N° d'ordre : 1413

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3eme CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Léonard NIÉRÉ

ESTIMATION DES DISTRIBUTIONS DE PALM
MESURE INTENSITÉ CONDITIONNELLE

Membres du Jury :

J. DENEL, *Président*
P. JACOB, *Rapporteur*
J. DELPORTE
M. DELECROIX } *Examinateurs*

Soutenue le 18 novembre 1987

N° d'ordre : 1413

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Léonard NIÉRÉ

ESTIMATION DES DISTRIBUTIONS DE PALM
MESURE INTENSITÉ CONDITIONNELLE

Membres du Jury :

J. DENEL, *Président*
P. JACOB, *Rapporteur*
J. DELPORTE
M. DELECROIX } *Examinateurs*

Soutenue le 18 novembre 1987

A mon père,

A ma mère .

Toute ma gratitude à Monsieur le Professeur J. DENEL qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

A force de patience et d'encouragements, Monsieur le Professeur P. JACOB m'a permis de présenter aujourd'hui ce travail. Je lui prie de croire en ma profonde reconnaissance.

Monsieur le Professeur J. DELPORTE a accepté de faire partie de ce jury, je l'en remercie vivement.

Puisse Monsieur M. DELECROIX trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepter de juger ce travail.

Mes remerciements à Arlette LENGAIGNE pour sa contribution à la présentation de ce travail.

P L A N

CHAPITRE I

SUR L'ESTIMATION DES DISTRIBUTIONS DE PALM.

I.1. - INTRODUCTION.

La notion de distribution de Palm a été introduite, à l'origine, pour des processus ponctuels simples et définie comme étant la loi conditionnelle Q_s du processus sachant que ce processus admet une masse ponctuelle en s . Si l'on suppose en plus que ce processus est stationnaire sur la droite réelle (ou sur un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^d$), on obtient une mesure de Palm, finie si le processus est presque sûrement de Radon. Un estimateur de la transformée de Laplace de cette mesure, sans biais, a été étudié par A.F. KARR ([11]).

Si l'on considère par contre une mesure aléatoire quelconque ξ, l'idée intuitive de conditionnement utilisée dans le cas d'un processus ponctuel pour la définition des distributions de Palm n'a plus de sens. Ces dernières sont définies, à partir d'une mesure σ-finie C sur l'espace produit $X \times \mathbb{M}$ de l'espace Polonais X et de l'espace des mesures $\mathbb{M}$, appelée mesure de Campbell. En effet, par désintégration de C suivant la mesure moyenne de ξ, on obtient une famille de probabilités $Q_s (s \in X)$ sur M appelées distributions de Palm. Pour M fixé, élément de la tribu borélienne de M, associée à la topologie vague, nous nous attacherons à étudier un estimateur de la fonction f sur X, définie par $f(s) = Q_s(M)$, inspiré par celui donné par S. SALEH ([19]) dans le cadre des mesures aléatoires composites. La méthode consiste en fait, sous certaines hypothèses de régularité, à disposer d'une suite de fonctions approximant la fonction f et à étudier l'écart entre cette suite de fonctions et un estimateur de f fortement inspiré par cette suite.

Dans le paragraphe I.2., nous introduisons la notion de distributions de Palm, la suite de fonctions indiquée plus haut et l'estimateur à étudier.

Des théorèmes portant sur l'étude de l'écart entre la suite de fonctions énoncée et l'estimateur de f sont donnés au paragraphe I.3.

L'étude de l'estimateur proposé est faite dans le paragraphe I.4. qui comprend quatre parties. La première concerne l'étude de la convergence en probabilité et presque complète de l'estimateur vers la fonction à estimer f. Des conditions suffisantes de convergence en probabilité et presque complète y sont indiquées, dans le cas d'un espace localement compact et à base dénombrable (L.C.C.B.) X et sur $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). En plus d'une condition minimum de convergence uniforme en probabilité, des conditions suffisantes de convergence uniforme en probabilité et presque complète sont données dans la seconde partie. Dans la troisième partie, on utilise une mesure de Radon positive μ, égale à la mesure moyenne de la mesure aléatoire considérée si X est L.C.C.B. ou égale à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$. Des conditions suffisantes de convergence en probabilité, presque complète et en moyenne de f_n vers f dans les topologie $L^1(X, \mathcal{B}_b, \mu)$ et $L^2(X, \mathcal{B}_b, \mu)$ sont données. Dans la dernière partie, on montre que l'étude du biais et de l'aléa se ramène à des études déjà faites pour un borélien borné fixé. L'étude est faite pour un borélien borné dépendant de la taille de l'échantillon.

I.2. - DEFINITIONS ET PROPRIETES DE BASE.

Soient :

(Ω, A, P) : un espace probabilisé ,

X : un espace de Hausdorff localement compact et à base dénombrable, donc Polonais et que l'on suppose muni de la métrique d ,

$\mathcal{B}$: la tribu borélienne de X ,

$\mathcal{B}_b$: l'anneau des boréliens bornés de X , c'est-à-dire des boréliens relativement compacts (les éléments de $\mathcal{B}_b$ sont alors bornés pour toute métrisation de X) ,

$\mathbb{M}$: l'espace des mesures positives de Radon sur $\mathcal{B}$, muni de la tribu borélienne $\mathcal{M}$ associée à la topologie vague ,

ξ : une mesure aléatoire sur X qui est une application mesurable de Ω dans $\mathbb{M}$, d'intensité $E\xi$ et de loi P_ξ : $E\xi$ est la fonction d'ensemble définie par : $\forall B \in \mathcal{B}$ $(E\xi)(B) = E(\xi(B))$ et P_ξ est la loi de probabilité de ξ sur $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$.

On appelle <u>mesure de Campbell</u> de ξ, la mesure C sur $(X \times \mathbb{M} , \mathcal{B} \otimes \mathcal{M})$ définie par :

$$\int_{X\times\mathbb{M}} g \, dC = \int_{\mathbb{M}} P\,(d\mu) \int_X g(s,\mu)\, \mu(ds) \qquad (1)$$

où g est une application mesurable définie sur $X \times \mathbb{M}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ ([20]).

En prenant $g = 1_{B\times M}$ $(B \in \mathcal{B} , M \in \mathcal{M})$, on obtient :

$$C(B \times M) = \int_M \mu(B)\ P_\xi(d\mu) \tag{1)'$$

$$= E[\xi(B)\ ;\ \xi \in M]$$

qui est la définition équivalente donnée par Kallenberg ([10]). Pour tout événement A et toute variable aléatoire X , $E[X\ ;\ A]$ signifie $\int_A X\, dP$.

Nous supposons que l'intensité $E\xi$ est une mesure de Radon, c'est-à-dire telle que $\forall B \in \mathcal{B}_b$, $E\xi(B) < +\infty$ et l'appellerons désormais la <u>mesure moyenne</u> de ξ. L'espace X étant localement compact et à base dénombrable, $E\xi$ est σ-finie ; $\mathbb{M}$ étant Polonais dans la topologie vague, il existe alors un noyau de transition ($E\xi$ - presque sûrement unique) $(Q_s\ ,\ s \in X)$ tel que C admette une désintégration par rapport à $E\xi$:

$$\int_{X\times\mathbb{M}} g\, dC = \int_X E\ (ds) \int_{\mathbb{M}} g(s,\mu)\ Q_s(d\mu) \tag{2}$$

où $g : X \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable ([10] page 164).

Les probabilités Q_s sont appelées <u>distributions de Palm</u> de ξ et la famille $(Q_s\ ,\ s \in X)$ <u>noyau de Palm</u> de ξ.

Pour $g = 1_{B\times M}$ $(B \in \mathcal{B}\ ,\ M \in \mathcal{M})$, on obtient :

$$C(B \times M) = \int_B Q_s(M)\ E\xi(ds) \tag{2)'$$

On voit alors apparaître très clairement l'absolue continuité de la mesure marginale $C(.\times M)$ (M fixé) par rapport à $E\xi$. Par conséquent, pour M fixé, la fonction f définie par :

$$f(s) = Q_s(M)\quad ,\quad s \in X$$

est une dérivée de Radon-Nikodym de $C(.\times M)$ par rapport à $E\xi$.

$$f(s) = Q_s(M) = \frac{C(ds \times M)}{E\xi(ds)} \quad \text{pour } E\xi\text{- presque tout } s .$$

D'après (1)', on vérifie que si $B \in \mathcal{B}_b$:

$$C(B \times \mathbb{M}) = E\xi(B) < +\infty$$

et donc que $Q_s(\mathbb{M}) = 1$ (pour $E\xi$ - presque tout $s \in X$) , ce qui confirme bien le fait que les Q_s sont des probabilités. Celles-ci peuvent être considérées comme étant les lois de probabilités de mesures aléatoires ξ_s :

$$Q_s(M) = P(\xi_s \in M)$$

La formule (2)' s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C(B \times M) &= \int_B P(\xi_s \in M)\ E\xi(ds) \\ &= \int_B E\ [1_M(\xi_s)]\ E\xi(ds) \\ &= \int_X E\ [1_B(s)\ 1_M(\xi_s)]\ E\xi(ds) \quad . \end{aligned}$$

Plus généralement, on a d'après (1), (2) et le théorème de transfert :

$$\int_X E\ [g(s,\xi_s)]\ E\xi(ds) = E\Big[\int_X g(s,\xi)\ \xi(ds)\Big] \tag{3}$$

où $g : X \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable .

Les théorèmes I.2.1. et I.2.2. sont des variantes de propriétés classiques des dérivées de Radon-Nikodym énoncées dans le cadre de notre étude. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

Théorème I.2.1.- Soit $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.

Si $E\xi = \alpha . \lambda$ (α réel > 0) alors

$$f(s) = \lim_{h \to 0} \frac{C(B(s,h) \times M)}{\lambda(B(s,h))} \quad \text{pour } \lambda\text{-presque tout } s \in \mathbb{R}^m$$

où $B(s,h) = \prod_{i=1}^{m} \left]s_i - h \text{ , } s_i + h\right[$. ■

Soit $(\Delta^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de partitions de X par des boréliens bornés telle que :

I.2.a) $\forall B \in \mathcal{B}_b$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \delta_k(B) = 0$ avec

$$\delta_k(B) = \sup \{\text{diam } I,\ I \in \Delta^{(k)} \text{ et } I \cap B \neq \emptyset\} \quad .$$

I.2.b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$: - $\Delta^{(k+1)}$ est un raffinement de $\Delta^{(k)}$,

- tout borélien borné B ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\Delta^{(k)}$; il est clair que cette condition peut être obtenue en construisant $\Delta^{(k)}$ à l'aide de boules ouvertes et en utilisant la relative compacité de B .

L'hypothèse I.2.a) a pour conséquence :

I.2.a)' pour tout $s \in X$, soit $I_k(s)$ l'élément de $\Delta^{(k)}$ contenant s :

$$\lim_{k \to +\infty} \text{diam } I_k(s) = 0 \quad .$$

Ces hypothèses resteront valables dans toute la suite.

A chaque partition $\Delta^{(k)}$, associons une fonction h_k sur X définie par :

$$\forall s \in X \qquad h_k(s) = \frac{C(I_k(s) \times M)}{E\xi(I_k(s))}$$

$$= \frac{1}{E\xi(I_k(s))} \int_{I_k(s)} f(y)\ E\xi(dy) \tag{4}$$

D'après un résultat classique de martingale $h_k(s) \to f(s)$ pour $E\xi$-presque tout $s \in X$ et aussi dans $L^1(B, \mathcal{B}_b \cap B, B\,E_\xi)$, pour tout borélien borné B fixé ([10] page 172), avec $\mathcal{B}_b \cap B = \{A \cap B \,;\, A \in \mathcal{B}_b\}$; $BE\xi$ = restriction de $E\xi$ à B. Le théorème suivant prouve que la famille de fonctions $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ approche f simplement en tout point où f est continue et uniformément si f est uniformément continue.

Théorème I.2.2.- La suite $(h_k(s))_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $f(s)$ en tout point $s \in X$ où f est continue, cette convergence se faisant uniformément sur tout borélien borné B sur lequel f est uniformément continue.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, et supposons que f est continue en s. Il existe alors $\eta_1 > 0$ tel que $d(s,y) < \eta_1 \Longrightarrow |f(s) - f(y)| < \varepsilon$. D'après l'hypothèse I.2.a)', il existe un entier k_o tel que :

$$\forall k \geq k_o \qquad \text{diam } I_k(s) < \eta_1$$

et par conséquent :

$$\sup_{y\in I_k(s)} |f(s) - f(y)| < \varepsilon \quad .$$

Ainsi : $\forall k \geq k_o$

$$\begin{aligned}
|h_k(s)-f(s)| &= |E\xi(I_k(s))^{-1} . \int_{I_k(s)} f(y)\ E\xi(dy) - f(s)| \\
&= |E\xi(I_k(s))^{-1} . \int_{I_k(s)} (f(y)-f(s))\ E\xi(dy)| \\
&\leqslant E\xi(I_k(s))^{-1} \int_{I_k(s)} |f(y)-f(s)|\ E\xi(dy) \\
&\leqslant E\xi(I_k(s))^{-1} . \sup_{y\in I_k(s)} |f(y)-f(s)| . E\xi(I_k(s)) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence simple cherchée.

Soit $B \in \mathcal{B}_b$ sur lequel f est uniformément continue et notons $\omega_f(B)$ l'oscillation de f sur B : $\omega_f(B) = \sup_{x,y\in B} |f(x)-f(y)|$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \bar{B}$, l'oscillation de f sur la boule $B(x,\eta)$ soit inférieure ou égale à ε.

D'après l'hypothèse I.2.a), il existe un entier positif k_1 tel que : $\forall k \geqslant k_1 \quad \delta_k(B) < \eta$ et par conséquent, pour tout $k \geqslant k_1$ et $I \in \Delta^{(k)}$ rencontrant B, $I \subset B(x,\eta)$ si $x \in B \cap I$, d'où $\omega_f = \sup_{x,y\in I} |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant k_1$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B} |h_k(x)-f(x)| &\leqslant \sup_{I\in\Delta^{(k)}:I \cap B\neq\emptyset}\ \sup_{x\in I} |h_k(x) - f(x)| \\
&\leqslant \sup_{I\in\Delta^{(k)}:I \cap B\neq\emptyset}\ \sup_{x\in I} E\xi(I)^{-1} \int_I |f(y)-f(x)|\ E\xi(dy) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

d'où le résultat . ■

Soit $M \in \mathcal{M}$ fixé .

Soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un n-échantillon de la mesure aléatoire ξ. Pour chaque taille n d'un échantillon de ξ, nous choisissons une partition $\Delta^{(k(n))}$ telle que l'indice $k(n)$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini. Cela équivaut à prendre des partitions de X de plus en plus fines pour des tailles de l'échantillon de plus en plus grandes. A partir de la partition choisie, nous donnons comme estimateur de f la fonction f_n définie par :

$$\forall s \in X \qquad \begin{cases} f_n(s) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{k(n)}(s) \; 1_M(\xi_i)}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{k(n)}(s)} & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{k(n)}(s) \neq 0 \\ f_n(s) = 0 & \text{sinon .} \end{cases} \tag{5}$$

On remarque que $f_n(s)$ est le rapport des moyennes empiriques du numérateur et du dénominateur de la fonction $h_{k(n)}(s)$. Le calcul de l'estimateur ne suppose nullement la connaissance globale de ξ_i , mais seulement des masses $\xi_i(I)$, $I \in \Delta^{(k)}$. Autrement dit, on peut concevoir la notion d'échantillon de mesure.

En considérant l'expression de f_n , on est amené à se demander de quelle manière on pourrait déterminer les valeurs $1_M(\xi_i)$. Cette expression, bien qu'étant difficilement déterminable pour M quelconque, l'est plus facilement pour des éléments M d'une forme particulière. Si l'on prend par exemple M de l'une des deux formes suivantes, le calcul est aisément réalisable :

$$M = \{\mu \in \mathbb{M} : \mu(f_i) \in [a_i,b_i] \qquad i = 1,\dots,p\}$$

ou

$$M = \{\mu \in \mathbb{M} : \mu(B_i) \in [a_i,b_i] \qquad i = 1,\dots,p\}$$

où f_i : fonction continue à support compact ;

$[a_i,b_i]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$;

B_i : borélien borné de X ;

pour $i = 1,\dots,p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

La famille de tous les ensembles M de l'une ou l'autre forme présente aussi un intérêt théorique : elle constitue un π-sytème engendrant la tribu $\mathcal{M}$: ainsi, connaître $Q_s (s \in X)$ sur cette famille revient à la connaître sur la tribu toute entière.

D'une manière plus générale, on pourrait estimer $Q_s(\psi_f)$ où :

$$\begin{aligned} \psi_f : \mathbb{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mu &\longmapsto \psi_f(\mu) = \mu(f) \end{aligned}$$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable , dont $Q_s(M)$ est un cas particulier avec $f = 1_M$.

Les lemmes suivants sont utilisés dans le paragraphe I.3.

