N° d'ordre : 1412

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Thierry LAMBRE

MODÈLE POUR LES $\mathbb{Z}p$-ESPACES

Membres du Jury :

Président : D. LEHMANN, *Professeur à l'USTL Flandres Artois*

Rapporteur : D. TANRÉ, *Maître de Conférences à l'USTL Flandres Artois*

Membres : Y. FELIX, *Chercheur au F.N.R.S. à Louvain-la-Neuve (Belgique)*

J.C. THOMAS, *Maître de Conférences à l'USTL Flandres Artois*

G. TRIANTAFILLOU, *Professeur à l'Université de Héraklion (Grèce)*

N° d'ordre : 1412

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Thierry LAMBRE

MODÈLE POUR LES $\mathbb{Z}p$-ESPACES

Membres du Jury :

Président : D. LEHMANN, *Professeur à l'USTL Flandres Artois*

Rapporteur : D. TANRÉ, *Maître de Conférences à l'USTL Flandres Artois*

Membres : Y. FELIX, *Chercheur au F.N.R.S. à Louvain-la-Neuve (Belgique)*
J.C. THOMAS, *Maître de Conférences à l'USTL Flandres Artois*
G. TRIANTAFILLOU, *Professeur à l'Université de Héraklion (Grèce)*

Soutenue le 17 décembre 1987

"... *quelque chose d'ardent et de triste, quelque chose d'un peu vague, laissant carrière à la conjecture.*"

Ch. Baudelaire

AVANT-PROPOS

Soit X un ensemble simplicial sur lequel le groupe <u>fini</u> G agit simplicialement. Pour tout sous-groupe H de G, l'ensemble simplicial X^H des points fixes par l'action de H est supposé non vide, 0-connexe, 1-connexe, à homologie rationnelle de type fini ; on dit, dans ce cas, que X est <u>un</u> G-<u>espace</u>.

$f : X \to Y$ est une G-<u>application</u> entre les G-espaces X et Y si f est simpliciale et équivariante.

On désigne par $f^H : X^H \to Y^H$ la restriction de f aux points fixes X^H.

Une G-application $f : X \to Y$ est une G-<u>équivalence d'homotopie</u> entre X et Y s'il existe une G-application $g : Y \to X$ telle que $f \circ g \underset{G}{\sim} id$ et $g \circ f \underset{G}{\sim} id$ (les homotopies étant des G-applications). On dit alors que X et Y ont le même G-<u>type d'homotopie</u>.

Depuis Bredon, [B2], on sait que l'étude du G-type d'homotopie nécessite l'introduction des espaces de points fixes pour tous les sous-groupes de G. Par exemple, ([B2], théorème III.4.1), une G-application $\pi : X \to Y$ admet la propriété de relèvement des G-homotopies pour tout G-espace si et seulement si $\pi|_{X^H} : X^H \to Y^H$ est une fibration, au sens usuel, pour tout sous-groupe H de G.

Comme dans le cadre classique, une <u>G-équivalence d'homotopie rationnelle</u> peut se caractériser par sa donnée cohomologique (II.1.(11)) en termes de <u>cohomologie de Bredon</u>. Ceci a permis à G. Triantafillou [T2], de construire une catégorie algébrique fournissant le G-type d'homotopie rationnelle d'un G-espace, par analogie avec celle introduite par Sullivan [S].

Le but de ce travail est de construire un nouveau modèle décrivant le $\mathbb{Z}_{p^k}$-type d'homotopie rationnelle et d'étudier la notion de $\mathbb{Z}_p$-formalité, où p est un entier premier et k un entier naturel.

Un théorème d'existence et d'unicité d'un modèle minimal équivariant a été établi par G. Triantafillou [T2] pour tout groupe fini G. La construction s'effectue par récurrence sur le degré, en considérant simultanément tous les éléments de degré n dans les différentes adgc associées aux sous-groupes de G. Cela nécessite l'introduction de résolutions injectives au sein de la catégorie abélienne $\mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}EV$ ([T2], 5.10). Dans le cas particulier $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, nous proposons une autre construction de ce modèle, par récurrence décroissante sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}_{p^k}$, à partir des modèles des adgc associées à ces sous-groupes. La récurrence commence avec le sous-groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$ et s'achève avec le sous-groupe $\{0\}$. Ce modèle de Triantafillou est un <u>modèle injectif</u> dans la catégorie abélienne $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV (II.2) mais il n'est pas, en général, un objet cofibrant de la catégorie à modèle fermé $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC. Nous déterminons des objets cofibrants de cette catégorie (III.3.(11)) et construisons un <u>modèle minimal cofibrant</u> :

III.3.(13) et III.3.(14) - <u>Théorème</u> : Toute $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc $\underline{A}$, cohomologiquement connexe et 1-connexe admet un modèle minimal cofibrant $(\underline{K},\underline{\rho})$. Si $(\underline{K},\underline{\rho})$ et $(\underline{K}',\underline{\rho}')$ sont deux modèles minimaux cofibrants de $\underline{A}$, alors il existe un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-isomorphisme $\underline{\theta} : \underline{K}' \to \underline{K}$, unique à homotopie près, tel que $\underline{\rho} \circ \underline{\theta} \sim \underline{\rho}'$.

La construction s'effectue par récurrence croissante sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}_{p^k}$ en commençant par le sous-groupe $\{0\}$ pour s'achever avec le sous-groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$; on s'appuie sur le résultat suivant :

III.3.(2) - <u>Proposition</u> [G-H-VP].

Soit $(\Lambda V,d)$ un $\mathbb{Z}_{p^k}$-KS complexe minimal. On suppose que l'action de $\mathbb{Z}_{p^k}$ permute les générateurs V. Désignons par H un sous-groupe de $\mathbb{Z}_{p^k}$ et par $\bar{V}$ l'ensemble des points fixes de V par l'action induite de H sur V ; choisissons W un supplémentaire de $\bar{V}$ de W.

Alors l'idéal engendré par W est stable par la différentielle d. On désigne par $q : (\Lambda V,d) \to (\Lambda\bar{V},\bar{d})$ la surjection canonique.

Si $((\Lambda(V_\ell),d_\ell),\ \rho_\ell)$ est un modèle de $X^{\mathbb{Z}_{p^\ell}}$, le diagramme commutatif suivant donne la construction du modèle de $X^{\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}}$:

$$\begin{tikzcd}
A_{PL}(X^{\mathbb{Z}_{p^{\ell}}}) \arrow[rr, "A_{PL}(i_\ell)"] & & A_{PL}(X^{\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}}) \\
(\Lambda(V_\ell),d_\ell) \arrow[u, "\rho_\ell"] \arrow[r, "q_\ell"'] & (\Lambda(\bar{V}_\ell),\bar{d}_\ell) \arrow[ur, "\overline{A_{PL}(i_\ell)o\rho_\ell}"] \arrow[r, dashed, "\bar{m}_\ell"'] & (\Lambda(\bar{V}_\ell+W_{\ell+1}),d_{\ell+1}) \arrow[u, dotted, "\rho_{\ell+1}"']
\end{tikzcd}$$

$\bar{m}_\ell$ est ici le $\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}$-KS modèle minimal de l'application $\overline{A_{PL}(i_\rho) \circ \rho_\ell}$. La construction récurrente se poursuit et l'objet $\underline{K}$ ainsi obtenu est un objet cofibrant dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC (III.3.(8)).

Nous étudions ensuite la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité des espaces, pour p premier.

Introduite par la théorie du modèle minimal, la formalité d'un espace s'est révélée une propriété importante. Pour un espace rationnel, elle signifie que toute la structure homotopique est contenue dans la donnée de l'algèbre de cohomologie. Ici, nous adaptons cette notion au cadre des actions du groupe $\mathbb{Z}_p$. Le principal résultat est que cette propriété ne dépend que de l'injection $i : X^{\mathbb{Z}_p} \hookrightarrow X$ de l'ensemble $X^{\mathbb{Z}_p}$ des points fixes dans X.

Rappelons qu'une application $f : X \to Y$ est formalisable si f et $H^*(f)$ ont un modèle de Sullivan commun.

Nous montrons :

IV.2.(4) - Théorème : Soit X un $\mathbb{Z}_p$-espace ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) X est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formel ;

2) $i : X^{\mathbb{Z}_p} \hookrightarrow X$ est une application formalisable.

Une propriété utilisant un caractère équivariant (la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité d'un espace) équivaut donc à une propriété n'utilisant pas de caractère équivariant (la formalisabilité d'une application). Les obstructions à la formalisabilité d'une application ([F-T], [Th], [VP]) fournissent ainsi des obstructions à la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité.

Le théorème ci-dessus se déduit du résultat algébrique suivant :

IV.1.(1) - Théorème : Soient f_o et $f_1 : (\Lambda V,d) \to (B,d_B)$ deux G-homomorphismes de G-adgc.

On suppose :

1) f_o et f_1 sont homotopes,

2) $(\Lambda V,d)$ est un KS-complexe avec V de dimension finie,

alors il existe une G-homotopie entre f_o et f_1.

Le théorème IV.2.(4) fournit immédiatement l'exemple suivant : la sphère S^n ($n \in \mathbb{N}$) munie d'une action du groupe $\mathbb{Z}_p$ (p premier) est un $\mathbb{Z}_p$-espace $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formel ; d'autres exemples illustrant la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité sont proposés en IV.3. On y détaille les différents modèles algébriques : modèle injectif de Triantafillou, modèle cofibrant, ainsi que le modèle équivariant en algèbre de Lie de [R-T] qui n'a pas été développé dans ce travail.

Le texte s'organise comme suit :

Le chapitre I reprend l'approche de K. Grove, S. Halperin et M. Vigué-Poirrier [G-H-VP], également étudiée par G. Triantafillou [T1], qui consiste à utiliser l'action naturellement induite de G sur $A_{PL}(X)$. Nous rappelons d'abord les différentes définitions de la cohomologie équivariante. Le G-modèle minimal est défini ; les preuves, esquissées dans [G-H-VP], sont détaillées ; des exemples sont proposés.

Afin de rendre ce texte autonome, nous avons regroupé au chapitre II tous les outils nécessaires à la cohomologie de Bredon. Le cas particulier $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, déjà envisagé ([T3]), est ici retenu. Nous y rappelons la caractérisation des $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc injectives.

Le chapitre III aborde les constructions de modèles pour $G = \mathbb{Z}_{p^k}$: celle du modèle minimal injectif ([T2]), et celle du modèle minimal cofibrant.

Le chapitre IV est consacré à la $\mathbb{Z}_p$-homotopie, à la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité et à l'exposition d'exemples.

Je veux exprimer ici ma vive reconnaissance à Daniel TANRÉ ; son aide inlassable et constante a permis l'aboutissement de ce travail, son extrême disponibilité a été pour moi le plus solide des encouragements. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

Daniel LEHMANN m'honore en acceptant de présider cette thèse ; ses conseils ont contribué à clarifier ce texte.

Je remercie également Yves FELIX, Jean-Claude THOMAS et Georgia TRIANTAFILLOU de constituer le jury. Leurs remarques m'ont été précieuses.

Je remercie Hans SCHEERER de m'avoir invité à Berlin pour y exposer mes résultats dans le cadre du séminaire Berlin-Bonn-Lille.

Je tiens à remercier Thierry PAUL pour son soutien constant durant ces dernières années.

Madame BÉRAT a dactylographié ce texte avec soin, patience et un rare dévouement. Je la remercie très chaleureusement ainsi que les membres du service de reprographie qui se sont chargés de l'impression.

S O M M A I R E

****

.../...

I

PRELUDE

(MODELES POUR LA COHOMOLOGIE EQUIVARIANTE).

I.0 - CONVENTIONS DE NOTATION :

Dans tout ce travail, G désigne un groupe fini.

I.0.(1) - Action d'un groupe sur un espace topologique.

Soient G un groupe (fini) et X un espace topologique ; une action à gauche du groupe G sur X est la donnée d'une flèche $\phi : G \to \text{Homéo}(X)$ (où $\text{Homéo}(X)$ désigne le groupe des homéomorphismes de X dans lui-même), telle que :

$$\phi(g\,h) = \phi(g) \circ \phi(h) \qquad \forall\, g, h \in G$$
$$\phi(e_G) = Id_X \text{ où } e_G \text{ est l'élément neutre de } G,$$

on dit alors que X est un G-espace topologique.

Soient désormais Y un autre G-espace topologique et $f : X \to Y$ une application continue ; on dit que f est un G-morphisme si

$$f \circ \phi(g) = \phi(g) \circ f \qquad \forall g \in G$$

on écrit alors $f \in \mathrm{Hom}_G(X,Y)$; on obtient ainsi la catégorie G-Top.
Pour $X \in$ G-Top, X^G désigne l'ensemble des points fixes de X pour l'action de G : $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, \ \ \phi(g)(x) = x\}$.

Si $f \in \mathrm{Hom}_G(X,Y)$, on en déduit $f^G \in \mathrm{Hom}(X^G,Y^G)$.

I.0.(2) - Action d'un groupe sur une catégorie.

Soient G un groupe et $\mathcal{C}$ une catégorie ; on suppose toujours que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de ENS ; une action à gauche du groupe G sur la catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée, pour tout objet C de $\mathcal{C}$, d'une flèche

$$\phi_C : G \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(C,C)$$

telle que

$$\phi_C(gh) = \phi_C(g) \circ \phi_C(h) \quad \forall \ g,h \in G .$$
$$\phi_C(e_G) = \mathrm{Id}_C .$$

On dit alors que C est un G-objet de la catégorie $\mathcal{C}$.

Soient désormais D un autre G-objet de $\mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$; on dit que f est un G-morphisme si

$$f \circ \phi_C(g) = \phi_D(g) \circ f \qquad \forall g \in G .$$

On écrit alors $f \in \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathcal{C}}(C,D)$, ou aussi $f \in \mathrm{Hom}_G(C,D)$, on obtient ainsi la catégorie G-$\mathcal{C}$.
Pour $C \in G$-$\mathcal{C}$, on pose $C^G = \{c \in C \mid \phi_C(g)\, c = c, \ \forall g \in G\}$;
si $f \in \mathrm{Hom}_{G\text{-}\mathcal{C}}(C,D)$, f se restreint en $f^G \in \mathrm{Hom}\,(C^G,D^G)$.

I.O.(3) - <u>Exemples</u>.

. G-ADGC désigne la catégorie des adgc munies d'une action du groupe G.

. G-AGC celle des agc munies d'une action du groupe G.

. Le foncteur H : ADGC $\to$ AGC détermine H : G-ADGC $\to$ G-AGC.

. G-$\mathbb{Q}$EV désigne la catégorie des $\mathbb{Q}$- espaces vectoriels différentiels, gradués, de type fini.

I.O.(4) - <u>Remarque</u> :

La catégorie G-ADGC s'avèrera insuffisante car ne fournira que des modèles d'espaces quotients $X|H$; en I.2, on introduira une catégorie notée $\mathcal{O}_G$-ADGC qui donnera des modèles d'espaces de points fixes X^H et du type d'homotopie équivariant de X.

I.O.(5) - Soient G et G' deux groupes (finis) agissant respectivement sur les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$,

μ : G $\to$ G' un homomorphisme de groupes

C et D des objets respectifs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

($\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont toujours des catégories structurées sur ENS).

On dit que f : C $\to$ D est une (μ)-flèche si

$$f \circ \phi_C(g) = \phi_D(\mu(g)) \circ f, \qquad \forall g \in G \ ;$$

I.1 - ACTION SIMPLICIALE.

I.1.(1) - Action régulière.

Rappelons brièvement la notion d'ensemble simplicial.

Δ_n désigne le n-simplexe euclidien $\Delta_n = \{(t_0,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,$ $t_i \geq 0\}$, et $\Delta_n \underset{\sigma_i}{\overset{\partial_i}{\rightleftarrows}} \Delta_{n+1}$ les opérateurs habituels de face et de dégénérescence.

$\underline{\Delta}$ désigne la catégorie dont les objets sont les ensembles Δ_n et les flèches les applications obtenues par composition des ∂_i et σ_i. Un ensemble simplicial X est alors un foncteur contravariant $X : \underline{\Delta} \to$ Ens. On pose $X_n = X(\Delta_n)$; introduisons la catégorie G-Ens dont les objets sont les ensembles munis d'une action du groupe G et les flèches sont les G-flèches de la catégorie Ens ; on dit alors que X est un G-ensemble simplicial si X est un foncteur contravariant $X : \underline{\Delta} \to$ G-Ens.

Définition : Un G-ensemble simplicial régulier est un G-ensemble simplicial satisfaisant l'hypothèse (H) suivante :

Hypothèse (H) :

Soient $(v_0,\ldots,v_q)$ $q+1$ sommets de l'ensemble simplicial X ;
soient $(g_0,\ldots,g_q)$ $q+1$ éléments de G ;
on suppose que $(v_0,\ldots,v_q)$ et $(g_0v_0,\ldots,g_qv_q)$ sont deux q simplexes de X,
alors il existe $g \in G$ tel que $gv_i = g_iv_i$, $0 \leq i \leq q$.

Remarque : On peut toujours supposer, [B1, p. 114], au besoin en passant à la seconde subdivision barycentrique, qu'un G-ensemble simplicial est régulier.

Dans tout ce travail, G-espace signifie G-ensemble simplicial régulier.

I.1.(2) - L'ensemble simplicial X/G.

Soit X un G-espace. L'ensemble simplicial X/G a :

- pour sommets, les orbites $\tilde{v}$ de l'action de G sur les sommets de X,
- pour simplexes, les n-uplets $(\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_n)$ d'orbites, tels qu'il existe des représentants v_i de $\tilde{v}_i$ pour lesquels $(v_1,\ldots,v_n)$ soit un simplexe de X.

Pour régularité, un simplexe de X/G forme une orbite de l'action de G sur les simplexes de X.

Le complexe $C_*(X;\mathbb{Z})$ des chaînes orientées de X est muni d'une action de G définie par :

$$g\,(v_0,\ldots,v_q) = (gv_0,\ldots,gv_q)\ .$$

Soit désormais M un $\mathbb{Z}[G]$ module ; $\mathrm{Hom}(C_*(X\,;\mathbb{Z}),M)$ est muni d'une action de G définie par $g\,\gamma = g \circ \gamma \circ g^{-1}$.

Rappelons que $\mathrm{Hom}_G(C_*(X;\mathbb{Z}),M) = \{\gamma : C_*(X;\mathbb{Z}) \to M \mid \forall\, g \in G,\ g\circ\gamma = \gamma\circ g\}$ on a évidemment $[\mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}),M)]^G = \mathrm{Hom}_G(C_*(X;\mathbb{Z}),M)$.

Notons $\sigma : C_*(X;\mathbb{Z}) \to C_*(X;\mathbb{Z})$ l'application définie par

$$\sigma(c) = \sum_{g\in G} g\,c\ .$$

La surjection canonique $\rho : X \to X/G$ définit une application surjective, encore notée ρ :

$$\rho : C_*(X;\mathbb{Z}) \to C_*(X/G;\mathbb{Z})$$

de $\operatorname{Ker} \rho = \operatorname{Ker} \sigma$, on déduit les isomorphismes :

$$C_*(X/G;\mathbb{Z}) \cong C_*(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Ker} \rho \cong C_*(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Ker} \sigma \cong \sigma(C_*(X;\mathbb{Z})$$

on peut ainsi construire un homomorphisme commutant aux différentielles (donnant le transfert en homologie)

$$\begin{aligned} \mu : C_*(X/G;\mathbb{Z}) &\longrightarrow C_*(X;\mathbb{Z}) \\ \rho(c) &\longrightarrow \sigma(c) \end{aligned}$$

On vérifie $\rho \circ \mu = |G|.\mathrm{Id}_{C_*(X/G;\mathbb{Z})}$

$\mu \circ \rho = \sigma$

$\operatorname{Im} \mu \subset C_*(X;\mathbb{Z})^G$

il résulte de ceci :

<u>Proposition</u> : Soient X un G-espace, R un anneau de coefficients pour lequel l'ordre de G n'est pas un diviseur de zéro alors μ induit les isomorphismes :

$$C_*(X;R)^G \cong C_*(X/G;R),$$
$$C^*(X;R)^G \cong C^*(X/G;R).$$

I.2 - COHOMOLOGIE EQUIVARIANTE D'UNE G-adgc (A,d_A) :

Il va être fait, au long de ce travail, un usage constant du lemme d'algèbre linéaire suivant :

I.2.(1) - Lemme : Soient

- E un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, de dimension finie, sur lequel le groupe G agit,
- F un sous-espace vectoriel de E, stable par l'action de G (i.e. $gF \subset F$, $\forall g \in G$),

alors E/F peut être muni d'une action de G et la surjection canonique q admet une section équivariante η.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r] & E \arrow[r, "q"] & E/F \arrow[l, bend left, dashed, "\eta"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Preuve : Soit η' une section quelconque de q, on pose

$$\eta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \circ \eta \circ g .$$

η est une G-section linéaire de q.

I.2.(2) - Lemme [T1] :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Soit } (A,d_A) \text{ une } G\text{-adgc sur } \mathbb{Q} \\ \text{on a } H(A^G) \cong H(A)^G . \end{array}}$$

Preuve : Soient $i : A^G \longrightarrow A$ l'injection canonique

et $\sigma : A \longrightarrow A^G$ l'application définie par

$\sigma(a) = \sum_{g\in G} g\, a.$

Remarquons que évidemment $H(i)$ est à valeurs dans $H(A)^G$, on a $\sigma \circ i = |G|\ \mathrm{id}$ et donc $H(\sigma) \circ H(i) = |G|\ \mathrm{id}$ en particulier, $H(i)$ est injective.

Montrons que $H(i) : H(A^G) \to H(A)^G$ est surjective.

Convenons que si $a \in A$ et $da = 0$, on désigne par $\mathrm{cl}(a)$ l'élément défini par a dans $H(A)$.

Soit $\mathrm{cl}(a) \in H(A)^G$;

pour tout $g \in G$, il existe $\beta_g \in A$ tel que $ga - a = d\beta_g$

$$\text{d'où} \quad \sum_{g\in G} ga = |G|\, a + d\Big(\sum_{g\in G} \beta_g\Big) .$$

Soit $\frac{1}{|G|}\ \mathrm{cl}\ \sigma(a) = \mathrm{cl}(a)$

d'où $H(i)\big(\frac{1}{|G|}\ \mathrm{cl}\ \sigma(a)\big) = \mathrm{cl}(a)$; $H(i)$ est bien surjective.

I.2.(3) [T1] - Proposition.

