

N° 1382

55376
1987
5

55376
1987
5

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE DE DOCTORAT 3e CYCLE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR 3e CYCLE EN MECANIQUE



Rachid LLEKHARAB

INFLUENCE D'UNE TACHE THERMIQUE LOCALE
EN ATMOSPHERE FAIBLEMENT COMPRESSIBLE.

Membres du Jury :

MM. Th. LEVY, Professeur, Université de Rouen.....Présidente
Rapporteur
R. ZEYTOUNIAN, Professeur, Université de Lille I...Rapporteur
P.A. BOIS, Professeur, Université de Lille I.....Examineur
S. GODTS, Maître de Conférences, Université
de Valenciennes.....Examineur

Soutenue de 3 juin 1987

Je remercie Monsieur le Professeur ZEYTOUNIAN qui a bien voulu diriger et conseiller ce travail de recherche. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie Madame le Professeur LEVY, de l'Université de ROUEN, d'avoir consenti à juger mon travail et accepté la Présidence du Jury. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur le Professeur BOIS, Monsieur GODTS, Maître de Conférence de l'Université de Valenciennes, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de participer au Jury.

Je remercie mon frère Abdelwahab, pour son aide constante et ses permanents encouragements durant la réalisation de ce travail, ainsi que tous les amis qui m'ont soutenu.

Mademoiselle Poulain, dans une discipline et une langue inhabituelle pour elle, a assuré avec amitié la frappe de ce mémoire. Qu'elle soit, ici, vivement remerciée.

A ma femme et notre
fils Mehdi,

| | |
|---|----|
| <u>Introduction</u> | 1 |
| <u>Chapitre 1 : Les équations de Navier Stokes pour l'atmosphère</u> | 8 |
| 1.1 L'air atmosphérique | 9 |
| 1.2 L'atmosphère standard | 11 |
| 1.3 Le géostrophisme | 14 |
| 1.4 Phénomènes non adiabatiques | 16 |
| 1.5 Les équations de Navier Stokes pour l'atmosphère | 18 |
| 1.5.1 Nouvelles écritures des équations de N.S. .. | 23 |
| 1.5.2 Equations adimensionnelles | 25 |
| 1.6 Conclusion | 28 |
| <u>Chapitre 2 : Schéma en triple couche</u> | 30 |
| 2.1 Une définition | 32 |
| 2.2 Schéma en triple couche | 32 |
| 2.2.1 Ecoulement base | 33 |
| 2.2.2 Couche intermédiaire | 36 |
| 2.2.3 Couche inférieure | 37 |
| 2.2.4 Couche supérieure | 39 |
| 2.3 Conclusion | 44 |
| <u>Chapitre 3 : Un modèle lié à une structure en triple couche</u> . | 47 |
| 3.1 L'approximation quasi-géostrophique | 47 |
| 3.2 La couche limite stationnaire d'Ekman et le modèle dit d'Ackerblom | 49 |
| 3.3 Modélisation de l'atmosphère | 50 |
| 3.4 L'approximation de Boussinesq | 57 |
| 3.4.1 Formulation du problème | 57 |
| 3.4.2 Les équations de Boussinesq | 59 |

| | |
|--|-----|
| 3.5 Schéma en triple couche | 61 |
| 3.5.1 Couche inférieure | 63 |
| 3.5.2 Couche intermédiaire | 66 |
| 3.5.3 Couche supérieure | 70 |
| 3.6 Conclusion | 74 |
| <u>Chapitre 4 : Théorie linéaire</u> | 76 |
| 4.1 Equations linéarisées du mouvement | 77 |
| 4.2 Solution du système linéarisé | 79 |
| 4.3 Résultats | 85 |
| 4.4 Conclusion | 87 |
| <u>Chapitre 5 : Modèle numérique</u> | 89 |
| 5.1 Le modèle numérique proprement dit | 89 |
| 5.1.1 Etape 1 | 91 |
| 5.1.2 Etape 2 | 95 |
| 5.1.3 Etape 3 | 97 |
| 5.2 Analyse des résultats numériques | 102 |
| 5.2.1 Champ de la pression et allure de la fonction $A(x)$ | 103 |
| 5.2.2 Perturbation de température | 104 |
| 5.2.3 Lignes de courant | 104 |
| <u>Conclusions et perspectives</u> | 106 |
| Annexe 1 organigramme | 110 |
| Annexe 2 figures des résultats numériques | 112 |
| Références citées dans le texte | 123 |

LEGENDE

- Figure 1 illustration géométrique de l'écoulement
- Figures 2-3 graphes de la perturbation de pression et de l'épaisseur de déplacement dans le cas linéaire.
- Figure 4 perturbation de pression suivant les différentes valeurs de $\lambda = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ avec $\delta x = 0.08$, $\delta y = 0.20$, $X_0 = -2.56$
- Figure 5 graphes de l'épaisseur de déplacement avec les mêmes valeurs qu'en figure 3.
- Figures 6-7-8 graphes de la perturbation de température $\theta(X,Z)$ a X fixé
 figure 6, $X_0 = -0.88$
 figure 7, $X_0 = -0.8$
 figure 8, $X_0 = 0.88$
- Figures 8-9 lignes de courant
 a . $\delta x = 0.08$, $\delta z = 0.20$, $\lambda = 0.9$
 b . $\delta x = 0.08$, $\delta z = 0.25$, $\lambda = 2.0$

INTRODUCTION

Introduction

L'étude des écoulements atmosphériques au dessus d'un obstacle a suscité ces dernières années un intérêt pratique considérable. Pour l'écoulement au dessus d'une montagne, dont l'étendue est de quelques kilomètres, la connaissance du champ local est lié à un certain nombre d'applications dues notamment aux changements de la vitesse du vent au voisinage de la surface de l'obstacle, d'autant que les inclinaisons sont plus marquées : ces applications concernent surtout les écoulements autour des édifices (bâtiments, constructions...), les tours situées dans les terrains accidentés, ainsi que les forêts. Un autre exemple d'écoulement atmosphérique est le calcul des concentrations locales des polluants au voisinage des sites industriels. Ainsi, les flux d'air au dessus des collines est un exemple particulier de l'écoulement de couche limite au dessus d'une surface curviligne. Notons que le cas stratifié est spécifique à l'atmosphère. Le problème homogène a plusieurs applications pratiques à la fois dans l'aérodynamique et le génie industriel. Les applications les plus évidentes étant les écoulements autour des véhicules, des ailes d'avions, dans les tuyaux (conduits, canalisations...) ou les écoulements autour des constructions (immeubles, édifices...). Le sujet a été traité par SEDNEY (1973) en s'intéressant plus précisément aux écoulements autour des obstacles carrés. Mais nos connaissances actuelles d'un tel écoulement à trois dimensions sont encore insuffisantes pour nous permettre de progresser de façon tangible.

En fait, dans tous les écoulements qui présentent un intérêt pratique, l'écoulement de couche limite est toujours turbulent ; en particulier les couches limites atmosphériques sont presque toujours turbulentes. Les travaux actuels sur les écoulements turbulents ne sont pas assez avancés pour nous permettre d'étudier avec succès les écoulements fortement per-

turbés et de progresser ainsi avec confiance. De plus, les travaux sur les écoulements laminaires au dessus d'une surface curviligne à grand nombre de Reynolds sont encore limités. Nous pensons qu'une étude complète du problème de l'écoulement turbulent au dessus d'un obstacle est encore prématurée.

Le travail rapporté dans ce mémoire est limité aux écoulements laminaires, et aucune tentative n'est faite sur le modèle de la turbulence. Il est évident que de tels travaux ne donnent aucune réponse immédiate aux problèmes pratiques, mais nous fournissent néanmoins une aide encourageante pour l'étude des écoulements réels.

Dans ce contexte, les écoulements atmosphériques et océanographiques au dessus d'un obstacle ont provoqué un vif intérêt. En particulier l'étude de l'écoulement d'un fluide en rotation au dessus d'un obstacle a été analysé par PROUDMAN (1916) et TAYLOR (1923) lorsque le nombre de Rossby $R_0 = \frac{U_0}{\Omega L}$ est petit (U_0 est la vitesse caractéristique du fluide, Ω la vitesse de rotation de la terre et L l'échelle de longueur horizontale caractéristique de l'obstacle). On remarquera que cet écoulement est surtout dominé par les forces de rotation qui confinent le fluide dans des colonnes verticales dites "colonnes de Taylor". Les études de l'écoulement à petit nombre de Rossby au dessus d'un obstacle peuvent être trouvées dans les publications de STEWARTSON (1973), INGERSOLL (1969), VAZIRI et BOYER (1971), JOHNSON (1978) : ce sont quatre exemples de travaux dans la littérature existante. Pour notre part, le sujet sur l'écoulement à petit nombre de Rossby ne sera pas poursuivi ici, car nous nous intéressons aux écoulements de couche limite non linéaire et on pourra trouver une synthèse des écoulements à Rossby petit dans ZEYTOUNIAN (1986).

Un des traits les plus importants de l'écoulement au dessus d'une surface curviligne est l'apparition d'un décollement, c'est-à-dire d'une zone d'écoulement séparée. Ce

phénomène de décollement est intimement lié au comportement de la couche limite, et, le point de décollement coïncide avec le point où la contrainte de cisaillement est égale à zéro.

De ce fait, l'analyse classique pour traiter les écoulements au dessus des surfaces curvilignes, ou comportant un point critique s'est avérée insuffisante. En effet, le concept de couche limite cesse d'être vrai au voisinage du point critique ou lorsqu'il y a décollement. Dans ce cas, l'écoulement extérieur (non visqueux) est fortement affecté. Cela est dû précisément à un apport de fluide de la couche limite vers l'écoulement extérieur. KIRCHOFF (1869) développa à ce sujet un modèle connu sous le nom de "ligne de courant" et qui vient à bout de ce phénomène. Le problème du décollement de la couche limite utilisant les équations de Prandtl a été analysé par GOLDSTEIN (1948). Ce dernier a essayé de raccorder une répartition de pression, imposée par une théorie non visqueuse, aux développements en séries des composantes de la vitesse dans la couche limite. On peut conclure à partir de ces essais que le point de décollement est un point singulier pour la couche limite. En général, il est impossible de prolonger la solution des équations du mouvement en aval du point de décollement.

Ce point de vue était accepté jusqu'au milieu des années 1950 lorsqu'on essaya de calculer des couches limites, à vitesses supersoniques et hypersoniques, pour construire les premiers véhicules de rentrée. A partir de la publication du travail de CROCCO-LEES (1952) on a décidé que, dans l'écoulement supersonique autour d'un corps continu, la frontière effective entre l'écoulement non visqueux à l'extérieur et l'écoulement visqueux près de la paroi est représentée par un corps un peu plus épais que le vrai corps. La forme de ce corps suit l'épaisseur de déplacement de la couche limite. Dans ces calculs, la répartition de pression n'est pas déterminée à l'avance par une théorie non visqueuse, mais traitée comme une inconnue.

Cette division de l'écoulement en deux régions, l'une visqueuse et l'autre non visqueuse, séparées par la frontière de l'épaisseur de déplacement, conduit à de bons résultats pratiques.

Cependant, on a besoin d'une méthode analytique pour remplacer l'analyse de Goldstein et c'est dans ce but que STEWARTSON (1969) et NEILAND (1969) ont développé indépendamment la méthode de triple couche. Cette méthode de triple couche fait l'objet du chapitre II de ce mémoire. Cette théorie est devenue progressivement fondamentale en dynamique des fluides aussi bien compressible qu'incompressible.

Le travail rapporté dans ce mémoire concerne la prise en compte de l'influence d'une tache thermique sur une couche d'EKMAN d'après un modèle en triple couche basé sur l'analyse de SMITH (1973), BRIGHTON, SYKES et SMITH (1977) et SYKES (1978).

Dans le premier chapitre, nous rappelons les équations générales de Navier Stokes pour le mouvement de l'atmosphère rapportées à un système de coordonnées lié au plan tangent en un point de la surface terrestre. Ces équations sont écrites par rapport aux perturbations thermodynamiques π , ω et θ relativement à l'état standard caractérisé par $p_{\infty}(z_{\infty})$, $\rho_{\infty}(z_{\infty})$ et $T_{\infty}(z_{\infty})$.

Cette écriture est faite sous forme adimensionnelle, et fait apparaître un certain nombre de paramètres sans dimensions tels que le nombre de Reynolds $Re = L_0 u_0 / \nu_0$, le nombre de Rossby $R_0 = u_0 / 2 \Omega_0 L_0 \sin \phi_0$, le nombre de Boussinesq $B_0 = L_0 g / R T_{\infty}(L_0)$ etc... ces nombres sans dimensions sont dans beaucoup de cas de petits (ou grands) paramètres de perturbations singulières. Ce caractère singulier qui entraîne des simplifications au niveau des équations de Navier Stokes sera étudié dans la suite.

Au chapitre II on étudie l'écoulement stationnaire plan d'un fluide visqueux, incompressible, homogène, au dessus d'une plaque plane et on montre comment l'existence d'un petit obstacle conduit à un couplage singulier (fort) qui fait intervenir la méthode en triple couche développée indépendemment par NEILAND (1969), et par STEWARTSON et WILLIAMS (1969).

Au chapitre III on étudie comment lors d'une prévision synoptique, un site d'échelle horizontale $L_c \ll L_0$ perturbe la couche d'Ekman. La formulation consistante de ce problème conduit à comparer les ordres de grandeur de l'échelle horizontale L_c du site et du rapport $u_0/\Omega_0 \sin \phi_0$ et de voir dans quelle mesure on peut négliger les effets de la force de Coriolis et d'instationnarité et appliquer l'approximation de Boussinesq (d'après ZEYTOUNIAN 1974). On constate alors que lorsque

$$L_c \ll \frac{u_0}{\Omega_0 \sin \phi_0} \implies 2R_0 \gg 1, B_0 \ll 1$$

et si $L_c = 10^3 m$, il existe un entier $m = 5$ tel que

$$\beta = Re^{-1/m} \text{ où } \beta = \frac{u_0^{1/2}}{(L_c \Omega_0 \sin \phi_0)^{1/2}} \equiv 1/(Re/2R_0)^{1/2}$$

Cette valeur de $m = 5$ est celle utilisée, par SMITH (1973) et SMITH, SYKES et BRIGHTON (1977) et SYKES (1978) dans leurs travaux respectifs. Ensuite on essaie d'élucider ce problème d'interaction entre la couche d'Ekman et le site thermiquement non homogène en étudiant les équations de Boussinesq par un modèle en triple couche.

Au chapitre IV, on analyse la linéarisation du système d'équations de la sous-couche inférieure obtenu au chapitre III. Ce système d'équations non-linéaires ne peut être résolu que numériquement si on ne fait aucune hypothèse sur

le paramètre de similitude λ qui intervient dans la condition à la limite en $\hat{z} = 0$ pour $\hat{\theta}(x, \hat{z})$. La linéarisation obtenue pour $\lambda \ll 1$, conduit à un système linéaire dont la solution est obtenue en utilisant la Transformée de Fourier. Cela permet par l'intermédiaire des conditions limites de déterminer la perturbation de pression $P_1(x)$ qui est une inconnue du problème.

Dans le dernier chapitre V, on donne la résolution numérique du système quasi-linéaire de la sous-couche limite inférieure pour des valeurs finies du paramètre λ .

La plupart des auteurs tels que SMITH (1974), JOBE et BURGRAFF (1974), SYKES (1978) ont utilisé dans leurs travaux la méthode des différences finies en adoptant un schéma implicite à la Crank-Nicholson moyennant une sous-relaxation non linéaire à chaque pas d'espace dans la direction de l'axe des x .

Afin de pouvoir comparer nos résultats, on suit la même démarche pour déterminer le champ des vitesses (u, w) , la perturbation de température θ et la perturbation de pression $P_1(x)$.

CHAPITRE I

LES EQUATIONS DE NAVIER STOKES
POUR L'ATMOSPHERE

CHAPITRE ILes équations de Navier Stokes
pour l'atmosphère

L'objet de ce chapitre est d'établir les équations qui régissent le mouvement de l'atmosphère autour de la Terre.

L'atmosphère est essentiellement une enveloppe gazeuse entourant la Terre, maintenue contre celle-ci par son poids, mais qui en vertu de sa compressibilité va en se raréfiant constamment à mesure qu'on s'élève, jusqu'à devenir pratiquement indiscernable du milieu interplanétaire.

La Terre apparaît, de ce fait, comme un objet relativement froid baignant dans le fluide pesant, compressible en rotation (dans un repère mobile lié à la Terre en mouvement de rotation sur elle-même) dilué mais très chaud.

Les effets combinés de la pesanteur, de la compressibilité et de la rotation sont justement les causes principales qui régissent l'apparition et l'équilibre des mouvements atmosphériques à courte échéance.

Pour décrire cette atmosphère, une première approximation consiste à la supposer en équilibre adiabatique : la

pression et la température diminuent avec l'altitude. En météorologie, une grande importance est accordée à la loi de détente adiabatique de l'air, qui n'est pas la même selon qu'il est saturé ou non pour définir le gradient de température pour lequel l'atmosphère est stable ou non à l'égard des mouvements verticaux.

La baisse de température, lorsque l'altitude croît, qui fait prévoir l'hypothèse de l'équilibre adiabatique, ne s'observe que dans la troposphère, jusqu'à une altitude de l'ordre de 17 km à l'équateur, 6 à 8 km aux pôles.

En supposant la masse volumique de l'air constante et égale à celle que l'on observe dans les conditions normales de température et de pression, on définit, "l'atmosphère homogène" dont l'épaisseur est de l'ordre de 8 km.

On peut considérer que les phénomènes météorologiques dont l'atmosphère est le siège sont pratiquement observés dans la troposphère, où la température décroît en moyenne jusqu'à un niveau appelé tropopause.

1.1 L'air atmosphérique :

L'atmosphère est supposée être un fluide compressible en mouvement et les équations de Navier-Stokes permettent d'étu-

dier son mouvement.

L'air atmosphérique se comporte comme un gaz parfait. Par définition, un gaz est dit parfait si il satisfait aux lois de Mariotte-Joule.

$$(I.1) \quad \frac{p}{\rho} = f(T) \text{ et } e = g(T)$$

c'est-à-dire que l'énergie et le rapport pression, masse volumique sont fonctions uniquement de la température absolue T .

Dans ce cas la thermostatique permet de montrer que

$$(I.2) \quad f(T) = RT \text{ et } \frac{dg}{dT} = C_v(T)$$

où $R = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ d}^\circ$ est la constante des gaz parfaits et C_v la chaleur spécifique à volume constant.

$$\text{Si } C_p = \frac{dg}{dT} + R = C_v + R$$

désigne la chaleur spécifique à pression constante, alors

$$(I.3) \quad R = C_p - C_v = C_p \frac{\gamma - 1}{\gamma} = C_v (\gamma - 1) \text{ où } \gamma = C_p/C_v$$

Si C_v est indépendant de T , alors C_p et C_v sont des constantes et leur rapport γ , appelé indice adiabatique est lui-même constant, dans ce cas $\gamma \simeq 1,4$ et après un choix convenable des

constantes d'intégrations.

$$(I.4) \quad e = C_v T \quad \text{et} \quad \lambda = C_v \log P / e^\sigma$$

Il est clair que l'air atmosphérique (sec) assimilé à un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes est essentiellement barocline puisque :

$$(I.5) \quad p = R e^T$$

1.2 L'atmosphère standard :

La pression de l'air est approximativement constante à la surface du globe terrestre ; elle est de l'ordre de 1000 millibars et oscille localement et dans le temps entre des valeurs assez voisines ($\pm 10\%$). La pression décroît avec l'altitude et cette décroissance est fonction de la température.

La température au voisinage du sol est très nettement influencée par le revêtement local de la surface terrestre et ses fluctuations sont plus marquées que celles de la pression. En altitude et dans la troposphère la température décroît et on mesure cette décroissance par

$$\Gamma = - \frac{dT}{dz}$$

où z est l'altitude, Γ est positif, c'est le gradient vertical (de décroissance) de la température. Dans la troposphère

la température a une décroissance régulière vers le haut, cessant brusquement dans la tropopause.

On postule alors, l'existence d'une troposphère standard dans laquelle

$$(I.6) \quad T(z) = T(0) \left[1 - \frac{\Gamma^{\circ}}{T(0)} z \right]$$

et une valeur type de Γ° est 0,0065 °c/m. On peut appliquer le principe fondamental de l'hydrostatique à la troposphère standard et la différence de pression entre deux niveaux voisins dont l'altitude diffère de δz vaut δp avec

$$(I.7) \quad \delta p = -e g \delta z ;$$

où $g \approx 980,665 \text{ cm/s}^2$, l'altitude z est évaluée positivement vers le haut à partir du sol dans le sens inverse du vecteur \vec{g} intensité de pesanteur. Ainsi, on peut écrire l'équation hydrostatique

$$(I.8) \quad \frac{d.p}{dz} + g e = 0$$

ou encore, puisque $p = R e T$

$$(I.9) \quad \frac{d}{dz} \log e + \frac{dT/dz + g/R}{T} = 0$$

Si maintenant on suppose que la température standard est donnée par la relation (I.6), on obtient, au sein de la troposphère standard, la distribution de masse volumique suivante :

$$(I.10) \quad \rho(z) = \rho(0) \left[1 - \frac{\rho^0}{T(0)} z \right]^{x_0}$$

avec

$$x_0 = \frac{1}{\rho^0} (g/R - \rho^0)$$

Si nous écrivons l'équation thermodynamique d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes sous la forme différentielle suivante

$$(I.11) \quad d\Delta = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

et si nous supposons, la transformation adiabatique (ou isentropique) c'est-à-dire $d\Delta = 0$, alors

$$(I.12) \quad -c_p dT = \frac{dp}{\rho}$$

nous pouvons définir une constante Γ_s par la relation

$$(I.13) \quad \Gamma_s = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{g}{R} = \frac{g}{c_p}$$

où nous avons $\Gamma_s = 9,8^\circ \text{C}/\text{km}$. C'est ce que nous appelons le gradient adiabatique sec.

La distribution standard, en tant que distribution de référence existe de jour en jour sous la forme d'un mouvement de base qui n'est que "légèrement perturbé par le temps" proprement dit. Cette distribution standard est uniquement fonction de l'altitude z et satisfait aux relations (I.8) et (I.5).

Cependant, ces relations (I.8) et (I.5), qui montrent que la distribution standard est en équilibre sous l'action de la pesanteur, ne sont pas suffisantes pour déterminer les fonctions p , e et T ; il manque une équation supplémentaire qui ne peut être obtenue qu'en considérant les échanges énergétiques dont l'atmosphère est le siège. Pour notre part, nous supposons que dans la troposphère la température standard satisfait à la relation (I.6). Notons que les éléments thermodynamiques de la distribution standard satisfont aux relations suivantes.

$$(I.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{e} \cdot \frac{de}{dz} = - \frac{1}{T} (g/R - \Gamma_0), \\ \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dz} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dz} = - \frac{1}{T} (\Gamma_0 - \Gamma_s) \end{array} \right.$$

une fois que l'on a admis que $-\frac{dT}{dz} = \Gamma_0 = \text{Cte}$

1.3 Le géostrophisme :

Si l'on considère des mouvements d'échelle dite synop-

tique, qui peuvent encore se traiter dans le plan tangent à la surface terrestre, alors le géostrophisme s'exprime par les relations

$$(I.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_g = -\frac{1}{\rho_0 \rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g = \frac{1}{\rho_0 \rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ \omega \equiv 0 \end{array} \right.$$

où $f_0 = 2\Omega_0 \sin \varphi_0$ est le paramètre de Coriolis et φ_0 la latitude algébrique constante, positive dans l'hémisphère Nord.

Le géostrophisme constitue un régime d'équilibre voisin du régime réel et le vent synoptique réel est "voisin" du vent géostrophique.

