

N° d'ordre : 1398

55376
1987
21

55376
1987
21



THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3^{ème} CYCLE

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

par

Michèle BENYOUNES

ACTION DES SYMETRIES GENERALISEES
SUR LES LOIS DE CONSERVATION
DES SYSTEMES LAGRANGIENS

Membres du Jury : Président : M^{lle} LIBERMANN P., Professeur émérite à Paris VII

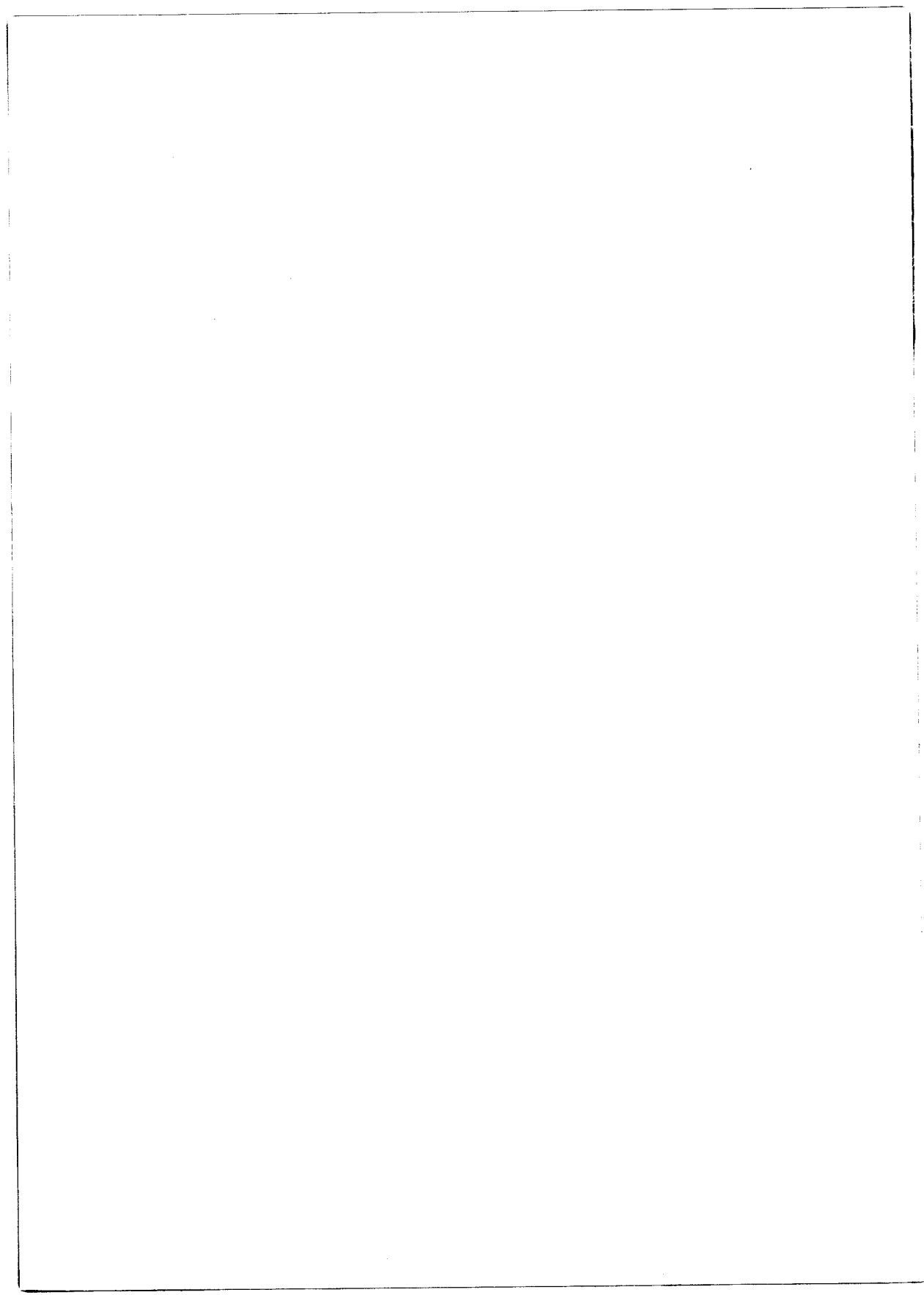
Rapporteur : M^{me} KOSMANN-SCHWARZBACH Y.,
Professeur à l'Université de Lille I

Examineurs { M^r BKOUCHE R., Professeur à l'Université de Lille I
M^r GERGONDEY R.,
Assistant Agrégé à l'Université de Lille I

SCD LILLE 1



D 030 254770 1



A mes Parents...
et à Micky...

B.U. LILLE I



D 030 081586 4

55376
1987
21

55376
1987
21

Tout d'abord, je tiens à dire toute ma gratitude à Yvette Kosmann-Schwarzbach qui a dirigé ma thèse. Elle a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique avec beaucoup de patience et des encouragements constants.

Je me permets ici de lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je voudrais exprimer mes remerciements à Paulette Libermann qui a bien voulu accepter la présidence du jury.

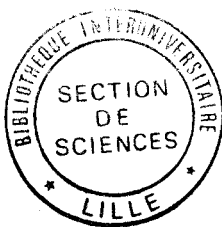
Rudolf Bkouché me fait l'honneur de participer au jury ; je tiens à le remercier.

Je remercie également Robert Gergondey d'avoir accepté de prendre part au jury.

Je remercie également les enseignants et chercheurs de l'U.F.R pour l'aide et la gentillesse qu'ils m'ont accordée et tout particulièrement Alain Loncke pour son précieux soutien.

C'est avec beaucoup de compétence, de soin et de rapidité que Madame C. Evrard a dactylographié le manuscrit. Je l'en remercie chaleureusement.

Je tiens à remercier vivement Madame G. Doclot pour sa gentillesse ainsi que le personnel des services de l'imprimerie de l'U.F.R des Mathématiques de Lille I.



PLAN

Introduction	- i -
CHAPITRE I : <u>Champs de Vecteurs Généralisés et Lagrangiens</u>	1
A) <u>Généralités sur les variétés fibrées</u>	1
1) Variété fibrée	1
2) Section d'un fibré	2
B) <u>Jet de section d'un fibré</u>	2
C) <u>Champs de vecteurs généralisés</u>	3
1) Opérateur différentiel	3
2) Différentielle totale et dérivée totale	4
3) Opérateur différentiel sectionnel	4
4) Champs de vecteurs généralisés	5
D) <u>Champs d'évolution</u>	6
1) Définition du fibré vertical	6
2) Définition d'un champ d'évolution	6
3) Définition de la caractéristique	6
E) <u>Prolongement de champs de vecteurs généralisés</u>	7
1) Définition	7
2) Lemme (1.1) : Caractéristique du crochet de Lie de deux champs de vecteurs	8
F) <u>Lagrangiens</u>	8
1) Définition d'un lagrangien	8
2) Lemme (1.2) : champ d'évolution et différentielle totale	8
G) <u>Dérivée de Fréchet d'opérateurs différentiels</u>	8
1) Section de VF le long de u	9
2) Dérivée de Lie d'une section par un champ de vecteurs généralisé ; lemme (1.3.)	9
3) Dérivée de Lie d'un lagrangien par un champ de vecteurs généralisé	9
4) Dérivée de Fréchet d'un opérateur différentiel lemme (1.4) : champ d'évolution et dérivée de Fréchet	10
H) <u>Adjoint d'opérateurs différentiels linéaires</u>	11
Définition (1.5.)	11
Théorème (1.6.)	12
Adjoint de la dérivée de Fréchet	12

CHAPITRE II : <u>Théorème de Noether</u>	15
A) <u>Opérateur d'Euler-Lagrange</u>	15
1) Généralisation de la notion d'opérateur différentiel sectionnel	15
2) 1-forme généralisée d'ordre (k, ℓ)	15
3) 1-forme généralisée simple	16
4) Définition de l'opérateur d'Euler-Lagrange	16
5) Lemme (2.1) : dérivée d'Euler-Lagrange et différentielle totale	17
6) Théorème (2.2) : auto-adjonction de la dérivée de Fréchet de la dérivée variationnelle	19
7) Théorème (2.3) : relation liant VL et $\frac{\delta L}{\delta u}$	19
8) Théorème (2.4).	26
B) <u>Symétries et lois de conservation</u>	30
1) Système différentiel	30
2) Système d'Euler-Lagrange	30
3) Conditions de non dégénérescence d'un système différentiel	30
4) Symétrie d'un système différentiel	32
5) Symétrie variationnelle	33
6) Lois de conservation	35
C) <u>Théorème de Noether</u>	
1) Enoncé du théorème (2.15)	37
2) Expression, en cartes locales adaptées, de la loi de conservation	38
3) Lemme (2.16)	39
D) <u>Appendice : Cas particulier d'une équation différentielle affine</u>	40
Lemme (2.17)	40
Théorème (2.18)	41
Théorème (2.19)	41
CHAPITRE III : <u>Correspondance entre symétries et lois de conservation</u>	43
A) <u>Théorème (3.1) : Action d'une symétrie sur une loi de conservation</u>	43
B) <u>Théorème (3.2)</u>	44
C) <u>Conséquences</u>	45

CHAPITRE IV : <u>Exemples</u>	53
A) <u>Exemple I</u>	53
B) <u>Exemple II</u> : L'équation des ondes courtes	72
C) <u>Exemple III</u> : L'équation de la dynamique des gaz transsonique	87
D) <u>Exemple IV</u> : L'équation des ondes sur une plaque de glace dues à une source mobile	102
BIBLIOGRAPHIE	121

INTRODUCTION

L'étude des symétries et des lois de conservation d'un système différentiel fait l'objet d'une littérature de plus en plus vaste depuis les premiers travaux dûs à Emmy Noether en 1918 [11].

Dans un premier temps, et ceci sera le but du chapitre I, nous exposons le cadre de notre travail et nous introduisons les éléments de géométrie différentielle nécessaires pour énoncer les résultats qui suivront. Nous reprenons ainsi principalement les travaux d'Olver [12] et d'Ibragimov [4], mais dans un contexte plus général. Les variétés fibrées sur lesquelles nous travaillons ne sont plus nécessairement vectorielles.

Utilisant le travail de Martínez Alonso [10] et de Tsujishita [14], nous définissons les jets de sections d'ordre infini ainsi que les champs de vecteurs généralisés et les opérateurs différentiels d'ordre supérieur. Fletcher [2] et Kolar [7] ont également travaillé sur des Lagrangiens d'ordre supérieur.

Ainsi, nous nous plaçons dans le premier chapitre dans un cadre très général de variétés fibrées quelconques de dimension $(n+q)$, et non pas dans celui, plus restreint, de la mécanique classique, d'où cependant sont tirés de nombreux exemples.

Le second chapitre est consacré à un énoncé du théorème de Noether proprement dit, ainsi qu'à ses applications. Nous nous restreignons ici à des systèmes différentiels particuliers correspondant à des opérateurs d'Euler-Lagrange ; mais il est important de remarquer que les situations physiques dans lesquelles les

systèmes différentiels étudiés ne dérivent pas d'un Lagrangien sont rares. Ceci explique en partie notre intérêt pour les systèmes différentiels d'Euler-Lagrange.

Le résultat essentiel du second chapitre consiste à associer à toute symétrie variationnelle d'un système différentiel d'Euler-Lagrange une loi de conservation. La formule explicite fait intervenir une 1-forme généralisée appelée transformation de Legendre qui permet d'avoir une relation entre la dérivée de Fréchet d'un Lagrangien et la dérivée d'Euler-Lagrange. Cependant, pour un Lagrangien donné, cette transformation de Legendre n'est pas unique car la relation ne fait apparaître que sa différentielle totale. Plusieurs expressions différentes en sont données dans la littérature parue dans ce domaine. Ibragimov [4] et Khamitova [5] et [6] publient une forme qui n'est valable que pour un Lagrangien du premier ordre, car dès le second ordre, il manque des factorielles dans les coefficients. Guil Guerrero et Martinez Alonso [3] donnent une autre forme de la transformation de Legendre en cartes locales adaptées, en introduisant une nouvelle notion : celle de dérivée variationnelle d'ordre supérieur. Nous donnerons une troisième forme dans notre travail. On peut remarquer que T. Tsujishita obtient un résultat analogue par une méthode différente [14].

Une loi de conservation associée à une symétrie variationnelle s'exprimera alors en fonction de la transformation de Legendre que l'on aura choisie pour le système différentiel d'Euler-Lagrange considéré. On montre alors que l'on peut introduire une relation d'équivalence sur l'ensemble des lois de conservation d'un système d'Euler-Lagrange et que les classes d'équivalence de lois de conservation sont indépendantes du choix de la transformation de Legendre. C'est le but du lemme (2.16).

Dans le troisième chapitre, nous étudions une correspondance entre symétries et lois de conservation. Là encore, nous nous plaçons dans le cadre d'un système d'Euler-Lagrange et nous travaillons sur des fibrés vectoriels dont la base est isomorphe à $\mathbb{R}^m$ et la fibre-type à $\mathbb{R}^q$. Utilisant principalement les travaux d'Olver, [12], nous montrons que l'action d'une symétrie variationnelle sur une loi de conservation associée à une autre symétrie variationnelle par le théorème de Noether, fournit une loi de conservation pour le même système différentiel. C'est la première étape. Dans une seconde étape, nous déterminons la classe d'équivalence de la loi obtenue, c'est celle d'une loi de conservation associée au crochet de Lie des deux symétries variationnelles. Ces deux résultats sont exposés dans le théorème (3.2).

Ces deux résultats permettent alors de déterminer complètement toutes les lois de conservation, à équivalence près, associées à un système d'Euler-Lagrange, à partir d'un ensemble de "générateurs". On retrouve ainsi la notion de "base de lois de conservation" apparue dans les travaux de Khamitova [5] et [6]. On peut, sur des exemples précis, mettre en évidence des bases de lois de conservation.

C'est le but du dernier chapitre qui montre comment, pour un système d'Euler-Lagrange, on calcule les symétries et les symétries variationnelles, puis les lois de conservation associées. Enfin, on utilise le théorème (3.2) pour trouver un ensemble de générateurs des lois de conservation.

Dans les trois premiers exemples, le Lagrangien est du premier ordre, ce qui est généralement le cas dans les situations physiques usuelles. Les fibrés sur lesquels nous travaillons sont triviaux de fibre type $\mathbb{R}$.

Dans le premier exemple, étudié par Vinokourov et Nourgalieva [15], la base est $\mathbb{R}^2$. Les deux exemples suivants, qui sont respectivement l'équation des ondes courtes et l'équation de la dynamique des gaz transsonique, ont été étudiés en partie par Khamitova [5]. Les bases sont respectivement $\mathbb{R}^3$ et l'espace de Minkovski $\mathbb{R}^4$.

La dernière équation a été étudiée, en mécanique des fluides, comme modèle du mouvement d'une plaque de glace flottante, par J.W. Davys, J. Hosking et D. Smeyd [1]. Elle dérive d'un Lagrangien d'ordre deux. Nous déterminons l'algèbre de Lie des symétries ainsi que les lois de conservation. L'équation étudiée est affine et on montre alors que les résultats trouvés par un calcul classique peuvent directement se déduire de théorèmes généraux sur les équations linéaires. On utilise à cet effet des résultats d'Olver [13] qu'on étend au cas des équations affines.

CHAPITRE I

Champs de vecteurs généralisés et Lagrangiens

Ce chapitre sera consacré à introduire les définitions et théorèmes de base dont nous nous servirons dans la suite de ce travail.

Les théorèmes seront généralement admis mais nous indiquerons dans chaque cas les références des ouvrages où se trouvent les démonstrations.

A. GENERALITES SUR LES VARIETES FIBREES.

1. Variété fibrée :

Soit $F \xrightarrow{\Pi} M$ une variété fibrée de classe C^∞ , d'espace total F et de base M . On se place dans le cas où M est connexe. Alors, toutes les fibres seront difféomorphes à une même fibre-type N .

On suppose que Π est une submersion et qu'il existe des coordonnées locales adaptées (ou cartes fibrées).

La base M est de dimension n ; on peut la munir de coordonnées locales

$$(x^i) = (x^1, x^2, \dots, x^n).$$

La fibre-type est de dimension q ; on peut la munir de coordonnées locales

$$(y^\alpha) = (y^1, \dots, y^q).$$

Ainsi, pour un élément quelconque y de F , il existe au voisinage de y une carte locale $y \rightarrow (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^q)$ telle que $(x^1, \dots, x^n)$ soient

des coordonnées locales de $x = \pi(y)$.

Pour un élément x de M , on appelle fibre au-dessus de x , noté F_x , l'ensemble défini par $F_x = \{y \in F / \pi(y) = x\}$.

Dans la suite de ce travail, nous conviendrons d'appeler fibré $F \xrightarrow{\pi} M$ une variété fibrée $F \xrightarrow{\pi} M$.

2. Section d'un fibré :

Une section du fibré $F \xrightarrow{\pi} M$ est une application u de M à valeurs dans F qui vérifie $\pi \circ u = \text{id}_M$. Ainsi, pour tout point x de M , $u(x)$ appartient à F_x .

B. JET DE SECTION D'UN FIBRÉ $F \xrightarrow{\pi} M$.

Introduisons les notations suivantes : On appelle multi-indice I un n -uplet $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ où, pour tout $j = 1, 2, \dots, n$, $i_j \in \mathbb{N}$.

On appelle ordre de I l'entier $|I| = \sum_{j=1}^n i_j$.

Ainsi, pour une section u de $F \xrightarrow{\pi} M$, une dérivée partielle d'une composante u^α de u au point x de M , d'ordre k , s'écrira :

$$u_I^\alpha(x) = \frac{\partial^k u^\alpha}{\partial (x^1)^{i_1} \dots \partial (x^n)^{i_n}} (x)$$

où I est un multi-indice d'ordre k .

Soit u une section du fibré $F \xrightarrow{\pi} M$ et x un point de M .

On note $j_x^k u$ le jet d'ordre k de la section u au point x .

On note l'ensemble des éléments $j_x^k u$ où u est une section de $F \xrightarrow{\pi} M$ définie dans un voisinage de x .

On pose alors $J_F^k = \bigcup_{x \in M} J_x^k F$.

J^k_F est un fibré de base F , appelé fibré des jets d'ordre k , pour la projection Π^k_0 définie par $\Pi^k_0(j^k_x u) = u(x)$.

Si $(x^i, u^\alpha(x))$ représente la section $u(x)$ dans une carte locale, alors $j^k_x u$ est défini par $(x^i, u^\alpha(x), u^\alpha_I(x))$ avec $1 \leq |I| \leq k$.

J^k_F est aussi un fibré de base J^{k-1}_F pour la projection Π^k_{k-1} définie par $\Pi^k_{k-1}(j^k_x u) = j^{k-1}_x u$.

On définit ainsi la suite $J^k_F \xrightarrow{\Pi^k_{k-1}} J^{k-1}_F \xrightarrow{\Pi^{k-1}_{k-2}} J^{k-2}_F \dots \xrightarrow{\Pi^1_0} J^0_F = F \xrightarrow{\Pi} M$ et on pose :

$J^\infty_F =$ limite projective de J^k_F pour $k \rightarrow +\infty$.

Le fibré des jets d'ordre infini J^∞_F est un fibré de base F pour la projection Π^∞_0 . Pour une étude plus approfondie des jets de sections d'un fibré on pourra consulter [14].

C. CHAMPS DE VECTEURS GÉNÉRALISÉS.

Pour définir les champs de vecteurs généralisés, nous rappellerons brièvement la notion d'opérateur différentiel.

1. Opérateur différentiel :

Un opérateur différentiel P d'ordre k du fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$ dans le fibré $F' \xrightarrow{\Pi'} M$ est un morphisme de fibrés :

$$\begin{array}{ccc} J^k_F & \xrightarrow{P} & F' \\ \Pi \Pi^k_0 \searrow & & \swarrow \Pi' \\ & M & \end{array}$$

Si P est un opérateur différentiel d'ordre k de F dans F' et u une section de F , alors l'application $x \in M \rightsquigarrow P(j^k_x u) \in F'$ définit une section de F' qui sera notée (Pu) .

Si F' est le fibré trivial $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, P est alors un opérateur différentiel scalaire et posant $P(j_x^k u) = (x, \tilde{P}(j_x^k u)) \in M \times \mathbb{R}$ on peut identifier P à $\tilde{P}$.

2. Différentielle totale et dérivée totale :

Soit P un opérateur différentiel scalaire d'ordre k sur le fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$.

a) La différentielle totale de P , notée $d_M P$ est un opérateur différentiel d'ordre $(k+1)$ de F dans T^*M défini, pour toute section u de $F \xrightarrow{\Pi} M$ et tout x de M par :

$(d_M P)(j_x^{k+1} u) = d(Pu)_x$, où $d(Pu)_x$ représente la différentielle extérieure de (Pu) au point x .

On vérifie que $d_M P$ ne dépend que du jet d'ordre $(k+1)$ de u .

b) La dérivée totale de P , dépend des coordonnées sur M .

Soit $(x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées locales sur M . La dérivée totale de P par rapport à x^j , notée $D_j P$ est définie par $D_j P = \langle d_M P, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$.

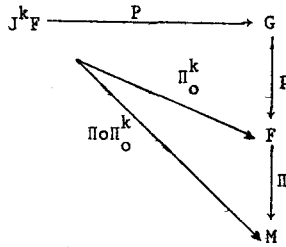
$$\text{Ainsi } D_j P = \frac{\partial P}{\partial x^j} + \sum_{|I| \geq 0} \frac{\partial P}{\partial u_I} \times u_{I,j}^\alpha \quad \text{avec } I = (i_1, \dots, i_n) \text{ et}$$

$$I, j = (i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_n).$$

↑
jème place

3. Opérateur différentiel sectionnel :

L'opérateur différentiel P d'ordre k de $F \xrightarrow{\Pi} M$ dans le fibré $G \xrightarrow{P} F$ est un opérateur différentiel sectionnel si et seulement si le diagramme suivant commute :

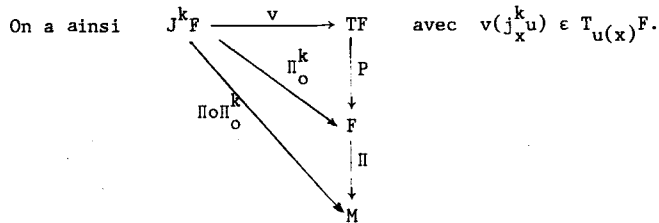


soit $p \circ P = \Pi^k_O$.

Ainsi pour $x \in M$, $P(j^k_x u) \in G_{u(x)}$ fibre au-dessus de $u(x)$ pour $G \xrightarrow{P} F$.

4. Champs de vecteurs généralisés :

Un champ de vecteurs généralisé v d'ordre k sur F est un opérateur différentiel sectionnel d'ordre k de F dans le fibré tangent à F noté TF , qui est de plus projectable sur M par Π .



On a ainsi $v(j^k_x u) \in T_{u(x)} F$.
et pour z et z' deux éléments de J^k_F vérifiant $\Pi \Pi^k_O(z) = \Pi \Pi^k_O(z')$, on a alors $\Pi(v(z)) = \Pi(v(z'))$.

Dans une carte locale adaptée, le champ de vecteurs généralisé v s'écrit :

$$v = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \text{ pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } n \text{ et } \alpha \text{ variant de } 1 \text{ à } q$$

avec $\xi^i = \xi^i(x^j, u^\beta, u_I^\beta)$

$\eta^\alpha(x^j, u^\beta, u_I^\beta)$ et I est un multi-indice d'ordre inférieur

ou égal à k .

En notation condensée on écrira $\xi^i = \xi^i[u]$

$$\eta^\alpha = \eta^\alpha[u]$$

$$\text{donc } v = \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.1)$$

La notion de champ généralisé est introduite par Tsujishita [14] et Martinez Alonso [10].

0. CHAMPS D'EVOLUTION.

Nous rappellerons d'abord la définition du fibré vertical d'un fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$.

1. Définition du fibré vertical de F :

Pour y un élément de F , on considère $T_y^F \Pi(y)$ qui est l'espace tangent au point y à la fibre $F_{\Pi(y)}$. On pose $V_y^F = T_y^F \Pi(y)$ et $VF = \bigcup_{y \in F} V_y^F$.

VF est appelé fibré vertical de F ; c'est un fibré vectoriel sur F . L'espace total VF est de dimension $(n+2q)$.

Si $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^q)$ est un système de coordonnées locales sur F alors $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^q, z^1, \dots, z^q)$ est un système de coordonnées locales sur $VF \xrightarrow{P} F$ avec $(z^1, \dots, z^q)$ un système de coordonnées locales dans $T_y^F \Pi(y)$.

2. Définition d'un champ d'évolution :

Un champ d'évolution est un champ de vecteurs généralisé à valeurs dans le fibré vertical de F . Alors $\Pi(v(j_x^k u)) = 0$ et un champ d'évolution est donc de la forme

$$v_\eta = \eta^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.2)$$

3. Définition de la caractéristique :

Si F est le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^q$ on pose $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^q)$ et

$\eta = \eta[u]$. On dit que η est la caractéristique du champ d'évolution v_η .

A tout champ de vecteurs généralisé v , on montre que l'on peut associer, de manière intrinsèque, un champ d'évolution que l'on appellera sa forme d'évolution [12].

Dans une carte locale adaptée, v s'écrit : $v = \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$; sa forme d'évolution est alors $v_Q = Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, où, pour $\alpha = 1, 2, \dots, q$, on a :

$$Q^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i D_i u^\alpha \quad (1.3)$$

E. PROLONGEMENT DE CHAMPS DE VECTEURS GENERALISES.

1. Définition : Si v est un champ de vecteurs généralisé sur $F \xrightarrow{\Pi} M$ qui s'écrit dans une carte locale adaptée : $v = \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, on appellera prolongement d'ordre infini de v , le champ de vecteurs sur $J^\infty F$, noté $\text{pr } v$,

$$\text{pr } v = v + \sum_{|I| \geq 1} \eta_I^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (1.4)$$

avec

$$\eta_I^\alpha[u] = D_I(\eta^\alpha - \xi^j D_j u^\alpha) + \xi^j D_I D_j u^\alpha \quad (1.5)$$

où I est le multi-indice $(i_1, \dots, i_n)$ et $D_I = D_{i_1} \dots D_{i_n}$; $D_I D_j = D_{i_1} \dots D_{i_j+1} \dots D_{i_n}$

Ainsi, le prolongement du champ d'évolution $v_Q = Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ s'écrit donc

$$\text{pr } v_Q = Q^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{|I| \geq 1} D_I(Q^\alpha[u]) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \quad (1.6)$$

Dans la suite, on montrera que dans beaucoup de questions, on ne restreint pas la généralité en ne considérant que des champs d'évolution. On pourra trouver dans [9] et [14] une étude plus complète des prolongements de champs généralisés et de leur action sur les lagrangiens et les courants introduits ci-dessous.

2. Lemme(1.1): Si v_Q et v_R sont deux champs d'évolution de caractéristiques respectives Q et R , alors le crochet de Lie des deux champs $[v_Q, v_R]$ est un champ d'évolution v_S dont la caractéristique S est égale à

$$\text{pr } v_Q(R) - \text{pr } v_R(Q) \quad (1.7)$$

On admettra ce lemme dont on pourra voir une démonstration dans [12].

F. LAGRANGIENS.

1. Définition: Un Lagrangien d'ordre k sur le fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$ est un opérateur différentiel sur F , d'ordre k , à valeurs dans $\Lambda^n(T^*M) \rightarrow M$. (On rappelle que $\Lambda^n T^*M$ est un fibré vectoriel sur M de fibre-type de dimension 1).

2. Lemme (1.2): Soient v_Q un champ d'évolution sur $F \xrightarrow{\Pi} M$ et β un opérateur différentiel d'ordre k sur F à valeurs dans $\Lambda^{n-1}(T^*M)$. Alors

$$\text{pr } v_Q(d_M \beta) = d_M(\text{pr } v_Q \beta) \quad (1.8)$$

Ce résultat est démontré par Olver [12], pour le cas des fibrés vectoriels et s'étend au cas général.

On peut remarquer que l'hypothèse d'un champ d'évolution est indispensable à la validité du lemme.

Dans la suite de ce travail, on convient d'appeler courant sur F tout opérateur différentiel sur F à valeurs dans $\Lambda^{n-1}(T^*M)$.

On pourra trouver une étude plus détaillée des lagrangiens d'ordre supérieur dans [3] et [7].

G. DERIVÉE DE FRECHET D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS.

Nous allons d'abord rappeler brièvement les notions de dérivée de Lie d'une section et d'un Lagrangien par un champ de vecteurs, et de section du fibré

vertical le long d'une section du fibré initial. Pour tout ce paragraphe, on pourra se référer aux travaux de Y. Kosmann-Schwarzbach [8] et [9].

1. Section de VF le long de u :

Soit u une section du fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$. L'application w de M à valeurs dans VF est une section de VF le long de u si et seulement si, quel que soit x dans M , $w(x)$ est dans la fibre au-dessus de $u(x)$ pour le fibré vectoriel VF de base F .

Dans une carte locale adaptée, si $(x^i, u^\alpha(x))$ représente la section $u(x)$, alors $(x^i, u^\alpha(x), w^\alpha(x))$ représente la section $w(x)$ de VF le long de u .