Lemme I.2.3.- Soient X et Y des variables aléatoires positives ; pour tout $0 < \varepsilon < 1$:

$$\{|X-1| > \varepsilon Y\} \subset \{|X-1| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y-1| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\{|X-1| > \varepsilon X\} \subset \{|X-1| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} .$$

Démonstration : Il suffit de prouver la première inclusion. Soit $0 < \eta < 1$:

$$\{|X-1| > \varepsilon Y\} = \{|X-1| > \varepsilon Y \ ; \ Y \geq \eta\} \cup \{|X-1| > \varepsilon Y \ ; \ Y < \eta\}$$

$$\subset \{|X-1| > \varepsilon\eta\} \cup \{0 \leq Y < \eta\}$$

$$\subset \{|X-1| > \varepsilon\eta\} \cup \{|Y-1| > 1-\eta\}$$

En prenant $\eta = \frac{1}{1+\varepsilon}$, on a $\varepsilon\eta = 1-\eta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{2}$ d'où l'inclusion cherchée. ∎

Lemme I.2.4.- Soient X et Y des variables positives telles que $0 \leq X \leq Y$ et $0 < EX \leq EY$; pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on a :

$$\{|\frac{X}{Y} - \frac{EX}{EY}| > \varepsilon\} \subset \{|\frac{X}{EX} - 1| > \frac{\varepsilon}{4}\} \cup \{|\frac{Y}{EY} - 1| > \frac{\varepsilon}{4}\}$$

où $\frac{X}{Y} = 0$ si $Y = 0$ par convention.

Démonstration : Si $Y(\omega) = 0$, $\omega \in \{|\frac{Y}{EY} - 1| > \frac{\varepsilon}{4}\}$ puisque $\frac{\varepsilon}{4} < 1$. Plus généralement, comme $\frac{EX}{EY} \leq 1$:

$$\{|\frac{X}{Y} - \frac{EX}{EY}| > \varepsilon\} \subset \{|\frac{X}{Y} \cdot \frac{EY}{EX} - 1| > \varepsilon\}$$

$$= \{|\frac{X}{EX} - \frac{Y}{EY}| > \varepsilon \frac{Y}{EY}\}$$

$$\subset \{|\frac{X}{EX} - 1| + |\frac{Y}{EY} - 1| > \varepsilon \frac{Y}{EY}\}$$

$$\subset \{|\frac{X}{EX} - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \frac{Y}{EY}\} \cup \{|\frac{Y}{EY} - 1| > \frac{\varepsilon}{2} \frac{Y}{EY}\}$$

$$\subset \{|\frac{X}{EX} - 1| > \frac{\varepsilon}{4}\} \cup \{|\frac{Y}{EY} - 1| > \frac{\varepsilon}{4}\}$$

d'après le lemme précédent . ∎

I.3. - ETUDE DE L'ESTIMATEUR f_n DE f .

Soient pour $M \in \mathcal{M}$ fixé, la fonction f définie par $f(s) = Q_s(M)$, $(h_k)_{k\in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions donnée par la formule (4). Nous étudions la convergence de f_n vers f dans les cas suivants :

1) f *continue en un point* $s \in X$.

D'après le théorème I.2.2. :

(a) $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists k_o \in \mathbb{N}^* : \forall k \geq k_o \quad |h_k(s) - f(s)| < \varepsilon$

d'où

$$\begin{aligned}\forall k \geq k_o \quad P(|f_n(s)-f(s)| > 2\varepsilon) &\leq P(|f_n(s)-h_k(s)| + |h_k(s)-f(s)| > 2\varepsilon)\\ &\leq P(\{|f_n(s)-h_k(s)| > \varepsilon\} \cup \{|h_k(s)-f(s)| > \varepsilon\}\\ &= P(|f_n(s)-h_k(s)| > \varepsilon) \quad .\end{aligned}$$

2) f *uniformément continue sur un borélien borné* B .

D'après le théorème I.2.2. toujours

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : \forall k \geq k_1 \quad \sup_{s\in B} |h_k(s)-f(s)| < \varepsilon$

d'où

$$\forall k \geq k_1 \quad P(\sup_{s\in B} |f_n(s)-f(s)| > 2\varepsilon) \leq P(\sup_{s\in B} |f_n(s)-h_k(s)| > \varepsilon)$$

3) f <u>*uniformément continue sur*</u> $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$.

Dans ce cas nous considérons un borélien de la forme $D_n =]-d(n),d(n)[^m$ où $d(n)$ est une fonction positive croissante tendant vers l'infini quand $n \to +\infty$, et nous étudions la convergence de $\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-f(s)|$ vers 0. Celle-ci se ramène à l'étude de la convergence de $\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-h_k(s)|$ vers 0 par une remarque identique à 2) (b).

D'après 1) et 2), l'étude des convergences simple et uniforme, en probabilité et presque complète de f_n vers f se ramène à celles de $|f_n - h_{k(n)}|$ vers 0. Ce résultat est utilisé implicitement sans rappel dans la suite.

<u>*Lemme I.3.1.-*</u>

$\forall 0 < \varepsilon < 1$, $\forall s \in X$

$$P(|f_n(s)-h_k(s)| > \varepsilon) \leq P(|a_{n,k}(s)-1| > \frac{\varepsilon}{4}) + P(|b_{n,k}(s)-1| > \frac{\varepsilon}{4})$$

avec

$$a_{n,k}(s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_k(s) \, 1_M(\xi_i)}{C(I_k(s) \times M)}$$

$$b_{n,k}(s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_k(s)}{E\xi \, I_k(s)} .$$

<u>*Démonstration*</u> : Il suffit de prendre

$$X = \bar{X}_{n,k}(s) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_k(s) \, 1_M(\xi_i)$$

$$Y = \bar{Y}_{n,k}(s) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_k(s)$$

et d'appliquer le lemme I.2.4. ∎

Dans l'étude de la convergence de $|f_n - h_{k(n)}|$ vers 0 , nous utilisons une majoration du second membre de l'inégalité du lemme I.3.1. obtenue grâce au théorème de Bernstein suivant, sous la forme due à Jacob ([2]).

Théorème I.3.2.- Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme partielle de rang n associée à cette suite :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

Si $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ sont mutuellement indépendantes, possèdent des moments de tous ordres et vérifiant la condition suivante : il existe un nombre réel $K > 1$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $p \geqslant 2$:

$$E\,|X_i - EX_i|^p \leqslant K^{p-2}\, p!\ \mathrm{var}\, X_i$$

alors, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout nombre réel u strictement positif, on a :

$$P(|S_n - ES_n| \geqslant u) \leqslant 2 \exp\left(- \frac{u^2}{4\ \mathrm{var}\, S_n + 2\, K\, u}\right) \quad . \ \blacksquare$$

Nous dirons que la mesure aléatoire ξ admet un moment d'ordre p si $E\xi^p(B) < +\infty$, $\forall B \in \mathcal{B}_b$. L'hypothèse suivante servira dans l'étude de la convergence presque complète de f_n vers f :

(A) ξ admet des moments de tous ordres et $\exists K > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall I \in \Delta^{(k)}$, $\forall N \in \mathcal{M}$:

$$E|\xi I\ 1_N(\xi) - C(I \times N)|^p \leqslant K^{p-2}\ p!\ \mathrm{var}(\xi I\ 1_N(\xi)) \qquad \forall p \geqslant 2 \quad \text{entier} \ .$$

Soit $N \in \mathcal{M}$. Posons :

$$\bar{X}_{n,k}(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ I_k(s)\ 1_N(\xi_i)$$

$k \geqslant 1$ entier

$$A_{n,k}(s) = \frac{\bar{X}_{n,k}(s)}{C(I_k(s) \times N)}$$

Pour tout $s \in X$:

$$\gamma_1(s) = E\ \xi^2\ I_1(s)$$

$$\lambda_1(s) = E\xi\ I_1(s) \quad .$$

Suivant que N est égal à M ou $\mathbb{M}$, nous avons

$$A_{n,k}(s) = a_{n,k}(s) = \frac{\bar{X}_{n,k}(s)}{C(I_k(s) \times M)}$$

ou

$$A_{n,k}(s) = b_{n,k}(s) = \frac{\bar{X}_{n,k}(s)}{E\xi\ I_k(s)}$$

respectivement.

Lemme I.3.3.- Soit $\varepsilon > 0$ fixé .

Si la mesure aléatoire ξ vérifie l'hypothèse (A), alors pour tout entier $k \geqslant 1$, tout $s \in X$:

$$P(|A_{n,k}(s)-1| > \varepsilon) = P(|\bar{X}_{n,k}(s)-m_k(s)| > \varepsilon\ m_k(s)) \leqslant 2\ \exp\left(-\ \frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{4\gamma_1(s)+2\varepsilon K\lambda_1(s)}\right)$$

où $m_k(s) = E\,\bar{X}_{n,k}(s) = C(I_k(s) \times N)$

Démonstration : Posons $\sigma_k^2(s) = \mathrm{var}\ \xi_i\ I_k(s)\ 1_N(\xi_i) = n\ \mathrm{var}\ \bar{X}_n$.
En posant dans le théorème I.3.2. $S_n = n\ \bar{X}_n$, on obtient :

$$P(|\bar{X}_{n,k}(s)-m_k(s)| > \varepsilon\ m_k(s)) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n^2\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{4n\ \sigma_k^2(s) + 2\ \varepsilon\ n\ K\ m_k(s)}\right)$$

$$= 2\exp\left(-\frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{4\ \sigma_k^2(s) + 2\ \varepsilon\ K\ m_k(s)}\right)$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{4\ \gamma_1(s) + 2\varepsilon K\ \lambda_1(s)}\right)$$

puisque $I_k(s) \subset I_1(s)$. ■

Corollaire I.3.4.- Si ξ est un processus ponctuel à valeurs entières positives et si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2K}$:

$$P(|A_{n,k}(s)-1| > \varepsilon) = P(|\bar{X}_{n,k}(s)-m_k(s)| > \varepsilon\ m_k(s)|) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{5\ \gamma_1(s)}\right)$$

Démonstration : Pour toute variable aléatoire $Y \geqslant 0$ à valeurs entières : $EY \leqslant EY^2$. Ainsi, si ξ est un processus ponctuel à valeurs entières positives, alors

$$P(|\bar{X}_{n,k}(s)-m_k(s)| > \varepsilon\ m_k(s)) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{4\ \gamma_1(s) + 2\ \varepsilon\ K\ \lambda_1(s)}\right)$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{(4+2K)\ \gamma_1(s)}\right)$$

$$\leqslant 2\exp\left(-\frac{n\ \varepsilon^2\ m_k^2(s)}{5\ \gamma_1(s)}\right) \quad . ■$$

Corollaire I.3.5.- Soit $0 < \varepsilon < 1$

$$P(|f_n(s)-h_k(s)| > \varepsilon) \leqslant 4 \exp\left(-\frac{n\,\varepsilon^2\, C^2(I_k(s) \times M)}{16(4\gamma_1(s) + \frac{1}{2}\varepsilon\, K\, \lambda_1(s))}\right) .$$

Ce corollaire est une conséquence directe des lemmes I.3.1. et I.3.3.

I.4. - ETUDE DE LA CONVERGENCE DE f_n VERS f .

Soit $M \in \mathcal{M}$ fixé. Nous ferons souvent l'hypothèse suivante : il existe une mesure diffuse λ telle que :

$$(B) \qquad \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall B \in \mathcal{B}_b \qquad C(B \times M) \geqslant \alpha\, \lambda(B) .$$

Cela nous donne un ordre de grandeur de $C(B \times M)$ qui est surtout utile pour $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$; nous prenons dans ce cas, λ = mesure de Lebesgue et les éléments des partitions $\Delta^{(k)}$ sont de la forme $\prod_{i=1}^{m} \left[\frac{r_i}{k}, \frac{r_i+1}{k}\right[$ $(r_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,\dots,m)$ et de λ-mesure $\frac{1}{k^m}$.

I.4.1. - Convergence en probabilité, presque sûre et presque complète.

Lemme I.4.1.1.- Soit s un point fixé de X ; une condition suffisante de convergence presque sûre de $(|f_n(s)-h_{k(n)}(s)|)_{n\geq 1}$ vers 0 est la convergence presque sûre vers 1 de

$$a_n(s) = \frac{1}{n}\, \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i(I_{k(n)}(s))\; 1_M(\xi_i)}{C(I_{k(n)}(s) \times M)} \qquad \text{et} \qquad b_n(s) = \frac{1}{n}\, \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\; I_{k(n)}(s)}{E\,\xi\; I_{k(n)}(s)}$$

Il en est de même pour la convergence en probabilité et presque complète.

Démonstration : Pour les deux derniers types de convergence, le résultat est une conséquence directe des lemmes précédents.

Pour la convergence presque sûre, observer que : $\forall \varepsilon > 0$:

$$\limsup_{n\to+\infty} \{|f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon\} \subset \limsup_{n\to+\infty} \{|a_n(s)-1| > \frac{\varepsilon}{4}\} \cup \limsup_{n\to+\infty} \{|b_n(s)-1| > \frac{\varepsilon}{4}\}. \blacksquare$$

Théorème I.4.1.2.- Soit s un point de continuité de f. Si la mesure aléatoire ξ possède un moment d'ordre deux, une condition suffisante pour que $(f_n(s))_{n\geq 1}$ convergence en probabilité vers $f(s)$ est que :

$$C^{-1}(I_{k(n)}(s) \times M) = o(n^{1/2}) \quad .$$

Démonstration : D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebycheff et le lemme I.3.1. :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(|f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq \frac{16\ \mathrm{var}(a_n(s))}{\varepsilon^2} + \frac{16\ \mathrm{var}(b_n(s))}{\varepsilon^2}$$

Or

$$\mathrm{var}\ a_n(s) \leq \frac{\mathrm{var}(\xi_1\ I_{k(n)}(s)\ .\ 1_M(\xi_1))}{n\ C^2(I_{k(n)}(s) \times M)} \leq \frac{E\ \xi^2\ I_1(s)}{n\ C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}$$

et

$$\mathrm{var}\ (b_n(s)) \leq \frac{E\ \xi^2\ I_1(s)}{n\ C^2(I_{k(n)}(s) \times M)} \leq \frac{E\ \xi^2\ I_1(s)}{n\ C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}$$

d'où le résultat. $\blacksquare$

Corollaire I.4.1.3.- Supposons que $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ et $s \in \mathbb{R}^m$ un point de continuité de f. Si ξ admet un moment d'ordre deux et vérifie l'hypothèse (B), une condition suffisante pour que $(f_n(s))_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $f(s)$ est que :

$$k^m(n) = o(n^{1/2}) \quad .$$

Démonstration : Puisque $C(I_{k(n)}(s) \times M) \geq \alpha\, \lambda(I_{k(n)}(s))$:

$$\operatorname{var} a_n(s) \leq \frac{E\, \xi^2\, I_1(s)}{n\, \alpha^2\, \lambda^2(I_{(k(n)}(s))} = \frac{E\, \xi^2\, I_1(s)\, k^{2m}(n)}{n\, \alpha^2}$$

$$\text{et} \quad \operatorname{var} b_n(s) \leq \frac{E\, \xi^2\, I_1(s)\, k^{2m}(n)}{\alpha^2\, n}$$

d'où le résultat. ∎

Les deux théorèmes et les corollaires à venir donnent des conditions suffisantes de convergence presque complète de f_n vers f en un point.

Théorème I.4.1.4.- Soit $s \in X$ un point de continuité de f. Si la mesure aléatoire ξ vérifie l'hypothèse (A), une condition suffisante de convergence presque complète de $(f_n(s))_{n\geq 1}$ vers $f(s)$ est que :

$$C^{-1}(I_{k(n)}(s) \times M) = o\left(\left(\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right)^{1/2}\right) \quad .$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque :

$$C^{-1}(I_{k(n)}(s) \times M) = o\left(\left(\frac{n}{\operatorname{Log} n}\right)^{1/2}\right) \iff C^2(I_{k(n)}(s) \times M) = \frac{\operatorname{Log} n}{n\, \varepsilon_n} \quad \text{où} \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et d'après le corollaire I.3.5.

$$P(|f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq 4 \exp(- \frac{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{16(4\, \gamma_1(s) + \frac{1}{2} K\, \varepsilon\, \lambda_1(s))})$$

On a :

$$P(|f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq 4 \exp(- \frac{n\, h_s\, \mathrm{Log}\, n}{n\, \varepsilon_n}) \quad \text{où} \quad h_s = \frac{\varepsilon^2}{16\,(4\, \gamma_1(s) + \frac{1}{2} K\, \varepsilon\, \lambda_1(s))}$$

$$= 4\, n^{-\, h_s/\varepsilon_n}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Corollaire I.4.1.5.- Si $X = \mathbb{R}^m$ et sous les mêmes hypothèses que dans le théorème I.4.1.4. et la condition (B), une condition suffisante de convergence presque complète de $(f_n(s))_{n\geq 1}$ vers $f(s)$ est que :

$$k^m(n) = o((\frac{n}{\mathrm{Log}\, n})^{1/2}) \quad .$$

Démonstration : Il suffit d'observer que d'après (B) $k^m(n) \geq d\, C^{-1}(I_{k(n)}(s) \times M)$ d'où $k^m(n) = o((\frac{n}{\mathrm{Log}\, n})^{1/2})$ alors $C^{-1}(I_{k(n)}(s) \times M) = o((\frac{n}{\mathrm{Log}\, n})^{1/2})$. Le résultat s'obtient grâce au théorème I.4.1.4. ∎

Il est possible d'utiliser pour l'étude de la convergence presque complète de f_n vers f le théorème de Hoeffding ci-après au lieu du théorème de Bernstein. Mais les hypothèses du théorème de Hoeffding étant plus fortes, on obtient en fait un corollaire du théorème I.4.1.4.

