N° d'ordre : 120

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Dominique DEHAY

QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES CHAMPS HARMONISABLES

Membres du Jury

Président	: Jean GEFFROY, Université de Paris VI
Rapporteurs	: Hannu NIEMI, Université d'Helsinki
	Benoît TRUONG-VAN, Université de Pau
Examinateurs	: Paul DEHEUVELS, Université de Paris VI
	Jean DELPORTE, Faculté Libre des Sciences de Lille
	Raymond MOCHE, Université de Lille I

1987

N° d'ordre : 120

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Dominique DEHAY

QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES CHAMPS HARMONISABLES

Membres du Jury

Président : Jean GEFFROY, Université de Paris VI

Rapporteurs : Hannu NIEMI, Université d'Helsinki
Benoît TRUONG-VAN, Université de Pau

Examinateurs : Paul DEHEUVELS, Université de Paris VI
Jean DELPORTE, Faculté Libre des Sciences de Lille
Raymond MOCHE, Université de Lille I

Soutenue le 12 juin 1987

à ma mère,

à Rachel et à Victor.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à :

Monsieur Jean Geffroy, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ,

Messieurs Hannu Niemi et Benoît Truong-Van, qui, ayant accepté d'être les rapporteurs, ont témoigné de l'intérêt qu'ils prennent à ce travail,

Messieurs Paul Deheuvels et Jean Delporte, qui ont eu l'extrême obligeance de faire partie de ce jury,

Monsieur Raymond Moché, qui m'a proposé le sujet de cette thèse, et dont les conseils et l'aide efficace m'ont été d'un secours précieux.

Je remercie aussi les membres du Laboratoire de Statistique et de Probabilités pour leurs encouragements, Arlette Lengaigne qui a dactylographié le texte avec compétence et gentillesse, et toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de cette thèse.

QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES
DES CHAMPS HARMONISABLES

CHAPITRE III - INTRODUCTION A LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES SUR $\mathbb{R}$.

CHAPITRE IV - CRITERES POUR LA L.F.G.N.

CHAPITRE V - VITESSE DE CONVERGENCE DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE.

INTRODUCTION

La théorie des processus harmonisables introduite par M. Loève pour généraliser la notion de processus stationnaire (au sens L^2), a été développée entre autres par Yu. A. Rozanov, H. Niemi, et M.M. Rao.

Dans cette thèse sont abordés trois aspects de cette théorie : les processus (ou champs) harmonisables définis sur un groupe abélien localement compact (l.c.a.) et leurs propriétés d'approximation des processus continus, la loi forte des grands nombres (L.F.G.N.) pour les processus harmonisables sur $\mathbb{R}$, l'étude du spectre de puissance de certains d'entre eux.

La définition habituelle d'un processus harmonisable sur un groupe l.c.a. est donnée à partir d'une mesure stochastique qui est supposée régulière. Au chapitre I, nous montrons que l'hypothèse de régularité peut être omise. Mais il en résulte qu'un processus harmonisable peut posséder plusieurs mesures stochastiques spectrales, une et une seule d'entre elles étant régulière, d'après I. Kluvánek.

Ensuite est établie une loi faible des grands nombres pour les processus harmonisables, généralisant des résultats de Yu. A. Rozanov, et de M.F. Driscoll, J.N. McDonald et N.A. Weiss (formule d'inversion permettant de retrouver les masses ponctuelles de la mesure stochastique spectrale, pour la convergence en moyenne quadratique).

Chapitre II : H. Niemi a prouvé que tout processus (faiblement) harmonisable sur $\mathbb{R}$ peut être approximé par une suite de processus fortement harmonisables uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Au chapitre II, ce résultat est étendu aux processus continus définis sur un groupe l.c.a. à valeurs dans un espace L^2 séparable.

Puis divers raffinements de cette extension sont donnés lorsque le groupe est σ-compact, puis σ-compact et métrisable. Ces résultats, notamment la notion d'opérateur harmonisant, ont été obtenus simultanément par R. Moché travaillant sur des processus harmonisables d'espace-temps $\mathbb{R}$.

Chapitres III, IV, V : en utilisant à plusieurs reprises un résultat essentiel dû à A. Pietsch et R. Rogge, à H. Niemi, à A.G. Miamee et H. Salehi - qui peut s'énoncer sous la forme : tout processus harmonisable est dominé par un processus stationnaire - nous généralisons et affinons des résultats sur la loi forte des grands nombres, obtenus par divers auteurs (notamment V.F. Gaposhkin et J. Rousseau pour ne citer que les plus récents) dans le cas particulier des processus stationnaires ou fortement harmonisables.

Ainsi on trouve dans le chapitre III le résultat central de toute l'étude de la L.F.G.N. : la loi forte des grands nombres est vérifiée si et seulement s'il existe un réel $a > 1$ tel que $\mu(|u| < a^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{P\text{-p.s.}} 0$, où μ est la mesure stochastique spectrale du processus harmonisable quelconque considéré (V.F. Gaposhkin avait établi ce résultat pour les processus stationnaires continus).

Au chapitre IV sont données trois conditions suffisantes, mais non nécessaires, portant sur la bimesure spectrale pour qu'un processus harmonisable vérifie la L.F.G.N. Enfin, par un exemple, il est montré que le problème ne peut se traduire de manière nécessaire et suffisante sur les bimesures (deux processus stationnaires continus sont construits, ayant la même mesure spectrale, l'un vérifiant la loi forte, l'autre ne la vérifiant pas).

Les résultats du chapitre précédent sont affinés au chapitre V où l'on donne des conditions suffisantes pour que l'on ait pour presque tout ω :

$$g(t) \cdot \frac{1}{t} \int_{-t}^{t} X_s(\omega)\, ds \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad ,$$

où g est une fonction pouvant tendre vers $+\infty$ avec t.

Chapitres VI et VII : différentes notions de stationnarité d'un processus stochastique ont été développées ; ainsi la stationnarité asymptotique due à J. Kampé de Fériet et E. Parzen, et l'harmonisabilité, comme nous l'avons déjà vu.

Yu. A. Rozanov a établi que tout processus fortement harmonisable sur $\mathbb{R}$ est asymptotiquement stationnaire. Dans le chapitre VI est introduite une classe plus vaste de processus harmonisables asymptotiquement stationnaires : les processus harmonisables à bimesure σ-finie.

Ainsi en étudiant, par filtrage la moyenne temporelle de l'espérance de la puissance d'un tel processus, nous établissons que celle-ci est localisable sur l'axe des fréquences, selon une notion définie par A. Blanc-Lapierre, c'est-à-dire que l'on peut déterminer la contribution de chaque fréquence à cette puissance. Et ceci est fait en donnant la mesure spectrale de la puissance moyenne associée à ce processus en fonction de sa bimesure spectrale, qui est σ-finie.

Enfin, en application des résultats sur la L.F.G.N., le chapitre VII contient des conditions suffisantes pour que l'on puisse déterminer la moyenne temporelle de la puissance des trajectoires d'un processus fortement harmonisable. Ces résultats améliorent certains travaux de A. Blanc-Lapierre.

CHAPITRE I

MESURES STOCHASTIQUES SPECTRALES D'UN PROCESSUS HARMONISABLE DEFINI SUR UN GROUPE ABELIEN LOCALEMENT COMPACT.

I - INTRODUCTION

Il est connu que tout processus harmonisable défini sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ admet une unique mesure stochastique spectrale. Or, dans le cas général, un processus (ou champ) harmonisable défini sur un groupe abélien localement compact peut posséder plusieurs mesures stochastiques spectrales. Par contre, il possède une unique mesure stochastique spectrale régulière.

Dans ce chapitre nous établissons ce résultat et une loi faible des grands nombres. Puis nous énonçons quelques propriétés utiles par la suite.

- Au paragraphe 2, la définition de la régularité d'une mesure hilbertienne est posée. Des contre-exemples et des exemples sont donnés.

- Nous définissons ensuite, au paragraphe 3, les processus harmonisables en mettant en évidence la non-unicité de la mesure stochastique spectrale, dans le cas général, lorsqu'aucune condition de régularité n'est imposée.

- Le paragraphe 4 est consacré à l'établissement d'une formule d'inversion qui permet d'estimer les masses ponctuelles d'une mesure stochastique spectrale d'un processus harmonisable. Cette formule généralise des formules données par Rozanov dans le cas où l'espace temps G est $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.

- Puis, au paragraphe 5, nous rappelons la caractérisation d'un processus harmonisable par son noyau à l'aide d'une bimesure spectrale. Ceci nous permet de constater que tout processus continu stationnaire est harmonisable.

- Ce chapitre se termine par une étude des processus harmonisables à densité stochastique spectrale (paragraphe 6).

Notation.

Dans ce chapitre et le suivant, G désigne un groupe abélien localement compact, et Γ son groupe dual. La loi interne de G est notée additivement, tandis que celle de Γ est notée multiplicativement. Nous considérons sur ces groupes abéliens localement compacts des mesures de Haar notées, respectivement, ds et $d\gamma$ (chacune unique à un facteur multiplicatif près).

L'image d'un élément s de G par un caractère continu γ de Γ est écrit sous la forme $\langle s,\gamma\rangle$.

2 - MESURES HILBERTIENNES REGULIERES

Soit H un espace de Hilbert. Suivant Kluvánek [23 : § 1] nous posons :

2.1. *Définition*.- Une mesure hilbertienne définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(T)$ d'un espace topologique séparé localement compact T, est dite régulière lorsque pour tout A de $\mathcal{B}(T)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U et un compact K de T tels que :

$$K \subset A \subset U$$

et $\quad \forall B \in \mathcal{B}(T) \quad , \quad B \subset U \setminus K \quad , \quad ||\mu(B)||_H < \varepsilon \quad .$

Une mesure hilbertienne sur $\mathcal{B}(T)$ n'est pas toujours régulière.

2.2. *Contre-exemple* Leroy Péterson [24 : th. II.12] a établi que tout groupe G abélien localement compact non métrisable admet une mesure n positive finie non régulière définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(G)$. Dans ce cas, lorsque z est un élément non nul de H, la mesure hilbertienne μ définie sur $\mathcal{B}(G)$ par :

$$\mu(A) = n(A) \cdot z \quad , \quad A \in \mathcal{B}(G)$$

n'est pas régulière.

Par contre, d'après [24 : th. I.7], nous avons :

2.3. *Lemme*.- Soit T un espace topologique séparé. Si chaque ouvert de G est σ-compact, alors toute mesure positive finie est régulière.

De plus [23 : cor. I.2.] :

2.4. *Lemme*.- Si une fonction $\mu : \mathcal{B}(G) \to H$, définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(G)$ d'un groupe abélien localement compact G, est telle que, pour tout z de H, la fonction $\mu_z(.) = (\mu(.), z)_H : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{C}$ soit une mesure complexe régulière, alors μ est une mesure hilbertienne régulière.

Ainsi, nous déduisons :

2.5. *Proposition*.- Si G est un groupe abélien localement compact tel que chaque ouvert soit σ-compact, alors toute mesure hilbertienne sur $\mathcal{B}(G)$ est régulière.

2.6. *Remarque*.- Ainsi nous obtenons que toute mesure hilbertienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}(\mathbb{Z})$ ou $\mathcal{B}(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}})$ est régulière.

Or on sait que :

2.7. *Lemme*.- Soit G un groupe abélien localement compact. Pour toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ intégrable par rapport à la mesure de Haar de G, la mesure complexe définie sur $\mathcal{B}(G)$ par : $A \longrightarrow \int_A f(s)\, ds$ est régulière.

En utilisant la théorie de l'intégration forte des fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert séparable (intégrale de Bochner) [21] [27 : chap. III] nous avons :

2.8. *Corollaire*.- Soient G un groupe abélien localement compact et H un espace de Hilbert séparable. Pour toute fonction $f : G \to H$ fortement intégrable par rapport à la mesure de Haar de G, la fonction d'ensemble μ définie sur $\mathcal{B}(G)$ par $\mu(A) = \int_A f(s)\, ds$ est une mesure hilbertienne régulière.

Preuve : En effet, pour tout z de H, et tout A de $\mathcal{B}(G)$, par la propriété de Pettis pour l'intégrale forte [27 : th. III.2.19] on a :

$$\left(\int_A f(s)\, ds\ ,\ x\right)_H = \int_A (f(s), x)_H\, ds\ ,$$

et nous pouvons appliquer les lemmes 2.4 et 2.7 . ∎

3 - PROCESSUS (OU CHAMPS) HARMONISABLES

Nous considérons à partir de maintenant que $H = L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ où $(S,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé. Ceci n'affecte en rien la généralité de notre étude puisque tout espace de Hilbert complexe est isométrique à un sous-espace d'un espace $L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ [34 : § 2].

Dans ce cas, une mesure hilbertienne à valeurs dans $H = L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ est appelée une mesure stochastique.

En utilisant la théorie de l'intégration par rapport à une mesure vectorielle définie par Dunford et Schwartz [13 : § IV.10] nous posons :

3.1. Définition.- Un processus $X : G \to H$ est dit harmonisable lorsqu'il est la transformée de Fourier d'une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}(\Gamma) \to H$ définie sur la tribu borélienne du dual Γ de G :

$$X(s) = \int_\Gamma \langle s,\gamma\rangle\, \mu(d\gamma) \quad , \qquad s \in G \; .$$

La mesure stochastique μ est appelée mesure stochastique spectrale de X.

Le lemme suivant que nous déduisons directement de la définition 3.1, sera amélioré ultérieurement.

3.2. Lemme.- Tout processus harmonisable est borné et faiblement continu.

Preuve : D'après [13 : th. IV.10.8], le processus harmonisable X de mesure stochastique spectrale μ vérifie :

$$||X(s)||_H \leq \sup \{|<s,\gamma>| \ : \ \gamma \in \Gamma\}. \ ||\mu||(\Gamma) = ||\mu||(\Gamma) < +\infty \ , \quad s \in G \ ,$$

où $||\mu||(\Gamma)$, la semi-variation de μ dans Γ, est finie d'après [13 : lemma IV.10.4] .

De plus pour tout z de H , nous avons :

$$(X(s),z)_H = \int_\Gamma <s,\gamma> \mu_z(d\gamma) \quad , \quad s \in G \quad ,$$

μ_z étant la mesure complexe définie sur $\mathcal{B}(\Gamma)$ par $\mu_z(A) = (\mu(A),z)_H$; par conséquent la fonction $s \longmapsto (X(s),z)_H$, transformée de Fourier d'une mesure complexe, est continue. D'où la faible continuité de X. ■

La notion de processus harmonisable est liée à celle de processus V-borné introduite par Bochner [8 : § 7].

3.3. *<u>Définition</u>*.- Un processus $X : G \to H$ est dit V-borné lorsque :

i) il est borné et faiblement mesurable ,

ii) il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|| \int_G f(s) \ . \ X(s) \ ds||_H \leq c||\hat{f}||_\infty \quad , \quad f \in L^1(G) \ ,$$

où $\hat{f}(\gamma) = \int_G <s,\gamma> f(s) \ ds \ , \quad \gamma \in \Gamma \ ,$

et l'intégrale de Pettis $\int_G f(s) \ . \ X(s) \ ds$ est définie puisque X est bornée faiblement mesurable, et f appartient à $L^1(G)$.

3.4. *<u>Lemme</u>*.- <u>Tout processus harmonisable est V-borné.</u>

Preuve : Pour tout z de H, par définition de l'intégrale de Pettis (intégrale faible), on a :

$$(\int_G f(s) \cdot X(s)\,ds,\ z)_H = \int_G f(s)\,(X(s),z)_H\,ds = \int_G f(s)(\int_\Gamma \langle s,\gamma\rangle\,\mu_z(d\gamma))\,ds\,,$$

d'après le théorème de Fubini, appliqué aux mesures complexes μ_z et $f(s)\,ds$:

$$= \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\,\mu_z(d\gamma) = (\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\,\mu(d\gamma),\ z)_H\ .$$

Ainsi
$$\int_G f(s).X(s)\,ds = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\,\mu(d\gamma)\quad ,$$

et
$$\|\int_G f(s)\cdot X(s)\,ds\|_H \leq \sup\{|\hat{f}(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}\ .\ \|\mu\|(\Gamma).\ ■$$

Du théorème [23 : th. 2] de Kluvánek, nous déduisons :

3.5. *Théorème*.- Un processus $X : G \to H$ est harmonisable si, et seulement si, il est faiblement continu et V-borné. De plus dans ce cas, il possède une unique mesure stochastique spectrale régulière μ .

3.6. *Remarques*.-

i) Si nous n'imposons aucune condition de régularité sur la mesure stochastique spectrale μ , dans le cas général, il n'y a pas unicité.

En effet, d'après le théorème de dualité de Pontryagin, tout groupe abélien localement compact est le dual d'un groupe abélien localement compact. Donc, soit Γ un groupe abélien localement compact non métrisable, dual d'un groupe G. Il existe une mesure stochastique non régulière $\mu : \mathcal{B}(\Gamma) \to H$ (cf. remarque 2.2).

Le processus harmonisable $X : G \to H$ défini par :

$$X(s) = \int_\Gamma \langle s,\gamma\rangle \, \mu(d\gamma)$$

possède deux mesures stochastiques spectrales distinctes : μ qui n'est pas régulière, et son unique mesure stochastique spectrale régulière (th. 3.5).

ii) D'après la proposition 2.5., lorsque Γ est un groupe abélien localement compact, tel que tout ouvert soit σ-compact, tout processus harmonisable possède une unique mesure stochastique spectrale, et celle-ci est régulière.

Nous retrouvons l'unicité de la mesure stochastique spectrale d'un processus harmonisable lorsque $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ [27 : V. III].

iii) Un problème qui se pose est de déterminer des liens entre les différentes mesures stochastiques spectrales d'un processus harmonisable.

3.7. - Nous pouvons donc énoncer, d'après [23 : cor. 3.3], l'amélioration suivante du lemme 3.2.

Théorème.- Tout processus harmonisable est borné et uniformément continu.

4 - FORMULE D'INVERSION - LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES

Les formules d'inversion permettent d'estimer certaines valeurs des mesures stochastiques spectrales d'un processus harmonisable. Ainsi nous généralisons aux processus harmonisables la loi faible des grands nombres pour les processus faiblement stationnaires définis sur un groupe abélien localement compact obtenue par Driscoll, McDonald et Weiss [12 : th. 1]. Ce résultat généralise aussi la formule d'inversion [36 : Inversion formulae] de Rozanov pour les processus harmonisables sur $\mathbb{R}$.

Commençons par établir la condition d'intégrabilité forte suivante :

4.1. Lemme.- Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, H un espace de Hilbert séparable, et m une mesure complexe ou positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour toutes fonctions mesurables $h : \Omega \to H$ bornée, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ m-intégrable, la fonction mesurable $f.h : \Omega \to H$, $\omega \longmapsto f(\omega) . h(\omega)$, est fortement m-intégrable.

Preuve : Pour prouver que f.h est fortement m-intégrable, suivant la définition de l'intégration forte [27 : déf. III.III.4], nous allons établir l'existence d'une suite $(g_p)_{p\geq 1}$ de fonctions en escalier fortement m-intégrables vérifiant :

$$g_p \xrightarrow[p\to+\infty]{m-p.s.} f.h \ ,$$

et
$$\int_\Omega ||g_p(\omega) - g_q(\omega)|| \ |m|(d\omega) \xrightarrow[p,q\to 0]{} 0 \ .$$

i) Puisque l'espace de Hilbert H est séparable, il existe une famille $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable, dense dans H. Pour chaque entier $p \geq 1$, posons :

$$B_1(p) = B(x_1, 1/p) = \{x \in H : ||x_1 - x|| < 1/p\}$$

$$B_2(p) = B(x_2, 1/p) \setminus B_1(p) = \{x \in H : ||x_2 - x|| < 1/p \ \text{ et } \ x \notin B_1(p)\}$$

. . . .

$$B_n(p) = B(x_n, 1/p) \setminus B_{n-1}(p)$$

. . . .

La fonction $h : \Omega \to H$ étant mesurable, pour chaque entier $p \geq 1$, on définit une partition $\mathcal{A}$-mesurable de Ω en posant :

$$A_n(h,p) = h^{-1}(B_n(p)) \ , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

(des $A_n(h,p)$ pouvant être vides). De plus la fonction en escalier $h_p : \Omega \to H$ définie par :

$$h_p(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \, \chi_{A_n(X,p)}(\omega) \qquad (\text{où } \chi_{A_n(X,p)} : \text{fonction indicatrice de } A_n(X,p)) \quad ,$$

vérifie pour tout ω de Ω :

$$||h(\omega) - h_p(\omega)|| \leq 1/p \quad ,$$

et puisque la fonction $\omega \longmapsto ||h(\omega)||$ est bornée par un nombre $b \geq 0$, la fonction $\omega \longmapsto ||h_p(\omega)||$ est bornée par $1+b$.

Ainsi la suite bornée de fonctions en escalier $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers h uniformément sur Ω.

ii) La fonction $f : \Omega \dashrightarrow \mathbb{C}$ est m-intégrable, donc il existe une suite de fonctions étagées $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f m-presque-sûrement, et au sens de $L^1(m)$.

iii) Pour chaque entier $p \geq 1$, considérons la fonction en escalier mesurable $g_p : (\Omega, \mathcal{A}) \to (H, \mathcal{B}(H))$ définie par : $g_p(\omega) = f_p(\omega).h_p(\omega)$.

Alors la suite $(g_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge m-presque-sûrement vers la fonctions $f.h$.

De plus pour tout entier $p \geq 1$, la fonction f_p étant m-intégrable, la relation

$$||g_p(\omega)|| \leq (1+b) \ . \ |f_p(\omega)| \ ,$$

entraîne que la fonction en escalier g_p est fortement m-intégrable [27 : déf. III.III.1].

Pour tous les entiers p et $q \geq 1$, nous avons :

$$||g_p(\omega) - g_q(\omega)|| \leq (1+b) \ . \ |f_p(\omega) - f_q(\omega)| + |f_p(\omega)| \ . \ ||h_p(\omega) - h_q(\omega)|| \ ,$$

d'où en intégrant par rapport à la mesure $|m|$, variation totale de m,

$$\int_\Omega ||g_p(\omega) - g_q(\omega)|| \ |m| \ (d\omega)$$
$$\leq (1+b) \int_\Omega |f_p(\omega)-f_q(\omega)| \ |m|(d\omega) +$$
$$+ \int_\Omega |f_q(\omega)| \ |m|(d\omega) \ . \ \sup \{||h_p(\omega)-h_q(\omega)|| \ : \ \omega \in \Omega\} \ .$$

Ainsi, puisque $(f_p)_{p\in \mathbb{N}}$ converge au sens $L^1(m)$ et que la suite $(h_p)_{p\in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur Ω, nous obtenons :

$$\int_\Omega ||g_p(\omega) - g_q(\omega)|| \ |m|(d\omega) \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0 \ .$$

Les fonctions g_p, $p \in \mathbb{N}^*$, satisfont les conditions, énoncées au début de cette démonstration, pour que la fonction $f \circ h$ soit fortement m-intégrable. ■

Maintenant nous pouvons établir :

4.2. Théorème.- Soit un groupe abélien localement compact G. m étant sa mesure de Haar, supposons qu'il existe une suite de compacts $(K_n)_{n\in \mathbb{N}}$ tels que :

$$m(K_n) > 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{m((s+K_n)\Delta K_n)}{m(K_n)} = 0 \quad \underline{\text{pour tout}} \ s \ \underline{\text{de}} \ G \ .$$

<u>Soit</u> $X : G \to H$ <u>un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale</u> μ , <u>et à valeurs dans un sous-espace séparable de</u> H.

<u>Alors</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{m(K_n)} \int_{K_n} \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)\, ds = \mu(\{\gamma\}) \quad .$$

<u>*Preuve*</u> : Puisque le processus X est continu borné et à valeurs dans un sous-espace séparable de H , l'intégrale forte est définie pour chaque entier n (lemme 4.1).

Soit $\gamma \in \Gamma$. D'après le théorème de Fubini pour les mesures vectorielles [27 : th. IV.III], nous avons pour tout entier n :

$$\frac{1}{m(K_n)} \int_{K_n} \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)\, ds = \int_\Gamma \frac{1}{m(K_n)} \int_{K_n} \overline{\langle s,\gamma\rangle} \langle s,\alpha\rangle\, ds\, \mu(d\alpha)$$

$$= \int_\Gamma A_n(\gamma^{-1}\alpha)\, \mu(d\alpha) \quad ,$$

avec $A_n(\gamma) = \frac{1}{m(K_n)} \int_{K_n} \langle s,\gamma\rangle\, ds$.

Or, d'après [12 : lemma 1] la suite de fonctions continues $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout γ de Γ :

$$|A_n(\gamma)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} A_n(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = 1 \text{ élément neutre de } \Gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

Ainsi le théorème de convergence dominée pour les mesures vectorielles [13 : th. IV.10.10] s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Gamma A_n(\gamma^{-1}\alpha)\, \mu(d\alpha) = \mu(\{\gamma\}) ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{m(K_n)} \int_{K_n} \overline{\langle s,\gamma\rangle}\, X(s)\, ds = \mu(\{\gamma\}) . \blacksquare$$

4.3. *Remarques*

i) Ainsi nous retrouvons [36] [37] :

pour $G = \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{n=N} e^{-ian} . X_n = \mu(\{a\})$, $a \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

pour $G = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iat} . X(t)\, dt = \mu(\{0\})$, $a \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons obtenir des formules analogues pour $G = \mathbb{Z}^p$ ou $\mathbb{R}^p$.

ii) Sous les hypothèses du théorème 4.2., toutes les mesures stochastiques spectrales d'un processus harmonisable ont les mêmes masses ponctuelles. Ces mesures stochastiques ne seraient-elles pas égales ?

iii) Rozanov [36] [37] a établi une formule d'inversion donnant les valeurs sur les intervalles bornés de $\mathbb{R}$ (respectivement de $[-\pi,\pi]$) de la mesure stochastique spectrale d'un processus harmonisable sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $\mathbb{Z}$). Cette formule admet-elle des versions pour d'autres types de boréliens et pour d'autres cas de groupe G ?

5 - BIMESURES SPECTRALES ET CARACTERISATION DES PROCESSUS HARMONISABLES PAR LEURS NOYAUX

5.1. *Définition*.- Nous appelons bimesure spectrale sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$ toute fonction de deux variables $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to C$ qui vérifie :

i) M est séparément σ-additive par rapport à chacune des variables

ii) M est de type positif .

5.2. *Remarques* :

i) A l'aide du théorème de Vitali-Hahn-Saks [13 : IV.10.6], on montre aisément que la définition précédente d'une bimesure spectrale est équivalente à celle donnée par R. Moché [27 : déf. IV.IV.5].

ii) D'après [27 : th. IV.IV.6] toute bimesure spectrale M sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est de la forme : $M(A,B) = E(\mu(A) \,.\, \overline{\mu(B)})$, A et $B \in \mathcal{A}$, où μ est une mesure stochastique sur un espace $L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$.

iii) De plus, pour chaque événement A de $\mathcal{A}$, les fonctions $M(A,.)$ et $M(.,A) : \mathcal{A} \to C$ sont des mesures complexes. Mais la bimesure spectrale $M : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to C$ n'est pas toujours prolongeable en une mesure complexe définie sur la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ [14] [18] .

Utilisant la théorie de l'intégration par rapport à une bimesure spectrale exposée par R. Moché [27 : chap. IV.IV] (voir aussi [9]), nous avons la caractérisation suivante des processus harmonisables par leurs noyaux [36].

5.3. *Théorème*.- Soit un processus $X : G \to H$. Pour que X soit un processus harmonisable, il faut et il suffit qu'il existe une bimesure spectrale M sur $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ telle que :

$$(X(s), X(t))_H = \iint_{\Gamma\times\Gamma} \langle s,\gamma\rangle \overline{\langle t,\gamma'\rangle} M(d\gamma, d\gamma') \ , \quad s, t \in G \ .$$

La notion de processus harmonisable généralise celle de processus continu stationnaire [27 : § V.V].

5.4. *Proposition*.- Un processus continu et stationnaire est un processus harmonisable dont une bimesure spectrale est concentrée sur la première bissectrice $\{(\gamma,\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$.

Les processus harmonisables de Loève [25] sont dénommés ici fortement harmonisables :

5.5. *Définition*.- Un processus harmonisable $X : G \to H$ dont une bimesure spectrale est prolongeable en une mesure sur la tribu produit $\mathcal{B}(\Gamma \times \Gamma)$, est appelée processus fortement harmonisable.

Ainsi un processus continu et stationnaire est fortement harmonisable.

Comme une bimesure spectrale n'est pas toujours prolongeable en une mesure, nous sommes amenés par la suite à utiliser le résultat suivant dû à A. Pietsch et R. Rogge [43] [44] (voir aussi [26 : lemma 4]) et que nous déduisons aisément de [34 ; prop. 5.6.].

Ce résultat sera essentiel pour l'étude de la loi forte des grands nombres au chapitre III, et pour la construction de la mesure spectrale d'un processus harmonisable à bimesure σ-finie au chapitre VI.

5.6. *Proposition*.- Pour toute bimesure spectrale M sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, il existe une mesure positive finie m sur $(\Omega, \mathcal{A})$ dominant M, c'est-à-dire telle que pour toute fonction mesurable bornée $f : \Omega \to \mathbb{C}$, on a :

$$0 \leq \iint_{\Omega\times\Omega} f(\omega)\ \overline{f(\omega')}\ M(d\omega, d\omega') \leq \int_{\Omega} |f(\omega)|^2\ m(d\omega) .$$

5.7. *Remarque* : Pour de nombreuses applications, il serait très utile de déterminer une construction d'une mesure dominant une bimesure spectrale donnée.