Soit U_0 la vitesse caractéristique du mouvement d'échelle synoptique et L_0 son échelle de longueur caractéristique. Dans ce cas les mouvements d'échelle dite synoptique peuvent être caractérisés par la condition

$$(I.16) \quad L_0 \gg \frac{U_0}{|f_0|}$$

Si

$$(I.17) \quad L_0 \approx \frac{U_0}{|f_0|}$$

nous considérons alors des mouvements d'échelle moyenne c'est la mésométéorologie.

Si

$$(I.18) \quad L_0 \ll \frac{u_0}{|f_0|}$$

alors la force de Coriolis est négligeable et nous considérons des mouvements de "petite échelle".

Ecrivons les relations (I.15) pour les composantes du vent réel

$$(I.19) \quad \rho_0 \rho_0 u + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho_0 \rho_0 v - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad w = 0$$

Un tel équilibre est ce qu'on appelle l'équilibre géostrophique. Il correspond à l'approximation "quasi-géostrophique", et dans ce cas le modèle de mouvement atmosphérique est dénommé "mouvement quasi-géostrophique".

Au voisinage du sol l'approximation quasi-géostrophique doit être remplacée par les équations de la couche limite d'Ekman qui conduisent au modèle d'Ackerblom.

1.4 Phénomènes non adiabatiques :

Les composantes du tenseur des contraintes de viscosité turbulente, lorsqu'on suppose un gaz parfait à chaleurs

spécifiques constantes, un fluide Newtonien dit de Navier-Stokes, et que l'on fait l'hypothèse de Stokes

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

peuvent s'écrire sous la forme classique suivante

$$(I.20) \quad \tau_{ij} = \mu \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\}$$

où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, 1 si $i = j$, on suppose $\mu = \mu_0 = \text{cte}$
 $\lambda = \lambda_0 = \text{cte}$ et où μ est le coefficient de viscosité turbulente et v_i les composantes de la vitesse (du vent) selon les axes Ox_i .

La loi de la conduction thermique peut s'écrire, sous la forme d'une loi de Fourier

$$(I.21) \quad q_i = -k_0 \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

où k_0 est le coefficient de conduction thermique turbulente,
 $k_0 = \text{Cte}$.

Comme on envisage que les mouvements atmosphériques qui peuvent se traiter dans le plan tangent à la surface terrestre, nous nous bornons à l'apport de chaleur dû à la conductivité thermique (I.21) et à la dissipation visqueuse

$$(I.22) \quad \Phi = \tau_{ij} d_{ij}$$

où

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

sont les composantes du tenseur des taux de déformations. On supposera de plus que le mouvement s'effectue sans condensation.

1.5 Les équations de Navier-Stokes pour l'atmosphère :

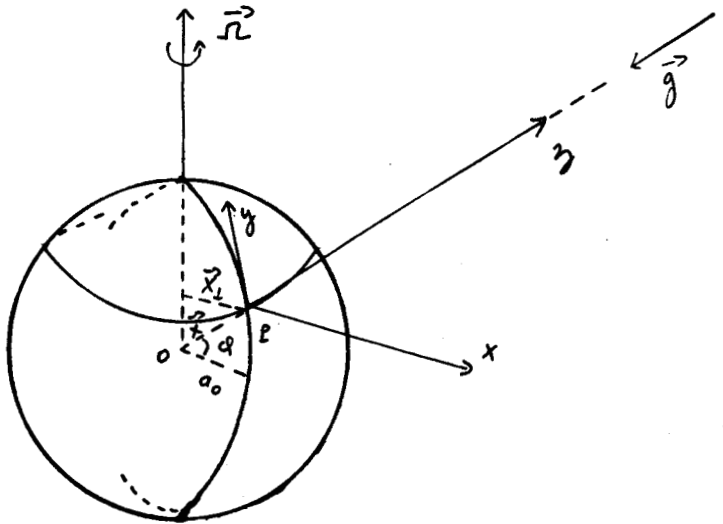


Figure 1

Nous considérons un repère lié à la sphère terrestre, en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ fixe et indépendante du temps t .

Soit \vec{V}_r le vecteur vitesse d'une particule fluide dans le repère en mouvement

$$(I.23) \quad \vec{V}_r = \frac{\partial r}{\partial t} \vec{X}(x^0, t)$$

L'équation de la quantité de mouvement, pour le mouvement relatif est :

$$(I.24) \quad e \left\{ \frac{D_r}{Dt} \vec{V}_r + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r \right\} + \vec{V}_r \rho = e \left\{ \vec{f} + |\vec{\Omega}|^2 \vec{X}_\perp \right\} + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}$$

$\bar{\bar{\tau}}$ désigne le tenseur de viscosité turbulente, ses composantes τ_{ij} vérifient la relation (I.20), l'indice \perp est relatif à la composante normal à $\vec{\Omega}$.

On suppose, en général, que \vec{f} est la vraie force gravitationnelle, de telle sorte que

$$(I.25) \quad \vec{g} = \vec{f} + |\vec{\Omega}|^2 \vec{X}_\perp$$

\vec{g} est la force de pesanteur.

Il vient ainsi l'équation vectorielle du mouvement relatif suivante :

$$(I.26) \quad \frac{D_r}{Dt} \vec{V}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r = -\frac{1}{e} \vec{V}_r \rho + \vec{g} + \frac{1}{e} \vec{v} \cdot \vec{e}$$

Comme nous nous limitons aux mouvements pour lesquels l'échelle horizontale caractéristique L_0 est "beaucoup plus petite" que le rayon moyen de la sphère terrestre, on considère alors un système de coordonnées cartésiennes $(P; x, y, z)$ lié au plan normal à \vec{g} (voir figure), tangent en P à la surface de la Terre, P_x étant tangent au méridien en P .

Soit φ la latitude algébrique du point P et u, v et w les composantes de la vitesse relative selon les axes P_x, P_y et P_z .

Nous avons dans ces conditions

$$(I.27) \quad \vec{\Omega} = \Omega_0 (\sin \varphi \vec{k} + \cos \varphi \vec{j})$$

$$\vec{P}_x = \vec{i}, \quad \vec{P}_y = \vec{j}, \quad \vec{P}_z = \vec{k}$$

Les équations du mouvement relatif sont les suivantes :

$$(I.28) \quad e \left\{ \frac{Du}{Dt} - 2\Omega_0 \sin \varphi v + 2\Omega_0 \cos \varphi w \right\} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left\{ \Delta u + \frac{\partial}{\partial x} A \right\}$$

$$(I.29) \quad e \left\{ \frac{Dv}{Dt} + 2\Omega_0 \sin \varphi u \right\} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left\{ \Delta v + \frac{\partial}{\partial y} A \right\}$$

$$(I.30) \quad e \left\{ \frac{Dw}{Dt} - 2\Omega_0 \cos \varphi u + g \right\} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu_0 \left\{ \Delta w + \frac{\partial}{\partial z} A \right\}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ou

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

La pression p est déterminée par la loi d'état

$$(I.31) \quad p = R \rho T$$

et ρ satisfait à l'équation de continuité

$$(I.32) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

Enfin, la température T s'introduit dans l'équation de l'énergie

$$(I.33) \quad c_p \rho \left(\frac{DT}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) = k_0 \Delta T + \Phi$$

où Φ est donnée par (I.22)

Le système des équations de Navier-Stokes (I.28)-(I.33) est fermé en ce sens qu'il y a autant d'équations que d'inconnues (u, v, w, p, ρ, T)

La nature parabolique, par rapport au temps des équations (I.28)-(I.30) de quantité de mouvement, pour les inconnues u, v et w et de l'équation de l'énergie (I.41), pour l'inconnue T , conduit à s'imposer, sur toute frontière une condition scalaire pour chaque composante u, v et w et une condition sur T

Soit $z = z(x, y)$ (surface immobile)

l'équation de la surface du sol dans le système local

(P; x, y, z)

La formulation des conditions aux limites et initiales est la suivante

α) condition d'adhérence sur $z = z(x, y)$

$$(I.34-1) \quad u = v = w = 0 \quad \text{sur } z = z(x, y)$$

Condition pour la température sur z que l'on écrira sous la forme

$$(I.34-2) \quad T = T_0 + \Delta T \vartheta(x, y, t) \quad \text{sur } z = z(x, y)$$

β) conditions initiales

$$(I.34-3) \quad u = u^0, \quad \vartheta = \vartheta^0, \quad w = w^0, \quad T = T^0 \quad \text{lorsque } t = 0$$

γ) conditions à l'infini

Les conditions de comportement à l'infini sont souvent liées à la nature du problème posé.

\bar{T}_0 et $\Delta\bar{T}_0$ sont des températures caractéristiques constantes liées respectivement à l'état standard (au sol) et à la variation de température Θ sur $z = z(x, y)$ où Θ est une fonction de t, x, y .

1.5.1 Nouvelles écritures des équations (I.28)-(I.33) :

Dans les phénomènes météorologiques un rôle important est joué par l'état standard qui n'est que légèrement perturbé par le temps proprement dit. Cet état standard est caractérisé par

$$(I.35) \quad z \mapsto z_{\infty}, \quad p_{\infty}(z_{\infty}), \quad \rho_{\infty}(z_{\infty}), \quad T_{\infty}(z_{\infty})$$

$$\text{où} \quad -p_{\infty} = R \rho_{\infty} T_{\infty} \quad (\text{loi des gaz parfaits})$$

$$\frac{dp_{\infty}}{dz_{\infty}} + g \rho_{\infty} = 0 \quad (\text{équilibre hydrostatique})$$

Pour déterminer complètement $p_{\infty}, \rho_{\infty}$ et T_{∞} on se donne

$$-\frac{dT_{\infty}}{dz_{\infty}} = \Gamma_{\infty}(z_{\infty})$$

Introduisons les variables thermodynamiques (w, π, θ) qui sont des petites perturbations par rapport à l'état standard. Nous écrirons alors par rapport à la vraie pression, la vraie masse volumique et la vraie température :

$$(I.36) \quad -p = -p_{\infty}(z_{\infty})(1 + \pi); \quad \rho = \rho_{\infty}(z_{\infty})(1 + w); \quad T = T_{\infty}(z_{\infty})(1 + \theta)$$

En remarquant que nous avons les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz_\infty} \text{Log } T_\infty = -\frac{1}{T_\infty} (g/R - \Gamma_\infty) \\ \frac{d}{dz_\infty} \text{Log } T_\infty - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{d}{dz_\infty} \text{Log } \rho_\infty = \frac{1}{T_\infty} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{g}{R} - \Gamma_\infty \right) \end{array} \right.$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{d \rho_\infty}{dz_\infty} + \rho_\infty(z_\infty) \frac{\partial \pi}{\partial z} + \pi \frac{d \rho_\infty}{dz_\infty}$$

Soit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \rho_\infty (1 + \pi) + \rho_\infty \frac{\partial \pi}{\partial z}$$

Si nous portons les différentes quantités de l'état standard dans les équations (I.28) - (I.33) et en tenant compte des relations précédentes nous obtenons les nouvelles équations de Navier-Stokes écrites par rapport à w , π et θ .

$$(I.37) \quad (1+w) \left(\frac{Dv}{Dt} - 2\Omega_0 \sin \varphi v + 2\Omega_0 \cos \varphi w \right) = -RT_\infty \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho_\infty} (\Delta v + \frac{\partial A}{\partial x})$$

$$(I.38) \quad (1+w) \left(\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega_0 \sin \varphi v \right) = -RT_\infty \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho_\infty} (\Delta v + \frac{\partial A}{\partial y})$$

$$(I.39) \quad (1+w) \left(\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega_0 \cos \varphi v - g\theta \right) = -RT_\infty \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\mu_0}{\rho_\infty} (\Delta w + \frac{\partial A}{\partial z})$$

$$(I.40) \quad \pi = w + \theta + w\theta$$

$$(I.41) \quad \frac{Dw}{Dt} + (1+w) \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{T_\infty} (\Gamma_\infty - g/R) w \right\} = 0$$

$$(I.42) \quad (1+\omega) \frac{D\theta}{Dt} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{D\pi}{Dt} + (1+\pi) \cdot \frac{1}{T_\infty} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{q}{R} - \rho_\infty \right) \omega$$

$$= \frac{1}{Pr} \frac{M_0}{\rho_\infty} \left(\Delta\theta - 2 \frac{\rho_\infty}{T_\infty} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{-C_p \rho_\infty T_\infty} \Phi$$

où $Pr = M_0 C_p / R_0$ est le nombre de Prandtl.

Il faut remarquer que du point de vue cinématique, seules les vitesses locales sont petites par rapport à la célérité du son

$$-C_\infty(z_\infty) = \gamma R T_\infty(z_\infty), \quad q = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} \ll |C_\infty(z_\infty)|$$

Nous avons comme conditions aux limites et initiales

$$(I.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v = w = 0 \\ \theta = \tau \Theta(t, x, y) \end{array} \right\} \text{ sur } z = z(x, y)$$

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0, \quad \theta = \theta^0 \text{ pour } t = 0$$

+ les conditions à l'infini

$\tau = \frac{\Delta T_0}{T_\infty(0)}$ est le taux de fluctuations et $T_\infty(0) \equiv \bar{T}_0$ est la valeur au sol de la température de l'état standard. Les équations (I.37) - (I.42) sont valables uniquement dans la troposphère.

1.5.2 Equations adimensionnelles :

Soit (L_0) une échelle caractéristique de longueur horizontale, (U_0) une vitesse caractéristique et $\rho_\infty(0)$, $\rho_\infty(0)$, $T_\infty(0)$ les valeurs au sol des grandeurs caractéristiques de l'état standard. Nous avons, alors, les grandeurs sans dimensions suivantes :

$$x_1 = \frac{x}{L_0}, \quad x_2 = \frac{y}{L_0}, \quad x_3 = \frac{z}{L_0}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{L_0}, \quad \varphi_1 = \frac{u}{u_0}, \quad \varphi_2 = \frac{v}{u_0}, \quad \varphi_3 = \frac{w}{u_0}$$

$$\bar{T}_\infty = \frac{T_\infty}{T_\infty(0)}, \quad -\bar{\rho}_\infty = \frac{-\rho_\infty}{-\rho_\infty(0)}, \quad \bar{p}_\infty = \frac{p_\infty}{p_\infty(0)}$$

Dans les nouvelles variables réduites \bar{t}, x_i nous obtenons pour les fonctions réduites $\varphi_i, \bar{\pi}, \omega$ et θ les équations réduites :

$$(I.45) \quad (1+\omega) \left\{ 5 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{t}} + \varphi_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} - \frac{1}{R_0} \left(\varphi_2 - \frac{\varphi_3}{\Gamma_g \varphi_0} \right) \right\} = - \frac{\bar{T}_\infty(\bar{\xi}_\infty)}{\gamma M_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_1} \\ + \frac{1}{\bar{\rho}_\infty(\bar{\xi}_\infty)} \cdot \frac{1}{R_e} \left\{ \Delta \varphi_1 + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right) \right\}$$

$$(1+\omega) \left\{ 5 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \bar{t}} + \varphi_j \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \frac{1}{R_0} \varphi_1 \right\} = - \frac{\bar{T}_\infty(\bar{\xi}_\infty)}{\gamma M_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_2}$$

$$(I.46) \quad + \frac{1}{\bar{\rho}_\infty(\bar{\xi}_\infty)} \cdot \frac{1}{R_e} \left\{ \Delta \varphi_2 + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \right\}$$

$$(1+\omega) \left\{ 5 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{t}} + \varphi_j \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j} - \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\varphi_1}{\Gamma_g \varphi_0} \right\} = - \frac{\bar{T}_\infty(\bar{\xi}_\infty)}{\gamma M_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x_3}$$

(I.47)

$$+ (1+\omega) \frac{\theta_0}{\gamma M_0^2} \theta + \frac{1}{\bar{\rho}_\infty(\bar{\xi}_\infty)} \cdot \frac{1}{R_e} \left\{ \Delta \varphi_3 + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \right) \right\}$$

(I.48)

$$\bar{\pi} = \omega + \theta + \omega \theta$$

$$(I.49) \quad 5 \frac{\partial \omega}{\partial \bar{t}} + \varphi_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + (1+\omega) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = (1+\omega) \frac{\theta_0}{\bar{T}_\infty(\bar{\xi}_\infty)} (1 + \Gamma_\infty(\bar{\xi}_\infty)) \varphi_3$$

$$\begin{aligned}
 & (1+\omega) \left(S \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} + \varphi_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(S \frac{\partial \pi}{\partial \bar{t}} + \varphi_j \frac{\partial \pi}{\partial x_j} \right) \\
 \text{(I.50)} \quad & + (1+\pi) \frac{B_0}{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{\rho_\infty(\bar{z}_\infty)}{\rho_\infty(\bar{z}_\infty)} \right\} \varphi_3 \\
 & = \frac{1}{\rho(\bar{z}_\infty)} \cdot \frac{1}{\rho_r} \cdot \frac{1}{R_e} \left\{ \Delta \theta - 2 \frac{B_0}{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)} \frac{\rho_\infty(\bar{z}_\infty)}{\rho_\infty(\bar{z}_\infty)} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + (\gamma-1) \frac{\rho_r}{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)} M_0^2 \bar{\Phi} \right\}
 \end{aligned}$$

où $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$

Nous avons fait le choix de

$$\bar{z}_\infty = \frac{z_\infty}{H_\infty}, \quad H_\infty = \frac{R T_\infty(0)}{g}$$

H_∞ est l'altitude de l'atmosphère homogène. C'est l'altitude qu'aurait l'atmosphère, si la température, la pression et la masse volumique étaient constantes.

Nous avons les conditions aux limites et initiales suivantes

$$\text{(I.51)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i = 0 \\ \theta = \tau \Theta(\bar{t}, x_1, x_2) \\ \varphi_i = \varphi_i^0, \quad \theta = \theta^0 \text{ lorsque } \bar{t} = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } x_3 = \eta h(x_1, x_2)$$

+ les conditions à l'infini amont

Au niveau du problème (I.45) - (I.51) sont apparus les paramètres sans dimensions suivants

$S = L_0 / t_0 U_0$, le nombre de Strouhal qui caractérise l'importance des effets d'instationnarité

$Re = u_0 L_0 \rho_\infty(0) / \mu_0$, le nombre de Reynolds. $1/Re$ caractérise l'importance des effets dissipatifs

$M_0 = u_0 / (\gamma R T_\infty(0))^{1/2}$, le nombre de Mach qui caractérise l'importance des effets de compressibilité

$B_0 = L_0 g / R T_\infty(0)$, le nombre de Boussinesq qui caractérise l'importance des effet de la pesanteur.

$R_0 = u_0 / 2 \Omega_0 L_0 \sin \phi_0$, le nombre de Rossby qui caractérise l'importance des effets de la force de Coriolis.

$Pr = C_p \mu_0 / k_0$, le nombre de Prandtl qui caractérise l'importance relative du frottement et de la conduction de la chaleur, pour l'air $Pr \approx 1$.

$\tau = \Delta T_\infty(0) / T_\infty(0)$, le paramètre thermique au sol.

$\eta = h_0 / L_0$, le paramètre de forme de la surface du sol, où $h_0 = \max h / L_0$ lorsque X_1 et X_2 sont dans le domaine de définition de $h(X_1, X_2)$

1.6 Conclusion :

En conclusion, ces différents paramètres sans dimensions qui s'introduisent au niveau des équations (I.47) - (I.51), sont, dans beaucoup de cas des petits paramètres de perturbations singulières. En particulier le nombre de Mach est toujours beaucoup plus petit que l'unité pour l'atmosphère. C'est ce phénomène singulier qui fera l'objet d'une analyse au chapitre III.

CHAPITRE II

SCHEMA EN TRIPLE COUCHE

CHAPITRE IISchéma en triple couche

Lors de l'étude de l'écoulement d'un fluide au dessus d'une plaque plane ou autour d'un corps, la représentation asymptotique de la solution, pour des grands nombres de Reynolds, construite avec le schéma de Prandtl cesse d'être correcte dans un voisinage du bord de fuite, ou au voisinage d'un point critique tel que point de décollement, coin convexe ou coin concave, ou tout autre point où la couche limite subit un "accident". En première approximation, la couche limite, loin en amont du point critique est toujours une couche limite de Blasius, mais uniquement en dehors de ce point.

Dans le voisinage immédiat du point critique, pour déterminer le comportement exact, on a besoin d'une méthode analytique pour remplacer l'analyse classique.

Dans ce but, STEWARTSON et WILLIAMS (1969) et NEILAND (1969) ont développé simultanément et indépendamment le schéma en triple couche.

Près du point critique, ces auteurs traitent la pression comme une inconnue, et la calculent au moyen d'un raccordement entre l'écoulement près de la paroi et l'écoulement près

du bord supérieur de la région visqueuse. Ils divisent la région perturbée par les effets visqueux en trois couches. La longueur de chaque couche, dans la direction parallèle à la paroi est de l'ordre de $Re^{-3/8}$, où Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement non perturbé. La première couche, qui s'appelle la couche intermédiaire, a une épaisseur de l'ordre de $Re^{-1/2}$ et elle est reliée à la couche limite en amont de la région perturbée par le point critique. Les équations du mouvement dans cette couche sont du type non visqueux, et, par conséquent, la condition d'adhérence à la paroi n'est pas satisfaite. Donc il faut introduire une deuxième couche, une sous-couche, qui est de caractère visqueux et qui est régie par les équations visqueuses. L'épaisseur de cette couche est de l'ordre de $Re^{-5/8}$. Il reste à raccorder l'écoulement près du bord supérieur de la couche intermédiaire avec l'écoulement non visqueux juste au dessus. Pour réaliser ce raccordement, qui détermine la répartition de pression à l'extérieur de la couche limite, il faut introduire une troisième couche qui s'appelle la couche extérieure (ou supérieure). L'écoulement dans cette couche qui a une épaisseur de l'ordre $Re^{-3/8}$ est du type non visqueux et irrotationnel.

La solution des équations du mouvement de la couche extérieure détermine les conditions limites au bord supérieur de la couche intermédiaire et de la couche inférieure.

Pour notre part, nous allons présenter une variante

simple de ce schéma en triple couche, au voisinage d'un point d'une plaque plane, pour un écoulement stationnaire plan de fluide incompressible, visqueux, homogène. Mais auparavant, donnons une définition. On trouvera dans ZEYTOUNIAN (1987 ; leçon VI) un exposé sur la triple couche.

2.1 Définition :

On dit qu'il y a couplage singulier (fort) lorsque dès l'ordre zéro (au sens de la M.D.A.R.), l'écoulement de fluide parfait et la couche limite sont en interaction directe, réciproque.

Remarquons que cette situation (singulière) se rencontre chaque fois que la couche limite "subit un accident", au voisinage d'une certaine abscisse X_0 , située sur la paroi de l'obstacle autour duquel l'écoulement à grand nombre de Reynolds est considéré.

2.2 Schéma en triple couche :

Si nous introduisons les coordonnées X, y parallèle et normale respectivement à la paroi et si u et v sont les composantes de la vitesse dans les directions X, y , p étant la pression, les équations adimensionnelles sont, où nous avons posé

$$\varepsilon = Re^{-1/2}$$

$$(II.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon^2 \Delta u \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon^2 \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Nous supposons que "l'accident" se produit au voisinage du point $X = X_0, y = 0$ et que le nombre de Reynolds $Re \equiv Re_{x_0} = u_0 x_0 / \nu_0$ est grand. u_0 et ν_0 étant respectivement la vitesse de l'écoulement non perturbé et la viscosité cinématique loin en amont.

2.2.1 L'écoulement de base

En amont du point $(X_0, 0)$, nous supposons que l'écoulement est du type Blasius, c'est-à-dire que la pression est constante à l'extérieur, et le profil des vitesses est donné par une solution semblable.

$$f''' + f'f'' = 0$$

Soit

$$(II.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_B(x, y/\varepsilon) \\ v = \varepsilon v_B(x, y/\varepsilon) \end{array} \right. \quad 0 < x < x_0$$

X et y sont les variables adimensionnalisées relativement à une longueur caractéristique L_0 , liée à la position de l'abscisse X_0 sur la paroi.