Théorème I.4.1.6. (de Hoeffding).- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall 1 \leq i \leq n$, il existe des réels α_i et β_i tels que $\alpha_i \leq X_i \leq \beta_i < +\infty$, alors pour tout réel $t > 0$

$$P(|\sum_{i=1}^{n} (X_i - E\,X_i)| \geq t) \leq 2 \exp(- 2 \frac{t^2}{\sum_{i=1}^{n} (\beta_i-\alpha_i)^2}) \ . \blacksquare$$

Théorème I.4.1.7.- Soit s un point de continuité de f . Si la mesure aléatoire ξ est bornée sur $I_1(s)$ (c'est-à-dire qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que $0 \leq \xi\, I_1(s) \leq \beta < +\infty$) , une condition suffisante de convergence presque complète de $(f_n(s))_{n\geq 1}$ vers $f(s)$ est que :

$$C^{-1}(I_{k(n)}(s) \times M) = o((\frac{n}{\text{Log } n})^{1/2}) \ .$$

Démonstration : Soit $0 < \varepsilon < 1$. Par application du lemme I.3.1. et du théorème de Hoeffding, on a :

$$P(|f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq 4 \exp(- \frac{n\,\varepsilon^2\, C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{8\,\beta^2})$$

$$= 4n^{-\varepsilon^2/8\beta^2\varepsilon_n}$$

puisque $\xi\, I_{k(n)}(s)\, 1_M(\xi) \leq \xi\, I_{k(n)}(s) \leq \xi\, I_1(s) \leq \beta < +\infty$

et $\qquad C^2(I_{k(n)}(s) \times M) = \frac{\text{Log } n}{n\,\varepsilon_n}$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où le résultat. $\blacksquare$

Corollaire I.4.1.8.- Si $X = \mathbb{R}^m$ et sous les mêmes hypothèses que dans le théorème I.4.1.6. et l'hypothèse (B) une condition suffisante de convergence presque complète de $(f_n(s))_{n\geq 1}$ vers $f(s)$ est que :

$$k^m(n) = o((\frac{n}{\text{Log } n})^{1/2}) \ . \blacksquare$$

I.4.2. - Convergence uniforme en probabilité et presque complète.

Soit $D \in \mathcal{B}_b$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{R}_k = \{j \in \mathbb{N} : \quad I_{j,k} \in \Delta^{(k)} \quad \text{et} \quad I_{j,k} \cap D \neq \emptyset\}$$

$$\alpha_k(D) = \inf_{j \in \mathcal{R}_k} C(I_{j,k} \times M) \quad .$$

Les ensembles $\mathcal{R}_k$ sont non vides et finis et les nombres $\alpha_k(D)$ sont tels que $\alpha_k(D) \leq C(I_k(s) \times M) \leq E\,\xi\, I_k(s) \quad \forall s \in D$.

$\mathcal{R}_1$ étant non vide et fini, notons :

$$\gamma_1 = \max_{j \in \mathcal{R}_1} E\,\xi^2\, I_{j,1} \qquad \lambda_1 = \max_{j \in \mathcal{R}_1} E\,\xi\, I_{j,1}$$

$$h = \frac{\varepsilon^2}{16\,(4\,\gamma_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, K\, \lambda_1)} \quad .$$

Théorème I.4.2.1.- Si f est uniformément continue sur D et si la mesure aléatoire vérifie l'hypothèse (A), alors une condition suffisante de convergence uniforme presque complète de f_n vers f sur D est que :

$$\alpha^{-1}_{k(n)}(D) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{1/2}\right) \quad .$$

Démonstration : Pour prouver ce théorème, nous aurons besoin de la propriété suivante :

D étant borné (c'est-à-dire relativement compact), il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que D^δ (dilaté d'ordre δ de D) soit encore borné.

En effet, tout élément $x \in X$ admet un voisinage compact V_x et il existe un nombre réel $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_{1,x} = B(x,\varepsilon_x) \subset V_x$ où $B_{1,x} = B(x,\varepsilon_x)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon ε_x qui est bornée du fait de la dernière inclusion.

Soit K un compact de X.

Pour tout $x \in K$, il existe alors une boule $B_{2,x} = B(x, \frac{\varepsilon_x}{2})$ bornée de centre x et de rayon $\frac{\varepsilon_x}{2}$. K étant compact et $(B_{2,x})_{x\in K}$ étant un recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un recouvrement fini $(B_{2,x_i})_{i=1,\dots,p}$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B_{2,x_i} = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i , \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}) \quad .$$

Considérons un nombre réel $\delta > 0$ tel que $\delta < \min\limits_{i=1,\dots,p} \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}$. Les inclusions suivantes :

$$K^\delta \subset \bigcup_{i=1}^{p} B^\delta_{2,x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i , \varepsilon_{x_i})$$

permettent d'affirmer que K^δ est borné puisque la dernière réunion est une réunion finie d'ensembles relativement compacts. En prenant $K = \bar{D}$, on a la propriété cherchée.

Pour $s \in I_{j,k(n)}$, posons $f_{n,j} = f_n(s)$ et $h_{nj} = h_{k(n)}(s)$

$$P(\sup_{s\in D} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq P(\max_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \sup_{s\in I_{j,k(n)}} | f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon)$$

$$= P(\bigcup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} |f_{nj} - h_{nj}| > \varepsilon)$$

$$\leq \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(|f_{nj} - h_{nj}| > \varepsilon) \ .$$

Pour n assez grand, c'est-à-dire tel que $k(n)$ vérifie $\max\limits_{j \in \mathcal{R}_{k(n)}} \text{diam } I_{j,k(n)} < \delta$, nous aurons :

$$\bigcup_{j \in \mathcal{R}_{k(n)}} I_{j,k(n)} \subset D^{\delta}$$

Or $\text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \cdot \alpha_{k(n)}(D) \leqslant \sum\limits_{j \in \mathcal{R}_{k(n)}} C(I_{j,k(n)} \times M) \leqslant C(D^{\delta} \times M) < +\infty$

donc

$$\text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \leqslant C(D^{\delta} \times M) \cdot \frac{1}{\alpha_{k(n)}(D)} = C(D^{\delta} \times M) \left(\frac{n\,\varepsilon_n}{\text{Log } n}\right)^{1/2} .$$

En prenant n assez grand, nous obtenons

$$C(D^{\delta} \times M) \left(\frac{n\,\varepsilon_n}{\text{Log } n}\right)^{1/2} \leqslant n$$

d'où $\text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \leqslant n$.

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, si n est assez grand :

$$\begin{aligned} P(\sup_{s \in D} |f_n(s) - h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) &\leqslant \sum_{j \in \mathcal{R}_{k(n)}} P(|f_{n,j} - h_{nj}| > \varepsilon) \\ &\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \; 4 \exp(-\, n\, h\, \alpha^2_{k(n)}(D)) \\ &= 4 \text{ card } \mathcal{R}_{k(n)} \; n^{-\, h/\varepsilon_n} \\ &\leqslant 4\, n^{1 - h/\varepsilon_n} \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergence, d'où la convergence uniforme presque complète énoncée. ∎

Théorème I.4.2.2.- Si f est uniformément continue sur D et si la mesure aléatoire ξ est bornée sur $I_{j,1}$ ($\forall j \in \mathcal{R}_1$ et $I_{j,1} \in \Delta^{(1)}$, $0 \leqslant \xi\, I_{j,1} \leqslant \beta$), une condition suffisante de convergence uniforme presque complète de f_n vers f est que :

$$\alpha_{k(n)}^{-1}(D) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{1/2}\right) .$$

Démonstration : Puisque

$$P(\sup_{s\in D} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leqslant \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(|f_{n,j}-h_{nj}| > \varepsilon)$$

$$\leqslant \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} 4 \exp\left(-\frac{n\, \varepsilon^2\, C^2\, (I_{j,k_{(n)}} \times M)}{8\, \beta^2}\right)$$

d'après un calcul mené dans la démonstration du théorème I.4.1.6., on a :

$$P(\sup_{s\in D} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leqslant \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(|f_{nj}-h_{nj}| > \varepsilon)$$

$$\leqslant 4 \text{ card } \mathcal{R}_{k(n)} \exp\left(-\frac{n\, \varepsilon^2\, \alpha_{k(n)}^2(D)}{8\, \beta^2}\right)$$

$$\leqslant 4n \,.\, \exp\left(-\frac{n\, \varepsilon^2 \text{ Log } n}{8\, \beta^2\, n\, \varepsilon_n}\right)$$

puisque card $\mathcal{R}_{k(n)} \leqslant n$ et $\alpha_{k(n)}^{-2}(D) = \frac{\text{Log } n}{n\, \varepsilon_n}$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\leqslant 4\, n^{1-\, \varepsilon^2/8\beta^2\varepsilon_n}$$

qui est le terme général d'une série convergente . ∎

Théorème I.4.2.3.- Soit ξ une mesure aléatoire possédant un moment d'ordre deux. Si f est uniformément continue sur D , une condition suffisante pour que f_n converge uniformément en probabilité vers f est que :

$$\alpha_{k(n)}^{-1}(D) = o(n^{1/3}) \quad .$$

Démonstration : Puisque d'après les preuves des théorèmes I.4.1.2. et I.4.2.2.

$$\operatorname{card} R_{k(n)} \leqslant C(D^{\delta} \times M) \cdot \frac{1}{\alpha_{k(n)}(D)}$$

$$0 < \operatorname{var} a_n \ , \ \operatorname{var} b_n \leqslant \frac{\gamma_1}{n\, \alpha_{k(n)}^2(D)}$$

où $\delta > 0$ est un réel fixé tel que D^{δ} soit borné, on a :

$$\begin{aligned}
P(\sup_{s\in D} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) &\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} P(|f_{nj}-h_{nj}| > \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} P(|a_{nj}-1| > \tfrac{\varepsilon}{4}) + P(|b_{nj}-1| > \tfrac{\varepsilon}{4}) \\
&\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} \left[\frac{16 \operatorname{var} a_n}{\varepsilon^2} + \frac{16 \operatorname{var} b_n}{\varepsilon^2}\right] \\
&\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} \left[\frac{16\, \gamma_1}{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{j,k(n)}\times M)} + \frac{16\, \gamma_1}{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{j,k(n)}\times M)}\right] \\
&\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} \frac{32\, \gamma_1}{n\, \varepsilon^2\, \alpha_{k(n)}^2(D)} \\
&= 32\, \gamma_1 \operatorname{card} R_{k(n)} \cdot \frac{1}{n\, \varepsilon^2\, \alpha_{k(n)}^2(D)} \\
&\leqslant 32\, \gamma_1\, C(D^{\delta} \times M) \cdot \frac{1}{n\, \varepsilon^2\, \alpha_{k(n)}^3(D)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corollaire I.4.2.4.- Soit $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, $D = [0,1[^m$. Si ξ admet un moment d'ordre deux, si f est uniformément continue sur D et sous la condition (B), une condition suffisante pour que f_n converge uniformément en probabilité vers f est que :

$$k^m(n) = o(n^{1/3}) \quad .$$

Démonstration : Puisque $C(I_{j,k(n)} \times M) \geq \alpha\, \lambda(I_{j,k(n)})$ pour tout $j \in R_{k(n)}$:

$$P(\sup_{s\in D} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq \sum_{j\in R_{k(n)}} \frac{32\, \gamma_1}{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{j,k(n)} \times M)}$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} \frac{32\, \gamma_1}{n\, \varepsilon^2\, \alpha^2\, \lambda^2(I_{j,k(n)})}$$

$$\leq 32\, \gamma_1 \text{ card } R_{k(n)} \frac{k^{2m}(n)}{n\, \alpha^2\, \varepsilon^2}$$

$$\leq 32\, \gamma_1\, C(D^\delta \times M) \frac{k^{3m}(n)}{n\, \alpha^2\, \varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

Remarque : La preuve de ce corollaire peut se faire directement par application du théorème I.4.2.3. En effet, la condition (B) implique l'inégalité :

$$\alpha^{-1}_{k(n)}(D) \leq \alpha^{-1}\, k^m(n) \quad .$$

Il en découle, que si $k^m(n) = o(n^{1/3})$, alors $\alpha^{-1}_{k(n)}(D) = o(n^{1/3})$ et f_n converge donc uniformément en probabilité vers f d'après le théorème I.4.2.3. Cette remarque est également valable pour la convergence uniforme presque complète de f_n vers f , où si $D = [0,1[^m$, la condition $k^m(n) = o((\frac{n}{\text{Log } n})^{1/2})$ est suffisante.

La nécessité de la condition $\lim_{n\to+\infty} k(n) = +\infty$ est évidente puisque les fonctions $h_{k(n)}$ et f_n sont étagées ce qui n'est pas le cas, en général, pour la fonction f. Nous allons plus précisément montrer que la condition $k(n) = o(\frac{n}{\text{Log } n})$ est nécessaire dans le cas de processus de Poisson homogènes. Il s'agit donc, en général, d'une condition minimale. ξ est supposée être un processus homogène d'intensité $\nu > 0$.

Théorème I.4.2.5.- Si f est uniformément continue sur $[0,1[^m$, une condition nécessaire de convergence uniforme en probabilité de f_n vers f est :

$$k^m(n) = o(\frac{n}{\text{Log } n}) \quad .$$

Démonstration : Supposons :

$$\exists \gamma > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \inf_{s\in[0,1[^m} f(s) > \gamma \, .$$

Posons

$$\mathcal{R}_{k(n)} = \{ j \in \mathbb{N} : I_{j,k(n)} \in \Delta^{(k(n))} \text{ et } I_{j,k(n)} \cap D \neq \emptyset \} \, .$$

On a $\quad$ card $\mathcal{R}_{k(n)} = k^m(n)$.

Si f est uniformément continue sur $[0,1[^m$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément en probabilité vers f , alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(\sup_{s\in[0,1[^m} |f_n(s) - f_{k(n)}(s)| > \gamma) = 0 \, .$$

Pour tout $n \geq 1$

$$\left(\bigcup_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{j,k(n)} = 0 \} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\exists j_o \in \mathcal{R}_{k(n)} : \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{j_o k(n)} = 0 \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\sup_{s\in [0,1[^m} |f_n(s)-f_n(s)| \geq \sup_{s\in I_{j_o,k(n)}} |f(s)| > \gamma \right)$$

car pour tout $s \in I_{j_o,k(n)}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{j_o,k(n)} = 0$, $f_n(s) = 0$.

Ainsi :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{j,k(n)} = 0 \} \right)$$

ou

$$1 = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \{ \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{j,k(n)} > 0 \} \right) .$$

Les processus ponctuels considérés étant de Poisson donc à accroissements indépendants :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \left[1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, I_{j,k(n)} = 0 \right) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \left[1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{ \xi_i \, I_{j,k(n)} = 0 \} \right) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \left[1 - \prod_{i=1}^{n} \exp(-n \, \nu \, k^{-m}(n)) \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[1 - \exp(-n \, \nu \, k^{-m}(n)) \right]^{k^m(n)}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} k^m(n) \, \mathrm{Log} \left[1 - \exp(-n \, \nu \, k^{-m}(n)) \right] = 0$$

si, nécessairement $n\,k^{-m}(n) \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Pour n assez grand, nous avons

$$\text{Log}(1 - \exp(- n\,\nu\,k^{-m}(n))) \sim \exp(- n\,\nu\,k^{-m}(n))$$

et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} k^m(n)\exp(- n\,\nu k^{-m}(n)) = 0$. Par suite :

$$- \infty = \lim_{n\to+\infty} \text{Log}\,k^m(n) - n\,\nu\,k^{-m}(n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{k^m(n)}\,(n^{-1}\,k^m(n)\,\text{Log}\,k^m(n) - \nu)$$

ν ayant été choisi quelconque, on peut le prendre aussi petit que l'on veut. Ainsi, pour n assez grand $n^{-1}\,k^m(n)\,\text{Log}\,k^m(n) < \nu$, et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\,k^m(n)\,\text{Log}\,k^m(n) = 0 \quad .$$

Puisque $n^{-1}\,k^m(n) = \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n(\text{Log}\,n + \text{Log}\,\varepsilon_n) = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n\,\text{Log}\,n = 0 \iff \varepsilon_n = o\left(\frac{1}{\text{Log}\,n}\right)$$

$$\iff k^m(n) = o\left(\frac{n}{\text{Log}\,n}\right) \ . \ \blacksquare$$

Soit $X = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ et f uniformément continue sur $\mathbb{R}^m$.

$$\forall s \in \mathbb{R}^m , \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad | h_k(s)-f(s)| \leqslant \frac{1}{E\xi\ I_k(s)} \int_{I_k(s)} |f(y)-f(s)| \ E\xi(ds)$$

$$\leqslant \sup_{y\in I_k(s)} |f(y)-f(s)|$$

$$\leqslant \omega_f(I_k(s)) .$$

On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists k_o \in \mathbb{N}^* : \forall k \geqslant k_o \sup_{s\in\mathbb{R}^m} |f(s)-h_k(s)| < \varepsilon$.