6 - PROCESSUS HARMONISABLES A DENSITE STOCHASTIQUE SPECTRALE

Nous abordons l'étude d'une famille de processus harmonisables très simples, que nous utiliserons au chapitre II pour approximer, en un sens à définir, toute fonction continue définie sur un groupe abélien localement compact et à valeurs dans un espace de Hilbert séparable.

Nous supposons que l'espace de Hilbert H est séparable.

6.1. *Définition*.- Un processus harmonisable $X : G \to H$ est dit à densité stochastique spectrale, lorsqu'il possède une mesure stochastique spectrale μ qui est à densité par rapport à la mesure de Haar $d\gamma$ du dual Γ de G. C'est-à-dire qu'il existe une fonction $g : \Gamma \to H$ fortement $d\gamma$-intégrable telle que :

$$\mu(A) = \int_A g(\gamma)\ d\gamma \quad , \qquad A \in \mathcal{B}(\Gamma) .$$

Dans ce cas, d'après le corollaire 2.8 et le théorème 3.5, μ est l'unique mesure stochastique régulière de X.

6.2. Lemme.- Soient $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, m étant une mesure positive quelconque, et $\mu : \mathcal{A} \to H$ une mesure stochastique à densité $g : \Omega \to H$ par rapport à m.

Alors la bimesure spectrale M sur $(\Omega, \mathcal{A})$ associée à μ par

$$M(A,B) = E(\mu(A) \,.\, \overline{\mu(B)}) \;, \quad A \,,\, B \in \mathcal{A} \;,$$

est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

La difficulté rencontrée dans la preuve du lemme est due au fait que la mesure m n'est pas supposée σ-finie, et donc on ne peut pas définir de mesure produit $m \otimes m$ de façon usuelle [39 : déf. 7.7].

Preuve :

Comme g est une fonction fortement m-intégrable, d'après [27 : th. III.III.8], la fonction positive $\omega \to \|g(\omega)\|$ est m-intégrable.

Posons pour tout ω de Ω :

$$f(\omega) = g(\omega) \,/\, \|g(\omega)\| \quad \text{si} \quad g(\omega) \neq 0 \quad , \quad \text{et} \quad f(\omega) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Ainsi la fonction $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(H))$-mesurable $f : \Omega \to H$ est bornée et vérifie :

$$g(\omega) = \|g(\omega)\| \,.\, f(\omega) \;, \quad \omega \in \Omega \;.$$

En notant $[\|g\| m]$ la mesure positive finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à densité la fonction $\|g\|$ par rapport à la mesure m, la propriété de Pettis pour l'intégration forte [27 : th. III.III.5] entraîne pour tout A de $\mathcal{A}$:

$$(\mu(A),z)_H = \int_A (g(\omega),\ z)_H\ m(d\omega)$$

$$= \int_A (f(\omega),z)_H\ [|g|m](d\omega) \quad ,$$

or, la fonction bornée mesurable f est fortement intégrable par rapport à la mesure positive finie $[|g|m]$ donc on peut écrire :

$$(\mu(A),z)_H = (\int_A f(\omega)\ [|g|m]\ (d\omega)\ ,\ z)_H \ ,$$

d'où, d'après [27 : th. III.III.5],

$$\mu(A) = \int_A f(\omega)\ [|g|m]\ (d\omega)\ .$$

Comme la mesure $[|g|m]$ est positive finie sur $\mathcal{A}$, la mesure produit $[|g|m] \otimes [|g|m]$ est définie sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Donc en appliquant la propriété de Pettis [27 : th. III.III.5] et le théorème de Fubini nous obtenons pour tous les événements A et B de $\mathcal{A}$:

$$M(A,B) = E(\mu(A).\overline{\mu(B)}) = E(\int_A f(\omega)\ [|g|m](d\omega)\ .\ \overline{\int_B f(\omega')\ [|g|m](d\omega')})$$

$$= \iint_{A\times B} E(f(\omega).\overline{f(\omega')})\ [|g|m] \otimes [|g|m]\ (d\omega,d\omega') \quad ,$$

la fonction complexe $h : (\omega,\omega') \longmapsto E(f(\omega).\overline{f(\omega')})$ étant, évidemment, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$-mesurable et bornée, donc $[|g|m] \otimes [|g|m]$-intégrable.

Ainsi la bimesure spectrale de la mesure stochastique μ est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ à densité h par rapport à la mesure positive finie $[|g|m] \otimes [|g|m]$ ∎.

Nous déduisons aisément :

6.3. *Proposition*.- Tout processus harmonisable à densité stochastique spectrale est fortement harmonisable.

La condition suffisante d'intégrabilité forte, suivante, se déduit facilement du lemme 4.1.

6.4. *Corollaire*.- Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, H un espace de Hilbert séparable et m une mesure complexe ou positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour toutes fonctions mesurables $g : \Omega \to H$ fortement m-intégrable, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bornée, la fonction mesurable $f.g : \Omega \to H \quad \omega \to f(\omega).g(\omega)$ est fortement m-intégrable.

6.5. *Corollaire*.- Sous les hypothèses du lemme 6.2, pour toute fonction mesurable bornée $f : \Omega \to \mathbb{C}$, on a :

$$\int_\Omega f(\omega)\ \mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega).g(\omega)\ m(d\omega) \quad .$$

6.6. *Corollaire*.- Tout processus harmonisable $X : G \to H$ à densité stochastique spectrale $g : \Gamma \to H$, s'exprime sous la forme :

$$X(s) = \int_\Gamma \langle s,\gamma\rangle\ .\ g(\gamma)\ d\gamma \quad , \quad s \in G\ .$$

CHAPITRE II

APPROXIMATIONS FORTEMENT HARMONISABLES DE PROCESSUS CONTINUS DEFINIS SUR UN GROUPE ABELIEN LOCALEMENT COMPACT.

I - INTRODUCTION

Considérons un groupe l.c.a. (localement compact et abélien) G, un espace probabilisé $(S,\mathcal{F},P)$, et l'espace de Hilbert $H = L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ que nous supposons séparable.

Sur l'espace $C(G,H)$ des processus continus définis sur G, nous définissons une famille d'opérateurs fortement harmonisants (paragraphe 2), c'est-à-dire qui transforment tout processus de $C(G,H)$ en des processus fortement harmonisables. Nous obtenons, plus précisément, que les opérateurs de cette famille donnent des processus harmonisables à densité stochastique spectrale.

A l'aide de ces opérateurs, nous établissons (paragraphe 3) que les processus harmonisables de $C(G,H)$ à densité stochastique spectrale et à support compact forment un sous-ensemble dense de $C(G,H)$ muni de la topologie de la convergence compacte (théorème 3.1.).

Lorsque le groupe l.c.a. G est σ-compact, $C(G,H)$ est un espace de Fréchet, et on obtient que tout processus de $C(G,H)$ est la limite uniforme sur tout compact, d'une suite de processus harmonisables de $C(G,H)$. Ceci généralise le résultat suivant, établi en collaboration avec R. Moché [11] : pour tout processus continu borné $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S, \mathcal{F}, P)$, il existe une suite de processus harmonisables à densité stochastique spectrale, qui converge vers X uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

De plus lorsque G est σ-compact et métrisable (corollaire 3.4.), il existe une suite $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs fortement harmonisants de $C(G,H)$ qui converge vers l'opérateur identité.

Nous donnons divers raffinements de ces résultats pour des familles équicontinues de processus de $C(G,H)$ (théorème 3.3), et pour la famille $C_{int}(G,H)$ des processus fortement intégrables de $C(G,H)$ (cor. 2.5 et 3.5). De cette étude, nous déduisons (exemple 3.7) dans le cas $G = \mathbb{R}$, que tout processus continu X de $C(\mathbb{R},H)$ est limite d'une suite de processus fortement harmonisables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$X_n(t) = \int_0^{1/n} n(1-ns) \,.\, (X(t+s)+X(t-s))\, ds \,, \quad \text{pour} \quad t \in [-n,n] \,,$$

$$X_n(t) = 0 \,, \quad \text{pour} \quad t \notin \left[-n-\frac{2}{n} \,,\, n+\frac{2}{n}\right] .$$

Cette approximation est différente de celle obtenue dans [11].

1.1. - Dans ce chapitre, nous considérons un groupe l.c.a. G et son dual Γ. Nous munissons ces groupes l.c.a. de mesures de Haar harmonisées, notées respectivement ds et $d\gamma$ [38 : 1.5.1.].

Nous allons approximer les éléments de l'espace $C(G,H)$ des processus continus à valeurs dans l'espace de Hilbert séparable H, muni de la topologie de la convergence compacte : un système fondamental de voisinages ouverts de la fonction identiquement nulle est donnée par : pour tout compact K de G et tout réel $\varepsilon > 0$

$$V(K,\varepsilon) = \{X \in \mathcal{C}(G,H) : \forall t \in K \quad ||X(t)|| \leq \varepsilon\} .$$

1.2. - Pour tout processus $X : G \to H$, l'espace $H(X)$ est le sous-espace de Hilbert de H engendré par la famille $\{X(t) : t \in G\}$.

1.3. - Nous allons utiliser la théorie de l'intégration forte pour les fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert séparable [21] [27 : chap. III], et nous notons $\mathcal{C}_{int}(G,H)$ la classe des processus de $\mathcal{C}(G,H)$ qui sont fortement intégrables par rapport à la mesure de Haar de G.

1.4. - *Classe* $B^1(G)$

Pour construire les opérateurs harmonisants, nous allons utiliser une classe de fonctions auxiliaires qui jouerons le rôle de fonctions de lissage et qui seront les fonctions harmonisantes de la construction.

Aussi, suivant W. Rudin [38 : 1.5.], nous considérons la classe $B^1(G)$ des éléments de $L^1(G)$ qui sont des transformées de Fourier inverses d'éléments de $L^1(\Gamma)$.

D'après le théorème d'Inversion [38 : th. 1.5.1.] un élément de $B^1(G)$ est la transformée de Fourier inverse de sa transformée de Fourier.

Lorsque V est un voisinage ouvert de l'élément neutre 0 de G, il existe un ouvert symétrique U de 0 tel que

$$(\overline{U + U}) \text{ compact et } (\overline{U + U}) \subset V .$$

Alors, m désignant la mesure de Haar de G, la fonction complexe $\vartheta(s) = m((s + U) \cap U)$ appartient à $B^1(G)$, a pour support le compact

$\overline{(U + U)}$ et vérifie :

$$\int_G \psi(s)\,ds > 0 \qquad \text{et} \qquad \hat{\psi}(\gamma) = \left(\int_U \langle s,\gamma\rangle\,ds\right)^2 , \quad \gamma \in \Gamma .$$

2 - OPERATEURS HARMONISANTS

Le théorème 2.1. nous permet de construire des opérateurs harmonisants.

2.1. *Théorème*.- Soit un processus $X : G \to H$ fortement intégrable par rapport à la mesure de Haar du groupe l.c.a. G. Pour tout élément ψ de $B^1(G)$, de transformée de Fourier $\hat{\psi}$, le processus $Y : G \to H(X)$ défini par

$$(2.1) \qquad Y(t) = \int_G \psi(s) \,.\, X(t+s)\,ds , \quad t \in G ,$$

est un processus harmonisable à densité stochastique spectrale $\Sigma : \Gamma \to H(X)$,

$$(2.2) \qquad \Sigma(\gamma) = \hat{\psi}(\gamma) \,.\, \int_G \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)\,ds , \quad \gamma \in \Gamma .$$

Et d'après le théorème I.6.3., le processus Y est fortement harmonisable.

Preuve :

i) Définissons Y et Σ.

La fonction complexe ψ est continue et bornée, donc d'après le lemme I.6.4. et l'invariance par translation de la mesure de Haar d'un groupe l.c.a., la ds-intégrabilité forte de X entraîne celle de la fonction $s \mapsto \psi(s) \,.\, X(t+s)$ pour tout t de G. Donc on peut définir le processus

$Y : G \to H(X)$ par

$$Y(t) = \int_G \psi(s) \,.\, X(t+s)\, ds \ , \quad t \in G \ .$$

Par le lemme I.6.4., nous obtenons aussi que la fonction $s \longmapsto \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)$ est fortement ds-intégrable pour tout γ de Γ. Or la fonction positive $s \longmapsto ||X(s)||$ est ds-intégrable [27 : th. III.III.8] , et pour tout s la fonction complexe $\gamma \longmapsto \langle s,\gamma\rangle$ est continue sur Γ, donc par le théorème de convergence dominée classique, les relations :

$$||\int_G \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)\, ds - \int_G \overline{\langle s,\alpha\rangle} \,.\, X(s)\, ds|| \leqslant \int_G |\overline{\langle s,\gamma\rangle} - \overline{\langle s,\alpha\rangle}| \,.\, ||X(s)||ds$$

et
$$|\langle s,\gamma\rangle - \langle s,\alpha\rangle| \,.\, ||X(s)|| \leqslant 2\, ||X(s)||, \quad \gamma\ ,\quad \alpha \in \Gamma,$$

entraînent que la fonction définie de Γ dans $H(X)$ par

$$\gamma \longmapsto \int_G \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)\, ds \quad ,$$

est une fonction continue. De plus, elle est bornée puisque

$$||\int_G \overline{\langle s,\gamma\rangle} \,.\, X(s)\, ds|| \leqslant \int_G ||X(s)||\, ds < +\infty \ .$$

La transformée de Fourier $\hat{\psi}$ de ψ étant supposée appartenir à $L^1(\Gamma)$, nous pouvons appliquer le lemme I.4.1. et obtenir que la fonction $\sum : \Gamma \longrightarrow H(X)$ définie par la relation (2.2) est fortement $d\gamma$-intégrable, et permet de définir une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}(\Gamma) \longrightarrow H(X)$ par

$$\mu(A) = \int_A \sum(\gamma)\, d\gamma \quad , \qquad A \in \mathcal{B}(\Gamma) \ .$$

De plus pour toute fonction mesurable bornée $f : \Gamma \to \mathbb{C}$, (corollaire I.6.5.)

$$\int_\Gamma f(\gamma)\ \mu(d\gamma) = \int_\Gamma f(\gamma)\ .\ \textstyle\sum(\gamma)\ d\gamma\ .$$

ii) <u>Prouvons que Y est un processus harmonisable</u>.

La fonction ψ étant la transformée de Fourier inverse de $\hat{\psi}$, par la propriété de Pettis pour l'intégration forte [27 : th. III.III.5] nous obtenons pour tout x de H et tout t de G :

$$(Y(t),x)_H = \int_G \left(\int_\Gamma \overline{\langle s,\gamma\rangle}\ \hat{\psi}(\gamma)\ d\gamma\right)\ .\ (X(t+s),x)_H\ ds\ ,$$

et, par le théorème de Fubini appliqué avec les mesures complexes $\hat{\psi}(\gamma)\ d\gamma$ et $(X(t+s),x)_H ds$, à la fonction complexe continue bornée sur $G \times \Gamma$, $(s,\gamma) \mapsto \overline{\langle s,\gamma\rangle}$, l'égalité précédente implique :

$$\begin{aligned}(Y(t),x)_H &= \int_\Gamma \hat{\psi}(\gamma)\ \left(\int_G \overline{\langle s,\gamma\rangle}\ (X(t+s),x)_H\ ds\right)\ d\gamma \\ &= \int_\Gamma \langle t,\gamma\rangle\ \hat{\psi}(\gamma)\ \left(\int_G \overline{\langle t+s,\gamma\rangle}\ (X(t+s),x))_H\ ds\right)\ d\gamma\ .\end{aligned}$$

Puisque la mesure de Haar d'un groupe l.c.a. est invariante par translation, et que la fonction $s \mapsto \overline{\langle s,\gamma\rangle}\ .\ X(s)$ est fortement ds-intégrable, nous déduisons :

$$(Y(t),x)_H = \int_\Gamma \langle t,\gamma\rangle\ (\textstyle\sum(\gamma),\ x)_H\ d\gamma = \left(\displaystyle\int_\Gamma \langle t,\gamma\rangle\ .\ \textstyle\sum(\gamma)\ d\gamma\ ,\ x\right)_H$$

Ainsi pour tout t de G , nous avons :

$$\begin{aligned}Y(t) &= \int_\Gamma \langle t,\gamma\rangle\ .\ \textstyle\sum(\gamma)\ d\gamma \\ &= \int_\Gamma \langle t,\gamma\rangle\ \mu(d\gamma)\ .\ \blacksquare\end{aligned}$$

Nous pouvons, maintenant, définir des opérateurs harmonisants par le théorème suivant :

2.2. *Théorème*.- Soient une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ mesurable à support compact K, et une fonction ψ élément de $\mathcal{B}^1(G)$ de transformée de Fourier $\hat{\psi}$.

Alors la relation

(2.3) $$\mathcal{H}X(t) = \int_G \psi(s)\ f(t+s)\ .\ X(t+s)\ ds\ , \quad t \in G\ ,$$

définit un opérateur linéaire continu de $\mathcal{C}(G,H)$ dont l'image est contenue dans la classe des processus harmonisables à densité stochastique spectrale.

La densité stochastique spectrale $\sum X : \Gamma \to H(X)$ du processus harmonisable $\mathcal{H}X$ est donnée par :

(2.4) $$\sum X(\gamma) = \hat{\psi}(\gamma)\ .\ \int_G \overline{\langle s,\gamma \rangle}\ f(s)\ .\ X(s)\ ds\ .$$

Preuve : Soit X de $\mathcal{C}(G,H)$.

Le processus continu X est borné sur le support compact K de la fonction ds-intégrable f, donc d'après le lemme I.4.1., la fonction $f.X$, est fortement ds-intégrable. Ainsi le théorème 2.1. s'applique au processus $f.X$: le processus $\mathcal{H}X$ est défini, harmonisable à densité stochastique spectrale. Donc $\mathcal{H}X$ appartient à $\mathcal{C}(G,H)$.

La linéarité de $\mathcal{H}$ étant évidente, montrons sa continuité en tant qu'opérateur de $\mathcal{C}(G,H)$.

Pour tout t de G, on a :

$$||\mathcal{H}X(t)|| \leq \int_G |\psi(s)| \; |f(t+s)| \quad ||X(t+s)|| \; ds$$

$$\leq \sup \{|\psi(s)| \; : \; s \in G\} \; . \int_G |f(t+s)| \; ||X(t+s)|| \; ds \; .$$

D'après les hypothèses, la fonction $|\psi|$ est bornée par un réel positif c, et d'après l'invariance par translation de la mesure de Haar ds, on déduit :

$$||\mathcal{H}X(t)|| \leq c \int_G |f(s)| \; ||X(s)|| ds \leq c \int_K |f(s)| \; ds \; . \; \sup\{||X(s)|| \; : \; s \in K\}$$

$$\leq c_1 \sup \{||X(s)|| \; : \; s \in K\} \quad ,$$

où, f étant ds-intégrable, c_1 est une constante ne dépendant que de ψ et de f, c'est-à-dire de $\mathcal{H}$. Ainsi $\mathcal{H}$ est un opérateur continu de $C(G,H)$. ∎

2.3. *Remarques* :

i) L'opérateur $\mathcal{H}$ défini au théorème (2.2) transforme les éléments de $C(G,H)$ en processus fortement harmonisables (théorème I.6.3), il est donc un opérateur fortement harmonisant de $C(G,H)$.

ii) De plus la densité stochastique spectrale $\sum X$ de la transformée $\mathcal{H}X$ d'un processus harmonisable X de mesure stochastique spectrale μ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum X(\gamma) = \hat{\psi}(\gamma) \; . \int_\Gamma \hat{f}(\gamma^{-1} \alpha) \; \mu(d\alpha) \quad , \qquad \gamma \in \Gamma \quad .$$

iii) En général l'opérateur $\mathcal{H}$ n'est pas invariant par rapport au temps : il ne transforme pas toujours un processus stationnaire de $C(G,H)$ en un processus stationnaire. En effet, si X de $C(G,H)$ est stationnaire (c'est-à-dire : $(X(t+h),X(t))_H = (X(h),X(0))_H$) , nous avons pour tout t et tout h de G :

$$(\mathcal{H}X(t+h),\ \mathcal{H}X(t))_H = \iint_{G\times G} \psi(s)\overline{\psi(s')}\ f(t+h+s)\ \overline{f(t+s')}\ (X(t+h+s),X(t+s'))_H ds ds'$$

$$= \iint_{G\times G} \psi(s)\overline{\psi(s')}\ f(t+h+s)\ \overline{f(t+s')}\ (X(h+s),X(s'))_H ds ds' \ ,$$

et en général cette expression dépend de t .

iv) Mais, on peut obtenir une certaine stationnarité. Soient K un voisinage compact de 0 dans G , K_1 un compact, ψ une fonction de $B^1(G)$ de support K , et f la fonction indicatrice de $K + K_1$.

L'opérateur harmonisant $\mathcal{H}$ vérifie, pour tout X de $C(G,H)$:

$$\mathcal{H}X(t) = \int_G \psi(s)\ .\ X(t+s)\ ds\ , \quad \text{si} \quad t \in K_1\ ,$$

$$\mathcal{H}X(t) = 0 \qquad\qquad , \quad \text{si} \quad t \notin K_1 + K - K\ ,$$

et lorsque X est stationnaire, pour 0 , t , h et $t+h \in K_1$,

$$(\mathcal{H}X(t+h),\ \mathcal{H}X(t))_H = (\mathcal{H}X(h),\ \mathcal{H}X(0))_H \quad .$$

Par contre, lorsque nous considérons la classe $C_{int}(G,H)$ des processus de $C(G,H)$ qui sont fortement ds-intégrables nous obtenons aisément :

2.4. *Corollaire*.- Soit ψ un élément de $B^1(G)$. Alors la relation

(2.5) $$\mathcal{H}^1X(t) = \int_G \psi(s)\ .\ X(t+s)\ ds\ , \quad t \in G\ ,$$

définit une transformation linéaire continue et invariante par rapport au temps de $C_{int}(G,H)$ à valeurs dans $C(G,H)$, les images étant des processus harmonisables à densité stochastique spectrale.

2.6. *Remarque* : Lorsque G est un groupe l.c.a. et σ-compact la transformation définie sur $C_{int}(G,H)$ par la relation (2.5) est à valeurs dans $C_{int}(G,H)$.

3 - APPROXIMATIONS FORTEMENT HARMONISABLES

a) Densité

3.1. *Théorème*.- <u>La classe des processus harmonisables de</u> $C(G,H)$ <u>à densité stochastique spectrale et à support compact est dense dans l'espace</u> $C(G,H)$.

Preuve : Soient X de $C(G,H)$ et K un compact de G.

Sur le compact K, la fonction $X : G \to H$ est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de l'élément neutre 0 de G tel que :

$$\forall t \in K \quad , \quad \forall s \in V_\varepsilon \quad , \quad ||X(t+s) - X(t)|| \leq \varepsilon \quad .$$

De plus ce voisinage V_ε de 0 peut être choisi ouvert symétrique et de fermeture compact, ce que nous supposerons par la suite.

Comme G est un groupe l.c.a., il existe une fonction positive ψ_ε de $B^1(G)$ à support compact contenu dans V_ε et telle que $\int_G \psi_\varepsilon(s)\, ds = 1$ (cf. 1.4.).

De plus, V_ε étant un ouvert symétrique de fermeture compact, la fonction f_ε indicatrice du compact $K + \bar{V}_\varepsilon$, satisfait :

$$t \notin K + \bar{V}_\varepsilon + \bar{V}_\varepsilon \quad \text{et} \quad s \in V_\varepsilon \implies t+s \notin K + \bar{V}_\varepsilon \implies f_\varepsilon(t+s) = 0 \ .$$

D'après le théorème 2.2. le processus $H_\varepsilon X : G \to H$ défini par

$$H_\varepsilon X(t) = \int_G \psi_\varepsilon(s)\ f_\varepsilon(t+s)\ .\ X(t+s)\ ds \quad , \qquad t \in G \quad ,$$

est harmonisable à densité stochastique spectrale. Par le choix des fonctions ψ_ε et f_ε, il vérifie :

$$H_\varepsilon X(t) = 0 \qquad , \quad t \notin K + \bar{V}_\varepsilon + \bar{V}_\varepsilon \quad ,$$

$$H_\varepsilon X(t) = \int_{V_\varepsilon} \psi_\varepsilon(s)\ .\ X(t+s)\ ds \ , \quad t \in K \ .$$

Par conséquent le support de $H_\varepsilon X$ est contenu dans le compact $K + \bar{V}_\varepsilon + \bar{V}_\varepsilon$, et pour tout t de K nous avons :

$$H_\varepsilon X(t) - X(t) = \int_{V_\varepsilon} \psi_\varepsilon(s)\ .\ (X(t+s)-X(t))\ ds \ ,$$

d'où :

$$||H_\varepsilon X(t)-X(t)|| \leq \int_{V_\varepsilon} \psi_\varepsilon(s)\ ds\ .\ \sup\{||X(t+s)-X(t)|| : s \in V_\varepsilon\} \ ,$$

et d'après le choix de l'ensemble V_ε nous pouvons conclure par :

$$\sup\{||H_\varepsilon X(t) - X(t)|| : t \in K\} \leq \varepsilon \quad . \blacksquare$$

b) Suites approximantes

Nous venons de montrer que, au sens de la topologie de la convergence compacte dans $C(G,H)$, on peut approximer tout processus X de $C(G,H)$ par une famille de processus harmonisables. Ne pourrait-on pas trouver une suite de processus harmonisables qui convergeraient partout vers X ?

Le théorème 3.1., nous donne une réponse affirmative lorsque le groupe l.c.a. G est σ-compact. En effet dans ce cas l'espace $C(G,H)$ est un espace de Fréchet, donc un espace métrisable, et tout élément de $C(G,H)$ admet un système fondamental et dénombrable de voisinages. Par conséquent le théorème précédent entraîne :

3.2. *Corollaire*.- Lorsque G est un groupe l.c.a. et σ-compact, pour tout processus X de $C(G,H)$, il existe une suite de processus harmonisables à densité stochastique spectrale et à support compact, qui converge vers X uniformément sur tout compact de G.

Nous améliorons ce résultat en prouvant :

3.3. *Théorème*.- Soient G un groupe l.c.a. et σ-compact, et $\mathcal{E}$ une partie de $C(G,H)$ uniformément équicontinue sur tout compact de G.

Il existe une suite d'opérateurs fortement harmonisants $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C(G,H)$, telle que pour tout compact K de G, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n X(t) = X(t) \ , \quad \text{uniformément par rapport à } X \text{ dans } \mathcal{E},$$

et à t dans K.

Preuve : D'après l'uniforme équicontinuité sur tout compact de G de la famille $\mathcal{E}$, pour tout compact K et tout réel positif $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert relativement compact $W(\mathcal{E},K,\varepsilon)$ de 0 dans G tel que :

$$\forall X \in \mathcal{E} \quad , \forall t \in K \quad , \forall s \in W(\mathcal{E},K,\varepsilon) \quad , \quad \|X(t+s)-X(t)\| \leq \varepsilon \ .$$

Comme G est σ-compact, il existe une suite croissante de compacts $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant l'élément neutre 0 et de réunion G.

Avec ces notations, posons :

$$V_1 = W(E,F_1,1),\ V_2 = W(E,F_2,1/2) \cap V_1 ,\dots,\ V_n = W(E,F_n,1/n) \cap V_{n-1} ,\dots,$$

$$K_1 = F_1 \ ,\ K_2 = K_1 + \bar{V}_1 + F_2 ,\dots,\ K_n = K_{n-1} + \bar{V}_{n-1} + F_n ,\dots .$$

Ainsi les voisinages ouverts V_n de 0 et les compacts K_n vérifient :

(2.6) $$V_{n+1} \subset \bar{V}_n \subset V_n \qquad \text{et} \qquad \bar{V}_n \text{ compact} ,$$

(2.7) $$K_n \subset K_n + V_n \subset K_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G .$$

De plus si K est un compact quelconque de G, la suite croissante d'ouverts $(K_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le recouvrant, il est contenu dans l'un de ces ouverts, et donc dans l'un des compacts K_n.

En considérant, pour chaque n, une fonction positive ψ_n de $B^1(G)$ à support compact contenu dans l'ouvert V_n, telle que $\int_G \psi_n(s)\, ds = 1$ (cf. 1.4.), et la fonction f_n indicatrice de $K_n + \bar{V}_n$, on obtient aisément (comme au cours de la preuve du théorème 3.1.) que les opérateurs fortement harmonisants H_n, $n \in \mathbb{N}$, définis sur $C(G,H)$ par :

$$H_n X(t) = \int_G \psi_n(s)\ f_n(t+s)\ .\ X(t+s)\ ds \quad , \quad t \in G$$

satisfont pour tout X de $C(G,H)$, les relations :

$$H_n X(t) = \int_{V_n} \psi_n(s)\ .\ X(t+s)\ ds \ , \qquad t \in K_n \ ,$$

et $$\|H_n X(t) - X(t)\| \leq \sup\{\|X(t+s) - X(t)\| : s \in V_n\} \ , \quad t \in K_n .$$

Ainsi, puisque chaque compact K est contenu dans un compact K_{n_o}, pour tout X de la famille $\mathcal{E}$, on a :

$$\sup\{||\mathcal{H}_n X(t) - X(t)|| : t \in K\} \leq 1/n \quad , \quad n \geq n_o \ .$$

D'où le théorème énoncé. ■

Les opérateurs harmonisants $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, utilisés ci-dessus dépendent de la famille $\mathcal{E}$ de processus que l'on veut approximer. De plus, dans le cas général, on n'a pas pu déterminer le comportement de la suite $(\mathcal{H}_n X)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque X n'appartient pas à la famille $\mathcal{E}$. Par contre :

3.4. *Corollaire*.- <u>Lorsque</u> G <u>est un groupe l.c.a.,</u> σ-<u>compact et métrisable il existe une suite d'opérateurs fortement harmonisants</u> $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>de</u> $\mathcal{C}(G,H)$, <u>qui converge vers l'opérateur identité de</u> $\mathcal{C}(G,H)$ <u>de la manière suivante</u> :

<u>pour toute partie</u> $\mathcal{E}$ <u>de</u> $\mathcal{C}(G,H)$ <u>uniformément équicontinue sur tout compact de</u> G , <u>et pour tout compact</u> K <u>de</u> G , <u>on a</u> :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n X(t) = X(t) \ ,$$ <u>uniformément par rapport à</u> X <u>dans</u> $\mathcal{E}$ <u>et à</u> t <u>dans</u> K .

