

55376
1987
25
N° d'ordre : 1406

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

Le grade de Docteur de 3ème cycle
en MECANIQUE

par

BARRY El-Hadj Ibrahima

PROBLEMES PLANS EN THERMOELASTICITE LINEAIRE.

Soutenue le 26 septembre 1987

devant la Commission d'examens

Président : P.A. BOIS, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Rapporteur : F. PARSY, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

Membres : J.P. HENRY, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

R. TORGUET, Professeur, E.N.S.I.M.E.V., Université de Valenciennes
Hainaut Cambrasis.

Invité : P. DEVRAINE, Professeur à l'U.S.T.L. Flandres Artois.

SCD LILLE 1



D 030 254772 5

2231
140
92



Ce mémoire est dédié :

à mes parents,

à l'Almany Ibrahima Sory Dara,

à ma famille et à toutes les personnes
qui me sont chères.



AVANT-PROPOS

Ce travail a été fait au Laboratoire de Mécanique fondamentale de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur Fernand PARSY.

C'est grâce à son soutien, à ses encouragements et à ses conseils que ce mémoire a pu être réalisé.

Qu'il trouve ici, l'expression de mes sincères remerciements.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur P.A. BOIS pour m'avoir permis de mener à bien les recherches bibliographiques et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider mon jury de soutenance.

J'adresse mes chaleureux remerciements à Monsieur le Professeur Jean-Pierre HENRY, Directeur du Laboratoire du Génie-Civil de l'E.U.D.I.L. qui, malgré son activité scientifique intense, a accepté de juger mon travail et de faire partie de mon jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur Roger TORQUET, Directeur de l'E.N.S.I.M.E.V., Professeur à l'Université de Valenciennes, Hainaut-Cambresis, pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je voudrais aussi que ce mémoire soit le témoignage de ma reconnaissance envers Monsieur Pierre DEVRAINE, Professeur de Chimie à Lille I, dont la présence à cette soutenance témoigne de son attachement à ses anciens étudiants.

Je tiens à remercier les personnels des bibliothèques des Universités de Lille I et de Valenciennes pour leur collaboration à la recherche bibliographique.

J'adresse mes remerciements au personnel du service de la reprographie pour la qualité de son travail.

Je remercie mes collègues et amis de l'équipe de Mathématiques et de Mécanique fondamentale pour leur amicale collaboration et plus particulièrement ABDELATIF, MICHEL, BAZINE, GARA, BOUDDLAL, HAFID et MUHE ; à tous ceux qui ont

II

participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

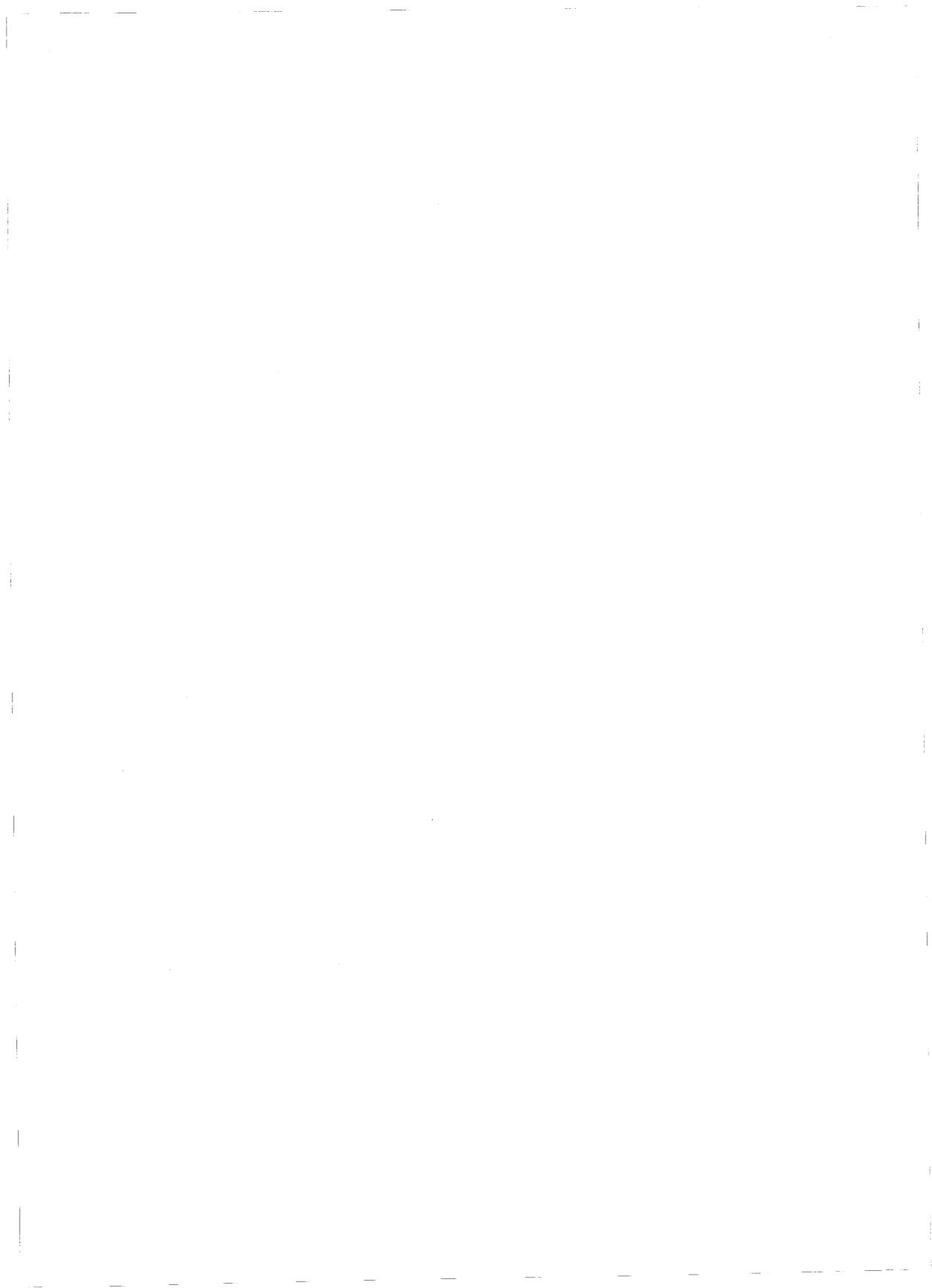
J'exprime enfin, mes sentiments de reconnaissance à Madame Françoise PÉTIAUX qui a eu le rôle ingrat, mais combien nécessaire de dactylographier ce mémoire.

SOMMAIRE

<u>INTRODUCTION</u>	
<u>CHAPITRE I : ASPECTS GEOMETRIQUES DE LA DEFORMATION D'UN CORPS ELASTIQUE</u>	6
I.1 : Hypothèses générales et position du problème.....	6
I.2 : Tenseur des déformations.....	7
I.3 : Eléments de déformation.....	9
I.4 : Tenseur des déformations.....	12
I.5 : Déplacement rigide superposé à $\Phi(\Omega)$	14
I.6 : Déplacement rigide infinitésimal superposé à $\phi(\Omega)$	16
<u>CHAPITRE II : ASPECTS THERMOMECHANIQUES</u>	17
II.1.1 : Les équations d'équilibre.....	17
II.1.2 : Milieu thermoélastique	20
II.2.1 : Rappels et définitions.....	20
II.2.2 : Processus thermodynamique admissible.....	21
II.2.3 : Loi de conservation de masse.	21
II.2.4 : Les équations de la dynamique.....	21
II.2.5 : Loi de conservation de l'énergie	22
II.2.6 : Restrictions imposées par le second principe	22
II.2.7 : Restrictions imposées par le principe d'objectivité	25
II.2.8 : Milieu thermoélastique homogène isotrope : Linéarisation..	27
II.3 : Relation - contrainte - déformation.....	30
II.3.1 : Tenseur de contrainte linéarisé.....	
II.3.2 : Conduction de chaleur dans un milieu non homogène	31
II.4.0 : Coefficients d'élasticité d'un milieu thermoélastique.....	33

<u>CHAPITRE III : THERMOELASTICITE PLANE</u>	37
III.1.1 : Position du problème - Equations de base	37
III.1.2 : Etat de déformation thermoélastique plane	39
III.1.3 : Etats thermoélastiques plans	43
III.1.4 : Fonction d'Airy.....	44
<u>CHAPITRE IV : FORMULATION VARIATIONNELLE ET MODELE D'EQUATIONS</u>	46
IV.1 : Formulation variationnelle	46
IV.2 : Etude d'un problème aux limites	52
IV.3 : Plaque mince thermoélastique en flexion chargée transversalement	55
IV.3.1 : Définitions et positions du problème	55
IV.3.2 : Equations approchées : modèle de Kirchoof.....	57
IV.3.3 : Relations entre les forces, les moments et les contraintes sur les bords de la plaque	58
IV.3.4 : Les équations d'équilibre	61
<u>CHAPITRE V : REPRESENTATION D'UN ETAT THERMOELASTIQUE PLAN A L'AIDE DES POTENTIELS COMPLEXES</u>	63
V.1 : Représentation et théorèmes	63
V.2 : Eléments de réduction en O d'efforts appliqués sur \overrightarrow{AB}	67
V.3 : Etude du flux de chaleur le long de \overrightarrow{AB}	69
<u>CHAPITRE VI : RESTRICTION SUR LES POTENTIELS COMPLEXES $\varphi(z), \psi(z)$ et $\chi(z)$ POUR QUE, CONTRAINTES, DEPLACEMENT ET TEMPERATURES SOIENT UNIFORMES</u>	
VI.1 : Position du problème	72
VI.2 : Comportement des contraintes et des déplacements à l'infini.	81
VI.3 : Contraintes et température bornées à l'infini	81

<u>CHAPITRE VII : APPLICATIONS</u>	85
VII.1 : Domaine plan	85
VII.2 : Plaque munie de fissures droites colinéaires	86
VII.3 : Problème mixte	91
CONCLUSION	96
ANNEXES	98
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	111



INTRODUCTION

Le thème qui fait l'objet de ce mémoire a été suggéré au laboratoire de Mécanique Fondamentale de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées par Monsieur F. PARSY, Professeur.

Il s'agit de l'étude des problèmes plans en thermoélasticité linéaire. Le but du travail proposé est d'apporter une contribution à la résolution de quelques problèmes déjà abordés mais qui continuent à susciter un intérêt scientifique grandissant.

La thermoélasticité est une discipline scientifique née au début du 19^e siècle. En effet, c'est en 1838, que DUHAMEL a étudié pour la première fois, l'influence d'un gradient de température sur un matériau élastique. Située à mi-chemin entre la physique et les mathématiques, elle est à l'heure actuelle, un domaine privilégié de recherches fondamentales et appliquées. Elle connaît un développement croissant depuis l'avènement de l'aéronautique et de l'espace. L'évolution des outils mathématiques et informatiques y ont largement contribué. Les mesures expérimentales que l'on trouve dans bon nombre d'ouvrages [11], [12] montrent que les déformations élastiques idéales à cause de leur linéarité, donne une bonne approximation du phénomène réel. En utilisant l'hypothèse de petites perturbations (H.P.P.), on obtient des systèmes d'équations aux dérivées partielles en général du type elliptique plus facile à résoudre.

Pour la résolution de telles équations, de nombreuses méthodes numériques sont envisageables en particulier, les méthodes d'homogénéisation et de différences finies.

La première consiste à approcher un milieu hétérogène par un milieu homogène "équivalent", tandis que l'intérêt théorique de la seconde méthode, est de prouver l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mathématique [11].

Toutes ces méthodes orientées et développées par des Mathématiciens-numériciens comme VEINER, Von NEUMANN, RAVIART, NOWAKI, J.L. LIONS, G. DUVAUT... ont fait la preuve de leur efficacité.

Par la méthode d'homogénéisation, G. DUVAUT [8], G. FRANCFORT [32][33] et bien d'autres ont résolu des problèmes de thermoélasticité.

Sans prétendre apporter des solutions originales et définitives au problème aussi vaste et complexe qu'est la thermoélasticité nous avons tout simplement choisi de traiter quelques exemples de problèmes plans qui nous paraissaient importants.

Le but poursuivi est, en l'absence de résultats disponibles à notre connaissance, sur les problèmes plans en thermoélasticité linéaire, de voir s'il est possible d'étendre à ce type de problèmes, des techniques qui se sont révélées fécondes en élasticité.

Après un (bref) exposé sur la théorie des déformations, les milieux thermoélastiques sont définis de manière générale, puis la loi de comportement est précisée afin de satisfaire au principe d'objectivité (ou d'indifférence matérielle). En se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations, on trouve la loi de thermoélasticité linéaire obtenue par linéarisation au voisinage d'un état sous déformation à température constante. Par le même procédé à partir d'une loi générale satisfaisant aux conditions d'isotropie, on obtient la thermoélasticité homogène et isotrope. Les problèmes aux limites de l'équilibre thermoélastique sont formulés de façon variationnelle, ce qui permet d'établir par les méthodes classiques, l'existence et l'unicité d'un état thermoélastique.

Les problèmes de thermoélasticité plane sont alors définis par leur relation avec le problème tridimensionnel et, en partant de l'utilisation de potentiels complexes en introduisant un nouveau potentiel pour la température, lequel intervient dans le déplacement, on généralise les formules de KOLOSOV-MUSHKHELISVILI.

On adapte alors, les résultats à quelques modifications près à des problèmes plans.

Quelques notations employées

Ω, ω	Domaines
$\partial\Omega, \partial\omega, \Gamma$	frontières
$\phi: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^3$	une application
$\phi(\Omega), \phi(\omega)$	sont des configurations
$J = D\phi(x) $	Jacobien
x, t	variables Lagrangiennes
X, t	variables Eulériennes
\vec{u}, \vec{u}^*	déplacements
\vec{n}, \vec{n}^*	normales unitaires
S	surface
ρ	masse volumique
z^i	coordonnées curvilignes
$\alpha_{ij}(\vec{u})$	tenseur des déformations
$M_{(sy)}(\mathbb{R})$	matrice symétrique d'ordre
\mathbb{R}^n	une variété affine
F	gradient des déformations
ψ	densité d'énergie libre
s	l'entropie
σ	tenseur de Piola-Kirchoof
\vec{q}	vecteur flux de chaleur
$\hat{\psi}, \hat{s}, \hat{\sigma}, \hat{q}$	fonctions de réponse
T_0	température initiale
T	température finale

ε_{ij} (ou $\varepsilon_{\alpha\beta}$)	tenseur des déformations
σ_{ij} (ou $\sigma_{\alpha\beta}$)	tenseur des contraintes
K (ou k)	conductibilité thermique
γ (ou γ^*)	coefficient de dilatation thermique
a_{ijkl}	coefficients d'élasticité
	tenseur du second ordre
M_{ij} (ou $M_{\alpha\beta}$)	moment résultant résultant des efforts
$w(x, x_2)$	déplacement ou flèche suivant x_3
$\frac{d\theta}{dn}, \frac{d\theta}{dn}$	dérivées normales
	c
$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{v}_A}$	conormale ou dérivées généralisée
$\varphi(z), g(z), f(z), \phi(z), \psi(z)$	fonctions potentielles complexes
$J(\ell; z)$	indice
$(\gamma), \partial\omega, \partial\omega_j, \partial z$	contour fermé simple ou lacet
ψ	fonction d'Airy
$X + iy$	résultante des forces appliquées à \overrightarrow{AB}
$M\vec{e}_3$	moment résultant des forces sur AB
A_j, B_j, B'_j	constantes complexes dépendantes du contour
$Q_j = \int_{\gamma} (J(z), z)$	flux de chaleur le long du contour
\vec{t}_3	charge transversale
$M(x)$	moment de flexion
$N_{\alpha\beta}$	tenseur des efforts résultants
Q_d	efforts tranchant
$\tilde{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	tenseur des moments résultants
	rigidité cylindrique

$$\mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\mathcal{D}'(\Omega)$$

$$L^p(\Omega)$$

$$L^2(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_V$$

$$H(\Omega)$$

$$H^1(\Omega)$$

$$H^m(\Omega)$$

$$W^{m,p}(\Omega)$$

$$\|\cdot\|_{W^{m,p}}$$

forme linéaire en théorie des distributions
ensemble des fonctions indéfiniment différentiables.

ensemble des distributions

ensemble des fonctions $p^{\text{ième}}$ intégrables/ (\mathcal{D}) .

ensemble des fonctions à carré intégrables sur (Ω)

norme définie sur V

un espace de Hilbert

un espace de Sobolev d'ordre 1

un espace de Sobolev d'ordre m

un espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$

la norme associée à $W^{m,p}$

$$D^{\alpha}$$

$$H_{p_0}^1(\Omega)$$

$$H_0^m(\Omega)$$

$$\gamma_0:$$

$$A$$

$$D_A$$

opérateur dérivation au sens des distributions

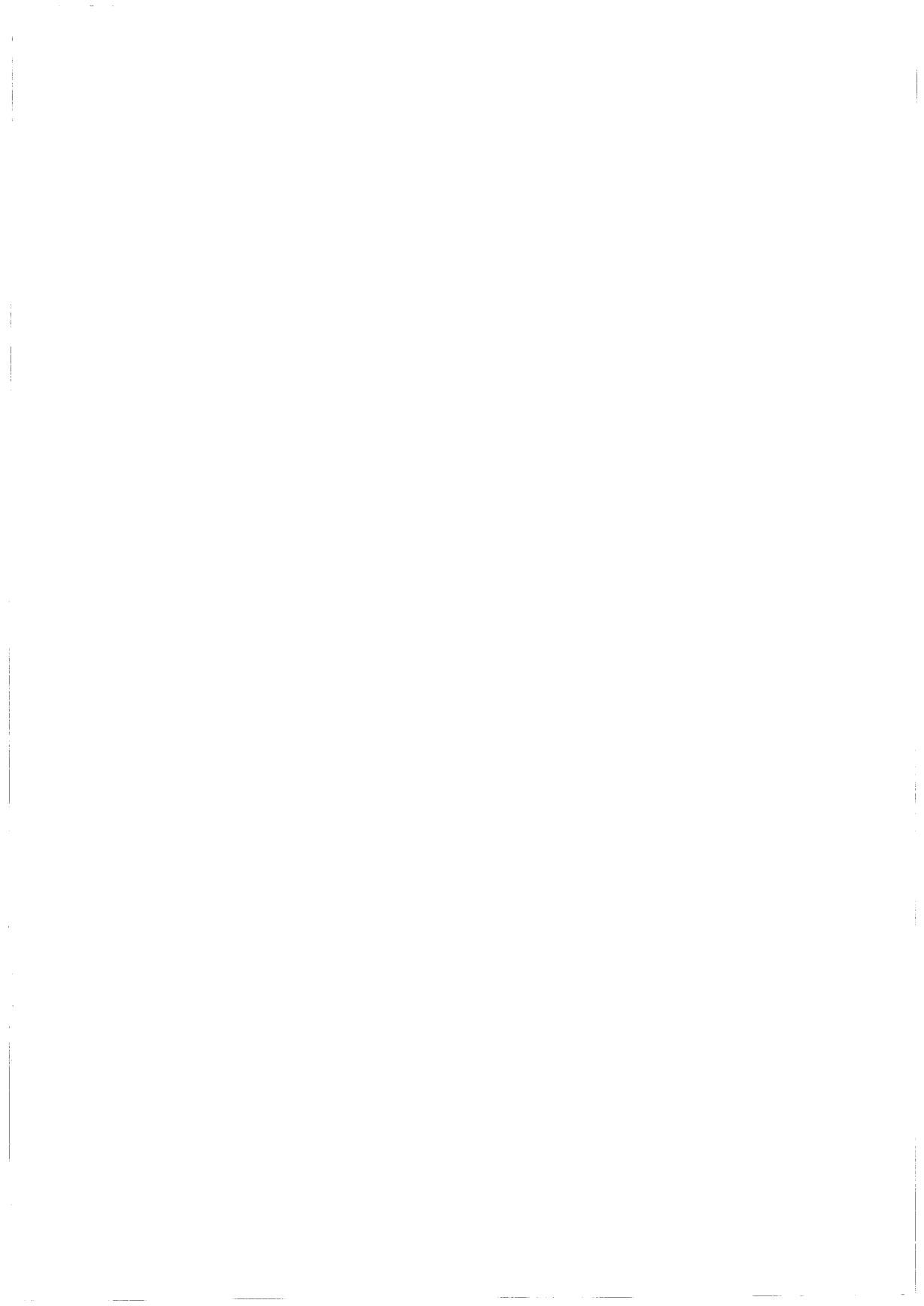
sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$

l'adhérence

une application

un opérateur différentiel

domaine de l'opérateur différentiel



CHAPITRE I

I.- ASPECTS GEOMETRIQUES DE LA DEFORMATION D'UN CORPS SOLIDE

[1], [6], [9], [17], [23].

I.1.- Hypothèses générales et position du problème

Soit un milieu continu occupant un domaine Ω de E_3 , l'espace affine E_3 de dimension 3, de frontière $\partial\Omega$, de point générique x à l'instant t .

$\bar{\Omega}$ représente la "position initiale" ou non déformée du solide déformable considéré.

Sous l'action des forces

i) de densité surfacique \vec{F} , appliquées sur une partie $\partial\Omega_F$ de $\partial\Omega$ (un champ de déplacement \vec{U}_D étant imposé sur une partie $\partial\Omega_u = \partial\Omega / \partial\Omega_F$).

ii) de densité volumique \vec{f} , appliquées à Ω , le solide Ω subit une déformation caractérisée par une application

$$(I.1.1) \quad \phi: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

On posera

$$(I.1.2) \quad \begin{aligned} \chi &= \phi(x, t) = x + \vec{u}(x, t) & i \in \{1, 2, 3\} \\ \vec{u}(x, t) &= u_i(x, t) \vec{e}_i & x \in \Omega, t > 0 \end{aligned}$$

$\vec{u}(x, t)$ représente le vecteur déplacement du point x à l'instant t , de coordonnée u^i dans la base orthonormale $(0; \vec{e}_i)$ du repère orthonormal $(0; x_1, x_2, x_3)$ auquel est rapporté x .

Définition I

Dans décrire la déformation d'un corps solide, on fait intervenir les variables de Lagrange ou les variables d'Euler. Les premières caractérisent une particule par sa position à l'instant initial $t=0$, tandis que les secondes variables, c'est-à-dire celle de Lagrange, représentent les composantes de la particule à l'instant .

I.2.- Déformation d'un solide

Pour caractériser cette déformation, on définit d'abord en tout point x de Ω , les vecteurs G_i par :

$$(I.2.1) \quad \vec{G}_i(x, t) = \frac{\partial \vec{\phi}(x, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x_i} \vec{e}_j$$

Les composantes de \vec{G}_i , sont celles du gradient F_{ij} de la déformation défini par :

$$(I.2.2) \quad F_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$$

Sur Ω , en vertu de (I.2.1) et si l'on utilise les coordonnées (x_1, x_2, x_3) , on en déduit de

$$\begin{aligned} \phi_{,k}(x) \vec{e}_k &= x_k \vec{e}_k + u_k \vec{e}_k \\ G_i(x) \vec{e}_k &= \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \vec{e}_k \end{aligned}$$

$$\partial_i \phi_k = \delta_{ik} + \partial_i u_k$$

$$(I.2.3) \quad G_{ij} = G_i \cdot G_j = \delta_{ij} + \partial_i u_j + \partial_i u_k \partial_j u_k$$

Remarques : Le principe de non interpénétrabilité de la matière postulé en Mécanique, nécessite que ϕ soit, pour tout t , un difféomorphisme global de Ω sur $\phi(\Omega; t)$ et que ϕ préserve l'orientation.