Soit $D_n =]-d(n), d(n)[^m$ où $d(n)$ est une fonction positive croissante tendant vers l'infini quand $n \to +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé et k assez grand :

$$\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-f(s)| \leqslant \sup_{s\in D_n} |f_n(s)-h_k(s)| + \sup_{s\in \mathbb{R}^m} | h_k(s)-f(s)|$$

$$\leqslant \sup_{s\in D_n} |f_n(s)-h_k(s)| + \varepsilon \quad .$$

Supposons que la mesure aléatoire ξ soit telle que :

$$(C) \qquad \exists n \in \mathbb{N}^* : \sup_{I\in\Delta^{(k(n))}} E\ \xi^p I \leqslant V < +\infty \qquad (V > 0 \text{ et } p = 1,2)$$

Soit

$$R_{k(n)} = \{j \in \mathbb{Z} : I_{j,k(n)} \in \Delta^{(k(n))} \quad \text{et} \quad I_{j,k(n)} \cap D_n \neq \emptyset\} \ .$$

On a :

$$\text{card } R_{k(n)} = 2^m \ (1 + [d(n)\ k(n)])^m$$

$$\leqslant 4^m \ [d(n)\ k(n)]^m$$

$$\leqslant 4^m \ d^m(n)\ k^m(n)$$

où $2^m\, d^m(n)$ est le volume de D_n .

Théorème I.4.2.6.- Une condition suffisante pour que $\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-f(s)|$ tende vers 0 , quand $n \to +\infty$, en probabilité est que :

$$\frac{k^{3m}(n)\ d^m(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

sous les conditions (B) et (C).

Démonstration : Pour tout $s \in I_{j,k(n)}$, posons $a_n(s) = a_{nj}$, $b_n(s) = b_{nj}$, $f_n(s) = f_{nj}$ et $h_{k(n)}(s) = h_{nj}$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (C) soit vérifiée :

$$P(\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-f(s)| > 2\varepsilon) \leq P(\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon)$$

$$\leq P(\bigcup_{j\in R_{k(n)}} |f_{nj}-h_{nj}| > \varepsilon)$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} P(|f_{nj}-h_{nj}| > \varepsilon)$$

d'après le lemme I.3.1.

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} P(|a_{nj}-1| > \tfrac{\varepsilon}{4}) + P(|b_{nj}-1| > \tfrac{\varepsilon}{4})$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} [\frac{16 \text{ var } a_{nj}}{\varepsilon^2} + \frac{16 \text{ var } b_{nj}}{\varepsilon^2}]$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} [\frac{16 \text{ var}(\xi I_{j,k(n)}\times 1_M(\xi))}{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{j,k(n)} \times M)} + \frac{16 \text{ var } \xi\ I_{j,k(n)}}{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{j,k(n)}\times M)}]$$

d'après (B) et (C) $\displaystyle \leq \sum_{j\in R_{k(n)}} \frac{32\ V}{n\ \varepsilon^2\ \alpha^2\ \lambda^2(I_{j,k(n)})}$

$$\leq 2^5\ V \text{ card } R_{k(n)} \frac{k^{2m}(n)}{n\ \varepsilon^2\ \alpha^2}$$

par hypothèse $\displaystyle \leq \frac{2^{2m+5}}{\varepsilon^2\ \alpha^2} \frac{d^m(n)\ k^{3m}(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ■

Corollaire I.4.2.7.- Si $d(n) = \text{Log } n$, une condition suffisante de convergence en probabilité de $\lim\limits_{s\in D_n} |f_n(s)-f(s)|$ vers 0 est que :

$$k^m(n) = o((n(\text{Log } n)^{-m})^{1/3})$$

sous les conditions (B) et (C).

Enonçons quelques lemmes nécessaires à l'étude de la convergence presque complète.

Lemme I.4.2.8.- Soit $s \in X$. Si la mesure aléatoire ξ vérifie la condition (A), alors :

$$\forall 0 < \varepsilon < 1 : \ P(|A_n(s)-1| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(- \frac{n\ \varepsilon^2\ C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{(4 + 2K)\ V}\right)$$

sous la condition (C).

Démonstration : D'après le théorème de Bernstein :

$$P(|A_n(s)-1| > \varepsilon) \leq P(|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, I_{k(n)}(s)\, 1_M(\xi_i) - n\, C(I_{k(n)}(s) \times M)| > n\, \varepsilon\, C(I_{k(n)}(s) \times M))$$

$$\leq 2 \exp(- \frac{n^2\, \varepsilon^2\, C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{4n\, \mathrm{var}(\xi\, I_{k(n)}(s)\, 1_M(\xi)) + 2K\, \varepsilon\, C(I_{k(n)}(s) \times M)})$$

d'après (C) $$\leq 2 \exp(- \frac{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{4V + 2K\, \varepsilon\, V})$$

$$\leq 2 \exp(- \frac{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{(4 + 2K)\, V}) . \blacksquare$$

Lemme I.4.2.9.- Soit $s \in X$. Si la mesure aléatoire ξ vérifie la condition (A) alors :

$$\forall 0 < \varepsilon < 1 \qquad P(|f_n(s)-h_{k(n)}(s)| > \varepsilon) \leq 4 \exp(- \frac{n\, \varepsilon^2\, C^2(I_{k(n)}(s) \times M)}{16(4 + 2K)\, V})$$

sous la condition (C).

Ce lemme découle du précédent et du lemme I.3.1.

Théorème I.4.2.10.- Si la mesure aléatoire ξ vérifie la condition (A), s'il existe un réel $r > 0$ tel que $n^{-r}\, d^m(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $k^m(n) = o((\frac{n}{\mathrm{Log}\, n})^{1/2})$, $\sup_{s\in D_n} |f_n(s)-f(s)|$ converge vers 0 presque complètement sous la condition (C).

Démonstration : Pour n assez grand, nous avons :

$$d^m(n) = n^r\, \varepsilon'_n \quad \text{et} \quad k^{2m}(n) = \frac{n\, \varepsilon_n}{\mathrm{Log}\, n}\ , \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et si $0 < \varepsilon < 1$:

$$P(\sup_{s\in D_n} |f_n - f(s)| > 2\varepsilon) \leqslant P(\sup_{s\in D_n} |f_n(s) - h_{k(n)}(s)| > \varepsilon)$$

$$\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} P(|f_{nj} - h_{nj}| > \varepsilon)$$

d'après le lemme I.4.2.9.

$$\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} 4 \exp\left(- \frac{n\,\varepsilon^2\, C^2(I_{j,k(n)} \times M)}{16(4+2K)\,V}\right)$$

sous la condition (B)

$$\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} 4 \exp\left(- \frac{n\,\varepsilon^2\,\alpha^2\,\lambda^2(I_{j,k(n)})}{16(4+2K)\,V}\right)$$

$$\leqslant 4 \text{ card } R_{k(n)} \exp\left(- \frac{n\,\varepsilon^2\,\alpha^2}{16(4+2K)\,V\,k^{2m}(n)}\right)$$

$$\leqslant 4^{m+1}\, d^m(n)\, k^m(n) \exp(-\,n\,h\,k^{-2m}(n)) \;;\; h = \frac{\varepsilon^2\,\alpha^2}{16(4+2K)\,V}$$

$$\leqslant 4^{m+1}\, n^r\, \varepsilon'_n\, (n\,\varepsilon_n)^{1/2} \,.\, (\mathrm{Log}\, n)^{-1/2} \,.\, n^{-h/\varepsilon_n}$$

$$\leqslant 4^{m+1}\, \varepsilon'_n\, \varepsilon_n^{1/2} \,.\, (\mathrm{Log}\, n)^{-1/2}\, n^{(r+1/2)-h/\varepsilon_n}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Corollaire I.4.2.11.-

Si $d(n) = \mathrm{Log}\, n$, une condition suffisante de convergence presque complète de $\sup_{s\in D_n} |f_n(s) - f(s)|$ vers 0 est que :

$$k^m(n) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{1/2}\right) \quad .$$

I.4.3. - Convergences L^1 et L^2 de f_n vers f.

Soit $\mu \in \mathbb{M}$, $D \in \mathcal{B}_b$.

Nous noterons $L^p(\mu)$ $(p \geq 1)$ l'espace $L^p(D, D \cap \mathcal{B}_b , D\mu)$ quand il n'y aura pas confusion. Puisque :

$$0 \leq f \leq 1 \quad , \quad 0 \leq f_n \ , \ h_n \leq 1 \qquad \forall n \geq 1$$

on a :

$$\int_D |f_n(s)-f(s)|^p \mu(ds) \leq \int_D |f_n(s)-f(s)| \mu(ds) \qquad \forall p \geq 1$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_D |f_n(s)-f(s)| \mu(ds) \leq \left(\int_D |f_n(s)-f(s)|^p \mu(ds)\right)^{1/p} \mu(D)^{1/q}$$

où $q > 0$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Il apparaît alors que les conditions suffisantes de convergence de f_n vers f relatives à la topologie $L^1(\mu)$ sont également suffisantes quand l'espace des fonctions mesurables sur D est muni de la topologie $L^p(\mu)$ $(p \geq 1)$ et réciproquement. Nous étudions dans ce paragraphe des conditions suffisantes de convergences en probabilité presque complète et en moyenne de f_n vers f dans $L^1(\mu)$ dans le cas où $\mu = E\xi$.

Il est clair que la convergence de $k(n) \int_D |f_n(s)-f(s)| \mu(ds)$ vers 0 entraîne celle de $k(n) \int_D |f_n(s)-f(s)|^p \mu(ds)$ vers 0. Mais puisque :

$$k(n) \int_D |f_n(s)-f(s)| \ \mu(ds) \leq (k^p(n) \int_D |f_n(s)-f(s)|^p \ \mu(ds))^{1/p} \ \mu(D)^{1/q}$$

la réciproque n'est pas vraie. La convergence de $k(n) \int_D |f_n(s)-f(s)|^p \mu(ds)$ pourra en général être obtenue sous des conditions plus faibles qu'elles le seraient pour $k(n) \int_D |f_n(s)-f(s)| \mu(ds)$.

Dans le cadre de la convergence $L^2(\mu)$ de f_n vers f nous étudions la convergence de $k(n) \int_D |f_n(s)-f(s)|^2 \mu(ds)$ vers 0 sur $X = \mathbb{R}^m$, en prenant comme mesure μ la mesure de Lebesgue λ. Nous donnons des conditions suffisantes de convergence vers 0 de $k(n)\ \delta_n$:

$$\delta_n = \int_D |f_n(s)-f(s)|^2 \ \lambda(ds) .$$

Nous nous plaçons respectivement dans les deux cas suivants :

1) $D = [0,1[^m$

Nous supposons vérifiées les hypothèses (B) et (D) : f est lipschitzienne d'ordre $\gamma > 0$: $\exists H > 0$, $0 < \gamma \leq 1$ tels que

$$|f(x)-f(y)| \leq H \ . \ ||x-y||^\gamma \quad \forall x , y \in \mathbb{R}^m$$

$$(||x|| = \sup_{i=1,\dots,m} |x_i| , \quad x \in \mathbb{R}^m) .$$

2) $D = D_n = [- d(n) , d(n)]^m$ où $d(n)$ est une fonction positive croissante tendant vers l'infini quand $n \to +\infty$. Les hypothèses (B), (C) et (D) sont supposées vérifiées.

Dans les lemmes I.4.3.A. et I.4.3.D., μ est la mesure moyenne $E\xi$.

Lemme I.4.3.A.- La suite $(h_k)_{k\geq 1}$ converge vers f dans $L^1(\mu)$.

Démonstration : Rappelons que $\mu = E\xi$. $D \in \mathcal{B}_b$ et $M \in \mathcal{M}$ étant fixés, les mesures $C_D(. \times M)$ et μ_D qui sont les restrictions de $(C. \times M)$ et μ à D, respectivement, sont finies. Par définition, sur D :

$$h_k = \sum_{I\in\Delta^{(k)} \cap D} \frac{C(I \times M)}{\mu(I)} 1_I \qquad f(s) = \frac{C_D(ds \times M)}{\mu_D(ds)} .$$

Ce lemme est obtenu par application d'un résultat donné dans [10] (15.8.3. p. 172). Ce dernier est basé sur le fait que, sous la normalisation de μ_D, h_k est une martingale. En effet, en prenant comme filtration les tribus engendrées par la suite des partitions $\Delta^{(k)} \cap D$ $(k \geq 1)$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \forall I \in \Delta^{(k)} \cap D$$

$$\begin{aligned}
\int_I h_{k+1}(s)\ \mu_D(ds) &= \sum_{J\in\Delta^{(k+1)} \cap I} \int_J h_{k+1}(s)\ \mu_D(ds) \\
&= \sum_{J\in\Delta^{(k+1)} \cap I} \frac{C(J \times M)}{\mu_D(J)} \mu_D(J) \\
&= C(I \times M) \\
&= \int_I h_k(s)\ \mu_D(ds) \quad . \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemme I.4.3.B.- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires intégrables. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) $(X_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable et converge en probabilité ;

2) $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^1 . ■

Le théorème ci-dessous permet de ramener l'étude de la convergence de f_n vers f dans $L^1(\mu)$ à celle de $|f_n-h_{k(n)}|$.

Théorème I.4.3.C.- Pour que f_n converge vers f en probabilité (respectivement presque complètement et en moyenne) dans $L^1(\mu)$, il suffit que $|f_n-h_{k(n)}|$ tende vers 0 en probabilité (respectivement presque complètement et en moyenne) dans $L^1(\mu)$.

Démonstration : Les conditions suffisantes sont établies par application de l'inégalité

$$\int_D |f_n(s)-f(s)|\ \mu(ds) \leq \int_D |f_n(s)-h_{k(n)}|\ \mu(ds) + \int_D |h_{k(n)}-f(s)|\ \mu(ds) \quad \text{et}$$

du lemme I.4.3.A. ∎

Rappelons que :

$$\mathcal{R}_{k(n)} = \{j \in \mathbb{N}^* : I_{j,k(n)} \in \Delta^{(k(n))} \text{ et } I_{j,k(n)} \cap D \neq \emptyset\}$$

$$A_{nj} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\ I_{j,k(n)}\ 1_N(\xi_i)}{C(I_{j,k(n)} \times N)} \qquad N \in \mathcal{M}$$

$A_{nj} = a_{nj}$ si $N = M$ et $A_{nj} = b_{nj}$ si $N = \mathbb{M}$.

Les fonctions f_n et $h_{k(n)}$ étant constantes sur tout élément de $\Delta^{(k(n))}$, nous posons $f_n(s) = f_{nj}$ et $h_{k(n)}(s) = h_{nj}$ si $s \in I_{j,k(n)}$. D étant un borné, fixons $\delta > 0$ de telle sorte que D^δ le soit aussi (cf. preuve du théorème I.4.2.1.). Rappelons également que

$$\alpha_{k(n)}(D) = \inf_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} C(I_{j,k(n)} \times M).$$

Lemme I.4.3.D.- Soit $0 < \varepsilon < C(D^\delta \times M)$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\max_{j\in R_{k(n)}} \text{diam } I_{j,k(n)} < \delta$, alors :

$$P\left(\int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \mu(ds) > \varepsilon\right) \leq \text{card } R_{k(n)} \sup_{j\in R_{k(n)}} \left(P\left(|a_{nj}-1| > \frac{\varepsilon}{4C(D^\delta\times M)}\right)\right.$$

$$\left. + P\left(|b_{nj}-1| > \frac{\varepsilon}{4C(D^\delta\times M)}\right)\right).$$

Démonstration : Puisque :

$$\int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \mu(ds) = \int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ E\xi(ds)$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} E\xi\, I_{j,k(n)}\ |f_{nj}-h_{nj}|$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} \left| \frac{E\xi\, I_{j,k(n)} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, I_{j,k(n)}\ 1_M(\xi_i)}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, I_{j,k(n)}} - C(I_{j,k(n)} \times M)\right|$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} C(I_{j,k(n)} \times M)\ \left|\frac{a_{nj}}{b_{nj}} - 1\right|$$

$$\leq \sum_{j\in R_{k(n)}} C(I_{j,k(n)} \times M) \sup_{j\in R_{k(n)}} \left|\frac{a_{nj}}{b_{nj}} - 1\right|$$

$$\leq C\Big(\bigcup_{j\in R_{k(n)}} I_{j,k(n)} \times M\Big) \sup_{j\in R_{k(n)}} \left[\frac{|a_{nj} - 1| + |b_{nj} - 1|}{b_{nj}}\right]$$

nous aurons pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\max_{j\in R_{k(n)}} \text{diam } I_{j,k(n)} < \delta$

$$C\Big(\bigcup_{j\in R_{k(n)}} I_{j,k(n)} \times M\Big) \leq C(D^\delta \times M) < +\infty$$

et

$$P\left(\int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \mu(ds) > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant P\left(C(D^\delta \times M) \sup_{j\in R_{k(n)}} \frac{|a_{nj}-1| + |b_{nj}-1|}{b_{nj}} > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant P\left(\bigcup_{j\in R_{k(n)}} \frac{|a_{nj}-1| + |b_{nj}-1|}{b_{nj}} > \frac{\varepsilon}{C(D^\delta \times M)}\right)$$

$$\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} P\left(|a_{nj}-1| + |b_{nj}-1| > \frac{\varepsilon\, b_{nj}}{C(D^\delta \times M)}\right)$$

$$\leqslant \operatorname{card} R_{k(n)} \sup_{j\in R_{k(n)}} P\left(\{|a_{nj}-1| > \frac{\varepsilon\, b_{nj}}{2C(D^\delta \times M)}\} \cup \{|b_{nj}-1| > \frac{\varepsilon\, b_{nj}}{2C(D^\delta \times M)}\}\right)$$

$$\leqslant \operatorname{card} R_{k(n)} \sup_{j\in R_{k(n)}} \left[P\left(|a_{nj}-1| > \frac{\varepsilon}{4C(D^\delta \times M)}\right) + P\left(|b_{nj}-1| > \frac{\varepsilon}{4C(D^\delta \times M)}\right)\right]$$

par application du lemme I.2.3. car $\frac{\varepsilon}{2C(D^\delta \times M)} < 1$. ■

Si $D \in B_b$ est fixé et si ξ admet un moment d'ordre deux, R_1 étant fini et non vide, nous posons $\gamma_1 = \sup_{j\in R_1} E\, \xi^2\, I_{j1}$ et $\lambda_1 = \sup_{j\in R_1} E\xi\, I_{j1}$.

