N° d'ordre : 1397

55376
1987
23

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION
DE
SCIENCES
LILLE

55376
1987
23

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

par

SBAI MSAHLI SIDI DRISS

SECTIONS VECTORIELLES DU CUBE ET D'AUTRES BOULES UNITE DE $\mathbb{R}^N$

Membres du Jury : CŒURE Gérard, Président
ROGALSKI Marc, Rapporteur
ANTOINE Philippe
PAJOR Alain
PARREAU Michel
} Examinateurs

SCD LILLE 1
D 030 254729 9

87

N° d'ordre : 1397

55376
1987
23

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

55376
1987
23

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

par

SBAI MSAHLI SIDI DRISS

SECTIONS VECTORIELLES DU CUBE ET D'AUTRES BOULES UNITE DE $\mathbb{R}^N$

Membres du Jury : CŒURE Gérard, Président
ROGALSKI Marc, Rapporteur
ANTOINE Philippe
PAJOR Alain
PARREAU Michel
} Examinateurs

Soutenue le 1er juillet 1987

Mes amitiés à Monsieur DRIOUICH
avec qui ce travail a été fait
en étroite collaboration.

Nous remercions Monsieur Marc ROGALSKI, le professeur et l'homme. Ses suggestions constructives, son bon sens et sa disponibilité ont permis la concrétisation de ce travail.

Nous remercions Monsieur le Professeur Gérard COEURÉ d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, ainsi que Monsieur le Professeur Michel PARREAU, Monsieur le Professeur Philippe ANTOINE et Monsieur Alain PAJOR, Maître de Conférences qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.

Monsieur Mathieu MEYER et Monsieur Alain PAJOR nous ont fait profiter de leurs travaux récents ; nous leur en sommes reconnaissants.

Nous remercions, enfin, le personnel de l'U.F.R. de Mathématiques de LILLE FLANDRES ARTOIS et, particulièrement, Madame Raymonde BÉRAT, pour le soin et la qualité apportés à la réalisation matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le présent travail comporte deux axes principaux : Etude des sections du cube dans la première partie, et, dans la deuxième partie, une étude de l'isotropie d'une boule et de ses sections.

Au chapitre I, nous étudions les sections de Q_n , cube unité de $\mathbb{R}^n$, par des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. K. BALL [1] a montré que si F est un hyperplan, alors $\mathrm{Vol}(Q_n \cap F) \leq \sqrt{2}$ où "Vol" désigne la mesure de Lebesgue induite sur F par celle de $\mathbb{R}^n$, la mesure de Q_n étant 1.

Le premier objectif de ce travail est de généraliser le résultat de K. BALL [1]. Il s'agit de majorer le volume des sections de Q_n par des sous-espaces vectoriels, F, de codimension K.

Nous procédons comme K. BALL par transformation de Fourier. Mais nous devons opérer en plusieurs variables, ce qui soulève de nouveaux problèmes. Si $2K \leq n$, on obtient une formule intrégrale :

$$\mathrm{Vol}(Q_n \cap F) = \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi<t,b_i>}{\pi<t,b_i>} .dt ,$$

où les vecteurs b_i sont les lignes de la matrice $[\xi_1,\ldots,\xi_k]$, $[\xi_1,\ldots,\xi_k]$ étant une base orthonormale de $F^{\perp}$, orthogonal de F. La condition $2K \leqslant n$, en dehors de laquelle nous n'avons pas de résultat général, assure l'intégrabilité de la fonction

$$\left(t \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle}\right)$$

Pour obtenir une majoration de $\mathrm{Vol}(Q_n \cap F)$, on utilise un lemme de K. BALL et une méthode d'optimisation en plusieurs variables. De façon analogue à celle de K. BALL nous utilisons une dichotomie selon les valeurs des coordonnées du produit extérieur $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k$, ce qui demande quelques lemmes d'algèbre multilinéaire. On obtient en définitive la majoration $\mathrm{Vol}(Q_n \cap F) \leqslant \sqrt{2C_{n-1}^{K-1}}$. Ceci améliore la majoration naturelle de $\mathrm{Vol}(Q_n \cap F)$ par $\sqrt{C_n^K}$.

L'étude de quelques exemples suggère que si $2K \leqslant n$, $\mathrm{Vol}(Q_n \cap F) \leqslant \sqrt{2}^K$. Cette borne serait la meilleure. Nous donnerons des exemples pour lequels elle est atteinte, et nous détaillerons une étude sur ordinateur, faite par C. SACRÉ, qui démontre, expérimentalement que pour $n = 4$ et $K = 2$, $\sqrt{2}^2$ est bien la borne supérieure.

Au chapitre 2 de cette partie, nous revenons sur le cas des sections hyperplans du cube, pour donner, d'une formule explicite de $\mathrm{Vol}(Q_n \cap H)$, dûe à MAYER, trois démonstrations, d'esprit très différent.

Dans la deuxième partie, nous abordons le cas général des sections d'une boule de $\mathbb{R}^n$ par des sous-espaces de codimension K, en supposant B isotrope et de volume 1.

On dit qu'une boule B est isotrope si sa matrice d'inertie est scalaire, c'est-à-dire s'il existe un scalaire qu'on notera L_B^2 tel que cette matrice soit de la forme $L_B^2 . I_{d(n\times n)}$. L_B est appelé constante d'isotropie de B.

Au premier chapitre de cette deuxième partie, nous exposons pour l'essentiel un travail de K. BALL, qui encadre les volumes des sections d'une boule isotrope de volume 1. On aboutit alors au résultat suivant

$$(*) \quad \frac{a_k}{L_B} \leqslant \mathrm{Vol}(B \cap F) \leqslant \frac{b_k}{L_B} \quad , \quad k = \mathrm{codim}\, F \quad \text{et} \quad a_k \,,\, b_k \quad \text{sont des}$$

constantes ne dépendant que de K.

Avec une constante b_k moins bonne, ce résultat a déjà été publié par HENSLEY.

Signalons que, indépendamment des études de HENSLEY et BALL, BOURGAIN et MILMAN [4] ont prouvé un résultat analogue dans le cas des sections hyperplanes.

La démonstration de (*) utilise fondamentalement la log-concavité de $f(x) = \mathrm{Vol}(B \cap (F+x))$, $x \in F^{\perp}$. En utilisant le fait, plus fort, que $f^{\frac{1}{n-K}}$ est concave, on obtient une majoration légèrement meilleure.

Le rôle clé joué par L_B nous conduit à une étude spécifique de l'isotropie, que nous commençons au chapitre II. Nous verrons alors que, en général, $C_1 \leq L_B \leq C_2\sqrt{n}$, et que dans certains cas particuliers L_B est majoré par une constante universelle. Le fait de savoir si cela est toujours vrai reste ouvert et semble difficile.

Au chapitre II, nous donnons un certain nombre de conditions équivalentes à cette conjecture. Certaines sont dûes à V.D. MILMAN (par exemple : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall B$ corps convexe symétrique de volume 1, $\exists H$, hyperplan de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathrm{Vol}(B \cap H) \geq \alpha$). Nous montrons que cette conjecture est équivalente à un problème de comparaison de volumes de boules et d'ellipsoïde, elle est, par exemple, équivalente à : ($\exists\ c > 0$ tel que $\forall n \in N, \forall B \in A_n$, on ait $L_B < c$). En utilisant un résultat du premier chapitre (K. BALL [1]), nous donnons un contre-exemple, plus simple, que celui de LARMAN-ROGERS [9], au problème suivant :

$$(a)\begin{cases} \forall B, \text{ boule de } \mathbb{R}^n, \forall \xi \text{ ellipsoïde de } \mathbb{R}^n \text{ a-t-on l'implication :} \\ \{\mathrm{Vol}(B \cap H) \leq \mathrm{Vol}(\xi \cap H), \forall H \text{ hyperplan de } \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \{\mathrm{Vol}(B) \leq \mathrm{Vol}(\xi)\}. \end{cases}$$

En affaiblissant ce problème, on conjecture que :

$$(a')\begin{cases} \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall B, \text{ boule de } \mathbb{R}^n, \forall \xi \text{ ellipsoïde de } \mathbb{R}^n, \text{ on a :} \\ \{\mathrm{Vol}(B \cap H) \leq \mathrm{Vol}(\xi \cap H), \forall H \text{ hyperplan}\} \Rightarrow \{\mathrm{Vol}(B) \leq \gamma \mathrm{Vol}(\xi)\}. \end{cases}$$

Nous montrerons justement que cette conjecture est équivalente à celle portant sur L_B.

Nous montrons que la conjecture entraîne un résultat (qui, lui, est prouvé !) de MILMAN. Ce résultat dit en substance que, à une constance C^n près, le volume d'une boule de $\mathbb{R}^n$ coïncide avec celui de son intersection avec un ellipsoïde bien choisi.

Dans le troisième chapitre de la deuxième partie, nous nous intéressons à l'isotropie de quelques boules unités d'espaces de Banach, qui présentent des propriétés géométriques particulières, par exemple 1-inconditionnelle, de type 2, ayant un dual de cotype 2 faible. Ces boules vérifient la conjecture sur L_B.

Le chapitre IV est consacré au calcul de L_B , pour les boules d'espaces de Banach classiques : ℓ_n^p , l'espace C_n^p des idéaux d'opérateurs T vérifiant $\Sigma\ \lambda_i^p < +\infty$ où les λ_i sont les valeurs propres de $|T|$.

Le chapitre V n'entre pas tout à fait dans le cadre du volume des sections de boules, mais utilise des techniques du même domaine. Nous y détaillons une démonstration simple, sans doute connue des spécialistes mais ne figurant pas dans la littérature, du théorème de MILMAN [12], cité précédemment et des inégalités faibles de SANTALO [16], pour les espaces de Banach de dimension finie qui possèdent une base 1-inconditionnelle.

1ère PARTIE

CHAPITRE I

VOLUME DES SECTIONS DU CUBE UNITÉ DE $\mathbb{R}^N$.

K. BALL [1] a montré que si $Q_n = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ est le cube unité de $\mathbb{R}^n$, et si H est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$1 \leq \mathrm{Vol}(Q_n \cap H) \leq \sqrt{2} .$$

Nous nous intéressons à étendre ce résultat aux sections de codimension K.

L'inégalité de gauche a été démontrée pour tous les sous-espaces vectoriels de codimension K par VAALER [17]. Nous ne nous intéressons donc qu'à la majoration. Par ailleurs, HENSLEY [6] avait démontré que $(Q_n \cap H) \leq |5|$.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$|A|$: pour désigner le cardinal d'un ensemble, fini, A.

Vol : pour représenter la mesure de volume. Nous adopterons la même notation pour tous les espaces qui interviendront, quelque soit leur dimension.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la base canonique $(e_i)_{i=1}^n$ et de la structure euclidienne naturelle associée.

Soit F un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^n$, de codimension K. $(\xi_i)_{i=1}^K$, avec $\xi_i = \sum_{j=1}^n a_j^i e_i$, représente une base orthonormale de $F^\perp$ (orthogonal de F).

On définit les vecteurs b_j par : $b_j = \sum_{i=1}^K a_i^j e_i$ pour j allant de 1 à n.

On peut alors écrire :

$$\left[F \cap Q_n = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1,\dots,x_n)\ ;\ x \in \left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]^n \text{ et } (\langle \xi_i, x\rangle = 0,\ i=1 \text{ à } K)\right].$$

Lemme I.1.1.-

On suppose que $2K \leq n$ et que pour toute partie A de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$, de cardinal K, $\{b_i,\ i \in A\}$ est une base de $\mathbb{R}^K$. Alors : la fonction $\left[t \mapsto \prod_{i=1}^n \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle}\right]$, est continue sur $\mathbb{R}^K$, (si $\langle t,b_i\rangle = 0$, on pose naturellement $\frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle} = 1$) et est dans $L^1(\mathbb{R}^K,dt)$, où dt est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^K$, et de plus :

$$\mathrm{Vol}(Q_n \cap F) = \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{i=1}^n \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle}\,.dt\ .$$

Démonstration :

a) Nous définirons la transformée de Fourier $F(g)$ d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n,dx)$ par :

$$\mathcal{F}(g)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i<t,x>}.g(x).dx \ ; \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^n \ .$$

b) On peut écrire $\operatorname{Vol}(F \cap Q_n) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{Q_n}(y) d\mu_F(y)$ (*)

où

. $\mathbb{R}^n$ est considéré comme la somme directe $F \oplus F^{\perp}$;

. $\delta_{0_{F^{\perp}}}$ est la mesure de Dirac sur $F^{\perp}$;

. dx_F la mesure de Lebesgue sur F, induite par celle de $\mathbb{R}^n$;

. $d\mu_F = \delta_{0_{F^{\perp}}} \otimes dx_F$.

Alors (*) peut aussi s'écrire $\operatorname{Vol}(F \cap Q_n) = (1_{Q_n} * \mu_F(0))$.

La fonction 1_{Q_n} est mesurable, bornée, à support compact ; comme μ_F est une distribution tempérée, $\left[1_{Q_n} * \mu_F\right]$ est dans $\mathcal{S}'$ ($\mathcal{S}'$ est l'ensemble des distributions tempérées), et la transformée de Fourier de $(1_{Q_n} * \mu_F)$ est dans $\mathcal{S}'$.

Comme de plus $\mathcal{F}(1_{Q_n})$ est une fonction à croissance modérée et $\mathcal{F}(\mu_F)$ est dans $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{F}(1_{Q_n} * \mu_F) = \mathcal{F}(1_{Q_n}) \times \mathcal{F}(\mu_F).$$

c) D'autre part : $\mathcal{F}(1_{Q_n})(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi t_i}{\pi t_i}$ où $t = (t_1, \ldots, t_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{F}(\mu_F) = d_{x_{F^{\perp}}} \otimes \delta_{0_F} = \nu$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$.

Admettons provisoirement que la fonction $\mathcal{F}(1_{Q_n})$ soit ν-intégrable. Alors :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) = (1_{Q_n} * \mu_F)(0) = \bar{F}(F(1_{Q_n}) \times F(\mu_F))(0)$$

$$= \langle F(1_{Q_n}) \times F(\mu_F), 1\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F(1_{Q_n})(t)\,d\nu(t).$$

En général, lorsque $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n,\nu)$, on a :

$$\langle \nu,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^K} \varphi\Big(\sum_{i=1}^{K} t_i\xi_i\Big)\|\xi_1\|_2 \cdot \ldots \cdot \|\xi_k\|_2 dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_k$$

or $\quad F(1_{Q_n})\Big(\sum_{i=1}^{K} t_i\xi_i\Big) = F(1_{Q_n})\Big(\sum_{j=1}^{n} \langle t,b_j\rangle e_j\Big)$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \pi\langle t,b_j\rangle}{\pi\langle t,b_j\rangle} .$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) = \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \pi\langle t,b_j\rangle}{\pi\langle t,b_j\rangle} .dt}$$

Le seul problème de convergence qui se pose est celui des grandes valeurs de $|t|$.

En posant $t = \rho u$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $u \in S_{K-1}$ nous pouvons écrire $f(\rho u) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi\rho\langle u,b_i\rangle}{\pi\rho\langle u,b_i\rangle}$.

Pour $u \in S_{K-1}$, il y a, au plus, K-1 des $\langle u,b_i\rangle$ qui sont nuls ; car, sinon, il existerait $I \subset \{1,\ldots,n\}$ de cardinal K tel que $(\langle b_i,t\rangle = 0)$ pour $i \in I$. En d'autres termes, nous aurons K-formes linéaires indépendantes (car $(b_i)_{i\in I}$ est une base) qui s'annulent en un point d'un espace de dimension K, ceci étant de toute évidence impossible.

Soit donc $u \in S_{K-1}$, il existe une partie $I_u \subset \{1,\dots,n\}$, $|I_u| = K+1$ pour laquelle $<u,b_i> \neq 0$ pour tout i dans I_u.

Or $(u \mapsto (<u,b_i>)_{i\in I_u})$ est continue donc il existe un voisinage W_u de u et une constante strictement positive C_u tels que :

pour tout v dans W_u et tout i dans I_u

$$0 < C_u < |<b_i,v>| .$$

Or, $\bigcup_{u\in S_{K-1}} W_u$ recouvre le compact S_{K-1} donc il existe une famille finie $(u_m)_{m=1}^N$ telle que $S_{K-1} \subset \bigcup_{m=1}^N W_{u_m}$. Désignons alors par $C : \inf_m C_{u_m}$.

Soit $v \in S_{K-1}$ et $\rho > 0$, il existe m tel que $v \in W_{u_m}$.

$$|f(\rho v)| = \prod_{i\in I_{u_m}} \frac{|\sin \pi\rho<v,b_i>|}{|\pi\rho<v,b_i>|} \cdot \prod_{i\notin I_{u_m}} \frac{|\sin \pi\rho<v,b_i>|}{|\pi\rho<v,b_i>|}$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho^{K+1}} \cdot \prod_{i\in I_{U_m}} \frac{1}{|\pi<v,b_i>|} \quad (\text{car } \prod_{i\notin I_{U_m}} \frac{|\sin \pi\rho<v,b_i>|}{<\pi\rho<v,b_i>|} \leqslant 1)$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho^{K+1}} \cdot \frac{1}{(\pi.C)^{K+1}} .$$

Donc, en résumé $\forall v \in S_{K-1}$, $|f(\rho v)| \leqslant \frac{1}{\rho^{K+1}} \cdot \frac{1}{(\pi.C)^{K+1}}$, ce qui permet de conclure que f est intégrable à l'infini, sur $\mathbb{R}^K$

Lemme I.1.2.-

Sous les hypothèses du lemme (I.1.1) et, si de plus, pour toute partie A de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal K, $\det((b_i)_{i\in A}) = \Delta_A$ vérifie $\Delta_A \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2C_{n-1}^{K-1}}}$. Alors :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2C_{n-1}^{K-1}} .$$

Démonstration :

D'après le lemme précédent, nous avons :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) = \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle} .dt .$$

D'autre part, on a

$$\prod_{|A|=k} \prod_{i\in A} \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi\langle b_i,t\rangle}{\pi\langle b_i,t\rangle}\right)^{C_{n-1}^{K-1}} .$$

On en déduit l'inégalité

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{|A|=K} \left| \prod_{i\in A} \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle} \right|^{\frac{1}{C_{n-1}^{K-1}}} .dt$$

On obtient moyennant l'inégalité de Hölder :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \prod_{|A|=K} \left(\int_{\mathbb{R}^K} \prod_{i\in A} \left| \frac{\sin \pi\langle t,b_i\rangle}{\pi\langle t,b_i\rangle} \right|^{\frac{\beta_A}{C_{n-1}^{K-1}}} .dt \right)^{\frac{1}{\beta_A}} ,$$

pourvu que les β_A soient supérieurs à 1 et $\sum_{|A|=K} \frac{1}{\beta_A} = 1$.

Nous choisirons ultérieurement les constantes β_A de sorte que les conditions de convergence des intégrales écrites soient réalisées.

Pour la suite de la démonstration, nous ferons appel au résultat fondamental de K. BALL [I].

Lemme (de K. BALL) I.1.3.-

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^p .dt \leq \sqrt{\frac{2}{p}} \quad \text{si} \quad p \geq 2 \quad ;$$

de plus, l'égalité a lieu si et seulement si $p = 2$).

Imposons aux β_A la condition suivante $\beta_A \geq 2C_{n-1}^{K-1}$, alors d'après le lemme (I.1.3), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin \pi t}{t}\right|^{\frac{\beta_A}{C_{n-1}^{K-1}}} .dt \leq \sqrt{\frac{2.C_{n-1}^{K-1}}{\beta_A}} .$$

Les Δ_A sont les composantes du produit extérieur des vecteurs orthonormés $(\xi_1,\ldots,\xi_K)$ de $\mathbb{R}^n$ donc : $\sum\limits_{|A|=K} \Delta_A^2 = 1$.

Sachant que $\Delta_A^2 \leq \frac{1}{2C_{n-1}^{K-1}}$, il est naturel de choisir $\frac{1}{\beta_A} = \Delta_A^2$.

Tenant compte de ces considérations

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leq (2C_{n-1}^{K-1})^{K/2} \Big(\prod_{|A|=K} |\Delta_A|^{\Delta_A^2}\Big)^{K-1}.$$

Nous allons, pour achever la démonstration du lemme (I.1.2), chercher le maximum de la fonction $((\Delta_A)_{|A|=K} \longrightarrow \prod_{|A|=K} |\Delta_A|^{\Delta_A^2})$ sur l'ensemble des Δ_A défini par :

$$\sum_{|A|=K} \Delta_A^2 = 1 \quad \text{et} \quad 0 < \Delta_A^2 \leq \frac{1}{2C_{n-1}^{K-1}} .$$

Considérons $f(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \log x_i$. f est définie, continue sur le compact :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq x_i \leq \alpha, \quad i = 1,\dots,N\}.$$

La fonction f admet un maximum dans C, atteint en un point $(y_1,\dots,y_N)$. Supposons, par exemple, que :

$$\left.\begin{array}{llll} y_i = 0 & \text{si} \quad i \in I & \text{avec} & |I| = r \\ y_i = \alpha & \text{si} \quad i \in J & \text{avec} & |J| = s \\ 0 < y_i < \alpha & \text{si} \quad i \in L & \text{avec} & |L| = t \end{array}\right\} \quad r + s + t = N$$

Si $f(y_1,\dots,y_N)$ est le maximum de f sur C, il est aussi de maximum de la fonction $g : x \to \sum_{i\in L} x_i^2 \log x_i + s\,\alpha^2 \log \alpha$, sur C' avec $C' = \{x \in C : 0 < x_i < \alpha, \text{ si } i \in L \text{ et } x_i = y_i \text{ sinon}\}$.

C' peut être considéré, à une bijection continue près, comme un ouvert de $\mathbb{R}^r$.

Le théorème des extremum liés pour g donne les équations suivantes :

$$(1) \begin{cases} \sum_{i\in L} x_i(2\log x_i + 1)dx_i = 2\lambda \sum_{i\in K} x_i \, dx_i \\ \text{et} \quad \sum_{i\in L} x_i^2 = 1 - s\alpha^2 \end{cases}$$

$$(1) \iff \begin{cases} x_i(2\log x_i + 1) = 2\lambda x_i & \text{pour } i \in L \\ \text{et } \sum\limits_{i\in L} x_i^2 = 1 - s\alpha^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\log x_i + 1 = 2\lambda \\ \text{et } \sum\limits_{i\in L} x_i^2 = 1 - s\alpha^2 \end{cases} \qquad (\text{car } x_i \neq 0 \text{ pour } i \in L)$$

Posons $x_i = \beta$; on doit alors avoir $\beta^2.t = 1 - s\alpha^2$ d'où $\beta = \sqrt{\frac{1-s^{\ 2}}{t}}$.

Donc $\quad Y_i = \sqrt{\frac{1-s\alpha^2}{t}}$ pour $i \in L$

$f(y_1,\dots,y_N) = s\alpha^2\log\alpha + t\,\beta^2\log\beta.$

Si $t = 0$, $f(x) \leqslant \log\alpha$ pour $x \in C$.

Si $t > 0$, puisque $\beta < \alpha$ et $s\alpha^2 + t\beta^2 = 1$,

$f(x) \leqslant s\alpha^2\log\alpha + t\beta^2\log\beta \leqslant (s\alpha^2 + t\beta^2)\log\alpha \leqslant \log\alpha.$

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2C_{n-1}^{K-1}}$ et $N = C_n^K$, on en déduit que,

lorsque $\sum\limits_{|A|=K} \Delta_A^2 = 1$ et $0 < \Delta_A < \dfrac{1}{2C_{n-1}^{K-1}}$,

$$\prod_{|A|=K} |\Delta_A|^{\Delta_A^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2C_{n-1}^{K-1}}} .$$

Par conséquent

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant (2C_{n-1}^{K-1})^{K/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2C_{n-1}^{K-1}}}\right)^{K-1}.$$

Soit

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2C_{n-1}^{K-1}} \qquad \blacksquare$$

Remarque I.1.4.-

L'hypothèse : "Pour toute partie A de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal K $\det((b_i)_{i\in A}) = \Delta_A \neq 0$" n'est pas restrictive, car l'ensemble des sous-espaces F de $\mathbb{R}^n$ de codimension K, qui la vérifient est dense dans la grassmannienne G_n^{n-K}. De plus, $(F \to \mathrm{Vol}(Q_n \cap F))$ est continue, donc toute majoration de $\mathrm{Vol}(Q_n \cap F)$ sur l'ensemble dessus cité sera valable sur G_n^{n-K}.

Théorème I.1.5.-

Soit F un sous-espace de codimension K, avec $2K \leqslant n$, on a alors

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{\frac{2K}{n} \cdot C_n^K}\ .$$

Démonstration :

On peut supposer, si $\xi_1,\ldots,\xi_k$ est une base orthonormale de F, $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i e_j$, et si on pose $b_j = \sum_{i=1}^{K} a_j^i e_i$, que $\forall A \subset \{1,\ldots,n\}$, $|A| = K$, $\Delta_A = \det((b_j)_{j\in A}) \neq 0$.

Nous gardons les notations des lemmes précédents.

1er cas :

Si pour toute partie A de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal K,

$0 < \Delta_A^2 \leqslant \frac{1}{2C_{n-1}^{K-1}}$. En appliquant le lemme I.1.2., on obtient :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{\frac{2K}{n} . C_n^K} \quad .$$

<u>*2ème cas*</u> :

On suppose qu'il existe dans $\{1,\dots,n\}$ une partie A de cardinal K, par exemple $A = \{n-K+1,\dots,n\}$, telle que $\Delta_A > \frac{1}{2C_{n-1}^{K-1}}$.