Nous supposons que l'accident conduit à un couplage singulier dans un voisinage du point $(X_0, 0)$ "important" devant l'épaisseur de la couche limite classique.

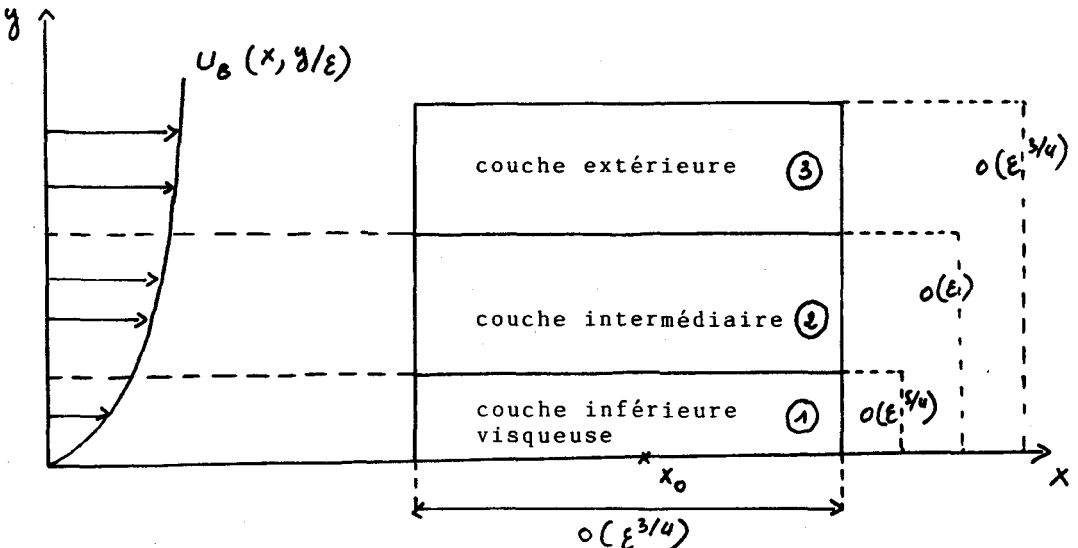
$$(II.3) \quad X = X_0 + \delta_1 \hat{X} \Rightarrow \varepsilon \ll \delta_1 \ll 1, \quad \hat{X} = O(1)$$

Nous allons voir, que ce couplage singulier fait intervenir une sous-couche limite visqueuse, dite inférieure, au voisinage de la paroi dont l'épaisseur est

$$(II.4) \quad \delta_2 \ll \varepsilon \Rightarrow \hat{y} = y/\delta_2$$

Ces "assertions" de départ ont été justifiées heuristiquement dans un travail, déjà ancien, de LIGHTILL (1953).

La structure en triple couche se présente à priori comme indiquée sur la figure ci-dessous :



Sur cette figure nous avons indiqué :

1) la couche inférieure, qui est une sous couche visqueuse, d'épaisseur δ_2 , nous verrons que pour le cas de couplage d'auto-induction nous avons $\delta_2 = O(\varepsilon^{5/4})$

2) la couche intermédiaire, où la vitesse de l'écoulement est peu perturbée, elle a un caractère non visqueux et son épaisseur est compatible à celle de la couche limite.

3) la couche extérieure (supérieure) permettant de réaliser le couplage. Elle a un caractère non visqueux et son épaisseur est du même ordre que sa largeur, c'est-à-dire $O(\varepsilon^{3/4})$

Dans ce qui suit, nous poserons

$$\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon^a, \text{ avec } a < 1$$

et

$$\delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^b, \text{ avec } b > 1$$

Les réels a et b devant être déterminés au cours de la mise en place du schéma en triple couche au voisinage du point $(X_0, 0)$ pour lequel l'abscisse représentative est :

$$(II.5) \quad \hat{X} = \frac{X - X_0}{\varepsilon^a}$$

d'autre part, on a que $U_{\beta_0}(y/\varepsilon)$, $V_{\beta_0}(y/\varepsilon)$ et P_{β_0} sont les valeurs qui existeraient dans la couche limite de départ à l'abs-

cisse X_0 en l'absence d'accident.

Notons que $\rho_0 = \text{constante} \equiv 1$. On s'intéresse à une région où $\hat{x} = 0(1)$.

2.2.2 Couche intermédiaire

Dans la couche intermédiaire qui est un prolongement naturel de la couche limite amont, on utilise tout simplement la coordonnée de la couche limite.

$$(II.6) \quad \bar{y} = y/\varepsilon$$

donc $\hat{x} = 0(1)$ et $\bar{y} = 0(1)$ sont les variables indépendantes. On cherche alors la solution (peu perturbée) relativement à l'écoulement de base des équations (II.1) sous la forme :

$$(II.7) \quad \begin{cases} u = u_{00}(\bar{y}) + \varepsilon^\alpha \bar{u}(\hat{x}, \bar{y}) + \dots + \varepsilon^a \hat{x} \frac{du_{00}}{dx} \\ v = \varepsilon \left\{ v_{00}(\bar{y}) + \varepsilon^\beta \bar{v}(\hat{x}, \bar{y}) + \dots + \varepsilon^a \hat{x} \frac{dv_{00}}{dx} \right\} \\ -p = -p_{00} + \varepsilon^\delta \bar{p}(\hat{x}, \bar{y}) + \dots + \varepsilon^a \hat{x} \frac{dp_{00}}{dx} \end{cases}$$

où l'indice α indique les valeurs prises par les fonctions en $X = X_0$.

α , β et δ sont des scalaires à déterminer et on notera que

$$\beta = \alpha - a$$

Mais il faut que $\alpha < a$ et de ce fait $\beta < 0$ mais

$$\beta + 1 \equiv 1 + \alpha - a$$

On remarquera de ce fait que les termes visqueux ne sont pas importants à l'ordre considéré et \bar{u} , \bar{v} et \bar{p} satisfont aux équations

$$(II.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{0_0}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{du_{0_0}(\bar{y})}{d\bar{y}} \bar{v} + \varepsilon^{\gamma-\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (\varepsilon^{\alpha-\alpha}) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\varepsilon^{2+\beta-\alpha-\gamma}) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \end{array} \right.$$

Il nous reste à élucider la valeur de $\gamma - \alpha$

2.2.3 La couche inférieure

L'idée est que dans cette couche, qui est une sous-couche visqueuse, il faut retrouver les équations de la couche limite.

Les variables sont alors

$$(II.9) \quad \hat{x} = \frac{x - x_0}{\varepsilon^a}, \quad \hat{y} = \frac{y}{\varepsilon^b}, \quad b > 1$$

et on écrit donc

$$(II.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \varepsilon^3 \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) + \dots \\ v = \varepsilon^4 \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) + \dots \\ -p = -p_0 + \varepsilon^\gamma \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) + \dots \end{array} \right.$$

puisque les perturbations de pression, se raccordent de manière continue d'une couche à l'autre. Comme \hat{u} , \hat{v} et \hat{p} doivent vérifier les équations de la couche limite (auxquelles il faut

adjoindre la condition d'adhérence à la paroi $\hat{y}=0$, il vient après avoir substitué les expressions (II.10) dans les équations (II.1), les relations

$$(II.11) \quad \begin{cases} \mu = \lambda + b - a, & \gamma = 2\lambda \\ \gamma - a + 2b = \lambda + 2 \Rightarrow \mu = 2 - b \end{cases}$$

Le raccord entre la couche inférieure et la couche intermédiaire est lié à :

$$\hat{y} = y/\varepsilon^b = \bar{y}/\varepsilon^{b-1}$$

et $\bar{y} \rightarrow 0$ correspond bien à $y \rightarrow +\infty$, puisque $b > 1$; lorsque $y \rightarrow 0$ on a

$$u_{00}(\bar{y}) \sim \bar{y} = \varepsilon^{b-1} \hat{y}$$

cela permet ainsi d'imposer la condition de comportement

$$\hat{x} \rightarrow -\infty, \quad \hat{u} \rightarrow \hat{y}$$

Ce qui fait que, nécessairement, on a

$$(II.12) \quad \lambda = b - 1 \Rightarrow a = 3(b - 1)$$

Dans ces conditions on trouve

$$(II.13) \quad \gamma - \alpha \equiv 2\lambda - \alpha = 2(b - 1) - \alpha \equiv \frac{2}{3}a - \alpha$$

2.2.4 La couche supérieure

Pour raccorder la solution du bord supérieur de la couche intermédiaire avec l'écoulement non visqueux au dessus, il faut introduire une couche supérieure, où les inconnues doivent être recherchées sous la forme :

$$(II.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_{B_0}(\infty) + \varepsilon^r \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots \\ \vartheta = \varepsilon^\sigma \tilde{\vartheta}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \varepsilon \cdot V_{B_0}(\infty) + \dots \\ -p = -p_{B_0} + \varepsilon^\sigma \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots \end{array} \right.$$

où $\tilde{y} = y/\varepsilon^c$, $c < 1$ à déterminer

On notera que :

$$(II.15) \quad \bar{y} = \tilde{y} / \varepsilon^{1-c} \quad \text{correspond à} \\ \tilde{y} \rightarrow 0 \quad \text{puisque } c < 1$$

En effet, c'est la solution qui permet tout d'abord d'obtenir l'équation

$$(II.16.a) \quad u_{B_0}(\infty) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

puis si l'on fait le choix $c = a \Rightarrow \tilde{y} = y/\varepsilon^a$, $a < 1$

$$(II.16.b) \quad u_{B_0}(\infty) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

et on a un système fermé, en écrivant aussi que :

$$(II.16.c) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

Le raccord des composantes , respectivement dans la couche intermédiaire et dans la couche supérieure nous donne

$$(II.17) \quad \gamma \equiv \beta + 1$$

Ce qui permet d'imposer la "bonne" condition à la limite au niveau du problème extérieur (II.16).

Ainsi on constate que :

$$\beta + 1 \equiv 1 + \alpha - a = \gamma \equiv 2A = 2(\ell - 1) = \frac{2}{3}a$$

conduit à

$$(II.18) \quad \frac{2}{3}a - \alpha = 1 - \alpha > 0$$

et de ce fait le terme $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x}$ au niveau de l'équation (II.8.a) n'intervient pas dans la couche intermédiaire à l'ordre zéro.

Le raccord des vitesses longitudinales u , au niveau

des couches inférieure et intermédiaire lorsque

$$\hat{y} \rightarrow \infty \text{ et } \bar{y} \rightarrow 0$$

conduit à la relation complémentaire entre a et α

$$(II.19) \quad \lambda = \alpha \equiv b - 1 = \frac{a}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{3}$$

Ceci provient du fait que $u_{B_0}(\bar{y})$ disparaît à la frontière supérieure de la couche inférieure, lorsque $\bar{y} \rightarrow 0$

En définitive, on arrive à la conclusion que :

$$\begin{array}{lll} a = 3/4 & \beta + 1 = 1/2 & \mu = 3/4 \\ \alpha = 1/4 & \delta = 1/2 & \\ b = 5/4 & \lambda = 1/4 & \end{array}$$

ce qui détermine toutes les fonctions de jauges.

Dans ces conditions et compte tenu de ce que

$\delta - \alpha = 1/4 > 0$, la solution du système (II.8) s'écrit

$$(II.20) \quad \begin{cases} \bar{u}(\hat{x}, \bar{y}) = \bar{A}(\hat{x}) \frac{d u_{B_0}(\bar{y})}{d \bar{y}} \\ \bar{v}(\hat{x}, \bar{y}) = - u_{B_0}(\bar{y}) \frac{d \bar{A}(\hat{x})}{d \hat{x}} \end{cases}$$

où $\bar{A}(\hat{x})$ est une fonction arbitraire telle que

$$\bar{A}(\hat{x}) \rightarrow 0, \hat{x} \rightarrow -\infty$$

Notons

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow 0} \frac{dU_{B_0}(\bar{y})}{d\bar{y}} = \dot{U}_{B_0}(0)$$

On constate bien que l'on est conduit, pour ramener à zéro la vitesse de glissement s'introduisant à ce niveau et justifiant l'existence de la couche inférieure à poser $\lambda = \alpha = 1/4$. Ainsi, du fait du raccord, on a

$$(II.21) \quad \begin{cases} \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) \sim \dot{U}_{B_0}(\hat{y} + \bar{A}(\hat{x})) \\ \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}) \sim -\dot{U}_{B_0} \hat{y} \frac{d\bar{A}}{d\hat{x}} \end{cases} \text{ lorsque } y \rightarrow +\infty$$

De même l'existence d'une couche supérieure se trouve ainsi justifiée par le fait que

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow +\infty} \bar{v}(\hat{x}, \bar{y}) \neq 0$$

c'est-à-dire que $\bar{v}(\hat{x}, \bar{y})$ ne s'annule pas lorsque $\bar{y} \rightarrow +\infty$ au bord supérieur de la couche intermédiaire, correspondant à $\hat{y} \rightarrow 0$ qui conduit au bord inférieur de la couche supérieure de fluide parfait gouverné par les équations (II.16)

D'autre part, (II.8.a) conduit à

$$(II.22) \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0 \Rightarrow \bar{p} = P(\hat{x})$$

où $P(\hat{x})$ est la perturbation de pression.

Ainsi \hat{p} satisfait à la condition de comportement

$$(II.23) \quad \hat{p} \rightarrow \bar{p} \equiv P(\hat{x}) \text{ lorsque } \hat{y} \rightarrow +\infty$$

En éliminant au niveau des équations (II.16) toutes les fonctions sauf $\tilde{p}(\hat{x}, \tilde{y})$ on obtient pour cette dernière l'équation

$$(II.24) \quad \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{y}^2} = 0$$

où en $\tilde{y} = 0$, on doit imposer la condition à la limite

$$(II.25) \quad \tilde{p}(\hat{x}, 0) = P(\hat{x})$$

Le raccord des vitesses verticales U dans les couches intermédiaire et supérieure, respectivement donne la relation

$$(II.26) \quad \tilde{U}(\hat{x}, 0) = -U_{E_0}(\infty) \frac{d\bar{A}}{d\hat{x}}$$

et l'équation (II.16.b) permet d'écrire que

$$(II.27) \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0} = U_{E_0}^2(\infty) \frac{d^2 \bar{A}(\hat{x})}{d\hat{x}^2}$$

Ainsi, la résolution de l'équation extérieure de fluide parfait (II.24) avec la condition (II.25) et en tenant compte de (II.27), fournit une relation liant $\bar{A}(\hat{x})$ et $P(\hat{x})$.

Donc les équations pour déterminer \hat{u} , \hat{v} et P sont

$$(II.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{dP(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \end{array} \right.$$

Avec les conditions

$$(II.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{y} = 0 \quad \hat{u} = \hat{v} = 0, \quad \hat{x} = 0(1) \\ \hat{y} \rightarrow \infty \quad \hat{u} \rightarrow \hat{y} + \bar{A}(\hat{x}), \quad \hat{v} \rightarrow -\hat{y} \frac{d\bar{A}}{d\hat{x}}(\hat{x}) \\ \hat{x} \rightarrow -\infty \quad \hat{u} \rightarrow \hat{y}, \quad \hat{v} \rightarrow 0, \quad P(\hat{x}) \rightarrow 0 \\ \bar{A}(-\infty) \equiv \frac{d\bar{A}(-\infty)}{d\hat{x}} = 0 \end{array} \right.$$

Nous voyons ainsi, que le couplage singulier apparaît par le fait que les équations de la couche limite inférieure visqueuse (II.28) à résoudre, sous les conditions (II.29), n'admettent pas la pression comme donnée connue avant la résolution, mais qu'au contraire la pression doit être calculée en même temps que le profil des vitesses en résolvant simultanément les équations de la couche limite du type (II.28), munies d'une condition à l'infini, pour $\hat{y} \rightarrow +\infty$ et d'une relation liant $\bar{A}(\hat{x})$ et $P(\hat{x})$. On remarquera enfin que la condition initiale (à l'infini amont) et la condition limite, pour $\hat{y} \rightarrow +\infty$ ne sont pas habituelles.

2.3 Conclusion :

En conclusion, on remarquera que dans les applications

pratiques de la triple couche, les équations aux dérivées partielles les plus importantes qui doivent être résolues, sont celles de la couche inférieure. Les solutions, dans les autres couches, sont utilisées seulement pour déterminer les conditions aux limites au bord de la couche inférieure et les conditions de raccordement avec la solution en amont du point critique.

CHAPITRE III

UN MODELE LIE A UNE STRUCTURE
EN TRIPLE COUCHE

CHAPITRE III

Un modèle lié à une structure en triple couche

Lorsqu'on a effectué la non-dimensionnalisation des équations qui régissent l'écoulement de l'atmosphère, il est apparu un certain nombre de paramètres sans dimensions : nombre de Strouhal $S_0 = L_0 / u_0 t_0$, nombre de Boussinesq, nombre de Rossby $R_0 = u_0 / 2L_0 \Omega_0 \sin \phi_0$ etc... Ces nombres s'expriment à partir d'une échelle de longueur L_0 , et, d'une vitesse u_0 , qui sont caractéristiques du mouvement de l'atmosphère. Le but de ce chapitre est de comparer l'ordre de grandeur de L_0 et du rapport $u_0 / 2 \Omega_0 \sin \phi_0$ et de voir dans quelle mesure, on peut négliger des termes au niveau des équations (I.45-50) et effectuer l'approximation de Boussinesq, dont le rôle est de prendre en compte les variations de température et de masse volumique en altitude. On verra ensuite comment on applique, aux équations de Boussinesq, ainsi obtenues, et qui sont valables dans un milieu borné, le modèle en triple couche à la NEILAND, STEWARTSON et WILLIAMS.

3.1 L'approximation quasi-géostrophique :

En plus des nombres cités plus haut, on peut faire

intervenir, deux autres paramètres, le nombre de Kibel $K_i = S R_0$ et le nombre d'Ekman $Ek = R_0 / R_e$, ainsi que le nombre d'Ekman vertical $Ek_1 = \varepsilon^2 Ek$ où $\varepsilon = H_0 / L_0$ est le paramètre d'anisotropie de l'atmosphère et H_0 une échelle de longueur caractéristique verticale de l'atmosphère.

L'approximation quasi-géostrophique consiste à faire un double passage à la limite $K_i \rightarrow 0$ et $Ek \rightarrow 0$ avec la contrainte $Ek_1 = K_i^2$ sur les équations quasi-statiques réduites et écrites dans un système de coordonnées isobariques $p = \text{constante}$. Dans ce système de coordonnées p est considéré comme une variable indépendante et z comme une fonction inconnue au même titre que u , v et w . Remarquons que ce système de coordonnées s'introduit à partir de la relation quasi-statique $\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = 0$.

On obtiendra, alors, à l'ordre zéro les équations pour l'approximation quasi-géostrophique suivantes :

$$(III.1) \quad \begin{cases} \rho_0 \rho u_g + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho_0 \rho v_g - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ w \equiv 0 \end{cases}$$

Ces équations sont valables en dehors d'une couche d'épaisseur $O(\delta)$ du sol. Au voisinage du sol, celles-ci doivent être remplacées par les équations de la couche limite stationnaire d'Ekman qui conduisent au modèle d'Ackerblom.

3.2 La couche limite stationnaire d'Ekman et le modèle d'Ackerblom :

Au voisinage du sol, le passage à la limite ne peut être uniforme, du fait qu'on ne peut plus appliquer au niveau du système limite d'ordre zéro obtenu à partir des équations quasi-statiques, les conditions d'adhérence et de bilan thermique. Pour faire l'étude au voisinage du sol, il paraît judicieux de faire un changement de variable proximale ainsi qu'un changement de la composante u de la vitesse et de rechercher la solution sous forme de développements asymptotiques proximaux. On obtient alors, à l'ordre zéro les équations qui déterminent les composantes u_0 et v_0 de la vitesse dans la couche limite d'Ekman, c'est le modèle d'Ackerblom.

u_0 et v_0 vérifient le système

$$(III.2) \quad \begin{cases} \nu_0 \frac{d^2 u_0}{dz^2} + f_0 (v_0 - v_g^0) = 0 \\ \nu_0 \frac{d^2 v_0}{dz^2} - f_0 (u_0 - u_g^0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 0, \text{ pour } z = 0 \\ u_0 \rightarrow u_g^0, v_0 \rightarrow v_g^0 \text{ lorsque } z \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où ν_0 est la viscosité cinématique turbulente et où u_g^0 et v_g^0 sont les valeurs de u_g et v_g (composantes quasi-géostrophiques) à la limite supérieure de la couche d'Ekman. La solution de ce système est évidente

$$(III.3) \quad \begin{cases} u_0 = u_g^0 - e^{-z/\delta_0} (u_g^0 \cos z/\delta_0 + v_g^0 \sin z/\delta_0) \\ v_0 = v_g^0 - e^{-z/\delta_0} (v_g^0 \cos z/\delta_0 - u_g^0 \sin z/\delta_0) \end{cases}$$

où $\delta_0 \cong (2\nu_0/\rho_0)^{1/2}$ est l'épaisseur de la couche limite d'Ekman.

Dans les conditions atmosphériques normales, on a $\nu_0 \cong 4-6 \text{ m}^2/\text{s}$

$$|\rho| \cong 10^{-4} \text{ 1/s} \quad , \quad \delta_0 \cong 400 - 500 \text{ m.}$$

On notera ainsi qu'à l'ordre zéro la couche limite stationnaire d'Ekman se raccorde directement avec le vent géostrophique.

3.3 Modélisation de l'atmosphère : (*)

Si l'on veut régionaliser la prévision synoptique, c'est-à-dire être en mesure de faire une prévision locale, il faut, en particulier, élucider comment un site d'échelle horizontale $L_c \ll L_0$ perturbe la couche d'Ekman. Il s'avère que la formulation mathématique consistante de ce problème d'interaction entre la couche d'Ekman classique et celle induite par le site thermiquement non homogène est fortement liée à l'ordre de grandeur de l'échelle L_c du site, qui peut varier entre 10^3 m et 10^5 m .

(*) L'analyse qui suit s'inspire de celle de ZEYTOUNIAN (1986; § 7.2)

Soit donc z l'altitude (avec dimensions) ; on peut facilement se convaincre que la variation de la vitesse au sein de la couche d'Ekman est intrinsèquement liée à la variable verticale

$$(III.4) \quad z = \frac{z/L_c}{\beta}$$

$$\text{où} \quad \beta = \frac{1}{(L_c^2 \omega_0 \sin \varphi_0 / \nu_0)^{1/2}} = \frac{1}{(Re/2 R_0)^{1/2}}$$

$$\text{et où} \quad Re = \frac{L_c u_0}{\nu_0}, \quad R_0 = \frac{U_0}{2 \omega_0 L_c \sin \varphi_0}$$

désignent ici, respectivement, les nombres de Reynolds et de Rossby locaux, basés sur L_c , et avec ν_0 la viscosité cinématique caractéristique synoptique.

Si les variables d'espace (avec dimensions) x , y et z sont réduites relativement à L_c , alors il apparaît dans les équations "locales" (I.45 - 50) qui décrivent le mouvement induit par le site thermiquement non homogène un nombre de Boussinesq local $B_c = L_c g / R T_\infty(0)$, un nombre de Strouhal local $S_c = L_c / u_0 t_c$. Le site thermiquement non homogène étant localisé dans un domaine borné \mathcal{D} , d'échelle de longueur L_c , du plan $z = 0$, on suppose que le champ de température T est donné sous la forme :

$$(III.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = T_\infty(0) + \Delta T_0 \Theta \left(\frac{t}{t_c}, \frac{x}{L_c}, \frac{y}{L_c} \right) \\ \text{sur } z = 0 \text{ et pour } (x, y) \in \mathcal{D} \end{array} \right.$$

On a introduit, au niveau de la condition (III.5), la fluctuation ΔT_0 de température associée à la fonction Θ , supposée donnée et qui régit la distribution de température à la surface du site local supposé sans relief ; la prise en compte éventuelle d'un relief est discutée un peu plus loin. Le temps caractéristique local t_c est intrinsèquement lié aux variations de Θ au cours du temps. La condition (III.5) fait apparaître aussi le taux de fluctuations de température

$$\tau = \Delta T_0 / T_\infty (0)$$

Nous allons alors discuter deux cas d'ordre de grandeur de l'échelle horizontale L_c .