Le lemme suivant sert dans l'étude des convergences en probabilité, presque complète et en moyenne de f_n vers f dans $L^1(\mu)$.

Lemme I.4.3.E.- Soit $\varepsilon > 0$.

a) Si ξ admet un moment d'ordre deux :

$$P(|A_{nj}-1| > \varepsilon) \leqslant \frac{\gamma_1}{n\, \varepsilon^2\, \alpha^2_{k(n)}(D)}$$

si $N = M$ ou $\mathbb{M}$.

b) Si la mesure aléatoire ξ vérifie l'hypothèse (A), alors :

$$P(|A_{nj}-1| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(- \frac{n\, \varepsilon^2\, \alpha^2_{k(n)}(D)}{4\, \gamma_1 + 2K\, \lambda_1}\right)$$

si $N = M$ ou $\mathbb{M}$.

I.4.3.1. - Convergence L^1 *de* f_n *vers* f .

Soit $D \in \mathcal{B}_b$, $\mu = E\xi$ et $\delta > 0$ fixé plus haut.

Théorème I.4.3.1.1.- Si ξ admet un moment d'ordre deux, une condition suffisante de convergence en probabilité de f_n vers f dans $L^1(\mu)$ est :

$$\alpha^{-1}_{k(n)}(D) = o(n^{1/3}) \quad .$$

Démonstration : Soit $0 < \varepsilon < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\max_{j \in \mathcal{R}_{k(n)}} \operatorname{diam} I_{j,k(n)} < \delta$. D'après les lemmes I.4.3.D. et I.4.3.E. a), pour n assez grand :

$$P\left(\int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \mu(ds) > \varepsilon\right)$$

$$\leq \operatorname{card} \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j \in \mathcal{R}_{k(n)}} \left[P\left(|a_{nj}-1| > \frac{\varepsilon}{4C(D^\delta \times M)}\right) + P\left(|b_{nj}-1| > \frac{\varepsilon}{4C(D^\delta \times M)}\right)\right]$$

$$\leq \frac{32\, \gamma_1\, C^2(D^\delta \times M)\ \operatorname{card} \mathcal{R}_{k(n)}}{n\, \varepsilon^2\, \alpha^2_{k(n)}(D)}$$

$$\leq \frac{32\, \gamma_1\, C^3(D^\delta \times M)}{n\, \varepsilon^2\, \alpha^3_{k(n)}(D)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car card $\mathcal{R}_{k(n)} \leqslant C(D^{\delta}\times M) \cdot \frac{1}{\alpha_{k(n)}(D)}$ (cf. preuve du théorème I.4.2.1.).

Le lemme I.4.3.C. permet de conclure. ∎

Remarque : La condition suffisante de convergence en probabilité de f_n vers f dans $L^1(\mu)$ établie dans le théorème ci-dessus est identique à celle de la convergence uniforme en probabilité établie sous l'hypothèse de l'uniforme continuité de f (cf. théorème I.4.2.3.). Cela est prévisible du fait de l'uniforme continuité de f et du fait que $\mu(D) < +\infty$. En effet, puisque f_n converge uniformément vers f sur D et $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, f_n converge donc vers f dans $L^1(\mu)$ d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Si $X = \mathbb{R}^m$ et $D = [0,1[^m$, l'hypothèse (B) implique que $\alpha \int_D |f_n(s)-f(s)|\ \lambda(ds) \leqslant \int_D |f_n(s)-f(s)|\ E\xi(ds)$. On obtient alors le fait que la condition suffisante de la convergence de f_n vers f dans $L^1(\mu)$ l'est aussi pour la convergence de f_n vers f dans $L^1(\lambda)$. En utilisant la remarque suivant le corollaire I.4.2.4. on obtient des conditions suffisantes de convergence en probabilité et presque complète de f_n vers f dans $L^1(\lambda)$, identiques à celles du corollaire I.4.2.4. et à celles de la même remarque pour la convergence presque complète. Une condition suffisante de convergence en moyenne de f_n vers f dans $L^1(\lambda)$ peut être également obtenue de la même manière.

Théorème I.4.3.1.2.- Si la mesure aléatoire ξ vérifie l'hypothèse (A), une condition suffisante de convergence presque complète de f_n vers f dans $L^1(\mu)$ est :

$$\alpha^{-1}_{k(n)}(D) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{1/2}\right) \quad .$$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\max\limits_{j \in R_{k(n)}} \operatorname{diam} I_{j,k(n)} < \delta$.
Par application des lemmes I.4.3.D. et I.4.3.E. on a :

$$P\left(\int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| \; \mu(ds) > \varepsilon\right)$$

$$\leqslant 4 \text{ card } R_{k(n)} \exp\left(- \frac{n\, \varepsilon^2\, \alpha^2_{k(n)}(D) \;.\; \bar{C}^2(D^\delta \times M)}{16(4\, \gamma_1 + 2\, K\, \lambda_1)}\right)$$

$$\leqslant 4n\; n^{-h/\varepsilon_n}$$

$$\leqslant 4\; n^{1-h/\varepsilon_n}$$

terme général d'une série convergente obtenu en posant :

$$h = \frac{\varepsilon^2\; \bar{C}^2(D^\delta \times M)}{16(4\, \gamma_1 + 2K\, \lambda_1)} \quad , \quad \alpha^{-2}_{k(n)}(D) = \frac{n\; \varepsilon_n}{\text{Log } n} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et card $R_{k(n)} \leqslant n$. ∎

Théorème I.4.3.1.3.- Si la mesure aléatoire ξ est telle que $o \leqslant \xi\, I_{j,1} \leqslant \beta < +\infty$, $\forall j \in R_1$ une condition suffisante pour que f_n converge vers f presque complètement dans $L^1(\mu)$ est :

$$\alpha^{-1}_{k(n)}(D) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{1/2}\right) \quad . \blacksquare$$

La preuve de ce théorème se fait comme ci-dessus grâce au théorème I.4.1.6.

Théorème I.4.3.1.4.- Si la mesure aléatoire ξ admet un moment d'ordre deux, une condition suffisante pour que f_n converge en moyenne vers f dans $L^1(\mu)$ est :

$$\alpha_{k(n)}^{-1}(D) = O(n^{1/4}) \quad .$$

Démonstration : Posons $X_n = \int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| \, \mu(ds)$.

Puisque $0 \leqslant |f_n - h_{k(n)}| \leqslant 1$, on a :

$$X_n \leqslant \sum_{j \in R_{k(n)}} \mu(I_{j,k(n)}) \sup |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|$$

$$\leqslant \lambda_1 \text{ card } R_{k(n)} \quad .$$

Il est à remarquer que la condition $\alpha_{k(n)}^{-1}(D) = O(n^{1/4})$ implique que $\alpha_{k(n)}^{-1}(D) = o(n^{1/3})$.

Soit $A > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\max_{j \in R_{k(n)}} \operatorname{diam} I_{j,k(n)} < \delta$:

$$\int_{\{X_n > A\}} X_n \, dP \leqslant \lambda_1 \text{ card } R_{k(n)} \; P\left(\int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)| \, \mu(ds) > A\right)$$

$$\leqslant \frac{32 \, \gamma_1 \, \lambda_1 \, C^2(D^\delta \times M) \text{ card } d^2 \, R_{k(n)}}{n \, A^2 \, \alpha_{k(n)}^2(D)} \quad \text{d'après les lemmes I.4.3.D. et I.4.3.E.}$$

$$\leqslant \frac{32 \, \gamma_1 \, \lambda_1 \, C^4(D^\delta \times M)}{n \, A^2 \, \alpha_{k(n)}^4(D)} \quad \text{car} \quad \text{card } R_{k(n)} \leqslant \frac{C(D^\delta \times M)}{\alpha_{k(n)}(D)}$$

$$\leqslant 32 \, \gamma_1 \, C^4(D^\delta \times M) \, \eta \, . \, A^{-2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \eta > 0 \text{ tel que } \frac{1}{n \, \alpha_{k(n)}^4(D)} < \eta$$

L'équi-intégrabilité de X_n ayant ainsi été établie, le théorème I.4.3.1.1. permettant d'avoir la convergence en probabilité de X_n vers 0 quand $n \to +\infty$, le lemme I.4.3.C. permet de conclure à la convergence en moyenne de X_n vers 0 . ■

I.4.3.2. - Convergence L^2 *de* f_n *vers* f.

Soit $X = \mathbb{R}^m$ et λ la mesure de Lebesgue. Posons :

$$\delta_n = \int_D |f_n(s)-f(s)|^2 \lambda(ds) .$$

On a :

$$\delta_n \leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} \int_{I_{j,k(n)}} |f_n(s)-f(s)|^2 \lambda(ds)$$

$$\leqslant 2k^{-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} \left[|f_{nj}-h_{nj}|^2 + \sup_{s\in I_{j,k(n)}} |h_{k(n)}(s)-f(s)|^2\right]$$

d'où

$$k(n)\ \delta_n \leqslant 2k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} \left[|f_{nj}-h_{nj}|^2 + \sup_{s\in I_{j,k(n)}} |h_{k(n)}(s)-f(s)|^2\right] .$$

Posons

$$X_n = k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} |f_{nj}-h_{nj}|^2 , \alpha_n = k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} \sup_{s\in I_{j,k(n)}} |h_{k(n)}(s)-f(s)|^2$$

Le lemme suivant est une généralisation d'un lemme de Saleh [19].

Lemme I.4.3.2.1.- Pour tous $k \geqslant 1$, $I \in \Delta^{(k)}$, si l'hypothèse (D) est vérifiée, alors :

$$\sup_{s\in I} |h_k(s)-f(s)| \leqslant \omega_f(I) \leqslant H\ k^{-\gamma} .$$

Démonstration :

$$\forall s \in I \qquad |h_k(s)-f(s)| = \left|\frac{1}{E\xi I}\int_I f(y)\, E\xi(dy) - f(s)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{E\xi I}\int_I (f(y)-f(s))\, E\xi(dy)\right|$$

$$\leq \frac{1}{E\xi I}\int_I |f(y)-f(s)|\, E\xi(dy)$$

$$\leq \sup_{s\in I} |f(y)-f(s)|$$

$$\leq \omega_f(I)$$

$$\leq H\, k^{-\gamma}$$

d'après l'hypothèse (D). ■

Considérons d'abord le cas où $D = [0,1[^m$ en nous plaçant sous les hypothèses (B) et (D) card $R_{k(n)} = k^m(n)$.

Théorème I.4.3.2.2.- Si ξ admet un moment d'ordre deux et $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, une condition suffisante de convergence en probabilité de $k(n)\,\delta_n$ vers 0 est :

$$k^m(n) = o(n^{(3+m^{-1})^{-1}}) \quad .$$

Démonstration :

- *Convergence de* α_n *vers* 0 .

D'après le lemme I.4.3.2.1. :

$$\alpha_n \leq k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} \omega_f^2(I_{j,k(n)})$$

$$\leq H^2 \text{ card } R_{k(n)}\, k^{-2\gamma}(n)\, k^{1-m}(n)$$

$$= H^2\, k^{1-2\gamma}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{si } \gamma > \frac{1}{2} .$$

- *Convergence en probabilité de* X_n *vers* 0 .

Soit $0 < \varepsilon < 1$.

$$P(X_n > \varepsilon) \leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} P(k^{(1-m)/2}(n)\ |f_{n,j}-h_{nj}| > (\varepsilon \text{ card}^{-1} R_{k(n)})^{1/2})$$

d'après le lemme I.3.1. car $\varepsilon\ k^{m-1}(n) \text{ card}^{-1} R_{k(n)} = \varepsilon\ k^{-1}(n) < 1$:

$$\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} \Big[P(|a_{nj}-1| > \frac{1}{4}(\varepsilon k^{m-1}(n) \text{ card}^{-1} R_{k(n)})^{1/2}) + P(|b_{nj}-1| > \frac{1}{4}(\varepsilon k^{m-1}(n) \text{ card}^{-1} R_{k(n)})^{1/2})\Big]$$

$$\leqslant \sum_{j\in R_{k(n)}} \Big[16\ \varepsilon^{-1} \text{ card } R_{k(n)}\ k^{1-m}(n) \text{ var } a_{nj} + 16\ \varepsilon^{-1} \text{ card } R_{k(n)}\ k^{1-m}(n) \text{ var } b_{nj}\Big]$$

$$\leqslant 16\ \varepsilon^{-1} \text{ card } R_{k(n)}\ k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} \Big[n^{-1}\ C^{-2}(I_{j,k(n)}\times M) \text{ var}\big[\xi(I_{j,k(n)})\ 1_M(\xi)\big] + n^{-1}\ C^{-2}(I_{j,k(n)}\times \mathbb{M}) \text{ var}\big[\xi(I_{j,k(n)})\big]\Big]$$

$$\leqslant 32\ \varepsilon^{-1}\ n^{-1} \text{ card } R_{k(n)}\ k^{1-m}(n)\ \gamma_1 \sum_{j\in R_{k(n)}} C^{-2}(I_{j,k(n)}\times M)$$

$$\leqslant 32\ \varepsilon^{-1}\ \alpha^{-2}\ \gamma_1\ n^{-1} \text{ card}^2 R_{k(n)}\ k^{1+m}(n) \qquad \text{(d'après (B))}$$

$$= 32\ \varepsilon^{-1}\ \alpha^{-2}\ \gamma_1\ n^{-1}\ k^{3m+1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad .$$

Le lemme IV.3.B. permet de conclure. ∎

Remarque : Puisque $\frac{1}{4} \leqslant (3+m^{-1})^{-1} < \frac{1}{3}$ pour avoir une convergence en probabilité de $k(n)\ \delta_n$ vers 0 , quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, le nombre $k^m(n)$ des cellules de $[0,1[^m$ doit croître moins vite que $n^{1/3}$.

Dans la suite, la preuve de la convergence de α_n vers 0 reste acquise sous la condition $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$.

Théorème I.4.3.2.3.- Si la mesure aléatoire ξ vérifie l'hypothèse (A) et si $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, une condition suffisante de convergence presque complète de $k(n)\ \delta_n$ vers 0 est :

$$k^m(n) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{(2+m^{-1})^{-1}}\right) \quad .$$

Démonstration : Il nous suffit de montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ presque complètement. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

$$P(X_n > \varepsilon) \leq \sum_{j\in R_{k(n)}} P(|f_{nj}-h_{nj}| > (\varepsilon\ k^{m-1}(n)\ \text{card}^{-1}\ R_{k(n)})^{1/2})$$

d'après les lemmes I.3.1. et I.4.3.E. :

$$\leq 4\ \text{card}\ R_{k(n)}\ \exp\left(-\frac{n\ \varepsilon\ \alpha^2_{k(n)}(D)\ k^{m-1}(n)\ \text{card}^{-1}\ R_{k(n)}}{16(4\ \gamma_1 + 2\ K\ \lambda_1)}\right)$$

$$\leq 4\ \text{card}\ R_{k(n)}\ \exp\left(-\frac{n\ \varepsilon\ \alpha^2\ k^{-2m}(n)\ k^{m-1}(n)\ \text{card}^{-1}\ R_{k(n)}}{16(4\ \gamma_1 + 2\ K\ \lambda_1)}\right) \text{ ; d'après (B)}$$

$$= 4\ k^m(n)\ \exp(-\ n\ h\ k^{-2m-1}(n)) \qquad \text{où} \quad h = \frac{\varepsilon\ \alpha^2}{16(4\ \gamma_1 + 2\ K\lambda_1)}$$

$$= 4\left(\frac{n\ \varepsilon_n}{\text{Log } n}\right)^{(2+m^{-1})^{-1}} n^{-h/\varepsilon_n}$$

$$\left(\text{car} \quad k^m(n) = \left(\frac{n\ \varepsilon_n}{\text{Log } n}\right)^{(2+m^{-1})^{-1}} , \quad \text{avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$$

$$= 4\left(\frac{\varepsilon_n}{\text{Log } n}\right)^{(2+m^{-1})^{-1}} n^{(2+m^{-1})^{-1} - h/\varepsilon_n}$$

qui est le terme général d'une série convergente . ∎

Théorème I.4.3.2.4.- Si ξ admet un moment d'ordre deux et $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$, une condition suffisante pour que $k(n)\ \delta_n$ converge vers 0 en moyenne est :

$$k^m(n) = o(n^{(3+2m^{-1})^{-1}}) \quad .$$

Démonstration : La condition considérée permet d'avoir la convergence en probabilité de X_n . Il suffit de montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est équi-intégrable.

$$X_n \leqslant k^{1-m}(n) \text{ card } R_{k(n)} \ .$$

Soit $A > 0$

$$\int_{\{X_n > A\}} X_n \, dP \leqslant k^{1-m}(n) \text{ card } R_{k(n)} \ P(X_n > A)$$

$$\leqslant k^{1-m}(n) \text{ card } R_{k(n)} \ P\Big(k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} |f_{nj}-h_{nj}|^2 > A\Big)$$

$$\leqslant k^{1-m}(n) \text{ card } R_{k(n)} \sum_{j\in R_{k(n)}} P\big(|f_{nj}-h_{nj}| > (A\ k^{m-1}(n) \text{ card}^{-1} R_{k(n)})^{1/2}\big)$$

d'après les lemmes I.3.1., I.4.3.E. et la condition (B) :

$$\leqslant 32\ \gamma_1\ \alpha^{-2}\ A^{-1}\ k^{2(1-m)}(n)\ n^{-1} \text{ card}^3 R_{k(n)}\ k^{2m}(n)$$

$$\leqslant 32\ \gamma_1\ \alpha^{-2}\ A^{-1}\ n^{-1}\ k^{3m+2}(n)$$

$$\leqslant 32\ \gamma_1\ \delta\ \alpha^{-2}\ A^{-1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

car le réel $\delta > 0$ est choisi tel que $n^{-1}\ k^{3m+2}(n) < \delta$. ∎

Supposons que $D = D_n = [-d(n), d(n)]^m$ où $d(n)$ est une fonction croissante tendant vers l'infini quand n tend vers l'infini. Nous nous plaçons à présent sous les conditions (B), (C) et (D).

$$\text{card } R_{k(n)} \leq 4^m d^m(n) k^m(n) .$$

Théorème I.4.3.2.5.- Si ξ admet un moment d'ordre deux et s'il existe $\beta > 0$ tel que $k^{-\beta}(n) d^m(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{\beta+1}{2} \leq \gamma \leq 1$ et si $n^{-1} d^{2m}(n) k^{3m+1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $k(n) \delta_n$ converge vers 0 en probabilité.