Soit $(\xi_{k+1},\dots,\xi_n)$ une base orthonormée de F, $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ est, alors, une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On définit :

$$C_{n-K} = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=K+1}^{n} x_i \xi_i \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad i = K+1,\dots,n\}$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-K}$, avec $\mathbb{R}^{n-k} = \{(x_i)_{i=1}^n \ / \ x_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = n-K+1 \ \text{à} \ n\}$.

Avec ces notations, nous avons

$$\frac{\mathrm{Vol}(F \cap Q_n)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-k}}(F \cap Q_n))} = \frac{\mathrm{Vol}(C_{n-K})}{\mathrm{Vol}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}} C_{n-K})}$$

(la projection conserve le rapport des volumes)

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(C_{n-K}) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x = \sum_{i=K+1}^{n} x_i \tilde{\xi}_i \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$$

où $\tilde{\xi}_i = \mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(\xi_i)$ pour $i = K+1$ à n.

D'autre part, $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j$; donc $\tilde{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n-K} a_i^j e_j$.

Notons B la transformation linéaire de $\mathbb{R}^{n-K}$, dont la matrice est $\left[\tilde{\xi}_i\right]$, dans la base $(e_i)_{i=1}^{n-K}$, on a :

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(C_{n-K}) = B([0,1]^{n-K})$, on en déduit que

$\mathrm{Vol}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(C_{n-K})) = |\det B|$.

Or la matrice $X = \left[\xi_i\right]_{i=1}^{n}$ est orthonormale donc $X^{-1} = X^t$, avec

$$X = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots\cdots & a_k^1 & a_{K+1}^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & B & \vdots \\ a_1^{n-K} & \cdots\cdots & a_K^{n-K} & a_{K+1}^{n-K} & \cdots\cdots & a_n^{n-K} \\ a_1^{n-K+1} & \cdots\cdots & a_K^{n-K+1} & a_{K+1}^{n-K+1} & \cdots\cdots & a_n^{n-K+1} \\ \vdots & \tilde{A} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots\cdots & a_K^n & a_{K+1}^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{bmatrix}$$

D'après l'identité de JACOBI (BOURBAKI [3])
$|\det B| = |\det(\tilde{A})| = |\Delta_A|$.

D'autre part, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(F \cap Q_n) \subset Q_{n-K}$, donc :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(F \cap Q_n)) \leqslant 1.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n-K}}(F \cap Q_n))}{|\Delta_A|} \leqslant \frac{1}{|\Delta_A|} < \sqrt{2C_{n-1}^{K-1}} \, .$$

<u>*Corollaire*</u> *(de K. BALL) I.1.6.-*

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, et tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Vol}(Q_n \cap H) \leqslant \sqrt{2}$.

<u>*Démonstration*</u> :

En appliquant le théorème I.1.5. pour $K = 1$, on obtient :
$\mathrm{Vol}(Q_n \cap H) \leqslant \sqrt{\frac{2}{n} C_n^1} = \sqrt{2}$.

Bien sûr, nous avons utilisé le lemme principal de K. BALL ($\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^p . dt \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}}$ si $p \geqslant 2$) pour démontrer le théorème I.1.5.

<u>*Remarques*</u> :

1) La condition $2k \leqslant n$ apparaît à bien des égards comme artificielle, mais elle est nécessitée par notre technique.

2) Dans le cas général, $\sum_{|A|=K} \Delta_A^2 = 1$ entraîne qu'il existe A de cardinal K tel que $|\Delta_A| \geqslant \frac{1}{\sqrt{C_n^K}}$.

On en déduit, puisque $\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \frac{1}{|\Delta_A|}$, que :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{C_n^K} \, .$$

Pour clore ce chapitre, nous allons faire l'étude de quelques exemples. Nous reproduirons une étude faite par C. SACRÉ, sur ordinateur, dans le cas $n = 4$ et $K = 2$.

Ceci rend plausible la conjecture suivante : $\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2}^K$ lorsque $2k \leqslant n$. Remarquons que cette conjecture rejoint celle de K. BALL [2] selon laquelle, pour un corps convexe symétrique isotrope

$$\mathrm{Vol}(F \cap C) \leqslant \alpha^{\mathrm{codim} K} \quad \text{avec } \alpha \text{ constante.}$$

Exemple I.1.7.-

On suppose $n = Kp$, $p \in \mathbb{N}^*$

$$\xi_i = (e_{(i-1)p+1} + \dots + e_{ip})/\sqrt{p} \quad \text{et} \quad F = [\xi_1, \dots, \xi_k]^{\perp} \quad ;$$

on obtient : $\quad b_j = \dfrac{e_m}{\sqrt{p}}$ lorsque $(m-1)p+1 \leqslant j \leqslant mp$.

$$\text{Alors : } \mathrm{Vol}(F \cap Q_n) = \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin \pi\langle b_j, t\rangle}{\pi\langle b_j, t\rangle} . dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{m=1} \prod_{j=(m-1)p+1}^{mp} \frac{\sin \pi\langle b_j, t\rangle}{\pi\langle b_j, t\rangle} . dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^K} \prod_{m=1}^{\substack{n/p \\ K}} \left[\frac{\sin(\pi . \frac{t_m}{\sqrt{p}})}{\pi \frac{t_m}{\sqrt{p}}} \right]^p . dt_1 . \dots . dt_m$$

$$= \prod_{m=1}^{K} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sin \pi \frac{t_m}{\sqrt{p}}}{\pi \frac{t_m}{\sqrt{p}}} \right]^p . dt_m$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sin \pi \frac{t}{\sqrt{p}}}{\pi \frac{t}{\sqrt{p}}} \right]^p . \, dt \right]^K \quad .$$

On sait que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \pi \frac{t}{\sqrt{p}}}{\pi \frac{t}{\sqrt{p}}} \right|^p . \frac{dt}{\sqrt{p}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{p}}$ lorsque $p \geqslant 2$ et que pour $p = 2$, on obtient l'égalité.

Donc :

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \left[\sqrt{p}.\sqrt{\frac{2}{p}} \right]^K = \sqrt{2}^K .$$

Pour $p = 2$ c'est-à-dire $n = 2K$,

$$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) = \sqrt{2}^{n/2} .$$

Pour $p = n$ c'est-à-dire $K = 1$, on obtient

$\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2}$, résultat qu'on savait déjà.

Exemple I.1.8.-

$$F = \left[\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{e_{2p-1}+e_{2p}}{\sqrt{2}} \right] .$$

Soit $x \in F$, $x = x_1 \dfrac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} + \ldots . \, xp \, . \dfrac{e_{2p-1}+e_{2p}}{\sqrt{2}}$

$$x \in Q_n \iff \forall \, i = 1 \text{ à } p \quad \frac{|x_i|}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2}$$

Donc $(F \cap Q_n) = \{x \in F, \ ||x||_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(F \cap Q_n) &= \sqrt{2}^p \\ &= \sqrt{2}^{n-\mathrm{codim}F} \end{aligned}$$

Remarque :

Ce résultat ne contredit pas forcément ceux obtenus auparavant. En effet, une majoration par $\sqrt{2}^{n-\dim F}$ serait grossière pour $\dim F$ très petite. Pour $\dim F = 1$, on sait que $\mathrm{Vol}(F \cap Q_n) \leq \sqrt{n}$, ce qui est incomparable avec $\sqrt{2}^{n-1}$.

Exemple I.1.9.-

Etude faite par C. SACRE dans le cas $n = 4$ et $K = 2$.

C. SACRE a démontré, expérimentalement, que $\sqrt{2}^K$ est la bonne majoration lorsque $n = 4$ et $K = 2$.

$$Q_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4, \ |x| \leq 1 \quad |y| \leq 1 \quad |z| \leq 1 \quad |t| \leq 1\}.$$

Un plan P passant par l'origine coupe Q_4 selon un polygone dont il s'agit de calculer l'aire S.

On considère (ξ,ξ'), base de $P^\perp$ $\xi = (a,b,c,d)$, $\xi' = (a',b',c',d')$

$$(x,y,z,t) \in P \iff \begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0. \end{cases}$$

Le mineur d'ordre 2 de ce système qui a la plus grande valeur absolue est non nul. On peut supposer quitte à permuter les quatre coordonnées qu'il s'agit de $\begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}$. Par des combinaisons linéaires, ne changeant pas les mineurs d'ordre 2, on peut transformer le système en un système équivalent pour lequel $d = c' = 0$.

Quitte à opérer des symétries orthogonales, par rapport aux hyperplans de coordonnées, on peut supposer $c > 0$, $d' > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ et quitte à opérer une symétrie par rapport à l'hyperplan $(x = y)$, on peut supposer $a \leq b$. Enfin, on peut normaliser les vecteurs $(a,b,c,0)$ et $(a',b',0,d')$, ce qui ne change pas l'ordre des mineurs du système.

On peut considérer, désormais, qu'on est dans la situation suivante :

$$(P) \begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ \\ Dx + Ey + Ft = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2 = 1 \\ 0 \leq A \leq B \leq C, \ 0 < C \ \text{ et } \ 0 < F \\ |\delta| \leq CF, \ |D| \leq F, \ |E| \leq |F| \\ \text{avec } \ \delta = BD - AE \end{array}\right\} (*)$$

En orthonormalisant, en $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$, les deux vecteurs de P : $\vec{V}_1 = (CF,0,-AF,-CD)$ et $\vec{V}_2 = (0,CF,-BF,-CE)$, et en projetant ces vecteurs sur (xoy), on obtient un parallélogramme dont l'aire est $\frac{CF}{\Delta}$ avec $\Delta = \sqrt{\delta^2+C^2+F^2-C^2F^2}$.

La projection conservant les rapport d'aires, $H \cap P$ se projette sur (xoy) suivant un polygone d'aire S' telle que :

$\frac{S'}{S} = \frac{CF}{\Delta}$. Donc l'aire cherchée, S, est obtenue par :

$$S = \frac{\Delta}{CF} . S'.$$

Etude de la projection sur (xoy), *de* $P \cap H$.

Cette projection est l'intersection $K \cap I \cap J$ où :

K est le carré $\{|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1\}$

I est la bande $|Ax + By| \leqslant C$.

J est la bande $|Dx + Ey| \leqslant F$.

Les bandes I et J peuvent être éventuellement égales à (xoy).

Par raison de symétrie, par rapport à l'origine, on peut supposer $D \geqslant 0$.

On va calculer S' suivant une décomposition hiérarchique en cas :

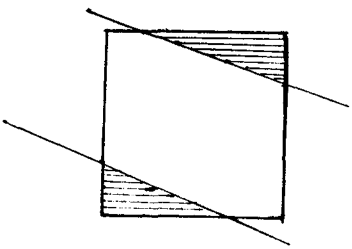
CAS 1 : $K \subset I$: $A+B \leqslant C$.

CAS 11 : $K \subset J$: $D + |E| \leqslant F$

alors : $S' = \text{Aire } K = 4$.

CAS 12 : J coupe K et $K \not\subset J$: $F < D + |E|$.

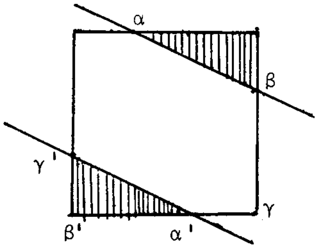
Les conditions $|D| \leqslant F$ et $|E| \leqslant F$ (1,0) et (0,1), de K sont dans J, les deux autres étant à l'extérieur.



$$S' = 4 - \frac{(D+|E|-F)^2}{D|E|} \quad .$$

<u>CAS 2</u> : I coupe K et $K \not\subset I$, $C < A+B$

$I \cap K$ est alors un hexagone



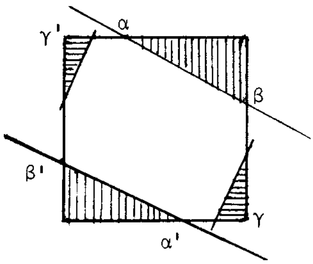
$\alpha(\frac{C-B}{A},1)$ $\beta(1, \frac{C-A}{B})$ $\gamma(1,-1)$.

<u>CAS 21</u> : $\gamma \in J$: $|D-E| \leqslant F$ (on a aussi $\gamma' \in J$)

<u>CAS 211</u> : $\alpha \in J$, $|CD-\delta| \leqslant AF$ (on a aussi $\alpha' \in J$)

<u>CAS 2111</u> : $\beta \in J$, $|CE+\delta| \leqslant BF$ (on a aussi $\gamma' \in J$).

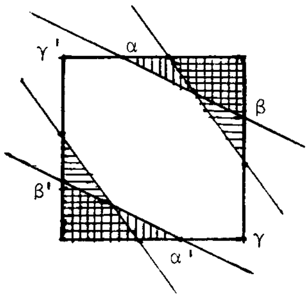
Dans ce cas, l'exagone $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ est contenu dans J.



$$S' = 4 - \frac{(A+B-C)^2}{AB} .$$

<u>CAS 2112</u> : $\beta \notin J$ (donc $\beta' \notin J$)

$I \cap J \cap K$ est un octagone



on peut montrer que $E > 0$ et $\delta > 0$

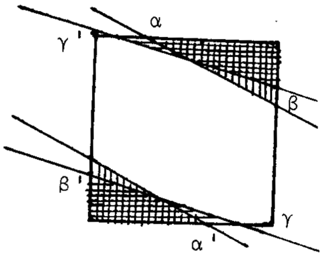
$$\text{et} \quad S' = \frac{1}{AE\delta}\left[\begin{array}{l} A^2.D.E - 2A^2E^2 - 2A^2.E.F - ABD^2 + 2ABDE + \\ 2BDF + ABE^2 - ABF^2 - 2ACE^2 + 2ACEF - B^2DE \\ + 2BCDE - C^2DE \end{array}\right]$$

CAS 212 : $\alpha \notin J$ (donc $\alpha' \notin J$)

$AF < |\delta - CD|$ (alors $D > 0$ et $E > 0$).

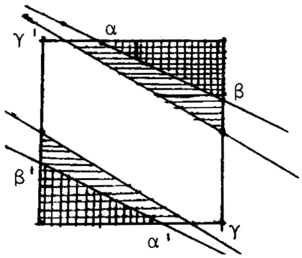
CAS 2121 : $\beta \in J$.

La section est un octogone



$$S' = \frac{1}{-BD\delta}\left[\begin{array}{l} -A^2DE + ABD^2 + 2ABDE - ABE^2 + 2ABEF - ABF^2 \\ + 2ACDE - 2B^2D^2 - 2B^2DF - 2BCD^2 + 2BCDF \\ - C^2DE \end{array}\right]$$

CAS 2122 : $\beta \notin J$. $BF < |\delta + CE|$



$\beta \notin J$ $BF < |\delta + CE|$.

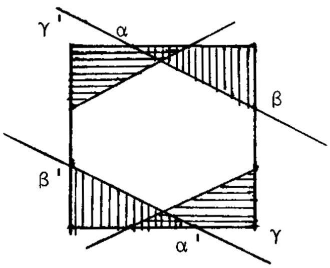
On retrouve la formule du cas 12 :

$$S' = 4 - \frac{(D+E-F)^2}{DE} .$$

CAS 22 : $\gamma \notin J$. $F < |D-E|$ alors $E < 0$ et $D > 0$ et $\delta > 0$

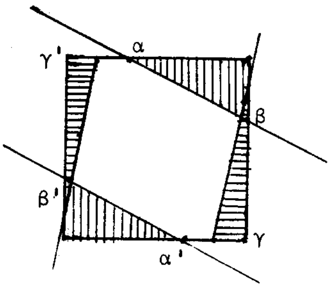
CAS 221 : $\alpha \in J$ $|\delta - CD| \leqslant FA$

CAS 2211 : $\beta \in J$ $|\delta - CE| \leqslant FB$



$$S' = 4 - \frac{(A+B-C)^2}{AB} + \frac{(D-E-F)^2}{DE} .$$

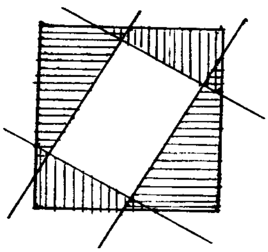
<u>CAS 2212</u> : $\beta \notin J$, $FB < |\delta+CE|$



$$S' = \frac{1}{AD\delta}\left[\begin{array}{l} -A^2E^2 - 2A^2EF - A^2F^2 + 2ABDE + 2ABDF - 2ACDE \\ + 2ACDF - B^2D^2 + 2BCD^2 - C^2D^2 \end{array}\right]$$

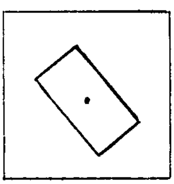
<u>CAS 222</u> : $\alpha \notin J$, $FA < |\delta-CD|$

<u>CAS 2221</u> : $\beta \in J$, $|\delta+CE| \leqslant FB$



$$S' = \frac{1}{-BE\delta}\left[\begin{array}{l} -A^2E^2 + 2ABDE - 2ABEF + 2ACE^2 - B^2D^2 \\ + 2B^2DF - B^2F^2 - 2BCDE - 2BCEF - C^2E^2 \end{array}\right]$$

<u>CAS 2222</u> : $\beta \notin J$, (J coupe $|\alpha,\beta|$ et $|\alpha',\beta'|$



$$S' = \frac{CF}{\delta} .$$

<u>*Remarques*</u> :

1) Les cas 12, 2111, 2112 donnent des formules équivalentes modulo la transposition $(A,B,C) \longleftrightarrow (D,E,F)$.

2) Vu les relations (*) les cas 2212, 2221, 2222 sont impossibles.

Principe de l'algorithme utilisé.

Les paramètres A, B, C, D, E, F sont décrits par quatre boucles imbriquées de manière à respecter les conditions (*), de l'extérieur vers l'intérieur :

. A varie de 0 à $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

. B varie de A à $\sqrt{\frac{1-A^2}{2}}$ (calcul de $C = \sqrt{1-A^2-B^2}$) ;

. D varie de 0 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

si $D \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|E|$ varie de 0 à $\sqrt{\frac{1-D^2}{2}}$ calcul de $F = \sqrt{1-D^2-E^2}$

si $D > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $|E|$ varie de 0 à $\sqrt{1-2D^2}$

Après étude d'une valeur de E, changement de E en -E.

Le pas est choisi de manière à ce que d'une valeur d'un paramètre à la suivante, dans la même boucle, l'incrément soit inférieur à $\frac{1}{N}$, où N est fixé par l'utilisateur. (C'est cette considération qui a guidé l'ordre A, B et D,E des boucles).

Les erreurs possibles, d'arrondi, obligent à garantir les tests, et la positivité avant une extraction de racine carrée (PLUS et EPS dans le programme).

La valeur de S obtenue est divisée par quatre pour se ramener au cas d'un hypercube de volume 1.

Résultats du calcul.

Pour $N = 16$, temps de calcul 45 mn.

CAS 11	10360	fois	valeurs	extrêmes de	S	:	1,00000	et	2,00000	
CAS 12	4816	"	"	"	"	:	1,22907	et	1,87171	
CAS 2111	5681	"	"	"	"	:	1,25815	et	1,96074	
CAS 2112	306	"	"	"	"	:	1,47446	et	1,83020	
CAS 2121	71	"	"	"	"	:	1,49531	et	1,68140	
CAS 2122	320	"	"	"	"	:	1,43272	et	1,72705	
CAS 2211	849	"	"	"	"	:	1,54318	et	1,84079	.

Remarques :

La valeur minimum 1 est obtenue pour $A = B = D = E = 0$ $(C = F = 1)$; $P = (xoy)$.

La valeur maximum 2 est obtenue pour $A = E = 0$ et $B = C = D = F = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ceci, à une permutation d'indices près, correspond à la situation de l'exemple 1).

```
PROGRAM HOUDE4;
  USES TRANSCEND;
  CONST R2=0.7071068; R3=0.5773503; (* 1/SQRT(2), 1/SQRT(3) *)
        EPS=1E-7;
  TYPE NUMCAS=1..10;
  VAR A,B,C,D,E,F,A2,B2,C2,D2,E2,F2 :REAL;
      DB,DE,DEL,GRDEL,S,SPR :REAL;
      N,NA,NB,ND,NE,IA,IB,ID,IE :INTEGER;
      K :NUMCAS;
      NBR :ARRAY[NUMCAS] OF INTEGER;
      MINS,MAXS : ARRAY[NUMCAS] OF REAL;

FUNCTION PLUS(X:REAL):REAL;
BEGIN
  IF X>=0 THEN PLUS:=X ELSE PLUS:=0
END;
PROCEDURE CAS1;
BEGIN
  IF D+ABS(E)<=F+EPS THEN BEGIN K:=1;SPR:=4 END
    ELSE BEGIN K:=2;SPR:=4-SQR(D+ABS(E)-F)/D/ABS(E) END
END;
PROCEDURE CAS211;
BEGIN
  IF ABS(C*E+DEL)<=B*F+EPS THEN BEGIN K:=3;SPR:=4-SQR(A+B-C)/A/B END
    ELSE BEGIN K:=4;SPR:=A2*D*E-2*A2*E2-2*A2*E*F-A*B*D2;
           SPR:=SPR+2*A*B*D*E+2*A*B*D*F+A*B*E2-A*B*F2;
           SPR:=SPR-2*A*C*E2+2*A*C*E*F-B2*D*E+2*B*C*D*E;
           SPR:=SPR-C2*D*E;SPR:=SPR/(A*E*DEL) END
END;
PROCEDURE CAS212;
BEGIN
  IF ABS(DEL+C*E)<=B*F+EPS THEN BEGIN K:=5;
       SPR:=-A2*D*E+A*B*D2+2*A*B*D*E-A*B*E2+2*A*B*E*F;
       SPR:=SPR-A*B*F2+2*A*C*D*E-2*B2*D2+B2*D*E-2*B2*D*F;
       SPR:=SPR-2*B*C*D2+2*B*C*D*F-C2*D*E;
       SPR:=-SPR/(B*D*DEL) END
    ELSE BEGIN K:=6;SPR:=4-SQR(D+E-F)/D/E END
END;
PROCEDURE CAS21;
BEGIN
  IF ABS(C*D-DEL)<=A*F+EPS THEN CAS211 ELSE CAS212
END;
PROCEDURE CAS221;
BEGIN
  IF ABS(DEL+C*E)<=B*F+EPS THEN BEGIN K:=7;
       SPR:=4-SQR(A+B-C)/A/B+SQR(D-E-F)/D/E END
    ELSE BEGIN K:=8;SPR:=-A2*E2-2*A2*E*F-A2*F2+2*A*B*D*E;
       SPR:=SPR+2*A*B*D*F-2*A*C*D*E+2*A*C*D*F-B2*D2;
       SPR:=SPR+2*B*C*D2-C2*D2;SPR:=SPR/(A*D*DEL) END
END;
PROCEDURE CAS222;
BEGIN
  IF ABS(DEL+C*E)<=B*F+EPS THEN BEGIN K:=9;
       SPR:=-A2*F2+2*A*B*D*E-2*A*B*E*F+2*A*C*E2-B2*D2;
       SPR:=SPR+2*B2*D*F-B2*F2-2*B*C*D*E-2*B*C*E*F-C2*E2;
       SPR:=-SPR/(D*E*DEL) END
    ELSE BEGIN K:=10;SPR:=4*C*F/DEL END
END;
PROCEDURE CAS22;
BEGIN
  IF ABS(DEL-C*D)<=A*F+EPS THEN CAS221 ELSE CAS222
END;
PROCEDURE CAS2;
BEGIN
```

```
BEGIN
  IF ABS(DEL-C*D)<=A*F+EPS THEN CAS221 ELSE CAS222
END;
PROCEDURE CAS2;
BEGIN
  IF ABS(D-E)<=F+EPS THEN CAS21 ELSE CAS22
END;
PROCEDURE MSJOUR;
BEGIN
  IF NBR[K]=0 THEN BEGIN MINS[K]:=S; MAXS[K]:=S END
    ELSE BEGIN IF S<MINS[K] THEN MINS[K]:=S;
               IF S>MAXS[K] THEN MAXS[K]:=S
         END;
  NBR[K]:=NBR[K]+1
END;
PROCEDURE TRAITCAS;
BEGIN
  DEL:=B*D-A*E;
  IF ABS(DEL)<=C*F+EPS THEN BEGIN
    GRDEL:=SQRT(SQR(DEL)+C2+F2-C2*F2);
    IF A+B<=C+EPS THEN CAS1 ELSE CAS2;
    S:=SPR*GRDEL/C/F/4;
    MSJOUR
  END;
END;

PROCEDURE ETUDDEF;
BEGIN
  ND:=TRUNC(1+R2*N);
  FOR ID:=0 TO ND DO BEGIN
    D:=R2*ID/ND;D2:=SQR(D);
    IF D>R3 THEN DE:=SQRT(PLUS(1-2*D2))
            ELSE DE:=SQRT((1-D2)/2);
    NE:=TRUNC(1+DE*N);
    FOR IE:=0 TO NE DO BEGIN
      E:=DE*IE/NE;E2:=SQR(E);
      F2:=1-D2-E2;F:=SQRT(F2);
      TRAITCAS;
      IF IE<>0 THEN BEGIN E:=-E;TRAITCAS END
    END;
  END;
END;
PROCEDURE ETUDABC;
BEGIN
  NA:=TRUNC(1+N*R3);
  FOR IA:=0 TO NA DO BEGIN
    A:=R3*IA/NA;A2:=SQR(A);WRITELN('A=',A);
    DB:=PLUS(SQRT((1-A2)/2)-A);
    NB:=TRUNC(1+N*DB);
    FOR IB:=0 TO NB DO BEGIN
      B:=A+DB*IB/NB;B2:=SQR(B);
      C2:=1-A2-B2;C:=SQRT(C2);
      ETUDDEF
    END;
  END;
END;
PROCEDURE RESULT;
BEGIN
  FOR K:=1 TO 10 DO IF NBR[K]<>0 THEN
    WRITELN(K:2,NBR[K]:8,'  ',MINS[K],'  ',MAXS[K])
END;
BEGIN
  REPEAT WRITE('TAILLE DU DECOUPAGE : ');READLN(N) UNTIL N>1;
  FOR K:=1 TO 10 DO NBR[K]:=0;
  ETUDABC;
  RESULT
END.
```

CHAPITRE II

UNE FORMULE EXPLICITE DE LA MESURE DU VOLUME DES SECTIONS HYPERPLANES DU CUBE.