2. Dérivée de Lie d'une section par un champ de vecteurs généralisé :

a) Définition : La dérivée de Lie de la section u du fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$ par le champ de vecteurs généralisé w est l'application de M à valeurs dans $VF \subset TF$, notée $L_v u$ ou $v.u$, définie par : pour x dans M ,

$$(v.u)(x) = v(j_x^k u) - (Tu)_x(v_M(x)) \quad (1.9)$$

où v_M désigne la projection de v sur TM .

b) Lemme (1.3) : Pour x appartenant à M , $(v.u)(x)$ est un élément de VF et $v.u$ définit une section de VF le long de u .

3. Dérivée de Lie d'un Lagrangien par un champ de vecteurs généralisé :

La dérivée de Lie du Lagrangien L par le champ de vecteurs généralisé v sur $F \xrightarrow{\Pi} M$ est un nouvel opérateur différentiel sur F à valeurs dans $\Lambda^n(T^*M)$, noté $v.L$ et défini par : pour toute section u ,

$$(v.L)(u) = (pr v_Q L)(u) + d_M(i_{v_M} L) \quad (1.10)$$

où v_Q désigne le champ d'évolution associé à v et $i_{v_M} L$ le produit intérieur

de L par le champ de vecteurs v_M , qui est un courant sur F .

Dans une carte locale adaptée, v s'écrit $\xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$,
d'où $v_Q = Q^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ avec $Q^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i D_i u^\alpha$ et $v_M = \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i}$. On aura alors

$$(v.L)(u) = \sum_{|I| \geq 0} D_I(Q^\alpha[u]) \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_I} + D_i(\xi^i L) \quad (1.11)$$

Pour un champ d'évolution v_Q on obtient :

$$v_Q.L = \text{pr } v_Q(L) \quad (1.12)$$

4. Dérivée de Fréchet d'un opérateur différentiel P :

a) Définition : La dérivée de Fréchet de l'opérateur différentiel P de F dans F' est un opérateur différentiel du même ordre que P , noté VP , de VF à valeurs dans VF' et défini, pour toute section u de F et toute section v de VF le long de u , par : pour x dans M ,

$$(VP)(u, v)(x) = \frac{d}{dt} (P(u_t(x)))_{t=0} \quad (1.13)$$

où (u_t) est une famille à un paramètre de sections de F vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_0(x) = u(x) \\ \frac{d}{dt} (u_t(x))_{t=0} = v(x) \end{cases} \quad (1.14)$$

Si P est un opérateur différentiel scalaire sur F , alors VP est un opérateur différentiel scalaire sur VF .

b) Lemme : Soit v_Q un champ d'évolution sur F et P un opérateur différentiel sur F à valeurs dans F' . Alors on peut définir $(VP)(Q)$:

Pour toute section u du fibré $F \xrightarrow{\pi} M$,

$$(VP)(Q)(u) = (VP)(u, v_Q \cdot u) \quad (1.15)$$

et $(VP)(Q)$ est un opérateur différentiel sur F à valeurs dans VF' . On établit alors le lemme suivant, dont on trouvera une démonstration dans [12] sous l'hypothèse d'un fibré F vectoriel.

Lemme (1.4): Si P est un opérateur différentiel sur F et v_Q un champ d'évolution, on a alors

$$(VP)(Q) = \text{pr } v_Q(P). \quad (1.16)$$

H. ADJOINT D'OPERATEURS DIFFERENTIELS LINEAIRES.

Nous allons d'abord introduire la définition pour un opérateur différentiel linéaire puis nous verrons la généralisation à l'adjoint de la dérivée de Fréchet d'un opérateur différentiel.

Considérons un opérateur différentiel linéaire P de F dans F' où $F \xrightarrow{\Pi} M$ et $F' \xrightarrow{\Pi'} M$ sont deux fibrés vectoriels de base M .

On suppose de plus qu'il existe une dualité entre F et F' .

Définition (1.5): On appelle adjoint de l'opérateur linéaire P , l'opérateur différentiel du même ordre que P , noté P^* , de F à valeurs dans F' vérifiant la condition :

pour tout ouvert relativement compact Ω de M , de bord $\partial\Omega$,
pour toutes sections u et v de F s'annulant sur $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} v \cdot (Pu) dx = \int_{\Omega} u \cdot (P^*v) dx \quad (1.17)$$

Sous les hypothèses précédentes, on montre que l'adjoint de P existe et est unique [16]. On a également $(P^*)^* = P$.

Le théorème suivant permet d'obtenir une expression, en cartes locales adaptées, de l'adjoint P^* .

Théorème (1.6) : Soient P un opérateur différentiel linéaire et P^* son adjoint. Pour tout ouvert relativement compact Ω de M , de bord $\partial\Omega$ et pour toutes sections u et v de F s'annulant sur $\partial\Omega$, il existe un opérateur bidifférentiel A sur F , bilinéaire en u et v tel que :

$$v.(Pu) = u.(P^*v) + d_M A(u, v) \quad (1.18)$$

La démonstration, en coordonnées locales, est celle faite par Wells dans le cas d'un fibré vectoriel trivial [16].

Elle consiste à faire des intégrations par parties successives de (1.17) pour obtenir l'expression de l'adjoint.

Ainsi, dans une carte locale adaptée, si P s'écrit

$$(Pu)(x) = \sum_{|I| \geq 0} P_\alpha^I(x) D_I u^\alpha(x) \quad (1.19)$$

alors

$$(P^*v)(x) = \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I (P_\alpha^I(x) v^\alpha(x)) \quad (1.20)$$

pour x appartenant à M .

Adjoint de la dérivée de Fréchet d'un opérateur différentiel P .

Si P est un opérateur différentiel de F dans F' , deux fibrés vectoriels entre lesquels existe une dualité, VP est alors un opérateur différentiel de VF dans $VF' \simeq F' \times F'$ et l'adjoint de VP , noté $(VP)^*$, est l'opérateur différentiel de VF dans VF' vérifiant : pour tout ouvert Ω relativement compact de M , de bord $\partial\Omega$, pour toute section u de F et toutes sections

v et w de VF le long de u, s'annulant sur $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} w.VP(u, v)dx = \int_{\Omega} v.(VP)^*(u, w)dx \quad (1.21)$$

Cette définition généralise la définition (1.5).

Dans une carte locale adaptée, on a les expressions de VP et $(VP)^*$:
pour tout couple de sections (u, v) respectivement de F et VF le long de u
et pour x dans M :

$$VP(u, v)(x) = \sum_{|I| \geq 0} \frac{\partial P}{\partial u_I^\alpha} (u(x)) v_I^\alpha(x). \quad (1.22)$$

d'où

$$(VP)^*(u, v)(x) = \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial P}{\partial u_I^\alpha} (u(x)) v^\alpha(x) \right). \quad (1.23)$$

CHAPITRE II

THEOREME DE NOETHER

A. OPERATEUR D'EULER-LAGRANGE.

Nous allons d'abord rappeler la notion de formes généralisées sur un fibré, qui a été étudiée en particulier dans [8] et [9].

On verra alors que l'opérateur d'Euler-Lagrange peut s'interpréter comme une 1-forme généralisée simple.

1. Généralisation de la notion d'opérateur différentiel sectionnel :

On dit que l'opérateur différentiel P de $F \xrightarrow{\Pi} M$ dans $G \rightarrow J^l F$ est un opérateur différentiel sectionnel d'ordre k avec $k \geq l$ si et seulement si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} J^k F & \xrightarrow{P} & G \\ & \searrow \Pi^k_l & \swarrow \\ & J^l F & \end{array}$$

Pour $l = 0$, $J^0 F = F$ et on retrouve la notion d'opérateur sectionnel déjà introduite.

2. 1-forme généralisée d'ordre (k, l) avec $0 \leq l \leq k$:

Une 1-forme généralisée λ d'ordre (k, l) sur $F \xrightarrow{\Pi} M$ est un opérateur différentiel sectionnel d'ordre k sur F à valeurs dans $G = V^*(J^l F) \otimes \Lambda^n(T^*M) \rightarrow J^l F$.

Ainsi pour toute section u de F et x un point de M , $(\lambda u)(x)$ est une application linéaire sur la fibre au-dessus de $j_x^l u$ du fibré

$V(J^k F) \rightarrow J^k F$, à valeurs dans $\Lambda^n(T^*M)$ et pour tout couple (u, v) de sections, respectivement de F et de VF le long de u , $\lambda(u, v)$ définit une application de M dans $\Lambda^n(T^*M)$.

Dans une carte locale adaptée, si $(x^i, u^\alpha(x))$ représente la section u alors, des coordonnées locales de $j_x^k u$ sont $(x^i, u^\alpha(x), u_I^\alpha(x))$ où I est un multi-indice tel que $0 \leq |I| \leq k$ et des coordonnées locales de v , section de VF le long de u sont $(x^i, u^\alpha(x), v^\alpha(x))$. $\lambda(u, v)$ s'exprime alors par :

$$\lambda(u, v)(x) = \sum_{\substack{I, \alpha \\ 0 \leq |I| \leq k \\ \alpha = 1 \text{ à } q}} \lambda_\alpha^I(u(x)) v_I^\alpha(x), \quad (2.1)$$

où chaque λ_α^I est un opérateur différentiel local d'ordre k sur F dans $\Lambda^n(T^*M)$.

3. 1-forme généralisée simple :

Une 1-forme généralisée λ d'ordre $(k, 0)$ est dite simple. Dans une carte locale adaptée, on aura donc :

$$\lambda(u, v)(x) = \sum_{\alpha=1}^q \lambda_\alpha(u(x)) v^\alpha(x), \quad (2.2)$$

où chaque λ_α est un opérateur différentiel local d'ordre k de F dans $\Lambda^n(T^*M)$. Ayant introduit ces différentes notions, nous pouvons définir l'opérateur d'Euler-Lagrange.

4. Définition de l'opérateur d'Euler-Lagrange :

Sur le fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$ on considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des lagrangiens sur F et l'ensemble $\Omega^0(F)$ des 1-formes généralisées simples sur F .

L'opérateur d'Euler-Lagrange, noté $\frac{\delta}{\delta u}$, est un opérateur de $\mathcal{L}$ dans $\Omega^0(F)$, défini, en coordonnées locales adaptées par :

$$\frac{\delta L}{\delta u}(u; v)(x) = \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u(x)) v^\alpha(x) \quad (2.3)$$

pour x dans M , u une section de F et v une section de VF le long de u .

$\frac{\delta L}{\delta u}$ est appelée dérivée variationnelle de L ou dérivée d'Euler-Lagrange de L .

Pour $\alpha = 1, 2, \dots, q$, $(\frac{\delta L}{\delta u^\alpha})$ est un opérateur différentiel local sur F dans $\Lambda^n(T^*M)$ et :

$$(\frac{\delta L}{\delta u^\alpha})(u) = \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha})(u). \quad (2.4)$$

Si L est d'ordre k sur F , $\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}$ sera alors d'ordre $2k$ et la dérivée variationnelle de L sera une 1-forme généralisée simple d'ordre $2k$.

On pourra trouver, dans les travaux de Guil Guerrero et Martinez Alonso une généralisation de cette notion de dérivée variationnelle [3].

On établit à présent le lemme suivant, qui découle directement de la définition de la dérivée variationnelle.

5. Lemme (2.1): Soit β un courant sur F . On a alors

$$\frac{\delta}{\delta u}(d_M \beta) \equiv 0. \quad (2.5)$$

Preuve : Si β est d'ordre $(k-1)$, $d_M \beta$ est d'ordre k sur F à valeurs dans $\Lambda^n(T^*M)$.

Dans une carte locale adaptée on a, pour $\alpha = 1, \dots, q$,

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha}(d_M \beta) = \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I(\frac{\partial d_M \beta}{\partial u_I^\alpha}).$$

Or β s'écrit :

$$\beta(u) = \sum_{i=1}^n (-1)^i B^i(u) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

donc $d_M \beta = \sum_{\ell=1}^n D_\ell B^\ell$ et $\frac{\delta}{\delta u^\alpha} (d_M \beta)$ s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u^\alpha} (d_M \beta) &= \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial}{\partial u_I^\alpha} \left(\sum_{\ell=1}^n D_\ell B^\ell \right) \right) = \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial (D_\ell B^\ell)}{\partial u_I^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Nous utilisons alors les égalités suivantes :

pour $|I| = 0$, $\frac{\partial (D_\ell B^\ell)}{\partial u^\alpha} = D_\ell \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u^\alpha} \right)$

pour $|I| \geq 1$, $\frac{\partial (D_\ell B^\ell)}{\partial u_I^\alpha} = D_\ell \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_{I \setminus \ell}^\alpha} \right) + \frac{\partial B^\ell}{\partial u_{I \setminus \ell}^\alpha}$ où $I \setminus \ell$ désigne le nouveau multi-

indice $(i_1, \dots, i_{\ell-1}, \dots, i_n)$ si $I = (i_1, \dots, i_n)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial (D_\ell B^\ell)}{\partial u_I^\alpha} \right) &= D_\ell \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u^\alpha} \right) + \sum_{|I| \geq 1} (-1)^{|I|} D_I D_\ell \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_I^\alpha} \right) + \\ &+ \sum_{|I| \geq 1} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_{I \setminus \ell}^\alpha} \right). \end{aligned}$$

On effectue alors le changement d'indice $J = (i_1, \dots, i_{\ell+1}, \dots, i_n)$ si

$I = (i_1, \dots, i_n)$. On a alors

$$\sum_{|I| \geq 1} (-1)^{|I|} D_I D_\ell \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_I^\alpha} \right) = \sum_{|J| \geq 2} -(-1)^{|J|} D_J \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_{J \setminus \ell}^\alpha} \right).$$

De plus, comme $D_J = D_I D_\ell$ on déduit $D_J = D_\ell$ si $|J| = 1$. Ainsi on peut écrire

$D_\ell \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u^\alpha} \right)$ sous la forme suivante : $-(-1)^{|J|} D_J \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_{J \setminus \ell}^\alpha} \right)$ avec $|J| = 1$.

Finalement, rassemblant les résultats, on obtient :

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} (d_M \beta) = \sum_{\ell=1}^n \left\{ - \sum_{|J| \geq 1} (-1)^{|J|} D_J \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_{J \setminus \ell}^\alpha} \right) + \sum_{|I| \geq 1} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial B^\ell}{\partial u_{I \setminus \ell}^\alpha} \right) \right\} \equiv 0.$$

D'où $\frac{\delta}{\delta u} (d_M \beta) \equiv 0$ ce qui termine la démonstration.

6. Théorème (2.2) : Nous allons énoncer un théorème sur la dérivée de Fréchet de la dérivée variationnelle, qui permettra ensuite d'établir un résultat fondamental de notre étude. La démonstration se fait en cartes locales, ce qui permet de se ramener au cas d'un fibré vectoriel trivial dont Olver donne une démonstration [12].

Enoncé du théorème :

Soit $L \in \mathcal{L}$, d'ordre k et $\frac{\delta L}{\delta u} \in \Omega^0(F)$ d'ordre $2k$, sur un fibré vectoriel F .

Soit $V \frac{\delta L}{\delta u}$ la dérivée de Fréchet de $\frac{\delta L}{\delta u}$ (qui est un opérateur différentiel de VF dans $V(V^* F \otimes \Lambda^n(T^* M))$).

Alors la dérivée de Fréchet de la dérivée variationnelle est un opérateur différentiel auto-adjoint, c'est-à-dire :

$$(V(\frac{\delta L}{\delta u}))^* = V(\frac{\delta L}{\delta u}) \quad (2.6)$$

On peut remarquer que la réciproque de ce théorème, dans le cas d'un fibré non trivial, n'est vraie que localement.

Nous établissons maintenant un théorème qui donne une relation liant la dérivée de Fréchet et la dérivée variationnelle.

7. Théorème (2.3) : Soit L un lagrangien d'ordre k sur F .

Soient $\frac{\delta L}{\delta u}$ la dérivée variationnelle de L et $V L$ la dérivée de Fréchet de L .

Alors, il existe une 1-forme généralisée d'ordre $(2k-1, k-1)$ sur F , à valeurs dans $\Lambda^{n-1}(T^*M)$, notée FL et appelée transformation de Legendre associée à L telle que : pour tout couple (u, v) de sections, respectivement de F et de VF le long de u , on ait :

$$VL(u, v) = \frac{\delta L}{\delta u}(u, v) + d_M(FL(u, v)). \quad (2.7)$$

Preuve : Nous l'établirons en coordonnées locales adaptées. Soient u une section et v_Q un champ d'évolution. D'après le lemme (1.4) :

$$VL(u, v_Q \cdot u) = VL(Q)(u) = \text{pr } v_Q(L)(u);$$

donc, en cartes locales adaptées :

$$VL(Q)(u) = \sum_{|I| \geq 0} D_I(Q^\alpha) \cdot \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha}(u) \quad (2.8)$$

Chaque $\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha}$ est un opérateur différentiel local d'ordre k sur F . Ainsi, localement, $VL(Q)(u)$ s'interprète comme une 1-forme généralisée d'ordre (k, k) sur F à valeurs dans $V^*(J^k_F) \otimes \Lambda^n(T^*M)$.

Dans une carte locale adaptée, si v est une section de VF le long de u , on a :

$$\frac{\delta L}{\delta u}(u; v) = \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) v^\alpha.$$

Donc

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u, v_Q \cdot u) = \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) Q^\alpha(u) = \sum_{\alpha=1}^q \sum_{|I| \geq 0} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha}(u) \right) Q^\alpha(u) \quad (2.9)$$

Introduisons encore les notations suivantes : pour $j = 1, \dots, n$ on pose $e_j = (0, \dots, \underset{j\text{ème place}}{1}, 0, \dots, 0)$ et $|e_j| = 1$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $p.e_j = (0, \dots, p, 0, \dots, 0)$

avec $|p.e_j| = p$, pour $I = (i_1, \dots, i_n)$, si $i_j \neq 0$ alors on pourra écrire D_I sous la forme $D_I = D_{e_j} D_{I \setminus e_j}$ où $I \setminus e_j$ désigne le nouveau multi-indice

$(i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n)$, et pour $i_j \geq p$, $D_I = D_{p.e_j} D_{I \setminus p.e_j}$ avec

$$D_{p.e_j} = \underbrace{D_{e_j} D_{e_j} \dots D_{e_j}}_{p \text{ fois}}$$

Pour I multi-indice d'ordre supérieur ou égal à 1, transformons l'expression : $\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I(Q^\alpha)$.

$$\begin{aligned} \text{a) si } i_1 \neq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I(Q^\alpha) &= \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \times D_{e_1} D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) \\ &= - D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \times D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) + D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \times D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) \right\} . \end{aligned}$$

$I \setminus e_1$ désignant le nouveau multi-indice $(i_1-1, i_2, \dots, i_n)$. Si $i_1-1 \neq 0$ on continue l'opération, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I(Q^\alpha) &= - D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{e_1} D_{I \setminus 2e_1} (Q^\alpha) + D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) \right\} \\ &= D_{2e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus 2e_1} (Q^\alpha) + D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) \right\} \\ &\quad - D_{e_1} \left\{ D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus 2e_1} (Q^\alpha) \right\} \\ &= D_{2e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus 2e_1} (Q^\alpha) + D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) - D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus 2e_1} (Q^\alpha) \right\} \end{aligned}$$

Considérons le nouveau multi-indice $I \setminus 2e_1 = (i_1-2, i_2, \dots, i_n)$

- si $i_1-2 = 0$ on a terminé.

- sinon, on continue l'opération jusqu'à l'ordre p tel que $i_1-p = 0$.

Ainsi rassemblant les résultats on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I(Q^\alpha) &= (-1)^{i_1} D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1}(Q^\alpha) \\ &+ D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_{I \setminus e_1}(Q^\alpha) - D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \times D_{I \setminus 2e_1}(Q^\alpha) + D_{2e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus 3e_1}(Q^\alpha) \right. \\ &+ \dots + \dots + (-1)^{(i_1-1)} D_{(i_1-1) e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \times D_{I \setminus i_1 e_1}(Q^\alpha) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Le nouveau multi-indice obtenu $I \setminus i_1 e_1 = (0, i_2, \dots, i_n)$ ne fait plus apparaître la variable x^1 .

Si $i_1 = 0$ alors on passe directement à l'étape suivante :

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{\text{si}} \quad i_2 \neq 0 \quad \text{alors} \quad & D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1}(Q^\alpha) \\ &= D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \cdot D_{e_2} D_{I \setminus i_1 e_1 + e_2}(Q^\alpha) \\ &= -D_{e_2} \left(D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + e_2}(Q^\alpha) \\ &+ D_{e_2} \left\{ D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + e_2}(Q^\alpha) \right\} \\ &= -D_{i_1 e_1 + e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + e_2}(Q^\alpha) \\ &+ D_{e_2} \left\{ D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + e_2}(Q^\alpha) \right\} \end{aligned}$$

pour le nouveau multi-indice $I \setminus i_1 e_1 + e_2 = (0, i_2-1, i_3, \dots, i_n)$.

- si $i_2 - 1 = 0$, on a alors terminé la seconde étape .

- si $i_2 - 1 \neq 0$, on continue alors l'opération jusqu'à l'ordre p tel

que $i_2 - p = 0$.

Ainsi, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1} (Q^\alpha) &= (-1)^{i_2} D_{i_1 e_1 + i_2 e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + i_2 e_2} (Q^\alpha) \\ + D_{e_2} \left\{ D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \times D_{I - i_1 e_1 + e_2} (Q^\alpha) - D_{i_1 e_1 + e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + 2e_2} (Q^\alpha) \right. \\ + \dots + (-1)^{i_2 - 1} D_{i_1 e_1 + (i_2 - 1)e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + i_2 e_2} (Q^\alpha) \Big\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I (Q^\alpha) &= (-1)^{i_1 + i_2} D_{i_1 e_1 + i_2 e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + i_2 e_2} (Q^\alpha) \\ + D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_{I - e_1} (Q^\alpha) - D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - 2e_1} (Q^\alpha) + \dots + \right. \\ + (-1)^{i_1 - 1} D_{(i_1 - 1)e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1} (Q^\alpha) \Big\} \\ + (-1)^{i_1} D_{e_2} \left\{ D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + e_2} (Q^\alpha) \right. \\ - D_{i_1 e_1 + e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + 2e_2} (Q^\alpha) \\ + \dots + (-1)^{i_2 - 1} D_{i_1 e_1 + (i_2 - 1)e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I - i_1 e_1 + i_2 e_2} (Q^\alpha) \Big\}. \end{aligned}$$

Si $i_2 = 0$, on passe alors à l'étape suivante :

c) On effectue donc la même opération successivement sur chaque indice

i_j non nul pour j de 1 à n . On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I(Q^\alpha) &= (-1)^{|I|} D_{i_1 e_1 + \dots + i_n e_n} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + \dots + i_n e_n} (Q^\alpha) + \\
 &+ D_{e_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_{I \setminus e_1} (Q^\alpha) - D_{e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus 2e_1} (Q^\alpha) + \dots + \right. \\
 &+ (-1)^{i_1 - 1} D_{(i_1 - 1)e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1} (Q^\alpha) \Big\} \\
 &+ (-1)^{i_1} D_{e_2} \left\{ D_{i_1 e_1} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + e_2} (Q^\alpha) - D_{i_1 e_1 + e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \right. \\
 &D_{I \setminus i_1 e_1 + 2e_2} (Q^\alpha) + \dots + (-1)^{i_2 - 1} D_{i_1 e_1 + (i_2 - 1)e_2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \\
 &D_{I \setminus i_1 e_1 + i_2 e_2} (Q^\alpha) \Big\} + \dots + \dots + \dots \\
 &+ (-1)^{i_1 + \dots + i_{n-1}} D_{e_n} \left\{ D_{i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{I \setminus i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + e_n} (Q^\alpha) \right. \\
 &- D_{i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + e_n} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \times \\
 &\times D_{I \setminus i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + 2e_n} (Q^\alpha) + \dots + \dots + \\
 &(-1)^{i_n - 1} D_{i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + (i_n - 1)e_n} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \\
 &D_{I \setminus i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + i_n e_n} (Q^\alpha) \Big\} .
 \end{aligned}$$

Comme $i_1 e_1 + \dots + i_n e_n = I$, on peut écrire l'expression précédente sous la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} D_I(Q^\alpha) = (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) Q^\alpha + D_{e_1} B^1 + D_{e_2} B^2 + \dots + D_{e_n} B^n .$$

avec la convention $B^j = 0$ si $i_j = 0$ et pour j de 1 à n on a :

$$B^j = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_{j-1}} \left\{ D_{i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \right. \\ D_I \sim i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + e_j \quad (Q^\alpha) + \dots \\ \dots + (-1)^{i_1+j-1} D_{i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + (i_j-1) e_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \\ \left. D_I \sim i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + i_j e_j \quad (Q^\alpha) \right\}.$$

Le terme $D_{e_1} B^1 + \dots + D_{e_n} B^n$ est égal à $d_M \beta$ où la $(n-1)$ forme β est définie par $\beta(u) = \int_{i=1}^n (-1)^i B^i(u) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n$. On obtient alors le résultat :

$$VL(Q)(u) = \frac{\delta L}{\delta u} (u, v_Q \cdot u) + d_M(\beta(u, v_Q \cdot u)).$$

Chaque composante B^j est linéaire en Q^α et ses dérivées totales jusqu'à l'ordre $(k-1)$.

Chaque opérateur différentiel local sur F ,

$$D_{i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + (i_n-1) e_n} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \text{ est d'ordre } 2k-1 \text{ car, pour } |I| = k, \text{ on a} \\ |I \setminus e_1| = k-1 \text{ et } |i_1 e_1 + \dots + i_{n-1} e_{n-1} + (i_n-1) e_n| = k-1.$$

Ainsi β s'interprète comme une 1-forme généralisée d'ordre $(2k-1, k-1)$ sur F à valeurs dans $\Lambda^{n-1}(T^*M)$.

Cette 1-forme généralisée dépend du Lagrangien L , on la note FL et on a alors

$$VL(u, v_Q \cdot u) = \frac{\delta L}{\delta u} (u, v_Q \cdot u) + d_M(FL(u, v_Q \cdot u))$$

pour toute section u et tout champ d'évolution v_Q , ce qui termine la démonstration.

On remarque que le choix des étapes successives dans la démonstration étant arbitraire, la transformation de Legendre, pour un Lagrangien donné, n'est pas unique en général. C'est pourquoi on en trouvera plusieurs expressions dans la littérature parue dans ce domaine. Ibragimov et Khamitova donnent une forme de la transformation de Legendre [4] et [5] qui n'est valable que pour un lagrangien du premier ordre. Deux autres formes sont données par Martinez Alonso [3] et T. Tsujishita [14].

La démonstration du théorème (2.3) fournit une expression, en cartes locales adaptées des composantes de la $(n-1)$ -forme $FL(u, v_Q.u)$. Ceci permettra dans la suite, grâce au théorème de Noether, d'obtenir une expression d'une loi de conservation pour un système différentiel d'Euler-Lagrange. Dans une carte locale adaptée : $FL(u, v_Q.u) = \sum_{j=1}^n (-1)^j (FL(u, v_Q.u))^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n$ et

$$(FL(u, v_Q.u))^j = \sum_{|I| \geq 1} (-1)^{\sum_{s=1}^{j-1} i_s} \times \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^s D_{i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + s e_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) D_{i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + (s+1) e_j} (Q^\alpha) \quad (2.10)$$

avec $I = (i_1, \dots, i_n)$.

Les résultats des théorèmes précédents nous permettent d'établir le théorème suivant :

8. Théorème (2.4) : Soit $F \xrightarrow{\Pi} M$ un fibré vectoriel.

Soient L un Lagrangien d'ordre k sur F , $\frac{\delta L}{\delta u}$ la dérivée variationnelle de L et v_Q un champ d'évolution.

On a alors

$$\frac{\delta}{\delta u} (\text{pr } v_Q(L)) = \text{pr } v_Q\left(\frac{\delta L}{\delta u}\right) + (v_Q)^*\left(\frac{\delta L}{\delta u}\right) \quad (2.11)$$

Preuve : Nous l'établirons en coordonnées locales adaptées.

Soit u une section du fibré F . D'après le lemme (1.4) et le théorème (2.3) on :

$$VL(u, v_Q \cdot u) = (\text{pr } v_Q L)(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u, v_Q \cdot u) + d_M(FL(u, v_Q \cdot u)).$$

On applique l'opérateur d'Euler-Lagrange aux deux membres de l'égalité précédente, et utilisant le lemme (2.1) on obtient :

$$\frac{\delta}{\delta u} (\text{pr } v_Q L)(u) = \frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{\delta L}{\delta u}(u, v_Q \cdot u) \right) \quad (a)$$

Dans une carte locale adaptée

$$\frac{\delta L}{\delta u} (u, v_Q \cdot u) = \sum_{\alpha=1}^q \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} (u) \quad Q^\alpha(u) \quad ;$$

où chaque $\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}$ est un opérateur différentiel local sur F dans $\Lambda^n(T^*M)$. On pose alors $L_1(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u, v_Q \cdot u)$. Et L_1 peut s'interpréter comme un lagrangien sur F d'ordre $2k$.

Pour toute section w de VF le long de u , on peut donc définir $\frac{\delta L_1}{\delta u}(u, w)$ qui est la dérivée d'Euler-Lagrange de L_1 . On a donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{\delta L}{\delta u}(u, v_Q \cdot u) \right)(w) &= \frac{\delta L_1}{\delta u}(u, w) = \sum_{\beta=1}^q \frac{\delta L_1}{\delta u^\beta}(u) w^\beta \\
 &= \sum_{\beta=1}^q w^\beta \times \sum_{\substack{I \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\delta L_1}{\delta u_I^\beta} \right) \\
 &= \sum_{\beta=1}^q w^\beta \sum_{\substack{I \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \left(\sum_{\alpha} \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) Q^\alpha \right) \right) \\
 &= \sum_{\beta=1}^q w^\beta \sum_{\substack{I \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} D_I \left\{ \sum_{\alpha=1}^q Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \left(\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) \right) + \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) \frac{\partial Q^\alpha}{\partial u_I^\beta} \right\} \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\substack{I \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} w^\beta D_I \left(Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u_I^\beta} \left(\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) \right) \right) + \\
 &\quad \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\substack{I \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} w^\beta D_I \left(\frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) \frac{\partial Q^\alpha}{\partial u_I^\beta} \right),
 \end{aligned}$$

cette égalité étant vraie pour toute section u de $F \xrightarrow{\Pi} M$ et toute section w de VF le long de u .