> Soient (A,d_A) et (B,d_B) deux G-adgc,
> $f : (A,d_A) \longrightarrow (B,d_B)$ un G-morphisme de G-adgc
> on suppose que $H^*(f)$ est un isomorphisme,
> alors $H^*(f^G) : H^*(A^G) \longrightarrow H^*(B^G)$ est un isomorphisme.

Preuve : Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right=60, dashed, "\sigma_A"'] & B \arrow[d, bend left=60, dashed, "\sigma_B"] \\ A^G \arrow[u, hook, "i_A"'] \arrow[r, "f^G"'] & B^G \arrow[u, hook, "i_B"] \end{tikzcd}$$

avec $\sigma_A(a) = \sum_{g\in G} g\, a \qquad a \in A$

$\sigma_B(b) = \sum_{g\in G} g\, b \qquad b \in B$

<u>$H(f^G)$ est surjective</u> : Soit $cl(b) \in H(B^G)$;

il existe $a \in A$, $da = 0$ avec $f(a) = b+dc$.

Considérons $\sigma(a) \in A^G$; on a

$d\sigma(a) = 0$ et $f\sigma(a) = |G|b + d\sigma(c)$

et donc $H(f^G)(\frac{1}{|G|}\ cl\ \sigma(a)) = cl(b)$.

<u>$H(f^G)$ est injective</u> : Soit $a \in A^G$, $da = 0$ et $f(a) = db$;

puisque $H(f)$ est un isomorphisme, il existe

$a' \in A$, $a = da'$; $\sigma(a') \in A^G$ est tel que

$\frac{1}{|G|}\ d\sigma(a') = a$. ∎

I.3 - <u>COHOMOLOGIE EQUIVARIANTE D'UN G-ESPACE X</u> :

I.3.(1) - <u>Définition</u> : Soient X un G-espace et M un G-module, les groupes de cohomologie équivariante de X à coefficients dans M sont définis par :

$$\begin{aligned} H_G^*(X;M) &= H^*(\mathrm{Hom}_G(C_*(X;\mathbb{Z}),M),d) \\ &= H^*(\mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}),M)^G;d) \end{aligned}$$

Il est quelquefois choisi une définition plus géométrique [BO], qu'on illustre ici, dans le cas particulier où G est fini et l'anneau des coefficients constants $\mathbb{Q}$, par la proposition I.3.(2).

Au groupe G, on associe E_G, qui est "le joint infini" $G * \ldots * G * \ldots$. Un élément de E_G est une suite : $(t_i g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $g_i \in G$, $t_i \in [0,1]$, t_i presque tous nuls, $\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i = 1$.
E_G est muni d'une action libre (à droite) de G définie par : $(t_i g_i)_{i\in\mathbb{N}}\, g = (t_i g_i g)_{i\in\mathbb{N}}$, on pose alors $B_G = E_G/G$.

Rappelons que X est un G-espace ; on munit $E_G \times X$ de l'action diagonale :

$$((t_i g_i)_{i\in\mathbb{N}}\, , x)\, g = ((t_i g_i g)_{i\in\mathbb{N}}\, , g^{-1}x) \qquad g \in G$$

on pose alors $X_G = E_G \times_G X = (E_G \times X)/G$.

$p_2 : E_G \times X \to X$ désigne la projection sur le second facteur, p_2 est une G-équivalence d'homotopie (puisque E_G est G-contractile) et donc $H(p_2)$ est un G-isomorphisme.

I.3.(2) - <u>Proposition</u> :

> Soit X un G-espace,
> on a
> $H^*(X_G;\mathbb{Q}) \cong H^*_G(X;\mathbb{Q}) \cong H^*(X/G;\mathbb{Q})$.

<u>Preuve</u> (rappelons que G désigne un groupe fini) :

Soit $p_2 : C^*(E_G \times X;\mathbb{Q}) \longleftarrow C^*(X;\mathbb{Q})$.

$H(p_2)$ est un G-isomorphisme, donc d'après I.2.(3) :

$H(p_2^G)$ est un isomorphisme : $H^*_G(E_G\times X;\mathbb{Q}) \cong H^*_G(X;\mathbb{Q})$; mais d'après la proposition I.1.(2), on a $H^*_G(E_G\times X;\mathbb{Q}) \cong H^*(X_G;\mathbb{Q})$; ceci établit l'isomorphisme $H^*(X_G;\mathbb{Q}) \cong H^*_G(X;\mathbb{Q})$.

I.3.(3) - Remarque : La relation $H_*(X/G;k) \cong H_*(X_G;k)$ est fausse en général : soit $k = \mathbb{Z}$; faisons agir $\mathbb{Z}_2$ sur le disque D_2 par symétrie centrale.

X/G est contractile donc $H_1(X/G;\mathbb{Z}) = 0$.

$E_G\times X \to X_G$ est un revêtement de groupe $\mathbb{Z}_2$ donc $H_1(X_G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

I.4 - G-MODELE MINIMAL D'UN G-HOMOMORPHISME D'ADGC : EXISTENCE.

Comme annoncé dans [G-H-VP], la théorie classique du modèle de Sullivan s'adapte sans difficulté au cadre relatif d'un G-homomorphisme de G-adgc.

I.4.(1) - Définitions.

Si V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué, ΛV dénote l'algèbre graduée commutative libre engendrée par V.

Une G-KS-extension est une KS-extension (E) (cf. [H]) :

$$(E) \quad : \quad (B,d_B) \xrightarrow{\iota} (B \otimes \Lambda V,d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda V,\bar{d}) \qquad \text{où}$$

(B,d_B) est une G-adgc, V un G-espace vectoriel gradué, ι et ρ des G-homorphismes de G-adgc.

Si, de plus (E) est une KS-extension minimale, on dit que (E) est une G-KS-extension minimale ; si $B = \mathbb{Q}$, on dit que $(\Lambda V,d)$ est un G-KS-complexe.

Soit $f : (B,d_B) \to (A,d_A)$ un G-homorphisme d'adgc ; on dit que le diagramme ci-dessous est un <u>G-modèle (minimal) de</u> f si (E) est une G-KS-extension (minimale), si φ est un G-homomorphisme d'adgc induisant un isomorphisme en cohomologie et si $\varphi \circ \iota = f$. Si $B = \mathbb{Q}$, on dit que $((\Lambda V,d),\varphi)$ est un <u>G-modèle de</u> (A,d_A).

$$\begin{tikzcd} & (A,d_A) & \\ (B,d_B) \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & (B \otimes \Lambda V,d) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\rho"'] & (\Lambda V,\bar{d}) \end{tikzcd}$$

I.4.(2) - <u>Théorème</u> : Existence du G-modèle minimal.

Soit $f : (B,d_B) \to (A,d_A)$ un G-homomorphisme entre G-adgc cohomologiquement 0-connexes et 1-connexes ; il existe un G-modèle minimal de f :

$$\begin{tikzcd} & (A,d_A) & \\ (B,d_B) \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & (B \otimes \Lambda V,d) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\rho"'] & (\Lambda V,\bar{d}) \end{tikzcd}$$

<u>*Preuve*</u> *:* Comme dans [H], la preuve se fait par récurrence ; à chaque étape, la construction peut être rendue équivariante grâce au lemme I.2.(1). Soit $P(n)$ l'énoncé suivant : il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & (A,d_A) & \\ (B,d_B) \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & (B\otimes\Lambda V^{(n)},d) \arrow[u, "\varphi_n"'] \arrow[r, "\rho"'] & (\Lambda V^{(n)},\bar{d}) \end{tikzcd}$$

tel que : - $(\Lambda V^{(n)},d)$ est une G-adgc minimale,

- les éléments de $V^{(n)}$ sont en degré supérieur ou égal à 1

et inférieur ou égal à n,

- pour tout $i \leq n$, $H^i(\hat{\psi}_n)$ est un isomorphisme,
- $H^{n+1}(\hat{\psi}_n)$ est injectif,
- $\hat{\psi}_n \circ \iota = f$.

P(1) est une proposition vraie : soient σ_V et σ des G-sections respectives de $Z^2(B) \to H^2(B)$ et de $A^1 \xrightarrow{d_A} B^2(A)$. On pose
$V^1 = \text{Ker } H^2(f)$, $\hat{\psi}_{|B} = f$, $\hat{\psi}_{|V^1} = \sigma \circ f \circ \sigma_V$, $d_{|B} = d_B$, $d_{|V^1} = \sigma_V$.

<u>$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$</u> : en un premier lieu, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{Coker} H^{n+1}(\varphi_n) \arrow[d, bend right, "\sigma_C"'] & \\
0 \arrow[r] & B^{n+1}(A) \arrow[r] & Z^{n+1}(A) \arrow[r, "p_A"] & H^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[u, "p_C"'] \arrow[l, bend left, "\sigma_A"] & 0 \\
 & & & H^{n+1}(B\otimes\Lambda V^{(n)},d) \arrow[u, "H^{n+1}(\varphi_n)"'] &
\end{tikzcd}$$

Soient σ_A et σ_C des G-sections de p_A et p_C respectivement.

Posons $V_1^{n+1} = \sigma_A\, \sigma_C \operatorname{coker} H^{n+1}(\varphi_n)$ muni de l'action induite par celle de G sur $H^{n+1}(A,d_A)$,

$$\varphi_{n+1}\big|_{V_1^{n+1}} = \mathrm{id}\big|_{V_1^{n+1}} \quad , \quad d\big|_{V_1^{n+1}} = 0 \ .$$

On a en un second lieu les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^{n+1}(A) \arrow[r] & A^{n+1} \arrow[r, "d_A"] & B^{n+2}(A) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma"] & 0
\end{tikzcd}$$

où σ est une G-section de d_A.

$$
\begin{tikzcd}
 & A^{n+1} \arrow[d, "d_A"'] & & & & {} \arrow[llll] \\
0 \arrow[r] & B^{n+2}(A) \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \arrow[r] & Z^{n+2}(A) \arrow[r] & H^{n+2}(A) \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\sigma_A"'] & 0 & \\
0 \arrow[r] & B^{n+2}(B\otimes\Lambda V^{(n)}) \arrow[r] & Z^{n+2}(B\otimes\Lambda V^{(n)}) \arrow[r] \arrow[u, "\psi_n"] & H^{n+2}(B\otimes\Lambda(V^{(n)},d)) \arrow[u, "H^{n+2}(\psi_n)"'] \arrow[l, bend left, "\sigma_V"] & & \\
 & & & \operatorname{Ker} H^{n+2}(\psi_n) \arrow[u] \arrow[rr] & & {} \arrow[uuu, "r"']
\end{tikzcd}
$$

De $\psi_n\, \sigma_V \operatorname{Ker} H^{n+2}(\psi_n) \subset B^{n+2}(A)$, on déduit l'existence de $r = \sigma \circ \psi_n \circ \sigma_V$.

Rappelons enfin la notation suivante :

Si $W = \underset{n}{\oplus} W^n$ est un espace vectoriel gradué, sW est l'espace vectoriel gradué par : $(sW)^n = W^{n-1}$.

$s : W \to sW$ est un isomorphisme de degré +1 d'inverse s^{-1}.

Avec cette notation, on pose :

$V_2^{n+1} = s^{-1}\, \sigma_V \operatorname{Ker} H^{n+2}(\psi_n)$;

soit $s^{-1}\ \sigma_V(b) \in V_2^{n+1}$, on définit :

$$\psi_{n+1}\ s^{-1}\ \sigma_V(b) = r(b), \quad g\ s^{-1}\ \sigma_V(b) = s^{-1}\ \sigma_V(gb),$$

$$d\ s^{-1}\ \sigma_V(b) = \sigma_V(b).$$

On pose alors $V^{(n+1)} = V^{(n)} \oplus V_1^{n+1} \oplus V_2^{n+1}$; ψ_{n+1} est définie par ses restrictions $\psi_{n+1}\big|_{V^{(n)}} = \psi_n$, $\psi_{n+1}\big|_{V_1^{n+1}} = \mathrm{id}$, $\psi_{n+1}\big|_{V_2^{n+1}}$ ayant été définie ci-dessus.

Ainsi construite, la G-KS-extension $(E) : (B,d_B) \xrightarrow[\iota]{} (B\otimes\Lambda V^{(n+1)},d) \xrightarrow[\rho]{} (\Lambda V^{(n+1)},\bar{d})$ est minimale, ψ_{n+1} est un G-homomorphisme de G-adgc tel que $\psi_{n+1} \circ \iota = f$; $H^i(\psi_{n+1})$ est un isomorphisme pour $i \leq n$ car la construction n'introduit aucun élément de degré inférieur ou égal à n ; $H^{n+1}(\psi_{n+1})$ est désormais surjective (et donc bijective d'après $P(n)$) : ceci provient de la construction de V_1^{n+1} ; l'injectivité de $H^{n+2}(\psi_{n+1})$ résulte de la construction de V_2^{n+1}.

I.4.(4) - Remarque : Pour éviter toute confusion avec les modèles construits au chapitre III, le modèle minimal équivariant construit ci-dessus est appelé G-modèle minimal, les autres seront appelés modèle i-minimal de Triantafillou et modèle minimal cofibrant.

I.5 - G-MODELE MINIMAL D'UN G-HOMOMORPHISME D'adgc : UNICITE.

Pour énoncer un théorème d'unicité du G-modèle minimal d'un G-homomorphisme d'adgc $f : (B,d_B) \to (A,d_A)$, il faut une théorie de l'homotopie équivariante dans la catégorie G-ADGC ; cette théorie se construit sans difficulté en adaptant les résultats du cadre classique

([H], chap. 5). Les preuves sont ici systématiquement omises.

Remarquons que si $(\Lambda V,d)$ est une G-adgc libre alors $(\Lambda V,d)^I = (\Lambda(V+sV+DsV),D)$ est munie de l'action de G suivante :

$v \in V$ gv est déjà défini par l'action de G sur V,

$sv \in sV$ $g(sv) = s(gv)$,

$Dsv \in DsV$ $g(Dsv) = Ds(gv)$.

Soit (E) une G-KS-extension : $(B,d_B) \xrightarrow[\iota]{} (B\otimes\Lambda V,d) \xrightarrow[\rho]{} (\Lambda V,\bar{d})$; (E^I) désigne la G-KS-extension suivante :

$$(B,d_B) \xrightarrow[\iota]{} (B \otimes \Lambda V \otimes \Lambda(sV) \otimes \Lambda(DsV),D) \xrightarrow[\rho]{} (\Lambda(V+sV+DsV),\bar{D}) .$$

On définit une G-dérivation, de degré -1,

$$i : (B \otimes \Lambda(V+sV+DsV),D) \longrightarrow (B \otimes \Lambda(V+sV+DsV),D)$$

définie par $i|_B = i|_{sV} = i|_{DsV} = 0$, $i(v) = sv$, $v \in V$.

Ceci détermine une G-dérivation de degré 0, $\theta = Di + iD$ qui satisfait la relation $\theta D = D\theta$; l'application $\exp \theta = \sum_{n\geq 0} \frac{\theta^n}{n!}$ est alors un G-automorphisme de G-adgc ;

$\lambda_0 : (B \otimes \Lambda V,d) \to ((B \otimes \Lambda V) \otimes \Lambda(sV+DsV),D)$ est définie par $\lambda_0(z) = z \otimes 1$;

$\lambda_1 : (B \otimes \Lambda V,d) \to ((B \otimes \Lambda V) \otimes \Lambda(sV+DsV),D)$ est définie par $\lambda_1(z) = \exp \theta \circ \lambda_0(z)$.

I.5.(1) - <u>Définition</u> : Soient ψ_0 et $\psi_1 : (B \otimes \Lambda V,d) \to (A,d_A)$ deux G-homomorphismes d'adgc tels que $\psi_0|_B = \psi_1|_B$; on dit que ψ_0 et ψ_1 sont G-homotopes (rel. B) s'il existe un G-homomorphisme d'adgc $F : (B \otimes \Lambda(V+sV+DsV),D) \to (A,d_A)$ tel que $F \circ \lambda_0 = \psi_0$ et $F \circ \lambda_1 = \psi_1$.

I.5.(2) - <u>Notations</u> : On écrit alors $\psi_0 \underset{G}{\sim} \psi_1$ (rel B). Si $B = \mathbb{Q}$, on écrit simplement $\psi_0 \underset{G}{\sim} \psi_1$.

I.5.(3) - G-<u>lemme de l'idéal acyclique</u> :

Soient ψ_0 et $\psi_1 : (B \otimes \Lambda V,d) \to (A,d_A)$ deux G-homomorphismes d'adgc tels que $\psi_0|_B = \psi_1|_B$ et I un idéal différentiel de (A,d_A), stable par l'action de G, et acyclique.

On suppose $\mathrm{im}(\psi_0 - \psi_1) \subset I$. Alors $\psi_0 \underset{G}{\sim} \psi_1$ (rel. B) et la G-homotopie F satisfait $F(sV) \subset I$.

I.5.(4) - La relation "... est G-homotope à ... (rel B)" est d'équivalence sur l'ensemble des G-homomorphismes de source $(B \otimes \Lambda V,d)$, de but (A,d_A) et coïncidant sur B.

I.5.(5) - G-<u>lemme de relèvement</u>.

Considérons le diagramme suivant de G-homomorphismes de G-adgc.

$$\begin{tikzcd}
(A,d_A) \arrow[r, "\gamma"] & (A',d_{A'}) \arrow[dl, phantom, "H"', near start] & \\
(B,d_B) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\iota"'] & (B \otimes \Lambda V,d) \arrow[u, "\eta"'] \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\rho"'] & (\Lambda V,\bar{d})
\end{tikzcd}$$

on suppose que : - $(B,d_B) \xrightarrow[\iota]{} (B \otimes \Lambda V,d) \xrightarrow[\rho]{} (\Lambda V,\bar{d})$ est une G-KS-extension,

- $H(\gamma)$ est un isomorphisme,

- $\gamma \circ f = \eta \circ \iota$;

alors, il existe un G-homomorphisme d'adgc $\psi : (B \otimes \Lambda V, d) \to (A, d_A)$ tel que $\gamma \circ \psi \underset{G}{\sim} \eta$ (rel B) et $\psi \circ \iota = f$.

I.5.(6) - G-modèle minimal : Unité 1.

Dans le diagramme, ci-dessous, f désigne un G-homomorphisme entre G-adgc cohomologiquement 0-connexes et 1-connexes ; $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ sont deux G-modèles minimaux de f.

$$\begin{tikzcd}
 & & (B \otimes \Lambda V, d) \arrow[r, "\rho"] \arrow[dl, "\psi"'] & (\Lambda V, \bar{d}) & (\mathcal{E}) \\
(B, d_B) \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, "\iota"] \arrow[drr, "\iota'"'] & (A, d_A) & & & \\
 & & (B \otimes \Lambda V' d') \arrow[ul, "\psi'"] \arrow[uu, "\bar{\psi}"'] \arrow[r, "\rho'"'] & (\Lambda V', \bar{d}') \arrow[uu, "\bar{\alpha}"'] & (\mathcal{E}')
\end{tikzcd}$$

alors, il existe un couple de G-isomorphismes d'adgc $(\bar{\psi}, \bar{\alpha})$ tel que

$$\bar{\psi} \circ \iota' = \iota, \quad \rho \circ \bar{\psi} = \bar{\alpha} \circ \rho', \quad \psi \circ \bar{\psi} \underset{G}{\sim} \psi' \quad \text{(rel B)}$$

I.5.(7) - G-modèle minimal : Unité 2.

Sous les hypothèses ci-dessus, si (χ, β) est un couple de G-homomorphismes d'adgc tel que $\rho \circ \chi = \beta \circ \rho'$ et $\psi \circ \chi \underset{G}{\sim} \psi'$ (rel B), alors χ et β sont des isomorphismes, $\chi \underset{G}{\sim} \bar{\psi}$ (rel B) et $\bar{\alpha} \underset{G}{\sim} \beta$.

Signalons dès maintenant une application du G-modèle minimal d'une G-adgc (A, d_A).

I.5.(8) - Remarque :

Soient (A,d_A) une G-adgc cohomologiquement 1-connexe et $(\Lambda V,d) \xrightarrow[\psi]{} (A,d_A)$ le G-modèle minimal de (A,d_A) ; alors le modèle minimal (au sens usuel) de $(\Lambda V,d)^G$ est le modèle minimal de l'adgc $(A,d_A)^G$.

I.6 - G - MODELE BIGRADUE D'UNE G-agc H. [P] :

De la même façon que le G-modèle minimal d'une G-adgc (A,d_A) s'obtient par une lecture suivie de la construction proposée par Sullivan, le G-modèle bigradué d'une G-agc H se déduit du texte de Halperin-Stasheff [H-S] ; les notations sont celles de [H-S] ; les preuves sont omises.

I.6.(1) - Théorème : Soit $(H,0)$ un G-agc connexe, 1-connexe ; il existe :

- des G-espaces vectoriels bigradués Z_n^p ,
- une différentielle d homogène de degré inférieur -1 sur $\Lambda Z = \Lambda(\oplus Z_n^p)$,

un G-homomorphisme d'adgc $\rho : (\Lambda Z,d) \to (H,0)$ tels que :

1) $H(\rho) : H_0(\Lambda Z,d) \to H$ est un G-isomorphisme,

2) $(\Lambda Z,d) \xrightarrow[\rho]{} (H,0)$ est le G-modèle minimal de $(H,0)$.

De plus, si $\pi : (C,d_C) \to H,0)$ est un G-homomorphisme d'adgc tel que $C = \oplus C_n^p$ avec C_n^p stable par G, d_C soit de degré inférieur -1, $\pi_+(C) = 0$ et tel que les conditions 1) et 2) ci-dessus soient satisfaites alors il existe un G-isomorphisme $\psi : (\Lambda Z,d) \to (C,d_C)$ homogène de bidegré $(0,0)$ tel que $\pi \circ \psi = \rho$.

I.6.(2) - Définition :

$\rho : (\Lambda Z,d) \to (H,0)$ s'appelle le G-modèle bigradué de $(H,0)$.

I.7 - G-MODELE FILTRE D'UNE G-adgc (A,d_A). [P] :

Soit $Z = \oplus Z_n^p$ un G-espace vectoriel bigradué ;
on pose $F_n(\Lambda Z) = \sum\limits_{m\leq n} (\Lambda Z)_n$; ceci détermine une filtration croissante.

Soit $\vartheta : \Lambda Z \to \Lambda Z$ une G-application linéaire ; on dit que ϑ décroît la filtration si $\vartheta(F_n(\Lambda Z)) \subset F_{n-1}(\Lambda Z)$.