Introduction.

La majoration du volume de $Q_n \cap H$ (H hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$), par $\sqrt{2}$, étant acquise.

L'intérêt, du présent chapitre, est de donner une formule explicite de $\mathrm{Vol}_{n-1}(Q_n \cap H)$, en fonction des coordonnées du vecteur normal à H.

Un autre aspect intéressant est de présenter trois raisonnements, sans lien apparent, qui permettent de répondre à la question.

Notations.

n désigne un entier supérieur ou égal à 1, $(e_i)_{i=1}^n$ représente la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\xi = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $a_i > 0$ pour tout i.

H est un hyperplan vectoriel passant par le centre de Q_n et est orthogonal à ξ $\left(Q_n = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n\right)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $(x)_+ = \sup(0,x)$ et Vol_K désigne la mesure de volume de $\mathbb{R}_K$.

Proposition (M. MEYER) *I.2.1.-*

Sous les notations ci-dessus, on a :

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(Q_n \cap H) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}}{2^{n-1}(n-1)!\prod_{i=1}^n a_i} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \prod_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\right)_+^{n-1}$$

La démonstration de cette proposition est abordée de deux manières totalement différentes, que l'on va exposer en I) et II). Pour la première démonstration (I), on se sert du lemme suivant :

Lemme I.2.2.- On considère $(a_i)_{i\in I_n}$ une famille de nombres strictement positifs et $\lambda > 0$.

Soit $I_n = \{1,\dots,n\}$, on a alors :

$$\mathrm{Vol}_n\left([0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n a_i x_i \leqslant \lambda\}\right) = \frac{1}{n!\prod_{i=1}^n a_i} \sum_{I\subset I_n} (-1)^{|I|}\left(\lambda - \sum_{i\in I} a_i\right)_+^n.$$

(où $|I|$ est le cardinal de I).

I. *Première démonstration de la proposition* I.2.1.-

Soit $\mathcal{V}(\lambda) = \mathrm{Vol}_n([0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \lambda\})$, on sait qu'alors :

$$\mathrm{Vol}_{n-1}([0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n a_i x_i = \alpha\}) = (\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda}(\alpha). \qquad (1)$$

On considère l'hyperplan H', passant par $(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$, centre de $[0,1]^n$ et orthogonal à ξ ; on peut donc écrire :

$$H' = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n a_i x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i\}.$$

En appliquant le lemme I.2.2 et (1) pour $\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$, on obtient :

$$\mathrm{Vol}_{n-1}([0,1]^n \cap H' = \frac{(\sum_{i=1}^n a_1^2)^{1/2}}{2^{n-1}(n-1)! \prod_{i=1}^n a_i} \sum_{I \subset I_n} (-1)^{|I|} (\sum_{i \in I^c} a_i - \sum_{i \in I} a_i)_+^{n-1}.$$

Cette relation peut être formulée comme suit :

$$\mathrm{Vol}_{n-1}([0,1]^n \cap H') = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}}{2^{n-1}(n-1)! \prod_{i=1}^n a_i} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \prod_{i=1}^n \varepsilon_i . (\prod_{i=1}^n \varepsilon_i a_i)_+^{n-1} \qquad (2)$$

Le résultat souhaité se déduit de (2), puisqu'on passe de $[0,1]^n \cap H'$ à $Q_n \cap H$, par la translation de vecteur $\vec{v}$, où $\vec{v} = -\frac{1}{2} . \sum_{i=1}^n e_i$. ■

II. Deuxième démonstration de la proposition I.2.1.-

Cette démonstration se base essentiellement sur les distributions et sur le résultat de K. BALL [1] (voir chapitre I).

Rappelons-le brièvement : étant donné $Q_n = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ le cube unité de $\mathbb{R}^n$, de volume 1 et H un hyperplan linéaire de $\mathbb{R}^n$, orthogonal à ξ, où ξ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de norme 1, $\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$; alors

$$\mathrm{Vol}(Q_n \cap H) = \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \pi t\, a_i}{\pi t\, a_i} .dt \qquad (1)$$

On remarque que d'après la formule (1), on peut supposer que $a_i > 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et que $n \geqslant 2$.

Or

$$\prod_{j=1}^{n} \sin \pi a_j t = \frac{1}{(2i)^n} \prod_{i=1}^{n} \left(e^{i\pi t a_j} - e^{-i\pi t a_j}\right),$$

$$= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{\substack{\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\\ \varepsilon_i=\pm 1}} \left(\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_j\right) e^{\left(i\pi t \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j\right)}$$

Donc

$$\mathrm{Vol}(Q_n \cap H) = \frac{1}{(2i\pi)^n \prod_{j=1}^{n} a_j} \int_{\mathbb{R}} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)} \left(\prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j\right) \frac{e^{\left(i\pi t \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j\right)}}{t^n} .dt .$$

Par ailleurs, on définit la distribution $\mathrm{Pf}(\frac{1}{u^n})$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par :

$$<Pf(\frac{1}{u^n}),\psi> = \int_{|u|\leq a} \frac{\psi(u) - P_{n-1}(\psi)(u)}{u^n} du + \int_{|u|\leq a} \frac{\psi(u)}{u^n} du + R_{n-1}(\psi)(u)$$

où, $P_{n-1}(\psi)(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\psi(j)}{j!}(0)\ u^j$, $R_{n-1}(\psi)(a) = \int_{|u|\leq a} \frac{P_{n-1}(\psi)(u)}{u^n} du$

et $\psi^{(j)}$ est la $j^{ème}$ dérivée de ψ en 0, avec $\psi^{(0)} = \psi$.

Il est aisé de voir que cette définition ne dépend pas de a.

On prolonge $Pf(\frac{1}{u^n})$ à l'espace des fonctions bornées de classe C^{n-1}. Avec

$$f(u) = \prod_{j=1}^{n} \sin \pi u a_j \ , \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$<Pf(\frac{1}{u^n}),f> = \int_{\mathbb{R}} (\prod_{i=1}^{n} \sin \pi a_i u) \frac{du}{u^n} ,$$

car $f^{(j)}(0) = 0$ pour tout $0 \leq j \leq n-1$.

Par conséquent :

$$Vol(Q_n \cap H) = \frac{1}{(2\pi i)^n \sum_{j=1}^{n} a_j} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)} (\prod_{j=1}^{n} \varepsilon_j) <Pf(\frac{1}{u^n}), e^{i\pi u \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j}>.$$

D'autre part, si on pose, $\lambda = \pi \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j$, alors, d'après la définition de $Pf(\frac{1}{u^n})$, on a pour tout $a > 0$:

$$<Pf(\frac{1}{u^n}), e^{iu\pi \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j}> = \int_{-a}^{a} \frac{e^{i\lambda u} - P_{n-1}(u,\lambda)}{u^n} du + \int_{|u| \geq a} \frac{e^{i\lambda u}}{u^n} du + R_{n-1}(u,a) \qquad (2)$$

où $P_{n-1}(u,\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(i\lambda)^j u^j}{u^n}$ et $R_{n-1}(u,\lambda) = \int_{-a}^{+a} \frac{P_{n-1}(u,\lambda)}{u^n} du.$

En faisant le changement de variable $u \longmapsto \lambda u$ et puisque (2) ne dépend pas de a, on obtient :

$$<Pf(\frac{1}{u^n}), e^{i\pi u}> = \text{signe}(\lambda)\ \lambda^{n-1} <Pf(\frac{1}{u^n}), e^{iu}>.$$

En intégrant par partie l'expression qui donne $<Pf(\frac{1}{u^n}), e^{iu}>$ on obtient :

$$<Pf(\frac{1}{u^n}), e^{iu}> = \frac{i}{n-1} <Pf(\frac{1}{u^{n-1}}), e^{iu}>.$$

Or

$$<Pf(\frac{1}{u}), e^{iu}> = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = i\pi .$$

On en déduit, donc :

$$<Pf(\frac{1}{u^n}), e^{iu}> = \frac{i^n}{(n-1)!} \pi .$$

Mais $<Pf(\frac{1}{u^n}), e^{i\lambda u}> = \text{signe}(\pi \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_j a_j)(\pi \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j)^{n-1} \frac{i^n \pi}{(n-1)!}$.

Donc, finalement,

$$\text{Vol}(H \cap Q_n) = \frac{1}{2^n (n-1)! \prod_{j=1}^{n} a_j} \overline{\sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)}} (\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j) \text{signe}(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j)(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j)^{n-1}.$$

■

Démonstration du lemme I.2.2.-

Nous allons en donner deux démonstrations différentes :

a) *Première démonstration*, par récurrence sur n.

Posons $\vartheta_n(\lambda) = \text{Vol}_n([0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \lambda\})$.

Pour $n = 1$, on a :

$$\text{Vol}_1(\vartheta_1(\lambda)) = \frac{1}{a_1} \inf(a_1, \lambda).$$

Donc, le lemme est vrai pour $n = 1$.

On suppose que le lemme est vrai pour $n-1$, démontrons-le pour n.

On note $A_n(\lambda) = [0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \lambda\}$, donc

$$\vartheta_n(\lambda) = \text{Vol}_n(A_n(\lambda)) = \int_0^1 \text{Vol}_{n-1}(A_{n-1}(\lambda - a_n x_n)).dx_n.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\text{Vol}_{n-1}(A_{n-1}(\lambda - a_n x_n)) = \frac{1}{(n-1)! \prod_{i=1}^{n-1} a_i} \sum_{I \subset I_n} (-1)^{|I|} (\lambda - a_n x_n - \sum_{i \in I} a_i)_+^{n-1} .$$

Donc

$$\vartheta_n(\lambda) = \frac{1}{(n-1)!\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \sum_{I \subset I_{n-1}} (-1)^{|I|} \int_0^1 (\lambda - a_n x - \sum_{i\in I} a_i)_+^n . dx \ .$$

Un calcul élémentaire donne :

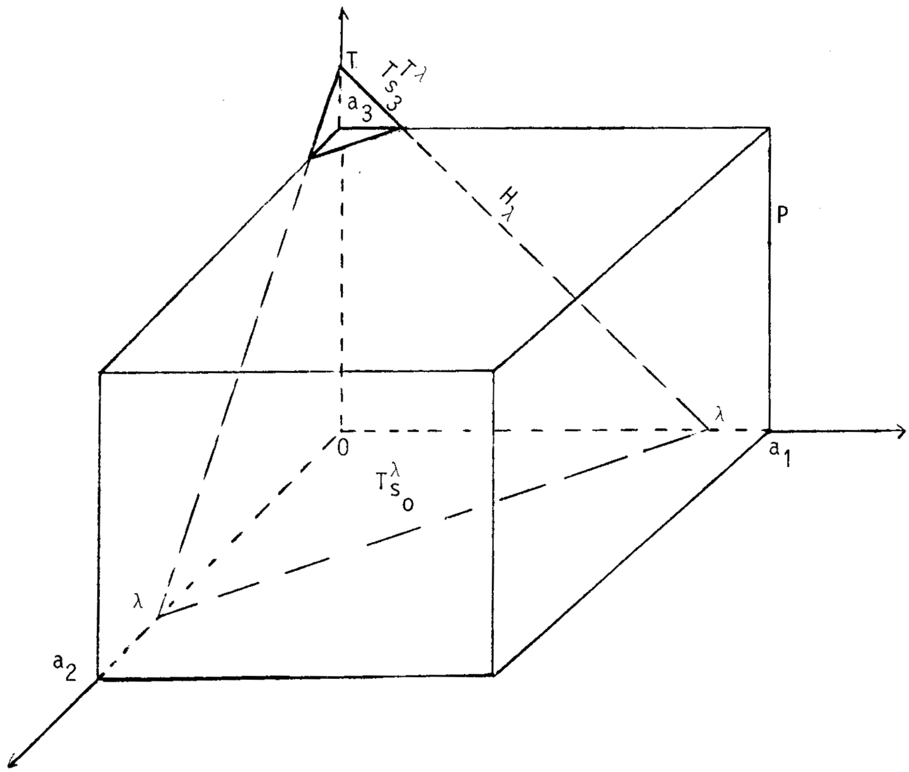
$$\int_0^1 (\lambda - a_n x - \sum_{i\in I} a_i)_+^{n-1} = \frac{1}{na_n}\left[(\lambda - \sum_{i\in I} a_i)_+^n - (\lambda - a_n - \sum_{i\in I} a_i)_+^n\right] .$$

En tenant compte du fait que toute partie I de $I_n = \{1,\ldots,n\}$, peut être soit une partie de $I_{n-1} = \{1,\ldots,n-1\}$, ou soit la réunion de $\{n\}$ avec une partie de I_{n-1}, on obtient le résultat souhaité. ∎

b) *Deuxième démonstration de I.2.2.-*

Cette démonstration découle immédiatement d'un argument géométrique, qui consiste à calculer le volume de $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1} x_i \leq \lambda\}$ à partir des "pyramides" ayant pour sommets ceux de P et limitée par l'hyperplan affine H_λ, où $H_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i = \lambda\}$, $P = \prod_{i=1}^n [0,a_i]$ $(a_i > 0, \forall i)$.

Pour $n = 3$, on a le dessin (3)



Dans ce cas de figure, on trouve :

$$\mathrm{Vol}\left(\prod_{i=1}^{3}[0,a_i] \cap \{(x_i)_{i=1}^{3} \in \mathbb{R}^3 / \sum_{i=1}^{3} x_i \leqslant \lambda\}\right) = \mathrm{Vol}(T_{s_0}^{\lambda}) - \mathrm{Vol}(T_{s_3}^{\lambda}),$$

En s'inspirant du dessin (3), on est amené à énoncer :

Lemme I.2.3.-

Si on garde les notations qui précèdent et soit $\lambda > 0$, alors :

$$\mathrm{Vol}(P \cap \{(x_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \lambda\}) = \sum_{s \leqslant H_\lambda} (-1)^{\sigma_s} \mathrm{Vol}(T_s)$$

où s décrit l'ensemble des sommets du pavé P, σ_s est le nombre de coordonnées non nulles de s, $s \leqslant H_\lambda$ signifie que s est sous l'hyperplan H_λ, T_s^λ est la "pyramide" de sommets s limitée par H_λ.

Démonstration du lemme I.2.3.-

Pour $I \subset \{1,\dots,n\} = I_n$, S_I désignera : $\{x \in \mathbb{R}_+^n / a_i < x_i \ , \ \forall i \in I\}$.

On notera aussi

$$G^\lambda = \mathbb{R}_+^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n x_i \leqslant \lambda\} \quad \text{et} \quad T_I^\lambda = S_I \cap G^\lambda .$$

Or, $S_\phi = P \cup (\bigcup_{i=1}^n S_{\{i\}})$, on en déduit que

$$S_\phi \cap G^\lambda = (P \cap G^\lambda) \cup (\bigcup_{i=1}^n S_{\{i\}} \cap G^\lambda),$$

relation qu'on peut aussi écrire $T_\phi^\lambda = (G^\lambda \cap P) \cup (\bigcup_{i=1}^n T_{\{i\}}^\lambda)$.

Comme $S_I \cap S_J = S_{I \cup J}$ $\qquad T_I^\lambda \cap T_J^\lambda = T_{I \cup J}^\lambda$.

En remarquant que $P \cap (\bigcup_{i=1}^n T_{\{i\}}^\lambda) = \emptyset$ et en appliquant la formule de Poincaré, on obtient successivement :

$$\mathrm{Vol}_n(T_\phi^\lambda) = \mathrm{Vol}_n(P \cap G^\lambda) + \mathrm{Vol}_n(\bigcup_{i=1}^n T_{\{i\}}^\lambda)$$

$$\mathrm{Vol}_n(T_\phi^\lambda) = \mathrm{Vol}_n(P \cap G^\lambda) + \sum_{i=1}^n \mathrm{Vol}_n(T_{\{i\}}^\lambda) + \dots$$

$$+ (-1)^{K-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_K \leqslant n} \mathrm{Vol}_n(\bigcap_{\ell=1}^K T_{\{i_\ell\}}^\lambda) \dots$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \operatorname{Vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{n} T^{\lambda}_{\{i\}}\Big) .$$

D'où $\operatorname{Vol}_n(P \cap G^{\lambda}) = \sum_{I \subset I_n} (-1)^{|I|} \operatorname{Vol}(T_I)$.

On retrouve le lemme I.2.3 en constatant que $T^{\lambda}_I = \emptyset$ dès que $\sum_{i \in I} a_i \geq \lambda$ et que les sommets sont les points $s = (s_i)_{i=1}^{n}$, avec $s_i = a_i$ si $i \in I$ et $s_i = 0$ si $i \notin I$.

Pour la démonstration du lemme I.2.2, il suffit de voir que :

$$\operatorname{Vol}_n([0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \lambda\}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i} \operatorname{Vol}_n(P \cap G^{\lambda})$$

avec $G^{\lambda} = \mathbb{R}^n_+ \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \lambda\}$.

En utilisant le lemme I.2.3, on obtient :

$$\operatorname{Vol}_n([0,1]^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \lambda\}) = \sum_{I \subset I_n} (-1)^{|I|} \operatorname{Vol}_n(T^{\lambda}_I).$$

Enfin, un calcul élémentaire donne : $\operatorname{Vol}(T^{\lambda}_I) = \dfrac{(\lambda - \sum_{i \in I} a_i)^n_+}{n}$. ∎

Corollaire de la proposition I.2.4.-

Soit $(a_i)_{i=1}^{n}$ une famille de nombres réels strictement positifs, alors :

$$1 \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}}{2^{n-1}(n-1)!\prod_{i=1}^{n} a_i} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \left(\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right).\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right)_+^n \leqslant \sqrt{2}.$$

Ceci est une conséquence immédiate du fait que :

$$1 \leqslant \mathrm{Vol}(H \cap Q_n) \leqslant \sqrt{2} \qquad \text{(K. BALL [I])}.$$

2ÈME PARTIE

* * *
*

CHAPITRE I

VOLUME DES SECTIONS DES CORPS CONVEXES DE $\mathbb{R}^N$.

A. *Introduction*.

L'essentiel de ce chapitre repose sur un article de K. BALL [2]. Cet article est une amélioration des résultats de D. HENSLEY [7] et VAALER [17].

Le résultat principal de cette étude est :

Il existe deux constantes α_K et β_K ne dépendant que de K, telles que pour tout corps C convexe, symétrique, isotrope, de volume 1, de $\mathbb{R}^n$ et pour tout F sous-espace, de codimension K, de $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$\alpha_K \leqslant \mathrm{Vol}(C \cap F)L_C^K \leqslant \beta_K \qquad (*)$$

où L_C est la constante d'isotropie de C.

Ceci améliore légèrement le résultat de Milman pour $K = 1$ dans l'article [4] et, a comme conséquence, que pour tout couple (F,G) de sous-espace de codimension K, de $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\mathrm{Vol}(C \cap F)}{\mathrm{Vol}(C \cap G)} \leqslant \frac{\beta_K}{\alpha_K} = \gamma_K \, .$$

Signalons que pour n donné, il existe une version légèrement plus fine de (*), au niveau de la majoration, mais avec un majorant qui, cette fois, dépend de n.

B. *Définitions et résultats préliminaires.*

Définitions II.1.1.-

(*a*) Soit C un corps convexe de $\mathbb{R}^n$, on dit que C est isotrope, s'il existe une constante L_C, telle que

$$\int_C |\langle x,y\rangle|^2 dy = L_C^2 |x|^2, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où dy est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

La constante L_C est appelée la constante d'isotropie de C.

(*b*) Soit f une application de R^K dans $[0,+\infty[$. On dit que f est isotrope s'il existe une constante L_f , telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^K} |\langle x,y\rangle|^2 f(y) dy = L_f^2 |x|^2, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^K.$$

Remarques :

1) Dire qu'un corps convexe C est isotrope signifie que la matrice d'inertie de C est scalaire.

2) Soit C un corps convexe isotrope de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante L_C, telle que pour tout i et j de $\{1,\dots, n\}$, on ait :

$$\int_C y_i y_j \, dy = L_C^2 \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Même formulation pour toute application $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,+\infty[$.

Proposition II.1.2.-

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$; il existe alors, $S \in GL(\mathbb{R}^n)$, tel que $S(C)$ soit isotrope.

Démonstration :

Considérons l'opérateur T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, défini par :

$$x \longmapsto Tx = \int_C \langle x,y\rangle y \, dy.$$

T est un opérateur symétrique, strictement positif ; par conséquent, il existe P de $O(n)$ et un opérateur diagonal D avec $D = \Delta^2$, Δ étant diagonal positif, tels que $T = P^*DP$; on peut aussi l'écrire sous la forme : $T = v^2$ avec $v = P^*\Delta P$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{v^{-1}(C)} \langle x,y\rangle^2 dy = \int_C \langle x,v^{-1}(z)\rangle^2 d(v^{-1}(z))$$

$$= (\det(v))^{-1} \int_C \langle v^{-1}(x),z\rangle^2 dz$$

$$= (\det(v))^{-1} <v^{-1}(x), Tv^{-1}(x)>$$

$$= (\det(v))^{-1} <x, v^{-1}Tv^{-1}(x)>$$

$$= (\det(v))^{-1} |x|^2.$$

Si on pose $S = v^{-1}$, on obtient le résultat énoncé. ■

Corollaire II.1.3.-

Soit C un corps convexe symétrique, il existe, alors $u \in GL(\mathbb{R}^n)$, de déterminant 1, tel que $u(C)$ soit isotrope et de même volume que C.

Démonstration :

Il suffit de reprendre la démonstration précédente, avec $u = (\mathrm{des}(S))^{1/n}.S^{-1}$.

On trouve, donc

$$\int_{u(C)} <x,y>^2 dy = \det(S)^{2/n} |x|^2, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

et $\mathrm{Vol}(u(C)) = \mathrm{Vol}(C)$. ■

Définition II.1.4.-

Soit $f : \mathbb{R}^K \to [0,+\infty[$. On dit que f est une section convexe, s'il existe un entier n, supérieur à K et un corps convexe C, symétrique de $\mathbb{R}^n$, tels que :

Pour tout sous-espace F, de codimension K, de $\mathbb{R}^n$

$$f(\lambda_1,\ldots,\lambda_K) = \mathrm{Vol}(C \cap F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i),$$

où $(\xi_1,\ldots,\xi_K)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

Nous admettons le lemme suivant qui résulte de l'inégalité de Brun-Minkowski.

Lemme II.1.5.-

On garde les mêmes notations que celles de la définition II.1.4. Si $f : \mathbb{R}^K \longrightarrow [0,+\infty[$ est une fonction section convexe, alors f est symétrique; pour une direction fixée de $\mathbb{R}^K$, f décroît lorsque la norme croît, $f^{\frac{1}{n-K}}$ est concave ; en particulier, f est log-concave, et de plus :

$$f(x) \leq f(0), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^K \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^K} f(x)dx = \mathrm{Vol}(C). \quad \blacksquare$$

Le résultat essentiel de ce chapitre vient du fait que la quantité

$$f(0)^{1/K}\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 f(x)dx\right)^{1/2} ,$$

ademt des bornes ne dépandant que de K, et cela pour toute fonction f isotrope, section convexe et telle que $\int_{\mathbb{R}^k} f(x)dx = 1$.

L'existence de la borne inférieure résulte uniquement du fait que f atteint son maximum en 0.

Pour obtenir la borne supérieure, on a besoin de quelques lemmes concernant les fonctions log-concaves.

Lemme II.1.6.-

Soit p un réel positif, $\phi : [0,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$ une fonction convexe, avec $\phi(0) = 0$ et $g : [0,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$ une fonction décroissante et intégrable.

Si on suppose que

$$\int_0^{+\infty} x^p g(\phi(x))dx = \int_0^{+\infty} x^p g(x)dx \ .$$

Alors, pour tout $t \geqslant 0$

$$\int_t^{+\infty} x^p g(\phi(x))dx \leqslant \int_t^{+\infty} x^p g(x)dx \ .$$

Démonstration :

On fixe $t \geqslant 0$. Comme ϕ est convexe et comme g est décroissante, on a, alors :

$$\int_t^{+\infty} g(\phi(x))x^p dx \leqslant \int_t^{\infty} g(\frac{p(x)}{t}x)x^p = (\frac{t}{\phi(t)})^{p+1} \int_{\phi(t)}^{+\infty} g(x)x^p dx \qquad (1)$$

De façon similaire, on a :

$$\int_0^t g(\phi(x))x^p dx \geqslant (\frac{t}{p(t)})^{p+1} \int_0^{\phi(t)} g(x)x^p dx \qquad (2) \ .$$

Si $\phi(t) \geqslant t$ alors de (1), on obtient :

$$\int_t^{+\infty} g(\phi(x))x^p dx \leqslant \int_t^{+\infty} g(x)x^p dx.$$

Si $\phi(t) \leqslant t$; alors, on pose $G(r) = \frac{1}{r^{p+1}} \int_0^r g(x)x^p dx,$ pour $r > 0$, autrement dit, $G(r) = \int_0^1 g(rt)t^p dt.$

Puisque g est décroissante sur $[0,+\infty[$, il en est de même pour

G, et de (2), on déduit que

$$\int_0^t g(p(x))x^p dx \geq t^{p+1}G(p(t)) \geq t^{p+1}G(t)$$
$$= \int_0^t g(x)x^p dx \; .$$

En combinant ceci avec l'hypothèse du lemme, on obtient :

$$\int_t^{+\infty} g(\phi(x))x^p dx \leq \int_t^{+\infty} g(x)x^p dx \; . \quad \blacksquare$$

<u>*Lemme*</u> *II.1.7.*- Soit $f : [0,+\infty[\; \to \; [0,+\infty[$ une fonction décroissante telle que $\operatorname{Log} f$ soit concave.