1er cas :

Lorsque $L_c \cong 10^5$ m on peut faire le choix

$$(III.6) \quad L_c = u_0 / \omega_0 \sin \varphi_0 \Rightarrow 2 R_0 = 1$$

ce qui conduit à

$$(III.7) \quad \beta = 1 / R_0^{1/2}$$

Donc dans ce cas il faut au niveau des équations locales, qui décrivent l'écoulement induit par le site thermiquement non homogène, garder impérativement les termes liés à la force de

Coriolis et de ce fait l'écoulement (que l'on peut appeler dans ce cas mésométéorologiques) est nécessairement tridimensionnel. D'autre part, comme l'altitude de l'atmosphère homogène $H_0 = RT_\infty(0)/g \cong 8 \text{ km}$, on constate que $\beta_c \gg 1$ est du même ordre que le rapport L_0/L_c ($L_0 \cong 10^6 \text{ m}$ pour les mouvements d'échelle synoptique).

Par contre, le taux τ et le nombre de Mach $M_0 = u_0 / (\gamma RT_\infty(0))^{1/2}$ restent toujours petits devant l'unité, puisque dans les conditions météorologiques "normales"

$$\Delta T_0 \ll T_\infty(0) \text{ et } u_0^2 \ll \gamma RT_\infty(0)$$

Enfin, et c'est là un point important, au niveau des termes non adiabatiques, aux seconds membres des équations mésométéorologiques, apparaît l'inverse du nombre de Reynolds local $1/Re \cong \beta^2$. On constate donc que ; lorsque $L_c \cong 10^5 \text{ m}$, le profil de vitesse d'Ekman est compatible avec l'épaisseur de la couche limite mésométéorologique qui se développe au voisinage du site thermiquement non homogène ; cette épaisseur étant de l'ordre de $\beta L_c = L_c / Re^{1/2}$.

Cette compatibilité s'explique par le fait que la couche limite thermique formée par la présence de la tache thermique non homogène se raccorde directement et ce, dès l'ordre zéro (au sens de la M. D. A. R.), à la couche d'Ekman et que ces deux couches ont la même épaisseur, c'est-à-dire $\delta = L_c / \sqrt{Re}$

2ème cas :

Lorsque L_c est beaucoup plus petit que 10^5 m, de l'ordre de 10^4 m à 10^3 m, alors

$$(III.8) \quad L_c \ll \frac{U_0}{\Omega_0 \sin \phi_0} \Rightarrow 2R_0 \gg 1$$

et $2R_0$ varie entre 10 et 150. On peut donc dans ce cas négliger au niveau des équations (I.45 - 50), les termes liés à la force de Coriolis, du moins à l'ordre zéro, l'écoulement induit par le site thermiquement non homogène est alors "faiblement" tridimensionnel. D'autre part, dans ce cas on a

$$Re \gg 2R_0$$

et de ce fait au niveau de l'expression de β (III.4) on a

$$(III.9) \quad 2R_0 = Re^{-1/a} \Rightarrow \beta = Re^{-1/m}, \quad m = \frac{2a}{a-1} > 2$$

Pour $U_0 \cong 10$ m/s, $v_0 \cong 5$ m/s, $\phi_0 = 2\Omega_0 \sin \phi_0 \cong 1,2 \cdot 10^{-4}$ /s

on constate alors que à $L_c \cong 10^3$ m correspond une valeur caractéristique de m , $m_1 = 5$, tandis que à $L_c \cong 10^4$ m, cette valeur de m est $m_2 = 3$.

En ce qui concerne le nombre de Boussinesq local, B_c , on constate que pour $m = m_1 = 5$ on a

$$B_c \ll 1$$

tandis que pour $m = m_2 = 3$ on a plutôt

$$B_c \cong 1$$

De ce fait lorsque $m = m_1 = 5$ on peut effectuer l'approximation de Boussinesq, tandis que lorsque $m = m_2 = 3$, cette approximation n'est plus licite.

Donc lorsque L_c est de l'ordre de 10^3 m à 10^4 m il apparaît que le profil de vitesse d'Ekman ne peut pas être compatible avec l'épaisseur de la couche limite locale induite par le site thermiquement non homogène.

Il faut remarquer aussi, que lorsque $L_c = 10^3$ m, on peut faire le choix

$$(III.10) \quad L_c \cong \frac{u_0}{g} \sqrt{RT_\infty(0)/\sigma} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{B_c}{\eta_0} \cong 1$$

tandis que lorsque $L_c \cong 10^4$ m on fera plutôt le choix

$$(III.11) \quad L_c \cong \frac{RT_\infty(0)}{g} \Rightarrow B_c \cong 1$$

Il est intéressant de noter que la valeur $m = m_A = 5$ est, en fait, celle que prend SMITH (1973) dans son étude sur l'écoulement laminaire au dessus d'une petite "bosse" sur une plaque plane. Ce travail de SMITH (1973) a été généralisé au cas tridimensionnel par SMITH, SYKES et BRIGHTON (1977) toujours pour $m = 5$. Enfin SYKES (1978) a exploité les résultats précédents pour analyser les effets de la stratification, pour un fluide de Boussinesq, dans l'écoulement de couche limite au dessus d'une petite montagne dont l'étendue est de l'ordre de 1,5 km et la hauteur maximale de l'ordre de 60 m.

En fait, la prise en compte du relief du site local supposé simulé par l'équation

$$z = h_0 h \left(\frac{x}{L_c}, \frac{y}{L_c} \right)$$

avec $h_0 = \max |h|$, lorsque $(x, y) \in \mathcal{D}$, entraîne l'introduction du paramètre de forme

$$\eta = \frac{h_0}{L_c} \ll 1 \Rightarrow \eta = Re^{-b}, \quad 0 < b < 1$$

Ainsi, nous voyons apparaître le petit paramètre

$$(III.12) \quad \eta = \beta^{bm}$$

Dans les travaux cités plus haut les auteurs font

le choix de $\mathcal{C} = 2/5$ ce qui conduit, pour $m = m_1 = 5$ à $\eta = \beta^2$ et dans ce cas, effectivement, on retrouve les données de SYKES (1978) concernant l'importance de la petite montagne. On notera d'ailleurs que lorsque $m = m_1 = 5$, le choix de $\eta = \beta^2$ est le seul consistant avec le schéma classique de couplage d'auto-induction en triple couche à la NEILAND (1969) - STEWARTSON et WILLIAMS (1969) vu au chapitre 2.

3.4 L'approximation de Boussinesq :

3.4.1 Formulation du problème

Dans ce qui suit nous considérons un problème stationnaire et bidimensionnel, ce qui est justifié lorsque L_c est de l'ordre de quelques kilomètres. Nous ne tenons pas compte du relief du site, ayant pour but, principalement d'élucider comment le profil de base d'Ekman est perturbé par la présence d'une tache thermique localisée sur l'axe des X entre $X = 0$ et $X = L_c$.

Sous ces hypothèses nous obtenons à partir des équations (I.45 - 50) les équations réduites suivantes :

$$\begin{aligned}
 (1+\omega) \left\{ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right\} + \frac{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)}{\gamma M_0^2} \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial X} &= \frac{1}{\rho(\bar{z}_\infty)} \beta^m \left\{ \Delta_2 \bar{u} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial X} (\bar{A}) \right\} \\
 (1+\omega) \left\{ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right\} + \frac{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)}{\gamma M^2} \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \bar{z}} - (1+\omega) \frac{\beta_c}{\gamma M_0^2} \theta & \\
 \text{(III.13)} &= \frac{1}{\rho(\bar{z}_\infty)} \beta^m \left\{ \Delta_2 \bar{w} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{A}) \right\} \dots / \dots
 \end{aligned}$$

$$\pi = \omega + \theta + \omega\theta$$

58

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}} + (1+\omega) \bar{A} = (1+\omega) \frac{B_0}{\bar{T}(\bar{z}_\infty)} \left(1 + \Gamma_\infty(\bar{z}_\infty) \right)$$

$$(1+\omega) \left(\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \bar{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\bar{u} \frac{\partial \pi}{\partial \bar{x}} + \bar{\omega} \frac{\partial \pi}{\partial \bar{z}} \right) + (1+\pi) \frac{B_c}{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)} \left(\right.$$

$$\left. \frac{\gamma-1}{\gamma} - \Gamma_\infty(\bar{z}_\infty) \right) \bar{\omega} = \frac{1}{\rho_\infty(\bar{z}_\infty)} \cdot \frac{1}{Pr} \beta^m \left[\Delta_2 \theta - \frac{2B_c}{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)} \Gamma_\infty(\bar{z}_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} + (\gamma-1) \frac{Pr}{\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty)} M_0^2 \bar{\Phi} \right]$$

où

$$\bar{\Phi} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}} \right)^2$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}, \quad \bar{A} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}}$$

Le nombre de Prandtl $Pr = \rho_\infty(\bar{z}_\infty) \nu_0 c_p / k_0$ est

construit à partir du coefficient de conduction thermique caractéristique

Avec pour condition limite

$$(III.14) \quad \bar{T} = 1 + \tau F(\bar{x}), \text{ sur } \bar{z} = 0 \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1$$

$$\text{où } \bar{z} = z/L_c, \quad \bar{x} = x/L_c, \quad \bar{u} = u/u_0, \quad \bar{\omega} = \omega/u_0$$

Loin en amont de la tache thermique, simulée par la condition (III.14), lorsque $\bar{x} \rightarrow -\infty$, on doit retrouver le profil de vitesse longitudinale (le long de l'axe des X) d'Ekman ; mais comme $L_c/L_0 \ll 1$ est de l'ordre de β^{m-2} (dans le

couplage d'auto induction on a $L_c \cong L_0 R_c^{-3/8}$, puisque $m = 5$) on peut à l'ordre considéré ici, écrire le profil de la vitesse longitudinale d'Ekman sous la forme sans dimension suivante :

$$(III.15) \quad \bar{u}_\infty(\bar{z}/\beta) = 1 - \exp(-\bar{z}/\beta) \cos(\bar{z}/\beta)$$

et
$$\lim_{\bar{z} = \bar{z}/\beta \rightarrow +\infty} \bar{u}_\infty(\bar{z}) = 1$$

La vitesse de référence étant celle de l'écoulement géostrophique associé au point $\bar{x} = 0$ et au niveau $\bar{z} = 0$.

3.4.2 Equations de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq d'après ZEYTOUNIAN (1974) consiste à faire le triple passage à la limite où

$$(III.16) \quad B_c \rightarrow 0, \quad M_0 \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0$$

avec les contraintes

$$(III.17) \quad \frac{B_c}{M_0} = \hat{\beta}, \quad \frac{\tau}{M_0} = \lambda$$

et où $\hat{\beta}$ et λ sont de l'ordre de l'unité, et à rechercher les fonctions sans dimensions \bar{u} , \bar{w} , π , w et θ sous la forme

$$(III.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}_0 + \dots \\ \bar{w} = \bar{w}_0 + \dots \\ \bar{\pi} = M_0^2 \bar{\pi}_2 + \dots \\ w = M_0 \omega_1 + \dots \\ \theta = \pi_0 \theta_1 + \dots \end{array} \right.$$

En portant ces différentes expressions dans les équations (III.13) et en tenant compte de (III.14), (III.15), (III.16) et (III.17), il vient le problème réduit d'interaction locale suivant, pour \bar{u}_0 , \bar{w}_0 , $\bar{\pi}_2$, ω_1 et θ_1 une fois que l'on a supprimé les barres sur les grandeurs sans dimensions

$$(III.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{\pi}_2}{\partial x} = \beta^m \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) \\ u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \bar{\pi}_2}{\partial z} - \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \theta_1 = \beta^m \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ u_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + w_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \hat{\beta} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dT_\infty}{dz} \Big|_{z=0} \right\} w_0 = \beta^m \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \right) \\ w_1 = \theta_1 \end{array} \right.$$

$$(III.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \quad u_0 = w_0, \quad \theta_1 = -\Lambda F(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x \rightarrow -\infty \quad u_0 \rightarrow U_\infty(z/\beta), \quad w_0 = \bar{\pi}_2 = \theta_1 = w_1 \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Il faut remarquer qu'au niveau des équations (III.19), on a

tenu compte de la relation

$$(III.21) \quad \bar{z}_\infty = \beta_c \bar{z}$$

et de ce fait on a

$$\beta_c \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{z}_\infty \rightarrow 0$$

ce qui entraîne que

$$\bar{T}_\infty(\bar{z}_\infty) \rightarrow \bar{T}_\infty(0) \equiv 1$$

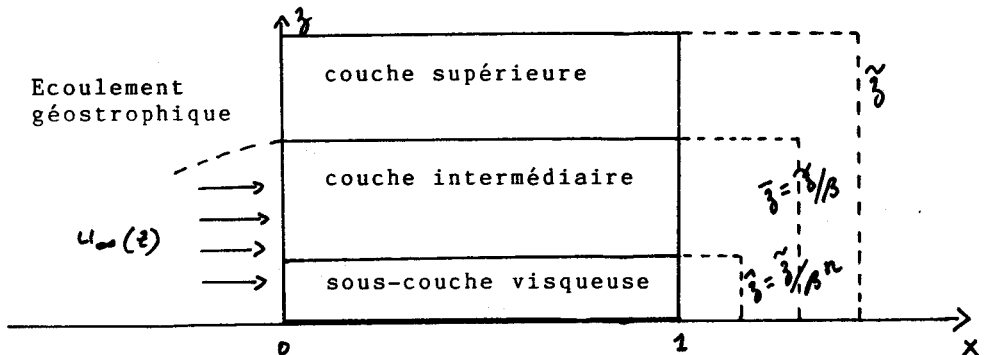
$$\bar{e}_\infty(\bar{z}_\infty) \rightarrow \bar{e}_\infty(0) \equiv 1$$

$$\bar{\Gamma}_\infty(\bar{z}_\infty) \rightarrow \bar{\Gamma}_\infty(0) \equiv - \left. \frac{d\bar{T}_\infty}{d\bar{z}_\infty} \right|_{\bar{z}=0}$$

dans l'état standard.

3.5 Schéma en triple couche :

Lorsque $\beta \rightarrow 0$, nous sommes tout naturellement conduit à considérer, au niveau du problème local (III.19) - (III.20), trois échelles verticales, du moins dans le couplage d'auto-induction qui correspond à $m = m_1 = 5$.



La première échelle \tilde{z} est celle qui s'introduit pour décrire l'écoulement de fluide parfait qui est lié à la "branche" géostrophique du profil d'Ekman.

Cette échelle conduit à considérer une couche dite supérieure

$$(III.22) \quad \lim_{\tilde{z} \rightarrow \infty} u_\infty(\tilde{z}) = 1 \\ \bar{z} = \tilde{z}/\beta$$

La seconde échelle $\bar{z} = \tilde{z}/\beta$ qui est une échelle intermédiaire, permet de tenir compte de "presque" toute la variation de $u_\infty(\tilde{z})$, sauf au voisinage immédiat de $\tilde{z} = 0$; elle conduit à considérer une couche dite intermédiaire.

Enfin la troisième échelle

$$(III.23) \quad \hat{z} = \tilde{z}/\beta^n = \bar{z}/\beta^{n-1}, \quad n > 1$$

avec n à déterminer, est liée à la sous-couche limite qui permet de tenir compte des conditions à la limite en $\tilde{z} = 0$.

Précisons, tout de suite, que dans la sous-couche limite il faut nécessairement que

$$(III.24) \quad u_0 \sim \beta^{n-1} \hat{u}$$

puisque $u_0(\bar{z}) \sim \bar{z}$ lorsque $\bar{z} = \beta^{n-1} \hat{z} \rightarrow 0$, d'après (III.23), et de ce fait

$$(III.25) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{u} = \hat{z}$$

On constate donc que c'est le processus d'adaptation de l'écoulement local au profil d'Ekman $u_0(\bar{z})$ et l'introduction d'une échelle de longueur horizontale $\bar{x} = x/L_c$ simulée par la tache thermique qui conduisent à mettre en place un schéma en triple couche.

3.5.1 Couche inférieure

Lorsque $\lambda = 0$ (1) la sous-couche limite est caractérisée par

$$(III.26) \quad \theta_1 \sim \hat{\theta}(x, \hat{z}), \quad u_0 \sim \beta^{m-1} \hat{u}(x, \hat{z})$$

avec $\hat{z} = \tilde{z}/\beta^m \equiv \bar{z}/\beta^{m-1}$ où $\bar{z} = \tilde{z}/\beta$ et $m > 1$

Soit dans cette couche inférieure la représentation asymptotique :

$$(III.27) \quad \begin{cases} u_0 = \beta^{n-1} \hat{u} + \dots \\ w_0 = \beta^0 \hat{w} + \dots \\ \pi_2 = \beta^c \hat{\pi} + \dots \\ \theta_1 = \hat{\theta} + \dots \end{cases}$$

En portant ces différents développements dans le système (III.19), on constate alors que, le choix

$$(III.28) \quad 2m-1 = a = c+1 \text{ et } m+1 = 3n$$

est nécessaire. D'autre part, si $c = n$ alors il vient, à la place de la seconde des équations (III.19)

$$(III.29) \quad \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \hat{\beta}} = \hat{\beta} \hat{\theta}$$

et dans ce cas $n = 2$, et il faut que $m = m_1 = 5$; on obtient, ainsi l'équation limite (III.28) lorsque

$$(III.30) \quad c = n = 2 \Rightarrow a = 3 \text{ et } m = 5$$

Remarquons tout d'abord que le second membre de l'équation (III.29) est le terme qui tient compte des effets de la pesanteur et de la compressibilité.

Par contre, si $c < n$ alors

$$(III.31) \quad \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

et dans ce cas $n < 2$ et $m+1 < 6$, donc lorsque l'équation limite (III.31) a lieu, il faut que

$$(III.32) \quad m = 4 \Rightarrow n = 5/3, \quad c = 4/3 \quad \text{et} \quad a = 7/3$$

Enfin, si $c > n$ alors

$$(III.33) \quad \hat{\theta} = 0$$

et dans ce cas $n > 2$ et $m + 1 > 6$; ainsi la relation (III.33) implique

$$(III.34) \quad m = 6 \Rightarrow n = 7/3, \quad c = 8/3 \quad \text{et} \quad a = 11/3$$

Il faut remarquer que le cas (III.33) est fortement dégénéré, car on ne peut plus appliquer la condition à la limite pour θ_1 , sur $\hat{z} = 0$ lorsque $\lambda = 0$ (1).

En conclusion, la dégénérescence la plus significative correspond aux valeurs (III.30) et elle conduit aux équations de la couche limite suivantes, valables dans la sous-couche limite inférieure visqueuse.

$$(III.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\beta}}{\delta} \cdot \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \\ \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \hat{z}} = \hat{\beta} \hat{\theta} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0 \\ \hat{c} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{z}^2} \end{array} \right.$$

Une fois que l'on suppose que $\frac{\delta-1}{\delta} + \left(\frac{dT_{\infty}}{dz}\right)_{z=0} = 0$ (1) et qu'il en est de même des paramètres de similitude λ et β . Aux équations (III.35) il faut associer les conditions

$$(III.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{z} = 0 \quad \hat{u} = \hat{w} = 0, \quad \hat{\theta} = -\lambda F(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x \rightarrow -\infty \quad \hat{u} \rightarrow \hat{z}, \quad \hat{w} \rightarrow 0, \quad \hat{\pi} \rightarrow 0, \quad \hat{\theta} \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

3.5.2 Couche intermédiaire

Afin de formuler des conditions de comportement lorsque $\hat{z} \rightarrow +\infty$, il faut considérer la couche intermédiaire.

Puisque $m = 2$ et de ce fait $n = 5$ il est presque évident qu'il faut postuler dans la couche intermédiaire la représentation asymptotique :

$$(III.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = u_{\infty}(\bar{z}) + \beta^4 \bar{u} + \dots \\ w_0 = \beta^2 \bar{w} + \dots \\ \pi_2 = \beta^2 \bar{\pi} + \dots \\ \theta_1 = \beta^6 \bar{\theta} + \dots \end{array} \right.$$

Si l'on veut que les vitesses longitudinales se raccordent lorsque respectivement $\hat{z} \rightarrow +\infty$ et $\bar{z} \rightarrow 0$, alors il faut faire le choix de :

$$(III.38) \quad \varphi = 1 \Rightarrow x = 1 + \varphi = 2$$

D'autre part, on conserve une fois de plus la forme hydrostatique

$$(III.39) \quad \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \bar{z}} = \beta \bar{\theta}$$

dans cette couche intermédiaire, à la place de la seconde des équations (III.19). Si

$$(III.40) \quad \sigma = 1$$

alors, l'équation pour $\bar{\theta}_1$ du système (III.19) implique

$$(III.41) \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \bar{\theta} = \psi(\bar{z})$$

avec $\psi(\bar{z})$ une fonction à déterminer.

En ce qui concerne les composantes de la vitesse $\bar{u}(x, \bar{z})$ et $\bar{w}(x, \bar{z})$, ils satisfont au système classique

$$(III.42) \quad \begin{cases} u_{\infty}(\bar{z}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{d u_{\infty}}{d \bar{z}} \bar{w} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$(III.43) \quad \begin{cases} \bar{u} = A(x) \frac{d u_{\infty}}{d \bar{z}} \\ \bar{w} = -\frac{d A}{d x} u_{\infty}(\bar{z}) \end{cases}$$

où la fonction $\beta A(x)$ doit être interprétée comme une épaisseur de déplacement qui, en fait, engendre la perturbation de pression. En effet, la solution (III.43) conduit aux conditions de comportement suivantes pour \hat{u} et \hat{w} satisfaisant aux équations (III.35) de la sous-couche limite inférieure visqueuse :

$$(III.44) \quad \begin{cases} \hat{u} \rightarrow \hat{z} + A(x) \\ \hat{w} \rightarrow -\hat{z} \frac{dA}{dx} \end{cases}$$

puisque $\lim_{\hat{z} \rightarrow 0} \frac{dU_{\infty}}{d\hat{z}} = 1$

d'autre part, (III.39) conduit à

$$(III.45) \quad \frac{\partial^2 \bar{\pi}}{\partial \bar{z} \partial x} = 0 \Rightarrow \bar{\pi} = P_1(x) + P_2(\bar{z})$$

et de ce fait

$$(III.46) \quad \bar{\theta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{dP_2}{d\bar{z}} = \psi(\bar{z})$$

Mais il faut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{\pi} = 0$ et de ce fait

$$P_1(-\infty) = 0 \text{ et } P_2(\bar{z}) = 0 \Rightarrow \psi(\bar{z}) = 0$$

Ainsi, $\hat{\theta}$ et $\hat{\pi}$ satisfont aux comportements

$$(III.47) \quad \hat{\theta} \rightarrow 0, \hat{\pi} \rightarrow \bar{\pi} = P_1(x), \text{ lorsque } \hat{z} \rightarrow +\infty$$

On notera que la perturbation de la pression $\hat{\pi}$ dans la sous couche limite inférieure visqueuse influe à son tour sur la distribution de $A(x)$, d'où le couplage singulier (d'auto-induction) en triple couche.