Démonstration :

- *Convergence de* α_n *vers* 0

$$\alpha_n \leq k^{1-m}(n) \sum_{j\in R_{k(n)}} \sup_{s\in I_{j,k(n)}} |h_{k(n)}(s)-f(s)|^2$$

$$\leq H^2 k^{-2\gamma}(n) \text{ card } R_{k(n)} k^{1-m}(n) ,$$ d'après le lemme I.4.3.2.1.

$$\leq 4^m H^2 d^m(n) k^{1-2\gamma}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

- *Convergence en probabilité de* X_n *vers* 0

Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (C) soit vérifiée :

$$P(X_n > \varepsilon) \leq \sum_{j\in R_{k(n)}} P(k^{1-m/2}(n) |f_{nj}-h_{nj}| > (\varepsilon \text{ card}^{-1} R_{k(n)})^{1/2})$$

d'après les lemmes I.3.1., I.4.3.E. et la condition (C) :

$$\leq 32 V \varepsilon^{-1} k^{1-m}(n) n^{-1} \text{ card } R_{k(n)} \sum_{j\in R_{k(n)}} C^{-2}(I_{j,k(n)} \times M)$$

d'après la condition (B) :

$$\leqslant 32\ V\ \varepsilon^{-1}\ \alpha^{-2}\ n^{-1}\ \mathrm{card}^2\ \mathcal{R}_{k(n)}\ k^{1+m}(n)$$

$$\leqslant 4^{2(m+1)}\ 2V\ \varepsilon^{-1}\ \alpha^{-2}\ n^{-1}\ d^{2m}(n)\ k^{3m+1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\ .$$

On conclut en appliquant le lemme I.4.3.B. ∎

Corollaire I.4.3.2.6.- Si $d(n) = \mathrm{Log}\ n$, $m = 1$, si ξ admet un moment d'ordre deux, et s'il existe un réel $\beta > 0$ tel que $k^{-\beta}(n)\ \mathrm{Log}\ n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{\beta+1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$, une condition suffisante pour que $k(n)\ \delta_n$ converge en probabilité est :

$$k(n) = o((n\ (\mathrm{Log}\ n)^{-2})^{1/4})\ .$$

Remarque : Dans la preuve des théorèmes à venir, la suffisance des conditions assurant la convergence de α_n vers 0 ne sera plus démontrée.

L'idée de départ est de faire une estimation de f sur $\mathbb{R}^m$ tout entier en se plaçant suivant la taille de l'échantillon, sur des boréliens bornés de plus en plus grands. La fonction $d(n)$ doit être choisie de façon à croître assez vite. L'estimation étant meilleure pour des tailles de cellules assez petites (c'est-à-dire pour $k(n)$ assez grand), $k(n)$ doit également croître assez vite. Prenons par exemple :

$$d^m(n) = n^r\ ,\quad k^m(n) = n^s$$

r et s étant des réels strictement positifs. Pour que $k(n)\ \delta_n$ converge en probabilité vers 0 , il faut que :

$$s < \frac{m}{2\beta + 3m + 1} \qquad \text{et} \qquad r < \frac{\beta}{2\beta + 3m + 1} \ .$$

Pour $\beta = \gamma = 1$ et $m = 1$, on a : $0 < r < s < \frac{1}{6}$.

Théorème I.4.3.2.7.- Si la mesure aléatoire ξ vérifie l'hypothèse (A) et s'il existe un réel $\beta > 0$ tel que $k^{-\beta}(n)\ d^m(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\beta+1}{2} \leq \gamma \leq 1$, une condition suffisante pour que $k(n)\ \delta_n$ converge vers 0 presque complètement est :

$$n^{-1} \operatorname{Log} n\ d^m(n)\ k^{2m-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Démonstration : Soit $0 < \varepsilon < 1$. On a :

$$P(X_n > \varepsilon) \leq \sum_{j \in R_{k(n)}} P(k^{1-m/2}(n)\ |f_{nj} - h_{nj}| > (\varepsilon \operatorname{card}^{-1} R_{k(n)})^{1/2})$$

d'après les lemmes I.3.1. et I.4.2.8. :

$$\leq 4 \sum_{j \in R_{k(n)}} \exp\left(- \frac{n\ \varepsilon\ C^2(I_{j,k(n)} \times M)\ k^{m-1}(n) \operatorname{card}^{-1} R_{k(n)}}{16\ V\ (4 + 2K)}\right)$$

$$\leq \quad 4^{m+1}\ d^m(n)\ k^m(n) \exp(-\ n\ h\ d^{-m}(n)\ k^{-2m-1}(n)) \ , \qquad \text{d'après (B)}$$

avec $\qquad h = \dfrac{4^{-m}\ \varepsilon\ \alpha^2}{16\ V\ (4 + 2K)}$

$$\leq 4^{m+1}\ \varepsilon_n\ k^{-2m-1}(n)\ n^{1-\ h/\varepsilon_n}$$

car $n^{-1}\ k^{2m-1}\ d^m(n) = \varepsilon_n\ (\operatorname{Log} n)^{-1}$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le dernier membre de l'inégalité étant le terme général d'une série convergente, le théorème est alors établi. ■

Théorème I.4.3.2.8.- Si ξ admet un moment d'ordre deux et s'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que $k^{-\beta}(n)\ d^{m}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{\beta+1}{2} \leq \gamma \leq 1$, une condition suffisante de convergence en moyenne de $k(n)\ \delta_n$ vers 0 est :

$$d^{2m}(n)\ k^{3m+2}(n) = O(n) .$$

Démonstration : Soit $A > 0$.

$$\int_{\{X_n > A\}} X_n\ dP \leq k^{1-m}(n) \text{ card } \mathcal{R}_{k(n)}\ P(X_n > A)$$

d'après le lemme I.3.1. et la condition (C)

$$\leq 4.32\ V\ n^{-1}\ A^{-1} \text{ card}^2\ \mathcal{R}_{k(n)}\ k^{2(1-m)}(n) \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} C^{-2}(I_{j,k(n)} \times M)$$

$$\leq 4^3\ 2\ V\ \alpha^{-2}\ n^{-1}\ A^{-1} \text{ card}^3\ \mathcal{R}_{k(n)}\ k^2(n) \qquad \text{d'après (B)}$$

$$\leq 4^{3(m+1)}\ 2\ V\ \alpha^{-2}\ A^{-1}\ n^{-1}\ d^{3m}(n)\ k^{3m+2}(n)$$

$$\leq 4^{3(m+1)}\ 2\ V\ \delta\ \alpha^{-2}\ A^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car le réel $\delta > 0$ est choisi tel que $n^{-1}\ d^{3m}(n)\ k^{3m+2}(n) < \delta$. Le théorème est donc établi.■

I.4.4. - Etude du biais et de l'aléa.

Soit $\mathcal{X} = \mathbb{R}^m$.

D étant un borélien borné, l'aléa est défini par :

$$A_n = \int_D |f_n(s) - E\ f_n(s)|\ \lambda(ds)$$

et le biais par :

$$B_n = \int_D |f(s) - E\, f_n(s)|\ \lambda(ds) \quad .$$

On a :

$$A_n \leq \int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \lambda(ds) + \int_D |h_{k(n)}(s)-E\, f_n(s)|\ \lambda(ds)$$

$$\leq \int_D |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \lambda(ds) + E \int_D |h_{k(n)}(s)-f_n(s)|\ \lambda(ds)$$

et $\quad B_n \leq E \int_D |f(s)-f_n(s)|\ \lambda(ds)$.

La convergence du biais et de l'aléa vers 0 se ramène, dans le cas du borélien borné D fixé, à celle de f_n vers f dans $L^1(\lambda)$. Cette dernière a été étudiée au paragraphe I.4.3.1.

Soit alors $D = D_n = [-d(n), d(n)]^m$ où $d(n)$ est une fonction croissante tendant vers l'infini quand $n \to +\infty$. Nous supposons vérifiées les hypothèses (B), (C) et (D). Rappelons que :

$$\mathcal{R}_{k(n)} = \{j \in \mathbb{Z} : \quad I_{j,k(n)} \in \Delta^{(k(n))} \quad \text{et} \quad I_{j,k(n)} \cap D_n \neq \emptyset\}$$

$$\text{card}\ \mathcal{R}_{k(n)} \leq 4^m\, d^m(n)\, k^m(n) \quad .$$

Nous avons :

$$\int_{D_n} |f_n(s)-h_{k(n)}(s)|\ \lambda(ds) \leq k^{-m}(n) \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} |f_{n,j}-h_{nj}|$$

$$\leq k^{-m}(n)\ \text{card}\ \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} |f_{n,j}-h_{nj}|$$

$$\leq 4^m\, d^m(n) \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} |f_{n,j}-h_{n,j}|$$

et

$$\int_{D_n} |f(s)-h_{k(n)}(s)| \ \lambda(ds) \leq k^{-m}(n) \sum_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \sup_{s\in I_{j,k(n)}} |f(s)-h_{n,j}|$$

Posons :

$$X_n = 4^m \ d^m(n) \sup_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} |f_{nj}-h_{nj}|$$

$$\alpha_n = k^{-m}(n) \sum_{j\in \mathcal{R}_{k(n)}} \sup_{s\in I_{j,k(n)}} |f(s)-h_{nj}| \ .$$

Les lemmes suivants donnent des conditions suffisantes de convergence de X_n et α_n vers 0 .

Lemme I.4.4.1.- Une condition suffisante pour que α_n converge vers 0 est que :

$$k^{-\gamma}(n) \ d^m(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ .$$

Démonstration : D'après le lemme I.4.3.2.1. :

$$\alpha_n \leq k^{-m}(n) \text{ card } \mathcal{R}_{k(n)} \ H \ k^{-\gamma}(n)$$

$$\leq 4^m \ H \ k^{-\gamma}(n) \ d^m(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ . \ \blacksquare$$

Lemme I.4.4.2.- Une condition suffisante pour que X_n converge vers 0 en probabilité est que :

$$d^m(n) \ k^m(n) = o(n^{1/3}) \ .$$

Démonstration : Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (C) soit vérifiée et que $d(n) \geq \frac{1}{4}$.

$$P(X_n > \varepsilon) = P(\sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} |f_{nj}-h_{nj}| > 4^{-m}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon)$$

$$\leqslant \sum_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(|f_{nj}-h_{nj}| > 4^{-m}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon)$$

$$\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(\frac{C(I_{j,k(n)}\times M)}{E\xi\, I_{j,k(n)}} |a_{nj}\, b_{nj}^{-1}-1| > 4^{-m}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon)$$

$$\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(|a_{nj}-1| + |b_{nj}-1| > 4^{-m}\, d^{-m}(n)\, b_{nj}\, \varepsilon)$$

$$\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} P(\{|a_{nj}-1| > 2 4^{-m}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon\}$$

$$\cup \{|b_{nj}-1| > 2 4^{-m}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon\})$$

$$\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} [P(|a_{nj}-1| > 4^{-m-1}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon)$$

$$+ P(|b_{nj}-1| > 4^{-m-1}\, d^{-m}(n)\, \varepsilon)]$$

$$\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)} \sup_{j\in\mathcal{R}_{k(n)}} [4^{2(m+1)}\, \varepsilon^{-2}\, V\, \varepsilon^{-2}\, n^{-1}\, d^{2m}(n)$$

$$(C^{-2}(I_{j,k(n)}\times M) + C^{-2}(I_{j,k(n)}\times M))]$$

$$\leqslant \text{card } \mathcal{R}_{k(n)}\; 2\; 4^{2(m+1)}\, \varepsilon^{-2}\, \alpha^{-2}\, V\, n^{-1}\, d^{2m}(n)\, k^{2m}(n)$$

$$\leqslant 2\; 4^{3m+2}\, \varepsilon^{-2}\, \alpha^{-2}\, V\, n^{-1}\, d^{3m}(n)\, k^{3m}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

Lemme I.4.4.3.- Une condition suffisante pour que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ soit équi-intégrable est que :

$$d^{4m}(n)\, k^{3m}(n) = O(n) \quad .$$

Démonstration : Soit $A > 0$.

Puisque $X_n \leq 4^m d^m(n)$, pour n assez grand tel que (C) soit vérifiée :

$$\int_{\{X_n > A\}} X_n \, dP \leq 4^m d^m(n) P(X_n > A)$$

$$\leq 4^m d^m(n) \text{ card } _{k(n)} \sup_{j \in R_{k(n)}} \left[P(|a_{nj}-1| > 4^{-m-1} d^{-m}(n) A) + P(|b_{nj}-1| > 4^{-m-1} d^{-m}(n) A)\right]$$

d'après (C) $\leq 2 \, 4^{2(2m+1)} \alpha^{-2} V n^{-1} d^{4m}(n) k^{3m}(n) A^{-2}$

$$\leq 2 \, 4^{2(2m+1)} \alpha^{-2} V \eta A^{-2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

η étant un réel choisi tel que $n^{-1} d^{4m}(n) k^{3m}(n) < \eta$ $(\eta > 0)$. ∎

Lemme I.4.4.4.- Une condition suffisante pour que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque complètement vers 0 est que :

$$d^m(n) k^m(n) = o\left(\left(\frac{n}{\text{Log } n}\right)^{1/2}\right) .$$

Démonstration : Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (C) soit vérifiée :

$$P(X_n > \varepsilon) \leq \text{card } R_{k(n)} \sup_{j \in R_{k(n)}} \left[P(|a_{nj}-1| > 4^{-m-1} d^{-m}(n) \varepsilon) + P(|b_{nj}-1| > 4^{-m-1} d^{-m}(n) \varepsilon)\right]$$

$$\leq 4 \text{ card } R_{k(n)} \sup_{j \in R_{k(n)}} \exp\left(- \frac{n \varepsilon^2 C^2(I_{j,k(n)} \times M)}{4^{2m+1} d^{2m}(n)(4+K)V}\right) \quad \text{(Lemme I.4.2.8.)}$$

$$\leq 4 \text{ card } R_{k(n)} \exp\left(- \frac{n \alpha^2 \varepsilon^2}{4^{2m+1} d^{2m}(n) k^{2m}(n) (4+K)V}\right) \quad \text{d'après (B)}$$

$$\leqslant 4^{m+1}\ d^m(n)\ k^m(n)\ \exp(-\ h\ \varepsilon_n^{-1}\ \mathrm{Log}\ n) \qquad \text{où} \quad h = \frac{\varepsilon^2\ \alpha^2}{4^{2m+1}\,(4+K)V}$$

$$= 4^{m+1}\ \left(\frac{\varepsilon_n}{\mathrm{Log}\ n}\right)^{1/2}\ n^{(1/2)-(h/\varepsilon_n)} \qquad \text{car} \quad d^m(n)\ k^m(n) = \left(\frac{n\ \varepsilon_n}{\mathrm{Log}\ n}\right)^{1/2}$$

qui est le terme général d'une série convergente. ∎

Les théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes de convergence du biais et de l'aléa.

Théorème I.4.4.5.- Les deux conditions suivantes sont suffisantes pour que B_n converge vers 0 :

$$k^{-\gamma}(n)\ d^m(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad , \quad d^{4m}(n)\ k^{3m}(n) = O(n) \quad . \blacksquare$$

Ce théorème est obtenu grâce aux lemmes I.4.4.1., I.4.4.2., et I.4.4.3.