Ces hypothèses faites sur ϕ entraînent qu'en tout point x de Ω , les vecteurs $G_i(x, t)$ sont linéairement indépendants, par conséquent, que

l'espace tangent à la variété est de dimension 3, ce qui revient à dire que la matrice $\partial\phi$ (d'où la notation $\partial_i\phi_j$) qui représente l'application linéaire tangente $D\phi(x)$ dans la base $(0, \vec{e}_i)$ est une matrice inversible. D'autre part, le fait que ϕ préserve l'orientation se traduit par la condition.

$$J(x) = \text{Det}(D\phi(x)) = \text{Det}(\partial_i\phi_j), J(x) > 0$$

Condition d'existence de déformation

Définition :

$$\begin{aligned} \phi: \Omega &\longrightarrow \phi(\Omega), \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^3 \\ x &\longrightarrow X = \phi(x) \end{aligned}$$

Dans Ω , considérons deux points voisins x et y et leurs images $\phi(x)$ (resp $\phi(y)$) de $\phi(\Omega)$. Il y a déformation si,

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x, y \in \Omega, (\phi(x), \phi(y)) \in \phi(\Omega) \\ \|\phi(x) - \phi(y)\| - \|x - y\| > 0 \end{aligned}}$$

Il s'avère plus facile d'étudier cette déformation lorsque y est voisin de x i.e. $d(x, y) \rightarrow 0$. Cela conduit tout naturellement à l'étude de l'écart de l'application linéaire tangente $D\phi(x)$.

$$\phi_j(y) - \phi_j(x) = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(y_j - x_j) + o(\|y - x\|) \quad \text{soit, si}$$

$$\phi(y) - \phi(x) = D\phi(x)\xi + o(\|\xi\|)$$

De manière générale :

$$\phi(\vec{x} + h) - \phi(x) = D\phi(x)\vec{h} + o(\|\vec{h}\|)$$

$$= h_i \partial_i \phi(x) + o(\|\vec{h}\|)$$

$$\|\phi(\vec{x} + h) - \phi(x)\|^2 = h_i h_j G_{ij}(x) + o(\|\vec{h}\|^2)$$

1.3.- Eléments de déformation

1.3.1.- L'élément de longueur déformée

Soit (Γ) un arc de courbe de classe de classe \mathcal{C}^1 de Ω ,
c'est-à-dire l'image de :

$$f: [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \Omega, \text{ où } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1.$$

La longueur de l'arc (Γ) est par définition :

$$L(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt, \quad \|f'\|^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2$$

Ainsi, la longueur de l'arc déformé de (Γ) , $\phi(\Gamma)$ est alors :

$$\phi(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\phi \circ f'\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G_{ij}(f(t)) f_i'(t) f_j'(t)} dt$$

1.3.2.- L'élément de volume déformé

Pour tout $x \in \Omega$, l'élément de volume dx au point $x = \phi(x)$,
 $\phi(x) \in \phi(\Omega)$, se déduit de l'élément de volume dx au point x par :

$$dx = |(\vec{G}_1(x), G_2(x) \wedge G_3(x))| dx = |\det(D\phi(x))| dx = J(x) dx$$

si l'on pose :

$$G(x) = \det(G_{ij}(x))$$

on a la relation :

$$J(x) = \sqrt{G(x)}$$

On a donc finalement :

$$(I.3.2.1) \quad dx = \sqrt{G(x)} dx$$

1.3.2.- L'élément de surface déformé

Soit (ω) une surface de \mathbb{R}^3 , difféomorphe d'un ouvert de \mathbb{R}^2 telle que, il existe un vecteur normal $\vec{N}(x)$ en tout point x de (ω) , $\|\vec{N}\| = 1$.

Si $dS_0(x)$ désigne la mesure induite sur (ω) par la mesure de LEBESGUE de \mathbb{R}^3 , on a :

si $x = x(u, v) = x_i(u, v)e_i$, $x_i(u, v)e_i \in (\omega)$.

$(u, v) \in I$, un ouvert de \mathbb{R}^2 auquel (ω) est difféomorphe.

$$(I.3.2.1) \quad \vec{N} dS_0 = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) du dv$$

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial v} \right) \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\|^{-1}$$

En $X(u, v) \in \hat{\omega}$, on a $\phi(x(u, v)) \in \phi(\hat{\omega}) \subset \phi(\Omega)$

Si on pose :

$$X = \phi(x(u, v)) \text{ alors,}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u} = G_i(x) \frac{\partial x_i}{\partial u}, \text{ d'où :}$$

$$\vec{N} dS = \left(G_i(x) \wedge G_j(x) \right) \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial v} du dv$$

En multipliant par G et en généralisant le résultat, on obtient :

$$\sum_k G_{pk} ds = G(x) N_p ds_0$$

Si l'on introduit les notations :

$$G_i^p G_{pk} = \delta_{ik} \quad \text{et} \quad G^{ip} = (\vec{G}(x) \cdot \vec{G}^p(x))$$

et , on trouve :

$$\vec{G}_i(x) \cdot \vec{G}_j(x) = \delta_j^i$$

$$\vec{n} \cdot ds = G(x) (G^{ip} N_p) \vec{e}_i ds_0$$

Si on pose $ds = d\Gamma(x)$ et $ds_0 = d\gamma(x)$, cela permet d'obtenir :

$$n d\Gamma(x) = G(x) (G^{ip} N_p) \vec{e}_i d\gamma(x)$$

Introduisons le vecteur \vec{n}_\perp qui est normal à (ω) en tel que :

$$(I.3.2.2) \quad \vec{n}_\perp(x) = \eta_k \partial_p \phi_k \vec{e}_p = {}^T D\phi(x) (\vec{n}(x))$$

Ce vecteur a le même sens que $N(x)$ car ϕ conserve l'orientation, donc :

$$\vec{N}(x) = \frac{\vec{n}_\perp}{\|\vec{n}_\perp\|}$$

et d'autre part d'après ([3.2.2]).

$$\vec{n}_\perp d\Gamma(x) = \det(\phi_k) \frac{\vec{n}_\perp}{\|\vec{n}_\perp\|} d\gamma(x)$$

$$d\Gamma(x) = \frac{\sqrt{G(x)}}{\|\vec{n}_\perp\|} d\gamma(x) = \frac{J(x)}{\|\vec{n}_\perp\|} d\gamma(x)$$

En élevant au carré $\vec{n} d\Gamma(x)$ et en faisant sommation par rapport à i , on trouve

$$d\Gamma(x) = G(x) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^3 (G^i p(x) N_p(x))^2} \cdot d\gamma(x)$$

Considérons $\rho_0(x)$ comme densité volumique de masse au point $x \in \Omega$ et $\rho(x, t)$ celle au point $X = \Phi(x, t)$ de $\Phi(\Omega, t)$. La conservation de la masse d'un volume arbitraire \mathcal{V}_0 de Ω que l'on suit dans la déformation s'écrit en variables Lagrangiennes.

$$\mathcal{V}_0 \subset \Omega, \quad \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0(x) dV = \int_{\Phi(\mathcal{V}_0, t)} \rho(x, t) dV(x) = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(x, t) \sqrt{G(x, t)} dV(x)$$

d'où finalement

$$\rho(x, t) \sqrt{G(x, t)} = \rho_0(x)$$

1.4.- Tenseur des déformations

En vertu de (I.2.3) on a la relation suivante :

$$G_{ij}(x) = \delta_{ij} + 2 \varepsilon_{ij}(\vec{u}) + \partial_i u_k \cdot \partial_j u_k = \delta_{ij} + 2 \gamma_{ij}(\vec{u})$$

qui permet de définir classiquement les quantités $\varepsilon_{ij}(\vec{u})$ et $\gamma_{ij}(\vec{u})$ appelées tenseurs de

(1.4.1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad i, j = 1, 2, 3 \\ \gamma_{ij}(\vec{u}) &= \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \cdot \partial_j u_k) \\ G_{ij}(x) &= \delta_{ij} + 2 \gamma_{ij}(\vec{u}) \end{aligned}$$

Les équations (I.4.1) représentent un modèle non linéaire des plaques minces, homogènes et isotropes en coordonnées cartésiennes.

Le tenseur $\gamma_{ij}(\vec{u})$ des déplacements s'exprime de façon non linéaire par rapport aux dérivées lagrangiennes du déplacement. Cependant, dans de nombreux cas de mécanique des solides, le déplacement \vec{u} varie très lentement d'un point M_0 à un autre. Donc dans ce cas, les $\partial_i u_k$ sont petits et l'on peut régler le terme quadratique, ce qui permet d'obtenir le tenseur linéarisé $\varepsilon_{ij}(\vec{u})$.

Dans le modèle non linéaire les composantes de $\gamma_{ij}(\vec{u})$ sont

$$(I.4.2) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= \partial_1 u_1 + \frac{1}{2} \partial_1 u_3 \cdot \partial_1 u_3 \\ \gamma_{22} &= \partial_2 u_2 + \frac{1}{2} \partial_2 u_3 \cdot \partial_2 u_3 \\ 2\gamma_{12} &= \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 + \partial_1 u_3 \cdot \partial_2 u_3 \\ 2\gamma_{13} &= \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 + \partial_1 u_3 \cdot \partial_3 u_3 \\ 2\gamma_{23} &= \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2 + \partial_3 u_3 \cdot \partial_2 u_3 \\ \gamma_{33} &= \partial_3 u_3 + \frac{1}{2} \partial_3 u_k \cdot \partial_3 u_k \end{aligned}$$

De l'expression du tenseur G_{ij} on trouve :

$$(I.4.3) \quad \begin{aligned} G_{11} &= 1 + 2\gamma_{11} & ; & G_{12} = 2\gamma_{12} \\ G_{22} &= 1 + 2\gamma_{22} & ; & G_{13} = 2\gamma_{13} \\ G_{33} &= 1 + 2\gamma_{33} & ; & G_{23} = 2\gamma_{23} \end{aligned}$$

Les connaissances des composantes du tenseur G_{ij} permet de calculer ses principaux invariants qui sont les suivantes :

(I.4.4)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3 + 2\delta_{ij} \\
 I_2 &= 3 + 4\delta_{ij} + 2(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) \\
 I_3 &= \det G_{ij} = |(\delta_{ij} + 2\delta_{ij})| = G
 \end{aligned}$$

I.5.- Déplacement rigide superposé à $\Phi(\Omega)$

Définition : appelle déplacement rigide superposé à la configuration , un champ de déplacement $\vec{\mu}$ défini sur Ω (ou une application "déformation" $\tilde{\Phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$) tel que

$$(I.5.1) \quad \chi = x + \vec{\mu}(x) = c + R\phi(x) = c + R\chi$$

R est un endomorphisme orthogonal de E_3 : $R^t R = \mathbb{1}$, c et R sont indépendant de x dans Ω .

En fait $\vec{\mu}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \vec{\mu} &= \vec{\mu}' + \vec{\mu}^* \\
 (I.5.2) \quad \vec{\mu}^* &= c + (R - \mathbb{1})(x + \vec{\mu}'(x)) = \vec{c}' + (R - \mathbb{1})x
 \end{aligned}$$

On montre que le tenseur $\delta(\vec{\mu})$ n'est pas changé si l'on superpose à $\vec{\mu}$ un déplacement rigide c'est-à-dire :

$$\delta(\vec{\mu}' + \vec{\mu}^*) = \delta(\vec{\mu}') = \delta(\vec{\mu})$$

En effet, (I.5.1) entraîne $\mathbb{1} + \nabla \vec{\mu}' = R(\mathbb{1} + \nabla \vec{\mu})$

(Compte tenu de (I.5.1) et de l'expression de $\delta(\vec{\mu})$ on montre en vertu de $R^t R = \mathbb{1}$ que $\delta(\vec{\mu}') = \delta(\vec{\mu})$.

Posons :

$$\begin{aligned}
 \delta^*(\vec{\mu}' - \vec{\mu}^*) &= \delta(\vec{\mu}' + \vec{\mu}^*) - \delta(\vec{\mu}^*) = \frac{1}{2} \nabla u^* + {}^T \nabla u^* , \text{ tout calcul fait on trouve :} \\
 2\delta^*(\vec{\mu}', \vec{\mu}^*) &= (\mathbb{1} + {}^T \nabla u) \cdot \nabla u^* + {}^T \nabla u^* (\mathbb{1} + \nabla u)
 \end{aligned}$$

$$\vec{u} = \vec{u}^*$$

implique $\nabla u^* = R \cdot (\mathbb{1} + \nabla u)$ et dès lors :

(I.5.3)

$$2\gamma^*(u, u^*) = (\mathbb{1} + {}^T \nabla u)(R + {}^T R)(\mathbb{1} + \nabla u)$$

Remarque

$\gamma^*(u, u^*) = 0$ implique $(\mathbb{1} + \nabla u) \cdot \nabla u^*$ antisymétrique.

L'idée consiste, pour le prouver à faire un changement de variable en posant :

$$\nabla u^* = R \cdot F \quad \text{avec} \quad F = (\mathbb{1} + \nabla u), \quad \text{il existe } F^{-1},$$

tel que :

(I.5.4)

$$F^T (R + {}^T R) \cdot F = 0 \Leftrightarrow \gamma^*(u, u^*) = 0$$

L'application : $\gamma: \nabla \vec{u} \rightarrow \gamma(\vec{u}) = \text{Sym}[(\mathbb{1} + \nabla \vec{u}) \cdot \nabla \vec{u}]$ est non linéaire mais, différentiable.

En effet

$$\gamma(u + u^*) - \gamma(u) = D\gamma_{\vec{u}}(\nabla \vec{u}^*) + \frac{1}{2} {}^T \nabla \vec{u}^* \cdot \nabla \vec{u}^* \quad \text{où :}$$

(I.5.5)

$$\begin{aligned} D\gamma_{\vec{u}}(\nabla \vec{u}^*) &= \text{Sym}[{}^T \nabla \vec{u}^* \cdot (\mathbb{1} + \nabla \vec{u})] \\ &= {}^T D\phi(x) \cdot \frac{1}{2} (\nabla_x \vec{u} + {}^T \nabla_x \vec{u}^*) \cdot D\phi \\ X = \phi(x); \quad \nabla_x \vec{u}^* &= \nabla_x \vec{u}^* \cdot D\phi(x) \end{aligned}$$

$D\gamma_{\vec{u}} \in \mathcal{L}(M_3^{\text{Sym}}(\mathbb{R}), M_3^{\text{Sym}}(\mathbb{R}))$ son noyau est caractérisé par :

(I.5.6)

$$\text{Ker}(D\gamma_{\vec{u}}) = \{ \vec{u}^*: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 / \nabla_x \vec{u}^* \}, \quad \text{antisymétrique}$$

il en résulte donc que :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}^*) = 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2 \subset N^2.$$

On a donc, si $\phi(\Omega)$ est simplement connexe,

$$\frac{\partial^2 \vec{u}^*}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \vec{u}^*}{\partial x_k \partial x_j} = -\frac{\partial \varepsilon_{jk}(u^*)}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}(u^*)}{\partial x_k} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}(u^*)}{\partial x_j} = 0, \forall i, j, k=1,2,3$$

d'où

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = a_{ij} \quad (= -a_{ji} = -\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i})$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$ est indépendant de X (donc de $x \in \Omega$) c'est-à-dire que $\nabla_x u^* = A$ antisymétrique, indépendante de $x \in \Omega$ d'où :

$$\vec{u}^*(x) = \vec{c} + AX \quad (\vec{c} \text{ indépendant de } x \in \Omega)$$

1.6. Déplacement rigide infinitésimal superposé à $\phi(\Omega)$

Définition : On appelle déplacement rigide infinitésimal superposé à $\phi(\Omega)$, un déplacement de la forme :

$$(I.6.1) \quad \vec{u}^* = \vec{c} + AX = \vec{c} + A(x + \vec{u})$$

où \vec{c} et A ($A = -^T A$) sont indépendants de X (donc de $x \in \Omega$).
L'ensemble \mathcal{R}_u :

$$(I.6.2) \quad \mathcal{R}_u = \{ \vec{u}^* = \vec{c} + A(x + \vec{u}) \mid A = -^T A \text{ et } \vec{c} \text{ sont indépendants de } x \}.$$

Cet ensemble est une variété affine. Il résulte alors de (I.5.5) et (I.5.6) que :

(I.6.3)

$$u^* \in \mathcal{R}_u \iff \mathcal{D} \gamma_{u^*}(\nabla_x \vec{u}^*) = 0$$

Remarque : Les déplacements (I.6.1) s'introduisent dans l'hypothèse dite des "petites" perturbations (H.P.P.) où \mathbb{R} supposée "voisine" de $\mathbb{1}_{E_3}$ est donnée par :

(I.6.4) $\mathbb{R} = \mathbb{1}_{E_3} + A + o(\|\mathbb{R}\|^2)$ et d'où l'on néglige les termes d'ordre au moins 2 en $\|\mathbb{R}\|$. Alors :

(I.6.5)
$$\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{1}_{E_3} \iff A + {}^T A = 0, \text{ à } (\|\mathbb{R}\|)^2 \text{ près}$$

II. ASPECTS THERMOMECHANIQUES : [], [4], [10], [17].

II.1.- Equilibre d'un milieu

Dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, les équations d'équilibre d'une configuration $\phi(\mathcal{Q})$.

(II.1.1)
$$\begin{aligned} \sum_{ij} \sigma_{ij}(x) &= \sum_{ji} \sigma_{ji}(x) \\ \sum_{ij} \sigma_{ij} + \rho(x) F_i(x) &= 0 \quad \text{dans } \phi(\mathcal{Q}) \\ \sum_{ij} \sigma_{ij} n_j(x) &= g_i(x) \quad \text{sur } (P) \end{aligned}$$

σ_{ij} est un tenseur symétrique.

D'autre part, pour tout volume \mathcal{V} tel que $\mathcal{V} \subset \phi(\mathcal{Q})$ on a :

(II.1.2)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \rho(x) \vec{F}(x) dV(x) + \iint_{\partial\Omega} \vec{T}(x, \vec{n}) d\Gamma(x) &= 0 \\ \iiint_{\Omega} \vec{x} \wedge \vec{F} dv + \iint_{\partial\Omega} \vec{x} \wedge \vec{T}(x, \vec{n}) d\Gamma &= 0 \\ \vec{T}(x, \vec{n}) = \sum_{ij} \tau_{ij}(x) n_j \vec{e}_i ; \vec{F}(x) = \vec{f}(x) \end{aligned}$$

$\vec{F}(x)$ est la densité de force dans $\Phi(\Omega)$.

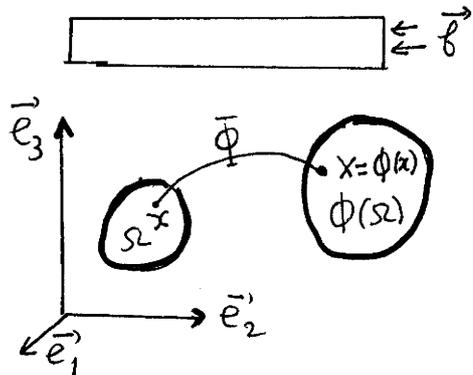
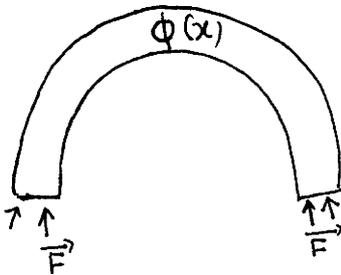
En faisant les changements de variables suivantes :

, on aura

(II.1.3)

$$\rho(\Phi(x)) = \frac{\rho_0(x)}{\sqrt{G}}$$

Or, $X = \Phi(x)$ donc $F(\Phi(x)) = \vec{f}(x)$ ce qui traduit l'hypothèse de charges "mortes". Les forces \vec{f} restent les mêmes au cours de la déformation, d'où les schémas ci-dessous.



Compte tenu des formules (II.1.2), on peut donner une nouvelle définition du tenseur des contraintes, soit :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(x) &= \sqrt{G(x)} (D\Phi)^{-1} \cdot \Sigma(\Phi(x)) \cdot ({}^T D\Phi)^{-1} \\ \Sigma(\Phi(x)) \sqrt{G} &= (D\Phi) \vec{\sigma}(x) ({}^T D\Phi) \end{aligned}$$

permettant d'obtenir le système d'équations suivant :

(II.1.4)

$$\sqrt{G(x)} \cdot \sum_{ij} \tau_{ij}(\Phi(x)) = \partial_i \Phi_m \sigma_{mkl} \partial_j \Phi_l ; \Phi(x) = x + \vec{u}(x)$$

Or, $J(x) = \sqrt{G} = \text{Det}(\partial_i \phi_j) = \text{Det}(\delta_{ij} + \partial_i u_j)$ avec :

$$\text{Det}(\delta_{ij} + \partial_i u_j) = \text{Det}(I + \nabla \vec{u}) = \text{Det}(D\Phi)$$

Dès lors, en substituant dans (II.1.4) les formules (II.1.1) sont équivalentes dans l'hypothèse de charges mortes aux équations d'équilibres :

$$\text{Det}(I + \nabla \vec{u}) \Sigma_{ij} = \sigma_{kl} (\delta_{ki} \delta_{jl} + \delta_{ji} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \delta_{lp} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_j})$$

(II.1.5)
$$\Phi(x) = x + \vec{u}(x)$$

Remarque 1 :

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{il} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \sigma_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \dots +$$

est l'équation de Von Karman.

Remarque 2 :

Les deux dernières équations de (II.1.1) sont équivalentes dans l'hypothèse de charges mortes aux équations d'équilibres :

$$-\partial_j (\sigma_{ij}(x) + \sigma_{jk}(x) \partial_k u_i) = \rho_0 f_i(x) \text{ dans } \Omega$$

$$(\sigma_{ji}(x) + \sigma_{jk}(x) \partial_k u_i) N_j(x) = g_i(x) \text{ sur } \Gamma_F$$

$$\vec{u}' = u_0(x) \text{ sur } \Gamma_0 = \partial\Omega - \Gamma_F$$

(II.1.6)

II.2. Milieu thermoélastique

II.2.1.- Définition et rappels [10] [2].

Un milieu thermoélastique est, par définition, un milieu naturellement simple dont l'état thermomécanique est défini par son gradient de déformation, sa température absolue T et le gradient \vec{g} de température $\vec{g} = \vec{\nabla}_x T$,

Les matériaux que l'on considère par la suite seront thermoélastiques en ce sens qu'ils seront définis par les lois de comportement qui sont des relations donnant la densité d'énergie libre Ψ , le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$, l'entropie Δ et le vecteur flux de chaleur \vec{q} en tout point matériel x , en fonction de \mathbb{F} , T et \vec{g} tels que :

$$(II.2.1) \quad \begin{cases} \sigma = \hat{\sigma}(\mathbb{F}, T, \vec{g}; x, t) \\ \Psi = \hat{\Psi}(\mathbb{F}, T, \vec{g}; x, t) \\ \Delta = \hat{\Delta}(\mathbb{F}, T, \vec{g}; x, t) \\ q = \hat{q}(\mathbb{F}, T, \vec{g}; x, t) \end{cases}$$

où on définit respectivement \mathbb{F} et \vec{g} par :

$$(II.2.2) \quad \begin{cases} \mathbb{F} = D_x \varphi(x, t) = \mathbb{1}_3 + \nabla \vec{u} \\ \vec{g} = \vec{\nabla}_x T(x, t) \end{cases}$$

$\overline{\sigma}$ est le second tenseur de PIOLA-KIRCHOF.

Par commodité d'écriture, la dépendance en x , y sera supprimée et sous-entendue.

Les fonctionnelles de "réponse" $\hat{\sigma}$, $\hat{\Psi}$, $\hat{\Delta}$ et \hat{q} seront définies sur :

$||M_3^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3 \times \Omega_0 \times]0, t_0[$ ou $M^+(\mathbb{R})$ est tel que :

$$M_3^+(\mathbb{R}) = \{F \in M_3(\mathbb{R}); \det(F) > 0\}, T_0, t_0 > 0$$

On suppose en outre que :

$$\sigma = \sigma^T$$

II.2.2.- Processus thermodynamique admissible

Un processus thermodynamique admissible est la donnée de $[\vec{u}, \tau, \psi, \vec{\sigma}, \delta, \vec{q}]$, fonctions définies sur $\Omega_0 \times]0, t_0[$.
 $\psi, \vec{\sigma}, \delta$ et \vec{q} par (II.2.1) et (II.2.2).

$$\vec{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega_0 \times]0, t_0[; \mathbb{R}^3), \tau \in \mathcal{C}^2(\Omega_0)$$

II.2.3.- Loi de conservation de masse

Si l'on récapitule les équations établies pour un milieu continu que l'on suit dans son mouvement, on en déduit en vertu de (II.1.3) et de la définition () que

$$(II.2.3) \quad \rho(x, t) \cdot J(x, t) = \rho_0(x), \quad x = x + \vec{u}(x, t)$$

II.2.4.- Les équations de la dynamique

En mécanique des milieux continus on les écrit sous la forme :

$$(II.2.4) \quad \rho_0 \vec{u}'' = \rho_0 \vec{f} + \text{Div}_x \vec{\sigma}, \quad \frac{\partial \cdot}{\partial t^2} = (\cdot)''$$

II.2.5.- Loi de conservation de l'énergie

On la présente sous la forme :

$$(II.2.5) \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Psi - \delta T) = \sigma_{ij} \dot{E}_{ij} - \operatorname{div}_x \vec{q} + \kappa$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{F}^T \mathbb{F} - \mathbb{1})$$

Dans ces équations \vec{b} et κ désignent respectivement les forces massiques et l'apport spécifique de chaleur nécessaire à l'existence du processus.