Cette analyse permet de réécrire le problème (III.35)

- (III.36)

$$(III.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} d\hat{z} + \frac{1}{\gamma} \frac{dP_1}{dx} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \\ \hat{\pi} = \hat{\beta} \int_{\infty}^{\hat{z}} \hat{\theta} d\hat{z} + P_1(x) \\ \hat{u} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{z}^2} \end{array} \right.$$

(III.49)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{z} = 0 \quad \hat{u} = \hat{w} = 0, \quad \hat{\theta} = -\Lambda F(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x \rightarrow -\infty \quad \hat{u} \rightarrow \hat{z}, \quad \hat{w} \rightarrow 0, \quad P_1(x) \rightarrow 0, \quad \hat{\theta} \rightarrow 0 \\ \hat{z} \rightarrow +\infty \quad \hat{u} \rightarrow \hat{z} + A(x), \quad \hat{w} \rightarrow -\hat{z} \frac{dA}{dx}, \quad \hat{\theta} \rightarrow 0 \\ A(-\infty) \equiv \frac{dA}{dx}(-\infty) \equiv 0 \end{array} \right.$$

Le couplage singulier (fort) d'auto-induction apparaît par le fait que le problème (III.48) - (III.49) à résoudre dans la couche inférieure visqueuse n'admet pas $P_1(x)$ comme donnée, connue avant la résolution (comme c'est le cas pour

les problèmes de couche limite classique, mais qu'au contraire cette perturbation de pression $P_1(X)$ doit être calculée en même temps que les composantes de la vitesse \hat{u} et \hat{w} et la perturbation de température $\hat{\theta}$.

Il faut cependant préciser que cette perturbation de pression $P_1(X)$ n'est pas complètement arbitraire et qu'elle est liée par une relation à la fonction $A(X)$; cette dernière relation devant découler de l'analyse de fluide parfait dans la couche supérieure.

3.5.3 Couche supérieure

Dans cette couche supérieure il est presque évident que l'on doit postuler la représentation asymptotique (du moins dans le cas considéré ici de $n = 2$, c'est-à-dire $m = m_1 = 5$)

$$(III.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 + \beta^2 \tilde{u} + \dots \\ w_0 = \beta^2 \tilde{w} + \dots \\ \pi_2 = \beta^2 \tilde{\pi} + \dots \\ \theta_1 = \beta^2 \tilde{\theta} + \dots \end{array} \right.$$

Il vient pour \tilde{u} , \tilde{w} , $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\theta}$ le système d'équations linéaires suivant :

$$(III.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \tilde{\theta} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \hat{\beta} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \left(\frac{dT_{\infty}}{d\tilde{z}} \right)_0 \right\} \tilde{u} = 0 \end{array} \right.$$

En éliminant toutes les fonctions sauf $\tilde{\pi}(x, \tilde{z})$ au niveau du système (III.51), on obtient, pour cette dernière, l'équation d'Helmoltz suivante

$$(III.52) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + \mu_0^2 \right) \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x} = 0$$

où

$$\mu_0^2 = \frac{\hat{\beta}}{\gamma} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \left(\frac{dT_{\infty}}{d\tilde{z}} \right)_0 \right)$$

Dans ce qui suit on admettra que $\mu_0^2 \geq 0$. En $\tilde{z} = 0$, on doit imposer, à la solution de l'équation (III.52) la condition :

$$(III.53) \quad \tilde{\pi}(x, 0) = P_1(x)$$

D'autre part, le raccord des vitesses verticales respectivement dans la couche intermédiaire et dans la couche supérieure, donne

$$(III.54) \quad \tilde{w}(x, 0) = -\frac{dA}{dx}$$

Nous avons aussi d'après les équations (2) et (4) du système (III.51) l'équation

$$(III.55) \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x} \right) + \mu_0^2 \tilde{w} = 0$$

En appliquant à cette équation la condition limite en $\tilde{z} = 0$, on obtient

$$(III.56) \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right|_{\tilde{z}=0} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left. \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=0} \right) + \mu_0^2 \tilde{w} \Big|_{\tilde{z}=0} = 0$$

(III.54) permet d'écrire

$$(III.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(x, 0) = -\frac{dA}{dx} \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2}(x, 0) = -\frac{d^3 A}{dx^3} \end{array} \right.$$

Ce qui conduit à la relation

$$(III.58) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} \right) = \gamma \left\{ \mu_0^2 \frac{dA}{dx} + \frac{d^3 A}{dx^3} \right\}$$

Désignons par $f^*(k)$ la transformée de Fourier de $f(x)$, nous avons en particulier

$$(III.59) \quad \pi^*(k, \tilde{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\pi}(x, \tilde{z}) e^{-ikx} dx$$

L'équation (III.52) s'écrit dans le plan (k, \tilde{z})

$$(III.60) \quad \frac{\partial^2 \tilde{\pi}^*}{\partial \tilde{z}^2} + (\mu_0^2 - k^2) \tilde{\pi}^* = 0$$

qui admet pour solution

$$(III.61) \quad \tilde{\pi}^*(k, \tilde{z}) = P_1^*(k) e^{im\tilde{z}}$$

où

$$(III.62) \quad m = \begin{cases} i(k^2 - \mu_0^2)^{1/2} & |k| \geq \mu_0 \\ (\mu_0^2 - k^2)^{1/2} & |k| < \mu_0 \end{cases}$$

nous avons d'après (III.58) et (III.61)

$$(III.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{\pi}}{\partial \tilde{z}^2} \Big|_{\tilde{z}=0} = \delta (\mu_0^2 - k^2) A^*(k) \\ \frac{\partial \tilde{\pi}^*}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} = i m P_1^*(k) \end{array} \right.$$

Ce qui nous fournit la relation liant $A^*(k)$ et $P_1^*(k)$ dans le plan de Fourier

$$(III.64) \quad A^*(k) = \frac{i m}{\delta} \cdot \frac{P_1^*(k)}{\mu_0^2 - k^2}$$

Au niveau de la relation (III.62), dans le premier cas, on choisit les modes décroissants et dans le second cas les modes pour lesquels le transport d'énergie s'effectue vers le haut.

3.6 Conclusion

Il nous faut résoudre le problème de sous-couche limite visqueuse (III.48 - 49) en tenant compte de la relation (III.64), reliant A^* et P_1^* dans le plan de la transformée de Fourier. Cette étude fera l'objet des chapitres IV et V.

CHAPITRE IV

THEORIE LINEAIRE

CHAPITRE IV

Théorie linéaire

On se propose dans ce chapitre, d'obtenir les équations linéaires du mouvement à partir des équations de la sous-couche inférieure visqueuse et d'étudier la solution du système obtenu.

Les équations de départ sont les suivantes :

$$(IV.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\beta}{\delta} \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} d\hat{z} = -\frac{1}{\delta} \frac{dP_1}{dx} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0 \\ \hat{u} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{z}^2} \end{array} \right.$$

$$(IV.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{z} = 0 : \hat{u} = \hat{w} = 0, \hat{\theta} = -A F(x), 0 \leq x \leq 1 \\ \hat{z} \rightarrow +\infty, \hat{u} \rightarrow \hat{z} + A(x), \hat{w} \rightarrow -\hat{z} \frac{dA}{dx}, \hat{\theta} \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty, \hat{u} \rightarrow \hat{z}, \hat{w} \rightarrow 0, P_1(x) \rightarrow 0, \hat{\theta} \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

A ce système il faut ajouter la relation liant A et P_1 dans le plan de la transformée de Fourier

$$(IV.3) \quad A^*(-k) = \frac{i m \cdot P_1^*(k)}{\delta \mu_0^2 - k^2}$$

Remarquons tout d'abord que les équations (IV.1-3) sont presque identiques aux équations obtenues par Sykes (1978) pour étudier les effets de stratification dans l'écoulement de couche limite au dessus d'une petite montagne, à la différence qu'au niveau des équations (IV.1-3) n'intervient pas la composante normale w de la vitesse et que l'équation supplémentaire qui régit la perturbation de température fait apparaître le terme $\int_0^{\hat{z}} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} d\hat{z}$ dans l'équation (IV.1-a) de la quantité de mouvement.

D'une manière beaucoup plus précise le problème (IV.1-3) est équivalent au problème de Sykes pour le cas $\hat{\theta} \equiv 0$, ce qui revient à supposer $\lambda \equiv 0$, dans ces conditions il faut au "moins" introduire un relief et écrire les conditions d'adhérence sur $\hat{z} = h(x)$, en tenant compte que $\alpha = \beta^2$.

Si l'on ne fait aucune hypothèse sur le paramètre de similitude, qui intervient au niveau de la condition limite en $\hat{z} = 0$ pour $\hat{\theta}$, le problème (IV.1-2), avec la contrainte (IV.3) reste quasi linéaire et ne peut être résolu que numériquement.

4.1 Equations linéarisées du mouvement

La linéarisation du système (IV.1-3) consiste à sup-

poser que le paramètre de similitude \mathcal{L} , est d'ordre inférieur à 1, c'est-à-dire $\mathcal{L} \ll 1$ et à rechercher la solution sous la forme

$$(IV.4) \quad \begin{cases} \hat{u} = \hat{z} + \mathcal{L} u + o(\mathcal{L}^2) \\ \hat{w} = \mathcal{L} w + o(\mathcal{L}^2) \\ \hat{\theta} = \mathcal{L} \theta + o(\mathcal{L}^2) \\ A = \mathcal{L} \bar{A} + o(\mathcal{L}^2) \\ P_1 = \mathcal{L} \bar{P} + o(\mathcal{L}^2) \end{cases}$$

En portant ces différentes expressions dans le système (IV.1-3) et en ne retenant que les termes d'ordre \mathcal{L} , il vient le système linéaire suivant :

$$(IV.5) \quad \begin{cases} \hat{z} \frac{\partial u}{\partial x} + w + \frac{\beta}{\gamma} \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{\partial \theta}{\partial x} d\hat{z} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\bar{P}}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{z}^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \hat{z}} = 0 \\ \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = \frac{1}{P_r} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial \hat{z}^2} = 0 \end{cases}$$

avec pour conditions limites

$$(IV.6) \quad \begin{cases} \hat{z} = 0 : u = w = 0, \theta = F(x), 0 \leq x \leq 1 \\ \hat{z} \rightarrow +\infty : u \rightarrow \bar{A}(x), w \rightarrow -\frac{\hat{z}}{\gamma} \frac{d\bar{A}}{dx}, \theta \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty : u \rightarrow 0, w \rightarrow 0, \bar{P} \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0 \end{cases}$$

et la relation liant \bar{A} et \bar{P} dans le plan de Fourier (k, \hat{z})

$$(IV.7) \quad \bar{A}^*(k) = \frac{i.m.}{\gamma} \cdot \frac{\bar{P}^*(k)}{\mu_0^2 - k^2}$$

où m est défini par les relations

$$(IV.8) \quad m = \begin{cases} i(k^2 - \mu_0^2)^{1/2} & |k| \geq \mu_0 \\ (\mu_0^2 - k^2)^{1/2} & |k| \leq \mu_0 \end{cases}$$

avec

$$\mu_0^2 = \frac{\beta_0}{\delta} \left\{ \frac{\gamma-1}{\gamma} + \left(\frac{dT_p}{dz} \right)_{z=0} \right\} \geq 0$$

Au niveau de (IV.8), dans le premier cas on choisit les modes décroissants et dans le second cas les modes pour lesquels le transport d'énergie s'effectue vers le haut.

4.2 Solution du système linéarisé

Pour résoudre le problème (IV.5-8), nous supposons que $\hat{\beta} \equiv 1$ et le nombre de Prandtl $P_r \equiv 1$.

Désignons par $g^*(k)$ la transformée de Fourier de la fonction $g(x)$. Nous avons en particulier

$$G^*(k, \hat{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \hat{z}) e^{-ikx} dx$$

La transformée de Fourier appliquée à (IV.5.c) nous fournit l'équation

$$(IV.9) \quad \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \hat{z}^2} - i k \hat{z} \theta^* = 0$$

Cette équation admet pour solution générale

$$(IV.10) \quad \theta^*(k, t) = C_1(k) A_i(t) + C_2(k) B_i(t)$$

où nous avons introduit le changement de variable

$$(IV.11) \quad t = (i k)^{2/3} \hat{z}$$

et où $A_i(t)$ et $B_i(t)$ sont les fonctions d'Airy de première et deuxième espèce respectivement.

Remarquons que ces fonctions peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions de Bessel d'ordre $1/3$. En effet

$$A_i(t) = \frac{1}{3} \sqrt{t} \left\{ I_{-1/3}(\eta) - I_{1/3}(\eta) \right\}$$

$$B_i(t) = \sqrt{t/3} \left\{ I_{-1/3}(\eta) + I_{1/3}(\eta) \right\}$$

où $\eta = (2/3) t^{3/2}$. Pour $t \rightarrow +\infty$, ces fonctions admettent pour développements asymptotiques.

$$A_i(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{-\eta}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} A_i(t) = 0$$

$$B_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/4} e^{\eta}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} B_i(t) = 0$$

La condition à la limite $t \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow 0$, permet d'éliminer les solutions qui croissent exponentiellement.

d'où $C_2(k) = 0 \Rightarrow \theta^*(k, t) = C_1(k) A_i(t)$

d'autre part, la condition $\hat{\gamma} = 0$, $\theta^*(k, 0) = F^*(k)$

fournit

$$(IV.12) \quad C_1(k) = \frac{F^*(k)}{A_i(0)}$$

Finalement la solution générale de l'équation (IV.9) répondant aux conditions limites imposées s'écrit

$$\theta^*(k, t) = \frac{F^*(k)}{A_i(0)} A_i(t)$$

soit

$$(IV.13) \quad \theta(x, \hat{\gamma}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_i \left\{ (ik)^{1/3} \hat{\gamma} \right\} F^*(k) e^{ikx} dk$$

Il faut remarquer que $(ik)^{1/3}$ est défini dans le plan complexe k muni de la coupure constituée de l'axe des imaginaires positifs avec

$$|\operatorname{Arg}(ik)^{1/3}| < \frac{\pi}{3} \quad \text{soit} \quad -\frac{3}{2}\pi < \operatorname{Arg} k \leq \frac{\pi}{2}$$

L'élimination dans l'équation (IV.5.a) de la fonction u^* en tenant compte de (IV.5.b) nous donne l'équation pour $u(x, \hat{z})$.

$$(IV.14) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial \hat{z}^3} - \frac{1}{\hat{z}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \hat{z}} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

d'où l'équation pour $u^*(k, \hat{z})$

$$\frac{\partial^3 u^*}{\partial \hat{z}^3} - ik \hat{z} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\delta} (ik) \theta^*(k, \hat{z})$$

Soit, après le changement de variable $t = (ik)^{1/3} \hat{z}$

$$(IV.15) \quad \frac{\partial^3 u^*}{\partial t^3} - t \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{F^*(k)}{A_i(0)} A_i(t)$$

Cette équation admet pour solution particulière la fonction

$$(IV.16) \quad \frac{\partial u_i^*}{\partial t} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{F^*(k)}{A_i(0)} A_i'(t)$$

d'où la solution générale de (IV.15)

$$(IV.17) \quad \frac{\partial u^*}{\partial t} = C(k) A_i(t) + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{F^*(k)}{A_i(0)} A_i'(t)$$

Les solutions qui croissent exponentiellement ont été éliminées grâce à la condition $t \rightarrow +\infty$.

La transformée de Fourier de l'équation (IV.5.a) en fonction de la variable t , s'écrit

$$t (ik)^{2/3} u'' + u'' + \frac{(ik)^{2/3}}{\delta} \cdot \frac{F''(k)}{A_i(0)} \int_{\infty}^{t/(ik)^{1/3}} A_i(\Delta) d\Delta = -\frac{ik}{\delta} \bar{P}'' + (ik)^{2/3} \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2}$$

La condition limite (IV.6.a) appliquée à cette équation permet d'écrire

$$(IV.18) \quad \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2}(k, 0) = \frac{(ik)^{2/3}}{\delta} P''(k) - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{F''(k)}{3A_i(0)}$$

où nous avons tenu compte, que pour les grandes valeurs de Δ

$$\int_0^{\infty} A_i(\Delta) d\Delta \approx \frac{1}{3}$$

D'autre part la dérivation de l'équation (IV.17) par rapport à \hat{z} et l'application de la condition limite en $\hat{z} = 0$, nous fournit la relation :

$$(IV.19) \quad \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2}(k, 0) = c(k) A_i'(0)$$

L'intégration de l'équation (IV.17) par rapport à \hat{z} s'écrit formellement

$$u^*(k, \hat{z}) = c(k) \int_0^{\hat{z}} A_i \{ (ik)^{1/3} z \} dz + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{F^*(k)}{A_i(0)} \{ A_i (ik)^{1/3} \hat{z} - A_i(0) \}$$

Soit

$$(IV.20) \quad u^*(k, \hat{z}) = c(k) \int_0^{\hat{z}} A_i (ik)^{1/3} z dz + \frac{1}{\delta} \{ \theta^*(k, \hat{z}) - F^*(k) \}$$

en remarquant que pour $\hat{z} = 0$, $u^*(k, 0) = 0$

Ce qui nous donne pour les grandes valeurs de \hat{z}

$$(IV.21) \quad u^*(k, \infty) = \frac{1}{\delta} c(k) - \frac{1}{\delta} F^*(k)$$

Nous avons aussi, à partir de la condition limite (IV.6.b)

$$(IV.22) \quad u^*(k, \infty) = A^*(k) = \frac{im}{\delta} \cdot \frac{\bar{P}^*(k)}{\mu_0^2 - k^2}$$

L'égalité des relations (IV.21) et (IV.22) achève la détermination de la fonction

$$(IV.23) \quad C(k) = 3 \frac{im}{\delta} \cdot \frac{\bar{P}^*(k)}{\mu_0^2 - k^2} + \frac{3}{\delta} F^*(k)$$

En tirant profit de (IV.18) et (IV.19), nous obtenons l'expression de la perturbation de pression $\bar{P}^*(k)$

$$(IV.24) \quad \bar{P}^*(k) = \frac{D F^*(k)}{\alpha^{-4/3} (ik)^{4/3} + im/\mu_0^2 - k^2}$$

où $\alpha = (-3 A'_i(0))^{3/4} = 0.8272$

$$D = [3 A_i(0) \alpha^{4/3}]^{-1} - 1 = 0.382$$

Nous obtenons dans ces conditions à partir de (IV.3) la fonction $\bar{A}^*(k)$

$$(IV.25) \quad \bar{A}^*(k) = \frac{im}{\delta} \cdot \frac{D F^*(k)}{im + \alpha^{-4/3} (ik)^{4/3} (\mu_0^2 - k^2)}$$

4.3 Résultats

Les expressions analytiques de $\bar{P}(x)$ et $\bar{A}(x)$ à partir de $\bar{P}^*(k)$ et $\bar{A}^*(k)$ présentent de grosses difficultés, mais néanmoins, celles-ci peuvent être calculées numériquement. Il serait intéressant, afin de pouvoir initialiser le processus itératif du modèle numérique du système quasi-linéaire de connaître le comportement asymptotique de $\bar{A}(x)$ pour les grandes valeurs de x .

Pour des raisons de simplifications, nous supposons $\mu_0 = 0$, dans ce cas nous avons

$$m = ik$$

et $A^*(k)$ a pour expression

$$(IV.26) \quad A^*(k) = \frac{\delta^{-1} D F^*(k)}{1 + \alpha^{-4/3} (-ik)^{2/3} k}$$

Nous pouvons connaître à partir de cette expression le comportement de $\bar{A}(x)$ pour les grandes valeurs de x .

En effet pour $x \gg 1$, nous avons $k \ll 1$ et dans ces conditions

$$A^*(k) \approx \frac{D}{\delta} F^*(k)$$

Soit

$$(IV.27) \quad A(x) \approx \frac{D}{\delta} F(x)$$

C'est l'expression de $-A(x)$ qui sera choisie pour initialiser le procédé itératif pour la résolution du système quasi-linéaire (IV.1.3). Cette expression de $-A(x)$ est celle qui a

été adoptée par Sykes pour la résolution de son système.

Les figures 2 et 3 représentent les graphes des fonctions $\bar{P}(x)$ et $\bar{A}(x)$ obtenues numériquement en utilisant la transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide, pour un profil de température défini par

$$(IV.28) \quad F(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et où nous avons choisi $\mu_0 = 0$ et un pas d'espace $\delta k = 0.08$

4.4 Conclusion

La théorie linéaire du système (IV.1.3) nous montre ainsi l'influence significative de la tache thermique sur l'écoulement de couche limite d'Ekman, due à la nature interactive de la structure en triple couche.

CHAPITRE V
MODELE NUMERIQUE

CHAPITRE V

Modèle Numérique

Lorsque le paramètre de similitude Λ prend des valeurs finies et reste d'ordre $\ll 1$, le système (IV.1-2-3) reste quasi linéaire et ne peut être résolu que numériquement. L'objet de ce chapitre est d'établir le modèle numérique permettant d'approximer la solution du système (IV.1-3) et de voir dans quelles mesures la tache thermique concentrée sur l'intervalle $[0, 1]$ de l'axe de X a une influence sur l'écoulement de couche limite d'Ekman, comme l'a montrée la théorie linéaire. Pour cela, nous appliquons au système (IV.1-2) un schéma implicite de CRANK-NICHOLSON moyennant une sous-relaxation non linéaire (JOBE et BURGRAFF 1974) pour chaque pas d'espace. L'écoulement étant bidimensionnel, nous progresserons pour chaque itération le long de la direction de l'axe des x , à partir de l'amont de l'écoulement.

5.1 Le modèle numérique proprement dit

Les équations de départ sont :

$$(V.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\sigma} \int_{\infty}^z \frac{\partial \theta}{\partial x} dz = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

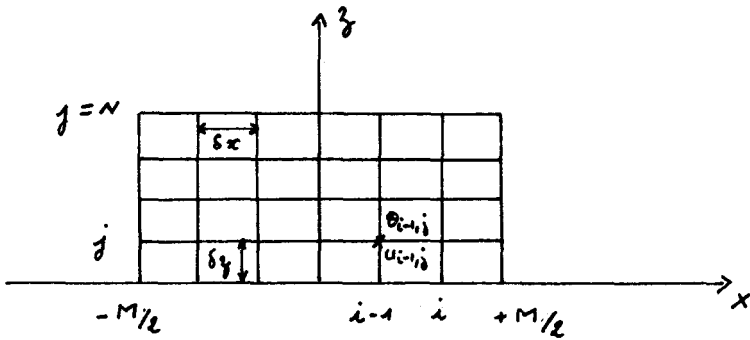
$$(V.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \quad u = w = 0, \quad \theta = \lambda F(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ z \rightarrow +\infty \quad u \rightarrow z + A(x), \quad w \rightarrow -z \frac{dA}{dx}, \quad \theta \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty \quad u \rightarrow z, \quad w \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

La méthode pour obtenir la solution du système (V.1-2) consiste à se donner le champ des déplacements $A(x_i) = -\frac{\rho \lambda}{\gamma} \sum_{j=1}^i F(x_j)$ et de calculer la perturbation de pression ainsi que les perturbations de vitesse et de température. Le nouveau champ de déplacement $A^{new}(x_i)$ est calculé à partir de la relation (III.64). Le procédé d'itération ainsi établi continue jusqu'à ce que la différence entre les déplacements soit suffisamment petite. De façon beaucoup plus précise, nous intégrons les équations (V.1-2) pour la méthode des différences finies, en utilisant des pas d'espace uniformes δx et δz dans les directions x et z respectivement.