I.7.(1) - Théorème : Soient (A,d_A) une G-adgc cohomologiquement 1-connexe,

$\rho : (\Lambda Z,d) \to (H,0)$ le G-modèle bigradué de $(H,0)$; alors il existe une G-différentielle D sur ΛZ,

un G-homomorphisme $\pi : (\Lambda Z,D) \to (A,d_A)$,

tels que : $(D-d) : Z_n \longrightarrow F_{n-2}(\Lambda Z) \qquad n \geq 0,$

$$cl(\pi(z)) = \rho(z) \qquad z \in \Lambda Z_0 .$$

Si $\pi' : (\Lambda Z,D') \to (A,d_A)$ satisfait ces deux conditions, alors il existe un G-isomorphisme $\vartheta : (\Lambda Z,D) \to (\Lambda Z,D')$ tel que

ψ - Id décroît la filtration,

$\pi'\psi \underset{G}{\sim} \pi$.

I.7.(2) - Définition :

$\pi : (\Lambda Z,D) \longrightarrow (A,d_A)$ s'appelle le G-modèle filtré de la G-adgc (A,d_A).

I.8 - LA G-adgc $A_{PL}(X)$.

A_{PL} désigne le foncteur des formes différentielles simpliciales à coefficients polynomiaux, de source la catégorie des ensembles simpliciaux (pointés), de but la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives (augmentées).

Une p-forme différentielle simpliciale $\omega \in A_{PL}(X)$ est définie par ses restrictions ω_τ aux q-simplexes de X :

$$\omega_\tau = \sum_I p_I^\tau(t_0,\ldots,t_q)dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_p}$$

où p_I^τ désigne un polynôme en les variables $(t_0,\ldots,t_q)$ à coefficients rationnels.

$$I : A_{PL}(X) \longrightarrow C^*(X;\mathbb{Q}) \text{ définie par } (I\omega)_\tau = \int_{\Delta^p} \omega_\tau$$
$$\omega \longrightarrow I\omega$$

s'appelle l'intégration de de Rham.

On rappelle que l'application $H(I)$ est un isomorphisme de $H^*(A_{PL}(X))$ sur $H^*(X;\mathbb{Q})$ (cohomologie singulière, de l'espace topologique X à coefficients dans $\mathbb{Q}$).

Soit désormais X un G-espace

$g : X \to X$ détermine $A_{PL}(g) : A_{PL}(X) \leftarrow A_{PL}(X)$

définie par : $(A_{PL}(g)(\omega))_\tau = \omega_{g\tau}$ $\omega \in A_{PL}(X)$.

$A_{PL}(X)$ hérite alors naturellement d'une action (à gauche) de G définie par :

$$g\,\omega = A_{PL}(g^{-1})(\omega) \quad .$$

La construction de Sullivan d'un adjoint à gauche du foncteur $A_{PL} : \mathcal{S} \to \mathrm{ADGC}$ (où $\mathcal{S}$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux) s'adapte sans difficulté aux catégories G-$\mathcal{S}$ et G-ADGC (où G-$\mathcal{S}$ désigne la catégorie des G-espaces).

I.8.(1) - Il existe un foncteur $< \ > : G\text{-ADGC} \to G\text{-}\mathcal{S}$ adjoint à gauche du foncteur $A_{PL} : G - \mathcal{S} \to G\text{-ADGC}$.

<u>Preuve</u> : Soit A une G-adgc ; on définit

$\langle A\rangle_r = \mathrm{Hom}_{ADGC}(A, A_{PL}(\Delta_r))$ (où Δ_r désigne le r-simplexe euclidien de $\mathbb{R}^{r+1}$).

$\langle A\rangle$ est un ensemble simplicial [S] ; on définit sur $\langle A\rangle$ une action (à gauche) du groupe G en posant

$$g\tau = \tau \circ g^{-1} \qquad \tau \in \langle A\rangle_r \qquad g \in G.$$

Les applications $<\partial_i> : <A>_r \to <A>_{r-1}$

et $<\sigma_i> : <A>_r \to <A>_{r+1}$

sont alors des G - applications simpliciales et $<A>$ est un G -ensemble simplicial.

La formule d'adjonction s'établit alors comme dans le cas classique : $\mathrm{Hom}_{G\text{-}ADGC}(A, A_{PL}(K)) \cong \mathrm{Hom}_{G\text{-}S}(K, <A>)$.

I.8.(2) - Il existe une transformation naturelle de foncteurs

$$\pi : \mathrm{Id} \longrightarrow A_{PL} \circ < >$$

Preuve : Soit A une G - adgc

$\pi_A : A \to A_{PL}<A>$ est définie par

$x \longrightarrow \pi_A(x)$

avec $\pi_A(x)_\tau = \tau(x)$, $\tau \in <A>_r$.

π_A est un homomorphisme d'adgc [S] ; vérifions que π_A est une G - application :

$$(\pi_A(gx))_\tau = \tau \circ g(x) = (g^{-1}\,\tau)(x)$$
$$(g\,\pi_A(x))_\tau = (A_{PL}(g^{-1})\,\pi_A(x))_\tau = (\pi_A(x))_{g^{-1}\tau} = (g^{-1}\,\tau)(x).$$

Nous utiliserons enfin le résultat suivant, qui est une adaptation du résultat de Sullivan.

I.8.(3) - Corollaire : Soit (A,d_A) un G-KS complexe de type fini. Alors, $\pi_A \to A_{PL}\langle A\rangle$ est un G-homomorphisme d'adgc induisant un isomorphisme en cohomologie.

I.8.(4) - G-théorème de de Rham.

L'intégration $I : A_{PL}(X) \to C^*(X;\mathbb{Q})$, non compatible au cup produit, est un G-homomorphisme de G-complexes de cochaînes. $H(I^G) : H^*(A_{PL}(X)^G) \longrightarrow H_G^*(X)$ est un isomorphisme.

I.8.(5) - Proposition [T1] :

Soit X un G-espace et $\rho : X \to X/G$ la projection canonique l'application $A_{PL}(\rho) : A_{PL}(X)^G \leftarrow A_{PL}(X/G)$ est un isomorphisme.

Preuve :

Injectivité : Soit τ un q simplexe de X/G ; il existe, par régularité, un q simplexe τ' de X tel que $\rho \circ \tau' = \tau$; on a de plus $G\tau' \cap \tau' = \tau'$ donc l'application $\rho : \mathrm{im}\,\tau' \to \mathrm{im}\,\tau$ est bijective.

Soient ω_1 et ω_2 deux p formes sur X/G telles que $A_{PL}(\rho)(\omega_1) = A_{PL}(\rho)(\omega_2)$, on a

$$A_{PL}(\rho)(\omega_1)_{\tau'} = A_{PL}(\rho)(\omega_2)_{\tau'}$$

$$A_{PL}(\rho_{|\mathrm{im}\tau'})(\omega_1)_{\tau} = A_{PL}(\rho_{|\mathrm{im}\tau'})(\omega_2)_{\tau}$$

mais $\rho_{|\mathrm{im}\tau'}$ est bijective sur son image et donc $A_{PL}(\rho_{|\mathrm{im}\tau'})$ est un isomorphisme donc $(\omega_1)_\tau = (\omega_2)_\tau$ d'où l'injectivité.

Surjectivité : Soit $\omega' \in A^P_{PL}(X)^G$; on définit $\omega \in A^P_{PL}(X/G)$ telle que $A_{PL}(\rho)(\omega) = \omega'$ par $\omega_\tau = A_{PL}(\rho|_{\mathrm{im}\tau'})(\omega'_{\tau'})$.

Cette définition est indépendante du choix du simplexe τ' au-dessus de τ ; en effet, soit τ'' un second simplexe de X tel que $\rho \circ \tau'' = \tau$, on a alors $\tau'' = g\tau$ et

$$A_{PL}(\rho|_{\mathrm{im}\tau'})^{-1}(\omega'_{\tau'}) = A_{PL}(g^{-1} \circ (\rho|_{\mathrm{im}\tau''})^{-1})(\omega'_{\tau'})$$

$$= A_{PL}(\rho|_{\mathrm{im}\tau''})^{-1} \circ A_{PL}(g^{-1})\omega'_{\tau'}$$

$$= A_{PL}(\rho|_{\mathrm{im}\tau''})^{-1}\omega'_{\tau''} \quad \text{car } \omega' \text{ est fixée par } g.$$

Il est clair que $A_{PL}(\rho)\omega = \omega'$ et donc $A_{PL}(\rho)$ est surjective.

I.9. - G-MODELE D'UN G-ESPACE X.

I.9.(1) - Définition : Soit X un G-espace 1-connexe ; le G-modèle minimal de X est le G-modèle minimal de la G-adgc $A_{PL}(X)$.

La remarque I.5.(8) permet d'utiliser le G-modèle minimal de X pour en déduire le modèle minimal de X/G.

I.9.(2) - <u>Proposition</u> [T1].

Soient X un G-espace 1-connexe (on suppose de plus X/G 1-connexe), $\rho : (\Lambda V, d_V) \to A_{PL}(X)$ le G-modèle minimal de X et $\rho' : (\Lambda W, d_W) \to (\Lambda V, d_V)^G$ le modèle minimal de $(\Lambda V, d_V)^G$ alors $(\Lambda W, d_W)$ est le modèle minimal de Sullivan de X/G.

Citons le critère suivant de 1-connexité de l'espace des orbites X/G :

I.9.(3) - <u>Lemme</u> [B1].

Soit X un G-espace 0-connexe.

On suppose qu'il existe une orbite de X par G qui soit connexe (cette condition est satisfaite dès que $X^G \neq \emptyset$).

On a $\pi_1(X) = 0 \implies \pi_1(X/G) = 0$.

<u>Preuve</u> : Soit $G x_0$ une orbite connexe de X par G. $f : [0,1] \to X/G$ désigne un lacet en $\pi(x_0)$ dans X/G : $f(0) = f(1) = \pi(x_0)$ et $\hat{f} : [0,1] \to X$ un relèvement du lacet $f : \pi \circ \hat{f} = f$; on a $\hat{f}(0) = x_0$, $\hat{f}(1) = g\, x_0$.

Désignons par $h : [0,1] \to G\, x_0$ un chemin joignant x_0 à gx_0, le chemin $\hat{f} * h$ ($\hat{f}$ suivi de h) est un lacet en x_0 dont la projection est le lacet f.

Il en résulte $\pi_1(X;x_0) = 0 \implies \pi_1(X/G;\pi(x_0)) = 0$.

La proposition I.9.(2) admet le corollaire suivant :

I.9.(4) - Corollaire [T1].

Soit X un G-complexe 1-connexe ; on suppose que :

. X/G est un espace 1-connexe ,

. G agit trivialement sur $H^*(X;\mathbb{Q})$;

alors X et X/G ont le même type d'homotopie rationnelle.

En effet, toutes les flèches du diagramme suivant induisent des isomorphismes en cohomologie :

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(X) & A_{PL}(X)^G \arrow[l, hook'] \\ \Lambda V,d \arrow[u, "\rho"] & A_{PL}(X/G) \arrow[u, "A_{PL}(p)"'] \end{tikzcd}$$

I.10. - EXEMPLE.

$X = S_1^3 \times S_2^3 \times S_3^3 \times S_4^3$ produit de 4 sphères orientées S^3 ;

$G = \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$.

G est monogène, l'action est entièrement définie par

$1\ (u_1 , u_2 , u_3 , u_4) = (u_2 , u_3 , u_4 , u_1) \quad (u_i \in S_i^3)$.

G possède un sous-groupe non trivial $\mathbb{Z}_2 = \{0,2\}$; l'action de $\mathbb{Z}_4$ sur X détermine une action de $\mathbb{Z}_2$ sur X.

On a $X^{\mathbb{Z}_2} \cong S^3 \times S^3$

$X^{\mathbb{Z}_4} \cong S^3$.

$\pi : X \to X/\mathbb{Z}_4$ et $\pi_1 : X \to X/\mathbb{Z}_2$ ne sont donc pas des revêtements. L'espace X est 1-connexe ; d'après I.9.(3), $X/\mathbb{Z}_4$ et $X/\mathbb{Z}_2$ sont 1-connexes.

On désigne par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, les cycles fondamentaux de $C_*(S_i^3;\mathbb{Z})$, $1 \leq i \leq 4$ et par $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*$, les cocycles fondamentaux de $C^*(S_i^3;\mathbb{Z})$ tels que $cl(\xi_1^*), cl(\xi_2^*), cl(\xi_3^*), cl(\xi_4^*)$ soient un système de générateurs, pour la structure d'algèbre, de $H^*(X;\mathbb{Q})$.

L'action (à gauche) de $\mathbb{Z}_4$ sur $C_*(X;\mathbb{Q})$ s'écrit :

$$1\ \xi_1 = \xi_2 \quad , \quad 1\ \xi_2 = \xi_3 \quad , \quad 1\ \xi_3 = \xi_4 \quad , \quad 1\ \xi_4 = \xi_1 .$$

L'action (à droite) de $\mathbb{Z}_4$ sur $C^*(X;\mathbb{Q})$ s'écrit :

$$(\xi_i^*\ 1)(\xi_j) = \xi_i^*(1\ \xi_j) \qquad 1 \leq i \leq j \leq 4.$$

Cette action se transforme en une action (à gauche) en posant

$$1\ \xi_i^* = \xi_i^*\ 3$$

ce qui donne

$$1\ \xi_1^* = \xi_2^* \qquad 1\ \xi_2^* = \xi_3^* \qquad 1\ \xi_3^* = \xi_4^* \qquad 1\ \xi_4^* = \xi_1^* .$$

Le $\mathbb{Z}_4$-modèle minimal de X est $(\Lambda V,d)$ avec $d = 0$ et $V = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, $|a_i| = 3$.

L'action (à gauche) de $\mathbb{Z}_4$ sur V est définie par

$$1\ a_1 = a_2 \qquad 1\ a_2 = a_3 \qquad 1\ a_3 = a_4 \qquad 1\ a_4 = a_1.$$

L'adgc $(\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_4}$ est la sous-adgc de $(\Lambda V,d)$ dont un système de générateurs est :

degré 3 : $x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

degré 6 : $x_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1$

degré 9 : $x_3 = a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_1 + a_4a_1a_2$

en degré 12, on a 1 $(a_1a_2a_3a_4) = -a_1a_2a_3a_4$; l'absence d'éléments de degré 12 dans $(\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_4}$ s'explique par le fait que G ne préserve pas l'orientation ; en effet, l'action préserve l'orientation si et seulement si la classe volume subsiste dans l'espace des orbites.

Cette adgc $(\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_4}$ se décrit par générateurs et relations :

générateurs x_1 x_2 $|x_1| = 3$ $|x_2| = 6$

relation $x_2^2 = 0.$

Le modèle minimal est $\rho : (\Lambda W,d_W) \to (\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_4}$ avec

$W = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $|\alpha_1| = 3$ $|\alpha_2| = 6$ $|\alpha_3| = 11$

$d(\alpha_1) = d(\alpha_2) = 0$ $d(\alpha_3) = \alpha_2^2$

$\rho(\alpha_1) = x_1$ $\rho(\alpha_2) = x_2$ $\rho(\alpha_3) = 0$

et donc d'après I.9.(2)

$\boxed{X/\mathbb{Z}_4 \text{ a le type d'homotopie rationnelle de } S^3 \times S^6}$.

L'adgc $(\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_2}$ est la sous-adgc de $(\Lambda V,d)$ dont un système de générateurs est :

degré 3 : $y_1 = a_1 + a_3$

$y_2 = a_2 + a_4$

degré 6 : $y_3 = a_1a_2 + a_3a_4$

$y_4 = a_1a_4 + a_3a_2$

degré 9 : $y_5 = a_1a_2a_3 + a_3a_4a_1$

$y_6 = a_1a_2a_4 + a_3a_4a_2$

degré 12 : $y_7 = a_1a_2a_3a_4$.

Cette adgc $(\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_2}$ se laisse décrire par générateurs et relations :

générateurs : $y_1 \quad y_2 \quad y_3 \qquad |y_1| = 3 \quad |y_2| = 3 \quad |y_3| = 6$
relation : $y_3^3 = 0$

Le modèle minimal est $\rho' : (\Lambda W',d_W') \to (\Lambda V,d)^{\mathbb{Z}_2}$ avec

$$W' = (\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4') \qquad |\alpha_1'| = 3 \quad |\alpha_2'| = 3 \quad |\alpha_3'| = 6 \quad |\alpha_4'| = 17$$
$$d\alpha_1' = d\alpha_2' = d\alpha_3' = 0 \qquad d\alpha_4' = \alpha_3'^3$$
$$\rho(\alpha_i') = y_i \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \qquad \rho(\alpha_4') = 0 \ .$$

Ceci détermine le type d'homotopie rationnelle de l'espace $X/\mathbb{Z}_2$.

II

FORLANE

(COHOMOLOGIES DE BREDON).

II.1 - COHOMOLOGIE DE BREDON D'UN G-ESPACE [B2].

A) *Préliminaires* :

G désigne (toujours) un groupe fini ; pour tout sous-groupe H de G, l'espace G/H est muni d'une action naturelle à gauche de G : ce sont les translations gauches.

II.1.(1) - Définition : Catégorie des orbites canoniques.

La catégorie des orbites canoniques de G, notée $\mathcal{O}_G$, est définie ainsi :

- les objets sont les espaces homogènes G/H, avec H sous-groupe de G ;
- les flèches sont les G-applications $G/H \to G/K$.

Remarques :

1) Il est facile de décrire les flèches de la catégorie $\mathcal{O}_G$;

soit $\varphi : G/H \to G/K$ une flèche de la catégorie $\mathcal{O}_G$; alors il existe $a \in G$, avec $a^{-1}Ha \subset K$ et tel que $\varphi = \hat{a}$ où $\hat{a} : G/H \to G/K$

$$gH \longrightarrow gaK .$$

Remarquons que $\hat{a} = \hat{b}$ si et seulement si $a^{-1}b \in K$.

2) On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(G/H,G/K) = (G/K)^H$ (points fixes de G/K pour l'action de H) ; en particulier $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(G/H,G/H) = N(H)/H$ avec $N(H)$ normalisateur de H dans G.

II.1.(2) - <u>Cas particulier $G = \mathbb{Z}_p$</u> (<u>p premier</u>).

$\mathbb{Z}_p$ désigne ici le groupe des entiers modulo p. La catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$ se réduit à 2 objets et à (p+2)-flèches :

- objets : $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_p/0$
- flèches : $id : \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$

  $\mu_o : \mathbb{Z}_p/0 \to \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$ la projection canonique

  $\hat{g} : \mathbb{Z}_p/0 \to \mathbb{Z}_p/0$ la translation par $g \in \mathbb{Z}_p$.

II.1.(3) - <u>Définition</u> :

Un $\mathcal{O}_G$-module $\underline{M}$ est un foncteur de source la catégorie $\mathcal{O}_G$, de but la catégorie Ab des groupes abéliens.

On précisera, le cas échéant, s'il s'agit d'un foncteur covariant ou contravariant.

On écrit :

$$\begin{array}{rcl} \underline{M} : \mathcal{O}_G & \to & Ab \\ G/H & \to & \underline{M}(G/H). \end{array}$$

<u>Remarques</u> :

1) Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(G/H,G/H) = N(H)/H$, $M(G/H)$ est muni <u>d'une structure de $N(H)/H$ module</u>.

2) Si $\underline{M}$ et $\underline{N}$ désignent deux $\mathcal{O}_G$-modules covariants (resp. contravariants), un morphisme $\underline{t} : \underline{M} \to \underline{N}$ est une transformation naturelle de foncteurs ; les $\mathcal{O}_G$-modules forment ainsi une catégorie.

3) Pour $G = \mathbb{Z}_p$ (p premier) un $\mathcal{O}_G$-module covariant se réduit à un diagramme :

$$\begin{array}{l} M' = \underline{M}(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p) \\ \quad \uparrow m \\ \mathbb{Z}_p \circlearrowright M = \underline{M}(\mathbb{Z}_p/\{0\}) \end{array}$$

où M est un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p]$ module ,

M' est un groupe abélien ,
m un homomorphisme de groupes abéliens
tel que $m(gx) = m(x)$ $\forall\, g \in \mathbb{Z}_p$ $\forall\, x \in M$.

De même, un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-module contravariant se réduit à un diagramme

$$\begin{array}{l} M' \\ \quad \downarrow m \\ \mathbb{Z}_p \circlearrowright M \end{array}$$

où M est un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p]$ module ,

M' est un groupe abélien ,
m un homomorphisme de groupes abéliens
tel que $m(x') \in M^G$ $\forall\, x' \in M'$.

Dans ces deux cas respectifs, on écrit en abrégé $\underline{M} = (M,m,M')$.

II.1.(4) - Définition : Un $\mathcal{O}_G$ - espace vectoriel rationnel est un $\mathcal{O}_G$ - module à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\underline{M} : \mathcal{O}_G \to \mathbb{Q}EV$; les $\mathcal{O}_G$-espaces vectoriels rationnels s'organisent en une catégorie, notée $\mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}EV$; on écrit alors $\underline{M} \in \mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}EV$.

C'est une catégorie abélienne ayant suffisamment de projectifs et d'injectifs [B2]. On désignera par $Ext_{\mathcal{O}_G}$ le foncteur dérivé associé dans cette catégorie ; $Ext_{\mathcal{O}_G}(\underline{M},\underline{N})$ se calcule à l'aide d'une résolution projective de $\underline{M}$ ou d'une résolution injective de $\underline{N}$ au sein de la catégorie abélienne $\mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}EV$.

Exemples :

1) Soit A un G - module ; on définit un $\mathcal{O}_G$ - module contravariant, noté $\underline{A}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \underline{A} : \mathcal{O}_G &\to Ab \\ G/H &\to A^H . \end{aligned}$$

Soit $g \in G$ tel que $\hat{g} \in Hom_{\mathcal{O}_G}(G/H,G/K)$; la flèche $\hat{g} : A^K \to A^H$ est par définition la flèche $\underline{A}(\hat{g})$.

2) Soit X un G - espace 1-connexe ; pour $n \geq 2$, on définit les $\mathcal{O}_G$ - modules contravariants :

$$\begin{aligned} \underline{\pi}_n(X) : \mathcal{O}_G &\to Ab \\ G/H &\to \pi_n(X^H) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \underline{H}_n(X;\mathbb{Z}) : \mathcal{O}_G &\to Ab \\ G/H &\to H_n(X^H;\mathbb{Z}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \underline{C}_n(X;\mathbb{Z}) : \mathcal{O}_G &\to Ab \\ G/H &\to C_n(X^H;\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

une flèche $\hat{g} \in Hom_{\mathcal{O}_G}(G/H,G/K)$ induit une flèche $g : X^K \to X^H$ qui détermine $\pi_n(\hat{g})$, $\underline{H}_n(\hat{g})$ et $\underline{C}_n(\hat{g})$.