II.2.6.- Restrictions imposées par le second principe de la thermodynamique

Aux équations précédentes, on ajoute le second principe de la thermodynamique que l'on traduit par l'inégalité de dissipation locale :

$$(II.2.6) \quad \dot{\Psi} + \delta \dot{T} - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{\nabla}_x T \leq 0$$

on montre que pour qu'un processus thermodynamiquement admissible vérifié (II.2.6), il faut et il suffit que :

(i) les fonctions de "réponse" $\hat{\Psi}$, $\hat{\sigma}$ et $\hat{\delta}$ soient indépendantes de \vec{q} .

(ii) $\hat{\sigma}(\mathbb{F}, T) = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbb{F}}(\mathbb{F}, T)$ (relation de contrainte)
 $\hat{\delta} = - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial T}(\mathbb{F}, T)$ (relation d'entropie).

\hat{q} vérifie l'inégalité de conduction de chaleur.

$$\hat{q}(\mathbb{F}, T, \vec{\nabla}_x \hat{q}) \cdot \vec{\nabla}_x T \leq 0$$

En effet, les relations (i) et (ii) entraînent

$$\dot{\Psi} = \partial_{\mathbb{F}} \hat{\Psi} \cdot \dot{\mathbb{F}} + \partial_T \hat{\Psi} \cdot \dot{T}, \quad \dot{\Psi} = \mathbb{F} \hat{\sigma} \dot{\mathbb{F}} - \delta \dot{T}$$

Comme

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^T$$

$$\begin{aligned} F \sigma \dot{F} &= F_{ik} \sigma_{kj} \dot{F}_{ij} = \sigma_{jk} F_{ij} \dot{F}_{ik} = \frac{1}{2} \sigma_{jk} (\dot{F}_{ik} F_{ij} + F_{ij} \dot{F}_{ik}) \\ &= \frac{1}{2} \overline{\sigma}_{jk} (\widehat{F^T F - 1}) = \overline{\sigma} : \dot{E} \end{aligned}$$

donc :

$$\dot{\psi} = \overline{\sigma} : \dot{E} - \dot{s} T$$

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{s} T - \dot{s} T$$

, par conséquent,

$$\dot{e} = \overline{\sigma} : \dot{E} + \dot{s} T \quad \text{et, puisque :}$$

$$\dot{e} = -\operatorname{div}_x \vec{q} + r + \overline{\sigma} : \dot{E}, \quad \text{on a partout processus thermo-$$

dynamiquement admissible :

$$(II.2.7) \quad \dot{s} T = -\operatorname{div}_x \vec{q} + r$$

Si un processus est adiabatique, $\operatorname{div}_x \vec{q} + r = 0$, il est isentropique si $\dot{s} = 0$ et réciproquement. Dans le premier cas, il y a absence d'apport de chaleur et dans le second cas, l'entropie demeure constante.

Remarque :

Dans un processus thermodynamique admissible, les fonctions de réponse de contrainte et d'entropie vérifient les relations de Maxwell.

$$(II.2.8) \quad \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial F} (F, T) \right) = - \frac{\partial}{\partial F} \left(\hat{\Delta} (F, T) \right) = \frac{\partial}{\partial F} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial T} (F, T) \right)$$

valable dès que $\hat{\Psi}$ est de classe \mathcal{C}^2 en F et T .

Il en résulte de la relation :

$$e = \Psi + T, \text{ que :}$$

$$(II.2.9) \quad e = \hat{e} (F, T) = \hat{\Psi} (F, T) + T \hat{\Delta} (F, T)$$

La quantité scalaire définie par :

$$(II.2.10) \quad c(F, T) = \frac{\partial}{\partial T} \hat{e}(F, T) \quad \text{est appelée chaleur spécifique.}$$

De (II.2.9), (II.2.10) et $\hat{\Delta} = - \frac{\partial}{\partial T} \hat{e} (F, T)$, on en déduit :

$$(II.2.11) \quad c(F, T) = T \cdot \frac{\partial \hat{\Delta}}{\partial T} (F, T) \quad \text{pour tout } (F, T) .$$

Par la suite on fera l'hypothèse suivante :

$$(II.2.12) \quad c(F, T) > 0 \quad \text{pour tout } (F, T) .$$

Comme $T > 0$, il résulte de (II.2.10) - (II.2.12) que $\hat{\Delta}$ est, pour tout F donné, inversible en T .

II.2.7.- Restrictions imposées par le principe d'objectivité

Ce principe postule que les relations de comportement doivent être invariantes dans tout changement de référentiel et montre que

(II.2.13)

$$\begin{aligned} \psi &= \tilde{\psi}(E, T) \quad ; \quad \Delta = \tilde{\Delta}(\tilde{E}, T) \\ \sigma &= \tilde{\sigma}(\tilde{E}, T) \quad ; \quad \vec{q} = \tilde{\vec{q}}(E, T, \vec{\nabla}_x q) \\ \tilde{\vec{q}} \cdot \vec{\nabla}_x T &\leq 0 \end{aligned}$$

Remarque

$\tilde{\vec{q}} \cdot \vec{\nabla}_x T \leq 0$, signifie que le flux de chaleur va des endroits les plus chauds vers les plus froids.

Les lois de comportement (II.2.1) satisfont au principe d'objectivité, si et seulement si elles admettent les formes réduites de (II.2.13). En outre, les relations de contrainte et d'entropie en (i) et (ii) deviennent :

(II.2.14)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{E}, T) &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{E}} \\ \tilde{\Delta}(\tilde{E}, T) &= -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial T} \end{aligned}$$

Les fonctionnelles de réponse $\tilde{\psi}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\vec{q}}$ dépendent des points $x \in \Omega_0$ explicitement, mais non du temps t , d'où

$$\psi = \tilde{\psi}(E, T; x)$$

Le système complet des équations de la thermoélasticité non linéaire est formé de lois de comportement et de conservation, dès lors, le système s'écrit :

(II.2.15)

$$\text{Div}(\mathbb{F} \cdot \sigma) + \rho_0 \vec{b} = \rho_0 \vec{u}''$$

$$T \frac{\partial \Delta}{\partial E} = -\text{div}_x \vec{q} + \pi$$

dans $\Omega_0(x) \times]0, +\infty[$.

A ces équations s'ajoutent celles de (II.2.14) et (II.2.13).

Ces équations et inéquations sont vérifiées pour \vec{E}, τ définis pour $(x, t) \in \Omega_0 \times]0, +\infty[$.

Elles sont complétées par des conditions de frontière.

$$(II.2.16) \quad \begin{array}{l} (\mathbb{1} + \text{Grad}_x \vec{U}) \vec{T}(\vec{N}) = \vec{G} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_0^F \\ \vec{U} = \vec{U}_0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_0^u \\ \vec{q} \cdot \vec{N} = \omega \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_0^c \\ \tau = \check{\tau} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_0^\theta \end{array} \quad \begin{array}{l} \partial \Omega_0 = \partial \Omega_0^F \cup \partial \Omega_0^u \\ \partial \Omega_0 = \partial \Omega_0^c \cup \partial \Omega_0^\theta \end{array}$$

et des conditions initiales :

$$(II.2.17) \quad \begin{array}{l} \vec{U}(x, 0) = \vec{U}_0(x) ; \quad \dot{\vec{U}}(x, 0) = \dot{\vec{U}}_0(x, 0) \text{ dans } \Omega_0 \\ \tau(x, 0) = \tau_0(x) \\ \vec{U}(x, 0), \dot{\vec{U}}(x, 0), \tau(x, 0), \dot{\tau}(x, 0) \text{ sont données sur } \Omega_0 \end{array}$$

La connaissance des conditions initiales et des conditions à la frontière permet de manière générale, de trouver la solution du problème.

D'autre part, les relations (II.2.13), (II.2.14), (II.2.5b), (II.2.16) restent valables, (II.2.17) n'ayant plus lieu d'être.

Cette formulation à l'aide de la fonction $\check{\Psi}(\vec{E}, \tau)$ est assez générale mais, dès lors que l'on particularise $\check{\Psi}$ (quadratique et isotrope) on obtient des exemples ou des contre-exemples de la façon dont un matériau élastique peut se comporter.

Il se peut que l'expérience confirme les hypothèses faites (non par la donnée de $\check{\Psi}$ mais par les mesures faites sur le matériau déformé).

En général, on prend des formes particulières de $\check{\Psi}$ par des méthodes d'approximation asymptotique.

II.2.8.- Milieu thermoélastique homogène et isotrope : linéarisation

Les lois de comportement d'un milieu thermoélastique homogène et isotrope sont objectives; en particulier, le tenseur des contraintes peut s'exprimer sous forme d'un polynôme de deuxième degré en $\vec{\epsilon}$. Rappelons que dans le contexte de la linéarisation, l'homogénéité n'est pas une notion essentielle.

L'isotropie et la linéarité sont respectivement liées à l'état naturel du milieu et à ses lois de comportement.

LINEARISATION

Hypothèses de linéarisation

$$(II.2.18) \quad \begin{array}{l} (H_1) \quad \sup_{\Omega} \max_{i,j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \leq \alpha \ll 1 \quad (\text{vitesse lentement variable}) \\ (H_2) \quad \sup_{\Omega} \max_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \leq \alpha \ll 1 \quad (\text{température lentement variable}) \\ (H_3) \quad \sup_{\Omega} |T - T_0| \leq \alpha \ll 1 \quad (\text{température presque constante}) \end{array}$$

est un champ uniforme, celui de la température de référence du milieu élastique.

A ce stade, si l'on introduit le tenseur $\gamma(\vec{u})$ on peut remarquer que, de :

$\epsilon_1 = \sup |\nabla \vec{u}|$, $\epsilon_2 = \sup |\gamma(\vec{u})|$ supposés tous deux des infiniments petits, on a, compte tenu de la définition de $\gamma(\vec{u})$, $\epsilon_1 = \epsilon_2$ au sens des infiniments petits. En effet, $\gamma(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + {}^T \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u} {}^T \nabla \vec{u})$ entraînent :

$$|\epsilon_2 - \epsilon_1| \leq \frac{1}{2} \epsilon_1^2$$

On suppose donc :

$$(II.2.19) \quad |\gamma(\vec{u})| \leq \delta \ll 1, |T - T_0| \leq \delta \ll 1, |\vec{\nabla}_x T| \leq \delta \ll 1$$

Remarque

Si $\mathbb{F} = \mathbb{I}_3$ et $T = T_0$ alors $\bar{\sigma} = 0$ et, $\sigma = \bar{\sigma}(\bar{\sigma}, T_0)$ représente la contrainte résiduelle à la température de référence c'est-à-dire à l'état de contrainte du corps lorsqu'il est maintenu dans la configuration de référence, à la température uniforme T_0 . On vérifie à des termes $o(\delta)$ près que :

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon) \mathbb{I} + 2\eta \bar{\varepsilon} + \alpha \theta \mathbb{I} \quad (\text{a})$$

$$(II.2.20) \quad \bar{q} = -k \nabla_x \theta \quad (\text{b})$$

où λ, η, α, k sont des constantes

Ces lois de comportement sont objectives mais, si l'on néglige tous les termes d'ordre supérieur à un en δ , on obtient :

$$\bar{\sigma} = \lambda(\text{tr } \bar{\varepsilon}(\bar{u})) \mathbb{I} + 2\eta \bar{\varepsilon}(\bar{u}) + \alpha \theta \mathbb{I} \quad (\text{a})$$

(II.2.21)

$$\bar{\varepsilon}(\bar{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + {}^T \nabla \bar{u}) = \varepsilon - \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u \quad (\text{b})$$

Le système de la thermoélasticité linéarisée homogène et isotrope sera celui basé sur :

(II.2.22)

$\text{Div}_x \bar{\sigma}$	$+ \rho_0 \bar{b}$	$= 0$	dans Ω_0
$k \Delta \theta$	$+ \pi$	$= 0$	
	\bar{u}	$= \bar{u}_0$	sur $\partial \Omega_u$
	θ	$= \theta_0$	sur $\partial \Omega_\theta$
	$\bar{\sigma}(\bar{n})$	$= \bar{F}$	sur $\partial \Omega_F = \partial \Omega_0 \setminus \partial \Omega_u \cup \partial \Omega_\theta$
	$\bar{q} \cdot \bar{n}$	$= \bar{w}$	
	$\frac{d\theta}{dn}$	$= q_0$	sur $\partial \Omega_q = \partial \Omega_0 \setminus \partial \Omega_u \cup \partial \Omega_\theta$

II.3. Relation contrainte-déformation [11] [18]

Le but de ce sous-chapitre est d'établir la relation l'expression du tenseur de contrainte pour un matériau thermoléastique homogène et isotrope.

Pour parvenir à ce but, on se sert des relations thermodynamiques déjà, précédemment établies à savoir (II.2.5) et (II.2.6) qui donnent :

$$\rho(\tau \dot{s} - \dot{e}) + \sigma_{ij} u_{i,j} - \frac{\bar{q}}{T} \vec{\nabla}_x T + \pi \geq 0, \text{ qui peut encore}$$

s'écrire

$$(II.3.1) \quad \rho(\dot{e}(x,t) - \tau \dot{s}(x,t)) \leq \sigma_{ij} u_{i,j} - \frac{\bar{q}_i}{T} \cdot \vec{\nabla}_x T + \pi \\ \leq \sigma_{ij} u_{i,j} + q_i \vec{\nabla} \left(\ln \frac{1}{T} \right) + \pi,$$

$q_i \vec{\nabla} \left(\ln \frac{1}{T} \right)$ étant la dissipation intrinsèque.

Le potentiel thermodynamique ψ , appelé aussi énergie "d'HELMHOLTZ" est défini par :

$$\psi = e - T \cdot s$$

or, on a vu que :

$$\dot{\psi} = \dot{e} - (\dot{\tau} s + \tau \dot{s}) = \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}} \cdot \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \\ = \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}} \cdot \dot{u}_{i,j} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \cdot \dot{T}$$

Pour un matériau thermoélastique, on choisit $u_{i,j}$ et T comme variables indépendantes. Le tenseur σ_{ij} des contraintes devient fonction de ces deux quantités. Il en est de même pour la densité d'énergie interne et de la quantité de chaleur mise en jeu.

Ainsi, de la relation $\dot{e} = -\text{div}_x \vec{q} + \kappa + \vec{\sigma} : \vec{\epsilon}$, on en déduit, pour un matériau élastique et en présence d'un apport de chaleur l'équation :

$$(II.3.2) \quad \rho \dot{e} = -q_{i,i} + \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} + \kappa$$

portant $\dot{\psi}$ dans (II.3.1) et (II.3.2) on obtient,

$$\rho \dot{e} = e \dot{\psi} + \rho T \delta + \rho \dot{T} \delta = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} - q_{i,i} + \kappa, \quad \text{soit}$$

(II.3.3)

$$\left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}} - \sigma_{ij} \right] \dot{u}_{i,j} + \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial T} + \delta \right] \dot{T} + \rho T \delta + \kappa - q_{i,i} = 0$$

(II.3.4)

$$\left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}} - \sigma_{ij} \right] \dot{u}_{i,j} + \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial T} + \delta \right] \dot{T} + \rho T \delta + q_{i,i} - \kappa \leq 0$$

Les deux relations permettent d'écrire :

(II.3.5)

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_{i,j}}$$

(II.3.6)

$$\delta = - \frac{\partial \psi}{\partial T}$$

où

$$q_{i,i} = \rho T \delta + \kappa ; \quad q_{i,i} \leq T \cdot \kappa$$

Un développement de $\psi(u_{i,j}; T)$ en série de Taylor au point de référence $M(0, T_0), T_0$ étant la température initiale, permet d'obtenir.

II.3.2.- Conduction de chaleur dans un milieu non homogène et anisotrope

Dans certains cas, on peut raisonnablement négliger l'apport de chaleur fournie par le milieu extérieur d'où la loi de conduction.

$$-q_{i,i} = (\lambda_{ij} T_{,j})_{,i}$$

λ_{ij} est la conductibilité thermique. Or

$$q_{i,i} = -\rho T \dot{s} = \rho T \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad \text{d'après (II.3.6).}$$

Pour de petites variations de températures on a :

$$\frac{\partial \Psi(T)}{\partial T} = \frac{\partial \Psi(T_0)}{\partial T} - \frac{1}{\rho} \delta_{ij} u_{i,j}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (\lambda_{ij}(x) T_{,j})_{,i} &= T_0 \delta_{ij}(x) u_{i,j} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} T_0 \rho \dot{T} \\ &= T_0 \delta_{ij}(x) u_{i,j} + c \rho \dot{T} \end{aligned}$$

posons $C(x) = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} T_0$ où $C(x)$ désigne la chaleur spécifique du solide mesurée à déformation constante $A_{ij} = 0$.

Portons (II.3.8) dans l'équation de la dynamique

$$\begin{aligned} \text{(II.3.7)} \quad \Psi(u_{i,j}; T) - \Psi(0; T_0) &= \frac{1}{\rho} A_{ij} u_{i,j} + (T - T_0) \frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{1}{2\rho} a_{ijkh} u_{i,j} u_{k,l} \\ &+ \frac{1}{\rho} C_{ij} u_{i,j} (T - T_0) + \frac{1}{2} (T - T_0)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} + \dots \end{aligned}$$

De la relation (II.3.7) on obtient le tenseur des contraintes, soit :

$$\sigma_{ij} = A_{ij} + a_{ijkh} + C_{ij}(T-T_0)$$

L'une des hypothèses de l'élasticité suppose qu'à des contraintes nulles, correspondent des déformations nulles, donc $A_{ij} = 0$.

$$C_{ij} < 0, \text{ posons } C_{ij} = -\gamma_{ij}.$$

a_{ijkh} est le tenseur d'élasticité. γ_{ij} et a_{ijkh} admettent certaines symétries découlant du fait que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Pour un matériau homogène et isotrope, les éléments de ces tenseurs du 2^{ème} et du 4^{ème} ordre se réduisent à des combinaisons linéaires des coefficients de Lamé λ et μ , du coefficient de dilatation thermique α et du symbole de Kronecker δ_{ij} . Dès lors, nous pouvons obtenir l'expression générale des contraintes dans la théorie linéarisée.

(II.3.8)

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}(x) u_{k,h} - \gamma_{ij}(x)(T-T_0)$$

Loi de conduction de chaleur pour un milieu non homogène et anisotrope.

$$\rho \ddot{u} - (a_{ijkh} u_{k,h} - \gamma_{ij}(T-T_0))_{,j} = \rho b_i$$

$$\rho_0 \ddot{u} - (a_{ijkh} u_{k,h})_{,j} + (\gamma_{ij}(T-T_0))_{,j}$$

posons

$$T - T_0 = \theta$$

, on obtient alors.

(II.3.9)

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u} - (a_{ijkh} u_{k,h})_{,j} + \gamma_{ij} \vec{\nabla}_x \theta &= \rho_0 b_i \\ \rho_0 c \dot{\theta} - T_0 \gamma_{ij} u_{i,j} - (\lambda_{ij} T)_{,j} &= 0 \end{aligned}$$

II.4. Coefficients d'élasticité d'un milieu thermoélastique [7], [12], [19], [25]

[10]

Dans ce chapitre nous venons de voir que la loi de comportement thermoélastique s'exprime par une relation linéaire entre le tenseur des déformations linéarisée \vec{E}_{kh} et de la température.

Les coefficients d'élasticité a_{ijkl} sont indépendants du tenseur des déformations $\vec{E}(u)$, mais dépendent de x quand le milieu n'est pas homogène; ils ont les propriétés de symétrie suivantes :

$$(II.4.1.1) \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}$$

Cette propriété résulte de la symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation et

$$(II.4.1.2) \quad a_{ijkl} = a_{klij}$$

Cette dernière relation résulte de l'existence d'une énergie de déformation. Elle exprime aussi que le tenseur du 4^e ordre de composantes est un endomorphe symétrique de l'espace vectoriel (euclidien) des tenseurs symétriques du second ordre, ce qui entraîne qu'il existe au plus 21 coefficients a_{ijkl} ($n = 3$).

L'existence de cette énergie de déformation définie positive implique encore :

$$(II.4.1.3) \quad a_{ijkl} x_{ij} x_{kl} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^9 \quad \text{avec } x_{ij} = x_{ji}$$

Dans la suite, on s'intéresse à un milieu thermoélastique linéaire, transversalement isotrope, rapporté à un repère orthonormé $(0; X_i e_i)$.

Un tel milieu est caractérisé par les tenseurs de contraintes et de déformations d'une part, et par son groupe de symétrie matérielle engendré par $-1, 1$ et les rotations d'axe \vec{e}_3 d'angle $\varphi \in]0, 2\pi[$ d'autre part.

En général, les coefficients a_{ijkl} ne sont pas tous nuls et en particulier nous en avons 6 dans le plan. De la rotation d'angle $\varphi \in]0, 2\pi[$ autour de \vec{e}_3 , on montre que :

$$a_{ijkl} = \text{Sym}(Q \vec{e}_i \otimes Q \vec{e}_j) : A(\text{Sym}(\vec{e}_k \otimes Q \vec{e}_l)), \quad \forall \varphi \in]0, 2\pi[$$

Q , \mathcal{G}_x sont respectivement un tenseur orthogonal et l'ensemble des tenseurs orthogonaux.

Par exemple, $Q = R_{\vec{e}_3}^\pi$ est une symétrie admissible, ce qui implique compte tenu de :

$$Q\vec{e}_1 = \vec{e}_1, \quad Q\vec{e}_2 = \vec{e}_2, \quad Q\vec{e}_3 = -\vec{e}_3$$

que :

$$a_{1123} = a_{1131} = a_{2223} = a_{2231} = a_{3323} = a_{3331} = a_{2312} = a_{3112} = 0$$

Puis en l'écrivant pour $Q = R_{\vec{e}_3}^\varphi$ ($Q\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi$)
 $Q\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi$, $Q\vec{e}_3 = \vec{e}_3 \quad \forall \varphi \in]0, 2\pi[$, on aboutit au résultat suivant :

(II.4.1.4)

$$\begin{aligned} a_{1111} &= a_{2222}; & a_{1212} &= \frac{1}{2}(a_{1111} - a_{2222}); & a_{1313} &= a_{2323} \\ a_{1133} &= a_{2233}; & a_{1122} & \neq a_{3333}; & a_{1212} &= (a_{1111} - a_{1122}) \end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$A_{ijkh} = a_{kijh} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_h = T A_{ji}$$

A_{ij} est un tenseur du second ordre et, A_{ijkh} s'exprime linéairement en fonction de λ et η , soit :

(II.4.1.5)

$$A_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \quad [7]$$

Si l'on pose :

$$a_{1111} = \lambda_0 + 2\eta_0, \quad a_{1122} = \lambda_0, \quad a_{1133} = \lambda_1$$

$$a_{1313} = \eta_1, \quad a_{3333} = \lambda_1 + 2\eta_1$$

(II.4.1.6)

$$A_{11} = \text{Diag}(\lambda_0 + 2\eta_0; \eta_0; \eta_1)$$

$$A_{22} = \text{Diag}(\eta_0; \lambda_0 + 2\eta_0; \eta_1)$$

$$A_{33} = \text{Diag}(\eta_1, \eta_1, \lambda_1 + 2\eta_1)$$

$$A_{12} = {}^T A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 \\ \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{23} = {}^T A_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_{31} = {}^T A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui redonne le cas isotrope pour lequel :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda, \quad \eta = \eta_1 = \eta.$$

Remarque : La matrice $A(\vec{\xi}) = A_{ij} \xi_i \xi_j$ (ou le tenseur $a_{kij} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, qui n'est autre (au facteur $1/e > 0$, près) que la matrice du "tenseur acoustique". (II.4.1.6) s'exprime en utilisant les notations tensorielles.

(II.4.1.7)

$$A_{11} = (\lambda_0 + 2\eta_0) \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \eta_0 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{22} = \eta_0 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + (\lambda_0 + 2\eta_0) \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{33} = \eta_1 (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + (\lambda_1 + 2\eta_1) \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{12} = \lambda_0 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \eta_0 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

$$A_{23} = \lambda_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3$$

$$A_{31} = \lambda_1 \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \eta_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3$$

II.4.2.- Relation contrainte-coefficients d'élasticité-température.