Soit u_{ij} la valeur de la composante de la vitesse horizontale et θ_{ij} la valeur de la perturbation de température au point :

$$(V.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_i, z_j) = \left(\left(i - \frac{1}{2} M \right) \delta x, (j-1) \delta z \right) \\ i = 1, \dots, M \quad ; \quad j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

Nous supposons que les valeurs u_{ij} , $u_{i-1,j}$ de la vitesse et $\theta_{i-1,j}$, θ_{ij} de la température sont connues pour $j = 1, \dots, N$. Ces valeurs seront données à partir des conditions limites. Dans ces conditions les valeurs $\theta_{i+1,j}$ et $u_{i+1,j}$ seront calculées à partir de trois étapes que nous décrivons ci-dessous :



Les équations (V.1-2) peuvent être discrétisées de la manière suivante :

5.1.1 Etape 1

Dans cette étape (et la suivante), on utilise un schéma explicite pour calculer les premières estimations de la vitesse $\tilde{u}_{i+1/2, j}$ et de la température $\tilde{\theta}_{i+1/2, j}$

On définit

$$(V.4) \quad \begin{cases} u_{i-1/2, j} = \frac{1}{2} (u_{i-1, j} + u_{i, j}) \\ \theta_{i-1/2, j} = \frac{1}{2} (\theta_{i-1, j} + \theta_{i, j}) \end{cases}$$

Alors l'équation de la quantité de mouvement s'écrit

$$(V.5) \quad \frac{u_{i,j}}{\delta x} (\tilde{u}_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}) + \left(w_{i,j-1/2} + \frac{\delta z}{\delta x} (u_{i-1/2,j} - \tilde{u}_{i+1/2,j}) \right) \times \\ \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2\delta z} + H_{ij} = -\frac{1}{\delta} \tilde{G}_i + \frac{1}{\delta z^2} (u_{i,j+1} - u_{i-1/2,j} + \tilde{u}_{i+1/2,j} \\ + u_{i,j-1})$$

où $\tilde{u}_{i+1/2,j}$ est la première estimation des vitesses au point $(x_{i+1/2}, z_j)$ et \tilde{G}_i l'estimation du gradient de pression au point $(x_i, 0)$, que nous pouvons calculer à partir de la condition de comportement de w lorsque $z \rightarrow +\infty$. Remarquons au passage que le terme visqueux de l'équation de quantité de mouvement a été approximé par le schéma de Du Fort-Frankel, car cette représentation est inconditionnellement stable pour un schéma explicite.

Les vitesses verticales $w_{i,j-1/2}$ sont approximées à partir de l'équation de continuité

$$w = - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

Soit

(V.6)

$$w_{i,j-1/2} = \frac{\delta z}{\delta x} \sum_{r=2}^{j-1} (u_{i-1/2,r} - \tilde{u}_{i+1/2,r})$$

où nous avons utilisé la méthode des trapèzes.

Pour l'approximation de H_{ij} nous avons utilisé aussi la méthode des trapèzes en adoptant pour $\partial\theta/\partial x$ une différence retardée.

$$(V.7) \quad H_{ij} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} \left\{ \sum_{r=2}^{j-1} (\theta_{i,r} - \theta_{i-1,r}) + \frac{1}{2} (\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}) \right\}$$

Nous avons, de manière évidente l'approximation des conditions aux limites pour U_{ij} et θ_{ij}

$$(V.8) \quad \begin{cases} U_{i,1} = 0 \\ U_{i,N} = (N-1)\delta z + A_i \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{i,1} = \lambda F_i \\ \theta_{i,N} = 0 \end{cases}$$

où A_i et F_i sont les valeurs des fonctions A et F au point X_i respectivement.

La condition de comportement sur \mathcal{W} au point $(X_i, z_{N-1/2})$ va nous permettre de déterminer le gradient de pression \tilde{G}_i . En effet, l'équation (V.5) est linéaire en $\tilde{U}_{i+1/2,j}$. Pour calculer ce terme, on ignorera en premier lieu le gradient de pression \tilde{G}_i . Pour cela posons

(V.9)

$$\tilde{U}_{i+1/2,j} = U_{i+1/2}^* - \beta_j \tilde{G}_i$$

où les β_j , $j = 2, N-1$ sont des coefficients d'ajustement

que nous pouvons déterminer.

En portant l'expression (V.9) dans l'équation (V.5) on obtient les expressions explicites de $U_{i+1/2, j}^*$ et β_j

$$(V.10) \quad U_{i+1/2, j}^* = \left\{ \frac{U_{ij}}{\delta x} U_{i-1/2, j} - \left(W_{i, j-1/2} + \frac{\delta z}{\delta x} \right) \left(\frac{U_{i, j+1} - U_{i, j-1}}{2\delta z} \right) - U_{ij} + \frac{1}{\delta z^2} (U_{i, j+1} - U_{i-1/2, j} + U_{i, j-1}) \right\} / \left(\frac{U_{ij}}{\delta x} - \frac{1}{2\delta x} (U_{i, j+1} - U_{i, j-1}) + \frac{1}{\delta z^2} \right)$$

dans ces conditions les β_j ont pour expression

$$(V.11) \quad \beta_j = \frac{2\delta x/\gamma + (U_{i, j+1} - U_{i, j-1}) \sum_{r=2}^{j-1} \beta_r}{2\delta x/\delta z^2 + 2U_{ij} - (U_{i, j+1} - U_{i, j-1})}, \quad j > 2$$

$$\beta_2 = \frac{1/\gamma}{1/\delta z^2 + U_{i, 2}/\delta x - U_{i, 3}/2\delta x}$$

et on choisit la valeur de \tilde{G}_i qui donne

$$(V.12) \quad W_{i, N-1/2} = -\left(N - \frac{3}{2}\right) \delta z (A_{i+1} - A_i) / 2\delta x$$

ce qui permet de déterminer \tilde{G}_i . En effet

$$W_{i, N-1/2} = \frac{\delta z}{\delta x} \sum_{r=2}^{j-1} (U_{i-1/2, r} - U_{i+1/2, r}^*) + \frac{\delta z}{\delta x} \tilde{G}_i \sum_{r=2}^{N-1} \beta_r$$

or

$$W_{i, N-1/2}^* = \frac{\delta z}{\delta x} (U_{i-1/2, 2} - U_{i+1/2, 2}^*)$$

d'où

$$\tilde{G}_i = \frac{W_{i, N-1/2} - W_{i, N-1/2}^*}{\delta z / \delta x \sum_{r=2}^{N-1} \beta_r}$$

(V.13)

où $W_{i, N-1/2}$ est défini par (V.12)

Ce qui détermine complètement $\tilde{U}_{i+1/2, j}$ en utilisant la relation (V.9).

Les valeurs $\tilde{U}_{i+1/2, j}$ ainsi calculées, sont utilisées dans l'équation de l'énergie pour calculer $\tilde{\Theta}_{i+1/2, j}$

$$\tilde{\Theta}_{i+1/2, j} = \left\{ \frac{u_{ij}}{\delta x} \theta_{i-1/2, j} - \left(W_{i, j-1/2} + \frac{\delta z}{\delta x} (u_{i-1/2, j} - \tilde{U}_{i+1/2, j}) \right) \right\}_k$$

(V.14)

$$\times \frac{(\theta_{i, j+1} - \theta_{i, j-1})}{2\delta z} + \frac{1}{\delta z^2} (\theta_{i, j+1} - \theta_{i-1/2, j} + \theta_{i, j-1}) \left. \right\} /$$

$$u_{ij} / \delta x + \frac{1}{Pr} \cdot \frac{1}{\delta z^2}$$

5.1.2 Etape 2

Dans cette étape, les $\tilde{U}_{i+1/2, j}$ et $\tilde{\Theta}_{i+1/2, j}$ sont utilisées pour obtenir une première estimation au point (x_{i+1}, z_j) des vitesses $\tilde{U}_{i+1, j}$ et des températures $\tilde{\Theta}_{i+1, j}$.

Cette étape est identique à la précédente, il suffit de remplacer dans l'étape 1 i par $i + \frac{1}{2}$

Ce qui nous donne pour l'équation de la quantité de mouvement, où on a posé

$$(V.15) \quad \tilde{U}_{i+1,j} = \tilde{U}_{i+1,j}^* - \beta_j \tilde{G}_{i+1/2}$$

$$(V.16) \quad U_{i+1,j}^* = \left\{ \frac{U_{i+1/2,j}}{\delta x} U_{ij} - \left(W_{i+1/2,j} + \frac{\delta z}{\delta x} U_{ij} \right) \frac{(U_{i+1/2,j+1} - U_{i+1/2,j-1})}{2\delta z} \right. \\ \left. - \tilde{U}_{i+1/2,j} + \frac{1}{\delta z^2} (U_{i+1/2,j+1} - U_{ij} + U_{i+1/2,j-1}) \right\} / \\ \frac{U_{i+1/2,j}}{\delta x} - \frac{1}{2\delta x} (U_{i+1/2,j+1} - U_{i+1/2,j-1}) + \frac{1}{\delta z^2}$$

$$(V.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{G}_{i+1/2} &= \frac{W_{i+1/2,N-1/2} - W_{i+1/2,N-1/2}^*}{\delta z / \delta x \sum_{r=2}^{N-1} \beta_r} \\ W_{i+1/2,N-1/2}^* &= \frac{\delta z}{\delta x} \sum_{r=2}^{N-1} (U_{i,r} - \tilde{U}_{i+1,r}^*) \\ W_{i+1/2,N-1/2} &= - \left((N - \frac{3}{2}) \delta z \right) (A_{i+3/2} - A_{i+1/2}) / 2 \delta x \\ \beta_j &= \frac{2 \delta x / \delta + (U_{i+1/2,j+1} - U_{i+1/2,j-1}) \sum_{r=2}^{j-1} \beta_r}{2 \delta x / \delta z^2 + 2 U_{i+1/2,j} - (U_{i+1/2,j+1} - U_{i+1/2,j-1})}, \quad j > 2 \\ \beta_2 &= \frac{1}{\delta} \frac{1}{1/\delta z^2 + U_{i+1/2,2} / \delta x - U_{i+1/2,3} / 2 \delta x} \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de $\tilde{U}_{i+1,j}$ sont utilisées pour calculer

$$\tilde{\theta}_{i+1,j}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{i+1,j} = & \left\{ \frac{u_{i+1/2,j}}{\delta x} \theta_{i,j} - \left(w_{i+1/2,j-1/2} + \frac{\delta z}{\delta x} u_{i,j} \right) \left(\frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j-1}}{2 \delta z} \right) \right. \\
 & \left. - \tilde{H}_{i+1/2,j} + \frac{1}{\delta z^2} (u_{i+1/2,j+1} - u_{i,j} + u_{i+1/2,j-1}) \right\} / \\
 & \frac{u_{i+1/2,j}}{\delta x} - \frac{1}{2 \delta x} (u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j-1}) + \frac{1}{\delta z^2}
 \end{aligned}
 \tag{V.18}$$

5.1.3 Etape 3

On utilise dans cette dernière étape un schéma implicite et les valeurs de la vitesse $\tilde{u}_{i+1,j}$ et de la température $\tilde{\theta}_{i+1,j}$ pour calculer $u_{i+1,j}$ et $\theta_{i+1,j}$ au point (x_{i+1}, z_j) . Les termes visqueux sont approximés de manière implicite car la représentation du schéma de Du Fort-Frankel tend à produire dans le sens vertical des solutions oscillatoires.

L'équation de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$\frac{\hat{u}_{i+1/2,j}}{\delta x} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{\hat{w}_{i+1/2,j}}{4 \delta z} (u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1})
 \tag{V.19}$$

$$\begin{aligned}
 + \tilde{H}_{i+1/2,j} = & -\frac{1}{\gamma} G_{i+1/2} + \frac{1}{2 \delta z^2} (u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - 2u_{i+1,j} - 2u_{i,j} \\
 & + u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1})
 \end{aligned}$$

où

$$\hat{w}_{i+1/2,j} = \frac{\delta z}{\delta x} \left\{ \sum_{r=2}^{i-1} (u_{i,r} - \tilde{u}_{i+1,r}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - \tilde{u}_{i+1,j}) \right\}$$

$$\hat{u}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i+1,j} + u_{i,j})$$

$$\tilde{H}_{ij} = \frac{\delta x}{\delta \delta z} \left\{ \sum_{r=2}^{j-1} (\tilde{\theta}_{i+r, r} - \theta_{i, r}) + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{i+1, j} - \theta_{i, j}) \right\}$$

L'équation (V.19) peut s'écrire sous la forme

$$(V.20) \quad X_j u_{i+1, j-1} + Y_j u_{i+1, j} + Z_j u_{i+1, j+1} = d_j - \frac{1}{\delta} G_{i+1/2}$$

où les coefficients X_j, Y_j, Z_j et d_j ont pour expression

$$(V.21) \quad \begin{aligned} X_j &= -\frac{\hat{W}_{i+1/2, j}}{4\delta z} - \frac{1}{2\delta z^2} \\ Y_j &= \frac{1}{\delta x} \hat{U}_{i+1/2, j} + \frac{1}{\delta z^2} \\ Z_j &= \frac{1}{4\delta z} \hat{W}_{i+1/2, j} - \frac{1}{2\delta z^2} \\ d_j &= \frac{1}{\delta x} \hat{U}_{i+1/2, j} u_{ij} - \frac{1}{4\delta z} (u_{i, j+1} - u_{i, j-1}) \hat{W}_{i+1/2, j} \\ &\quad + \frac{1}{2\delta z^2} (u_{i, j+1} - 2u_{ij} + u_{i, j-1}) - \tilde{H}_{i+1, j} \end{aligned} \quad 2 \leq j \leq N-1$$

L'équation (V.20) est une équation à trois niveaux que nous pouvons écrire sous forme matricielle

$$B u = b - \frac{1}{\delta} G_{i+1/2} a$$

$$\text{où } u = (u_{i+1, 2}, \dots, u_{i+1, N-1})$$

$$a = (1, \dots, 1)$$

$$b \text{ a pour coefficients } d_j$$

B est une matrice tridiagonale de coefficients $X_j, Y_j, Z_j,$

alors la solution s'écrit

$$(V.22) \quad u = B^{-1}b - \frac{1}{\gamma} G_{i+1/2} B^{-1}a$$

cette expression se présente sous la même forme que (V.9), elle nous permet de ce fait, pour calculer u , d'ignorer en premier lieu le gradient de pression $G_{i+1/2}$. Nous avons dans ces conditions

$$B u^* = b$$

Soit

$$(V.23) \quad u^* = B^{-1}b$$



Le terme du gradient de pression est défini par la relation

$$(V.24) \quad G_{i+1/2} = \frac{W_{i+1/2, N-1/2}^* - W_{i+1/2, N-1/2}^*}{\sum_{r=2}^{i-1} \beta_r}$$

avec

$$W_{i+1/2, N-1/2}^* = \frac{\delta z}{\delta x} \sum_{r=2}^{N-1} (u_{i2} - u_{i+1/2}^*)$$

et

$$W_{i+1/2, N-1/2}^* = - \left((N - \frac{3}{2}) \delta z \right) (A_{i+3/2} - A_{i+1/2}) / 2 \delta x$$

Les coefficients d'ajustement sont donnés par

$$(V.25) \quad \beta = \frac{1}{\delta} \theta^{-1} a$$

ce qui achève la détermination de u

$$u = u^* - \beta G_{i+1/2}$$

Pour calculer la valeur finale $\theta_{i+1,j}$ du champ de température, on utilise la valeur $u_{i+1,j}$ du champ de vitesse, en adoptant le schéma implicite suivant

$$(V.26) \quad \frac{u_{i+1/2,j}}{\delta x} (\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}) + \frac{\hat{w}_{i+1/2,j}}{4\delta z} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i,j+1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i,j-1})$$

$$= \frac{1}{2\delta z^2} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i,j+1} - 2\theta_{i+1,j} + \theta_{i+1,j-1} + \theta_{i,j-1})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(V.27) \quad x'_j \theta_{i+1,j-1} + y'_j \theta_{i+1,j} + z'_j \theta_{i+1,j+1} = d'_j$$

où les coefficients x'_j, y'_j, z'_j ont pour expression

$$x'_j = x_j = -\frac{1}{4\delta z} \hat{w}_{i+1/2,j} - \frac{1}{2\delta z^2}$$

$$y'_j = y_j = \frac{1}{\delta x} \hat{u}_{i+1/2,j} + \frac{1}{\delta z^2}$$

$$z'_j = z_j = \frac{1}{4\delta z} \hat{w}_{i+1/2,j} - \frac{1}{2\delta z^2}$$

$$(V.28) \quad d'_j = \frac{\hat{U}_{i+1/2,j}}{\delta x} \theta_{ij} - \frac{\hat{W}_{i+1/2,j}}{4\delta z} (\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}) \\ + \frac{1}{2\delta z^2} (\theta_{i,j+1} - 2\theta_{ij} + \theta_{i,j-1})$$

soit sous forme matricielle

$$(V.29) \quad C\theta = d'$$

C est la matrice tridiagonale de coefficients x'_j, y'_j et z'_j et d' a pour coefficients d'_j

$$\theta = (\theta_{i+1,2}, \dots, \theta_{i+1,N-1})$$

d'où

$$(V.30) \quad \theta = C^{-1}d'$$

La valeur de $G_{i+1/2}$ donnée par (V.24) est utilisée pour calculer le champ de pression au point X_{i+1} . En effet

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_i = G_{i+1/2}$$

d'où

(V.31)

$$P_{i+1} = P_i + \delta x G_{i+1/2}$$

En utilisant la transformée de Fourier P_{i+1}^* du champ de pression ainsi calculé et la relation (IV.3), on

calcule le nouveau champ des déplacements

$$A^*(k_i) = \frac{i m}{\gamma} \cdot \frac{P_{i+1}^*}{\mu_0^2 - k_i^2} \equiv A_i^{*(calc)}$$

Le nouveau $A_i^{(new)}$ est ajusté, moyennant une sous-relaxation, en utilisant l'expression

$$(V. 32) \quad A_i^{(new)} = (1-\alpha) A_i^{(old)} + \alpha A_i^{(calc)}$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$

Cet ajustement est nécessaire pour empêcher que les valeurs du déplacement A_i ne s'amplifient démesurément. La valeur de α est ajustée automatiquement pour maintenir maximum le taux de convergence (JOBE-BURGRAFF 1974).

L'itération est terminée lorsque

$$(V. 33) \quad \max_i |A_i^{(calc)} - A_i^{(new)}| < 5 \cdot 10^{-3} |A_i^{(old)}|$$

5.2 Analyse des résultats numériques

Nous présentons dans cette section les résultats numériques pour un profil de température donnée par

$$F(x) = \begin{cases} \lambda (1-x^2)^2, & |x| < 1, \beta = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous donnerons au paramètre Λ différentes valeurs et nous choisirons dans chacun des cas le domaine d'intégration. On montrera surtout la partie du domaine tel que $|X| < 3$. Dans tout ce qui suit, nous avons adopté pour μ_0 la valeur 0.0.

5.2.1 Champ de pression et épaisseur de déplacement

La figure 4 illustre la perturbation de pression pour les différentes valeurs du paramètre Λ . La figure montre ainsi que les graphes de la perturbation de pression $P(X)$ au dessus de la tache thermique non homogène concentrée dans le domaine $|X| < 1$ passent tous par des minimums de valeurs négatives et que tous ces minimums sont situés sur une même droite. Nous remarquons que plus Λ est grand, plus le minimum est important et que la présence de la tache thermique produit au sein de l'écoulement une séparation qui varie de façon régulière. Ce phénomène est le même que celui observé par SYKES (1978) dans son étude sur les effets de la stratification dans l'écoulement de couche limite au dessus d'une petite montagne. Nous remarquons aussi que la forme de la solution est similaire à celle obtenue par l'analyse linéaire.

La figure 5 illustre les variations de la fonction $-A(x)$ qui caractérise l'épaisseur de déplacement de la couche inférieure visqueuse. Nous remarquons que la forme de la solution est similaire à celle obtenue analytiquement et que les sommets de la fonction $-A(x)$ pour les différentes valeurs du pa-

paramètre Λ sont tous situés sur une même droite.

5.2.2. Perturbation de température

Les figures 6, 7 et 8 illustrent la perturbation de température pour différentes valeurs du paramètre de similitude Λ aux points $X_0 = -0.88$, $X_0 = -0.08$ et $X_0 = 0.88$ de la tache thermique, plus précisément nous avons fait la représentation graphique de $\theta(x_0, z)$ en fonction de z pour un x fixé.

Ces 3 figures montrent les effets assez significatifs de la tache thermique sur le profil des températures.

5.2.3. Lignes de courant

Les figures 9 et 10 illustrent les lignes de courants $\psi(x, z) = \text{constante}$ pour $\Lambda = 0.9$, $\mu_0 = 0$ et $\Lambda = 2.0$ et $\mu_0 = 0$.

CONCLUSION

ET

PERSPECTIVES

Conclusion et perspectives

Dans le travail qui vient d'être présenté, nous avons montré que la comparaison des différents paramètres sans dimensions introduit au niveau des équations (I.45) - (I.51) a conduit à l'approximation de Boussinesq d'après ZEYTOUNIAN (1974) et qui consistait à faire le triple passage à la limite

$$B_c \rightarrow 0, M_0 \rightarrow 0, \bar{\tau} \rightarrow 0, \hat{\beta} = \frac{B_c}{\pi_0}, \Lambda = \frac{\bar{\tau}}{\pi_0}$$

avec $\hat{\beta} = o(1)$ et $\Lambda = o(1)$ et à rechercher les fonctions sans dimensions \bar{u} et \bar{w} (vitesse) et π, ω, θ les perturbations thermodynamiques sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}_0 + \dots \\ \bar{w} = \bar{w}_0 + \dots \\ \pi = \pi_0^2 \pi_2 \\ \omega = \pi_0 \omega_1 \\ \theta = \pi_0 \theta_1 \end{array} \right.$$

Dans le but d'élucider la solution du système (III.13) ainsi obtenu, nous avons été amenés à utiliser la méthode en triple couche. Cette méthode était nécessaire du fait de la dégéné-

rescence des équations (III.13) lorsque

$$\beta = Re^{-1/m} \rightarrow 0$$

Cette analyse a conduit, lorsque $\mathcal{L} = O(1)$, à choisir $m = m_1 = 5$. Ce choix, est celui qui a été adopté par SMITH (1973) dans son étude sur l'écoulement laminaire au dessus d'une petite "bosse" sur une plaque plane. Ce travail de SMITH a été généralisé au cas tridimensionnel par SMITH, SYKES et BRIGHTON (1977) toujours avec $m = m_1 = 5$. Enfin SYKES (1978) a exploité les résultats précédents pour analyser les effets de stratification, pour un fluide de Boussinesq, dans l'écoulement de couche limite au dessus d'une petite montagne.

L'analyse du système (IV.1-2) de la sous-couche limite inférieure nous a amené à faire l'hypothèse $\mathcal{L} \ll 1$ sur le paramètre de similitude qui intervient au niveau de la condition limite $\hat{z} = 0$ sur θ et à pouvoir étudier le système linéaire (IV.5-6).