D'autre part, pour toute section u de $F \xrightarrow{\Pi} M$ et w section de VF le long de u , on a :

$$(vQ) \left(\frac{\delta L}{\delta u}(u) \right)(w) = \sum_{\beta=1}^q \sum_{\substack{I \\ |I| \geq 0}} \frac{\delta L}{\delta u^\alpha}(u) \frac{\partial Q^\beta}{\partial u_I^\alpha} w^\beta.$$

Donc l'adjoint s'écrit :

$$(VQ)^* \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) (w) = \sum_{\beta=1}^q \sum_{\substack{\alpha \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} w^\beta.$$

De même :

$$\left(V \frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) (Q) (w) = \sum_{\beta=1}^q \sum_{\substack{\alpha \\ |I| \geq 0}} D_I (Q^\alpha (u)) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\delta L}{\delta u^\beta} (u) \right) w^\beta$$

d'où l'expression de l'adjoint :

$$\left(V \frac{\delta L}{\delta u} (u) \right)^* (Q) (w) = \sum_{\beta=1}^q \sum_{\substack{\alpha, I \\ |I| \geq 0}} (-1)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} (u) \right) \right) Q^\alpha w^\beta.$$

Ainsi, pour toute section w de VF le long de u , on a l'égalité :

$$\frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u, v_Q \cdot u) \right) (w) = (VQ)^* \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) (w) + \left(V \frac{\delta L}{\delta u} (u) \right)^* (Q) (w).$$

Donc

$$\frac{\delta}{\delta u} \left[\frac{\delta L}{\delta u} (u, v_Q \cdot u) \right] = (VQ)^* \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) + \left(V \frac{\delta L}{\delta u} (u) \right)^* (Q) \quad (b)$$

ceci étant vrai pour toute section u de $F \xrightarrow{\Pi} M$.

D'après le théorème (2.2), $\left(V \frac{\delta L}{\delta u} \right)^* = \left(V \frac{\delta L}{\delta u} \right)$. Ainsi (a) et (b)

fournissent :

$$\frac{\delta}{\delta u} (\text{pr } v_Q(L)(u)) = (VQ)^* \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) + \left(V \frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) (Q),$$

et utilisant le lemme (1.4) on obtient finalement :

$$\frac{\delta}{\delta u} (\text{pr } v_Q(L)(u)) = \text{pr } v_Q \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u) \right) + (VQ)^* \left(\frac{\delta L}{\delta u} (u) \right)$$

pour toute section u du fibré F , ce qui termine la démonstration.

B. SYMETRIES ET LOIS DE CONSERVATION.

1. Système différentiel :

Soit Δ un opérateur différentiel sur le fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$, à valeurs dans un fibré vectoriel $F' \xrightarrow{\Pi'} M$.

On appelle système différentiel (associé à l'opérateur Δ) l'équation $\Delta u = 0$.

Toute section u de F vérifiant $\Delta u = 0$ est appelée solution du système différentiel.

2. Système d'Euler-Lagrange :

On dira que le système différentiel ($\Delta u = 0$) est un système d'Euler-Lagrange si et seulement s'il existe un Lagrangien L sur F tel que

$$\Delta(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u)$$

pour toute section u de F .

3. Conditions de non dégénérescence d'un système différentiel :

Dans ce paragraphe, nous énonçons les hypothèses de régularité d'un système différentiel, qui seront utilisées pour établir les théorèmes qui suivront. Ces conditions de non dégénérescence sont étudiées par Olver [12]. Nous nous contenterons ici de rappeler les résultats essentiels, énoncés dans le cas de fibrés triviaux $F = \mathbb{R}^q \times M \rightarrow M$ et $F' = \mathbb{R}^{q'} \times M \rightarrow M$ et qui s'étendent au cas d'un fibré vectoriel.

Soit ($\Delta u = 0$) un système différentiel d'ordre k sur F . Ici $\Delta u = (\Delta_1 u, \dots, \Delta_q u)$.

On appelle solution ponctuelle de ($\Delta u = 0$) tout élément de la forme : (x_0, u_0, u_{0I}) qui vérifie $\Delta(x_0, u_0, u_{0I}) = \Delta[u_0] = 0$ avec $x_0 \in M$, $u_0 \in \mathbb{R}^q$ et $I = (i_1, \dots, i_n)$ où $0 < |I| \leq k$.

Système localement résoluble :

Le système $(\Delta[u] = 0)$ est dit localement résoluble au point

(x_0, u_0, u_{0I}) , solution ponctuelle du système, si et seulement si il existe une section $u = u(x)$ dans un voisinage de x_0 qui soit une solution du système et qui vérifie les conditions :

$$\begin{cases} (u_{0I}) = j_{x_0}^l u, & I \text{ multi-indice tel que } |I| \leq l, \text{ pour } l \text{ variant de } 1 \text{ à } k, \\ u_0 = u(x_0) \end{cases}$$

Un système $(\Delta u = 0)$ localement résoluble en tout point solution ponctuelle du système est dit localement résoluble.

Système de rang maximal :

Le système $(\Delta[u] = 0)$ est de rang maximal au point (x_0, u_0, u_{0I}) , solution ponctuelle du système si et seulement si le rang de la matrice

$$\left(\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial u_\beta} (x_0, u_0, u_{0I}) \right) \text{ est maximal.}$$

Un système $(\Delta u = 0)$ de rang maximal en tout point solution ponctuelle du système est dit de rang maximal.

Système non dégénéré :

Un système est dit non dégénéré si et seulement si en tout point solution ponctuelle du système, il est localement résoluble et de rang maximal.

Prolongement d'un système différentiel :

On appelle prolongement d'ordre l du système différentiel $(\Delta u = 0)$, le nouveau système différentiel d'ordre $(k+l)$, noté $(\Delta^{(l)}(u) = 0)$, et défini par :

$$\Delta^{(\ell)} u = \{D_J(\Delta u) / J \text{ multi-indice avec } 0 \leq |J| \leq \ell\}$$

Le système différentiel $(\Delta^{(\ell)} u = 0)$ contient donc le système différentiel initial $(\Delta u = 0)$ et on établit immédiatement le lemme suivant, qui résulte directement de la définition du prolongement d'un système.

Lemme (2.5): Si u est une solution du système différentiel $(\Delta u = 0)$, alors u est aussi une solution de son prolongement d'ordre ℓ , $(\Delta^{(\ell)} u = 0)$, pour tout entier ℓ .

Système totalement non dégénéré :

Le système $(\Delta u = 0)$ est dit totalement non dégénéré si et seulement si, le système initial et tous ses prolongements $(\Delta^{(\ell)} u = 0)$, pour un ordre ℓ quelconque, sont non dégénérés.

4. Symétrie d'un système différentiel :

Définition (2.6): Le champ de vecteurs généralisé v sur F est une symétrie du système $(\Delta(u) = 0)$ si et seulement si, pour toute solution u de $(\Delta u = 0)$ on a :

$$(\text{pr } v. \Delta)(u) = 0 \quad (2.12)$$

Théorème (2.7): Soient v un champ de vecteurs généralisé et v_Q sa forme d'évolution. On a alors l'équivalence entre i) et ii) :

- i) v est une symétrie de $(\Delta u = 0)$.
- ii) v_Q est une symétrie de $(\Delta u = 0)$.

Preuve : Nous l'établirons en cartes locales adaptées : elle est basée sur la relation entre $\text{pr } v$ et $\text{pr } v_Q$. Le champ v s'écrit

$$\xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \text{ et } v_Q \text{ s'écrit } Q^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \text{ avec } Q^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j D_j u^\alpha.$$

Alors $\text{pr } v = v + \sum_{|I| \geq 1} \eta_I^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$, où $\eta_I^\alpha = D_I(Q^\alpha) + \xi^j D_j u_I^\alpha$ et

$$\text{pr } v_Q = Q^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{|I| \geq 1} D_I(Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}.$$

On obtient donc, par différence : $\text{pr } v - \text{pr } v_Q = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{|I| \geq 0} \xi^j D_j (u_I^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_I^\alpha}$,

c'est-à-dire

$$\text{pr } v - \text{pr } v_Q = \xi^j D_j. \quad (2.13)$$

On a alors $(\text{pr } v \Delta)(u) - (\text{pr } v_Q \Delta)(u) = \xi^j D_j \Delta(u)$ et, pour u solution du système $(\Delta u = 0)$, le second membre $\xi^j D_j \Delta(u) = 0$. Ainsi, sur les solutions u du système, on a $(\text{pr } v \Delta)(u) = (\text{pr } v_Q \Delta)(u)$ d'où l'équivalence annoncée.

Lemme (2.8) : L'ensemble des symétries d'un système différentiel $(\Delta u = 0)$ forme une algèbre de Lie, notée $\mathcal{H}$, pour le crochet de Lie de deux champs de vecteurs généralisés.

Preuve : Si v et w sont deux symétries du système $(\Delta u = 0)$, on forme $\text{pr}([v, w]) \Delta(u) = [\text{pr } v, \text{pr } w] \Delta(u) = \text{pr } v(\text{pr } w \Delta)(u) - \text{pr } w(\text{pr } v \Delta)(u)$. Donc, si u est une solution de $(\Delta u = 0)$, on a alors $(\text{pr}([v, w]) \Delta)(u) = 0$ et $[v, w]$ est donc une symétrie de $(\Delta u = 0)$.

5. Symétrie variationnelle:

Définition (2.9) : Soit $\Delta u = 0$ un système différentiel d'Euler-Lagrange $\Delta u = \frac{\delta L}{\delta u}(u)$. Le champ de vecteurs généralisé v sur F est une symétrie variationnelle du système $\Delta u = 0$ si et seulement s'il existe un courant β sur F tel que l'on ait :

$$v.L = \text{pr } v_Q(L) + d_M(i_{v_M} L) = d_M \beta \quad (2.14)$$

Pour un champ d'évolution v_Q , la formule (2.14) devient :

$$v_Q.L = \text{pr } v_Q(L) = d_M \beta \quad (2.15)$$

Théorème (2.10) : Soient v un champ de vecteurs généralisé et v_Q sa forme d'évolution. On a l'équivalence entre i) et ii) :

- i) v est une symétrie variationnelle de $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$.
- ii) v_Q est une symétrie variationnelle de $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$.

Preuve : Par définition, on a : $v.L = \text{pr } v_Q(L) + d_M(i_{v_M} L)$. On obtient ainsi une relation entre $v.L$ et $v_Q.L$:

$$v.L - v_Q.L = d_M(i_{v_M} L) \quad (2.16).$$

Ainsi, si $v.L = d_M \beta$ pour un certain courant β sur F , on aura $v_Q.L = d_M(\beta - i_{v_M} L) = d_M \tilde{\beta}$ et réciproquement, d'où le théorème.

Lemme (2.11) : L'ensemble des symétries variationnelles d'un système différentiel d'Euler-Lagrange $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$ forme une algèbre de Lie, notée $\mathcal{K}_L$, pour le crochet de Lie de deux champs de vecteurs généralisés.

Preuve : Le théorème précédent nous permet de faire la démonstration avec deux symétries variationnelles d'évolution v_Q et v_R du système $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$, vérifiant : $v_Q.L = d_M \beta_1$ et $v_R.L = d_M \beta_2$. On forme :

$$\begin{aligned} [v_Q, v_R].L &= \text{pr}([v_Q, v_R]).L \\ &= [\text{pr } v_Q, \text{pr } v_R].L = \text{pr } v_Q(\text{pr } v_R.L) - \text{pr } v_R(\text{pr } v_Q.L) \\ &= \text{pr } v_Q(d_M \beta_2) - \text{pr } v_R(d_M \beta_1) = d_M(\text{pr } v_Q \beta_2 - \text{pr } v_R \beta_1) \end{aligned}$$

par le lemme (1.2). Donc $[v_Q, v_R]$ est une symétrie variationnelle du système $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$.

Nous pouvons établir à présent un théorème qui donne une relation entre symétries et symétries variationnelles d'un système différentiel d'Euler-Lagrange.

Théorème (2.12) : Toute symétrie variationnelle d'un système d'Euler-Lagrange $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$ est une symétrie de ce système.

Preuve : Soit une symétrie variationnelle du système $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$, que l'on peut prendre d'évolution (théorème 2.10). On la note v_Q .

Ainsi, il existe un courant β sur F tel que $v_Q.L = \text{pr } v_Q(L) = d_M \beta$. Alors, utilisant le théorème (2.4) et le lemme (2.1), on obtient :

$$\text{pr } v_Q(\frac{\delta L}{\delta u}) + (v_Q)^*(\frac{\delta L}{\delta u}) \equiv 0.$$

Sur les solutions u du système $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$, on a donc $(v_Q)^*(\frac{\delta L}{\delta u})(u) = 0$ d'où $\text{pr } v_Q(\frac{\delta L}{\delta u})(u) = 0$ pour u solution du système, ce qui termine la démonstration.

On peut remarquer que la réciproque du théorème (2.12) est fautive en général. On en verra des contre-exemples dans le chapitre IV, en étudiant des équations différentielles particulières.

6. Lois de conservation :

Définition (2.13) : Un courant β sur F est une loi de conservation pour le système différentiel $(\Delta u = 0)$ si et seulement si, pour tout solution u de $(\Delta u = 0)$, on a

$$d_M \beta(u) = 0. \quad (2.17)$$

Loi de conservation triviale :

Une loi de conservation v est dite triviale pour le système différentiel $(\Delta u = 0)$ si et seulement si l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :

- i) $d_M v \equiv 0$; v sera alors une loi triviale de "première espèce"
- ii) v s'annule sur les solutions u de $(\Delta u = 0)$.
 v sera alors une loi triviale de "deuxième espèce".

Lois de conservation équivalentes :

Deux lois de conservation pour le même système différentiel sont dites équivalentes si et seulement si leur différence est une loi triviale.

Caractéristique d'une loi de conservation :

On se place dans le cas d'un opérateur différentiel Δ de F à valeurs dans le fibré vectoriel $F' \xrightarrow{\pi'} M$.

Soit β une loi de conservation pour le système différentiel ($\Delta u = 0$).

Si il existe un opérateur différentiel Q sur F , à valeurs dans $F'^* \otimes \Lambda^n(T^*M)$ tel que

$$d_M \beta = Q \cdot \Delta, \quad (2.18)$$

(où $\cdot$ désigne la dualité de F'^* avec F'), on dira que Q est une caractéristique de la loi de conservation β .

Cette condition signifie que pour toute section u de F , on a $d_M \beta(u) = Q(u) \cdot \Delta(u)$. On énonce alors le théorème suivant, dont une démonstration est faite par Olver, [12], dans le cas d'un fibré vectoriel trivial $M \times \mathbb{R}^q \rightarrow M$.

Théorème (2.14) : Toute loi de conservation d'un système différentiel ($\Delta u = 0$) totalement non dégénéré est équivalente à une loi de conservation qui possède une caractéristique.

Ce théorème permettra par la suite de travailler avec des lois de conservation possédant une caractéristique, en se plaçant sur les classes d'équivalence de lois de conservation.

On peut aussi remarquer que le système différentiel ($\Delta u = 0$) doit être totalement non dégénéré pour la validité du théorème.

Dans le cas où Δ est la dérivée d'Euler-Lagrange $\frac{\delta L}{\delta u}$, qui est une 1-forme généralisée simple sur F , on a $F' = V^*F \otimes \Lambda^n(T^*M)$; par conséquent un

opérateur de F à valeurs dans $F'^* \otimes \Lambda^n(T^*M)$ s'identifie à un opérateur de F dans VF , donc à un champ d'évolution.

Ainsi, une caractéristique Q de la loi de conservation β est un champ d'évolution v_Q et on a alors pour toute section u du fibré F :

$$Q(u) \cdot \Delta(u) = Q(u) \cdot \frac{\delta L}{\delta u}(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u) \cdot Q(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u, v_Q \cdot u).$$

Nous pouvons maintenant énoncer une des formes du théorème de Noether [11].

C. THEOREME DE NOETHER.

1. Enoncé du théorème de Noether (2.15) :

Soit $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$ un système différentiel d'Euler-Lagrange.

Soit v_Q une symétrie variationnelle du système. Il existe donc un courant β sur F tel que $v_Q \cdot L = d_M \beta$.

Alors le courant v sur F défini par :

$$v = FL(v_Q) - \beta \quad (2.19)$$

est une loi de conservation pour le système.

On dit que v est une loi de conservation associée à la symétrie variationnelle v_Q . La transformation de Legendre FL n'étant pas unique (voir la démonstration du théorème (2.3)), plusieurs lois de conservation peuvent être associées à la même symétrie variationnelle mais on montrera dans la suite que ces lois sont toutes équivalentes entre elles.

Vu le théorème (2.10), on peut toujours se ramener au cas où la symétrie variationnelle est un champ d'évolution v_Q et le théorème de Noether reste valable dans le cas d'un champ de vecteur généralisé, symétrie variationnelle du système. (Voir page 46).

On remarque qu'une loi de conservation v associée à la symétrie variationnelle v_Q possède une caractéristique qui n'est autre que Q .

En effet : $d_M v = d_M(FL(v_Q)) - d_M \beta = d_M(FL(v_Q)) - v_Q \cdot L$. Utilisant alors le théorème (2.3) et l'égalité : $v_Q \cdot L = \text{pr } v_Q(L) = VL(Q)$, on obtient $d_M v = \frac{\delta L}{\delta u}(v_Q)$, c'est à dire, pour toute section u du fibré F ;

$$d_M v(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u, v_Q \cdot u) = \frac{\delta L}{\delta u}(Q)(u).$$

On a donc, si u est une solution du système d'Euler-Lagrange $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$,

$d_M v(u) = 0$, qui prouve bien que v est une loi de conservation pour le système.

Et de plus $d_M v = \frac{\delta L}{\delta u}(v_Q)$ donc v possède la caractéristique Q .

2. Expression en cartes locales adaptées de la loi de conservation :

Dans une carte locale adaptée v_Q s'écrit $Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ et

$$\beta = \sum_{j=1}^n (-1)^j B^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \text{ et}$$

$$FL(v_Q) = \sum_{j=1}^n (-1)^j (FL(v_Q))^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n, \text{ où } (FL(v_Q))^j \text{ est donné}$$

par la formule (2.10).

Ainsi la loi de conservation v associée à v_Q est de la forme

$$v = \sum_{j=1}^n (-1)^j v^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n \text{ avec pour } j = 1, 2, \dots, n :$$

$$v^j = \left\{ \sum_{|I| \geq 1} (-1)^{\sum_{s=1}^{j-1} i_s} \sum_{s=0}^{i_j-1} (-1)^s D_{i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + s e_j} \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right) \right. \quad (2.20)$$

$$\left. D_{I \setminus i_1 e_1 + \dots + i_{j-1} e_{j-1} + (s+1) e_j} (Q^\alpha) \right\} - B^j$$

avec $I = (i_1, \dots, i_n)$.

Nous démontrons maintenant que deux lois de conservation associées à une même symétrie variationnelle sont équivalentes. C'est le but du lemme (2.16).

3. Lemme (2.16) : Soit $\frac{\delta L}{\delta u} = 0$ un système différentiel d'Euler-Lagrange. Alors la classe d'équivalence des lois de conservation associées, par le théorème de Noether, à une symétrie variationnelle v_Q du système, ne dépend pas de la transformation de Legendre choisie.

Preuve : Soient $(FL)_1$ et $(FL)_2$ deux transformations de Legendre associées au Lagrangien L . Si v_1 et v_2 sont les lois de conservation associées à la symétrie variationnelle v_Q , par le théorème de Noether, respectivement pour $(FL)_1$ et $(FL)_2$, on a $v_1 = (FL)_1(v_Q) - \beta$ et $v_2 = (FL)_2(v_Q) - \beta$. Donc

$$\begin{aligned} d_M(v_1 - v_2) &= d_M((FL)_1(v_Q)) - d_M((FL)_2(v_Q)) \\ &= (VL(Q) - \frac{\delta L}{\delta u}(v_Q)) - (VL(Q) - \frac{\delta L}{\delta u} v_Q) \text{ par le théorème (2.3)} \\ &\equiv 0 \text{ et } v_1 \text{ et } v_2 \text{ sont équivalentes.} \end{aligned}$$

D) APPENDICE :

Nous terminons ce chapitre consacré aux symétries et lois de conservation d'un système différentiel, en considérant le cas particulier d'une équation différentielle affine. Soit $\tilde{\Delta}$ un opérateur différentiel linéaire d'un fibré vectoriel F dans un fibré vectoriel F' de base M , et soit F une section de F' . On considère alors l'équation (différentielle) affine $\Delta u = 0$, de la forme

$$\Delta u = \tilde{\Delta} u + F(x) = 0 \quad (2.21)$$

où

$$(\tilde{\Delta} u)^{\alpha'} = \sum_{|I| \geq 0} \sigma_{\beta}^{I\alpha'}(x) D_I u^{\beta} \quad (2.22)$$

$$\beta = 1, \dots, q$$

$\tilde{\Delta} u = 0$ représente l'équation linéaire associée à $(\Delta u = 0)$.

Une étude des symétries d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $p \geq 3$, a été faite par Olver, [13], et nous nous appuierons sur ses résultats et sur les théorèmes qui suivent pour vérifier les calculs de symétries faits sur l'équation affine de l'exemple quatre du dernier chapitre.

Dans le cas où les fonctions $F(x)$ et $\sigma_{\beta}^{I\alpha'}(x)$ sont analytiques en les variables (x^i) , nous nous intéressons à rechercher les symétries de l'équation affine à partir de celles, supposées déjà connues, de l'équation linéaire associée. On établit tout d'abord le lemme suivant :

Lemme (2.17) : Tout champ de vecteurs v_g de la forme $v_g = g(x) \frac{\partial}{\partial u}$ où g est une solution de $(\tilde{\Delta} u = 0)$, est une symétrie de

$$(\Delta u = 0) \quad (2.23)$$

quel que soit $F(x)$.

Preuve : On forme :

$$(\text{pr } v_g . \Delta)(u) \equiv (\text{pr } v_g . \tilde{\Delta})(u) + (\text{pr } v_g . F)(x) \equiv (\text{pr } v_g . \tilde{\Delta})(u) \equiv \tilde{\Delta}(g)$$

car $\tilde{\Delta}$ est un opérateur différentiel linéaire. g est une solution de $(\tilde{\Delta}u = 0)$, donc $(\text{pr } v_g . \Delta)(u)$ s'annule et v_g est une symétrie de l'équation affine. De façon plus générale nous avons le théorème :

Théorème (2.18) : Tout champ d'évolution v de la forme

$$v = (u + g(x)) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.24)$$

où g vérifie :

$$\tilde{\Delta}(g) = F \quad (2.25)$$

est une symétrie de $(\Delta u = 0)$.

Preuve : On forme $(\text{pr } v . \Delta)(u) = (\text{pr } v . \tilde{\Delta})(u) = \tilde{\Delta}(u+g) = \tilde{\Delta}(u) + \tilde{\Delta}(g) = \tilde{\Delta}(u) + F$ car g vérifie $\tilde{\Delta}(g) = F$. Pour toute solution u de $(\Delta u = 0)$, on a $\tilde{\Delta}u + F = 0$, d'où $(\text{pr } v . \Delta)(u) = 0$ sur les solutions de l'équation affine.

Nous établissons maintenant un théorème qui fournit une symétrie de l'équation affine à partir d'une symétrie de l'équation linéaire.

Théorème (2.19) : Soit $\tilde{v}$ une symétrie de l'équation linéaire $(\tilde{\Delta}u = 0)$ vérifiant

$$\tilde{v} . (\tilde{\Delta} . u) = \tilde{\Delta} . (\tilde{v} . u).$$

Alors le champ de vecteurs

$$v = \tilde{v} + g \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.26)$$

où g vérifie

$$\tilde{\Delta}(g) = \tilde{v} . F \quad (2.27)$$

est une symétrie de $(\Delta u = 0)$.

Preuve : D'après le théorème (2.7), il suffit de montrer que la forme d'évolution associée à v est une symétrie de l'équation affine ($\Delta u = 0$).

Notons $\tilde{v}_Q$ la forme d'évolution associée à $\tilde{v}$ et v_g le champ d'évolution :

$$v_g = g(x) \frac{\partial}{\partial u}.$$

$$\text{On a alors } (\text{pr}(\tilde{v}_Q + v_g). \Delta)(u) = (\text{pr } \tilde{v}_Q. \Delta)(u) + (\text{pr } v_g. \Delta)(u) = \tilde{\Delta}(Q) + \tilde{\Delta}(g)$$

$$= \tilde{\Delta}(\tilde{v}_Q. u) + \tilde{v}. F = \tilde{\Delta}(\tilde{v}. u) + \tilde{v}. F = \tilde{v}.(\tilde{\Delta}u) + \tilde{v}. F$$

$$= \tilde{v}.(\tilde{\Delta}u + F) = \tilde{v}.(\Delta u).$$

Donc pour toute solution u de ($\Delta u = 0$), on a $\tilde{v}.(\Delta u) = 0$ et donc

$(\text{pr}(\tilde{v}_Q + v_g). \Delta)(u)$ s'annule sur les solutions de $\Delta u = 0$, ce qui termine la démonstration.

On remarque que le théorème (2.18) apparaît alors comme un cas particulier du théorème (2.19) : il suffit de prendre $\tilde{v} = u \frac{\partial}{\partial u}$.

CHAPITRE III

Correspondance entre symétries et lois de conservation

Dans cette troisième partie, nous allons établir, pour un système différentiel donné, une correspondance entre une symétrie et une loi de conservation.

Dans le cas particulier d'un système d'Euler-Lagrange, on explicitera de manière plus précise la nature de la correspondance.

On supposera que l'opérateur différentiel considéré est à valeurs dans un fibré vectoriel et que le système différentiel associé vérifie la conclusion du théorème (2.14), à savoir que toute loi de conservation pour ce système est équivalente à une loi de conservation possédant une caractéristique. En particulier, un système totalement non dégénéré sur un fibré vectoriel trivial satisfait aux conditions précédentes.

A. THEOREME (3.1) :

Soient v_Q une symétrie d'évolution du système différentiel ($\Delta u = 0$) et β une loi de conservation pour ce système.

Alors $\text{pr } v_Q(\beta)$ est une nouvelle loi de conservation pour le système.

Preuve : Dans les hypothèses faites, on peut travailler avec une loi β possédant une caractéristique notée P .

Dans une carte locale adaptée, on a $d_M(\text{pr } v_Q \beta) = \text{pr } v_Q(d_M \beta)$, par le lemme (1.2). Or $d_M \beta = P \cdot \Delta$ d'où :

$$d_M(\text{pr } v_Q(\beta)) = \text{pr } v_Q(P \cdot \Delta) = P \text{ pr } v_Q(\Delta) + \Delta \cdot \text{pr } v_Q(P).$$

Pour toute section u du fibré solution de $(\Delta u = 0)$, on aura :

$$d_M(\text{pr } v_Q(\beta)(u)) = P(u) \cdot \text{pr } v_Q(\Delta)(u) + \Delta(u) \cdot \text{pr } v_Q(P)(u) = 0.$$

car $\text{pr } v_Q(\Delta)(u) = 0$ sur les solutions de $(\Delta u = 0)$.

Donc $\text{pr } v_Q(\beta)$ est une loi de conservation pour le système $(\Delta u = 0)$.

B. THEOREME (3.2) :

Soit $(\Delta u = \frac{\delta L}{\delta u} = 0)$ un système différentiel d'Euler-Lagrange.

Soient v_Q et v_R deux symétries variationnelles du système et β une loi de conservation associée à v_R par le théorème de Noether.

Alors $\text{pr } v_Q(\beta)$ est une loi de conservation pour le système $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$, qui est équivalente à une loi de conservation associée à la symétrie variationnelle $[v_Q, v_R]$.

Preuve : On suppose que β possède une caractéristique R c'est-à-dire qu'il existe un champ d'évolution v_R tel que $d_M \beta = R \cdot \Delta = R \cdot \frac{\delta L}{\delta u}$.

$\text{pr } v_Q(\beta)$ est une loi de conservation pour le système (théorème (3.1)).

Une loi de conservation associée à la symétrie variationnelle

$[v_Q, v_R]$ possède une caractéristique égale à $S = [Q, R]$, (Conséquence du théorème de Noether). Il s'agit donc de montrer que $\text{pr } v_Q(\beta)$ et cette loi associée à v_S sont équivalentes, c'est-à-dire que:

$$d_M(\text{pr } v_Q(\beta)) - S \cdot \frac{\delta L}{\delta u} = d_M \alpha,$$

où α est une loi de conservation triviale.