De la relation $\sigma_{ij} = a_{ijkh} u_{k,h} - \gamma \theta \delta_{ij}$, on trouve

(II.4.2.1)

$$\sigma_{11} = (\lambda_0 + 2\eta_0) u_{1,1} + \lambda_0 u_{2,2} + \lambda_1 u_{3,3} - \gamma \theta = a_{11kh}$$

$$\sigma_{22} = \lambda_0 u_{1,1} + (\lambda_0 + 2\eta_0) u_{2,2} + \lambda_1 u_{3,3} - \gamma \theta = a_{22kh}$$

$$\sigma_{12} = \eta_0 u_{1,2} = a_{12kh}$$

$$\sigma_{33} = \lambda_1 (u_{1,1} + u_{2,2}) + (\lambda_1 + 2\eta_1) u_{3,3} = a_{33kh}$$

III.- THERMOELASTICITE PLANE

III.1.1.- Position du problème - equations de base : [1], [4],[5], [21]

Par rapport à un repère orthonormal Ox_1, x_2, x_3 (ou $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) on considère le domaine cylindrique :

$$(III.1.1) \quad (\Omega) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) / (x_1, x_2) \in \bar{W} \subset \mathbb{R}^2; |x_3| \leq h \right\}$$

où (W) désigne un domaine du plan Ox_1, x_2 , de frontière régulière.

Etant donné :

- i) . des forces volumiques de densité \vec{f} dans (Ω) , des déplacements \vec{u} sur $\Gamma_1 \times]-h, +h[$.
- . des forces surfaciques de densité \vec{F} :
sur $\Gamma_2 \times]-h, +h[$ où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$
- ii) . Une température de référence θ_0 sur :
 $\Gamma_3 \times]-h, +h[$
- . Un flux de chaleur de densité q_0 sur :
 $\Gamma_4 \times]-h, +h[$, $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$
- . une densité calorifique κ dans (Ω) .

Si $\vec{u}, \vec{F}, \vec{f}$ sont indépendants de x_3 et parallèles au plan (Ox_1, x_2) ; κ, θ_0 et q_0 étant aussi indépendants de x_3 , alors, le problème de la thermoélasticité statique est la recherche d'un état :

$[\vec{u}, \vec{\varepsilon}, \vec{\sigma}, \theta, \vec{\nabla}\theta]$ défini sur (Ω) correspondant aux forces et vérifiant le système d'équations de la thermoélasticité linéaire homogène et isotrope. Il s'agit de reprendre les équations (II.2.22) qu'on adapte aux hypothèses du nouveau problème.

(III.1.5)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} &= \lambda \varepsilon_{kk} + \gamma \theta \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} + \gamma \theta \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que :

$$\begin{aligned} \sigma_{kk} &= 2(\lambda + \mu) \varepsilon_{kk} + 2\gamma\theta, \text{ soit :} \\ \text{(III.1.6)} \quad \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{kk} - 2\gamma\theta) \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned}$$

(μ_1, μ_2) étant solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \text{(III.1.7)} \quad \sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha &= 0 \\ \theta_{,\alpha\alpha} + \kappa &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda(u_{k,k})\delta_{\alpha\beta} + \mu(u_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) + \gamma\theta\delta_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{(III.1.8)} \quad \mu_\alpha &= u_\alpha \text{ sur } \Gamma_1 \\ \sigma_{\alpha\beta} n_\beta &= F_\alpha \text{ sur } \Gamma_2 \\ \theta &= \theta_0 \text{ sur } \Gamma_3 \\ \theta_{,\alpha} n_\alpha &= q_0 \text{ sur } \Gamma_4 \end{aligned}$$

Le problème (III.1.8) est un problème plan auquel, pour obtenir la solution du problème tridimensionnel, on ajoute :

$$\operatorname{Div}_x \bar{\sigma} + \bar{f} = 0$$

$$k \Delta \theta + \pi = 0$$

(III.1.2)

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{U} && \text{sur } \Gamma_1 \times]-h, +h[\\ \bar{\sigma}(\bar{n}) &= \bar{F} && \text{sur } \Gamma_2 \times]-h, +h[\end{aligned}$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]-h, +h[$$

$$\frac{d\theta}{dn} = q_0 \quad \text{sur } \Gamma_4 \times]-h, +h[$$

$$\bar{\sigma}(\bar{e}_3) = 0 \quad \text{sur } X_3 = \pm h, \theta = \theta_0, \text{ pour } x = \pm h_3$$

Compte tenu des hypothèses faites sur \bar{F} , \bar{f} , \bar{U} , θ , q_0 et π , on s'attend à ce que le champ de déplacement ne dépendent que de (x_1, x_2) avec $\bar{u} \cdot \bar{e}_3 = 0$.

III.1.2.- Etat de déformation thermoélastique plane

Définition :

$[\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \theta]$ est un état de déformation thermoélastique plane si :

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2) \quad \alpha = 1, 2$$

$$(III.1.3) \quad \theta = \theta(x_1, x_2) \quad u_3 = 0$$

Il en résulte immédiatement que

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta, \quad \beta \in \{1, 2\}$$

$$(III.1.4) \quad \bar{\sigma} = \lambda(\varepsilon_{\alpha\alpha}(x_1, x_2) \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha + 2\eta \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta + \delta\theta(x_1, x_2) \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha$$

De ces relations (III.1.4), on obtient :

$$(III.1.7bis) \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = u_3 = 0$$

$$\sigma_{13} = \sqrt{(\sigma_{kk} - 2\delta\theta)}$$

$$(III.1.8bis) \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} \quad \text{pour } x_3 = \pm h.$$

On dit que (III.1.7), (III.1.8) admet une solution unique qui est celle de la déformation plane associée au problème tridimensionnel (III.1.2).

Cette solution ne résoudra (III.1.2) que si : $\bar{v} = 0$, ou $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 2\delta\theta$.

Remarque

La solution du problème tridimensionnel (III.1.2) qui est unique si et sont des mesures positives, vérifie :

$$(III.1.9) \quad \begin{aligned} u_d(x_1, x_2, x_3) &= u_d(x_1, x_2, -x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= -u_3(x_1, x_2, -x_3) \\ \theta(x_1, x_2, x_3) &= \theta(x_1, x_2, -x_3) \end{aligned}$$

Car si l'on pose :

$$\begin{aligned} u_d^*(x_1, x_2, x_3) &= u_d(x_1, x_2, -x_3) \\ u_3^*(x_1, x_2, x_3) &= -u_3(x_1, x_2, -x_3) \\ \theta^*(x_1, x_2, x_3) &= \theta(x_1, x_2, -x_3) \end{aligned}$$

il en résulte immédiatement que le nouvel état $[u^*, \theta^*, \bar{\sigma}^*, \bar{\varepsilon}^*]$, compte tenu de $f_3 = F_3 = U_0^3 = 0$, est solution de (III.1.2) si \bar{u} en est une, d'où le résultat en vertu de l'unicité $\bar{u}' = \bar{u}^*$.

Cette remarque va permettre de passer à la notion d'état thermo-élastique en contrainte plane (resp. de contrainte généralisée).

Définition 1

Etant donné une fonction f telle que :

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ on lui associe :}$$

$$\bar{f}: \omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ par :}$$

$$(III.1.10) \quad \bar{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(x_1, x_2) dx_3$$

Compte tenu de la remarque, on a :

$$(III.1.11) \quad \begin{aligned} \bar{u}_3 &= \bar{\varepsilon}_{13} = \bar{\varepsilon}_{23} = \bar{\nu}_{13} = \bar{\nu}_{23} = 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\mu_{\alpha,\beta} + \mu_{\beta,\alpha}) \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda (\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}) \delta_{\alpha\beta} + \mu \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \gamma \bar{\theta} \delta_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 1} &= \lambda (\bar{\varepsilon}_{\alpha 1}) + (\lambda + \mu) \bar{\varepsilon}_{33} + \gamma \bar{\theta} \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha &= 0 & \text{dans } (\omega) \\ \Delta \theta + \tau &= 0 & \text{dans } (\omega) \end{aligned}$$

(III.1.12)

$$\begin{aligned} \bar{u}_\alpha &= u_\alpha(x_1, x_2) \text{ sur } (\Gamma_1) \\ \bar{\theta} &= \theta_0(x_1, x_2) \text{ sur } (\Gamma_3) \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} n_\beta &= F_\alpha(x_1, x_2) \text{ sur } (\Gamma_2) \\ \bar{\theta}_{,\alpha} n_\alpha &= q_0 \text{ sur } (\Gamma_4) \end{aligned}$$

Définition 2

$[\bar{U}', \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}, \theta]$ solution de (III.1.2) est dit état de contrainte plane si :

$$\bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{33} = 0 \quad \text{dans } (S_2), \text{ etc.}$$

état de contrainte généralisée si : $\bar{\sigma}_{33} = 0$.

Les équations du problème de contrainte plane sont donc :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\beta, \gamma} + b_\alpha &= 0 \\ \theta_{, \alpha\alpha} + \pi &= 0 \\ \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{33} &= 0 \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= \lambda(\mu_{i,i})\delta_{\alpha\beta} + \eta(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \gamma\theta\delta_{\alpha\beta} \\ \lambda(\mu_{d,d}) + (\lambda + 2\eta)u_{3,3} + \gamma\theta &= 0 \\ u_\alpha &= u_\alpha \text{ sur } \Gamma_1 \times]-h, +h[\\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} n_\beta &= F_\alpha \text{ sur } \Gamma_2 \times]-h, +h[\\ \theta &= \theta_0 \text{ sur } \Gamma_3 \times]-h, +h[\\ \theta_{,d} n_d &= q \text{ sur } \Gamma_4 \times]-h, +h[\end{aligned}$$

(III.1.14)

L'élimination de $u_{3,3}$ entre (III.1.14) donne :

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}(\mu_{d,d})\delta_{\alpha\beta} + \eta(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \bar{\gamma}\theta\delta_{\alpha\beta}$$

(III.1.15)

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda\eta}{\lambda + 2\eta}, \quad \bar{\gamma} = \frac{2\gamma\eta}{\lambda + 2\eta}$$

Les autres équations restent inchangées. On obtient un problème plan.

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta,\beta} = [\bar{\lambda}(u_{\alpha,\alpha}) + \bar{\gamma}\theta] \delta_{\alpha\beta} + \eta(u_{\alpha,\beta,\alpha}) \text{ dans}$$

(III.1.16)

$$\pi + \theta_{,\alpha\alpha} = 0, \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta} n_{\beta} + b_{\alpha} = 0$$

+ les conditions (III.2.14) sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 .

(III.1.16) n'a été obtenu qu'à l'aide de $\bar{\sigma}_{33} = 0$.

III.1.3.- Etats thermoélastiques plans

Dans ce qui suit on supposera \vec{f} et π nuls (la force volumique et l'apport de chaleur).

Un état thermoélastique plan de constante λ, η, γ est la donnée de $[u_{\alpha}, \bar{\sigma}_{\alpha\beta}, \theta]$ suffisamment continûment différentiable et continus dans (ω) vérifiant :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\beta,\beta} &= 0; \quad \theta_{,\alpha\alpha} = 0 \\ \eta(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) &= \bar{\sigma}_{\alpha\beta} - \nabla(\bar{\sigma}_{kk} - 2\gamma\theta) \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(III.1.17)

Les conditions de compatibilité classiques (sur ϵ_{ij}) se réduisent dans le cas plan à :

$$(III.1.28) \quad 2\epsilon_{12,12} = \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11}$$

soit

$$\begin{aligned} 2\bar{\sigma}_{12,12} &= \bar{\sigma}_{11,22} + \bar{\sigma}_{22,11} - \nabla(\bar{\sigma}_{kk} - 2\gamma\theta) \delta_{\alpha\beta} \\ &= \bar{\sigma}_{11,22} + \bar{\sigma}_{22,11} - \nabla \Delta \bar{\sigma}_{kk} \end{aligned}$$

or, d'après les équations d'équilibre :

$$\sigma_{12,12} = -\sigma_{11,11} = -\sigma_{22,22} \quad ,$$

d'où l'on déduit que

$$(III.1.19) \quad \Delta \sigma_{kk} = 0$$

Alors si $(\sigma_{\alpha\beta})$ vérifie $\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0$ et $\Delta \sigma_{kk} = 0$, dans (ω) les relations contraintes-déformations et $\Delta \theta = 0$ entraînent (III.1.18).

Tout état thermoélastique plan $[u_\alpha, \xi_p, \sigma_{\alpha\beta}, \theta]$ engendre un état tridimensionnel si l'on ajoute les conditions :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = u_3 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{33} = \sqrt{(\sigma_{kk} - 2\gamma\theta)} \quad \text{dans} \quad (\omega) \quad .$$

III.4.2. - Fonctions d'Airy

Il résulte de la théorie de l'élasticité plane que :

$$(III.2.1) \quad \sigma_{11} = \psi_{,22} \quad ; \quad \sigma_{22} = \psi_{,11} \quad ; \quad \sigma_{12} = -\psi_{,12} \quad \text{si} \quad \psi \in \mathcal{C}^3(\omega; \mathbb{R})$$

vérifie $\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0$.

En outre, on a $\Delta(\sigma_{kk}) = 0$ si et seulement si ψ est biharmonique c'est-à-dire :

$$(III.2.2) \quad \Delta \Delta \psi = 0$$

Réciproquement si $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ est uniforme de classe $\mathcal{C}^n(n \geq 1)$ sur (ω) et $\sigma_{\alpha\beta,\beta} = 0$, il existe $\psi \in \mathcal{C}^{n+1}(a; \mathbb{R})$ telle que :

$$\sigma_{11} = \psi_{,22} \quad , \quad \sigma_{22} = \psi_{,11} \quad , \quad \sigma_{12} = -\psi_{,12} \quad , \quad \text{soit} \quad :$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\delta} \Psi, \delta\delta \quad \text{ou} \quad \eta_{\alpha\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha = \delta = 1 \\ -1 & \text{si } \alpha = 2, \delta = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = \delta \end{cases}$$

(III.2.3)

$$\sigma_{\alpha\beta} \eta_{\beta} = \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\delta} \Psi, \delta\delta \eta_{\beta} = F_{\alpha} \text{ sur } (\partial\omega)$$

Ψ est dite fonction d'Airy sur (ω) éventuellement multiforme biharmonique de contraintes associées définies par (III.3.6).

Théorème

Soit Ψ une fonction d'Airy. Si l'on suppose en posant

$$\Psi(\lambda) = \Psi(x(\lambda)) \quad , \quad \frac{d\Psi}{d\lambda}(\lambda) = \eta_{\alpha}(\lambda) \Psi(x(\lambda))$$

que :

$$\Psi(0) = \Psi, \alpha(0) = 0 \quad , \quad \text{alors :}$$

(III.2.4)

$$\Psi(\lambda) = m(\lambda) \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi}{d\lambda}(\lambda) = -l(\lambda) \text{ sur } (\partial\omega)$$

$$m(\lambda) = \int_0^{\lambda} \eta_{\alpha\beta} [x_{\alpha}(\sigma) - x_{\alpha}(\lambda)] \sigma_{\alpha\beta}(\sigma) \eta_{\alpha}(\sigma) d\sigma$$

$$l(\lambda) = \left[\int_0^{\lambda} \sigma_{\alpha\beta}(\sigma) \eta_{\beta}(\sigma) d\sigma \right] \cdot t_{\alpha}(\lambda); \quad \eta_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \dot{x}_{\beta}; \quad t_{\alpha} = \dot{x}_{\alpha}$$

$m(\lambda)$ et $l(\lambda)$ représentent respectivement le moment résultant et la résultante des efforts tangentiels appliqués à l'arc $(0, \lambda)$ de (Γ) .

De la relation (III.3.4) on peut définir les conditions aux limites suivantes :

$$F_1 = \sigma_{1\beta} \eta_{\beta} = \frac{d}{d\lambda} (\Psi, 2)$$

$$F_2 = \sigma_{2\beta} \eta_{\beta} = \frac{d}{d\lambda} (-\Psi, 1)$$

ce qui donne en vertu de : $\Psi_{,2}(0) = \Psi(0)$,

$$\Psi_{,1}(\lambda) = -\int_0^\lambda F_2 d\sigma = f_1(\lambda)$$

$$\Psi_{,2}(\lambda) = \int_0^\lambda F_1(\lambda) d\sigma = f_2(\lambda)$$

Par ailleurs, $\Psi(0) = 0$, permet de vérifier que :

$$\Psi(\lambda) = m(\lambda), \quad \frac{d\Psi}{d\lambda}(\lambda) = -f(\lambda) \text{ par intégrations successives.}$$

IV.- FORMULATION VARIATIONNELLE [5], [1], [12], [8], [9].

Cette formulation sera adaptée aux équations de base de lathermoélasticité linéarisée. Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 & -\partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{kj} \partial_k u_i) = \rho_0 b_i \quad \text{dans } \Omega \\
 & k \Delta \theta + r = 0 \quad \text{dans } \Omega \\
 & \gamma(\bar{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k) \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\
 & (\sigma_{ij} + \partial_k u_i \sigma_{kj}) n_j = g_i \quad \text{sur } (\Gamma_1) \\
 & \vec{u} = \vec{0} \quad \text{sur } (\Gamma_0) \\
 & \theta = \theta_0 \quad \text{sur } (\Gamma_2) \\
 & \frac{d\theta}{dn} = q_0(x) \quad \text{sur } (\Gamma_3)
 \end{aligned}
 \tag{IV.1}$$

Une formulation variationnelle du problème (IV.1) consiste à trouver
 $(\vec{\sigma}, \theta, \vec{u})$ dans $\Sigma \times \mathcal{C} \times V$ solution de :

$$(IV.2) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \gamma_{ij}(\vec{u}) \tau_{ij} dx - \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i u_j dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i u_k \partial_j u_k dx = 0 \\ & \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_i v_j + \int_{\Omega} \tau_{kj} \partial_k v_i \partial_j v_i = \int_{\Omega} p_0 \tau_i v_i + \int_{\Omega} g_i v_i \\ & \int_{\Omega} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} t = \int_{\Omega} \frac{\pi}{k} t + \int_{\Gamma_3} q_0 v \\ & \forall (\vec{\sigma}) \in \Sigma, \forall \theta \in \mathcal{C}, \forall \vec{u} \in V \end{aligned}$$

Σ, \mathcal{C}, V sont des espaces vectoriels définis par :

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} \Sigma &= \{ [\tau] = [\tau_{ij}] \in (L^2(\Omega))^9, \tau_{ij} = \tau_{ji} \} \\ V &= \{ \vec{v}_i = v_i \vec{e}_i, v_i \in W^{1,4}(\Omega), \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_2 = \partial\Omega_u \} \\ \mathcal{C} &= \{ t \in H^1(\Omega), t = 0 \text{ sur } \Gamma_2 = \partial\Omega_\theta \} \end{aligned}$$

On va justifier le choix de $W^{1,4}(\Omega)$, puis étudier, au moins formellement l'équivalence du problème (IV.1) et de la formulation variationnelle précédente.

Tout d'abord $(L^2(\Omega))^9$ étant muni du produit scalaire

$$(\vec{\tau}, \vec{\gamma}) = \int_{\Omega} \tau_{ij} \gamma_{ij} dx$$

(IV.2a) signifie que $(A[\vec{\sigma} - \Delta \theta \mathbb{1}] - \vec{\gamma}(\vec{u}), \vec{\tau}) = 0 \quad \forall \vec{\tau} \in (L^2(\Omega))^9$

Donc si $\vec{\gamma}(\vec{u}) \in (L^2(\Omega))^9$, $A[\vec{\sigma} - \Delta \theta \mathbb{1}] = \vec{\gamma}(\vec{u})$ p.p. dans (Ω) . Ce qui n'est autre chose que (IV.1c) pour que $\delta_{ij} \in L^2(\Omega)$. Or,

$$\vec{\gamma}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i + \partial_i v_k \partial_j v_k) \in L^2 \text{ si } v_i \in W^{1,4}(\Omega). \quad (IV.2b) \text{ et } (IV.2c)$$

ont un sens si l'on prend les quantités f_0, f_i et π dans $L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Gamma)$ ainsi que q_0 .

(IV.2b) s'écrit alors :

$$(IV.2b') \quad a(\vec{\sigma}, \vec{\sigma}) + b(\vec{\sigma}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} f_0 f_i v_i dx + \int_{\Gamma} g_i v_i$$

$$(IV.2c') \quad a(\theta, t) = \int_{\Omega} \frac{\kappa}{R} t + \int_{\Gamma} q_0 t$$

où : $a : (\vec{\sigma}, \vec{\sigma}) \rightarrow \int \sigma_{ij} \partial_i v_j$

est une forme bilinéaire de $\sum x V$ dans \mathbb{R} , donc doit vérifier l'inégalité

$$|a(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})| \leq M \|\vec{\sigma}\|_V \|\vec{\sigma}\|_{\Sigma} \quad M > 0$$

$$\begin{aligned} |a(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})| &\leq \|\sigma_{ij}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\text{mes } \Omega)^{1/4} \|\partial_i v_j\|_{L^4(\Omega)} \|\sigma_{ij}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega) \|\vec{\sigma}\|_{\Sigma} \|\vec{\sigma}\|_V \end{aligned}$$

En posant $M = C(\Omega)$ on a bien :

$$(IV.4) \quad |a(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})| \leq M \|\vec{\sigma}\|_{\Sigma} \|\vec{\sigma}\|_V, \quad \forall M > 0$$

La forme bilinéaire $a(\vec{\sigma}, \vec{\sigma})$ est donc continue. Il reste à montrer qu'elle est coercitive, c'est-à-dire qu'il existe $\beta > 0$, $\forall \vec{v} \in V$ telle que :

$$(IV.5) \quad |a(v, v)| \geq \beta \|\vec{v}\|^2$$

Or, l'inégalité suivante exprime que l'énergie est strictement positive :

$$(IV.6) \quad a(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) \varepsilon_{ij}(\bar{v}) dx, \quad \text{implique :}$$

$$|\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}| \geq \beta \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \text{d'où :}$$

$$(IV.7) \quad a(u, v) \equiv \beta \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \varepsilon_{ij}(\bar{v}) dx \quad \text{soit :}$$

$$a(u, v) \geq \beta \sum_{i,j} \|\varepsilon_{ij}(\bar{u})\|_{L^2(\Omega)}$$

Si l'on pose $m = \text{Sup}(\beta)$, l'inégalité de Korn permet d'écrire sur tout le domaine Ω :

$$(VI.8) \quad \|u\|_V = m \left(\sum_{i,j} \|\varepsilon_{ij}(\bar{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

L'inégalité (IV.7) se transforme en l'inégalité :

$$(IV.9) \quad a(u, v) \geq c \|u\|_V^2$$

qui prouve que $a(u, v)$ est coercitive sur l'espace vectoriel V .

En effet, la formulation variationnelle en contrainte et déplacement.

$$(IV.10) \quad a(u, v) = L(v); \quad L(v) = \int_{\Omega} b_i v_i dx, \quad \int_{\partial\Omega} = 0$$

$$|\int b \cdot v dx| \leq \left(\int_{\Omega} |b|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{Inégalité de MINKOWSKI}$$

$$\leq \|b\|_{(L^2(\Omega))^3} \cdot \|v\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq c_1 \|v\|_{(L^2(\Omega))^3}, \quad c_1 > 0$$

où

$$(IV.11) \quad c_1 = \|b\|_{(L^2(\Omega))^3}, \quad \vec{b} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$$

Puisque $H_{1,0}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors on a :

$$\|v\|_{H_{1,0}(\Omega)} \geq c_2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\left| \int b_i v_i dx \right| \leq c_1 \cdot c_2 \|v\|_{H_{1,0}(\Omega)} \quad \text{où,}$$

$$(IV.12) \quad \left| \int_{\Omega} b_i v_i dx \right| \leq c \cdot \|v\|_V; \quad c = c_1 \cdot c_2.$$

On peut alors appliquer le lemme de Lax-Milgram au problème (IV.1).
Il existe une solution v et une seule.

Généralisation

On peut généraliser l'étude de la forme linéaire $L(v)$ dans le cas où l'intégrale sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω est non nulle ($\int_{\partial\Omega} \neq 0$) où $\int_{\partial\Omega} -$ est telle que nous pouvons appliquer le théorème des traces.

$$L(v) = \int_{\Omega} b_i v_i dx + \int_{\partial\Omega} F_{\varphi} v dx$$

Pour le second terme de $L(v)$, on sait que [], la restriction $\varphi|_{\partial\Omega}$ d'une application $\varphi \in W_{1,0}^1(\Omega)$ à la frontière $\partial\Omega$ de Ω est continue :

$$\begin{aligned} W_{1,0}^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ \varphi &\longrightarrow \varphi|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

Il existe donc une réelle $k > 0$ tel que :

$$(IV.13) \quad \|v\|_{(L^2(\partial\Omega))^3} \leq k_1 \|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

$$(IV.14) \quad \left| \int_{\partial\Omega} F_{\varphi} v dx \right| \leq \|F_{\varphi}\|_{(L^2(\Omega))^3} \cdot \|v\|_{(L^2(\partial\Omega))^3} \leq k_1 k_2 \|v\|_V$$

avec

$$(IV.15) \quad k_2 = \|F_{\varphi}\|_{(L^2(\Omega))^3}$$

On montre ainsi l'existence d'une constante réelle

telle que :

$$(IV.16) \quad K = c + k_1 k_2$$

Dans le cas général, on obtient :

$$(IV.17) \quad |L(v)| \leq K \|v\|_V$$

De même

$$(IV.18) \quad b: (\vec{\sigma}, \vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \int_{\Omega} \sigma_{kj} \partial_k u_i \partial_i v_j \quad \text{défini une forme}$$

trilinéaire continue sur $\Sigma \times V \times V$.