Preuve : D'après les hypothèses, le groupe G possède un système fondamental dénombrable de voisinages ouverts $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'élément neutre 0 vérifiant la condition (2.6), et il existe une suite croissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts contenant 0 , de réunion G , et vérifiant la condition (2.7).

Ainsi, pour chaque entier n , l'opérateur fortement harmonisant $\mathcal{H}_n$, défini sur $\mathcal{C}(G,H)$ à partir du voisinage ouvert V_n de 0 et du et du compact K_n , comme au cours de la preuve du théorème 3.3., satisfait :

$$||\mathcal{H}_n X(t) - X(t)|| \leq \sup\{||X(t+s) - X(t)|| : s \in V_n\} \ , \ t \in K_n \ , \quad X \in \mathcal{C}(G,H) \ .$$

Soient une famille $\mathcal{E}$ de processus de $\mathcal{C}(G,H)$ uniformément équicontinue sur tout compact de G , un compact K et un réel $\varepsilon > 0$. Alors il existe un entier n_o tel que $n > n_o \Longrightarrow K \subset K_{n_o} \subset K_n$. Et puisque la famille décroissante $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, forme un système fondamental de voisinages ouverts de 0 , il existe un entier $n(\mathcal{E},K,\varepsilon) > 0$ tel que pour tout X de $\mathcal{E}$ et tout t de K ,

$$n > n(\mathcal{E},K,\varepsilon) \quad \text{et} \quad s \in V_n \Longrightarrow ||X(t+s) - X(t)|| < \varepsilon \ ,$$

donc , $n > \max\{n_o \ , \ n(\mathcal{E},K,\varepsilon)\} \Longrightarrow ||\mathcal{H}_n X(t) - X(t)|| < \varepsilon$. ■

Nous affinons les résultats précédents en établissant :

3.5. *Corollaire*.- Lorsque G est un groupe l.c.a. métrisable, il existe une suite $(\mathcal{H}^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de transformations fortement harmonisantes et invariantes par rapport au temps, de $\mathcal{C}_{int}(G,H)$ dans $\mathcal{C}(G,H)$, telle que :

i) pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}_{int}(G,H)$ uniformément équicontinue sur tout compact de G , et pour tout compact K de G , on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}^1_n X(t) = X(t) \ , \ \text{uniformément par rapport à } X \text{ dans } \mathcal{E},$$

et à t dans K ;

ii) pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}_{int}(G,H)$ uniformément équicontinue sur G , on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}^1_n X(t) = X(t) \ , \ \text{uniformément par rapport à } X \text{ dans } \mathcal{E}$$

et à t dans G.

Preuve : Puisque le groupe topologique G est localement compact, abélien et métrisable, il existe un sytème fondamental dénombrable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages ouverts de l'élément neutre 0 de G vérifiant la condition (2.6).

En considérant, pour chaque entier n , une fonction positive ψ_n de $B^1(G)$ à support contenu dans l'ouvert V_n , soit H_n^1 la transformation harmonisante et invariante par rapport au temps définie de $C_{int}(G,H)$ à valeurs dans $C(G,H)$, comme au corollaire 2.5. par la relation :

$$H_n^1 X(t) = \int_G \psi_n(s) \,.\, X(t+s)\, ds \;, \qquad t \in G \;.$$

Alors, on obtient :

$$\|H_n^1 X(t) - X(t)\| \leq \sup \{\|X(t+s) - X(t)\| : s \in V_n\} \;, \quad t \in G \;.$$

On déduit aisément de cette relation le corollaire. ∎

3.6. *Exemple* $G = \mathbb{Z}$. Considérons $G = (\mathbb{Z},+)$ muni de la topologie discrète, alors le corollaire 3.4 s'applique : pour toute famille $\{X(t) : t \in \mathbb{Z}\}$ de H , il existe une suite de familles harmonisables $(X_n(t) : t \in \mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $X_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(t)$ uniformément sur tout ensemble fini de $\mathbb{Z}$.

En choisissant $K_n = \{-n ,\dots, n\}$ et $V_n = \{0\}$, $\psi_n(t) = 1$ pour $t = 0$ et $\psi_n(t) = 0$ sinon. Alors, on peut poser :

$$\begin{aligned} H_n X(t) &= X(t) \qquad && \text{pour} \quad t \in \{-n ,\dots, n\} \\ &= 0 && \text{sinon} \end{aligned}$$

et

$$\Sigma_n X(\gamma) = \sum_{t=-n}^{t=n} e^{is\gamma}\, X(s) \quad \text{pour tout } \gamma \text{ de } \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \;.$$

3.7. *Exemple* $G = \mathbb{R}$. Dans ce cas le corollaire 3.4 s'applique aussi : tout processus de $C(\mathbb{R},H)$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$, d'une suite de processus fortement harmonisables.

Soient $K_n = [-n,n]$, $V_n =]-1/n,1/n[$ et la fonction ψ_n définie par :

$$\begin{aligned} \psi_n(s) &= n(1+ns) \quad && \text{pour} \quad s \in [-1/n,0] , \\ &= n(1-ns) && \text{pour} \quad s \in [0,1/n] , \\ &= 0 && \text{sinon} . \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de ψ_n est la fonction $\hat{\psi}_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{\psi}_n(\gamma) = 1 \quad \text{pour} \quad \gamma = 0 \ , \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_n(\gamma) \ (\frac{\sin \gamma/2n}{\gamma/2n})^2 \quad \text{sinon} .$$

Les théorèmes 2.2. et 3.4. s'appliquent et l'opérateur harmonisant H_n s'exprime sous la forme :

$$H_nX(t) = \int_{-1/n}^{1/n} \psi_n(s) \ f_n(t+s) \ . \ X(t+s) \ ds = \int_{-n-1/n}^{n+1/n} \psi_n(s-t) \ . \ X(s) \ ds ,$$

pour tout t de $\mathbb{R}$, la fonction f_n étant la fonction indicatrice de $K_n + \bar{V}_n = [-n-1/n \ , \ n+1/n]$.

Ainsi nous obtenons :

$$H_nX(t) = \int_0^{1/n} n(1-ns).(X(t-s) + X(t+s)) \ ds , \quad \text{pour} \quad t \in [-n \ , \ n] ,$$

$$H_nX(t) = \int_{-t-n-1/n}^{1/n} \psi_n(s).X(t+s) \ ds , \quad \text{pour} \quad t \in [-n-2/n \ , \ -n] ,$$

$$H_nX(t) = \int_{-1/n}^{-t+n+1/n} \psi_n(s).X(t+s) \ ds , \quad \text{pour} \quad t \in [n \ , \ n + 2/n] ,$$

et $\qquad H_n X(t) = 0 \qquad$ pour $\qquad t \notin \left[-n-\frac{2}{n}\ ,\ n+\frac{2}{n}\right]$.

La densité stochastique spectrale de $H_n(X)$ a pour expression :

$$\Sigma_n X(\gamma) = \left(\frac{\sin \gamma/2n}{\gamma/2n}\right)^2 \int_{-n-1/n}^{n+1/n} e^{-is\gamma} \ . \ X(s)\ ds \ , \quad \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

De plus dans $C_{int}(\mathbb{R},H)$, la transformation harmonisante et invariante par rapport au temps H_n^1 peut s'écrire sous la forme :

$$H_n^1 X(t) = \int_0^{1/n} n(1-ns).(X(t-s) + X(t+s))\ ds \quad \text{pour tout } t \text{ de } \mathbb{R} \ ,$$

et la densité stochastique spectrale :

$$\Sigma_n^1 X(\gamma) = \left(\frac{\sin \gamma/2n}{\gamma/2n}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-is\gamma} \ . \ X(s)\ ds \ , \quad \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

3.8. *Remarque* : Dans l'exemple précédent nous constatons que lorsque le processus X appartient à $C_{int}(\mathbb{R},H)$, les densités $\Sigma_n(X)$ et $\Sigma_n^1 X$ convergent quand n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n X(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-is\gamma} \ . \ X(s)\ ds \ , \qquad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n^1 X(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-is\gamma} \ . \ X(s)\ ds \ , \qquad \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

Dans le cas général nous n'avons pas d'information sur le comportement des densités.

CHAPITRE III

INTRODUCTION A LA LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES SUR $\mathbb{R}$

I - INTRODUCTION

L'étude de la loi forte des grands nombres (L.F.G.N.) pour les processus faiblement stationnaires et continus, et pour les processus harmonisables à mesure spectrale, fut abordée par différents auteurs.

M. LOEVE [25], A. BLANC-LAPIERRE et R. BRARD [4], I.N. VERBITSKAYA [42] et V.F. GAPOSHKIN [16] ont donné des conditions suffisantes portant sur la covariance dans le cas des processus faiblement stationnaires et continus.

V.F. GAPOSHKIN, dans le cas précédent, et A. ARIMOTO [2], pour les processus harmonisables à mesure spectrale (fortement harmonisables), ont établi des conditions suffisantes portant sur la mesure spectrale (ou sa variation totale).

Dans ce chapitre - à l'aide des techniques de calcul employées par J. ROUSSEAU [35] et de la domination des bimesures spectrales sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par des mesures positives finies, obtenue par A. PIETSCH et R. ROGGE [43] [44] (voir aussi A.G. MIAMEE et H. SALEHI [26]) - nous montrons que la L.F.G.N. est vérifiée par un processus harmonisable X, si et seulement s'il existe un réel $a > 1$ tel que la mesure stochastique spectrale μ de X vérifie la condition suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(]-a^{-n}, a^{-n}[) = 0 \quad .$$

V.F. GAPOSHKIN est parvenu à ce résultat pour les processus stationnaires et continus [16, th. 2], et pour les processus harmonisables à mesure spectrale [17, § 3.6]. Nous apportons donc la généralisation de ce dernier résultat aux processus harmonisables quelconques (faiblement harmonisables).

Notons qu'à partir de maintenant, la nature de notre étude change radicalement : les deux premiers chapitres traitaient de certaines propriétés du second ordre des processus par l'utilisation de techniques strictement hilbertiennes. Maintenant, l'attention va se porter sur les trajectoires de ces processus.

Notons aussi que, pour nous, un processus $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ du second ordre est faiblement stationnaire si :

$$\forall t , s, h \in \mathbb{R} , \qquad E(X_t \cdot \bar{X}_s) = E(X_{t+h} \cdot \bar{X}_{s+h}) ,$$

tandis qu'ordinairement, est imposée la constance de la moyenne : $t \rightsquigarrow E(X_t)$, condition qui est tout à fait superflue dans cette étude.

2 - POSITION DU PROBLEME

2.1. - *Définition*.- Etant donnée une fonction aléatoire (f.a.) réelle ou complexe $X = \{X_t , t \in \mathbb{R}\}$ définie sur un espace probabilisé (Ω,A,P), nous dirons que X vérifie la L.F.G.N. lorsqu'il existe un ensemble Ω_o, A-mesurable et de probabilité 1, tel que :

$\forall \omega \in \Omega_o$,

- l'application $t \rightsquigarrow X_t(\omega)$ soit $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ - mesurable et localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$,

- et $$\frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau(\omega)\, d\tau \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 .$$

2.2. - *Cas d'un processus du second ordre continu.*

Considérons $X = \{X_t , t \in \mathbb{R}\}$ un processus du second ordre continu défini sur un espace probabilisé (Ω,A,P).

Puisque l'application $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$, $t \rightsquigarrow X_t$, est continue, le sous-espace de Hilbert $L^2(X)$ de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ est séparable et l'application $t \rightsquigarrow ||X_t||$ est continue, donc $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - mesurable ; d'après le théorème de caractérisation de la Bochner - intégrabilité [27 , th. 8. p. III.11], nous en déduisons que le processus X est Bochner - intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

En passant par l'intermédiaire de l'intégrale de Pettis [27 , th. 5 p. III.10], il est clair que les intégrales de X sur les quatre intervalles d'extrémités a et b $(a < b)$ sont égales et nous notons $\int_a^b X_t \, dt$ leur valeur commune dans $L^2(X)$.

Lorsque la f.a. $X : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(\omega,t) \rightsquigarrow X_t(\omega)$ est, de plus, $(A \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} , \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ - mesurable, il existe un ensemble Ω_o , A-mesurable de probabilité 1, tel que pour tout ω de Ω_o , la fonction $X_.(\omega) : (\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{K} , \mathcal{B}_{\mathbb{K}})$ soit localement intégrable ; de plus, pour tous a et b de $\mathbb{R}$, $a \leq b$, la variable aléatoire P - presque partout définie par $\omega \rightsquigarrow \int_a^b X_t(\omega) \, dt$, appartient à la classe d'équivalence de $\int_a^b X_t \, dt$ dans $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ [29 , prop.3.9].

Dans ce cas, pour $t > 0$, nous noterons la moyenne du processus X sur $[- t, t]$ par :

$$\sigma_t(X) = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau \, d\tau .$$

Il est entendu que nous choisirons toujours pour représentant de cet élément de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$, la v.a. P - presque partout définie par :

$$\omega \rightsquigarrow \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} X_\tau(\omega)\, d\tau \quad .$$

La moyenne $\sigma(X) = \{\sigma_t(X) : t > 0\}$ est, alors, un processus du second ordre continu et P - p.s. à trajectoires continues [27 , prop. 5. p. III.5], et le processus X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.} \quad \sigma_t(X) = 0 \quad .$$

2.3. - *Convention*.- Dans la suite, le processus du second ordre et continu $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ sera toujours supposé mesurable.

Ceci n'est qu'une commodité, puisque tout processus réel et continu - étant continu en probabilité - admet une modification mesurable.

3 - PREMIERE REDUCTION DU PROBLEME

Comme l'ont fait les différents auteurs cités à ce sujet, nous ramenons l'étude du comportement asymptotique P - p.s. du processus $\{\sigma_t(X) : t > 0\}$, à celle d'une suite. Nous suivons ici plus particulièrement la démarche de J. ROUSSEAU .

3.1. - *Lemme*.- Pour toute suite $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(|\Psi_n|^2) < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \quad \Psi_n = 0$$

Preuve : Le théorème de Beppo-Levy nous donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(|\Psi_n|^2) < +\infty \implies E(\sum_{n=0}^{+\infty} |\Psi_n|^2) < +\infty \quad ,$$

par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\Psi_n|^2 < +\infty \qquad P - p.s.$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} P - p.s.\ \Psi_n = 0 \quad .$$

Le résultat suivant est de A. BLANC-LAPIERRE et A. TORTRAT [7]. Il a été réétabli par J. ROUSSEAU dans le cas $t_n = n$.

3.2. - *Proposition*.- Soit $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus du second ordre, continu et tel que $\sup\{E(|X_t|^2) : t \in \mathbb{R}\} = c^2 < +\infty$.

Pour toute suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1\right)^2 < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} P - p.s. \sup_{t_n<t\leq t_{n+1}} |\sigma_t(X) - \sigma_{t_n}(X)| = 0 \ .$$

Preuve : D'après le lemme 3.1. il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E\left(\sup_{t_n<t\leq t_{n+1}} |\sigma_t(X) - \sigma_{t_n}(X)|^2\right) < +\infty \ .$$

1) *Etude trajectoire par trajectoire*. Pour P-presque tout ω et pour $t_n < t \leq t_{n+1}$, nous avons :

$$|\sigma_t(X)(\omega) - \sigma_{t_n}(X)(\omega)|^2$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2t_n}\right) \int_{-t_n}^{t_n} X_\tau(\omega)\, d\tau + \frac{1}{2t}\int_{-t}^{-t_n} X_\tau(\omega)\, d\tau + \frac{1}{2t}\int_{t_n}^{t} X_\tau(\omega)\, d\tau\right|^2 \ ;$$

ainsi en développant et en remarquant que :

$$0 < \frac{1}{2t} < \frac{1}{2t_n} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{2t_n} - \frac{1}{2t} \leq \frac{a_n}{2t_n^2} \quad \text{où} \quad a_n = t_{n+1} - t_n \; ,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&|\sigma_t(X)(\omega) - \sigma_{t_n}(X)(\omega)|^2 \\
&\leq \frac{a_n^2}{4t_n^4} \int_{-t_n}^{t_n} \int_{-t_n}^{t_n} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta + \frac{1}{4t_n^2} \int_{-t}^{-t_n} \int_{-t}^{-t_n} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta \\
&+ \frac{1}{4t_n^2} \int_{t_n}^{t} \int_{t_n}^{t} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta + \frac{a_n}{2t_n^3} \int_{-t_n}^{t_n} \int_{-t}^{-t_n} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta \\
&+ \frac{a_n}{2t_n^3} \int_{-t_n}^{t_n} \int_{t_n}^{t} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta + \frac{1}{2t_n^2} \int_{-t}^{-t_n} \int_{t_n}^{t} |X_\tau(\omega).X_\delta(\omega)| \, d\tau \, d\delta \; .
\end{aligned}$$

2) Donc, le théorème de Fubini et l'inégalité de Schwarz nous donnent :

$$\begin{aligned}
&E\Big(\sup_{t_n < t \leq t_{n+1}} |\sigma_t(X) - \sigma_{t_n}(X)|^2 \Big) \\
&\leq \Big[\frac{a_n^2}{4t_n^4} \cdot (2t_n)^2 + \frac{1}{4t_n^2} \cdot a_n^2 + \frac{1}{4t_n^2} \cdot a_n^2 + \frac{a_n}{2t_n^3} \cdot (2t_n a_n) + \frac{a_n}{2t_n^3} \cdot (2t_n a_n) \\
&\qquad + \frac{1}{2t_n^2} \cdot a_n^2 \Big] \cdot c^2 \; ,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\leq 4\, c^2 \, . \, \Big(\frac{a_n}{t_n}\Big)^2 = 4\, c^2 \, . \, \Big(\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1\Big)^2 \quad . \; \blacksquare$$

3.3. - *Remarque* : Sous les hypothèses de la proposition 3.2, l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.} \quad \sigma_t(X) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \ \sigma_{t_n}(X) = 0 \quad ;$$

ce qui ramène l'étude de la L.F.G.N. à un problème séquentiel.

En particulier :

3.4. - *Corollaire*.- Tout processus harmonisable mesurable X vérifie :

- $\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \sup_{n<t\leq n+1} |\sigma_t(X) - \sigma_n(X)| = 0$,

- $\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.} \ \sigma_t(X) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \ \sigma_n(X) = 0$.

Preuve : En effet, la mesure stochastique spectrale μ de X vérifie [27 , prop. 5. p. V.3] :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \qquad E(|X_t|^2) \leq (||\mu||(\mathbb{R}))^2 < +\infty \ .$$

Ainsi, en utilisant la proposition précédente avec $t_n = n$, nous pouvons conclure. ∎

4 - REPRESENTATION DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE

4.1. - Convention.- Pour tout u de $\mathbb{R}$, $\frac{\sin(u)}{u}$ désignera la valeur en u de la fonction entière, bornée $\vartheta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$u \rightsquigarrow \begin{cases} 1 , & \text{si} \quad u = 0 \\ \dfrac{\sin(u)}{u} , & \text{sinon} \ . \end{cases}$$

ϑ est intégrable par rapport à toute mesure hilbertienne sur $(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ [27 , th. 3. p. IV. 25].

4.2. - *Remarque* : Considérons un processus harmonisable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ défini sur un espace probabilisé (Ω, A, P) : sa moyenne sur tout intervalle $[-t, t]$, $t > 0$, est alors égale à :

$$\sigma_t(X) = \frac{1}{2t} \cdot \int_{-t}^{t} X_\tau \, d\tau ,$$

où l'intégrale envisagée est l'intégrale de Bochner.

4.3. - *Théorème*.- Lorsque X est un processus harmonisable mesurable, de mesure stochastique spectrale μ, la moyenne $\sigma(X)$ de X s'écrit :

$$\forall t > 0 , \qquad \sigma_t(X) = \int \frac{\sin(tu)}{tu} \mu(du) .$$

De plus la bimesure spectrale M de X vérifie :

$$\forall t,\ s > 0, \quad E(|\sigma_t(X) - \sigma_s(X)|^2) = \iint \left(\frac{\sin(tu)}{tu} - \frac{\sin(su)}{su}\right) \cdot \left(\frac{\sin(tv)}{tv} - \frac{\sin(sv)}{sv}\right) M(du, dv) .$$

Preuve : Le processus harmonisable X s'exprime sous la forme :

$$\forall \tau \in \mathbb{R} , \qquad X_\tau = \int e^{i\tau u} \mu(du)$$

ainsi

$$\forall t > 0 , \qquad \sigma_t(X) = \frac{1}{2t} \cdot \int_{-t}^{t} \left(\int e^{i\tau u} \mu(du)\right) d\tau .$$

L'application : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(u, \tau) \rightsquigarrow e^{i\tau u}$, est $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ - mesurable et bornée, elle vérifie, d'après le théorème de Fubini mixte [27 , th. p. IV.32] :

$$\forall t > 0 , \qquad \int_{-t}^{t} \left(\int e^{i\tau u} \mu(du)\right) d\tau = \int \left(\int_{-t}^{t} e^{i\tau u} d\tau\right) \mu(du)$$

d'où

$$\sigma_t(X) = \int \frac{\sin(tu)}{tu} \mu(du) .$$

Par définition de l'intégration par rapport à une bimesure spectrale [27 , p. IV.39] nous avons :

$$\forall t , s > 0 \quad , \quad E|\sigma_t(X)-\sigma_s(X)|^2 = E(|\int (\frac{\sin(tu)}{tu} - \frac{\sin(su)}{su})\, \mu(du)|^2)$$

$$= \iint (\frac{\sin(tu)}{tu} - \frac{\sin(su)}{su}) \, . \, (\frac{\sin(tv)}{tv} - \frac{\sin(sv)}{sv})\, M(du,dv) \quad \blacksquare$$

5 - DECOMPOSITION DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE : NOUVELLE REDUCTION DU PROBLEME

Le corollaire 3.4. nous a permis de restreindre notre étude à celle de la convergence de la suite $(\sigma_n(X))_{n\geq 1}$.

Le processus X étant harmonisable, la moyenne $\sigma_n(X)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_n(X) = (\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X)) + \int_{\{u:p^{-q}\leq|u|\}} \frac{\sin(p^q.u)}{p^q.u}\, \mu(du)$$

$$+ \int_{\{u:|u|<p^{-q}\}} (\frac{\sin(p^q.u)}{p^q.u} - 1)\, \mu(du) + \mu(]-p^{-q} , p^{-q}[) \quad ,$$

avec $n , p, q \in \mathbb{N}$, $p^q < n \leq p^{q+1}$ et $p > 1$.

Nous allons montrer que, pour p fixé, les trois premiers termes de cette somme tendent P - p.s. vers 0 , lorsque n tend vers $+\infty$; ce qui donnera une nouvelle réduction du problème.

Pour cela, nous utiliserons la domination - qui nous permettra de substituer à la bimesure spectrale de X , une mesure positive finie concentrée sur la diagonale de $\mathbb{R}^2$, grâce à un résultat de A. PIETSCH et R. ROGGE [43] [44] (voir aussi [26 , lemme 4]) - et la technique de découpage de l'axe réel, employée par I.N. VERBITSKAYA [42] et J. ROUSSEAU [35], qui donneront des majorations suffisantes.

Compte tenu de la représentation de la moyenne $\sigma(X)$ obtenue ci-dessus, nous serons amenés à utiliser les inégalités suivantes :

5.1. - Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour $0 < s < t$, nous avons :

(i.1) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - \dfrac{\sin(su)}{su}\right| \leqslant c \,.\, |u| \,.\, (t-s)$,

(i.2) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - 1\right| \leqslant c \,.\, |u| \,.\, t$,

(i.3) $\forall u \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - \dfrac{\sin(su)}{su}\right| \leqslant c \,.\, (\dfrac{t}{s} - 1)$,

(i.4) $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu} - \dfrac{\sin(su)}{su}\right| \leqslant \dfrac{c}{|u|.s}$,

(i.5) $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{\sin(tu)}{tu}\right| \leqslant \dfrac{c}{|u|.t}$.

Ces cinq majorations se vérifient aisément, les trois premières s'obtenant à l'aide du théorème des accroissements finis.

5.2. - *Lemme*.- Soient une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs.

1) Si la suite $(t_n^{-2} \,.\, \sum\limits_{r=0}^{n} t_r^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \int_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}} (\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1)\, \mu(du) = 0 .$$

2) Si la suite $(t_n^2 \,.\, \sum\limits_{r=n}^{+\infty} t_r^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n^{-2} < +\infty$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \int_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}} \frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\, \mu(du) = 0 .$$

3) <u>Si la suite</u> $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>vérifie simultanément les trois conditions précédentes, alors</u> :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \left[\int \frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\, \mu(du) - \mu(]-t_n^{-1}, t_n^{-1}[)\right] = 0 \quad .$$

Preuve : Lorsque $M : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une bimesure spectrale, comme nous l'avons déjà dit, il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine M [26, lemme 4].

Puisque l'application : $u \rightsquigarrow \frac{\sin(u)}{u}$ est continue bornée dans $\mathbb{R}$, la domination de M par m entraîne les inégalités suivantes pour tout entier n :

$$0 \leqslant \iint_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}^2} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right).\left(\frac{\sin(t_n.v)}{t_n.v} - 1\right) M(du,dv)$$

$$\leqslant \int_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right)^2 m(du)$$

et

$$0 \leqslant \iint_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}^2} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right).\left(\frac{\sin(t_n.v)}{t_n.v}\right) M(du,dv)$$

$$\leqslant \int_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right)^2 m(du) \quad .$$

Ainsi, d'après le lemme 3.1., pour prouver les propriétés (1) et (2) il suffit d'établir que, respectivement :

$$\text{(3.1)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{u:|u|<t_n^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u} - 1\right)^2 m(du) < +\infty \, ,$$

$$\text{(3.2)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{u:t_n^{-1}\leqslant|u|\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right)^2 m(du) < +\infty \quad .$$

Notons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = \{u \in \mathbb{R} : t_{n+1}^{-1} \leqslant |u| < t_n^{-1}\}$.

1) L'inégalité (i.2) nous donne la majoration de la somme (3.1) par :

$$c^2 \sum_{n=0}^{+\infty} t_n^2 \sum_{r=n}^{+\infty} t_r^{-2} \,.\, m(\gamma_r) \quad ,$$

d'où en permutant les termes :

$$c^2 \sum_{r=0}^{+\infty} t_r^{-2} \sum_{n=0}^{r} t_n^2 \,.\, m(\gamma_r\,) \;;$$

les ensembles γ_r $(r \in \mathbb{N})$ étant deux à deux disjoints, l'hypothèse (1) nous permet de conclure.

2) La somme (3.2) s'exprime sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\{u:t_n^{-1} \leqslant |u| < t_o^{-1}\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right)^2 m(du) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{u:t_o^{-1} \leqslant |u|\}} \left(\frac{\sin(t_n.u)}{t_n.u}\right)^2 m(du) \,.$$

Le second terme de cette somme est aisément majorable, grâce à l'inégalité (i.5), par :

$$c^2 \,.\, t_o^2 \,.\, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^{-2}\right) \,.\, m(\mathbb{R}) \,.$$

Le premier terme se majore par :

$$c^2 \,.\, \sum_{n=0}^{+\infty} t_n^{-2} \,.\, \int_{\{u:t_n^{-1} \leqslant |u| < t_o^{-1}\}} u^{-2}\, m(du) \leqslant c^2 \,.\, \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^{-2} \,.\, \sum_{r=0}^{n-1} t_{r+1}^2\, m(\gamma_r) \,.$$

Les hypothèses (2) sur la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous permettent de conclure.

5.3. - *Remarques* :

1 - Pour tout réel $a > 1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie toutes les hypothèses du lemme précédent, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \left[\int \frac{\sin(a^n.u)}{a^n.u}\, \mu(du) - \mu\left(\left]-a^{-n}\,,\, a^{-n}\right[\right)\right] = 0 \,.$$

2 - Lorsque X est un processus harmonisable mesurable de mesure stochastique spectrale μ, et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres positifs vérifiant les trois conditions du lemme précédent, nous constatons que :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \left[\sigma_{t_n}(X) - \mu(]-t_n^{-1}, t_n^{-1}[)\right] = 0 ,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \sigma_{t_n}(X) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \mu(]-t_n^{-1}, t_n^{-1}[) = 0$.

Afin d'obtenir le résultat annoncé au début du paragraphe 5, il nous reste à étudier l'expression $\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X)$ pour $p^q < n \leq p^{q+1}$, p fixé. Mais, nous remarquons que :

pour $p^q < n \leq p^{q+1}$, $\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X) = \sum_{j=p^q+1}^{n} (\sigma_j(X) - \sigma_{j-1}(X))$,

ce qui nous invite, comme l'a fait J. ROUSSEAU pour $p = 2$, à montrer le lemme suivant inspiré de I. GÀL et J. KOKSMA [15].

5.4. - *Lemme de majoration*.- Considérons un nombre entier $p \geq 2$. Tout nombre entier $n \geq 2$ s'écrit de manière unique sous la forme :
pour $p^q < n \leq p^{q+1}$, $n = p^q + 1 + \sum_{k=0}^{q} e_k \cdot p^{q-k}$,
où $q \in \mathbb{N}$, $e = (e_o,\ldots,e_q) \in E_q = \{0,\ldots,p-2\} \times \{0,\ldots,p-1\}^q$.