La démonstration du théorème (3.1) fournit : $d_M(\text{pr } v_Q \beta) = \Delta \cdot \text{pr } v_Q(R) + R \cdot \text{pr } v_Q(\Delta)$

avec $\Delta u = \frac{\delta L}{\delta u}$; et utilisant le théorème (2.4) on obtient

$$R \cdot \text{pr } v_Q\left(\frac{\delta L}{\delta u}\right) = R \cdot \frac{\delta}{\delta u} (\text{pr } v_Q(L)) - R(v_Q)^* \left(\frac{\delta L}{\delta u}\right).$$

$\text{pr } v_Q(L)$ s'écrit $d_M \gamma$ (définition 2.9) et utilisant le lemme (2.1), on a :

$$R.\text{pr } v_Q\left(\frac{\delta L}{\delta u}\right) = -R(VQ)^*\left(\frac{\delta L}{\delta u}\right) = -\frac{\delta L}{\delta u}(VQ)(R) + d_M \mu$$

par le théorème (1.6), où μ est un courant sur F , s'écrivant dans une carte locale adaptée : $\mu(u) = \int_L \mu^i(u) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$ où chaque μ^i est une combinaison linéaire de $\frac{\delta L}{\delta u}$ et de ses dérivées totales jusqu'à un certain ordre fini.

Rassemblant les résultats, on obtient :

$$\begin{aligned} d_M(\text{pr } v_Q(\beta)) &= \frac{\delta L}{\delta u} \cdot \text{pr } v_Q(R) - \frac{\delta L}{\delta u} \cdot VQ(R) + d_M \mu = \frac{\delta L}{\delta u} \cdot (\text{pr } v_Q(R) - \text{pr } v_Q(Q)) \\ &\quad + d_M \mu \end{aligned}$$

en utilisant le lemme (1.4).

Soit finalement $d_M(\text{pr } v_Q(\beta)) = S \cdot \frac{\delta L}{\delta u} + d_M \mu$ (par le lemme (1.1)) ou encore

$$d_M(\text{pr } v_Q(\beta)) - S \cdot \frac{\delta L}{\delta u} = d_M \mu$$

où μ apparaît comme une loi de conservation triviale de deuxième espèce pour le système différentiel d'Euler-Lagrange $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$; ce qui achève la démonstration.

C. CONSEQUENCES :

On considère un système d'Euler-Lagrange noté $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$.

On note $\mathcal{L}_L$ l'algèbre de Lie formée par les champs de vecteurs généralisés qui sont des symétries variationnelles du système $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$.

Le système différentiel $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$ étant un système d'Euler-Lagrange, on peut donc associer, à chaque symétrie variationnelle de $\mathcal{L}_L$, une loi de conservation grâce au théorème de Noether (2.15).

Notons $\mathcal{C}_L$ l'ensemble de ces lois de conservation qui forme, de façon naturelle, un espace vectoriel.

Nous quotientons maintenant N_L par la relation d'équivalence introduite sur les lois de conservation : $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow (v_1 - v_2)$ est une loi de conservation triviale.

On peut alors considérer l'application j définie de $\mathcal{A}_L$ dans $\mathcal{U}_L/\sim = N_L$ qui, à toute symétrie généralisée variationnelle du système associe la classe d'équivalence d'une loi de conservation associée par le théorème de Noether à cette symétrie variationnelle.

Ainsi, notant v un champ de vecteurs généralisé sur le fibré $F \xrightarrow{\Pi} M$ qui est une symétrie variationnelle de $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$, on notera v_v une loi de conservation associée par le théorème de Noether à v et $cl(v_v)$ la classe d'équivalence de v_v et j est définie par :

$$\begin{aligned} j : \mathcal{A}_L &\rightarrow N_L \\ v &\leadsto cl(v_v) \end{aligned} \tag{3.1.}$$

Nous utilisons ici une forme du théorème de Noether qui se déduit immédiatement du résultat du théorème (2.15) formulé dans le chapitre II :

Soit v un champ de vecteurs généralisé sur le fibré $F \xrightarrow{\pi} M$ (il n'est plus nécessairement d'évolution), symétrie variationnelle de $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$; il existe donc un courant β sur F tel que $v.L = d_M \beta$. Alors, le courant noté v_v et défini par

$$v_v = FL(v_Q) - \beta + i_{v_M} L$$

est une loi de conservation pour le système considéré.

Cette application j est bien définie car on a vu que la classe d'équivalence des lois de conservation associées à une symétrie variationnelle par le théorème de Noether ne dépend pas de la transformation de Legendre choisie (lemme 2.16).

Remarque : Soit v une symétrie variationnelle de $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$ et v_Q sa forme d'évolution. On a alors

$$j(v) = j(v_Q).$$

Le résultat est même plus précis, puisque, une transformation de Legendre étant choisie, on a l'égalité des lois de conservation respectivement associées à v et v_Q c'est-à-dire

$$v_v = v_{v_Q} \quad (3.2)$$

Propriétés de l'application j :

- a) j est surjective (par construction)
- b) j est non injective
- c) j est linéaire car $cl(v_1 + v_2) = cl(v_1) + cl(v_2)$
et $cl(f.v) = f cl(v)$ où f est une constante.

Soit G_L un ensemble de générateurs indépendants de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_L$ en tant qu'espace vectoriel. On écrira $\mathcal{V}_L = \mathcal{V}(G_L)$ (espace vectoriel engendré par G_L). Par linéarité de j , $j(G_L)$ est un ensemble de générateurs de l'espace vectoriel quotient N_L .

Montrons maintenant que l'on peut trouver une sous-famille de $j(G_L)$, qui suffira à "engendrer" l'espace N_L en un sens que nous préciserons.

Soient v_{Q_1} et v_{Q_2} deux symétries d'évolution variationnelles du système différentiel $(\frac{\delta L}{\delta u} = 0)$, et soient :

v_1 une loi de conservation associée à v_{Q_1} ,

v_2 une loi de conservation associée à v_{Q_2} ,

et $v_{[1,2]}$ une loi de conservation associée à $[v_{Q_1}, v_{Q_2}]$.

Alors

$$j(v_{Q_1}) = cl(v_1)$$

$$j(v_{Q_2}) = cl(v_2)$$

$$j([v_{Q_1}, v_{Q_2}]) = cl(v_{[1,2]}).$$

D'après le théorème fondamental (3.2) de ce chapitre, nous pouvons écrire :

$$pr_{v_{Q_1}}(v_2) \in cl(v_{[1,2]})$$

soit encore

$$cl(pr_{v_{Q_1}}(v_2)) = cl(v_{[1,2]}) \quad (3.3)$$

Soit $\mathcal{D}_L = [\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_L]$ l'idéal dérivé de $\mathcal{A}_L$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_L$; on peut donc considérer un supplémentaire, noté H , de $\mathcal{D}_L$ dans $\mathcal{A}_L$ et on a :

$$\mathcal{A}_L = \mathcal{D}_L \oplus H \quad (3.4)$$

Si G_L^1 est un ensemble de générateurs de $\mathcal{D}_L$ en tant qu'idéal, on peut compléter G_L^1 en une sous-famille d'éléments de $\mathcal{D}_L$, notée G_L^2 , telle que :

- G_L^1 et G_L^2 soient disjoints
- $(G_L^1 \cup G_L^2)$ forme une base de $\mathcal{D}_L$ en tant qu'espace vectoriel

Ainsi, considérant alors une base G_L^3 de H , la réunion des trois familles (disjointes deux à deux), $G_L^1 \cup G_L^2 \cup G_L^3 = G_L$ forme une base de $\mathcal{A}_L$, et on peut écrire

$$A_L = \mathcal{V}(G_L^1 \cup G_L^2) \oplus \mathcal{V}(G_L^3) \quad (3.5)$$

De la linéarité et de la surjectivité de j , on déduit :

$$N_L = j(\mathcal{V}(G_L^1 \cup G_L^2)) + j(\mathcal{V}(G_L^3)) \quad (3.6)$$

(la somme n'est plus directe car j n'est pas injective).

Montrons maintenant que $j(G_L^1) \cup j(G_L^3) = j(G_L^1 \cup G_L^3)$ suffit à engendrer N_L . On pose

$$\tilde{G}_L = G_L^1 \cup G_L^3 \quad (3.7)$$

(réunion de deux ensembles disjoints).

Il suffit donc de montrer que $j(\tilde{G}_L)$ permet aussi de déterminer $j(G_L^2)$, (et par conséquent N_L par la formule (3.6).)

On peut aussi remarquer que $j(G_L^3)$ engendre $j(H)$ (puisque G_L^3 est

une base de H qui est un supplémentaire de $\mathcal{D}_L$ dans $\mathcal{A}_L$). Ainsi, tout revient à montrer que $j(G_L^1)$ engendre $j(\mathcal{D}_L)$ en tant qu'espace vectoriel.

Introduisons les notations suivantes : $G_L^1 = \{v_i\}_{i \in I_1}$

$$G_L^2 = \{v_s\}_{s \in I_2}$$

$$G_L^3 = \{v_k\}_{k \in I_3}$$

où I_1, I_2, I_3 sont trois sous-ensembles de $\mathbb{N}$ disjoints deux à deux et posant $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ on aura $G_L = \{v_\ell\}_{\ell \in I}$. Tout champ de vecteurs généralisé v_s de G_L^2 s'écrit : $v_s = \sum_{i \in I_1} [a_i, v_i]$ où $v_i \in G_L^1$ et $a_i \in \mathcal{A}_L$ puisque G_L^1 engendre l'idéal $\mathcal{D}_L$.

(On peut, sans restreindre la généralité du problème, supposer que $a_i \in \mathcal{A}$ et $v_i \in G_L^1$ car le crochet de Lie est antisymétrique).

Maintenant $a_i \in \mathcal{A}$ et donc $a_i = \sum_{\ell \in I} f_{\ell,i} v_\ell$ d'où :

$$v_s = \sum_{\substack{\ell \in I \\ i \in I_1}} f_{\ell,i} [v_\ell, v_i] \quad (3.8)$$

$$\text{avec } \begin{cases} v_s \in G_L^2 \\ v_\ell \in G_L \\ v_i \in G_L^1 \end{cases}$$

On tire donc

$$j(v_s) = cl(v_s) = \sum_{\substack{\ell \in I \\ i \in I_1}} f_{\ell,i} j([v_\ell, v_i]) = \sum_{\substack{\ell \in I \\ i \in I_1}} f_{\ell,i} cl(v_{[\ell,i]}) .$$

Utilisant la formule (3.3), on obtient :

$$cl(v_s) = \sum_{\substack{\ell \in I \\ i \in I_1}} f_{\ell,i} cl(pr_{Q_\ell}(v_i)) \quad (3.9)$$

où $f_{\ell,i}$ constante, pour $v_s \in G_L^2$ et $v_i \in G_L^1$, et ceci prouve bien que $j(\tilde{G}_L)$ suffit à "engendrer" N_L .

En effet, $G_L = (G_L^1 \cup G_L^3) \cup G_L^2 = \tilde{G}_L \cup G_L^2$ ayant été déterminé, on peut calculer les lois de conservation associées aux symétries variationnelles de $\tilde{G}_L$ par le théorème de Noether.

Il est alors possible de trouver les nouvelles lois de conservation de la forme

$pr_{Q_\ell}(v_i)$ où v_{Q_ℓ} appartient à G_L et v_i est une loi de conservation associée à v_i appartenant à $G_L^1 \subset \tilde{G}_L$.

La classe d'équivalence de toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle de G_L^2 s'écrit alors comme une combinaison linéaire des classes d'équivalence des lois de conservation $(pr_{Q_2}(v_i))$, d'après la formule (3.9).

Ainsi, on peut déterminer $j(G_L^2)$ à partir de $j(\tilde{G}_L)$ et donc engendrer N_L à partir de $j(\tilde{G}_L)$.

On remarque que G_L^1 se détermine à partir des crochets de Lie des champs de vecteurs de G_L .

Cette propriété est intéressante dans le sens où elle permet de réduire le nombre de lois de conservation à connaître pour engendrer N_L .

Nous allons maintenant illustrer ce résultat en étudiant des exemples particuliers.

CHAPITRE IV

Exemples

Dans ce dernier chapitre, nous allons illustrer les principaux résultats vus auparavant en étudiant quelques exemples "empruntés" le plus souvent, à la mécanique physique. C'est la raison pour laquelle les fibrés que nous utiliserons seront des fibrés vectoriels triviaux bien que la théorie ait été énoncée dans un cadre plus général.

A. EXEMPLE I :

Soit F le fibré $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de base $\mathbb{R}^2$.

La base $\mathbb{R}^2$ est munie de coordonnées (t, x) .

La fibre-type $\mathbb{R}$ est munie de coordonnées (u) .

On considère sur F l'opérateur différentiel scalaire d'ordre 2 noté Δ et défini par : pour u section de F

$$\Delta(u) = u_{tt} - u_x^\alpha u_{xx} \quad (4.1)$$

pour $\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq -2$.

Montrons que l'équation différentielle dérive d'un Lagrangien, c'est-à-dire qu'il existe un Lagrangien L sur le fibré F tel que $\Delta u = \frac{\delta L}{\delta u}(u)$ pour toute section u du fibré.

On voit que si on prend pour lagrangien L

$$L(u) = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} u_x^{\alpha+2},$$

on obtiendra bien $\frac{\delta L}{\delta u} = \Delta u$.

$$L(u) = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} u_x^{\alpha+2} \quad (4.2)$$

est un lagrangien d'ordre 1 sur F .

$\Delta u = 0$ définit donc une équation différentielle sur F qui satisfait aux hypothèses de régularité demandées aux chapitres précédents : pour α différent de $-1, -2$ le système $\Delta(u) = 0$ est totalement non dégénéré.

Cela réside essentiellement dans le fait que l'équation considérée $\Delta(u) = u_{tt} - u_x^\alpha u_{xx} = 0$ est une équation de type Kovalevskaya ; c'est-à-dire une équation où l'on peut écrire une des dérivées totales de u en fonction des autres. Sur cet exemple $u_{tt} = u_x^\alpha u_{xx}$.

Montrons maintenant que $\Delta(u) = u_{tt} - u_x^\alpha u_{xx} = 0$ est localement résoluble c'est-à-dire que, au voisinage de tout point $(t_0, x_0, u_0, u_{0x}, u_{0t}, u_{0xx}, u_{0tx}, u_{0tt})$ solution ponctuelle de $\Delta(u) = 0$, on peut trouver une section $u = u(x, t)$ du fibré, solution de l'équation différentielle $\Delta(u) = 0$ et vérifiant les "conditions de Cauchy" :

$$\begin{cases} u_0 = u(t_0, x_0) \\ u_{0I_k} = j_{(t_0, x_0)}^k u \text{ où } I_k \text{ est un multi indice d'ordre } k \text{ avec } k = 1, 2. \end{cases}$$

On utilise une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Kovalevskaya dont on pourra trouver un énoncé dans "Applications of Lie groups to Differential equations" de P.J. Olver [12].

Nous énoncerons seulement le corollaire : "Tout système analytique du type Kovalevskaya est localement résoluble".

Ainsi $\Delta(u)$ est localement résoluble. De plus, remarquant que tout prolongement d'un système de type Kovalevskaya est un système du même type, on en déduit donc que tout prolongement de $\Delta(u) = 0$ est aussi localement résoluble.

Montrons maintenant que le système initial $\Delta(u) = 0$ ainsi que tous ses prolongements jusqu'à un ordre quelconque est de rang maximal. Considérons, pour ℓ quelconque, $\ell \geq 0$ le prolongement d'ordre ℓ de l'équation différentielle

$$\Delta(u) = 0.$$

On a donc $\Delta^{(\ell)} : J^{(2+\ell)}_F \rightarrow \mathbb{R}^N$ où $N = \sum_{k=0}^{\ell} C_{k+1}^k$ et $\Delta^{(\ell)}(u)$ représente le système $(D_J(\Delta(u)))_J$ où J est un multi indice (i_1, i_2) d'ordre $|J|$ vérifiant $0 \leq |J| \leq \ell$. Le prolongement d'ordre ℓ de l'équation différentielle initiale $\Delta(u) = 0$ se présente donc comme un nouveau système différentiel d'ordre $(\ell+2)$ formé par N équations différentielles. (en effet si $|J| = k$ fixé, la base de notre fibré étant ici $\mathbb{R}^2$, $D_J(\Delta(u)) = 0$ va nous fournir $C_{2+k-1}^k = C_{k+1}^k$ équations différentielles distinctes).

Ecrivons la matrice d'élément général $\frac{\partial \Delta^J}{\partial u_I}(u) = a_{I,J}$, où I est un multi-indice d'ordre $|I| \leq \ell+2$ et $\Delta^J(u) = 0$ représente une des équations différentielles du système $(\Delta^{(\ell)}(u) = 0)$. On obtient donc une matrice à N ligne et P colonnes où $P = \sum_{k=0}^{\ell+2} C_{k+1}^k$, qui est en fait la matrice jacobienne de $\Delta^{(\ell)}$. Cette matrice est de rang maximal (c'est-à-dire N) car $\Delta^{(\ell)}(u) = 0$ est un système différentiel de type Kovalevskaya : nous pouvons donc faire apparaître une sous-diagonale de "un" dans notre matrice correspondant à $\frac{\partial \Delta^I}{\partial u_I} = 1$ où I représente le multi indice $J + (2,0) = J + 2e_0$ avec $u_{e_0} = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t$.

L'équation différentielle $\Delta(u) = 0$ ainsi que tous ses prolongements est donc localement résoluble et de rang maximal. Elle est bien totalement non dégénérée.

Nous allons maintenant chercher les symétries de l'équation différentielle, c'est-à-dire les champs de vecteurs généralisés v sur F vérifiant $(pr v. \Delta)(u) = 0$ pour u section de F solution de $\Delta(u) = 0$. v est de la forme :

$$v = \xi^x[u] \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t[u] \frac{\partial}{\partial t} + \eta[u] \frac{\partial}{\partial u},$$

et sa forme d'évolution v_Q s'écrira donc $Q \frac{\partial}{\partial u}$ avec $Q = \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t$.

Le prolongement du champ d'évolution v_Q est le champ de vecteurs généralisé sur $J^\infty F$ noté pr v_Q et défini par

$$\text{pr } v_Q = Q \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{|I| \geq 1} D_I(Q) \frac{\partial}{\partial u_I} \quad \text{avec } Q = Q[u].$$

On sait que v symétrie de l'équation différentielle est équivalent à v_Q symétrie de l'équation différentielle.

On a donc pr $v_Q(\Delta)(u) = 0$ sur les solutions u de l'équation, soit encore $Q \frac{\partial \Delta}{\partial u} + \sum_{|I| \geq 1} D_I(Q) \frac{\partial \Delta}{\partial u_I} = 0$ sur les solutions.

Ainsi toute symétrie de l'équation différentielle vérifie la condition suivante : $D_{tt}(Q) + D_x(Q) (-\alpha u_x^{\alpha-1} u_{xx}) + D_{xx}(Q) (-u_x^\alpha) = 0$ pour u solution de $\Delta u = 0$.

On peut introduire la notation suivante $D_{tt}(Q) = Q_{tt}$

$$D_x(Q) = Q_x$$

$$D_{xx}(Q) = Q_{xx}$$

Ainsi l'équation déterminant les symétries de l'équation différentielle $\Delta(u) = 0$ s'écrit finalement

$$(*) \quad \alpha u_x^{\alpha-1} u_{xx} Q_x + u_x^\alpha Q_{xx} - Q_{tt} = 0 \quad (4.3)$$

pour toute section u vérifiant $\Delta u = 0$ où

$$v_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} = (-\xi^x u_x - \xi^t u_t + \eta) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Nous allons maintenant restreindre notre étude à la recherche des symétries ordinaires. Ainsi

$$v = \xi^x(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\text{et} \quad v_Q = Q \frac{\partial}{\partial u} = (\eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.4)$$

Pour simplifier, nous poserons $Q = A(t, x, u) + B u_x + C u_t$

avec $A = A(t, x, u)$; $B = B(t, x, u)$; $C = C(t, x, u)$. Dans ces conditions le calcul de Q_x , Q_{xx} et Q_{tt} nous donne

$$a) \quad Q_x = \frac{\partial A}{\partial x} + \left(\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial x} \right) u_x + \frac{\partial C}{\partial x} u_t + \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right) u_x^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial u} \right) u_t u_x + B u_{xx} + C u_{tx}$$

$$b) \quad Q_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}) u_x + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) u_t + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial u} \right) u_x^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial u} u_t u_x + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} u_x^3 + \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} u_t u_x^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial u} + 2 \frac{\partial B}{\partial x} \right) u_{xx}$$

$$+ 2 \frac{\partial C}{\partial x} u_{tx} + 3 \frac{\partial B}{\partial u} u_x u_{xx} + 2 \frac{\partial C}{\partial u} u_x u_{tx} + \frac{\partial C}{\partial u} u_t u_{xx} + B u_{xxx} + C u_{txx}$$

$$c) \quad Q_{tt} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + (2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}) u_t + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} u_x + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial u} \right) u_t^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial u} u_t u_x + \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} u_t^3 + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} u_t^2 u_x + \left(\frac{\partial A}{\partial u} + 2 \frac{\partial C}{\partial t} \right) u_{tt} +$$

$$+ 2 \frac{\partial B}{\partial t} u_{tx} + 3 \frac{\partial C}{\partial u} u_t u_{tt} + 2 \frac{\partial B}{\partial u} u_t u_{tx} + \frac{\partial B}{\partial u} u_x u_{tt} + C u_{ttt} + B u_{ttx}$$

Or sur les solutions de $\Delta u = 0$ on a $u_{tt} = u_x^\alpha u_{xx}$ d'où

$u_{ttt} = \alpha u_x^{\alpha-1} u_{tx} u_{xx} + u_x^\alpha u_{txx}$ et $u_{ttx} = \alpha u_x^{\alpha-1} u_{xx}^2 + u_x^\alpha u_{xxx}$ et Q_{tt} s'écrit alors :

$$Q_{tt} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + (2 \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}) u_t + \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} u_x + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial u} \right) u_t^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial u} u_t u_x + \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} u_t^3 + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} u_t^2 u_x + 2 \frac{\partial B}{\partial t} u_{tx} + 2 \frac{\partial B}{\partial u} u_t u_{tx}$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial u} + 2 \frac{\partial C}{\partial t} \right) u_x^\alpha u_{xx} + \frac{\partial B}{\partial u} u_x^{\alpha+1} u_{xx} + 3 \frac{\partial C}{\partial u} u_x^\alpha u_t u_{xx} + \alpha C u_x^{\alpha-1} u_{tx} u_{xx}$$

$$+ C u_x^\alpha u_{txx} + B u_{ttx}$$

On forme maintenant l'équation déterminante (*). Comme les fonctions

A, B, C ainsi que leurs dérivées partielles sont des fonctions ne faisant intervenir

que les variables t, x et u , les différents coefficients de u_t, u_x , de leurs dérivées totales et de leurs produits seront donc nuls dans l'équation déterminante.

On obtient donc un système d'équations aux dérivées partielles :

- * coefficient constant : $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$
- * coefficient de u_t : $\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = 0$
- * coefficient de u_x : $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$
- * coefficient de u_t^2 : $\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial u} = 0$
- * coefficient de $u_t u_x$: $2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial u} = 0$
- * coefficient de u_t^3 : $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0$
- * coefficient de $u_t^2 u_x$: $\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} = 0$
- * coefficient de u_{tx} : $2 \frac{\partial B}{\partial t} = 0$
- * coefficient de $u_t u_{tx}$: $2 \frac{\partial B}{\partial u} = 0$
- * coefficient de $u_x^2 u_{xx}$: $-(\frac{\partial A}{\partial u} + 2 \frac{\partial C}{\partial t}) + (\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial x}) \times \alpha + (\frac{\partial A}{\partial u} + 2 \frac{\partial B}{\partial x}) = 0$
- * coefficient de $u_x u_{xx}$: $-\frac{\partial B}{\partial u} + 2\alpha \frac{\partial B}{\partial u} + 3 \frac{\partial B}{\partial u} = 0$
- * coefficient de $u_x^2 u_{xx} u_t$: $-3 \frac{\partial C}{\partial u} + \alpha \frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial u} = 0$
- * coefficient de $u_x u_{tx} u_{xx}$: $-\alpha C + \alpha C = 0$
- * coefficient de $u_x^2 u_{txx}$: $-C + C = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha-1} u_{xx}^2$: $-\alpha B + \alpha B = 0$

* coefficient de $u_x^\alpha u_{xxx}$: $-B + B = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha-1} u_{xx}$: $\alpha \frac{\partial A}{\partial x} = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha-1} u_t u_{xx}$: $\alpha \frac{\partial C}{\partial x} = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha+1}$: $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha+2}$: $\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha+1} u_{tx}$: $2 \frac{\partial C}{\partial u} = 0$

* coefficient de $u_x^{\alpha+2} u_t$: $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0$

La résolution de ces 22 équations aux dérivées partielles, qui ne sont pas toutes indépendantes, fournit

$$\begin{cases} A = a_1 u + a_2 t + a_3 & a_1, a_2, a_3 \text{ constantes} \\ B = b_1 x + b_2 & b_1, b_2 \text{ constantes} \\ C = \frac{1}{2}[\alpha a_1 + (\alpha+2)b_1]t + c_1 & c_1 \text{ constante} \end{cases} \quad (4.5)$$

On a donc obtenu la forme générale des symétries ordinaires pour

l'équation $\Delta u = 0$:

$$v = -(b_1 x + b_2) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}(\alpha a_1 + (\alpha+2)b_1)t \frac{\partial}{\partial t} - c_1 \frac{\partial}{\partial t} + (a_1 u + a_2 t + a_3) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.6)$$

En conclusion de cette étude sur la recherche des symétries ordinaires de l'équation différentielle $u_{tt} - u_x^\alpha u_{xx} = 0$, les symétries ordinaires forment donc une algèbre de Lie, notée $\mathcal{L}$, de dimension 6 ;

Les générateurs de cette algèbre $\mathcal{L}$ sont :

- 1) pour $b_1 = -1, a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = c_1 = 0$ on obtient

$$v_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} (\alpha+2)t \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.7)$$

- 2) pour $b_2 = -1, a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = c_1 = 0$ on obtient

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.8)$$

- 3) pour $b_1 = b_2 = c_1 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = \alpha+1$ on obtient

$$v_3 = -\frac{\alpha}{2} t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.9)$$

- 4) pour $a_2 = 1, a_1 = a_3 = b_1 = b_2 = c_1 = 0$ on obtient

$$v_4 = t \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.10)$$

- 5) pour $a_3 = 1, a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = 0$ on obtient

$$v_5 = \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.11)$$

- 6) pour $c_1 = -1, a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = 0$ on obtient

$$v_6 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.12)$$

Ayant trouvé les symétries ordinaires de l'équation différentielle, nous allons maintenant déterminer les symétries ordinaires variationnelles de l'équation. On sait que ces symétries variationnelles forment une algèbre de Lie $\mathcal{L}_L$ qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}$.

v , champ de vecteurs généralisé sur le fibré F est une symétrie variationnelle de l'équation différentielle si et seulement si il existe un opérateur différentiel β sur F à valeurs dans $\Lambda^1(T^*\mathbb{R}^2)$ tel que $d_M\beta = v.L$.

Le calcul nous montre ici que v_1 et v_3 ne sont pas des symétries variationnelles de $\Delta(u) = 0$ et que v_2, v_4, v_5, v_6 sont des symétries variationnelles de $\Delta(u) = 0$.

Ainsi l'algèbre de Lie $(\mathcal{V}_L$ des symétries ordinaires variationnelles est de dimension 4 et est engendrée par v_2, v_4, v_5 et v_6 .

Utilisant le théorème de Noether qui nous donne une forme explicite des lois de conservation associées aux symétries variationnelles, nous déterminons ainsi les lois de conservation v_2, v_4, v_5, v_6 respectivement associées à v_2, v_4, v_5, v_6 .

La base du fibré trivial F étant $\mathbb{R}^2$, une loi de conservation v est un opérateur différentiel sur F à valeurs dans $\Lambda^1(T^*\mathbb{R}^2)$.

Ainsi pour u section du fibré F , $v(u)$ s'écrit :

$v(u) = v^1 dt + v^2 dx$ et on peut donc lui associer un vecteur N dont les composantes sont
$$\begin{cases} N^t = -v^1 \\ N^x = v^2 \end{cases}.$$

N est appelé vecteur courant conservé correspondant à la loi de conservation v . On a donc choisi ici la forme élément de volume $\omega = dx \wedge dt$.

1) $v_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ et $v_2.L = 0$

Le vecteur courant conservé N_2 a pour composantes

$$N_2 = \begin{cases} N_2^x = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{\alpha+2} u_x^{\alpha+2} \\ N_2^t = -u_t u_x \end{cases} \quad (4.13)$$

$$2) \quad v_4 = t \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{et} \quad v_4 \cdot L = \text{div } B_4 \quad \text{où} \quad B_4 = \begin{cases} B_4^x = 0 \\ B_4^t = u_t \end{cases}$$

Le vecteur courant conservé N_4 a pour composantes

$$N_4 = \begin{cases} N_4^x = - \frac{t}{\alpha+1} u_x^{\alpha+1} \\ N_4^t = t u_t - u \end{cases} \quad (4.14)$$

$$3) \quad v_5 = \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{et} \quad v_5 \cdot L = 0$$

Le vecteur courant conservé N_5 a pour composantes

$$N_5 = \begin{cases} N_5^x = - \frac{1}{\alpha+1} u_x^{\alpha+1} \\ u_t \end{cases} \quad (4.15)$$

$$4) \quad v_6 = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad v_6 \cdot L = 0$$

Le vecteur courant conservé N_6 a pour composantes

$$N_6 = \begin{cases} N_6^x = \frac{u_t}{\alpha+1} u_x^{\alpha+1} \\ N_6^t = - \frac{u_t^2}{2} - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} u_x^{\alpha+2} \end{cases} \quad (4.16)$$

Le tableau des crochets des champs de vecteurs généralisés

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ de l'algèbre de Lie A nous donne :

Tableau :

$[v_i, v_j]$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	$-v_2$	0	$\frac{\alpha+2}{2} v_4$	0	$-\frac{\alpha+2}{2} v_6$
v_2	v_2	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	$-\frac{\alpha+2}{2} v_4$	$-v_5$	$\frac{\alpha}{2} v_6$
v_4	$-\frac{\alpha+2}{2} v_4$	0	$\frac{\alpha+2}{2} v_4$	0	0	$-v_5$
v_5	0	0	v_5	0	0	0
v_6	$\frac{\alpha+2}{2} v_6$	0	$-\frac{\alpha}{2} v_6$	v_5	0	0

(4.17)

Nous allons maintenant illustrer le théorème principal de notre travail, à savoir :

Pour un système différentiel d'Euler-Lagrange, si v_Q et v_R sont deux symétries d'évolution variationnelles du système et β une loi de conservation associée à v_R par le théorème de Noether, alors $v_Q(\beta)$ est une loi de conservation pour le même système, qui est équivalente à une loi de conservation associée à la symétrie variationnelle $[v_Q, v_R]$.