On peut aussi classiquement montrer que la forme

$$(IV.19) \quad a: (\theta, t) \longrightarrow \int_{\Omega} (\nabla \theta, \nabla t) \text{ est bilinéaire continue sur } \mathcal{D}' \times \mathcal{C}.$$

$$\text{Comme } (\mathcal{D}'(\Omega))^3 \subset V \subset (W^{1,4}(\Omega))^3$$

$$\text{si } \vec{\sigma} \in (\mathcal{D}'(\Omega)), \quad \int_{\Omega} (\vec{\sigma}, \vec{v}) = 0 \text{ et,}$$

$$\int_{\Omega} \nabla_{ij} \partial_j v_i = \langle \sigma_{kj} \partial_k u_i, \partial_j v_i \rangle = - \langle \partial_j \sigma_{ij}, v_i \rangle$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \partial_k u_i \partial_j v_i = \langle \partial_{kj} \partial_k v_i, \partial_j v_i \rangle = - \langle \partial_j (\sigma_{kj} \partial_k u_i), v_i \rangle$$

où $\langle T, \psi \rangle$ désigne la valeur de la distribution T pour $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$
 $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'ensemble des distributions (forme linéaire continue)
 sur Ω . (IV.18) et (IV.19) s'écrivent encore :

(IV.2.0)

$$-\partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{jk} \partial_k u_i) \cdot v_i = f_0 \delta_i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\Delta \theta = \frac{r}{k} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\forall \vec{v} \in V, \int -\partial_j(\sigma_{ij} + \sigma_{jk} \partial_k u_i) \cdot v = a(\vec{\sigma}, \vec{v}) + b(\vec{\sigma}, \vec{u}, \vec{v}) - \int \vec{g} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{\Omega} \Delta \theta \cdot t = a(\theta, t) - \int q \cdot t$$

(IV.2.2) Problème aux limites [26], [27].

De la relation $\theta = \frac{1}{2} (f(z) + \overline{f(z)})$, on a déduit que
 (IV.2.1) $\Delta \theta = 0$ dans (ω) .

On associe à (IV.2.1), les conditions aux limites homogènes du type mixte qui peuvent dépendre du contour de (ω) .

Nous obtenons ainsi le problème suivant :

$$(IV.2.2) \quad \begin{array}{l} \Delta \theta = 0, \quad \theta \in L^2(\omega) \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \omega \\ \theta = 0 \quad \text{dans } (\omega) \end{array}$$

En faisant intervenir les coefficients physiques dans l'expression de la dérivée normale on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_i) = \frac{\partial \theta}{\partial v_A}$$

où $\frac{\partial \theta}{\partial v_A}$, désigne la dérivée; la dérivée normale généralisée associée à l'opérateur différentiel A intervenant dans les équations aux dérivées partielles. Du point de vue mathématique, c'est elle qui doit intervenir dans les conditions aux limites pour que le problème soit bien posé. Ainsi $\frac{\partial \theta}{\partial v_A}$

intervient tout naturellement dans les problèmes physiques, en l'occurrence quand le flux de chaleur est imposé sur une partie de $(\partial\omega)$.

L'équation de la chaleur dans le cas statique pour un milieu non homogène et non isotrope s'écrit :

$$(IV.2.3) \quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j}) = 0$$

Les lois d'état ne constituent qu'une partie des lois de comportement et ne permettent à elles seules d'exploiter les équations de la thermoélasticité.

Il faut alors écrire une loi complémentaire qui donne une information sur le vecteur flux .

En milieu isotrope, on a :

$$(IV.2.4) \quad q_i = - a \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$$

En thermique, on suppose que le milieu (ω) est isotrope (hypothèse d'ailleurs simplificatrice), ce qui permet d'écrire :

$$(IV.2.5) \quad K_{ij}(x) = \lambda(x) \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1, (i,j) = 1; \delta_{ij} = 0, i \neq j)$$

La propriété de coercitivité est traduite par :

$$(IV.2.6) \quad \lambda(x) \delta_{ij} \delta_i \delta_j = \lambda(x) \|\delta\|^2 > \inf_{x \in (\omega)} \lambda(x) \|\delta\|^2$$

On pose :

$$(IV.2.7) \quad c = \inf \lambda(x), \quad x \in (\omega)$$

On assure ainsi la coercitivité de la solution en θ de (IV.2.2), il reste alors à déterminer θ .

On suppose tout d'abord θ continue dans (ω) et continument différentiable sur $(\partial\omega)$.

La propriété résultant des formules de Green montre que :

$$\int_{\Omega} v \Delta \theta dx = - \int_{\omega} \nabla v \cdot \nabla \theta dx - \int_{\partial\omega} v \cdot \frac{\partial \theta}{\partial n} ds$$

où v et θ sont dérivables au sens des distributions dès que $\theta \in H^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$.

On définit $H^1(\omega)$ par :

$$(IV.2.8) \quad H^1(\omega) = \left\{ \theta \in \mathcal{D}'(\omega); \theta \in L^2(\omega), \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \in L^2(\omega), \Delta \theta \in L^2(\omega) \right\}$$

$D(A)$ est le domaine de l'opérateur linéaire A , où :

$$(IV.2.9) \quad D(A) = \left\{ \theta^* \mid \theta^* \in \mathcal{C}^2(\bar{\omega}), \theta^* = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}$$

posons :

$$A\theta = \nu \quad (A \text{ symétrique}), \text{ on aura :}$$

$$\langle A\theta, \nu \rangle = \langle \theta, A\nu \rangle \quad \forall \theta \in D(A), \forall \nu \in D(A)$$

Si $A \gg 0$ on a :

$$(IV.2.10) \quad \langle A\theta, \nu \rangle = 0 \quad (\text{égalité ayant lieu} \Leftrightarrow \theta = 0)$$

calculons $\langle A\theta, \theta \rangle$:

$$\langle A\theta, \theta \rangle = - \int \Delta \theta \cdot \theta \, dx = \int \nabla \theta \cdot \nabla \theta \, dx, \quad \forall \theta \in D(A)$$

L'opérateur A symétrique, $\theta = 0$ sur $\partial\omega$, on en déduit que :

$$\langle A\theta, \theta \rangle = \int_{(\omega)} |\nabla \theta|^2 \, dx = 0, \text{ en vertu de (VIII.2.10),}$$

donc : $|\nabla \theta|^2 = 0$, c'est-à-dire $|\nabla \theta|_{L^2(\omega)} = 0 \quad \forall \theta \in (\omega)$.

Il en résulte que :

$$\theta \text{ est constant } \forall x \in (\omega).$$

D'après la relation (VIII.2.10), θ existe et il est l'unique solution de (IV.2.2) (Lax-Milgram).

Supposons l'existence de θ_1 et θ_2 solution du problème initial alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \hat{\theta} = 0 \quad \text{dans } (\omega) \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (\partial\omega) \\ \hat{\theta} = 0 \quad \text{sur } (\omega) \end{array} \right. \quad \hat{\theta} = \theta_2 - \theta_1$$

$\hat{\theta} \in D(A)$, $A\hat{\theta} = 0$, implique :

$$\langle A\hat{\theta}, \hat{\theta} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\theta} = 0, \text{ ce qui montre que :}$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 \quad (\text{unicité de la solution}).$$

On prouve ainsi qu'en tout point $X \in (\omega)$, la solution de (IV.2.2) existe et elle est unique.

IV.3.- Plaque mince thermoélastique en flexion et chargée transversalement

IV.3.1.- Définition et position du problème [16], [14], [3]

L'étude de la plaque thermoélastique se fait en théorie linéaire, ce qui donne des résultats approchés.

Dans ce qui va suivre, on suppose que les paramètres considérés dans les calculs, varient linéairement suivant la direction normale à OX_3 .

Tout d'abord pour fixer les idées, on donne les définitions :

Définition :

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles distants de h et par une surface cylindrique perpendiculaire à ces plans. Les équations des plans moyens étant :

$$x_3 = +\frac{h}{2} \quad x_3 = -\frac{h}{2}, \text{ soit :}$$

$$(IV.3.1) \quad |x_3| < \frac{h}{2}$$

Le domaine Ω occupé par la plaque est défini par (III.1.1).

Pour un point $M(x_1, x_2)$ fixe dans (Ω) , $\nabla_{x_3} = 0$. L'état de contrainte est alors plan ($\parallel OX_1, X_2$).

Définition d'une plaque mince

Une plaque (Ω) est mince lorsque la hauteur est presque négligeable devant son diamètre, ce qui correspond à une condition mathématique à savoir l'existence de ε :

$$\varepsilon = \frac{h}{d} \ll 1 \quad (d : \text{diamètre}, h : \text{hauteur})$$

En pratique, la plaque est mince dès que l'on a :

$$10h < d \quad (\text{condition d'origine expérimentale}).$$

Cette condition d'origine expérimentale, impose une limite de validité pour la théorie de la flexion. Le fait d'avoir supposé la plaque mince, permet de ramener le problème réel à un problème bidimensionnel.

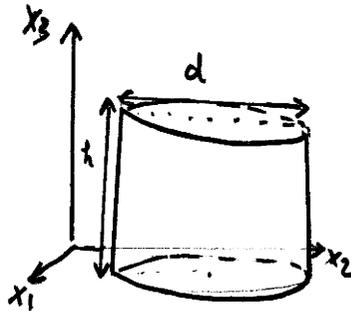
En outre, on suppose faibles et continus les déplacements et les déformations dans l'épaisseur $h(x_1, x_2)$ de la plaque. Ces suppositions sont réalistes sur le plan physique et pratique du point de vue mathématiques.

Ainsi, on étudie la plaque thermoélastique qui fléchit sous l'action d'une force perpendiculaire au plan moyen.

On remarque tout d'abord que :

en $x_3 = \varepsilon \frac{h}{2}$ ($\varepsilon = \pm 1$), il n'y a aucun effort extérieur qui s'exerce donc :

$$(IV.3.2) \quad \sigma_{33}(x_1, x_2; \varepsilon \frac{h}{2}) = 0$$



IV.3.2.- Equations approchées : modèle de Kirchoff

De la relation de Hooke, on déduit pour $X_3 = \varepsilon \frac{h}{2} (\varepsilon = \pm 1)$ les relations :

$$\begin{aligned} u_{3,1} + u_{1,3} &= 0 \\ u_{1,3} &= -w_{,1} \\ u_{2,3} &= -w_{,2} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.3})$$

En intégrant ces relations par rapport à X_3 , on trouve :

$$\begin{aligned} u_1 &= -X_3 \cdot w_{,1} + \hat{u}_1 \\ u_2 &= -X_3 \cdot w_{,2} + \hat{u}_2 \\ u_1 &= u_2 \quad \text{pour } h=0 \end{aligned} \quad (\text{IV.3.4})$$

Le déplacement $w(X_1, X_2)$, appelé aussi déflexion est indépendant de X_3 .

Le modèle de Kirchoff en théorie linéaire d'une plaque thermoélastique permet à l'ordre $O(h^2)$ d'obtenir les relations approchées :

$$\sigma_{\alpha\beta} = -X_3 \cdot \bar{\sigma}_{\alpha\beta} + \hat{\sigma}_{\alpha\beta} ; \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}, \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega) \quad (\text{IV.3.5})$$

En explicitant (IV.3.5) on trouve :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{EX_3}{1-\nu^2} (w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{E}{1-\nu^2} (\hat{\varepsilon}_1 + \nu \hat{\varepsilon}_2) - \frac{\gamma \theta}{1-\nu} \\ \sigma_{22} &= -\frac{EX_3}{1-\nu^2} (w_{,22} + \nu w_{,11}) + \frac{E}{1-\nu^2} (\hat{\varepsilon}_2 + \nu \hat{\varepsilon}_1) - \frac{\gamma \theta}{1-\nu} \\ \sigma_{12} &= -\frac{EX_3}{1+\nu} w_{,12} + \frac{E}{1+\nu} \hat{\varepsilon}_{12}, \quad \theta = T - T_0 = X_3 \cdot H(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.6})$$

Remarque : En théorie linéaire le champ de température au voisinage d'un point M de (Ω) est présenté par $T = T_0 + \chi_3 H(x_1, x_2)$

L'élimination de θ des équations (IV.3.6) permet d'obtenir (IV.3.6bis)

$$\sigma_{11} = -\frac{E\chi_3}{1-\nu^2} (W_{,11} + \nu W_{,22} + \delta(1+\nu)H) + \frac{E}{1-\nu^2} (\hat{\epsilon}_1 + \nu \hat{\epsilon}_2)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E\chi_3}{1-\nu^2} (W_{,22} + \nu W_{,11} + \delta(1+\nu)H) + \frac{E}{1-\nu^2} (\hat{\epsilon}_2 + \nu \hat{\epsilon}_1)$$

$$\sigma_{12} = \frac{-E\chi_3}{1+\nu} W_{,12} + \frac{E}{1+\nu} \hat{\epsilon}_{12}$$

$$\hat{u}_{1,1} = \hat{\epsilon}_1 ; \quad \hat{u}_{2,2} = \hat{\epsilon}_2 ; \quad \hat{u}_{1,2} = \hat{\epsilon}_{12}$$

(IV.3.6bis)

IV.3.3.- Relations entre les forces, les moments et les contraintes sur les bords d'une plaque

Comme dans les cas précédents, on définit les nouvelles quantités

$M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}$ dans $L^2(\Omega)$:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \chi_3 dx_3 \quad (\text{tenseur des moments résultants})$$

$$(IV.3.7) \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad \text{tenseur des efforts résultants}$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad \text{efforts tranchants}$$

Les quantités $\overline{\sigma}_{\alpha\beta}$ et $\overline{\sigma}_{\alpha\beta}$ étant indépendants de χ_3 , on a :

(IV.3.8)

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{h^3}{12} \overline{\overline{\nabla}}_{\alpha\beta}$$

$$N_{\alpha\beta} = h \overline{\overline{\nabla}}_{\alpha\beta}$$

$$Q_{\alpha} = h \cdot \overline{\overline{\nabla}}_{\alpha 3}$$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$\alpha = \beta = 2$$

$$\alpha = 1, \beta = 2$$

$$\overline{\overline{\nabla}}_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\widehat{\varepsilon}_1 + \nu \widehat{\varepsilon}_2) = \frac{E}{1-\nu^2} (\widehat{\varepsilon}_2 + \nu \widehat{\varepsilon}_1) = \frac{E}{1-\nu^2} \widehat{\varepsilon}_{12}$$

En explicitant les formules (VI.3.8), on obtient les moments de flexion

M_{11} , M_{22} et de torsion M_{12} .

(IV.3.9)

$$M_{11} = -\widehat{D}(W_{,11} + \nu W_{,22} + \gamma(1+\nu)H)$$

$$M_{22} = \widehat{D}(W_{,22} + \nu W_{,11} + \gamma(1+\nu)H)$$

$$M_{12} = -\widehat{D}(1-\nu)W_{,12} ; \widehat{D} = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} ; H = H(x_1, x_2)$$

De la même manière on trouve les efforts tranchants N_{11} , N_{22} , N_{12} .

(IV.3.10)

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\widehat{\varepsilon}_1 + \nu \widehat{\varepsilon}_2)$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\widehat{\varepsilon}_2 + \nu \widehat{\varepsilon}_1)$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{1+\nu} (\widehat{\varepsilon}_{12})$$

En effet, la plaque (Ω) chargée transversalement fléchit sous l'action de $\vec{f}(0,0, f_3)$ perpendiculaire au plan moyen et des couples de flexion et de torsion.

En théorie linéaire, le champ de température $\vec{T}(x_1, x_2, 0)$ au voisinage d'un point M de (Ω) est de la forme $T = T_0 + x_3 \cdot H$.
En éliminant θ des équations (IV.3.6) on a obtenu (IV.3.6bis) et (IV.3.9).
C'est la loi de Hooke-Duhamel qui a permis d'établir le lien entre contraintes, déformations et température pour la première fois en thermoélasticité plane.
On s'aperçoit alors que toutes ces quantités évoquées sont indépendantes de x_3 .
La plaque

La méthode employée consiste à exprimer $w(x_1, x_2)$ en un point M_0 du feuillet moyen, pour en déduire ensuite au point M , le vecteur déplacement \vec{u} , les tenseurs de contrainte et de déformation. Le déplacement et ces déformations sont supposés petits, ce qui permet de manière réaliste de confondre les coordonnées lagrangiennes et eulériennes. On a en outre supposé que v_{ij} et U_{ij} sont continus et indéfiniment différentiables c'est-à-dire :

$$(IV.3.11) \quad \begin{aligned} \vec{u} &\in \mathcal{C}^2(\Omega) & , & \vec{\sigma} \in \mathcal{C}^1(\Omega) \\ \vec{u}_i &\in \mathcal{C}^0(\Omega) & \vec{\sigma} &\in \mathcal{C}^0(\Omega) \end{aligned}$$

La définition et la signification des déformations géométriques sont traduites de la manière suivante :

On considère $M \in (\Omega)$, $m \in (\omega)$ tels que :

$$(IV.3.12) \quad \begin{aligned} \omega &\rightarrow \hat{\omega} : m = m + u_i \\ \Omega &\rightarrow \hat{\Omega} : M = M + u_i (\vec{m}_i + x_3 \vec{e}_3) \end{aligned}$$

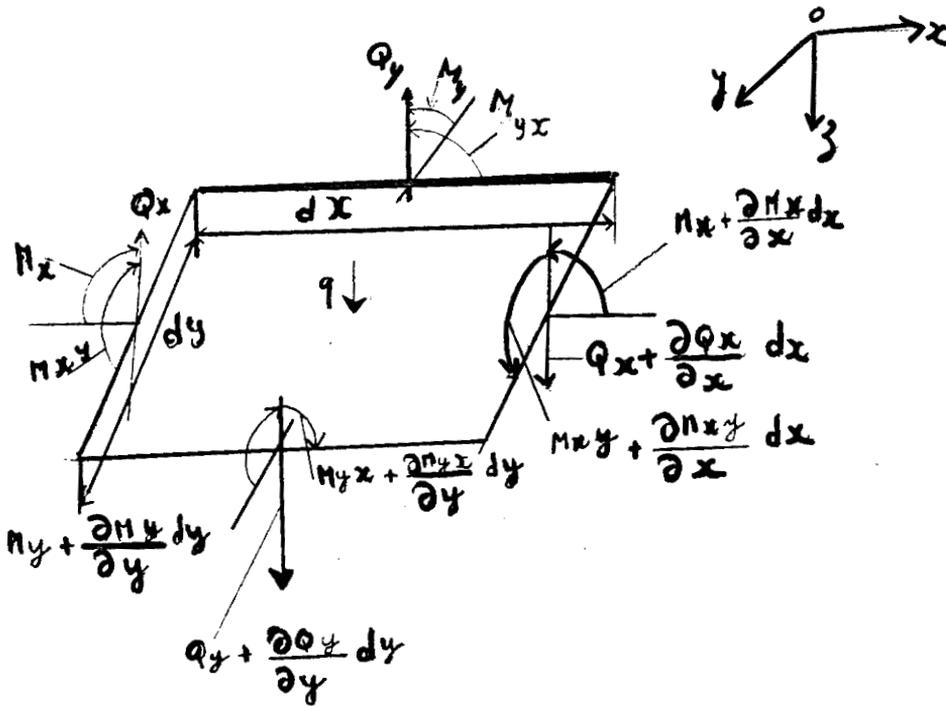
$$(VI.3.13) \quad \vec{u}' = \hat{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{n}_0 H$$

\vec{u} est un champ de déplacement. Dans de nombreux cas, on considère que les déplacements longitudinaux de la particule sont négligeables devant son déplacement transversal w . Cette hypothèse que l'on peut qualifier de réaliste, permet

d'obtenir des résultats simples, concernant les quantités $\bar{U}_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ et $N_{\alpha\beta}$.
Ainsi :

$$(IV.3.13bis) \quad \vec{U} = \vec{W} \wedge \vec{M}_0 \vec{M} \quad (\hat{u} \ll \vec{U})$$

IV.3.4.- Equations d'équilibre de la plaque thermoélastique [13]. [22].



On remarque que les poids de l'élément (δ) sont sollicités par les forces Q_x et Q_y trouvées à l'aide des contraintes $\bar{\sigma}_{x_3 x_1}$ et $\bar{\sigma}_{x_3 x_2}$.

$$(IV.3.14) \quad Q_{x_1} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{x_3 x_1} dx_3, \quad Q_{x_2} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{x_3 x_2} dx_3$$

La condition d'égalité à zéro de toutes les forces dans la direction de la normale implique :

$$(IV.3.15) \quad Q_{11,1} + Q_{22,2} + \int_3 = 0, \quad \int_3 \text{ est la charge transversale.}$$

De la condition d'égalité à zéro des moments par rapport aux axes OX_1 et OX_2 , découlent les relations suivantes :

$$(IV.3.16) \quad \begin{aligned} M_{11,1} + M_{21,2} - Q_{11} &= 0 \\ M_{12,1} - M_{22,2} + Q_{22} &= 0 \end{aligned}$$

De ces équations découlent les représentations des forces tranchantes par le déplacement $W(x_1, x_2)$:

$$(IV.3.17) \quad \begin{aligned} Q_{11} &= -\delta [(\Delta W)_{,1} + \gamma(1+\nu)H_{,1}] \\ Q_{22} &= -\delta [(\Delta W)_{,2} + \gamma(1+\nu)H_{,2}] \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (IV.3.15) devient :

$$\delta [(\Delta W)_{,11} + (\Delta W)_{,22} + \gamma(1+\nu)(H_{,11} + H_{,22})] - \int_3 = 0$$

soit :

$$(IV.3.18) \quad \Delta \Delta W + \gamma(1+\nu)\Delta H = \frac{\int_3}{\delta}$$

On obtient ainsi pour le déplacement W , une équation différentielle du quatrième ordre non homogène, caractérisée par le nouveau terme qui n'est autre chose que l'apport thermique.

V.- REPRESENTATION D'UN ETAT THERMOELASTIQUE PLAN A L'AIDE DES POTENTIELS COMPLEXES [2], [3], [4], [17], [22]

V.1.- Représentation et théorème

On sait tout d'abord que toute fonction $\Psi(x_1, x_2)$ peut être représentée de manière très simple à l'aide de fonctions de deux variables complexes.

Cette représentation est d'une très grande importance pour la théorie de l'équation biharmonique et en particulier pour la théorie de l'élasticité plane.

Comme $\Delta\Delta\Psi = \theta = 0$ dans (Ω) , il existe trois fonctions analytiques $\varphi(z)$, $g(z)$, $f(z)$ telles que :

$$(V.1.1) \quad \Psi(x_1, x_2) = \Re \left\{ \bar{z} \varphi(z) + g(z) \right\} = \frac{1}{2} [z \bar{\varphi}(z) + \bar{z} \varphi(z) + \bar{g}(z) + g(z)]$$

$$(V.1.2) \quad \theta(x_1, x_2) = \Re f(z) = \frac{1}{2} (f(z) + \bar{f}(z))$$

$$\bar{f}(z) : f(z)$$

$f(z)$ est une fonction holomorphe de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

En vertu des relations de Cauchy, on a :

$$\frac{df}{dz} = \frac{d}{d\bar{z}} (b_1 + i b_2) = \frac{1}{2} [b_{1,1} - b_{2,2} + i(b_{1,2} + b_{2,1})] = 0$$

ce qui implique que :

$$(V.1.3) \quad b_{1,1} = b_{2,2} ; \quad b_{1,2} = -b_{2,1} \quad \text{sont vérifiées par}$$

les parties réelles et imaginaires de $f(z)$.

Théorème :

A l'aide des potentiels complexes $\varphi(z)$, $g(z)$ et $f(z)$ on a la représentation d'un état thermoélastique plan :

$$(V.1.4) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\psi'(z) + \overline{\psi'(z)})$$

$$(V.1.5) \quad \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = -2[z\overline{\psi''(\bar{z})} + \overline{g''(\bar{z})}]$$

$$(V.1.6) \quad 2\eta(u_1 + iu_2) = (3-4\nu)\psi(z) - z\overline{\psi'(z)} - \overline{g'(z)} + 2\gamma(2\nu-1)f(z) + w$$

où $w(z) = \alpha z + \beta$; $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $F'(z) = f(z)$.

