DEHAY D. - Quelques lois des grands nombres pour les processus harmonisables ; thèse de 3ème cycle (1985), U.S.T.L.

[7] DEHAY D. - On a class of asymptotically stationary harmonizable processes ; J. Mult. Analysis, Vol. 22 n° 2(1987) p. 251-257.

[8] DEHAY D. - Quelques propriétés nouvelles des champs harmonisables ; thèse d'Université, (1987). U.S.T.L.

[9] DEHAY D. - Communications personnelles.

[10] DESCOMBES R. - Cours de mathématiques ; Vuibert, Paris (1962).

[11] DUNFORD N., SCWARTZ J.T. - Linear operators, part. I : General Theory ; Interscience Pub. New-York (1957).

[12] EDWARDS D.A. - Vector - valued measure and bounded variation in Hilbert space ; Math. Scand. 3 (1955), p. 90-96.

[13] KONO N. - A remark on Garsia's integral test about sample continuity of L_p-processes ; J. Math. Kyoto Univ. 20-1 (1979) p. 1-9.

[14] LOEVE M. - Probability theory ; 4^{th}. Ed., Vol. II, Springer-Verlag (Berlin) (1978).

[15] LUKACS E. - Characteristic functions ; Griffin, London (1960).

[16] MIAMEE A.G., SALEHI H. - Harmonizability, V-boundedness and stationary dilation of stochastic processes ; Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), p. 37-50.

[17] MOCHÉ R. - Introduction aux processus harmonisables ; cours de D.E.A. (1985), U.S.T.L.

[18] NEVEU J. - Bases mathématiques du calcul des probabilités ; Masson (Paris) (1964).

[19] NIEMI H. - Stochastic processes as Fourier transforms of stochastic measures ; Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I : Math. n° 591 (1975) p. 1-47.

[20] NIEMI H. - Diagonal measure of a positive definite bimeasure, in : Proc. Measure Theory, Oberwolfach 1981, Lectures Notes in Math. 945, Springer-Verlag, Berlin (1982), p. 237-246.

[21] RAO M.M. - Harmonizable processes : structure theory ; l'enseignement mathématique, t. XXVIII, fasc. 3-4 (1982) p. 295-351.

[22] ROZANOV Yu. A. - Spectral analysis of abstract functions ; Th. Prob. Appl., Vol. IV (1959), p. 271-287.

[23] SCHWARTZ L. - Analyse hilbertienne ; Col. Méthodes, Hermann (Paris) (1979).

[24] THOMAS E. - L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle ; Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 20 (1970) p. 55-191.

R E S U M E

On s'intéresse surtout à la relation de domination entre les processus harmonisables unidimensionnels quelconques dont l'espace-temps est $\mathbb{R}$. Ces notions sont rappelées au chapitre I où sont rassemblés également divers résultats auxiliaires utiles.

Le chapitre II est consacré exclusivement à des propriétés du second ordre, à savoir la dérivabilité et l'analycité au sens L^2 des processus harmonisables sur $\mathbb{R}$, les conditions obtenues portant sur la mesure stochastique spectrale μ de ces processus, ou sur certaines mesures positives finies dominant μ . Des critères simples en sont déduits lorsque μ est à support compact ou à décroissance rapide.

On trouve au chapitre III des conditions suffisantes pour qu'un processus harmonisable ait presque toutes ses trajectoires de classe C^k ou C^∞ en traduisant au cas des f.a.r. Y du second ordre stationnaires continues (L^2) un résultat plus général de N. Kôno, puis en transférant ces propriétés aux processus harmonisables dominés par Y.

M O T S   C L E S

- PROCESSUS HARMONISABLES
- DILATATIONS STATIONNAIRES
- DOMINATION
- PROCESSUS ANALYTIQUES
- REGULARITE DES TRAJECTOIRES .