Considérons la loi de conservation v_2 associée à la symétrie variationnelle v_2 ou, de manière équivalente le courant conservé N_2

$$N_2 \begin{cases} N_2^x = \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{\alpha+2} u_x^{\alpha+2} \\ N_2^t = -u_t u_x \end{cases}$$

Le champ d'évolution associée à v_2 est $v_{2Q} = -u_x \frac{\partial}{\partial u}$ d'où les composantes du nouveau courant conservé pr $v_{2Q}(N_2)$

$$N'_2 = \text{pr } v_{2Q}(N_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} N'_2{}^x = -u_t u_{tx} - u_x^{\alpha+1} u_{xx} \\ N'_2{}^t = u_t u_{xx} + u_x u_{tx} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Comme $[v_2, v_2] = 0$, vérifions que N'_2 est équivalente à une loi de conservation associée à 0 donc que N'_2 est équivalente à 0 ou encore que N'_2 est une loi triviale.

Le calcul de $\text{div } N'_2 = D_x N'_2{}^x + D_t N'_2{}^t$ nous donne

$$\begin{aligned} \text{div } N'_2 &= u_{xx} (u_{tt} - u_x^\alpha u_{xx}) + u_x D_x (u_{tt} - u_x^\alpha u_{xx}) \\ &= u_{xx} \Delta + u_x D_x (\Delta) = D_x (u_x \Delta). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{div } N'_2 = \text{div } C_2$ où C_2 est un vecteur sur la base de composantes $\begin{Bmatrix} u_x \times \Delta \\ 0 \end{Bmatrix}$. C_2 apparait donc comme une loi de conservation triviale pour le système différentiel $\Delta(u) = 0$; elle est de deuxième espèce et $\text{div}(N'_2 - C_2) \equiv 0$ donc N'_2 est équivalente à C_2 . Finalement, on obtient bien :

N'_2 loi de conservation triviale.

Le champ v_4 est un champ d'évolution : $v_{4Q} = v_4 = t \frac{\partial}{\partial u}$ d'où les composantes du nouveau courant conservé pr $v_4(N_2)$

$$N'_4 = \text{pr } v_4(N_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} N'_4{}^x = u_t \\ N'_4{}^t = -u_x \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Comme $[v_4, v_2] = 0$, vérifions que N'_4 est une loi triviale. Or

$\text{div } N'_4 = D_x N'^x_4 + D_t N'^t_4 = u_{tx} - u_{tx} \equiv 0$. Donc N'_4 est bien une loi triviale de première espèce.

Le champ d'évolution associé à v_6 est $v_{6Q} = -u_t \frac{\partial}{\partial u}$ d'où les composantes du nouveau courant conservé pr $v_{6Q}(N_2)$

$$N'_6 = \text{pr } v_{6Q}(N_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -u_{tx} u_x^{a+1} - u_t u_{tt} \\ u_{tx} u_t + u_{tt} u_x \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Comme $[v_6, v_2] = 0$, vérifions que N'_6 est une loi triviale.

$$\begin{aligned} \text{Or } \text{div } N'_6 &= u_{tx} (u_{tt} - u_x^{a+1} u_{xx}) + u_x D_t (u_{tt} - u_x^{a+1} u_{xx}) \\ &= D_t (u_x \Delta) \end{aligned}$$

$$= \text{div } C_6 \quad \text{où } C_6 \text{ est un vecteur sur la base de composantes } \begin{cases} 0 \\ u_x^{a+1} \Delta \end{cases}.$$

C_6 étant une loi de conservation triviale de deuxième espèce et N'_6 étant équivalente à C_6 on obtient donc :

N'_6 loi de conservation triviale.

On pourrait procéder de même avec les autres lois de conservation N_4, N_5 et N_6 en leur appliquant les symétries variationnelles v_2, v_4, v_5 et v_6 .

Cependant, nous allons terminer l'étude de cet exemple en montrant que l'hypothèse de symétrie variationnelle est indispensable à la validité du théorème : le résultat énoncé est faux en général si on ne prend que des symétries du système différentiel.

On va donc considérer les lois de conservations N_2, N_4, N_5 et N_6 respectivement associées aux symétries variationnelles v_2, v_4, v_5 et v_6 et calculer

les nouvelles lois de conservation obtenues à partir de N_i ($i = 2, 4, 5, 6$) en appliquant pr v_{1Q} ou pr v_{3Q} .

$$v_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha+2}{2} t \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow v_{1Q} = (-xu_x - \frac{\alpha+2}{2} t u_t) \frac{\partial}{\partial u}$$

$$v_3 = -\frac{\alpha}{2} t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \Rightarrow v_{3Q} = (u + \frac{\alpha}{2} t u_t) \frac{\partial}{\partial u}$$

Le calcul des nouveaux courants conservés nous fournit les résultats

suivants :

$$\text{pr } v_{1Q}(N_2) = N_{12} = \begin{cases} -u_x^{\alpha+1} (u_x + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tx} + x u_{xx}) - u_t (\frac{\alpha+2}{2} u_t + x u_{tx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tt}) \\ u_t (u_x + x u_{xx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tx}) + u_x (x u_{tx} + \frac{\alpha+2}{2} u_t + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tt}) \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\text{pr } v_{3Q}(N_2) = N_{32} = \begin{cases} u_x^{\alpha+1} (u_x + \frac{1}{2} \alpha t u_{tx}) + u_t (\frac{\alpha+2}{2} u_t + \frac{1}{2} \alpha t u_{tt}) \\ -u_t (u_x + \frac{1}{2} \alpha t u_{tx}) - u_x (\frac{\alpha+2}{2} u_t + \frac{1}{2} \alpha t u_{tt}) \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\text{pr } v_{1Q}(N_4) = N_{14} = \begin{cases} t u_x^\alpha (u_x + x u_{xx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tx}) \\ x u_x - t (x u_{tx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tt}) \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\text{pr } v_{3Q}(N_4) = N_{34} = \begin{cases} -t u_x^\alpha (u_x + \frac{\alpha}{2} t u_{tx}) \\ -u + t (u_t + \frac{\alpha}{2} t u_{tt}) \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\text{pr } v_{1Q}(N_5) = N_{15} = \begin{cases} u_x^\alpha (u_x + x u_{xx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tx}) \\ -(x u_{tx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tt} + \frac{\alpha+2}{2} u_t) \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\text{pr } v_{3Q}(N_5) = N_{35} = \begin{cases} -u_x^\alpha (u_x + \frac{\alpha}{2} t u_{tx}) \\ u_t + \frac{\alpha}{2} t u_{tt} + \frac{\alpha}{2} u_t \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\text{pr } v_{1Q}(N_6) = N_{16} = \begin{cases} -\frac{u_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (x u_{tx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tt} + \frac{\alpha+2}{2} u_t) - u_x^\alpha u_t (u_x + x u_{xx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tx}) \\ \frac{u_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (u_x + x u_{xx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tx}) + u_t (x u_{tx} + \frac{\alpha+2}{2} t u_{tt} + \frac{\alpha+2}{2} u_t) \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\text{pr } v_{3Q}(N_6) = N_{36} = \begin{cases} (u_x + \frac{\alpha}{2} t u_{tx}) u_t u_x^\alpha + \frac{u_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\frac{\alpha+2}{2} u_t + \frac{\alpha}{2} t u_{tt}) \\ -\frac{u_x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (u_x + \frac{\alpha}{2} t u_{tx}) - u_t (\frac{\alpha+2}{2} u_t + \frac{\alpha}{2} t u_{tt}) \end{cases} \quad (4.28)$$

Ayant déterminé ces nouveaux courants conservés, nous montrons alors que ces courants sont équivalents aux courants conservés déjà obtenus à savoir N_2, N_4, N_5 ou N_6 mais qu'ils ne suivent pas le procédé de construction à savoir celui que l'on obtient en travaillant avec des symétries variationnelles, en supposant $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -4$.

De façon plus explicite ; nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_{12} \sim -\frac{\alpha+2}{2} N_2 & ; \quad N_{32} \sim \frac{\alpha+4}{2} N_2 \\ N_{14} \sim -(\alpha+1) N_4 & ; \quad N_{34} \sim N_4 \\ N_{15} \sim -\frac{\alpha}{2} N_5 & ; \quad N_{35} \sim N_5 \\ N_{16} \sim -(\alpha+1) N_6 & ; \quad N_{36} \sim (\alpha+2) N_6 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Si les symétries v_1 et v_3 étaient des symétries variationnelles de l'équation nous aurions dû obtenir

N_{15} loi triviale (car $[v_1, v_3] = 0$ et $\alpha \neq 0$).

N_{32} loi triviale (car $[v_3, v_2] = 0$ et $\alpha \neq -4$).

De cette dernière étude, nous pouvons tirer deux conclusions :

* L'hypothèse sur la symétrie variationnelle est absolument indispensable pour la validité du théorème ; une symétrie de l'équation est insuffisante.

* v étant une symétrie de l'équation $\Delta u = 0$, mais non variationnelle et N étant un courant conservé, associé par le théorème de Noether, à une symétrie variationnelle nous avons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \text{pr } v_Q(N) \sim N & \quad \text{pour } v = v_1, v_3 \\ N &= N_2, N_4, N_5, N_6 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus pour cet exemple sous forme de deux tableaux ; un pour les symétries variationnelles du système et un pour les symétries du système $\Delta u = 0$.

Tableau n°1 : Symétries non variationnelles :

$\text{pr } v_Q(N) \sim$	N_2	N_4	N_5	N_6
v_1	$-\frac{\alpha+2}{2} N_2$	$-(\alpha+1)N_4$	$-\frac{\alpha}{2} N_5$	$-(\alpha+1) N_6$
v_3	$\frac{\alpha+4}{2} N_2$	N_4	N_5	$(\alpha+2) N_6$

(4.31)

soit $\text{pr } v_Q(N) \sim N$.

Tableau n°2 : Symétries variationnelles :

$\text{pr } v_Q(N) \sim$	N_2	N_4	N_5	N_6
v_2	loi triviale	loi triviale	loi triviale	loi triviale
v_4	loi triviale	loi triviale	loi triviale	N_5
v_5	loi triviale	loi triviale	loi triviale	loi triviale
v_6	loi triviale	N_5	loi triviale	loi triviale

(4.32)

soit $\text{pr } v_{Q_i}(N_j) \sim N_{ij}$ où N_{ij} loi de conservation associée à $[v_i, v_j]$

pour $i = 2, 4, 5, 6$.

$j = 2, 4, 5, 6$

APPENDICE.

Pour l'étude de ce premier exemple, nous avons utilisé un article de Vinokourov et Nourgalieva intitulé : "Une base de lois de conservation" [15].

Dans cet article, l'expression donnée pour la transformation de Legendre $FL(\dot{u} ; v)$ est la même que celle que l'on trouve dans les articles de Khamitova [5] et d'Ibragimov [4]. Plus exactement, c'est ce que les auteurs appellent l'opérateur de Noether appliqué au Lagrangien.

Nous avons calculé dans un premier temps les symétries, puis les symétries variationnelles de l'équation, puis les lois de conservation associées grâce aux théorèmes énoncés aux chapitres précédents et nous avons pu ainsi vérifier que nous retrouvions les mêmes résultats que dans l'article original. Ceci nous permettait ensuite de former le tableau des crochets des champs de vecteurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ des symétries ordinaires de l'équation.

Dans une dernière partie, nous avons voulu illustrer le théorème (3.2) sur cet exemple : nous avons donc calculé $pr_{v_{Q_i}}(N_j)$ pour v_{Q_i} appartenant à $\mathcal{L}$ et N_j une loi de conservation associée à une symétrie variationnelle par le théorème de Noether.

Nous avons ainsi mis en évidence que l'hypothèse de symétrie variationnelle est indispensable en calculant explicitement les nouvelles loi obtenues $pr_{v_{Q_i}}(N_j)$ pour v_{Q_i} symétrie ordinaire mais non variationnelle de l'équation. Ces résultats sont résumés dans le tableau n°1.

Le tableau n°2 permet de voir qu'appliquant une symétrie variationnelle à une loi de conservation déjà connue, on n'obtient que des lois triviales sauf dans deux cas où l'on retrouve une des lois N_j déjà calculées. Le calcul a été

fait de façon complète, pour trouver de manière explicite les lois triviales qui sont toutes de deuxième espèce.

Toute cette dernière partie n'apparaît pas dans l'article de référence. Vinokourov et Nourgalieva calculent seulement, dans le cas $N_j = N_2$ les nouvelles lois $\text{pr } v_{Q_1}(N_2)$ mais ne signalent pas qu'elles sont triviales.

Enfin, on peut y signaler une erreur d'imprimerie dans la première composante de la loi $N_{12} = \text{pr } v_{Q_1}(N_2)$ où un signe "moins" apparaît à la place d'un signe "plus".

B. EXEMPLE II : L'équation des ondes courtes :

On considère ici l'équation des ondes courtes sous sa forme réduite :

$$u_{yy} + 2u_{xt} - 2(x+u_x)u_{xx} + 2k u_x = 0 \quad (4.33)$$

où k est une constante réelle.

Ici le fibré F est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de base $\mathbb{R}^3$; la base est munie des coordonnées (x, y, t) , et la fibre-type $\mathbb{R}$ est munie de la coordonnée (u) .

L'opérateur différentiel scalaire considéré est d'ordre 2 sur F et pour toute section u de F :

$$\Delta(u) = u_{yy} + 2u_{xt} + 2ku_x - 2(x+u_x)u_{xx}$$

Il dérive d'un Lagrangien L sur F d'ordre 1 : $\Delta(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u)$ pour toute section u du fibré et, on a, au facteur intégrant $e^{(2k+1)t}$ près :

$$L(u) = e^{2(k+1)t} \left(u_t u_x - \frac{1}{3} u_x^3 - x u_x^2 + \frac{1}{2} u_y^2 \right). \quad (4.34)$$

Le système $\Delta(u) = 0$ est un système totalement non dégénéré. En effet l'équation considérée est de type Kovalevskaya puisque on peut la mettre sous la forme

$$u_{yy} = -2 u_{xt} - 2k u_x + 2(x+u_x)u_{xx}.$$

Le système étant analytique, il est alors localement résoluble, en utilisant une conséquence du théorème de Cauchy-Kovalevskaya. De même, tout prolongement de cette équation différentielle est aussi un système de type Kovalevskaya qui est analytique, donc à nouveau localement résoluble.

Tout prolongement du système initial est de rang maximal. En effet on considère, pour ℓ quelconque, le prolongement d'ordre ℓ noté $\Delta^{(\ell)}$ qui est un opérateur différentiel de $J^{2+\ell}F$ dans $\mathbb{R}^N$ où $N = \sum_{k=0}^{\ell} C_{k+2}^k$. $\Delta^{(\ell)}(u) = 0$ re-

présente le système $(D_J(\Delta(u)))_J$ où J est un multi-indice (i_1, i_2, i_3) vérifiant $0 \leq |J| \leq l$. $\Delta^{(l)}(u) = 0$ est donc formé par N équations différentielles.

Le rang de la matrice jacobienne associée à l'opérateur $\Delta^{(l)}$ est maximal (soit N) car le système différentiel est de type Kovalevskaya donc $\frac{\partial \Delta^J}{\partial u_I} = 1$ dès que $I = J + 2e_3$ où $e_3 = (0, 0, 1)$ avec $u_{e_3} = u_y$.

Ainsi tout prolongement de l'équation différentielle $\Delta(u) = 0$ est bien de rang maximal et l'équation initiale des ondes courtes est donc totalement non dégénérée.

Recherche des symétries ordinaires de l'équation :

Soit v un champ de vecteurs généralisé sur F , symétrie de l'équation $\Delta(u) = 0$: (pr $v \cdot \Delta$)(u) = 0 pour toute section u solution de $\Delta(u) = 0$, v s'écrit :

$$v = \xi^x[u] \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y[u] \frac{\partial}{\partial y} + \xi^t[u] \frac{\partial}{\partial t} + \eta[u] \frac{\partial}{\partial u}$$

et sa forme d'évolution v_Q :

$$v_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} = (\eta - \xi^x u_x - \xi^y u_y - \xi^t u_t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Sur les solutions de $\Delta(u) = 0$; pr $v \cdot \Delta(u) = 0 \Leftrightarrow$ pr $v_Q \Delta(u) = 0$. D'où l'équation déterminant les symétries généralisées de l'équation $\Delta(u) = 0$:

$$(*) \quad Q_{yy} + 2Q_{xt} + 2(k - u_{xx})Q_x - 2(x + u_x)Q_{xx} = 0 \quad (4.35)$$

pour toute section u vérifiant $\Delta(u) = 0$.

Si on recherche les symétries ordinaires de l'équation, $\xi^x = \xi^x(t, x, y, u)$
 $\xi^y = \xi^y(x, y, t, u)$; $\xi^t = \xi^t(x, y, t, u)$, $\eta = \eta(x, y, t, u)$ et $Q = \eta - \xi^x u_x - \xi^y u_y - \xi^t u_t$.

On calcule alors $Q_x, Q_{xx}, Q_{xt}, Q_{yy}$ et on forme l'équation déterminante (*) qui nous fournit par suite un système d'équations aux dérivées partielles où les inconnues sont les fonctions $\eta, \xi^x, \xi^y, \xi^t$. La résolution de ces équations (qui ne

sont pas toutes indépendantes) donne :

a) $\boxed{\text{pour } k \neq 2, \quad k \neq \frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} Q = & a_1 u_t + [a_2 x + \mu'(t)y - \chi(t)]u_x + \left[\frac{a_2}{2} y - \mu(t)\right]u_y - 2 a_2 u \\ & + [\mu'(t) + \mu''(t)]xy - [\chi(t) + \chi'(t)]x - \frac{y^3}{3} d_k(\mu'(t)) + y^2 d_k(\chi(t)) \\ & + \lambda(t)y + \sigma(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec a_1, a_2 constantes, $\mu(t)$, $\chi(t)$, $\lambda(t)$, $\sigma(t)$ fonctions arbitraires de t et d_k désigne l'opérateur vérifiant pour toute fonction $f(t)$:

$$d_k(f(t)) = f''(t) + (k+1) f'(t) + k f(t)$$

et donc on obtient la forme générale des symétries ordinaires de l'équation des ondes courtes :

$$\begin{aligned} v = & -a_1 \frac{\partial}{\partial t} - [a_2 x + \mu'(t)y - \chi(t)] \frac{\partial}{\partial x} - \left[\frac{a_2}{2} y - \mu(t)\right] \frac{\partial}{\partial y} \\ & + (-2a_2 u + (\mu' + \mu'')xy - (\chi + \chi')x - \frac{1}{3} y^3 d_k \mu' + y^2 d_k \chi + \lambda y + \sigma) \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les symétries ordinaires forment donc une algèbre de Lie de dimension infinie dont les générateurs sont :

1) pour $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $\mu(t) = \chi(t) = \lambda(t) = \sigma(t) = 0$ on obtient

$$v_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.38)$$

2) pour $a_1 = -9$, $a_2 = 4(k+1)$, $\mu(t) = \chi(t) = \lambda(t) = \sigma(t) = 0$ on obtient :

$$v_1 = 9 \frac{\partial}{\partial t} - 4(k+1)x \frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y \frac{\partial}{\partial y} - 8(k+1)u \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.39)$$

3) Pour $a_1 = a_2 = 0$, $\chi(t) = \lambda(t) = \sigma(t) = 0$ on obtient

$$v_2 = -\mu'(t)y \frac{\partial}{\partial x} + \mu(t) \frac{\partial}{\partial y} + [(\mu' + \mu'')xy - \frac{y^3}{3} d_k \mu'] \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.40)$$

On notera dans la suite, μ étant une fonction arbitraire du temps, $v_2 = v_2(\mu)$.

4) pour $a_1 = a_2 = 0$, $\mu(t) = \lambda(t) = \sigma(t) = 0$ on obtient

$$v_3 = \chi(t) \frac{\partial}{\partial x} + [-(\chi + \chi')x + y^2 d_k \chi] \frac{\partial}{\partial u} = v_3(\chi) \quad (4.41)$$

5) pour $a_1 = a_2 = 0$, $\mu(t) = \chi(t) = \sigma(t) = 0$ on obtient

$$v_4 = \lambda y \frac{\partial}{\partial u} = v_4(\lambda) \quad (4.42)$$

6) pour $a_1 = a_2 = 0$, $\mu(t) = \chi(t) = \lambda(t) = 0$ on obtient

$$v_5 = \sigma \frac{\partial}{\partial u} = v_5(\sigma) \quad (4.43)$$

En conclusion, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ des symétries ordinaires de l'équation des ondes courtes est de dimension infinie.

Dans le cas où $k \neq 2$ et $k \neq \frac{1}{2}$, une base est formée des champs de vecteurs $\{v_0, v_1, v_2(\mu), v_3(\chi), v_4(\lambda), v_5(\sigma)\}$ où μ, χ, λ et σ sont des fonctions arbitraires du temps t .

b) pour $k = 2$ ou $k = \frac{1}{2}$

La caractéristique Q de la symétrie d'évolution ordinaire de l'équation des ondes courtes est de la forme :

$$\begin{aligned}
 Q = & -9a(t)u_t + \{[4(k+1)a-3a'+c]x + [3a''-(k+1)a']y^2 + \mu'(t)y-\chi(t)\}u_x \\
 & + \{[-6a'+2(k+1)a+\frac{c}{2}]y-\mu(t)\}u_y + [-8(k+1)a-(3a'+2c)]u \\
 & + [-3a''+(4k-5)a']\frac{x^2}{2} + [3a''' +(2-k)a''-(k+1)a']xy^2 + (\mu'+u'')xy \\
 & - (\chi+\chi')x - \frac{1}{6}y^4(3a''' +2(k+1)a'''-(k^2-k+1)a''-k(k+1)a') \\
 & - \frac{1}{3}y^3d_k(\mu') + y^2d_k(\chi) + \lambda(t)y + \sigma(t)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

avec c constante et $a(t)$, $\mu(t)$, $\chi(t)$, $\sigma(t)$ fonctions arbitraires de t .

On remarque que pour $a(t) = \text{constante} = a$ on retrouve la forme générale de la caractéristique Q obtenue pour $k \neq 2$ et $k \neq \frac{1}{2}$; il suffit de poser

$$\begin{cases} a_1 = -9a \\ a_2 = 4(k+1)a+c \end{cases}$$

Ainsi dans le cas $k = 2$ ou $\frac{1}{2}$, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ des symétries ordinaires de l'équation des ondes courtes contient la précédente algèbre de Lie $\mathcal{L}$.

$\mathcal{L}$ est engendrée par les précédents champs de vecteurs v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 auxquels s'ajoute v_6 obtenu pour $c = 0$, $\mu(t) = \chi(t) = 0$, $\lambda(t) = \sigma(t) = 0$ et $a = a(t)$ fonction arbitraire de t .

$$\begin{aligned}
 v_6 = v_6(a(t)) = & 9a(t)\frac{\partial}{\partial t} + \{[-4(k+1)a+3a']x + [(k+1)a'-3a'']y^2\}\frac{\partial}{\partial x} \\
 & + \{[6a'-2(k+1)a]y\}\frac{\partial}{\partial y} + \{(-8(k+1)a-3a')u + \frac{x^2}{2}(-3a''+(4k-5)a') \\
 & + xy^2(3a''' +(2-k)a''-(k+1)a') - \frac{1}{6}y^4(3a''' +2(k+1)a'''-(k^2-k+1)a''-k(k+1)a')\}\frac{\partial}{\partial u}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Recherche des symétries variationnelles de l'équation :

Les symétries variationnelles ordinaires de l'équation des ondes courtes forment une sous algèbre $\mathcal{L}_L$ de l'algèbre de Lie des symétries ordinaires de l'équation.

Le calcul nous montre que seul v_0 n'est pas une symétrie variationnelle.

Ainsi dans le cas général $k \neq 2$, $k \neq \frac{1}{2}$, l'algèbre de Lie $\mathcal{H}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation est engendrée par v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et dans le cas $k = 2$ ou $\frac{1}{2}$, $\mathcal{H}_L$ est engendrée par $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.

Recherche des lois de conservation :

L'équation des ondes courtes étant une équation d'Euler-Lagrange, le théorème de Noether nous fournit une forme explicite des lois de conservation v_i associées aux symétries variationnelles v_i pour $i = 1$ à 5.