Réciproquement, si les composantes u_1 , u_2 du déplacement (V.1.6) sont uniformes, $[u_x, \sigma_{\alpha\beta}, \theta]$ est un état thermoélastique plan associé à ψ , θ , η , ν et γ .

Démonstration

De manière classique on a :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta\psi = 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}[\bar{z}\psi(z) + z\overline{\psi'(z)} + \overline{g(z)}] = 2(\psi'(z) + \overline{\psi'(z)})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} &= -[(\psi_{,1} + i\psi_{,2})_{,1} + i(\psi_{,1} + i\psi_{,2})_{,2}] \\ &= -2\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}[\bar{z}\psi(z) + z\overline{\psi'(z)} + g(z) + \overline{g(z)}] = -2[z\overline{\psi''(z)} + \overline{g''(z)}] \end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$(V.1.7) \quad \begin{aligned} D(z, \bar{z}) &= u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$2 \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \mu_{1,1} - \mu_{2,2} + i(\mu_{2,1} + \mu_{1,2})$$

$$4\eta \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = -4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \left(\Psi \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i} \right) \right) \text{, soit}$$

$$= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\delta\theta}{2(\lambda + \eta)} + i(\mu_{2,1} - \mu_{1,2})$$

$$4\eta D(z, \bar{z}) = -4 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) + h(z) = h(z) - 2[z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \varphi(z) + g'(z)]$$

d'où

$$4\eta \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{z}^2} + h'(z) = \frac{\eta}{\lambda + \eta} [\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\delta\theta] + 2i\omega_{1,2}$$

$$= -(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + h'(z).$$

$$h'(z) = \frac{\lambda + 2\eta}{\lambda + \eta} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{2\delta\eta}{\lambda + \eta} \theta + 2i\omega_{1,2}$$

$$h(z) + \bar{h}(\bar{z}) = 4 \frac{\lambda + 2\eta}{\lambda + \eta} (\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})) - \frac{2\delta\eta}{\lambda + \eta} (f(z) + \bar{f}(\bar{z}))$$

$$h''(z) = \frac{4(\lambda + 2\eta)}{\lambda + \eta} \varphi''(z) - \frac{2\delta\eta}{\lambda + \eta} f'(z)$$

$$h'(z) = \frac{4(\lambda + 2\eta)}{\lambda + \eta} \varphi'(z) - \frac{2\delta\eta}{\lambda + \eta} f(z) + c'd \quad (F'(z) = f(z))$$

$$h(z) = \frac{4(\lambda + 2\eta)}{\lambda + \eta} \varphi(z) - \frac{2\delta\eta}{\lambda + \eta} F(z) + c'dz + \beta$$

d'où l'expression du déplacement :

(V.1.10)

$$2\eta D(z, \bar{z}) = (3-4\nu)\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) + 2\gamma(2\nu-1)F(z) + idz + p$$

$$2\eta D^*(z, \bar{z}) = 2\eta D(z, \bar{z}) + 2\gamma(2\nu-1)F(z), \quad \gamma \in [0, 1], \quad 2\nu-1 > 0$$

Le déplacement infinitésimal $w(z) = idz + p$ peut raison notablement être négligé dans la plupart des cas.

La formulation du problème de thermoélasticité plan à l'aide des potentiels complexes, a permis de mettre en évidence l'influence de la température qui s'est traduite par un accroissement du déplacement. L'intérêt de cette formulation réside dans le fait d'avoir quantifié l'apport thermique qui est le terme complémentaire $2\gamma(2\nu-1)F(z)$. On s'aperçoit que ce terme dépend de la nature du matériau et de la fonction holomorphe $F(z)$.

Ce résultat est, du point de vue physique, peu surprenant dans la mesure où ce matériau n'est pas isolant.

Inversement si l'on pose :

$$4\varphi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$$

$$F(z) = F_1(z) + iF_2(z)$$

(V.1.4) s'écrit :

$$2\eta u_d = -\varphi_{,d} + (1-\nu)\varphi_d(z) + 2\gamma(2\nu-1)F_d + w_d$$

d'où

$$2\eta u_{1,1} = -\varphi_{,11} + (1-\nu)\varphi_{1,1} + 2\gamma(2\nu-1)F_{1,1} + w_{1,1}$$

$$2\eta u_{2,2} = -\varphi_{,22} + (1-\nu)\varphi_{2,2} + 2\gamma(2\nu-1)F_{2,2} + w_{2,2}$$

puis, compte tenu de :

$$\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} = F_{1,2} + F_{2,1} = 0, \quad F(z), \varphi(z) \text{ holomorphes dans } \mathbb{C}.$$

$$\eta(u_{1,2} + u_{2,1}) = -\varphi_{,12}$$

$$\varphi_1 = 2[\varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})}] \quad , \quad \varphi_{1,1} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}]$$

$$\varphi_2 = -2i[\varphi(z) - \overline{\varphi(\bar{z})}] \quad , \quad \varphi_{2,2} = \Delta\varphi.$$

$$(F_{1,1} = F_{2,2} = \theta)$$

(V.1.11)

$$\eta(u_{1,2} + u_{2,1}) = -\varphi_{1,2}$$

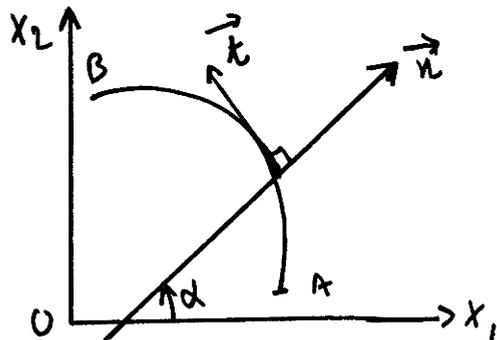
$$2\eta(u_{1,1} + u_{2,2}) = (1 - 2\nu)(\Delta\varphi + 4\gamma\theta)$$

Ce qui a écrit :

$$2\eta \varepsilon_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \nu \sigma_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 2\gamma(2\nu - 1)\theta$$

ce qui montre que $[u_\alpha, \sigma_{\alpha\beta}, \theta]$ est un état thermoélastique plan.

V.2.1.- Calcul des éléments de réduction en O des efforts appliqués sur l'arc



$$(V.2.1) \quad X + iY = \int_{\overline{AB}} (X_n + iY_n) ds = i[\varphi_{1,1} + i\varphi_{2,2}]_A^B = [\varphi(z) + 2\varphi' + \overline{g'}]_A^B (-i)$$

$$(V.2.2) \quad M = \int_{\Omega_0} (x Y_n - y X_n) ds = -[x \psi_1 + y \psi_2]_A^B + [\psi]_A^B$$

où

$$x \psi_1 + y \psi_2 = \operatorname{Re} [z (\psi_1 + i \psi_2)]$$

$$\psi_1 + i \psi_2 = \overline{\varphi(z)} + \bar{z} \varphi'(z) + g'(z)$$

$$\psi(z, \bar{z}) = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi(z) + g''(z)]$$

Ainsi, par le biais de (V.1.1) et en groupant les résultats précédents on trouve

$$X + iY = -i [\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{g'(z)}]_A^B$$

(V.2.3)

$$M = \operatorname{Re} [g(z) - z g'(z) - z z' \varphi'(z)]_A^B$$

Si l'on désigne par $\vec{n}(n_1, n_2)$ la normale à \overline{AB} et si l'on pose $d = (\vec{n}, \vec{oz})$ ainsi on pourra écrire :

(V.2.4)

$$\begin{aligned} n_1 + i n_2 &= e^{id} = -i \frac{dz}{ds} ; & n_1 &= \frac{i}{2} \left(\frac{d\bar{z}}{ds} - \frac{dz}{ds} \right) \\ n_1 - i n_2 &= e^{-id} = i \frac{d\bar{z}}{ds} ; & n_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{z}}{ds} + \frac{dz}{ds} \right) \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur des contraintes en coordonnées polaires sont les suivantes, après projection

$$\sigma_{nn} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma_{n\lambda} = \sigma_{11} \cos^3 \alpha + \sigma_{22} \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2\sigma_{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_{n\lambda} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{12} \cos 2\alpha$$

De ces formules on obtient :

(V.2.5)

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} + \sigma_{\lambda\lambda} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}] \\ \sigma_{nn} - \sigma_{\lambda\lambda} \pm 2i\sigma_{n\lambda} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22} \pm 2i\sigma_{12}) e^{\pm 2i\alpha} \end{aligned}$$

V.3.- Etude du flux de chaleur le long de

\overline{AB} est un matériau homogène et isotrope. Le vecteur flux de chaleur \vec{q} est donné par loi de Fourier.

$$(V.3.1) \quad \vec{q} = k \vec{\nabla} \theta \quad [15]$$

$$(V.3.2) \quad -\vec{q} \cdot \vec{N} = q \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega$$

$$(V.3.3) \quad k \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{N} = k \frac{\partial \theta}{\partial N} = q$$

Posons :

$$\theta = \theta(z, \bar{z}), \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

(V.3.3) devient :

$$\frac{d\theta}{dN}(z, \bar{z}) = \theta_{,1} \cdot \frac{dx_1}{ds} + \theta_{,2} \frac{dx_2}{ds} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_a} = \cdot, a \right)$$

En fonction des potentiels complexes $\overline{f'(z)}$ et $\overline{f(z)}$,

$$\theta_{,1} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} = \theta'(\bar{z})$$

$$\theta_{,2} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2} = \theta'(z) \quad \text{soit}$$

(V.3.4)

$$\begin{aligned} \theta_{,1} &= \frac{1}{2} [\overline{f'(z)} + f'(\bar{z})] ; & f'(\bar{z}) &= \theta_{,1} + i\theta_{,2} \\ \theta_{,2} &= \frac{1}{2} [\overline{f'(z)} - f'(\bar{z})] ; & \overline{f'(z)} &= \theta_{,1} - i\theta_{,2} \end{aligned}$$

Le flux total le long de l'arc \overline{AB} est donné par :

$$\int_a^b k \frac{d\theta}{dN}(s) ds = \int_a^b R_0 \left\{ \frac{i k}{2} (\theta'(\bar{z}) \frac{dz}{ds} - \theta'(z) \frac{d\bar{z}}{ds}) \right\} ds \quad \text{soit}$$

(V.3.5)

$$\int k \frac{d\theta}{dN}(s) ds = \frac{i k}{2} [\overline{f(z)} - f(\bar{z})] = q^*$$

Remarque :

Si l'on isole les parois de l'arc \overline{AB} , alors le vecteur flux de chaleur s'annule ($\vec{q} = \vec{0}$, $T - T_0 \approx 0$).

Par contre, lorsque le flux est constant le long de \overrightarrow{AB} alors :

$$[\overline{f(z)} - f(z)] = \text{constant.}$$

Il convient aussi d'examiner le cas où la surface de \overrightarrow{AB} est telle qu'elle est discontinue. Dès lors, cela se traduit physiquement par :

$$\left[\frac{ik}{2} [\overline{f(z)} - f(z)] \right] = 0 \quad \forall M \in (S)$$

Si $k=0$, nécessairement les deux situations suivantes :

$$k=0, \quad \overline{f(z)} = f(z) \quad \text{ou} \quad \overline{f(z)} - f(z) \neq 0$$

(V.3.6)

$$k \neq 0, \quad \overline{f(z)} = f(z)$$

La variation du flux de chaleur sur les frontières du matériau \overrightarrow{AB} ($a=\lambda, b=\lambda$) détermine le champ thermique en son sein.

Nous avons en général pour un problème de thermique 3 sortes de conditions aux limites à savoir :

$\theta(z_0, t) = \theta_1(t)$	imposé sur (N) par l'extérieur
$q(z_0, t) = q_1(t)$	imposé sur (N)
$q(z_0, t) = h [\theta(z_0, t) - \theta_f]$	
$\theta(z, 0) = \theta_0(z)$	condition initiale

(V.3.7)

Le paramètre k , appelé conductivité thermique traduit la capacité du milieu à conduire de la chaleur. A ce paramètre on associe la grandeur R_c appelée résistance de contact définie par :

$$\frac{ik}{2} \left(\frac{\overline{f(z)} - f(z)}{R_c} \right) = k \left[\frac{\partial \theta}{\partial N} \right]_{\theta_1}$$

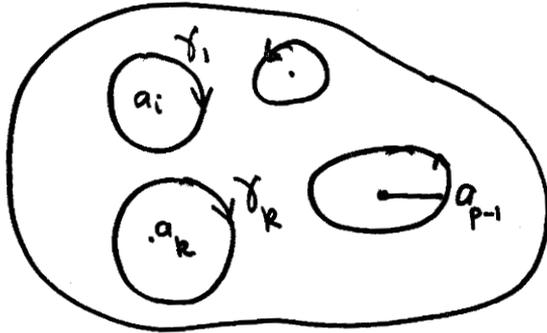
(V.3.8)

VI.- RESTRICTIONS SUR LES POTENTIELS COMPLEXES $\varphi(z)$, $g(z)$ ET $f(z)$
POUR QUE CONTRAINTES, DEPLACEMENT ET TEMPERATURE SOIENT UNIFORMES [3], [22].

VI.1.- Position du problème

On suppose que domaine (ω) est multiplément connexe et que $\partial\omega = \gamma = \bigcup_{m=1}^p \gamma_m$ est un arc fermé simple ou (lacet injectif). En effet, si (ω) n'est pas borné, les composantes connexes bornées de $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ seront deux à deux disjointes.

Si (ω) est borné, elles seront en outre strictement incluses dans la composante connexe bornée de γ_p .



(ω) est soumis à une température définie comme auparavant, par les potentiels complexes $f(z)$ et $\overline{f(z)}$, c'est-à-dire :

$$\Theta(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} [f(z) + \overline{f(z)}]$$

On suppose en outre quelle que soit l'évolution de la température, les arcs γ_m restent toujours 2 à 2 disjointes.

Définition et propriété de l'indice

Etant donné $f: \omega \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe et $\zeta \in (\omega)$, on pose :

$$(VI.1.1) \quad J(f(z), \zeta) = \int_{\gamma} f'(z) dz$$

où \mathcal{C} est un contour simple fermé, donc un lacet injectif arbitraire inclus dans (ω) et passant par ξ , la variation $[f]_{\xi}^{\xi}$ de f sera donc uniforme dans (ω) .

$$J(f(z); \xi) = [f]_{\xi}^{\xi} = \int_0^{\xi} f(\xi + \eta(s)) \eta'(s) ds = f(\xi+0) - f(\xi-0)$$

$J(f(z); \xi) = 0$, $\forall \xi \in (\omega)$.
 J défini par (VI.1.1) est appelé indice.

On démontre les propriétés de l'indice J et il en résulte que :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} J(f(z), \xi) = J\left(\frac{df}{dz}, \xi\right) \quad \text{dérivation}$$

$$(i) \quad J(f+g, \xi) = J(f; \xi) + J(g; \xi) \quad \text{linéarité}$$

(VI.1.2)

$$(ii) \quad J(\omega f(z), \xi) = \omega(\xi) J(f; \xi) \quad \text{uniforme}$$

$$(iii) \quad J(\bar{f}(\bar{z}); \xi) = \overline{J(f(z), \xi)}$$

Si l'on impose aux contraintes, déplacements et température d'être uniformes dans (ω) , on voit que les potentiels complexes $\varphi(z)$, $f(z)$, $g(z)$ et doivent vérifier les relations suivantes à savoir :

(VI.1.3)

$$J(\varphi'(z) + \varphi(z); \xi) = 0 \quad \forall \xi \in (\omega)$$

$$J(z \bar{\varphi}''(\bar{z}) + \bar{g}''(\bar{z}); \xi) = 0$$

$$J(k\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z}) + \gamma F(z); \xi) = 0$$

$$J(f(z) + \bar{f}(\bar{z}); \xi) = 0$$

$$k = 3 - 4\nu \quad ; \quad \gamma^* = 2\gamma(2\nu - 1)$$

En dérivant la première égalité par rapport à ξ , puis par rapport à $\bar{\xi}$ on obtient :

$$(VI.1.4) \quad J(z \varphi''(z); \xi) = J(\bar{\varphi}''(\bar{z}); \bar{\xi}) = 0$$

d'où, à l'aide de la seconde relation

$$(VI.1.5) \quad J(z \bar{\varphi}''(\bar{z}); \bar{\xi}) = J(\bar{g}''(\bar{z}); \bar{\xi}) = 0$$

De même les troisième et quatrième égalités, dérivées par rapport à ,
donnent :

$$(VI.1.6) \quad J(k \varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}) + \gamma^* f(z); \xi) = 0 \quad ; \quad (F'(z) = f(z))$$

$$(VI.1.7) \quad J(f'(z); \xi) = 0$$

En effet, la relation (VI.1.7) implique :

$$J(f(z); \xi) = 2i\pi A.$$

A est une constante complexe qui dépend a priori du contour considéré
et (VI.1.3) implique :

$$J(g(z); \xi) = -2i\pi(E + F\xi)$$

La première égalité (VI.1.3), (VI.1.6) et (V.I.7) entraînent :

$$(VI.1.8) \quad J(\Psi'(z); \xi) = \frac{\gamma^*}{1+k} J(f(z); \xi) = -2i\pi i \left(\frac{\gamma^* A}{1+k} \right)$$

$$J(\varphi; \xi) = -2i\pi \left(\frac{\gamma^* \eta}{1+2\eta} \cdot A\xi + B \right) = -2i\pi \left(\frac{\gamma^*}{1+k} A\xi + B \right)$$

$$(VI.1.9) \quad J(F(z); \xi) = 2i\pi(A\xi + B')$$

$$J(2\eta D; \xi) = 2i\pi i \left[\left(\frac{\gamma^* k}{1+k} A\xi + kB \right) + \frac{\gamma^* \bar{A}}{1+k} \xi - \bar{F} + \gamma^*(A\xi + B') \right]$$

Le déplacement D sera uniforme $\forall \xi \in (\omega)$ si et seulement si

$$(VI.1.10) \quad \frac{\gamma^* k}{1+k} + \gamma^* A + \frac{\gamma^* \bar{A}}{1+k} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$k B + \bar{F} + \gamma^* B' = 0$$

alors :

$$\int (2\eta D; z) = 2i\pi(kB + \bar{F} + \gamma^* B')$$

On voit que donc que la fonction potentielle complexe $f(z)$ sera holomorphe et uniforme dans (ω) ainsi que $\psi'(z)$.

◇ Si le domaine (ω) est borné, les arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$, intérieurs au domaine limité par γ_p , seront orientés dans le sens rétrograde, γ_p l'étant dans le sens direct.

◇ Si le domaine (ω) est non borné :

Tous les $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ seront orientés dans le sens rétrograde.

Examinons successivement ces deux cas à savoir :

(ω) borné :

Si le domaine (ω) est borné, le long de tout contour \mathcal{C}_j , entourant $\gamma_j (1 \leq j \leq p-1)$ et seulement le long de ce contour \mathcal{C}_j intérieur à (ω)

on a :

$$\int (f(z); z) = 2i\pi A_j$$

où A_j est la constante complexe ne dépendant que du contour.

Si a_j est intérieur au domaine borné γ_j , on peut écrire :

$$f(z) = -A_j \ln(z - a_j) + h_j(z), \quad \int (h_j; z)_{\mathcal{C}_j} = 0$$

pour tout contour \mathcal{C}_j .

Comme $\int (\ln(z - a_j); z) = 0$, pour tout contour $\mathcal{C}_i, i \neq j$, on en déduit que $f(z)$ est de la forme :

$$(VI.1.11) \quad f(z) = -\sum_{j=1}^{p-1} A_j \ln(z-a_j) + h(z)$$

où $f(z)$ est holomorphe (donc uniforme) dans (ω) . De manière analogue, on établit que :

$$(VI.1.12) \quad g'(z) = -\sum_{j=1}^{p-1} F_j \ln(z-a_j) + l(z)$$

$$\text{Comme d'après (VI.1.2), } J(z \ln(z-a_j); \xi) \underset{\xi_k}{=} -2i\pi A_j \xi \delta_j p$$

on a d'après (VI.1.8) :

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= -\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\gamma^* A_j}{1+k} \ln(z-a_j) + k(z) \\ \varphi(z) &= -\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{\gamma^* A_j}{1+k} \cdot z + B_j \right) \ln(z-a_j) + l(z) \\ F(z) &= -\sum_{j=1}^{p-1} (A_j \xi + B'_j) \ln(z-a_j) + H(z) \end{aligned}$$

(VI.1.13)

De même on en déduit de (VI.1.10) que le déplacement est uniforme si

$$J(\mathcal{H}D; \xi) \underset{\xi_j}{=} J[k\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{g}'(z) + \gamma^* F(z); \xi] \underset{\xi_j}{=} 0$$

pour tout $j = 1, \dots, p-1$, ce qui équivaut à :

$$(VI.1.14) \quad \begin{aligned} A_j &= 0 \\ \bar{F}_j &= -k B_j - \gamma^* B'_j \end{aligned}$$

La fonction $f(z)$ est holomorphe uniforme dans (ω) , (donc θ l'est) et le flux de chaleur total au travers de tout γ_j est nul car :

$$(VI.1.15) \quad Q_j = \text{Im} \left[J(f(z), z) \gamma_j \right] = 0$$

Par ailleurs, d'après (V.1.2) on a :

$$X_j + i Y_j = -i J \left[\varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{g'(z)}; z \right] \gamma_j = 2\pi \left[\overline{F_j} - k B_j \right]$$

ou encore d'après (VI.1.14)

$$(VI.1.16) \quad X_j + i Y_j = -2\pi \left[(1+k) B_j + \gamma^* B_j' \right]$$

par ailleurs on a :

$$J(F(z); z) \gamma_j = \int_{\gamma_j} \left\{ \frac{1}{2} (f(z) + \overline{f(z)}) + \frac{1}{2} (f(z) - \overline{f(z)}) \right\} dz = \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

soit :

$$+ 2\pi i B_j' = \int_{\gamma_j} \Theta(z) dz - i \int \frac{d\Theta}{dN} dz$$

$$- 2\pi i B_j' = 2\Theta_j \quad \text{où} \quad \Theta_j = \int_{\gamma_j} \Theta(z) dz; \quad B_j' = \frac{i\Theta_j}{2\pi}$$

d'où la relation suivante :

$$(VI.1.17) \quad 2\pi(1+k) B_j = X_j + i Y_j - 2i\gamma^* \Theta_j$$

$$F_j = k \overline{B_j} + \gamma^* \overline{B_j}' = \frac{k(X_j - i Y_j) + 2i\gamma^* \Theta_j}{2\pi(1+k)}$$

◇ Si le domaine (w) est borné :

on a le déplacement, les contraintes et la température uniformes.

(VI.1.18)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^{P-1} (x_j + iy_j - i\gamma^* \theta_j) \ln(z - a_j) + h(z)$$

$$g'(z) = \sum_{j=1}^{P-1} \left(\frac{\kappa(x_j - iy_j)}{2\pi(1+\kappa)} + \frac{i\gamma^* \theta_j}{2\pi} \right) \ln(z - a_j) + l(z)$$

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^P \theta_j \ln(z - a_j) + k(z)$$

d'où si le domaine (w) est non borné, on a, pour $|z|$ assez grand, les relations suivantes :

(VI.1.19)

$$\varphi(z) = \frac{x + iy - i\gamma^* \theta}{2\pi(1+\kappa)} \cdot \ln z + H(z)$$

$$F(z) = \frac{i\theta}{2\pi} \ln z + k(z)$$

$$g'(z) = \left[\frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} (x - iy) + i \frac{\gamma^* \theta}{2\pi} \right] \ln z + L(z)$$

$$x + iy = \sum_{j=1}^P (x_j + iy_j), \quad \theta = \sum_{j=1}^P \theta_j$$

Les fonctions $H(z)$, $L(z)$, $K(z)$ sont des fonctions holomorphes en tout $z \in (\omega)$ tel que $|z| > R$ qu'on peut exclure lorsqu'il est à l'infini. X et Y sont les composantes du vecteur résultant des forces extérieures appliquées le long de la frontière $\partial\omega$, c'est-à-dire de l'union des contours $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ ($\partial\omega = \bigcup_{j=1}^p \gamma_j$). Une fonction est holomorphe en un point, si au voisinage de ce point, on peut la représenter sous la forme d'une série de Laurent, d'où :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$$

(VI.1.20)

$$K(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

$H(z)$, $L(z)$ et $K(z)$ convergent uniformément en tout point z d'un borné (ω^*) tel que $|z| > R$, ($\omega \subset \omega^*$).

Les relations (VI.1.19) et (VI.1.20) permettent d'analyser le comportement des contraintes et des déplacements lorsqu'ils sont bornés à l'infini.