Alors pour tout p et q tels que $0 \leq p < q < +\infty$,

$$f(0)^q \Gamma(p+1)^{q+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^q dx\right)^{p+1} \leq f(0)^p \Gamma(q+1)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx\right)^{q+1}.$$

<u>*Démonstration*</u> :

On pose $f(x) = f(0)e^{-\Psi(x)}$ où Ψ est une fonction convexe, croissante sur $[0,+\infty[$ et $\Psi(0) = 0$. Soit $g(x) = e^{-\lambda_p x}$ où

$$\lambda_p^{p+1} = \left[\frac{f(0)\Gamma(p+1)}{\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx}\right] ,$$

λ_p étant ainsi choisi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\Psi(x)}x^p dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_p x}x^p dx \; .$$

Alors $\frac{f(x)}{f(0)} = g(\frac{1}{\lambda_p}\Psi(x))$ et $\int_0^{+\infty} g(\frac{1}{\lambda_p}\Psi(x))x^p dx = \int_0^{+\infty} g(x)x^p dx$.

En appliquant le lemme II.1.6 à la fonction $\frac{1}{\lambda_p}\Psi$, on obtient

$$\int_t^{+\infty} f(x)x^p dx \leq f(0)\int_t^{+\infty} e^{-\lambda_p x} x^p dx, \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Mais, puisque pour toute fonction positive h, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} h(x)x^q dx = (q-p)\int_0^{+\infty} t^{q-p-1} \int_t^{+\infty} h(x)x^p dx\, dt .$$

On en déduit, que si $0 \leq p < q < +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx \leq f(0)\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_p x} x^q dx = \frac{f(0)\Gamma(q+1)}{\lambda_p^{q+1}} .$$

et en remplaçant λ_p par sa valeur, on obtient le résultat souhaité. ∎

Lemme II.1.8.-

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du lemme II.I.7. Alors pour tout p et q tels que $0 \leq p < q < +\infty$,

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^q dx \leq \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{\int_0^{+\infty} f(x)dx}{f(0)}\right)^{q-p} \int_0^{+\infty} f(x)x^p dx .$$

Démonstration :

En remplaçant q par p et p par 0 dans le lemme II.1.8, on obtient :

$$f(0)^p \int_0^{+\infty} f(x)x^p dx \leq \Gamma(p+1)\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx\right)^{p+1}.$$

En réutilisant le lemme II.1.7 pour $0 \leq p < q < \infty$; on déduit que :

$$f(0)^q \Gamma(p+1)^{q+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^q dx\right)^{p+1}$$

$$\leq f(0)^p \Gamma(q+1)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx\right)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx\right)^{q-p}$$

$$\leq f(0)^p \Gamma(q+1)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx\right)^{p+1} \frac{\Gamma(p+1)^{q-p}}{f(0)^{p(q-p)}}\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx\right)^{(p+1)(q-p)}.$$

Donc, on a

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^q dx\right)^{p+1} \leq \left(\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1)}\right)^{p+1}\left(\frac{\int_0^{+\infty} f(x)dx}{f(0)}\right)^{(p+1)(q-p)}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx\right)^{p+1}.$$

Il suffit de prendre la racine $(p+1)^{\text{ème}}$ de cette inégalité pour conclure. ■

C - *Bornes du volume de section.*

Le théorème suivant est dû à K. BALL |II|.

Théorème II.1.9.-

Soit f une fonction réelle sur $\mathbb{R}^K$ avec $\int_{\mathbb{R}^K} f(x)dx = 1$.

Si f est une section convexe sur $\mathbb{R}^K$, alors

$$f(0)^2 \int_{\mathbb{R}^K} \cdots \int_{\mathbb{R}^K} |\mathrm{Vol}(c_0(\pm x_1,\ldots,\pm x_K))|^2 \prod_{i=1}^K f(x_i)dx_i \leq K+1$$

où $c_0(\pm x_1,\dots,\pm x_K)$ est l'enveloppe convexe des 2^k vecteurs $\pm x_1,\dots,\pm x_K$.

Démonstration :

Raisonnons par récurrence sur K.

1ère étape : $K = 1$.

Soit f une fonction section convexe sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

f est, en particulier, log-concave, décroissante et symétrique on peut appliquer le lemme II.1.8 pour f avec $p = 0$ et $q = 2$

$$f(0)^2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx \leqslant \Gamma(3)\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx\right)^3$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right)^3$$

$$= \frac{1}{4}\,.$$

Autrement dit,

$$f(0)^2 \int_{\mathbb{R}} 4x^2 f(x) \leqslant 2.$$

2ème étape : On suppose que le résultat du théorème est vrai pour toute fonction section convexe g sur $\mathbb{R}^{K-1}$ vérifiant, $\int_{\mathbb{R}^{K-1}} g(x)dx = 1$.

Soit $f : \mathbb{R}^K \to [0,+\infty[$, une fonction vérifiant les hypothèses du théorème.

On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}^K} \cdots \int_{\mathbb{R}^K} \mathrm{Vol}(c_0(\pm x_1,\dots,\pm x_K))^2 \prod_{i=1}^{K} f(x_i)dx_i.$$

Soit $S_{K-1} = \{x \in \mathbb{R}^* \ ; \ |x| = 1\}$ désigne la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^K$ et σ_{K-1} est la mesure normalisée invariante par rotation sur S_{K-1}.

Pour tout $\theta \in S_{K-1}$, on identifie $[\theta]^{\perp}$ à $\mathbb{R}^{K-1}$, et on définit $g_\theta : [\theta]^{\perp} \to [0,+\infty[$, par

$$g_\theta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+s\theta)ds .$$

Alors

$$\int_{[\theta]^{\perp}} g_\theta(x)dx = 1, \quad \text{pour tout } \theta \in S_{K-1} \text{ et } g_\theta \text{ est une}$$

section convexe.

Si on pose $x_1 = r\theta$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times S_{K-1}$, alors en posant $y_i = P(x_i)$ pour $2 \leq i \leq K$, où P est une projection orthogonale sur $[\theta]^{\perp}$, on obtient :

$$\begin{aligned} Vol(c_o(\pm x,\dots,\pm x_K)) &= Vol(c_o(\pm x_1,y_2,\dots,\pm y_k) \\ &= \frac{2|x_1|}{K} Vol(c_o(\pm y_2,\dots,\pm y_K)) \\ &= \frac{2r}{K} Vol(c_o(\pm y_2,\dots,\pm y_K)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, si on pose

$$I_\theta = \int_{[\theta]^{\perp}} \cdots \int_{[\theta]^{\perp}} Vol(c_o(\pm y_2,\dots,\pm y_K))^2 \prod_{i=2}^{K} g\ (y_i)dy_i$$

On obtient d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à g_θ

$$I_\theta \leq \frac{K}{g_\theta(0)^2}.$$

Comme la densité de $x_1 = r\theta$ sur $\mathbb{R}^K$ est $KV_K.r^{K+1}$,

$$I = K.V_K \int_{S_{K-1}} \int_0^{+\infty} r^{K-1} f(r\theta)\, \frac{4r^2}{K^2} I_\theta \, dr\, d\sigma_{K-1}(\theta)$$

$$\leq 4V_K \int_{S_{K-1}} \int_0^{+\infty} \frac{r^{K+1} f(r\theta)}{g_\theta(0)^2}\, dr\, d\sigma_{K-1}(\theta).$$

On définit $h_\theta \; : \; [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$, par $h_\theta(r) = f(r\theta)$.
La fonction $\log h$ est concave, décroissante ; donc d'après le lemme II.1.8 avec $p = K-1$ et $q = K+1$, on a :

$$\int_0^{+\infty} r^{K+1} h_\theta(r)dr \leq K(K+1)\, \frac{1}{h_\theta(0)^2} \left(\int_0^{+\infty} h_\theta(r)dr\right)^2 \int_0^{+\infty} r^{K-1} h_\theta(r)dr,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} r^{K+1} f(r\theta)dr \leq \frac{K(K+1)}{f(0)^2} \left(\int_0^{+\infty} f(r\theta)dr\right)^2 \int_0^{+\infty} r^{K-1} f(r\theta)dr$$

$$= \frac{K(K+1)g\;(0)^2}{4f(0)^2} \int_0^{+\infty} r^{K-1} f(r\theta)d\theta.$$

On en déduit :

$$I \leq \frac{K(K+1)V_K}{f(0)^2} \int_{S_{K-1}} \int_0^{+\infty} r^{K-1} f(r\theta)dr\, d\sigma_{K-1}(\theta)$$

$$= \frac{K+1}{f(0)^2} \int_{\mathbb{R}^t} f(x)dx = \frac{K+1}{f(0)^2}. \quad \blacksquare$$

Théorème II.1.10.-

Soit C un corps convexe, symétrique, isotrope et de volume 1 de $\mathbb{R}^n$, pour tout entier $K < n$ et pour tout sous-espace F de codimension K de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\frac{1}{V_K(K+2)^{K/2}} \leqslant L_C^K \operatorname{Vol}(C \cap F) \leqslant \frac{\sqrt{(K+1)!}}{2^K} .$$

Démonstration :

1°) Majoration : Puisque C est isotrope et de volume 1, il vérifie

$$\int_C |\langle x,y\rangle|^2 dy = L_C^2 |x|^2 , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $(\xi_1,\ldots,\xi_K)$ une base orthonormée de $F^\perp$, F étant un sous-espace de codimension K de $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction section convexe $f : \mathbb{R}^K \to [0,+\infty[$ définie par

$$f(\lambda_1,\ldots,\lambda_K) = \operatorname{Vol}(C \cap F + \sum_{i=1}^K \lambda_i e_i).$$

Il est facile de vérifier que f est isotrope et, de plus, elle vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^K} f(x)dx = 1 \quad \text{et} \quad f(0) = \operatorname{Vol}(F \cap C).$$

D'après le théorème II.1.9, on a $f(0)^2 I \leqslant K+1$, où

$$I = \int_{\mathbb{R}^K} \cdots \int_{\mathbb{R}^K} \operatorname{Vol}(c_0(\pm x_1,\ldots,\pm x_K))^2 \prod_{i=1}^K f(x_i)dx_i .$$

Mais $\mathrm{Vol}(c_o(\pm x_1,\ldots,\pm x_K)) = \frac{2^K}{K!} |\det(x_1,\ldots,x_K)|$.

Posons $x_i = (x_1^i,\ldots,x_K^i)$, pour $i = 1,\ldots,n$.

On a donc

$$I = \frac{4^K}{(K!)^2} \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_K^2} \varepsilon(\sigma\tau) \int_{(\mathbb{R}^K)^K} \left(\prod_{i=1}^{K} x^i_{\sigma(i)} x^i_{\tau(i)}\right) . \prod_{i=1}^{K} f(x_i)dx_i \ .$$

Si σ et τ sont distincts, alors il existe i, tel que $\sigma(i) \neq \tau(i)$; en vertu de l'isotropie de f, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^K} x^i_{\sigma(i)} \, x^i_{\tau(i)} \, f(x_i)dx_i = 0.$$

Par conséquent :

$$I = \frac{4^K}{(K!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_K} \int_{(\mathbb{R}^K)^K} \prod_{i=1}^{K} (x^i_{\sigma(i)})^2 f(x_i)dx_i$$

$$= \frac{4^K}{(K!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_K} L_C^{2K} = \frac{4^K}{K!} L_C^{2K} \ .$$

Or, $\quad I \leqslant \dfrac{K+1}{f(0)^2}$.

On en déduit que :

$$\mathrm{Vol}(C \cap F).L^K \leqslant \frac{\sqrt{(K+1)!}}{2^K} \tag{1}$$

2°) <u>Minoration</u> : Nous donnons ici une méthode simplifiée due à M. Meyer.

On a :

$$KL_C^2 = \int_{\mathbb{R}^K} |x|^2 f(x)dx.$$

Soit t un réel positif

$$KL_C^2 = \int_{|x|>t} |x|^2 f(x)dx + \int_{|x|\leqslant t} |x|^2 f(x)dx$$

$$\geqslant t^2 \int_{|x|>t} f(x)dx + \int_{|x|\leqslant t} |x|^2 f(x)dx \qquad \text{(a)}$$

Or, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^K} f(x)dx = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant f(0) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^K$$

D'où

$$KL_C^2 \geqslant t^2 + \int_{|x|\leqslant t} f(x)(|x|^2 - t^2)dx$$

$$\geqslant t^2 + f(0)\int_{|x|\leqslant t} (|x|^2 - t^2)dx \qquad \text{(b)}$$

$$= t^2 - \frac{2f(0)t^{K+2}V_K}{K+2}.$$

Il est évident que la fonction réelle h, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$h : t \longmapsto t^2 - \frac{2f(0)t^{K+1}V_K}{K+2},$$

est maximale pour $t = (V_K\, f(0))^{-1/K}$.

Donc

$$KL_B^2 \geqslant \frac{K}{K+2}\,(V_K f(0))^{-2/K}\ .$$

Autrement dit

$$\mathrm{Vol}(C \cap F)L^K \geqslant \frac{1}{V_K(K+2)^{K/2}}\ . \tag{2}$$

■

Corollaire II.1.11.-

Soit C un corps convexe, symétrique, isotrope de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier $K \leqslant n$, et pour tout couple F et G de sous-espaces de codimension K de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\frac{\mathrm{Vol}(C \cap F)}{\mathrm{Vol}(C \cap G)} \leqslant \frac{((K+1)!(K+2)^K)^{1/2}V_K}{2^K}$$

$$\leqslant (cK)^{K/2}\ ,$$

où c est une constante numérique.

Démonstration :

La quantité $\dfrac{\mathrm{Vol}(C \cap F)}{\mathrm{Vol}(C \cap G)}$ est invariante par homothétie sur C, donc, on peut supposer que $\mathrm{Vol}\,C = 1$.

D'après le théorème II.1.10, on a pour tout sous-espace F de codimension K, de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{V_K(K+2)^{K/2}} \leqslant L_C^2 \operatorname{Vol}(C \cap F) \leqslant \frac{\sqrt{(K+1)!}}{2^K}$$

Or la constante d'isotropie L_B ne dépend que de C.

On en déduit, donc, que pour tout couple (F,G) de sous-espaces de codimension K

$$\frac{\operatorname{Vol}(C \cap F)}{\operatorname{Vol}(C \cap G)} \leqslant \frac{\left[(K+1)!(K+2)^K\right]^{1/2} V_K}{2^K},$$

et par la formule de Stirling, on a une majoration du type $(\text{cte } K)^{K/2}$. ∎

Remarques II.1.12.-

i. Etant donné un corps convexe, symétrique, isotrope C de $\mathbb{R}^n$. D'après le corollaire II.1.11, on a, pour tout couple (F,G) d'hyperplans

$$\frac{\operatorname{Vol}(F \cap C)}{\operatorname{Vol}(G \cap C)} \leqslant \sqrt{6}.$$

Cette inégalité est la meilleure possible, dans ce sens que pour tout n, il existe un corps convexe, symétrique, isotrope C_n de $\mathbb{R}^n$ et F_n et G_n hyperplans de $\mathbb{R}^n$, tels que

$\dfrac{\operatorname{Vol}(F_n \cap C_n)}{\operatorname{Vol}(G_n \cap C_n)}$ tendevers $\sqrt{6}$ quand n tend vers l'infini.

Par exemple, soit C_n la boule unité d'un espace normé $X = (\mathbb{R}^n, || \ ||)$ avec :

$$||x|| = \sup\left[(|x_1| + \ldots + |x_{n-1}|), (\frac{n(n+1)}{6})^{1/2} |x_n|\right].$$

Il est évident que B est isotrope ; si on prend $F = [(1,0,\ldots,0)]^{\perp}$ et $G = [(0,\ldots,0,1)]^{\perp}$, alors

$$\mathrm{Vol}(F \cap B) = \frac{2^{n-1}\sqrt{6}}{(n-2)!\sqrt{n(n+1)}} ,$$

et

$$\mathrm{Vol}(G \cap B) = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Autrement, dit la quantité

$$\frac{\mathrm{Vol}(F \cap B)}{\mathrm{Vol}(G \cap B)} = \frac{\sqrt{6}(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} ,$$

tend vers $\sqrt{6}$, quand n tend vers l'infini.

Remarques :

(i) Cependant, nous allons voir [Annexe I], que pour n donné, il existe une constante $\gamma < \sqrt{6}$, telle que pour tout C corps convexe, symétrique, isotrope de $\mathbb{R}^n$ et pour tout couple (H,G) d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$\frac{\mathrm{Vol}(C \cap H)}{\mathrm{Vol}(C \cap K)} \leq \gamma .$$

ii) La minoration (2) du théorème II.1.10 est la meilleure possible. En effet, soit $B = sb_K^2 \oplus_\infty tb_{n-K}^2$ une boule de $\mathbb{R}^n$ où s et t sont deux réels vérifiant :

$$\frac{s^2}{K+2} = \frac{t^2}{n-K+2} \quad \text{et} \quad s^K t^{n-K}\, V_K\, V_{n-K} = 1.$$

Autrement dit, la norme sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle B est la boule unité est :

$$||x|| = \mathrm{Sup}\left(\frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{K} x_i^2\right)^{1/2}, \frac{1}{t}\left(\sum_{i=K+1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\right).$$

Il est aisé de vérifier que B est isotrope, de volume 1 et que la constante d'isotropie de B est $\frac{s}{\sqrt{K+2}}$.

Si on sectionne B par le sous-espace F de $\mathbb{R}^n$, où $F = \{0\}^K \oplus \mathbb{R}^{n-K}$, alors on obtient :

$$\mathrm{Vol}(B \cap F)\, L_B^K = L_B^K . t^{n-K}\, V_{n-K} .$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Vol}(B \cap F) L_B^K = \frac{1}{V_K (K+1)^{K/2}} . \qquad \blacksquare$$

Proposition II.1.13.-

Soit B un corps convexe, symétrique, de $\mathbb{R}^n$, de volume 1. Si on suppose qu'il existe un sous-espace F, de codimension K de $\mathbb{R}^n$, tel que

$$L_B^K \operatorname{Vol}(B \cap F) = \frac{1}{V_K(K+2)^{K/2}},$$

alors, $B = (sb_n^2 \cap F^{\perp}) \oplus C$, où C est un corps convexe, symétrique de F et $s = (V_K(C))^{-1/K}$.

Autrement dit, non seulement la minoration du théorème II.1.10, pour $L_B^K \operatorname{Vol}(F \cap B)$ est la meilleure possible, mais on peut caractériser les espaces $(\mathbb{R}^n, B)$ pour lesquels elle est atteinte pour au moins un sous-espace de codimension K.

Démonstration :

En reprenant la démonstration de la minoration du théorème II.1.10.

On en déduit, s'il existe un sous-espace F, de codimension K, tel que :

$$L_B^K \operatorname{Vol}(B \cap F) = \frac{1}{V_K(K+2)^{K/2}},$$

que

$$\begin{cases} (a) : \operatorname{Vol}(B \cap (F+x)) 1_{P_F^{\perp}(B)}(x) = 0, & \text{pour tout } x \in F^{\perp} \text{ tel que } |x| > s \\ (b) : \operatorname{Vol}(B \cap (F+x)) 1_{P_F^{\perp}(B)}(x) = \operatorname{Vol}(B \cap F), & \text{pour tout } x \in F^{\perp} \text{ tel que } |x| \leq s, \end{cases}$$

où $s = (V_K \, \mathrm{Vol}(B \cap F))^{-1/K}$.

La condition (a) nous donne l'inclusion suivante :

$$P_{F^\perp}(B) \subset s b_n^2 \cap F^\perp,$$

donc, en particulier, on a :

$$\mathrm{Vol}(P_{F^\perp}(B)) \leqslant (\mathrm{Vol}(B \cap F))^{-1}.$$

D'autre part, on sait que

$$1 = \mathrm{Vol}(B) \leqslant \mathrm{Vol}(P_{F^\perp}(B)).\mathrm{Vol}(B \cap F).$$

On en déduit, si la condition (a) est vérifiée, que,

$$P_{F^\perp}(B) = s b_n^2 \cap F^\perp.$$

Il est facile de voir que pour tout $(x,y) \in [P_{F^\perp}(B)]^2$, on a :

$$B \cap (F + \tfrac{x+y}{2}) \supset \tfrac{1}{2}(B \cap (F+x)) + \tfrac{1}{2}(B \cap (F+y)).$$

En utilisant l'inégalité de Brunn-Minkowski, on obtient :

$$\mathrm{Vol}\left[\tfrac{1}{2} B \cap (F+x) + \tfrac{1}{2} B \cap (F+y)\right]^{1/n} \geqslant \tfrac{1}{2} \mathrm{Vol}(B \cap (F+x))^{1/n} + \tfrac{1}{2} \mathrm{Vol}(B \cap (F+y))^{1/n}.$$

On en déduit, si la condition (b) est vérifiée, que :

$$\mathrm{Vol}\left[B \cap (F+x) + B \cap (F+y)\right]^{1/n} = \mathrm{Vol}(B \cap (F+x))^{1/n} + \mathrm{Vol}(B \cap (F+y))^{1/n}.$$

Or, d'après Brunn-Minkowski, cette égalité n'a lieu que si $B \cap (F+x)$ est un translaté de $B \cap (F+y)$.

Autrement dit, pour tout $x \in P_{F^\perp}(B)$, on a :

$$B \cap (F+x) = (B \cap F) + Tx \qquad (c),$$

où $T(0) = 0$.

Montrons que T est une application additive sur $P_{F^\perp}(B)$; soit x, y et z de $P_{F^\perp}(B)$ tels que $z = x+y$, alors :

$$B \cap (\frac{F+x+y}{2}) \supseteqq \frac{1}{2} (B \cap (F+x)) + \frac{1}{2} (B \cap (F+y) .$$

D'après la relation (c), on obtient :

$$(B \cap F) + T(\frac{x+y}{2}) \supset (B \cap F) + \frac{T(x) + T(y)}{2} .$$

Or, $B \cap F$ est un corps convexe symétrique, donc

$$2T(\frac{x+y}{2}) = T(x) + T(y).$$

Comme $T(0) = 0$, on a $T(x) = 2T(\frac{x}{2})$.

Donc :

$$T(x+y) = T(x) + T(y).$$

Soit λ un nombre réel ; il est aisé de vérifier que, pour tout x et λx de $P_{F^\perp}(B)$, on a :

$$B \cap (F+ x) \supset \lambda B \cap (F+x) + (1-\lambda)B \cap F.$$

En utilisant la relation (c), on obtient :

$$(B \cap F) + T(\lambda x) \supset \lambda[(B \cap F)+T(x)] + (1-\lambda).[(B \cap F)+T(0)] \supset B \cap F + \lambda T(x).$$

On en déduit que

$$T(\lambda x) = \lambda T(x).$$

Donc T se prolonge en un opérateur linéaire de F dans $\mathbb{R}^n$.

En examinant la relation (c), on déduit que, pour tout $x \in F^{\perp}$, $T(x) = x + R(x)$, où $R(x) \in F$.

Montrons, à présent, que l'opérateur R est nul. Pour cela, on va utiliser l'isotropie de B.

En effet, on se donne deux bases orthonormées $(\xi_1,\ldots,\xi_K)$ et $(\xi_{K+1},\ldots,\xi_n)$ respectivement de $F^{\perp}$ et F.

Si on pose $x = \bar{x} + \bar{\bar{x}}$, où $(\bar{x},\bar{\bar{x}}) \in F^{\perp} \times F$, alors en utilisant la condition d'isotropie de B et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\int_{P_{F^{\perp}}(B)} \bar{x}_i \int_{B \cap (F+\bar{x})} \bar{\bar{x}}_j \,.\, d\bar{\bar{x}}\, d\bar{x} = 0,$$

pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,K\} \times \{K+1,\ldots,n\}$.

Or, on a :

$$B \cap (F+\bar{x}) = (B \cap F) + \bar{x} + R(\bar{x}),$$

donc

$$\int_{P_{F^{\perp}}(B)} \bar{x}_i \int_{B \cap F} \langle y+\bar{x}+R(\bar{x}),\xi_j\rangle dy.d\bar{x} = 0,$$

pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,K\} \times \{K+1,\ldots,n\}$.

Puisque $B \cap F$ est symétrique, $\int_{B \cap F} <y,\xi_j> dy = 0$.

Par suite, on a :

$$\mathrm{Vol}(B \cap F). \int_{P_{F^\perp}(B)} \bar{x}_i <R(\bar{x}),\xi_j> d\bar{x} = 0,$$

pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,K\} \times \{K+1,\ldots,n\}$.

Or, $\bar{x}$ s'écrit dans la base $(\xi_1,\ldots,\xi_K)$, sous la forme :

$$\bar{x} = \sum_{\ell=1}^{K} \bar{x}_\ell \xi_\ell ,$$

donc

$$\int_{P_{F^\perp}(B)} \bar{x}_i < \sum_{\ell=1}^{K} \bar{x}_\ell \, R(\xi_\ell),\xi_j> d\bar{x} = 0,$$

pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,K\} \times \{K+1,\ldots,n\}$.

Puisque $P_{F^\perp}(B) = sb_n^2 \cap F^\perp$, il est en particulier isotrope.