B) *Cohomologie de Bredon d'un G-espace* [B2].

Soient X un G-espace (on suppose que pour tout sous-groupe $H \subsetneq G$, $X^H \neq \emptyset$) et $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_G$-module contravariant.

$\underline{C}_n(X;\mathbb{Z})$ est un $\mathcal{O}_G$-module projectif [B2 - I.10].

II.1.(5) - Définition :

II.1.(5) - Les cochaînes de Bredon du G-espace X, à coefficients dans $\underline{M}$ sont :

$$C^n_G(X;\underline{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_n(X;\mathbb{Z}),\underline{M}) .$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}$ désigne ici les transformations naturelles de foncteurs.

Les différentielles $\underline{d}' : \underline{C}_n(X;\mathbb{Z}) \to \underline{C}_{n-1}(X;\mathbb{Z})$ déterminent une différentielle $\underline{d} : C^n_G(X;\underline{M}) \to C^{n+1}_G(X;\underline{M})$.

II.1.(6) - Définition :

Les groupes de cohomologie de Bredon du G-espace X à coefficients dans $\underline{M}$ sont :

$$H^n_G(X;\underline{M}) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_n(X;\mathbb{Z}),\underline{M}),\underline{d}) .$$

Le lien entre $\underline{H}_n(X;\mathbb{Z})$ et $H^n_G(X;\underline{M})$ est donné par une suite spectrale ; en effet, soit $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_G$-module, il existe une résolution injective $\underline{M}^*$ de $\underline{M}$:

$0 \longrightarrow \underline{M} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{M}^0 \xrightarrow{\partial} \underline{M}^1 \longrightarrow \dots$ (où $\underline{M}^i$ est injectif pour $i \geqslant 0$).

II.1.(7) - <u>Proposition</u> :

Soient $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_G$- module contravariant et $\underline{M}^*$ une résolution injective de $\underline{M}$,

il existe une suite spectrale dont le terme $\underline{E}_2^{p,q}$ est égal à $Ext^p_{\mathcal{O}_G}(\underline{H}_q(X;\mathbb{Z}),\underline{M})$; le terme $\underline{E}_\infty$ est le groupe bigradué associé à la filtration de la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_p(X;\mathbb{Z}),\underline{M})$.

$$\underline{E}_2^{p,q} = Ext^p_{\mathcal{O}_G}(\underline{H}_q(X,\mathbb{Z});\underline{M}) \implies H^{p+q}_G(X;\underline{M}).$$

<u>Preuve</u> :

Considérons $\underline{K}^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_p(X;\mathbb{Z}),\underline{M}^q)$ $\qquad \underline{K} = \oplus\, \underline{K}^{p,q}$

$\underline{K}^p = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_p(X;\mathbb{Z}),\underline{M})$ $\qquad \underline{K} = \oplus\, \underline{K}^p$.

$\underline{K}$ est le complexe total d'un complexe double ayant pour différentielles

$\underline{d}_{10} : \underline{K}^{p,q} \to \underline{K}^{p+1,q}$, $\underline{d}_{10}$ est la transposée de $\underline{d} : \underline{C}_{p+1}(X;\mathbb{Z}) \to \underline{C}_p(X;\mathbb{Z})$

$\underline{d}_{01} : \underline{K}^{p,q} \to \underline{K}^{p,q+1}$, $\underline{d}_{01}$ est la différentielle $\underline{\partial} : \underline{M}^q \to \underline{M}^{q+1}$.

Considérons $0 \longrightarrow \underline{M} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{M}^0$ et $\underline{j} : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}$

$$\underline{f} \longrightarrow \underline{f} \circ \underline{\varepsilon} .$$

$\underline{j}$ désigne l'injection de $\underline{K}$ sur le sous-ensemble $\underline{L}$ de $\underline{K}$ suivant :

$$\underline{L} = \{x \in \underline{K}^{p,0} / \underline{d}_{01}(x) = 0\}.$$

Première étape : $\underline{j}$ induit un isomorphisme en cohomologie. En effet, filtrons $\underline{K}$ à l'aide du premier degré $'F^p = \underset{i \geq p}{\oplus} \underline{K}^{ij}$.

On obtient ainsi une suite spectrale dont le terme $'\underline{E}_1^{pq}$ s'écrit

$$'\underline{E}_1^{pq} = H^q(\underline{K}^{p,*},d_{01}) = H^q(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_p(X,\mathbb{Z}),\underline{M}^*),\underline{\partial}) = \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}^p(X;\mathbb{Z}),\underline{M})$$

or $\underline{C}_p(X;\mathbb{Z})$ est projectif d'où :

$$'\underline{E}_1^{pq} = 0 \qquad q > 0$$

$$'\underline{E}_1^{po} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_p(X;\mathbb{Z}),\underline{M})$$

il en résulte $'\underline{E}_1(j)$ isomorphisme (en regardant $\underline{K}$ comme un complexe trivialement bigradué).

Les deux suites spectrales étant de premier quadrant, on a bien $\underline{H}(j)$ isomorphisme.

Seconde étape :

Filtrons désormais $\underline{K}$ à l'aide de son second degré $"F^p = \bigoplus_{j \geq p} \underline{K}^{ij}$; on obtient alors une suite spectrale dont le terme $"\underline{E}^{pq}$ s'écrit :

$$"\underline{E}_1^{pq} = H^q(\underline{K}^{*,p}, d_{10}) = H^q(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{C}_*(X,\mathbb{Z}),\underline{M}^p), d_{10}) \ ;$$

or $\underline{M}^p$ est injectif donc

$$"\underline{E}_1^{pq} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{H}_q(X,\mathbb{Z}),\underline{M}^p) \quad \text{et} \quad \underline{d}_1 = \underline{d}_{01} = \underline{\partial}$$

d'où

$$"\underline{E}_2^{pq} = \mathit{Ext}^p_{\mathcal{O}_G}(\underline{H}_q(X;\mathbb{Z}),\underline{M}) \ .$$

Troisième étape :

La suite spectrale "E étant de second quadrant, on a : $"\underline{E}_2^{pq} \Longrightarrow H^{p+q}(\underline{K})$, c'est-à-dire :

$$\mathit{Ext}^p_{\mathcal{O}_G}(\underline{H}_q(X;\mathbb{Z}),\underline{M}) \Longrightarrow H^{p+q}(\underline{K}) = H_G^{p+q}(X;\underline{M}) \ .$$

C) *G-type d'homotopie rationnelle d'un G-espace.*

Soient X et Y deux G-espaces, f_0 et f_1 deux G-applications de source X, de but Y.

II.1.(8) - Définition : On dit que les applications f_0 et f_1 sont G-homotopes (et on écrit $f_0 \underset{G}{\sim} f_1$) s'il existe

$F : X \times I \to Y$ telle que $F(x,0) = f_0(x)$

$F(x,1) = f_1(x)$

$F(gx,t) = gF(x,t) \quad \forall g \in G.$

La relation de G - homotopie est une relation d'équivalence ; on désigne par $[X,Y]_G$ les classes de G - homotopies d'applications de X vers Y.

II.1.(9) - Définitions : G-équivalence d'homotopie ; G - type d'homotopie.

Soit $f : X \to Y$ une G - application ; on dit que f est une G - équivalence d'homotopie s'il existe $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \underset{G}{\sim} Id_Y$ et $f \circ g \underset{G}{\sim} Id_X$; s'il existe une G - équivalence d'homotopie entre X et Y, on dit alors que X et Y ont le même G - type d'homotopie.

Rappelons sans démonstration les résultats suivants :

II.1.(10) - Proposition ([B2], page II.12) :

Soit $f : X \to Y$ une G-application entre les G-espaces X et Y, telle que $\underline{\pi}_q(f) : \underline{\pi}_q(X) \to \underline{\pi}_q(Y)$ soit un $\mathcal{O}_G$-isomorphisme de $\mathcal{O}_G$-modules pour tout $q \geq 0$ alors f est une G-équivalence d'homotopie.

II.1.(11) - Proposition [T2] :

Soient X et Y deux G-espaces et soit $f : X \to Y$ une G-application.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\underline{\pi}_q(f) \otimes \mathbb{Q} : \underline{\pi}_q(X) \otimes \mathbb{Q} \to \underline{\pi}_q(Y) \otimes \mathbb{Q}$ est un $\mathcal{O}_G$ - isomorphisme pour $q \geq 2$.

2) $\underline{H}_q(f) \otimes \mathbb{Q} : \underline{H}_q(X) \otimes \mathbb{Q} \to \underline{H}_q(Y) \otimes \mathbb{Q}$ est un $\mathcal{O}_G$ - isomorphisme pour $q \geq 2$.

3) pour tout $\mathcal{O}_G$- espace vectoriel rationnel contravariant $\underline{M}$,

$$H_G^q(f;\underline{M}) \quad : \quad H_G^q(X;\underline{M}) \leftarrow H_G^q(Y;\underline{M})$$

est un $\mathcal{O}_G$ - isomorphisme pour $q \geq 2$.

II.1.(12) - Définition :

Une application f satisfaisant à l'une des propositions équivalentes ci-dessus s'appelle une G - équivalence d'homotopie rationnelle.

On dit alors que X et Y ont le même G - type d'homotopie rationnelle.

II.1.(13) - Définitions : Un espace X est G-rationnel si le $\mathcal{O}_G$-module $\underline{\pi}_n(X)$ est un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel.

Une G-rationalisation de X est un couple (X_0, φ) où X_0 est un G-espace rationnel et $\varphi : X \to X_0$ une G-équivalence d'homotopie rationnelle.

Tout G-espace 1-connexe admet une G-rationalisation ([T2]) ; elle s'obtient à partir d'une G-décomposition de Postnikov ; comme dans le cas classique, le G-type d'homotopie rationnelle de X peut être lu comme le G-type d'homotopie de son G-rationalisé X_0.

II.2 - COHOMOLOGIE DE BREDON D'UNE $\mathcal{O}_G$-adgc $\underline{A}$.

II.2.(1) - Définition : Une $\mathcal{O}_G$-adgc est un foncteur covariant $\underline{A} : \mathcal{O}_G \to \mathbb{Q}$-ADGC.

Les $\mathcal{O}_G$-adgc s'organisent en une catégorie notée $\mathcal{O}_G$-ADGC.

Dans tout ce paragraphe II.2, $\underline{M}$ désigne un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel covariant ; une $\mathcal{O}_G$-adgc $\underline{A} : \mathcal{O}_G \to$ ADGC détermine un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel $\underline{A} : \mathcal{O}_G \to \mathbb{Q}$EV ; si $\underline{A} \in \mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}$EV est un objet injectif de la catégorie abélienne $\mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}$EV, on dit que $\underline{A}$ est une $\mathcal{O}_G$-adgc injective. Les $\mathcal{O}_G$-adgc injectives constituent une catégorie $\mathcal{O}_G$-ADGC (i).

II.2.(2) - Exemples :

1) Soit X un G-espace et A_{PL} le foncteur formes différentielles simpliciales à coefficients polynomiaux, on a la $\mathcal{O}_G$-adgc

$$\underline{A}_{PL}(X) \;:\; \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathbb{Q}\text{-ADGC}$$
$$G/H \longrightarrow A_{PL}(X^H).$$

$\underline{A}_{PL}(X)$ est une $\mathcal{O}_G$-adgc injective [T2 - 4.3].

2) Si $\underline{A}$ est une $\mathcal{O}_G$-adgc, on a, pour tout $q \in \mathbb{N}$ un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel

$$\underline{H}^q(A) : \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathbb{Q}\text{-ADG}$$
$$G/H \longrightarrow H^q(A(G/H)) \quad .$$

II.2.(3) - <u>Définition</u> :

Soient $\underline{A}$ une $\mathcal{O}_G$-adgc injective et $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel. Les groupes de cohomologie de Bredon de $\underline{A}$ à coefficients dans $\underline{M}$ sont définis par :

$$H^q(\underline{A};\underline{M}) = H^q(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{M},\underline{A})).$$

De manière analogue à la proposition II.1 (7), on a un lien entre $\underline{H}^q(A)$ et $H^q(\underline{A};\underline{M})$.

II.2.(4) - <u>Proposition</u> [T2] :

Soient $\underline{A}$ une $\mathcal{O}_G$-adgc <u>injective</u>, $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel et $\underline{M}^*$ une résolution projective de $\underline{M}$ dans la catégorie $\mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}$EV.

Il existe une suite spectrale dont le terme $\underline{E}_2^{pq}$ est $\underline{E}_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_G}(\underline{M},\underline{H}^q(A))$ dont le terme $\underline{E}_\infty$ est le groupe bigradué associé à la filtration de la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}(\underline{M},\underline{A})$.

De plus, $\underline{E}_2^{pq} \Longrightarrow H^{p+q}(\underline{A},\underline{M})$.

La démonstration est analogue à celle de II.1.(7) et, pour cette raison est omise.

II.2.(5) - Définition : Soient $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux $\mathcal{O}_G$-adgc injectives et $\underline{f} : \underline{A} \to \underline{B}$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_G$-adgc.

On dit que $\underline{f}$ est une $\mathcal{O}_G$ -équivalence élémentaire d'$\mathcal{O}_G$-adgc si

$\underline{H}^q(f) : \underline{H}^q(A) \to \underline{H}^q(B)$ est un isomorphisme pour $q \geq 0$.

II.2.(6) - Définition : $\mathcal{O}_G$ -équivalence d'homotopie rationnelle d'$\mathcal{O}_G$-adgc.

Une $\mathcal{O}_G$ -équivalence d'homotopie rationnelle d'$\mathcal{O}_G$-adgc entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ est une suite

$$\underline{A} = \underline{A}_0 \rightleftarrows \dots \rightleftarrows \underline{A}_n = \underline{B}$$

de $\mathcal{O}_G$ -équivalences élémentaires.

II.2.(7) - Soit $\beta : \underline{H}(A) \to \underline{H}(B)$ un $\mathcal{O}_G$-isomorphisme ; on dit que β est réalisable par une $\mathcal{O}_G$-équivalence d'homotopie rationnelle s'il existe une $\mathcal{O}_G$-équivalence d'homotopie rationnelle de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$ telle que la flèche naturellement induite en cohomologie soit égale à β.

II.2.(8) - Proposition [T2] :

Soient $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux $\mathcal{O}_G$-adgc injectives et $\underline{f} : \underline{A} \to \underline{B}$ un $\mathcal{O}_G$ - homomorphisme d'$\mathcal{O}_G$-adgc.

Les propositions suivantes sont équivalentes

1) $\underline{H}^q(f) : \underline{H}^q(A) \to \underline{H}^q(B)$ est un isomorphisme pour $q \geq 2$;
2) pour tout $\mathcal{O}_G$-espace vectoriel rationnel $\underline{M}$,

$H^q(f;\underline{M}) : H^q(\underline{A};\underline{M}) \to H^q(\underline{B};\underline{M})$ est un isomorphisme pour $q \geq 2$.

C'est une conséquence de la suite spectrale précédente.

II.3 - LE CAS PARTICULIER $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ (p nombre premier $k \in \mathbb{N}^*$).

II.3.(1) - La catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$:

La chaîne d'inclusions

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\times p} \cdots \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^k}$$

permet de décrire aisément la catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$.

Objets de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$: $\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \cong \mathbb{Z}_{p^{(k-\ell)}}$ $\qquad 0 \leq \ell \leq k$

(avec la convention $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$).

On désigne par μ_ℓ la projection naturelle :

$\mu_\ell : \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \to \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}$, $0 \leq \ell < k$, on a alors la chaîne de projections

$$\mathbb{Z}_{p^k} \cong \mathbb{Z}_{p^k}/\{0\} \xrightarrow[\mu_o]{} \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^1} \xrightarrow[\mu_1]{} \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \xrightarrow[\mu_\ell]{}$$

$$\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}} \longrightarrow \cdots \xrightarrow[\mu_{k-1}]{} \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^k} = \{0\} .$$

<u>Flèches de</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$: ce sont :

1) Les flèches μ_ℓ, $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$ ainsi que leurs composées lorsque celles-ci existent,

2) $\hat{g} : \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell}$ avec $g \in \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell}$.

Remarquons que ces flèches satisfont la condition d'équivariance :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}} & \xrightarrow{\mu_\ell(\hat{g})} & \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}} \\ \uparrow{\scriptstyle \mu_\ell} & & \uparrow{\scriptstyle \mu_\ell} \\ \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} & \xrightarrow[\hat{g}]{} & \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mu_\ell(\hat{g}) \circ \mu_\ell = \mu_\ell \circ \hat{g} \ , \\ \forall\, g \in \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \ , \\ \forall\, \ell \quad 0 \leqslant \ell \leqslant k-1. \end{array}$$

II.3.(2) - <u>La catégorie</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV :

Nous énonçons uniquement les résultats ; les preuves se trouvent en [T3] et résultent des propriétés des catégories abéliennes.

Soit $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-espace vectoriel rationnel covariant ;

$\underline{M}$ est déterminé par :

$$M_o \xrightarrow[m_o]{} M_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow[m_{k-1}]{} M_k \quad \text{avec} \quad M_\ell = \underline{M}(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell}) \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant k$$

$$m_\ell = \underline{M}(\mu_\ell) \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant k-1 .$$

M_ℓ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une action du groupe $\mathbb{Z}_{p^{(k-\ell)}}$.

Les conditions d'équivariance s'écrivent :

$$m_\ell \circ \hat{g} = \mu_\ell(\hat{g}) \circ m_\ell \qquad \forall\, g \in \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \qquad \forall\, \ell \qquad 0 \leqslant \ell \leqslant k-1$$

on écrit en abrégé $\underline{M} = (M_\ell, m_\ell)$.

Avec ces notations, on a :

II.3.(3) - <u>Lemme</u> :

> Soit $\underline{M} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV, $\underline{M}$ covariant ; alors :
>
> $\underline{M}$ est un objet injectif de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV si et seulement si m_ℓ est surjective pour $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$.

De ceci, on déduit :

II.3.(4) - Lemme :

Soit $\underline{M} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV, $\underline{M}$ covariant ;

Alors $\underline{M}$ admet une résolution injective de longueur 1 :

$$0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{\partial} M^1 \to 0$$

Citons enfin :

II.3.(5) - Corollaire :

Sur $\mathbb{Z}_{p^k}$, la suite spectrale introduite en II.2.(6) se réduit à la suite exacte courte :

$$0 \to \mathit{Ext}_{\mathcal{O}_G}(\underline{M},\underline{H}^{q-1}(A)) \to H^q(\underline{A};\underline{M}) \to \mathrm{Hom}(\underline{M},\underline{H}^q(A)) \to 0$$

(où $\underline{A}$ est une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc injective).

Remarque : Ce théorème des coefficients universel s'énonce ici sous la forme d'une suite exacte courte ; s'il en est ainsi, c'est grâce aux résolutions (injectives) de longueur 1 dans la catégorie abélienne $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV ; enfin, ces résolutions injectives de longueur 1 proviennent du fait que le treillis d'inclusion des sous-groupes de $\mathbb{Z}_{p^k}$ est totalement ordonné. Ce n'est plus le cas, par exemple pour $\mathbb{Z}_6$, et on est alors contraint à utiliser le théorème des coefficients universels sous la forme de la suite spectrale II.2.6.

II.3.(6) - Afin d'illustrer les techniques, donnons la démonstration du théorème de De Rham équivariant pour un $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace.

X désigne un $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace. Pour alléger les notations, on pose

$X^\ell = X^{\mathbb{Z}_{p^\ell}}$, $0 \leq \ell \leq k$ et $i_\ell : X^{\ell+1} \hookrightarrow X^\ell$, $0 \leq \ell \leq k$.

On suppose toujours X^ℓ $\mathcal{O}$-connexe, cohomolologiquement 1-connexe ; on a la chaîne d'inclusions $X^k \xhookrightarrow[i_{k-1}]{} X^{k-1} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X^1 \xhookrightarrow[i_0]{} X^0$.

A_{PL} désigne le foncteur formes différentielles simpliciales déjà introduit en I.8 ; on désigne par $\underline{A}_{PL}(X) : \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}} \to ADGC$

$$\mathbb{Z}_{p^{k-\ell}} \to A_{PL}(X^\ell) ;$$

il est immédiat de vérifier $\underline{A}_{PL}(X) \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.

Pour tout ℓ, $\underline{A}_{PL}(\mu_\ell) = A_{PL}(i_\ell)$ est surjective, $0 \leq \ell \leq k-1$ donc (cf. II.3.(3), $\underline{A}_{PL}(X)$ est un objet injectif de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.
On pose $a_\ell = A_{PL}(i_\ell)$, $a_\ell : A_{PL}(X^\ell) \to A_{PL}(X^{\ell+1})$.

II.3.(7) - Théorème de de Rham ([T2], théorème 4.9).

Soient X un $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace satisfaisant aux hypothèses ci-dessus et $\underline{M}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-espace vectoriel covariant : on désigne par $\tilde{\underline{M}}$ l'objet dual de $\underline{M}$ i.e. $\tilde{\underline{M}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\mathbb{Q})$, on a :

$$H^*_{\mathbb{Z}_{p^k}}(X;\tilde{\underline{M}}) \cong H^*(\underline{A}_{PL}(X);\underline{M}).$$

Preuve :

L'intégration $I : A_{PL}(X^\ell) \to C^*(X^\ell ; \mathbb{Q})$ détermine les isomorphismes $H^*(A_{PL}(X^\ell)) \cong H^*(X^\ell;\mathbb{Q})$, $0 \leq \ell \leq k$, on a donc $\underline{H}^*(\underline{A}_{PL}(X)) \cong \underline{H}^*(X;\mathbb{Q})$.

On a, par ailleurs :

$$H^*_{\mathbb{Z}_{p^k}}(X;\tilde{\underline{M}}) = H^*\left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{C}_*(X;\mathbb{Q}),\tilde{\underline{M}})\right] \cong H^*\left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\underline{C}^*(X;\mathbb{Q}))\right].$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & Ext_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\underline{H}^{q-1}\underline{A}_{PL}(X)) & \longrightarrow & H^q(\underline{A}_{PL}(X);\underline{M}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\underline{H}^q(\underline{A}_{PL}(X))) & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (2)} & \\
0 \to & Ext_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\underline{H}^{q-1}(X;\mathbb{Q})) & \longrightarrow & H^q[\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\underline{C}^*(X;\mathbb{Q})] & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{M},\underline{H}^q(X;\mathbb{Q})) & \to 0
\end{array}$$

La première ligne horizontale est exacte (II.3.(5)) ; l'objet $\underline{C}_*(X;\mathbb{Q})$ est projectif ([B2], I.23) et donc $\underline{C}^*(X;\mathbb{Q})$ est injectif, et donc, par II.3.(5) la seconde ligne horizontale est également exacte.