VI.2.- Comportement des contraintes et des déplacements à l'infini

Si l'on suppose que le domaine (ω) est non borné, on peut, sous l'hypothèse supplémentaire selon laquelle les contraintes et les déplacements sont bornés à l'infini, préciser le comportement des potentiels complexes

$\varphi(z)$, $f(z)$ et $g(z)$. Les formules (V.1.4) et (V.1.5) deviennent alors :

(VI.2.1)

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \frac{-1}{\pi(1+k)} \left[\frac{\chi+i\gamma+2i\gamma'\bar{\theta}}{z} + \frac{\chi-i\gamma-2i\gamma'\theta}{\bar{z}} \right] + 2(\bar{H} + H')$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = \frac{-1}{\pi(1+k)} \left[\frac{\chi-i\gamma-2i\gamma'\bar{\theta}}{\bar{z}^2} \cdot z + \frac{k(\chi+i\gamma-2i\gamma'\theta)}{\bar{z}} \right] - 2[\bar{L}'(\bar{z}) - z\bar{H}'(\bar{z})]$$

$$\Theta(z) = \frac{1}{2} (f(z) + \bar{f}(\bar{z}))$$

$$\Theta(z) = \frac{i}{4\pi} \left(\frac{\theta}{z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{z}} \right) + \frac{1}{2} (\bar{K}'(\bar{z}) + K'(z))$$

où $2(\bar{H}'(\bar{z}) + H'(z)) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} n (a_n z^{n-1} + \bar{a}_n \bar{z}^{n-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} n \pi^{n-1} (e^{i(n-1)\theta} a_n + \bar{a}_n e^{-i(n-1)\theta})$
 $= \sum_{n=2}^{\infty} n \pi^{n-1} [a_n e^{i(n-1)\theta} + \bar{a}_n e^{-i(n-1)\theta}]$

où $z = \pi e^{i\theta}$, ($\sigma_{11} + \sigma_{22}$) borné ($n \rightarrow \infty$), on a :

$$a_n = \bar{a}_n = 0, \quad n > 2$$

De la même manière on montre que

$$b_n = \bar{b}_n = 0 \quad \text{pour } (n > 2) \quad \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12}$$

$$c_n = \bar{c}_n = 0 \quad \text{pour } (n > 2) \quad \Theta(z)$$

En considérant les développements en série de Laurent de fonctions holomorphes $H(z)$, $L(z)$ et $K(z)$ autour de 0 , on voit que contraintes et température seront bornées à l'infini si :

(VI.2.2)

$$\begin{array}{ll}
 H(z) = \Gamma z + \varphi_0(z) & \varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \\
 L(z) = \Gamma' z + \psi_0(z) & \psi_0(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \\
 K(z) = \Gamma'' z + \theta_0(z) & \theta_0(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \\
 \Gamma = a_1 = B + ic & \Gamma' = a'_1 = B' + ic'
 \end{array}$$

(VI.2.3)

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0; \quad \varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = \theta_0(\infty) = 0$$

Les constantes B , B' , C' introduites dans (VI.2.2) par le biais de (VI.1.19) confèrent à Γ , Γ' et Γ'' une très simple interprétation physique. Si, lorsque $z \rightarrow \infty$ l'état de contraintes tend vers un état uniforme de contraintes principales T_∞, N_∞ où $(\sigma_{11}, \sigma_{22}) = \varphi, \theta \rightarrow \theta_\infty$

On obtient alors :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 4B,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12}) = 2(B' + iC')$$

VI.3.- Contraintes et température bornées à l'infini

$$\Gamma' = \frac{N_\infty - T_\infty}{2} e^{2i\varphi}$$

(VI.2.5)

$$\operatorname{Re}(\Gamma') = \frac{N_\infty + T_\infty}{4}$$

$$\Gamma'' = \theta_\infty \quad (\text{en fait } \Gamma'' + \overline{\Gamma''} = 2\theta_\infty, \text{ mais } \theta(z) \in \mathbb{R}).$$

Pour déterminer complètement Γ , on se sert de D ou de D^* définis.

Ainsi :

$$\begin{aligned} 2\eta D^* &= k\varphi(z) - z\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{g}'(\bar{z}) + 2\gamma(2\gamma-1)F(z) + idz + \beta \\ &= \mu_{1,1} + \mu_{1,2} + i(\mu_{2,1} - \mu_{2,1}) + 2\gamma(\gamma-1)f(z) + idz + \beta \end{aligned}$$

$$2\eta \frac{\partial D^*}{\partial z} = k\varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z}) + 2\gamma(2\gamma-1)f(z) + id$$

$$2\eta \frac{\partial \bar{D}^*}{\partial \bar{z}} = k\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \varphi'(z) + 2\gamma(2\gamma-1)\bar{f}(\bar{z}) - id$$

$$2\eta \left(\frac{\partial D^*}{\partial z} - \frac{\partial \bar{D}^*}{\partial \bar{z}} \right) = (1+k) [\bar{\varphi}'(\bar{z}) - \varphi'(z)] + 2\gamma(2\gamma-1) [f(z) - \bar{f}(\bar{z})] + id$$

La rotation locale étant définie par :

$$2\omega = \mu_{2,1} - \mu_{1,2} \quad - \quad \text{on a pour le déplacement } D :$$

$$4i\eta\omega = 2\eta \left(\frac{\partial D}{\partial z} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) = (1+k) [\varphi'(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z})] + 2id$$

$$4\eta\omega = -i(1+k)(\Gamma - \bar{\Gamma}) + d = 2(1+k)J_m(\Gamma) + 2d$$

et

$$4\eta\omega_\infty = -i(1+k)(\Gamma - \bar{\Gamma}) + d = 2(1+k)J_\infty(\Gamma) + 2d$$

d'où

$$J_m(\Gamma) = \frac{2\eta\omega_\infty}{1+k} - \frac{d}{1+k}$$

et

$$P(\cdot) = \frac{N_{\infty} + T_{\infty}}{4} + \frac{2i\gamma\omega_{\infty}}{1+k} - \frac{-id}{1+k}$$

alors

$$\varphi'(z) = \frac{x+iy+2\gamma i\theta}{2\pi(1+k)} \cdot \frac{1}{z} + \frac{N_{\infty}+T_{\infty}}{4} + \frac{i(2\gamma\omega_{\infty}-d)+O(\frac{1}{z})}{1+k}$$

(VI.2.6)

$$g''(z) = \frac{k(x-iy)+2i\gamma\bar{\theta}}{2\pi(1+k)} \cdot \frac{1}{z} + \frac{N_{\infty}-T_{\infty}}{2} \cdot e^{2i\gamma} + O(\frac{1}{z^2})$$

$$f(z) = \frac{i\theta}{\pi} \cdot \frac{1}{z} + O_{\infty} + o(\frac{1}{z})$$

si les contraintes et la température sont uniformes et bornées à l'infini, les déplacements étant uniformes.

Si, en outre, on veut que les déplacements soient bornés à l'infini.

On a, puisque :

$$\begin{aligned} 2\eta D = & -\frac{k(x+iy)+2i\gamma^*\theta}{2\pi(1+k)} \cdot \ln z - \frac{k(x+iy)-2\gamma^*\theta}{2\pi(1+k)} \ln \bar{z} + \\ & \frac{z}{z} \cdot \frac{x-iy-2i\gamma^*\theta}{2\pi(1+k)} + \frac{i\gamma^*\theta}{\pi} \cdot \ln z + K H(z) - \overline{L(z)} - z \overline{H'(z)} + \\ & + i\alpha z + \beta + \gamma^* K(z) \end{aligned}$$

$$2\eta D = -\frac{k(x+iy)}{2\pi(1+k)} \cdot \ln(z\bar{z}) + \frac{i\gamma^*\theta}{(1+k)\pi} \ln(z\bar{z}) - P'(\bar{z}) + 2\{i\alpha + \pi K - \bar{\beta} + \gamma^*\} + O(1)$$

$$(VI.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} k(X + iy) = 2i\gamma^* \theta \\ \Gamma' = 0 \Leftrightarrow N_{\infty} = T_{\infty} \\ -\Gamma k + \bar{\Gamma} = i d + \gamma^* \theta_{\infty} \Leftrightarrow (1-k)T_{\infty} = 2\gamma^* \theta, \omega_{\infty} = 0 \end{array} \right.$$

donc :

$$\Gamma = \frac{T_{\infty}}{2} - i \frac{d}{1+k} = \frac{\gamma^* \theta_{\infty}}{1-k} - i \frac{d}{1+k}, \quad X + iy = 2i \frac{\gamma^* \theta}{k}$$

(VI.2.8)

$$\varphi'(z) = -\frac{X + iy}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{T_{\infty}}{2} - i \frac{d}{1+k} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$g''(z) = o\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$f(z) = \frac{k(X + iy)}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + \theta_{\infty} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Les obtenus dans ce chapitre mettent en évidence l'influence de la température. Cela se traduit par une modification importante des formules classiques de

Ainsi, le gradient de température fait naître de nouveaux potentiels complexes holomorphes $f(z)$ et $F(z)$ ($f(z) = F(z)$) dans (ω) .

VII.- APPLICATIONS

VII.1.- Le plan [3], [4]

Si le matériau occupe le plan, et si les déplacements et les contraintes sont uniformes, on peut écrire pour d'assez grandes valeurs de $|z|$, ou si l'état de contrainte à l'infini est nul et si $\mu_0 = \theta = \alpha = 0$, on obtient (VII.1.1).

(VII.1.1)

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= -\frac{x+iy+2i\gamma^2\theta}{2\pi(1+\kappa)} \cdot \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ g''(z) &= \frac{2(x-iy)+2i\gamma^2\theta}{2\pi(1+\kappa)} \cdot \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ f(z) &= \frac{i\theta}{\pi} \cdot \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{aligned}$$

◇ Notion de force concentrée :

Si l'on supprime les termes d'ordre $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, on obtient les potentiels complexes $\varphi_0'(z)$ et $g''(z)$ qui correspondent à une force concentrée à l'origine au sens suivant :

Si \mathcal{C}_R est le cercle de centre O et de rayon R $\mathcal{C}_R(0, R)$.
La résultant des efforts exercés sur le reste du plan par le reste du matériau intérieur à \mathcal{C}_R est :

(VII.1.2)

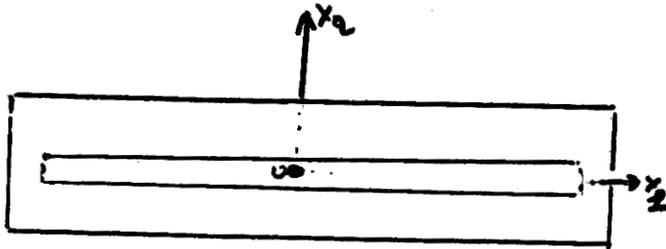
$$\begin{aligned} X_1 + iY_1 &= -i \left[\varphi(z) + \bar{g}(\bar{z}) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) \right]_{\mathcal{C}_R} \\ &= -i \left[-2i\pi \frac{x+iy+2i\gamma^2\theta}{2\pi(1+\kappa)} + 2i\pi \frac{\kappa(x+iy)-2i\gamma^2\theta}{2\pi(1+\kappa)} \right] \end{aligned}$$

Le moment résultant étant nul, on montre que :

(VII.1.3)

$$F = \frac{X + iY + 2i\gamma^* \theta}{2\pi(1+k)}$$

VII.2.- Plaque munie de fissures droites colinéaires [3], [4].



Si le matériau qui occupe le plan XOY , présente des fissures en nombre fini, portées par OX , $X \in [a_k, b_k]$, ($k=1, n$), et si l'on pose :

$$(VII.2.1) \quad f^g(x) = \lim_{z \rightarrow x+i0} f(z), \quad f^d(x) = f(x-i0), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ z = X + iY.$$

on vérifie classiquement que :

$$(VII.2.2) \quad (\sigma_{22} - i\sigma_{12})^g(x) = \varphi'(z) - \Omega'(\bar{z}) + (z-\bar{z})\bar{\varphi}''(\bar{z})$$

$$(\sigma_{22} - i\sigma_{12})^d(x) = k\varphi(z) + \Omega'(\bar{z}) - (z-\bar{z})\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \gamma F(z) + c$$

$$(VII.2.3) \quad (\sigma_{22} - i\sigma_{12})^g(x) = \varphi^g(x) - \Omega'^d(x)$$

$$(\sigma_{22} - i\sigma_{12})^d(x) = \varphi'^d(x) - \Omega'^g(x)$$

En terme de déplacement on trouve :

$$\begin{aligned} 2\eta D^a(x) &= k \varphi^a(x) + s_2^d(x) + \gamma^* F^a(x) + c \\ (VII.2.4) \quad 2\eta D^d(x) &= k \varphi^d(x) + s_2^a(x) + \gamma^* F^d(x) + c \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à x les déplacements on trouve :

$$\begin{aligned} (VII.2.5) \quad \frac{d}{dx}(D^a(x)) &= k \varphi^a(x) + s_2^d(x) + \gamma^* \beta(x) \\ \frac{d}{dx}(D^d(x)) &= k \varphi^d(x) + s_2^a(x) + \gamma^* \beta(x) \end{aligned}$$

Pour éviter d'alourdir les notations, on se place dans le cas d'une seule fissure identifiée au segment $[-\ell, +\ell]$ de l'axe ox .

On suppose tout d'abord que les contraintes sont données sur les deux bords de la fissure.

On aboutit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} (VII.2.6) \quad [\varphi^a(x) - s_2^d(x)]^a + [\varphi^d(x) - s_2^a(x)]^d &= 2\psi_1(x), |x| < \ell \\ [\varphi^d(x) + s_2^a(x)]^a + [\varphi^a(x) + s_2^d(x)]^d &= 2\psi_2(x), |x| < \ell \end{aligned}$$

En effet, $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^a(x) = \varphi^a(x) - s_2^d(x)$ (VII.2.6)
s'obtient en écrivant la somme et la différence de ces deux conditions.

Comme

$$\begin{aligned} \varphi'(\infty) - \Omega'(\infty) &= \frac{T_\infty + N_\infty}{2} + \frac{N_\infty - T_\infty}{2} \cdot e^{-2i\psi} \\ \text{(VII.2.7)} \quad \varphi'(\infty) + \Omega'(\infty) &= \frac{2i}{1+k} (2\eta W_\infty - d) + \frac{T_\infty - N_\infty}{2} e^{-2i\psi} \end{aligned}$$

De manière classique on obtient :

$$\begin{aligned} \text{(VII.2.8)} \quad \varphi'(z) + \Omega'(z) &= \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{-e}^e \frac{z \Psi_2(x)}{x-z} dx + \frac{2i}{1+k} (2\eta W_\infty - d) + \frac{T_\infty - N_\infty}{2} e^{-2i\psi} \\ \varphi'(z) - \Omega'(z) &= \frac{(z^2 - \rho)^{-1/2}}{2\pi i} \cdot \int_{-e}^e \frac{z \Psi_1(x)}{z-x} \cdot \sqrt{\rho^2 - x^2} dx + \frac{d_0 + d_1 z}{\sqrt{z^2 - \rho^2}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{(VII.2.9)} \quad d_1 &= \varphi'(\infty) - \Omega'(\infty) = \frac{T_\infty + N_\infty}{2} + \frac{T_\infty - N_\infty}{2} \cdot e^{-2i\psi} \\ &= A_\infty + B_\infty \end{aligned}$$

est le coefficient du polynôme $P(z)$ de degré n qu'on écrit sous la forme :

$$P_n(z) = d_0 + d_1 z + \dots + d_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

De proche en proche on peut déterminer les coefficients d_2, \dots, d_n . Par exemple :

$$(VII.2.10) \quad d_z = \varphi'(\infty) + \Omega(\infty) = -\bar{B}_\infty$$

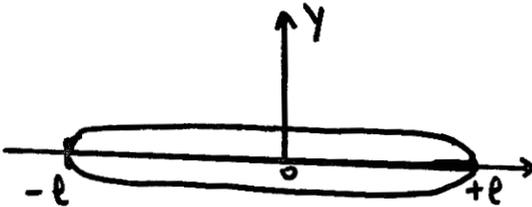
Si l'on écrit que $[10]_c$, variation de $2\pi D$ le long de tout contour (c) entourant la fissure où on a posé :

$$Z = \left\{ z = \varepsilon e^{i\theta}, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ z = x + i\varepsilon, |x| \leq \ell \right\} \cup \left\{ z + \varepsilon = e^{i\theta}, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

on obtient, en faisant tendre ε vers 0, le résultat suivant :

$$(VII.2.11) \quad \int_{-e}^e [k(\varphi'^a(x) - \varphi'^d(x)) - \Omega'(x) + \Omega^d(x) + \gamma^*(f^a(x) - f^d(x))] dx = 0$$

condition dans laquelle apparaît $(f^a - f^d)$ c'est-à-dire la discontinuité de la température.



On s'aperçoit dès lors, qu'outre les contraintes, on doit s'imposer soit les déplacements, soit la température sur les deux lèvres de la fissure qui se traduit par le système d'équations suivant :

$$(VII.2.12) \quad \begin{cases} (\gamma^* f + k\varphi' + \Omega')^a(x) + (\gamma^* f + k\varphi' + \Omega')^d(x) = 2\psi_3(x), \\ (\gamma^* f + k\varphi' - \Omega')^a(x) - (\gamma^* f + k\varphi' - \Omega')^d(x) = 2\psi_4(x) \end{cases} \quad |x| < e$$

Si l'on impose les déplacements (VII.2.13) $f^d(x) - f^d(x) = 2\psi_0(x)$, $|x| < l$
 si l'on impose la température sur les bords de la fissure. (VII.2.12)
 équivaut à (VII.2.8) où l'on a en fait remplacé φ par $(k\varphi + \delta^* F)$, soit :

$$k\varphi'(z) - \Omega'(z) + \delta^* f(z) = \frac{1}{\pi l} \int_{-l}^l \frac{\psi_0(x)}{z-x} dx + \delta^* \theta + \frac{k+1}{4} (T_\infty + N_\infty) +$$

$$+ \frac{T_\infty - N_\infty}{2} e^{-2i\varphi} + i(2\eta B_\infty - \alpha)$$

$$k\varphi'(z) + \Omega'(z) + \delta^* f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{2\psi_3(x)\sqrt{l^2 - x^2}}{x-z} dx +$$

$$+ \frac{\beta_0 + \beta_1 z}{\sqrt{z^2 - l^2}}$$

$$k\varphi'(z) - \Omega'(z) + \delta^* f(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-l}^l \frac{\psi_0(x)}{z-x} dx + \delta^* \theta_\infty + \frac{k+1}{2} A_\infty +$$

$$+ i(2\eta B_\infty - \alpha)$$

$$k\varphi'(z) + \Omega'(z) + \delta^* f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{2\psi_3(x)\sqrt{l^2 - x^2}}{x-z} dx +$$

$$+ \frac{\beta_0 + \beta_1 z}{\sqrt{z^2 - l^2}}$$

(VII.2.14)

Remarque :

La relation (VII.2.13) permet d'obtenir le potentiel complexe $f(z)$ soit :

$$(VII.2.15) \quad f(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{-e}^e \frac{\gamma_0(x)}{x-z} dx + \theta_\infty$$

VII.3.- Problème mixte [3]

Sur les lèvres de la fissure, on suppose connus les déplacements, les contraintes et l'apport thermique.

On désigne par $D^d(x)$, $\tilde{D}^d(x)$ les déplacements sur les lèvres inférieures (resp. $D^a(x)$, $\tilde{D}^a(x)$) sur les lèvres supérieures.

Sur $[a_n, b_n]$, la continuité du matériau nécessite que l'on impose :

$$(VII.3.1) \quad \begin{aligned} D^d(x) &= D^a(x) = D(a_n) \\ D^d(b_n) &= D^a(b_n) = D(b_n) \\ \tilde{D}^d(a_n) &= \tilde{D}^a(a_n) = \tilde{D}(a_n) \\ \tilde{D}^d(b_n) &= \tilde{D}^a(b_n) = \tilde{D}(b_n) \end{aligned}$$

pour l'apport thermique on peut écrire sur les lèvres (L) de la fissure :

$$(2\nu-1)F^d(a_n) = (2\nu-1)F^a(a_n) = (2\nu-1)F(a_n)$$

soit :

$$(VII.3.2) \quad \begin{aligned} F^d(a_n) &= F^a(a_n) = F(a_n) \\ F^d(b_n) &= F^a(b_n) = F(b_n) \end{aligned}$$

du fait que $F'(z) = f(z)$ on a alors :

$$f^d(a_n) = f^g(a_n) = f(a_n)$$

$$f^d(b_n) = f^g(b_n) = f(b_n)$$

Ainsi, on a les conditions sur les lèvres (L) :

$$2\gamma \delta^g(x) = k \varphi^{i g}(x) + \Omega^d(x) + \delta f^g = q_1(x) \text{ donné}$$

(VII.3.3)

$$\varphi^{i d}(x) - \Omega^i(x) = q_2(x) \text{ donné}$$

Les combinaisons linéaires des équations donnent :

$$[k \varphi^{i g}(x) + \Omega^d(x) + \delta f^g(x)] + \lambda [\varphi^{i d}(x) - \Omega^i(x)] = \lambda q_2 + q_1$$

(VII.3.4)

$$[k \varphi^{i g}(x) + \Omega^d(x) + \delta f^g(x)] - \lambda [\varphi^{i d}(x) - \Omega^i(x)] = q_1 - \lambda q_2$$

$$[\varphi^i(x) + \frac{1}{k}(\delta^g f - \lambda \Omega^i)]^g + \frac{1}{k}[\Omega^d + \lambda \varphi^i]^d = \frac{\lambda q_2 + q_1}{k} = P_1(x)$$

(VII.3.5)

$$[\varphi^i(x) + \frac{1}{k}(\delta^g f + \lambda \Omega^i)]^g + \frac{1}{k}[\Omega^d - \lambda \varphi^i]^d = \frac{q_1 - \lambda q_2}{k} = P_2(x)$$

En choisissant λ tel que $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{\lambda}$ soit $\lambda = i\sqrt{k}$ par exemple, les équations précédentes deviennent :

$$\left[\varphi^i(x) - \frac{i}{\sqrt{k}} \Omega^d + \delta^g \frac{f(x)}{k} \right]^g + \frac{i}{\sqrt{k}} \left[\varphi^i(x) - \frac{i}{\sqrt{k}} \Omega^d \right]^d = P_1(x) \text{ (a)}$$

(VII.3.6)

$$\left[\varphi^i(x) + \frac{i}{\sqrt{k}} \Omega^d + \delta^g \frac{f(x)}{k} \right]^g - \frac{i}{\sqrt{k}} \left[\varphi^i(x) + \frac{i}{\sqrt{k}} \Omega^d \right]^d = P_2(x) \text{ (b)}$$

Si l'on pose :

$$(VII.3.7) \quad e^{2i\pi\delta_1} = \frac{-i}{\sqrt{R}}, \quad e^{2i\pi\delta_2} = \frac{i}{\sqrt{R}}, \quad \text{alors :}$$

$$(VII.3.8) \quad \delta_1 = \frac{3}{4} + \frac{i}{4\pi} \ln R, \quad \delta_2 = \frac{1}{4} + \frac{i}{4\pi} \ln R.$$

On définit ensuite les fonctions de Plemelj associées au bord (L) de la fissure pour (VII.3.6) on note alors pour (VII.3.6a) et (VII.3.6b) :

$$(VII.3.9) \quad \begin{aligned} \pi_1(z) &= \prod_1^n (z - a_k)^{-\delta_1} \cdot (z - b_k)^{\delta_1 - 1} \\ \pi_2(z) &= \prod_1^n (z - a_k)^{-\delta_2} \cdot (z - b_k)^{\delta_2 - 1} \end{aligned}$$

On peut, en tenant compte du comportement à l'infini de $\varphi(z)$ et de $\Omega(z)$, écrire les solutions de (VII.3.6) soit :

$$(VII.3.10) \quad \begin{aligned} \varphi'(z) - \frac{i}{\sqrt{R}} \cdot \Omega'(z) + \frac{\gamma}{R} f(z) &= \frac{\pi_1(z)}{2i\pi} \int_L \frac{P_1(x) dx}{\prod_1^n (x-z)} + P_n^1(z) \pi_1(z) \\ \varphi'(z) + \frac{i}{\sqrt{R}} \cdot \Omega'(z) + \frac{\gamma}{R} f(z) &= \frac{\pi_2(z)}{2i\pi} \int_L \frac{P_2(x) dx}{\prod_1^n (z-x)} + P_n^2(z) \pi_2(z) \end{aligned}$$

où $P_n^{(1)}(z) = \sum_{n=0}^n c_n z^n$, $P_n^{(2)}(z) = \sum_0^n d_n z^n$

On impose :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n \pi_i(z) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

si l'on veut la solution nulle à l'infini, ($|z|$, grand). On choisit des polynômes de degré $\leq n-1$.