Théorème I.4.4.6.- Une condition suffisante pour que A_n converge en probabilité et en moyenne vers 0 est que :

$$d^{4m}(n)\ k^{3m}(n) = O(n) \ . \blacksquare$$

Puisque $A_n \leqslant X_n + E\ X_n$, ce théorème est une conséquence directe des lemmes I.4.4.2. et I.4.4.3.

Théorème I.4.4.7.- Les conditions suivantes sont suffisantes pour que A_n converge presque complètement vers 0 :

$$d^m(n)\ k^m(n) = o\left(\left(\frac{n}{\mathrm{Log}\ n}\right)^{1/2}\right) \quad , \quad d^{4m}(n)\ k^{3m}(n) = O(n) \quad . \blacksquare$$

Ce théorème est une conséquence des lemmes I.4.4.3. et I.4.4.4.

CHAPITRE II

SUR LA MESURE INTENSITE CONDITIONNELLE.

II.1. - INTRODUCTION.

L'une des notions importantes dans la théorie des mesures aléatoires sur un espace X, autre que celle des distributions de Palm, est la mesure intensité conditionnelle d'une mesure aléatoire ξ. Elle a été introduite pour la première fois par Papangelou ([17]) pour un processus ponctuel simple possédant un moment d'ordre deux. $(\Delta^{(n)})_{n\geq 1}$ étant une suite de partitions de l'espace X vérifiant certaines hypothèses, elle a été obtenue comme limite presque sûre et en moyenne de la suite de fonctions d'ensembles aléatoires $S_n(I) = \sum_{J\in\Delta^{(n)}\cap I} E(\xi(J)/F_{J^c})$, $I \in \bigcup_{n\geq 1} \Delta^{(n)}$. Cette somme est prise pour des éléments de $\Delta^{(n)}$ contenus dans I , et F_{J^c} est la tribu relative au comportement du processus ponctuel ξ en dehors de J .

Kallenberg ([9]) a étendu ce résultat au cas d'un processus ponctuel simple admettant un moment d'ordre un. Il indique ([10]) que ce résultat est valable pour tout processus ponctuel à valeurs entières.

Sous des hypothèses différentes d'absolue continuité, la mesure intensité conditionnelle a été obtenue comme limite en moyenne par Papangelou ([18]), comme limite presque sûre et en moyenne par Jacob ([6]).

On peut essayer d'obtenir un estimateur de la mesure intensité conditionnelle de la même manière que dans le cas des distributions de Palm. On doit pour cela pouvoir approcher la mesure intensité conditionnelle par une suite de fonctions d'ensembles dont on se sert pour l'estimation. La nature trop riche des tribus F_{J^c} rendant impossible l'utilisation des suites $S_n(I)$, nous montrons que la mesure intensité conditionnelle est également limite presque sûre et en moyenne de la suite $\zeta_n(I) = \sum_{J\in\Delta^{(n)}\cap I} E(\xi(J)/F^n_{J^c})$. La tribu $F^n_{J^c}$ est relative au comportement de ξ sur les éléments de $\Delta^{(n)} \cap J^c$ et la mesure ξ est supposée être absolument continue par rapport à sa mesure moyenne $E\xi$.

La convergence en moyenne est établie dans le troisième paragraphe et la convergence presque sûre dans le quatrième. Dans le cinquième paragraphe, des théorèmes donnés par Papangelou ([17]) et Kallenberg ([9]) sont démontrés pour des tribus de la forme $F^n_{J^c}$.

Notations : En plus des notations du chapitre I, nous adoptons les suivantes :

$\|\ \|_p$: norme sur $L^p(\Omega,A,P)$, $p \geq 1$

ϕ_A : $\forall A \in B$, ϕ_A désigne l'application de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$\mu \longmapsto \mu(A)$$

$$I = \bigcup_{n\geq 1} \Delta^{(n)}$$

$\forall n \geq 1 \quad , \quad \forall A \in \mathcal{B}$:

$$\Delta^{(n)} \cap A = \{J \in \Delta^{(n)} : J \subset A\}$$

$$\mathcal{F}_A = \sigma(\xi(B) : B \in \mathcal{B} \cap A) \qquad \text{avec} \quad \mathcal{F}_\Omega = \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}_A^n = \sigma(\xi(I) : I \in \Delta^{(n)} \cap A)$$

$\forall s \in X$: $J_n(s)$ = unique élément de $\Delta^{(n)}$ contenant s

II.2. - DEFINITIONS ET PROPRIETES DE BASE.

Le théorème suivant est fondamental pour toute la suite.

Théorème II.2.1.- Pour tout $s \in X$:

$$\mathcal{F}_{\{s\}^c} = \sigma\Big(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}^n_{J_n^c(s)}\Big) .$$

Démonstration : La suite $(\mathcal{F}^n_{J_n^c(s)})_{n\geq 1}$ est une filtration. En effet, pour tout $n \geq 1$, $J_n^c(s) \subset J_{n+1}^c(s)$ et tout élément de $\Delta^{(n)}$ étant réunion finie d'éléments de $\Delta^{(n+1)}$, $\mathcal{F}^n_{J_n^c(s)} \subset \mathcal{F}^{n+1}_{J_{n+1}^c(s)}$ par définition.

Posons $\qquad \mathcal{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}^n_{J_n^c(s)}\Big)$.

$\forall n \geq 1$, par définition $\mathcal{F}^n_{J_n^c(s)} \subset \mathcal{F}_{\{s\}^c}$ d'où $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{F}_{\{s\}^c}$.

Or d'après les lemmes I.2. et 1.4. de [10] p. 12 :

$$\mathcal{F}_{\{s\}^c} = \sigma(\phi_B \circ \xi \; : B \in \mathcal{B} \cap \{s\}^c)$$

$$= \xi^{-1}\, \sigma(\phi_B \; : B \in \mathcal{B} \cap \{s\}^c)$$

$$= \xi^{-1}\, \sigma(\phi_I \; : I \in \mathcal{I} \cap \{s\}^c)$$

$$= \xi^{-1}\, \sigma(\phi_I \; : I \in \bigcup_{n \geq 1} \Delta^{(n)}_{\{s\}^c})$$

$$= \xi^{-1}\, \sigma(\Phi_I \; : I \in \bigcup_{n \geq 1} \Delta^{(n)}_{J_n^c(s)}) \quad \text{car pour tout } n \geq 1 \quad \Delta^{(n)}_{\{s\}^c} = \Delta^{(n)}_{J_n^c(s)}$$

$$= \sigma(\xi I \; : I \in \bigcup_{n \geq 1} \Delta^{(n)}_{J_n^c(s)})$$

$$\subset \mathcal{F}_\infty \; .$$

Soit ξ une mesure aléatoire admettant un moment d'ordre un. Soit $\mu = E\xi$, sa mesure moyenne.

Soit la fonction d'ensembles $||\xi||_p$ définie par (cf. [10] p. 24)

$$\forall K \in \mathcal{I} \qquad ||\xi||_p\, K = \lim_{n \to +\infty} \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} ||\xi I||_p \; .$$

Cette définition a un sens car la suite de terme $\sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} ||\xi I||_p$ est croissante. En effet, tout élément de $\Delta^{(n)}$ étant réunion finie d'éléments de $\Delta^{(n+1)}$ $(n \geq 1)$ par additivité de ξ et l'inégalité de Minkowski :

$$\sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} ||\xi I||_p = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} \Big|\Big| \sum_{J \in \Delta_I^{(n+1)}} \xi J \Big|\Big|_p$$

$$\leq \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} \; \sum_{J \in \Delta^{(n+1)} \cap I} ||\xi J||_p$$

$$\leq \sum_{J \in \Delta^{(n+1)} \cap K} ||\xi J||_p$$

Si $||\xi||_p K < +\infty$, $\forall K \in \mathcal{B}_b$: alors $\xi << \mu$ presque sûrement et de densité X ; $||\xi||_p$ est alors une mesure de Radon vérifiant $||\xi||_p = ||X\mu||_p = ||X||_p \mu$ (cf. [10] théorème 2.8, p. 24).

Soit $K \in \mathcal{B}_b$ fixé . Nous notons μ_K la restriction de μ à $\mathcal{B}_K = \{B \in \mathcal{B}_b : B \subset K\}$. Dans le but d'utiliser des résultats de la théorie des martingales, nous supposons sans inconvénient que $\mu K = 1$. On a : $E\xi(K) = E \int_K X \, d\mu = \int_K E(X) \, d\mu$ d'après le théorème de Fubini .

Puisque $E\xi \, K < +\infty$, $EX < +\infty$ μ_K-presque partout. Posons :

$$\Omega_o = \{\omega \in \Omega : \xi^\omega << \mu\}$$

$$K_o = \{x \in K : EX(.,x) < +\infty\}$$

$P(\Omega_o) = \mu(K_o) = 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega_o$; on pose :

$$\forall n \geq 1 \qquad X_n(\omega) = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} \frac{\xi^\omega I}{\mu I} \cdot 1_I$$

X_n est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_K$ - mesurable. Pour tout $D \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_k$, notons :

$$\forall \omega \in \Omega \qquad D_\omega = \{x \in K : (\omega,x) \in D\} \in \mathcal{B}_K$$

$$\forall x \in K \qquad D_x = \{\omega \in \Omega : (\omega,x) \in D\} \in \mathcal{F}$$

les sections de D suivant ω et x respectivement. Dans toute la suite K est fixé et les notations sont les mêmes que dans ce paragraphe.

II.3. - CONVERGENCE EN MOYENNE.

Enonçons quelques lemmes.

Lemme II.3.1.- La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge $P \otimes \mu_K$ - presque partout sur $\Omega \times K$ et dans $L^1(P \otimes \mu_K)$ vers la fonction X .

Démonstration : Pour tout $\omega \in \Omega_o$, par définition de $(X_n)_{n\geq 1}$:

$$\forall I \in \Delta^{(n)} \cap K \quad \int_I X_{n+1}(\omega)\, d\mu_K = \sum_{J\in\Delta^{(n+1)} \cap I} \int_J X_{n+1}(\omega)\, d\mu$$

$$= \sum_{J\in\Delta^{(n+1)} \cap I} \frac{\xi^{\omega}J}{\mu J} \cdot \mu J$$

$$= \xi^{\omega}I$$

$$= \int_I X_n(\omega)\, d\mu_K$$

$X_n(\omega)$ est donc une martingale positive par rapport aux tribus engendrées par les partitions $\Delta^{(n)} \cap K$. Elle est intégrable et telle que pour tout $\omega \in \Omega_o$: $\int_I X(\omega)\, d\mu_K = \xi^{\omega}I = \int_I X_m(\omega)\, d\mu_K$, $\forall I \in \Delta^{(n)} \cap K$, $\forall m \geq n$
$X_n(\omega)$ converge donc μ_K-presque sûrement vers $X(\omega)$.

Soit $D = \{(\omega,x) \in \Omega \times K : X_n(\omega,x)$ ne converge pas$\}$. $D \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_K$.
Puisque : $\forall \omega \in \Omega_o \quad \mu_K(D_\omega) = 0$ et $P(\Omega-\Omega_o) = 0$

$$P \otimes \mu_K(D) = \int_\Omega \mu_K(D_\omega)\, P(d\omega)$$

$$= \int_{\Omega_o} \mu_K(D_\omega)\, P(d\omega) + \int_{\Omega-\Omega_o} \mu_K(D_\omega)\, P(d\omega)$$

$$= 0$$

X_n converge alors $P \otimes \mu_K$ - presque partout vers X .

Puisque

$$\int X_n \, dP \otimes \mu_K = \int X \, dP \otimes \mu_K = E\xi\, K < +\infty$$

X_n converge également vers X dans $L^1(P \otimes \mu_K)$ par application du lemme de Scheffé.

La fonction X peut être supposée $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_K$ - mesurable.

Soit $I \in \mathcal{I} \cap K$. Pour tout $n \geq 1$, la tribu $\mathcal{F}^n_{I^c}$ engendrée par la famille dénombrable des variables aléatoires ξB, $B \in \Delta^{(n)} \cap I^c$ est à base dénombrable. Pour tout $t \in I$, considérons la mesure définie sur $\mathcal{F}^n_{I^c}$ par :

$$\nu^I_t(A) = \int_A X(.,t) \, dP \quad , \quad A \in \mathcal{F}^n_{I^c} \quad .$$

D'après un théorème de Doob ([14], p. 64), il existe une fonction $u^I(.,.)$ $\mathcal{F}^n_{I^c} \otimes \mathcal{B}_K$ - mesurable sur $\Omega \times K$ telle que pour tout $t \in I$:

$$u^I(.,t) = \frac{d\nu^I_t}{dP} \quad .$$

En posant $E(X/\mathcal{F}^n_{I^c}) = u^I(.,.)$, nous pouvons supposer que

$Y_n = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(X/\mathcal{F}^n_{I^c}) \, 1_I$ est une fonction $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_K$ - mesurable.

Pour tout $x \in K$, posons $Y(.,x) = E(X(.,x)/\mathcal{F}\{x\}^c)$.

Lemme II.3.2.- La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge $P \otimes \mu_K$ - p.p. et dans $L^1(P \otimes \mu_K)$ vers Y.

Démonstration : Pour tout $x \in K_o$, $X(.,x)$ est P-intégrable et puisque d'après le théorème II.2.1. : $\sigma(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}^n_{J^c_n(s)}) = \mathcal{F}_{\{s\}^c}$ et

$$Y_n(.,x) = E(X(.,x)/F^n_{J_n^c(x)}) \longrightarrow E(X(.,x)/F_{\{x\}^c}) = Y(.,x)$$

P-presque sûrement.

Soit $B = \{(\omega,x) \in \Omega \times K : Y_n(\omega,x)$ ne converge pas$\}$. $B \in F \otimes \mathcal{B}_K$. Comme pour tout $x \in K_o$ $P(B_x) = 0$ et $\mu(K-K_o) = 0$, par application du théorème de Fubini :

$$P \otimes \mu_K(B) = \int_K P(B_x)\ \mu(dx)$$

$$= \int_{K_o} P(B_x)\ \mu(dx) + \int_{K-K_o} P(B_x)\ \mu(dx)$$

$$= 0$$

Y_n converge donc $P \otimes \mu_K$ - presque partout vers Y .

Puisque $\int Y_n\ dP \otimes \mu_K = \int Y\ dP \otimes \mu_K = E\xi\ K < +\infty$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge donc vers Y dans $L^1(P \otimes \mu_K)$ d'après le lemme de Scheffé .

Posons pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \sum_{I\in\Delta^{(n)} \cap K} E(\frac{\xi I}{\mu I} / F^n_{I^c})\ 1_I$$

$$= \sum_{I\in\Delta^{(n)} \cap K} E(X_n / F^n_{I^c})\ 1_I \ .$$

<u>*Lemme II.3.3.*</u>- $(Y_n - Z_n)$ converge vers 0 dans $L^1(P \otimes \mu_K)$.

<u>*Démonstration*</u> : Pour tout $n \geq 1$:

$$\int |Y_n - Z_n| \, dP \otimes \mu_K = \int_K E \,\Big| \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(X/\mathcal{F}^n_{I^c}) \, 1_I - \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(X_n/\mathcal{F}^n_{I^c}) \, 1_I \Big| \, d\mu$$

$$= \int_K \Big[\sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E \, |E(X - X_n/\mathcal{F}^n_{I^c})| \, 1_I \Big] \, d\mu$$

$$\leq \int_K \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E \, E(|X - X_n| / \mathcal{F}^n_{I^c}) \, 1_I \, d\mu$$

$$= \int_K \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E \, |X - X_n| \, 1_I \, d\mu$$

$$= \int |X - X_n| \, dP \otimes \mu_K \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

par application du lemme II.3.2.

Pour tout $n \geq 1$ posons :

$$\zeta_n K = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(\xi I/\mathcal{F}^n_{I^c}) \quad .$$

Nous avons :

$$\zeta_n K = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E\Big(\frac{\xi I}{\mu I} / \mathcal{F}^n_{I^c}\Big) \, . \, \mu I$$

$$= \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} \int_I E(X_n / \mathcal{F}^n_{I^c}) \, d\mu$$

$$= \int_K \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(X_n / \mathcal{F}^n_{I^c}) \, 1_I \, d\mu$$

$$= \int_K Z_n \, d\mu \quad .$$

Théorème II.3.4.- La suite $(\zeta_n K)_{n \geq 1}$ converge en moyenne vers la variable aléatoire ζK définie par : $\zeta K = \int_K E(X(.,x) / \mathcal{F}_{\{x\}^c}) \, \mu(dx)$.

Démonstration : En effet :

$$E\,|\zeta_n K - \zeta K| = |\int_K Z_n\, d\mu - \int_K E(X(.,x)/\,\mathcal{F}_{\{x\}^c})\ \mu(dx)|$$

$$= E\,|\int_K (Z_n - Y)\, d\mu|$$

$$\leq \int |Z_n - Y|\ dP \otimes \mu_K$$

$$\leq \int |Z_n - Y_n|\ dP \otimes \mu_K + \int |Y_n - Y|\ dP \otimes \mu_K \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par application des lemmes II.3.2. et II.3.4.