L'isomorphisme $\underline{H}^*(\underline{A}_{PL}(X)) \cong \underline{H}^*(X;\mathbb{Q})$ nous assure les isomorphismes (1) et (2). Le lemme des cinq permet de conclure.

III

MENUET

(MODELE POUR LE $\mathbb{Z}_{p^k}$-TYPE D'HOMOTOPIE RATIONNELLE).

III.1 - NOTATIONS ET HYPOTHESES :

- p désigne un nombre premier et k un entier strictement positif. Dans tout ce chapitre, le groupe G est le groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$ des entiers modulo p^k.

- Notons $\mu_\ell : \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell} \to \mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}$, $0 \leq \ell \leq k-1$, la projection canonique.

- Une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc $\underline{A} = (A_\ell, a_\ell)$ est un diagramme :

$$A_o \xrightarrow[a_o]{} A_1 \xrightarrow[a_1]{} \cdots \longrightarrow A_\ell \xrightarrow[a_\ell]{} A_{\ell+1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow[a_{k-1}]{} A_k$$

où A_ℓ est une $\left(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell}\right)$-adgc et a_ℓ est équivariante.

- La $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc $\underline{A}$ est un objet injectif de la catégorie abélienne $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV (II.1.(4)) si et seulement si a_ℓ est un homomorphisme surjectif, pour tout ℓ, $0 \leq \ell \leq k-1$ (II.3.(3)).

- Dans tout ce chapitre, nous supposerons la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc $\underline{A} = (A_\ell, a_\ell)$ cohomologiquement 0-connexe et cohomologiquement 1-connexe ; cela signifie que pour tout ℓ, $0 \leq \ell \leq k$, l'adgc A_ℓ est cohomologiquement 0-connexe et cohomologiquement 1-connexe.

- Nous supposerons de plus que le $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace X est tel que l'ensemble des points fixes X^H soit non vide, 1-connexe et à homologie rationnelle de type fini, pour tout sous-groupe H de $\mathbb{Z}_{p^k}$.

- Soient H un sous-groupe de $\mathbb{Z}_{p^k}$, $(\Lambda V, d)$ un $\mathbb{Z}_{p^k}$-KS-complexe et (B, d_B) une $(\mathbb{Z}_{p^k}/H)$-adgc. On suppose que f_o et f_1 sont deux homomorphismes équivariants d'adgc, de $(\Lambda V, d)$ vers (B, d_B).

Si f_o est homotope à f_1 par une homotopie F, on écrit $f_o \sim f_1$.

Si, de plus, l'homotopie F est équivariante, nous écrirons alors (lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté et pour alléger les notations) : $f_o \underset{eq}{\sim} f_1$.

III.2 - <u>LE MODELE MINIMAL DE G. TRIANTAFILLOU.</u>

Avant de décrire ce modèle et ses propriétés, rappelons la définition de l'homotopie droite dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.

III.2.(1) - <u>Définition</u> : Soit $\underline{A} = (A_\ell, a_\ell)$ un objet de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC ; on définit $\underline{A} \otimes \Lambda(t,dt) = (A_\ell \otimes \Lambda(t,dt), a_\ell \otimes \mathrm{id})$, où l'action du groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$ sur $\Lambda(t,dt)$ est triviale. Les flèches

$\underline{p_o} : \underline{A} \otimes \Lambda(t,dt) \to \underline{A}$ et $\underline{p_1} : \underline{A} \otimes \Lambda(t,dt) \to A$ sont obtenues en posant respectivement $(t = 0,\ dt = 0)$ et $(t = 1,\ dt = 0)$. L'injection canonique $\underline{j} : \underline{A} \to \underline{A} \otimes \Lambda(t,dt)$ vérifie $\underline{p_o} \circ \underline{j} = \underline{p_1} \circ \underline{j} = \underline{id}$, $(\underline{A} \otimes \Lambda(t,dt), \underline{p_o}, \underline{p_1}, \underline{j})$ est un <u>objet chemin</u> dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.

III.2.(2) - <u>Définition</u> - Deux morphismes $\underline{f_o}$ et $\underline{f_1} : \underline{A} \to \underline{B}$ sont <u>homotopes</u> s'il existe $\underline{F} : \underline{A} \to \underline{B} \otimes \Lambda(t,dt)$ telle que $\underline{p_o} \circ \underline{F} = \underline{f_o}$, $\underline{p_1} \circ \underline{F} = \underline{f_1}$; on écrit alors $\underline{f_o} \sim \underline{f_1}$.

III.2.(3) - <u>Définition</u> : Un objet $\underline{M} = (M_\ell, m_\ell)$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC est i-<u>minimal</u> s'il satisfait les conditions suivantes :

1) M_ℓ est une adgc, libre en tant qu'algèbre graduée commutative, $(0 \leq \ell \leq k)$;

2) M_k est un KS-complexe minimal au sens usuel ;

3) Soit d_ℓ la différentielle de l'adgc M_ℓ ; sa restriction au noyau de la flèche m_ℓ est décomposable $(0 \leq \ell \leq k-1)$;

4) $\underline{M}$ est un objet injectif de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-$\mathbb{Q}$EV (i.e. m_ℓ est surjective, $0 \leq \ell \leq k-1$).

III.2.(4) - <u>Définition</u> : Soit $\underline{A}$ un objet de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC ; $(\underline{M};\underline{\Psi})$ est un <u>modèle</u> de $\underline{A}$ si et seulement si $\underline{M} = (M_\ell, m_\ell)$ est une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc et si $\underline{\Psi} : \underline{M} \to \underline{A}$ est une transformation naturelle telle que Ψ_ℓ induise un isomorphisme en cohomologie, pour tout ℓ, $0 \leq \ell \leq k$.

Dans [T2] (5.3 et 5.7), G. Triantafillou définit un modèle dans le cadre d'un groupe fini quelconque. Elle montre l'existence et l'unicité d'un modèle i-minimal pour tout $\mathcal{O}_G$-adgc injective. Remarquons d'abord que ce modèle permet le calcul de la cohomologie de Bredon :

III.2.(5) - <u>Proposition</u> : Soient $\underline{A}$ une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc injective, $(\underline{T},\underline{\tau})$ son modèle i-minimal, $\underline{V}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-espace vectoriel rationnel covariant ; on a :

$$H^*(\underline{A};\underline{V}) \cong H^*(\underline{T};\underline{V}) .$$

<u>Preuve</u> : On applique le lemme des cinq au diagramme suivant (cf. II.3.(5))

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Ext_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{V},\underline{H}^{q-1}(A)) & \longrightarrow & H^q(\underline{A};\underline{V}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\underline{V},\underline{H}^q(A)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \underline{\tau}^* & & \uparrow H^q(\underline{\tau};\underline{V}) & & \uparrow \mathrm{Hom}(\underline{V},\underline{H}^q(\tau)) & & \\
0 & \longrightarrow & Ext_{\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}}(\underline{V},\underline{H}^{q-1}(T)) & \longrightarrow & H^q(\underline{T};\underline{V}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\underline{V},\underline{H}^q(T)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

La construction du modèle de Triantafillou s'effectue par récurrence, en considérant simultanément tous les éléments de degré n dans les différentes adgc associées aux sous-groupes de G. Cela nécessite l'introduction de résolutions injectives dans la catégorie abélienne $\mathcal{O}_G$-$\mathbb{Q}$EV.

Dans le cas particulier de $\mathbb{Z}_{p^k}$, elle s'obtient à partir des modèles des adgc associées aux sous-groupes. La récurrence commence avec le modèle correspondant au sous-groupe $\mathbb{Z}_{p^k}$. Nous détaillerons cette construction en III.2.(9).

Etudions auparavant un cas particulier :

III.2.(6) - <u>Proposition</u> : Soient $(A',d_{A'})$ une $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$-adgc, (A,d_A) une $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell})$-adgc et $a : (A,d_A) \twoheadrightarrow (A',d_{A'})$ un morphisme surjectif et équivariant d'adgc.

A tout $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$ - modèle de $(A',d_{A'})$, $((\Lambda V',d'),\rho')$, on associe le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A',d_{A'}) & (\Lambda V',d') \arrow[l, "\rho'"'] \\
(A,d_A) \arrow[u, "a"] & (\Lambda V,d) \arrow[l, "\rho"] \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

où : - toutes les flèches sont équivariantes, α est surjective,

- $((\Lambda V,d),\rho)$ est un $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell})$-modèle de (A,d_A),

- la restriction de la différentielle d au noyau de α est décomposable.

Avant cela, le lemme suivant permet de substituer un diagramme commutatif à un diagramme commutatif à homotopie près ; il est classique en théorie homotopique.

III.2.(7) - <u>Lemme</u> : Considérons un diagramme de morphismes équivariants entre $\mathbb{Z}_{p^k}$-adgc, commutant à homotopie équivariante près :

$$\begin{tikzcd}
(A',d_{A'}) & (C,d_C) \arrow[l, "\rho'"'] \\
(A,d_A) \arrow[u, "a"] & (\Lambda Z,d) \arrow[l, "\rho_1"] \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

alors il existe un $\mathbb{Z}_{p^k}$-morphisme d'adgc ρ, tel que :

$\rho \underset{eq}{\sim} \rho_1$ et $a \circ \rho = \rho' \circ v$.

<u>Preuve du lemme</u> : Soit F une homotopie entre $\rho' \circ v$ et $a \circ \rho_1$, (I.5.(2)) :

$$\begin{tikzcd}
(A',d_{A'}) \arrow[d, bend right, dashed, "\sigma"'] & & (C,d_C) \arrow[ll, "\rho'"'] \\
& (\Lambda Z,d)^I \arrow[ul, "F"'] \arrow[dl, dashed, "F'"] & \\
(A,d_A) \arrow[u, "a"'] & & (\Lambda Z,d) \arrow[ll, "\rho_1"] \arrow[ul, shift left, "\lambda_1"] \arrow[ul, shift right, "\lambda_o"'] \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

Soit σ une section équivariante (d'espaces vectoriels) de a. On définit F' par :

$F'(z) = \rho_1(z)$, $F'(sz) = \sigma F(sz)$, $F'(Dsz) = d_A F'(sz)$.

Il suffit de poser $\rho = F' \circ \lambda_1$.

<u>Preuve de la proposition</u> III.2.(6) :

Soit $(\Lambda U,d)$ un $\mathbb{Z}_{p^r}$-KS-complexe ; il existe une différentielle

D sur $\Lambda(U+sU)$ et un $\mathbb{Z}_{p^r}$-homomorphisme d'adgc surjectif $\tau : (\Lambda(U+sU),D) \to (\Lambda U,d)$:

- pour $u \in U$, D est définie par $D(u) = du + su$; on prolonge s en une dérivation sur ΛU et on pose $D(su) = -sdu$ pour $su \in U$.
- Le groupe $\mathbb{Z}_{p^r}$ agit sur sU de sorte que s soit équivariante. $\tau(u) = u$ et $\tau(su) = 0$ déterminent τ qui est alors équivariante et surjective.

Remarquons que $H^*(\Lambda(U+sU),D) = \mathbb{Q}$.

Précisons les étapes de la construction III.2.(6).

$$\begin{tikzcd}
(A',d_{A'}) & (\Lambda V',d') \arrow[l, "\rho'"'] & & \\
(A,d_A) \arrow[u, "a"] & (\Lambda V_1,d_1) \arrow[l, "\rho_1"] \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "i_1"] & (\Lambda(V_1+V'+sV'),d_2) \arrow[ul, "\alpha_2"'] \arrow[l, bend left, dashed, "\varphi_1"] \arrow[r, "q"] & (\Lambda(K_1+K_2),d) \arrow[l, bend left, dashed, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

$((\Lambda V',d'),\rho')$ est un $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$-modèle de $(A',d_{A'})$, $((\Lambda V_1,d_1),\rho_1)$ est un $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell})$-modèle de (A,d_A), α_1 est un modèle équivariant de a :

$a \circ \rho_1 \underset{eq}{\sim} \rho' \circ \alpha_1$.

On munit $V'+sV'$ de l'action de $\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell}$ naturellement induite par celle de $\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}$; i_1 désigne l'injection naturelle, d_2 est définie par ses restrictions $d_{2|V_1} = d_1$, $d_{2|V'} = d'+s$, $d_{2|sV'} = -\,s\circ d'$.

De même α_2 est définie par $\alpha_{2|V_1} = \alpha_1$, $\alpha_{2|V'} = id$, $\alpha_{2|sV'} = 0$; $H(i_1)$ est un isomorphisme et α_2 est surjective ; ψ_1 est obtenue par $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell})$-relèvement de id : $i_1 \circ \psi_1 \underset{eq}{\sim} id$. On a alors $\rho' \circ \alpha_2 \underset{eq}{\sim} a \circ \rho_1 \circ \psi_1$. D'après le lemme ci-dessus, il existe $\psi_2 \underset{eq}{\sim} \rho_1 \circ \psi_1$ tel que $\rho' \circ \alpha_2 = a \circ \psi_2$.

La restriction de d_2 à $Ker(\alpha_2)$ n'est pas décomposable. Notons Q le "foncteur indécomposable", $W = V_1 \oplus V' \oplus sV'$ et K_1' le noyau de $Q(\alpha_2)$. Ce dernier est stable par $Q(d_2)$. Soient K_2 un supplémentaire de K_1' dans W, K_3 un supplémentaire de $Ker\, Q(d_2) \cap K_1'$ dans K_1' , et K_1 un supplémentaire de $Q(d_2)(K_1')$ dans $Ker\, Q(d_2) \cap K_1'$; on a donc : $\Lambda W = \Lambda(K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus Q(d_2)(K_3))$.

De manière analogue à la détermination du modèle minimal d'une algèbre libre ([Le], prop. V.7), on obtient un isomorphisme $\Lambda W \cong \Lambda(K_1 \oplus K_2 \oplus K_3 \oplus d_2(K_3))$.

Soit $q : (\Lambda W, d_2) \twoheadrightarrow (\Lambda(K_1 \oplus K_2), \bar{d}_2)$ la projection canonique, i_2 est le relèvement de q : $q \circ i_2 = id$. Il reste alors à poser :

$$V = K_1 \oplus K_2 \quad , \quad d = \bar{d}_2 \quad , \quad \alpha = \alpha_2 \circ i_2 \quad , \quad \rho = \psi_2 \circ i_2 .$$

III.2.(8) - <u>Proposition</u> : On se place dans les hypothèses de la proposition III.2.(6) et on suppose que les carrés (1) et (2) ci-après satisfont les conclusions de cette proposition. Si θ' est un isomorphisme tel que $\rho' \circ \theta' \underset{eq}{\sim} \rho_1'$, il existe un isomorphisme θ tel que $\rho \circ \theta \underset{eq}{\sim} \rho_1$ et $\theta' \circ \alpha_1 = \alpha \circ \theta$.

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V',d') \arrow[dr, "\rho'"] & & (\Lambda V'_1,d'_1) \arrow[ll, "\theta'"'] \arrow[dl, "\rho'_1"'] \\
 & A & \\
 & A \arrow[u, twoheadrightarrow, "a"] & \\
(\Lambda V,d) \arrow[uuu, twoheadrightarrow, "\alpha"] \arrow[ur, "\rho"] \arrow[uur, phantom, "①"] & & (\Lambda(V_1,d_1) \arrow[uuu, twoheadrightarrow, "\alpha_1"'] \arrow[ul, "\rho_1"'] \arrow[ll, dashed, "\theta"] \arrow[uul, phantom, "②"]
\end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u> : Par $\left(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell}\right)$-relèvement, il existe θ_1 tel que $\rho \circ \theta_1 \underset{eq}{\sim} \rho_1$. Par chasse dans les diagrammes, on obtient $\rho' \circ \theta' \circ \alpha_1 \underset{eq}{\sim} \rho' \circ \alpha \circ \theta_1$, d'où $\theta' \circ \alpha_1 \underset{eq}{\sim} \alpha \circ \theta_1$. D'après le lemme III.2.(7), il existe $\theta \underset{eq}{\sim} \theta_1$ tel que : $\theta' \circ \alpha_1 = \alpha \circ \theta$.

θ est un isomorphisme ; cela résulte du lemme des cinq appliqué au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{Ker}\ Q(\alpha),0) \arrow[r] & (Q(\Lambda V),Q(d)) \arrow[r] & (Q(\Lambda V'),Q(d')) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{Ker}\ Q(\alpha_1),0) \arrow[r] \arrow[u, "Q(\theta)|\mathrm{Ker}\ Q(\alpha_1)"'] & (Q(\Lambda V_1),Q(d_1)) \arrow[r] \arrow[u, "Q(\theta)"'] & (Q(\Lambda V'_1),Q(d'_1)) \arrow[r] \arrow[u, "Q(\theta')"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

En effet, $Q(\theta)$ et $Q(\theta')$ induisant des isomorphismes en cohomologie, la restriction de $Q(\theta)$ à $\mathrm{Ker}\ Q(\alpha_1)$ induit un isomorphisme en cohomologie. La partie linéaire de la différentielle étant nulle sur le noyau, cette restriction est un isomorphisme.

Revenons au diagramme ci-dessus, la restriction de $Q(\theta)$ au noyau et $Q(\theta')$ sont des isomorphismes, d'où le résultat.

III.2.(9) - <u>Existence et unicité du modèle i-minimal d'une</u>

$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc $\underline{A}$ ([T_2], théorème 5.3, 5.7).

Soit $\underline{A}$ une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc injective.

1) Il existe un modèle $(\underline{T},\underline{\tau})$ de $\underline{A}$ où $\underline{T}$ est une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc i-minimale.

2) a) Si $(P,\underline{\tau})$ est un second couple satisfaisant aux conditions 1) ci-dessus, alors il existe un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-isomorphisme $\underline{\theta} : \underline{P} \to \underline{T}$ tel que $\underline{\tau} \circ \underline{\theta} \sim \underline{\nu}$.

b) Si $\underline{\theta}_1$ satisfait $\underline{\theta}_1 : \underline{P} \to \underline{T}$ et $\underline{\tau} \circ \underline{\theta}_1 \sim \underline{\nu}$ alors $\underline{\theta}_1 \sim \underline{\theta}$ et $\underline{\theta}_1$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-isomorphisme.

<u>Preuve</u> : La preuve se fait par récurrence décroissante sur ℓ $(k \geq \ell \geq 0)$.

$$\begin{tikzcd}
A_\ell \arrow[r, "a_\ell"] & A_{\ell+1} \arrow[r, two heads, "a_{\ell+1}"] & \cdots \arrow[r, two heads, "a_{k-1}"] & A_k \\
(\Lambda T_\ell, d_\ell) \arrow[u, dashed, "\tau_\ell"] \arrow[r, dashed, "t_\ell"'] & (\Lambda T_{\ell+1}, d_{\ell+1}) \arrow[u, "\tau_{\ell+1}"] \arrow[r, two heads, "t_{\ell+1}"'] & \cdots \arrow[r, two heads, "t_{k-1}"'] & (\Lambda T_k, d_k) \arrow[u, "\tau_k"]
\end{tikzcd}$$

$((\Lambda T_k,d_k),\tau_k)$ est le modèle minimal usuel de A_k ; c'est le premier pas de la récurrence. Supposons construit $((\Lambda T_j,d_j),\tau_j)$, pour $k \geq j \geq \ell+1$; on construit alors $((\Lambda T_\ell,d_\ell),t_\ell)$ et τ_ℓ grâce à la proposition III.2.(6).

III.3 - MODELE COFIBRANT :

III.3.(1) - Soient H un sous-groupe de $\mathbb{Z}_{p^k}$, (A,d_A) une $\mathbb{Z}_{p^k}$-adgc, (B,d_B) une $(\mathbb{Z}_{p^k}/H)$-adgc et $f : (A,d_A) \to (B,d_B)$ un homomorphisme équivariant d'adgc. Cette application f se factorise par une adgc notée $(A,d_A)_H$, munie d'une action de $\mathbb{Z}_{p^k}/H$ et ainsi définie :

Soit I l'idéal engendré par $\{a - ha | a \in A, h \in H\}$; cet idéal est différentiel puisque d_A est une $\mathbb{Z}_{p^k}$-dérivation. Par définition, $(A,d_A)_H$ est l'adgc quotient de (A,d_A) par I ; on note $\bar{f} : (A,d_A)_H \to (B,d_B)$ la factorisation de f.

Soient ℓ un entier, $0 \leq \ell \leq k$, A_ℓ une $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^\ell})$-adgc, $A_{\ell+1}$ une $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$-adgc et $a_\ell : A_\ell \to A_{\ell+1}$ un homomorphisme équivariant d'adgc. On désigne par $\bar{A}_\ell$ la $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$-adgc $(A_\ell)_{\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}}/\mathbb{Z}_{p^\ell}}$ et on écrit la factorisation ci-dessus sous la forme suivante :

$$A_\ell \xrightarrow[q_\ell]{} \bar{A}_\ell \xrightarrow[\bar{a}_\ell]{} A_{\ell+1} \quad , \quad \bar{a}_\ell \circ q_\ell = a_\ell \ .$$

III.3.(2) - <u>Proposition</u> ([G-H-VP], 3.11, page 294).

Soit $(\Lambda V,d)$ un $\mathbb{Z}_{p^k}$-KS-complexe minimal. On suppose que l'action de $\mathbb{Z}_{p^k}$ permute les générateurs V. Désignons par $V^{\mathbb{Z}_{p^k}}$ l'ensemble des points fixes de V pour cette action et choisissons W un supplémentaire de $V^{\mathbb{Z}_{p^k}}$ dans V.

Alors, l'idéal engendré par W est stable par la différentielle d.

On désigne par $q : (\Lambda V,d) \to (\Lambda(V^{\mathbb{Z}_{p^k}}),\bar{d})$ la surjection canonique.

$(\Lambda(V^{\mathbb{Z}_{p^k}}),\bar{d})$ sera aussi noté $(\Lambda\bar{V},\bar{d})$, s'il n'y a aucune ambiguïté sur le groupe.

III.3.(3) - L'espace E_G, introduit en I.3.(1), est l'espace total contractile de la fibration $G \to E_G \to B_G$, de base le classifiant de G, de fibre G.