Notation : Pour p fixé, posons :

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{1,\ldots,q\}$, $\forall e \in E_k$

(i) $b_q(e) = p^q + 1 + \sum_{j=0}^{k} e_j\, p^{q-j}$

(ii) $a_q(e) = \begin{cases} p^q , & \text{si } k = 1 \\ b_q(e) - e_k\, p^{q-k} , & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$

Lemme.- Etant donné un nombre entier $p > 1$, toute suite $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, et toute suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels positifs vérifient :

$$\forall q \geq 1 \ , \quad \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} \Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j\Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}\Big) \cdot \Big[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \cdot \sum_{e\in E_k} \Big| \sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} z_j\Big|^2\Big].$$

Preuve : Soit $p^q < n \leq p^{q+1}$; le nombre entier n s'écrit de manière unique :

$$n = p^q + 1 + \sum_{j=0}^{q} e_j\, p^{q-j} \qquad \text{avec} \qquad e \in E_q \ ;$$

notons, pour $k = 1,\dots,q$:

$$d_k(n) = p^q + 1 + \sum_{j=0}^{k} e_j\, p^{q-j} \quad \text{et} \quad d_o(n) = p^q \ .$$

Nous obtenons l'inégalité :

$$\Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j\Big| \leq \sum_{k=1}^{q} \Big| \sum_{j=d_{k-1}(n)+1}^{d_k(n)} z_j\Big| \ ,$$

en faisant apparaître les nombres α_k, $k \in \mathbb{N}^*$, et en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j\Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \cdot \Big| \sum_{j=d_{k-1}(n)+1}^{d_k(n)} z_j\Big|^2\Big) \ .$$

Mais, $\forall k \in \{1,\dots,q\}$, $\displaystyle \Big| \sum_{j=d_{k-1}(n)+1}^{d_k(n)} z_j\Big|^2 \leq \sum_{e\in E_k} \Big| \sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} z_j\Big|^2$,

d'où $$\Big| \sum_{j=p^q+1}^{n} z_j\Big|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k \cdot \sum_{e\in E_k} \Big| \sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} z_j\Big|^2\Big) \ . \ \blacksquare$$

Le lemme de majoration précédent nous amènera par la suite à utiliser le résultat suivant dont la démonstration emploie la même technique de majoration qu'au lemme 5.2.

5.5. - *Lemme*.- Pour tout processus harmonisable X, tout entier $p > 1$, et tout réel α de $[0,p[$, nous avons :

$$(3.3) \qquad \sum_{q=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \, . \max_{e\in E_k} E(|\sigma_{b_q(e)}(X) - \sigma_{a_q(e)}(X)|^2) \right| < +\infty \, .$$

Preuve : Considérons un entier $p > 1$. Pour tout q de $\mathbb{N}^*$, tout k de $\{1,\ldots,q\}$ et tout e de E_k, notons $S_{q,e} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application continue bornée définie par :

$$S_{q,e}(u) = \frac{\sin(b_q(e).u)}{b_q(e).u} - \frac{\sin(a_q(e).u)}{a_q(e).u} \, .$$

Ainsi l'écart quadratique $E(|\sigma_{b_q(e)}(X) - \sigma_{a_q(e)}(X)|^2)$ est lié à la bimesure spectrale M du processus harmonisable X par la relation : (cf. théorème 4.2.).

$$E(|\sigma_{b_q(e)}(X) - \sigma_{a_q(e)}(X)|^2) = \iint S_{q,e}(u) \, . \, S_{q,e}(v) \, M(du,dv) \, .$$

Comme la bimesure spectrale M est dominée par une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, l'expression (3.3.) est majorée par :

$$(3.4) \qquad \sum_{q=1}^{+\infty} A(q) \quad \text{où} \quad A(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int S^2_{q,e}(u) \, m(du) \, .$$

Il reste donc à montrer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} A(q) < +\infty \, .$$

Suivant l'idée de J. ROUSSEAU, nous découpons le domaine d'intégration de $S^2_{q,e}$. Pour q de $\mathbb{N}^*$, posons :

$$\sum_1(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:|u|<p^{-q-1}\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ,$$

$$\sum_2(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:p^{-q-1}\leq|u|<p^{-q+k}\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ,$$

$$\sum_3(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:p^{-q+k}\leq|u|<1\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ,$$

$$\sum_4(q) = \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int_{\{u:1\leq|u|\}} S^2_{q,e}(u) \quad m(du) \quad ;$$

ainsi,

$$A(q) \leq \sum_1(q) + \sum_2(q) + \sum_3(q) + \sum_4(q) \quad ;$$

de plus en notant $\gamma_q = \{u \in \mathbb{R} : p^{-q-1} \leq |u| < p^{-q}\}$, pour q dans $\mathbb{N}$,

nous obtenons une partition $\{\gamma_q : q \in \mathbb{N}\}$ de $]-1, 1[\setminus \{0\}$.

1) *Montrons que* $\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 1$, tout k de $\{1,\dots,q\}$ et tout e de E_k , nous avons :

$$0 \leq b_q(e) - a_q(e) < p^{q-k+2} \quad \text{et} \quad 0 < b_q(e) \leq p^{q+1} \quad ;$$

ainsi, d'après l'inégalité (i.1), m étant une mesure positive, nous majorons :

$$\int_{\{u:|u|<p^{-q-1}\}} S^2_{q,e}(u)\ m(du) \leq c^2\ p^4 \ .\ p^{2q-2k}\ .\ \int_{\{u:|u|<p^{-q-1}\}} u^2\ m(du).$$

Par conséquent, en découpant de nouveau les domaines d'intégration, nous obtenons :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q) \leqslant c^2 p^4 . \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \alpha^k . p^{2q-k} . \left(\sum_{r=q+1}^{+\infty} \int_{\gamma_r} u^2 \, m(du) + 0 . m(\{0\}) \right) ,$$

$$\leqslant c^2 p^4 . \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q+1}^{+\infty} \alpha^k . p^{2q-k-2r} . m(\gamma_r) ,$$

d'où, en permutant les termes (théorème de Fubini) :

$$\leqslant c^2 p^4 . \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=k+1}^{+\infty} \sum_{q=k}^{r-1} \alpha^k . p^{-k-2r+2q} . m(\gamma_r) ,$$

$$\leqslant \frac{c^2 p^4}{p^2-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k . m\left(\bigcup_{r=k+1}^{+\infty} \gamma_r \right) ;$$

comme m est une mesure positive finie, et α appartient à $[0,p[$, nous pouvons écrire :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q) \leqslant \frac{c^2 p^4}{p^2-1} . \frac{\alpha}{p-\alpha} . m(\{u : 0 < |u| < p^{-2}\}) < +\infty .$$

2) *Montrons que* $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_2(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geqslant 1$, tout k de $\{1,\ldots,q\}$ et tout e de E_k , nous avons :

$$0 \leqslant b_q(e) - a_q(e) < p^{q-k+2} \quad \text{et} \quad p^q \leqslant a_q(e) \quad ;$$

ainsi l'inégalité (i.3) nous donne :

$$\int_{\{u: p^{-q-1} \leqslant |u| < p^{-q+k}\}} S^2_{q,e}(u) \, m(du) \leqslant c^2 p^4 . p^{-2k} . \int_{\{u: p^{-q-1} \leqslant |u| < p^{-q+k}\}} m(du) ;$$

en découpant les domaines d'intégration, nous obtenons :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_2(q) \leqslant c^2 p^4 . \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q-k}^{q} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k . m(\gamma_r) ,$$

d'où en permutant les termes :

$$\leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=\max(r,k)}^{r+k} (\frac{\alpha}{p})^k \,.\, m(\gamma_r) \quad ,$$

$$\leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{r=0}^{+\infty} m(\gamma_r) \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{\alpha}{p})^k \,.(\min(r,k)+1) \quad ,$$

par conséquent

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_2(q) \leq c^2\, p^4 \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)\, (\frac{\alpha}{p})^k \,.\, m(\{u : 0 < |u| < 1\}) < +\infty \quad .$$

3) *Montrons que* $\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_3(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 1$, tout k de $\{1,\dots,q\}$, et tout e de E_k , les inégalités (i.3) et (i.4) nous donnent :

$$\int_{\{u:p^{-q+k}\leq|u|<1\}} S^2_{q,e}(u)\, m(du) \leq (cp)^2 \,.\, p^{-q-k} \int_{\{u:p^{-q+k}\leq|u|<1\}} |u|^{-1}\, m(du) \quad .$$

Ainsi, il apparaît que

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_3(q) \leq (cp)^2 \,.\, \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{r=0}^{q-k-1} \alpha^k \,.\, p^{-q} \,.\, \int_{\gamma_r} |u|^{-1}\, m(du) \quad ,$$

d'où en majorant $|u|^{-1}$ et en permutant les termes :

$$\leq (cp)^2 \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{q=r+k+1}^{+\infty} \alpha^k \,.\, p^{-q+r+1} \,.\, m(\gamma_r) \quad ,$$

$$\leq (cp^2) \,.\, \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{\alpha}{p})^k \,.\, \frac{p}{p-1} \,.\, m(\{u : 0 < |u| < 1\}) < +\infty \quad ;$$

or $\qquad \alpha \in [0,p[$

donc $\qquad \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_3(q) < +\infty$.

4) *Montrons que* $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_4(q) < +\infty$.

Pour tout entier $q \geq 1$, tout k de $\{1,\ldots,q\}$, et tout e de E_k , l'inégalité (i.4) nous permet d'écrire :

$$\int_{\{u:1\leq|u|\}} S^2_{q,e}(u)\ m(du) \leq c^2 \cdot p^{-2q} \int_{\{u:1\leq|u|\}} u^{-2}\ m(du) .$$

Ainsi nous obtenons :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \Sigma_4(q) \leq c^2 \cdot \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \alpha^k \cdot p^{k-2q} \cdot m(\{u:1\leq|u|\}) ,$$

$$\leq c^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k \cdot \frac{p^2}{p^2-1} \cdot m(\{u:1\leq|u|\}) ,$$

$$\leq \frac{(cp)^2}{p^2-1} \cdot \frac{\alpha}{p-\alpha} \cdot m(\{u:1\leq|u|\}) < +\infty .$$

Finalement :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} A(q) < +\infty \quad \blacksquare$$

L'emploi de la technique de domination des processus nous permet de généraliser la décomposition de la moyenne d'un processus stationnaire obtenue par V.F. GAPOSHKIN [16 , th. 1] au cas des processus harmonisables quelconques.

5.6. - *Théorème de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable.*-

Lorsque $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ est un processus harmonisable mesurable et de mesure stochastique spectrale μ, pour tout entier $p > 1$, il existe un processus du second ordre $\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$ vérifiant :

$$\sigma_t(X) = \Psi_t(X,p) + \mu(]-p^{-q}, p^{-q}[) \tag{3.6}$$

où $p^q+1 < t \leq p^{q+1} + 1$, et

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \Psi_t(X,p) = 0 . \tag{3.7}$$

Preuve : Rappelons d'abord les différentes réductions opérées sur la moyenne de X :

$$\sigma_t(X) = \sigma_t(X) - \sigma_n(X) - \sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X) + \sigma_{p^q}(X) - \mu(]-p^{-q},p^{-q}[) + \mu(]-p^{-q},p^{-q}[)$$

où $n, q \in \mathbb{N}$, $n < t \leq n+1$ et $p^q < n \leq p^{q+1}$.

On peut donc majorer $\Psi_t(X,p)$, qui est évidemment un processus du second ordre, de la manière suivante :

$$|\Psi_t(X,p)| \leq \sup_{n<t\leq n+1} |\sigma_t(X)-\sigma_n(X)| + |\sigma_{p^q}(X)-\mu(]-p^{-q},p^{-q}[)| + \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)| .$$

Les deux premiers termes de cette majoration tendent vers 0 P - p.s. quand $t \to +\infty$ (respectivement d'après les lemmes 3.4. et 5.2.).

Pour établir (3.7) il reste à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\text{- p.s.} \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X)| = 0 . \tag{3.8}$$

Pour tous les entiers n et q tels que $p^q < n \leq p^{q+1}$, nous avons :

$$\sigma_n(X) - \sigma_{p^q}(X) = \sum_{j=p^q+1}^{n} (\sigma_j(X) - \sigma_{j-1}(X)) \quad ;$$

ce qui entraîne, d'après le lemme de majoration 5.4. :

$$\forall q \geq 1 \ , \ \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|^2) \leq (\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}).[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k . \sum_{e\in E_k} |\sigma_{b_q(e)}(X)-\sigma_{a_q(e)}(X)|^2] \ ,$$

où $(\alpha_k)_{k\in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite quelconque de nombres positifs ; d'où la relation :

$$\forall q \geq 1 \ , \ E[\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} (|\sigma_n(X)- \sigma_{p^q}(X)|^2] \leq (\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}).[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k . \sum_{e\in E_k} E(|\sigma_{b_q(e)}(X)-\sigma_{a_q(e)}(X)|^2)]$$

$$\leq (\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}).[\sum_{k=1}^{q} \alpha_k . p^{k+1} . \max_{e\in E_k} E(|\sigma_{b_q(e)}(X)-\sigma_{a_q(e)}(X)|^2)] \ ,$$

puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{card}(E_k) = (p-1)\ p^k$.

Pour prouver la relation (3.8), il suffit donc d'exhiber une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ telle que le dernier membre de l'inégalité précédente soit le terme général d'une série convergente.

Soit $\alpha \in]1,p[$, et posons $\alpha_k = \alpha^k$, pour $k \geq 1$.

Dans ce cas, le premier facteur $\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1}$ est positif majoré par $\frac{1}{\alpha-1}$, et d'après le lemme 5.5., le second est le terme général d'une série convergente. ■

6 - C.N.S. PORTANT SUR LA MESURE STOCHASTIQUE POUR LA L.F.G.N.

Le théorème de décomposition précédent nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la mesure stochastique spectrale pour que la L.F.G.N. soit vérifiée. D'ailleurs, nous obtenons le résultat plus général suivant :

6.1. - Théorème.- Soit un processus harmonisable mesurable $X : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ de mesure stochastique spectrale $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

i) $\sigma_t(X)$ converge P-p.s. lorsque t tend vers l'infini ,

ii) il existe un réel $a > 1$, tel que la suite $(\mu(\{|u| < a^{-n}\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge P-p.s.

Dans ce cas, pour tout réel $a > 1$, nous avons :

$$\lim_{t\to+\infty} \text{P-p.s. } \sigma_t(X) = \lim_{n\to+\infty} \text{P-p.s. } \mu(\{|u| < a^{-n}\}) = \mu(\{0\}) \quad . \tag{3.9}$$

Preuve :

1) Lorsque la condition (i) est satisfaite, par la remarque 5.3.1., et la formule d'inversion pour les processus harmonisables [36], nous obtenons que la relation (3.9) est vérifiée (et par conséquent (ii)).

Lorsque la condition (ii) est satisfaite avec un nombre a entier le théorème de décomposition 5.6. permet de conclure que la condition (i) est vérifiée.

La difficulté est de prouver que (ii) $\Longrightarrow$ (i) lorsque le nombre réel $a > 1$ n'est pas entier.

2) Soient un réel $a > 1$, et deux entiers q et r_o tels que $a \leq q$ et $2 \leq a^{r_o}$.

Posons $p = q^2$, et pour $r > r_o$ notons $n(r)$ l'entier tel que :

$$p^{n(r)} + 1 < a^r \leq p^{n(r)+1} + 1 .$$

Ainsi $n(r) \leq n(r+1) \leq n(r) + 1$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} n(r) = +\infty$,

donc on peut extraire une sous-suite $(n(r_q))_{q\in\mathbb{N}}$ telle que $n(r_q) = q$ à partir d'un certain rang q_o .

D'après le théorème de décomposition 5.6., pour tout entier r on a :

$$\sigma_{a^r}(X) = \Psi_{a^r}(X,p) + \mu(|u| < p^{-n(r)}) \quad , \quad \text{et} \quad \lim_{r\to+\infty} \text{P-p.s. } \Psi_{a^r}(X,p) = 0$$

Donc, par la remarque 5.3.1., nous constatons que la condition (ii) entraîne l'existence et l'égalité des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \text{P-p.s. } \mu(|u| < a^{-n}) = \lim_{n\to+\infty} \text{P-p.s. } \sigma_{a^n}(X)$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \text{P-p.s. } \mu(|u| < p^{-n(r)}) = \lim_{q\to+\infty} \text{P-p.s. } \mu(|u| < p^{-q}).$$

Le théorème de décomposition 5.6. nous permet de conclure. ■

Comme corollaire nous déduisons :

6.2. - Théorème.- Un processus harmonisable X , de mesure stochastique spectrale μ , vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si, il existe un réel $a > 1$ tel que :

(3.10) $$\lim_{n\to+\infty} \text{P-p.s. } \mu(]-a^{-n}, a^{n}[) = 0 \quad .$$

<u>Dans ce cas, cette relation est vraie pour tout réel</u> $a > 1$.

6.3. - *Remarque* : L'étude que nous venons de faire pour $\sigma_t(X) = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} X_\tau \, d\tau$, reste valable pour $\sigma'_t(X) = \frac{1}{t}\int_0^t X_\tau \, d\tau$.

En effet, nous avons l'analogue du théorème 4.3. : pour tout processus harmonisable mesurable X , de mesure stochastique spectrale μ , la moyenne $\sigma'(X)$ de X s'écrit sous la forme :

$$\forall t > 0 , \qquad \sigma'_t(X) = \frac{1}{t}\int_0^t X_\tau \, d\tau = \int \frac{e^{itu} - 1}{tu} \, \mu(du) \quad .$$

De plus la fonction $u \longmapsto \dfrac{e^{iu} - 1}{u}$ vérifie des inégalités du type (i.1), (i.2), (i.3), (i.4), et (i.5) qui permettent de prouver un théorème analogue au théorème 5.6.

CHAPITRE IV

CRITERES POUR LA L.F.G.N.

1 - INTRODUCTION

A partir des travaux de V.F. GAPOSHKIN et J. ROUSSEAU, nous allons déterminer trois critères portant sur la bimesure spectrale d'un processus harmonisable pour que celui-ci vérifie la L.F.G.N..

Le premier est une conséquence directe de la généralisation du théorème de Menchoff-Rademacher prouvée par R.J. SERFLING.

Les deux autres découlent des techniques de calcul rencontrées au chapitre précédent qui utilisent le lemme de majoration III.5.4. .

Nous commençons par étudier le comportement asymptotique de la suite $(\mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$, où a est un réel supérieur à 1 , et nous en déduisons les critères pour la L.F.G.N. Ces conditions suffisantes ne sont pas nécessaires comme le montre l'exemple de A. Ya. KHINCHIN.

Tout processus harmonisable étant dominé par un processus faiblement stationnaire, nous établissons une condition suffisante qui porte sur la covariance de ce dernier. Par contre, il existe des processus harmonisables ne vérifiant pas la L.F.G.N. qui sont dominés par des processus faiblement stationnaires qui la vérifient.

De ces critères se déduit aussi une condition suffisante pour les processus harmonisables à mesure spectrale qui généralise le résultat de V.F. GAPOSHKIN [16 , th. 3'A] pour les processus faiblement stationnaires.

Dans la suite, Log désignera la fonction logarithme népérien et, pour tout réel $a > 1$, $\lg_a$ sera la fonction logarithme de base a.

2 - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(\mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$: UTILISATION D'UNE GENERALISATION DU THEOREME DE MENCHOFF-RADEMACHER

V.F. GAPOSHKIN [16] a employé le théorème de Menchoff-Rademacher [1 , th. 2.3.2.] pour étudier le comportement asymptotique de la suite $(\mu(\{u : 0 < |u| \leq 2^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la mesure stochastique μ est orthogonale. R.J. SERFLING [40] et A. SZEP [41 , th. 3] ont donné une généralisation de ce théorème au cas des suites non orthogonales :

2.1. - *Théorème*.- Etant donnés un espace probabilisé (Ω,A,P) et une suite $(\Psi_j)_{j\geq 1}$ de $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ vérifiant :

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |E(\Psi_j \cdot \bar{\Psi}_k)| \cdot \mathrm{Log}(j) \cdot \mathrm{Log}(k) < +\infty ,$$

la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \Psi_j$ converge P - p.s. .

Nous en tirons le résultat suivant :

2.2. - *Proposition*.- Soient $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ une mesure stochastique et $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$. En notant, pour tout j de $\mathbb{N}^*$, $\mu_j = \mu(\{u : t_{j+1}^{-1} \leq |u| < t_j^{-1}\})$, pour tout entier $n_o \geq 1$ nous avons :

(4.1) $$\sum_{j,k=n_o}^{+\infty} |E(\mu_j \,.\, \bar{\mu}_k)| \,.\, \mathrm{Log}(j) \,.\, \mathrm{Log}(k) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{ u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) = 0 .$$

Preuve : La σ-additivité de la mesure stochastique μ donne dans $L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$:

$$\forall n \geq 1 \quad , \qquad \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) = \sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j \quad ;$$

mais la condition (4.1) entraîne pour chaque n la convergence P - p.s. de la série $\sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j$ dont la somme ne peut être égale P - p.s. qu'à $\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})$.
Par conséquent, puisque la suite $(\sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j)_{n\geq 1}$ converge P - p.s. vers 0 , la suite $(\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}))_{n\geq 1}$ converge P - p.s. vers 0 . ■

2.3. - *Remarque* : Dans la proposition précédente 2.2., nous constatons que l'hypothèse porte sur la corrélation entre les variables aléatoires μ_j , $j \in \mathbb{N}^*$, et sur leurs moyennes quadratiques :

$$\sum_{j\neq k} |E(\mu_j \,.\, \bar{\mu}_k)| \,.\, \mathrm{Log}(j) \,.\, \mathrm{Log}(k) < +\infty \quad ,$$

et $$\sum_{j=1}^{+\infty} E(|\mu_j|^2) \,.\, (\mathrm{Log}(j))^2 < +\infty .$$

Nous retiendrons le résultat suivant :

2.4. - *Critère 1*.- Lorsque $\mu : B_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ est une mesure stochastique de bimesure spectrale M pour laquelle il existe un réel $a > 1$ et un entier $n_o \geq 1$ tels que :

$$(4.2) \qquad \sum_{j,k=n_o}^{+\infty} |M(\{u : a^{-j-1} \leq |u| < a^{-j}\} \times \{v : a^{-k-1} \leq |v| < a^{-k}\})| \; . \; \mathrm{Log}(j) \; . \; \mathrm{Log}(k) < +\infty \; ,$$

il apparaît que :

$$(4.3) \qquad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \; \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0 \; .$$

De la proposition IV.2.2. nous déduisons la généralisation suivante du théorème [16 , th. 3'A] de V.F. GAPOSHKIN :

2.5. - *Corollaire*.- Etant donnée $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},P)$ une mesure stochastique à mesure spectrale M telle qu'il existe un nombre réel b_o , $0 < b_o \leq e^{-1}$, pour lequel :

$$(4.4) \qquad \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{|u|}\right) . \; \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{|v|}\right) \; |M| \; (du,dv) < +\infty \; ,$$

où $|M|$ désigne la mesure variation totale de la mesure scalaire M , il apparaît que :

$$\forall a \in \left]1, +\infty\right[\; , \qquad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.} \; \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0 \; .$$

Preuve : Lorsque x tend vers $+\infty$, Log Log(x) et $\lg_a \lg_a(x)$ ont le même ordre de grandeur, donc la condition (4.4) vérifiée avec la fonction Log Log, l'est avec la fonction $\lg_a \lg_a$.

La fonction $\lg_a \lg_a$ étant croissante, et la mesure $|M|$ positive, nous avons :

$$\forall j \; , \; k > 0 \; , \quad 0 \leq \lg_a \lg_a (a^j) \; . \; \lg_a \lg_a(a^k) \; . \; |M| \; (\gamma_j \times \gamma_k)$$

$$\leq \iint_{\gamma_j\times\gamma_k} \lg_a \lg_a\left(\frac{1}{|u|}\right) . \; \lg_a \lg_a\left(\frac{1}{|v|}\right) \; |M| \; (du,dv) \quad ,$$

où $$\gamma_j = \{u : a^{-j-1} \leqslant |u| < a^{-j}\} ;$$

de plus, $\forall j , k > 0$, $|M(\gamma_j \times \gamma_k)| \leqslant |M| (\gamma_j \times \gamma_k)$.

Par conséquent, si n_o est un entier tel que $a^{-n_o} < b_o$, la condition (4.4) implique :

$$\sum_{j,k=n_o}^{+\infty} lg_a(j) \cdot lg_a(k) \cdot |M(\gamma_j \times \gamma_k)| < +\infty ,$$

et, d'après la proposition précédente, nous pouvons conclure. ∎

2.6. - *Lemme*.- <u>Toute mesure positive finie</u> M_o <u>sur</u> $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ <u>telle qu'il existe trois nombres réels</u> $\varepsilon, c , b_o > 0$ <u>vérifiant</u> :

$$(4.5) \quad 0 < b_1, b_2 \leqslant b_o \leqslant e^{-1} \Longrightarrow M_o(\{u : 0 < |u| < b_1\} \times \{v : 0 < |v| < b_2\})$$
$$\leqslant c \cdot \left[\mathrm{Log\ Log}(\frac{1}{b_1}) \cdot \mathrm{Log\ Log}(\frac{1}{b_2})\right]^{-1-\varepsilon} ,$$

<u>satisfait la relation</u> :

$$(4.6) \ \exists b \in]0,e^{-1}] , \iint_{\{u:0<|u|<b\}^2} \mathrm{Log\ Log}(\frac{1}{|u|}) \cdot \mathrm{Log\ Log}(\frac{1}{|v|}) \ M_o(du,dv) < +\infty .$$

Preuve : En effet, e étant le nombre tel que $\mathrm{Log}(e) = 1$, notons :

$$\forall k \in \mathbb{N} , \quad C_k = \{u : e^{-e^{k+1}} \leqslant |u| < e^{-e^k}\} \quad \text{et} \quad B_k = \{u : 0 < |u| < e^{-e^k}\} ,$$

et considérons un entier $k_o \geqslant 1$ tel que $e^{-e^{k_o}} \leqslant b_o$;

ainsi, $$B_{k_o} \subset \{u : 0 < |u| < b_o\} .$$

La croissance de la fonction Log Log donne : $\forall j\ ,\ k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \iint_{C_j \times C_k} \mathrm{Log\,Log}\left(\frac{1}{|u|}\right) . \mathrm{Log\,Log}\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du,dv) \leq (j+1)(k+1).M_o(C_j \times C_k)$$

où les ensembles $C_k, k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$\forall r \in \mathbb{N} \qquad \bigcup_{k \geq r} C_k = B_r \ .$$

Donc la relation (4.6) est vérifiée avec $b = e^{-e^{k_o}}$ si la série double de terme général $(j+1)(k+1).M_o(C_j \times C_k)$ est convergente.

Etudions cette série :

$$\sum_{j,k=k_o}^{+\infty} (j+1)(k+1).M_o(C_j \times C_k) = \sum_{j,k=k_o}^{+\infty} \sum_{r=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} M_o(C_j \times C_k) \ ,$$

en permutant les termes, nous obtenons :

$$= \sum_{r=0}^{k_o-1} \sum_{s=0}^{k_o-1} \sum_{j=k_o}^{+\infty} \sum_{k=k_o}^{+\infty} \cdots + \sum_{r=0}^{k_o-1} \sum_{s=k_o}^{+\infty} \sum_{j=k_o}^{+\infty} \sum_{k=s}^{+\infty} \cdots + \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=0}^{k_o-1} \sum_{j=r}^{+\infty} \sum_{k=k_o}^{+\infty} \cdots$$

$$+ \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=k_o}^{+\infty} \sum_{j=r}^{+\infty} \sum_{k=s}^{+\infty} \cdots \ ,$$

d'où, en utilisant la σ-additivité de la mesure M_o :

$$= k_o^2 . M_o(B_{k_o} \times B_{k_o}) + k_o . \sum_{s=k_o}^{+\infty} M_o(B_{k_o} \times B_s)$$

$$+ k_o . \sum_{r=k_o}^{+\infty} M_o(B_r \times B_{k_o}) + \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=k_o}^{+\infty} M_o(B_r \times B_s) \ .$$

Ainsi, grâce à la relation (4.5), nous majorons par :

$$k_o^2 . M_o(B_{k_o} \times B_{k_o}) + 2c . k_o k_o^{-1-\varepsilon} . \sum_{r=k_o}^{+\infty} r^{-1-\varepsilon} + c \sum_{r=k_o}^{+\infty} \sum_{s=k_o}^{+\infty} (rs)^{-1-\varepsilon} < +\infty \ . \blacksquare$$

2.7. - *Remarque* : La condition (4.5) peut être remplacée par une condition plus faible :

il existe trois réels ε, b_o, $c > 0$ et un entier $q \geq 2$ tels que :

(4.7) $$0 < b_1 , b_2 < b_o \Longrightarrow M_o(\{u : 0 < |u| < b_1\} \times \{v : 0 < |v| < b_2\})$$

$$\leq c \cdot \left[\mathrm{Log}_2(\frac{1}{b_1}) \cdot \mathrm{Log}_2(\frac{1}{b_2}) \ldots \mathrm{Log}_q(\frac{1}{b_1}) \cdot \mathrm{Log}_q(\frac{1}{b_2})\right]^{-1} \cdot \left[\mathrm{Log}_q(\frac{1}{b_1}) \cdot \mathrm{Log}_q(\frac{1}{b_2})\right]^{-\varepsilon} ,$$

où $\forall r \geq 1$, $\mathrm{Log}_{r+1} = \mathrm{Log} \circ \mathrm{Log}_r$.