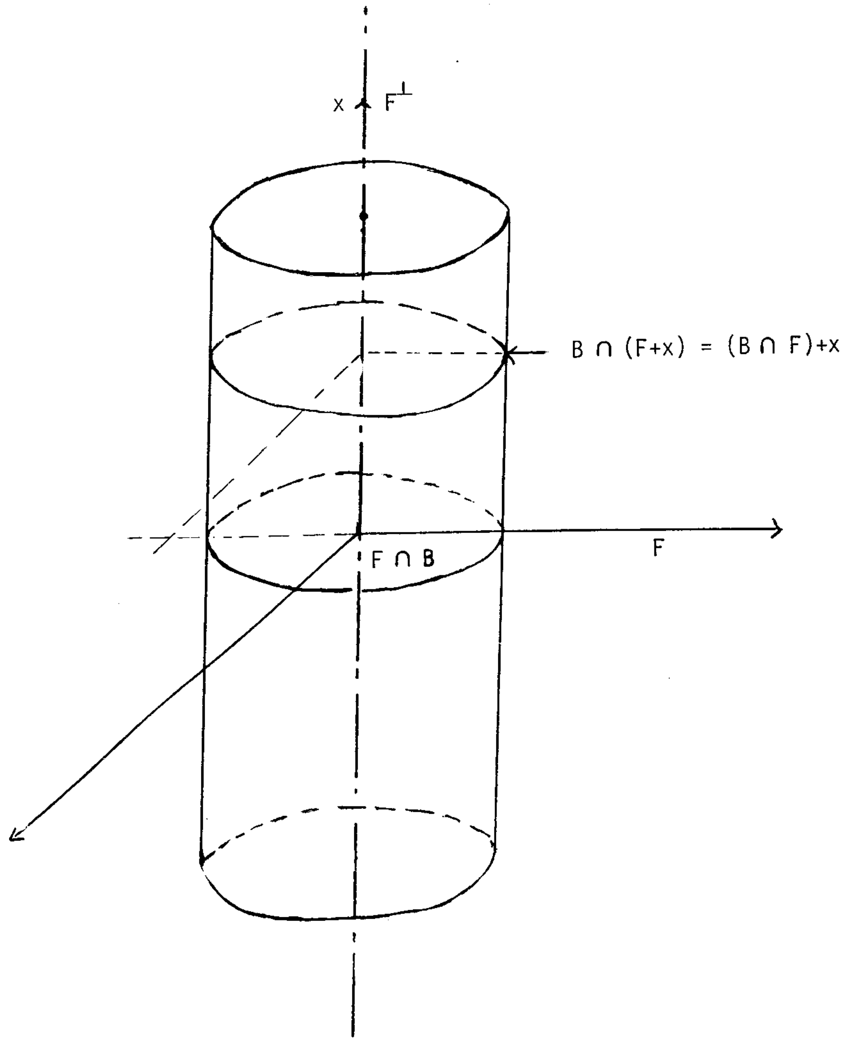
On en déduit que :

$<R(\xi_i),\xi_j> = 0$, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,K\} \times \{K+1,\ldots,n\}$.

Or, R est un opérateur linéaire de $F^\perp$ dans F, donc R est nul.

Enfin, on a pour tout $x \in P_{F^\perp}(B)$, $B \cap (F+x) = (B \cap F) + x$ et, de plus, $P_{F^\perp}(B) = sb_n^2 \cap F^\perp$.

Autrement dit, B est un "cylindre" de base $sb_n^2 \cap F^\perp$


x
$F^{\perp}$
$B \cap (F+x) = (B \cap F)+x$
$F \cap B$
F

■

Proposition II.1.14.-

Soit C un corps convexe, symétrique, isotrope de $\mathbb{R}^n$, de volume 1.

Alors, pour tout hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\sqrt{3n}} \leq \mathrm{Vol}(C \cap H) < \sqrt{\pi e}.$$

Démonstration :

D'après le théorème II.1.10, on a, pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{3\sqrt{n}} \leq L_C \mathrm{Vol}(C \cap H) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(a)}$$

où L_C est la constante d'isotropie de C.

Mais en appliquant le théorème II.1.10, pour $K = n$, on obtient donc

$$\frac{1}{(\sqrt{n+2})^n V_n} \leq L_C^n \leq \frac{\sqrt{(n+1)!}}{2^n} \qquad \text{(b)}$$

En combinant (a) et (b), et moyennant la formule de Stirling, on trouve le résultat souhaité.

ANNEXE DU CHAPITRE I

Introduction.

Dans la démonstration de l'inégalité (1) du théorème II.1.10, nous avons seulement utilisé le fait que f soit log-concave, en utilisant la propriété plus forte du lemme II.1.5 : $f^{1/n-K}$ est concave.

On obtient, pour n donné, une majoration de $f(0)$, légèrement meilleure.

Lemme II.1.7'.-

Soit f une fonction positive de $\mathbb{R}^+$, décroissante et $f^{1/\alpha}$ concave.

Alors, pour tout p et q tels que $0 \leqslant p < q < \infty$

$$f(0)^q \beta(p+1,\alpha+1)^{q+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^q dx\right)^{p+1} \leqslant f(0)^p \beta(q+1,\alpha+1)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx\right)^{q+1}$$

où $\beta(p+1,\alpha+1) = \dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+p+2)}$.

Démonstration :

Si on pose $f(x) = f(0)(1-\Psi(x))^\alpha$, alors Ψ est une fonction convexe croissante sur $[0,+\infty[$, $0 \leqslant \Psi(x) \leqslant 1$ et $\Psi(0) = 0$.

Soit $g(x) = (1-\lambda x)^\alpha$ si $0 \leqslant x \leqslant \lambda^{-1}$ et $g(x) = 0$ si $x \geqslant \lambda^{-1}$, où

$$\lambda^{p+1} = \frac{f(0)\beta(p+1, +1)}{\int_0^{+\infty} f(x)x^p dx}.$$

Autrement dit, λ est choisi de telle sorte que

$$\int_\infty^{+\infty} (1-\Psi(x))x^p dx = \int_0^{1/\lambda} (1-\lambda x)^\alpha\, x^p\, dx.$$

Alors $\dfrac{f(X)}{f(0)} = g(\frac{1}{\lambda}\,\Psi(x))$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)x^p dx = \int_0^{+\infty} g(\frac{1}{\lambda}\,\Psi(x))x^p\, dx$.

En appliquant le lemme II.1.6 à la fonction $\frac{1}{\lambda}\,\Psi$, on obtient,

$$\int_t^{+\infty} f(x)x^p\, dx \leqslant f(0) \int_t^{+\infty} g(x)x^p\, dx, \quad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

Mais, puisque pour toute fonction h positive, on peut dire que

$$\int_0^{+\infty} h(x)x^q\, dx = (p-q) \int_0^{+\infty} t^{q-p-1} \int_t^{+\infty} h(x)x^p\, dx\, dt \;;$$

Si $0 \leq p < q < \infty$, alors :

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^p\, dx \leq f(0) \int_0^{1/\lambda} (1-\lambda x)^{\alpha} x^q\, dx = \frac{f(0)\beta(q+1,\alpha+1)}{\lambda^{q+1}} \;. \qquad \blacksquare$$

<u>*Lemme*</u> *II.1.8'.-*

Soit f *une fonction vérifiant les hypothèses du lemme précédent.*

Alors, pour tout couple (p,q) tel que $0 \leq p < q < \infty$,

$$\int_0^{+\infty} f(x)x^q\, dx \leq \frac{\beta(q+1,\alpha+1)}{\beta(p+1,\alpha+1)} \left(\frac{\int_0^{+\infty} f(x)dx}{f(0)\beta(1,\alpha+1)}\right)^{q-p} \int_0^{+\infty} f(x)x^p\, dx \;.$$

<u>*Démonstration*</u> :

En remplaçant (p,q) par $(0,p)$ dans le lemme II.1.7', on obtient :

$$f(0)^p \beta(1,\alpha+1)^{p+1} \int_0^{+\infty} f(x)x^p\, dx \leq \beta(p+1,\alpha+1)\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx\right)^{p+1}$$

D'après le lemme II.1.7, on en déduit que pour $0 \leq p < q < +\infty$,

$$f(0)^q\beta(p+1,\alpha+1)^{q+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^q\,dx\right)^{p+1}$$

$$\leqslant f(0)^p\beta(q+1,\alpha+1)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p\,dx\right)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p\,dx\right)^{q-p}$$

$$\leqslant f(0)^p\beta(q+1,\alpha+1)^{p+1}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p\,dx\right)^{p+1}\left(\frac{\beta(p+1,\alpha+1)}{f(0)^p\beta(1,\alpha+1)^{p+1}}\right)^{q-p}\left(\int_0^{+\infty} f(x)dx\right)^{(p+1)(q-1)}.$$

Donc

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^q\,dx\right)^{p+1} \leqslant \frac{\beta(q+1,\alpha+1)}{\beta(p+1,\alpha+1)}\left(\frac{\int_0^{+\infty} f(x)dx}{\beta(1,\alpha+1).f(0)}\right)^{(p+1)(a-p)}\left(\int_0^{+\infty} f(x)x^p\,dx\right)^{p+1}. \blacksquare$$

Théorème II.1.9'.-

Soit C un corps convexe symétrique de volume 1 de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout sous-espace F de codimension K de $\mathbb{R}^n$, on a

$$f(0)^2.\int_{\mathbb{R}^K}\cdots\int_{\mathbb{R}^K}|\mathrm{Vol}(co(\pm x_1,\dots,\pm x_K))|^2\prod_{i=1}^{K} f(x_i)dx_i \leqslant \left(\frac{n!}{(n-K)!}\right)^2\frac{K+1}{[(n+1)(n+2)]^K}$$

où $f(\lambda_1,\dots,\lambda_K) = \mathrm{Vol}(C\cap F_+\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\xi_i)$ avec $\xi_1,\dots,\xi_K)$, une base orthonormée de $F^\perp$ et $co(\pm x_1,\dots,\pm x_K)$ est l'enveloppe convexe des $2K$ vecteurs $\pm x_1,\dots,\pm x_K$.

Démonstration :

Remarquons que, d'après le lemme II.1.5, f est une fonction positive sur $\mathbb{R}^K$, symétrique, qui pour une direction fixée, décroît lorsque la norme croît, en plus, $\int_{\mathbb{R}^K} f(x)dx = 1$ et $f^{\frac{1}{n-K}}$ concave.

Tenant compte de cette constatation, et utilisant un raisonnement par récurrence, identique à celui du théorème II.1.9, où on remplacera le lemme II.1.8 par le lemme II.1.8' pour $\alpha = n-K$, on obtient le résultat énoncé. ∎

Théorème II.1.10'.-

Soit C un corps convexe, symétrique, isotrope de volume 1 de $\mathbb{R}^n$; pour tout entier $K < n$ et pour tout sous-espace F de codimension K de $\mathbb{R}^K$, on a :

$$L_C^K \operatorname{Vol}(C \cap F) \leqslant \frac{\sqrt{(K+1)!}}{2^K} \cdot \frac{n!}{(n-K)!} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)^{K/2}} \cdot \qquad (1)'$$

Démonstration :

En reprenant la démonstration du théorème II.1.10, et, en utilisant le II.1.9' au lieu du II.1.9, on obtient le résultat souhaité.

Remarque :

La majoration du théorème II.1.10' est légèrement meilleure que l'inégalité (1) du II.1.10, pour n donné car $\frac{n!}{(n-K)!} < (n+1)(n+2)^{K/2}$ pour tout K compris entre 1 et n.

Toutefois, l'inégalité (1) présente l'intérêt de ne pas dépendre de n.

CHAPITRE II

ISOTROPIE DES CORPS CONVEXES.

I - *INTRODUCTION ET DEFINITION.*

Nous abordons, dans ce chapitre, une étude de l'isotropie des corps convexes symétriques B de $\mathbb{R}^n$, et une évaluation de la constante L_B d'isotropie.

Ce problème a été étudié par HENSLEY [7], par BOURGAIN et MILMAN [4], et par A. PAJOR. Certains des résultats que nous exposerons quoique souvent non rédigés leur sont dûs.

Nous allons voir, dans un premier temps, qu'il existe deux constantes numériques c_1 et c_2, telles que pour tout entier n, et pour tout B élément de A_n, on ait :

$$c_1 \leqslant L_B \leqslant c_2\sqrt{n} ,$$

où A_n est l'ensemble des corps convexes symétriques, isotropes de $\mathbb{R}^n$, de volume 1.

L'isotropie semble le bon contexte pour étudier la conjecture suivante, due à MILMAN.

Conjecture II.2.1.-

Il existe une constante numérique α positive non nulle, telle que pour tout entier n et pour tout corps convexe symétrique B de $\mathbb{R}^n$, de volume 1, il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, vérifiant $\mathrm{Vol}(H \cap B) \geq \alpha$.

On se servira, pour cela, du fait que, à une transformation linéaire près, tout corps convexe peut être mis en position d'isotropie.

Nous donnons des formulations équivalentes à cette conjecture. Par exemple : (ii) $\{\exists\ c > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, B \in A_n$, on ait $L_B \leq C\}$.

De ces formulations découle facilement l'existence de l'ellipsoïde de MILMAN [12].

Rappel de la définition de l'isotropie :

Définition II.2.2.-

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. S'il existe une constante L_C telle que : pour tout x de $\mathbb{R}^n$ on ait
$\int_C |<x,y>|^2 dy = L_C^2 |x|^2$,

alors C est dit isotrope

(dy désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $<\ ,\ >$ le produit scalaire usuel, $|\ \ |$ la norme euclidienne associée).

On remarque que, si C est isotrope, alors $n\ L_C^2 = \int_C |x|^2\, dx$, cette relation jouera un grand rôle pour évaluer L_C.

Proposition II.2.3.-

Pour tout corps convexe symétrique B de $\mathbb{R}^n$ de volume 1, il existe u, élément de $GL(\mathbb{R}^n)$, vérifiant $\det(u) = 1$, telle que $u(B)$ soit isotrope par rapport au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. ∎

Cette proposition a été démontrée dans le chapitre II.1.

II - ETUDE DE L'ISOTROPIE.

Proposition II.2.4.-

Il existe deux constantes numériques c_1 et c_2 positives non nulles, telles que pour tout corps convexe symétrique isotrope B de $\mathbb{R}^n$ de volume 1, on ait :

$$c_1 \leq L_B \leq c_2\sqrt{n} \quad .$$

Démonstration :

Puisque B est isotrope, on a, pour tout x de $\mathbb{R}^n$

$$\int_B |\langle x,y\rangle|^2 dy = L_B^2 |x|^2 \qquad (1)$$

On considère B, comme une boule unité fermée d'un espace normé de dimension n, donc elle définit sur $\mathbb{R}^n$ une norme $\|\ \ \|$;

Rappelons que $||x|| = \inf\{\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda B\}$.

On définit la norme duale de $||\ ||$, par rapport au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, par : $||x||_* = \sup\{|<x,y>|, y \in B\}$,

donc
$$|<x,y>| \leqslant ||x||_*||y||.$$

En utilisant la relation (1), on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}^n$

$$L_B^2|x|^2 \leqslant \int_B ||x||_*^2||y||^2dy.$$

Par ailleurs, on a $\displaystyle\int_B ||y||^2dy = \frac{nv_n}{n+2}\int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma_{n-1}(y)}{||y||^n} = \frac{n}{n+2}\,\mathrm{Vol}(B).$

Or B est de volume 1. Il en résulte que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$ $L_B^2|x|^2 \leqslant \frac{n}{n+2}\,||x||_*^2$. En dualisant cette inégalité, par rapport au produit sclaire euclidien usuelle $< , >$ de $\mathbb{R}^n$, on trouve :

$$\sqrt{\frac{n+2}{n}}\, L_B||x|| < |x|, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit : (2) $L_B\sqrt{\frac{n+2}{n}}\, b_n^2 \subset B$, (où b_n^2 la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

Par conséquent, $L_B^n(\frac{n+2}{n})^{n/2}\, V_n \leqslant 1$ (où $V_n = \mathrm{Vol}(b_n^2)$).

Or, on sait que $V_n \geqslant (\frac{c_1^{-1}}{\sqrt{n}})^n$, où c_1 est une constante numérique.

On a donc :

$$L_B \leqslant \sqrt{\frac{n}{n+2}}\,.\, c_1\sqrt{n} < c_1\sqrt{n}. \qquad \blacksquare$$

D'autre part, on a $L_B^2 = \int_B |x|^2 dx$, donc pour tout c réel positif non nul, on a

$$nL_B^2 \geq \int_{B\cap A(c)} |x|^2 dx, \quad \text{où} \quad A(c) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| > c\sqrt{n}\}.$$

Par suite, on a $nL_B^2 \geq c^2 n.\mathrm{Vol}(B \cap A(c))$ (3)

Or, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B \cap A(c)) &= \mathrm{Vol}(B) - \mathrm{Vol}(B \cap \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq c\sqrt{n}) \\ &\geq 1 - (c\sqrt{n})^n V_n \qquad (4)\end{aligned}$$

On sait qu'il existe une constante numérique $c' > 0$ telle que $V_n \leq (\frac{c'}{\sqrt{n}})^n$. De (3) et (4) et si on prend $c_2 = \frac{1}{2c'}$, on déduit que :

$$L_B^2 \geq (\frac{1}{2c'})^2 (1 - (\frac{1}{2})^n) \geq \frac{1}{2} (\frac{1}{2c'})^2 = c_2^2 .$$

■

Remarque :

Asymptotiquement $(n \to +\infty)$ $c_1 \sim \frac{1}{2\pi e}$ et $c_2 \sim \frac{1}{4\sqrt{2}\pi e}$.

Théorème II.2.5.-

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

I - $\exists \delta > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall B \in A_n$, on ait $\mathrm{Vol}(B \cap H) \geq \delta$ $\forall H$ hyperplan

II - $\exists M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall B \in A_n$, on ait $L_B \leq M$

III - $\exists M' > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall B \in A_n$, on ait $\mathrm{Vol}(B \cap M'\sqrt{n} b_n^2) \geq \frac{1}{2}$

IV - $\exists \delta' > 0$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, B \in A_n$ on ait $\int_B |x|^{-1} dx \geq \frac{\delta'}{\sqrt{n}}$.

Démonstration :

I => II. Pour prouver cette implication, on se sert du cas particulier (K = 1) du théorème (II.1.10) démontré au chapitre II.1, que nous rappelons :

Lemme II.2.6.-

Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout B élément de A_n , on a, pour tout hyperplan linéaire H de $\mathbb{R}^n$: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq L_B \operatorname{Vol}(B \cap H) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il résulte de l'assertion I et du lemme II.2.6, que pour tout hyperplan linéaire H de $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Vol}(B \cap H) \geq \delta \quad \text{et} \quad L_B \operatorname{Vol}(B \cap H) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

On en déduit que $L_B \leq \frac{1}{\delta\sqrt{2}}$. ∎

II => III. Puisque B est isotrope de volume 1 et $L_B \leq M$, on a :

$$nM^2 \geq nL_B^2 = \int_B |x|^2 dx \geq \int_{B \quad \{x \in \mathbb{R}^n / |x| > M\sqrt{2n}\}} |x|^2 dx$$

$$\geq 2nM^2 \operatorname{Vol}(B \cap \{x \in \mathbb{R}^n / |x| > M\sqrt{2n}\}). \qquad (1)$$

En prenant $M' = M\sqrt{2}$, et en remarquant que :

$$\operatorname{Vol}(B \cap M'\sqrt{n}\, b_n^2) = \operatorname{Vol}(B) - \operatorname{Vol}(B \cap \{x \in \mathbb{R}^n / |x| > M'n\}),$$

On obtient, en reprenant l'inégalité (1) :

$$\mathrm{Vol}(B \cap M'\sqrt{n}\, b_n^2) \geq \frac{1}{2} . \qquad \blacksquare$$

III => IV.

Cette implication est évidente, car $\delta' = \frac{1}{2M'}$ convient, si M' est la constante de l'assertion III.

IV => II.

De l'assertion IV, on déduit

$$\frac{\delta'}{\sqrt{n}} \leq \int_B |x|^{-1} dx = \frac{nV_n}{n-1} \int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma_{n-1}(x)}{||x||^{n-1}} ,$$ où $||\ \ ||$ est la norme associée à B, et $d\sigma_{n-1}$ désigne la probabilité invariante par rotation sur S_{n-1}.

On a, en effet, pour toute fonction $f(|x|)$ continue, ne dépendant que de $|x|$: $\int_B f(|x|)dx = nV_n \int_{S_{n-1}} F(\frac{1}{||x||}) d\sigma_{n-1}(x)$, où F est la primitive de la fonction $\rho \rightsquigarrow f(\rho).\rho^{n-1}$ nulle en 0.

En particulier $\mathrm{Vol}(B) = V_n \int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma_{n-1}(x)}{||x||^n}$.

Il est clair que :

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma_{n-1}(x)}{||x||^{n-1}} = \int_{S_{n-1}} d\sigma_{n-1}(\theta) \int_{S_{n-1} \cap |\theta|^\perp} \frac{d\sigma_{n-2}^{|\theta|^\perp}(x)}{||x||^{n-1}} .$$

Donc, on a, $\frac{\delta'}{\sqrt{n}} \leq \frac{nV_n}{(n-1)V_{n-1}} \int_S \mathrm{Vol}(B \cap [\theta]^\perp) d\sigma_{n-1}(\theta)$. Or, on a vu que pour tout $B \in A_n$ et pour tout hyperplan H, on a :

$$L_B \operatorname{Vol}(B \cap H) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Donc $\dfrac{\delta'}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{nV_n}{(n-1)V_{n-1}} \dfrac{1}{L_B\sqrt{2}}$, autrement dit $L_B \leq \dfrac{nV_n}{(n-1)V_{n-1}} \dfrac{\sqrt{n}}{\delta'\sqrt{2}}$.

Par un calcul simple, on peut montrer que $\dfrac{nV_n}{(n-1)V_{n-1}} \sqrt{n} \leq C_1$,

une constante numérique (utiliser la formule de stirling pour $\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ et $\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)$.

Alors $$L_B \leq \frac{c_1}{\delta'\sqrt{2}} . \qquad \blacksquare$$

IV => I. Cette implication résulte immédiatement du lemme II.2.6 il suffit de prendre $\delta' = \dfrac{1}{2\sqrt{3M}}$, si $L_B \leq M$. $\blacksquare$

On sait (voir [9]) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout B corps convexe symétrique et pour tout E ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, on a l'implication :

si pour tout H hyperplan de $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{Vol}(H \cap E) \leq \operatorname{Vol}(H \cap B)$, alors :

$$\operatorname{Vol}(E) \leq \operatorname{Vol}(B).$$

Par contre, si $\operatorname{Vol}(H \cap B) \leq \operatorname{Vol}(H \cap E)$, pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, cela n'entraîne pas nécessairement $\operatorname{Vol}(B) \leq \operatorname{Vol}(E)$. Il y a en effet un contre-exemple dû à LARMAN et ROGERS [9] , (voir en annexe II un contre-exemple plus simple, s'appuyant sur les résultats de K. BALL [1]).

On conjecture néanmoins qu'il existe une constante $\gamma > 0$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et quel que soit B corps convexe et E ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, on ait l'implication :

$$\{\mathrm{Vol}(B \cap H) \leq \mathrm{Vol}(E \cap H) \;;\forall H \text{ hyperplan de } \mathbb{R}^n\} \Rightarrow \{\mathrm{Vol}(B) \leq \gamma\, \mathrm{Vol}(E)\}.$$

On va voir que cette conjecture est équivalente aux assertions du théorème II.2.5 et à la conjecture II.2.1.

Théorème II.2.7.-

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

I - $\exists \delta > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall B \in A_n$, on ait $\mathrm{Vol}(B \cap H) \geq \delta$, $\forall H$ hyperplan de $\mathbb{R}^n$

V - $\exists \alpha > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall B$ corps convexe, symétrique de volume de $\mathbb{R}$, il existe un hyperplan linéaire H de $\mathbb{R}^n$, vérifiant $\mathrm{Vol}(B \cap H) \geq \alpha$.

VI - $\exists \gamma > 0$ telle que, $\forall n \in N$, $\forall B$ corps convexe symétrique et ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, on ait l'implication :

si $\mathrm{Vol}(B \cap H) \leq \mathrm{Vol}(E \cap H)$ pour tout hyperplan linéaire de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathrm{Vol}(B) \leq \gamma\, \mathrm{Vol}(E).$$

Démonstration :

Lemme II.2.8.-

Soit u un élément de $GL(\mathbb{R}^n)$, vérifiant $\det(u) = 1$, il existe un hyperplan linéaire H de $\mathbb{R}^n$, tel que pour tout corps convexe de $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$\mathrm{Vol}(u(B \cap H) < \mathrm{Vol}(B \cap H).$$

Admettons pour le moment ce lemme et prouvons le théorème.

I => V.

On a vu à la proposition II.2.3, que pour tout corps convexe symétrique B de $\mathbb{R}^n$ de volume 1, il existe une transformation linéaire $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, vérifiant $\det(u) = 1$, telle que $u(B)$ soit isotrope.

De l'assertion I, on déduit que, pour tout hyperplan linéaire H de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Vol}(u(B) \cap H) \geq \delta.$$

Autrement dit $\mathrm{Vol}(u(B \cap H')) \geq \delta$, où $H' = u^{-1}(H)$.

D'après le lemme II.2.8, il existe un hyperplan linéaire H' de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathrm{Vol}(B \cap H') \geq \mathrm{Vol}(u(B \cap H')).$$

Donc, pour cet hyperplan H' de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{Vol}(B \cap H') \geq \delta.$$

V => VI.

Soient B et $\mathcal{E}$ respectivement un corps convexe symétrique et un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, tels que pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$\mathrm{Vol}(B \cap H) \leq \mathrm{Vol}(\mathcal{E} \cap H).$$

Comme $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde, il peut se mettre sous la forme $av(b_n^2)$, où v est de déterminant 1 et a est un réel positif non nul.