La base étant $\mathbb{R}^3$ orientée par l'élément de volume $\omega = dt \wedge dx \wedge dy$ nous associons à toute loi de conservation v qui est un opérateur différentiel sur F à valeurs dans $\Lambda^2(T^*\mathbb{R}^3)$, et qui s'écrit donc :
 $\mathcal{V}(u) = v^1 dx \wedge dy + v^2 dt \wedge dy + v^3 dt \wedge dx$, un vecteur N , appelé vecteur courant conservé associé à v , de composantes $N^t = -v^1$; $N^x = v^2$; $N^y = -v^3$.

cas général $k \neq 2, \frac{1}{2}$

$$1) \quad v_1 = 9 \frac{\partial}{\partial t} - 4(k+1)x \frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y \frac{\partial}{\partial y} - 8(k+1)u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Le vecteur courant conservé N_1 a pour composantes :

$$N_1 = \begin{cases} N_1^t = 9L + e^{2(k+1)t} Q_1 u_x \\ N_1^x = -4(k+1)x L + e^{2(k+1)t} Q_1 (u_t - 2xu_x - u_x^2) \\ N_1^y = -2(k+1)y L + e^{2(k+1)t} Q_1 u_y \end{cases} \quad (4.46)$$

où L désigne le Lagrangien $L = e^{2(k+1)t} (u_t u_x - \frac{1}{3} u_x^3 - x u_x^2 + \frac{1}{2} u_y^2)$ et Q_1 désigne la caractéristique du champ d'évolution v_{Q_1} associé à v_1 ;

$$Q_1 = -8(k+1)u - 9u_t + 4(k+1)x u_x + 2(k+1)y u_y$$

$$2) v_2 = -\mu'(t)y \frac{\partial}{\partial x} + \mu(t) \frac{\partial}{\partial y} + [(\mu' + \mu'')xy - \frac{1}{3} y^3 d_k \mu'] \frac{\partial}{\partial u} = v_2(\mu) \text{ et}$$

$$v_2 \cdot L = \text{div } B_2 \text{ où } B_2 = \begin{cases} e^{2(k+1)t} x u (\mu' + \mu'') y = B_2^t \\ e^{2(k+1)t} x u ((\mu''' - \mu'' - 2\mu')xy - \frac{1}{3} y^3 d_k \mu'') = B_2^x \\ e^{2(k+2)t} x u ((\mu' + \mu'')x - y^2 d_k \mu') = B_2^y \end{cases} \quad (4.47)$$

Le vecteur courant conservé N_2 a donc pour composantes :

$$N_2 = N_2(\mu) \begin{cases} N_2^t = e^{2(k+1)t} Q_2 u_x - e^{2(k+1)t} u y (\mu' + \mu'') \\ N_2^x = e^{2(k+1)t} Q_2 (u_t - u_x^2 - 2xu_x) - [\mu'(t) y] L - B_2^x \\ N_2^y = e^{2(k+1)t} Q_2 (u_y) + \mu(t) L - B_2^y \end{cases} \quad (4.48)$$

où Q_2 désigne la caractéristique du champ d'évolution associé à v_2 :

$$Q_2 = (\mu' + \mu'')xy - \frac{1}{3} y^3 d_k \mu' + \mu'(t) y u_x - \mu(t) u_y$$

$$3) v_3 = \chi(t) \frac{\partial}{\partial x} + [-(\chi + \chi')x + y^2 d_k \chi] \frac{\partial}{\partial u} = v_3(\chi) \text{ et}$$

$$v_3 \cdot L = \text{div } B_3 \text{ où } B_3 = \begin{cases} B_3^t = -e^{2(k+1)t} u (\chi + \chi') \\ B_3^x = e^{2(k+1)t} u [(2\chi + \chi' - \chi'')x + y^2 d_k \chi'] \\ B_3^y = e^{2(k+1)t} u 2y d_k \chi \end{cases} \quad (4.49)$$

et le vecteur courant conservé N_3 a pour composantes :

$$N_3 = N_3(\chi) = \begin{cases} N_3^t = e^{2(k+1)t} Q_3 u_x + (\chi + \chi') e^{2(k+1)t} u \\ N_3^x = e^{2(k+1)t} Q_3 [u_t - u_x^2 - 2xu_x] + \chi(t) L - B_3^x \\ N_3^y = e^{2(k+1)t} Q_3 u_y - 2y d_k(\chi) u - e^{2(k+1)t} \end{cases} \quad (4.50)$$

où Q_3 désigne la caractéristique du champ d'évolution associé à v_3

$$Q_3 = -(\chi + \chi')x + y^2 d_k \chi - \chi(t) u_x$$

4) $v_4 = \lambda(t) y \frac{\partial}{\partial u} = v_4(\lambda)$ et v_4 est un champ d'évolution
 $v_4 = v_{Q_4}$ où $Q_4 = \lambda(t)y$

$$v_4 \cdot L = \text{div } B_4 \text{ avec } B_4 = \begin{cases} B_4^t = 0 \\ B_4^x = \lambda' y e^{2(k+1)t} u \\ B_4^y = \lambda e^{2(k+1)t} u \end{cases} \quad (4.51)$$

Les composantes du courant conservé N_4 sont donc

$$N_4 = N_4(\lambda) \begin{cases} N_4^t = e^{2(k+1)t} Q_4 u_x \\ N_4^x = e^{2(k+1)t} Q_4 [u_t - u_x^2 - 2xu_x] - B_4^x \\ N_4^y = e^{2(k+1)t} Q_4 u_y - B_4^y \end{cases} \quad (4.52)$$

$$5) v_5 = \sigma(t) \frac{\partial}{\partial u} = v_5(\sigma)$$

$$v_5 = v_{Q_5} \text{ où } Q_5 = \sigma(t) \text{ et } v_5 \cdot L = \text{div } B_5 \text{ avec } B_5 = \begin{cases} B_5^t = 0 \\ B_5^x = \sigma' u e^{2(k+1)t} \\ B_5^y = 0 \end{cases}$$

Le vecteur courant conservé N_5 a donc pour composantes

$$N_5 = N_5(\sigma) \begin{cases} N_5^t = e^{2(k+1)t} Q_5 u_x \\ N_5^x = e^{2(k+1)t} Q_5 (u_t - u_x^2 - 2xu_x) - \sigma' u e^{2(k+1)t} \\ N_5^y = e^{2(k+1)t} Q_5 u_y \end{cases} \quad (4.53)$$

6) Dans le cas particulier $k = 2$ ou $k = \frac{1}{2}$, aux vecteurs courants conservés N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 s'ajoute N_6 , vecteur courant conservé associé à v_6 .

$$v_6 = v_6(a) = 9a \frac{\partial}{\partial t} + \{[-4(k+1)a+3a']x + [(k+1)a'-3a'']y^2\} \frac{\partial}{\partial x} \\ + \{6a'-2(k+1)a\}y \frac{\partial}{\partial y} + \{-(8(k+1)a+3a')u + \frac{x^2}{2}(-3a''+(4k-5)a') \\ + xy^2(3a'''+(2-k)a''-(k+1)a') - \frac{1}{6}y^4(a''''+2(k+1)a''' - (k^2-k+1)a''-k(k+1)a')\} \frac{\partial}{\partial u}$$

et $v_6 \cdot L = \text{div } B_6$ avec

$$B_6 = \begin{cases} B_6^t = \{-x(3a''+(5-4k)a') + y^2(3a'''+(2-k)a''-(k+1)a')\}e^{2(k+1)t} & u \\ B_6^x = \{x^2(-\frac{3}{2}a''''+(2k+\frac{7}{2})a''' + 2(5-4k)a'') \\ + xy^2(3a''''-(4+k)a''' + (k-5)a'' + 2(k+1)a') \\ - \frac{1}{6}y^4(3a'''''+2(k+1)a'''' - (k^2-k+1)a''' - k(k+1)a'') \\ - \frac{1}{2}u(3a''+8(k+1)a')\} & u e^{2(k+1)t} \\ B_6^y = \{2xy(3a'''+(2-k)a''-(k+1)a') - \frac{2}{3}y^3(3a''''+2(k+1)a'''-(k^2-k+1)a'' \\ - k(k+1)a')\} & e^{2(k+1)t} u \end{cases} \quad (4.54)$$

D'où les composantes du vecteur courant conservé N_6 :

$$B_6 = N_6(a) \begin{cases} N_6^t = e^{2(k+1)t} Q_6 u_x + 9a L - B_6^t \\ N_6^x = e^{2(k+1)t} Q_6 (u_t - u_x^2 - 2xu_x) + L\{(-4(k+1)a+3a')x + ((k+1)a'-3a'')y^2\} \\ - B_6^x \\ N_6^y = e^{2(k+1)t} Q_6 u_y + L\{(6a'-2(k+1)a)y\} - B_6^y \end{cases} \quad (4.55)$$

Nous avons donc déterminé les lois de conservation associées aux symétries variationnelles ordinaires de l'équation des ondes courtes. Comme les symétries variationnelles (ordinaires) $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ engendrent l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{F}}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation des ondes courtes, toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire s'écrit donc, à équivalence près, comme combinaison linéaire des lois de conservations

$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$.

Cependant, nous allons voir que le théorème principal permet de réduire le nombre de lois de conservations nécessaire pour engendrer toutes les lois de conservation associées à une symétrie variationnelle ordinaire.

Formons d'abord le tableau des crochets de champs de vecteurs de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{A}}$ (qui contient l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{A}}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation des ondes courtes dans le cas général $k \neq 2$ et $k \neq \frac{1}{2}$).

$[v_i, v_j]$	v_1	$v_2(\mu)$	$v_3(\chi)$	$v_4(\lambda)$	$v_5(\sigma)$	$v_6(a)$
v_1	0	$v_2(\mu_1)$	$v_3(\chi_1)$	$v_4(\lambda_1)$	$v_5(\sigma_1)$	$v_6(a_1)$
$v_2(\mu)$	$-v_2(\mu_1)$	0	$-v_4(\lambda_2)$	0	0	$-v_2(\mu_6)$
$v_3(\chi)$	$-v_3(\chi_1)$	$v_4(\lambda_2)$	0	0	0	$-v_3(\chi_6)$
$v_4(\lambda)$	$-v_4(\lambda_1)$	0	0	0	0	$-v_4(\lambda_6)$
$v_5(\sigma)$	$-v_5(\sigma_1)$	0	0	0	0	$-v_5(\sigma_6)$
$v_6(a)$	$-v_6(a_1)$	$v_2(\mu_6)$	$v_3(\chi_6)$	$v_4(\lambda_6)$	$v_5(\sigma_6)$	0

(4.56)

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(t) = 9\mu'(t) + 2(k+1)\mu(t) \\ \chi_1(t) = 9\chi'(t) + 4(k+1)\chi(t) \\ \lambda_1(t) = 9\lambda'(t) + 6(k+1)\lambda(t) \\ \sigma_1(t) = 9\sigma'(t) + 8(k+1)\sigma(t) \\ a_1(t) = 9a'(t) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mu_6(t) = \mu(t) \quad [2(k+1)a(t) - 6a'(t)] + 9a(t)\mu'(t) \\ \chi_6(t) = \chi(t) \quad [4(k+1)a(t) - 3a'(t)] + 9a(t)\chi'(t) \\ \lambda_6(t) = \lambda(t) \quad [6(k+1)a(t) + 9a'(t)] + 9a(t)\lambda'(t) \\ \sigma_6(t) = \sigma(t) \quad [8(k+1)a(t) + 3a'(t)] + 9a(t)\sigma'(t) \\ \lambda_6(t) = \chi(t)\mu''(t) - \chi'(t)\mu'(t) - 2\mu(t)d_k\chi(t) \end{array} \right. \quad (4.57)$$

Montrons, pour conclure l'étude de cet exemple, que N_1 suffit à engendrer toutes les lois de conservation associées à une symétrie variationnelle ordinaire, ceci à équivalence près. En effet, pour $i = 2, 3, 4, 5, 6$ nous avons

$$[v_i(g_i), v_1] = -v_i(f_i)$$

$$\text{où } f_2 = \mu_1 ; f_3 = \chi_1 ; f_4 = \lambda_1 ; f_5 = \sigma_1 ; f_6 = a_1$$

$$\text{et } g_2 = \mu ; g_3 = \chi ; g_4 = \lambda ; g_5 = \sigma ; g_6 = a.$$

Donc on sait que $\text{pr } v_{Q_1(g_i)} N_1$ est une loi de conservation (ou courant conservé) pour l'équation des ondes courtes, qui est équivalente à une loi de conservation associée à la symétrie variationnelle $[v_i, v_1]$. Or $[v_i, v_1] = -v_i(f_i)$; donc la loi de conservation associée par le théorème de Noether à $[v_i, v_1]$ est équivalente à N_1 .

Ainsi on obtient le résultat suivant :

$$\text{pr } v_{Q_1(g_i)} (N_1) \sim -N_1(f_i) \text{ pour } i = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.58)$$

où g_i est une fonction arbitraire du temps et f_i une combinaison linéaire de g_i et g_i' à coefficients constants.

En conclusion, les symétries variationnelles ordinaires de l'équation des ondes courtes ayant été calculées, il suffit de déterminer N_1 (loi de conservation associée à $v_1 = 9 \frac{\partial}{\partial t} - 4(k+1)x \frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y \frac{\partial}{\partial y} - 8(k+1)u \frac{\partial}{\partial u}$) pour

obtenir, à équivalence près, les autres lois de conservation N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 respectivement associées à v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , et donc toutes les lois de conservation associées à une symétrie variationnelle ordinaire. En effet, ayant obtenu $N_1(f_1)$ par le calcul précédent, on peut alors trouver $N_i = N_1(g_i)$ puisque $f_i(t) = 9 g_i'(t) + \alpha_i g_i(t)$ avec α_i réel et les fonctions utilisées étant C^∞ , l'équation différentielle possède toujours une solution.

Nous pouvons vérifier, dans un cas particulier, l'équivalence

$$\text{pr } v_{Q_i}(N_1) \sim N_i$$

pour $i = 5$, $v_5 = \sigma \frac{\partial}{\partial u} = v_{Q_5}$ et $[v_5, v_1] = -v_5(\sigma_1)$ où $\sigma_1 = 9\sigma' + 8(k+1)\sigma$.

Le nouveau vecteur courant conservé associé à $-v_5(\sigma_1) = [v_5, v_1]$ que l'on notera $N_5(\sigma_1)$ a pour composantes :

$$N_5(\sigma_1) = \begin{cases} -e^{2(k+1)t} u_x (8(k+1)\sigma + 9\sigma') = N_5^t(\sigma_1) \\ -e^{2(k+1)t} (u_t^2 - u_x^2 - 2xu_x) (8(k+1)\sigma + 9\sigma') + e^{2(k+1)t} u (8(k+1)\sigma' + 9\sigma'') = N_5^x(\sigma_1) \\ -e^{2(k+1)t} u_y (8(k+1)\sigma + 9\sigma') = N_5^y(\sigma_1) \end{cases}$$

Le calcul des composantes du vecteur courant conservé $\text{pr } v_{Q_5}(N_1)$ nous fournit :

$$\text{pr } v_{Q_5}(N_1) = N_{51} = \begin{cases} N_{51}^t = -e^{2(k+1)t} u_x (8(k+1)\sigma) \\ N_{51}^x = e^{2(k+1)t} \{-8(k+1)\sigma' u - [8(k+1)\sigma + 18\sigma'] u_t \\ \quad + [8(k+1)\sigma + 9\sigma'] u_x^2 + 2[8(k+1)\sigma + 9\sigma'] x u_x \\ \quad + 2(k+1)y\sigma' u_y\} \\ N_{51}^y = -e^{2(k+1)t} \{(8(k+1)\sigma + 9\sigma') u_y + 2(k+1)\sigma' y u_x\} \end{cases} \quad (4.59)$$

Ainsi la différence des deux courants conservés a pour composantes

$$\Delta_{51} = N_{51} - N_5(\sigma_1) = \begin{cases} \Delta_{51}^t = e^{2(k+1)t} & 9\sigma' u_x \\ \Delta_{51}^x = e^{2(k+1)t} & \{\sigma'(-9u_t + 2(k+1)y u_y - 16(k+1)u) - 9\sigma''u\} \\ \Delta_{51}^y = -e^{2(k+1)t} & 2(k+1)y \sigma' u_x \end{cases}$$

et un calcul immédiat nous montre que $\text{div } \Delta_{51} \equiv 0$ donc Δ_{51} est une loi de conservation triviale de 1^{er} espèce et par conséquent $N_{51} = \text{pr } v_{Q_5}(N_1)$ et $N_5(\sigma_1)$ sont deux lois de conservation équivalentes.

Conclusion: Cette étude de l'équation des ondes courtes nous a permis de constater que l'on pouvait réduire le nombre de lois de conservation (associées à des symétries variationnelles d'un système d'Euler-Lagrange) calculées à partir du théorème de Noether, nécessaires pour engendrer, à équivalence près, toutes les autres lois de conservation associées à une symétrie variationnelle.

APPENDICE

Dans cet exemple, nous nous sommes inspirés d'un article de R.S. Khamitova intitulé : "Structure de groupe et base de lois de conservation" [5] .

L'expression de la transformation de Legendre $FL(u ; v)$ est la même que celle qui apparaît dans l'article de Vinokourov et Nourgalieva que nous avons mentionné dans l'appendice du premier exemple.

De même que dans l'exemple précédent, ayant calculé de manière explicite les symétries, puis les symétries variationnelles de l'équation des ondes courtes, nous avons pu vérifier que nous retrouvions les mêmes résultats que ceux parus dans l'article original.

Dans une deuxième partie, nous avons effectué le calcul des six lois de conservation associées aux symétries variationnelles de l'équation, de façon à déterminer un ensemble de générateurs pour les lois de conservation.

Ces calculs n'ont pas été faits dans l'article de référence excepté celui de la loi de conservation N_1 associée à la symétrie variationnelle v_1 . R.S. Khamitova indique seulement les expressions des vecteurs B_i vérifiant $v_i \cdot L = \text{div } B_i$ pour $i = 1, 2, 3, 6$.

On peut d'ailleurs signaler une erreur d'imprimerie dans la deuxième composante B_6^x où manque le coefficient multiplicatif u .

Pour prouver que N_1 suffit à engendrer, à équivalence près, toutes les lois de conservation, nous avons formé le tableau des crochets des champs de vecteurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles de l'équation. Les champs de vecteurs v_i de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ dépendent de fonctions arbitraires du temps et les crochets de Lie de la forme $[v_i, v_j]$ dépendent aussi de

nouvelles fonctions arbitraires que nous avons exprimées . en fonction des premières. Ces relations entre les fonctions arbitraires précédentes nous permettent de montrer que l'on peut effectivement calculer toutes les lois de conservation, à équivalence près, à partir de N_1 . La preuve réside essentiellement dans le fait que les fonctions étant C^∞ , la connaissance de $N_1(G(t))$ permet de déterminer $N_1(H(t))$ où $H(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants, dont le second membre est $G(t)$.

Nous terminons alors notre étude en vérifiant sur un cas particulier que $\text{pr}_{V_5}(N_1)$ permet d'obtenir le vecteur courant conservé N_5 . Toute cette partie est, elle aussi, complètement nouvelle par rapport à l'article de R.S. Khamitova qui indiquait seulement que N_1 permettait d'engendrer toutes les lois de conservation de l'équation des ondes courtes.

C. EXEMPLE III : L'équation de la dynamique des gaz transsonique :

Considérons ici un autre exemple pris à la Physique : l'équation de la dynamique des gaz transsonique.

$$-u_x u_{xx} - 2u_{tx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (4.60)$$

Le fibré F considéré ici est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ de base $\mathbb{R}^4$; la base est munie d'un système de coordonnées (t, x, y, z) et la fibre-type $\mathbb{R}$ est muni de la coordonnée (u) .

L'opérateur différentiel scalaire d'ordre 2 sur F , noté Δ est défini pour toute section u de F par

$$\Delta(u) = u_{yy} + u_{zz} - u_x u_{xx} - 2u_{tx} = 0.$$

L'équation différentielle $\Delta(u) = 0$ dérive d'un Lagrangien L sur F d'ordre 1. Pour toute section u du fibré F , $\Delta(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u)$ et dans une carte adaptée, l'expression du Lagrangien L est donnée par :

$$L(u) = \frac{1}{6} u_x^3 + u_t u_x - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2 \quad (4.61)$$

Le système différentiel $\Delta(u) = 0$ est un système différentiel totalement non dégénéré.

en effet, l'équation est ici encore de type Kovalevskaya puisque on peut la mettre sous la forme

$$u_{zz} = -u_{yy} + u_x u_{xx} + 2u_{tx}.$$

Le système est analytique donc localement résoluble en utilisant un corollaire du théorème de Cauchy-Kovalevskaya.

De même, tout prolongement de cette équation différentielle fournit aussi un système de type Kovalevskaya, qui, étant encore analytique, est donc localement résoluble.

Montrons maintenant que tout prolongement du système initial est de rang maximal. Pour cela, nous considérons le prolongement d'ordre ℓ de l'équation noté $\Delta^{(\ell)}$ qui est un opérateur différentiel de $J^{2+\ell}F$ dans $\mathbb{R}^N$ où

$$N = \sum_{k=0}^{\ell} C_{k+3}^k.$$

$\Delta^{(\ell)}(u) = 0$ représente le système $(D_J(\Delta)(u))_J$ formé par N équations différentielles distinctes, avec J multi-indice (i_1, i_2, i_3, i_4) vérifiant $0 \leq |J| \leq \ell$. Le rang de la matrice jacobienne associée à l'opérateur $\Delta^{(\ell)}$ est maximum (soit N) car le système différentiel est de type Kovalevskaya donc pour J un multi-indice fixé tel que $0 \leq |J| \leq \ell$, on aura $\frac{\partial \Delta^J}{\partial u_{(J+2e_4)}} = 1$, où $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $u_{e_4} = u_z$.

Ainsi l'équation de la dynamique des gaz transsonique est bien totalement non dégénérée.

Recherche des symétries de l'équation :

Soit v un champ de vecteurs généralisé sur F et v_Q sa forme d'évolution; v est de la forme :

$$v = \xi^t[u] \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x[u] \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y[u] \frac{\partial}{\partial y} + \xi^z[u] \frac{\partial}{\partial z} + \eta[u] \frac{\partial}{\partial u}$$

et

$$v_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{où} \quad Q = \eta - \xi^t u_t - \xi^x u_x - \xi^y u_y - \xi^z u_z$$

v est une symétrie de $\Delta(u) = 0 \Leftrightarrow v_Q$ est une symétrie de $\Delta(u) = 0$

$$\Leftrightarrow (\text{pr } v_Q \Delta)(u) = 0 \quad \text{pour toute section } u$$

solution de $\Delta(u) = 0$,

d'où l'équation déterminant les symétries généralisées de l'équation $\Delta(u) = 0$

$$Q_{yy} + Q_{zz} - u_x Q_{xx} - 2Q_{tx} - u_{xx} Q_x = 0 \quad (4.62)$$

pour toute section u telle que $\Delta(u) = 0$. Se restreignant maintenant aux symétries ordinaires, on a donc :

$$\xi^t = \xi^t(t, x, y, z, u) ; \xi^x = \xi^x(t, x, y, z, u) ; \xi^y = \xi^y(t, x, y, z, u)$$

$$\xi^z = \xi^z(t, x, y, z, u) \text{ et } \eta = \eta(t, x, y, z, u)$$

on calcule alors $Q_x, Q_{xx}, Q_{tx}, Q_{yy}, Q_{zz}$ et on forme l'équation déterminante qui nous fournit par suite un système d'équations aux dérivées partielles où les inconnues sont les fonctions $\eta, \xi^t, \xi^x, \xi^y, \xi^z$.

Simplifiant les écritures, nous poserons $Q = Au_t + Bu_x + Cu_y + Du_z + E$ où A, B, C, D, E sont des fonctions de t, x, y, z, u .

Le calcul de $Q_x, Q_{xx}, Q_{tx}, Q_{yy}$ et Q_{zz} nous donne :

$$\begin{aligned} \text{a) } Q_x &= \frac{\partial E}{\partial x} + u_t \frac{\partial A}{\partial x} + u_x \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial u} \right) + u_y \frac{\partial C}{\partial x} + u_z \frac{\partial D}{\partial x} + u_t u_x \frac{\partial A}{\partial u} + u_x^2 \frac{\partial B}{\partial u} + u_x u_y \frac{\partial C}{\partial u} + \\ &\quad + u_x u_z \frac{\partial D}{\partial u} + u_{tx} A + u_{xx} B + u_{xy} C + u_{xz} D. \\ \text{b) } Q_{xx} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + u_t \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + u_x \left(2 \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \right) + u_y \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u_z \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \\ &\quad + u_t u_x \left(2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial u} \right) + u_x u_y \left(2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial u} \right) + u_x u_z \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial u} \right) \\ &\quad + u_x^2 \left(2 \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right) + u_t u_x^2 \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + u_x^3 \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + u_x^2 u_y \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \\ &\quad + u_x^2 u_z \frac{\partial^2 D}{\partial u^2} + u_{tx} \left(2 \frac{\partial A}{\partial x} \right) + u_{xx} \left(2 \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial u} \right) + u_{xy} \left(2 \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ &\quad + u_{xz} \left(2 \frac{\partial D}{\partial x} \right) + u_t u_{xx} \left(\frac{\partial A}{\partial u} \right) + u_x u_{tx} \left(2 \frac{\partial A}{\partial u} \right) + u_x u_{xx} \left(3 \frac{\partial B}{\partial u} \right) \\ &\quad + u_x u_{xy} \left(2 \frac{\partial C}{\partial u} \right) + u_x u_{xz} \left(2 \frac{\partial D}{\partial u} \right) + u_y u_{xx} \frac{\partial C}{\partial u} + u_z u_{xx} \frac{\partial D}{\partial u} \\ &\quad + A u_{txx} + B u_{xxx} + C u_{xxy} + D u_{xxz}. \end{aligned}$$

c) Par symétrie, on obtient immédiatement Q_{yy} et Q_{zz}

$$\begin{aligned} d) \quad Q_{tx} = & \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} + u_t \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} \right) + u_x \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} \right) + u_y \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial x} + u_z \frac{\partial^2 D}{\partial t \partial x} \\ & + u_t^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial u} + u_t u_x \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial u} + \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \right) + u_t u_y \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial u} + u_t u_z \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial u} \\ & + u_x^2 \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial u} + u_x u_y \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial u} + u_x u_z \frac{\partial^2 D}{\partial t \partial u} + u_t^2 u_x \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} + u_t u_x^2 \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} \\ & + u_t u_x u_y \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + u_t u_x u_z \frac{\partial^2 D}{\partial u^2} + u_{tt} \frac{\partial A}{\partial x} + u_{tx} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial u} \right) \\ & + u_{ty} \frac{\partial C}{\partial x} + u_{tz} \frac{\partial D}{\partial x} + u_{xx} \frac{\partial B}{\partial t} + u_{xy} \frac{\partial C}{\partial t} + u_{xz} \frac{\partial D}{\partial t} + u_t u_{tx} \left(2 \frac{\partial A}{\partial u} \right) \\ & + u_x u_{tx} \left(2 \frac{\partial B}{\partial u} \right) + u_x u_{tt} \frac{\partial A}{\partial u} + u_t u_{xx} \left(\frac{\partial B}{\partial u} \right) + u_x u_{ty} \frac{\partial C}{\partial u} \\ & + u_x u_{tz} \frac{\partial D}{\partial u} + u_t u_{xy} \frac{\partial C}{\partial u} + u_t u_{xz} \frac{\partial D}{\partial u} + u_y u_{tx} \frac{\partial C}{\partial u} + u_z u_{tx} \frac{\partial D}{\partial u} \\ & + u_{ttx} A + u_{txx} B + u_{txy} C + u_{txz} D. \end{aligned}$$

On forme alors l'équation déterminante soit :

$$Q_{yy} + Q_{zz} - u_x Q_{xx} - 2Q_{tx} - u_{xx} Q_x = 0$$

pour toute section u vérifiant $u_{yy} + u_{zz} - u_x u_{xx} - 2u_{tx} = 0$.

Comme les fonctions A, B, C, D, E et leur dérivées partielles ne font intervenir que les variables t, x, y, z et u , l'équation déterminante nous fournit un système de 54 équations aux dérivées partielles dont 16 sont triviales.

La résolution des 24 équations indépendantes nous fournit :

$$\begin{aligned} -A &= \frac{1}{2} at^2 + bt + c \quad \text{avec } a, b, c \text{ constantes} \\ -B &= \left[\frac{1}{5} (at+b) - k \right] x + \frac{3}{10} a(y^2+z^2) + \beta'(t)y + \mu'(t)z + \chi(t) \quad (4.63) \\ &\text{avec } k \text{ constante,} \\ &\chi(t), \beta(t), \mu(t) \text{ fonctions arbitraires de } t \\ -C &= \left[\frac{3}{5} (at+b) - \frac{k}{2} \right] y + dz + \beta(t), \quad d \text{ constante} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - D &= \left[\frac{3}{5} (at+b) - \frac{k}{2} \right] z - dy + \mu(t) \\
 - E &= \left[\frac{3}{5} (at+b) + 2k \right] u - \left[\frac{a}{5} x^2 + 2(\beta''y + \mu''z + \chi')x \right] \\
 &\quad - \left\{ \beta'''(t) \left(\frac{y^3}{3} + yz^2 \right) + \mu'''(t) \left(\frac{z^3}{3} + y^2z \right) + \chi''(t)(y^2 + z^2) + f(t,y,z) \right\}
 \end{aligned}$$

où f est une fonction arbitraire de t, y, z harmonique par rapport à y et z soit $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Et la forme générale des symétries ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ est donc :

$$\begin{aligned}
 v &= -\left(\frac{1}{2} at^2 + bt + c\right) \frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \left[\frac{1}{5} (at+b) - k \right] x + \frac{3}{10} a(y^2 + z^2) + \beta'(t)y + \mu'(t)z + \chi(t) \right\} \frac{\partial}{\partial x} \\
 &\quad - \left\{ \left[\frac{3}{5} (at+b) - \frac{k}{2} \right] z - dy + \mu(t) \right\} \frac{\partial}{\partial z} - \left\{ \left[\frac{3}{5} (at+b) - \frac{k}{2} \right] y + dz + \beta(t) \right\} \frac{\partial}{\partial y} \\
 &\quad + \left\{ \left[\frac{3}{5} (at+b) + 2k \right] u - \left[\frac{a}{5} x^2 + 2(\beta''(t)y + \mu''(t)z + \chi'(t))x \right] \right. \\
 &\quad \left. - \beta'''(t) \left(\frac{1}{3} y^3 + yz^2 \right) - \mu'''(t) \left(\frac{1}{3} z^3 + y^2z \right) - \chi''(t)(y^2 + z^2) + f(t,y,z) \right\} \frac{\partial}{\partial u}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

avec a, b, c, d, k constantes, $\beta(t), \mu(t), \chi(t)$ fonctions arbitraires de t , $f(t, y, z)$ fonction harmonique en y et z c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Les symétries ordinaires forment donc une algèbre de Lie $\mathcal{A}$ de dimension infinie dont les générateurs sont :

$$1) \text{ pour } a = b = d = k = 0, \quad \beta(t) = \mu(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0, \quad c = -1$$

on obtient

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.65}$$

$$2) \text{ pour } a = c = d = k = 0, \quad b = -5, \quad \beta(t) = \mu(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0$$

on obtient :

$$v_2 = 5t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 3z \frac{\partial}{\partial z} - 3u \frac{\partial}{\partial u} \tag{4.66}$$

3) pour $a = b = c = k = 0$, $d = -1$, $\beta(t) = \mu(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0$

on obtient

$$v_4 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.67)$$

4) pour $a = -5$, $b = c = d = k = 0$, $\beta(t) = \mu(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0$

on obtient

$$v_3 = \frac{5}{2}t \frac{\partial}{\partial t} + [tx + \frac{3}{2}(y^2 + z^2)] \frac{\partial}{\partial x} + 3ty \frac{\partial}{\partial y} + 3tz \frac{\partial}{\partial z} + (-3tu + x^2) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.68)$$

5) pour $a = b = c = d = k = 0$, $\beta(t) = -g(t)$, $\mu(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0$

on obtient

$$v_5 = v_5(g) = g'(t) y \frac{\partial}{\partial x} + g(t) \frac{\partial}{\partial y} + [2g''(t)xy + g'''(t)(\frac{1}{3}y^3 + yz^2)] \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.69)$$

6) pour $a = b = c = d = k = 0$, $\mu(t) = -h(t)$, $\beta(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0$

on obtient

$$v_6 = v_6(h) = h'(t) z \frac{\partial}{\partial x} + h(t) \frac{\partial}{\partial z} + [2h''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3}z^3 + yz^2)] \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.70)$$

7) pour $a = b = c = d = k = 0$, $\chi(t) = -\sigma(t)$, $\beta(t) = \mu(t) = f(t, y, z) = 0$

on obtient

$$v_7 = v_7(\sigma) = \sigma(t) \frac{\partial}{\partial x} + [2\sigma'(t)x + \sigma''(t)(y^2 + z^2)] \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.71)$$

8) Pour $a = b = c = d = k = 0$, $\beta(t) = \mu(t) = \chi(t) = 0$, $f(t, y, z)$

fonction harmonique par rapport à y et z on obtient

$$v_8 = v_8(f) = f(t, y, z) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.72)$$

9) pour $b = -1$, $k = -\frac{6}{5}$, $a = c = d = 0$,

$\beta(t) = \mu(t) = \chi(t) = f(t, y, z) = 0$ on obtient

$$v_9 = t \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial x} - 3u \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.73)$$

Les champs de vecteurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ engendrent donc l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ des symétries ordinaires de l'équation.