2.8. - *Corollaire*.- Lorsque $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},P)$ est une mesure stochastique à mesure spectrale M dont la variation totale $|M|$ vérifie l'une des conditions (4.5) ou (4.7), nous avons :

$$\forall a \in]1, +\infty[, \quad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0 .$$

3 - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SUITE $(\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}))_{n\in\mathbb{N}}$: UTILISATION DU LEMME DE MAJORATION

3.1. - *Etude préliminaire*.-

Considérons un entier $p > 1$. Comme J. ROUSSEAU, nous constatons que : pour $p^q < n \leq p^{q+1}$,

$$\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) - \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\}) \ P\text{-p.s.}.$$

Par conséquent :

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s.} \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})| = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 .$$

3.1.1. - <u>Etudions la suite</u> $(\mu(B_q))_{q\in\mathbb{N}}$ <u>où</u> $B_q = \{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}$

Cette suite converge P - p.s. vers 0 lorsque $\sum_{q=0}^{+\infty} E(|\mu(B_q)|^2) < +\infty$, c'est-à-dire lorsque :

(4.8) $$\sum_{q=0}^{+\infty} M(B_q \times B_q) < +\infty \quad .$$

3.1.2. - <u>Etudions la suite</u> $\left(\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})|\right)_{q\in\mathbb{N}}$

En posant : $\forall j \in \mathbb{N}$, $V_j = \{u : p^{-j} \leq |u| < p^{-j+1}\}$, les boréliens V_j , $j \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$p^q < n \leq p^{q+1} \Longrightarrow \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\}) = \sum_{j=p^q+1}^{n} \mu(V_j) \quad .$$

Avec ces notations, le lemme de majoration III.5.4. donne :

$$E\left(\max_{p^q<n\leq p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})|^2\right)$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{q} s_k^{-1}\right) . \left(\sum_{k=1}^{q} s_k \sum_{e\in E_k} E\left|\sum_{j=a_q(e)+1}^{b_q(e)} \mu(V_j)\right|^2\right)$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{q} s_k^{-1}\right) . \left(\sum_{k=1}^{q} s_k \sum_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e))\right) ,$$

où, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1,\dots,q\}$ et $e \in E_k$,

$$A_q(e) = \{u : p^{-b_q(e)} \leq |u| < p^{-a_q(e)}\} \ .$$

Ainsi la suite étudiée converge P - p.s. vers 0 , lorsque la série numérique de terme général le dernier membre de l'inégalité précédente est convergente pour un choix de la suite $(s_k)_{k\geq 1}$.

En particulier, si $(s_k)_{k\geq 1}$ est la suite constante 1, nous obtenons les conditions suffisantes :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty \,, \tag{4.9}$$

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} p^{k+1} \max_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty \,. \tag{4.10}$$

Ainsi nous sommes amenés à l'étude suivante :

3.1.3. - <u>Etudions les ensembles</u> $A_q(e)$

Considérons un entier $q > 1$

a) <u>Soit $k = 1$</u> - Etant donnés e et e' deux éléments de E_1, rappelons que :

$$b_q(e) = p^q + 1 + e_o \, . \, p^q + e_1 \, . \, p^{q-1} \quad , \quad b_q(e') = p^q + 1 + e'_o \, . \, p^q + e'_1 \, . \, p^{q-1} \, ,$$

$$a_q(e) = a_q(e') = p^q \, ;$$

nous constatons que $b_q(e') < b_q(e) \Longrightarrow A_q(e') \subset A_q(e)$;

de plus $\qquad \forall e \in E_1 \quad , \qquad A_q(e) \subset \{u : p^{-p^{q+1}} \leq |u| < p^{-p^q}\} = C_q$,

et $\qquad$ card $E_1 = (p-1)\, p$.

b) <u>Soit $k \in \{2,\ldots,q\}$</u> . Etant donnés e et e' deux éléments de E_k, nous avons :

$$b_q(e) = a_q(e) + e_k \, . \, p^{q-k} \, ,$$

$$b_q(e') = a_q(e') + e'_k \, . \, p^{q-k} \, .$$

Si $a_q(e) = a_q(e')$ et $e_k > e'_k$, alors

$$A_q(e') \subset A_q(e) \subset \{u : p^{-a_q(e)-(p-1)p^{q-k}} \leq |u| < p^{-a_q(e)}\} \, ,$$

de plus, $\forall e \in \mathcal{E}_k$, $\mathrm{card}\{e' \in \mathcal{E}_k : a_q(e) = a_q(e')\} = p$.

Maintenant, considérons le cas où $a_q(e) \neq a_q(e')$, et posons

$$j_o = \inf\{j \in \{0,\dots,k-1\} : e_j \neq e'_j\} ,$$

alors nous avons :

$$a_q(e) - a_q(e') = (e_{j_o} - e'_{j_o}) \cdot p^{q-j_o} + \sum_{j=j_o+1}^{k-1} (e_j - e'_j) \cdot p^{q-j} ,$$

d'où
$$|a_q(e) - a_q(e')| \geq p^{q-j_o} - \sum_{j=j_o+1}^{k-1} (p-1)\, p^{q-j} ,$$

et
$$|a_q(e) - a_q(e')| \geq p^{q-k+1} .$$

En regroupant les éléments e de $\mathcal{E}_k$ qui donnent le même a_q , nous obtenons une partition $\mathcal{P}_k$ de $\mathcal{E}_k$ dont chaque classe E contient p éléments de $\mathcal{E}_k$, et vérifie :

$$\forall e \in E , \quad A_q(e) \subset \{u : p^{-a_q(e)-(p-1)p^{q-k}} \leq |u| < p^{-a_q(e)}\} = C_q(E) .$$

De plus, d'après ce qui précède :

$$\forall E , E' \in \mathcal{P}_k , \quad E \neq E' \Longrightarrow C_q(E) \cap C_q(E') = \emptyset$$

et
$$\bigcup_{E \in \mathcal{P}_k} C_q(E) \subset C_q .$$

3.1.4. - *Conséquence* : Lorsque M_o est une mesure positive sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, pour tout entier $q > 1$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) = \sum_{e \in \mathcal{E}_1} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) + \sum_{k=2}^{q} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) ,$$

M_o étant une mesure positive, nous majorons par :

$$\leq (p-1)\ p\ M_o(C_q \times C_q) + \sum_{k=2}^{q} p \sum_{E \in P_k} M_o(C_q(E) \times C_q(E))$$

$$\leq p^2 \ .\ M_o(C_q \times C_q) + (q-1)p \ .\ M_o(C_q \times C_q) \ ,$$

et par conséquent :

$$(4.11) \qquad \forall q > 1 \ , \quad \sum_{k=1}^{q} \sum_{e \in E_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) \leq q \ .\ p^2 \ .\ M_o(C_q \times C_q) \quad . \blacksquare$$

Le résultat suivant découle directement de l'étude précédente.

3.2. - *Critère 2*.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ une mesure stochastique de bimesure spectrale M.

S'il existe trois réels ε, b_o, $c > 0$ tels que :

$$(4.12) \qquad 0 < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : 0 < |u| < b\}^2) \leq c.\left[\text{Log Log}(\tfrac{1}{b})\right]^{-1-\varepsilon} ,$$

et

$$(4.13) \quad 0 < a < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : a \leq |u| < b\}^2) \leq c \ .\ \left[\frac{\text{Log}(a)}{\text{Log}(b)} - 1\right] \ .\ \left[\text{Log Log}(\tfrac{1}{b})\right]^{-3-\varepsilon}$$

alors pour tout entier $p > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s.}\ \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 \ .$$

Preuve : Les conditions (4.12) et (4.13) étant vérifiées avec la fonction Log , elles le sont avec la fonction $\lg_p$, d'après les propriétés des fonctions logarithmes.

En utilisant les notations précédentes, la condition (4.12) nous donne :

$$\forall q \geq q_o \quad , \qquad 0 \leq M(B_q \times B_q) \leq c\left[\lg_p \lg_p(p^{p^q})\right]^{-1-\varepsilon} = c \,.\, q^{-1-\varepsilon} \quad ,$$

ainsi
$$\sum_{q=0}^{+\infty} M(B_q \times B_q) < +\infty \quad .$$

De plus la condition (4.13) implique les inégalités suivantes :

$\forall q \in \mathbb{N}^* \ , \ q \geq q_o \ , \ \forall k \in \{1,\dots,q\} \ , \quad \forall e \in \mathcal{E}_k \ ,$

$$0 \leq M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq c \,.\, \left[\frac{\lg_p (p^{b_q(e)})}{\lg_p(p^{a_q(e)})} - 1\right] . \left[\lg_p \lg_p(p^{a_q(e)})\right]^{-3-\varepsilon}$$

$$\leq c \,.\, \left[\frac{b_q(e) - a_q(e)}{a_q(e)}\right] . \left[\lg_p(a_q(e))\right]^{-3-\varepsilon} \quad ;$$

or $\quad p^q \leq a_q(e) \leq b_q(e) \leq p^{q+1} \quad$ et $\quad 0 \leq b_q(e) - a_q(e) < p^{q-k+2}$,

donc
$$M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq c \,.\, p^{-k+2} \,.\, q^{-3-\varepsilon} \quad ;$$

par conséquent :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} p^{k+1} \,.\, \max_{e\in\mathcal{E}_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq c \,.\, p^3 \,.\, \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1-\varepsilon} < +\infty \,.$$

D'après l'étude 3.1., les conditions (4.8) et (4.10) étant satisfaites, nous pouvons conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 \quad . \ \blacksquare$$

3.3. - *Remarque* : Les conditions (4.11) et (4.12) peuvent être remplacées par des conditions plus faibles :

il existe trois réels $\varepsilon, b_o , c > 0$ et un entier $q \geq 2$ tels que :

(4.14) $$0 < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : 0 < |u| < b\}^2) \leq c \,.\left[\mathrm{Log}_2(\tfrac{1}{b}) \dots \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-1} . \left[\mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-\varepsilon}$$

(4.15) $$0 < a < b < b_o \Longrightarrow M(\{u : a \leq |u| < b\}^2)$$

$$\leq c \cdot \left[\frac{\mathrm{Log}(\frac{1}{a})}{\mathrm{Log}(\frac{1}{b})} - 1\right] \cdot \left[\mathrm{Log}(\tfrac{1}{b})\right]^{-2} \cdot \left[\mathrm{Log}_2(\tfrac{1}{b}) \ldots \mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-1} \cdot \left[\mathrm{Log}_q(\tfrac{1}{b})\right]^{-\varepsilon}$$

3.4. - *Critère 3*.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une mesure stochastique de bimesure spectrale M.

S'il existe une mesure positive finie M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ satisfaisant :

1) pour tout A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$,

(4.16) $$M(A \times A) \leq M_o(A \times A) ,$$

(4.6) $$2) \exists b_o \in]0, e^{-1}] , \iint_{\{u : 0 < |u| < b_o\}^2} \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{|u|}\right) \cdot \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du, dv) < +\infty ,$$

alors pour tout entier $p > 1$,

(4.3) $$\lim_{n \to +\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 .$$

Preuve : La condition (4.6) étant vérifiée avec la fonction Log, elle l'est avec la fonction $\lg_p$. Considérons un entier $q_o \geq 2$ tel que $p^{-p^{q_o}} < b_o$.

En utilisant les notations de l'étude 3.1., la condition (4.16) nous donne :

$$\forall q \geq 1 \qquad 0 \leq M(B_q \times B_q) \leq M_o(B_q \times B_q) ;$$

comme $$M_o(B_q \times B_q) \leq q^{-2} \cdot \iint_{B_q \times B_q} \lg_p \lg_p \left(\frac{1}{|u|}\right) \cdot \lg_p \lg_p \left(\frac{1}{|v|}\right) M_o(du, dv)$$

et $$q_o \leq q \Longrightarrow B_q \subset \{u : 0 < |u| < b_o\} ,$$

nous obtenons :

$$\forall q \geq q_o \ , \quad M(B_q \times B_q) \leq q^{-2} \ . \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} lg_p \ lg_p(\frac{1}{|u|}) \ . \ lg_p \ lg_p(\frac{1}{|v|}) \ M_o(du,dv)$$

d'où $\sum_{q=0}^{+\infty} M(B_q \times B_q) < +\infty$: la condition (4.8) est satisfaite .

La condition (4.16) nous donne aussi :

$$\forall q \geq 1 \ , \quad 0 \leq \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in \mathcal{E}_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in \mathcal{E}_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e)) \ ,$$

d'où, d'après la relation (4.11),

$$\leq q \ . \ p^2 \ . \ M_o(C_q \times C_q) \ ;$$

mais les ensembles C_q , $q \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints et vérifient :

$$\bigcup_{q=q_o}^{+\infty} C_q = B_{q_o} \subset \{u : 0 < |u| < b_o\},$$

donc, M_o étant une mesure positive, nous obtenons :

$$\sum_{q=q_o}^{+\infty} q^2 \ . \ M_o(C_q \times C_q) \leq \sum_{q=q_o}^{+\infty} \iint_{C_q \times C_q} lg_p \ lg_p(\frac{1}{|u|}) \ . \ lg_p \ lg_p(\frac{1}{|v|}) \ M_o(du,dv)$$

$$\leq \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} lg_p \ lg_p \ (\frac{1}{|u|}) \ lg_p \ lg_p(\frac{1}{|v|}) \ M_o(du,dv) \ ,$$

et la condition (4.6) nous donne :

$$\sum_{q=q_o}^{+\infty} q \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in \mathcal{E}_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty$$: la condition (4.9) est satisfaite .

Ainsi, d'après l'étude 3.1, nous pouvons conclure. ■

3.5. - *Remarques* : 1) Comme toute bimesure spectrale M sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est dominée par une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ [26] , il existe toujours une mesure positive $M_o = R(m)$ sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ telle que M et M_o vérifient la relation (4.16).

2) Nous rappelons que si la condition (4.7) ou la condition (4.5) sont vérifiées, il en est de même de la condition (4.6).

3) Le corollaire 2.5. peut être obtenu comme corollaire de la proposition précédente.

4) Lorsqu'il existe une mesure spectrale positive M_o dominant la bimesure spectrale M de mesure stochastique μ, et satisfaisant la condition (4.6), alors, pour tout entier $p > 1$, nous avons :

(4.3) $$\lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0 .$$

4 - LA L.F.G.N. POUR LES PROCESSUS HARMONISABLES

Nous considérons un processus harmonisable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ de mesure stochastique spectrale $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$. Le comportement en moyenne quadratique de la moyenne de X est donnée par Yu. A. Rozanov [36 , th. 2.2.] :

$$\forall x_o \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_\tau \, . \, e^{-ix_o\tau} \, d\tau = \mu(\{x_o\}) \; .$$

Par conséquent :

$$\lim_{t\to+\infty} \sigma_t(X) = \mu(\{0\}) \; .$$

Nous allons donc établir des conditions suffisantes pour que cette convergence ait lieu aussi P - presque sûrement.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable (th. III.5.6) et des propositions 2.4., 3.2. et 3.4. .

4.1. - Théorème.- Sur un espace probabilisé (Ω,A,P) , soit un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ dont la bimesure spectrale M vérifie l'une des hypothèses suivantes :

1) il existe un réel $a > 1$ et un entier $n_o \geq 1$ tels que :

$$\sum_{j,k=n_o}^{+\infty} |M(\{u : a^{-j-1} \leq |u| < a^{-j}\} \times \{u : a^{-k-1} \leq |u| < a^{-k}\})| . \mathrm{Log}(j) . \mathrm{Log}(k) < +\infty \quad , \tag{4.2}$$

2) il existe trois nombres $\varepsilon, b_o , c > 0$ tels que :

$$0 < b < b_o \implies M(\{u:0<|u|<b\}^2) \leq c . (\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}(\tfrac{1}{b}))^{-1-\varepsilon} \quad , \tag{4.12}$$

$$0 < a < b < b_o \implies M(\{u:a<|u|<b\}^2) \leq c . (\frac{\mathrm{Log}(a)}{\mathrm{Log}(b)} - 1) . (\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}(\tfrac{1}{b}))^{-3-\varepsilon} , \tag{4.13}$$

3) il existe une mesure positive finie M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ satisfaisant :

i) pour tout A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$:

$$M(A \times A) \leq M_o(A \times A) \quad , \tag{4.16}$$

$$\text{ii)} \quad \exists b_o \in]0,e^{-1}], \iint_{\{u:0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}(\frac{1}{|u|}) . \mathrm{Log}\ \mathrm{Log}(\frac{1}{|v|}) M_o(du,dv) < +\infty . \tag{4.6}$$

Alors :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = \mu(\{0\}) .$$

Dans ce cas, le processus X vérifie la L.F.G.N. si et seulement si :

$$M(\{0\}^2) = 0 .$$

4.2. - Remarques : 1) Les conditions (4.12) et (4.13) peuvent être remplacées par les conditions plus faibles (4.14) et (4.15).

2) Toutes ces conditions sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires comme le montre l'exemple de A. Ya. KHINCHIN 5.6. .

3) Dans l'énoncé du théorème 4.1., la fonction Log peut être remplacée par une fonction logarithme de base quelconque.

Dans le cas particulier où M est prolongeable en une mesure spectrale, le théorème précédent nous permet de donner un résultat que V.F. GAPOSHKIN [13, th. 4'A] a établi pour les processus faiblement stationnaires.

4.3. - Corollaire.- Soit un processus harmonisable mesurable X de bimesure spectrale M, dominé par un processus faiblement stationnaire et continu Y dont le noyau r_1 vérifie :

$$(4.17) \qquad \exists\, b_o \geq e \;,\quad \int_{b_o}^{+\infty} \frac{r_2(u)\;.\;\mathrm{Log\,Log}(u)}{u\;.\;\mathrm{Log}(u)}\, du < +\infty$$

avec $\forall u\;,\; v > 0 \;,\quad r_2(u) = \dfrac{1}{4.u^2}\displaystyle\int_{-u}^{u}\int_{-u}^{u} r_1(t-s)\, dt\, ds$ et $r_1(u-v) = E(Y_u.\bar{Y}_v)$

et $\mathrm{Log}(e) = 1$.

Alors X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si, $M(\{0\}^2) = 0$.

Remarques : 1) En particulier, lorsque Y est un processus faiblement stationnaire et continu dont le noyau vérifie la relation (4.17), en notant $R(m)$ sa mesure spectrale, nous obtenons :

$$Y \text{ vérifie la L.F.G.N.} \iff m(\{0\}) = 0 \;.$$

2) Pour que la condition (4.17) soit vérifiée, il suffit que :

(4.18) $\exists \varepsilon > 0 \quad , \; r_2(t) = O(\text{Log Log}(t))^{-2-\varepsilon}$ lorsque $t \to +\infty$

ou même seulement que :

(4.19) $\exists q \in \mathbb{N} \;,\; q \geq 2$ et $\exists \varepsilon > 0$,

$$r_2(t) = O\left[(\text{Log}_2(t))^{-1} \, . \, (\text{Log}_2(t) \, \ldots \, \text{Log}_q(t))^{-1} \, . \, (\text{Log}_q(t))^{-\varepsilon}\right]$$

lorsque $t \to +\infty$.

Preuve : Soit $R(m)$ la mesure spectrale du processus faiblement stationnaire Y , nous avons :

$$\forall u > 0 \quad , \qquad r_2(u) = \int \left(\frac{\sin(tu)}{tu}\right)^2 m(dt) \; .$$

Or il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|u| < t^{-1} \Longrightarrow c \leq \left(\frac{\sin(tu)}{tu}\right)^2 \quad ,$$

et comme m est une mesure positive, nous obtenons :

$$\forall u > 0 \quad , \qquad c \, . \, m(\{t : 0 < |t| < u^{-1}\}) \leq r_2(u) \; .$$

Considérons une suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty \quad ,$$

et un entier n_o tel que : $\quad b_o \leq t_{n_o}$.

Nous pouvons écrire :

(4.21) $$\int_{t_{n_o}}^{+\infty} \frac{r_2(u).\text{Log Log}(u)}{u.\text{Log}(u)} \, du = \sum_{n=n_o}^{+\infty} \int_{\{u : t_n < u \leq t_{n+1}\}} \frac{\text{Log Log}(u)}{u \, . \, \text{Log}(u)} \, r_2(u) \, du \; ,$$

et d'après la relation précédente entre m et r_2 :

$$\geq \sum_{n=n_o}^{+\infty} \int_{\{u:t_n<u\leq t_{n+1}\}} \frac{\text{Log Log}(u)}{u \cdot \text{Log}(u)} du \cdot c \cdot m(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})$$

d'où $\geq \frac{c}{2} \cdot \sum_{n=n_o}^{+\infty} \left[(\text{Log Log}(t_{n+1}))^2 - (\text{Log Log}(t_n))^2\right] \cdot m(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})$;

Il en résulte que :

$$c \sum_{n=n_o+1}^{+\infty} (\text{Log Log}(t_{n+1}))^2 \cdot m(\{u : t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1}\})$$

$$\leq 2 \int_{t_{n_o}}^{+\infty} \frac{r_2(t) \cdot \text{Log Log}(t)}{t \cdot \text{Log}(t)} dt$$

$$+ c \cdot (\text{Log Log}(t_{n_o}))^2 \cdot m(\{u : 0 < |u| < t_{n_o}^{-1}\})$$

$< +\infty$, d'après (4.17) .

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1} \Longrightarrow 0 \leq \text{Log Log}(\frac{1}{|u|}) \leq \text{Log Log}(t_{n+1})$

par conséquent :

$$\int_{\{u:0<|u|<t_{n_o}^{-1}\}} (\text{Log Log}(\frac{1}{|u|}))^2 \, m(du) \leq \sum_{n=n_o}^{+\infty} (\text{Log Log}(t_{n+1}))^2 \, .$$

$$m(\{u : t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1}\}) < +\infty \, .$$

Puisque Y domine X, nous pouvons conclure que les conditions (4.16) et (4.6) du théorème précédent 4.1. sont vérifiées avec $M_o = R(m)$, et donc :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = \mu(\{0\})$$

où μ est la mesure stochastique spectrale de X.

Par conséquent :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = 0 \iff M(\{0\}^2) = 0 \quad . \blacksquare$$

Du théorème 4.1. nous déduisons aussi cette généralisation de [16 , th. 3'A] :

4.4. - *Corollaire*.- Sur un espace probabilisé (Ω, A, P), considérons $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus harmonisable mesurable à mesure spectrale M telle qu'il existe un réel $0 < b_0 \leq e^{-1}$ pour lequel

$$(4.4) \qquad \iint_{\{u:0<|u|<b_0\}^2} \text{Log Log}\left(\frac{1}{|u|}\right) . \text{Log Log}\left(\frac{1}{|v|}\right) |M| (du,dv) < +\infty .$$

Alors $$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = \mu(\{0\}) ,$$

et X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si, $M(\{0\}^2) = 0$.

A. ARIMOTO a donné d'autres types de critères en suivant la méthode de I.N. VERBITSKAYA [42]. Ainsi il a obtenu [2 , th. 2] :

4.5. - *Théorème*.- Soit X un processus harmonisable mesurable à mesure spectrale M telle que :

$$\exists \varepsilon > 0 , \qquad \iint_{\{u:|u|\leq b\}^2} |M| (du,dv) = O\left(\frac{1}{|\text{Log}(b)|^{3+\varepsilon}}\right) ,$$

$$\iint_{\{u:|u|\leq b\}\times\{v:b<|v|\}} \frac{1}{|v|} |M| (du,dv) = O\left(\frac{1}{b.|\text{Log}(b)|^{3+\varepsilon}}\right) ,$$

et

$$\iint_{\{u:b<|u|\}\times\{v:b<|v|\}} \frac{1}{|uv|} |M| (du,dv) = O\left(\frac{1}{b^2.|\text{Log}(b)|^{3+\varepsilon}}\right) ,$$

lorsque $b \longrightarrow 0^+$.

Alors : $$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } \sigma_t(X) = 0 .$$

4.6. - *Exemple de A. Ya KHINCHIN* [42 , rem. 2] .

Il existe des processus faiblement stationnaires continus qui vérifient la L.F.G.N. sans satisfaire l'une des hypothèses du théorème 5.1., autrement dit, ces conditions ne sont pas nécessaires.

4.6.1. - *Construction*.-

Considérons deux variables aléatoires réelles U et V indépendantes sur un espace probabilisé (Ω,A,P), la variable U suivant la loi uniforme sur $[-\pi,\pi]$ tandis que la loi de V est notée m.

Le processus $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \qquad X_t = e^{i.(U+tV)} ,$$

est centré, du second ordre, faiblement stationnaire et continu :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad E(X_t) = E\left[e^{i.(U+tV)}\right] = E(e^{iU}) \,.\, E(e^{itV}) = 0 \,.\, E(i^{tV}) = 0 ,$$

$$r(t) = \int e^{itV}\, dP = \int e^{itv}\, m(dv) .$$

$R(m)$ est la mesure spectrale du processus faiblement stationnaire X (cf.I.2.8).

4.6.2. - *Condition nécessaire et suffisante pour que* X *vérifie la L.F.G.N.*-

Pour presque tout ω de Ω et tout $t > 0$, la moyenne $\sigma_t(X)(\omega)$ s'exprime sous la forme :

$$\sigma_t(X)(\omega) = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} X_\tau(\omega)\, d\tau = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} e^{i.(U(\omega)+\tau.V(\omega))}\, d\tau ,$$

d'où $\qquad V(\omega) \neq 0 \implies |\sigma_t(X)(\omega)| = 0(\frac{1}{t}) \qquad$ pour $\quad t \to +\infty$,

et $\qquad V(\omega) = 0 \implies |\sigma_t(X)(\omega)| = 1$.

Par conséquent, X vérifie la L.F.G.N. si, et seulement si,

$$P(V = 0) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underline{m(\{0\}) = 0} \ ,$$

et il n'y a aucune autre condition sur la mesure de probabilité m .

4.7. - <u>Il existe des processus faiblement stationnaires continus, qui ne vérifient pas la L.F.G.N., et dont la mesure spectrale</u> $R(m)$ <u>satisfait la relation</u> :

$$\underline{m(\{0\}) = 0} \qquad [16 , \text{th.}3'B] .$$

D'après [1 : 2.4.1.], il existe dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ - où λ est la mesure de Borel - une famille orthonormale $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

- $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty$,

- $\limsup_{n\to+\infty} |\sum_{k=0}^{n} c_k Z_k| = +\infty$, λ - p.s. .

On définit une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ en posant : $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mu(B) = \sum_{k:2^{-k}\in B} c_k Z_k$, et on considère une version mesurable du processus harmonisable $Y = \{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$ de mesure stochastique spectrale .

Y est stationnaire puisque :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y_t = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k Z_k e^{i2^{-k}t}$,

- $\forall t , s \in \mathbb{R}$ $E(Y_t . \bar{Y}_s) = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 e^{i2^{-k}(t-s)}$.

Comme $\mu(\{0\}) = 0$, on a $m(0) = 0$, mais la L.F.G.N. n'est pas vérifiée par Y : sinon, puisque $\mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) = \mu(\mathbb{R}) - \sum_{k=0}^{n} c_k Z_k$, et d'après le théorème III.6.2. , on aurait :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k Z_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\lambda\text{-p.s.}} \mu(\mathbb{R}) \quad , \qquad \text{ce qui est faux .}$$

On peut évidemment supposer que $E(|\mu(\mathbb{R})|^2) = 1$, ce qui fait que la mesure spectrale m de Y est une loi de probabilité.

4.8. - Remarque : Il existe des processus harmonisables ne vérifiant pas la L.F.G.N., mais dominés par un processus harmonisable qui la vérifie. Ces processus peuvent être choisis faiblement stationnaires.

Plus particulièrement, on peut construire 2 processus continus stationnaires ayant la même mesure spectrale, l'un vérifiant la loi forte des grands nombres et l'autre ne la vérifiant pas : il suffit de reprendre le processus Y construit ci-dessus, au 4.7., dont la mesure spectrale a été notée m , et $X : t \longmapsto e^{i(U+tV)}$ - exemple de A. Ya. KHINCHIN - où V suit la loi m : comme m(0) = 0 , ce dernier processus, dont la mesure spectrale est m , vérifie la loi forte des grands nombres (cf. 4.6).

4.9. - Remarque : L'hypothèse 3 du théorème 4.1. suppose l'existence d'une mesure positive M_o sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ qui satisfait les conditions (4.6) . Il serait intéressant de trouver ou construire une telle mesure M_o à partir du processus étudié ou de sa bimesure spectrale. Et donc d'obtenir une condition sur le processus pour que l'hypothèse 3 soit satisfaite.

CHAPITRE V

VITESSE DE CONVERGENCE DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE.

I - INTRODUCTION

Nous montrons d'abord que la moyenne $\sigma_t(X)$ d'un procesus harmonisable mesurable X vérifie une loi du log. itéré, à savoir :

$$\sigma_t(X) = o(\text{Log Log}(t)) \qquad \text{lorsque} \quad t \to +\infty ,$$

autrement dit :

$$\lim_{t \to +\infty} P - \text{p.s.} \; [\text{Log Log}(t)]^{-1} \,.\, \sigma_t(X) = 0 .$$

(Ce résultat a été démontré par V.F. GAPOSHKIN dans le cas particulier des processus faiblement stationnaires [16, cor. 5]).

Les techniques de calcul employées précédemment vont ensuite nous permettre d'estimer la vitesse de convergence P - p.s. vers 0 de la moyenne d'un processus harmonisable qui vérifie la L.F.G.N..

Ces derniers résultats améliorent aussi des résultats analogues de V.F. GAPOSHKIN pour les processus faiblement stationnaires [16, § 4].