<u>Définition</u> : Pour un G-espace X, $\mathrm{Hom}_G(E_G,X)$ s'appelle l'ensemble des <u>points fixes homotopiques</u> de X ; il sera noté X^{hG}.

Dans le cas général d'un groupe fini, J. Goyo, [G], démontre :

III.3.(4) <u>Proposition</u> [G] : Si $(\Lambda V,d)$ est un modèle de X, alors $(\Lambda(V^G),\bar{d})$ est un modèle de X^{hG}.

III.3.(5) - <u>Remarque</u> : Sur une algèbre non libre, ce quotient n'est pas un invariant homotopique. En effet, on peut construire une adgc acyclique A, munie d'une action de $\mathbb{Z}_2$, telle que $A_{\mathbb{Z}_2}$ ne soit pas acyclique. Il suffit de prendre :

$A = \mathbb{Q}(x,y,y^2,w)$; $dx = y^2$, $dy = w$; $1x = x$, $1y = y$, $1w = -w$.

III.3.(6) - <u>Définition</u> : <u>Un complexe cofibrant minimal</u> $\underline{K} = (K_\ell, m_\ell)$ est une $O_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc

$$\underline{K} : K_o \xrightarrow[m_o]{} K_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_\ell \xrightarrow[m_\ell]{} K_{\ell+1} \longrightarrow \dots \xrightarrow[m_{k-1}]{} K_k$$

telle que :

1) K_o est un $\mathbb{Z}_{p^k}$-KS-complexe minimal (I.4(1)),

2) pour tout ℓ, $0 \leq \ell \leq k-1$, l'application induite $\bar{m}_\ell : \bar{K}_\ell \to K_{\ell+1}$ est une $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$-KS extension minimale.

En effectuant un choix de générateurs pour K_ℓ, $0 \leq \ell \leq k$, on a

$$(\Lambda(V_\ell), d_\ell) \xrightarrow[q_\ell]{} (\Lambda\bar{V}_\ell, \bar{d}_\ell) \xrightarrow[\bar{m}_\ell]{} (\Lambda(\bar{V}_\ell \oplus W_{\ell+1}), d_{\ell+1}).$$

III.3.(7) - <u>Définition</u> : Si $(\underline{K},\underline{\Psi})$ est un modèle de $\underline{A}$ (III.2.4) et si $\underline{K}$ est un complexe minimal cofibrant, alors $(\underline{K},\underline{\Psi})$ est appelé un <u>modèle minimal cofibrant</u> de $\underline{A}$.

III.3.(8) - <u>Lemme</u> : Considérons le diagramme commutatif suivant dans $O_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC, où f est un $O_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-homomorphisme surjectif d'adgc et $\underline{H}(f)$ est un $O_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-isomorphisme d'adgc.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{A} \arrow[d, two heads, "\underline{f}"] \\ \underline{K} \arrow[r, "\underline{g}"'] \arrow[ur, dashed, "\underline{h}"] & \underline{B} \end{tikzcd}$$

alors, $\underline{g}$ admet un relèvement $\underline{h} : \underline{K} \to \underline{A}$ tel que $\underline{f} \circ \underline{h} = \underline{k}$. $\underline{K}$ est donc un objet cofibrant de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.

<u>Preuve</u> : Ce résultat s'établit par récurrence croissante sur ℓ, avec $0 \leq \ell \leq k$. Notons $\underline{K} = (K_\ell, m_\ell)$ et $\underline{A} = (A_\ell, a_\ell)$.

L'existence de h_0 tel que $f_0 \circ h_0 = g_0$ provient du lemme de relèvement équivariant (I.5(5)).

Supposons h_j construit pour $0 \leq j \leq \ell$. Le diagramme ci-dessous détermine, par relèvement équivariant, un morphisme $h_{\ell+1}$ tel que :

$$f_{\ell+1} \circ h_{\ell+1} = g_{\ell+1} \quad \text{et} \quad \overline{a_\ell \circ h_\ell} = h_{\ell+1} \circ \bar{m}_\ell .$$

$$\begin{tikzcd}
K_\ell \arrow[r, "h_\ell"] \arrow[d, "q_\ell"'] & A_\ell \arrow[d, "a_\ell"] \\
\bar{K}_\ell \arrow[r, "\overline{a_\ell o h_\ell}"] \arrow[d, "\bar{m}_\ell"'] & A_{\ell+1} \arrow[d, "f_{\ell+1}"] \\
K_{\ell+1} \arrow[r, "g_{\ell+1}"'] \arrow[ur, dashed, "h_{\ell+1}"] & B_{\ell+1}
\end{tikzcd}$$

III.3.(9) - <u>Rappel</u> : <u>Objet cylindre d'une</u> Λ-<u>extension</u>.

Dans [H], chapitre 9, S. Halperin construit l'objet cylindre d'une Λ-extension $(\mathcal{E})$, $B \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\rho} A$, que nous rappelons ici brièvement. Choisissons d'abord des générateurs pour la Λ-extension $(E) : (\Lambda Y, d_B) \xrightarrow{\iota} (\Lambda Y \otimes \Lambda X, d_C) \xrightarrow{\rho} (\Lambda X, \bar{d}_C)$ et supposons, de plus, cette Λ-extension munie d'une action du groupe fini G. (E^I) est la Λ-extension $(\Lambda Y, d_B)^I \xrightarrow{\iota^I} (\Lambda Y \otimes \Lambda X, d_B)^I \xrightarrow{\rho^I} (\Lambda X, \bar{d}_c)^I$.

Comme au paragraphe (I.5), l'action de G sur $Y + sY + DsY$ ainsi que sur $X + sX + DsX$ est : $g(sv) = s(gv)$, $g(Dsv) = Ds(gv)$. On a une G-dérivation i_C de degré -1 ainsi qu'une G-dérivation θ de degré 0 dans C^I, définies par $i_C|_{sY+DsY+sX+DsX} = 0$, $i_C(y) = sy$, $i_C(x) = sx$, $\theta_C = D \circ i_C + i_C \circ D$.

i_C et θ_C donnent par restriction à B^I des G-dérivations i_B et θ_B et par projection sur A^I des G-dérivations i_A et θ_A. Les G-morphismes $(\lambda_o)_B$, $(\lambda_o)_C$, $(\lambda_o)_A$ et $(\lambda_1)_B$, $(\lambda_1)_C$, $(\lambda_1)_A$ déterminent λ_o et $\lambda_1 : (E) \to (E^I)$.

III.3.(10) - <u>Objet cylindre $K^I = (K^I_\ell, m^I_\ell)$ associé à un complexe cofibrant</u> $K = (K_\ell, m_\ell)$:

Reprenons les notations de III.3.(6). Avec le rappel ci-avant, on obtient :

- la surjection canonique

$$q^I_\ell : \quad K^I_\ell = (\Lambda V_\ell, d_\ell)^I \to \overline{K^I_\ell} = (\Lambda \bar{V}_\ell, \bar{d}_\ell)^I \quad ;$$

- $\bar{m}^I_\ell : \overline{K^I_\ell} \to K^I_{\ell+1} = (\Lambda(\bar{V}_\ell \otimes W_{\ell+1}), d_{\ell+1})^I$, construit à partir de la KS-extension $\bar{m}_\ell$;

- $m^I_\ell = \bar{m}^I_\ell \circ q^I_\ell$;

- $\underline{\lambda_0}$, $\underline{\lambda_1}$: $\underline{K} \to \underline{K^I}$.

La proposition III.3.(12) montre qu'il s'agit bien d'un objet cylindre. Il permet donc la définition d'homotopie gauche. Comme dans toute catégorie à modèle fermée, elle coïncide avec l'homotopie droite sur les flèches de source un objet cofibrant, de but un objet fibrant.

III.3.(11) - <u>Proposition</u> : <u>Cofibration dans la catégorie</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC :

Soit $\underline{g} : \underline{C} \to \underline{C}'$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-morphisme d'adgc, considérons le diagramme commutatif suivant, où j_ℓ est déterminé par propriété universelle :

$$\begin{tikzcd}
C_\ell \arrow[rr, "c_\ell"] \arrow[d, "g_\ell"'] & & C_{\ell+1} \arrow[d, "i_\ell"] \arrow[ddr, bend left, "g_{\ell+1}"] & \\
C'_\ell \arrow[r, "q'_\ell"'] & \bar{C}'_\ell \arrow[r, "i'_\ell"'] \arrow[drr, bend right, "\bar{c}'_\ell"'] & \bar{C}'_\ell \otimes_{C_\ell} C_{\ell+1} \arrow[dr, dashed, "j_\ell"] & \\
& & & C'_{\ell+1}
\end{tikzcd}$$

Si $g_o : C_o \to C'_o$ et $j_\ell : \bar{C}'_\ell \otimes_{C_\ell} C_{\ell+1} \to C'_{\ell+1}$ sont des KS-extensions équivariantes (I.4), pour $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$, alors

$\underline{g} : \underline{C} \to \underline{C}'$ est une cofibration dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.

<u>Preuve</u> : Dans le diagramme commutatif suivant, $\underline{f}$ est un

$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$ - homomorphisme surjectif induisant un isomorphisme en cohomologie.

La construction de $\underline{s}$, faisant commuter le diagramme, se fait par récurrence sur ℓ $(0 \leqslant \ell \leqslant h)$

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[r, "\underline{r}"] \arrow[d, "\underline{g}"'] & \underline{A} \arrow[d, "\underline{f}"] \\
\underline{C}' \arrow[r, "\underline{h}"'] \arrow[ur, dashed, "\underline{s}"] & \underline{B}
\end{tikzcd} .$$

L'existence de s_0 résulte du fait que g_0 est une KS-extension. Supposons construit s_j, pour $0 \leqslant j \leqslant \ell$ et déterminons $s_{\ell+1}$. Les flèches $\overline{a_\ell \circ s_\ell}$ et β_ℓ s'obtiennent par propriété universelle dans les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
C'_\ell \arrow[r, "s_\ell"] \arrow[d, "q'_\ell"'] & A_\ell \arrow[d, "a_\ell"] \\
\bar{C}'_\ell \arrow[r, dashed, "\overline{a_\ell \circ s_\ell}"'] & A_{\ell+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_\ell \arrow[rr, "c_\ell"] \arrow[d, "g_\ell"'] & & C_{\ell+1} \arrow[d, "i_\ell"] \arrow[dr, "r_{\ell+1}"] & \\
C'_\ell \arrow[r, "q'_\ell"'] & \bar{C}'_\ell \arrow[r, "i'_\ell"'] \arrow[rr, bend right, "\overline{a_\ell o s_\ell}"'] & C'_\ell \otimes_{C_\ell} C_{\ell+1} \arrow[r, dashed, "\beta_\ell"] & A_{\ell+1}
\end{tikzcd} .$$

En utilisant la cofibration j_ℓ, on obtient une flèche $s_{\ell+1} : C'_{\ell+1} \to A_{\ell+1}$ qui satisfait les propriétés recherchées :

$$f_{\ell+1} \circ s_{\ell+1} = h_{\ell+1} \quad ,$$
$$s_{\ell+1} \circ g_{\ell+1} = r_{\ell+1} \quad ,$$
$$s_{\ell+1} \circ c'_\ell \ = a_\ell \circ s_\ell, \text{ par chasse dans le diagramme ci-dessous.}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & A_\ell \arrow[d, "a_\ell"] \\
C_\ell \arrow[urrrr, "r_\ell"] \arrow[rrr, "c_\ell"'] \arrow[dd, "g_\ell"'] & & & C_{\ell+1} \arrow[r, "r_{\ell+1}"'] \arrow[dl, "i_\ell"'] \arrow[dd, "g_{\ell+1}"] & A_{\ell+1} \arrow[dd, two heads, "f_{\ell+1}"] \\
 & & \bar{C}'_\ell \otimes_{C_\ell} C_{\ell+1} \arrow[urr, "\beta_\ell"] \arrow[dr, "j_\ell"] & & \\
C'_\ell \arrow[r, "q'_\ell"'] & \bar{C}'_\ell \arrow[ur, "i'_\ell"] \arrow[rr, "\bar{c}'_\ell"'] & & C'_{\ell+1} \arrow[r, "h_{\ell+1}"'] \arrow[uur, dashed, "s_{\ell+1}"'] & B_{\ell+1}
\end{tikzcd}$$

III.3.(12) - <u>Proposition</u> : $\underline{\lambda_o}$ et $\underline{\lambda_1}$ sont des cofibrations dans $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-ADGC.

<u>Preuve</u> : Soit i égal à 0 ou 1, montrons que λ_i est une cofibration.

$(\lambda_i)_0$ étant une KS-extension, il reste seulement à considérer la flèche j_ℓ obtenue par propriété universelle dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_\ell \arrow[rr, "m_\ell"] \arrow[d, "(\lambda_i)_\ell"'] & & K_{\ell+1} \arrow[d] \arrow[ddr, "(\lambda_i)_{\ell+1}"] & \\
K_\ell^I \arrow[r, "q_\ell^I"] & \overline{K_\ell^I} \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\bar{m}_\ell^I"'] & (\overline{K_\ell^I}) \underset{K_\ell}{\otimes} K_{\ell+1} \arrow[dr, dashed, "j_\ell"] & \\
& & & K_{\ell+1}^I
\end{tikzcd}$$

Après un choix de générateurs, j_ℓ s'écrit :

$$\begin{array}{c}
(\Lambda(\bar{V}_\ell \oplus s\bar{V}_\ell \oplus Ds\bar{V}_\ell \oplus W_{\ell+1}),\bar{D}_\ell) \\
\Big\downarrow \\
(\Lambda(\bar{V}_\ell \oplus s\bar{V}_\ell \oplus Ds\bar{V}_\ell \oplus W_{\ell+1} \oplus sW_{\ell+1} \oplus DsW_{\ell+1}),D_{\ell+1})
\end{array}$$

sa restriction à $s\bar{V}_\ell \oplus Ds\bar{V}_\ell$ est l'identité,
sa restriction à $\bar{V}_\ell \oplus W_{\ell+1}$ s'obtient à partir de λ_i.

Pour λ_0, j_ℓ est une KS-extension de façon immédiate.

Pour λ_1, il suffit de remarquer que, sur les générateurs $\bar{V}_\ell \oplus W_{\ell+1}$, λ_1 est égal à $(\exp \theta) \circ \lambda_0$, où θ est la dérivation usuelle de degré 0 sur le cylindre (I.5)).

III.2.(13) - <u>Existence du modèle minimal cofibrant</u> :

<u>Proposition</u> : Toute $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc $\underline{A}$, cohomologiquement connexe et 1-connexe, admet un modèle minimal cofibrant $(\underline{K},\underline{\rho})$.

<u>Preuve</u> : Elle se fait par récurrence croissante sur ℓ $(0 \leq \ell \leq k)$; on commence par le $\mathbb{Z}_{p^k}$-modèle minimal de A_0 : $\rho_0 : K_0 \to A_0$.

Supposons construit le modèle (K_j,ρ_j) pour $0 \leq j \leq \ell$; on pose $K_\ell = (\Lambda V_\ell, d_\ell)$ et on construit le $(\mathbb{Z}_{p^k}/\mathbb{Z}_{p^{\ell+1}})$-KS-modèle minimal de la flèche $\overline{a_\ell \circ \rho_\ell}$:

$$\begin{tikzcd}
K_\ell \arrow[r, "\rho_\ell"] \arrow[d, "q_\ell"'] & A_\ell \arrow[dd, "a_\ell"] \\
\bar{K}_\ell \arrow[d, "\bar{m}_\ell"'] \arrow[dr, "\overline{a_\ell \circ \rho_\ell}"] & \\
K_{\ell+1} \arrow[r, "\rho_{\ell+1}"'] & A_{\ell+1}
\end{tikzcd}$$

III.2.(14) - <u>Unicité du modèle minimal cofibrant</u> :

Soient $\underline{A}$ une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-adgc, $(\underline{K},\underline{\rho})$ et $(\underline{K}',\underline{\rho}')$ deux modèles minimaux cofibrants de $\underline{A}$, alors :

a) Il existe un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-isomorphisme $\underline{\theta} : \underline{K}' \to \underline{K}$ tel que $\underline{\rho} \circ \underline{\theta} \sim \underline{\rho}'$;

b) De plus, si $\hat{\underline{\theta}} : \underline{K}' \to \underline{K}$ satisfait également la relation $\underline{\rho} \circ \hat{\underline{\theta}} \sim \underline{\rho}'$, alors $\hat{\underline{\theta}}$ est un isomorphisme et $\hat{\underline{\theta}} \sim \underline{\theta}$.

<u>Preuve</u> : Par $\mathbb{Z}_{p^k}$-relèvement, il existe $\theta_o : K_o \to K'_o$ tel que $\rho_o \circ \theta_o \underset{eq}{\sim} \rho'_o$. θ_o induisant un isomorphisme en cohomologie entre deux KS-complexes minimaux, on en déduit que θ_o est un isomorphisme.

Supposons construit θ_j , $0 \leqslant j \leqslant \ell$.

$$
\begin{tikzcd}
K'_\ell \arrow[rr, "q'_\ell"] \arrow[dr, "\rho'_\ell"] \arrow[dd, "\theta_\ell"'] & & \bar{K}'_\ell \arrow[rrr, "\bar{m}'_\ell"] \arrow[dr, "\bar{\rho}'_\ell"] \arrow[dd, "\bar{\theta}_\ell"' near end] & & & K'_{\ell+1} \arrow[dl, "\rho'_{\ell+1}"'] \arrow[dd, dashed, "\theta'_{\ell+1}"] \\
& A_\ell \arrow[rr, "q_A"'] & & \bar{A}_\ell \arrow[r, "\bar{a}_\ell"] & A_{\ell+1} & \\
K_\ell \arrow[rr, "q_\ell"'] \arrow[ur, "\rho_\ell"'] & & \bar{K}_\ell \arrow[rrr, "\bar{m}_\ell"'] \arrow[ur, "\bar{\rho}_\ell"] & & & K_{\ell+1} \arrow[ul, "\rho_{\ell+1}"]
\end{tikzcd}
$$

On désigne par q_A, q_ℓ, q'_ℓ les projections canoniques ; on a alors les factorisations $\bar{a}_\ell$, $\bar{m}_\ell$, $\bar{m}'_\ell$ de a_ℓ, m_ℓ, m'_ℓ respectivement. Les applications équivariantes ρ_ℓ, ρ'_ℓ, θ_ℓ déterminent $\bar{\rho}_\ell$, $\bar{\rho}'_\ell$, $\bar{\theta}_\ell$. Montrons d'abord que $\rho_\ell \circ \theta_\ell \underset{eq}{\sim} \rho'_\ell$ entraîne $\bar{\rho}_\ell \circ \bar{\theta}_\ell \underset{eq}{\sim} \rho'_\ell$. Soit $F : K'^{I}_\ell \longrightarrow A_\ell$ telle que $F \circ \lambda_o = \rho_\ell \circ \theta_\ell$ et $F \circ \lambda_1 = \rho'_\ell$; on désigne par $\bar{F} : \overline{K'^{I}_\ell} \longrightarrow \bar{A}_\ell$ l'application induite. Elle vérifie $\bar{F} \circ \bar{\lambda}_o = \bar{\rho}_\ell \circ \bar{\theta}_\ell$, $\bar{F} \circ \bar{\lambda}_1 = \bar{\rho}'_\ell$ et fournit l'homotopie cherchée.

Par ailleurs, θ_ℓ isomorphisme entraîne $\bar{\theta}_\ell$ isomorphisme. Par relèvement équivariant, on obtient $\theta'_{\ell+1} : K'_{\ell+1} \to K_{\ell+1}$ tel que $\rho_{\ell+1} \circ \theta'_{\ell+1} \underset{eq}{\sim} \rho'_{\ell+1}$. On en déduit, par chasse dans le diagramme,

$\rho_{\ell+1} \circ \theta'_{\ell+1} \circ \bar{m}'_\ell \underset{eq}{\sim} \rho_{\ell+1} \circ \bar{m}_\ell \circ \bar{\theta}_\ell$ et $\theta'_{\ell+1} \circ \bar{m}'_\ell \underset{eq}{\sim} \bar{m}_\ell \circ \bar{\theta}_\ell$, car $\rho_{\ell+1}$ induit un isomorphisme en cohomologie.

De $\bar{m}'_\ell$ cofibration, s'ensuit l'existence de $\theta_{\ell+1}$ tel que

$$\theta_{\ell+1} \underset{eq}{\sim} \theta'_{\ell+1} \quad \text{et} \quad \theta_{\ell+1} \circ \bar{m}'_\ell = \bar{m}_\ell \circ \theta_\ell .$$

$(\bar{\theta}_\ell, \theta_{\ell+1})$ est un morphisme entre KS-extensions minimales d'une même flèche, $\bar{\theta}_\ell$ est un isomorphisme. Le théorème 4.6 ([H]) s'applique et nous donne :

$$\theta_{\ell+1} \text{ est un isomorphisme.}$$

Soit $\underline{\hat{\theta}} : \underline{K}' \to \underline{K}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}$-morphisme tel que $\underline{\rho} \circ \underline{\hat{\theta}} \sim \underline{\rho}'$.

Le théorème d'unicité du KS-modèle minimal fournit :
$\hat{\theta}_o \underset{eq}{\sim} \theta_o$ et $\hat{\theta}_o$ isomorphisme.

Supposons avoir montré, pour $0 \leq j \leq \ell$; $\hat{\theta}_j \underset{eq}{\sim} \theta_j$ et $\hat{\theta}_j$ isomorphisme.

Le diagramme ci-dessous satisfait les hypothèses du théorème 10.4 de [H], on conclut :

$$\hat{\theta}_{\ell+1} \underset{eq}{\sim} \theta_{\ell+1} \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{\ell+1} \text{ isomorphisme}$$

$$\begin{array}{ccc}
\bar{K}_\ell & \xrightarrow{\ \bar{m}_\ell\ } & K_{\ell+1} \\
{\scriptstyle \hat{\bar{\theta}}_\ell} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \hat{\theta}_{\ell+1}} \\
\bar{K}'_\ell & \xrightarrow[\ \bar{m}'_\ell\ ]{} & K'_{\ell+1}
\end{array}$$

III.2.(16) - <u>Remarque</u> :

Introduisons les catégories suivantes :

$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-}\mathcal{S}$: catégorie des foncteurs de source $\mathcal{O}_G$, de but la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux ;

$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-Top}_{\mathbb{Q}}$: catégorie des foncteurs de source $\mathcal{O}_G$, de but la catégorie $\text{Top}_{\mathbb{Q}}$ des espaces rationnels, connexes et 1-connexes, à homologie rationnelle de type fini ;

$\mathbb{Z}_{p^k}\text{-Top}_{\mathbb{Q}}$: catégorie des $\mathbb{Z}_{p^k}$-espaces rationnels, connexes et 1-connexes, à homologie rationnelle de type fini.