Remarque : Soit la tribu

$$\mathcal{D} = \{D \in \Omega \times \mathcal{X} : D \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B} \ \text{ et } \ D_x \in \mathcal{F}_{\{x\}^c} \quad \forall x \in \mathcal{X}\}$$

Supposons que la mesure aléatoire ξ soit telle que la mesure de Campbell C définie par

$$C(A \times B) = \int_A \xi^{\omega}(B)\ P(d\omega)\ ,\quad A \in \mathcal{F} \ \text{ et } \ B \in \mathcal{B}_b$$

soit absolument continue par rapport à $P \otimes \mu$ sur $\mathcal{D}$, de densité X. Papangelou ([18]) a montré que dans ces conditions, $S_n(K) = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(\xi(I)/\mathcal{F}_{I^c})$ converge en moyenne vers $W(K) = \int_K X(.,x)\ \mu(dx)$. Une démonstration similaire à celle qui vient d'être faite permet d'avoir ce résultat en remplaçant les tribus $\mathcal{F}_{I^c}$ par les tribus $\mathcal{F}^n_{I^c}$.

II.4. - CONVERGENCE PRESQUE SURE.

Soient les fonctions définies sur $\Omega \times K$ par :

$$U_m = \inf_{n \geq m} X_n \quad , \quad V_m = \sup_{n \geq m} X_n \quad .$$

Le lemme ci-dessous est déterminant pour l'obtention de la convergence presque sûre de $\zeta_n K$.

Lemme II.4.1.- Si pour tout $I \in \mathcal{I}$, $||\xi||_p \, I < +\infty$, alors :

$$\sup_n X_n \quad \text{est} \quad P \otimes \mu_K - \text{intégrable} .$$

Démonstration : Soit q le conjugué de p. Nous avons :

$$E \int_K X_n^{1+1/q} \, d\mu = \sum_{I\in\Delta^{(n)}\cap K} E \int_I X_n \, . \, X_n^{1/q} \, d\mu$$

$$= \sum_{I\in\Delta^{(n)}\cap K} E(\xi I \, (\frac{\xi I}{\mu I})^{1/q})$$

$$\leq \sum_{I\in\Delta^{(n)}\cap K} ||\xi I||_p \, (E(\frac{\xi I}{\mu I}))^{1/q} \quad \text{d'après l'inégalité de Hölder}$$

$$= \underset{I\in\Delta^{(n)}\cap K}{} ||\xi I||_p$$

$$\leq ||\xi||_p \, K < +\infty \, .$$

D'après [14] pages 39 et 42, $X_n^{1+1/q}(\omega)$ est une sous-martingale intégrable :

$$\int_K X_n^{1+1/q}(\omega) \, d\mu \leq \int_K X_{n+1}^{1+1/q}(\omega) \, d\mu \quad .$$

La suite $(\int_K X_n^{1+1/q}(\omega) \, d\mu)_{n\geq 1}$ est donc croissante et uniformément intégrable.

D'après le théorème de la convergence monotone :

$$E \sup_n \int_K X_n^{1+1/q} \, d\mu \leq ||\xi||_p \, K < +\infty .$$

Donc pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\sup_n \int_K X_n^{1+1/q}(\omega) \, d\mu < +\infty$, ce qui signifie que la martingale $(X_n(\omega))$ est bornée sur $L^{1+1/q}(K, \mathcal{B}_K, \mu_K)$. On a alors d'après [14] p. 55 :

$$||\sup X_n(\omega)||_{1+1/q} \leq (q+1) \sup_n ||X_n(\omega)||_{1+1/q}$$

d'où

$$E \int_K \sup_n X_n^{1+1/q} \, d\mu \leq (q+1)^{1+1/q} \, E \sup_n \int_K X_n^{1+1/q} \, d\mu < +\infty$$

et en particulier

$$E \int_K \sup_n X_n(\omega) \, d\mu < +\infty$$

d'où le résultat.

Théorème II.4.2.- La suite des variables $(\zeta_n K)$ converge P-presque sûrement vers ζK .

Démonstration : $(X_n)_{n\geq 1}$ convergeant $P \otimes \mu_K$ - presque partout sur $\Omega \times K$, $(V_m - U_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ $P \otimes \mu_K$ - presque partout. D'après le lemme II.4.1. $V_m - U_m \leq 2 \sup_n X_n$ d'où par application du théorème de la convergence dominée :

$$\int (V_m - U_m) \, dP \otimes \mu_K \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

$\forall n \geq m$, posons $R_{m,n} = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(U_m / F^n_{I^c}) \, 1_I$

et $T_{m,n} = \sum_{I \in \Delta^{(n)} \cap K} E(V_m / F^n_{I^c}) \, 1_I$.

Nous avons $R_{m,n} \leq Z_n \leq T_{m,n}$.

Puisque $\int_K E\, U_m \, d\mu \leq \int_K E\, V_m \, d\mu < +\infty$, pour μ_K - presque tout $x \in K$. $U_m(x)$ et $V_m(x)$ sont P-intégrables. Soit :

$$K_1 = \{x \in K : U_m(x) \text{ et } V_m(x) \text{ sont intégrables}, \quad \forall m \geq 1\}$$

$\mu_K(K_1) = 1$.

Fixons $x \in K$. Nous avons :

$$R_{m,n}(x) = E(U_m(.,x)/F^n_{J^c_n(x)}) \longrightarrow E(U_m(.,x)/F_{\{x\}^c}) \quad P - p.s.$$

$$T_{m,n}(x) = E(V_m(.,x)/F^n_{J^c_n(x)}) \longrightarrow E(V_m(.,x)/F_{\{x\}^c}) \quad P - p.s.$$

pour μ_K presque tout x . Soit $D = \{(\omega,x) \in \Omega \times K : R_{m,n}(\omega,x)$ ne converge pas$\}$.

Puisque pour tout $x \in K_1$, $P(D_x) = 0$ et $\mu(K-K_1) = 0$, nous avons par application du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} P \otimes \mu_K(D) &= \int_K P(D_x)\, \mu(dx) \\ &= \int_{K-K_1} P(D_x)\, \mu(dx) + \int_{K_1} P(D_x)\, \mu(dx) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$R_{m,n}$ converge donc $P \otimes \mu_K$ presque partout. On montre de la même manière que $T_{m,n}$ converge $P \otimes \mu_K$ presque partout. On a donc :

$$E(U_m/ F_{\{\ \}^c}) \leq \liminf_n Z_n \leq \limsup_n Z_n \leq E(V_m/F_{\{\ \}^c}) \quad .$$

Pour tout $m \geq 1$, $E \int_K E(V_m/F_{\{\ \}^c})\, d\mu = \int V_m \, dP \otimes \mu_K < +\infty$. $E(V_m/F_{\{\ \}^c})$ est μ_K-intégrable P-presque sûrement, ce qui permet d'appliquer le théorème de Fatou - Lebesgue. On a :

$$\begin{aligned}
\int_K E(U_m/\mathcal{F}_{\{\ \}^c})\, d\mu &\leqslant \int \liminf_n Z_n \, d\mu_K \\
&\leqslant \liminf_n \int Z_n \, d\mu_K \quad \text{par application du lemme de Fatou} \\
&= \liminf \zeta_n K \\
&\leqslant \int \limsup_n Z_n \, d\mu_K \\
&\leqslant \limsup_n \int Z_n \, d\mu_K \quad \text{par application du théorème de Fatou - Lebesgue} \\
&= \limsup_n \zeta_n K \\
&\leqslant \int_K E(V_m/\mathcal{F}_{\{\ \}^c})\, d\mu
\end{aligned}$$

Enfin $E \int_K E(V_m - U_m/\mathcal{F}_{\{\ \}^c})\, d\mu = \int (V_m - U_m)\, dP \otimes \mu_K \ , \ \forall m \geqslant 1$.

Le résultat est obtenu en remarquant que $\int (V_m - U_m)\, dP \otimes \mu_K \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

II.5. - QUELQUES RESULTATS SUR DES ESPERANCES CONDITIONNELLES PAR RAPPORT AUX TRIBUS $\mathcal{F}^n_{I^c}$.

Le théorème ci-dessous est une adaptation de la proposition 1 de [17], p. 115. Il est obtenu pour des éléments de $\mathcal{I}$ en remplaçant les tribus $\mathcal{F}_{I^c}$ par les tribus $\mathcal{F}^n_{I^c}$. ξ est un processus ponctuel simple.
Pour tout $I \in \mathcal{I}$, $\nu(I)$ est le plus petit entier ν tel que I est réunion finie d'éléments de $\Delta^{(\nu)}$.

Théorème II.5.1.- Soit X une variable aléatoire positive sur Ω. Soit $I \in \mathcal{I}$. Pour tout $n \geq \nu(I)$, $J \in \Delta_I^{(n)}$:

$$E(1_{\{\xi(I-J)=0\}} X/F^n_{I^c}) = P(\xi(I-J)=0 \ / \ F^n_{I^c}) \ E(X/F^n_{J^c}) \quad .$$

La preuve de ce théorème est identique à celle donnée par Papangelou. De ce théorème, on déduit l'égalité presque sûre :

$$E(X/F^n_{J^c}) = \frac{E(X \ . \ 1_{\{\xi(I-J)=0\}} \ / \ F^n_{I^c})}{P(\xi(I-J)=0/F^n_{I^c})} \qquad P\text{-p.s.} \quad \text{sur} \quad \{\xi(I-J) = 0\}$$

Le théorème suivant est une adaptation du théorème 2.1. de [9], p. 207. Sa démonstration est valable pour le théorème original en remplaçant $F^n_{I^c}$ par F_{I^c} . ξ est un processus ponctuel simple.

Théorème II.5.2.- Il existe une mesure aléatoire presque unique $\Pi = \sum_{s \in X} \pi_s \ \delta_s$ définie par :

$$\Pi_s = \lim_{n \to +\infty} \text{p.s.} \ P\left[\xi \ J_n(s) > 0/F^n_{J_n^c(s)}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \text{p.s.} \ P\left[\xi \ J_n(s) = 1/F^n_{J_n^c(s)}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \text{p.s.} \ E\left[\xi \ J_n(s) \ / \ F^n_{J_n^c(s)}\right] \qquad \text{si } E\xi \in \mathbb{M} \ .$$

et

$$\Pi_s = \frac{P\left[\xi(s) = \xi I = 1 \ / \ F_{I^c}\right]}{P\left[\xi(I-\{s\}) = 0 \ / \ F_{I^c}\right]} \qquad P - \text{p.s. sur} \quad \{\xi(I-\{s\}) = 0\}$$

$s \in I \in \mathcal{I}$.

Démonstration : Soit $s \in X$.

Puisque $J_n(s) \downarrow \{s\}$, $1_{\{\xi J_n(s)>0\}} \downarrow 1_{\{\xi(s) > 0\}}$ quand $n \to +\infty$.

$\forall n \geq 1$ $1_{\{\xi J_n(s)>0\}} \leq 1$. Par application du théorème de Hunt ([14]) :

$$P\left[\xi\, J_n(s) > 0/F^n_{J_n^c(s)}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left[\xi(s) > 0/F_{\{s\}^c}\right]$$

$$P\left[\xi\, J_n(s) = 1/F^n_{J_n^c(s)}\right] = P\left[\xi\, J_n(s) > 0/F^n_{J_n^c(s)}\right] - P\left[\xi\, J_n(s) > 1/F^n_{J_n^c(s)}\right]$$

Puisque $1_{\{\xi J_n(s)>1\}} \downarrow 1_{\{\xi(s)>1\}} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left[\xi\, J_n(s) = 1/F^n_{J_n^c(s)}\right] = \lim_{n\to+\infty} P\left[\xi\, J_n(s) > 0/F^n_{J_n^c(s)}\right] = P\left[\xi(s) > 0/F_{\{s\}^c}\right]$$

Si $E\xi \in \mathbb{M}$, $E\xi\, J_1(s) < +\infty$. Ainsi, $\forall n \geq 1$ $\xi J_n \leq \xi\, J_1(s)$ et puisque

$\xi(s) = 1_{\{\xi(s)>0\}} = 1_{\{\xi(s)=1\}}$ et $\xi\, J_n(s) \downarrow \xi(s)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} E\left[\xi\, J_n(s)/F^n_{J_n^c(s)}\right] = P\left[\xi(s) > 0/F_{\{s\}^c}\right]$$

par application du théorème de Hunt .

Puisque $\forall n \geq \nu(I)$ $\{\xi(I-\{s\}) = 0\} \subset \{\xi(I-J_n(s)) = 0\}$, on a :

$$P\left[\xi\, J_n(s) = 1/F^n_{J_n^c(s)}\right] = \frac{P\left[\xi\, J_n(s) = \xi I = 1/F^n_{I^c}\right]}{P\left[\xi(I-J_n(s)) = 0\ /\ F^n_{I^c}\right]} \longrightarrow \frac{P\left[\xi\{s\} = \xi I = 1/F_{I^c}\right]}{P\left[\xi(I-\{s\}) = 0/F_I\right]}$$

car $1_{\{\xi J_n(s)=\xi I=1\}} \downarrow 1_{\{\xi(s)=\xi I=1\}}$, $1_{\{\xi(I-J_n(s))=0\}} \downarrow 1_{\{\xi(I-\{s\})=0\}}$

$F_{I^c} = \sigma(\bigcup_{n\geq 1} F^n_{I^c})$.

Des égalités
$$\Pi_s = \lim_{n\to+\infty} P\left[\xi J_n(s) > 0/\mathcal{F}^n_{J^c_n(s)}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} P\left[\xi J_n(s) > 0/\mathcal{F}_{J_n(s)}\right]$$

on déduit les propriétés de Π du théorème 2.1. de Kallenberg ([9]).

CONCLUSION.

L'utilisation de tribus de conditionnement discrètes permettrait d'estimer la mesure intensité conditionnelle par des techniques similaires à celles employées pour les distributions de Palm. Mais si l'on suppose que μ est diffuse, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{X}$, $X(.,x)$ est obtenue comme limite presque sûre de variables aléatoires $\mathcal{F}_{\{x\}^c}$ - mesurables. Il s'ensuit alors que la mesure intensité conditionnelle ζ coïncide avec la mesure aléatoire d'origine ξ. C'est notamment le cas si l'on suppose que ξ est presque sûrement diffuse. Le cas des processus ponctuels reste donc le plus intéressant à étudier.

B I B L I O G R A P H I E.

[1] BILLINGSLEY, P. (1979) -
Probability and measure, Wiley.

[2] DELESALLE, D. (1983) -
Propriétés de limite centrale relatives aux mesures aléatoires.
Thèse de 3ème cycle, U.S.T.L.

[3] CHOQUET, G. (1973) -
Cours d'analyse, Tome II, Topologie, Masson et Cie.

[4] HALMOS, P.R. (1950) -
Measure theory. Van Nostrand.

[5] Van der HOEVEN, P.C.T. (1982) -
Une projection de processus ponctuels.
Z.W. 61, 483-499.

[6] JACOB, P. (1986) -
Sur l'intensité conditionnelle d'une mesure aléatoire.
Pub. IRMA, Lille, Vol. 2, n° V.

[7] JAGERS, P. (1973) -
On Palm probabilities.
Z.W. 26, 17-32.

[8] JAGERS, P. (1974) -
Aspects of random measures and point processes
In : Advances in Prob. and Rel. Topics, Vol. 3, Marcel Decker
New-York pp. 179-239.

[9] KALLENBERG, O. (1978) -
On conditional intensities of point processes.
Z.W. 41, 205-220.

[10] KALLENBERG, O. (1983) -
Random measures. Academic-Press.

[11] KARR, A.F. (1987) -

Estimation of Palm measures of stationary point processes.
Prob. Th. Rel. Fields 17, 55-69.

[12] KARR, A.F. (1986) -

Point processes and their statistical inference.
(Dekker).

[13] KRICKEBERG, K. (1982) -

Processus ponctuels en statistique. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour X - 1980.
Springer Lect. Notes in Math. Vol. 929 pp. 205-313.

[14] KOPP, E.P. (1984) -

Martingales and stochastic integrals.
Cambridge University Press.

[15] MARLE, C.M. (1974) -

Mesures et probabilités. Ed. Hermann.

[16] METIVIER, M. (1979) -

Notions fondamentales de la théorie des probabilités.
Ed. Dunod Univ.

[17] PAPANGELOU, F. (1974) -

The conditional intensity of general point processes and application to line processes.
Z.W. 28, 207-226.

[18] PAPANGELOU, F. (1976) -

Point processes on spaces of flats and other homogeneous spaces.
Math. Proc. of Cambridge Ph. Society.

[19] SALEH, S. (1983) -

Etude de la distribution locale moyenne d'une mesure composite aléatoire.
Thèse de 3ème cycle. Université de Paris VI.

[20] WEGMAN, H. (1977) -

Characterization of Palm distributions and infinitely divisible random measures.
Z.W. 39, 257-262.

R E S U M E

Nous estimons les distributions de Palm d'une mesure aléatoire à l'aide de techniques d'estimation fonctionnelle dérivées de celles de S. SALEH. Nous indiquons des conditions suffisantes de convergences simple et uniforme, en probabilité et presque complète, et des conditions suffisantes de convergence en moyenne d'ordre p , de l'estimateur proposé.

Pour estimer l'intensité conditionnelle de façon analogue, une discrétisation des tribus de conditionnement s'avère nécessaire. Nous montrons, sous une hypothèse d'absolue continuité, que l'intensité conditionnelle est encore obtenue comme limite presque sûre et en moyenne.

M O T S   C L E S

- ABSOLUE CONTINUITE
- DISTRIBUTIONS DE PALM
- INTENSITE CONDITIONNELLE
- MARTINGALES
- MESURE ALEATOIRE
- MESURE MOYENNE
- PROCESSUS PONCTUEL