Autrement dit, on a pour tout hyperplan H' de $\mathbb{R}^n$, $(H' = v^{-1}(H))$

$$\mathrm{Vol}(v(v^{-1}(B) \cap H')) \leqslant \mathrm{Vol}(v(ab_n^2 \cap H')).$$

D'autre part, on a pour tout hyperplan H' de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $v \in GL(\mathbb{R}^n)$ inversible :

$$\frac{\mathrm{Vol}(v(v^{-1}(B) \cap H'))}{\mathrm{Vol}(v(ab_n^2 \cap H'))} = \frac{\mathrm{Vol}(v^{-1}(B) \cap H')}{\mathrm{Vol}(ab_n^2 \cap H')} .$$

Alors, pour tout hyperplan H', on a :
$\mathrm{Vol}(v^{-1}(B) \cap H') \leqslant a^{n-1} V_{n-1}$.

En appliquant la propriété V, pour le corps $\dfrac{v^{-1}(B)}{\mathrm{vol}(B)^{1/}}$, on trouve un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, tel que

$$\mathrm{Vo}(B)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \mathrm{Vol}(H \cap v^{-1}(B)).$$

On en déduit, que $\alpha \, \mathrm{Vol}(B)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant a^{n-1} V_{n-1}$.

Par ailleurs :

$$\mathrm{Vol}(E) = a^n V_n \geqslant \left(\frac{\alpha}{V_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}} V_n \, \mathrm{Vol}(B).$$

Or, on sait que $V_n^{\frac{n-1}{n}} \geqslant c_1 V_{n-1}$, pour une certaine constante numérique c_1 (voir Annexe II).

Alors $\mathrm{Vol}(E) \geq \mathrm{Vol}(B)\left[\dfrac{\alpha V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}}\right]^{\frac{n}{n-1}}$

$$\geq (c_1\alpha)^{\frac{n}{n-1}}\ \mathrm{Vol}(B).$$

Si on prend $\gamma = \dfrac{1}{\alpha c_1}$, on obtient, enfin,

$$\mathrm{Vol}(B) \leq \gamma\ \mathrm{Vol}(E).$$ ■

VI => I.

Pour cette implication, on va procéder par contraposition.

non(I) : Pour tout $\delta > 0$, il existe $B \in A_n$ tel que $\mathrm{Vol}(B \cap H) < \delta$, pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$.

non(VI) : Pour tout $\gamma > 0$, il existe B et E respectivement corps convexe symétrique et ellipsoïde E de $\mathbb{R}^n$, vérifiant :

$\mathrm{Vol}(B \cap H) \leq \mathrm{Vol}(E \cap H)$ pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ et

$$\mathrm{Vol}(B) > \gamma\ \mathrm{Vol}(E).$$

Etant donnée $\gamma > 0$ si on prend $\delta = \left(\dfrac{1}{\gamma V_m}\right)^{\frac{n-1}{n}} V_{n-1} > 0$,

la propriété non (I-) entraîne qu'il existe $B \in A_n$ tel que :

$\mathrm{Vol}(B \cap H) < \delta$, pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$.

En prenant comme ellipsoïde E, la boule euclidienne de rayon a, avec $a > \left(\frac{1}{\gamma V_n}\right)^{1/n}$, $(E = ab_n^2)$, on en déduit que

$$\mathrm{Vol}(B \cap H) \leqslant \left(\frac{1}{\gamma V_n}\right)^{\frac{n-1}{n}} V_{n-1} < a^{n-1} V_{n-1} = \mathrm{Vol}(E \cap H),$$

pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ et de plus $\mathrm{Vol}(E) = a^n V_n > \frac{1}{\gamma}$.

Or, $B \in A_n$, donc $1 = \mathrm{Vol}(B) < \gamma\, \mathrm{Vol}(E)$. ■

Démonstration du lemme II.2.8.

On sait que, pour toute application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, inversible, il existe deux bases orthonormées $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, telles que : $u(e_i) = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, où les scalaires λ_i sont les valeurs propres de $(u^*u)^{1/2}$. Puisque u est de déterminant 1, $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Donc, il existe au moins un indice i_0 de $\{1,\dots,n\}$, tel que $|\lambda_{i_0}| \geqslant 1$, pour simplifier, on suppose que $\lambda_n \geqslant 1$, alors $\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \leqslant 1$

Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur e_n, $(H = [e_n]^\perp)$, pour tout corps convexe B de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{Vol}(u(B \cap H)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{u(B)\cap [f_n]^\perp}(x)\, dx_1,\dots dx_{n-1},$$

où $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i f_i$, donc $x = u(y)$ avec $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{\lambda_i} e_i$.

Alors $\mathrm{Vol}(u(B \cap H)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 1_{B \cap H}(y)\left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_1\right) dy_1, \ldots, dy_{n-1}$,

où $H = [e_n]^{\perp}$.

On en déduit donc, qu'il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, tel que $\mathrm{Vol}(u(B \cap H)) \leq \mathrm{Vol}(B \cap H)$, pour tout corps convexe de $\mathbb{R}^n$.

Remarque :

De façon similaire (démonstration du lemme II.2.8), on peut montrer qu'il existe un hyperplan linéaire H de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$\mathrm{Vol}(u(B \cap H)) \geq \mathrm{Vol}(B \cap H)$, pour tout B corps convexe de $\mathbb{R}^n$, où $u \in GL(\mathbb{R}^n)$ et $\det u = 1$.

L'existence de l'ellipsoïde de Milman se déduit aisément de la conjecture II.2.1. Rappelons le théorème de Milman.

Théorème de MILMAN II.2.9.-

Il existe une constante numérique $c > 0$, telle que pour tout $n \in N$ et pour tout corps convexe symétrique B de $\mathbb{R}^n$, il existe un ellipsoïde E vérifiant :

$$\mathrm{Vol}(B) = \mathrm{Vol}(E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(B \cap E) \geq c^n \, \mathrm{Vol}(B).$$

La démonstration la plus simple de ce théorème difficile est due à G. PISIER ; il utilise des ingrédients fins de la géométrie des espaces de Banach.

Proposition II.2.10.-

Considérons l'assertion suivante

VII - $\exists D > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall B$ corps convexe, symétrique de $\mathbb{R}^n$ de volume 1, il existe un ellipsoïde E de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\mathrm{Vol}(E) \leq D^n \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(B \cap E) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Alors, les assertions équivalentes I-, II-, III- et VI entraînent VII- et VII entraîne le théorème II.2.9.

Démonstration :

Nous utiliserons la propriété III -

III- => VII-. Etant donné un corps convexe, symétrique de volume 1.

D'après la proposition II.2.3, il existe $u \in GL(\mathbb{R}^n)$, de déterminant 1, tel que $u(B)$ soit isotrope.

D'après la propriété III-, il existe une constante $M' > 0$ telle que :

$$\mathrm{Vol}(u(B) \cap M'\sqrt{n}\, b_n^2) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Puisque, $\det(u) = 1$, on a donc $\mathrm{Vol}(B \cap M'\sqrt{n}u^{-1}(b_n^2)) \geq \frac{1}{2}$, alors il suffit de prendre comme ellipsoïde $E = M'\sqrt{n}u^{-1}(b_n^2)$, pour obtenir la propriété VII-.

Or, on sait que $V_n \leq (\frac{c_1}{\sqrt{n}})^n$ où c_1 une constante numérique.

Donc $\mathrm{Vol}(E) \leq (Mc_1)^n$ et $\mathrm{Vol}(B \cap E) \geq \frac{1}{2}$.

Pour achever la démonstration de cette proposition, il nous reste à montrer que la propriété VII- entraîne le théorème de Milman.

En appliquant la propriété VII- à $\frac{B}{\mathrm{Vol}(B)^{1/n}}$, où B est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, il existe $D > 0$ et pour tout B corps convexe de $\mathbb{R}^n$, il existe un ellipsoïde E vérifiant :
$\mathrm{Vol}(E) \leq D^n$ et $\mathrm{Vol}(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B)^{1/n}} \cap E) \geq \frac{1}{2}$.

Autrement dit, on a :

$$\mathrm{Vol}(E) \leq D^n \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(B \cap \mathrm{Vol}(B)^{1/n}E) \geq \frac{\mathrm{Vol}(B)}{2} .$$

Posons $E_1 = (\frac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(E)})^{1/n}.E$ et vérifions que c'est bien un ellipsoïde de Milman de B : on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B \cap E_1) &\geq \inf(1, \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)^{1/n}}) \mathrm{Vol}(B \cap \mathrm{Vol}(B)^{1/n}E)\\ &\geq \inf(1, \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)^{1/n}}) \frac{\mathrm{Vol}(B)}{2} .\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Vol}(E) \leq D^n$; et $\mathrm{Vol}(E_1) = \mathrm{Vol}(B)$ donc

$$\mathrm{Vol}(B \cap E_1) \geq (\frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{D}))^n \mathrm{Vol}(B). \qquad \blacksquare$$

ANNEXE DU CHAPITRE II

LARMAN et ROGERS [9] ont trouvé un contre-exemple au problème suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout B et E respectivement corps convexe symétrique et ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{Vol}(B \cap H) \leqslant \mathrm{Vol}(H \cap E)$, pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, a-t-on $\mathrm{Vol}(B) \leqslant \mathrm{Vol}(E)$?

Mais en utilisant un résultat de K. BALL [1], on peut donner un contre-exemple à ce problème, plus simple que celui de LARMAN et ROGERS.

Rappelons le résultat principal de K. BALL [1] :

Soit Q_n le cube unité, de $\mathbb{R}$, de volume 1 ($Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$), alors, pour tout hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$1 \leqslant \mathrm{Vol}(Q_n \cap H) \leqslant \sqrt{2}.$$

Proposition II.2.11.-

Pour tout entier $n \geq 10$, on a, pour tout hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$ $\mathrm{Vol}(Q_n \cap H) \leq \mathrm{Vol}(a_n b_n^2 \cap H)$ et $\mathrm{Vol}(a_n b_n^2) < 1$, avec

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{V_{n-1}}\right)^{1/n-1} .$$

Démonstration :

D'après K. BALL [1], on a pour tout H hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

$\mathrm{Vol}(Q_n \cap H) \leq \sqrt{2} = \mathrm{Vol}(a_n b_n^2 \cap H)$, où $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{V_{n-1}}\right)^{1/n-1}$, donc

il nous reste à montrer que pour $n \geq 10$, on a :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{V_{n-1}}\right)^{1/n-1} < \left(\frac{1}{V_n}\right)^{1/n} , \quad (\text{c'est-à-dire } \mathrm{Vol}(a_n b_n^2) < 1).$$

On pose, $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}$. Puisque le volume de b_n^2 est

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} , \quad \text{on a} \quad \frac{V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n/2} (\pi_n)^{1/2n} \frac{\Psi(\frac{n-1}{2})}{\Psi(\frac{n}{2})^{\frac{n-1}{n}}} .$$

Or, on sait que, pour tout $x > 0$:

$$e^{\frac{1}{12x}(1-\frac{1}{30x^2})} \leq \Psi(x) \leq e^{\frac{1}{12x}} .$$

Par suite :

$$(1) \quad \frac{V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} (\pi n)^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{1}{6n^2}\left(\frac{2n-1}{n-1} + \frac{2(n-1)}{15n^2}\right)} ,$$

et

$$(2) \quad \frac{V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}} \geqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/n} (\pi n)^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{1}{6n^2(n-1)}\left(2n-1-\frac{2n^2}{15(n-1)^2}\right)} .$$

En utilisant l'inégalité (1), on déduit que, si $n \geqslant n_o$, on a :

$$(3) \quad \frac{V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}} (\pi n_o)^{\frac{1}{2n_o}} e^{\frac{1}{6n_o^2}\left(\frac{2n_o-1}{n_o-1}+\frac{1}{15n_o}\right)} .$$

En utilisant l'inégalité (1) pour $n \in \{10,11,12\}$ et l'inégalité (3), pour $n \geqslant 13$, on montre moyennant un calcul élémentaire que

$$\frac{V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

∎

Remarques :

a) De ce contre-exemple, on déduit que si la conjecture VI- est vraie, la constante γ qui y figure vérifie $\gamma \geqslant \sqrt{\frac{e}{2}}$.

En effet, en prenant $B = Q_n$ et $E = \left(\frac{\sqrt{2}}{V_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} b_n^2$, on voit que pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathrm{Vol}(B \cap H) \leqslant \sqrt{2} = \mathrm{Vol}(E \cap H).$$

De la propriété VI-, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq \mathrm{Vol}(Q_n) \leq \gamma \mathrm{Vol}(E).$$

Autrement dit, pour tout $n \in N$, on a $\gamma \geq \frac{1}{V_n}\left(\frac{V_{n-1}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Donc, en particulier, $\gamma \geq \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{1}{V_n}\left(\frac{V_{n-1}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

b) Les inégalités (1) et (2) de la démonstration de II.2.11 permettent de montrer le résultat suivant que nous avons utilisé plusieurs fois :

$$\frac{V_n^{\frac{n-1}{n}}}{V_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon(n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

avec $0 \leq \varepsilon(n)$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

CHAPITRE III

Introduction.

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'isotropie de quelques boules unités d'espaces de Banach qui présentent des propriétés géométriques particulières (1-inconditionnelle, type 2, le dual de cotype 2-faible).

A. BOULE 1-INCONDITIONNELLE.

Définition II.3.1.-

On dit que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base 1-inconditionnelle d'un espace de Banach E de dimension n, si pour tout choix de signe (ε_j), pour tout scalaire x_i et pour tout couple d'entier (m,K) tel que $m \leq K \leq n$, on ait :

$$\|\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j x_j e_j\| = \|\sum_{i=1}^{m} x_j e_j\| \tag{a}$$

et

$$\|\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\| \leq \|\sum_{j=1}^{K} x_j e_j\| \tag{b}$$

où $\| \ \|$ désigne la norme de E.

Proposition II.3.2.-

Soit E un espace de Banach de dimension n. On suppose qu'il admet une base $(e_1,\ldots,e_n)$, 1-inconditionnelle.

Alors, il existe un produit scalaire sur E, pour lequel, la boule unité de E, B est isotrope et de volume 1 et $(e_i)_{i=1}^n$ orthogonale. On a, alors $L_B \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ce résultat a été énoncé initialement par J. BOURGAIN.

Démonstration :

Comme $(e_i)_{i=1}^n$ est une base 1-inconditionnelle, on va choisir notre produit scalaire $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ de façon que la base $(e_i)_{i=1}^n$ soit orthogonale.

Soient x, y deux éléments de E ; $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$.

On pose $\langle\langle x,y\rangle\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \alpha_i^2$, où les α_i sont des paramètres positifs non nuls, à déterminer.

Etudions d'abord l'isotropie de B, par rapport au produit scalaire $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$.

Soit μ la mesure de Haar sur E muni de la struture euclidienne définie par $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$.

On a :

$$\int_B |\langle\langle x,y\rangle\rangle|^2 d\mu(x) = \int_B \Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i \alpha_i^2\Big)^2 d\mu(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \alpha_i^4 \int_B x_i^2 d\mu(x) + \sum_{i \pm j} y_i y_j (\alpha_i \alpha_j)^2 \int_B x_i x_j \alpha\mu(x) .$$

$\int_B x_i x_j d\ (x) = 0$ car B est 1-inconditionnelle.

Donc $\int_B |<<x,y>>|^2 d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \alpha_i^2 \int_B x_i^2 d\mu(x)$.

Si on choisit les α_i : $\alpha_i^2 = \dfrac{\lambda^2}{\int_B x_i^2 d\mu(x)}$, λ arbitraire, on aura

$\int_B |<<x,y>>|^2 d\mu(x) = \lambda^2 ||y||_2^2$ ($||\ \ ||_2$ désigne la norme associée à $<< , >>$).

Comme λ est arbitraire, on peut choisir λ, pour que le volume de B par rapport au produit scalaire $<< , >>$ soit égal à 1 ($\mu(B) = 1$), λ vaut alors L_B.

Donc, la boule unité B de E est isotrope et de volume 1, par rapport au produit scalaire $<< , >>$ et, de plus, la base $(e_i)_{i=1}^n$ est orthogonale.

Dans cette situation, on a $\mathbb{P}_{[e_i]^\perp}(B) = [e_i]^\perp \cap B$ pour tout i,

où $[e_i]^\perp$ est le sous-espace de E orthogonal à $|e_i|$ par rapport à $<< , >>$ et $\mathbb{P}_{[e_i]^\perp}$ est la projection orthogonale de E sur $[e_i]^\perp$.

D'après l'inégalité de Loonis-Whitney [10], on a :

$$\mathrm{Vol}(B) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(\mathbb{P}_{[e_i]^\perp}(B))^{1/n-1} ,$$

puisque $\mathrm{Vol}(B) = 1$ (par rapport à $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$) et $\mathbb{P}_{[e_i]^{\perp}}(B) = [e_i]^{\perp} \cap B$, on a : $1 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(B \cap [e_i]^{\perp})$.

Donc, il existe un i_0, tel que $\mathrm{Vol}(B \cap [e_{i_0}]^{\perp}) \geqslant 1$.

En appliquant le théorème II.1.10 à B et pour $K = 1$, on obtient donc que pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, $L_B \mathrm{Vol}(B \cap H) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit donc que $L_B \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. ∎

Remarques :

1) Si $(e_i)_{i=1}^{n}$ est une base c-inconditionnelle de $(\mathbb{R}^n, B)$; c'est-à-dire au lieu de l'inégalité (b), on a : $\|\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\| \leqslant c\|\sum_{i=1}^{K} x_i e_i\|$ pour $m \leqslant K \leqslant n$.

Alors
$$L_B \leqslant \frac{c}{\sqrt{2}} .$$

2) Dans la démonstration de la proposition II.3.2, on a utilisé un résultat de Whitney et Loomiss, mais en fait l'inégalité plus faible suivante :

$$(*) \qquad \mathrm{Vol}(B)^{1/n} \leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Vol}(P_{[e_i]^{\perp}}(B))}{n}\right)^{1/n-1},$$

suffit dans la démonstration de la proposition II.3.2.

Preuve de l'inégalité (*) :

D'après la thèse de A. PAJOR, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{\mathrm{Vol}(B+\varepsilon b_n^\infty) - \mathrm{Vol}(B)}{\varepsilon} = 2n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(P_{[e_i]^\perp}(B))}{n}\right)$$

Or, d'après l'inégalité de Brunn-Minkowski, on a

$$\mathrm{Vol}(B+\varepsilon b_n^\infty)^{1/n} \geq \mathrm{Vol}(B)^{1/n} + 2\varepsilon,$$

donc

$$\mathrm{Vol}(B+\varepsilon b_n^\infty) \geq \mathrm{Vol}(B) + 2n\varepsilon \mathrm{Vol}(B)^{\frac{n-1}{n}} .$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Vol}(B)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(P_{[e_i]^\perp}(B))}{n}) \quad .$$

B. ESPACE DE TYPE 2.

Définition II.3.3.-

Un espace de Banach E est dit de type p, avec $1 \leq p \leq 2$, s'il existe une constante c, telle que l'on ait $\forall n, \forall x_1,\ldots,x_n \in E$, l'inégalité $\left[\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)} \|\sum_{i=1} \varepsilon_i x_i\|^2\right]^{1/2} \leq c(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{1/p}$, où les ε_i valent ± 1.

La plus petite constante c possible est la constante de type p de E et est notée $T_p(E)$.

Proposition II.3.4.-

Soit $E = (\mathbb{R}^n, B)$ un espace de Banach, B étant la boule unité de l'espace de Banach E : corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On suppose que B est isotrope et de volume 1 par rapport au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$;

Alors $L_B \leqslant c(T_2(E))^{1+\frac{2}{n}}$, où c est une constante numérique.

Démonstration :

On sait que, pour tout opérateur $u : \ell_2^n \to E$, on a :

(1) : $\ell(u) \leqslant \tau_2(u^*)T_2(E)$ où $\tau_2(u^*)$ est la norme 2-sommante de u^* et ℓ est la norme de u dans $L^2(\ell_2^n, \gamma_n, X)$, ($\gamma_n$ est la probabilité de Gauss sur ℓ_2^n)

$$\ell(u) = \left(\int_{\ell_2^n} ||u(x)||^2 d\gamma_n(x)\right)^{1/2} \quad ;$$

si u est l'identité de ℓ_2^n dans E, $(I_d = u)$, on a

$$(2) : \quad \sqrt{n} \int_{S_{n-1}} ||x||^2 d\sigma_{n-1}(x))^{1/2} \leqslant \ell(I_\delta) \leqslant \tau_2(I_d^*)T_2(E),$$

où σ_{n-1} est la probabilité invariante par rotation sur la sphère euclidienne S_{n-1}.

Comme B est isotrope et de volume 1, $nL_B^2 = \int_B |x|^2 dx$.
On sait d'autre part que :

$$nL_B^2 = \frac{nV_n}{n+2} \int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma_{n-1}(x)}{||x||^{n+2}} \; ,$$

donc $$L_B^{\frac{2}{n+2}} = \left(\frac{V_n}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+2}} \left(\int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma_{n-1}(x)}{||x||^{n+2}}\right)^{\frac{1}{n+2}} .$$

D'après l'inégalité de Hölder,

on a donc $$L_B^{\frac{2}{n+2}} \geq \left(\frac{V_n}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+2}} \frac{1}{\left(\int_{S_{n-1}} ||x||^2 d\sigma_{n-1}(x)\right)^{1/2}}$$

De (2), on déduit alors l'inégalité :

$$L_B^{\frac{2}{n+2}} \geq \left(\frac{V_n}{n+2}\right)^{1/n+2} \frac{\sqrt{n}}{\ell(I_d)} , \quad \text{soit} \quad L_B^2 \geq \frac{n}{n+2} \left(\frac{\sqrt{n}}{\ell(I_d)}\right)^{n+2} .$$

En utilisant (1), on obtient alors

$$(3) \qquad L_B^2 \geq \frac{V_n}{n+2} \left(\frac{\sqrt{n}}{\pi_2(I_d^*)T_2(E)}\right)^{n+2} .$$

Maintenant, il nous reste à évaluer $\pi_2(I_d^*)$, pour cela, on va utiliser le résultat suivant :

Théorème de Pietsch II.3.5.-

Soit T un opérateur de E dans F (E et F deux espaces de Banach).

Soit K une partie de E^* qu'on suppose $\sigma(E^*,E)$-compacte, et normante (c'est-à-dire tout $x \in E$ atteint sa norme sur K).

On dit que T est 2-sommant si et seulement si, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur K, et une constante C, tellesque, pour tout $x \in E$, on ait

$$(4) \qquad \|Tx\|_F \leq C\left(\int_K |\langle x',x\rangle|^2 \, d\mathbb{P}(x')\right)^{1/2}$$

où $\pi_2(T)$ est la plus petite constante C intervenant dans (4).

Comme B est isotrope et de volume 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$(5) \qquad |x|^2 L_B = \int_B |\langle x,y\rangle|^2 dy \quad .$$

De (4) et (5), on déduit le lemme suivant (car on est en dimension finie) :

Lemme II.3.6.-

Soit B un corps convexe, symétrique, de volume 1. On suppose que B est isotrope par rapport au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On considère l'espace de Banach $E = (\mathbb{R}^n,B)$.

Alors $L_B \, \pi_2(I_d^* : E^* \to \ell_2^n) \leq 1$.

D'après (3), on a alors : $L_B^2 \geq \frac{\sqrt{n}}{n+2}\left(\frac{\sqrt{n}}{T_2(E)} L_B\right)^{n+2}$, donc

$$L_B \leq \left(\frac{n+2}{V_n}\right)^{1/n} \left(\frac{T_2(E)}{\sqrt{n}}\right)^{1+\frac{2}{n}} .$$

Par suite $L_B^2 \leq \left(\frac{n+2}{n}\right)^{1/n} \frac{1}{\sqrt{n}V_n{}^{1/n}} (T_2(E))^{1+\frac{2}{n}}$.

Il est connu que $V_n \geq \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^n$, où c une constante numérique.

Par ailleurs $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{1/n} < 3$.

On en déduit donc $L_B \leqslant \frac{3}{C}\,(T_2(E))^{1+\frac{2}{n}}$. ■

Remarque :

La notion de type, qui a été introduite par MAUREY et PISIER, est très utilisée actuellement en géométrie des espaces de Banach, ainsi que la propriété correspondant à l'inégalité inverse (cotype).

C - *LE DUEL DE COTYPE 2-FAIBLE.*

Définition II.3.7.-

Un espace de Banach X est dit de cotype 2-faible, s'il existe $\delta_0 \in]0,1[$ et $c > 0$ tels que pour tout sous-espace E de X, de dimension finie, il existe un sous-espace F de E avec $\dim(F) \geqslant \delta_0 \dim(E)$, tel que F est C-isomorphe à $\ell^2_{\dim F}$, $(d(F,\ell^2_{\dim F}) = d_F \leqslant C)$.

Pour $\delta \in]0,1[$, on pose :

$$d_X(\delta) = \sup_{\substack{E \subset X \\ \dim \to +\infty}} \{d_F \text{ tel que } F \subset E,\ \dim F \geqslant \delta \dim E\}.$$

Autrement dit, X est de cotype 2-faible s'il existe $\delta_0 \in]0,1[$ et $C > 0$, tels que $d_X(\delta_0) \leqslant C$. La tangente de cotype 2-faible de X est $\inf\{d_X(\delta) ; \delta \in]0,1[\}$.

Pour la suite, on a besoin de deux lemmes :

Lemme de MILMAN-PISIER II.3.8.- [13]

Etant donné un espace de Banach X, de cotype 2-faible, alors il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout sous-espace E de X, de dimension n, pour tout opérateur $v : E \to \ell_2^n$, on ait :

$e_n(v) \leq \frac{c\ \pi_2(v)}{\sqrt{n}}$; la plus petite constante c, vérifiant cette inégalité ne dépend que de la constante de cotype 2-faible de X.