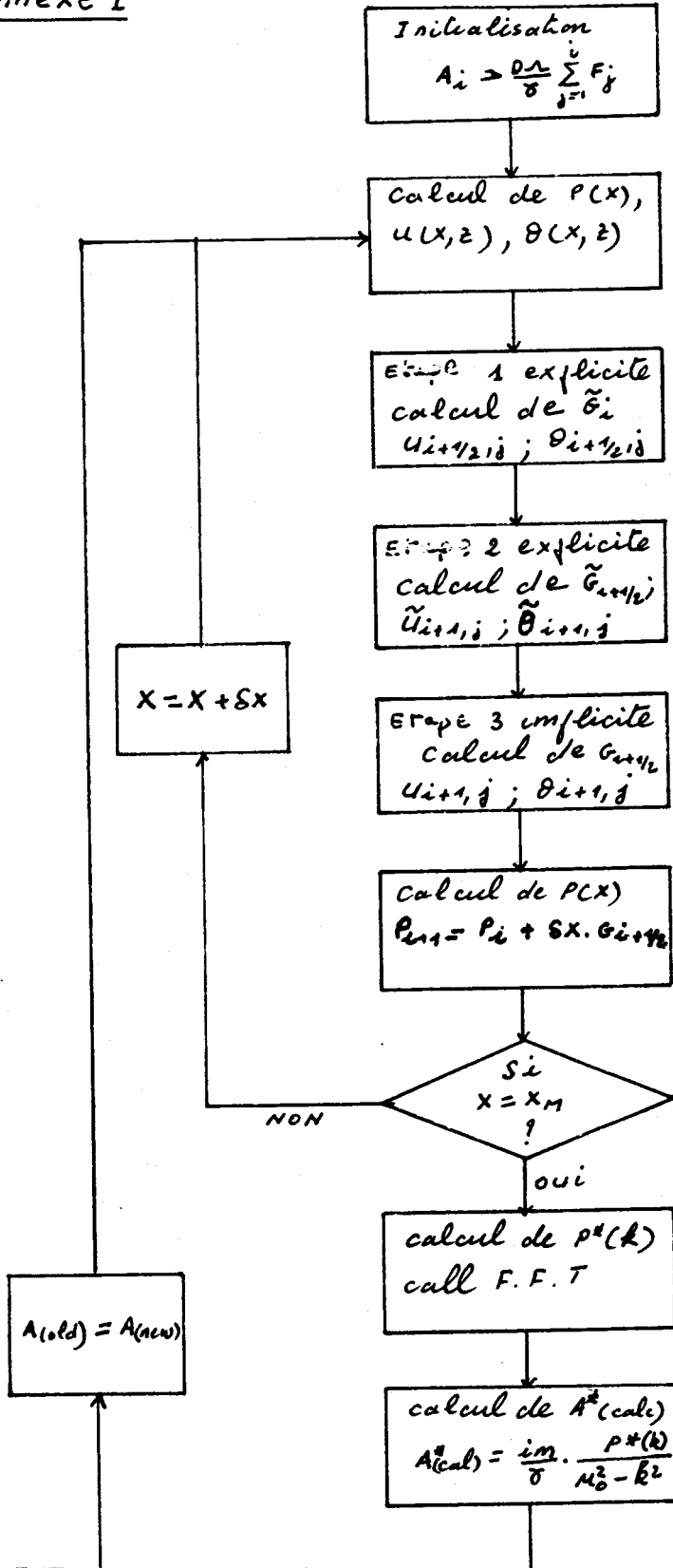
Cette analyse linéaire a permis d'initialiser le processus itératif utilisé pour la résolution numérique du système (IV.1-2) lorsque le paramètre $\mathcal{L} = O(1)$. Les résultats ainsi obtenus ont montré que la présence de la tache thermique non homogène a une influence significative sur l'écoulement de couche limite d'EKMAN due à la nature interactive de la structure de triple couche.

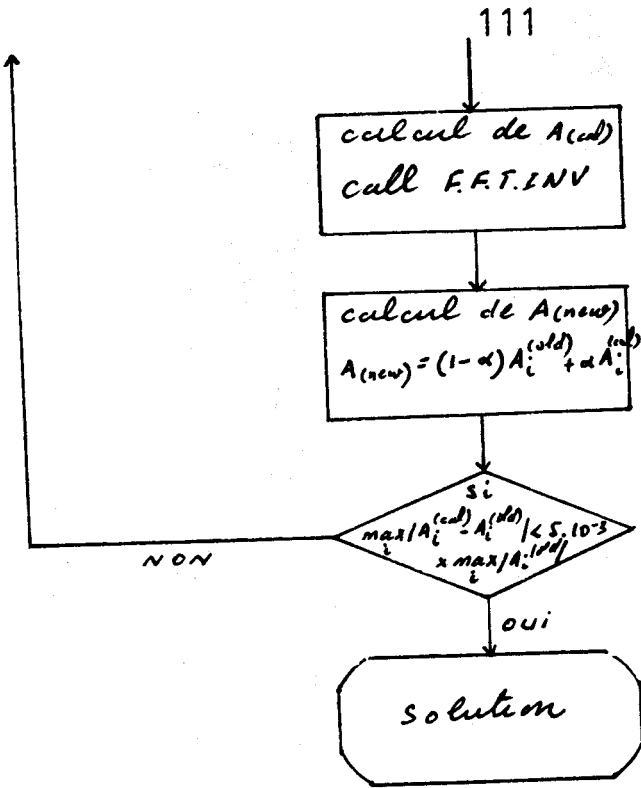
On notera enfin, que les cas $m = 6$ et $m = 4$ relèvent de la formulation des équations (III.1-3) mais doivent faire l'objet d'une étude séparée. Le cas $m = m = 3$ doit aussi faire l'objet d'une étude séparée, mais à partir des équations qui ne sont pas celles de Boussinesq (IV.1-2). Il semble que les résultats du travail de SMITH, P. W. M BRIGHTON, P. S JACKSON et J.C.R HUNT (1981) devraient permettre de mener à bien ces analyses ; mais pour l'instant ces questions restent ouvertes.

ANNEXES

Annexe 1 : organigramme

Annexe 2 : figures et résultats numériques

Annexe 1



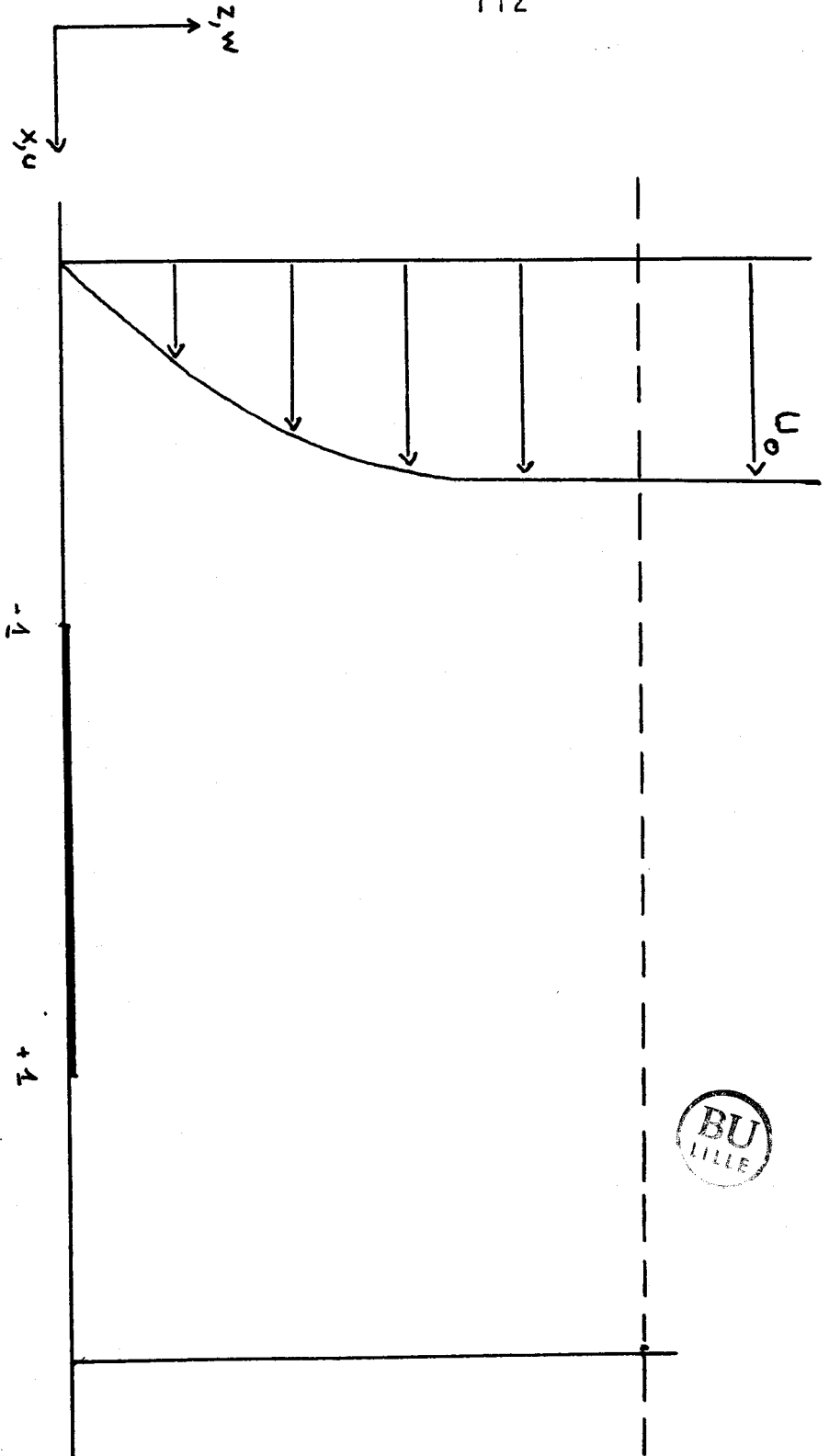
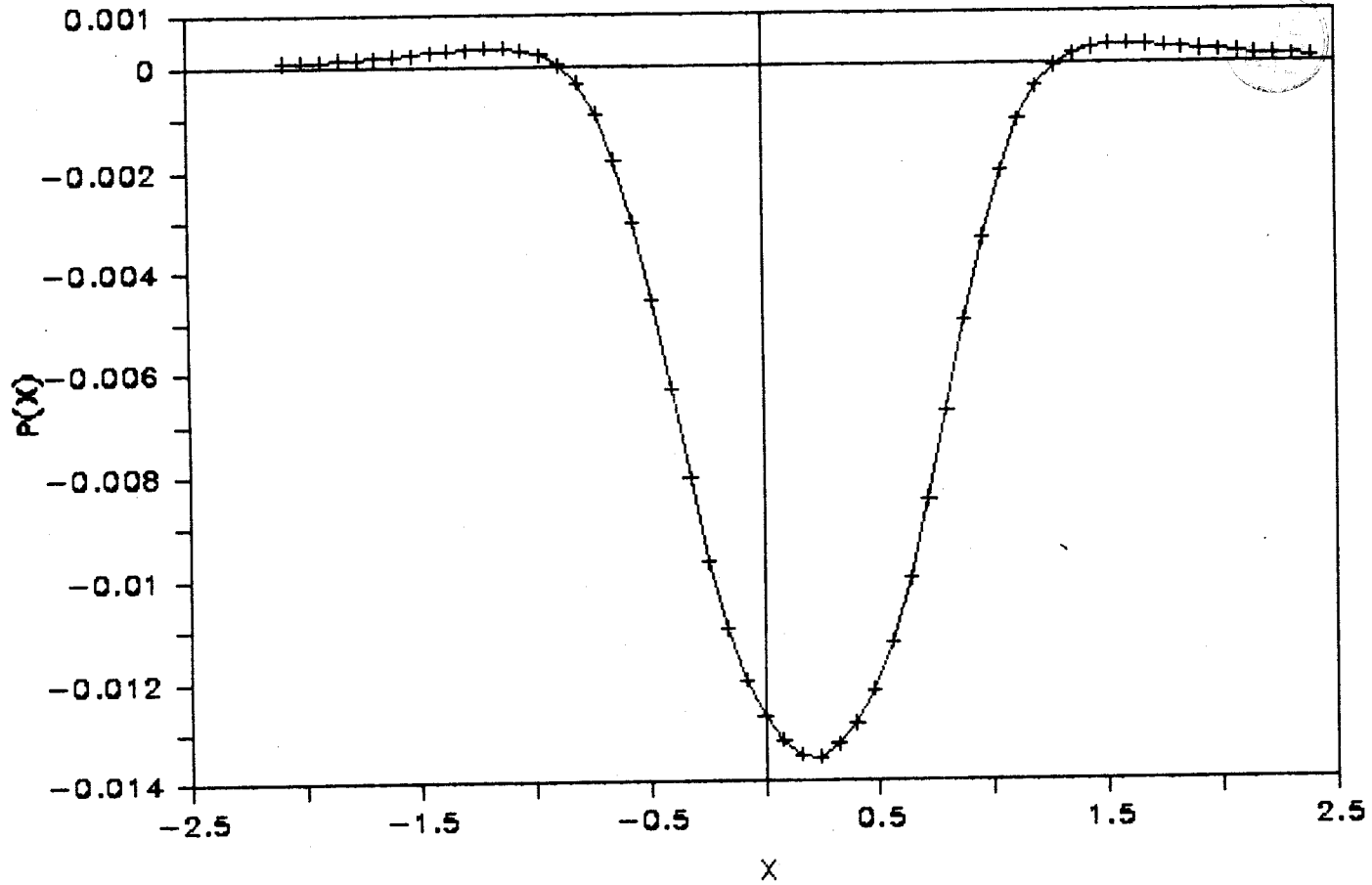