Recherche des symétries variationnelles de l'équation :

L'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ forme une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, l'algèbre de Lie des symétries ordinaires de l'équation.

Le calcul nous montre que seul v_9 n'est pas une symétrie variationnelle.

Ainsi, l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles de l'équation $\Delta(u) = 0$ est de dimension infinie et est engendrée par $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$.

Recherche des Lois de conservation :

L'équation de la dynamique des gaz transsonique étant une équation d'Euler-Lagrange, le théorème de Noether nous fournit une forme explicite des lois de conservation v_i associées aux symétries variationnelles v_i pour i de 1 à 8. La base est ici $\mathbb{R}^4$ orientée par l'élément de volume $\omega = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$; Toute loi de conservation v , qui est un opérateur différentiel sur F à valeurs dans $\Lambda^3(T^*\mathbb{R}^4)$, s'écrit :

$$v(u) = v^1 dx \wedge dy \wedge dz + v^2 dt \wedge dy \wedge dz + v^3 dt \wedge dx \wedge dz + v^4 dt \wedge dx \wedge dy$$

On eut donc lui associer un vecteur "courant conservé" N de composantes :

$$\begin{cases} N^t = -v^1 \\ N^x = +v^2 \\ N^y = -v^3 \\ N^z = +v^4 \end{cases}$$

1) $v_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ et $v_1.L = 0$

Le vecteur courant conservé N_1 a pour composantes :

$$N_1 = \begin{cases} N_1^t = \frac{1}{6} u_x^3 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2 \\ N_1^x = -u_t \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u_t \right) \\ N_1^y = u_t x u_y \\ N_1^z = u_t x u_z \end{cases} \quad (4.74)$$

2) $v_2 = 5 t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 3z \frac{\partial}{\partial z} - 3 u \frac{\partial}{\partial u}$ et $v_2 \cdot L = 0$. Le vecteur courant conservé N_2 a donc pour composantes :

$$N_2 = \begin{cases} N_2^t = 5t \left(\frac{1}{6} u_x^3 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2 \right) - u_x (3u+x u_x + 3y u_y + 3z u_z) \\ N_2^x = -x \left(\frac{1}{3} u_x^3 + \frac{1}{2} u_y^2 + \frac{1}{2} u_z^2 \right) - (u_t + \frac{1}{2} u_x^2) (3u+5tu_t + 3y u_y + 3z u_z) \\ N_2^y = y \left(\frac{1}{2} u_x^3 + 3u_t u_x + \frac{3}{2} u_y^2 - \frac{3}{2} u_z^2 \right) + u_y (3u+5t u_t + x u_x + 3z u_z) \\ N_2^z = z \left(\frac{1}{2} u_x^3 + 3u_t u_x - \frac{3}{2} u_y^2 + \frac{3}{2} u_z^2 \right) + u_z (3u+5tu_t + x u_x + 3y u_y) \end{cases} \quad (4.75)$$

$$3) \quad v_3 = \frac{5}{2} t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \left[tx + \frac{3}{2} (y^2 + z^2) \right] \frac{\partial}{\partial x} + 3ty \frac{\partial}{\partial y} + 3tz \frac{\partial}{\partial z} + (-3tu+x^2) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{et} \quad v_3 \cdot L = \text{div } B_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_3^t = 2xu \\ B_3^x = -\frac{3}{2} u^2 \\ B_3^y = 0 \\ B_3^z = 0 \end{cases}$$

et le vecteur courant conservé N_3 a donc pour composantes :

$$N_3 = \begin{cases} N_3^t = \frac{5}{2} t^2 (\frac{1}{6} u_x^3 - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2) - u_x [3tu + u_x (tx + \frac{3}{2}(y^2 + z^2))] - x^2 + 3ty u_y \\ \quad + 3tz u_z] - 2xu. \\ N_3^x = -[\frac{1}{3} u_x^3 + \frac{1}{2}(u_y^2 + u_z^2)] [tx + \frac{3}{2}(y^2 + z^2)] - 3(u_t + \frac{1}{2} u_x^2) [t(u + yu_y + zu_z) \\ \quad + \frac{5}{6} t^2 u_t + \frac{1}{3} x^2] + \frac{3}{2} u^2 \\ N_3^y = 3ty [\frac{1}{6} u_x^3 + u_t u_x + \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2] + u_y [3tu - x^2 + \frac{5}{2} t^2 u_t + 3tz u_z] \\ \quad + u_x u_y (tx + \frac{3}{2}(y^2 + z^2)) \\ N_3^z = 3tz [\frac{1}{6} u_x^3 + u_t u_x - \frac{1}{2} u_y^2 + \frac{1}{2} u_z^2] + u_z [3tu - x^2 + \frac{5}{2} t^2 u_t + 3ty u_y] \\ \quad + u_x u_z (tx + \frac{3}{2}(y^2 + z^2)) \end{cases} \quad (4.76)$$

$$4) \quad v_4 = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad v_4 \cdot L = 0$$

Les composantes du vecteur courant conservé N_4 sont donc :

$$N_4 = \begin{cases} N_4^t = u_x (-z u_y + y u_z) \\ N_4^x = (\frac{1}{2} u_x^2 + u_t) (-z u_y + y u_z) \\ N_4^y = z (\frac{1}{6} u_x^3 + u_t u_x + \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2) - y u_y u_z \\ N_4^z = -y (\frac{1}{6} u_x^3 + u_t u_x - \frac{1}{2} u_y^2 + \frac{1}{2} u_z^2) + z u_y u_z \end{cases} \quad (4.77)$$

$$5) \quad v_5 = v_5(g) = g'(t) y \frac{\partial}{\partial x} + g(t) \frac{\partial}{\partial y} + [2g''(t)xy + g'''(t)(\frac{1}{3} y^3 + yz^2)] \frac{\partial}{\partial u}$$

et $v_5 \cdot L = \text{div } B$ avec

$$B_5 = \begin{cases} B_5^t = 2g''(t) y u \\ B_5^x = u [2g'''(t) xy + g'''(t) \times (\frac{1}{3} y^3 + yz^2)] \\ B_5^y = -u [2g''(t) x + g'''(t) \times (y^2 + z^2)] \\ B_5^z = -2yz u \quad g'''(t) \end{cases} \quad (4.78)$$

et le vecteur courant conservé N_5 a pour composantes

$$\begin{cases}
 N_5^t = u_x \times [2g''(t) xy + g'''(t)(\frac{1}{3} y^3 + yz^2) - g'(t)yu_x - g(t)u_y] - B_5^t \\
 N_5^x = g'(t) L \cdot y + [\frac{1}{2} u_x^2 + u_t] [2g''(t) xy + g'''(t)(\frac{1}{3} y^3 + yz^2) - g'(t)y u_x \\
 \quad - g(t)u_y] - B_5^x \\
 N_5^y = g(t) \times L - u_y [2g''(t) xy + g'''(t)(\frac{1}{3} y^3 + yz^2) - g'(t)y u_x \\
 \quad - g(t)u_y] - B_5^y \\
 N_5^z = -u_z [2g''(t) \times xy + g'''(t)(\frac{1}{3} y^3 + yz^2) - g'(t)y u_x - g(t)u_y] - B_5^z
 \end{cases} \quad (4.79)$$

6) $v_6 = v_6(h) = h'(t)z \frac{\partial}{\partial x} + h(t) \frac{\partial}{\partial z} + [2h''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3} z^3 + y^2 z)] \frac{\partial}{\partial u}$ et par symétrie, on obtient sans calculs :

$$v_6 \cdot L = \text{div } B_6 \text{ avec } B_6 = \begin{cases} B_6^t = 2h''(t) zu \\ B_6^x = u[2h'''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3} z^3 + y^2 z)] \\ B_6^y = -2y z u h'''(t) \\ B_6^z = -u[2h''(t)x + h'''(t)(y^2 + z^2)] \end{cases} \quad (4.80)$$

et le vecteur courant conservé N_6 a donc pour composantes :

$$\begin{cases}
 N_6^t = u_x [2h''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3} z^3 + y^2 z) - h'(t)zu_x - h(t)u_z] - B_6^t \\
 N_6^x = h'(t) z L + [\frac{1}{2} u_x^2 + u_t] [2h''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3} z^3 + y^2 z) - h'(t)zu_x \\
 \quad - h(t)u_z] - B_6^x \\
 N_6^y = -u_y [2h''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3} z^3 + y^2 z) - h'(t) z u_x - h(t)u_z] - B_6^y \\
 N_6^z = h(t)L - u_z [2h''(t)xz + h'''(t)(\frac{1}{3} z^3 + y^2 z) - h'(t)zu_x - h(t)u_z] - B_6^z
 \end{cases} \quad (4.81)$$

(On rappelle que L désigne le Lagrangien dont dérive l'équation de la dynamique

des gaz transsonique : $L = \frac{1}{6} u_x^3 + u_t \times u_x - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} u_z^2$)

$$7) v_7 = v_7(\sigma) = \sigma(t) x \frac{\partial}{\partial x} + [2x \sigma'(t) + (y^2 + z^2) \sigma''(t)] \frac{\partial}{\partial u} \text{ et}$$

$$v_7.L = \text{div } B_7 \text{ avec}$$

$$B_7 = \begin{cases} B_7^t = 2\sigma'(t)u \\ B_7^x = [2\sigma''(t) + \sigma'''(t)(y^2 + z^2)]u \\ B_7^y = -2\sigma''(t)y u \\ B_7^z = -2\sigma''(t)z u \end{cases} \quad (4.82)$$

et les composantes du vecteur courant conservé N_7 sont donc :

$$N_7 = N_7(\sigma) \begin{cases} N_7^t = u_x [2\sigma'(t)x + \sigma''(t)(y^2 + z^2) - \sigma(t)u_x] - B_7^t \\ N_7^x = \sigma(t) L + (\frac{1}{2} u_x^2 + u_t) [2\sigma'(t)x + \sigma''(t)(y^2 + z^2) - \sigma(t)u_x] - B_7^x \\ N_7^y = -u_y [2\sigma'(t)x + \sigma''(t)(y^2 + z^2) - \sigma(t)u_x] - B_7^y \\ N_7^z = -u_z [2\sigma'(t)x + \sigma''(t)(y^2 + z^2) - \sigma(t)u_x] - B_7^z \end{cases} \quad (4.83)$$

$$8) v_8 = v_8(f) = f(t, y, z) \frac{\partial}{\partial u} \text{ avec } \frac{2f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \text{ et}$$

$$v_8.L = \text{div } B_8 \text{ où}$$

$$B_8 = \begin{cases} B_8^t = 0 \\ B_8^x = u D_t(f) \\ B_8^y = -u D_y(f) \\ B_8^z = -u D_z(f) \end{cases}$$

et le vecteur courant conservé N_8 a pour composantes

$$N_8 = N_8(f) \begin{cases} N_8^t = f(t, y, z) u_x \\ N_8^x = f(t, y, z) (\frac{1}{2} u_x^2 + u_t) - u D_t(f) \\ N_8^y = -f(t, y, z) u_y + u D_y(f) \\ N_8^z = -f(t, y, z) u_z + u D_z(f) \end{cases} \quad (4.84)$$

En conclusion, nous avons donc déterminé les lois de conservation associées aux symétries variationnelles ordinaires v_i pour i de 1 à 8. Comme $\{V_i\}_i$ de 1 à 8 engendrent l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation de la dynamique des gaz transsonique, les lois de conservation N_i (ou vecteurs courant conservé), permettent d'obtenir, à équivalence près, toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire de l'équation.

Cependant, nous allons voir, comme dans l'exemple précédent, que le théorème principal permet de réduire le nombre de lois de conservation nécessaire pour engendrer toutes les lois de conservation associées à une symétrie variationnelle ordinaire.

Montrons que, ayant déterminé les générateurs $\{v_i\}_i$ de 1 à 8 de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation de la dynamique des gaz transsonique, il suffit alors de connaître N_1 et N_4 , lois de conservation respectivement associées à v_1 et v_4 , pour engendrer, à équivalence près, toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire.

a) pour $i = 5, 6, 7, 8$ le calcul des crochets des champs de vecteurs $[v_i, v_1]$ nous donne

$$\begin{cases} [v_5, v_1] = v_5(-g'(t)) & \text{où } v_5 = v_5(g) \\ [v_6, v_1] = v_6(-h'(t)) & v_6 = v_6(h) \\ [v_7, v_1] = v_7(-\sigma'(t)) & v_7 = v_7(\sigma) \\ [v_8, v_1] = v_8(-D_t f) & v_8 = v_8(f) \end{cases} \quad (4.85)$$

Le théorème principal nous permet de dire que la loi de conservation $pr_{Q_1}(N_1)$ est équivalente à une loi de conservation associée au crochet des champs de vecteurs $[v_i, v_1]$.



Donc pour $i = 5, 6, 7, 8$

$$\text{pr } v_{Q_i}(G_i) (N_1) \sim -N_1(G'_i) \quad (4.86)$$

où $G_5 = g$; $G_6 = h$, $G_7 = \sigma$; $G_8 = f$ et il suffit donc de déterminer N_1 pour connaître N_5, N_6, N_7, N_8 , (à équivalence près). En effet, ayant obtenu $-N_1(G'_i)$ par le calcul précédent, on peut alors trouver $N_1(G_i)$ puisque les fonctions considérées ici sont toutes C^∞ donc possèdent toutes des primitives elles aussi C^∞ .

b) De même

$$[v_3, v_1] = -v_2 \quad (4.87)$$

Donc $\text{pr } v_{Q_3}(N_1)$ et $-N_2$ sont deux lois de conservation équivalentes et ici encore N_2 peut être obtenue uniquement à partir de la loi de conservation N_1 .

c) Enfin

$$[v_3, v_2] = -5v_3 \quad (4.88)$$

Donc $\text{pr } v_{Q_3}(N_2)$ et $-N_3$ sont équivalentes. Comme N_2 a été déterminée au b) à équivalence près, on peut donc obtenir ensuite une loi de conservation équivalente à N_3 .

En conclusion : N_1 permet d'obtenir, à équivalence près $N_2, N_3, N_5, N_6, N_7, N_8$. Ainsi, $\{N_1, N_4\}$ permet donc bien d'engendrer toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire de l'équation de la dynamique des gaz transsonique.

N_4 ne peut être obtenue de la même manière car on remarque que pour $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$ $[v_i, v_4] = v_i$.

APPENDICE.

L'équation de la dynamique des gaz transsonique est tirée du même article précédent de R.S. Khamitova intitulé : "Structure de groupe et base de lois de conservation" [5].

Ayant calculé explicitement les symétries puis les symétries variationnelles nous avons ainsi vérifié que nous retrouvions bien les mêmes résultats que ceux de l'article original.

Dans un second temps, nous avons alors calculé toutes les lois de conservation associées aux huit symétries variationnelles engendrant l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_L$ des symétries variationnelles de l'équation. Cependant, certaines de ces symétries dépendent de fonctions arbitraires du temps et donc, il en est de même des lois de conservation associées.

L'article de R.S. Khamitova nous fournit seulement les expressions des deux lois de conservation N_1 et N_4 qui suffisent à engendrer à équivalence près, toutes les lois de conservation de l'équation. Pour le prouver, nous effectuons le crochet des champs de vecteurs engendrant l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_L$. Certains de ces crochets dépendent de nouvelles fonctions du temps que nous exprimons alors en fonction des autres. Ceci nous permet de montrer que N_1 et N_4 peuvent effectivement engendrer, à équivalence près, toutes les lois de conservation de l'équation : en effet, la connaissance de $N_1(G(t))$ suffit à déterminer $N_1(H(t))$ où $H(t)$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre $H'(t) = -G(t)$ car les fonctions sont C^∞ .

Toute cette dernière partie de l'étude n'apparaît pas dans l'article de référence de R.S. Khamitova qui nous indique seulement que N_1 et N_4 forment bien une "base de lois de conservation".

D. EXEMPLE IV : L'équation des ondes sur une plaque de glace dues à une source mobile :

Le dernier exemple que nous allons traiter ici concerne un problème de mécanique des fluides. Plus particulièrement, on s'intéresse aux ondes dues à une source solide mobile sur une plaque de glace flottante. Cet exemple est tiré d'un article de J.W. Davys, R.J. Hosking et A.D. Smeyd, "Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate" [1]. Cet article s'intéresse aux solutions explicites (en utilisant des développements en séries de Fourier) et aux applications physiques directes (en particulier l'atterrissage sur des plaques de glace) et non aux symétries et lois de conservation de l'équation. Ainsi les résultats présentés ici sont totalement originaux.

Si $u = u(t, x, y)$ représente un petit déplacement vertical du morceau de glace, l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\gamma \nabla^4 u + \rho_i h u_{tt} = p - f(t, x, y) \quad (4.89)$$

où γ, ρ_i, h, p, f représentent des grandeurs physiques :

- le morceau de glace homogène a une épaisseur h et une densité ρ_i .
- p est la pression de l'eau à la surface.
- $f(x, y, t)$ représente la pression extérieure exercée sur le morceau de glace ; f est supposée analytique en (t, x, y) .

- $\gamma = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ avec E le module de Young, ν le rapport de Poisson pour la glace.

L'équation initiale se transforme en utilisant le théorème de Bernoulli qui nous donne la pression p de l'eau à la surface en fonction de sa densité ρ et de son potentiel vitesse ϕ :

$$p = -\rho \left(\phi_t \right)_{z=0} - \rho g u.$$

Ainsi l'équation du mouvement devient :

$$\gamma \nabla^4 u + \rho_1 h u_{tt} + \rho g u + \{\rho \times (\phi_t)_{z=0} + f(t, x, y)\} = 0 \quad (4.90)$$

et posant alors :

$$\begin{cases} \rho_1 h = \alpha = \text{constante} \\ \rho g = \beta = \text{constante} \\ \rho \times (\phi_t)_{z=0} + f(t, x, y) = F(t, x, y) \text{ avec } F \text{ analytique en } (t, x, y). \end{cases}$$

L'équation du mouvement du morceau de glace est donc ;

$$\gamma \nabla^4 u + \alpha u_{tt} + \beta u + F(x, y, t) = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ constantes} \quad (4.91)$$

Le fibré considéré ici est donc $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ de base $\mathbb{R}^3$; la base $\mathbb{R}^3$ est munie des coordonnées (t, x, y) et la fibre $\mathbb{R}$ est munie des coordonnées (u) . De $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$, on tire $\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u) = \nabla^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$.

L'opérateur différentiel scalaire considéré ici, Δ , est d'ordre 4 sur F , et pour toute section u de F , Δ est définie par :

$$\Delta(u) = \gamma[u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}] + \alpha u_{tt} + \beta u + F(t, x, y) = 0.$$

$(\Delta u = 0)$ est un système d'Euler Lagrange : $\Delta(u) = \frac{\delta L}{\delta u}(u)$ pour toute section u du fibré f où L est définie par :

$$L(u) = \gamma\left(\frac{1}{2} u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + \frac{1}{2} u_{yy}^2\right) - \frac{\alpha}{2} u_t^2 + \beta \frac{u^2}{2} + F(t, x, y)u. \quad (4.92)$$

Remarques préliminaires :

a) L'équation différentielle étudiée ici est affine ; la partie linéaire correspond à l'opérateur différentiel scalaire d'ordre 4 sur F , noté $\tilde{\Delta}$ et défini, pour toute section u du fibré F par :

$\tilde{\Delta}(u) = \gamma\{u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}\} + \alpha u_{tt} + \beta u$. Ce système $\tilde{\Delta}(u) = 0$ est aussi un système d'Euler-Lagrange pour le lagrangien $\tilde{L}$ défini par :

$$\tilde{L}(u) = \gamma\left\{\frac{1}{2} u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + \frac{1}{2} u_{yy}^2\right\} - \frac{\alpha}{2} u_t^2 + \frac{\beta}{2} u^2.$$

Ainsi, nous pourrons, dans la suite de cet exemple, utiliser certains résultats connus pour une équation différentielle linéaire pour étudier l'équation initiale $\Delta(u) = 0$ (chapitre II, partie D).

b) Contrairement aux exemples précédemment étudiés, le lagrangien est ici un opérateur différentiel d'ordre 2, ce qui est assez rare pour un exemple dû à un phénomène physique.

Nous utiliserons donc, pour l'ordre $k = 2$, la formule générale (2.10) donnée au chapitre II.

$\Delta(u) = 0$ est un système totalement non dégénéré.

En effet pour toute section u du fibré on a $\Delta(u) = \tilde{\Delta}(u) + F(x,y,t)$ où $\tilde{\Delta}(u) = 0$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, et $F(t,x,y)$ représente une fonction analytique en les variables t,x,y .

Ainsi tout prolongement d'ordre ℓ de $\Delta(u) = 0$ est un système formé par $N = \sum_{k=0}^{\ell} C_{k+2}^k$ équations différentielles affines dont la partie linéaire est à coefficients constants et le second membre une fonction analytique en les variables t,x,y . De façon explicite, écrivant $\Delta(u)$ sous la forme

$$\Delta(u) = \tilde{\Delta}(u) + F(t,x,y) = \sum_{|I| \geq 0} \alpha^I u_I + F(t,x,y)$$

avec $\alpha^I = \text{constante}$, on aura alors pour tout multi indice $J = (i_1, i_2, i_3)$ d'ordre $|J|$ tel que $0 \leq |J| \leq \ell$,

$$\begin{aligned} D_J(\Delta(u)) &= D_J(\tilde{\Delta}(u)) + D_J(F(t,x,y)) \\ &= \sum_{|I| \geq 0} \alpha^I u_{(I+J)} + F^J(t,x,y) \\ &= \sum_{|K| \geq 0} \alpha^K u_K + F^J(t,x,y) \end{aligned}$$

On obtient donc bien une équation différentielle du même type que l'équation initiale.

Le système initial, ainsi que tous ses prolongements jusqu'à un ordre ℓ quelconque est localement résoluble car toutes les équations différentielles sont linéaires à coefficients constants avec un second membre analytique.

De même le système initial et sous ses prolongements jusqu'à un ordre quelconque ℓ est de rang maximal car la jacobienne de l'opérateur différentiel $\Delta^{(\ell)} : J^{4+\ell}_F \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de rang maximal, soit N . $(\Delta^{(\ell)})(u) = 0$ représente le système différentiel $D_J(\Delta(u)) = 0$ où J est un multi-indice d'ordre compris entre 0 et ℓ .

Ainsi l'équation affine $\Delta(u) = 0$ est bien totalement non dégénérée.

On peut aussi considérer que c'est une équation du type Kovalevskaya en écrivant $u_{tt} = -\frac{1}{\alpha} F(t, x, y) - \frac{\beta}{\alpha} u - \frac{\gamma}{\alpha} (u_{xxxx} + u_{yyyy}) - 2\frac{\gamma}{\alpha} u_{xxyy}$ et retrouver ainsi les résultats précédents en appliquant le théorème de Cauchy-Kovalevskaya comme dans les trois premiers exemples étudiés.

Recherche des symétries de l'équation :

Soit v un champ de vecteurs généralisé sur F et v_Q sa forme d'évolution, v s'écrit :

$$v = \xi^t[u] \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x[u] \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y[u] \frac{\partial}{\partial y} + \eta[u] \frac{\partial}{\partial u}$$

et

$$v_Q = Q[u] \frac{\partial}{\partial u} \text{ où } Q = \eta - \xi^t u_t - \xi^x u_x - \xi^y u_y$$

v est une symétrie généralisée de l'équation $\Delta(u) = 0$ si et seulement si v_Q est aussi une symétrie généralisée de $\Delta(u) = 0$ donc si et seulement si v_Q vérifie (pr $v_Q \cdot \Delta$)(u) = 0 pour toute section u vérifiant $\Delta(u) = 0$. D'où l'équation déterminante pour $\Delta(u) = 0$:

$$\gamma \{Q_{xxxx} + 2Q_{xxyy} + Q_{yyyy}\} + \alpha Q_{tt} + \beta Q = 0 \quad (4.93)$$

pour toute section u vérifiant $\Delta(u) = 0$. On peut remarquer que l'équation déterminante pour $\Delta(u) = 0$ est aussi l'équation déterminante pour $\tilde{\Delta}(u) = 0$.

De manière analogue aux exemples précédents, on se restreint aux symétries ordinaires de l'équation : $\xi^t = \xi^t(t, x, y, u)$; $\xi^x = \xi^x(t, x, y, u)$
 $\xi^y = \xi^y(t, x, y, u)$; $\eta = \eta(t, x, y, u)$

Après avoir calculé Q_{tt} , Q_{xxxx} , Q_{yyyy} et Q_{xyy} , on forme l'équation déterminante qui fournit un système d'équations aux dérivées partielles où les inconnues sont donc les fonctions η , ξ^t , ξ^x , ξ^y .

La résolution de ce système donne la forme générale de Q et donc par suite la forme générale des symétries ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$: on trouve alors :

$$v = -a \frac{\partial}{\partial t} - (b_1 y + b_2) \frac{\partial}{\partial x} - (-b_1 x + c_2) \frac{\partial}{\partial y} + (e u + g(t, x, y)) \frac{\partial}{\partial u} . \quad (4.94)$$

avec a, b_1, b_2, c_2, e constantes et $g(t, x, y)$ fonction vérifiant :

$$\tilde{\Delta}(g) = e F + a \frac{\partial F}{\partial t} + (b_1 y + b_2) \frac{\partial F}{\partial x} + (-b_1 x + c_2) \frac{\partial F}{\partial y} \quad (4.95)$$

Les symétries ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ forment donc une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de dimension infinie dont les générateurs sont :

1) pour $a = -1, b_1 = b_2 = c_2 = e = 0$

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial t} + g_1(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \text{ avec } g_1 \text{ vérifiant } \tilde{\Delta}(g_1) = -\frac{\partial F}{\partial t} . \quad (4.96)$$

Posons

$$\tilde{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} , \quad (4.97)$$

on vérifie aisément que $\tilde{v}_1$ est une symétrie variationnelle de l'équation linéaire associée $\tilde{\Delta}(u) = 0$ car $\tilde{v}_1 \cdot \tilde{L} = 0$ ainsi on peut alors écrire :

$$v_1 = \tilde{v}_1 + g_1(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \text{ où } g_1 \text{ vérifie } \tilde{\Delta}(g_1) = \tilde{v}_1 \cdot F \quad (4.98)$$

$$2) \text{ pour } b_2 = -1, \quad a = b_1 = c_2 = e = 0$$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial x} + g_2(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \text{ avec } g_2 \text{ vérifiant } \tilde{\Delta}(g_2) = - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4.99)$$

De même si on pose

$$\tilde{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.100)$$

$\tilde{v}_2$ est une symétrie variationnelle de $\tilde{\Delta}(u) = 0$ car $\tilde{v}_2 \cdot \tilde{L} = 0$ et

$$v_2 = \tilde{v}_2 + g_2(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \text{ où } g_2 \text{ vérifie } \tilde{\Delta}(g_2) = \tilde{v}_2 \cdot F \quad (4.101)$$

$$3) \text{ pour } c_2 = -1 ; \quad a = b_1 = b_2 = e = 0$$

$$v_3 = \frac{\partial}{\partial y} + g_3(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \text{ avec } g_3 \text{ vérifiant } \tilde{\Delta}(g_3) = - \frac{\partial F}{\partial y} \quad (4.102)$$

et posant

$$\tilde{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y} ; \quad (4.103)$$

$\tilde{v}_3$ est une symétrie variationnelle de $\tilde{\Delta}(u) = 0$ (car $\tilde{v}_3 \cdot \tilde{L} = 0$) et

$$v_3 = \tilde{v}_3 + g_3(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \text{ avec } g_3 \text{ vérifiant } \tilde{\Delta}(g_3) = \tilde{v}_3 \cdot F$$

$$4) \text{ pour } b_1 = -1 ; \quad a = b_2 = c_2 = e = 0$$

$$v_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + g_4(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.105)$$

où g_4 vérifie $\tilde{\Delta}(g_4) = -y \frac{\partial F}{\partial x} + x \frac{\partial F}{\partial y}$ et en posant

$$\tilde{v}_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.106)$$

on vérifie que $\tilde{v}_4$ est une symétrie variationnelle de $\tilde{\Delta}(u) = 0$ car $\tilde{v}_4 \cdot \tilde{L} = 0$,
et on peut écrire :

$$v_4 = \tilde{v}_4 + g_4(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.107)$$

où g_4 vérifie $\tilde{\Delta}(g_4) = \tilde{v}_4 \cdot F$

5) pour $e = 1$; $a = b_1 = b_2 = c_2 = 0$

$$v_o = (u + g_o(t, x, y)) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.108)$$

où g_o vérifie $\tilde{\Delta}(g_o) = F(t, x, y)$ et posant

$$\tilde{v}_o = u \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.109)$$

on vérifie que $\tilde{v}_o$ est une symétrie triviale de $\tilde{\Delta}(u) = 0$ car
pr $\tilde{v}_o \cdot \tilde{\Delta}(u) = \tilde{\Delta}(u)$, on peut écrire

$$v_o = \tilde{v}_o + g_o(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.110)$$

où g_o vérifie $\tilde{\Delta}(g_o) = \tilde{v}_o \cdot F$.

6) pour $a = b_1 = b_2 = c_2 = e = 0$

$$v_l = \tilde{v}_l = g_l(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.111)$$

où g_l vérifie $\tilde{\Delta}(g_l) = 0$.

On vérifie aisément que $\tilde{v}_l$ est une symétrie de $\tilde{\Delta}(u) = 0$ car

$$(\text{pr } \tilde{v}_l \tilde{\Delta})(u) = \tilde{\Delta}(g_l).$$

Les symétries ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ peuvent donc s'obtenir à partir
des symétries ordinaires de l'équation linéaire $\tilde{\Delta}(u) = 0$, associée à $\Delta(u) = 0$.