Il existe un couple de foncteurs adjoints $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-Top}_{\mathbb{Q}} \underset{\phi}{\overset{c}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}_{p^k}\text{-Top}$, construits par Elmendorf, induisant une équivalence de catégories homotopiques ([E], th.1 et 2).

Les foncteurs S^* (simplexe singulier) et $|\ \ |$ (réalisation géométrique de Milnor) déterminent un couple de foncteurs adjoints $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-}\mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-Top}_{\mathbb{Q}}$ qui réalise une équivalence de catégories homotopiques ([R-T], th. 2.2).

Enfin, d'après I.8, $\underline{A}_{PL} : \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-}\mathcal{S} \to \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-ADGC}$ admet un adjoint noté $\underline{<\ >} : \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-ADGC} \to \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_{p^k}}\text{-}\mathcal{S}$. Ce couple de foncteurs réalise, comme dans le cas classique, une équivalence de catégories homotopiques.

L'application $X \to \underline{K}_X$ qui, à un $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace lui associe son modèle minimal cofibrant réalise une bijection entre les $\mathbb{Z}_{p^k}$-types d'homotopie rationnelle et les classes d'isomorphismes de complexes cofibrants minimaux. Ceci résulte des remarques ci-dessus et de l'unicité du modèle minimal cofibrant.

IV

RIGAUDON

($\mathbb{Z}_p$-HOMOTOPIE ET $O_{\mathbb{Z}_p}$-FORMALITE)

IV.1 - $\mathbb{Z}_p$-HOMOTOPIE.

IV.1.(1) - Théorème : Soient G un groupe fini, $f_o : (\Lambda V,d) \to (B,d_B)$ et $f_1 : (\Lambda V,d) \to (B,d_B)$ deux G-homomorphismes de G-adgc.

On suppose que

1) f_o et f_1 sont homotopes,

2) $(\Lambda V,d)$ est un KS-complexe avec V de dimension finie

alors il existe une G-homotopie entre f_o et f_1.

IV.1.(2) - L'objet cylindre $(\Lambda V,d)^I = (\Lambda(V+sV+DsV),D)$, décrit complètement en I.5, permet de définir l'homotopie entre f_o et f_1. Rappelons brièvement les notations :

i est une dérivation de degré -1 : $i(v) = sv$, $i(sv) = i(Dsv) = 0$,

$\theta = iD + Di$ est une dérivation de degré 0, commutant à D,

$\lambda_o : (\Lambda V,d) \to (\Lambda V,d)^I$ est l'injection naturelle,

$\lambda_1 : (\Lambda V,d) \to (\Lambda V,d)^I$ est l'application composée $\exp\theta \circ \lambda_o$, c'est-à-dire

$\lambda_1(v) = \lambda_o(v) + \sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)$,

$F : (\Lambda V,d)^I \to (B,d_B)$ est un homomorphisme d'adgc vérifiant $F \circ \lambda_o = f_o$, $F \circ \lambda_1 = f_1$.

IV.1.(3) - <u>Notations</u> : V_α est l'espace vectoriel des indécomposables de degré α : $V_{\leq\alpha} = V_\alpha \oplus V_{<\alpha}$; la condition KS sur la différentielle s'écrit : pour tout $v \in V_\alpha$, $d(v) \in \Lambda(V_{<\alpha})$.

Nous noterons $\Lambda(V_{\leq\alpha})$, $(\Lambda(V_{\leq\alpha}))^I$, $\Lambda(V_{<\alpha})$, $(\Lambda(V_{<\alpha}))^I$ les sous-adgc respectivement engendrées par les indécomposables $V_{\leq\alpha}$, $(V^I_{\leq\alpha})$, $V_{<\alpha}$, $(V^I_{<\alpha})$.

IV.1.(4) - <u>Définition</u> : I_α est l'idéal de $(\Lambda(V_{\leq\alpha}))^I$ engendré par $\theta(V_{<\alpha})$.

IV.1.(5) - <u>Lemme</u> : On a, pour $p \geq 2$, $\theta^p(V_{\leq\alpha}) \subset I_\alpha$.

<u>Preuve</u> : Remarquons d'abord que si $v \in V_{\leq\alpha}$, alors $\theta(sv) = 0$.
Montrons que $v \in V_{\leq\alpha}$ entraîne $\theta^2(v) \in I_\alpha$.
On a $\theta^2(v) = \theta(sdv)$; calculons $\theta(sdv)$ en décomposant dv en mots homogènes.

$dv = d_1v + d_2v + \dots + d_nv$ avec

$d_1v = \sum_i w_i$, $w_i \in V_{<\alpha}$,

$d_2v = \sum_{(i_1,i_2)} w_{i_1}w_{i_2}$, $\qquad w_{i_1} \in V_{<\alpha}$, $w_{i_2} \in V_{<\alpha}$,

. . . .

$d_nv = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} w_{i_1}\dots w_{i_n}$, $\qquad w_{i_j} \in V_{<\alpha}$ $\quad 1 \leq j \leq n$.

$$sdv = \sum_i sw_i + \sum_{(i_1,i_2)} ((sw_{i_1})w_{i_2} \pm w_{i_1}(sw_{i_2})) + \dots$$

$$+ \sum_{(i_1,\dots,i_n)} ((sw_{i_1})w_{i_2}\dots w_{i_n} \pm \dots \pm w_{i_1}\dots w_{i_{n-1}}(sw_{i_n}))$$

$$\theta(sdv) = 0 + \sum_{(i_1,i_2)} ((sw_{i_1})\theta(w_{i_2}) \pm \theta(w_{i_1})(sw_{i_2})) + \dots$$

$$+ \sum_{(i_1,\dots,i_n)} ((sw_{i_1})\theta(w_{i_2}\dots w_{i_n}) \pm \dots \pm \theta(w_{i_1}\dots w_{i_{n-1}})(sw_{in})) .$$

$\theta^2(v) = \theta(sdv)$ se décompose donc sous la forme $\sum_i \theta(w_i)w_i'$ avec $w_i \in V_{<\alpha}$ et $w_i' \in (\Lambda(V_{<\alpha}))^I$, ce qui montre que $\theta^2(v) \in I_\alpha$.

On en déduit par récurrence sur p que $\theta^p(v) \in I_\alpha$ pour $v \in V_{\leqslant\alpha}$ et $p \geqslant 2$. En effet, supposons $\theta^p(v) \in I_\alpha$, alors $\theta^p(v) = \sum_i \theta(w_i)w_i'$ et donc

$$\theta^{p+1}(v) = \theta(\theta^p(v)) = \theta(\sum_i \theta(w_i)w_i') = \sum_i (\theta^2(w_i)w_i' + \theta(w_i)\theta(w_i')) \in I_\alpha.$$

IV.1.(6) - <u>Lemme</u> : Soient $f_o : (\Lambda V,d) \to (B,d_B)$ et $f_1 : (\Lambda V,d) \to (B,d_B)$ deux homomorphismes d'adgc de source un KS-complexe et $F : (\Lambda V,d)^I \to (B,d_B)$ un homotopie entre f_o et f_1.

On suppose $f_o(w) = f_1(w)$ pour tout $w \in V_{<\alpha}$ alors 1) pour tout $w \in V_{<\alpha}$, on a $F(\theta(w)) = 0$

2) pour tout $v \in V_{\leqslant\alpha}$, on a $F(\theta(v)) = F(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\theta^n}{n!}(v))$.

Preuve :

1) Désignons par α_0 le plus petit élément de l'ensemble bien ordonné I indexant la KS-base de $(\Lambda V,d)$. Pour $v \in V_{\alpha_0}$, on a trivialement $F(\theta(v)) = F(\sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)) = f_0(v) - f_1(v) = 0$.

Soit $\gamma < \alpha$ et supposons que, pour tout $w \in V_{<\gamma}$, $F(\theta(w)) = 0$. Considérons un élément $v \in W_\gamma$. D'après le lemme ci-avant, on a $\theta^p(v) \in I_\gamma$ pour $p \geq 2$; on peut écrire $\theta^p(v) = \sum_i \theta(w_i)w_i'$ avec $w_i \in V_{<\gamma}$.

On a alors $F(\theta^p(v)) = F(\sum_i \theta(w_i)w_i') = 0$ pour $p \geq 2$, d'où $F(\sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)) = F(\theta(v))$; par ailleurs, F étant une homotopie entre f_0 et f_1, $F(\sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)) = f_0(v) - f_1(v) = 0$; il en résulte $F(\theta(v)) = 0$, ce qui achève la récurrence.

2) Soit $v \in V_\alpha$, d'après 1) et le lemme précédent on a $F(\sum_{n\geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)) = F(\theta(v))$.

Preuve du théorème IV.1.(1) : L'ordre sur la KS-base est choisi tel que $GV_\alpha \subset V_\alpha$; soit F l'homotopie (non équivariante) entre f_0 et f_1 ; supposons qu'il existe un G-homomorphisme d'adgc $F_\alpha : (\Lambda V,d)^I \to (B,d_B)$ tel que :

$$\begin{cases} F_\alpha \circ \lambda_0 = f_1 \\ F_\alpha \circ \lambda_1(w) = f_0(w) \quad \text{pour tout } w \in V_{<\alpha}. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, posons $F_\alpha \circ \lambda_1 = f_\alpha$, on a alors :

$f_0 \sim f_1$ par l'homotopie F,

$f_1 \underset{G}{\sim} f_\alpha$ par la G-homotopie F_α.

On obtient, par composition, une homotopie (non équivariante) F' entre f_0 et f_α. Elle satisfait les hypothèses du lemme IV.1.(6), donc

$$F'(\theta(w)) = 0 \qquad \text{pour tout } w \in V_{<\alpha}$$
$$F'(\theta(v)) = f_0(v) - f_1(v) \quad \text{pour tout } v \in V_\alpha.$$

Définissons $F'_\alpha : (\Lambda V,d)^I \to (B,d_B)$ par :

$$\begin{cases} F'_\alpha(v) = f_\alpha(v) & \text{si } v \in V \\ F'_\alpha(sv) = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_g g^{-1}F'(gsv) & \text{si } v \in V_{\leqslant\alpha} \\ F'_\alpha(Dsv) = \dfrac{1}{|G|}\sum\limits_g g^{-1}F'(gDsv) & \text{si } v \in V_{\leqslant\alpha} \\ F'_\alpha = 0 \text{ sur les autres éléments.} & \end{cases}$$

F'_α est un G-homomorphisme d'adgc et $F'_\alpha \circ \lambda_0 = f_\alpha$.

Soit $v \in V_{\leqslant\alpha}$, remarquons que sdv se décompose en

$$sdv = \sum_j (sw_j)\, x_j \quad , \quad \text{avec } w_j \in V_{<\alpha} \text{ et } x_j \in \Lambda V.$$

Calculons $F'_\alpha(\theta^p(v))$:

$$F'_\alpha(\theta(v)) = F'_\alpha(Dsv) + \sum_j F'_\alpha(sw_j)f_\alpha(x_j)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_g g^{-1}F'(gDsv) + \sum_j \Big(\frac{1}{|G|}\Big(\sum_g g^{-1}F'(gsw_j)\Big)f_\alpha(x_j)\Big)$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_g g^{-1}\Big(F'(gDsv) + \sum_j \big(F'(gsw_j)f_\alpha(gx_j)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1}(F'(gDsv) + F'(sdgv)).$$

$$\boxed{F'_\alpha(\theta(v)) = \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1} F'(\theta(gv)) \ .}$$

D'après le lemme IV.1.(5), pour $p \geqslant 2$, $\theta^p(v)$ se décompose en : $\theta^p(v) = \sum_i \theta(w_i)w_i'$ avec $w_i \in V_{<\alpha}$, d'où, d'après le calcul précédent et les propriétés de F' déjà établies : $F'_\alpha(\theta^p(v)) = \sum_i F'_\alpha(\theta(w_i))f_\alpha(w_i) = 0$.

Calculons maintenant $F'_\alpha \circ \lambda_1(v)$ pour $v \in V_{\leqslant\alpha}$:

$$\begin{aligned} F'_\alpha \circ \lambda_1(v) &= F'_\alpha(v + \theta(v)) \\ &= f_\alpha(v) + \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1} F'(\theta(gv)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1}(f_\alpha(gv) + F'(\theta(gv))) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g g^{-1} f_0(gv) \\ &= f_0(v) \ . \end{aligned}$$

On pose $f'_\alpha = F'_\alpha \circ \lambda_1$; on a alors $f'_\alpha \underset{G}{\sim} f_\alpha \underset{G}{\sim} f_1$ d'où $f'_\alpha \underset{G}{\sim} f_1$. Soit F''_α l'homotopie équivariante entre f'_α et f_1 ; elle vérifie

$$F''_\alpha \circ \lambda_0 = f_1$$

$$F''_\alpha \circ \lambda_1(v) = f_0(v) \quad \text{pour } v \in V_{\leqslant\alpha}$$

et la récurrence se poursuit. ■

IV.1.(7) - Remarque : Le théorème IV.1.(1) possède un "cousin" sous la forme suivante : Soit DGL la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées connexes de type fini, soit DGA la catégorie des algèbres associatives différentielles graduées. On note $\mathcal{U}$ le foncteur algèbre enveloppante de source DGL, de but DGA.

Théorème [A-L] : Deux morphismes f et g de DGL sont homotopes dans DGL si et seulement si les morphismes $\mathcal{U}(f)$ et $\mathcal{U}(g)$ sont homotopes dans DGA.

Ainsi, en considérant deux homomorphismes d'algèbres de Hopf qui sont homotopes en tant que homomorphismes d'adgc (i.e. en oubliant l'application diagonale), ces deux homomorphismes sont homotopes par une homotopie qui est un homomorphisme d'algèbres de Hopf.

Le technique de la preuve ci-dessus ressemble d'ailleurs à celle de [A-L] dans le fait qu'elle se ramène à une partie linéaire avant de modifier l'homotopie.

IV.1.(8) - Corollaire du théorème IV.1.(1) :

Soient X et Y deux G-espaces rationnels, φ_0 et φ_1 deux G-applications de source X, de but Y ; on suppose que φ_0 est homotope à φ_1. Alors, pour tout sous-groupe H de G, les restrictions de φ_0 et φ_1 aux ensembles de points fixes homotopiques $\varphi_0^{hH} : X^{hH} \to Y^{hH}$ et $\varphi_1^{hH} : X^{hH} \to Y^{hY}$ sont homotopes : $\varphi_0^{hH} \sim \varphi_1^{hH}$.

Preuve : Soient f_0 et $f_1 : (\Lambda(V_1),d_1) \to (\Lambda(V_0),d_0)$ les G-modèles minimaux respectifs de φ_0 et φ_1 et $F : (\Lambda(V_1),d_1)^I \to (\Lambda(V_0,d_0)$ l'homotopie équivariante de source f_0 , de but f_1 construite par le théorème IV.1.(1). Alors pour tout sous-groupe H de G, F se factorise en $F_H : (\Lambda(V_1^H),\bar{d}_1)^I \to (\Lambda(V_o^H),\bar{d}_o)$. F_H est alors une homotopie entre les applications $(f_o)_H$ et $(f_1)_H$ $(\Lambda(V_1^H),\bar{d}_1) \to (\Lambda(V_o^H),\bar{d}_o)$. Mais $(\Lambda(V_o^H),\bar{d}_o)$ et $(\Lambda(V_1^H),\bar{d}_1)$ sont des modèles respectifs des ensembles des points fixes homotopiques X^{hH} et Y^{hH} (III.3.(4)) et la théorie (classique) de Sullivan fournit l'homotopie entre les applications ψ_o^{hH} et ψ_1^{h+1}.

IV.2 - $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-FORMALITE D'UN ESPACE.

IV.2.(1) - Définitions : Rappelons d'abord qu'une adgc (A,d_A) est formelle si (A,d_A) et $(H(A),0)$ ont un modèle de Sullivan commun. Un espace X est formel si son algèbre $A_{PL}(X)$ est formelle.

Pour une application, la notion est plus délicate car elle dépend du choix des formalisations : une application f entre CW-complexes nilpotents est formalisable si le morphisme $A_{PL}(f)$ induit entre les PL-formes de Sullivan et le morphisme $H^*(f)$ induit en cohomologie par f, ont un modèle minimal commun.

Pour un homomorphisme d'adgc quelconque $a : (A,d_A) \to (A',d_{A'})$, cette propriété se traduit par le diagramme commutatif, à homotopie près, suivant :

$$\begin{tikzcd}
(A,d_A) \arrow[r, "a"] & (A',d_{A'}) \\
(\Lambda V,d) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\hat{a}"] \arrow[d, "\rho"'] & (\Lambda V',d') \arrow[u, "\lambda'"'] \arrow[d, "\rho'"] \\
(H(A),0) \arrow[r, "a^*"'] & (H(A'),0)
\end{tikzcd}$$

$\hat{a}$ est ici un modèle de a et de a^*.

IV.2.(2) - <u>Notations</u> : Une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc $\underline{A}$ est un diagramme $\mathbb{Z}_p \circlearrowright (A,d_A) \xrightarrow{a} (A',d_{A'})$, où (A,d_A) est une $\mathbb{Z}_p$-adgc, $(A',d_{A'})$ une adgc et a un homomorphisme équivariant d'adgc. La $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-agc $\underline{H}(A)$ est alors le diagramme $\mathbb{Z}_p \circlearrowright (H(A),0) \xrightarrow[a^*]{} (H(A'),0)$.

IV.2.(3) - <u>Définition</u> : La $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc $\underline{A}$ est <u>$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formelle</u> si le diagramme suivant, constitué d'applications équivariantes, commute <u>à homotopie équivariante près</u> :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_p \circlearrowright (A,d_A) \arrow[r, "a"] & (A',d_A) \\
\mathbb{Z}_p \circlearrowright (\Lambda V,d) \arrow[r, "\hat{a}"] \arrow[u, "\lambda"] \arrow[d, "\rho"'] & (\Lambda V',d') \arrow[u, "\lambda'"'] \arrow[d, "\rho'"] \\
\mathbb{Z}_p \circlearrowright (H(A),0) \arrow[r, "a^*"] & (H(A'),0)
\end{tikzcd}$$

$\hat{a}$ est ici un modèle équivariant de a et de a^*.

Si X est un $\mathbb{Z}_p$-espace, on dit que X est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formel si $\underline{A}_{PL}(X)$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formelle.

IV.2.(4) - <u>Théorème</u> : Soit X un $\mathbb{Z}_p$-espace ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) X est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formel

2) l'injection de l'ensemble des points fixes

$X^{\mathbb{Z}_p} \xhookrightarrow{i} X$ est une application formalisable.

<u>Preuve</u> : 1 => 2) évident.

Supposons 2) réalisée.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_p \circlearrowright (A,d_A) \arrow[r, "a"] & (A',d_{A'}) \\
\mathbb{Z}_p \circlearrowright (\Lambda V,d) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\hat{a}"] \arrow[d, "\rho"'] & (\Lambda V',d) \arrow[u, "\lambda'"'] \arrow[d, "\rho'"] \\
\mathbb{Z}_p \circlearrowright (H(A),0) \arrow[r, "a^*"] & (H(A'),0)
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $\hat{a}$ est un modèle équivariant de $a = A_{PL}(i)$; on a alors $a \circ \lambda \underset{eq}{\sim} \lambda' \circ \hat{a}$.

Par l'hypothèse de formalisabilité de i, on a $\rho' \circ \hat{a} \sim a^* \circ \rho$. D'après le théorème IV.1.(1), on en déduit $\rho' \circ \hat{a} \underset{eq}{\sim} a^* \circ \rho'$. ■

IV.2.(5) - <u>Remarque</u> 1 : De ce théorème, il résulte que les obstructions à la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité d'un $\mathbb{Z}_p$-espace coïncident avec les obstructions à la formalisabilité d'une application, en particulier elles ne dépendent pas du corps de base.

IV.2.(6) - <u>Remarque</u> 2 : Le théorème 1 de [F-T] s'adapte aux $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc. Soient $\underline{H}$ une $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-adgc et α un nombre rationnel ; on appelle automorphisme de graduation associé à α, l'automorphisme $\underline{\alpha}^* : \underline{H} \to \underline{H}$ défini par $\alpha^*(x) = \alpha^{|x|}\, x$, pour $x \in H$ ou $x \in H'$.

$\underline{A}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formelle si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{Q} - \{-1,0,1\}$ et $\underline{\varphi} : \underline{A} \to \underline{A}$ tel que $\underline{H}(\varphi) = \underline{\alpha}^*$.

IV.2.(7) - Remarque 3 : $\underline{A}$ est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formelle si et seulement si $\underline{A}$ et $\underline{H}(A)$ ont un modèle cofibrant (III.3.(7)) en commun.

IV.3 - EXEMPLES.

IV.3.(1) - Exemple 1 : Un $\mathbb{Z}_p$-espace de Hopf est un espace $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formel.

Définitions [B2] : Un G-espace de Hopf est un espace de Hopf, muni d'une action du groupe G, satisfaisant à :

1) la multiplication $m : X \times X \to X$ est une G-application ($X \times X$ étant muni de l'action diagonale $g(x_1,x_2) = (gx_1,gx_2)$) ;

2) l'élément neutre $e \in X$ est fixé par G : $e \in X^G$.

3) l'application composée $X \vee X \to X \times X \to X$ est G-homotope à l'application de rabattement (folding map) $\nabla : X \vee X \to X$.

Un G-espace de Eilenberg - Mac Lane est un G-espace K tel que, pour tout sous-groupe $H \subseteq G$, K^H soit un espace de Eilenberg-Mac Lane (au sens usuel). Ces espaces ont été construits par G. Bredon ([B2], II.6).

Théorème ([T3], th. 1.2 et 2.4) - Soient X un $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace de Hopf et X_0 le $\mathbb{Z}_{p^k}$-rationalisé de X.

Alors X_0 est un $\mathbb{Z}_{p^k}$-espace de Hopf et X_0 est $\mathbb{Z}_{p^k}$-homotopiquement équivalent à un produit de $\mathbb{Z}_{p^k}$-espaces de Eilenberg-Mac Lane.

Toute application entre produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane est formalisable, on a donc :

<u>Corollaire</u> : Un $\mathbb{Z}_p$-espace de Hopf est un espace $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formel.