Fig-1

PERTURBATION DE PRESSION CAS LINEAIRE



113

Fig. 2

EPAISSEUR DE DEPLACEMENT

CAS LINEARE

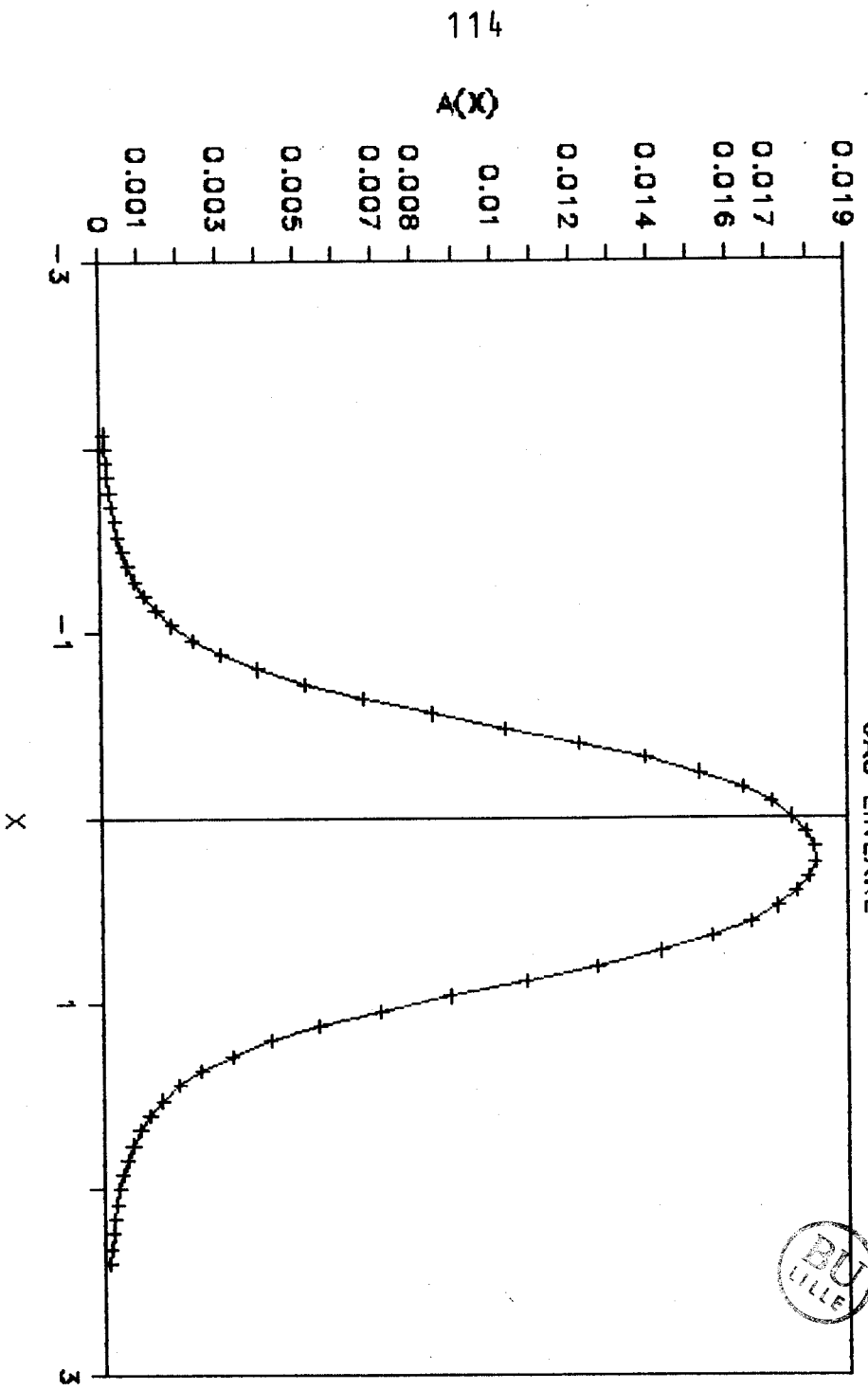


Fig. 3

$P(X) = \text{Pression}$

Pression

à des valeurs différentes de λ

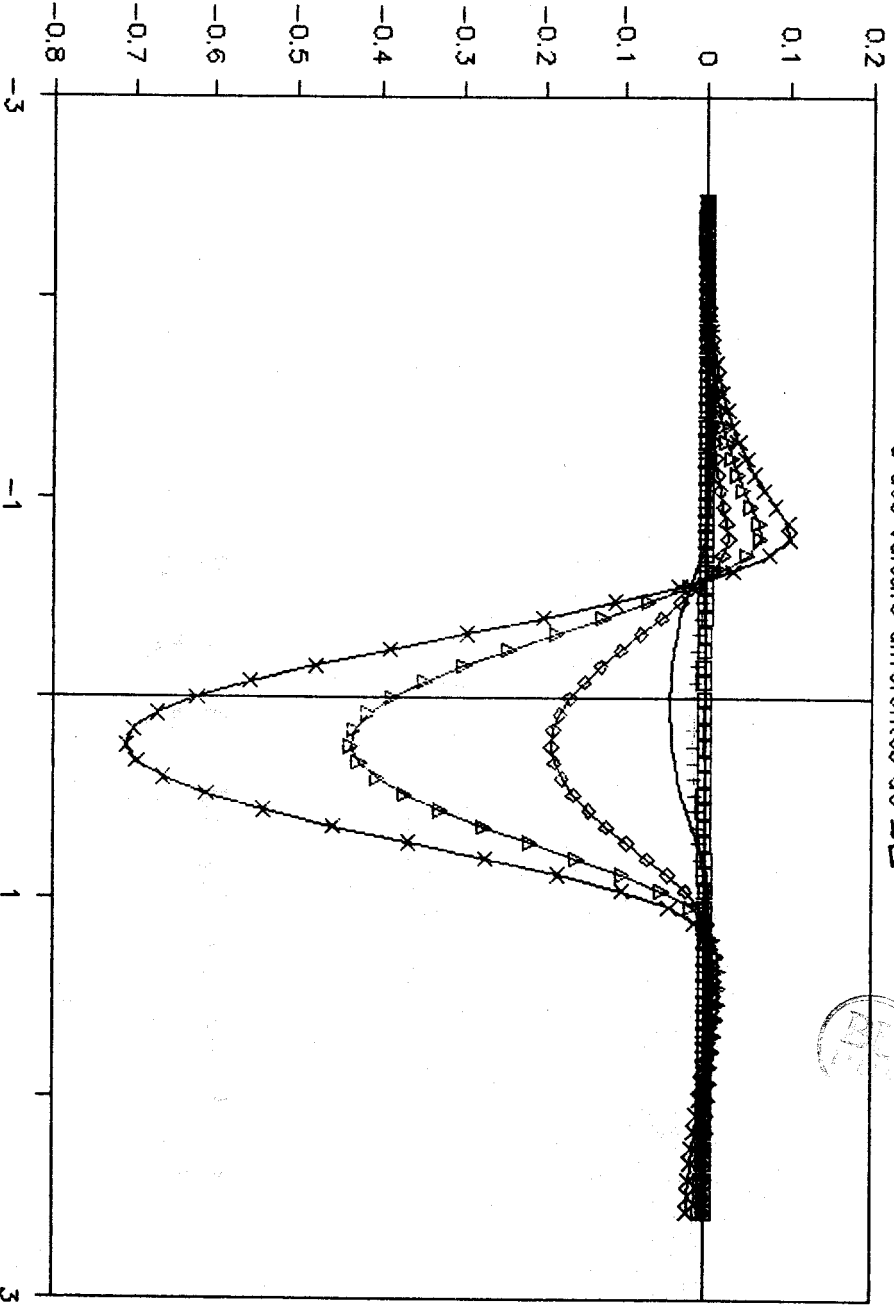


Fig.4

$\rho, \lambda = 0.01$

$\lambda, \lambda = 0.1$

$\diamond, \lambda = 1.0$

$\Delta, \lambda = 2.0$

$\times, \lambda = 3.0$

— linéaire

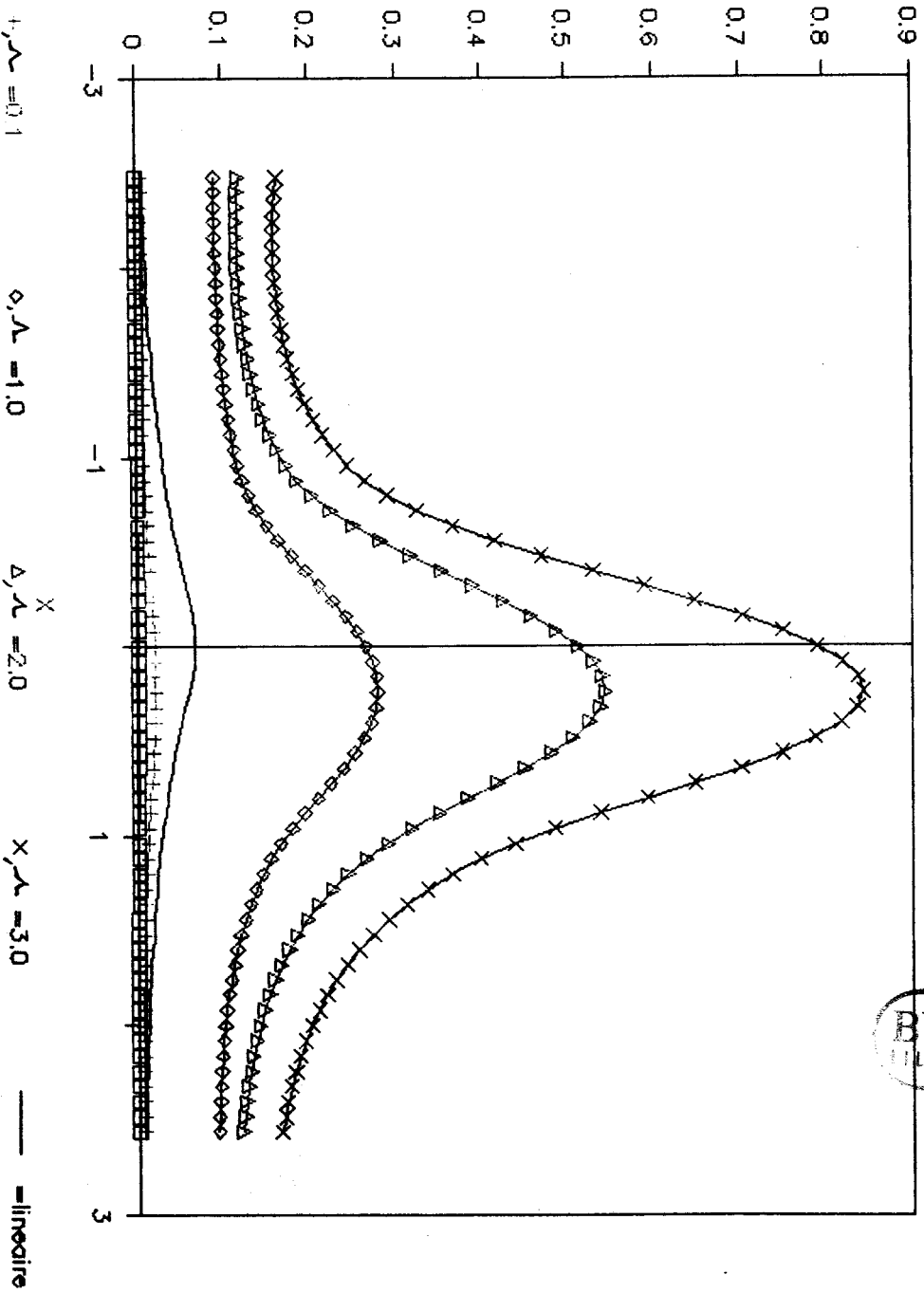
Epaisseur de déplacement

à des valeurs différentes de λ



Fig. 5

$A(x)$ = Epaisseur de déplacement



$\square \approx 0.01$

$\times, \lambda = 0.1$

$\nabla, \lambda = 1.0$

$\circ, \lambda = 2.0$

$+, \lambda = 3.0$

— linéaire

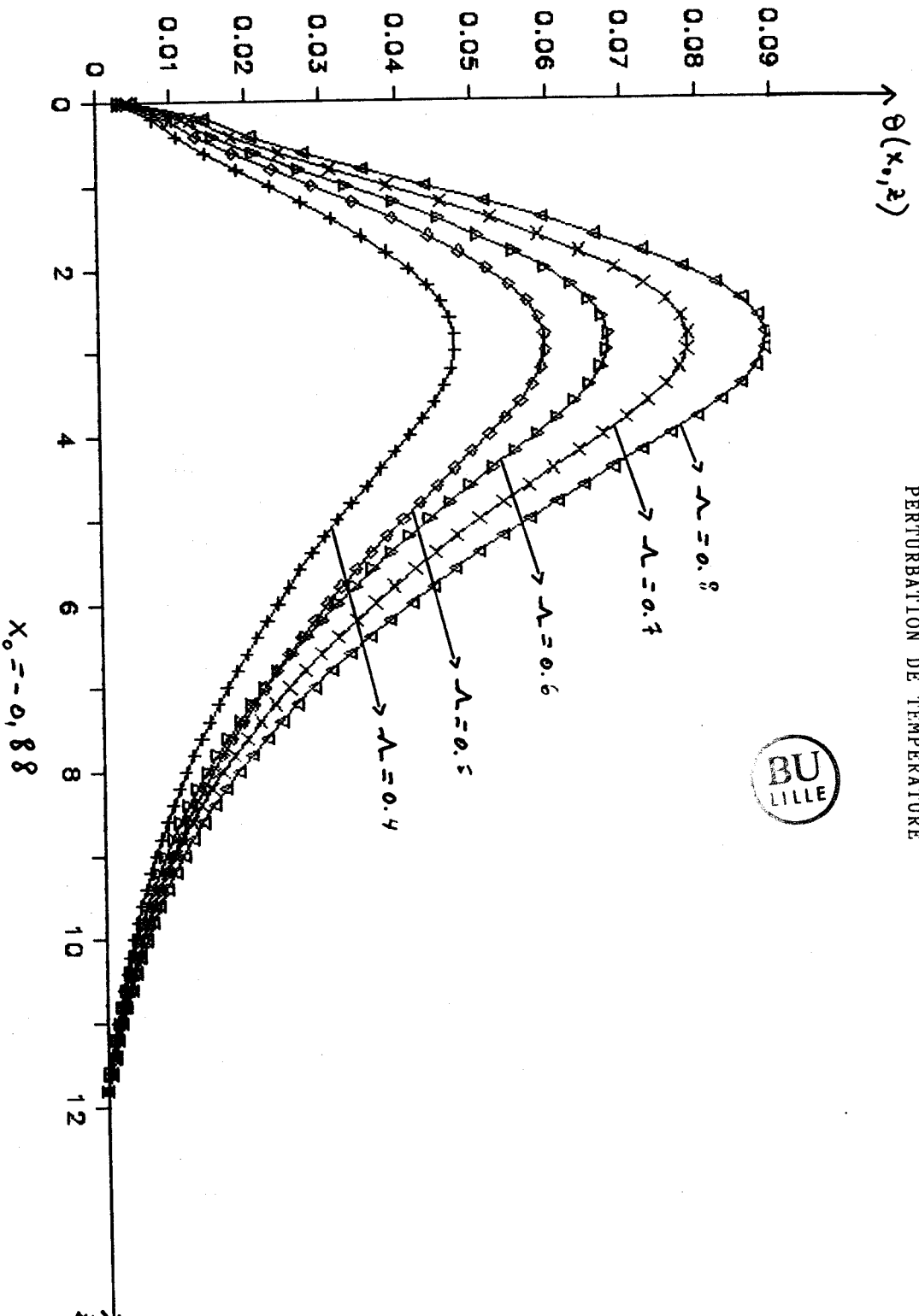


Fig. 6

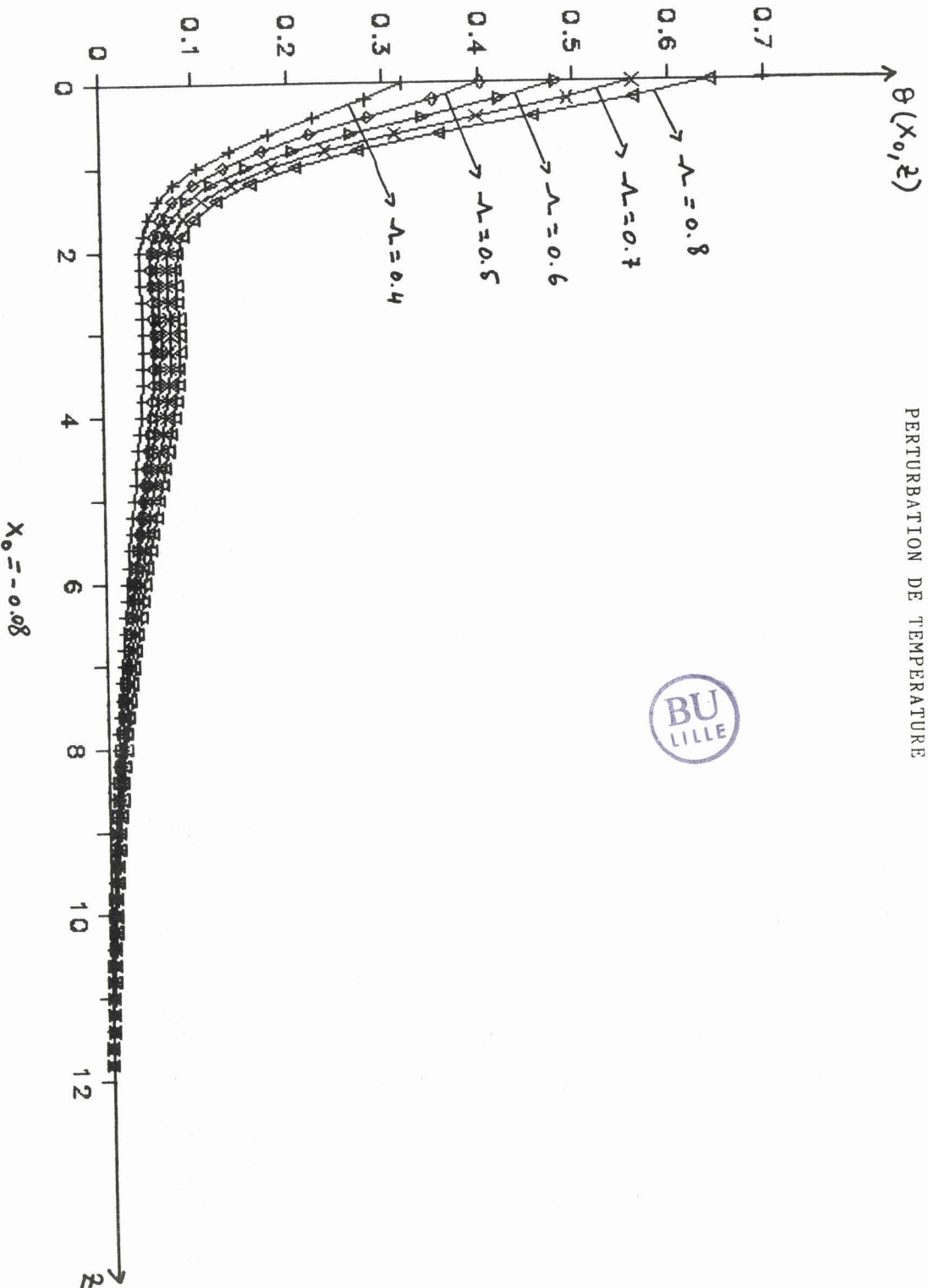


Fig. 7

PERTURBATION DE TEMPERATURE

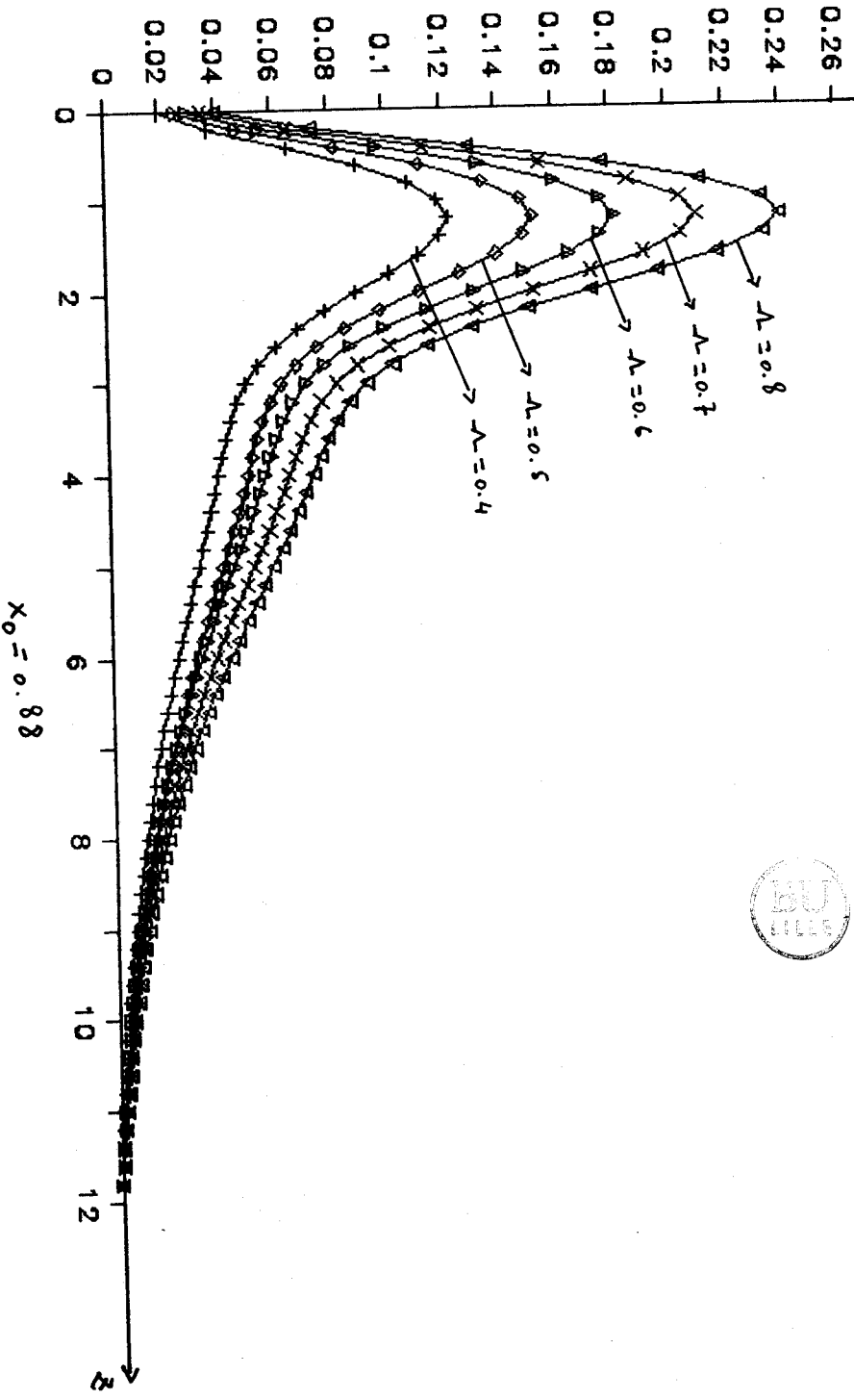


Fig. 8

Z

LIGNES DE COURANT

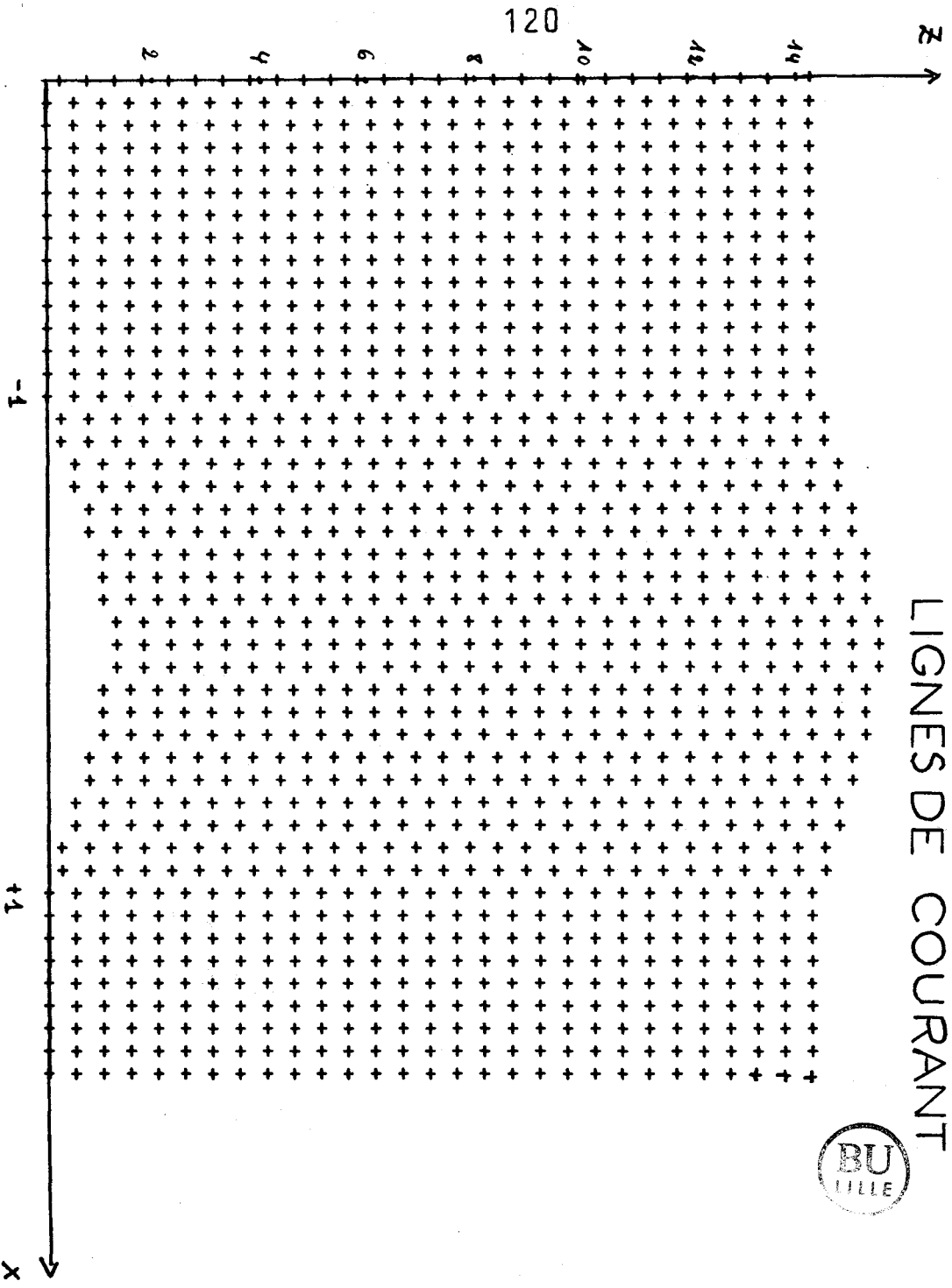
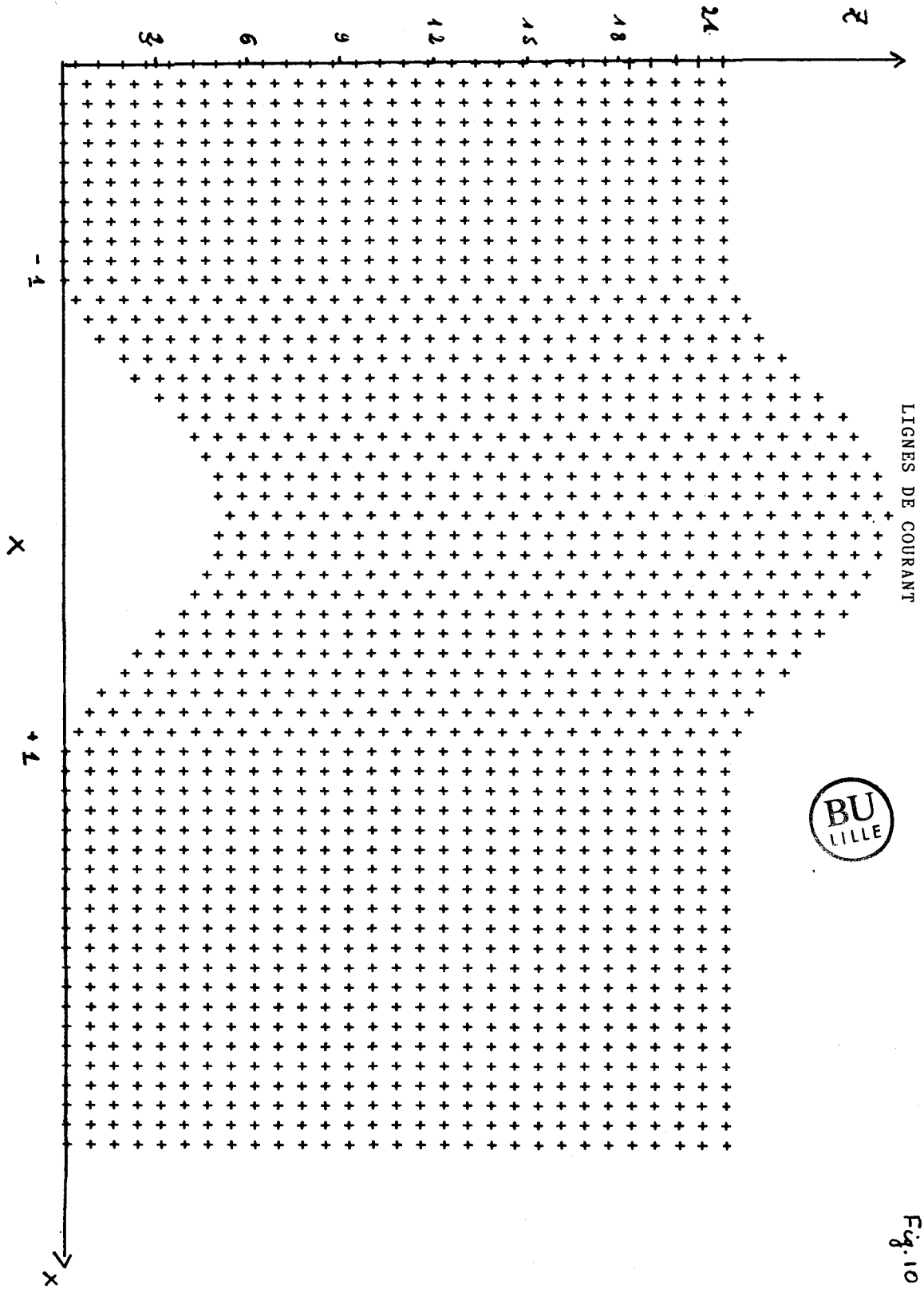


Fig. 9



LIGNES DE COURANT



Fig. 10

REFERENCES

Références :

CROCCO, L. et LEES L. (1952)

J. Aéronautical Sciences 19 - 649 - 676

GOLSTEIN, S. (1948)

ON caminar boundary layer flow near point of separation.

Quartely Journal of Mechanics and Applied Math.

1 - 43 - 69

INGERSOLL, A.P. (1969)

Inertial Taylor columns and Jupiters great Red Spot. J. Atmos. Sci. 26 - 744 - 752

KIRCHOFF, G. (1869)

Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen

J. reine angew. Math. 70 - 289 - 290

LIGHTILL (1953)

On Boundary layers and upstream influence. A comparison between subsonic and supersonic flows.

Proc. Roy. Soc. Lond. A 217 - 478 - 507

JOHNSON, E.R. (1978)

Trapped vortices in rotating flow

J. Fluid rech. 86 - 224 - 299

JOBE, C.E. and Burggraf, O.R. (1974)

Proc. R. Soc. Lond. A 340,91

NEILAND, V. Ya. (1969)

Izvestia Akad. Nauk. SSSR - Mekhanika Zhidkosti

i Gaza 4 - 4

PROUDMAN, J. (1916)

On the motion of solids in a liquid possessing
vorticity.

Proc. Roy. Soc. Lond. A. 92 - 408 - 424

SEDNEY, R. (1973)

A survey of the effects of small protuberances on
boundary-Layers flows.

A.I.A.A. journal 11 - 782 - 792

SMITH, F.T., SYKES, R.I. and BRIGHTON, P.W.M. (1977)

J. fluid rech. 83, 163

SMITH, F.T. (1973)

Laminar flow over a small hump on a flat plat.

J. fluid rech. 57 - 83 - 824

STEWATSON, K. and WILLIAMS, P.G. (1969)

Self induced separation

Proc. Roy. Soc. Lond. A. 312 - 181 - 206

SMITH, F.T., BRIGHTON, P.W.M., HUNT, J.C.R., JACKSON, P.S.
(1981)

J.Fluid Mech. 113 - 123 - 152

SYKES, R.I. (1978)

Stratification effects in foundary layer flow
over hill.

Proc. Roy. Soc. Lond. A.361, 225 - 243

TAYLOR, G.I. (1923)

Experiments on the motion of solid bodies in
rotating fluids.

Proc. Roy. Soc. Land. A. 106-213-218

VAZIRE, A. and BOYER, O.L (1971)

Rotating flow over shallow topographies

J. fluid rech. 50 - 79 - 95

ZEYTOUNIAN, R. Kh. (1986)

. Les modèles Asymptotiques de la mécanique des
Fluides

Lecture Notes in physics. springer-verlag Heidelberg.

. La météorologie du point de vue du mécanicien des
fluides. Polish academy os sciences, warszawa. fluid

dynamics transactions, vol. 8 (1981)

. Ces équations de Navier Stokes et l'atmosphère

Publication de l'U.E.R. de Mathématiques pures

et appliquées. U.S.T.L. Lille I, (1981) vol. 3 , fasc. 1.



Résumé

L'étude du problème d'interaction entre la couche limite classique d'Ekman et celle induite par un site thermiquement non homogène montre que celle-ci est fortement liée à l'ordre de grandeur de l'échelle horizontale du site.

Ce mémoire a pour objet l'analyse des équations d'interaction locale (équations de Boussinesq) à partir d'un modèle en triple couche. Cette analyse conduit au niveau de la sous-couche inférieure visqueuse à un système d'équations quasi-linéaires. La théorie linéaire de ce système montre que la tache thermique a une influence significative sur l'écoulement de couche limite d'Ekman, due à la nature interactive de la structure en triple couche. La solution numérique de ce système quasi-linéaire permet de confirmer dans une large mesure une telle influence. Les résultats des calculs numériques effectués sont analysés.

Mots clés

- . Ecoulement
- . Interaction
- . Tache thermique locale
- . Atmosphère faiblement compressible
- . Couche limite d'Ekman
- . Site thermiquement non homogène
- . Equations de BOUSSINESQ
- . Triple couche
- . Equations quasi-linéaires