On rappellera plus loin la définition du $n^{\text{ème}}$ nombre d'entropie $e_n(v)$ de v.

Lemme de KÖNING-MILMAN II.3.9.- [7]

Il existe deux constantes numériques c_1 et c_2 telles que pour tout espace de Banach E, de dimension n et v opérateur de rang fini de $\ell_2^n \to E$, on ait :

$$e_{[c_1 n]}(v) \leq c_2\ e_n(v^*) .$$

Théorème II.3.10.-

Soit un espace de Banach $E = (\mathbb{R}^n, B)$, dont le dual E^* est de cotype 2-faible. On suppose que la boule unité B de E est isotrope et de volume 1 par rapport au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Alors $L_B \leq c$ (où c est une constante qui dépend uniquement de la constante de cotype 2-faible de E^*).

Ce théorème est dû initialement à A. PAJOR qui en donne une autre démonstration.

Démonstration :

Soit I : l'identité de $\ell_n^2 \to E$.

Comme E vérifie l'hypothèse du lemme II.3.8, on a $e_n(I^*) \leqslant c\,\dfrac{\pi_2(I^*)}{\sqrt{n}}$. On a vu que $L_B\ \pi_2(I^*) \leqslant 1$.

BU LILLE

$$\text{Donc} \qquad e_n(I_\delta^*) \leqslant \frac{c}{L_B\sqrt{n}} \tag{1}$$

D'autre part, E étant de dimension n, on a d'après le lemme II.3.9 :

$$e_{[c_1 n]}(I_\delta) \leqslant c_2(e_n(I^*)\ . \tag{2}$$

Rappel : Soit $v : X \to Y$ un opérateur. Le $n^{\text{ième}}$ nombre d'entropie de v est défini par :

$$e_n(v) = \inf\{\varepsilon > 0/\text{il existe } (t_1,\dots,t_{2^{n-1}}) \in B_Y \text{ tels que}$$
$$v(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} (t_i + \varepsilon B_Y)\}$$

(où B_X et B_Y sont respectivement les boules unités de X et Y).

Puisque I_d est l'identité de $\ell_2^n \to E = (\mathbb{R}^n, B)$,

$$I_d(b_n^2) = b_n^2 \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (t_i + \varepsilon B).$$

Par suite, $\mathrm{Vol}(b_n^2) \leqslant 2^{K-1}(e_K(I))^n \mathrm{Vol}(B)$, si $K = [c_1 n]$ et $\mathrm{Vol}(B) = 1$, on a donc

$$\mathrm{Vol}(b_n^2) = V_n \leq 2^{c_1 n} e_{[c_1 n]}(I_d)^n .$$

En utilisant les relations (1) et (2), on a alors $V_n^{1/n} \leq c_2 . 2^{c_1} . \frac{c}{\sqrt{n}}$

Or, $V_n \geq (\frac{c_3}{\sqrt{n}})^n$ où c_3 une constante numérique.

On obtient finalement $L_B \leq (c_2 . 2^{c_1} . c_3) . c.$ ■

Remarque :

On peut retrouver la deuxième proportion II.3.4 à partir du théorème II.3.10, car on sait que pour tout espace de Banach E de type 2, son dual E^* est de cotype 2 et, de plus, on a : $c_2(E^*) \leq T_2(E)$.

D'autre part, il est bien connu que, pour tout espace de Banach F de cotype 2, il est de cotype 2-faible.

Le problème reste ouvert de savoir si L_B est majoré en fonction de la constante de cotype 2 de $(\mathbb{R}^n, B)$ lui-même (et non du dual).

Définition II.3.11.-

Un corps convexe est appelé zonotopie de $\mathbb{R}^n$ s'il est somme au sens de Minkowski d'un nombre fini de segments. Autrement dit, B peut être identifié à la boule unité d'un quotient d'un ℓ_m^∞.

On dira que Z est une zonoïde s'il est limite au sens de Hausdorff de zonotopies.

Autrement dit, $(\mathbb{R}^n,Z)$ est isométrique à $\ell^\infty/_E$.

Proposition II.3.12.-

Il existe une constante universelle $c > 0$, telle que, pour tout zonoïde Z, isotrope de $\mathbb{R}^n$, de volume 1, on ait : $L_Z < c$.

Démonstration :

Puisque Z est une zonoïde, $(\mathbb{R}^n,Z)^*$ est isométrique à une section de L^1, où L^1 est l'espace des fonctions intégrables.

Or, L^1 est de cotype 2 $(c_2(L^1) \leq \sqrt{2})$ et en utilisant le théorème II.3.10, on en déduit donc que la constante d'isotropie de Z est majorée par une constante universelle.

Remarque :

Comme exemple de zonoïde, on a les boules b_n^p pour tout $p \geq 2$ car il est bien connu que $(\ell_n^p)^* = \ell_n^q$ $(q \in [1,2])$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ est isométrique à une section de L^1. Par conséquent, $L_{b_n^p} < c$, où c est une constante qui ne dépend ni de n, ni de p.

CHAPITRE IV

A. *ISOTROPIE DES BOULES UNITES* b_n^p .

On considère pour tout $p \in [1,+\infty]$, la boule unité b_n^p de $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\ \|_p$ définie par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \text{où} \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Proposition II.4.1.-

Pour tout $p \in [1,+\infty]$, b_n^p est isotrope pour la structure euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et

$$L^2_{\tilde{b}^p_n} = \frac{2\Gamma(\frac{3}{p})\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{n+2}{n}}}{p\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)(\frac{2}{p}\ \Gamma(\frac{1}{p}))^3}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} L^2_{\tilde{b}^p_n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\ 2\Gamma(\frac{3}{p})}{p(\frac{2}{p}\ \Gamma(\frac{1}{p}))^3}, \quad \text{avec} \quad \tilde{b}^p_n = \mathrm{Vol}(b^p_n)^{-\frac{1}{n}}\ b^p_n\ .$$

Démonstration :

On voit bien que la boule b^p_n est invariante par tout opérateur T de la forme :

$$(x_i)^n_{i=1} \longrightarrow (\varepsilon_i x_{\sigma(i)})^n_{i=1} \quad ,$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ et σ est une permutation de $\{1,\ldots n\}$.

On en déduit donc que b^p_n est isotrope et de plus

$$L^2_{\tilde{b}^p_n} = \frac{\int_{b^p_n} x_i^2\ dx}{\mathrm{Vol}(b^p_n)^{\frac{n+2}{n}}}\ .$$

Par suite

$$L^2_{b^p_n} = \frac{2\mathrm{Vol}(b^p_{n-1})}{\mathrm{Vol}(b^p_n)^{\frac{n+2}{n}}} \int_0^1 x^2(1-x^p)^{\frac{n-1}{p}}\ dx.$$

$$= \frac{2\mathrm{Vol}(b^p_{n-1})}{\mathrm{Vol}(b^p_n)^{\frac{n+2}{n}}}\ \frac{\Gamma(\frac{n-1}{p}+1)\Gamma(\frac{3}{p})}{p\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)}\ .$$

Or, on sait que le volume de la boule b_n^p est donné par la formule suivante :

$$\mathrm{Vol}(b_n^p) = \frac{\left[\frac{2}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p})\right]^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)} .$$

D'où

$$L^2_{\underset{\sim}{b}_n^p} = \frac{2\Gamma(\frac{3}{p})\Gamma(\frac{n}{p}+1)^{\frac{n+2}{n}}}{p\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)(\frac{2}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p}))^3} .$$

Si on pose $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma(x+1}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}$, pour tout $x > 0$,

on obtient alors :

$$L^2_{\underset{\sim}{b}_n^p} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{p}} \frac{2\Gamma(\frac{3}{p})}{p(\frac{2}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p}))^3} \sqrt{\frac{n}{n+2}} \left(\frac{2n\pi}{p}\right)^{1/n} \frac{\left[\Psi(\frac{n}{p})\right]^{\frac{n+2}{n}}}{\Psi(\frac{n+2}{p})} .$$

Rappelons que pour tout $x > 0$

$$e^{\frac{1}{12x}(1-\frac{1}{30x^2})} \leq \Psi(x) \leq e^{\frac{1}{12x}} .$$

On en déduit donc

$$\lim_{n\to+\infty} L^2_{\tilde{b}^p_n} = \frac{e^{-\frac{1}{p}}\, 2\Gamma(\frac{1}{p})}{p(\frac{2}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p}))^3} .$$

Remarques :

On sait que l'espace de Banach b^p_n admet une base 1-inconditionnelle et orthonormée, donc en vertu de la proposition II.3.2 du chapitre 3, on a :

$$L^2_{\tilde{b}^p_n} = \frac{2\Gamma(\frac{3}{p})\Gamma(\frac{n}{p}+1)^{\frac{n+2}{n}}}{p\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)(\frac{2}{p}\,\Gamma(\frac{1}{p}))^3} \leqslant \frac{1}{2} \quad , \quad \text{et ce}$$

pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times [1,+\infty]$.

B. ETUDE DE L'ISOTROPIE DES IDEAUX D'OPERATEURS REELS.

On considère pour tout $p \in [1,+\infty]$ la boule B^p_n de l'idéal d'opérateurs réels t sur ℓ^2_n définie par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \leqslant 1$, où les λ_i sont les n valeurs propres de $|t| = (t^*t)^{1/2}$. Pour $p = +\infty$, B^∞_n correspond à $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \leqslant 1$.

On se propose de montrer que B^p_n est isotrope et de donner une formule explicite pour la constante d'isotropie de $\tilde{B}^p_n$, avec $\tilde{B}^p_n = \mathrm{Vol}(B^p_n)^{-\frac{1}{n^2}} B^p_n$, ainsi qu'une majoration de $L_{\tilde{B}^p_n}$ quand n tend vers l'infini.

On identifiera, dans ce qui suit, un opérateur sur ℓ_n^2 avec sa matrice dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de ℓ_n^2, et l'ensemble de ces matrices avec $\mathbb{R}^{n^2}$, muni du produit scalaire euclidien $(t,s) \to \text{trace}\,(t^*s)$.

La norme hilbertienne sur $\mathbb{R}^{n^2}$ est alors la norme de Hilbert-Schmidt sur $L(\mathbb{R}^n)$.

Théorème II.4.2.-

Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $\tilde{B}_n^p$ est isotrope par rapport au produit scalaire usuel sur $L(\mathbb{R}^n)$ et

$$L_{B_n} = \frac{1}{n\mathrm{Vol}(B_n^p)^{1/n^2}}\left(\frac{\int_{\Omega_p}\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sigma_j^2-\sigma_i^2)\,d\sigma}{\int_{\Omega_p}\prod_{1\leq i<j\leq m}(\sigma_j^2-\sigma_i^2)\,d\sigma}\right)^{1/2},$$

où $\Omega_p = \{(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \mathbb{R}^n \quad / \quad 0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n \text{ et } \sum_{i=1}^n \sigma_i^p \leq 1\}$.

Démonstration :

L'ensemble des opérateurs singuliers étant négligeable, presque tout opérateur t se met, de façon unique, sous la forme

$$t = uh$$

où $h = (t^*t)^{1/2}$ est symétrique positif et $u \in O(n)$. Comme h est positif, il existe alors $v \in O(n)$ tel que

$$h = v^* d\, v\ ,$$

où d est diagonale de valeurs propres positives $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n$.

Pour presque tout opérateur t, les σ_i sont deux à deux distinctes et v est unique à la multiplication près de ses lignes par des scalaires de valeur absolue 1.

Notons enfin que $t \in B_n^p$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^p \leq 1$.

Soit ϕ l'application de $O(n) \times O(n) \times \Omega_p \to L(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$(u,v,\sigma) \mapsto u \circ \sigma \circ v,$$

en identifiant $\sigma \in \Omega_p \subset \mathbb{R}^n$ avec l'opérateur diagonal de valeurs propres $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, on a :

$$\Gamma_n^p = \phi(O(n) \times O(n) \times \Omega_p) \subset B_n^p \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(B_n^p \setminus \Gamma_n^p) = 0.$$

On remarque qu'un opérateur t est l'image de 2^n éléments de Γ_n^p.

Si on note $J(u,v,\sigma)$ le Jacobien de ϕ en (u,v,σ), alors d'après l'article de J. SAINT RAYMOND [15], sur le volume des boules B_n^p des idéaux d'opérateurs classiques, on a :

$$|J(u,v,\sigma)| = |\partial(1,1,\sigma)|,$$

et, de plus

$$J|(1,1,\sigma)| = 2^{\frac{-n(n-1)}{2}} \prod_{1\leq i<j\leq n} |\sigma_j^2-\sigma_i^2|.$$

On en déduit que :

$$\int_{\Gamma_n^p} |<t,s>|^2 ds = \frac{1}{2^n} \int_{O(n)\times O(n)\times\Omega_p} |<t,u\sigma v>|^2 |J(u,v,\sigma)| d\mu(u) d\mu(v) d\sigma$$

car dans le cas réel, $\phi^{-1}(t)$ à 2^n éléments pour $t \varepsilon C_n^p$.

Or $<t,u\sigma v> = \operatorname{trace}(t^* u\sigma v) = \sum_{i=1}^{n} <u\sigma v(e_i),te_i>$, pour toute base orthonormée $(e_i)_{i=1}^n$ de $\mathbb{R}^n$, $v^* \in O(n)$ et $v^{-1} = v^*$, donc

$$<t,u\sigma v> = \sum_{\ell=1}^{n} <u\sigma e>,tv^* e_\ell> = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell <ue\ ,tv^* e_\ell>.$$

Considérons les matrices associées à u,v et t dans la base orthonormée $(e_i)_{i=1}^n$:

$$u \sim (u_{ij})_{ij=1}^n \quad , \quad v \sim (v_{ij})_{ij=1}^n \quad \text{et} \quad t \sim (t_{ij})_{ij=1}^n.$$

Avec ces notations, nous pouvons écrire :

$$<u(e_\ell),tv^*(e_\ell)> = \sum_{ij=1}^{n} t_{ij} u_{i\ell} v_{\ell j} \ .$$

Ceci nous conduit à l'égalité suivante :

$$\int_{B_n^p} |<t,s>|^2 d = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{i,j=1\\h,k=1}} t_{ij} t_{hk} \sum_{\ell,\ell'=1}^{n} \int_{O(n)} v_{\ell j} v_{\ell' K} d\mu(v) \int_{\Omega_p} \sigma_\ell \sigma_{\ell'} |J(1,1,\sigma)| d\sigma.$$

Maintenant, on va étudier la quantité suivante :

$$\int_{O(n)} u_{i\ell}\ u_{h\ell'} d\mu(u) \quad \text{où} \quad u = (u_{ij})_{ij=1}^n.$$

On sait qu'on peut trouver un g de $O(n)$ tel que $ug = \tilde{u}$, où $\tilde{u} = (\tilde{u}_{ij})_{ij=1}^{n}$ avec $\tilde{u}_{ij} = u_{ij}$ si $j \neq \ell'$ et $\tilde{u}_{i\ell'} = - u_{i\ell'}$,

c'est-à-dire (toute multiplication d'une colonne de u par un scalaire de valeur absolue 1 peut s'écrire sous la forme gu , où $g \in O(n)$.

De plus, toute transposition P de colonne de u peut se mettre sous la forme uw, où $w \in O(n)$.

Le même raisonnement peut être fait pour les lignes de u $(\tilde{u} = gu)$.

La mesure μ étant de Haar sur $O(n)$ donc pour tout fonction continue f sur $O(n)$ et pour tout $g \in O(n)$, on a

$$\int_{O(n)} f(gu)d\mu(u) = \int_{O(n)} f(ug)d\mu(u) = \int_{O(n)} f(u)d\mu(u).$$

On en déduit que

$$\int_{O(n)} u_{i\ell}u_{k\ell'}d\mu(u) = 0 \quad \text{si} \quad (\ell \neq \ell' \quad \text{ou} \quad i \neq k)$$

et
$$\int_{O(n)} u_{i\ell}^{2}d\mu(u) = \int_{O(n)} u_{i\ell'}^{2}d\mu(u)$$

Puisque $\sum_{i=1}^{n} u_{i\ell}^{2} = 1$, on trouve enfin :

$$\int_{O(n)} u_{i\ell}u_{h\ell'}d\mu(u) = \frac{\mathrm{Vol}(O(n))}{n} \cdot \delta_{(i,\ell)}^{(h,\ell')} \tag{2}$$

où $\delta_{(i,\ell)}^{(h,\ell')}$ est le symbole de Krönecker.

A partir des relations (1) et (2), on obtient donc :

$$\int_{B_n^p} |<t,s>|^2 ds = |t|^2 \frac{1}{2^n} \frac{\mathrm{Vol}(O(n))^2}{n^2} \int_{\Omega_p} (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2) |J(1,1,\sigma)| d\sigma.$$

Donc, B_n^p est isotrope par rapport à la norme de Hilbert-Schmidt sur $L(\mathbb{R}^n)$ et d'après un résultat de J. SAINT RAYMOND [15]

$$\mathrm{Vol}(B_n^p) = \frac{\mathrm{Vol}(O(n))^2}{2^n} \int_{\Omega_p} |J(1,1,\sigma)| d\sigma.$$

On peut donc écrire :

$$\int_{\tilde{B}_n^p} |<t,s>|^2 ds = \frac{|t|^2}{n^2 [\mathrm{Vol}(B_n^p)]^{2/n^2}} \cdot \frac{\int_{\Omega_p} (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2) \, J(1,1,\sigma) \, d\sigma}{\int_{\Omega_p} |J(1,1,\sigma)| d\sigma}$$

D'où

$$L^2_{\tilde{B}_n^p} = \frac{1}{n^2 (\mathrm{Vol}(B_n^p))^{2/n^2}} \left(\frac{\int_{\Omega_p} (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2) |J(1,1,\sigma)| d\sigma}{\int_{\Omega_p} |J(1,1,\sigma)| d\sigma} \right)$$

avec $J(1,1,\sigma) = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma_j^2 - \sigma_i^2)$

et $\Omega_p = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n \ / \quad \sigma_1 < \ldots < \sigma_n$ et $\sum_{i=1}^n \sigma_i^p \leq 1\}$. ∎

Corollaire II.4.3.-

Si $p \geqslant 2$ alors $L_{\tilde{B}_n^p} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e^{3/2}\Delta(\frac{p}{2})}}$ quand n tend vers l'infini où $\frac{1}{4} \leqslant \Delta(\frac{p}{2}) \leqslant 4$.

Si $1 \leqslant p \leqslant 2$, alors $L_{\tilde{B}_n^p} \quad \dfrac{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\, e^{3/2}\Delta(\frac{p}{2})}}$, quand n tend vers l'infini où $\frac{1}{4} \leqslant \Delta(\frac{p}{2}) \leqslant 4$.

Démonstration :

On sait que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, et pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \leqslant n^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

où $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+ = \sup\left(0, \frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$.

D'après J. SAINT RAYMOND [15], on sait que, pour n assez grand, on a :

$$\mathrm{Vol}(B_n^p)^{1/n^2} > \frac{\sqrt{2\pi e^{3/2}\Delta(\frac{p}{2})}}{n^{1/2+1/p}}, \quad \text{où } \frac{1}{4} \leqslant \Delta(\frac{p}{2}) \leqslant 4.$$

Or, le théorème précédent nous donne

$$L_{\tilde{B}_n^p} = \frac{1}{n\mathrm{Vol}(B_n^p)^{1/n^2}} \left(\frac{\int_{\Omega_p} (\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2) |J(1,1,\sigma)| d\sigma}{\int_{\Omega_p} |J(1,1,\sigma)| d\sigma} \right)^{1/2} .$$

On en déduit donc pour tout $p \in [1,+\infty]$ et pour n assez grand

$$L_{\tilde{B}_n^p} \leq \frac{n^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})_+} . n^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{p})}}{n\sqrt{2\, e^{3/2} \Delta(\frac{p}{2})}} .$$

■

Remarque :

BOURGAIN a démontré récemment que $L_{\tilde{B}_n^1} \leqslant C$.

ANNEXE DU CHAPITRE IV

Proposition II.4b.1.-

On considère $(\mathbb{R}^K, B)$ et $(\mathbb{R}^{n-K}, C)$ où B et C sont des boules isotropes de volume 1.

Alors, pour tout $p \in [1,+\infty]$, il existe deux constantes λ et μ, uniques, telles que le corps $D = \lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C$, soit isotrope et de volume 1.

De plus, la constante d'isotropie L_D de D est alors donnée par $L_D^n = L_B^K L_C^{n-K} \gamma(n,K,p)$, où $\gamma(n,K,p)$ est une constante qui ne dépend que de n, K, p.

Démonstration :

Soient λ et μ deux nombres réels positifs, rappelons que :

$$\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{n-K} \text{ tel que } \frac{||x_1||_B^p}{\lambda^p} + \frac{||x_2||_C^p}{\mu^p} \leqslant 1\}.$$

On sait que

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C) = \lambda^K \mathrm{Vol}(B)\mu^{n-K}\mathrm{Vol}(C)\,\frac{\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)} ,$$

les égalités $\mathrm{Vol}(B) = \mathrm{Vol}(C) = 1$, $\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C) = 1$ nous donne une première condition sur λ et μ :

$$\lambda^K . \mu^{n-K} = \frac{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K}{p}+1)} \quad . \qquad (*)$$

Etudions, alors, l'isotropie de $D = \lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C$, en supposant la condition (*) réalisée (c'est-à-dire $\mathrm{Vol}(D) = 1$).

Soit y un élément de D, $y = y_1 + y_2$, où $y_1 \in \lambda B$ et $y_2 \in \mu C$.

Alors

$$\int_D |\langle x,y\rangle|^2 dy = \int_{\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C} (|\langle x_1,y_1\rangle|^2 + |\langle x_2,y_2\rangle|^2 + 2\langle x_1,y_1\rangle\langle x_2,y_2\rangle) dy_1 dy_2$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 ,$$

où $I_1 = \int_D |\langle x_1,y_1\rangle|^2 dy_1 dy_2$, $I_2 = \int_D |\langle x_2,y_2\rangle|^2 dy_1 dy_2$

et $I_3 = \int_D 2\langle x_1,y_1\rangle\langle x_2,y_2\rangle dy_1 dy_2$.

<u>*Calcul de*</u> I_1, I_2 <u>et</u> I_3 :

$$I_1 = \int_{1B \oplus_p \mu C} |\langle x_1, y_1\rangle|^2 dy_1 dy_2 = \mathrm{Vol}(\mu C).\int_{\lambda B} |\langle x_1, y_1\rangle|^2 \left(1 - \frac{||y_1||_B^p}{\lambda^p}\right)^{\frac{n-K}{p}} dy_1$$

$$= \mathrm{Vol}(\mu C).\lambda^{K+2}.\int_B ||x_1, y_1||^2 (1 - ||y_1||_B^p)^{\frac{n-K}{p}} dy_1 .$$

Or, $\mathrm{Vol}(C) = 1$, donc :

$$I_1 = \lambda^{K+2}.\mu^{n-K}.\int_B ||x_1, y_1||^2 (1 - ||y_1||_B^p)^{\frac{n-K}{p}}.dy_1$$

$$= \lambda^{K+2}.\mu^{n-K}.KV_K.\int_{S_{K-1}} \int_0^{\frac{1}{||y_1||_B}} (1 - \rho^p ||y_1||_B^p)^{\frac{n-K}{p}}.\rho^{K+1}.|\langle x_1, y_1\rangle|^2.d\rho d\sigma(y_1)$$

on pose $t = \rho ||y_1||_B$, on obtient alors :

$$I_1 = \lambda^{K+2}.\mu^{n-K}.KV_K\left(\int_{S_{K-1}} \frac{|\langle x_1, y_1\rangle|^2}{||y_1||_B^{K+2}}.d\sigma(y_1)\right).\int_0^1 (1-t^p)^{\frac{n-K}{p}}.t^{K+1}.dt$$

or, B est istrope, donc :

$$K.V_K \int_{S_{K-1}} \frac{|\langle x_1, y_1\rangle|^2}{||y_1||_B^{K+2}}.d\sigma(y_1) = (k+2).\int_B |\langle x_1, y_1\rangle|^2.dy_1 = (K+2)L_B^2 |x_1|^2.$$

D'autre part :

$$\int_0^1 (1-t^p)^{\frac{n-K}{p}} t^{K+1} dt = \frac{1}{p} \frac{\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K+2}{p})}{\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)} .$$

Donc

$$I_1 = |x|_1^2 . \frac{\lambda^{K+2}\mu^{n-K}\Gamma(\frac{K+2}{p}+1)\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)L_B^2}{\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)} .$$

Vu les rôles symétriques joués par B et C, on obtient de la même façon

$$I_2 = |x_2|^2 . \frac{\lambda^{K}\mu^{n-K+2}\Gamma(\frac{K}{p}+1)\Gamma(\frac{n-K+2}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n+2}{p}+1)} L_C^2 .$$

Calcul de I_3 :

$$I_3 = \int_{\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C} \langle x_1,y_1\rangle\langle x_2,y_2\rangle dy_1 dy_2$$

$$= \lambda^{K+1}\mu^{n-K+1}\int_{B \underset{p}{\oplus} C} \langle x_1,y_1\rangle\langle x_2,y_2\rangle dy_1 dy_2$$

$$= \lambda^{K+1}\mu^{n-K+1}\frac{\Gamma(\frac{K+1}{p}+1)\Gamma(\frac{n-K+1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}\int_B \langle x_1,y_1\rangle dy_1 . \int_C \langle x_2,y_2\rangle dy_2 .$$

Or B et C sont symétriques donc $I_3 = 0$.