Le développement en série de Laurent des polynômes $z^n \pi_1(z)$ et $z^n \pi_2(z)$ permet de trouver les coefficients c et d .

Dans la formule (VII.3.10) si on considère $|z|$ grand, on obtient :

$$(VII.3.11) \quad \begin{cases} [A_\infty + \frac{i}{\sqrt{R}} (\bar{A}_\infty + \bar{B}_\infty)] z^{-(1+i\sqrt{R})} F \cdot z^{n+1} = c_n z^n + (c c_n + c_{n-1}) z^{n-1} \\ A_\infty + \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{A}_\infty + \bar{B}_\infty) = c_n \\ -(1+i\sqrt{R}) = c c_n + c_{n-1} \end{cases}$$

En appliquant les méthodes employées au (VII.2) notamment pour une seule fissure $[-\ell, +\ell]$, on obtient grâce aux conditions aux limites (VII.2.7).

$$(VII.3.12) \quad \begin{aligned} \psi'(z) - \frac{i}{\sqrt{R}} \Omega'(z) + \frac{\gamma^*}{R} f(z) &= \frac{1}{2i\pi R} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{P_1(x)}{x-z} dx + \frac{\gamma^*}{R} \theta_\infty + \frac{R+1}{2R} A_\infty \\ &\quad + \frac{B_\infty}{R} + \frac{i}{R} (2\omega_\infty - d) \\ \psi'(z) + \frac{i}{\sqrt{R}} \Omega'(z) + \frac{\gamma^*}{R} f(z) &= \frac{1}{2\pi R \sqrt{z^2 - \ell^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{P_2(x) \sqrt{\ell^2 - z^2}}{x-z} dx + \\ &\quad + \frac{-\ell}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} P_0 + \frac{P_1 z}{\sqrt{z^2 - \ell^2}} \\ f(z) &= \frac{1}{R\pi i} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\psi_0}{x-z} dx + \frac{\theta_\infty}{R} ; \end{aligned}$$

En comparant les équations précédentes à celles obtenues, lorsqu'on a imposé les déplacements et la température sur les bords de la fissure, on s'aperçoit qu'elles sont de la même forme d'une part, et égales d'autre part à un coefficient complexe $\frac{i}{\sqrt{R}}$ près.

CONCLUSION

Ce travail est une série d'adaptations et d'applications de l'élasticité et de la thermoélasticité linéaire à des problèmes plans.

Le premier chapitre a été consacré à un rappel des équations fondamentales de la théorie des milieux continus, lesquelles équations ont servi de support à l'étude de la thermoélasticité (Ch. II) en y ajoutant un gradient de température. Dans ce même chapitre nous avons caractérisé un milieu thermoélastique, étudié les problèmes de linéarisation de la température. Dans le cas d'un thermoélastique homogène et isotrope on a établi les relations entre les coefficients d'élasticité.

La thermoélasticité plane a été abordée et explicitée dans le chapitre III ce qui a donné lieu à une généralisation de la notion d'état thermoélastique en contrainte plane. Nous avons montré que cet état est unique et qu'il engendre un autre état tridimensionnel obtenu grâce à des conditions supplémentaires sur les contraintes et sur les déplacements.

Les équations de base de la thermoélasticité linéarisée ont fait l'objet également dans ce chapitre, d'une formulation variationnelle adaptée dans les espaces vectoriels Σ , \mathcal{E} et \mathcal{V} (ch. IV). Cette formulation variationnelle est généralisée lorsque l'on considère un domaine (Ω) dont l'intégrale sur le contour n'est pas nulle.

Ainsi, on a montré que les formes bilinéaires et linéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $L(\cdot)$ vérifient le lemme de Lax-Milgram ce qui a permis de déduire l'existence et l'unicité de la solution du problème de thermoélasticité plane.

Dans le chapitre IV.3, nous avons étudié une plaque thermoélastique (soumise à une) chargée transversalement. Cette étude est faite sur le modèle de Kirchoof en théorie linéaire ce qui a permis d'obtenir des équations approchées comportant un terme supplémentaire qui représente l'effet thermique.

Le chapitre V porte sur les potentiels complexes en thermoélasticité plane. Il est naturel d'introduire un potentiel $\theta(z)$ pour la température, lequel intervient dans le déplacement. Nos calculs montrent une modification des équations de MUSKHELISHVILI due à la fonction $\mathcal{E}(2\sqrt{-1})F(z)$ où $F(z)$ est une fonction holomorphe qui représente un apport thermique.

Sur le plan des phénomènes physiques, un tel résultat n'est pas une surprise mais il était important de faire les calculs explicites pour trouver cet apport thermique.

Dans (V.3) nous avons étudié le flux de chaleur le long d'un arc AB en fonction de k , $f(z)$ et $\bar{f}(z)$, puis déduit la notion de résistance thermique.

Dans le chapitre VI nous avons considéré un domaine multiplement connexe où des restrictions ont été imposées sur les potentiels complexe pour rendre uniforme la température, les contraintes et les déplacements. Tous les résultats font apparaître la contribution thermique.

Les applications qui ont suivi, montrent que, une fois l'apport thermique connu, on peut étendre le résultat à plusieurs situations de problèmes plans en thermoélasticité. Nous avons le cas de contraintes et de température à l'infini pour en déduire de nouvelles fonctions potentielles complexes $\varphi_{1/2}$, $g''(z)$ et $f(z)$ qui font l'objet d'application (Ch. VII).

Nous avons ensuite appliqué certains résultats à une plaque munie de fissures droites colinéaires, ce qui permet de mieux comprendre l'évolution de la température (le long d'une fissure) de part et d'autre des fissures. Nous avons enfin abordé le problème mixte où nos calculs ont conduit à des systèmes d'équations susceptibles de servir de modèle à des problèmes de génie civil. Suite à des discussions avec nos collègues du Laboratoire de Mécanique des Roches de l'E.U.D.I.L., il semble que certains de nos résultats pourraient servir de base à l'étude de la propagation des fissures dans les roches ou dans le béton par l'utilisation d'un logiciel adapté.

Si l'on cherche à faire le point à l'issue de ce travail, on s'aperçoit que certains prolongements peuvent être donnés à nos résultats. Notre approche d'aborder le problème n'est qu'une manière parmi tant d'autres. Notre prétention était d'apporter notre contribution à un sujet difficile, mais qui continue à susciter un grand intérêt dans le monde de la recherche.

En dernière analyse et avant de conclure, on doit souligner plutôt le caractère fécond de la thermoélasticité, les nombreuses questions qui restent à traiter et les prolongements souhaitables à leur donner.

ESPACES FONCTIONNELS CLASSIQUES : [28], [29], [30], [26], [31]

Ces espaces, sont des espaces de Sobolev dans lesquels on a pu définir un produit scalaire.

. Sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^4 , on définit les espaces $L^p(\Omega)$: espace des fonctions f mesurables telles que :

$$p \in \mathbb{R} \text{ avec } 1 \leq p < \infty.$$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} < \infty \quad (p \neq \infty)$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert et le produit scalaire correspondant à la norme $(\|\cdot\|)$ est donné par :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \bar{g}(x) dx \quad (\text{où } \bar{} \text{ désigne le conjugué complexe}).$$

NORME :

En plus, cet espace est un espace vectoriel normé complet pour la norme associée au produit scalaire.

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int |f|^2 dx \right)^{1/2} = (f, f)_{L^2(\Omega)}^{1/2}$$

C'est un espace de Hilbert.

ESPACES DE SOBOLEV $H^m(\Omega)$ Définition 1 :

On appelle espace de Sobolev d'ordre $m (m \geq 0)$ sur Ω , noté $H^m(\Omega)$, l'ensemble des $u \in L^2(\Omega)$ tels que les dérivées distributions $D^\alpha u$ sont $L^2(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \{ u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega); |\alpha| \leq m \}$$

Produit intérieur

Cet espace est un espace de Hilbert pour le produit intérieur :

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

Norme associée

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Cas particulier :

$m=1$, on a un espace de Sobolev d'ordre 1 définie par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \int |u|^2 dx + \int |\nabla u|^2 dx \right\}^{1/2}$$

on a encore un espace de Sobolev d'ordre 0 .

Si $m=0$, on a l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions appartenant à $H^1(\Omega)$ et qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$ (où $H_0^1(\Omega)$ est le complémentaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$).

Le produit scalaire est donc inchangé.

La semi-norme $\|u\|$ est définie par :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

C'est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme induite par $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

$$H_0^1(\Omega)$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions appartenant à $H^1(\Omega)$ et qui s'annulent sur une partie de la frontière $\partial\Omega$.

Le produit scalaire est encore celui de $H^1(\Omega)$.

. Quelques inégalités

Inégalité de POINCARÉ :

Pour un ouvert (Ω) borné de \mathbb{R}^n , on montre l'existence d'une constante $P(\Omega)$ telle que :

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq P(\Omega) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |D_i u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Inégalité de HOLDER-MINKOWSKI

Soient $u \in L^p$ et $v \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $uv \in L^1(\Omega)$

et

$$\int |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

Remarque : On déduit de l'inégalité précédente l'existence d'une norme :

$\|u\| = \left(\int |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ définie sur $H_0^1(\Omega)$ et équivalente à la norme naturelle sur $H^1(\Omega)$ soit :

$$\| \| u \| \| = \left(\int |\nabla u|^2 + |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| u \| = \| \| u \| \|$$

$$\| u \| \leq \| \| u \| \| \leq (1 + P(\Omega)) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

$$\| u \| \leq \| \| u \| \| \leq \sqrt{(1 + P(\Omega))} \cdot \| \| u \| \|$$

ESPACES DE SOBOLEV $W^{m,p}$

Définition

On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ l'espace défini

par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \mid u \in L^p(\Omega), D^{\alpha} u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m \right\}$$

Norme associée

$$\| u \|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^{\alpha} u \|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, p \neq \infty \right.$$

est un espace de BANACH.

Injection continue, injection dans

On montre les inclusions topologiques suivantes :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv H^0(\Omega)$$

où

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ u \mid u \in H^m(\Omega), \gamma u = 0 \right\}, \quad \gamma u \text{ est la trace de } u \text{ sur } \gamma.$$

$H_0^m(\Omega)$ est l'adhérence, $\gamma u = 0$ étant la valeur de u sur la frontière de Ω (ou sur une partie de cette frontière).

Théorèmes des traces

Lorsqu'une fonction est continue sur un domaine ouvert Ω , on lui attribue comme "valeur à la limite" sur le contour, la valeur obtenue par prolongement continu du domaine contour. La notion de trace généralise celle de "valeurs aux limites" pour des fonctions non continues (ou plus généralement, des distributions).

Définition 1 :

Trace dans $H^1(\Omega)$:

n est quelconque, Ω un ouvert borné, de frontière régulière. $\partial\Omega$ (ou Γ) est une variété de dimension $(n-1)$, de classe \mathcal{C}^1 , Ω étant localement situé du même côté de $\partial\Omega$ pour $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, on pose :

$$\gamma_0 u = u|_{\Gamma}.$$

$$\gamma_0 : u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow \gamma_0 u = u|_{\Gamma}$$

γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. γ_0 ainsi définie est appelée application trace et sa valeur $\gamma_0 u$ sur une fonction $u \in H^1(\Omega)$ est la trace de u sur Γ .

Définition 2 :

Trace dans $H^m(\Omega)$: c'est une généralisation du résultat précédent. En effet, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \leq 3$), $\partial\Omega$ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $(n-1)$. Ω est toujours du même côté de $\partial\Omega$.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$. Alors γ est définie par :

$$\gamma : u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \longrightarrow \gamma_j u \in (\mathcal{D}(\partial\Omega))^m; \quad \gamma_j = \frac{\partial^j}{\partial \nu_j^j}; \quad j=1, m-1$$

où γ_j est la dérivée normale d'ordre j sur $\partial\Omega$, orientée vers l'extérieur. Comme dans le cas précédent, γ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de :

$$H^m(\Omega) \longrightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \pi^{-j} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

Cette notion de trace va permettre la généralisation de la technique d'intégration par parties en donnant un sens à la formule de Green.

Rappels sur la théorie des distributions [31]

Tout d'abord, on définit deux ensembles $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui sont des espaces vectoriels.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) indéfiniment différentiables à support compact.

On appelle support d'une fonction (on note $\text{supp } f$), le plus petit intervalle en dehors duquel $f(x) = 0$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur (Ω) .

Définition :

On appelle distribution sur Ω , toute forme linéaire T continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant l'espace dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

◊ Quelques propriétés

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et si $\langle T, \varphi \rangle$ est le produit de dualité en $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle T, \lambda \varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle \\ \langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle && \text{linéarité} \\ \{ \varphi_m \} &\longrightarrow \text{dans } \mathcal{D}(\Omega) \text{ on a :} \\ \langle T, \varphi_m \rangle &\longrightarrow \langle T, \varphi \rangle && \text{continuité} \end{aligned}$$

Dérivation au sens des distributions

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on vérifie que :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

Généralisation :

$$\langle D^j T, \varphi \rangle = (-1)^{|j|} \langle T, D^j \varphi \rangle \quad |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$$

$$D^j T = \frac{\partial^{|j|} T}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \quad \text{est la dérivée d'ordre } j,$$

La dérivation au sens des distributions est une opération continue et on montre que :

si $T_m \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $D^j T_m \rightarrow D^j T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

or,

$$\langle D^j T_m, \varphi \rangle = (-1)^{|j|} \langle T_m, D^j \varphi \rangle.$$

. La suite T_m est convergente :

$$(-1)^{|j|} \langle T_m, D^j \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|j|} \langle T, D^j \varphi \rangle = \langle D^j T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Distribution de Dirac

. A l'origine 0 et en un point a .

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

$$\langle \delta_a^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a) \quad \text{à l'ordre } n \text{ en } a$$

Formule de LEIBNIZ

On commence par le laplacien ΔT , $(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2})$

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle.$$

Lorsque deux fonctions u et v à valeur dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) sont de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , pour $j \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\bullet D_j(u \cdot v) = v D_j u + u \cdot D_j v$$

Nous déduisons par récurrence la formule de LEIBNIZ pour u et v de classe C^k sur (Ω) (où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$). $|\alpha| \leq k$

$$D^\alpha(u \cdot v) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \cdot D^{\alpha-\beta} v \quad \begin{array}{l} \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \end{array}$$

$$D^\alpha(uv) = D^\alpha u + D^\alpha v$$

$$D^\alpha(\lambda u_i) = \lambda D^\alpha u_i \quad \text{dans } W^{m,p}$$

$$D^\alpha(D^\beta u_i) = D^{\alpha+\beta} u_i$$

Théorèmes et transformations d'intégrales

Formule de RIEMAN :

\vec{X} est un champ de vecteurs continûment dérivable le long d'une courbe \mathcal{C} fermée. La circulation de \vec{X} à travers toute surface fermée S limitée par \mathcal{C} est :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{t}_{\mathcal{C}} ds = \iint_S \text{rot} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Formule d'OSTROGRADSKI

$$\iint_{\Sigma} \vec{X} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{X} d\sigma$$

Le flux d'un champ de vecteur continûment dérivable à travers une surface "régulière" Σ fermée est égale à l'intégrale triple de sa divergence dans le domaine Ω limité par Σ est le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur de .

Cela conduit au théorème de la divergence dont l'énoncé est le suivant :

Soit un domaine de E^3 à frontière régulière $\partial\Omega$. Soit \vec{n} le vecteur unitaire de la à (orientée vers l'extérieur de Ω).

Soit enfin $t_{i_1 \dots i_q}$ une composante d'un champ de tenseur d'ordre quelconque, continûment dérivable dans Ω et continu sur $\bar{\Omega}$ alors

$$\iiint_{\Omega} t_{i_1 \dots i_q, n} dv = \iint_{\partial\Omega} t_{i_1 \dots i_q} n_n d\sigma$$

Pour obtenir effectivement le théorème de divergence on pose $q=n$ (somme sur l'indice rejeté).

$$\iiint_{\Omega} t_{i_1 \dots i_n, n} dv = \iint_{\partial\Omega} t_{i_1 \dots i_n} n_n d\sigma$$

Le théorème de la divergence est valable dans le plan, soit Σ un domaine plan ($\Sigma \perp OX_3$). Toute fonction ne dépend que de x_1, x_2 . Pour

un cylindre de bases $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ de section droite Σ et de hauteur $h = \lambda$ on a :

$$\iiint_{\Omega} t_{ijk} \dots q_{,n} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\Sigma} t_{ijk} \dots q_{,n} dx_1 dx_2$$

$$i, j, \dots, q \in \{1, 2\}$$

$$\iint_{\partial\Omega} t_{ijk} \dots q_{,n} n_n d\sigma = \int_{\Sigma} t_{ijk} q_{,n} n_n d\sigma + \int_{\partial\Omega_1} t_{ijk} q_{,n} n_n d\sigma + \int_{\partial\Omega_2} t_{ijk} q_{,n} n_n d\sigma$$

$$\partial\Omega = \Sigma \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$$

Dans ces deux dernières intégrales $\vec{n} = \pm \vec{e}_3$ et donc n_n pour $n=1, 2$ est nul d'où le résultat annoncé.

Applications du théorème de la divergence.

$$\iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \phi dV = \iint_{\partial\Omega} \phi \vec{n} d\sigma$$

En effet :

$$\iiint_{\Omega} \phi_{,i} dV = \iint_{\partial\Omega} \phi n_i d\sigma$$

$$\iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{rot}} u dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{n} \wedge \vec{u} d\sigma$$

En effet :

$$\iiint_{\Omega} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} dV = \iint_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} u_k n_j d\sigma$$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{e}_3 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}) d\sigma = \int_{\partial \Sigma} \vec{u} \cdot \vec{e}_3 ds \quad \text{car,}$$

$$\iint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \delta_{i3} d\sigma = \int_{\partial \Sigma} \varepsilon_{ijk} u_k n_j \delta_{i3} ds$$

$$= \int_{\partial \Sigma} (\vec{n}, \vec{u}, \vec{e}_3) ds$$

$$= \int_{\partial \Sigma} (\vec{e}_3 \wedge \vec{n}) \cdot \vec{u} ds$$

$$= \int_{\partial \Sigma} \vec{u} \cdot \vec{e}_3 ds$$

Première identité de GREEN

$$\iiint \varphi \Delta \psi dV = \iint_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi dV$$

car

$$\iiint \varphi \psi_{,ii} dV = \iiint [(\varphi \psi_{,i}),_i - \varphi_{,i} \psi_{,i}] dV$$

$$= \iint_{\partial \Omega} \varphi \psi_{,i} n_i d\sigma - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi dV$$

or par définition :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot \vec{n} = \psi_{,i} n_i$$

Deuxième identité de GREEN :

Elle dérive de la première

$$\iiint_{\Omega} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \iint_{\partial \Omega} (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) d\sigma$$



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] F. PARSY
Séminaire sur la théorie des coques et des plaques
(Université des Sciences et Techniques de Lille I, 1980).
- [2] F. PARSY
Elasticité linéaire homogène et isotrope
(Publication de l'U.F.R. de Math. Pures et Appliquées, Lille I, 1978).
- [3] N.I. MUSKHELISHVILI
Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.
(P. Noordhoff LTol, Groningen-Holland, 1953).
- [4] J.P. HENRY, F. PARSY
(Cours d'élasticité, Dunod Université, 1982).
- [5] V. PARTON, P. PERLINE
Méthode de la théorie Mathématique de l'élasticité.
(Tomes I et II, Editions MIR - Moscou, 1981).
- [6] J.T. ODEN - J.N. REDDY
Variational Method in Theoretical Mecanic
(Spring-Verlag, 1983).
- [7] P. GERMAIN
Cours de Mécanique des Milieux Continus.
(Théorie générale, tome I, Masson, 1973).
- [8] G. DUVAUT
Analyse fonctionnelle et Mécanique des Milieux Continus : application
à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique -
homogénéisation
(Université de Paris VI, 1976).

- [9] G. DUVAUT - J.L. LIONS
Les inéquations en mécanique et en physique.
(Collection : travaux et recherches mathématiques, Dunod 1972).
- [10] F. PARSY
Lois de comportement des milieux thermoélastiques.
Publication de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 1982.
- [11] JEANINE GEOANNI
La méthode des différences finies en thermoélasticité couplée.
(Thèse ès-sciences physiques, Université Aix Marseille 1972).
- [12] Mar DAHAN
Problèmes de contact dans la théorie de l'élasticité transversalement
isotrope.
(Thèse ès-Sciences physiques, Université Paris VI, 1980).
- [13] V. PARTON, P. PERLINE
Equations intégrales de la théorie de l'élasticité
(Editions MIR-Moscou, 1983).
- [14] S. LAROZE
Dynamique des structures, contraintes et déformations d'origine
thermique, Tome 3 (Editions Eyrolles, 1979).
- [15] P. GERMAIN
Mécanique : Enoncés et résultats.
(Ed. Ecole polytechnique, 1980).
- [16] René SOUCHET
Sur la théorie de la flexion des plaques minces élastiques de E. REISSNER.
(Thèse ès-Sciences Mathématiques, Poitiers, 1972).
- [17] Gérard NADAU
Introduction to elasticity.
(Laval University, 1964).

- [18] J.D. WEBER
Mécanique des milieux déformables non linéaires.
(Editions Eyrolles, Paris, 1972).
- [19] N. EL HAGGAR
Théorie des plaques et des coques en élasticité linéaire.
(Thèse de 3e cycle en Mécanique, Université de Lille I, 1982).
- [20] NOVOZHILOV V.V.
Theory of Elasticity.
(Pergamon press 1961)
- [21] MILNE THOMSON L.M.
Systems élastiques plans.
Dunod 1968.
- [22] NOVOZHILOV V.V.
Thin shell theory.
Wolters-noordhoff publishing Groningen 1970. The Netherlands.
- [23] J.E. LAGNESE J.L. LIONS
Modelling and control of thin plates.
Masson, 1988.
- [24] JAN FRANCU
Homogeneization of linear elasticity equations.
(Svazek 27, Aplikace matematiky, 1982).
- [25] Robert DAUTRAY - J.L. LIONS
Analyses mathématiques et calculs numériques, tome 1, Masson 1987.
- [26] M. VO KHAC KHOAN
Introduction aux mathématiques modernes du Centre de documentation
universitaire 5, pl. de la Sorbonne, PARIS.
- [27] R. LATTES - J.L. LIONS
Méthode quasi-reversibilité et applications
(Dunod, Paris 1967).

- [28] H. LANCHON
Séminaire d'analyse fonctionnelle en 3e cycle E.N.S.E.M.
(1984, Nancy).
- [29] B. MAKAYA
(Thèse, 3e cycle de Mécanique, opt. Maths., L.E.M.T.A., I.N.P.L.
Nancy, 1983).
- [30] J.P. FERRIER
Mathématiques pour la Licence et Ecoles d'Ingénieurs.
(Masson, 1984).
- [31] M. GOULAOUIC
(Analyse fonctionnelle et calcul différentiel, E. Polytechnique 1981).
- [32] G. FRANCFORT
Homogenization and linear thermoelasticity (SIAM Math. Anal.),
vol. 14, n° 4, July 1983).
Stanford University, Stanford California 94305.
- [33] G. FRANCFORT
An exemple of homogenization in linear thermo-elasticity.
SUDAM, n° 82-1, 1982. Stanford University. California 94305.



1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900

1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000

2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100

MOTS CLES :

- PLANE.
- LINEAR.
- THERMOELASTICITY.
- COMPLEX.
- POTENTIALS.

RESUME

Ce travail consiste en une série de problèmes plans en thermoélasticité linéaire.

Après une étude thermomécanique des milieux thermoélastiques, on obtient la loi de comportement thermoélastique linéaire par linéarisation au voisinage d'un état non déformé à température constante.

On caractérise alors les milieux isotropes homogènes. Après analyse et résolution de certains problèmes de déformation et de contraintes planes, on adapte les méthodes des potentiels complexes exposées par MILNE-THOMSON au cas d'un domaine multiplément connexe, à partir des formules de KOLOSSOV-MUSHKHELISHVILI.

Ces résultats sont appliqués au problème de flexion d'une plaque mince et, à des milieux munis de fissures colinéaires.

ABSTRACT

This work describes some plane problems in linear thermoelastic media. After a thermomechanical study of the thermoelastic media, we get the linear thermoelastic behaviour law by linearisation near the undeformed state at constant temperature.

Then we characterize homogeneous and isotropic media. After analysis and resolution of some plane deformations and stress problems, we adapt the complex potential method exhibited by Mine-Thomson in multiple connected domains from KOLOSSOV-MUSHKHELISHVILI formulas.

These results are applied to the bending plate problems with parallel cracks.