En effet, les symétries ordinaires de l'équation différentielle $\tilde{\Delta}(u) = 0$ sont $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ (qui sont des symétries de translation, respectivement par rapport à t, x, y) et $\tilde{v}_4$ qui est une symétrie de rotation dans le plan $x O y$, ainsi que les symétries $\tilde{v}_0$ et $\tilde{v}_\ell$ qui sont des symétries d'évolution.

Les symétries ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ s'obtiennent alors

i) d'une part, en ajoutant à $\tilde{v}_i$ un champ d'évolution (donc à valeur dans le fibré vertical de F noté VF) de la forme $g_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ où g_i vérifie la condition suivante :

$$\tilde{\Delta}(g_i) = \tilde{v}_i \cdot F \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (4.112)$$

ii) d'autre part, en posant $v_\ell = \tilde{v}_\ell = g_\ell \frac{\partial}{\partial u}$ où $g_\ell(t, x, y)$ vérifie la condition :

$$\tilde{\Delta}(g_\ell) = 0$$

On remarque que ces résultats sont conformes aux théorèmes sur les équations différentielles affines, établis dans la dernière partie du chapitre II. Ainsi $\tilde{v}_\ell = v_\ell$ vérifie les hypothèses du lemme (2.17), v_0 vérifie les hypothèses du théorème (2.18), et v_1, v_2, v_3, v_4 vérifient les hypothèses du théorème (2.19).

On peut rassembler les différents résultats obtenus sous forme d'un tableau :

Symétries ordinaires de l'équation linéaire $\tilde{\Delta}(u) = 0$	Symétries ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$
$\tilde{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$	→ $v_1 = \tilde{v}_1 + g_1(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ et g_1 vérifie : $\tilde{\Delta}(g_1) = \tilde{v}_1 \cdot F$
$\tilde{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}$	→ $v_2 = \tilde{v}_2 + g_2(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ et g_2 vérifie : $\tilde{\Delta}(g_2) = \tilde{v}_2 \cdot F$
$\tilde{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}$	→ $v_3 = \tilde{v}_3 + g_3(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ et g_3 vérifie : $\tilde{\Delta}(g_3) = \tilde{v}_3 \cdot F$
$\tilde{v}_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$	→ $v_4 = \tilde{v}_4 + g_4(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ et g_4 vérifie : $\tilde{\Delta}(g_4) = \tilde{v}_4 \cdot F$
$\tilde{v}_0 = u \frac{\partial}{\partial u}$	→ $v_0 = \tilde{v}_0 + g_0(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ et g_0 vérifie : $\tilde{\Delta}(g_0) = \tilde{v}_0 \cdot F$
$v_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ avec $\tilde{\Delta}(g_\ell) = 0$	→ $v_\ell = \tilde{v}_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ et g_ℓ vérifie : $\tilde{\Delta}(g_\ell) = 0$



(4.113)

Remarque. Considérant l'équation différentielle linéaire $\tilde{\Delta}(u) = 0$,
l'algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{L}}$ des symétries ordinaires de cette équation est engendrée par

$$\tilde{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tilde{v}_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_0 = u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ce résultat est bien conforme aux théorèmes généraux traitant des symétries ordinaires d'une équation différentielle linéaire d'ordre $p \geq 3$, sur un fibré trivial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$ de base $\mathbb{R}^n$. Une étude détaillée de ce type d'équation différentielle est faite par P.J. Olver [13] qui montre en particulier que sous les hypothèses précédentes, on a alors :

- toute symétrie ordinaire de l'équation est projetable sur la base $\mathbb{R}^n$.
- Notant $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble des symétries ordinaires de l'équation et $\tilde{\mathcal{L}}$

l'ensemble des symétries ordinaires de l'équation qui sont de la forme

$v = (c u + f_0) \frac{\partial}{\partial u}$ où c est une constante réelle et f_0 une solution de l'équation linéaire, alors $\tilde{\mathcal{L}}$ est une sous-algèbre de Lie de $\tilde{\mathcal{A}}$ et la dimension $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{L}}$ est au plus égale à $(n+1)$.

Ici, l'équation étudiée $\Delta(u) = 0$ est d'ordre 4.

Pour i de 0 à 4, $\tilde{v}_i$ est projetable sur la base $\mathbb{R}^3$, ainsi que $\tilde{v}_2$, et $\tilde{\mathcal{L}}$ est engendrée par $\tilde{v}_0$ et $\tilde{v}_2$. Donc $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{L}}$ est engendrée par les symétries ordinaires $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ et $\tilde{v}_4$. Ainsi, $\tilde{\mathcal{A}}/\tilde{\mathcal{L}}$ est de dimension $4 = (3+1)$ où 3 représente la dimension de la base $\mathbb{R}^3$.

Dans cet exemple l'algèbre des symétries ordinaires est donc la plus grande possible.

Recherche des symétries variationnelles de l'équation :

Les symétries variationnelles ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ forment une sous-algèbre de Lie noté $\mathcal{A}_L$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ des symétries ordinaires de l'équation.

Le calcul nous montre que v_0 n'est pas une symétrie variationnelle (de même que $\tilde{v}_0$ n'est pas une symétrie variationnelle de $\tilde{\Delta}u = 0$).

- Pour les autres générateurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$, il apparaît des conditions supplémentaires sur les fonctions $g_i(t, x, y)$ pour avoir des symétries variationnelles :

- On obtient le résultat suivant : pour i variant de 1 à 4

$v_i = \tilde{v}_i + g_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ est une symétrie variationnelle de l'équation $\Delta(u) = 0 \Leftrightarrow$

$$(*) \begin{cases} \nabla^4 g_i = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} + \beta g_i = \tilde{v}_i \cdot F \end{cases} \quad (4.114)$$

et $v_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ est une symétrie variationnelle de l'équation $\Delta(u) = 0 \Leftrightarrow$

$$(*) \begin{cases} \nabla^4 g_\ell = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_\ell}{\partial t^2} + \beta g_\ell = 0 \end{cases}$$

On remarque que la condition (*) implique $\tilde{\Delta}(g_i) = \tilde{v}_i \cdot F$ puisque l'opérateur différentiel linéaire $\tilde{\Delta}$ est défini par :

$$\tilde{\Delta}(u) = \gamma \nabla^4 u + \alpha u_{tt} + \beta u = 0.$$

En conclusion : les symétries variationnelles ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$ forment une sous-algèbre de Lie de dimension infinie, notée $\mathcal{A}_L$ dont les générateurs sont :

$$1) \quad v_1 = \tilde{v}_1 + g_1(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nabla^4 g_1 = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} + \beta g_1 = \tilde{v}_1 \cdot F \end{cases} \quad (4.115)$$

$$\text{et } \tilde{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

$$2) \quad v_2 = \tilde{v}_2 + g_2(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v^4 g_2 = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} + \beta g_2 = \tilde{v}_2 \cdot F \end{cases} \quad (4.116)$$

$$\text{et} \quad \tilde{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

$$3) \quad v_3 = \tilde{v}_3 + g_3(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v^4 g_3 = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_3}{\partial t^2} + \beta g_3 = \tilde{v}_3 \cdot F \end{cases} \quad (4.117)$$

$$\text{et} \quad \tilde{v}_3 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$4) \quad v_4 = \tilde{v}_4 + g_4(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v^4 g_4 = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_4}{\partial t^2} + \beta g_4 = \tilde{v}_4 \cdot F \end{cases} \quad (4.118)$$

$$\text{et} \quad \tilde{v}_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

$$5) \quad v_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v^4 g_\ell = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_\ell}{\partial t^2} + \beta g_\ell = 0 \end{cases} \quad (4.119)$$

Ici encore, les symétries variationnelles ordinaires de l'équation linéaire $\tilde{\Delta}(u) = 0$ associée à $\Delta(u)$ permettent d'obtenir les symétries variationnelles ordinaires de l'équation initiale $\Delta(u) = 0$.

$\tilde{v}_i$ étant une symétrie variationnelle ordinaire de $\tilde{\Delta}(u) = 0$, on obtient une symétrie variationnelle ordinaire v_i de $\Delta(u) = 0$ en ajoutant à $\tilde{v}_i$ un champ d'évolution de la forme $g_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ où g_i vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} \nabla^4 g_i = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} + \beta g_i = \tilde{v}_i \cdot F \end{cases} \quad i \text{ de } 1 \text{ à } 4 \quad (4.120)$$

Recherche des lois de conservation :

L'équation $\Delta(u) = 0$ est une équation d'Euler-Lagrange ; le théorème de Noether nous fournit donc une forme explicite des lois de conservations v_i associées aux symétries variationnelles v_i pour i de 1 à 4 et $i = \ell$.

La base $\mathbb{R}^3$ est orientée par l'élément de volume $\omega = dt \wedge dx \wedge dy$ et toute loi de conservation v s'écrit : $v(u) = v^1 dx \wedge dy + v^2 dt \wedge dy + v^3 dt \wedge dx$. On peut donc lui associer un vecteur "courant conservé" N dont les composantes sont

$$\begin{cases} N^t = -v^1 \\ N^x = v^2 \\ N^y = -v^3 \end{cases}$$

nous avons $v_i \cdot L = \text{div } B_i$, pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $i = \ell$ avec

$$B_i = \begin{cases} B_i^t = -\alpha \frac{\partial g_i}{\partial t} u \\ B_i^x = \gamma \frac{\partial^2 g_i}{\partial x^2} u_x + G_i(t, x, y) u_y + H_i^x(t, x, y) \\ B_i^y = \gamma \frac{\partial^2 g_i}{\partial y^2} u_y + (2 \gamma \frac{\partial^2 g_i}{\partial x \partial y} - G_i(t, x, y)) u_x + H_i^y(t, x, y) \end{cases} \quad (4.121)$$

où $G_i(t, x, y)$, $H_i^x(t, x, y)$ et $H_i^y(t, x, y)$ sont des fonctions vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial G_i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial^3 g_i}{\partial y^3} ; \quad \frac{\partial G_i}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^3 g_i}{\partial x^3} + 2\gamma \frac{\partial^3 g_i}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial H_i^x}{\partial x} = \frac{\partial H_i^y}{\partial y} = \frac{1}{2} f_i \quad F(t, x, y) \end{cases} \quad (4.122)$$

On rappelle que pour $i = 1, 2, 3, 4$, $v_i = \tilde{v}_i + g_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ où g_i vérifie

$$\begin{cases} \nabla^4 g_1 = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} + \beta g_1 = \tilde{v}_1 \cdot F \end{cases}$$

et $v_\ell = \tilde{v}_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}$ où g_ℓ vérifie :

$$\begin{cases} \nabla^4 g_\ell = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_\ell}{\partial t^2} + \beta g_\ell = 0. \end{cases}$$

L désigne le lagrangien associé à $\Delta(u) = 0$:

$$L(u) = \left[\frac{1}{2} u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + \frac{1}{2} u_{yy}^2 \right] - \frac{\alpha}{2} u_t^2 + \beta \frac{u^2}{2} + F(t, x, y) \times u.$$

On a alors l'expression des courants conservés N_i associées aux symétries variationnelles ordinaires v_i :

$$\begin{aligned} 1) \quad v_1 &= \frac{\partial}{\partial t} + g_1(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u}, \quad v_1 \cdot L = \text{div } B_1 \\ N_1 &= \begin{cases} N_1^t = L - \alpha u_t (g_1 - u_t) - B_1^t \\ N_1^x = -(g_1 - u_t) [\gamma u_{xxx} + \gamma u_{xyy}] + \gamma u_{xx} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - u_{tx} \right) + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_1}{\partial y} - u_{ty} \right) - B_1^x \\ N_1^y = -(g_1 - u_t) [\gamma u_{xxy} + \gamma u_{yyy}] + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} - u_{tx} \right) + \gamma u_{yy} \left(\frac{\partial g_1}{\partial y} - u_{ty} \right) - B_1^y \end{cases} \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$2) \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial x} + g_2(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} ; \quad v_2 \cdot L = \text{div } B_2$$

$$N_2 = \begin{cases} N_2^t = -\alpha u_t(g_2 - u_x) - B_2^t \\ N_2^x = L - (g_2 - u_x)[\gamma u_{xxx} + \gamma u_{xyy}] + \gamma u_{xx} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - u_{xx} \right) \\ \quad + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} - u_{xy} \right) - B_2^x \\ N_2^y = -(g_2 - u_x)[\gamma u_{xxy} + \gamma u_{yyy}] + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - u_{xx} \right) + \\ \quad + \gamma u_{yy} \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} - u_{xy} \right) - B_2^y \end{cases} \quad (4.124)$$

$$3) \quad v_3 = \frac{\partial}{\partial y} + g_3(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} ; \quad v_3 \cdot L = \text{div } B_3$$

$$N_3 = \begin{cases} N_3^t = -\alpha u_t(g_3 - u_y) - B_3^t \\ N_3^x = -(g_3 - u_y)[\gamma u_{xxx} + \gamma u_{xyy}] + \gamma u_{xx} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x} - u_{xy} \right) + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - u_{yy} \right) - B_3^x \\ N_3^y = L - (g_3 - u_y)[\gamma u_{xxy} + \gamma u_{yyy}] + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x} - u_{xy} \right) + \gamma u_{yy} \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - u_{yy} \right) - B_3^y \end{cases} \quad (4.125)$$

$$4) \quad v_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + g_4(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} ; \quad v_4 \cdot L = \text{div } B_4$$

$$N_4 = \begin{cases} N_4^t = -\alpha u_t(g_4 - y u_x + x u_y) - B_4^t \\ N_4^x = y \cdot L - (g_4 - y u_x + x u_y)[\gamma u_{xxx} + \gamma u_{xyy}] + \gamma u_{xx} \left(\frac{\partial g_4}{\partial x} - y u_{xx} + x u_{xy} + u_y \right) \\ \quad + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_4}{\partial y} - y u_{xy} + x u_{yy} - u_x \right) - B_4^x \\ N_4^y = -x \cdot L - (g_4 - y u_x + x u_y)[\gamma u_{xxy} + \gamma u_{yyy}] + \gamma u_{xy} \left(\frac{\partial g_4}{\partial x} - y u_{xx} + x u_{xy} + u_y \right) \\ \quad + \gamma u_{yy} \left(\frac{\partial g_4}{\partial y} - y u_{xy} + x u_{yy} - u_x \right) - B_4^y \end{cases} \quad (4.126)$$

$$5) \quad v_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} ; \quad v_\ell \cdot L = \text{div } B_\ell.$$

$$N_\ell = \begin{cases} N_\ell^t = -\alpha u_t g_\ell - B_\ell^t \\ N_\ell^x = -g_\ell(\gamma u_{xxx} + \gamma u_{xyy}) + \gamma u_{xx} \frac{\partial g_\ell}{\partial x} + \gamma u_{xy} \frac{\partial g_\ell}{\partial y} - B_\ell^x \\ N_\ell^y = -g_\ell(\gamma u_{xxy} + \gamma u_{yyy}) + \gamma u_{xy} \frac{\partial g_\ell}{\partial x} + \gamma u_{yy} \frac{\partial g_\ell}{\partial y} - B_\ell^y \end{cases} \quad (4.127)$$

Nous avons donc déterminé les lois de conservations associées à v_1, v_2, v_3, v_4 et v_ℓ qui engendrent l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$.

Ainsi toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire s'écrit comme combinaison linéaire, à équivalence près, des lois de conservations N_1, N_2, N_3, N_4 et N_ℓ .

Nous avons également le résultat suivant : pour i variant de 1 à 4 et $i = \ell$

$$\text{div } N_i = + Q_i \Delta(u) \quad (4.128)$$

où Q_i désigne la caractéristique du champ d'évolution v_{Q_i} associé à v_i .

Ainsi la caractéristique de la loi de conservation (ou courant conservé) N_i est $+ Q_i$.

Tableau des crochets des champs de vecteurs v_i de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$:
(i variant de 1 à 4 et $i = \ell$).

Le calcul des différents crochets nous donne le tableau suivant :
où l'on convient de noter $v_i = \tilde{v}_i + g_i(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} = v_i(g_i)$ (g_i vérifiant les

conditions $\begin{cases} \nabla^4 g_i = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} + \beta g_i = \tilde{v}_i \cdot F \end{cases}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et

$v_\ell = \tilde{v}_\ell = g_\ell(t, x, y) \frac{\partial}{\partial u} = v_\ell(g_\ell)$ avec $\nabla^4 g_\ell = 0$ et $\alpha \frac{\partial^2 g_\ell}{\partial t^2} + \beta g_\ell = 0$.



$[v_i, v_j]$	$v_1(g_1)$	$v_2(g_2)$	$v_3(g_3)$	$v_4(g_4)$	$v_\ell(g_\ell)$
$v_1(g_1)$	$\diagdown$	$v_\ell(g_{12})$	$v_\ell(g_{13})$	$v_\ell(g_{14})$	$v_\ell(\frac{\partial g_\ell}{\partial t})$
$v_2(g_2)$	$-v_\ell(g_{12})$	$\diagdown$	$v_\ell(g_{23})$	$v_3(g_{24})$	$v_\ell(\frac{\partial g_\ell}{\partial x})$
$v_3(g_3)$	$-v_\ell(g_{13})$	$-v_\ell(g_{23})$	$\diagdown$	$-v_2(g_{34})$	$v_\ell(\frac{\partial g_\ell}{\partial y})$
$v_4(g_4)$	$-v_\ell(g_{14})$	$-v_3(g_{24})$	$v_2(g_{34})$	$\diagdown$	$v_\ell(y \frac{\partial g_\ell}{\partial x} - x \frac{\partial g_\ell}{\partial y})$
$v_\ell(g_\ell)$	$-v_\ell(\frac{\partial g_\ell}{\partial t})$	$-v_\ell(\frac{\partial g_\ell}{\partial x})$	$-v_\ell(\frac{\partial g_\ell}{\partial y})$	$-v_\ell(y \frac{\partial g_\ell}{\partial x} - x \frac{\partial g_\ell}{\partial y})$	$\diagdown$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{12}(t,x,y) = -\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial t} ; \quad g_{13}(t,x,y) = -\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial t} \\ g_{14}(t,x,y) = -y \frac{\partial g_1}{\partial x} + x \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_4}{\partial t} ; \quad g_{23}(t,x,y) = -\frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ g_{24}(t,x,y) = -y \frac{\partial g_2}{\partial x} + x \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_4}{\partial x} \\ g_{34}(t,x,y) = y \frac{\partial g_3}{\partial x} - x \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_4}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.130)$$

Les fonctions $g_{ij}(t,x,y)$ satisfont aux conditions demandées pour avoir une symétrie variationnelle à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 g_k = 0 \quad \text{et} \\ \alpha \frac{\partial^2 g_k}{\partial t^2} + \beta g_k = \tilde{v}_k \cdot F \end{array} \right. \quad (4.131)$$

si $v_k = v_k(g_k)$. C'est-à-dire que les fonctions $g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{23}$ ainsi que

$\frac{\partial g_l}{\partial t}, \frac{\partial g_l}{\partial x}, \frac{\partial g_l}{\partial y}$ et $y \frac{\partial g_l}{\partial x} - x \frac{\partial g_l}{\partial y}$ vérifient les mêmes conditions que g_l à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} + \nabla^4 g_l = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_l}{\partial t^2} + \beta g_l = 0 \end{array} \right.$$

et la fonction g_{34} vérifie la même condition que g_2 soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 g_{34} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_{34}}{\partial t^2} + \beta g_{34} = \tilde{v}_2 \cdot F \end{array} \right.$$

Enfin la fonction g_{24} vérifie la même condition que g_3 soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 g_{24} = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 g_{24}}{\partial t^2} + \beta g_{24} = \tilde{v}_3 \cdot F \end{array} \right.$$

Montrons pour conclure l'étude de cet exemple, que N_1 et N_4 suffisent à engendrer, à équivalence près, toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire de l'équation $\Delta(u) = 0$.

$$a) [v_3(g_3), v_4(g_4)] = -v_2(g_{34}). \quad (4.132)$$

Donc la loi de conservation $\text{pr } v_{Q_3}(N_4)$ et la loi de conservation associée à $-v_2(g_{34})$ sont des lois équivalentes. Donc $-N_2$ est équivalente à $\text{pr } v_{Q_3}(N_4)$.

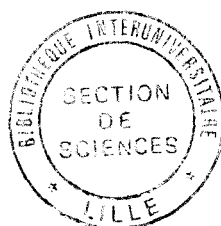
$$b) [v_2(g_2), v_4(g_4)] = v_3(g_{24}). \quad (4.133)$$

Donc $\text{pr } v_{Q_2}(N_4)$ est une loi de conservation équivalente à la loi de conservation associée à $v_3(g_{24})$. Donc N_3 est équivalente à $\text{pr } v_{Q_2}(N_4)$.

$$c) [v_1(g_1), v_4(g_4)] = v_\ell(g_{14}). \quad (4.134)$$

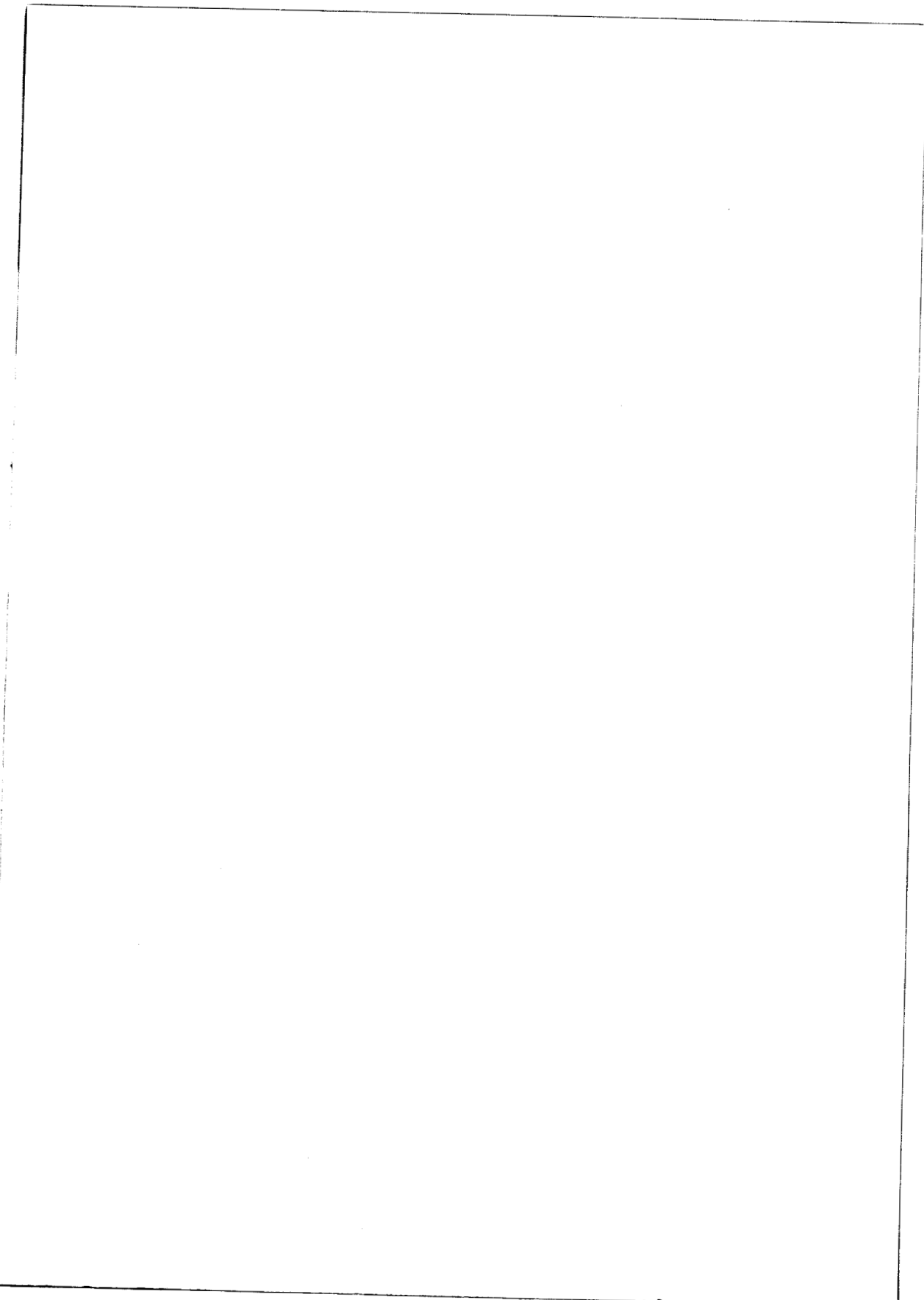
Donc la loi de conservation $\text{pr } v_{Q_1}(N_4)$ est équivalente à la loi de conservation associée à $v_\ell(g_{14})$. Donc N_ℓ est équivalente à $\text{pr } v_{Q_1}(N_4)$.

Le tableau des crochets de vecteurs engendrant l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ permet de voir que v_1 et v_4 ne sont jamais obtenus. Ainsi, ayant déterminé l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ des symétries variationnelles ordinaires de l'équation $\Delta(u) = 0$, (par ses générateurs $v_1, v_2, v_3, v_4, v_\ell$), il suffit de connaître les lois de conservation (ou courants conservés) N_1 et N_4 respectivement associées à v_1 et v_4 pour engendrer, à équivalence près N_2, N_3, N_ℓ , et donc toute loi de conservation associée à une symétrie variationnelle ordinaire de l'équation $\Delta(u) = 0$.



Bibliographie

- [1] J.W. DAVYS, R.J. HOSKING, A.D. SMEYD - Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate, *Journal Fluid. Mech.* 158 (1985), 269-287 .
 - [2] J.G. FLETCHER - Local conservation laws in generally covariant theories, *Review of Modern Physics* 32 (1) (1960), 65-67.
 - [3] F. GUIL GUERRERO, L. MARTINEZ ALONSO - Generalized variational derivatives in field theory, (*Journal Phys. A Math Gen* 13 (1980), 689-700.
 - [4] N. Kh. IBRAGIMOV - Transformation Groups applied to Mathematical Physics, Reidel Dordrecht (1985).
 - [5] R.S. KHAMITOVA - Group structure and the basis of conservation laws, *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika* 52 (2) (1982), 244-251 (en russe).
 - [6] R.S. KHAMITOVA - On a basis for conservation laws of the equations of mechanics, *Soviet Math. Dokl.* 248(4) (1979), 1071-1075 .
 - [7] I. KOLAR - Lie derivatives and higher-order Lagrangians, *Proc. Conf. Diff. Geom. and Appl. Prague* (1980). Université Karlova Prague (1981).
 - [8] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH - Sur les théorèmes de Noether, *Géométrie et Physique, Journées Relativistes de Marseille-Luminy d'avril 1985 Travaux en cours* 21 Hermann (1987).
 - [9] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH - On the momentum mapping in field theory, *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics Lecture Notes Math* 1139 Springer-Verlag (1985).
 - [10] L. MARTINEZ ALONSO - On the Noether map, *Letters in Mathematical Physics* 3 (1979), 419-424 .
 - [11] E. NOETHER - Invariante Variationsprobleme , *Nachrichten Kön. Gesell. Wissenschaften Göttingen Math-Phys. Klasse* (1918).
 - [12] P.J. OLVER - Applications of Lie Groups to Differential Equations, *Graduate texts in Mathematics* 107 Springer-Verlag (1986).
 - [13] P.J. OLVER - On the symmetry group of a linear partial differential equation, preprint Univ. of Chicago .
 - [14] TORU TSUJISHITA - On variation bicomplexes associated to differential equations, *Osaka Journal of Mathematics* 19 (1982), 311-363 .
 - [15] V.A. VINOKOUROV, I.G. NOURGALIEVA - Une base de lois de conservation, *Doklady Akademii Nauk USSR* 280 (2) (1985), 325-327.
 - [16] R.O. WELLS, JR - Differential Analysis on Complex Manifolds, Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs New Jersey (1973), 12-27.
-



RESUME

L'objet de la thèse est l'étude des symétries et des lois de conservation des systèmes différentiels, et, en particulier des systèmes d'Euler-Lagrange. Dans le cadre général d'une variété fibrée quelconque, nous définissons les champs de vecteurs généralisés, les jets de sections d'ordre infini et les opérateurs différentiels d'ordre supérieur. Nous établissons, dans le cas général des lagrangiens d'ordre supérieur à un nombre quelconque de variables, le théorème de Noether qui associe une loi de conservation à toute symétrie variationnelle. La notion de lois de conservation équivalentes permet d'exposer le résultat principal de la thèse : si v_Q et v_R sont des symétries variationnelles d'un système lagrangien et si v_R est une loi de conservation associée à v_R par le théorème de Noether, alors l'action de v_Q sur v_R fournit une loi de conservation équivalente à une loi associée au crochet $[v_Q, v_R]$ des symétries considérées. Ce résultat permet, pour un système d'Euler-Lagrange donné, de déterminer complètement toutes les lois de conservation, à équivalence près, à partir d'un ensemble de générateurs.

Pour conclure, nous illustrons ces résultats par quatre exemples précis empruntés à la Physique, dont un concernant un système qui dérive d'un Lagrangien d'ordre deux. A l'aide des résultats théoriques précédents, nous calculons de façon explicite les symétries, les lois de conservation, ainsi que des systèmes de générateurs de l'espace des lois de conservation, pour ces quatre exemples.

MOTS CLES : Symétrie généralisée
Symétrie variationnelle
Loi de conservation
Lagrangien d'ordre supérieur
Opérateur d'Euler-Lagrange
Champ d'évolution.