2 - LOI DU LOG. ITERE POUR LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE

L'étude IV.3.1. et la domination nous permettent de montrer que :

2.1. - Lemme.- Toute mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, A, P)$ vérifie :

$$\forall p \in \mathbb{N} \;,\; p > 1 \;,\quad \lim_{n\to+\infty} P - \text{p.s.}\ (\operatorname{Log} n)^{-1} \,.\, \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0$$

Preuve : Puisque :

$$\forall q \in \mathbb{N} \,,\, p^q < n \leq p^{q+1} \Longrightarrow \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) - \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\})$$

et

$$\lim_{q\to+\infty} \max_{p^q<n\leq p^{q+1}} \frac{\operatorname{Log}(n)}{q} = \operatorname{Log}(p) \,,$$

pour prouver le lemme, en utilisant les notations de l'étude IV.3.1., il suffit d'établir que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \,.\, M(B_q \times B_q) < +\infty \,,$$

et

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1} \,.\, \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) < +\infty \,,$$

où M est la bimesure spectrale de la mesure stochastique μ.

m désignant une mesure positive finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine la bimesure spectrale M, nous pouvons écrire :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \,.\, M(B_q \times B_q) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \,.\, m(B_q) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-2} \,.\, m(\mathbb{R}) < +\infty \,.$$

De plus ,

$$\sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M(A_q(e) \times A_q(e)) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} m(A_q(e)) \ ,$$

$$\leq \sum_{q=1}^{+\infty} p^2 \cdot m(C_q) \qquad \text{(d'après (4.11))} \ ,$$

$$\leq p^2 \cdot m(\bigcup_{q\geq 1} C_q) < +\infty \ . \ \blacksquare$$

2.2. - *Théorème (loi du log.itéré)*.- Tout processus harmonisable mesurable X vérifie :

$$\lim_{t\to+\infty} P-\text{p.s.} \quad (\text{Log Log}(t))^{-1}.\sigma_t(X) = 0 \ .$$

Preuve : D'après le théorème III.5.6. de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable, utilisé pour $p = 2$, il existe un processus du second ordre $\{\Psi_t(X,2) : t > 2\}$ tel que, $\forall t > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant : $1 + 2^n < t \leq 1 + 2^{n+1}$, on ait :

- $\sigma_t(X) = \mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) + \Psi_t(X,2)$,

- $\lim\limits_{t\to+\infty} P-\text{p.s.}\ \Psi_t(X,2) = 0$.

Il suffit donc de vérifier que

$$\mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) \ . \ (\text{Log Log}(t))^{-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{P-\text{p.s.}} 0 \ , \qquad \text{ce qui équivaut,}$$

compte tenu de l'égalité :

$$\mu(]-2^{-n}, 2^{-n}[) = \mu(\{0\}) + \mu(\{u : 0 < |u| < 2^{-n}\}) \ ,$$

à :

$$\mu(\{u : 0 < |u| < 2^{-n}\}) \ . \ \lg_2^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P-\text{p.s.}} 0 \ , \qquad \text{et résulte}$$

donc du lemme précédent.

2.3. - Le résultat qui suit montre que la loi du log. itéré que nous venons d'obtenir est, d'une certaine manière, optimale.

Proposition.- Pour toute application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les conditions suivantes :

i) $\exists p > 1$, $\exists A > 0$ et $\exists n_o > 0$ tels que :

$$\forall n > n_o \quad , \quad g(p^{n+1}) < A \,.\, g(p^n) \, ,$$

ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$,

iii) $g(t) = o(\mathrm{Log}\,(\mathrm{Log}\,t))$ quand $t \to +\infty$,

il existe un processus continu et stationnaire $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ construit sur $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ - λ est la mesure de Borel - et tel que :

$$\limsup_{t \to +\infty} (g(t))^{-1} \,.\, |\sigma_t(X)| = +\infty \qquad \lambda - \text{p.s.}$$

Preuve : D'après G. ALEXITS [1 : p. 100], il existe une famille orthonormale $(Z_k , k \in \mathbb{N})$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ et une suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que :

- $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k^2 < +\infty$,

- $\limsup\limits_{n \to +\infty} (g(p^n))^{-1} . |\sum\limits_{k=0}^{n} c_k Z_k| = +\infty \qquad \lambda - \text{p.s.}$

Dans l'espace $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, la famille $(c_k Z_k , k \in \mathbb{N})$ est sommable et l'on définit une mesure stochastique μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ en posant :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad , \quad \mu(B) = \sum_{(k : p^{-k} \in B)} c_k Z_k \,.$$

Soit X le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ : il est en fait stationnaire car

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot e^{itp^{-k}} \cdot Z_k$ – égalité que l'on peut vérifier à partir de :

$$\forall Z \in L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda) \ , \quad E(X_t \cdot \bar{Z}) = \int e^{itx} \quad \mu_Z(dx) \ ,$$

où μ_Z est la mesure complexe définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \ , \quad \mu_Z(B) = E(\mu(B) \cdot \bar{Z}) \ -$$

- $\forall t \ , \ s \in \mathbb{R}$, $E(X_t \cdot \bar{X}_s) = \sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \cdot e^{i(t-s)p^{-k}}$.

D'après le théorème de décomposition de la moyenne d'un processus harmonisable (th. III.5.6.), nous avons :

$$\forall t > 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{tels que :} \quad 1 + p^n < t \leq 1 + p^{n+1} \ ,$$

$$\sigma_t(X) = \Psi_t(X,p) + \mu(]-p^{-n} \ , \ p^{-n}[) \ .$$

De plus, dès que t est assez grand, nous avons :

$$g(p^n) \geq A^{-2} \cdot g(t) \ , \quad \text{car} \quad t \leq p^{n+2} \quad \text{(d'après (i))} \ .$$

Puisque $\Psi_t(X,p) \xrightarrow[t\to+\infty]{\lambda\text{-p.s.}} 0$ et d'après (ii), nous obtenons :

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{|\sigma_t(X)|}{g(t)} \geq A^{-2} \cdot \limsup_{n\to+\infty} \frac{|\mu(]-p^{-n} \ , \ p^{-n}[)|}{g(p^n)} \ .$$

Or $\mu(]-p^{-n} \ , \ p^{-n}[) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k Z_k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot Z_k - \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot Z_k$,

et par conséquent ,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|\mu(]-p^{-n}, p^{-n}[)|}{g(p^n)} = \limsup_{n\to+\infty} (g(p^n))^{-1}.|\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot Z_k|$$

$$= +\infty \qquad \lambda - \text{p.s.}$$

3 - VITESSE DE CONVERGENCE P-p.s. VERS 0 DE $\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$

$\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$ est évidemment le processus qui apparaît dans le théorème de décomposition de $\{\sigma_t(X) : t > 0\}$.

Nous allons simplement affiner des calculs déjà faits.

3.1. - Lemme.- Si un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$, une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et un entier $p > 1$ satisfont les conditions suivantes :

(5.1) $\exists A \in]1,p[$ et $\exists q_o \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq p^{q_o} , \quad g^2(pn) \leq A.g^2(n) ,$$

(5.2) il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine la bimesure spectrale M de X, tel que :

$$\int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2(\frac{1}{|u|}) \, m(du) < +\infty ,$$

alors le processus $\{\Psi_t(X,p) : t > 2\}$ a la propriété suivante :

(5.3) $$\lim_{t\to+\infty} \text{P - p.s. } g(t) \cdot \Psi_t(X,p) = 0 .$$

Il existe évidemment des fonctions g satisfaisant (5.1), par exemple :

- $t \rightsquigarrow \operatorname{Log}^{\gamma} t$, $\gamma > 0$

- $t \rightsquigarrow (\operatorname{Log} \operatorname{Log}(t))^{\gamma}$, $\gamma > 0$

- $t \rightsquigarrow t^{\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Preuve : Rappelons d'abord la majoration de $\Psi_t(X,p)$ obtenue dans la démonstration du théorème III.5.6. :

$$\text{(A)} \quad |\Psi_t(X,p)| \leqslant \sup_{n<t\leqslant n+1} (|\sigma_t(X)-\sigma_n(X)|) + |\sigma_{p^q}(X)-\mu(]-p^{-q},p^{-q}[)|$$

$$+ \max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|) \quad ,$$

où

- $t > 2$; $n , q \in \mathbb{N}$,

- $n < t \leqslant n+1$,

- $p^q < n \leqslant p^{q+1}$.

Etude préliminaire : Dans un premier temps, nous allons montrer que

$$\text{(5.4)} \qquad \lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^q) \, . \max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|) = 0$$

$$\text{(5.5)} \qquad \lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^q) \, . \, |\sigma_{p^q}(X) - \mu(]-p^{-q} , p^{-q}[)| = 0 \quad .$$

Nous savons, d'après le théorème III.4.3., que .

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad , \qquad \sigma_{p^q}(X) = \int \frac{\sin(p^q u)}{p^q u} \mu(du)$$

et, d'après la preuve du théorème III.5.6., que : $\forall\alpha \in]1,p[$,

$$E(\max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} (|\sigma_n(X)-\sigma_{p^q}(X)|^2)) \leqslant \frac{p}{\alpha-1} \cdot \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int S^2_{q,e}(u) \, . \, m(du) \quad .$$

Nous allons montrer, par des calculs analogues à ceux des lemmes III.5.2. et III.5.5., que nous avons :

(5.6) $\exists \alpha \in \left]1,p\right[$ tel que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \sum_{k=1}^{q} (p\alpha)^k \max_{e\in E_k} \int S_{q,e}^2(u)\ m(du) < +\infty ,$$

(5.7) $$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \int_{\{u:p^{-q}\leq |u|\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\right)^2 m(du) < +\infty ,$$

(5.8) $$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \int_{\{u:|u|<p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u} - 1\right)^2 m(du) ,$$

puisque, d'après le lemme III.3.1. et la preuve III.5.6., (5.6) $\Longrightarrow$ (5.4), et,(5.7) et (5.8) $\Longrightarrow$ (5.5).

Convention.- Ayant à étudier la nature de séries, on peut sans inconvénient convenir que dans (5.1) et (5.2), $q_o = 0$.

Notations.- On choisit α de manière que l'on ait $1 < \alpha < 2$ et $\alpha.A < p$ (c'est possible puisque $1 < A < p$).

Il est clair que :

$\forall n\ , r \in \mathbb{N}^*$, $g^2(p^r n) \leq A^r.g^2(n)$ et qu'en particulier si l'on pose

$$\beta = g^2(1) \quad , \quad \text{on a :}$$

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $g^2(p^q) \leq \beta \ .\ A^q$.

Nous suivons la démonstration du lemme III.5.5 en reprenant ses notations : ainsi

$\forall q \in \mathbb{N}$, $\gamma_q = \{u : p^{-q-1} \leq |u| < p^{-q}\}$

1) <u>Montrons que</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_1(q) < +\infty$: d'après la démonstration de la convergence de la série $\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_1(q)$ dans la preuve du théorème III.5.5., nous savons que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_1(q) \leq c^2p^4 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q+1}^{+\infty} \alpha^k\, p^{2q-k-2r}\, g^2(p^q)\, m(\gamma_r)$$

$$\leq c^2p^4 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=q+1}^{+\infty} \alpha^k\, p^{2q-k-2r} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= c^2p^4 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=k+1}^{+\infty} \sum_{q=k}^{r-1} \alpha^k\, p^{2q-k-2r} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= \frac{c^2p^4}{p^2-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k \sum_{r=k+1}^{+\infty} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$\leq \frac{\alpha}{p-\alpha} \cdot \frac{c^2p^4}{p^2-1} \cdot \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du) < +\infty .$$

2) <u>Montrons que</u> $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \,.\, \sum_2(q) < +\infty$: d'après les calculs analogues à ceux de la preuve III.5.5., nous savons que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_2(q) \leq c^2p^4 \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=\max(r,k)}^{r+k} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^k g^2(p^q)\, m(\gamma_r)$$

$$\leq c^2p^4 \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=\max(r,k)}^{r+k} \left(\frac{\alpha A}{p}\right)^k \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$\leq c^2p^4 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \left(\frac{\alpha A}{p}\right)^k\right) \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$< +\infty .$$

3) Montrons que $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_3(q) < +\infty$. D'après des calculs analogues antérieurs, on sait que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_3(q) \leqslant (cp)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{q=r+k+1}^{+\infty} \alpha^k\, p^{-q+r+1}\, g^2(p^q)\, m(\gamma_r)$$

$$\leqslant c^2 p^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k \Big(\sum_{r=0}^{+\infty} \Big(\int_{\gamma_r} g^2\Big(\frac{1}{|u|}\Big)\, m(du)\Big) \sum_{q=r+k+1}^{+\infty} \Big(\frac{A}{p}\Big)^{q-r} \Big)$$

$$= c^2 p^3 \cdot \frac{A}{p-A} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{\alpha A}{p}\Big)^k \Big) \cdot \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\Big(\frac{1}{|u|}\Big)\, m(du)$$

$$< +\infty .$$

4) Montrons enfin que $\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q) \cdot \sum_4(q) < +\infty$. On sait que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\sum_4(q) \leqslant c^2\, m(\mathbb{R}) \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{q} \alpha^k\, p^{k-2q}\, g^2(p^q)$$

$$\leqslant \beta\, c^2\, m(\mathbb{R}) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=k}^{+\infty} (\alpha p)^k \Big(\frac{A}{p^2}\Big)^q$$

$$= \beta\, c^2\, m(\mathbb{R}) \frac{p^2}{p^2-A} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{\alpha A}{p}\Big)^k$$

$$< +\infty .$$

Il est facile de voir que ces 4 résultats partiels impliquent (5.6) et a fortiori impliquent (5.4) (voir preuve III.5.6.).

5) Démonstration de la propriété (5.7)

a) A partir de III.5.1. (i.5), nous avons les majorations suivantes :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\int_{\{u:1>|u|\geq p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\right)^2 m(du)$$

$$\leq (cp)^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{q-1} g^2(p^q)\ p^{-2q+2r}\ m(\gamma_r)$$

$$\leq (cp)^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=0}^{q-1} \left(\frac{A}{p^2}\right)^{q-r} \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= (cp)^2 \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=r+1}^{+\infty} \left(\frac{A}{p^2}\right)^{q-r}\right) \int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$= (cp)^2 \frac{A}{p^2-A} \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$< +\infty .$$

b) nous avons encore :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\int_{\{u:|u|\geq 1\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u}\right)^2 m(du) \leq c^2\ m(\mathbb{R}) \sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q)\ .\ p^{-2q}$$

$$\leq c^2\ m(\mathbb{R})\ \beta \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\frac{A}{p^2}\right)^q$$

$$< +\infty \quad . \quad \blacksquare$$

6) <u>Démonstration de la propriété</u> (5.8)

L'inégalité (i.2) de III.5.1. entraîne :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} g^2(p^q).\int_{\{u:|u|<p^{-q}\}} \left(\frac{\sin(p^q u)}{p^q u} - 1\right)^2 m(du)$$

$$\leq c^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=q}^{+\infty} p^{2q-2r}\ g^2(p^q)\ m(\gamma_r)$$

$$\leq c^2 \sum_{r=1}^{+\infty} \left(\int_{\gamma_r} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)\ .\ \sum_{q=1}^{r} p^{2q-2r}\right)$$

$$\leq \frac{(cp)^2}{p^2-1} \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du)$$

$$\blacksquare$$

La propriété (5.5) est donc vérifiée. ■

Nous pouvons maintenant conclure l'étude de la convergence P - p.s. de $g(t) \, . \, \Psi_t(X,p)$ vers 0 quand $t \to +\infty$. Puisque si $t > 2$ et $q \in \mathbb{N}$ sont liés par : $1 + p^q < t \leq 1 + p^{q+1}$, nous avons :

$$1 \leq \frac{g(t)}{g(p^q)} \leq A \quad ,$$

compte tenu de la majoration (A), de (5.4) et de (5.5), il suffit de montrer que :

$$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s.} \quad g(t) \, . \sup_{n<t\leq n+1} (|\sigma_t(X) - \sigma_n(X)|) = 0 \, .$$

Or on sait (fin de la démonstration III.3.2), que :

$$E(\sup_{n<t\leq n+1} (|\sigma_t(X) - \sigma_n(X)|^2)) \leq \frac{4}{n^2} (||\mu|| \, (\mathbb{R}))^2 \, .$$

D'après III.3.1 et puisque $n < t \leq n+1 \Longrightarrow 1 \leq \frac{g(t)}{g(n)} \leq A$, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{g(n)}{n}\right)^2 < +\infty \quad ,$$ ce qui résulte des majorations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{g(n)}{n}\right)^2 &= \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{n=p^q+1}^{p^{q+1}} \left(\frac{g(n)}{n}\right)^2 \\
&\leq \sum_{q=0}^{+\infty} (p-1) \, p^q \left(\frac{g(p^{q+1})}{p^q}\right)^2 \\
&\leq (p-1) \, \beta \, A \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{A}{p}\right)^q \\
&< +\infty \, . \quad ■
\end{aligned}$$

4 - VITESSE DE CONVERGENCE P-p.s. VERS 0 DE $\mu(]-a^{-n}, a^{-n}[)$ QUAND $n \to +\infty$.

4.1. - *Lemme*.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une mesure stochastique, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres positifs, et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

- $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
- $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

En posant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu\{u : t_{n+1}^{-1} \leq |u| < t_n^{-1}\}$, nous avons :

$$(5.9) \qquad \sum_{j,k=1}^{+\infty} |E(\mu_j . \overline{\mu_k})| . \mathrm{Log}(j) . \mathrm{Log}(k)\ g(t_j) . g(t_k) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P-\text{p.s. } \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) . g(t_n) = 0 .$$

Preuve : D'après le théorème de Menchoff-Rademacher-Serfling-Szep, les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} g(t_n).\mu_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n$ converge P - p.s. D'autre part, μ étant σ-additive, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \lim_{k\to+\infty} \text{m.q.} \sum_{j=n}^{k} \mu_j = \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\}) .$$

Il existe donc un événement certain Ω_o tel que :

$\forall \omega \in \Omega_o$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

- $\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=n}^{k} \mu_j(\omega) = \mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega)$
- la série $\sum_{j=n}^{+\infty} g(t_j) . \mu_j(\omega)$ converge : nous notons $r_n(\omega)$ sa somme.

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \omega \in \Omega_o$, nous avons alors :

$$\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega) = \sum_{j=n}^{+\infty} \mu_j(\omega)$$

$$= \sum_{j=n}^{+\infty} (g(t_j))^{-1}.(r_j(\omega) - r_{j+1}(\omega)) ,$$

d'où, en utilisant la formule de sommation d'Abel , nous obtenons :

- $\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega) = (g(t_n))^{-1}.r_n(\omega) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} r_j(\omega)((g(t_j))^{-1} - (g(t_{j-1}))^{-1}),$

- $|\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega)| \leq 2\ (g(t_n))^{-1}.\sup(|r_j(\omega)| \ ;\ j \geq n)$.

Il en résulte que $\forall \omega \in \Omega_o$:

$$g(t_n).\mu(\{u : 0 < |u| < t_n^{-1}\})(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad . \blacksquare$$

Appliquons ce résultat au cas où μ est une mesure stochastique à mesure spectrale.

4.2. - *Corollaire*.- Soit $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$ une mesure stochastique à mesure spectrale M et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \dashrightarrow \mathbb{R}^+$.

On suppose que :

- $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$,

(5.10) - $\iint_{\{u:0<|u|<1\}^2} f(\frac{1}{|u|}) \ .\ f(\frac{1}{|v|})\ |M|\ (du,dv) < +\infty$,

où $\forall u > e$, $f(u) = g(u)\ .\ \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}(u)$.

Alors, $\forall a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} P$ - p.s. $g(a^n)\ .\ \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0$.

Preuve : La condition (5.10) est encore vérifiée lorsque dans la définition de f, on substitue au logarithme népérien un logarithme à base $a > 1$ quelconque .

$\forall j \in \mathbb{N}$, posons $\gamma_j = \{u : a^{-j-1} \leq |u| < a^{-j}\}$.

En utilisant la variation totale $|M|$ de la mesure M , nous avons :

$\forall j, k \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$- 0 \leq |M|(\gamma_j \times \gamma_k)\ lg_a(j).\log_a(k)\ g(a^j).g(a^k) \leq \iint_{\gamma_j \times \gamma_k} f(\frac{1}{|u|}).f(\frac{1}{|v|})\ |M|(du,dv) ,$$

$$- |M(\gamma_j \times \gamma_k)| \leq |M|\ (\gamma_j \times \gamma_k) .$$

Il en résulte que :

$$\sum_{j,k=1}^{+\infty} |M(\gamma_j \times \gamma_k)|\, lg_a(j)\ lg_a(k)\ g(a^j)g(a^k)$$

$$\leq \iint_{\{u:0<|u|<a^{-1}\}^2} f(\frac{1}{|u|})\ .\ f(\frac{1}{|v|})\ |M|\ (du,dv)$$

$$< +\infty .$$

On conclut grâce au lemme précédent. ■

Dans le cas d'une bimesure quelconque M , on introduit une mesure positive majorante :

4.3. - Lemme.- Si une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,A,P)$, un entier $p > 1$ et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifient les propriétés suivantes :

1) $\exists B > 0$ et $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tels que :

(5.11) $$\forall q \in \mathbb{N} , \quad n_o \leq p^q \Longrightarrow g(p^{p^{q+1}}) \leq B.g(p^{p^q}) ,$$

2) <u>il existe une mesure positive</u> M_o <u>sur</u> $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ <u>telle que</u> :

(4.16) - <u>pour tout événement A de l'algèbre engendrée par les intervalles de</u> $\mathbb{R}$,

$$M(A \times A) \leq M_o(A \times A) ,$$

(5.12) - $\displaystyle\iint_{\{u:0<|u|<e^{-1}\}^2} f(\frac{1}{|u|}) \cdot f(\frac{1}{|v|}) \; M_o(du,dv) < +\infty$, <u>où</u>

$$\forall u > 1 , \qquad f(u) = g(u) \cdot \text{Log Log}(u) .$$

<u>alors</u>, $\lim_{n\to+\infty} P - p.s. \; g(p^n) \cdot \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = 0$.

Remarques :

- $t \rightsquigarrow (\text{Log Log}(t))^\alpha$, $\alpha > 0$, vérifie (5.11) ;

- (5.12) est aussi satisfaite quand, dans la définition de f , on substitue au logarithme népérien le logarithme à base p .

Preuve : μ étant additive, $\forall q , n \in \mathbb{N}$ tels que $p^q < n \leq p^{q+1}$,

$$\mu(\{u : 0 < |u| < p^{-n}\}) = \mu(\{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}) - \mu(\{u : p^{-n} \leq |u| < p^{-p^q}\}) .$$

1) <u>Etude de</u> $(\mu(B_q))_{q\in\mathbb{N}}$, <u>où</u> $B_q = \{u : 0 < |u| < p^{-p^q}\}$.

q_o désignant un entier tel que $n_o + 2 \leq p^{q_o}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{q=q_o}^{+\infty} g^2(p^{p^q}) \, M(B_q \times B_q) &\leq \sum_{q=q_o}^{+\infty} g^2(p^{p^q}) \cdot M_o(B_q \times B_q) \\ &\leq \sum_{q=q_o}^{+\infty} q^{-2} \iint_{B_q\times B_q} f(\frac{1}{|u|}) \cdot f(\frac{1}{|v|}) \, M_o(du,dv) \\ &\leq (\sum_{q=q_o}^{+\infty} q^{-2}) \iint_{B_{q_o}\times B_{q_o}} f(\frac{1}{|u|}) \cdot f(\frac{1}{|v|}) \quad M_o(du,dv) \\ &< +\infty .\end{aligned}$$

D'après le lemme III.3.1. , on en déduit que :

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^{p^q}).\mu(B_q) = 0 \qquad \text{et, facilement, que :}$$

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s. } g(p^n).\mu(B_q) = 0 \quad , \quad \text{où } p^q < n \leqslant p^{q+1} \quad .$$

2) Il reste à montrer que

$$\lim_{q\to+\infty} P - \text{p.s.} \max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} (|\mu(\{u : p^{-n} \leqslant |u| < p^{-p^q}\})| \; g(p^n)) = 0 \quad , \text{ ce}$$

que l'on peut faire en utilisant encore le lemme III.3.1. dans une étude parallèle à (IV.3.1) dont on reprend les notations :

$$\sum_{q=q_o}^{+\infty} E(\max_{p^q<n\leqslant p^{q+1}} |\mu(\{u : p^{-n} \leqslant |u| < p^{-p^q}\})|^2 . g^2(p^n)) .$$

$$\leqslant \sum_{q=q_o}^{+\infty} q(\sum_{k=1}^{q} \sum_{e\in E_k} M_o(A_q(e) \times A_q(e))) \; g^2(p^{p^{q+1}})$$

$$\leqslant \sum_{q=q_o}^{+\infty} q^2 \; p^2 \; M_o(C_q \times C_q) \; g^2(p^{p^q})$$

$$\leqslant B \cdot p^2 \sum_{q=q_o}^{+\infty} \iint_{C_q\times C_q} f(\frac{1}{|u|}) \cdot f(\frac{1}{|v|}) \quad M_o(du,dv)$$

$$\leqslant B \; p^2 \iint_{\{u:0<|u|<p^{-2}\}^2} f(\frac{1}{|u|}) \cdot f(\frac{1}{|v|}) \; M_o(du,dv)$$

$$< + \infty \; . \quad \blacksquare$$

4.4. - <u>*Lemme*</u>.- <u>Si une mesure stochastique</u> $\mu : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \longrightarrow L^2_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},P)$, <u>de bimesure spectrale</u> M , <u>un réel</u> $a > 1$ <u>et une application croissante</u> $g : \mathbb{R}^+ \dashrightarrow \mathbb{R}^+$ <u>vérifient</u> :

1) $\exists B > 0$ <u>et</u> $\exists n_o \in \mathbb{N}$ <u>tels que</u> :

(5.13) $$\forall n \geqslant n_o \quad , \quad \sum_{q=n_o}^{n} g^2(a^q) \leqslant B \cdot g^2(a^n)$$

2) <u>il existe une mesure positive</u> M_o <u>sur</u> $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ <u>telle que</u> :

(4.16) $M(A \times A) \leqslant M_o(A \times A)$, <u>pour tout événement</u> A <u>de l'algèbre engendrée par les intervalles de</u> $\mathbb{R}$,

(5.14) $$\iint_{\{u:0<|u|<1\}^2} g(\frac{1}{|u|}) \cdot g(\frac{1}{|v|}) \cdot M_o(du,dv) < +\infty ,$$

<u>alors</u> $\lim_{n\to+\infty} P$ - p.s. $g(a^n) \cdot \mu(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}) = 0$.

<u>Preuve</u> : Il suffit de démontrer que :

$$\sum_{n=n_o}^{+\infty} g^2(a^n)\, M(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}^2) < +\infty .$$

$\forall j \in \mathbb{N}$, si $\gamma_j = \{u : a^{-j-1} \leqslant |u| < a^{-j}\}$, nous avons :

$$\sum_{n=n_o}^{+\infty} M(\{u : 0 < |u| < a^{-n}\}^2) \cdot g^2(a^n)$$

$$\leqslant \sum_{n=n_o}^{+\infty} \sum_{j=n}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} g^2(a^n)\, M_o(\gamma_j \times \gamma_k)$$

$$= \sum_{j=n_o}^{+\infty} \Big(\sum_{k=n_o}^{j-1} \sum_{n=n_o}^{k} g^2(a^n).M_o(\gamma_j\times\gamma_k) + \sum_{k=j}^{+\infty} \sum_{n=n_o}^{j} g^2(a^n).M_o(\gamma_j\times\gamma_k)\Big)$$

$$\leqslant B \sum_{j=n_o}^{+\infty} \Big(\sum_{k=n_o}^{j-1} M_o(\gamma_j\times\gamma_k).g^2(a^k) + \sum_{k=j}^{+\infty} M_o(\gamma_j\times\gamma_k)\, g^2(a^j)\Big)$$

(d'après (5.13))

$$\leqslant B \sum_{j=n_o}^{+\infty} \sum_{k=n_o}^{+\infty} M_o(\gamma_j\times\gamma_k)\, g(a^k) \cdot g(a^j)$$

$$\leqslant B \sum_{j=n_o}^{+\infty} \sum_{k=n_o}^{+\infty} \iint_{\gamma_j\times\gamma_k} g(\frac{1}{|u|}) \cdot g(\frac{1}{|v|})\; M_o(du,dv)$$

$$= B \iint_{\{u:0<|u|<1\}^2} g(\frac{1}{|u|}) \cdot g(\frac{1}{|v|})\, M_o(du,dv)$$

$< +\infty$ (d'après (5.14)) . ■

5 - VITESSE DE CONVERGENCE P-p.s. VERS 0 DE LA MOYENNE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE

Des paragraphes 3 et 4 , extrayons les résultats suivants :

5.1. - *Théorème*.- Soient un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ de bimesure spectrale M et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifient les 4 conditions suivantes :

1) (5.15) $M(\{0,0\}) = 0$,

2) (5.1) $\exists p , q_o \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $\exists A \in]1,p[$ tels que :

$$\forall n \geq p^{q_o} \quad , \quad g^2(pn) \leq A \cdot g^2(n) \quad ,$$

3) (i) (5.13) $\exists B \in]0, +\infty[$ et $\exists q_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall q \geq q_1 \quad , \quad \sum_{k=q_1}^{q} g^2(p^k) \leq B\, g^2(p^q) \quad ,$$

ou

(ii) - $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ et

$$(5.9) \qquad \sum_{j,k=1}^{+\infty} |M(\gamma_j \times \gamma_k)| \cdot \mathrm{Log}(j) \cdot \mathrm{Log}(k) \cdot g(p^j) \cdot g(p^k) < +\infty$$

où $\forall j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j = \{u : p^{-j-1} \leq |u| < p^{-j}\}$,

4) il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui domine M , tel que :

$$(5.2) \qquad \int_{\{u:0<|u|<1\}} g^2\left(\frac{1}{|u|}\right) m(du) < +\infty \; .$$

Alors , $$\lim_{t\to+\infty} P - \text{p.s. } g(t) \cdot \sigma_t(X) = 0 \; .$$

5.2. - *Théorème*.- Soient un processus harmonisable mesurable $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ de bimesure spectrale M et une application croissante $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifient les 3 conditions suivantes :

1) (5.15) $$M(\{0,0\}) = 0 ,$$

2) $\exists p , q_o \in \mathbb{N} , p > 1 , \exists A \in]1,p[$ et $\exists B \in]0, +\infty[$ tels que :

(5.1) $$\forall n \geq p^{q_o} , \quad g^2(pn) \leq A\, g^2(n) ,$$

(5.11) $$\forall q \geq q_o , \quad g^2(p^{p^{q+1}}) \leq B.g^2(p^{p^q}) ,$$

3) il existe une mesure positive finie m sur $(\mathbb{R} , \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ dominant M et telle que :

(5.12) $$\int_{\{u:0<|u|<e^{-1}\}} (\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}(\frac{1}{|u|}) . g(\frac{1}{|u|}))^2\, m(du) < +\infty .$$

Alors : $$\lim_{t\to+\infty} P - p.s.\ g(t) . \sigma_t(X) = 0 .$$

5.3. - *Remarques* :

1) Sous les hypothèses de l'un ou l'autre des 2 théorèmes précédents, le processus harmonisable mesurable X vérifie la L.F.G.N..