En résumé, on a pour tout $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{n-K}$.

$$\int_{\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C} |\langle x,y\rangle|^2 dy = I_1 + I_2$$

$$= |x_1|^2 J_1 + |x_2|^2 J_2 ,$$

où $I_1 = |x_1|^2 J_1$ et $I_2 = |x_2|^2 J_2$.

On en déduit, si $\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C$ est isotrope, que $J_1 = J_2$.

Autrement dit, il faut que λ et μ vérifient la relation suivante :

$$(**) \qquad \lambda^2 \Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K+2}{p}+1)L_B^2 = \mu^2 \Gamma(\frac{n-K+2}{p}+1)\Gamma(\frac{K}{p}+1)L_C^2 .$$

En combinant les relations (*) et (**), on trouve

$$(***) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu^n = (\frac{L_B}{L_C})^K \left[\left(\frac{\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K+2}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n-K+2}{p}+1)\Gamma(\frac{K}{p}+1)} \right) \right]^{k/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K}{p}+1)} \\ \text{et} \\ \lambda^n = (\frac{L_C}{L_B})^{n-K} \left[\left(\frac{\Gamma(\frac{K}{p}+1)\Gamma(\frac{n-K+2}{p}+1)}{\Gamma(\frac{K+2}{p}+1)\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)} \right) \right]^{\frac{n-K}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}{\Gamma(\frac{K}{p}+1)\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)} \end{array} \right. .$$

De plus, la constante d'isotropie de $\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C$ est donnée par

$$L^n_{\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C} = L_B^K . L_C^{n-K} \left[\frac{(\Gamma(\frac{K+2}{p}+1)^K \Gamma(\frac{n-K}{p}+1)(\Gamma(\frac{K}{p}+1)\ (\frac{n-K+2}{p}+1))^{n-K}}{(\Gamma(\frac{n+2}{p}+1))^n} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n-K}{p}+1)\Gamma(\frac{K}{p}+1)} \right)$$

Corollaire II.4b.2.-

Il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, il existe une boule isotrope D de volume 1 et un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\mathrm{Vol}(D \cap H) < 1.$$

Démonstration :

Soit D une boule isotrope de volume 1 de type $\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C$, où C est une boule isotrope de volume 1 de $\mathbb{R}^{n-1}$. B est le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $p \in [1,+\infty]$.

Si on note H l'hyperplan vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, alors, on obtient :

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C \cap H) = \mu^{n-1}.$$

Puisque $\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C$ est isotrope et de volume 1, on déduit de la proposition précédente que :

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C \cap H) = \left[\frac{L_B}{L_C} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{n-1}{p}+1)\Gamma(\frac{3}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{p}+1)\Gamma(\frac{1}{p}+1)}\right)^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}{\Gamma(\frac{1}{p}+1)\Gamma(\frac{n-1}{p}+1)}\right]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Or, on a posé $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc $L_B^2 = \frac{1}{12}$.

On sait que $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\Gamma(\frac{n-1}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{p}+1)}\right)^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}{\Gamma(\frac{n-1}{p}+1} = 1,$$

donc pour $\varepsilon > 0$ donné il existe un entier α tel que pour tout $n > \alpha$, on ait :

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C \cap H) < \frac{1}{2\sqrt{3}L_C} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{p}+1)}{\Gamma(\frac{1}{p}+1)^3}\right)^{1/2}(1+\varepsilon) \quad .$$

D'autre part, si on prend $C = \frac{((n-1)!)^{\frac{1}{n-1}}}{2} b^1_{n-1}$, on montre, en utilisant,la proposition II.4.1 que, pour $\varepsilon' > 0$ donné, il existe un entier β, tel que pour tout $n \geqslant \beta$, on ait :

$$L_C^2 > \frac{1}{2e}(1-\varepsilon')^2 \; .$$

On en déduit que pour $\varepsilon'' > 0$ donné, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C \cap H) \leqslant \sqrt{\frac{e}{6}} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{p}+1)}{\Gamma(\frac{1}{p}+1)^3}\right)^{1/2}(1+\varepsilon'') \quad .$$

Or $\mathrm{Vol}(b_n^p) = \dfrac{(2\Gamma(\frac{1}{p}+1))^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$, donc l'inégalité au-dessus s'écrit comme suit :

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C \cap H) \leqslant \sqrt{\frac{e}{3}}\,(\mathrm{Vol}(b_3^p))^{-1/2}(1+\varepsilon'') \; .$$

Puisque $\mathrm{Vol}(b_n^p)$ est une fonction croissante en p, en prenant $p \geqslant 2$, on obtient alors

$$\mathrm{Vol}(\lambda B \underset{p}{\oplus} \mu C \cap H) \leq \sqrt{\frac{e}{3}} . (\mathrm{Vol}(b_3^2))^{-1/2}(1+\varepsilon'')$$

$$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{\pi}} (1+\varepsilon'').$$

En choisissant ε'' de telle sorte que $(1+\varepsilon'') < 2 \sqrt{\frac{\pi}{e}}$, on obtient le résultat souhaité.

Remarque :

Le corollaire II.4b.1 est un contre-exemple de la conjecture suivante :

$$(*) \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall B \in A_n & \text{et pour tout hyperplan } H \text{ de } \mathbb{R}^n \\ \text{on ait} \quad \mathrm{Vol}(B \cap H) \geq 1 \end{cases}$$

où A_n est l'ensemble des boules isotropes, de $\mathbb{R}^n$, de volume 1.

Par contre, M. MEYER et A. PAJOR [11] ont montré que l'assertion (*) est vraie pour les boules b_n^p, où $p \geq 2$.

En fait, ils ont montré que pour tout sous-espace F de codimension K de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{Vol}(\tilde{b}_n^p \cap F) \geq 1 ,$$

où $\tilde{b}_n^p = [\mathrm{Vol}(b_n^p)]^{-V_n} . b_n^p$ et $p \geq 2$.

CHAPITRE V

INEGALITES DE SANTALO ET ELLIPSOIDE DE MILMAN POUR LES ESPACES 1-INCONDITIONNELLES.

On se propose de donner une démonstration simple, du théorème de MILMAN [12] et des inégalités faibles de SANTALO [16], pour les espaces de Banach de dimension finie possèdant une base 1-inconditionnelle.

Rappelons les résultats généraux en question :

Définition *II.5.1.-*

On dit que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base 1-inconditionnelle d'un espace de Banach $E = (\mathbb{R}^n, \|\ \|)$, si pour tous choix de signes ε_i, pour tous x_i scalaires, et pour tous m et K entiers vérifiant $m \leq K \leq n$, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i e_i\right\| ,$$

et

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{K} x_i e_i\right\| .$$

Théorème de Milman II.5.2. [12]

Il existe une constante universelle $c > 0$, vérifiant : pour tout espace de Banach $E = (\mathbb{R}^n, \|\ \|)$, de dimension n, il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ tel que

$$\mathrm{Vol}(B) = \mathrm{Vol}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(\mathcal{E} \cap B) \geqslant C^n\, \mathrm{Vol}(B),$$

où B est la boule unité de E.

Inégalités de Santalo II.5.3. [16]

Il existe une constante universelle $c > 0$, telle que, pour tout espace de Banach $E = (\mathbb{R}^n, \|\ \|, |\ |)$, de dimension n, on ait :

$$C^n [\mathrm{Vol}(b_n^2)]^2 \leqslant \mathrm{Vol}(B)\mathrm{Vol}(B^*) \leqslant [\mathrm{Vol}(b_n^2)]^2 ,$$

où B^* est le polaire de la boule unité B, de E par rapport à la structure canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $b_n^2 = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leqslant 1\}$.

Nous démontrons le théorème de Milman pour un espace à base 1-inconditionnelle et pour ces mêmes espaces, une inégalité faible de Santalo :

$$C^n\, \mathrm{Vol}(b_n^2)^2 \leqslant \mathrm{Vol}(B)\mathrm{Vol}(B^*) \leqslant C'^n \mathrm{Vol}(b_n^2)^2 .$$

Dans le cas d'un espace de Banach quelconque, l'inégalité de droite (avec la constante $C' = 1$) est dite inégalité de Santalo, et est due à SANTALO [16] (cf. aussi J. Saint Raymond). Celle de gauche, dite inégalité de Santalo inverse, est beaucoup plus délicate, et est due à BOURGAIN et MILMAN [4].

Lemme de Lozanovski II.5.4.-

Soit E un espace de Banach de dimension n. On suppose que E admet une base $(e_1,\dots,e_n)$ normalisée et 1-inconditionnelle.

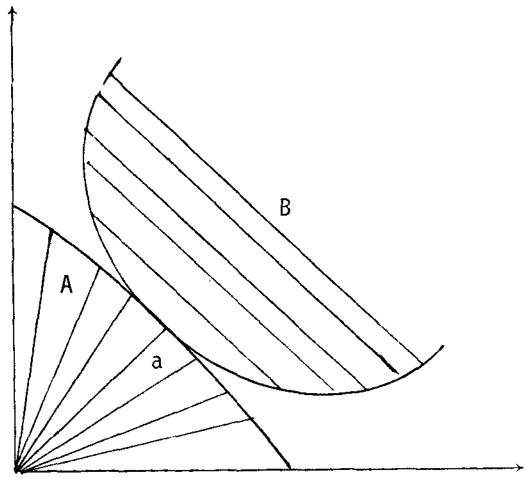
Alors, il existe un élément $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ de E tel que :

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| = 1, \quad \|\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i^*}{a_i}\| = n \quad \text{et} \quad a_i > 0 \text{ pour tout } i.$$

Démonstration :

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et soit $co(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \; ; \; \varepsilon_i = \pm 1)$ l'enveloppe convexe des 2^n vecteurs $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i \; ; \; \varepsilon_i = \pm 1$.

Comme $Vol(co(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i, \varepsilon_i = \pm 1)) = 2^n \prod_{i=1}^{n} |x_i|$ est une fonction continue sur E, $Max\{Vol(co(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i e_i, \varepsilon_i = \pm 1))$ tel que $\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| = 1\}$ existe et est atteint en un point $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, et on peut supposer $a_i \geq 0$, $\forall\, i = 1,\dots,n$ car $(e_i)_{i=1}^{n}$ est 1-inconditionnelle.



Définissons 2 sous-ensembles A et B de E par :

$$A = \{x \in E \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ 0 < x_i \ \forall x \text{ et } \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| > 1$$

et $$B = \{x \in E \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ 0 < x_i \ \forall i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i}{a_i} \geq 0\}.$$

Il est clair que A et B sont convexes et disjoints dans E ; de plus, A est ouvert. D'après le théorème de Hann-Banach, il existe une forme linéaire ℓ sur E non nulle, et λ un scalaire de $\mathbb{R}$ tels que :

$$\ell(x) < \lambda \leq \ell(y), \quad \forall (x,y) \in A \times B.$$

La base $(e_i)_{i=1}^n$ étant 1-inconditionnelle, la norme de ℓ dans le dual de E est donnée par :

$||\ell||_* = \mathrm{Sup}\{|<\ell,x>|/x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ 0 \leqslant x_i \ \forall\, i = 1,\dots,n \ \text{ et } \ ||x|| \leqslant 1\}$

$= \mathrm{Sup}|<\ell,x>|/x \in \bar{A}\}$, où $\bar{A}$ est l'adhérence de A.

Par suite, $0 \leqslant \ell(x) \leqslant \lambda$ pour tout x appartenant à $\bar{A}$.
Comme a appartient à la fois à $\bar{A}$ et $\bar{B}$, on voit que $||\ell||_* = \ell(a) = \lambda$.
D'autre part, la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Log}\,\frac{x_i}{a_i}$ est différentiable sur l'ensemble $\{x \in E/x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ ; \ 0 < x_i \ \forall\, i = 1,\dots,n\}$.

L'hyperplan $\ell(x) = \lambda$ est donc tangent en a à f la surface $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Log}\,\frac{x_i}{a_i} = 0$, et ℓ est proportionnelle à la différentielle de f en a.

Donc $\ell = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i^*}{a_i}$ où $\mu \in \mathbb{R}^*$.

Or $\ell(a) = \lambda = ||\ell||_*$; on en déduit que $||\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i^*}{a_i}|| = n$. ∎

Conséquence II.5.5.-

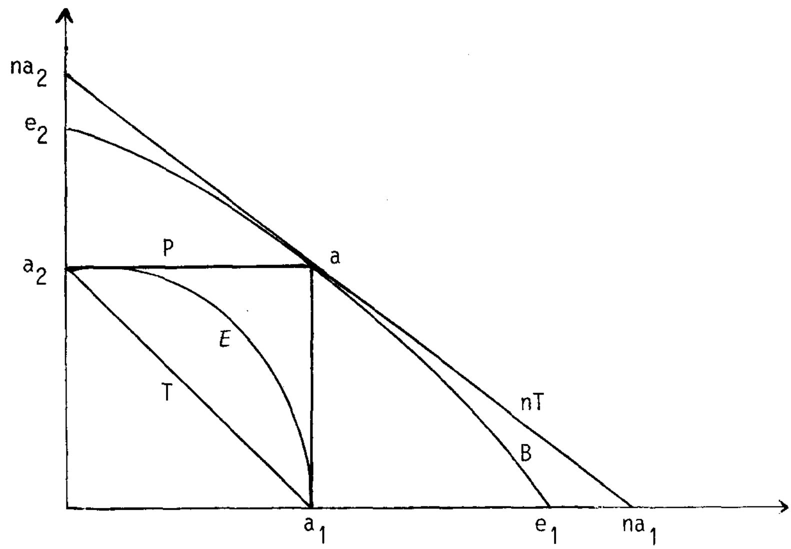
Soit $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ le point donné par le lemme II.5.4 et B la boule unité donné par $B = \{x \in \mathbb{R}^n/||x|| \leqslant 1\}$.

Définissons les ensembles suivants :

$$T = \mathrm{co}\{\varepsilon_i a_i e_i \ ; \ \varepsilon_i = \pm 1, \ i = 1,\dots,n\}$$

$$= \{x \in E/x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \leqslant 1\}$$

$$P = \mathrm{co}\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i e_i \ ; \ \varepsilon_i = \pm 1\} \quad .$$



Alors, il est aisé de voir qu'on a les inclusions suivantes :

$$T \subset E \subset P \subset B \subset nT.$$

La dernière inclusion résulte directement du lemme précédent.

De l'égalité $\|\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} e_i^*\| = n$, on déduit que pour tout $x \in B$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et pour tout choix de signe $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ on a $|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i^{-1} x_i| \leqslant n$.

On peut donc choisir les ε_i pour que :

$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i a_i^{-1} \leqslant n$ et $0 \leqslant \varepsilon_i x_i$.

Donc $x = n \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i a_i^{-1} (\varepsilon_i a_i e_i)$; donc $\frac{x}{n}$ est une combinaison convexe des vecteurs 0 et $\varepsilon_i a_i e_i$. On voit, de plus, que l'on a $P \subset \sqrt{n}\, E$.

On gardera les mêmes notations que précédemment pour énoncer la proposition suivante :

Proposition II.5.6.-

(1) $\mathrm{Vol}(nT) \leq e^n \mathrm{Vol}(P)$

(2) $\mathrm{Vol}(\sqrt{n}E) \leq (\frac{e\pi}{2})^{n/2} \mathrm{Vol}(P)$.

Démonstration :

. *Preuve de l'inégalité (1).*

On a : $$\frac{\mathrm{Vol}(p)}{\mathrm{Vol}(nT)} = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} a_i}{\frac{n^n 2^n}{n!} \prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{n!}{n^n} .$$

Si on pose $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}$, avec $\Gamma(n+1) = n!$

On sait que $\Psi(x)$ est compris entre 1 et $\dfrac{e}{\sqrt{2\pi}}$, pour tout x tel que $2x$ est un entier.

On déduit donc que $\mathrm{Vol}(P) \geq e^{-n} \mathrm{Vol}(nT)$.

. *Preuve de l'inégalité (2).*

On a : $$\frac{\mathrm{Vol}(\sqrt{n}E)}{\mathrm{Vol}(P)} = \frac{n^{n/2} \prod_{i=1}^{n} a_i \, V_n}{2^n \prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{n^{n/2} \pi^{n/2}}{2^n \, (\frac{n}{2}+1)} .$$

D'après ce qui précède, on a

$$\mathrm{Vol}(\sqrt{n}\mathcal{E}) \leqslant \left(\frac{e\pi}{2}\right)^{n/2} \mathrm{Vol}(P).$$

Théorème II.5.7.-

Il existe une constante numérique positive $C > 0$, telle que pour tout espace de Banach E, de dimension n, qui admet une base normalisée et 1-inconditionnelle, il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$, vérifiant :

$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}) = \mathrm{Vol}(B)$ et $\mathrm{Vol}(B \cap \mathcal{E}) \geqslant C^n \, \mathrm{Vol}(B)$ où B est la boule unité de E.

Un tel ellipsoïde est dit "ellipsoïde de Milman". La preuve de son existence pour tout Banach de dimension finie (avec une constante universelle) est nettement plus délicate et est due à MILMAN [12].

Démonstration :

L'ellipsoïde précédemment défini dans II.5.5 vérifie :

$$T \subset \mathcal{E} \subset P \subset B \subset nT \quad \text{et} \quad P \subset \sqrt{n}\mathcal{E}.$$

On prend comme ellipsoïde de Milman $\mathcal{E}_1 = \sqrt{n}\mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(\sqrt{n}\mathcal{E})}\right)^{1/n}$;

donc $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_1) = \mathrm{Vol}(B)$.

On a par ailleurs $\frac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{vol}(\sqrt{n}\mathcal{E})} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(nT)}{\mathrm{Vol}(P)} \leqslant e^n$ d'après la proposition,

et $\frac{\mathrm{Vol}(B)}{\mathrm{Vol}(\sqrt{n}\mathcal{E})} \geqslant \frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{Vol}(\sqrt{n}\mathcal{E})} \geqslant \left(\frac{2}{2\pi}\right)^{n/2}$.

Donc $\qquad (\frac{2}{e\pi})^{1/2}\sqrt{n}E \subset E_1 \subset e\sqrt{n}E$.

On a, alors :

$$\mathrm{Vol}(B \cap E_1) \geq \mathrm{Vol}(B \cap \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\,\sqrt{n}E) = (\frac{2}{e\pi})^{n/2}\,\mathrm{Vol}(\sqrt{\frac{e\pi}{2}}\,B \cap \sqrt{n}E).$$

De $\sqrt{\frac{e\pi}{2}} \geq 1$, on déduit : $\mathrm{Vol}(B \cap E_1) \geq (\frac{2}{e\pi})^{n/2}\,\mathrm{Vol}(B \cap \sqrt{n}E) \geq (\frac{2}{e})^{n/2}\,\mathrm{Vol}(P)$

car $P \subset B$ et $P \subset \sqrt{n}E$.

Or, on a $\mathrm{Vol}(P) \geq e^{-n}\,\mathrm{Vol}(nT) \geq e^{-n}\,\mathrm{Vol}(B)$.

Donc $\mathrm{Vol}(B \cap E_1) \geq (\frac{2}{e^3\pi})^{n/2}\,\mathrm{Vol}(B)$ et $\mathrm{Vol}(B) = \mathrm{Vol}(E_1)$.

Théorème II.5.8.-

Il existe deux constantes numériques C_1 et $C_2 > 0$, telles que pour tout espace de Banach $E = (\mathbb{R}^n, \|\ \|, |\ |)$, de dimension n, possèdant une base $(e_1,\dots,e_n)$ normalisée et 1-inconditionnelle, on ait

$$C_1^n\,\mathrm{Vol}(b_n^2)^2 \leq \mathrm{Vol}(B)\mathrm{Vol}(B^*) \leq C_2^n\,\mathrm{Vol}(b_n^2)^2 ,$$

où B^* est le polaire de la boule unité B de E, par rapport à b_n^2 et $b_n^2 = \{x \in R^n,\ |x| \leq 1\}$.

Démonstration :

Soit $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ le vecteur de norme 1 qui vérifie le lemme de Lozanovski II.5.4.

On définit l'opérateur u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, défini par :

$$e_i \longmapsto a_i e_i .$$

Donc les ensembles T, E, P définis dans (II.5.5) peuvent se mettre sous la forme : $T = u(b_n^1)$, $E = u(b_n^2)$ et $P = u(b_n^\infty)$, où $b_n' = \{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} |x_1| \leq 1\}$, b_n^2 est la boule euclidienne et $b_n = [-1,1]^n$.

D'après la conséquence (II.5.5),

$$b_n' \subset b_n^2 \subset b_n^\infty \subset u^{-1}(B) \subset nb_n' .$$

En dualisant ces inclusions par rapport à b_n^2, on obtient :

$$\frac{b_n^\infty}{n} \subset [u^{-1}(B)]^* \subset b_n' \subset b_n^2 \subset b_n^\infty .$$

Donc, on a :

$$\mathrm{Vol}(u^{-1}(B)).\mathrm{Vol}([u^{-1}(B)]^*) \leq \mathrm{Vol}(b_n').\mathrm{Vol}(nb_n'),$$

et $$\mathrm{Vol}(u^{-1}(B)).\mathrm{Vol}([u^{-1}(B)]^*) \geq \mathrm{Vol}(b_n).\mathrm{Vol}(\tfrac{1}{n}\, b_n^\infty).$$

Or, on sait que $[u^{-1}(B)]^* = u^*(B^*)$, donc

$\mathrm{Vol}(u^{-1}(B)).\mathrm{Vol}([u^{-1}(B)]^*) = \mathrm{Vol}(B).\mathrm{Vol}(B^*)$.

On en déduit que :

$$\frac{\mathrm{Vol}(b_n^\infty)^2}{n^n} \leq \mathrm{Vol}(B).\mathrm{Vol}(B^*) \leq n^n\, \mathrm{Vol}(b_n')^2.$$

Par un calcul similaire à celui de la proposition II.5.6, on trouve enfin

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{n/2} \mathrm{Vol}(b_n^2)^2 \leq \mathrm{Vol}(B).\mathrm{Vol}(B^*) \leq e^{2n}\, \mathrm{Vol}(b_n^2)^2 . \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAPHIE

****

[1] BALL K. - Cube slicing in $\mathbb{R}^n$.
Math. 97 (1986), p. 465-473.

[2] BALL K. - Section of convexe sets in $\mathbb{R}^n$.
Preprint.

[3] BOURBAKI - Livre 3, chapitre II, p. 114-115.

[4] BOURGAIN J. - On High Dimensional Maximal Functions Associated to convex bodies.
Israël.

[5] BOURGAIN J. et MILMAN V.D. - On Mahler's conjecture on the volume of a convex symmetric body and its polar.
Inventiones (1987).

[6] HENSLEY D. - Slicing the cube in $\mathbb{R}^n$ and probability.
Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), p. 95-100.

[7] HENSLEY D. - Slicing convex bodies-bounds for slice area in term of the body's covariance.
Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), p. 619-625.

[8] KONING H. et MILMAN V.D. -
GAFA, Israël seminar, to appear in Lecture Note, 1986-87.

[9] LARMAN D.G. et ROGERS C.A. - The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small.
Mathematika 22 (1975), p. 164-175.

[10] LOOMIS L.M. et WHITNEY H. - An inequality related to the isoperimetric inequality.
Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), p. 961-962.

[11] MEYER M. et PAJOR A. - Sections of the unit ball of b_n^p.
Preprint.

.../...

[12] MILMAN V.D. - An inverse form of the Brunn-Minkowski inequality with applications to local theory of normed spaces.
Preprint, C.R.A.S.

[13] MILMAN V.D. et PISIER G. - Banach spaces with a weak cotype 2-property.
Israël Journal of Math. (1986).

[14] PIETSCH A. - Absolut p-sommienende. Abbildunger in normierten Räumen Studia Math. 28 (1966/67), p. 333-353.

[15] SAINT RAYMOND J. - Le volume des idéaux d'opérateurs classiques.
Studia Mathematica (1984), p. 63-75.

[16] VAALER J.D. - A geometric inequality with applications to linear forms.
Pacific Journal Math. 83 (1979), p. 543-553.

SECTION DE SCIENCES LILLE

036 115 568

RÉSUMÉ

Le premier objet de ce travail est une majoration de la mesure du volume des sections du cube de $\mathbb{R}^n$, par des sous-espaces de codimension K.

Le cas des hyperplans a été traité par K. Ball.

Nous améliorons la majoration naturelle obtenue dans le cas général quand $2K \leq n$.

La méthode consiste à étendre celle de K. Ball, par transformation de Fourier et conclure par un calcul de déterminant.

L'étude de quelques exemples suggère que si $2K \leq n$, la majoration est $\sqrt{2}^K$.

Nous étudions ensuite les sections d'une boule B, de volume 1, isotrope, c'est-à-dire que la matrice d'inertie est scalaire.

Si on note L_B^2 le coefficient diagonal de cette matrice, D. Hensley et K. Ball ont démontré que pour tout sous-espace F, de codimension K

$$a \leq L_B^K \text{ mesure } (F \cap B) \leq b_K.$$

Nous étudions alors la conjecture selon laquelle L_B serait borné par une constante universelle.

Nous donnons différentes assertions équivalentes à cette conjecture (par exemple : $\exists \alpha > 0$: $\forall n$, $\forall$ B boule, de volume 1, de $\mathbb{R}^n$, $\exists$ H, hyperplan tel que mesure $(B \cap H) > \alpha$).

Nous démontrons que certaines catégories de boules, présentant des propriétés géométriques particulières vérifient cette conjecture.

Enfin, nous évaluerons la valeur de L_B pour certains espaces classiques : ℓ_n^p, C_n^p ; espaces des opérateurs T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p\right)^{1/p}$ où les (λ_i) sont les valeurs propres du module de T.

MOTS CLÉS :
- CONVEXITÉ
- ESPACES DE BANACH