IV.3.(2) - <u>Exemple</u> 2 : <u>Un CW-complexe</u> (<u>de dimension infinie</u>) <u>qui n'est pas</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2}$<u>-formel</u>.

Considérons la $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2}$-adgc $\underline{A}$ suivante :

$$\mathbb{Z}_2 \circlearrowright (\Lambda(u,v),d) \xrightarrow{q} (\Lambda(y),0)$$

avec $|u| = 2$, $|v| = |y| = 3$, $du = 0$, $dv = u^2$,

$tu = -u$, $tv = v$, $q(u) = 0$, $q(v) = y$

(rationnellement, on reconnaît la fibration de Hopf). A l'aide de la chaîne de foncteurs de $\mathcal{O}_G$-ADGC vers G-Top$_{\mathbb{Q}}$ (déjà citée en III.2.(16)), on déduit de $\underline{A}$ un $\mathbb{Z}_2$-espace rationnel X tel que $X^{\mathbb{Z}_2}$ a le type d'homotopie rationnelle de S^3 et X le type d'homotopie rationnelle de S^2. Cela n'est pas en contradiction avec la théorie de Smith car, ainsi que Elmendorf le fait remarquer ([E], p. 277), l'espace X est un CW-complexe de dimension infinie. L'application q n'est pas formalisable et donc l'espace X ainsi construit n'est pas $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2}$-formel.

Sur les exemples suivants, nous décrivons les divers modèles existants, y compris le modèle en algèbre de Lie introduit dans [R-T].

IV.3.(3) - Exemple 3 : Un espace $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_3}$-formel.

Soit $Y = S_1^3 \times S_2^3 \times S_3^3$ muni de l'action de $\mathbb{Z}_3$ définie par $t(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_2,\xi_3,\xi_1)$. On a $Y^{\mathbb{Z}_3} = \Delta(Y) \cong S^3$ (où Δ est la diagonale).

Pour établir la formalisabilité de l'application $i : Y^{\mathbb{Z}_3} \hookrightarrow Y$, on calcule le modèle minimal de Quillen de i.

$\mathbb{Z}_3$-modèle minimal de Quillen de Y : $(\mathbb{L}(W),\partial)$ avec

$|x_i| = 2$ $\quad \partial x_i = 0$, $t\, x_1 = x_2$, $t\, x_2 = x_3$, $t\, x_3 = x_1$,

$|y_i| = 5$ $\quad \partial y_1 = [x_1,x_2]$, $\partial y_2 = [x_3,x_1]$, $\partial y_3 = [x_2,x_3]$

$t\, y_1 = y_3$, $t\, y_2 = y_1$, $t\, y_3 = y_2$

$|z| = 8$ $\quad \partial z = [y_1,x_3] + [y_2,x_2] + [y_3,x_1]$, $t\, z = z$.

Modèle minimal de Quillen de $Y^{\mathbb{Z}_3}$: $(\mathbb{L}(u),0)$ $\quad |u| = 2$.

Soit $\eta : (\mathbb{L}(u),0) \to (\mathbb{L}(W),\partial)$ le modèle minimal de Quillen de i ; on a, pour des raisons de degré, $\eta(u) \subset W$; d'après [F-T], prop. 2.2, l'application i est formalisable et donc Y est $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_3}$-formel. Remarquons que η est le modèle minimal équivariant de Lie ([R-T], th. 3.3) de Y.

Sur cet exemple, le modèle i-minimal de Y et le modèle minimal cofibrant de Y coïncident : $(\Lambda(a_1,a_2,a_3),d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(v),0)$ $\quad |a_i| = 3$, $d\, a_i = 0$, $t\, a_1 = a_2$, $t\, a_2 = a_3$, $t\, a_3 = a_1$, $\psi(a_i) = v$.

IV.3.(4) - Exemple 4 : Un CW-complexe fini qui n'est pas $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_3}$-formel.

Soit $X = S_a^4 \vee S_b^4 \vee S_c^4 \vee S_d^4 \vee S_e^7 \underset{\omega_1}{\cup} e_1^8 \underset{\omega_2}{\cup} e_2^8$. ω_1 est l'application définie en homotopie par $\omega_1 = 2[a,b] - e$ où $[a,b]$ est le crochet de Whitehead ; de même pour ω_2 avec $\omega_2 = 2[c,d] - e$. X est muni de l'action de $\mathbb{Z}_2$ définie par $t\,a = c$, $t\,b = d$, $t\,e = e$. Si ξ_1 désigne un point de la cellule e_1^8 et ξ_2 le point de la cellule e_2^8 de mêmes cordonnées cartésiennes que ξ_1, on pose $t\,\xi_1 = \xi_2$, ce qui détermine l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur e_1^8 et e_2^8. Calculons le modèle minimal de Quillen de $i : X^{\mathbb{Z}_2} \hookrightarrow X$:

Soit $(\mathbb{L}(Z),\partial)$ un $\mathbb{Z}_2$-modèle de Quillen de X obtenu à partir de sa structure cellulaire : $Z = (x_1,x_2,x_3,x_4,y,z_1,z_2)$

$$\begin{array}{llll} |x_i| = 3 & \partial x_i = 0 & t\,x_1 = x_3 & t\,x_2 = x_4 \\ |y| = 6 & \partial y = 0 & t\,y = y & \\ |z_i| = 7 & \partial z_1 = 2[x_1,x_2] - y & & \partial z_2 = 2[x_3,x_4] - y \\ & t\,z_1 = z_2 & & \end{array}$$

Le $\mathbb{Z}_2$-modèle minimal de Quillen de X est alors $(\mathbb{L}(V),\delta)$ avec

$$V = (a_1,a_2,a_3,a_4,z)$$
$$|a_i| = 3\ ,\quad \delta a_i = 0\ ,\quad t\,a_1 = a_3\ ,\quad t\,a_2 = a_4\ ,$$
$$|z| = 7\ ,\quad \delta z = [a_1,a_2] - [a_3,a_4],\quad tz = -z.$$

$X^{\mathbb{Z}_2}$ est égal à S^7 qui a pour modèle minimal de Quillen $(\mathbb{L}(u),0)$, $|u| = 6$.

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{L}(u),0) \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[dr, "\eta"'] & (\mathbb{L}(Z),\partial) \\ & (\mathbb{L}(V),\delta) \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

$\tilde{i}(u) = y,\quad \rho(a_i) = x_i\ ,\quad \rho(z) = \frac{1}{2}\,(z_1 - z_2),$

$\eta(u) = [a_1,a_2] + [a_3,a_4].$

Dans le diagramme ci-dessus, $\tilde{i}$ est le modèle minimal équivariant de Lie de X [R-T].

η est le modèle minimal de Quillen de $i : X^{\mathbb{Z}_2} \hookrightarrow X$; il existe en effet une homotopie $F : (\mathbb{L}(u),0)^I = (\mathbb{L}(u \oplus su \oplus Dsu),D) \to (\mathbb{L}(Z),\partial)$ telle que $F \circ \lambda_0 = \tilde{i}$, $F \circ \lambda_1 = \rho \circ \eta$; cette homotopie est définie par $F(u) = y$, $F(Dsu) = [x_1,x_2] + [x_3,x_4] - y$, $F(su) = \frac{1}{2}\,(z_1+z_2)$.

De $\eta(y) \not\subset Z$, on déduit, d'après [F-T], prop. 2.2, que $i : X^{\mathbb{Z}_2} \hookrightarrow X$ n'est pas une application formalisable ; d'après le théorème IV.2.(4), ceci entraîne que X n'est pas $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2}$-formel.

IV.3.(8) - <u>Remarque</u> : Cet exemple montre que la notion de $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité n'est pas équivalente à la notion de $\mathbb{Z}_p$-formalité introduite par Papadima [P] ; en effet, ce dernier ne tient pas compte de la structure des points fixes et ainsi la $\mathbb{Z}_p$-formalité de Papadima équivaut à la formalité (au sens usuel).

Décrivons, sur cet exemple, les modèles ADGC :

$(\Lambda(v),0)$ est le modèle minimal de Sullivan de $X^{\mathbb{Z}_2}$, avec $|v| = 7$.

Le $\mathbb{Z}_2$-modèle minimal de X, $(\Lambda U,d)$, obtenu à partir du foncteur cochaînes, [Ta], I.1.(3), contient en particulier les éléments

$r_i \in U_0^4\ ,\quad 1 \leq i \leq 4,\quad dr_i = 0,\quad t\,r_1 = r_3\ ,\quad t\,r_2 = r_4$

$s \in U_1^7\ ,\quad ds = r_1r_2 + r_3r_4\ ,\quad ts = s.$

Le modèle i-minimal du $\mathbb{Z}_2$-espace X est alors :

$f : (\Lambda U,d) \twoheadrightarrow (\Lambda(v),0)$ avec $f(s) = v$

Le modèle minimal cofibrant du $\mathbb{Z}_2$-espace X est :

$$(\Lambda U,d) \to (\Lambda(U^{\mathbb{Z}_2} + T),d')$$

le modèle minimal cofibrant <u>ne coïncide pas</u> avec le modèle i-minimal car $U^{\mathbb{Z}_2}$ contient en particulier les éléments (r_1+r_3) et (r_2+r_4) en degré 4.

Le modèle filtré (usuel au sens de [V-P]) de l'application $i : X^{\mathbb{Z}_2} \hookrightarrow X$ a comme modèle bigradué sous-jacent $j : (\Lambda U,d) \to (\Lambda(U+W),d)$. Il existe $w_o \in W_o^7$, $dw_o = 0$, $b_i \in W_o^3$, $1 \leq i \leq 4$, $db_i = r_i$

$w_2 \in W_2^6$, $dw_2 = s - (r_1b_2 + r_3b_4)$.

Ce modèle admet la déformation non triviale $Dw_2 = dw_2 + w_o$.

BIBLIOGRAPHIE

* * * * * * *

[A-L] M. AUBRY & J.M. LEMAIRE - *Homotopies d'algèbres de Lie et de leurs algèbres enveloppantes*, à paraître Lecture Notes Actes du Congrès de Louvain-la-Neuve, 1986, Springer Verlag.

[B1] G. BREDON - *Introduction to compact transformations groups*, (Academic Press), 1972.

[B2] G. BREDON - *Equivariant cohomology theories*, Lecture Notes in Mathematics 34, (1967).

[BO] A. BOREL - *Seminar on transformations groups*, Chap. III & IV. Annals of Maths Studies 46 (1961), Princeton.

[E] A.D. ELMENDORF - *Systems of fixed point sets*, T.A.M.S. 277, (1983), 275-284.

[F] Y. FELIX - *Espaces formels et* Π*-formels*, S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), p. 96-108.

[F-T] Y. FELIX & D. TANRÉ - *Formalité d'une application et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, à paraître Lecture Notes Actes du Congrès de Louvain-la-Neuve, 1986 (Springer Verlag).

[G] J. GOYO - Thesis, Toronto, à paraître.

[G-H-VP] K. GROVE, S. HALPERIN & M. VIGUÉ-POIRRIER - *The rational homotopy theory of certain path spaces with applications to geodesics*, Acta Mathematica 140, (1978), 277-303.

[H] S. HALPERIN - *Lectures on minimal models*, Mémoire S.M.F. Nouvelle Série 9.10 (1983).

[H-S] S. HALPERIN & J. STASHEFF - *Obstructions to homotopy equivalences*, Advances in Math. 32 (1979), 233-279.

[L] D. LEHMANN - *Théorie homotopique des formes différentielles*, S.M.F. Astérisque 45 (1977).

.../...

[M] W.A. MOZART - K 492, n° 23, E. Eulenburg Ltd.

[P] S. PAPADIMA - *On the formalility of maps*, Ann. Univ. Timisoara seria st. matematice XX (1982), 30-40.

[R-T] M. ROTHENBERG & G. TRIANTAFILLOU - *An algebraic model for G-simple homotopy types*, Math. Ann. 269, 301-331, (1984).

[S] D. SULLIVAN - *Infinitesimal computations in topology*, IHES 47 (1977), 269-331.

[Ta] D. TANRÉ - *Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes in Mathematics 1025 (1983), Springer Verlag.

[Th] J.C. THOMAS - *Eilenberg-Moore models for fibrations*, T.A.M.S. 274-1 (1982), p. 203-225.

[T1] G. TRIANTAFILLOU - *Äquivariante rationale Homotopietheorie*, Bonn Math. Schriften, 110 (1978).

[T2] G. TRIANTAFILLOU - *Equivariant minimal models*, T.A.M.S. 274.2 (1982), 509-532.

[T3] G. TRIANTAFILLOU - *Rationalization of Hopf G-spaces*, Math. 2 182 (1983), 485-500.

[VP] M. VIGUÉ-POIRRIER - *Réalisations de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, T.A.M.S. 265 (1981), 447-484.

INDEX DES NOTATIONS

VIERTER AKT

Kabinett

Erste Szene

Barbarina (allein [mit einer Laterne]).

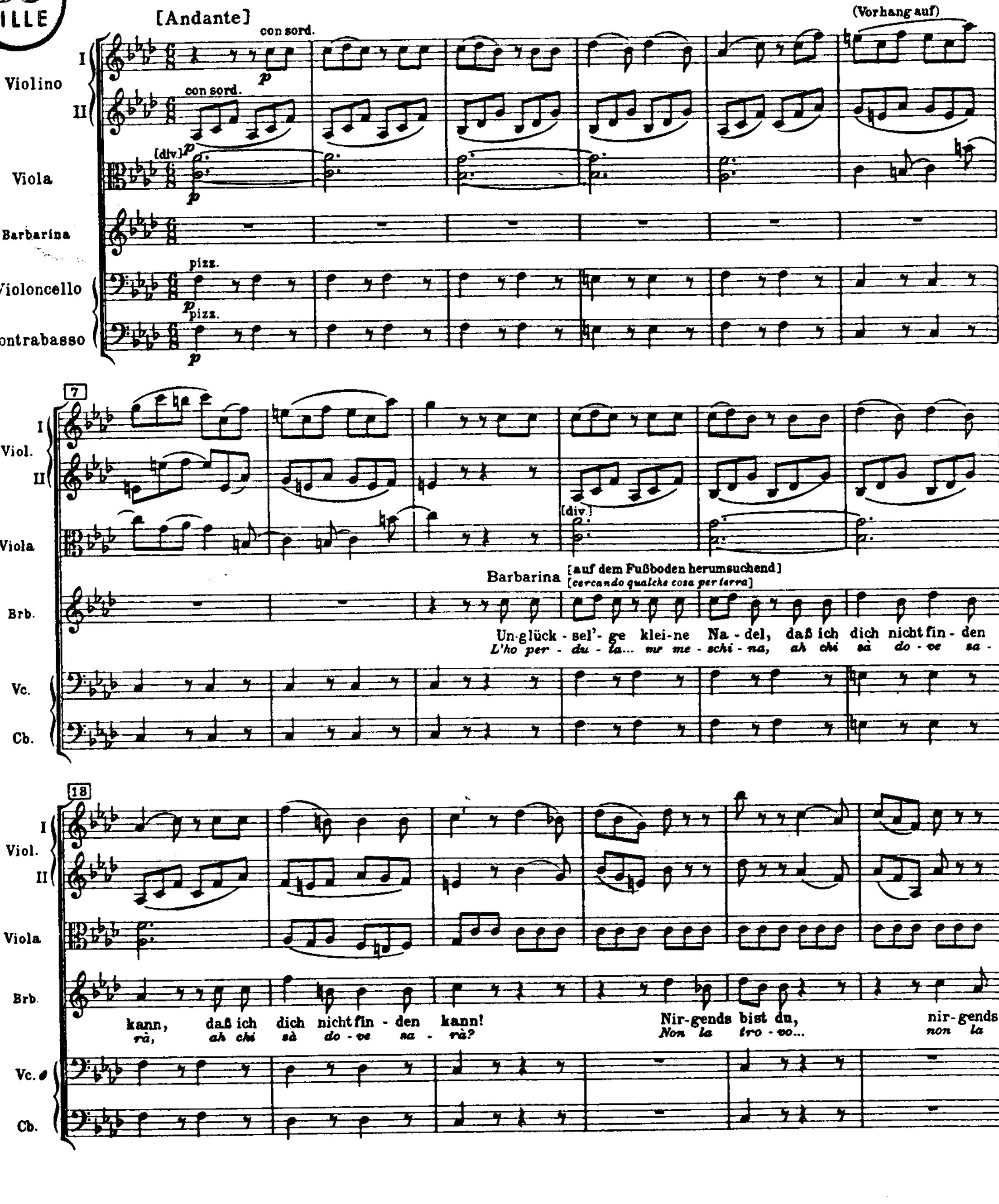
ATTO QUARTO

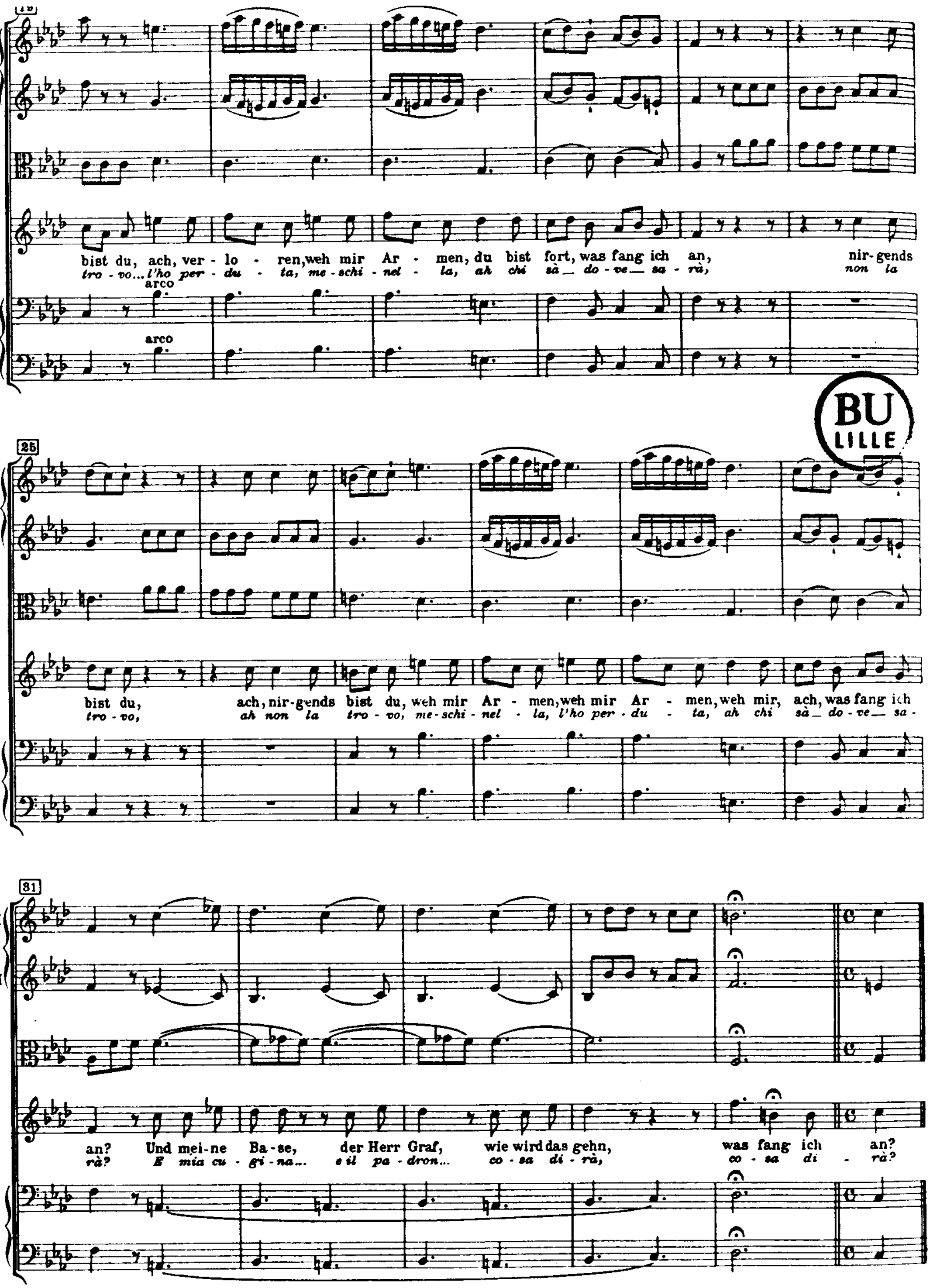
Gabinetto

Scena I

Barbarina (sola [tenendo una lanterna di carta]).

Nº 23. Cavatina





25
31
Viol. I
Viol. II
Viola
Brb.
Vc.
Cb.
arco
bist du, ach, ver - lo - ren, weh mir Ar - men, du bist fort, was fang ich an, nir- gends
tro - vo... l'ho per - du - ta, me - schi - nel - la, ah chi sà do - ve sa - rà, non la
bist du, ach, nir- gends bist du, weh mir Ar - men, weh mir Ar - men, weh mir, ach, was fang ich
tro - vo, ah non la tro - vo, me - schi - nel - la, l'ho per - du - ta, ah chi sà do - ve sa -
an? Und mei - ne Ba - se, der Herr Graf, wie wird das gehn, was fang ich an?
rà? E mia cu - gi - na... e il pa - dron... co - sa di - rà, co - sa di - rà?

RESUME

Soit X un espace topologique sur lequel agit le groupe $\mathbb{Z}_n$ des entiers modulo n, avec points fixes. Nous étudions ici le type d'homotopie rationnelle équivariant de X à l'aide de la cohomologie de Bredon et des travaux de G. Triantafillou.

Pour $n = p^k$ (p premier, k entier positif), nous construisons un représentant algébrique du type d'homotopie rationnelle équivariant de X. Sa particularité réside dans le fait que les points fixes homotopiques servent de fondation à la construction du modèle des points fixes. On obtient ainsi un objet cofibrant au sens de Quillen, distinct en général du modèle introduit par G. Triantafillou.

Nous abordons ensuite la notion de formalité : un espace X, muni d'une action de $\mathbb{Z}_p$, est dit $\mathbb{Z}_p$-formel si X et $\underline{H}^*(X;\mathbb{Q})$ ont même modèle au sens précédent. Nous montrons ici que cette propriété équivaut à la formalisabilité de l'inclusion de l'ensemble des points fixes $i : X^{\mathbb{Z}_p} \hookrightarrow X$. Des exemples d'espaces $\mathbb{Z}_p$-formels et d'espaces non $\mathbb{Z}_p$-formels sont également donnés.

MOTS CLES : Cohomologie de Bredon
Modèle minimal cofibrant
$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$-formalité.

J