2) Sans la condition (5.15), et μ désignant la mesure stochastique spectrale de X , on obtient seulement :

$$\lim_{t\to+\infty} P - p.s.\ (\sigma_t(X) - \mu(\{0\})) . g(t) = 0 .$$

3) La 2ème condition du théorème 5.2. est vérifiée lorsqu'il existe des entiers q_o et $p \geq 2$, et un réel B , $1 < B < \sqrt{p}$, tels que la relation (5.11) soit vérifiée.

4) La fonction $g(t) = t^{\alpha}$, avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, vérifie la 2$^{\text{ème}}$ condition du théorème 5.1.

5) Les fonctions $g(t) = \mathrm{Log}^{\alpha} t$, avec $\alpha > 0$, et $g(t) = (\mathrm{Log\ Log}\ t)^{\alpha}$, avec $\alpha > 0$, vérifient la 2$^{\text{ème}}$ condition du théorème 5.2.

CHAPITRE VI

PUISSANCE D'UN PROCESSUS HARMONISABLE A BIMESURE σ-FINIE.

I - INTRODUCTION

Lorsque l'on recueille des informations sur un signal, on utilise un récepteur qui le transforme (qui le filtre). Et, lors de l'étude de l'évolution du signal ou de son filtré, on peut rechercher si cette évolution possède une stationnarité asymptotique en fonction du temps [5].

Dans ce chapitre et le suivant, nous abordons l'étude de la puissance pour certaines classes de processus harmonisables. Celui-ci est consacré à l'étude du comportement asymptotique de l'espérance de la puissance d'un processus harmonisable à bimesure σ-finie. Au chapitre suivant on s'intéressera au comportement asymptotique de la puissance des trajectoires - autrement dit des signaux reçus - pour certains processus fortement harmonisables.

Dans le paragraphe 2 de ce chapitre, nous définissons les filtres utilisés : les filtres linéaires à gain borné.

Au paragraphe 3, nous établissons que les processus harmonisables à bimesure σ-finie forment une classe de processus asymptotiquement stationnaires.

Afin de déterminer la mesure spectrale asymptotique d'un tel processus, nous construisons au paragraphe 4, une "restriction" sur la première bissectrice d'une bimesure spectrale σ-finie.

Or cette "restriction" contient toutes les informations sur la moyenne temporelle de l'espérance de la puissance instantanée du processus. Ainsi, au paragraphe 5, nous montrons que cette moyenne temporelle est "localisable" sur l'axe des fréquences, notion introduite par A. Blanc-Lapierre [5 : p. 386].

2 - FILTRES A GAIN BORNE

2.1. - Rappel : Etant donnée une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$, toute fonction borélienne bornée $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est μ-intégrable. De plus la fonction d'ensemble $g.\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ définie par :

$$g.\mu(B) = \int_B g(u)\ \mu(du) \quad ,$$

est une mesure stochastique telle que pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ (qui est $g.\mu$-intégrable tandis que fg est μ-intégrable) on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\ g.\mu(du) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\ g(u)\ \mu(du) \quad .$$

Ainsi nous pouvons poser [5 : chap. VIII] [6] [19].

2.2. Définition.- Soit une fonction borélienne bornée $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, nous appelons filtre linéaire à gain borné g , la transformation $\mathcal{F}$ définie sur la classe des processus harmonisables sur $\mathbb{R}$, par :

$$\mathcal{F}\, X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu}\, g(u)\, \mu(du) \quad ,$$

où μ est la mesure stochastique spectrale du processus harmonisable X.

2.3. - *Remarques* :

i) Le filtré d'un processus harmonisable de mesure stochastique μ , est le processus harmonisable de mesure stochastique $g.\mu$.

ii) Les filtres linéaires sont invariants par rapport au temps puisque pour tout processus harmonisable X , si on note X_h le translaté de temps h de X :

$$X_h(t) = X(t+h) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad h \in \mathbb{R} \quad ,$$

alors, on a :

$$\mathcal{F}\, X_h(t) = \mathcal{F}\, X(t+h) \quad .$$

Ainsi l'action du filtre ne dépend pas du temps, et ces filtres linéaires transforment les processus stationnaires en processus stationnaires.

iii) La fonction g correspond à l'apport (ou gain) du filtre $\mathcal{F}$ en fonction de la fréquence.

2.4. - *Exemples* :

i) Tout filtre à réponse percussionnelle [5] [6], défini comme convolution d'une mesure complexe avec le signal, est un filtre linéaire à gain borné g tel que $u \mapsto g(-u)$ est la transformée de Fourier de m. Ainsi :

$$\mathcal{F}\, X(t) = \int_{\mathbb{R}} X(t-s)\, m(ds) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu}\, g(u)\, \mu(du) \; ,$$

où X est un processus harmonisable de mesure stochastique μ .

ii) Un filtre "passe-raie" est défini par un gain g_{u_o} fonction indicatrice d'une raie (ou fréquence) u_o .

$$\mathcal{F}_{u_o} X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} g_{u_o}(u)\, \mu(du) = e^{itu_o}.\mu(\{u_o\}) .$$

iii) Un filtre "passe-bande" est défini par un gain g_{u_o,u_1} fonction indicatrice d'une"bande" de fréquences $[u_o,u_1]$, $u_1 < u_o$:

$$\mathcal{F}_{u_o,u_1} X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} g_{u_o,u_1}(u)\, \mu(du) = \int_{[u_o,u_1]} e^{itu} \mu(du) .$$

iv) Les filtres "passe-raie" et "passe-bande" peuvent être obtenus comme limite d'une suite de filtres à réponse percussionnelle ((théorème I.4.2) et [5 : VIII. 2.3]).

Grâce aux théories de l'intégration par rapport à une mesure vectorielle [13] et de l'intégration par rapport à une bimesure spectrale [27 : § IV.IV] , nous obtenons aisément la généralisation suivante de la formule des interférences donnée par A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [5 : chap. VII], [6] pour les processus fortement harmonisables.

2.5. - *Formule des interférences*. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres linéaires qui possèdent des gains bornés, respectivement g_1 et g_2. Pour tout processus harmonisable X de bimesure spectrale M , nous avons :

$$(6.1)\quad E(\mathcal{F}_1 X(t_1).\overline{\mathcal{F}_2 X(t_2)}) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g_1(u_1)\, \overline{g_2(u_2)}\, e^{i(t_1u_1-t_2u_2)} M(du_1du_2) .$$

3 - PROCESSUS ASYMPTOTIQUEMENT STATIONNAIRES - PROCESSUS HARMONISABLES A BIMESURE SPECTRALE σ-FINIE

Désirant étudier la moyenne temporelle de la covariance $E(F_1X(t+h).\overline{F_2X(t)})$, pour h fixé, entre deux filtrés d'un processus harmonisable, nous allons dans ce paragraphe définir une famille de processus harmonisables pour lesquels cette moyenne temporelle converge. Et nous commençons par le cas où les filtres sont égaux à l'identité ($g_1 \equiv 1$ et $g_2 \equiv 1$). Dans le paragraphe 5 nous passerons au cas de filtres quelconques à gain borné.

Généralisant la notion de processus stationnaire, les processus asymptotiquement stationnaires ont été introduits par J. Kampé de Fériet, F.N. Frenkiel [22] et E. Parzen [33]. Reprenant la définition donnée par Yu A. Rozanov [36] posons :

3.1. *Définition*.- Un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ est dit asymptotiquement stationnaire lorsqu'il existe une fonction continue $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout h de $\mathbb{R}$ on ait :

$$r(h) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(X(s+h).\overline{X(s)})\, ds \quad . \tag{6.2}$$

Dans ce cas, la fonction r appelée fonction de corrélation asymptotique de X , est définie positive et continue, le théorème de Bochner s'applique, et il existe une unique mesure m positive et bornée sur $B(\mathbb{R})$, que nous appellerons la mesure spectrale asymptotique de X , vérifiant :

$$r(h) = \int_{\mathbb{R}} e^{ihu}\, m(du) \quad .$$

Le premier résultat nous permettra de prouver le théorème 3.7.

3.2. *Lemme*.- Lorsqu'une suite bornée $(X_n(t) : t \in \mathbb{R})$ de processus asymptotiquement stationnaires sur $L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ converge vers un processus $(X(t) : t \in \mathbb{R})$ uniformément sur $\mathbb{R}$, alors le processus $(X(t) : t \in \mathbb{R})$ est asymptotiquement stationnaire.

De plus $\lim_{n\to+\infty} r_n(h) = r(h)$ uniformément par rapport à h dans $\mathbb{R}$, où r_n et r sont les fonctions de corrélation asymptotique, respectives de X_n et de X.

Preuve : Pour chaque entier n, posons :

$K_n(t,s) = E(X_n(t) \,.\, \overline{X_n(s)})$ et $K(t,s) = E(X(t) \,.\, \overline{X(s)})$.

1) Montrons la convergence de la moyenne temporelle de $E(X(s+h).\overline{X(s)})$ pour tout h de $\mathbb{R}$. Soient t, $t' > 0$, pour tout $n \geq 0$ nous avons :

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t K(s+h,s)\,ds - \frac{1}{t'}\int_0^{t'} K(s+h,s)\,ds\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{t}\int_0^t (K(s+h,s) - K_n(s+h,s))ds\right| + \left|\frac{1}{t'}\int_0^{t'} (K(s+h,s) - K_n(s+h,s))ds\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{t}\int_0^t K_n(s+h,s)\,ds - \frac{1}{t'}\int_0^{t'} K_n(s+h,s)\,ds\right| .$$

Puisque la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et converge vers X uniformément sur $\mathbb{R}$, la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers K uniformément sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \geq 0$ tel que :

$$n > n(\varepsilon) \Longrightarrow ||K_n - K||_\infty \leq \varepsilon/3 .$$

donc pour tous les $n > n(\varepsilon)$, $t > 0$, et h de $\mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t K(s+h,s) - K_n(s+h,s)\, ds\right| \leqslant \varepsilon/3 \quad .$$

De plus les processus X_n sont asymptotiquement stationnaires, donc étant donnés h, et $n > n(\varepsilon)$, il existe $t(n,\varepsilon,h) > 0$ tel que pour tous les $t,\ t' > t(n,\varepsilon,h)$:

$$(6.3) \qquad \left|\frac{1}{t}\int_0^t K_n(s+h,s)\, ds - \frac{1}{t'}\int_0^{t'} K_n(s+h,s)\, ds\right| < \varepsilon/3 \ .$$

Ainsi regroupant ce qui précède, nous obtenons qu'étant donnés h, et $\varepsilon > 0$, il existe $t(\varepsilon,h) > 0$ tel que pour tous les $t,\ t' > t(\varepsilon,h)$:

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t K(s+h,s)\, ds - \frac{1}{t'}\int_0^{t'} K(s+h,s)\, ds\right| < \varepsilon \quad .$$

Par conséquent, d'après la propriété de Cauchy, pour tout h de $\mathbb{R}$, la moyenne $\frac{1}{t}\int_0^t K(s+h,s)\, ds$ converge vers un nombre $r(h)$ lorsque t tend vers l'infini.

2) Montrons maintenant la continuité de la fonction r , ce qui achèvera la démonstration.

Pour tout réel h et tout entier n , on a :

$$|r(h)-r_n(h)| \leqslant ||K-K_n||_\infty \quad ,$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} ||K-K_n||_\infty = 0 \ ,$$

donc la suite de fonctions continues $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction r uniformément sur $\mathbb{R}$. Ainsi r est continue. ■

Yu. A. Rozanov [36] a établi que tout processus fortement harmonisable X est asymptotiquement stationnaire. Nous allons généraliser ce résultat en introduisant une classe de processus harmonisables qui sont des limites uniformes sur $\mathbb{R}$ de processus fortement harmonisables. Ainsi d'après le lemme précédent, les processus de cette classe sont asymptotiquement stationnaires.

3.3. *Définition*.- Une bimesure spectrale M définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est dite σ-finie lorsqu'il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui vérifient :

(6.4) pour tout n de $\mathbb{N}$, $B_n \subset B_{n+1}$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathbb{R}$,

(6.5) pour tout n , la variation de Vitali de M sur $B_n \times B_n$ est finie.

Dans ce cas, pour tout n , la restriction de la bimesure spectrale M à $\mathcal{B}(B_n) \times \mathcal{B}(B_n)$ est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{B}(B_n \times B_n)$.

3.4 - *Exemples* :

a) La mesure spectrale d'un processus fortement harmonisable est σ-finie.

b) L'exemple suivant, dû à D. A. Edwards [14] montre l'existence de processus harmonisables à bimesure σ-finie qui ne sont pas fortement harmonisables.

Considérons la famille définie positive de nombres réels :

$$c_{jj} = \frac{\pi}{2j(\mathrm{Log}(j+1))^2} \quad , \qquad j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} ,$$

$$c_{jk} = \frac{\sin(\pi(j-k)/2)}{(j-k)\ j^{1/2}\ k^{1/2}\ \mathrm{Log}(j+1)\ \mathrm{Log}(k+1)} \quad , \quad j \neq k \ , \ j \ , \ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} .$$

Alors, il existe un espace probabilisé (S,F,P) et une suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $L^2_{\mathbb{R}}(S,F,P)$ telle que $E(x_j.x_k) = c_{jk}$. Nous pouvons définir une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{R}}(S,F,P)$ par $\mu(B) = \sum_{j\in B} x_j$ pour tout borélien B , la famille $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *étant sommable*.

Puisque $\sum_j \sum_k |c_{jk}| = +\infty$, la variation de Vitali sur $\mathbb{R}^2$ de la bimesure spectrale M de μ est infinie. De plus, puisque μ est discrète, M est σ-finie.

Ainsi le processus harmonisable de mesure stochastique μ a une bimesure spectrale σ-finie mais n'est pas fortement harmonisable.

3.5 - *Notations*.- Considérons une bimesure spectrale M σ-finie associée à une mesure stochastique $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ [27 : th. IV III.6] [34] , et une suite (B_n) de boréliens satisfaisant les conditions (6.4) et (6.5).

Pour chaque entier n , notons μ_n la mesure stochastique définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par $\mu_n(B) = \mu(B \cap B_n)$. Sa bimesure spectrale M_n vérifie : $M_n(A \times B) = M((A \cap B_n) \times (B \cap B_n))$ pour tous les boréliens A et B. Ainsi la variation de Vitali sur $\mathbb{R}^2$ de la bimesure spectrale M_n est finie : M_n est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ que nous noterons encore M_n.

Si X désigne le processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ , pour chaque entier n , notons X_n le processus fortement harmonisable de mesure stochastique spectrale μ_n .

Le résultat qui suit, raffine dans un cas particulier - à savoir les processus harmonisables à bimesure σ-finie - le théorème de H. Niemi [30 : th. 3.41] que nous avons généralisé au chapitre II.

3.6. *Proposition*.- Pour tout processus harmonisable X à bimesure σ-finie, il existe une suite bornée de processus fortement harmonisables, qui converge vers X uniformément sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Avec les notations 3.5, posons $B'_n = \mathbb{R} \setminus B_n$. A l'aide de la semi-variation $||\mu||$ de la mesure stochastique μ [13 : th. IV. 10.8], nous obtenons pour tout t de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$ les majorations suivantes :

$$E(|X_n(t)|^2) \leqslant (||\mu||(B_n))^2 \leqslant (||\mu||(\mathbb{R}))^2 < +\infty \ ,$$

$$E(|X(t)-X_n(t)|^2) \leqslant E(|\int_{B'_n} e^{itu}\,\mu(du)|^2) \leqslant (||\mu|| \ (B'_n))^2 \ .$$

Puisque la suite de boréliens $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers l'ensemble vide, lorsque n tend vers l'infini, la suite de réels $(||\mu||(B'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 [13, lemma IV.10.5], et donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans $L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ uniformément par rapport à t de $\mathbb{R}$.

Ainsi comme corollaire du lemme 3.2. et de la proposition 3.6. on a :

3.7. *Théorème*.- Tout processus harmonisable à bimesure σ-finie est asymptotiquement stationnaire.

3.8. *Remarques*

i) Un procesus harmonisable n'est pas toujours à bimesure σ-finie. En effet, H. Niemi a donné un exemple de processus harmonisable à temps discret qui n'est pas asymptotiquement stationnaire (théorie à temps discret) [32 : 1.4]. Comme le théorème 3.7 reste valable dans la théorie à temps discret, sa bimesure spectrale n'est pas σ-finie. Par conséquent, μ étant sa mesure stochastique spectrale (définie sur $\mathcal{B}([-\pi,\pi])$), la bimesure spectrale du processus harmonisable (à temps continu) défini par

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu}\, \mu(du) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad ,$$

n'est pas σ-finie. Nous ne savons pas si X est asymptotiquement stationnaire (théorie à temps continu).

ii) Ainsi nous résumons les relations entre différentes notions de stationnarité par l'arbre suivant :

$$\left\{\text{stationnaire}\right\} \underset{\neq}{\subset} \left\{\begin{array}{c}\text{fortement}\\ \text{harmonisable}\end{array}\right\} \underset{\neq}{\subset} \left\{\begin{array}{c}\text{harmonisable}\\ \text{avec une}\\ \text{bimesure}\\ \sigma\text{-finie}\end{array}\right\} \begin{array}{l} \underset{\neq}{\subset} \left\{\text{harmonisable}\right\} \\ \\ \underset{\neq}{\subset} \left\{\begin{array}{c}\text{asymptotiquement}\\ \text{stationnaire}\end{array}\right\}\end{array}$$

H. Niemi nous a informé de l'existence d'exemples de processus harmonisables qui ne sont pas asymptotiquement stationnaires.

iii) Dans ce paragraphe, nous n'avons pas donné d'information sur la mesure spectrale asymptotique d'un processus harmonisable à bimesure σ-finie. Ceci est l'un des objets des paragraphes suivants.

4 - BIMESURE σ-FINIE ET BISSECTRICE

Yu. A. Rozanov a prouvé que la mesure spectrale asymptotique d'un processus fortement harmonisable est la restriction à la première bissectrice

$\Delta = \{(u,v) : u = v\}$ de sa mesure spectrale M [36]. Ainsi :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(X(s+h).\overline{X(s)})\, ds = \iint_\Delta e^{ihu}\, M(du,dv) \quad .$$

Dans le cas d'un processus harmonisable général, l'un des problèmes qui se posent est : comment pouvons nous définir "la restriction sur la première bissectrice de la bimesure spectrale" ?

Ce problème fut aussi soulevé par H. Niemi [32 : § 2] qui a introduit la notion de mesure(s) diagonale(s) d'une bimesure spectrale quelconque. Il reste largement ouvert : l'unicité éventuelle d'une telle mesure diagonale n'étant pas traitée.

Nous présentons, ici, une réponse à la question posée, la solution proposée étant indépendante des travaux de H. Niemi.

4.1. Lemme.- Soit M une bimesure spectrale σ-finie et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens vérifiant (6.4) et (6.5). Considérons la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ caractérisées par :

$$M_n(A \times B) = M((A \cap B_n) \times (B \cap B_n)) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad A \ , B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Alors il existe une unique mesure m positive bornée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que :

$$m(B \cap B_n) = M_n((B \times B) \cap \Delta) \ , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad .$$

Preuve : Nous allons montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restrictions à la première bissectrice Δ des mesures M_n , $n \in \mathbb{N}$, définies par :

$$m_n(B) = M_n((B \times B) \cap \Delta) \ , \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

est convergente.

La difficulté est de montrer que cette suite est bornée. Or, d'après [34 : prop. 5.6] et [26 : Domination lemma], la bimesure spectrale M est dominée par une mesure m_d positive bornée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ c'est-à-dire telle que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ borélienne bornée :

$$0 \leqslant \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(t)\ \overline{f(s)}\ M(dt,ds) \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\ m_d(dt) \quad ,$$

et en particulier pour tout borélien B , on a :

$$0 \leqslant M(B \times B) \leqslant m_d(B) \quad .$$

Posons $I_q^r = \left]\frac{r}{2^q} , \frac{r+1}{2^q}\right]$, pour r de $\mathbb{Z}$ et q de $\mathbb{N}$. Alors pour chaque q , les intervalles I_q^r , $r \in \mathbb{Z}$, forment une partition de $\mathbb{R}$, et la suite $S = (\sum_{r\in\mathbb{Z}} I_q^r \times I_q^r)_{q\in\mathbb{N}}$ décroît vers la première bissectrice Δ lorsque q tend vers l'infini.

Etant donnés un borélien B , et deux entiers n et q , la mesure M_n vérifie :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant M_n\Big(\sum_{r\in\mathbb{Z}} (B \cap I_q^r) \times (B \cap I_q^r)\Big) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} M((B\cap I_q^r \cap B_n) \times (B \cap I_q^r \cap B_n)) \\ &\leqslant \sum_{r\in\mathbb{Z}} m_d(B \cap I_q^r \cap B_n) \\ &= m_d(B \cap B_n) \ . \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque q tend vers l'infini, nous obtenons :

$$0 \leqslant m_n(B) \leqslant m_d(B \cap B_n) \leqslant m_d(\mathbb{R}) \quad .$$

Les mesures m_n , $n \in \mathbb{N}$, sont donc des mesures bornées positives. De plus la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque :

$$m_n(B) = m_{n+1}(B \cap B_{n+1}) \leqslant m_{n+1}(B) \ , \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donc, pour chaque borélien B, la suite croissante de réels $(m_n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre positif $m(B)$, et d'après le théorème de Vitali-Hahn-Saks [13 : cor. III.7.3], la fonction d'ensemble m est une mesure positive bornée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

De plus cette mesure m vérifie pour tout entier n et tout borélien B :

$$m(B \cap B_n) = m_n(B) = M_n((B \times B) \cap \Delta) ,$$

et donc elle est unique.

4.2. Remarque : La mesure m construite au lemme 4.1. semble dépendre de la suite de boréliens $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (6.4) et (6.5). Il n'en est rien. Pour montrer l'indépendance de cette mesure par rapport à $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous allons prouver qu'elle est la mesure spectrale asymptotique du processus harmonisable X à bimesure M σ-finie, qui est asymptotiquement stationnaire (théorème 3.7).

5 - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA MOYENNE TEMPORELLE DE LA COVARIANCE DE DEUX FILTRES D'UN PROCESSUS HARMONISABLE A BIMESURE σ-FINIE

En généralisant, le théorème [5 : th. IX.IV p. 388] de A. Blanc-Lapierre le résultat suivant permet une analyse du spectre de puissance d'un processus harmonisable à bimesure σ-finie.

5.1. Théorème.- Soient un processus harmonisable X à bimesure σ-finie M, et une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens vérifiant (6.4) et (6.5).

Alors la mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ construite au lemme 4.1 à partir de M et de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est la mesure spectrale asymptotique du processus X qui est asymptotiquement stationnaire. Elle ne dépend pas de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De plus, pour tous les filtres linéaires F_1 et F_2 dont les gains respectifs g_1 et g_2 sont bornés, nous avons uniformément par rapport à h de $\mathbb{R}$:

$$(6.6) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t E(F_1\, X(s+h).\overline{F_2\, X(s)})\, ds = \int_{\mathbb{R}} e^{ihu}\, g_1(u)\, \overline{g_2(u)}\, m(du)$$

Preuve :

i) Supposons pour commencer que le processus X soit fortement harmonisable. Sa bimesure spectrale est alors prolongeable en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et la mesure m qui vérifie le lemme 4.1. ne dépend pas du choix de la famille de boréliens $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et constitue la restriction de M à la première bissectrice.

Par le théorème de Fubini classique, nous obtenons pour tout h de $\mathbb{R}$ et tout $t > 0$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t E(F_1\, X(s+h).\overline{F_2\, X(s)})\, ds = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{ihu}\, g_1(u)\, \overline{g_2(v)} \left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{is(u-v)}\, ds\right) M(du,dv)\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\Delta_\varepsilon = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |u-v| < \varepsilon\}$ et $\Delta'_\varepsilon = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq |u-v|\}$. Alors, nous avons :

pour $(u,v) \in \Delta_\varepsilon$, $\quad \left|\frac{1}{t}\int_0^t e^{is(u-v)}\,ds\right| \leqslant 1$,

pour $(u,v) \in \Delta'_\varepsilon$, $\quad \left|\frac{1}{t}\int_0^t e^{is(u-v)}\,ds\right| \leqslant \frac{2}{\varepsilon t}$.

Ainsi pour tout h de $\mathbb{R}$, tout $t>0$ et tout $\varepsilon>0$, nous obtenons :

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t E(F_1\, X(s+h)\,.\,\overline{F_2\, X(s)})\,ds - \int e^{ihu}\, g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\, m(du)\right|$$

$$= \left|\iint_{\{u\neq v\}} e^{ihu}\, g_1(u)\,\overline{g_2(v)}\,\left(\frac{1}{t}\int_0^t e^{is(u-v)}\,ds\right) M(du,dv)\right|$$

$$\leqslant \|g_1\|_\infty \,.\, \|g_2\|_\infty \,.\, \left(\frac{2}{\varepsilon t}\,|M|\,(\Delta'_\varepsilon) + |M|\,(\Delta_\varepsilon)\right) ,$$

où $|M|$ est la variation totale de la mesure complexe M définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{t}}$, et en faisant tendre t vers l'infini, le dernier membre converge vers 0. La proposition est donc vérifiée pour les processus fortement harmonisables.

ii) Supposons maintenant que le processus X soit harmonisable à bimesure σ-finie notée M. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens vérifiant (6.4) et (6.5) , et utilisons les notations posées en 3.5 et 4.1.

La covariance entre les filtrés F_1X et F_2X vérifie, pour tout h de $\mathbb{R}$, tout $t>0$ et tout $n>0$:

$$(6.7)\quad \left|\frac{1}{t}\int_0^t E(F_1X(s+h)\,.\,\overline{F_2X(s)})\,ds - \int_{\mathbb{R}} e^{ihu}\, g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\, m(du)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{t}\int_0^t E(F_1X(s+h)\,.\,\overline{F_2X(s)} - F_1X_n(s+h)\,.\,\overline{F_2X_n(s)})\,ds\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{t}\int_0^t E(F_1X_n(s+h)\,.\,\overline{F_2X_n(s)})\,ds - \int_{\mathbb{R}} e^{ihu}\, g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\, m_n(du)\right|$$

$$+ \left|\int_{\mathbb{R}} e^{ihu}\, g_1(u)\,\overline{g_2(u)}\,(m_n - m)\,(du)\right| .$$

Or pour tout $n \geqslant 0$, tout s de $\mathbb{R}$ et $j = 1,2$, on a :

$$E(|\mathcal{F}_j X_n(s) - \mathcal{F}_j X(s)|^2) = E(|\int_{B'_n} e^{isu}\, g_j(u)\, \mu(du)|^2)$$

$$\leqslant ||g_j||^2_\infty \cdot (||\mu||(B'_n))^2 \quad ,$$

de plus

$$E(|\mathcal{F}_j X_n(s)|^2) \leqslant ||g_j||^2_\infty \cdot (||\mu||(\mathbb{R}))^2 \quad .$$

Ainsi, uniformément par rapport à s et h de $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} E(\mathcal{F}_1 X_n(s+h) \cdot \overline{\mathcal{F}_2 X_n(s)}) = E(\mathcal{F}_1 X(s+h) \cdot \overline{\mathcal{F}_2 X(s)}) \quad .$$

Par conséquent, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n > n(\varepsilon)$, tout $t > 0$ et tout h de $\mathbb{R}$,

$$(6.8) \quad |\frac{1}{t}\int_0^t E(\mathcal{F}_1 X(s+h) . \overline{\mathcal{F}_2 X(s)} - \mathcal{F}_1 X_n(s+h) \cdot \overline{\mathcal{F}_2 X(s)})\, ds| < \varepsilon/3 \quad .$$

De plus, d'après la partie i de cette démonstration, pour n fixé, il existe $t(n,\varepsilon) > 0$ tel que pour $t > t(n,\varepsilon)$ et h de $\mathbb{R}$,

$$(6.9) \quad |\frac{1}{t}\int_0^t E(\mathcal{F}_1 X_n(s+h). \overline{\mathcal{F}_2 X_n(s)})\, ds - \int e^{iuh}\, g_1(u)\, \overline{g_2(u)}\, m_n(du)| < \varepsilon/3 \quad .$$

Enfin, puisque pour tout h de $\mathbb{R}$ le lemme 4.1. nous donne :

$$|\int_{\mathbb{R}} e^{iuh}\, g_1(u)\, \overline{g_2(u)}\, (m_n - m)\, (du)| = |\int_{B'_n} e^{iuh}\, g_1(u)\, \overline{g_2(u)}\, m(du)|$$

$$\leqslant ||g_1||_\infty \cdot ||g_2||_\infty \cdot m(B'_n) \quad ,$$

la décroissance vers l'ensemble vide de la suite de boréliens $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique qu'il existe un entier $n'(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > n'(\varepsilon)$ et tout h de $\mathbb{R}$:

$$(6.10) \qquad \left|\int e^{iuh}\, g_1(u)\, \overline{g_2(u)}\, (m_n - m)\, (du)\right| < \varepsilon/3 .$$

Les relations (6.7), (6.8), (6.9) et (6.10) impliquent que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout h de $\mathbb{R}$ et tout $t > t(\varepsilon)$,

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t E(F_1X(s+h)\ .\ \overline{F_2X(s)})\, ds - \int e^{ihu}\, g_1(u)\, \overline{g_2(u)}\, m(du)\right| < \varepsilon .$$

Donc la relation (6.6) est satisfaite.

De plus, en choisissant les gains g_1 et g_2 constants de valeur 1, nous obtenons que le processus X est asymptotiquement stationnaire de mesure spectrale asymptotique m , qui est unique et donc ne dépend pas du choix de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ce qui achève la démonstration. ■

5.3. - *Quelques remarques et questions sur la puissance.*

1 - *Espérance de la puissance instantanée*

L'espérance de la puissance instantanée d'un processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ est définie comme étant $E(|X(t)|^2)$, à l'instant t [5].

Lorsque le processus X est harmonisable, celle-ci est bornée, et si M désigne la bimesure spectrale de X , l'espérance de la puissance instantanée s'exprime sous la forme :

$$E(|X(t)|^2) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{it(u-v)}\, M(du,dv) \quad ;$$

et pour un filtré linéaire de gain borné g :

$$E(|\mathcal{F}X(t)|^2) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{it(u-v)}\, g(u)\,\overline{g(v)}\, M(du,dv) \quad .$$

Or, si X est stationnaire de mesure spectrale m (qui est positive), on obtient :

$$E(|\mathcal{F}X(t)|^2) = \int_{\mathbb{R}} |g(u)|^2\, m(du) \ .$$

Ainsi en utilisant des filtres passe-raie et passe-bande, on constate que chaque fréquence apporte sa contribution à l'espérance de la puissance instantanée, on dit que l'espérance de la puissance instantanée d'un processus stationnaire est localisable sur l'axe des fréquences [5 : p. 386].

Dans le cas général, l'espérance de la puissance instantanée d'un processus harmonisable n'est pas toujours localisable sur l'axe des fréquences. Il apparaît que les différences entre fréquences interviennent [3]. Il serait intéressant d'approfondir cette étude.

2 - *Moyenne temporelle de l'espérance de la puissance instantanée.*

Lorsque le processus $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,\mathcal{F},P)$ est harmonisable de bimesure spectrale M , la moyenne temporelle sur $[0,t]$ de l'espérance de la puissance instantanée est donnée par :

$$\frac{1}{t}\int_0^t E(|X(s)|^2)\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{is(u-v)}\, M(du,dv)\right) ds \ .$$

Dans le cas général, M n'étant pas une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on ne peut pas permuter les intégrales, ce qui pose un problème dans le cas général.

Or nous avons vu que dans le cas d'un processus harmonisable X à bimesure σ-finie, si m désigne la mesure spectrale asymptotique de X (corollaire 5.2), on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(|X(s)|^2)\, ds = m(\mathbb{R}) ,$$

et en filtrant avec un gain g borné,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(|FX(s)|^2)\, ds = \int_{\mathbb{R}} |g(u)|^2\, m(du) .$$

Ainsi dans ce cas la moyenne temporelle de l'espérance de la puissance instantanée de X existe et est localisable sur l'axe des fréquences. La mesure m est appelée par A. Blanc-Lapierre la mesure spectrale de la puissance moyenne de X.

Que se passe-t-il dans le cas général où le processus harmonisable X n'est plus supposé être à bimesure spectrale σ-finie ?

CHAPITRE VII

SUR QUELQUES PROPRIETES ERGODIQUES DE CERTAINS SIGNAUX HARMONISABLES.

I - INTRODUCTION

L'observateur qui étudie un phénomène aléatoire harmonisable enregistre en fait un signal qui est une trajectoire tronquée du filtré d'un processus harmonisable. (On ne considère ici que des filtres linéaires à gain borné). Dans le meilleur des cas on dispose d'un petit nombre d'enregistrements. On ne peut donc étudier la répartition du spectre de puissance, au moyen de moyennes temporelles et non au moyen d'espérances mathématiques, qu'à partir d'une ou plusieurs trajectoires (cf. A. Blanc-Lapierre [5]).

A. Blanc-Lapierre [5 : ch. VIII] [3] examina les problèmes liés à la détermination expérimentale du spectre de puissance d'un signal. Dans ce chapitre, en application des résultats obtenus précédemment pour la L.F.G.N., nous allons prouver que cette étude est possible pour une classe de processus fortement harmonisables plus vaste que celle présentée par A. Blanc-Lapierre dans [5 : th. VIII 8.VI. p. 395].

Ce chapitre comporte deux paragraphes. Le premier nous donne des conditions suffisantes pour que la moyenne temporelle de la trajectoire du filtré d'un processus harmonisable converge presque sûrement. Le second est consacré à l'établissement de conditions suffisantes pour que la moyenne temporelle de la puissance d'une trajectoire converge.

Les filtrés d'un processus harmonisable, étant des processus harmonisables, sont continus en m.q. et admettent des versions mesurables. Dans ce chapitre nous considérons toujours des versions mesurables de ces processus.

2 - L.F.G.N. POUR LES FILTRES D'UN PROCESSUS HARMONISABLE

Des critères pour la L.F.G.N. donnés au théorème IV.4.1., nous pouvons déduire des conditions suffisantes pour que les moyennes temporelles des trajectoires des filtrés d'un processus harmonisable convergent P-presque-sûrement.

2.1. Proposition.- Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S, \mathcal{F}, P)$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale μ telle que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :

(7.1) 1) il existe trois réels ε , b_o , $c > 0$ tels que :

i) $0 < b < b_o \implies ||\mu|| (\{0 < |u| < b\}) \leq c(\text{Log Log } \frac{1}{b})^{-(1+\varepsilon)/2}$,

ii) $0 < a < b < b_o \implies ||\mu|| (\{a < |u| < b\})$

$$\leq c(\frac{\text{Log } a}{\text{Log } b} - 1)^{1/2} \cdot (\text{Log Log } \frac{1}{b})^{-(3+\varepsilon)/2} ,$$

(7.2) 2) il existe une mesure positive M_o sur $(\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ satisfaisant :

i) pour tout A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$,

$$(||\mu||(A))^2 \leq M_o(A \times A) ,$$

ii) $\exists\, b_o \in \,]0,e^{-1}]$, $\displaystyle\iint_{\{0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log\,Log}\frac{1}{|u|} \,.\, \mathrm{Log\,Log}\frac{1}{|v|}\, M_o(du,dv) < +\infty$.

Alors pour tout filtre linéaire F de gain borné g , $F\,X$ vérifie :

$$\lim_{t\to+\infty} \text{P-p.s.}\ \frac{1}{t}\int_0^t F\,X(s)\,ds = g(0)\ .\ \mu(\{0\})\ .$$

Preuve : Nous avons vu (VI.2) que le filtré $F\,X$ est harmonisable de mesure stochastique $g.\mu$. Sa bimesure spectrale est définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$(A,B) \longmapsto \iint_{A\times B} g(u)\ \overline{g(v)}\ M(du,dv) \quad .$$

De plus pour tout borélien B ,

$$\left|\iint_{B\times B} g(u)\ \overline{g(v)}\ M(du,dv)\right| \leq E\left(\left|\int_B g(u)\ \mu(du)\right|^2\right) \leq ||g||_\infty^2\ .\ (||\mu||(B))^2\ .$$

Donc lorsque l'une des deux hypothèses énoncées est vérifiée, le théorème IV.4.1. permet de conclure. ■

3 - ESTIMATION DE LA MOYENNE TEMPORELLE DE LA PUISSANCE D'UNE TRAJECTOIRE DE CERTAINS PROCESSUS HARMONISABLES

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique de la moyenne temporelle de la puissance instantanée d'une trajectoire d'un processus fortement harmonisable qui possède de "bonnes propriétés" de fluctuation (conditions (7.3), (7.4), (7.5)). Pour cela nous filtrons le processus, afin de déterminer la contribution de chaque fréquence.

Nous commençons par établir le lemme technique suivant :

3.1. Lemme - (*Théorème de transfert pour les mesures hilbertiennes*).

Soient un espace de Hilbert H, deux espaces mesurables $(S,\mathcal{F})$ et $(\Omega,\mathcal{A})$, une mesure hilbertienne $\mu : \mathcal{F} \to H$ et une fonction mesurable $h : S \longrightarrow \Omega$.

Alors la fonction d'ensemble $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow H$ définie par $\nu(A) = \mu(\{h \in A\})$ est une mesure hilbertienne.

De plus, pour toute fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, telle que $|f \circ h|$ soit μ-intégrable, la fonction $f \circ h$ est μ-intégrable, la fonction f est ν-intégrable et pour tout A de $\mathcal{A}$:

$$\int_A f(\omega)\ \nu(d\omega) = \int_{\{h\in A\}} f \circ h(s)\ \mu(ds) \quad .$$

Preuve : Il est évident que μ est une mesure hilbertienne. Prouvons la deuxième partie du lemme.

i) Si f est étagée, on constate aisément que pour tout A de $\mathcal{A}$,

$$\int_A f\, d\nu = \int_{\{h\in A\}} f \circ h\, d\mu \quad .$$

ii) Supposons que f soit positive et que $f \circ h$ soit μ-intégrable. Il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge partout vers f. Les fonctions $f_n \circ h$ sont étagées positives et forment une suite croissante qui converge partout vers la fonction μ-intégrable $f \circ h$.

D'après i), pour tout A de $\mathcal{A}$ et tout entier n, on a :

$$\int_A f_n\, d\nu = \int_{\{h\in A\}} f_n \circ h\, d\mu \quad .$$

Or par le théorème de convergence dominée pour les mesures vectorielles [13 : th. IV.10.10] nous obtenons :

$$\int_{\{h\in A\}} f \circ h \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\{h\in A\}} f_n \circ h \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n \, d\nu \quad .$$

Ainsi, d'après la définition de l'intégration par rapport à une mesure hilbertienne [13 : def. IV. 10.7] , la fonction f est ν-intégrable et pour tout A de $\mathcal{A}$, nous avons :

$$\int_A f \, d\nu = \int_{\{h\in A\}} f \circ h \, d\mu \quad .$$

iii) Dans le cas général, puisque $|f \circ h|$ est μ-intégrable, la fonction $|f|$ est ν-intégrable, d'après ii). D'après [27 : cor. IV.II.7], la fonction $f \circ h$ est μ-intégrable, et f est ν-intégrable. De plus, en considérant les parties réelle positive, réelle négative, imaginaire positive et imaginaire négative de la fonction f , la partie ii) nous permet de conclure.■

Ainsi, on peut déduire aisément du lemme précédent :

3.2. <u>*Lemme*</u>.- <u>Soient deux espaces mesurables</u> (S,F) <u>et</u> $(\Omega,\mathcal{A})$ <u>une mesure stochastique</u> $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ <u>et une fonction mesurable</u> $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Pour toute fonction mesurable bornée</u> $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, <u>le processus</u> $Y : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ <u>défini par</u> :

$$Y(t) = \int_\Omega g(u) \, e^{ith(u)} \, \mu(du) \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

<u>est harmonisable de mesure stochastique spectrale</u> $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$

définie par $\nu(A) = \int_{\{h\in A\}} g(u)\,\mu(du)$.

De plus

$$||\nu||\ (A) \leq \sup_{u\in A} |g(u)| \times ||\mu||\ (\{h \in A\}) \quad .$$

Nous pouvons maintenant prouver :

3.3. *Théorème* - *Sur le spectre de puissance de certains processus harmonisables.*

Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ un processus harmonisable de mesure stochastique spectrale $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ telle que :

(7.3) i) pour tout A de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(A) \in L^4_{\mathbb{C}}(S,F,P)$,

(7.4) ii) μ considérée comme une fonction à valeurs dans $L^4_{\mathbb{C}}(S,F,P)$ est une mesure vectorielle que nous noterons μ^* ,

(7.5) iii) la fonction $\mu.\bar{\mu} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$, définie par $\mu.\bar{\mu}(A \times B) = \mu(A)\ .\ \overline{\mu(B)}$, est prolongeable en une mesure stochastique notée $\mu^* \otimes \bar{\mu}^* : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S,F,P)$.

Si μ vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :

(7.6) 1) il existe trois réels ε, b_o , $c > 0$ tels que :

i) $0 < b < b_o \implies ||\mu^*\otimes\bar{\mu}^*||\ (\{0 < |u_1-u_2| < b\})$

$$\leq c(\text{Log Log } \tfrac{1}{b})^{-(1+\varepsilon)/2} ,$$

ii) $0 < a < b < b_o \implies ||\mu^*\otimes\bar{\mu}^*||\ (\{a < |u_1-u_2| < b\})$

$$\leq c\left(\frac{\text{Log } a}{\text{Log } b} - 1\right)^{1/2} . (\text{Log Log } \tfrac{1}{b})^{-(3+\varepsilon)/2} ,$$

(7.7) 2) il existe une mesure positive finie M_o sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ satisfaisant :

i) pour tout A de l'algèbre engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\|\mu^* \otimes \bar{\mu}^*\| \ (\{|u_1 - u_2| \in A\}) \leq (M_o(A \times A))^{1/2} ,$$

ii) $\exists b_o \in]0, e^{-1}]$, $\displaystyle\iint_{\{0<|u|<b_o\}^2} \mathrm{Log\,Log}\,\frac{1}{|u_1|}\ \mathrm{Log\,Log}\,\frac{1}{|u_2|}\ M_o(du_1, du_2) < +\infty$.

Alors pour tous les filtres linéaires F_1 et F_2 de gains bornés respectifs g_1 et g_2, on a :

$$(7.8) \qquad \lim_{t\to+\infty} \text{P-p.s.}\ \frac{1}{t}\int_0^t F_1X(s).\overline{F_2X(s)}\ ds = \int_{\{u_1=u_2\}} g_1(u_1)\overline{g_2(u_2)}\ \mu^* \otimes \bar{\mu}^*(du_1, du_2) .$$

De plus pour tous les filtres F_1 et F_2 cette limite est une variable aléatoire constante P-p.s. si et seulement si

(7.9) $\forall B, B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mu^* \otimes \bar{\mu}^*((B \times B') \cap \Delta)$ est une constante nécessairement positive .

Preuve :

1) En utilisant l'inégalité de Schwarz, on constate que toute fonction complexe μ^*-intégrable est μ-intégrable [13 : déf. IV.10.7] et que les deux intégrales sont égales.

2) De plus, comme la fonction $\mu\,.\,\bar{\mu} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S, F, P)$ est prolongeable en une mesure $\mu^* \otimes \bar{\mu}^* : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(S, F, P)$, pour toutes les fonctions mesurables bornées f et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\ \mu(du)\ .\ \overline{\int_{\mathbb{R}} g(v)\ \mu(dv)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)\ \overline{g(v)}\ \mu^* \otimes \bar{\mu}^*(du, dv) .$$

i) En effet si f et g sont étagées, cette propriété est évidente.

ii) Lorsque f et g sont deux fonctions positives bornées, il existe deux suites croissantes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui convergent partout, respectivement, vers f et g. D'après le théorème de convergence dominée pour les mesures vectorielles [13 : th. IV.10.10] :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu^* \xrightarrow[n\to+\infty]{L^4} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu^* \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu^* \xrightarrow{L^4} \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu^* ,$$

$$(7.10) \qquad \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu^* . \overline{\int_{\mathbb{R}} g_n \, d\mu^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu^* . \overline{\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu^*} .$$

Comme $(f_n(u) \quad g_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en (u,v) étagées positives, qui converge partout vers la fonction bornée $f(u)\ g(v)$:

$$(7.11) \qquad \int_{\mathbb{R}^2} f_n(u) \ \overline{g_n(v)} \ \mu^*\otimes\bar{\mu}^*(du,dv) \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(u) \ \overline{g(v)} \ \mu^*\otimes\bar{\mu}^*(du,dv) .$$

Or pour les fonctions étagées nous avons vu que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(u) \ \mu(du) \ . \ \overline{\int_{\mathbb{R}} g_n(v) \ \mu(dv)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f_n(u) \quad \overline{g_n(v)} \ \mu^*\otimes\bar{\mu}^*(du,dv) .$$

Ainsi, l'unicité de la limite L^2 , et les relations (7.10) et (7.11) nous donnent :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \ \mu(du) \ . \ \overline{\int_{\mathbb{R}} g(v) \ \mu(dv)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u) \quad \overline{g(v)} \ \mu^*\otimes\bar{\mu}^*(du,dv) .$$

iii) On déduit aisément que la relation précédente est encore vraie lorsque f et g sont deux fonctions complexes mesurables et bornées.

3) Si F_1 et F_2 sont deux filtres de gains bornés g_1 et g_2 ,

$$\mathcal{F}_1X(s)\cdot\overline{\mathcal{F}_2X(s)} = \int_{\mathbb{R}} g_1(u_1)\, e^{isu_1}\, \mu(du_1) \cdot \overline{\int_{\mathbb{R}} g_2(u_2)\, e^{isu_2}\, \mu(du_2)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g_1(u_1)\, \overline{g_2(u_2)}\, e^{is(u_1-u_2)}\, \mu^*\otimes\bar{\mu}^*(du_1,du_2) \quad .$$

D'après le lemme 3.2., le processus $s \longmapsto \mathcal{F}_1X(s) \cdot \overline{\mathcal{F}_2X(s)}$ est harmonisable de mesure stochastique spectrale ν définie par :

$$\nu(B) = \iint_{\{u_1-u_2\in B\}} g_1(u_1)\, \overline{g_2(u_2)}\, \mu^*\otimes\bar{\mu}^*(du_1,du_2) \quad , \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

De plus pour tout borélien B de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$E(\nu(B)\cdot\overline{\nu(B)}) \leq ||g_1||_\infty \cdot ||g_2||_\infty \cdot ||\mu^*\otimes\bar{\mu}^*||^2(\{u_1-u_2 \in B\}) \ .$$

Si la mesure μ vérifie l'une des deux hypothèses (7.6) ou (7.7) du théorème, alors ν vérifie l'une des deux hypothèses (7.1) ou (7.2) de la proposition 2.1, et cette proposition s'applique au processus harmonisable $\mathcal{F}_1X \cdot \overline{\mathcal{F}_2X}$. En particulier, la relation (7.8) est vraie.

3) Sous les hypothèses du théorème, si la limite dans (7.8) est une variable aléatoire constante P-p.s. pour tous les filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, alors en considérant des filtres passe-bande on obtient la relation (7.9).

Réciproquement si la condition (7.9) est satisfaite, on vérifie aisément que la limite dans (7.8) est une variable aléatoire constante P-p.s. lorsque g_1 et g_2 sont étagées, puis lorsque ces deux fonctions mesurables bornées sont positives et enfin quelconques. ■

3.4. - *Remarque : Puissance d'une trajectoire.*

i) D'après les conditions (7.3) et (7.4) le processus X , étudié au théorème 3.3., est à valeurs dans $L^4_{\mathbb{C}}(S,F,P)$. De plus la condition (7.5) entraîne que ce processus est fortement harmonisable, sa mesure spectrale M étant :

$$M(A) = E(\mu^* \otimes \bar{\mu}^*(A)) \quad , \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \ .$$

La restriction ν de $\mu^* \otimes \bar{\mu}^*$ à la première bissectrice $\Delta = \{u_1=u_2\}$, définie par :

$$\nu(B) = \mu^* \otimes \bar{\mu}^*((B \times B) \cap \Delta) \quad , \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ,$$

est une mesure hilbertienne qui vérifie d'après (7.8) :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t F_1X(t) \ . \ \overline{F_2X(t)} \ dt = \int_{\mathbb{R}} g_1(u) \ \overline{g_2(u)} \ \nu(du) \quad ,$$

et la condition (7.9), se traduit par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad , \qquad \nu(B) = M((B \times B) \cap \{u_1 = u_2\}) \quad P\text{-p.s.} \ .$$

ii) Ainsi lorsque la condition (7.9) est satisfaite, nous constatons que nous pouvons estimer, en observant des trajectoires, la restriction m à la première bissectrice de la mesure spectrale M .

Donc, d'après le théorème VI.5.1. nous obtenons :

$$\lim_{t\to+\infty} P\text{-p.s.} \ \frac{1}{t} \int_0^t F_1X(s).\overline{F_2X(s)} \ ds = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(F_1X(s).\overline{F_2X(s)}) \ ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g_1(u) \ \overline{g_2(u)} \ m(du) \ ,$$

et la moyenne temporelle de la puissance instantanée d'une trajectoire de X est P-p.s. localisable sur l'axe des fréquences : pour tout filtre F de gain borné g , on a

$$\lim_{t\to+\infty} \text{P-p.s.}\ \frac{1}{t}\int_0^t |F X(s)|^2\, ds = \int_{\mathbb{R}} |g(u)|^2\, m(du) \quad .$$

iii) Sans les hypothèses (7.6) et (7.7), les conditions (7.3), (7.4) et (7.5) entraînent, d'après le théorème V.2.2., que :

$$\lim_{t\to+\infty} \text{P-p.s.}\ (t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t)^{-1} \int_0^t F_1X(s).\overline{F_2X(s)}\, ds = 0 \ .$$

Ainsi la moyenne temporelle de la puissance d'une trajectoire a P-p.s. pour ordre de grandeur $o(\operatorname{Log} \operatorname{Log} t)$ lorsque t tend vers l'infini :

$$\lim_{t\to+\infty} \text{P-p.s.}\ \frac{1}{t \operatorname{Log} \operatorname{Log} t} \int_0^t |X(s)|^2\, ds = 0 \quad .$$

iv) Les conditions posées sur le processus X et, en particulier, sur sa mesure stochastique sont fortes, affaiblir ces conditions est un problème ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

1 G. ALEXITS - Convergence problems of orthogonal series.
Pergamon Press (1961).

2 A. ARIMOTO - On the strong law of large numbers for harmonizable stochastic processes.
Keio Engineering Reports, 25 (1972), p. 101-111.

3 A. BLANC-LAPIERRE - Problèmes liés à la détermination des spectres de puissance en théorie des fonctions aléatoires.
Transactions of the 8^{th} Prague Conference on Information Theory ,..., (Prague, 1978) vol. A. 11-25,
Reidel, Dordrecht, 1978.

4 A. BLANC-LAPIERRE, R. BRARD - Les fonctions aléatoires stationnaires et la loi des grands nombres.
Bull. Soc. Math. France, 74 (1946), p. 102-105.

5 A. BLANC-LAPIERRE, R. FORTET - Théorie des fonctions aléatoires.
Masson et Cie, Paris (1953).

6 A. BLANC-LAPIERRE, B. PICINBONO - Fonctions aléatoires.
Coll. Technique et Scientifique des Télécommunications,
Masson, Paris (1981).

7 A. BLANC-LAPIERRE, A. TORTRAT - Sur la loi forte des grands nombres
C.R. Acad. Sc. Paris, 267 A (1968), p. 740-743.

8 S. BOCHNER - Stationarity, boundness, almost periodicity of random-valued functions.
Proc. 3^{rd} Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II, p. 7-27,
University of California Press (1956).

9 D.K. CHANG, M.M. RAO - Bimeasures and nonstationary processes.
Real and stochastic analysis, J. Wiley & S. (1986) p. 7-118.

10 D. DEHAY - On a class of asymptotically stationary harmonizable processes.
J. Multivariate Analysis, 22 (1987).

11 D. DEHAY, R. MOCHÉ - Strongly harmonizable approximations of bounded continuous random fields.
Stochastic Processes and their Applications, 23 (1986), p. 327-331.

12 M.F. DRISCOLL, J.N. McDONALD, N.A. WEISS - LLN for weakly stationary processes on locally compact abelian groups.
Ann. Probability, 2 (1974), p. 1168-1171.

13 N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ - Linear operators, part. I : general theory. Interscience Pub., New-York (1957).

14 D.A. EDWARDS - Vector-valued measure and bounded variation in Hilbert space. Math. Scandinavia, 3 (1955), p. 90-96.

15 I. GÀL, J. KOKSMA - Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables. Proc. Konink. Ned. Akad. v. Wetensh. 53 (1950), p. 638-653.

16 V.F. GAPOSHKIN - Criteria for the strong law of large numbers for some classes of second order stationary processes and homogeous random fields. Th. Probability. Appl. 22 (1977), p. 286-310.

17 V.F. GAPOSHKIN - A theorem on the convergence almost everywhere of a sequence of mesurable functions, and its applications to sequences ot stochastic integrals. Math. USSR. Sbornik, 33 (1977) p. 1-17.

18 E.G. GLADYSHEV - Periodically and almost - periodically correlated random processes with continuous time parameter. Th. Probability. Appl. 8, (1963), p. 173-177.

19 E.J. HANNAN - Multiple time series. John Wiley, New-York (1970).

20 E. HEWITT, K.A. ROSS - Abstract harmonic analysis. Springer-Verlag, Berlin (1963).

21 E. HILLE, R.S. PHILLIPS - Functional analysis and semi-groups A.M.S. Colloquium Publ. 31 (1957).

22 J. KAMPÉ de FÉRIET, F.N. FRENKIEL - Correlation and spectra of nonstationary random functions. Math. Computation, 16 (1962), p. 1-21.

23 I. KLUVÁNEK - Characterization of Fourier-Stieltjes transforms of vector and operator valued measures. Czechoslovak Math. J., 17 (92) 1967, Praha, p. 261-277.

24 H. LEROY PETERSON - Regular and irregular measures on groups and dyadic spaces. Pacific J. Math., 28 (1969), p. 173-182.

25 M. LOÈVE - Probability theory D. Van Nostran Comp., Princeton (1963).

26 A.G. MIAMEE, H. SALEHI - Harmonizability, V-boundness and stationary dilation of stochastic processes. Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), p. 37-50.

27 R. MOCHÉ - Introduction aux processus harmonisables. Lecture Notes, U.E.R. Math. Univ. Sc. Tech. Lille (1985).

28 R. MOCHÉ - Communications personnelles.

29 J. NEVEU - Processus aléatoires gaussiens.
Presses de l'Université de Montréal (1968).

30 H. NIEMI - Stochastic processes as Fourier transforms of stochastic measures.
Ann. Acad. Sc. Fennicae, ser. A.I. Math. 1 (1975), p. 1-47.

31 H. NIEMI - On orthogonally scattered dilations of bounded vector measures.
Ann. Acad. Sc. Fennicae, ser. A.I. Math., 3 (1977), p. 43-52.

32 H. NIEMI - Asymptotic stationarity of nonstationary L^2-processes with applications to linear prediction.
Bol. Soc. Mat. Mexicana, 28 (1983), p. 15-29.

33 E. PARZEN - Spectral analysis of asymptotically stationary time series.
Bull. Inst. Internat. Stat., 39 (1962), p. 87-103.

34 M.M. RAO - Harmonizable processes : Structure theory.
Ens. Math., 28 (1982), p. 295-351.

35 J. ROUSSEAU - La loi forte des grands nombres pour les processus harmonisables.
Ann. Inst. Henri Poincaré, 15 (1979), p. 175-186.

36 Yu.A. ROZANOV - Spectral analysis of abstract functions.
Th. probability Appl., 4 (1959), p. 271-287.

37 Yu.A. ROZANOV - Stationary random processes.
Holden Day, San Francisco (1967).

38 W. RUDIN - Fourier analysis on groups.
Interscience Pub., New-York (1962).

39 W. RUDIN - Real and complex analysis.
Mc Graw - Hill Publ. Comp. New Delhi (1977).

40 R.I. SERFLING - Convergence properties of S_n under moment restrictions.
Ann. Math. Stat., 41 (1970), p. 1235-1248.

41 A. SZEP - The non-orthogonal Menchoff-Rademacher theorem.
Acta Sci. Math. (Hongria), 33 (1972), p. 231-235.

42 I.N. VERBITSKAYA - On conditions for the applicability of the strong law of large numbers to wide sens stationary processes.
Th. Probability Appl., 11 (1966), p. 632-636.

43 A. PIETSCH - P-majorisierbare vektorwertige Maße.
Wiss. Z. Friedrich - Schiller - Univ. Jena Math. - Naturwiss. Reihe, 18 (1969), 243-247.

44 R. ROGGE - Maße mit werten in einem Hilbertraum.
Wiss. Z. Friedrich - Schiller - Univ. Jena Math. - Naturwiss. Reihe, 18 (1969), 253-257.

R E S U M E

Dans la première partie (chap. I et II) l'espace-temps G des processus harmonisables (p.h.) considérés est un groupe l.c.a. On montre au chap. I qu'un tel p.h. peut avoir plusieurs mesures stochastiques spectrales (m.s.s.), par exemple si G n'est pas métrisable, et qu'il convient de se restreindre aux m.s.s. régulières, et au chap. II que l'ensemble des p.h. à densité stochastique spectrale est dense dans l'ensemble des processus continus pour la topologie de la convergence compacte.

Dans les deuxième (chap. III, IV, V) et troisième parties, l'espace-temps est $\mathbb{R}$ et des propriétés asymptotiques des p.h. sont démontrées. Ainsi au chap. III une C.N.S. portant sur la m.s.s. est donnée pour qu'un p.h. vérifie la loi forte des grands nombres. Les chap. IV et V contiennent des raffinements de ce résultat (C.S. maniables et vitesses de convergence de la l.f.g.n.).

La troisième partie porte sur la puissance et le filtrage de certains p.h. : c'est l'espérance de la puissance instantanée qui est utilisée au chap. VI où est démontré que tout p.h. à bimesure sigma-finie est asymptotiquement stationnaire, la mesure spectrale asymptotique étant estimée. Au chap. VII, c'est la puissance du signal (trajectoire) lui-même qui intervient. La m.s.s. est estimée p.s. au moyen de filtrés du signal, et un théorème ergodique en est déduit.

M O T S C L E S

PROCESSUS STOCHASTIQUE
CHAMP ALEATOIRE HARMONISABLE
BIMESURE
MESURE SPECTRALE
APPROXIMATION
LOI GRANDS NOMBRES
FILTRAGE
PUISSANCE MOYENNE